UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837–1921)

Titel: **Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale**

Quelle: Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik : Originalberichte der Verfasser.
Band 2 (1879)
Seite 202 – 223.

Selbstrezension Leo Koenigsbergers zu seinem Lehrbuch:
Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. – Leipzig : Teubner, 1878.

1877 gründete Leo Koenigsberger gemeinsam mit Gustav Zeuner die Zeitschrift *Repertorium der literarischen Arbeiten aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik*, die Mathematikern die Möglichkeit bot, ihre neuen Publikationen in Eigenreferaten vorzustellen.

http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/13259

unabsehbare Zeit hinaus im mathematischen Unterrichte weitaus der meisten Schulen alles beim alten bleiben soll. — Hinsichtlich der speciellen Eigenthümlichkeiten des ersten Theiles wird an dieser Stelle auf den von der Verlagshandlung versendeten Prospect verwiesen.

Waren. V. Schlegel.

L. Koenigsberger: Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale. (Teubner 1878.)

Nachdem ich in den letzten Jahren eine Reihe von Arbeiten über die Theorie der hyperelliptischen Integrale veröffentlicht habe, welche die behandelten Gegenstände theils nur kurz und mit Voraussetzung von Verallgemeinerungen früher gegebener Sätze darstellten, theils auch nur die Resultate einzelner Untersuchungen brachten, hielt ich es für zweckmässig, meine Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen Integrale in zusammenhängender Darstellung zu veröffentlichen, um einerseits auch der Theorie der Integrale an sich und den mit ihnen zusammenhängenden Problemen der Integralrechnung einige Aufmerksamkeit zuzuwenden, andererseits aber auch dieselbe als Basis für eine grössere und eingehendere Bearbeitung der Theorie der hyperelliptischen Functionen benutzen zu können.

Ich will im Folgenden den Inhalt der einzelnen Vorlesungen skizziren und auf die über dieselben Gegenstände angestellten Untersuchungen anderer Mathematiker hinweisen.

Die gesammte Darstellung legt die von Riemann eingeführten Vorstellungen und allgemeinen Sätze aus der Theorie der Functionen, soweit sie in meiner Einleitung zu den „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen" auseinandergesetzt worden, zu Grunde und ist in ihrem ersten Theile nur eine unmittelbare Verallgemeinerung der dort für elliptische Integrale entwickelten Sätze.

Nachdem in der ersten Vorlesung gezeigt worden, dass, wenn $R(z)$ ein Polynom $2p+1^{\text{ten}}$ oder $2p+2^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, sich jede wie $\sqrt{R(z)}$ verzweigte Function rational aus z und $\sqrt{R(z)}$ zusammensetzen lässt, wird die Frage aufgeworfen, ob man für eine zu bildende, in z und $\sqrt{R(z)}$ rationale Function die Unstetigkeiten, welche für gewisse Punkte nur auf einem, für andere auf beiden Blättern stattfinden können, in ihrer Anzahl und Lage beliebig an-

nehmen kann, und man findet, dass, wenn die Function in ϱ Unstetigkeitspunkten in nur einem Blatte von der

$$m_1,\ m_2,\ \ldots\ m_\varrho^{\text{ten}}$$

Ordnung, in σ Unstetigkeitspunkten auf dem einen Blatte von der

$$n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_\sigma^{\text{ten}},$$

auf dem andern Blatte von der

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots\ \nu_\sigma^{\text{ten}}$$

Ordnung, ferner in den Verzweigungspunkten von der

$$\frac{k_1}{2},\ \frac{k_2}{2},\ \ldots\ \frac{k_{2p+1}}{2},\ \frac{k_{2p+2}}{2}^{\text{ten}}$$

Ordnung unendlich sein soll, worin, wenn das Polynom $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, $k_{2p+2}=0$ zu setzen ist, wenn die Function endlich der Bedingung unterworfen wird, dass sie im unendlich entfernten Punkte, wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, auf dem einen Blatte vom τ_1^{ten}, auf dem andern von der τ_2^{ten} Ordnung unendlich wird, während sie, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist, in dem unendlich entfernten Verzweigungspunkte von der $\frac{k}{2}^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich werden soll, — als nothwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer in z und $\sqrt{R(z)}$ rationalen und in der verlangten Weise unstetigen Function die folgenden:

I. wenn $R(z)$ vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade,

$$\sum_1^\varrho{}_r\, m_r + \sum_1^\sigma{}_r\, n_r + \sum_1^{2p+2}{}_r \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \tau_1 - p - 1 \geqq 0,$$

II. wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade,

$$\sum_1^\varrho{}_r\, m_r + \sum_1^\sigma{}_r\, n_r + \sum_1^{2p+1}{}_r \left(\frac{k_r+1}{2}\right) + \left.\begin{array}{l}\left(\frac{k}{2}\right) - p - 1\\ \left(\frac{k}{2}\right) - p\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{wenn } k \text{ gerade,}\\ \text{wenn } k \text{ ungerade,}\end{array}$$

worin

$$\left(\frac{k_r+1}{2}\right)$$

die grösste in $\frac{k_r+1}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet.

Am Schlusse der Vorlesung wird die bekannte Umformung einer in ζ und $\sqrt{\varphi(\zeta)}$ rationalen Function, in welcher $\varphi(\zeta)$ ein Polynom vom $2p+2^{\text{ten}}$ Grade ist, in eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ gegeben, worin $R(z)$ ein ganzes Polynom des $2p+1^{\text{ten}}$ Grades darstellt.

Die zweite Vorlesung beschäftigt sich unter Annahme eines unpaaren Grades $2p+1$ von $R(z)$ mit der Aufstellung der hyperelliptischen Integrale erster, zweiter und dritter Gattung nach den von Riemann für diese drei Gattungen gegebenen Definitionen, und man findet für die stets endlich bleibenden Integrale die schon von Jacobi hervorgehobenen Formen der Integrale erster Gattung

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}, \int \frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \cdots \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}},$$

für das im Punkte z_1, $\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}$, worin ε_1 die positive oder negative Einheit bedeutet, und nur in diesem algebraisch von der ersten Ordnung unendlich werdende Integral zweiter Gattung

$$E(z) = M\int \left[\frac{1}{(z-z_1)^2} + \frac{\frac{R'(z_1)}{2\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}(z-z_1) + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{(z-z_1)^2\sqrt{R(z)}}\right] dz + J(z),$$

worin M eine willkürliche Constante, und $J(z)$ das allgemeine hyperelliptische Integral erster Gattung bedeutet; endlich stellt sich das Integral dritter Gattung, welches für zwei beliebig gewählte Punkte der Fläche z_1 und z_2 logarithmisch unendlich wird und zwar wie die Unstetigkeitsfunctionen

$$A_1 \log(z-z_1) \text{ und } -A_1 \log(z-z_2),$$

in der Form dar

$$\Pi(z) = M\int \left[\frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} + \frac{\frac{\varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z_2-z_1}(z-z_1) + \frac{\varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z_1-z_2}(z-z_2)}{(z-z_1)(z-z_2)\sqrt{R(z)}}\right] dz + J(z)$$

oder

$$\Pi(z) = M\int \left[\frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1 R(z_1)^{\frac{1}{2}}}{z-z_1} - \frac{R(z)^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_2 R(z_2)^{\frac{1}{2}}}{z-z_2}\right] \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + J(z),$$

und das specielle Integral dritter Gattung, in welchem

$$M = \frac{z_1 - z_2}{2},$$

oder in welchem die Coefficienten der logarithmischen Glieder die positive oder die negative Einheit sind, wird das hyperelliptische Hauptintegral dritter Gattung genannt.

