



Die geometrischen Näherungskonstruktionen Albrecht Dürers

von

Siegmund Günther

Ansbach 1886

Quelle:

Günther, Siegmund: Die geometrischen Näherungskonstruktionen
Albrecht Dürers.

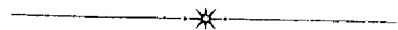
Beilage zum Jahresbericht der Königl. Studienanstalt Ansbach für
1885–1886

Behandelt werden die Konstruktion diverser regelmäßiger Vielecke, die Winkeldreiteilung, Umformungen mit Erhaltung des Flächeninhalts, eine angenäherte Kreisquadratur und das delische Problem.

DIE GEOMETRISCHEN
NÄHERUNGSKONSTRUKTIONEN
ALBRECHT DÜRERS.

VON

DR. SIEGMUND GÜNTHER,
K. GYMNASIALPROFESSOR.



BEILAGE ZUM JAHRESBERICHT

DER

KÖNIGL. STUDIENANSTALT ANSBACH

FÜR 1885—1886.



ANSBACH.

DRUCK VON C. BRÜGEL UND SOHN.

1886.

Vorwort.

Die Stellung Albrecht Dürers in der Geschichte der Mathematik ist noch bei weitem nicht in dem Maße geklärt, als es die Bedeutung des Mannes wünschenswert macht. Als der Verf. für Kehrbachs großes Unternehmen der „*Monumenta Germaniae Paedagogica*“ seine nunmehr unter der Presse befindliche „Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter bis zum Jahre 1525“ ausarbeitete, hatte er sich pflichtmäßig mit dem geometrischen Lehrbuch Dürers näher zu beschäftigen; doch konnte am genannten Orte auf den sachlichen Inhalt natürlich nicht allzutief eingegangen werden, und so empfahl es sich, nachträglich auf gewisse bemerkenswerte Punkte in einer besondern Darstellung zurückzukommen.

Der Verf. hat schon bei verschiedenen Veranlassungen seiner — auch von einem so gewiegten Didaktiker wie Prof. Reidt in Hamm geteilten — Überzeugung Ausdruck gegeben, daß es für die Schüler großen Wert habe, Näherungskonstruktionen kennen zu lernen und sich über deren Genauigkeitsgrad ein Urteil zu bilden. Mit Rücksicht hierauf wurden in dieser Schulschrift die bezüglichen Rechnungen durchaus elementar und mit etwas größerer Breite geführt, als es die Rücksicht auf mathematisch durchgebildete Leser erfordert haben würde. Zugleich mögen jüngere Mathematiker an diesem Beispiele erkennen, daß sich durch eine recht vielseitige Diskussion auch ein engbegrenzter Stoff zu einem ganz dankbaren Untersuchungsgebiete machen läßt.

S. G.

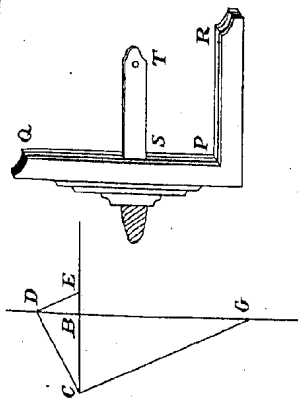


Fig. 10

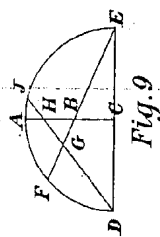


Fig. 9

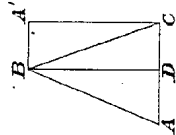


Fig. 8

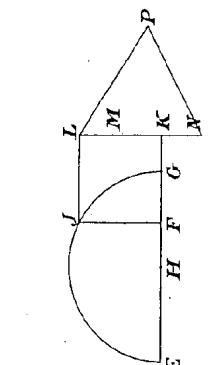


Fig. 7

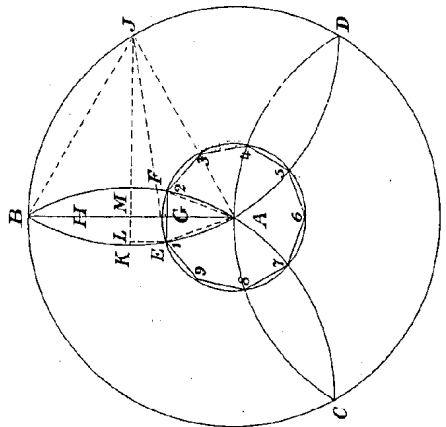


Fig. 6

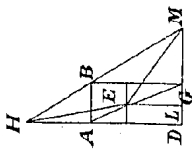


Fig. 5

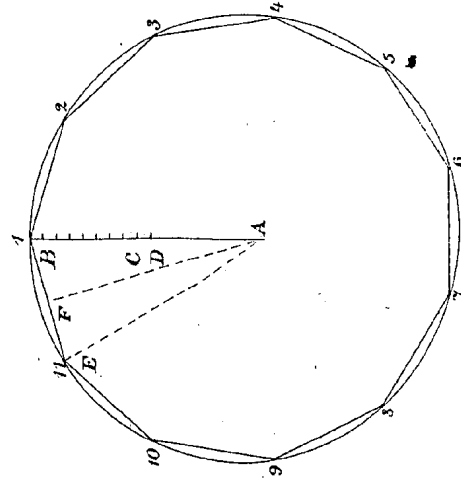


Fig. 4

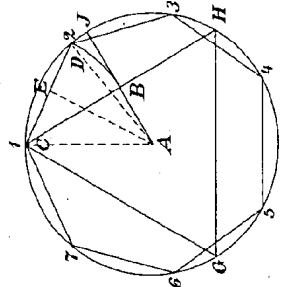


Fig. 3

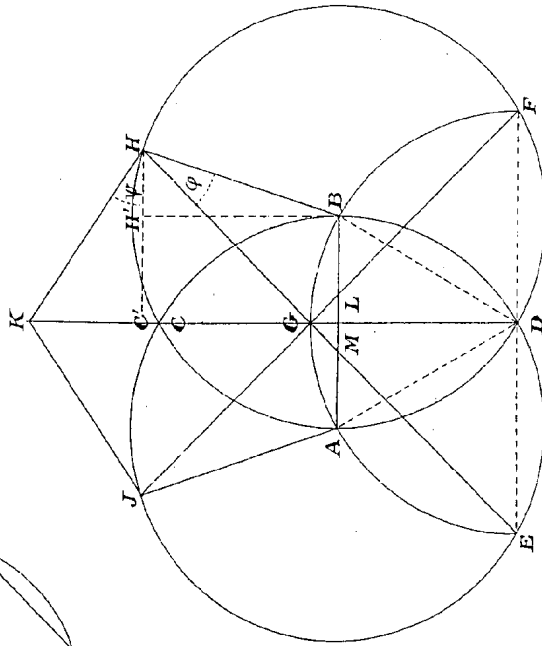


Fig. 2

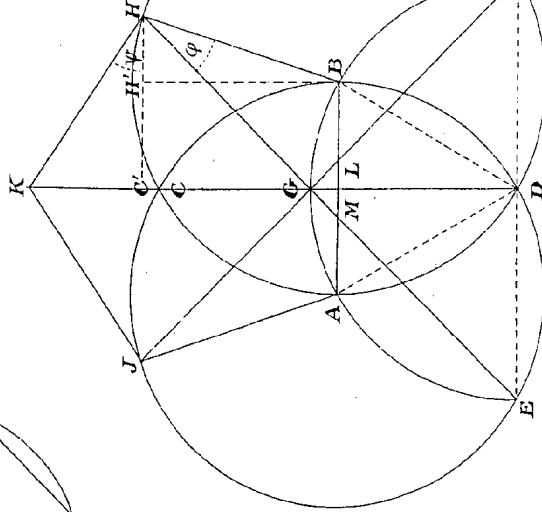


Fig. 1

Unter denjenigen deutschen Mathematikern, welche im Zeitalter der Renaissance die Wissenschaft durch selbstthätige Geistesarbeit gefördert haben, nimmt neben Regiomontanus, Werner und Copernicus ein Mann einen Ehrenplatz ein, der kein Fachmann von Beruf war und niemals in seinem Leben eine gelehrte Bildung genossen hatte. Wir meinen den großen Künstler Albrecht Dürer, eine der imposantesten und doch zugleich liebenswürdigsten Erscheinungen seiner Zeit. In Künstlerkreisen hatte sich ein gewisser Sinn für mathematisches Wissen selbst in den trübsten Perioden des späteren Mittelalters niemals ganz verloren, die „Bauhütte“ mußte unausgesetzt eine gewisse geometrische Tradition aufrecht erhalten, und von Jan van Eyck z. B. wird ausdrücklich bezeugt, daß er über tüchtige geometrische Kenntnisse verfügt habe 1). Zeitgenossen Dürers waren die gleichfalls durch theoretische Bildung ausgezeichneten Italiener Michelangelo, Raffael und Lionardo da Vinci*), und schon einige Jahrzehnte vor ihrem Auftreten hatte ihr Landsmann Alberti eine eigens für Künstler bestimmte Anleitung zur Geometrie geschrieben, welche besonders durch den sich in ihr aussprechenden Einfluß des euklidischen Originalwerks Interesse erregt 5). Diesen Männern nun tritt der deutsche Maler, mit dessen Leistungen sich die folgenden Ausführungen zu beschäftigen haben, als ein durchaus ebenbürtiger zur Seite, ja er überragt dieselben entschieden noch an origineller, spezifisch-geometrischer Gestaltungskraft.

Das geometrische Lehrbuch Dürers erschien im Jahre 1525, drei Jahre vor seinem Tode, unter dem umfassenden Titel „Underweysung der Messung, mit dem Zirckel und Richtscheyt, in Linien Ebnen und gantzen Corporen, durch Albrecht Dürer zusammengezogen, und zu nutz aller kunstliebhabenden, mit zugehörigen Figuren in truck gebracht.“ Häufig

*) Eine Charakteristik der vielseitigen Wirksamkeit Lionardos auf dem Gebiete der exakten Wissenschaften ist mehrfach gegeben worden; wir verweisen unter der Vielzahl bezüglichlicher Darstellungen vorzugsweise auf diejenigen von Venturi 2), Libri 3) und Cantor 4).

nachgedruckt kam es auch in verschiedenen Übersetzungen neu heraus*), und da im folgenden die wörtliche Wiedergabe einer Anzahl Dürer'scher Textesstellen notwendig erscheint, so ward angesichts der großen Schwierigkeit, die Rechtschreibung des Autors richtig wiederzugeben, gleichfalls auf eine zuverlässige Bearbeitung in lateinischer Sprache zurückgegriffen 7). An der in der Vorrede genannten Stelle hat sich Verfasser dieses bestrebt, eine möglichst eingehende Analyse des Werkes zu liefern und dessen Eigenart sowohl nach der didaktischen als auch nach der rein wissenschaftlichen Seite hin gebührend zu würdigen; wieder anderwärts 8) ward Dürers Verdienst um die Weiterbildung der seit altgriechischer Zeit nicht mehr so energisch in Angriff genommenen höheren Geometrie besonders zu beleuchten gesucht. Auch die Zeitgenossen und unmittelbaren Nachfolger des trefflichen Mannes haben nicht mit ihrer Anerkennung gekargt. Erasmus**) stellt ihn neben Apelles, der sich ebenfalls durch warmes Interesse für die wissenschaftliche Grundlage seiner Kunst ausgezeichnet habe, dem aber Dürer noch entschieden vorzuziehen sei, und Melanchthon äußert sich in einem Briefe an Camerarius dahin, er werde Dürers Schriften, wiewohl er bei seiner eigenen Lehrthätigkeit keinen unmittelbaren Gebrauch davon machen könne, dennoch „propter memoriam summi atque optimi viri“ liebevoll aufbewahren. Daneben stehe noch das Urteil des Astronomen Tycho Brahe 9): „Ars pictoria in geometria, optica et perspectiva sua habet fundamenta, quae ad scientias mathematicas referuntur, ideoque Durerus et alii horum ex parte quasi praestantiores in arte pingendi evaserunt artifices.“

Von Geschichtschreibern der Mathematik haben sich wesentlich Vossius 10), Chasles 11) und Gerhardt 12) mit Dürers Buche befaßt, allein obwohl die von ihnen gegebenen Inhaltsübersichten im ganzen zuverlässig sind***), so reichen sie doch keinesfalls aus, um einem Fernerstehenden eine richtige Vorstellung von der Bedeutung desselben beizubringen. Unter einem beschränkteren Gesichtspunkte, nämlich als Urheber der wissenschaftlichen Perspektive, würdigt Lambert 13) unsern

*) Gute Auskunft über alle Ausgaben der „Underweysung,“ rechtmäßige und unrechtmäßige, erteilt eine anonyme Dürer-Biographie 6), die in bibliographischer Hinsicht eine wertvolle Ergänzung zu den bekannten kunsthistorischen Werken darbietet.

