



Heidelberger Texte zur Mathematikgeschichte

Autor: **Staigmüller, Hermann** (1857–1908)
Titel: **Dürer als Mathematiker**
Quelle: Programm des Königlichen Realgymnasiums in
Stuttgart.
1890/91,
Seite 3 – 59.
Signatur UB Heidelberg: N 1178::1891

Da „die wichtigste, ja fast einzige Quelle zur Beurteilung Dürer's als Mathematiker seine Unterweisung der Messung mit Zirkel und Richtscheit ist“, so ist auch demgemäss die Hauptsache der vorliegenden Programmschrift eine sorgfältige Analyse jener „Unterweysung“ vom Jahre 1525 unter teilweiser Beiziehung der Auflage vom Jahr 1538; zahlreiche Nachbildungen von Dürer's Figuren erleichtern das Verständnis. Der Verfasser hat sich aber nicht mit einer Analyse begnügt; eine rück- und vorschauende begleitende geschichtliche Betrachtung vertieft den Wert seiner Abhandlung und erschliesst das volle Verständnis für Dürer's Leistung, und zahlreiche beigefügte Fussnoten geben in heutiger mathematischer Sprache teils Erläuterungen teils Weiterführungen von Dürer's Auffassung und kritisieren dabei Meinungen anderer (so betreffs der Schneckenlinien, der asymptotischen Curven, der planimetrischen Construction der Ellipse, der Dürer'schen Muschellinie, der Dreiteilung eines Winkels, des Vitruv'schen Wertes von π , des Distanzpunktes). Zum Schluss erörtert der Verfasser die Quellen, aus denen Dürer geschöpft hat, und erkennt als wichtigste die Zunfttradition der Bauhütte, mündliche Unterweisung Befreundeter, die reichen literarischen Schätze Nürnbergs und — last not least — die eigene Befähigung unseres grossen Meisters.

(Rezension von Peter Treutlein (1845–1912) im *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, Band 23, 1891)

PROGRAMM
des
Königlichen Realgymnasiums
in
Stuttgart

am
Schlusse des Schuljahrs 1890/91.

Inhalt: 1) Dürer als Mathematiker, von Professor Dr. H. Staigmüller.
2) Nachrichten über das Schuljahr 1890/91, von Rektor v. Dillmann, Oberstudienrat.



STUTTGART.

Druck der K. Hofbuchdruckerei Zu Gutenberg (Carl Grüniger).
1891.

Jahrgang 1891.
Progr.
Num. 690.

Dürer als Mathematiker.

Die Wahl des vorgelegten Themas bedarf wohl keiner Rechtfertigung; es muss im Gegenteil auffallen, dass der Name „Dürer“ nicht schon längst genügte, auch den mathematischen Leistungen seines Trägers eine eingehende Würdigung zu verschaffen. Dieses Erstaunen ist um so gerechtfertigter, wenn wir bedenken, welche Bedeutung Dürer selbst seinen theoretischen Arbeiten zuschrieb. Verfasste er sie doch in seinen letzten Lebensjahren, nachdem er müde den Pinsel weggelegt hatte, um in ihnen das, was er schaffend sich selbst erworben hatte, der Mit- und Nachwelt zu übergeben. Ja er lebte der Hoffnung, durch diese Werke noch mehr als durch die unsterblichen Schöpfungen seines Pinsels den Grund zu einer „deutschen Kunst“ zu legen, denn er erblickte gerade in dem Mangel an theoretischem, speziell auch mathematischem Wissen bei den deutschen Künstlern seiner Zeit den Haupthemmschuh einer gedeihlichen Entwicklung der Kunst seines Vaterlandes. So schreibt z. B. Dürer in der Vorrede (Brief an Pirkheimer) zu seinem Werke „von menschlicher Proportion“: *„Dann es muß gar ein spröder verstand sein | der jme nit trawet auch etwas weyters zuerfinden | sonder ligt allwegen auff der alten pan | volgt allein anderen nach | und untersteet sich nichten weiter nach zudencken | Derhalb gebürt einem yeglichen verstendigen also einem anderen nachzuolgen | das er nit verzweyffel | das er mit der zeyt auch ein pessers erfinden mög | dann so das geschicht | darff es keinen zweyffel | das dise kunst mit der zeyt wider wie vor aller | ir vollkommenheit erlangen mög | dann offenbar ist | das die Teutschenn maler mit ier hand umd prauch der farben nit wenig geschickt sind | wiewol sy bissher an der kunst der messung | auch Perspectiva und anderem dergleichen mangel gehabt haben Darumb wol zu hoffen | wo sy die auch erlangen | und also den prauch un kunst miteinander überkommen | sy werden mit der zeit keiner anderen Nation den preys vor jnen lassen | Damit auch dis mein underrichtung destpafs verstanden mög werden | hab ich hievor ein puch der messung | als nemlich linien oben corpor etc. betreffend | auflassen geen | on welche dise mein leer nit grüntlich verstanden mag werdenn | Darumb thut einem yglichen der sich diser kunst understeen wil not | das er zuvor der messung wol underricht sey | und einen verstand überkomme | wie alle ding in grund gelegt | und auffgezogen sollen werden“*.¹