Die Form des Integrals zeigt unmittelbar, dass, wie Riemann für alle Abel'schen Integrale hervorhebt, und Weierstrass schon früher für die hyperelliptischen Integrale ausgesprochen, dass sich das allgemeine hyperelliptische Integral zweiter Gattung mit dem Discontinuitätspunkte erster Ordnung z_1 von einem Integrale erster

Gattung abgesehen als das Product einer Constanten in den nach z_1 genommenen Differentialquotienten eines hyperelliptischen Hauptintegrales dritter Gattung darstellen lässt, dessen zweiter logarithmischer Unstetigkeitspunkt ein völlig willkürlicher ist.

Aus diesen Integralen der drei Gattungen wird in der dritten Vorlesung die analytische Form desjenigen hyperelliptischen Integrales hergeleitet, welches in den ν Punkten $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ und zwar in z_α wie

$$A_\alpha \log(z - z_\alpha) + B_\alpha (z - z_\alpha)^{-1} + C_\alpha (z - z_\alpha)^{-2} + \cdots + K_\alpha (z - z_\alpha)^{-k_\alpha}$$

unendlich wird, wobei die zur Existenz eines hyperelliptischen Integrales nothwendige Bedingung, wie sie Riemann für alle Abel'schen Integrale gibt,

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu = 0$$

vorausgesetzt wird; es bleiben in dem aus hyperelliptischen Integralen dritter Gattung und deren nach den Unstetigkeitspunkten genommenen Differentialquotienten der verschiedenen Ordnungen noch die Coefficienten der oben aufgestellten Fundamentalintegrale erster Gattung unbestimmt, und es wird gezeigt, dass man diese Coefficienten so bestimmen kann, dass das hyperelliptische Integral gegebene reelle Theile der $2p$ Periodicitätsmoduln oder gegebene p Periodicitätsmoduln an den a- oder an den b-Querschnitten besitzt; zugleich folgt aber auch, dass jede andere Function, welche alle diese Eigenschaften, welche die Unstetigkeitswerthe und Periodicitätsmoduln betreffen, mit dem hyperelliptischen Integrale gemein hat, sich von eben diesem Integrale nur um eine additive Constante unterscheiden kann. Dieser Satz ist für die vorgelegte Fläche die Darstellung und wirkliche Ausführung des von Riemann in die Functionentheorie eingeführten Dirichlet'schen Princips.

Nachdem noch die Form der in den Verzweigungspunkten algebraisch und logarithmisch unendlich werdenden Integrale aufgestellt worden, wird noch eine in dem oben gegebenen Beweise des Dirichlet'schen Princips gebliebene Lücke ausgefüllt, nämlich der Nachweis des Satzes, dass die Determinante des zur Bestimmung der Coefficienten der ersten Integrale aufgestellten linearen Gleichungssystems nicht verschwinden kann, und zwar wird, wie Riemann ebenfalls für alle Abel'schen Integrale nachgewiesen und Neumann für die hyperelliptischen Integrale ausgeführt hat, gezeigt, dass, wenn die Periodicitätsmoduln eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung

$$\int \frac{C_0 + C_1 z + C_2 z^2 + \cdots + C_{p-1} z^{p-1}}{\sqrt{R(z)}}\, dz$$

an den Querschnitten a_k in bestimmter Ueberschreitungsrichtung mit $\alpha_k + \gamma_k i$, an den Querschnitten b_k mit $\beta_k + \delta_k i$ bezeichnet werden, die Ungleichheit besteht

$$\sum_1^p {}_\nu (\alpha_\nu \delta_\nu - \beta_\nu \gamma_\nu) > 0.$$

Endlich werden in dieser Vorlesung noch die Periodicitätsmoduln durch Integrale, welche zwischen den Verzweigungspunkten auf der einfach zusammenhängenden Riemann'schen Fläche oder gradlinig zwischen diesen verlaufen, ausgedrückt, wie es zuerst von Prym in seiner „Theorie der Functionen in einer zweiblättrigen Fläche" geschehen.

Die vierte Vorlesung beschäftigt sich mit der Reduction der allgemeinen hyperelliptischen Integrale auf drei Arten von Normalintegralen nach der von Weierstrass für elliptische Integrale in seinen Vorlesungen angegebenen Methode und führt, wenn $z_1, z_2, \ldots z_n$ die Unstetigkeitspunkte der Function $F(z)$ bedeuten, zu dem Resultate

$$\int \frac{F(z)dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$= C_1 \int \frac{\sqrt{R(z_1)}dz}{(z-z_1)\sqrt{R(z)}} + C_2 \int \frac{\sqrt{R(z_2)}dz}{(z-z_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + C_n \int \frac{\sqrt{R(z_n)}dz}{(z-z_n)\sqrt{R(z)}}$$

$$+ l^{(0)} \int \frac{z^{2p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + l^{(1)} \int \frac{z^{2p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ k^{(p)} \int \frac{z^{p-1}dz}{\sqrt{R(z)}} + k^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2}dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$+ f(z)\sqrt{R(z)},$$

worin

$$\int \frac{z^{p-\alpha}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ein Integral erster Gattung,

$$\int \frac{z^{p+\alpha}dz}{\sqrt{R(z)}}$$

ein im unendlich entfernten Verzweigungspunkte von der $2\alpha + 1^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich werdendes Integral, endlich

$$\int \frac{dz}{(z-z_\varrho)\sqrt{R(z)}}$$

ein in $z = z_\varrho$ und zwar auf beiden Blättern logarithmisch unendlich werdendes Integral bedeutet; die Coefficienten der obigen Normalintegrale sind mit Anwendung des bekannten Zeichens für den Coefficienten einer bestimmten Potenz einer Reihenentwicklung durch die Ausdrücke bestimmt:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = C_\alpha$$

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = l_\alpha^{(r)}, \qquad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = l_0^{(r)},$$

worin $r = 0, 1, \ldots p-1$,

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = k_\alpha^{(r)}, \qquad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = k_0^{(r)},$$

wenn $r = p, p+1, \ldots 2p-1$, ferner

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} = f_\alpha(z), \qquad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = f_0(z),$$

wenn

$$l_1^{(r)} + l_2^{(r)} + \cdots + l_n^{(r)} - l_0^{(r)} = l^{(r)}$$

$$k_1^{(r)} + k_2^{(r)} + \cdots + k_n^{(r)} - k_0^{(r)} = k^{(r)}$$

$$f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) - f_0(z) = f(z)$$

gesetzt wird, und

$$R(z) = A_0 z^{2p+1} + B_0 z^{2p} + B_1 z^{2p-1} + \cdots + B_{2p-1} z + B_{2p},$$

$$F_r(t) = \frac{2p-2r-1}{2} A t^r + \frac{2p-2r}{2} B_0 t^{r-1} + \frac{2p-2r+1}{2} B_1 t^{r-2} + \cdots$$
$$+ \frac{2p-r-2}{2} B_{r-2} t + \frac{2p-r-1}{2} B_{r-1}$$

ist.

Eine genauere Discussion der Coefficienten der Normalintegrale führt zu dem Resultat, dass, wenn z_α einer der Verzweigungswerthe ist, $C_\alpha = 0$ wird, dass ferner das vorgelegte Integral gar kein Integral erster Gattung enthält, wenn $F(z)$ für keine Wurzel von $R(z)$ unendlich wird, in seinen Discontinuitätspunkten von der ersten Ordnung unendlich gross und zu gleicher Zeit echt gebrochen ist, dass ferner die in den Verzweigungswerthen algebraisch unendlich werdenden in der obigen Reductionsformel vorkommenden Normal-

integrale fehlen, wenn $F(z)$ für keine Lösung von $R(z)$ unendlich wird, für seine Discontinuitätspunkte von der ersten Ordnung unendlich gross, und der Grad des Zählers kleiner ist als der um p Einheiten vermehrte Grad des Nenners, dass endlich $f(z)$ eine rationale Function von z und z_α darstellt, welche verschwindet, wenn $F(z)$ in z_α von der ersten Ordnung unendlich wird, während die rationale Function $f_0(z)$ Null wird, wenn der Grad des Zählers nicht mindestens den des Nenners um die Zahl $2p$ übertrifft.