**) Erasmus' Worte über Dürer sind der erwähnten lateinischen Übertragung vorgegedruckt.

***). Im einzelnen ließe sich mancherlei bemängeln, so geht Gerhardt z. B. in seinem Lobe viel zu weit, wenn er von Dürer sagt: „Er hat die erste darstellende Geometrie in deutscher Sprache geschrieben.“

Schriftsteller ganz nach Verdienst, indem er ausdrücklich betont, daß unter der Flut perspektivisch-geometrischer Lehrbücher, (von Rodler, Jamnitzer, Hirschvogel u. s. w.), zu deren Entstehung Dürers Werk den Impuls gegeben hat, keines das Vorbild zu erreichen vermocht habe.

Eine Auswahl unter den mancherlei merkwürdigen Einzelheiten der „Underweysung“ treffend, gedenken wir hier unser Augenmerk ausschliesslich auf jene Konstruktionen zu richten, durch welche geometrische Probleme zwar nicht mit voller wissenschaftlicher Strenge, wohl aber mit einer für die Erfordernisse der Zeichnungspraxis genügenden Genauigkeit gelöst werden sollen. Es wird sich herausstellen, daß die Prüfung dieser empirischen Methoden zu ganz interessanten Ergebnissen führt.

§ 1. Geschichtliches über Näherungskonstruktionen.

Das klassische Altertum stand in seiner Blütezeit derartigen Konstruktionen, in denen man höchstens eine Beeinträchtigung des Charakters der Mathematik zu erblicken vermochte, fremd und teilnahmslos gegenüber; hielt eine Aufgabe allen Versuchen, ihr mit Lineal und Zirkel beizukommen, beharrlich stand, so erdachte man gewisse krumme Linien, welche zwar selbst wieder nur mit angenäherter Schärfe verzeichnet werden konnten, die Lösung aber wenigstens in theoretischem Sinne völlig exakt zu bewerkstelligen gestatteten. Der erste griechische Geometer, der sich mit Rücksicht auf die Bedürfnisse des täglichen Lebens und insonderheit auf diejenigen der Feldmefskunst von der traditionellen Strenge zu emanzipieren und u. a. auch für die Seiten der nicht exakt zu konstruierenden regelmässigen Vielecke numerische Werte zu berechnen wagte, war Heron der Alexandriner 15). Wesentlich in seine Fufstapfen traten die römischen Mathematiker ein, deren vorwiegend utilitarische Richtung ihnen ohnehin den klassischen Mustern keinen besondern Geschmack abzugewinnen gestattete; Näherungsformeln, und zwar teilweise von recht geringer Schärfe, machten vorwiegend das geometrische Wissen derjenigen Techniker aus, welche uns als „Agrimensoren“ oder „Gromatiker“ bezeichnet werden. Bei den Arabern überwog im allgemeinen die Neigung zu arithmetischen diejenige zu geometrischen Spekulationen, doch kannte und verwandte man, wie in § 3 gezeigt werden wird, immerhin auch gewisse konstruktive Näherungslösungen.

Während des Mittelalters zehrte man fast allseitig von den spärlichen Resten antiker Wissenschaft, welche man sich zu retten gewußt

hatte, und es sind in der Zeit zwischen dem XIII. und XV. Jahrhundert, wozu letzteres als das der Wiedererweckung bezeichnet werden darf, eigentlich nur fünf Personen, die sich als selbständige Forscher im Bereiche der Mathematik einen Namen gemacht haben. In Betracht kommen die Deutschen Jordanus Nemorarius und Witelo (fälschlich oft Vitellion genannt), der Italiener Fibonacci, der Franzose D'Oresme und der Engländer Bradwardin. Mit Näherungskonstruktionen hat sich unter ihnen zumal der erstgenannte beschäftigt*), allein es ist, da seine Arbeiten bis in die neueste Zeit herein nur sehr wenig bekannt geworden sind, kaum anzunehmen, daß Jordanus auf die Mit- und Nachwelt in irgend erheblicherer Weise eingewirkt habe.

Eine ganz neue und dringende Aufforderung, auch diese Seite der Geometrie zu pflegen, trat dagegen an die Vertreter derselben heran, als seit dem XII. Jahrhundert ein neuer Baustil die Alleinherrschaft an sich riß, der an sich schon zu seinem Verständnis ein gewisses Maß von geometrischer Sachkunde und Fertigkeit erheischte**), gerade in unserm Vaterlande aber dieses sein Recht noch gebieterischer geltend machen mußte, da, wie Schnaase richtig bemerkt 17), die deutsche Gotik der romanischen und englischen gegenüber durch ihre Vorliebe für geometrisches Formenspiel ausgezeichnet ist. Die Planzeichnung für die Spitztürme oder Fialen, die Konstruktion des Maßwerks für Fenster und Thürfüllungen setzte Kenntnisse voraus, die — man vergleiche beispielsweise die bekannte Monographie von Reusch 18) — schon über das ganz elementare hinausgehen mußten. So entstand denn auch in der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts eine eigene Literatur, welche man recht wohl die der Bauhütte nennen kann, und von welcher wir im Augenblicke drei Produkte kennen, nämlich die architektonisch-geometrischen Leitfäden von Roriczer 19) und Schmuttermayer 20), sowie die

*) Die Geometrie des Jordanus wird demnächst durch M. Curtze in Thorn erstmalig herausgegeben werden, und wir verdanken diesem unserm verehrtem wissenschaftlichem Freunde einige Andeutungen über diese Ausgabe, welche wir hier am Orte verwerten dürfen. Eine Generalregel zur Verzeichnung regulärer Vielecke, die Jordanus gibt, scheint der Interpretation unüberwindliche Schwierigkeiten entgegensetzen zu wollen, und nur für einen Spezialfall (s. u. § 3) ist die Absicht des Autors anstandslos zu erkennen.

**) In einer Pariser Handschrift des Villard de Honnecourt ist eine Art von Lehrbuch für angehende Baukünstler enthalten 16): „car en cest livre puet on trover grant conseil de la grant force de la maconerie et des engiens de carpenterie et si troveres la force de la portraiture les traies ensi come li ars de jometrie les comande et ensaigne“.

recht eigentlich für den Gebrauch des Kunsthandwerks geschriebene „Geometria deutsch“, welche Verf. dieses 21) schon früher mit den erforderlichen Erläuterungen hat abdrucken lassen. *) Zumal in dieser letztern Schrift begegnen wir einigen Näherungskonstruktionen für regelmäßige Polygone, und wirklich waren diese für die Baumeister der gotischen Epoche von höchster Wichtigkeit, da die „Chorschlüsse“ der Kirchen stets nach dem Muster einer solchen Figur — siehe die genauen Nachweisungen bei Zeising 23) — gefertigt wurden, und da man sich hiebei natürlich nicht strenge an jene Formen binden konnte, welche wirklich der exakten Verzeichnung mit ausschließlicher Zuhilfenahme des Lineals und Zirkels fähig sind. —

Auf dem so vorbereiteten Boden stand Albrecht Dürer, der nach seines hervorragendsten Biographen Thausing Zeugnisse 24) von dem geometrischen Geiste der Bauhütte durch und durch beseelte. Wie er das vorhandene Material ordnete und vermehrte, das werden die nächsten Paragraphen zeigen.

§. 2. Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks.

Nachdem Dürer in durchaus korrekter Weise das reguläre Sechseck, Dreieck, Viereck, Achteck, Zehneck, Fünfeck und Fünfzehneck **), durch eine approximative Zeichnung aber auch (s. § 3) Sieben- und Vierzehneck erledigt hat, wendet er sich der Aufgabe zu, ein regelmäßiges Fünfeck über einer gegebenen Seite zu verzeichnen. Dabei verhält er sich, wie folgt (Fig. 1) 26) ***):

„Jam pentagonum construere docebo una circini apertura, hoc qui

*) Unsere auch von andern Schriftstellern, z. B. von Hain 22), geteilte Ansicht, daß die „Geometria deutsch“ älter als das Dürersche Werk sei, werden wir weiterhin durch stete Vergleichung der beiden Büchern gemeinsamen Elemente noch besonders zu motivieren suchen.

**) Die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks im Kreise stützt sich, wie es nicht anders sein kann, auf den goldenen Schnitt, allein sonderbarerweise ist nicht das im vierten Buche der euklidischen Elemente, sondern das im ersten Buche des Almagests von Ptolemaeus gelehrt Verfahren zugrunde gelegt, welches Dürer wohl durch seinen astronomischen Freund Werner kennen gelernt haben kann. Das reguläre Achteck wird aus dem Quadrate durch Halbierung der Zentriwinkel hergeleitet, wogegen die Bauhütte sich einer Konstruktionsweise bediente, die auf Heron 25) zurückgeht und bestimmt, daß von jedem Eckpunkt eines Quadrats aus die halbe Diagonale auf beiden anstoßenden Vierecksseiten abgetragen werden soll.

***)) Um die moderne Schreibart wahrzunehmen, werden allenthalben in unsern Zeichnungen Dürers kleine lateinische Buchstaben durch große ersetzt.

sequitur modo. Esto linea AB , unum pentagoni latus, cujus extremitatem A facio centrum et ad intervallum AB describo circulum: rursus centro B , spacio vero BA , delineo alium circulum secantem priorem, superne quidem ad C , inferne vero ad D , quae duo puncta linea recta conjungo. Nunc super centro D protendo arcum, per utriusque circuli centra et circumferentias, quas ubi abscindit noto per E , F , item sectioni ipsius, lineae CD , adjicio G literam. His perfectis continuo lineam EG , versus G , usque in peripheriam $ACFD$, et ubi eam contingit, illic scribo H . Consimiliter etiam produco lineam FG , donec cadit in circinationis literam $BCED$, et locum contactus signo litera I . Deinde duco lineas AI et BH , habesque tria pentagoni latera, reliqua duo applico perpendiculari DC prolongatae, et terminis I et H , quo facto erit pentagonus absolutus, velut hic designavi“.