Allerdings ist es leicht verständlich, dass in erster Linie der Kunsthistoriker Dürer zum Vorwurfe seiner Studien wählt, und ebenso leicht verständlich ist es, dass hiebei die Darstellung und Würdigung der mathematischen Leistungen Dürers zu kurz kommen muss. Thausing

¹ Ein Ding in Grund legen und aufziehen heisst, von demselben die Horizontal- und die Vertikalprojektion zeichnen.

selbst, dem wir das beste Werk über Dürers Leben und Kunst verdanken, deutet dies mit den Worten an¹: „Ja es übersteigt vielleicht überhaupt die Kräfte und den Wissenskreis des einzelnen, einer so vielseitigen Geistesthätigkeit auf allen ihren Spuren zu folgen. Die Kunstgeschichte steht hier vor denselben ungeheueren Schwierigkeiten wie bei Lionardo da Vinci.“ Trotz alledem bleibt es auffallend, dass selbst aus neuester Zeit ausser einigen Abhandlungen Günthers² keine auf eingehender Forschung beruhende Arbeit über Dürer als Mathematiker vorhanden ist, da doch gegenwärtig endlich auch in der Mathematik historischen Studien die ihnen gebührende Würdigung entgegengebracht wird. Wohl wird Dürer in den meisten Werken erwähnt, welche die Geschichte der Mathematik seiner Zeit behandeln, auch werden hin und wieder einzelne seiner Leistungen besprochen, doch nirgends wird eine Darstellung und Würdigung seiner gesamten Thätigkeit als Mathematiker auch nur versucht. Entschieden die beste und selbständigste der hieher gehörigen Darstellungen giebt Chasles³, weiterhin ist dann Gerhardt⁴ zu nennen und Kästner⁵ endlich bietet, wie bei ihm nicht anders zu erwarten, nur eine Inhaltsübersicht über Dürers mathematische Arbeiten. In den noch übrigen Werken, welche in Betracht kämen und welche mir zugänglich waren, fand ich Dürer als Mathematiker entweder nur kurz erwähnt oder es zeigten die betreffenden Abschnitte, dass nicht eingehendes Selbststudium ihre Quelle war⁶. Auch Zahn will in seinem Werke über Dürers Kunstlehre⁷ die uns beschäftigende Seite von Dürers Thätigkeit wenigstens einigermaßen in den Bereich seiner Betrachtungen ziehen. Aber so feinsinnig und scharf die Urteile Zahns über Dürers Kunsttheorie sind, so mangelhaft, ja oft geradezu falsch sind manche seiner Urteile über dessen mathematische Leistungen. Ich werde im Verlaufe dieser Arbeit ein paar Mal auf solche falsche oder schiefe Urteile Zahns kommen müssen, da dieselben auch in andere Werke Eingang gefunden haben.

Dies waren die Gründe, welche mich bestimmten, die mathematischen Leistungen Dürers in ihrer Gesamtheit zum ausschliesslichen Gegenstand vorliegender Arbeit zu machen.

Bei diesem Thema liegt in erster Linie die Versuchung nahe, auf den Zusammenhang einzugehen, in dem Kunst und Mathematik zu einander stehen; ist doch in diesem Zusammenhange die Ursache zu suchen, warum ausser Dürer auch noch andere hervorragende Künstler

¹ Dürer. Geschichte seines Lebens und seiner Kunst von Moriz Thausing. Leipzig 1876. S. 501/502.

² Siegmund Günther: Die geometrischen Näherungskonstruktionen A. Dürers. Ansbacher Programm 1885/86.

Siegmund Günther: Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter. Berlin 1887. In Kehrbauchs: Monumenta Germaniae Paedagogica. S. 354—370.

Siegmund Günther: Albrecht Dürer, einer der Begründer der neueren Kurvenlehre. Bibliotheca mathematica 1886. Nro. 3.

³ Chasles: Aperçu historique etc. Deutsch von Sohncke als Geschichte der Geometrie. 1839. S. 623/625.

⁴ Gerhardt: Geschichte der Mathematik in Deutschland 1877. S. 25—27.

⁵ Kästner: Geschichte der Mathematik 1796/1800. I. Bd. S. 684—697.

⁶ Arneth: Geschichte der reinen Mathematik 1852. S. 225.

Doppelmayr: Historische Nachrichten von den Nürnbergischen Mathematikern und Künstlern. Nürnberg 1730. S. 44—45, S. 153—155, S. 177 ff.

Fink: Kurzer Abriss einer Geschichte der Elementarmathematik 1890. S. 172—178.

Weiterhin wird unter anderen in folgenden Werken Dürer als Perspektiviker gewürdigt:

Schreiber: Lehrbuch der Perspektive, II. Auflage, durchgesehen von Viehweger. S. 48.