Endlich wird noch auf Grund dieser Reductionsformel eine für alle hyperelliptischen Integrale geltende Beziehung abgeleitet, die von Hermite und Thomae für die elliptischen Integrale erkannt worden, wonach, wenn

$$\int \frac{z^n dz}{\sqrt{R(z)}} = l_n^{(0)} \int \frac{z^{2p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + l_n^{(1)} \int \frac{z^{2p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + l_n^{(p-1)} \int \frac{z^p dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ k_n^{(p)} \int \frac{z^{p-1} dz}{\sqrt{R(z)}} + k_n^{(p+1)} \int \frac{z^{p-2} dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + k_n^{(2p-1)} \int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$$
$$+ f_n(z) \sqrt{R(z)}$$

gesetzt wird, zwischen den Coefficienten l und k dieser Reductionsformel und den Coefficienten der um den unendlich entfernten Punkt gültigen Reihenentwicklung bestimmter Integrale die Beziehung besteht: wenn $r = 0, 1, 2, \ldots p-1$

$$\int_\infty \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} = -(t^{r-2p} + m_1 t^{r-2p-1} + \cdots + m_{r-1} t^{-2p}) \sqrt{R(t)}$$
$$- \sqrt{R(t)} \sum_0^\infty {}^\nu l_{2p+\nu}^{(r)} t^{-2p-\nu-1}$$

und, wenn $r = p, p+1, \ldots 2p-1$,

$$\int_\infty \frac{F_r(t) dt}{\sqrt{R(t)}} = -(n_0 t^{r-2p} + n_1 t^{r-2p-2} + \cdots + n_{r-1} t^{-2p}) \sqrt{R(t)}$$
$$- \sqrt{R(t)} \sum_0^\infty {}^\nu k_{2p-\nu}^{(r)} t^{-2p-\nu-1}.$$

Am Schlusse der Vorlesung wird das hyperelliptische Integral durch die lineare Transformation

$$\zeta = \frac{z - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

in die Form

$$\int F\left(\zeta, \sqrt{\zeta(1-\zeta)(1-\varkappa_1^2 \zeta)(1-\varkappa_2^2 \zeta) \cdots (1-\varkappa_{2p-1}^2 \zeta)}\right) d\zeta$$

umgesetzt.

Die von Legendre aufgestellte Beziehung zwischen den Periodicitätsmoduln der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung wurde bekanntlich von Weierstrass für alle hyperelliptischen Integrale erweitert, und Riemann führte zur Herleitung einer Beziehung für die Perioden der Abel'schen Integrale erster Gattung die Methode der Integration von

$$\int w dw'$$

ein, worin w und w' Abel'sche Integrale erster Gattung bedeuten, und die Integration über die gesammte Begränzung der Riemann'schen Fläche auszuführen ist; Clebsch und Gordan dehnen diese Methode auf zwei Integrale dritter Gattung aus, um unter anderem den Satz von der Vertauschung der Parameter und Unstetigkeitswerthe herzuleiten. In der fünften Vorlesung werden zwei allgemeine hyperelliptische Integrale

$$J(z, z_\alpha) \text{ und } J(z, \zeta_\alpha)$$

zu Grunde gelegt, von denen das erste in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_\mu, z_1, z_2, \ldots z_m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}, \infty$$

unendlich werden soll, wie die Functionen

$$\mathfrak{A}_\varrho \log(z-\mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}_\varrho}$$

$$A_\varrho \log(z-z_\varrho) + B_\varrho(z-z_\varrho)^{-1} + C_\varrho(z-z_\varrho)^{-2} + \cdots + K_\varrho(z-z_\varrho)^{-k_\varrho}$$

$$a_\varrho \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots + h_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho}{2}}$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M_1 z^{\frac{1}{2}} + M_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}},$$

das zweite in den Punkten

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_\mu, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}, \infty$$

wie die Functionen

$$\mathfrak{A}'_\varrho \log(z-\mathfrak{z}_\varrho) + \mathfrak{B}'_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-1} + \mathfrak{C}'_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-2} + \cdots + \mathfrak{K}'_\varrho(z-\mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{k}'_\varrho}$$

$$A'_\varrho \log(z-\zeta_\varrho) + B'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-1} + C'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-2} + \cdots + K'_\varrho(z-\zeta_\varrho)^{-k'_\varrho}$$

$$a'_\varrho \log(z-\alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + b'_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{1}{2}} + c'_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{2}{2}} + \cdots + h'_\varrho(z-\alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda'_\varrho}{2}}$$

$$M'_0 \log z^{\frac{1}{2}} + M'_1 z^{\frac{1}{2}} + M'_2 z^{\frac{2}{2}} + \cdots + M'_\delta z^{\frac{\delta'}{2}},$$

und das Integral

$$\int J(z, z_\alpha) dJ(z, \zeta_\alpha)$$

ausgedehnt über die gesammte Begränzung der einfach zusammenhängenden Fläche, welche aus der durch die bekannten Querschnitte

$$a_1, a_2, \ldots a_p, b_1, b_2, \ldots b_p, c_1, c_2, \ldots c_{p-1}$$

zerlegten Riemann'schen Fläche von $\sqrt{R(z)}$ durch neue

$$\mu + m + n + 2p + 2$$

Querschnitte entsteht, welche jeden der die Punkte

$$\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots \mathfrak{z}_\mu, z_1, z_2, \ldots z_m, \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$$

umschliessenden unendlich kleinen einfachen Kreise und jeden der die Punkte

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2p+1}, \infty$$

umgebenden unendlich kleinen Doppelkreise mit demselben Punkte A der früher erhaltenen Begränzung verbinden.

Man findet, dass, wenn das Resultat der Integration ein endliches sein soll, $J(z, z_\alpha)$ in $\mathfrak{z}_\varrho$ nur algebraisch unendlich werden darf; nimmt man sodann die Entwicklung der Function $J(z, z_\alpha)$ in der Nähe der in Betracht kommenden singulären Punkte in der Form an

$$\mathfrak{A}_\varrho \log(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \cdots + \mathfrak{K}_\varrho (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{l}_\varrho} + m_0^{(\varrho)} + m_1^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \cdots$$
$$+ m_{\mathfrak{l}_\varrho'}^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho)^{\mathfrak{l}_\varrho'} + \cdots$$

$$A_\varrho \log(z - z_\varrho) + \cdots + K_\varrho (z - z_\varrho)^{-\mathfrak{l}_\varrho} + \cdots$$

$$p_0^{(\varrho)} + p_1^{(\varrho)}(z - \zeta_\varrho) + p_2^{(\varrho)}(z - \zeta_\varrho)^2 + \cdots + p_{k_\varrho'}^{(\varrho)}(z - \zeta_\varrho)^{k_\varrho'} + \cdots$$

$$a_\varrho \log(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \cdots + h_\varrho (z - \alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho}{2}} + \mu_0^{(\varrho)} + \mu_1^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \cdots$$
$$+ \mu_{\lambda_\varrho'}^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{\lambda_\varrho'}{2}} + \cdots$$

$$M_0 \log z^{\frac{1}{2}} + \cdots + M_\delta z^{\frac{\delta}{2}} + P_0 + P_1 z^{-\frac{1}{2}} + \cdots + P_{\delta'} z^{-\frac{\delta'}{2}} + \cdots,$$