Zum Zwecke der rechnerischen Prüfung*) nennen wir den in unserer Vorlage nicht bezeichneten Schlufspunkt des Fünfecks K , die Durchschnittspunkte von AB mit EH und DC aber M und L . Zieht man ED und FD , so ist ersichtlich $\sphericalangle EDG = \sphericalangle FDG = 90^\circ$, $\sphericalangle DEG = \sphericalangle LMG = \sphericalangle MGL = 45^\circ$, also $LM = LG = DG - DL$. Wir setzen $AB = BH = HK = KI = IA = r$, dann ist DL die Höhe eines gleichseitigen Dreiecks von der Seitenlänge r , also gleich $\frac{r}{2} \sqrt{3}$, und daraus folgt

$$LM = r - \frac{r}{2} \sqrt{3}, \quad BM = \frac{r}{2} + LM = \frac{r}{2} (3 - \sqrt{3}).$$

Wird $\sphericalangle BHM$ mit φ bezeichnet, so ergibt der Sinussatz, angewandt auf das Dreieck BHM , die Proportion:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin 45^\circ} = \frac{BM}{BH} = \frac{r (3 - \sqrt{3})}{2r}.$$

Es ist mithin

$$\sin \varphi = \frac{\sin 45^\circ (3 - \sqrt{3})}{2},$$

$$\varphi = 26^\circ 38'.$$

Demgemäß berechnet sich

$$\sphericalangle ABH = \sphericalangle IAB = 180^\circ - (\varphi + 45^\circ) = 108^\circ 22'.$$

*) Eine Rechnungskontrolle ähnlicher Art, wenn schon natürlich ohne Logarithmen, ist bereits von Clavius geübt worden (27); das Resultat ist natürlicherweise kein so genaues, als es sich heutzutage mühelos erzielen läßt. Clavius findet $\sphericalangle ABH = 108^\circ 22'$, $\sphericalangle BHK = 107^\circ 2'$, $\sphericalangle HKI = 109^\circ 12'$.

Um die Fünfeckswinkel bei H und I zu ermitteln, fallen wir von H auf DC die Senkrechte HC' und auf letztere von B die Senkrechte BH' , so daß also der gesuchte Winkel BHK in die beiden Winkel $BHC' = 180^\circ - \sphericalangle ABH$ und $C'HK = \psi$ zerlegt wird. Dann ist

$$\cos \psi = \frac{CH}{KH} = \frac{LB + HH}{KH} = \frac{\frac{r}{2} + r \cos (180^\circ - \sphericalangle ABH)}{r}$$

Man hat $\cos (180^\circ - \sphericalangle ABH) = \cos 71^\circ 38'$, $\cos \psi = 0,81509$,

$$\log \cos \psi = 9,91120 - 10,$$

$$\psi = 35^\circ 24' 20'',$$

$$\sphericalangle BHK = \sphericalangle KIA = \psi + 180^\circ - \varphi = 35^\circ 24' 20'' + 71^\circ 38' = 107^\circ 2' 20''.$$

Zum Schlusse ist

$$\sphericalangle HKI = 540^\circ - 216^\circ 44' - 214^\circ 4' 40'' = 109^\circ 11' 20''.$$

So elegant also auch die Konstruktion aussieht und so handlich ihre Ausführung ist, so entbehrt sie doch eines höheren Maßes von Genauigkeit, indem der größte Winkel von jedem der beiden kleinsten sich um nicht weniger als $2^\circ 9'$ unterscheidet.

Der Umstand jedoch, der die Ausführung der Zeichnung eben so einfach und geschmeidig macht, verleiht ihr auch vom theoretischen Standpunkte aus eine höhere Bedeutung. Als charakteristisch haben wir nämlich zu betonen, daß nur eine einzige Öffnung des Zirkels dabei zur Verwendung kommt, was ja auch im Dürerschen Texte ausdrücklich hervorgehoben wird. Es gehört somit die Dürersche Fünfeckskonstruktion, welche übrigens diesen ihr von Chasles (a. a. O.) beigelegten Namen mit Unrecht trägt, da sie auch in der „Geometria deutsch“ zu finden ist, zu jener Geometrie der Einen Zirkelöffnung, welche von dem Araber Abul Wafâ zuerst ins Auge gefaßt ward (28), später den Italienern Cardano und Ferrari — den Erfindern einer Auflösungsmethode für kubische und biquadratische Gleichungen — Stoff zur Bethätigung ihres Scharfsinns gab (29) und noch heutzutage, in Verbindung mit der auf das Lineal grundsätzlich verzichtenden Geometrie des Zirkels, Freunde feinerer geometrischer Untersuchungen besonders anzieht (30).*)

§ 3. Konstruktion des regelmäßigen Siebenecks.

Das Siebeneck behandelt Dürer in folgender Weise (32) zusammen mit dem Dreieck (Fig. 2):

*) Cantor schließt (31) aus einer Stelle in der „Mathem. Sammlung“ des Pappus, daß auch den späteren Griechen diese geometrische Spezialität (*τὰ ἐνὶ διαστήματι γεγρόμενα*) nicht unbekannt war.

„Proxime sequitur ut per hexagonum intra circumferentiam triangulum describamus, in hunc modum. Sume priorem peripheriam cum suis sex punctis, ex quibus conjunge C et G , G et H , H et C protractis lineis rectis: contingetque ut triangulus circumferentiam tangat, et sit aequilaterus ac aequiangularus, quemadmodum hic est videre. Jam ex praedicto trigono et ejus circumferentia communi quadam via, qua propter brevitatem in operibus utimur, heptagonum designabo sic. Ex centro A in notam I duco lineam rectam, et secabitur latus trigoni CH per medium, illic scribo B ; longitudo igitur CB circumibit septies, quemadmodum in praecedenti figura ostendi atque etiam hic delineavi“.

Der Satz „Die Siebenecksseite ist gleich der halben Dreiecksseite“ ist von ehrwürdigem Alter und hat durch Jahrhunderte eine große Zählbarkeit bewährt. Ob das von den Arabern Casiri und Abul Faragi dem Archimedes zugeschriebene „Liber de septangulo in circulo“ (33), wenn es überhaupt existiert hat, ebenfalls jenes Theorem enthalten habe, muß natürlich dahingestellt bleiben, jedenfalls war dasselbe, wie aus dem oben zitierten „Buch der Konstruktionen“ von Abul Wafâ erhellt (34), den Arabern bekannt. Bei Jordanus dem Thüringer (s. o.) heißt es, es sei „latus eptagoni cadentis in circulo per equalitatem medietatis lateris trianguli cadentis in eo“ ausgedrückt. Endlich macht auch die „Geometria deutsch“ in ihrer vierten Aufgabe von derselben Beziehung zwischen den Seiten des regulären Dreiecks und Siebenecks Gebrauch. Man sieht also, daß bei dieser Näherungskonstruktion Dürer auf den Schultern zahlreicher Vorläufer steht*), und daß Kepler (36) und Kästner (37), die von einer „Dürerschen Regel“ sprechen, diesem eine Anerkennung zollen, welche er selbst, wie aus seiner ganzen Darlegung hervorgeht, nicht im mindesten beanspruchte.**)

*) Nach Hoffstadt, dem wir auch ohne augenfällige Belege gerne beipflichten, war unsere Siebeneckskonstruktion eines der alten Inventarstücke der Hütte (35).

**) Dürers obenerwähnter großer Zeit- und Berufsgenosse, Leonardo da Vinci, hat sich wie ersterer ziemlich viel mit Näherungskonstruktionen abgegeben. Erst vor kurzem hat diejenige seiner Handschriften, welche die bezüglichen Bemerkungen enthält, ihren Herausgeber gefunden (38), und P. Tannery hat die Genauigkeitsgrade seiner sämtlichen Angaben berechnet (39). Für das Siebeneck gibt Leonardo die uns bekannte Verzeichnung, für das Fünfeck begnügt er sich mit dem zwar als ungenau erkannten aber doch gar zu rohen Näherungswerte $\sin \frac{180^\circ}{5} = \frac{1}{\sqrt{3}}$; als Generalregel endlich schlägt er die in

der Formel $\operatorname{tg} \frac{360^\circ}{n} = \frac{3}{n-1}$ enthaltene vor.

Man darf sich nicht darüber wundern, daß die erwähnte Konstruktionsart so allseitig Anklang fand, denn erstens ist sie doch ziemlich naheliegend und zweitens verhältnismäßig recht genau. Zieht man in Fig. 2 die Radien AC und AD und fällt aus A auf CD das Perpendikel CE , so soll $\sphericalangle CAD = \frac{360^\circ}{7} = \frac{357^\circ 175' 300''}{7} = 51^\circ 25' 43''$ sein. Bezeichnen wir mit $\varphi \sphericalangle CAE = \sphericalangle DAE$ und bedenken, daß aus dem Dreieck ACB sich $CB = CD = 2 CE$ als $\frac{r}{2} \sqrt{3}$ berechnet, unter r , wie künftig stets, den Radius verstanden, so ist

$$\sin \varphi = \frac{CE}{CA} = \frac{\sqrt{3}}{4},$$

und daraus ergibt sich $\log \sin \varphi = 0,23856 - 0,60206 = 9,63650 - 10$ und $\varphi = 25^\circ 39' 32''$, also $2 \varphi = 51^\circ 19' 4''$, womit also ein (negativer) Fehler von nur sechs Bogenminuten verbunden ist.

Wir haben bei früherer Gelegenheit 40), gestützt auf einen von Weihrauch angegebenen Lehrsatz 41), den Nachweis geführt, daß die altüberlieferte Näherungskonstruktion auch auf einer ganz gesunden theoretischen Basis beruhe. Heute wollen wir den Sachverhalt von einer wesentlich andern Seite beleuchten. Nach Affolter 42) kann die Resolvente der Siebenteilung in folgender Form dargestellt werden:

$$\cos^3 \frac{360^\circ}{7} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{360^\circ}{7} - \frac{1}{2} \cos \frac{360^\circ}{7} - \frac{1}{8} = 0.$$

Gestatten wir uns an dem letzten Gliede eine kleine Veränderung vorzunehmen, indem wir dem Bruche $\frac{1}{8} = \frac{64}{512}$ den Bruch $\frac{65}{512}$ substituieren, so können wir gleichzeitig $\cos \frac{360^\circ}{7} = \frac{5}{8}$ setzen, denn es ist offenbar

$$\left(\frac{5}{8}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} - \frac{65}{512} = 0.$$

Wenn aber $\cos \frac{360^\circ}{7} = \frac{5}{8}$ ist, so ist auch

$$\sin \frac{180^\circ}{7} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{360^\circ}{7}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{1}{4} \sqrt{3},$$

und das ist auch (s. o.) der Wert, welcher aus der alten Praktikerregel, die durch derartige Betrachtungen in einem ganz neuen Lichte erscheint, hervorgeht.

§ 4. Konstruktion des regelmässigen Neunecks.

Die Neuneckskonstruktion Dürers ist diese (Fig. 3)*) 43):

„Nonagonus per triangulum invenitur, hoc ferme modo. Describere centro A circulum satis amplum, in quo designa circulo invariato res piscium vesicas,**) quarum supremae terminus in circumferentia esto B , reliquarum ad latera sint C , D . Hoc facto protrahe lineam rectam AB , eam divide per puncta G et H in tria spacia aequalia, sic quod G sit propius ipsi A : per hoc signum G age lineam transversam ipsi AB perpendiculari ad angulos rectos, et ubi haec transversa lineam vesicae in utraque parte abscindit, illic nota E et F . Jam sume circinum, cujus locato pede uno in centro A , alio ex signo E , per ipsum F , due rotundationis lineam, circumibitque longitudo EF nonies intra hanc peripheriam, quod hic etiam subjeci.“

Behufs analytischer Prüfung ziehen wir zunächst AE und AF und bezeichnen $\sphericalangle EAF$ mit 2φ , also $\sphericalangle EAG$ mit φ . AG ist bekannt, nämlich $= \frac{r}{3}$, also hat man

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{3EG}{r},$$

und es bleibt nur noch die Strecke EG zu ermitteln. Wir verbinden I und K , die Mittelpunkte der beiden Bogen BD und BA , und fällen von E auf die Verbindungslinie IK das Lot EL ; schneiden sich AB

und IK in M , so ist $LM = EG$, $MG = \frac{r}{2} - \frac{r}{3} = \frac{r}{6}$, und wir haben nach dem pythagoreischen Lehrsatz

$$\overline{LE}^2 + \overline{LI}^2 = \overline{EI}^2,$$

$$\frac{r^2}{36} + (EG + MI)^2 = r^2.$$

MI ist die Höhe des gleichseitigen Dreiecks ABI , also $= \frac{r}{2} \sqrt{3}$; man erhält sohin

$$EG = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{36}} - MI = \frac{r}{6} (\sqrt{35} - \sqrt{27}).$$

*) Wie künftig mehrfach, binden wir uns auch hier nicht strenge an Dürers Bezeichnung, welche Buchstaben und Zahlen ziemlich bunt durch einander gebraucht. Im Originale sind die von uns durch G und H charakterisierten Punkte mit 2 und 1 bezeichnet.