Tycho de Brahe: Astronomiae instauratae Progymnasmata 1603. I. S. 766.

Wiener: Darstellende Geometrie 1884. I. S. 10 u. f. und S. 461.

⁷ A. v. Zahn: Dürers Kunstlehre. Leipzig 1866.

der Renaissance sich mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschungen zuwandten. Ich nenne hier nur Leone Battista Alberti und Lionardo da Vinci. Doch würde ein Eingehen auf solche Fragen mich von meinem engumschriebenen Thema abführen, und ich muss mich begnügen, in diesen einleitenden Worten wenigstens jenen Zusammenhang, der sicher besteht, der aber ja nicht zu äusserlich aufgefasst werden darf, berührt zu haben. Gefährlich ist es, denselben so zu charakterisieren, wie es Reichensperger thut, welcher in der Einleitung zu seiner Ausgabe von Roriczers Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit schreibt: „Der Gedanke eines jeden wahren Kunstwerks ist seinen letzten Gründen nach wesentlich mathematischer Natur, seine obersten Gesetze sind die Gesetze der Mathematik¹.“ Bei solcher Fassung liegt die Gefahr nahe, dass ein Künstler verleitet wird, einen Entwurf, wenn ich so sagen darf, nach mathematischem Rezept zu komponieren, und selbst Dürer ist, wie wir im Verlaufe dieser Arbeit sehen werden, wenigstens in seinen theoretischen Schriften teilweise in diesen Fehler verfallen. Ebensowenig wie auf die angeregte Frage kann ich auf biographisches Detail eingehen; doch solches neben dem schon oben erwähnten vorzüglichen Werke Thausings geben zu wollen, hiesse auch: „*Ἰκάνωτα εἰς Ἀθήνας*“.

Die wichtigste, ja fast einzige Quelle zur Beurteilung Dürers als Mathematiker ist dessen: „*Underweysung der messung | mit dem zirckel uñ richtscheyt | in Linien ebenen und gantzen corporen | durch Albrecht Dürer zu samen gelzogē | und zu nutz allē kunstlich habenden mit zu gehörigen figuren | in truck gebracht | im jar MDXXV.*“ Hiezu bilden gelegentliche Bemerkungen in anderen wissenschaftlichen Werken Dürers, sowie handschriftliche Bruchstücke etc. nur ganz unwesentliche und geringfügige Ergänzungen. Ehe ich jedoch zu Zweck und Inhalt jenes Werkes selbst übergehe, mögen mir ein paar bibliographische Notizen zu demselben gestattet sein.

Jenes Werk erschien ausser in der eben erwähnten, noch von Dürer besorgten Ausgabe in zweiter, vermehrter und verbesserter Auflage unter folgendem Titel: „*Underweysung der Messung | mit dem Zirckel und richtscheyt | in Linien Ebenen uñ gantzen Corporen | durch Albrecht Dürer zusamen gezogen | uñ durch ju selbs (als er noch auff erden war) an vil orten gebessert | in sonderheyt mit .XXII. figurē gemert | die selbigen auch mit eygner handt auffgerissen | wie es dann cyn yder werckman erkennen wirdt | Nun aber zu nutz allen kunst liebhabenden in truck geben. 1538.*“ Am Schlusse steht: „*Geedruckt Zu Nürenberg durch Hieronymum Formschneyder Anno MDXXXVIII.*“ Ein selbst bis auf das Druckfehlerverzeichnis wortgetreuer Abdruck der 1. Auflage ist in der von J. Jansen 1603 veranstalteten Gesamtausgabe der Werke Dürers enthalten. Diese Ausgabe führt den Titel: „*Opera Alberti Dureri. Das ist | Alle Bücher des weitberühmbten und Kunstreichen Mathematici und Mahlers Albrechten Dürers von Nürenberg | so viel deren von ihm selbst in An. 1525 und 1528 kurtz vor und gleich nach seinem todt in Truck geben. Nemblich | vier von underweisung oder underrichtung der messung | mit dem Cirkul und Richtscheit | in Linien | ebenen und gantzen Corporen. Item | vier von der Proportion des Menschlichen Corpers | und letztlich | eins von der Befestigung der Stätt | Schlösser und Flecken | etc. Allen respectivē Maltern | Steinmetzern | Bildhauern und Schnitzern | Goldtschmidten | Bau und Bergmeistern | Feldhern | Kriegsobristen | Hauptleuthen | Befehlhabern | Büchsenmeistern | und dergleichen kunstlichhabern | sonderlich nützlich und nohtwendig. Jetzo denselben zum besten | aufs mangel der Exem-*

¹ M. Roriczer: Das Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit 1486. 1845 neu herausgegeben von A. Reichensperger. S. 7.