die von $J(z, \zeta_\alpha)$ in der Form

$$\mathfrak{A}_\varrho' \log(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \cdots + \mathfrak{K}_\varrho' (z - \mathfrak{z}_\varrho)^{-\mathfrak{l}_\varrho'} + n_0^{(\varrho)} + n_1^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho) + \cdots$$
$$+ n_{\mathfrak{l}_\varrho}^{(\varrho)}(z - \mathfrak{z}_\varrho)^{\mathfrak{l}_\varrho} + \cdots$$

$$\pi_0^{(\varrho)} + \pi_1^{(\varrho)}(z - z_\varrho) + \pi_2^{(\varrho)}(z - z_\varrho)^2 + \cdots + \pi_{k_\varrho}^{(\varrho)}(z - z_\varrho)^{k_\varrho} + \cdots$$

$$A_\varrho' \log(z - \zeta_\varrho) + \cdots + K_\varrho'(z - \zeta_\varrho)^{-k_\varrho'}$$

$$a_\varrho' \log(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \cdots + h_\varrho'(z - \alpha_\varrho)^{-\frac{\lambda_\varrho'}{2}} + \nu_0^{(\varrho)} + \nu_1^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{1}{2}} + \cdots$$
$$+ \nu_{\lambda_\varrho}^{(\varrho)}(z - \alpha_\varrho)^{\frac{\lambda_\varrho}{2}} + \cdots$$

$$M_0' \log z^{\frac{1}{2}} + \cdots + M_{\delta'}' z^{\frac{\delta'}{2}} + P_0' + P_1' z^{-\frac{1}{2}} + \cdots + P_\delta' z^{-\frac{\delta}{2}} + \cdots,$$

und bezeichnet die Stetigkeitssprünge von

$$J(z,\ z_\alpha) \text{ an } a_k \text{ mit } J_{a_k},\ \text{an } b_k \text{ mit } J_{b_k},$$

von

$$J(z,\ \zeta_\alpha) \text{ an } a_k \text{ mit } I_{a_k},\ \text{an } b_k \text{ mit } I_{b_k},$$

so erhält man die nachfolgende allgemeine Periodenrelation

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_1^p{}_\nu (J_{a_\nu} I_{b_\nu} - J_{b_\nu} I_{a_\nu}) = -\sum_1^\mu{}_\varrho \Big[n_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}_\varrho + 2n_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}_\varrho + \cdots + \mathfrak{k}_\varrho n_{\mathfrak{k}_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}_\varrho$$

$$+ m_0^{(\varrho)}\mathfrak{A}'_\varrho - m_1^{(\varrho)}\mathfrak{B}'_\varrho - 2m_2^{(\varrho)}\mathfrak{C}'_\varrho - \cdots - \mathfrak{k}'_\varrho m_{\mathfrak{k}'_\varrho}^{(\varrho)}\mathfrak{K}'_\varrho\Big]$$

$$-\sum_1^n{}_\varrho\Big[p_0^{(\varrho)}A'_\varrho - p_1^{(\varrho)}B'_\varrho - 2p_2^{(\varrho)}C'_\varrho - \cdots - k'_\varrho p_{k'_\varrho}^{(\varrho)}K'_\varrho\Big]$$

$$-\sum_1^m{}_\varrho\Big[\pi_1^{(\varrho)}B_\varrho + 2\pi_2^{(\varrho)}C_\varrho + \cdots + k_\varrho\pi_{k_\varrho}^{(\varrho)}K_\varrho\Big] + \sum_1^m{}_\varrho A_\varrho \int_A^{z_\varrho} dJ(z,\ \zeta_\alpha)$$

$$-\sum_1^{2p+1}{}_\varrho\Big[b_\varrho\nu_1^{(\varrho)} + 2c_\varrho\nu_2^{(\varrho)} + \cdots + \lambda_\varrho h_\varrho\nu_{\lambda_\varrho}^{(\varrho)}$$

$$+ a'_\varrho\mu_0^{(\varrho)} - b'_\varrho\mu_1^{(\varrho)} - 2c'_\varrho\mu_2^{(\varrho)} - \cdots - \lambda'_\varrho h'_\varrho\mu_{\lambda'_\varrho}^{(\varrho)}\Big]$$

$$+\sum_1^{2p+1}{}_\varrho a_\varrho\int_A^{\alpha_\varrho} dJ(z,\zeta_\alpha) - 2\pi i\sum_1^{2p+1}{}_\varrho a'_\varrho(A_1+A_2+\cdots+A_m+a_1+a_2+\cdots+a_{\varrho-1})$$

$$-[P_0M_0' + P_1M_1' + P_2M_2' + 3P_3M_3' + \cdots$$

$$+ \delta' P_{\delta'}M'_{\delta'} - P'_1M_1 - 2P'_2M_2 - \cdots - \delta P'_\delta M_\delta]$$

$$-2\pi i M'_0(A_1+A_2+\cdots+A_m+a_1+a_2+\cdots+a_{2p+1}) - M_0\int_A^\infty dJ(z,\zeta_\alpha),$$

worin, wenn a_ϱ oder M_0 von Null verschieden,

$$a'_\varrho = b'_\varrho = \cdots = h'_\varrho = 0 \quad \text{resp. } M'_0 = M'_1 = \cdots = M'_{\delta'} = 0$$

anzunehmen sind.

Specialisirungen der gefundenen Periodenrelation liefern den Satz, dass zwei Hauptintegrale dritter Gattung, bei denen die Gränzen des einen die Parameter des andern sind, eine nur von den Periodicitätsmoduln abhängige Differenz besitzen, und dass sich ein Hauptintegral, welches an den p Querschnitten $a_1, a_2, \ldots a_p$ den Periodicitätsmodul Null hat, nicht ändert, wenn die Gränzen mit den Unstetigkeitspunkten vertauscht werden, ein schon von Jacobi bewiesenes Theorem.

Für zwei Integrale erster Gattung

$$J^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p-\alpha-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}, \quad J^{(\beta)}(z) = \int \frac{z^{p-\beta-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

folgt aus der obigen allgemeinen Beziehung die Periodenrelation

$$\sum_1^p{}_\nu \left(J^{(\alpha)}_{a_\nu} J^{(\beta)}_{b_\nu} - J^{(\alpha)}_{b_\nu} J^{(\beta)}_{a_\nu}\right) = 0,$$

und für Integrale erster und zweiter Gattung, wenn

$$E^{(\alpha)}(z) = \int \frac{z^{p+\alpha}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

gesetzt wird, und die Entwicklung der Integrale $J^{(\beta)}(z)$ und $E^{(\alpha)}(z)$ in der Umgebung des unendlich entfernten Punktes in der Form angenommen wird

$$E^{(\alpha)}(z) = M_{2\alpha+1} z^{\frac{2\alpha+1}{2}} + M_{2\alpha-1} z^{\frac{2\alpha-1}{2}} + \cdots + M_1 z^{\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$J^{(\beta)}(z) = P'_{2\beta+1} z^{\frac{-2\beta-1}{2}} + P'_{2\beta+3} z^{\frac{-2\beta-3}{2}} + \cdots,$$

also, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{R(z)}} = z^{-p-\frac{1}{2}} \left\{f_0 + f_1 z^{-1} + f_2 z^{-2} + \cdots\right\}$$

gesetzt wird,

$$M_{2\alpha+1} = \frac{2f_0}{2\alpha+1}, \quad M_{2\alpha-1} = \frac{2f_1}{2\alpha-1}, \quad M_{2\alpha-3} = \frac{2f_2}{2\alpha-3}, \cdots$$

$$P'_{2\beta+1} = -\frac{2f_0}{2\beta+1}, \quad P'_{2\beta+3} = -\frac{2f_1}{2\beta+3}, \quad P'_{2\beta+5} = -\frac{2f_2}{2\beta+5}, \cdots$$

ist, die Periodenbeziehung:

I. $\alpha \geqq \beta$

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_1^p{}_\nu \left(E^{(\alpha)}_{a_\nu} J^{(\beta)}_{b_\nu} - E^{(\alpha)}_{b_\nu} J^{(\beta)}_{a_\nu}\right)$$

$$= (2\beta+1) P'_{2\beta+1} M_{2\beta+1} + (2\beta+3) P'_{2\beta+3} M_{2\beta+3} + \cdots + (2\alpha+1) P'_{2\alpha+1} M_{2\alpha+1}$$

und

II. $\alpha < \beta$

$$\sum_1^p{}_\nu \left(E^{(\alpha)}_{a_\nu} J^{(\beta)}_{b_\nu} - E^{(\alpha)}_{b_\nu} J^{(\beta)}_{a_\nu}\right) = 0.$$

Endlich wird noch der Werth derjenigen Determinante untersucht, welche aus sämmtlichen Periodicitätsmoduln der $2p$ Integrale $J^{(\beta)}(z)$ und $E^{(\alpha)}(z)$ gebildet ist, und der später bei der Reduction

der hyperelliptischen Integrale auf niedere Transcendente zur Anwendung kommt. Dieser Werth ist zuerst von Fuchs für den Fall complexer Verzweigungswerthe von $\sqrt{R(z)}$ mit Hülfe der Differentialgleichungen, welchen die Periodicitätsmoduln der hyperelliptischen Integrale genügen, hergeleitet worden, ich wähle hier einen andern Weg, indem ich zuerst zeige, dass die Determinante eine eindeutige Function der Verzweigungswerthe ist, und indem ich nachweise, dass sie nie verschwinden kann, folgt aus einem bekannten Satze der Functionentheorie, dass die Determinante eine constante, von den Verzweigungswerthen unabhängige Grösse ist. Der constante Werth selbst wird, wie auch Fuchs gethan, durch die einfachsten hyperelliptischen Integrale derselben Ordnung also durch die Integrale mit der Irrationalität

$$\sqrt{z^{2p+1}-1}$$

bestimmt werden, und diese Bestimmung führe ich, um eine Anwendung der vorher entwickelten Periodenrelationen zu geben, mit Hülfe der früheren Formeln für die Verbindungen der Perioden der hyperelliptischen Integrale erster und zweiter Gattung aus; es ergiebt sich das für reelle Verzweigungswerthe schon längst bekannte Resultat

$$\begin{vmatrix} J^{(0)}_{b_1} & J^{(0)}_{a_1} & J^{(0)}_{b_2} & J^{(0)}_{a_2} & \dots & J^{(0)}_{b_p} & J^{(0)}_{a_p} \\ J^{(1)}_{b_1} & J^{(1)}_{a_1} & J^{(1)}_{b_2} & J^{(1)}_{a_2} & \dots & J^{(1)}_{b_p} & J^{(1)}_{a_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ J^{(p-1)}_{b_1} & J^{(p-1)}_{a_1} & J^{(p-1)}_{b_2} & J^{(p-1)}_{a_2} & \dots & J^{(p-1)}_{b_p} & J^{(p-1)}_{a_p} \\ E^{(p)}_{b_1} & E^{(p)}_{a_1} & E^{(p)}_{b_2} & E^{(p)}_{a_2} & \dots & E^{(p)}_{b_p} & E^{(p)}_{a_p} \\ E^{(p+1)}_{b_1} & E^{(p+1)}_{a_1} & E^{(p+1)}_{b_2} & E^{(p+1)}_{a_2} & \dots & E^{(p+1)}_{b_p} & E^{(p+1)}_{a_p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ E^{(2p-1)}_{b_1} & E^{(2p-1)}_{a_1} & E^{(2p-1)}_{b_2} & E^{(2p-1)}_{a_2} & \dots & E^{(2p-1)}_{b_p} & E^{(2p-1)}_{a_p} \end{vmatrix} = \frac{(-1)^{\frac{p}{2}} 2^{3p} \pi^p}{1.3..(2p-1)}.$$

Die sechste Vorlesung behandelt das Abel'sche Theorem der hyperelliptischen Integrale zunächst für Integrale erster und dritter Gattung und leitet hieraus mit Hülfe der in der dritten Vorlesung ausgeführten Bildungsweise des allgemeinen Integrales aus den Integralen dieser beiden Gattungen den Abel'schen Satz in der nachfolgenden Form ab: Bezeichnet

$$J(z, c_1, c_2, \dots c_r)$$

ein hyperelliptisches Integral, welches in c_ϱ unendlich wird wie

$$A_\varrho \log(z-c_\varrho) + B_\varrho(z-c_\varrho)^{-1} + C_\varrho(z-c_\varrho)^{-2} + \cdots + M_\varrho(z-c_\varrho)^{-m_\varrho},$$

so wird sich die Summe von $2m$ solchen gleichartigen hyperelliptischen Integralen, deren obere Gränzen die Lösungen $z_1, z_2, \ldots z_{2m}$ der Gleichung

$$p^2 - q^2 R(z) = 0,$$

und deren untere Gränzen $z_1', z_2', \ldots z_{2m}'$ die Lösungen der Gleichung

$$p_1^2 - q_1^2 R(z) = 0$$

sind, worin p und p_1 beliebige ganze Polynome m^{ten} Grades, q und q_1 beliebige ganze Polynome höchstens vom $m-p-1^{\text{ten}}$ Grade sind, durch den Ausdruck darstellen lassen

$$\begin{aligned}\sum_1^{2m}{}_\alpha \int_{z_\alpha'}^{z_\alpha} dJ(z, c_1, c_2, \ldots c_\nu) = &\sum_1^\nu{}_\varrho A_\varrho \log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\} \\ &- \sum_1^\nu{}_\varrho B_\varrho \frac{d}{dc_\varrho} \log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\} \\ &- \sum_1^\nu{}_\varrho \frac{C_\varrho}{1} \frac{d^2}{dc_\varrho^2} \log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\} \\ &- \cdots - \sum_1^\nu{}_\varrho \frac{M_\varrho}{1\cdot 2\cdots(m_\varrho - 1)} \frac{d^{m_\varrho}}{dc_\varrho^{m_\varrho}} \log\left\{\frac{p(c_\varrho) - q(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}{p_1(c_\varrho) - q_1(c_\varrho)\varepsilon_\varrho\sqrt{R(c_\varrho)}}\right\},\end{aligned}$$

worin der Werth der zu den einzelnen z-Werthen gehörigen Irrationalität durch die Gleichung

$$\sqrt{R(z)} = \frac{p(z)}{q(z)}$$

bestimmt ist.

In anderer Form lässt sich dieses Resultat auch so aussprechen, dass sich $2m-p$ gleichartige hyperelliptische Integrale zu p eben solchen Integralen vereinigen lassen, deren Gränzen Lösungen von Gleichungen p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten rational aus den $2m-p$ willkührlich angenommenen Gränzen und zugehörigen Irrationalitäten zusammengesetzt sind, und deren Irrationalitäten sich mit Hülfe der willkührlich angenommenen Gränzen und Irrationalitäten rational durch die entsprechende Gränze ausdrücken.

Schliesslich wird noch der Fall der gleichen Integralgränzen auf den früheren zurückgeführt.