**) Unter „Fischblase“ versteht die Gotik bekanntlich ein von zwei kongruenten Bogen eingeschlossenes Kreisbogenzweieck. Die Fischblase erscheint nach Schnaase 44) erst ziemlich spät an Bauwerken und kennzeichnet ein Überhandnehmen der Neigung zu geometrischen Künsteleien.

Da $\sqrt{35} = 5,916$ und $\sqrt{27} = 5,196$ ist, so hat man schliesslich

$$EG = \frac{0,720r}{6} = 0,12r;$$

$\operatorname{tg} \varphi = 0,36$; $\log \operatorname{tg} \varphi = 9,55630 - 10$; $\varphi = 19^\circ 47' 56''$.

Man bekommt demgemäss

$$\frac{360^\circ}{9} - 2 \varphi = 40^\circ - 39^\circ 39' 52'' = 20' 8'';$$

der Fehler von 20 Bogenminuten ist gewiss als ein den gewöhnlichen Bedingungen der Praxis gegenüber geringfügiger zu bezeichnen. Doch ist immerhin zuzugestehen, dass die bekannte Renaldinsche Generalregel*) einen noch bessern Wert liefert, als die Dürersche Vorschrift. Setzen wir nämlich die wirkliche Neunecksseite im Einheitskreise $= n_1$, die nach Renaldin gefundene $= n_2$ **) und die nach Dürer gefundene $= n_3$, so ist

$$n_1 = 0,684; n_2 = 0,689; n_3 = 0,677.$$

Der positive Fehler ($n_2 - n_1$) ist seinem Absolutbetrage nach ein wenig geringer, als der negative Fehler ($n_3 - n_1$).

Unter allen Umständen ist die im vorstehenden der Erörterung unterzogene Neuneckskonstruktion das geistige Eigentum Albrecht Dürers, denn nirgendwo vor ihm kann in der Litteratur und Überlieferung etwas ähnliches nachgewiesen werden***). Und seine Erfindung gereicht ihm gewiss umsoweniger zur Unehre, als er ja (s. u. § 10) sich des wahren Charakters derselben ganz und voll bewusst war.

*) Näheres über diese, sowie über die an Genauigkeit sie noch übertreffende Regel des Herzogs Bernhard von Sachsen zur generellen Verzeichnung regulärer Vielecke mit den Hilfsmitteln der Elementargeometrie enthält eine frühere Abhandlung des Verf. 45).

**) Wir entnehmen diese Zahl der fast ganz unbekannten Dissertation eines gewissen Wagner 46). Es wird gewöhnlich, u. a. von Kästner 47), angeführt, dass zuerst im Jahre 1696 Jakob Bernoulli gelegentlich einer Basler Disputation auf die Ungenauigkeit der bis dahin allgemein für streng gehaltenen Regel von Renaldin aufmerksam gemacht habe, dass aber im Druck diese Thesen erst weit später bekannt geworden seien, und dass deshalb Chr. v. Wolf 48) das Verdienst einer ersten öffentlichen Widerlegung Renaldins zukomme. Der oben genannte Wagner ist jedoch schon vor v. Wolf mit einer solchen Widerlegung, die noch dazu weit allgemeiner gehalten ist, hervorgetreten.

***). Soweit es den Anschein hat, wird überhaupt nur ein einziges Mal vor Dürer die Neuneckskonstruktion besprochen, und zwar von den Arabern Al-bîrûnî und Abûl Djûd 49). Dieselben hatten richtig erkannt, dass das hier in Frage kommende Problem der Winkeltrisektion aufs engste mit der Auflösung einer kubischen Gleichung zusammenhänge.

§ 5. Konstruktion des regelmässigen Elfecks und Dreizehnecks.

Die Vorschriften zur Einzeichnung eines regulären Elf- und Dreizehnecks in einen gegebenen Kreis werden von Dürer in einem einzigen Absatze zusammengefaßt (Fig. 4 und 5) 50):

„Quum prompte hendecagonum intra circulum designari cupio, sumo quartam diametri partem, cui adjungo octavam ejusdem quartae, et cum hac longitudine circumeo intra circumferentiam, quam sic praecise admodum metior, ita quod mechanice non autem demonstrative, id quod propositum erat, inveniatur. Quod si circulo figura tredecim laterum atque angulorum aequalium inscribenda fuerit, tunc ex quodam centro A circulum scribo, in quo excito semidiametrum AB , quam per medium secum in puncto D , quo facto utor longitudine DB , qua tredecies intra peripheriam circumeo, sed hoc quoque mechanice et non demonstrative verum esse credendum est.“

Wir nennen r den Kreishalbmesser, $2\varphi_1$ den Zentriwinkel des Elfecks, $2\varphi_2$ denjenigen des Dreizehnecks. Dann wäre zunächst

$$\sin \varphi_1 = \frac{\frac{r}{4} + \frac{1}{8} \cdot \frac{r}{4}}{r} = \frac{9}{32},$$

$\log \sin \varphi_1 = 0,95424 - 1,50515 = 9,44909 - 10$, und schließlich

$$\varphi_1 = 16^\circ 20' 6'', \quad 2\varphi_1 = 32^\circ 40' 12'',$$

während $\frac{360^\circ}{11} = \frac{352^\circ 473' 420''}{11} = 32^\circ 43' 38''$ ist. Dürers Kon-

struktion verdient daher wiederum als eine relativ sehr genaue gelobt zu werden, da sein Zentriwinkel nur um ungefähr $3\frac{1}{2}$ Minuten gegen den wahren zurückbleibt.

Weit weniger kann dies allerdings von der nächstfolgenden Konstruktion gesagt werden. Hier ist

$$\sin \varphi_2 = \frac{1}{4}, \quad \log \sin \varphi_2 = -0,60206 = 9,39794 - 10,$$

$$\varphi_2 = 14^\circ 28' 39'', \quad 2\varphi_2 = 28^\circ 57' 18''.$$

Dies ist der einzige Fall, in welchem Dürers Methode zu einem zu grossen Werte führt; es wird

$$2\varphi_2 - \frac{360^\circ}{13} = 28^\circ 57' 18'' - 27^\circ 41' 32'' = 1^\circ 15' 46'',$$

und dieser Fehlbetrag ist allerdings so gross, daß selbst bei einem nur mässig grossen Radius Inkonvenienzen sich zeigen müssen.

Wie Dürer zu diesem Verfahren gekommen, ob durch Reflexion oder durch bloßes Probieren, vermögen wir begreiflicherweise nicht zu

entscheiden. Erinnerung mag daran werden, daß Leonardo da Vinci (s. o. § 1) für die Verzeichnung eines regulären n Ecks die Relation $\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{n} = \frac{3}{n-1}$ aufstellt; für $n = 13$ wäre hiernach mithin $\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{13} = \frac{1}{4}$, während wir oben den gleichen Wert für $\sin \frac{180^\circ}{13}$ erhalten haben.

Sollte hier irgend eine — heutzutage natürlich nicht mehr zu verfolgende — Ideenverbindung zwischen zwei aus der nämlichen Quelle ihre Nahrung ziehenden Anschauungskreisen vorliegen?

§ 6. Winkeltrisektion.

Indem wir nunmehr, da uns weiterer Stoff dieser Art nicht mehr geboten ist, von den Polygonen Abschied nehmen, wenden wir uns Dürers Lösung der Aufgabe zu, einen gegebenen Kreisbogen in drei gleiche Teile zu teilen. Der Wortlaut, an welchen wir uns zu halten haben, ist nachstehend wiedergegeben (Fig. 6) 51):

„Quemlibet circuli arcum, qui mihi proponitur, divido in tres partes hoc pacto. Arcus ille esto AB , cujus extremitates sint conjunctae recta linea, quam, ut supra docui, seco duobus punctis C et D , in tria intervalla aequalia. Deinde pono circini pedem in signum A , et alio protendo ex C lineam curvam, usque in arcum AB , quem ubi abscindo, illic scribo literam E . Postea centro B , intervallo vero BD , arcum delineo usque in ipsum AEB arcum, et ubi is secatur, adjicio F . Hoc facto erigo duas lineas perpendiculares ex punctis C et D , quae ubi cadunt in arcum EF , noto G et H . Sic erunt longitudines AE , GH et FB in dato arcu AB aequales, et remanent duo segmenta EG et HF . Jam circini pede fixo in A , alio duco arcum ex G in lineam CD , et ubi ea secatur, pingo I literam. Rursus ex centro B excito arcum per H et rectam ID , et ei sectioni in linea ID adscribo K . His perfectis partior CI et KD in tria spacia aequalia, et pede circini sito in A reliquo ex puncto, qui propior est ipsi I , arcum circino usque ad segmentum EG , ubi signo sectionem litera L . Postremo facio B centrum, ac ex divisione, quae est proximior ipsi K , arcum delineo versus HF , inter quae ad terminum ejus arcus scribo M . Hac arte datus arcus AB partitus est per puncta L et M in tria aequa intervalla, quemadmodum hic oculis subjeci. Sed qui hoc exactius expediri volet, quaerat demonstrationem.“

In unserer Figur sind I_1 und I_2 die Teilpunkte der Strecke CI und K_1 und K_2 die Teilpunkte der Strecke DK . Auch hier könnte

natürlich die Rechnungskontrolle wieder auf dem bisher betretenen trigonometrischen Wege erfolgen, doch ziehen wir es diesmal vor, uns der Hilfsmittel der direkt und ohne jedweden Kunstgriff zum Ziele führenden Koordinatengeometrie zu bedienen. Wir wählen A als Anfangspunkt, AB als positive Abszissenachse eines Orthogonalsystems und drücken zunächst die Gleichung des gegebenen Kreises, dessen Zentrum Z , dessen Radius r sei, in diesem Systeme aus. Wir denken uns zu dem Ende aus Z auf AB die Senkrechte ZP gefällt; dann ist, wenn $2\alpha = \angle AZP$ den zu dem zu teilenden Bogen gehörigen Mittelpunktswinkel bedeutet, $AP = r \sin \alpha$, $ZP = r \cos \alpha$.