plarien | mit sein selbst eigenen gemachten und geschnittenen zugehörigen Figuren | von neuem aufgelegt und getruet. Zu Arnem | Bey Johan Jansen | Buchführer daselbst. Anno MDCIII.“ Eine Vorrede, welche der Verleger seinem Drucke beigiebt, enthält einige biographische Notizen über Albrecht Dürer, sowie bibliographische Notizen über dessen Werke. Von letzteren Notizen möchte ich eine, welche für den Kunsthistoriker nicht ohne Interesse sein dürfte, wörtlich abdrucken. „*Die weil nun solche seine opera und Bücher | jederzeit in sonderbarer achtung gewesen | uñ noch | die Exemplaria aber vorigen Tracts gützlich auffgangen und verkauft (ausserhalb dafs in unterschiedlichen sprachen nachgetruet | und nach geschnitten |) Ich aber sein selbst eigene gemachte und geschnittene Auctotypa und Figuren | zu handten bracht. Als hab ich | sonderlich für der kunsten liebhaber | nützlich und dienstlich gedaucht | solch werk wider aufzulegen | und aufs new zu trucken.*“ Ausser diesen deutschen Ausgaben der „Unterweisung“ erschien auch eine lateinische Übersetzung derselben in verschiedenen Auflagen und zwar in den Jahren 1532—1535 in Paris, im Jahre 1538 in Nürnberg und 1605 oder 1606 in Arnheim. Diejenige von diesen Ausgaben, welche mir durch die hiesige Staatsbibliothek zugänglich war, führt den Titel: „*Albertus Durerus Nurembergensis pictor hujus aetatis celeberrimus, versus à Germanica lingua in Latinam, Pictoribus, Fabris aerariis ac lignariis, Lapidis, Statuariis, et universis demum qui circino, gnomone, libella, aut aliqui certa mensura opera sua examinant, propè necessarius: adeò exactè Quatuor his suarū Institutionum Geometricarum libris, lineas, superficies et solida corpora tractavit, adhibitis designationibus ad eam rem accommodatissimis. Demò ad scripti exemplaris fidem omnia diligenter recognita, emendatius iam in lucem exeunt. Parisiis. Ex officina Christiani Wecheli, sub scuto Basiliensi. MDXXXIII.*“

Als Dürer die Feder ergriff, um seine Unterweisung zu schreiben, war es weder seine Absicht, von ihm selbst entdeckte mathematische Wahrheiten einem grösseren mathematisch gebildeten Publikum darzulegen, noch ein streng systematisches Lehrbuch der Geometrie, etwa im Sinne Euklids, zu schreiben, sondern er wollte einzig und allein dem schon in der Praxis stehenden angehenden Künstler oder Handwerker so viel von dieser Disziplin bieten, als dieser zu seinem Berufe nötig hat. Dementsprechend beginnt er sein Werk mit den Worten: „*Der aller scharff sinnigst Euclides | hat den grundt der Geometria zusamē gesetzt wer den selben woll versteht | der darff diser hernach geschriebten ding gar nit | dann sie sind alleyn den jungen und denen so sonst niemandt haben der sie trewlich underweyßt geschryben.*“ Noch deutlicher spricht er seine Absicht in dem Briefe an seinen Freund Pirckheimer aus, den er seinem Werke vorausschickt und in welchem er dasselbe diesem Freunde widmet. Da für die spätere Beurteilung des Inhalts der Unterweisung natürlich der Zweck, welchen dieselbe verfolgt, massgebend sein muss, so möge dieser Brief, der auch sonst für die Beurteilung Dürers interessant ist, in wörtlichem Abdrucke folgen.

Meynem in sonders lieben herren und freunt | herrn Wilbolden Pirckheymer | wünsch ich Albrecht Dürer | heyl und seligkeyt günstiger herr und freunt | man hat byfsher in unsern deutzschen lunden | vil geschickter jungen | zu der kunst der mallery gethon | die man an allen grundt umd alleyn aufs einem täglichen brauch gelert hat | sind die selben also im unverstand wie cyn wylder unbeschnytener baum auff erwachsen | Wie wol etlich aufs jnen durch stetig übung cyn freye hand erlangt | also das sie jre werck gewaltiglich aber unbedecklich | umd alleyn nach jrem wolgefalle gemacht haben | So aber die verstendigen maler und rechte künstner | solchs unbesunnen werck gesehen | haben sie und nit unbillich diser leut blindtheit gelacht | die weyl einem rechten verstand nichts unangenemer zu sehen ist | daß falscheit im gemel | unan-