Nachdem gezeigt worden, dass einer additiven Verbindung gleichartiger hyperelliptischer Integrale eine algebraische Beziehung

zwischen den oberen Gränzen dieser Integrale entsprechen kann, wird in der siebenten Vorlesung die Betrachtung auf die allgemeinsten algebraischen Beziehungen ausgedehnt, welche zwischen hyperelliptischen Integralen überhaupt bestehen können, sie mögen gleichartig oder ungleichartig sein, d. h. zu derselben oder verschiedenen Riemann'schen Flächen gehören, wenn auch zwischen den Gränzen dieser Integrale algebraische Beziehungen stattfinden sollen.

Es wird der Nachweis geführt, dass die allgemeinste Form einer algebraischen Beziehung zwischen n Integralen eine lineare Function dieser Integrale ist, deren Coefficienten constante Grössen sind, vermehrt um eine Grösse, welche von den Integralen frei ist, aber von den unabhängigen Variabeln algebraisch abhängen wird, und diese lineare Beziehung wird nun der weiteren Untersuchung zu Grunde gelegt.

Durch Erweiterung einer von Abel in der Transformationstheorie der elliptischen Integrale angewandten Methode wird gezeigt, dass die Beziehungsgleichung

$$\begin{aligned}
&\int^{z_{2p+1}^{(1)}} F_{2p+1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(1)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_{2p+1}^{(2)}} F_{2p+1}^{(2)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+\int^{z_{2p+1}^{(a)}} F_{2p+1}^{(a)}\left(z, \sqrt{R_{2p+1}^{(a)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_{2p-1}^{(1)}} F_{2p-1}^{(1)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(1)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_{2p-1}^{(2)}} F_{2p-1}^{(2)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+\int^{z_{2p-1}^{(b)}} F_{2p-1}^{(b)}\left(z, \sqrt{R_{2p-1}^{(b)}(z)}\right) dz \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&+\int^{z_3^{(1)}} F_3^{(1)}\left(z, \sqrt{R_3^{(1)}(z)}\right) dz \\
&+\int^{z_3^{(2)}} F_3^{(2)}\left(z, \sqrt{R_3^{(2)}(z)}\right) dz + \cdots \\
&+\int^{z_3^{(r)}} F_3^{(r)}\left(z, \sqrt{R_3^{(r)}(z)}\right) dz \\
&= u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \cdots + A_\nu \log v_\nu ,
\end{aligned}$$

in welcher

$$R^{(\varrho)}_{2p+1}(z) = (z-\alpha^{(\varrho)}_1)(z-\alpha^{(\varrho)}_2)\cdots(z-\alpha^{(\varrho)}_{2p+1})$$
$$R^{(\varrho)}_{2p-1}(z) = (z-\beta^{(\varrho)}_1)(z-\beta^{(\varrho)}_2)\cdots(z-\beta^{(\varrho)}_{2p-1})$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

ferner

$$F(z, \sqrt{R(z)})$$

eine rationale Function von z und $\sqrt{R(z)}$ bedeutet, endlich,

$$u, v_1, v_2, \ldots v_r$$

algebraische Functionen von

$$z^{(1)}_{2p+1}\cdots z^{(a)}_{2p+1}, \quad z^{(1)}_{2p-1}\cdots z^{(b)}_{2p-1}, \quad \ldots z^{(1)}_3 \ldots z^{(r)}_3$$

vorstellen, reducirt werden kann auf die ihr völlig aequivalente

$$\delta\int^{z^{(1)}_{2p+1}} F^{(1)}_{2p+1}\left(z, \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z)}\right)dz$$
$$= -\sum_1^{p-h}{}^{\alpha}\int^{\zeta^{(g+1)}_{2p-2h+1}} F^{(g+1)}_{2p-2h+1}\left(z, \sqrt{R^{(g+1)}_{2p-2h+1}(z)}\right)dz - \cdots$$
$$-\sum_1^{p-h}{}^{\alpha}\int^{\zeta^{(k)}_{2p-2h+1}} F^{(k)}_{2p-2h+1}\left(z, \sqrt{R^{(k)}_{2p-2h+1}(z)}\right)dz$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-\sum_1^{1}{}^{\alpha}\int^{\zeta^{(1)}_3} F^{(1)}_3\left(z, \sqrt{R^{(1)}_3(z)}\right)dz - \cdots$$
$$-\sum_1^{1}{}^{\alpha}\int^{\zeta^{(r)}_3} F^{(r)}_3\left(z, \sqrt{R^{(r)}_3(z)}\right)dz$$
$$+ U' + B_1' \log V_1' + B_2' \log V_2' + \cdots + B_\varrho' \log V_\varrho',$$

worin die zu je einer Summe gehörigen ζ-Werthe Lösungen von Gleichungen des durch die obere Gränze des Summationszeichens gegebenen Grades sind, deren Coefficienten rational aus den Grössen

$$z^{(1)}_{2p+1} \text{ und } \sqrt{R^{(1)}_{2p+1}(z^{(1)}_{2p+1})}$$

zusammengesetzt sind, und die Irrationalitäten sich mit Hülfe eben dieser Grössen rational durch die zugehörige ζ-Grösse ausdrücken lassen, während

$$U_1', V_1', V_2', \ldots V_\sigma'$$

rationale Functionen eben dieser Grössen sind.

Eine Reihe der eben charakterisirten Werthe, welche einer Gleichung

$$y^\sigma + f_1(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, y^{\sigma-1} + \cdots + f_{\sigma-1}(z_1, \sqrt{R(z_1)})\, y + f_\sigma(z_1, \sqrt{R(z_1)}) = 0$$

genügen, und für welche

$$\sqrt{R_1(y_\alpha)}$$

sich als rationale Function von z_1, $\sqrt{R(z_1)}$ und y_α darstellen lässt, hat weiter die Eigenschaft, dass sie ein System von Differentialgleichungen der Form befriedigen

$$\frac{dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_0(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\frac{y_1\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_1(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{y_1^{\sigma-1}\,dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{y_2^{\sigma-1}\,dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}} + \cdots + \frac{y_\sigma^{\sigma-1}\,dy_\sigma}{\sqrt{R_1(y_\sigma)}} = \frac{F_{\sigma-1}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}},$$

also eine Transformationsbeziehung der zugehörigen Integrale erster Gattung liefern, oder wenn σ nicht kleiner als p ist, dem Systeme

$$\frac{dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$
$$= \frac{f_0(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_0(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_0(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

$$\frac{z_1\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$
$$= \frac{f_1(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_1(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_1(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{z_1^{p-1}\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}} + \frac{z_2^{p-1}\,dz_2}{\sqrt{R(z_2)}} + \cdots + \frac{z_p^{p-1}\,dz_p}{\sqrt{R(z_p)}}$$
$$= \frac{f_{p-1}(Y_1)\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{f_{p-1}(Y_2)\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{f_{p-1}(Y_\sigma)\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}},$$

in welchen

$$Y_1,\ Y_2,\ \cdots\ Y_\sigma$$

die Lösungen einer Gleichung σ^{ten} Grades sein sollen, deren Coefficienten rational und symmetrisch aus

$$z_1,\ z_2,\ \cdots\ z_p,\ \sqrt{R(z_1)},\ \sqrt{R(z_2)},\ \cdots\ \sqrt{R(z_p)}$$

zusammengesetzt sind, während die zugehörigen Irrationalitäten mit Hülfe eben dieser Grössen rational mit den resp. Y zusammenhängen.