Die Kreisgleichung ist deshalb folgende:

$$\text{I. } (x - r \sin \alpha)^2 + (y + r \cos \alpha)^2 = r^2;$$

vereinfacht lautet sie:

$$\text{II. } x^2 + y^2 - 2rx \sin \alpha + 2ry \cos \alpha = 0.$$

Die Gleichung der geraden Linie CG ist $x = \frac{2r}{3} \sin \alpha$; setzen wir diesen Wert von x in II. ein, so ergibt sich

$$y^2 + 2ry \cos \alpha + (r \cos \alpha)^2 = r^2 - r^2 \sin^2 \alpha + \frac{4r^2}{3} \sin \alpha - \frac{4r^2}{9} \sin^2 \alpha.$$

$$\text{III. } CG = y_1 = -r \cos \alpha + \frac{r}{3} \sqrt{9 + 12 \sin \alpha - 13 \sin^2 \alpha}.$$

Jetzt wird um A als Mittelpunkt mit AG als Halbmesser ein Kreis beschrieben; dessen Gleichung ist

$$x^2 + y^2 = AG^2 = y_1^2 + \left(\frac{2r}{3} \sin \alpha\right)^2.$$

Führt man aus III. den Wert von y_1 ein und vereinfacht entsprechend, so wird die neue Kreisgleichung

$$\text{IV. } x^2 + y^2 = 2r^2 \cos^2 \alpha - \frac{2r^2}{3} \cos \alpha \sqrt{9 + 12 \sin \alpha - 13 \sin^2 \alpha} + \frac{4r^2}{3} \sin \alpha.$$

Dieser Kreis schneidet die positive Richtung unserer Abszissenachse in I ; es ist also $y_2 = 0$, sowie

$$\text{V. } AI = x_2 = r \sqrt{2 \cos^2 \alpha - \frac{2 \cos \alpha}{3} \sqrt{9 + 12 \sin \alpha - 13 \sin^2 \alpha} + \frac{4 \sin \alpha}{3}}.$$

Da unserer Vorschrift gemäß $CI_2 = \frac{2}{3} CI$ ist, so muß

$$\text{VI. } AI_2 = AC + \frac{2}{3} CI = AC + \frac{2}{3} (AI - AC) = \frac{1}{3} AC + \frac{2}{3} AI$$

sein. Der Kreis, welcher den Bogen AB in L schneidet, hat die Gleichung

$$\text{VII. } x^2 + y^2 = \overline{AI_2}^2 = m^2;$$

bestimmt man aus II. und VII. die Koordinaten $x = AN$ und $y = LN$, so hat man die zur unmittelbaren Lösung der Aufgabe dienlichen Werte gefunden; es berechnet sich

$$\text{VIII. } \begin{cases} y = LN = \frac{-m^2 \cos \alpha + m \sin \alpha \sqrt{4r^2 - m^2}}{2r}, \\ x = AN = \frac{m^2 \sin \alpha + m \cos \alpha \sqrt{4r^2 - m^2}}{2r}, \end{cases}$$

wo nachträglich

$$m = \frac{2r}{9} \left(\sin \alpha + 3 \sqrt{2 \cos^2 \alpha - \frac{2 \cos \alpha}{3} \sqrt{9 + 12 \sin \alpha - 13 \sin^2 \alpha} + \frac{4 \sin \alpha}{3}} \right)$$

zu setzen ist. Der Bequemlichkeit halber werde weiterhin $r = 1$ gesetzt.

Werden jetzt die Linien AL und BL gezogen, und wird $\sphericalangle BAL = \varphi_1$, $\sphericalangle ABL = \varphi_2$ gesetzt, so müßte, wenn die Konstruktion eine geometrisch genaue wäre, φ_1 als der auf dem Boden BL stehende Peripheriewinkel $= \frac{1}{2} \cdot \frac{4\alpha}{3}$ und $\varphi_2 = \frac{\alpha}{3}$, also $\varphi_1 = 2\varphi_2$ sein. Um die Kontrolle möglichst einfach vornehmen zu können, setzen wir

$$\cotg \varphi_1 = \frac{AN}{LN}, \quad \cotg \varphi_2 = \frac{2 \sin \alpha - AN}{LN}.$$

AN und LN lassen sich durch Einführung eines Hilfswinkels leicht in eine für die trigonometrische Rechnung bequeme Form bringen. Wir

machen nämlich $\frac{m}{2} = \cos \psi$, dann wird

$$LN = -\frac{m}{2} (2 \cos \alpha \cos \psi - 2 \sin \alpha \sin \psi) = -2 \cos \psi \cos (\alpha + \psi).$$

$$AN = \frac{m}{2} (2 \sin \alpha \cos \psi + 2 \cos \alpha \sin \psi) = 2 \cos \psi \sin (\alpha + \psi),$$

$$\begin{aligned} \cotg \varphi_1 &= -\tg (\alpha + \psi), \\ \pm \tg (90^\circ - \varphi_1) &= \tg [180^\circ - (\alpha + \psi)], \\ \pm \varphi_1 &= \alpha + \psi - 90^\circ. \end{aligned}$$

Dagegen dürfte die Berechnung von

$$\cos \psi = \frac{m}{2} = \frac{1}{9} \left(\sin \alpha + 3 \sqrt{2 \cos^2 \alpha - \frac{2 \cos \alpha}{3} \sqrt{9 + 12 \sin \alpha - 13 \sin^2 \alpha} + \frac{4 \sin \alpha}{3}} \right)$$

durch keinen Kunstgriff wesentlich der direkten Auswertung gegenüber erleichtert werden können; wir setzen demnach

$$12 \sin \alpha = p, 13 \sin^2 \alpha = q, \frac{2 \cos \alpha}{3} \cdot \sqrt{9 + p - q} = r, 2 \cos^2 \alpha = s,$$

$$\frac{4 \sin \alpha}{3} = t, 3 \cdot \sqrt{s - r + t} = u, \sin \alpha = v, \cos \psi = \frac{u + v}{9}.$$

Um uns möglichst ein Urteil über die Brauchbarkeit der Dürerschen Regel zu verschaffen, führen wir nachstehend die Rechnung für die drei Fälle

$$2 \alpha = 180^\circ, 2 \alpha = 60^\circ, 2 \alpha = 30^\circ$$

aus. Der Kalkül selbst gestaltet sich, wie folgt, in dem ersten der drei Fälle:

$$\alpha = 90^\circ, \sin \alpha = 1, \cos \alpha = 0, m = \frac{2}{9} \left(1 + 3 \sqrt{\frac{4}{3}} \right) = 0,992$$

$$\log \cos \psi = \log 0,4965 = 9,69562 - 10,$$

$$\psi = 60^\circ 15' 14'', \psi + \alpha - 90^\circ = 60^\circ 15' 14''.$$

Es sollte $\psi = \frac{2 \alpha}{3} = 60^\circ$ sein; Dürers Konstruktion ergibt also

den nicht beträchtlichen Fehler von $\frac{1^\circ}{4}$. Weit minder günstig fällt das

Ergebnis der Rechnung bei kleineren Winkeln aus, wie nachfolgendes Rechnungsschema beweist:

	$\alpha = 30^\circ$	$\alpha = 15^\circ$
$\log \sin \alpha =$	9,69897—10	9,42690—10
$+ \log 12 =$	1,07918	1,07918
$\log p =$	0,77815	0,50608
$p =$	6,00000	3,20686
$2 \log \sin \alpha =$	9,39794—10	8,85380—10
$+ \log 13 =$	1,11394	1,11394
$\log q =$	0,51188	0,96774—1
$q =$	5,25000	0,92840
$9 + p - q =$	12,75000	11,27846
$\log (9 + p - q) =$	1,10551	1,05225
$\frac{1}{2} \log (9 + p - q) =$	0,55275	0,52612
$+ \log \cos \alpha =$	9,93753—10	9,98494—10
$+ \log 2 =$	0,30103	0,30103
	$= 0,79131$	0,28597
$- \log 3 =$	0,47712	0,47712
$\log r =$	0,31419	0,80885—1
$r =$	2,06152	0,64394

$2 \log \cos \alpha = 9,87546-10$	9,96988-10
$+ \log 2 = 0,30103$	0,30103
$\log s = 0,17649$	0,27091
$s = 1,50138$	1,86600
$\log \sin \alpha = 9,69897-10$	9,42690-10
$+ \log 4 = 0,60206$	0,60206
$= 0,30103$	0,02896
$- \log 3 = 0,47712$	0,47712
$\log t = 0,82391-1$	0,55184-1
$t = 0,66667$	0,35632
$s - r + t = 0,10653$	1,57838
$\log (s - r + t) = 0,02747-1$	0,19821
$\frac{1}{2} \log (s - r + t) = 0,51374-1$	0,09911
$+ \log 3 = 0,47712$	0,47712
$\log u = 0,99086$	0,57623
$u = 9,79175$	3,76900
$\log v = \log \sin \alpha = 9,69897-10$	9,42690-10
$v = 0,50000$	0,26724
$u + v = 1,29175$	4,03624
$\log (u + v) = 0,11118$	0,60599
$- \log 9 = 0,95424$	0,95424
$\log \cos \psi = 9,15694-10$	9,65175-10
$\psi = 81^\circ 44' 52''$	$63^\circ 21' 12''$
$\alpha + \psi = 111 \ 44 \ 52$	78 21 12
$\varphi_1 = \alpha + \psi - 90^\circ = 21 \ 44 \ 52$	$\varphi_1 = 90^\circ - \alpha - \psi = 11 \ 39 \ 48$

Aus dieser Nebeneinanderstellung geht hervor, daß für sehr grofse, also zumal für stumpfe Winkel das Dürersche Verfahren eine recht leidliche Annäherung gewährt, weit weniger für spitze Winkel, die beträchtlicher von einem rechten abweichen. Mit unsern Zahlen stimmen in der Hauptsache diejenigen überein, welche Kästner 52) berechnet hat. Sein Verfahren ist kein allgemeines und macht auch nicht auf grofse Genauigkeit Anspruch; so kommt es, daß er für $2\alpha = 180^\circ$ den Fehler doppelt so grofs findet, wie wir ihn oben angaben, nämlich $= 31' 36''$; für $2\alpha = 60^\circ$ findet er die Differenz $(\varphi_1 - \frac{\alpha}{3}) = 1^\circ 54'$, während von uns diese Differenz $(21^\circ 44' 52'' - 20^\circ) = 1^\circ 44' 52''$ gefunden ward. Der rechte Winkel wird unserm Gewährsmann zufolge von Dürer ziemlich genau gedrittelt.

Mit der soeben besprochenen Winkeltrisektion, die auffallenderweise nur eine sehr geringe Beachtung sich errang *), ist gegenüber den Trisektionen der Alten bei aller Unvollkommenheit doch immer ein neuer Weg beschritten. Durch eine eigens zu diesem Zwecke erdachte Kurve, die Quadratrix, suchte schon um 420 v. Chr. der Sophist Hippias diese Aufgabe zu bewältigen 54), später trat an die Stelle jener die Konehoide des Nikomedes 55), und die Überlieferung, daß namentlich die Kreiskonehoide eine bequeme Dreiteilung des Winkels ermögliche, erhielt sich das ganze Mittelalter hindurch bei arabischen und abendländischen Mathematikern, wie uns denn von Campano und — gerade aus Dürers Zeit — von Copernicus hierauf bezügliche Bemerkungen erhalten geblieben sind 56). Unser Autor geht dagegen von einem Gedanken aus, der unwillkürlich an die Exhaustionsmethode der Griechen erinnert. Durch sehr weitläufige Betrachtungen über die Linien im Kreise hatte sich Dürer von der Richtigkeit einer Thatsache überzeugt, der wir anstatt der selbstverständlich etwas ungelassenen Darstellung des Originals 57) etwa diese Form erteilen könnten: Bedeutet $f(x)$ irgend eine trigonometrische Funktion des Winkels x , so ist niemals die Differenz $(f(x) - f(y))$ der Differenz $(x - y)$ in aller Strenge proportional, doch nähert sich die gegenseitige Beziehung der Proportionalität um so mehr, je weniger sich x und y von einander unterscheiden. So sucht also Dürer auf dem vorgelegten Bogen drei unter sich gleiche Bogen abzugrenzen, zwischen deren Endpunkten nur mehr kleine Kreisstücke übrig bleiben, und diese letzteren erst teilt er in drei Teile, welche er den auf der Sehne fixierten gleichen Strecken von geringer Ausdehnung proportional sein läßt. Dieser Schluß gewährt freilich noch keine vollständige Exaktheit, allein er ist doch ein in seiner Art ganz zutreffender, und jedenfalls befindet sich Kästner im Rechte, wenn er sagt 58): „Der Erfinder dieser unrichtigen Regel hat also in der That anfangs aus richtigen Gründen richtig geschlossen, nur weiter geschlossen, als ihm die Gründe verstatteten. In andern Wissenschaften gerät man lange nicht auf eine so vernünftige Art auf Irrtümer.“

§ 7. Umformungen mit Erhaltung des Flächeninhaltes.