gesehen ob auch das mit allem fleiß gemalt wirdet | Das aber solche maler wolgefallen in jren
 yrlumben gehabt | ist alleyn ursach gewest | das sie die kunst der messung nit gelernt haben |
 an die keyn rechter werckmaß werde oder seyn kan | Das aber jr meyster schuld gewest die
 solche kunst selbs nit gekündt haben | Die weyl aber die der recht grundt ist aller mallerey |
 hab ich mir fürgenomen allen kunstbegirigen jungen | eyn anfang zustellen | und ursach zu-
 geben damit sie sich der messunge zirkels und richtscheyt | underwinden und darauß die
 rechten warheyt erkennen und vor augen sehen mögen | damit sie nit alleyn zu künsten begirig
 werden | sonder auch zu eynem rechten und grösseren verstant komen mögen | Unangeschen das
 ist bey uns und in unseren zeyten die kunst der malerey | durch etliche seer veracht und ge-
 sagt will werden | die diene zu Abgötterey | dann eyn yeglich Christen mensch | wirdet durch
 gemel oder byldniß als wenig zu einem affterglauben gelzogen | als eyn frömer mañ zu eynem
 mord | darumb das er ein waffen an seiner seyten tregt | müst warlich eyn unverständig mensch
 seyn | der gemel | holtz | oder steyn anbetten wöll | Darumb gemel mehr besserung dann erger-
 nufs bringt | so das erberlich kunstlich und woll gemacht is | In was eren und werden aber
 dise kunst bey den Krieechen und Römern gewest ist | zeygen die alten bücher genugsam an |
 Wie woll sie nachfolgent gar verloren und ob tausent jaren verborgen gewest | und erst in
 zweyghundert jaren wider durch die Walthen an tag gebracht ist worden | Dann gar leychtlich
 verlieren sich die künst | aber schwerlich und durch lange zeyt werden sie wider erfunden |
 Demnach hoff ich diß meyn fürnemen und underweysung | werde kein verstendiger dadlen |
 die weyl es auß einer gutten meynung und allen kunstbegirigen zu gut geschicht | und auch
 nicht alleyn den maleren | sonder Goldschmiden Bildhaueren Steynmetzen Schreyneren und
 allen den so sich des maß gebrauchen dienstlich seyn mag | ist niemand gezwungen sich diser
 meiner ler zu brauchen | ich weyß aber woll wer sich der understeen | wirdet nit allein eynen
 grüntlichen anfang darauß fassen | sonder durch den täglichen brauch | zu eynem grössern
 verstand reichen | weytter suchen un gar vil mehr dan ich yltz anzeyg erfinden | Die weyl ich
 aber günstiger herr und freündt weyß | das jr eyn liebhaber aller kunst seyt | hab ich euch
 dises büchlein auß sonderer zueygunng und freuntlichen willen zu geschriben | nit darumb das
 ich vermeynt ich het euch was graß oder firtreffentlichs damit bewysen | Souder das jr darauß
 meinen geneygten un guten willen versteeen und ermesen möcht | ob ich euch gleychwol nit
 meinem wercken nit sonders erschließlich seyn mag | das dannoch meyn gemüt allzeyt bereyt
 were | euch euer gunst und lieb so jr zu mir tragt mit gleicher widerlegung zubezahlen.

Den hier so klar und deutlich ausgesprochenen Zweck der Unterweisung müssen wir
 uns bei der nun beginnenden Analyse¹ ihres Inhaltes stets vor Augen halten, um nicht zu
 übereiltten oder falschen Schlüssen zu gelangen.

Dürers „Unterweisung“² zerfällt in 4 Bücher. Das erste Buch handelt von den Linien,
 das zweite von den Flächen³, das dritte von den Körpern; doch werden die 5 sogenannten
 platonischen Körper, sowie 7 der archimedischen⁴ nebst der delischen Aufgabe erst im vierten

¹ Wenn ich hiebei einige durch Dürers Werk angeregte Untersuchungen in den beigegebenen An-
 merkungen manchmal eingehender mathematisch behandle, als zur historischen Würdigung unumgänglich not-
 wendig wäre, so bitte ich dies damit zu entschuldigen, dass vorliegende Arbeit als Schulprogramm auch diesem
 oder jenem Leser, der speziell historischen Fragen kein besonderes Interesse entgegenbringt, etwas bieten
 möchte. Doch werde ich mich in derartigen Ausführungen so kurz wie möglich fassen.

² Ich lege dieser Analyse des Inhalts der Unterweisung, sofern ich nichts anderes bemerke, die erste,
 von Dürer noch selbst besorgte Ausgabe vom Jahre 1525 zu Grunde.

³ Dürer selbst gebraucht das Wort Ebene im allgemeinen Sinn von Fläche.

⁴ Die Formschneider'sche Ausgabe vom Jahre 1538 enthält 9 der 13 archimedischen Körper.