Doch lässt diese Form des Transformationsproblems der Integrale noch eine wesentliche Vereinfachung zu, indem sich durch einfache Betrachtungen zeigen lässt, dass das oben aufgestellte System hyperelliptischer Differentialgleichungen sich in allen Fällen durch das folgende

$$\frac{dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\,\frac{F_0(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

$$\frac{Y_1\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\,\frac{F_1(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{Y_1^{\sigma-1}\,dY_1}{\sqrt{R_1(Y_1)}} + \frac{Y_2^{\sigma-1}\,dY_2}{\sqrt{R_1(Y_2)}} + \cdots + \frac{Y_\sigma^{\sigma-1}\,dY_\sigma}{\sqrt{R_1(Y_\sigma)}} = 2\,\frac{F_{\sigma-1}(z_1)\,dz_1}{\sqrt{R(z_1)}}$$

ersetzen lässt, in welchem

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ Y_\sigma$$

die Lösungen einer algebraischen Gleichung

$$y_\sigma + \chi_1(z_1)y^{\sigma-1} + \cdots + \chi_\sigma(z_1) = 0$$

darstellen, deren Coefficienten rationale Functionen von z_1 sind, und

$$\sqrt{R_1(Y_1)},\ \sqrt{R_1(Y_2)},\ \ldots\ \sqrt{R_1(Y_\sigma)}$$

sich als rationale Functionen der zugehörigen Y-Grössen und z_1 ausdrücken lassen, multiplicirt mit $\sqrt{R(z_1)}$.

Naturgemäss schliesst sich an die Behandlung des Transformationsproblems die Frage nach den allgemeinsten Beziehungen der hyperelliptischen Integrale derselben Ordnung und algebraisch-logarithmischen Functionen, eine Frage, die von Abel in seiner unvollendet gebliebenen Arbeit für elliptische Integrale beantwortet worden, und die Anwendung des oben hervorgehobenen Satzes von der Vertauschung der Gränzen und Unstetigkeitspunkte der Hauptintegrale sowie des Abel'schen Theorems führt zu dem Resultat, dass diese allgemeinste Beziehung die Form haben muss

$$m_1\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_1)}\,dz}{(z-a_1)\sqrt{R(z)}} + m_2\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_2)}\,dz}{(z-a_2)\sqrt{R(z)}} + \cdots + m_r\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{\pm\sqrt{R(a_r)}\,dz}{(z-a_r)\sqrt{R(z)}}$$

$$+\beta_0\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{dz}{\sqrt{R(z)}} + \beta_1\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{z\,dz}{\sqrt{R(z)}} + \cdots + \beta_{p-1}\int_{\zeta_1}^{z_1}\frac{z^{p-1}\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

$$= \log\left\{\frac{f_\varrho(z_1) - g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}{f_\varrho(z_1) + g_\varrho(z_1)\sqrt{R(z_1)}}\cdot\frac{f_\varrho(\zeta_1) + g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}{f_\varrho(\zeta_1) - g_\varrho(\zeta_1)\sqrt{R(\zeta_1)}}\right\},$$

worin $m_1, m_2, \ldots m_r$ ganze Zahlen, $\beta_0, \beta_1, \ldots \beta_{p-1}$ Constanten vorstellen, deren Bedeutung dort näher angegeben wird.

Endlich wird noch die Frage aufgeworfen, ob in algebraische Relationen zwischen hyperelliptischen Integralen auch jene eindeutigen Umkehrungsfunctionen der Integrale niederer Gattung, also die Exponentialfunctionen, die trigonometrischen und elliptischen Functionen eintreten können, und zwar wird diese Frage mit Hülfe eines allgemeinen von mir aufgestellten Satzes über Differentialgleichungen beantwortet, der für den vorliegenden Zweck specialisirt folgendermassen lautet: wenn zwischen den Integralen

$$Z \text{ und } Z_1, Z_2, \ldots Z_r$$

der irreductibeln Differentialgleichungen

$$f\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) = 0$$

nd

$$\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1} + \varphi_1(x, z_1)\left(\frac{dz_1}{dx}\right)^{k_1-1} + \cdots + \varphi_{k_1-1}(x, z_1)\frac{dz_1}{dx} + \varphi_{k_1}(x, z_1) = 0$$

$$\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2} + \psi_1(x, z_2)\left(\frac{dz_2}{dx}\right)^{k_2-1} + \cdots + \psi_{k_2-1}(x, z_2)\frac{dz_2}{dx} + \psi_{k_2}(x, z_2) = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r} + \chi_1(x, z_r)\left(\frac{dz_r}{dx}\right)^{k_r-1} + \cdots + \chi_{k_r-1}(x, z_r)\frac{dz_r}{dx} + \chi_{k_r}(x, z_r) = 0,$$

ein algebraischer Zusammenhang stattfindet, und man setzt statt der Grössen $Z_1, Z_2, \ldots Z_r$ r beliebige andere Integrale der Differentialgleichungen, so wird die algebraische Beziehung noch fortbestehen, wenn für Z ein gewisses anderes Integral Z' der ersten Differentialgleichung gesetzt wird.

Die Anwendung dieses Satzes führt die oben aufgeworfene Frage auf die Untersuchung von Functionalgleichungen zurück, und liefert das Resultat, dass weder die Exponentialfunction noch die trigonometrischen und elliptischen Functionen in jenen algebraischen Beziehungen vorkommen können.

Mit den vorausgegangenen Untersuchungen sind nun die Mittel gegeben, um die Beantwortung der Fragen der Integralrechnung anzugreifen, welche die Reduction der hyperelliptischen Integrale einer gewissen Ordnung auf solche niederer Ordnung zum Gegenstande haben, und zwar liefert die achte Vorlesung die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, unter denen ein hyperelliptisches Integral irgend welcher Ordnung auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar ist, eine Frage, die für elliptische Integrale von

Tchebichef im Anschluss an die Untersuchungen von Abel, von Weierstrass mit Hülfe der Umkehrungsfunctionen behandelt worden ist.

Die Bedingungen dafür, dass das Integral

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraische Functionen reducirbar ist, sind unter Benutzung schon oben in diesem Referate erklärter Zeichen die folgenden:

$$\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} = 0, \quad \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} = 0, \ldots \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

$$\sum_1^n{}^{\alpha} \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{z_\alpha} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}} \int_{\infty} \frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}} = 0,$$

worin $r = 0, 1, 2, \ldots 2p-1$ zu setzen ist; der algebraische Werth des hyperelliptischen Integrales ist dann durch den Ausdruck gegeben

$$\left\{\sum_1^n{}^{\alpha}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}} - \left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{\infty}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)}.$$

Weit schwieriger ist die Frage nach der Reducirbarkeit auf Logarithmen, und eine genaue Untersuchung der nothwendigen und hinreichenden Bedingungen liefert das folgende Verfahren zur Beantwortung der Frage, ob ein hyperelliptisches Integral von der Form

$$\int \frac{F(z)\,dz}{\sqrt{R(z)}}$$

auf algebraisch-logarithmische Functionen reducirbar ist.