Nachdem Dürer im zweiten Kapitel seines Werkes die Konstruktion regelmäßiger Polygone allseitig abgehandelt und die Verwendung

*) Wir sind neben dem Kästnerschen nur noch ein einziges Buch zu nennen in der Lage, welches der Winkeltrisektion Dürers wenigstens Erwähnung thut, nämlich den „Progressionalkalkül“ von Marpurg 53). Leider war es uns nicht möglich, Einsicht von demselben zu nehmen.

derselben zur Herstellung ornamentaler Muster gezeigt hat, wendet er sich der weitem Aufgabe zu, eine Figur unter gewissen Bedingungen in eine andere ihr inhaltsgleiche zu transformieren. Er geht hiebei durchaus korrekt vor, wendet die richtigen Regeln zur Bestimmung des Flächeninhalts der Figuren an*), was ihm umso höher anzurechnen ist, als durch die römischen Gromatiker das Flächenberechnungswesen in eine schlimme, selbst im XVII. Jahrhundert noch nicht gänzlich beseitigte Unordnung gestürzt worden war, und führt namentlich die Aufgabe, eine der Figur *A* ähnliche und der Figur *B* gleiche dritte Figur *C* zu zeichnen, sachgemäß auf die speziellere Aufgabe zurück, mittlere Proportionallinien zwischen zwei gegebenen Strecken zu suchen. Hervorragend wichtig für die Kennzeichnung der Stellung, welche Dürer in den geistigen Bewegungen seiner Zeit einnimmt, erscheint uns jedoch seine Behandlung der ersten von ihm gestellten Verwandlungsaufgabe, weil er hier zuerst die strenge Lösung angibt, dann aber durch Mitteilung einer approximativen Lösung auch auf die Wünsche der bloßen Empiriker Rücksicht zu nehmen sich gewillt zeigt. Fig. 7 macht die Worte des Autors (60) verständlich:

„Jam dignum cognitu est scire, quo pacto diversae figurae in capacitate sibi invicem fiant aequales, ut si triangulus aliquis proponatur, cui aequale quadratum sit constituendum, sic quod quadratum tantum contineat, quantum datus trigonus, quod et de aliis figuris regularibus**) censendum est, hoc in hunc modum expediatur: esto triangulus *ABC*, cuius latus *AC* divide bipartito in puncto *D* et due lineam *BD*, quae triangulum *ABC* secat per medium; tunc si medietas *ABD* invertatur atque applicetur alteri medietati *BCD*, erit *A'BCD* quadratum altera parte longius***), quod tantum comprehendit, quantum *ABC* datus trian-

*) Zu beachten ist, daß sich Dürer für den Nachweis des Satzes, welchem zufolge der Flächeninhalt eines Dreiecks gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe ist, ganz und gar eines Beweisverfahrens bedient, das zwar den Indern (59), nicht aber den Griechen geläufig ist. Es besteht darin, daß auf der Basis mit der halben Höhe als zweiter Seite ein Rechteck konstruiert wird; die Kongruenz gewisser Dreiecke springt dann ohneweiters ins Auge.

**) Im Originale steht, offenbar nur irrig, „regularis“. Man hat unter dem Worte „figura regularis“ natürlich nicht ein regelmäßiges Polygon, sondern einzig eine gradlinig begrenzte Figur zu verstehen.

***) Einigermassen auffallend ist die Unsicherheit der Bezeichnung, welche Dürer hinsichtlich des Rechtecks an den Tag legt, denn die lateinische Übersetzung schließt sich hier getreu den ursprünglichen Autorworten an. Nicht weniger wie drei verschiedene Termini bezeichnen einunddieselbe Sache.

gulus. Nunc potes ex parallelogrammo illo rectangulo quadratum conficere, quod sit aequale triangulo primitus proposito; id sic absolute. Accipe de quadrangulo $A'BCD$ duo latera, majus et minus, ea applica directe ac nota tria ejus puncta E, F, G , deinde pone in medio lineae EFG punctum H , in quo sito circini pede alio protrahe arcum ab E usque ad G , quo facto erige ex puncto F lineam perpendicularem, quae circumferentiam tangat ad signum I : si nunc quatuor lineas aequales ipsi FI ad angulos rectos jungeres, fieret ex eis quadratum aequale tetragono longo $A'BCD$ atque etiam trigono ABC . Triangulus etiam hoc modo brevitatis causa quadrato comparatur: distribue latus quadrati in duas partes, qualium tres sume pro latere trigoni, haec omnia hic oculis subjeci."

Zu dem ersten Teile dieses Absatzes ist wenig zu bemerken. Bezeichnet man die Höhe des Dreiecks mit h , dessen Grundlinie mit g , die Seite des flächengleichen Quadrats mit x , so wird x , gerade wie es hier vorgeschrieben ist, durch die Proportion

$$\frac{g}{2} : x = x : h$$

bestimmt. Uns geht hier näher bloß die im zweiten Teile enthaltene Näherungskonstruktion an, die sich freilich zunächst bloß auf das gleichseitige Dreieck bezieht. Setzt man dessen Seite a , während x seine Bedeutung von vorhin beibehält, so soll, da $LM = MK = KN = \frac{1}{3}a$ ist,

$$x^2 = \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{4}{9}a^2$$

sein, während bekanntlich in Wirklichkeit

$$x^2 = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}$$

ist. Durch Gleichsetzung beider Werte von x^2 müßte man, wofern das Verfahren einigen Anspruch auf Genauigkeit soll erheben können, einen Näherungswert für die Irrationalzahl $\sqrt{3}$ erhalten. Es wäre aber

$$\frac{a^2}{4} \sqrt{3} = \frac{4a^2}{9}, \quad \sqrt{3} = \frac{16}{9}, \quad 3 = \frac{256}{81},$$

und die dadurch erreichte Schärfe wäre eben keine besondere, da ja $\frac{16}{9} = 1,777 \dots$ und $\sqrt{3} = 1,732$ ist. Trotzdem wird uns diese ziemlich unbefriedigende Annäherung Gelegenheit zu einer nicht gleichgültigen geschichtlichen Bemerkung geben, bei der es uns allerdings nicht erspart bleibt, von Dürer vorläufig absehen und in eine ziemlich graue Vergangenheit hinaufsteigen zu müssen.

Sowohl die Zahl 3 als auch die Zahl $\frac{256}{81}$ spielen in der Geschichte der Geometrie eine eigentümliche Rolle, indem sie beide als der richtige Ausdruck für das gegenwärtig durch die Zahl π bezeichnete Verhältnis der Kreisperipherie zum Durchmesser angesehen wurden. Die Mefskunde der Semiten ging von dem Werte $\pi = 3$ aus (61), wie uns (C. 442) neben andern die biblischen Angaben über die Dimensionen des sogenannten „ehernen Meers“ beweisen*), selbst die Griechen erlaubten es sich wohl gelegentlich einmal, von jener zwar rohen aber einfachen Näherung Gebrauch zu machen (63), und ein gleiches thaten die Inder (64); so gut sie auch mit besseren Näherungswerten in der Theorie Bescheid wußten. Andererseits geht aus dem allermindestens 2000 Jahre vor Beginn der christlichen Aera verfaßten geometrischen Handbüchlein des Ahmes unzweideutig hervor, daß im alten Aegypten $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = \frac{256}{81}$ gesetzt wurde (65). Zwischen diesen beiden Näherungswerten des Orients stellt nun unsere Verwandlungsregel eine Art von Konkordanz her: es ist ebenso gestattet, das einmal π gleich 3, das anderemal gleich $\frac{256}{81}$ zu nehmen, als es gestattet ist, das nach Angabe unserer Vorschrift konstruierte Quadrat dem gleichseitigen Dreieck gleich zu setzen.

Urheber dieser empirischen Regel ist jedoch Dürer keineswegs, sie findet sich vielmehr bereits in der „Geometria deutsch“ vor und gehörte ersichtlich mit zum eisernen Bestande der Baumeistergeometrie. Gerade aus dem Verhalten des Meisters diesem traditionellen Rezept gegenüber glauben wir überzeugend unsere oben (in § 1) aufgestellte Behauptung begründen zu dürfen, daß die „Geometria deutsch“ älter ist als die „Underweysung“. Der Kompilator, welcher die erstere als Hand- und Hilfsbüchlein für seine Handwerksgenossen verfaßte, hielt die Regel offenbar für richtig und legte ihr denselben Wert bei, wie seinen anderen

*) Über die unvollkommene Kenntnis der Geometrie, die aus den betreffenden Angaben für die jüdischen Sachverständigen sich ergeben würde, ist seitens der Exegeten viel gestritten worden. So sagt z. B. der fleißige Johann Jakob Schmidt (62): „Daher die Atheisten und Bestürmer der H. Schrift recht was großes gefunden zu haben vermeinen, wodurch sie ihr Ansehen schmälern und dieselbe eines Irrtums überführen mögen, indem sie den geometrischen Wahrheiten schnurstracks zu widersprechen scheint: insonderheit hält sich der verrufene Bened. Spinoza lästerlich hierbey auf...“ Daß Spinoza berechtigt war, das tiefere Wissen der althebraeischen Baumeister anzuzweifeln, gibt heute gewiß jeder zu.

Mitteilungen; Dürers vorgeschrittene Einsicht aber, der ja (s. o.) das strenge Transformationsverfahren offen lag, führte zu einem so richtigen Urteil über die Maßnahmen der Routine, daß diesen letzteren nur noch anhangsweise ein paar Worte gegönnt wurden. Ganz mit der Überlieferung zu brechen, mochte dem Manne nicht angemessen vorkommen, der doch mit seinem ganzen Denken und Fühlen noch aufs innigste mit dem Zunftwesen, seinen Gebräuchen und Geschäftsgeheimnissen verwachsen war.

§ 8. Approximative Kreisquadratur.