Buche behandelt, welches Buch ausserdem noch einen kurzen Lehrgang der Perspektive enthält. — Das erste Buch beginnt Dürer mit den euklidischen¹ Definitionen der Begriffe Punkt, Linie, Fläche und Körper. Hierbei ist bei ihm als Künstler selbstverständlich, dass er sich nicht allein mit den Definitionen begnügt, sondern durch beigelegte Holzschnitte „den innerlichen verstand im eussern werck antzeigt“; jedoch nicht ohne den Unterschied zwischen der „mathematischen“ und der „graphischen“ Linie zu betonen². Gleich im Anschlusse an diese ersten Abbildungen spricht Dürer den Vorsatz aus³: „Darumb will ich alle ding | die ich in diesem büchlin beschreib | auch darneben auffreissen | auff das meyn darthon | die jungē zu einer einbildung vor augen sehen | Und dest bafs begreifen.“ Nach der Definition der Linien werden sogleich 3 Arten derselben benannt und in Zeichnungen vorgeführt, nämlich die gerade Linie, die Kreislinie und die Schlangenlinie. Hierauf werden parallele⁴ Linien als solche definiert, welche „allweg gleych weyt von eynder laufen“ und dieser Begriff ausdrücklich nicht bloss auf gerade Linien beschränkt⁵. Hierzu macht Dürer die Bemerkung, dass zwei nebeneinander stehende lotrechte gerade Linien nicht eigentlich parallel — im mathematisch strengen Sinne — seien, denn sie treffen sich im Erdmittelpunkt; dass sie aber dennoch „für bairlinien gebraucht werden | ist aufs der ursach | das sie so weyt als nemlich hifs ins mittel des erdrichs zulauffen haben | derhalb das unserm synn im gesicht unmerklich wirdet und ist |“ Wie dann weiterhin an die Definition der Fläche sich die Aufzählung resp. Konstruktion der Ebene⁶, der Kreisfläche, der Kugelfläche und der Cylinderfläche⁷ anschliesst, so folgt auf die Definition des Begriffs Körper die Konstruktion des Würfels und der Kugel.

Nach dieser Einleitung geht nun Dürer zur Behandlung verschiedener Arten krummer Linien über. Hier sind es zunächst Spirallinien⁸, die in hohem Grade sein Interesse fesseln,

¹ Doch benützt Dürer daneben teilweise auch den Begriff der Bewegung zur Definition dieser Elementargebilde.

² Auf diesen Unterschied weist Dürer auch in seinem Werke „Vier Bücher von menschlicher Proportion“ hin. Vergleiche Buch III Blatt O III Seite 1.

³ Auch in andern Stellen spricht sich Dürer über die grosse Wichtigkeit von Abbildungen für den Unterricht aus. In den handschriftlich erhaltenen Bruchstücken zu der Vorrede eines von ihm geplanten, aber nicht mehr zur Ausführung gebrachten Werkes, das den Titel „Eine Speise der Malerknaben“ führen sollte, ist z. B. folgender Satz enthalten: „Ein jegliches Ding, das du siehst, ist dir glaublicher denn das, das du hörst; so aber beides gehört und gesehen wird, fassen wir das desto kräftiger und bleibt es uns beständiger.“ Vergleiche: Zahn, Dürer-Handschrift. Jahrb. für Kunstwissenschaft I. S. 5.

⁴ Dürer sucht in seinem Werke durchweg die fremdsprachlichen Kunstaussdrücke durch deutsche zu ersetzen und geht hierbei so weit, dass, wenn ihm kein passendes Wort zur Verfügung steht, er ein neues Wort bildet. So schreibt er bei der Definition des Begriffs parallel: „Auch ist not zu wissen | was Paralell lini sind | im Latein also genant | die ich in unserm deutsch parr Lini will heissen.“

⁵ Obige Definition umfasst auch die sogenannten Parallelkurven. Soll zu einer Kurve von der Gleichung $f(x, y) = 0$ die Parallelkurve im Abstand a gefunden werden, so erhält man bekanntlich deren Gleichung in den laufenden Koordinaten ξ und η , wenn man x und y aus folgenden drei Gleichungen eliminiert:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x, y) = 0 \\ \xi - x = -\frac{dy}{dx} \\ \eta - y = \frac{dx}{dy} \\ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = a^2 \end{array} \right.$$

⁶ Dürer spricht hier die Absicht aus, unbegrenzte Flächen nicht in den Kreis seiner Betrachtung zu ziehen, und so betrachtet er auch nur ein quadratisches Stück der Ebene. Diese Absicht steht mit dem Titel seines Werkes im Einklang.

⁷ Die Cylinderfläche nennt Dürer „Eyn bogne ebne“. Zu dieser Bezeichnung macht Günther die hübsche Bemerkung, in ihr trete die Eigenschaft developpabler Flächen, ohne Falten in eine Ebene übergeführt werden zu können, hervor.

⁸ Dürer nennt sie kurzweg Schneckenlinien.

und zwar zeigt er zuerst die Konstruktion der sogenannten „ionischen Schnecke“ aus einer Reihe von Halbkreisen. Sodann wird die archimedische Spirale behandelt. Dieselbe zeichnet Dürer folgendermassen. Zuerst teilt er eine Kreislinie in eine bestimmte Anzahl¹ gleicher Teile und den Radius q dieses Kreises in ebensoviel oder in 2, 3 etc. mal mehr gleiche Teile, je nachdem er einen, zwei, drei oder mehr Umläufe zeichnen will. Auf den nach den Teilpunkten der Kreislinie gezogenen Radien trägt er dann der Reihe nach 1, 2, 3 etc. Teile des Radius ab und verbindet die erhaltenen Punkte stetig durch eine Kurve. Nun wird diese Spirale abgeändert und zwar will Dürer „*aussen zwischen der schnecken lini die felt erweytern | und hynen enger machen.*“ Hiezu legt er q mit einer beliebigen andern Strecke erstens unter einem rechten, zweitens unter einem stumpfen Winkel zusammen und teilt im so erhaltenen Dreieck den q gegenüberliegenden Winkel² in so viel gleiche Teile wie vorhin den Radius. Diese Teilungslinien teilen q in einer gewissen Art und Weise und der so geteilte Radius wird nun ganz analog wie vorhin der gleichförmig geteilte Radius verwendet³. Am Schlusse sagt Dürer: „*du siehst wie eins hübscher dann das ander ist*“⁴. Dem Zwecke des Werkes entsprechend zeigt jetzt Dürer sogleich, wie diese Schneckenlinien ornamental⁵ zu einem Bischofsstab und zu einem „*law bossen*“⁶ verwendet werden können, wie er auch schon bei der ionischen Schnecke ihre Verwendung zu einem „*horneiffen*“⁷ andeutete.