Man bilde die Gleichung

$$T_1\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + T_2\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} + \cdots + T_n\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = 0,$$

und suche dieselbe durch Systeme von ganzen Zahlen $T_1, T_2, \ldots T_n$ zu befriedigen; mögen sich nun $n-k$ solcher Systeme finden lassen

$$\begin{array}{llll} T_{11}, & T_{12}, & \ldots & T_{1n}, \\ T_{21}, & T_{22}, & \ldots & T_{2n}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ T_{n-k1}, & T_{n-k2}, & \ldots & T_{n-kn}, \end{array}$$

welche von einander unabhängig sind, und mögen sich aus diesen $n-k$ Gleichungen die Relationen ergeben

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_{k+1})^{-1}} = \lambda_{11}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{1k}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}}$$

. . . . . .

$$D\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_n)^{-1}} = \lambda_{n-k1}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} + \cdots + \lambda_{n-kk}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}},$$

so suche man den grössten gemeinsamen Theiler zwischen den Zahlen

$$D,\ \lambda_{1i},\ \lambda_{2i},\ \ldots\ \lambda_{n-ki},$$

worin i eine der Zahlen $1, 2, \ldots k$ bedeuten soll; sei derselbe δ_i, und werde

$$\frac{D}{\delta_i} = t_0^{(i)},\quad \frac{\lambda_{1i}}{\delta_i} = t_1^{(i)},\quad \frac{\lambda_{2i}}{\delta_i} = t_2^{(i)},\ \ldots\ \frac{\lambda_{n-ki}}{\delta_i} = t_{n-k}^{(i)}$$

gesetzt, so muss

$$t_0^{(i)} + t_1^{(i)} + \cdots + t_{n-k}^{(i)} > p$$

sein, wenn $R(z)$ vom $2p+1^{\text{ten}}$ Grade ist; lassen sich nun Gleichungen von der Form

$$P^{(1)2} - Q^{(1)2}R(z) = 0,\ P^{(2)2} - Q^{(2)2}R(z) = 0,\ \ldots\ P^{(k)2} - Q^{(k)2}R(z) = 0$$

finden, welche ausser den resp. Werthen

$$\begin{array}{l} z_1,\ z_{k+1},\ \ldots\ z_n \\ z_2,\ z_{k+1},\ \ldots\ z_n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ z_k,\ z_{k+1},\ \ldots\ z_n \end{array}$$

mit der entsprechenden Vielfachheit

$$\begin{array}{l} t_0^{(1)},\ t_1^{(1)},\ \ldots\ t_{n-k}^{(1)} \\ t_0^{(2)},\ t_1^{(2)},\ \ldots\ t_{n-k}^{(2)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ t_0^{(k)},\ t_1^{(k)},\ \ldots\ t_{n-k}^{(k)} \end{array}$$

nur noch die Verzweigungswerthe zu Lösungen haben, so bilde man die Summe

$$\frac{1}{t_0^{(1)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_1)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(1)} - Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}{P^{(1)} + Q^{(1)}\sqrt{R(z)}}\right) + \frac{1}{t_0^{(2)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_2)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(2)} - Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}{P^{(2)} + Q^{(2)}\sqrt{R(z)}}\right)$$

$$+ \cdots + \frac{1}{t_0^{(k)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_k)^{-1}} \log\left(\frac{P^{(k)} - Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}{P^{(k)} + Q^{(k)}\sqrt{R(z)}}\right) = L(z),$$

dann wird $L(z)$ das Aggregat der im reducirbaren hyperelliptischen Integrale vorkommenden logarithmischen Glieder darstellen; setzt man sodann

$$\frac{dL(z)}{dz}=\sum_1^k{}^i\left\{\frac{1}{t_0^{(i)}}\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_i)^{-1}}\frac{2R(z)\left[Q^{(i)}\frac{dP^{(i)}(z)}{dz}-P^{(i)}\frac{dQ^{(i)}(z)}{dz}\right]-P^{(i)}Q^{(i)}\frac{dR(z)}{dz}}{P^{(i)^2}-Q^{(i)^2}R(z)}\cdot\frac{1}{\sqrt{R(z)}}\right\}$$
$$=\frac{\varphi(z)}{\sqrt{R(z)}},$$

so müssen ferner mit Zugrundelegung der früher eingeführten Bezeichnungen noch die Bedingungen befriedigt sein

$$\sum_1^n{}^\alpha\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}-\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}=0$$

für die Werthe $0, 1, 2, \ldots p-1$, und

$$\sum_1^n{}^\alpha\left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}-\left[\frac{F(t)-\varphi(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty\frac{F_r(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}=0$$

für die Werthe $r=p, p+1, \ldots 2p-1$; sind alle diese Bedingungen erfüllt, so ist der Werth des algebraischen Theiles jenes hyperelliptischen Integrales

$$\left\{\sum_1^n{}^\alpha\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_{z_\alpha}\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{(t-z_\alpha)^{-1}}-\left[\frac{F(t)}{\sqrt{R(t)}}\int_\infty\frac{dt}{(t-z)\sqrt{R(t)}}\right]_{t^{-1}}\right\}\sqrt{R(z)},$$

welcher mit $L(z)$ vereinigt die algebraisch-logarithmische Darstellung des gegebenen Integrales liefert.

Die Frage, welche hyperelliptische Integrale auf elliptische oder auf hyperelliptische niederer Ordnung reducirbar sind, ist in diesen Vorlesungen nicht behandelt; der vollständigen Beantwortung dieser Frage stehen noch grosse Schwierigkeiten im Wege, die sich möglicherweise nur mit Hülfe der Umkehrungsfunctionen der hyperelliptischen Integrale oder der ϑ-Functionen mit mehreren Variabeln werden überwinden lassen.

Endlich behandelt die neunte Vorlesung das Multiplicationstheorem — nichts anderes als das Abel'sche Theorem für gleiche Integrale und nur nach dem oben behandelten Transformationsprincip in verschiedenen Formen dargestellt — und das Divisionsproblem, das bereits von Hermite für hyperelliptische Integrale erster Ordnung und von Clebsch und Gordan für alle Abel'schen Integrale erledigt worden ist; ich beweise durch Verallgemeinerung der von Hermite befolgten Methode den bekannten Satz, dass die Grössen

$$x_1, x_2, \ldots x_p,$$

welche der Gleichung

$$\int^{x_1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots+\int^{x_p}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{1}{n}\int^{\xi_1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots+\frac{1}{n}\int^{\xi_p}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

genügen, die Lösungen einer Gleichung p^{ten} Grades sind, deren Coefficienten sich als lineare Functionen von n^{ten} Wurzeln aus Functionen darstellen lassen, welche rational aus

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots\ \xi_p,\ \sqrt{R(\xi_1)},\ \sqrt{R(\xi_2)},\ \ldots\ \sqrt{R(\xi_p)}$$

zusammengesetzt sind.

Am Schlusse dieser letzten Vorlesung wird gezeigt, dass das Theilungsproblem der Perioden, welches beim allgemeinen Divisionsproblem als gelöst betrachtet wird, sich auf die Theilung derselben durch eine einfache Primzahl zurückführen lässt, und dass für diesen Fall das Problem auf die Auflösung einer Gleichung

$$\frac{n^{2p}-1}{n-1}^{\text{ten}}$$

Grades zurückführbar ist, aus deren Lösungen sich durch Wurzelziehen die Coefficienten der verschiedenen Gleichungen p^{ten} Grades bilden lassen, deren Wurzeln die Grössen

$$\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots\ \eta_p$$

sind, welche der Gleichung

$$m\left(\frac{\mu_1}{n}J_1+\frac{\mu_2}{n}J_2+\cdots+\frac{\mu_{k-1}}{n}J_{k-1}+\frac{1}{n}J_k\right)$$
$$=\int^{\eta_1}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\int^{\eta_2}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}+\cdots+\int^{\eta_p}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

genügen, in welcher

$$J_1,\ J_2,\ \ldots$$

die Periodicitätsmoduln, k jeden Werth von 1 bis $2p$, die Grössen $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots\ \mu_{k-1}$ alle Zahlen $0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ (n-1)$ vorstellen, und m aus der Werthereihe $1,\ 2,\ \ldots\ n-1$ zu nehmen ist.

Die weiteren wesentlichen Punkte, welche die Theorie der allgemeinen hyperelliptischen Integrale und der Periodicitätsmoduln derselben betreffen, gehören naturgemäss in die Theorie der hyperelliptischen Functionen, welche sich bekanntlich als Integrale eines Systems von hyperelliptischen Differentialgleichungen ergeben und zu noch weit ausgedehnteren und für die Algebra und Zahlentheorie ebenso wichtigen Untersuchungen führen als es bei den elliptischen Functionen der Fall gewesen.

Wien. **Leo Koenigsberger.**