Daß ein Schriftsteller der Zeitperiode, in welcher wir uns gegenwärtig bewegen, das berückichtigte Problem der Quadratur des Zirkels nicht ganz vernachlässigen konnte, liegt auf der Hand. Fig. 8 versinnlicht Dürers Lösung, die folgendermassen beschrieben wird 66):

„Operae pretium est scire quadraturam circuli, hoc est, quadratum constituere proposito circulo aequale. Sed hoc a philosophis nondum mathematice demonstratum est. At in hunc modum id expediri potest verisimiliter, ita quod in opere parum aut nihil fallat. Describe quadratum et divide diametrum ejus in decem partes aequales, ex quibus octo sume pro diametro circuli, velut hic protraxi.“

Setzt man den Diameter des Kreises $= x$, die Diagonale des ihm angeblich gleichen Quadrats $= y$, die Seite dieses Quadrats $= z$, so hat man

$$x = \frac{4}{5} y; z^2 = \frac{1}{2} y^2 = \frac{25}{32} x^2.$$

Andererseits soll $\frac{1}{4} x^2 \pi = z^2$, also

$$\frac{1}{4} x^2 \pi = \frac{25}{32} x^2$$

und $\pi = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}$ sein. Zu den genaueren Näherungswerten für π ge-

hört dieser offenbar nicht, da nach Archimedes $3\frac{10}{70} > \pi > 3\frac{10}{71}$ ist;

seiner Entstehung, über die wir von unserm Autor gar nichts erfahren, mag wohl die römische Rechenweise mit Duodezimalbrüchen zu grunde liegen. Wie nämlich Cantor festgestellt hat 67), findet sich die von Dürer gebrauchte Zahl zuerst bei dem Römer Vitruvius*); der Ent-

*) Vitruvius gibt von seiner Auffassung bezüglich der Kreisrechnung nur ganz gelegentlich Auskunft bei der Beschreibung der von ihm erfundenen

decker dieser Thatsache knüpft daran (a. a. O.) die weitere Bemerkung, er wolle zwar aus dem Zusammentreffen keine weittragenden Schlüsse ziehen, müsse aber doch auch an „die konservative Kraft der mittelalterlichen Bauhütten“ erinnern. Zugleich ersucht er alle Fachgenossen, ihm alle entsprechenden Fälle des Auftretens von $\pi = 3\frac{1}{8}$ mitteilen zu wollen.

Soviel uns bekannt, ist von Curtze, der nach Aussage Cantors in mittelalterlichen Handschriften ein paar Fälle dieser Art angetroffen hat (69), noch nichts über seine Funde veröffentlicht worden; Cantor selbst vermutet, daß man es hier mit einer sehr alten und zwar auf alexandrinischem Boden entstandenen Praktikerregel zu thun habe, die dann wie so manche ihrer Genossinnen, von denen es sich direkter beweisen läßt, ihren Weg nach Hindostan gefunden habe. Bei jenen indischen Schriftstellern nämlich, welche in den von G. Thibaut (70) bearbeiteten „*Ālvaṇtras*“ die für richtige Ausübung des brahmanischen Kultus erforderlichen mathematischen Vorkenntnisse lehren, kommt π mehrfach vor, obwohl es sich bei ihnen weniger um eine Quadratur des Kreises als, mit Cantor (71) zu reden, um eine Zirkulatur des Quadrats handelt, und wenn man die von Baudhāyana, einem dieser indischen Schriftsteller, für den erwähnten Zweck gegebene Konstruktion in Zahlen umsetzt, so zeigt sich, daß er, wie Dürer, den Durchmesser des einem Quadrate gleichen Kreises mit $\frac{8}{10}$ der Diagonale identifiziert hat.

§ 9. Das delische Problem bei Dürer.

Wir sahen in § 7, daß unser Autor für die Vervielfachung der Quadrate die richtigen Regeln angibt. Im vierten Kapitel seines

Hodometer, welche durch Radumläufe die Länge des zurückgelegten Weges zu messen gestatten (68). „*Transfertur nunc cogitatio scripturae ad rationem non inutilem sed summa sollertia a majoribus traditam, qua in via reda sedentes vel mari navigantes scire possimus quot milia numero itineris fecerimus. Hoc autem erit sic. rotae quae erunt in reda sint latae per mediam diametron pedum quaternum, ut cum finitum locum habeat in se rota ab eoque incipiat progrediens in solo viae facere versationem, perveniendo ad eam finitionem a qua coeperit versari certum modum spatii habeat peractum pedes XII s.*“ Das heißt also, es soll sein

$$4\pi = 12\frac{1}{2}, \pi = \frac{25}{8} = 3\frac{1}{8}.$$

Der Buchstabe s, welcher der Zahl XII beigelegt ist, bedeutet, wie zur Erläuterung für die der lateinischen Zahlschreibung minder Kundigen erwähnt sein möge, so viel als „*semisis*“ = Hälfte.

Werkes, welches durchaus stereometrischen Inhalts ist und hauptsächlich mit der Anfertigung der Netze für die wichtigsten Polyeder, sowie mit der Schattenkonstruktion und den Anfangsgründen der Perspektive sich beschäftigt, wird die obige Aufgabe auch auf den Raum ausgedehnt, d. h. es wird die Konstruktion eines Würfels gelehrt, welcher n mal so groß ist als ein gegebener. Allerdings ist Dürer hier nicht so originell wie sonst, er arbeitet vielmehr nach den bewährten Mustern des Altertums, aber gerade als der erste deutsche Mathematiker, der eine Reihe antiker Erfindungen in unserer Sprache darstellte und richtig würdigte, verdient er auch in dieser Hinsicht genannt zu werden, und insbesondere hätte sein Name von denjenigen nicht unterdrückt werden sollen, von denen wir Spezialschriften über die in Rede stehende Aufgabe besitzen 72).

Die Frage, auf welche es ankommt, ist diese: Es soll, wenn a die Seite eines Würfels ist, ein Würfel von der Seite x so hergestellt werden, daß

$$x^3 = na^3, \quad x = a \sqrt[3]{n}$$

wird. Dürer ist sich vollständig klar darüber, daß solche Aufgaben dritten Grades einer Lösung mit Lineal und Zirkel unfähig sind, wenn n nicht zufällig selber eine Kubikzahl ist. Nachdem er zunächst sich über Geschichte und Sinn des Problems mit ziemlicher Ausführlichkeit verbreitet hat, geht er zur Auflösung der mit jenem gleichwertigen Aufgabe über, zwischen die beiden Strecken a und na zwei mittlere geometrische Proportionallinien x und y einzuschalten. Wäre dies nämlich geschehen, so hätte man

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}, \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{na},$$

und hieraus ergäbe sich

$$x^2 = ay, \quad x^4 = a^2 y^2 = a^2 na, \quad x = a \sqrt[3]{n}, \quad y = a \sqrt[3]{n^2},$$

was konstruiert werden soll. Dürer bedient sich zur Bestimmung dreier verschiedener Methoden, deren jede insofern den Charakter einer Näherungskonstruktion trägt, als dabei ein gewisses Probieren nicht umgangen werden kann. Eine allgemeine Betrachtung vermag Dürer, dem ja die universelle Bezeichnung der Buchstabenrechnung fehlt, nicht durchzuführen, er löst vielmehr die Frage zunächst für $n = 2$, dann für $n = 3$ und sagt, man könne im gleichen Sinne beliebig fortfahren. So entspricht auch unsere Fig. 9, identisch mit Fig. 44 des Originals, nur dem erstgenannten Falle; allgemein wäre eben $BC = \frac{1}{n} CE$ zu setzen. Hören wir jetzt den Autor 73):

„Primo junge*) duos cubos ABC , hanc longitudinem AC erectam pone super transversam lineam DE ad angulos rectos et circumscribe semicirculum DAE ex centro C , deinde ex E duc rectam lineam per B usque ad circumferentiam, ubi ponatur F , deinde accipe regulam seu baculum angustum et in medio ejus signa punctum, ab hoc versus utramque extremitatem divide et cifras adpone in una parte, sicut et in altera, ut punctus medius principium unitatis sit versus utramque partem, quoniam per motum regulae quaeres primam lineam, per quam secunda invenitur ad duplicandum cubum, deinde pone jam factam regulam cum una parte super punctum D , in quo semper haereat, sive regula sursum, sive deorsum moveatur. Sed cum alteram regulae partem moves, maneat semper punctus medius super lineam ABC , et tantisper move regulam, donec invenias locum inter lineam EF et circumferentiam, et ubi mobilis regula secat lineam EF , illic pone G , et ubi secat lineam ABC , ibi pone H , et ubi circumferentia secatur, ibi locetur I . Ita erunt GH et HI duae longitudines aequales, tunc erit HC prima inventa linea, per quam inveniendum est latus duplicati cubi. . . .“

Diese Konstruktion ist nun aber, von unwesentlichen Wortzuthaten abgesehen, sinngetreu die nämliche, welche Eutocius dem Sporus zuschreibt 74) und mit einem ausführlichen Beweise versieht. Es kann also wohl kaum einem Zweifel unterliegen, daß Dürer wo nicht den Archimedes selbst so doch seinen Kommentator Eutocius gekannt hat. Woher er diese einem Künstler gewiß nicht nahe liegende Sachkunde schöpfte, ist leicht zu erkennen. Kurz vor dem Erscheinen des Dürerschen Werkes erschienen nämlich in Nürnberg die gesammelten Werke des dortigen Pfarrherrn Joh. Werner, eines wirklich bedeutenden Mathematikers**), und unter diesen befand sich auch eine Abhandlung 76), in welcher sämtliche aus alter Zeit überkommene Versuche zur Lösung des delischen Problems einer gründlichen Diskussion unterzogen wurden. Dürer selbst verstand wohl kaum genug Latein, um selbständig an das Studium dieser Schrift gehen zu können, allein es ist authentisch bezeugt 77), daß Werner mit Vorliebe den gebildeten Künstlern und Kunsthandwerkern seiner Vaterstadt bei ihren Unternehmungen mit wissenschaftlichem Beirat zur Seite stand, und so wird er wohl auch dem hervorragendsten seiner Mit-

*) Dürer, stets auf Veranschaulichung bedacht, zeichnet ein Parallelepipedium gleich dem doppelten gegebenen Würfel wirklich hin; wir glaubten von diesem Beiwerk Abstand nehmen zu dürfen.

**) Eine hervorragend ausgezeichnete Seite der wissenschaftlichen Thätigkeit Werners beleuchtete der Verf. früher einmal besonders 75.)

bürger gerne das nötige Material hinsichtlich der Würfelvervielfachung zur Verfügung gestellt haben.

Auch die beiden nächstfolgenden Verzeichnungsarten, deren Dürer gedenkt, sind dem Eutocius entnommen. Die erste derselben läuft (Fig. 10) auf folgendes hinaus 78):

„Primae duae lineae datae impares sint EB et BG ; has duas junge in puncto B ad angulum rectum, deinde duc ambas lineas ultra angulum B quantum fuerit necessarium usque ad D et C , deinde constitue duos triangulos orthogonos GCD , cujus angulus rectus sit C , alterum vero triangulum CDE , cujus rectus sit D , per quod instrumentum id fieri debeat, postea scribetur... Praedictos vero triangulos GCD et CDE fac ita. Cape regulam rectangulum RPQ , cujus rectus angulus sit P , et regulae latus PQ excavabis, et in medio rimulae collocabis regulam rectam TS , quae cum latere PQ semper faciet angulum rectum utcumque sursum sive deorsum moveatur, et ut semper TS vere parallela maneat ad latus PR regulae rectangulae RPQ . Quando haec omnia ita fuerint absoluta, tunc superpone latus PR ipsi regulae, ita ut tangat punctum G , et ut angulus rectus P situs sit super lineam EC , et ut alterum regulae latus QP jaceat super lineam DB , hic move regulam TS , donec angulus S sit super lineam DB et regula ST tangat punctum E , et cum totum hoc ita fuerit perfectum et designatum, tunc erit PR sicut CG et PS sicut CD et ST sicut DE , et ex hoc patet, quod duo trianguli GCD et CDE descripti sunt, sicut ab initio fuerant propositi, quemadmodum id in sequenti figura subscriptum vides.“

Nach Eutocius und dem von ihm mitgeteilten Briefe des Eratosthenes an Ptolemaeus Evergetes rührt diese mechanische Lösung von Platon selbst her, dem die Delier den ihnen gewordenen Orakelspruch unterbreitet haben sollen 79)*). — Dürers dritte Konstruktion endlich 80) deckt sich mit derjenigen des Heron Alexandrinus 81). Man konstruiert aus den beiden gegebenen Strecken AB und BG das Rechteck $ABGD$ (Fig. 11), halbiert dessen Diagonale AG in E und dreht nunmehr ein Lineal so um den Punkt B , daß versuchsweise die Strecken HE und ME einander gleich werden. Ist dies geschehen, so läßt sich leicht darthun, daß die Proportionen

$$AB : AH = AH : GM = GM : BG$$

bestehen, und AH ist, für $BG = n \cdot AB$, die Seite eines Würfels, dessen Inhalt durch $n \cdot \overline{AH}^3$ ausgedrückt ist.