Um gleich zu Anfang seines Werkes die Prinzipien der Orthogonalprojektionslehre an irgend einem Raumgebilde zu zeigen, will Dürer zuerst seine Spirale „*von unten übersich ziehen lernen*“, um sodann dieselbe Operation am einfachen Kreise vorzunehmen und so die Schraubenlinie zu erhalten. Dass bei dieser Reihenfolge Dürer die mathematisch schwierigere Aufgabe vor der leichteren behandelt, hat seinen vollwichtigen Grund darin, dass das Aufziehen — zunächst materiell gedacht — an der Spirale, deren Windungen von einander getrennt sind, leichter vorzustellen ist, als an einem mehrfach zu nehmenden Kreise. Dürers Konstruktion, welche nur ein getreues Abbild jenes zunächst mechanisch gedachten Vorgangs ist, wird deshalb bei der ersten Aufgabe von Anfängern leichter durchschaut als bei der zweiten. Bei beiden Aufgaben geht Dürer von der Horizontalprojektion aus und giebt nur an, welche Linien zu ziehen sind, um die Vertikalprojektion zu finden; dabei unterstützt er

¹ Dürer wählte für seine Figur die Zahl 12, spricht jedoch aus, dass die Zeichnung um so genauer werde, je mehr Teile man nehme.

² Wie dies zu machen sei, wird nicht gesagt.

³ Während die Polargleichung der gewöhnlichen (archimedischen) Spirale $\rho = a \cdot \omega$ ist, wären die Gleichungen der beiden anderen „Dürer'schen Schneckenlinien“

$$\rho = a \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\omega}{n}\right) \qquad \rho = \frac{a \cdot \sin\left(\frac{\omega}{n}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\omega}{n}\right)}$$

Man hat es also in den beiden letzten Fällen mit keinen Spirallinien im engeren Sinne zu thun, da ja der Radius Vektor eine periodische Funktion des Winkels ist. Doch würden je nach der Wahl von n eine grössere oder kleinere Anzahl von Windungen jeweils zusammen ein Bild bieten, das an eine Spirallinie erinnerte.

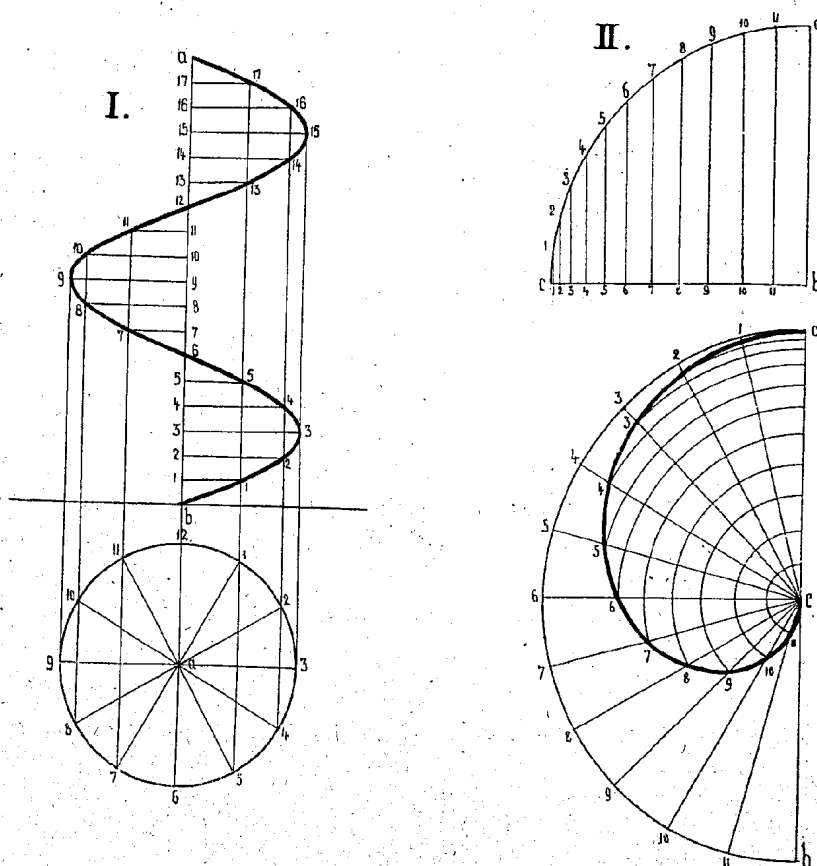
⁴ Ich bin auf dieses Beispiel etwas näher eingegangen, um an ihm zu zeigen, wie das treibende Moment bei Dürer vor allem die Freude an der Gestalt ist, denn eine mathematische Behandlung vor allem der beiden letzten Schneckenlinien hätte weit die Grenzen seines und seiner Zeit Könnens überschritten.