*) Auch einen dem Dürerschen ähnlichen Apparat bildet Eutocius (a. a. O.) ab.

§ 10. **Schlussbetrachtung.**

Wir hoffen im vorstehenden die von Dürer in sein geometrisches Lehrbuch aufgenommen Näherungskonstruktionen sowohl an sich gewürdigt als auch hinsichtlich ihrer Stellung in der Geschichte der Mathematik ausreichend gekennzeichnet zu haben. Allenthalben erweist sich der große Künstler als ein Mann, der es in seinem geometrischen Wissen mit den besten seiner Zeitgenossen aufnehmen konnte, der aber den überlieferten praktischen Handgriffen gleichwohl mit einiger Pietät gegenüberstand und ihnen gerne ein Plätzchen in seinem Werke einräumte, obwohl er sich über deren eigentlichen Charakter nicht täuschte und ihnen, soweit er über solche verfügte, die strengeren Methoden voranstellte. Jedenfalls ist Dürer zugleich der erste Mathematiker, der Sinn für die Regeln der gewerblich-künstlerischen Praxis hatte, und der erste Praktiker, der in diesen Regeln nichts weiter als einen Notbehelf erkannte. Diejenigen, welche etwa mit der „Geometria deutsch“ und ähnlichen Handweisern sich behelfen, hielten die darin mitgeteilten Vorschriften zweifellos für ganz genau, während Dürer den Unterschied zwischen diesen Näherungskonstruktionen und den exakten Konstruktionen der ihm durch freundschaftliche Hilfe zugänglich gemachten griechischen Mathematiker vollauf zu würdigen wußte. Wo sich ihm nur immer die Gelegenheit darbietet, macht er auf den Gegensatz aufmerksam, der darin bestehe, ob man ein Problem „demonstrative“ oder bloß „mechanice“ löse. Die Worte, mit denen das deutsche Original die angenäherte Winkeltrisektion (s. o. § 6) abschließt — „wer es will genauer haben, der such es demonstrative“ — charakterisieren in ihrer Einfachheit besser als weitläufige Ausführungen die richtige Ansicht, welche sich Albrecht Dürer von dem Wesen einer geometrischen Näherungskonstruktion gebildet hatte.

-
- 1) J. Schopenhauer, Johann von Eyck und seine Nachfolger, 1. Band, Frankfurt 1822. S. 20.
 - 2) Venturi, Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonardo da Vinci, Paris 1797. 2
 - 3) Libri, Histoire des sciences mathématiques en Italie, Vol. III, Paris 1840. S. 1 ff. ✓
 - 4) Cantor, Leonardo da Vinci, Westermanns Monatshefte, 1878. S. 369 ff. ✓
 - 5) Leone Battista Albertis kleinere kunsthistorische Schriften, herausg. v. Janitschek, 11. Teil der „Quellenschriften zur Kunstge- ✓

schichte und Kunsttechnik des Mittelalters und der Renaissance,“
Wien 1877. S. VII ff.

6) Albrecht Dürer, Chemnitz 1823.

7) Albertus Durerus Nurembergensis, pictor hujus aetatis celeberrimus, versus e Germanica lingua in Latinam..., Lutetiae 1532.

8) Günther, Albrecht Dürer, einer der Begründer der neueren Kurvenlehre, Bibliotheca mathematica (herausg. v. Eneström), 1886. Nr. 3.

9) Tycho Brahe, Astronomiae instauratae progymnasmata, Pragae Bohemiae 1603. S. 766.

10) Vossius, De universa matheseos natura et constitutione liber, cui subjungitur chronologia mathematicorum, Amstelodami 1650. S. 297. S. 423.

11) Chasles, Geschichte der Geometrie, hauptsächlich mit Bezug auf die neueren Methoden, deutsch von Sohncke, Halle 1839. S. 623 ff.

12) Gerhardt, Geschichte der Mathematik in Deutschland, München 1877. S. 25 ff.

13) Lambert, Die freye Perspektive, oder Anweisung, jeden perspektivischen Aufriß von freyen Stücken und ohne Grundriß zu verfertigen, Zürich 1774. II. S. 17 ff.

14) Kästner, Geschichte der Mathematik, 2. Band, Göttingen 1797. S. 9 ff.

15) Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, 1. Band, Leipzig 1880. S. 335 ff.

16) Schnaase-Woltmann, Geschichte der bildenden Künste, 5. Band, Düsseldorf 1872. S. 118 ff.

17) Ibid. 6. Band, Düsseldorf 1874. S. 185.

18) Reusch, Der Spitzbogen und die Grundlinien seines Maßwerks, Stuttgart 1854.

19) Reichensperger, Das Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit von Mathias Roriczer, weylend Dombaumeister in Regensburg; nach einem alten Drucke aus dem Jahre 1486 in die heutige Mundart übertragen und durch Anmerkungen erläutert, Trier 1845.

20) Hans Schmuttermayers Fialenbüchlein, Anz. f. Kunde deutscher Vorzeit, 1881. Sp. 65 ff.

21) Günther, Zur Geschichte der deutschen Mathematik im XV. Jahrhundert, Zeitschr. f. Math. u. Phys., Histor.-litter. Abteilung, 20. Bd. S. 1 ff.

22) Hain, Repertorium bibliographicum, Vol. I, Pars I, Stuttgart-Paris 1826. S. 450.

- 23) Zeising, Ästhetische Studien im Gebiete der geometrischen Formen, Deutsche Vierteljahrsschrift, 1868, II. S. 219 ff. S. 285 ff.
- 24) Thausing, Dürer; Geschichte seines Lebens und seiner Kunst, Leipzig 1876. S. 504.
- 25) Cantor, Vorlesungen etc. S. 338; Cantor, die römischen Agri-
mensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmefskunst,
Leipzig 1875. S. 173.
- 26) Albertus Durerus etc., S. 55.
- 27) Clavius, Opera mathematica, Vol. II, Moguntiae 1612.
- 28) Woepcke, Recherches sur l'histoire des sciences mathématiques
chez les Orientaux, Paris 1855. S. 5.
- 29) Hieronymi Cardani de subtilitate libri XXI, Basileae 1543.
S. 472 ff.
- 30) Frischauf, Die geometrischen Konstruktionen von L. Mascheroni
und J. Steiner, Graz 1872.
- 31) Cantor, Vorlesungen etc., S. 383.
- 32) Albertus Durerus etc., S. 53.
- 33) Heiberg, Quaestiones Archimedeae, Hauniae 1879. S. 29. (
- 34) Cantor, Vorlesungen etc., S. 640.
- 35) Hoffstadt, Gothisches ABCBuch, Frankfurt 1840. S. 10 ff.
- 36) Kepleri Opera omnia, ed. Frisch, Vol. V, Francofurti et Er-
langae 1864. S. 224.
- 37) Kästner, Geometrische Abhandlungen, I, Göttingen 1789. S. 249.
- 38) Le Manuscrit A de la Bibliothèque de l'Institut, publié par Ch.
Ravaisson-Mollien, Paris 1881.
- 39) P. Tannery, Besprechung hiezu, Bulletin des sciences mathém.
et astron., 2. série, tome X. S. 13 ff.
- 40) Günther, Zur Gesch. etc., S. 11 ff.
- 41) Weihrauch, Geometrischer Satz, Archiv der Math. und Phys.,
48. Band. S. 116.
- 42) Affolter, Konstruktion des regelmäßigen Sieben- und Dreizehn-
ecks, Mathem. Annalen, 6. Band. S. 593.
- 43) Albertus Durerus etc., S. 56.
- 44) Schnaase-Woltmann, a. a. O., 6. Band. S. 79 ff.
- 45) Günther, Über näherungsweise Kreisteilung, Zeitschr. f. d. Real-
schulwesen, 3. Jahrgang. S. 526 ff.
- 46) Wagner, Examen methodi Renaldianae ad polygonorum omnium
ordinatorum inscriptionem generalem in circulo, (ohne Druckort) 1700.
- 47) Kästner, Geom. Abhandl., I. S. 266 ff.

- 48) v. Wolf, Der Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften letzter Teil, Halle 1717. S. 125 ff.
- 49) Cantor, Vorlesungen etc., S. 652.
- 50) Albertus Durerus etc., S. 56.
- 51) Ibid. S. 56 ff.
- 52) Kästner, Geom. Abhandl., I. S. 241 ff.
- 53) Marpurg, Anfangsgründe des Progressionalcalcüls überhaupt und des figürlichen und combinatorischen besonders, Berlin 1773. § 514.
- 54) Cantor, Vorlesungen etc., S. 166.
- 55) Ibid. S. 304 ff.
- 56) Curtze, Reliquiae Copernicanae, Zeitschr. f. Math. u. Phys., 19. Band, S. 80 ff.
- 57) Albertus Durerus etc., S. 43 ff.
- 58) Kästner, Geom. Abhandl., I. S. 248.
- 59) Cantor, Vorlesungen etc., S. 558.
- 60) Albertus Durerus etc., S. 68.
- 61) Cantor, Vorlesungen etc., S. 91; Zuckermann, Das Mathematische im Talmud, Breslau 1878. S. 29 ff.
- 62) J. J. Schmidt, Biblischer Mathematicus, Züllichau 1736. S. 159 ff.
- 63) Cantor, Vorlesungen etc., S. 340.
- 64) Ibid. S. 548 ff.
- 65) Ibid. S. 50.
- 66) Albertus Durerus etc., S. 72.
- 67) Cantor, Die röm. Agrimensoren, S. 88.
- 68) Vitruvii de architectura libri decem, ed. Val. Rose et Müller-Strübing, Lipsiae 1867. S. 263.
- 69) Cantor, Graeko-indische Studien, Zeitschr. für Math. und Phys., hist.-litter. Abteilung, 22. Band. S. 16.
- 70) G. Thibaut, The Súlvasútras, Calcutta 1875. S. 26 ff.
- 71) Cantor, Vorlesungen etc., S. 546.
- 72) Reimer, Historia problematis de cubi duplicatione, Gottingae 1798; Terquem, Notice historique sur la duplication du cube, Bull. de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques, Tome II. S. 20 ff.
- 73) Albertus Durerus etc., S. 158 ff.
- 74) Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii, ed. Heiberg, Vol. III, Lipsiae 1881. S. 91.
- 75) Günther, Johann Werner von Nürnberg in seinen Beziehungen zur mathematischen und physikalischen Erdkunde, Halle 1878.

- 76) Werner, Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi ejus problematis, quod cubi duplicatio dicitur, Norimbergae 1522.
- 77) Lochner, Des Johann Neudörfer, Schreib- und Rechenmeisters zu Nürnberg, Nachrichten von Künstlern und Werkleuten daselbst aus dem Jahre 1547, Wien 1875. S. 48 ff. S. 71 ff.
- 78) Albertus Durerus etc., S. 164 ff.
- 79) Archim. Opera etc., S. 66 ff.; Cantor, Vorlesungen etc., S. 181. S. 195.
- 80) Albertus Durerus etc., S. 166.
- 81) Archim. Opera etc., S. 70 ff., Cantor, Vorlesungen etc., S. 317.