⁵ Die Figuren zu den hiezu durchgeführten Konstruktionen legen die Vermutung nahe, dass Dürer glaubte, der Radius Vektor stehe senkrecht zur Spirallinie, hingegen möchte ich der Vermutung Günthers: Dürer habe die links und rechts gewundene Spirale nicht als identisch erkannt, nicht unbedingt beitreten.

⁶ = Krabbe.

⁷ = Volute an einem Kapital.

natürlich seine Worte durch Figuren¹. Beistehende Fig. I, welche der Unterweisung entnommen ist, zeigt Dürers Verfahren. In der ganzen Behandlung dieser Aufgaben verrät sich eine grosse Vertrautheit mit dem handwerksmässigen Grund- und Aufrisszeichnen, wie dasselbe z. B. bei den Baugewerben unerlässlich ist. Dürer weist auch ausdrücklich auf die Wichtigkeit² der Schraubenlinie in ihrer Verwendung zu Wendeltreppen hin und fügt hinzu: „wie daß die Steynmetzen das in jrem aufreissen sollen wissen zu machē | und durch verückung der grundbretter in das werk ziehen.“

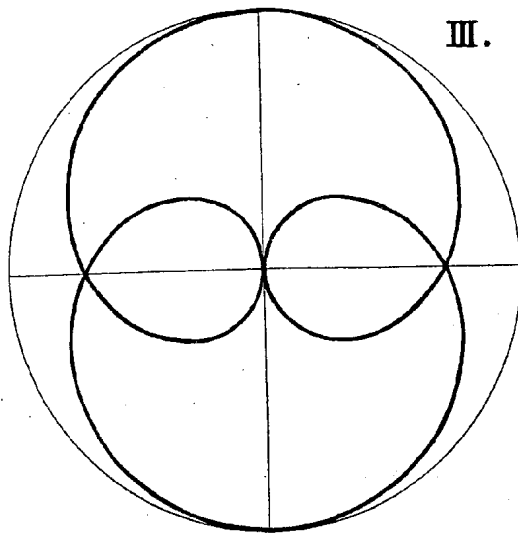


Nach diesen Raumkurven kehrt Dürer wieder zu ebenen Kurven zurück und lehrt „noch ein einfache schneckenlini ziehen“. Er teilt hiezu einen Quadranten in 12 gleiche Teile und fällt von den einzelnen Teilpunkten Lote auf den einen Radius des Quadranten. Sodann teilt er in einer zweiten Figur einen Halbkreis von gleichem Radius ebenfalls in 12 gleiche Teile und trägt nun auf den nach diesen Teilpunkten gezogenen Radien der Reihe nach vom Mittelpunkt aus Stücke gleich den Lotabschnitten im Quadranten ab, die so festgelegten Punkte bestimmen ihm seine neue Schneckenlinie. Fig. II zeigt die-

¹ Die auf der Vertikalprojektion der Achse abgetragenen Stücke nimmt Dürer bei dem Aufziehen der Spirale sowohl gleich, als auch in derselben Art wachsend an, wie die Abschnitte auf dem Radius seiner abgeänderten archimedischen Spirale.

² Auch der Verwendung der Schraube in der Mechanik gedenkt Dürer.

selbe samt ihrer Konstruktion nach Dürers Zeichnung. Allerdings hätte Dürer seine Konstruktion auf den ganzen Kreis ausdehnen sollen; doch dann hätte er eben keine Schneckenlinie, wie er wollte, erhalten¹.



III.

¹ Die Polargleichung dieser Kurve wäre $\rho = R \cdot \sin \frac{\omega}{2}$.

Würde man zunächst nur positive Werte des Radius Vektors zulassen, so erhielte man eine Kurve, deren Gestalt an diejenigen der bekannten Kardioiden $\rho = R \cdot \sin^2 \frac{\omega}{2}$ erinnerte. Die unserer Gleichung entsprechende vollständige Kurve kann jedoch erst durch zweimalige Umdrehung erzeugt werden und es müssen von $\omega = 2\pi$ bis $\omega = 4\pi$ negative Werte des Radius Vektors abgetragen werden. Will man die Gleichung dieser Kurve in kartesischen Koordinaten ausdrücken, so hat man:

$$(I) \quad x^2 + y^2 = R^2 \sin^2 \frac{\omega}{2}$$

$$(II) \quad \frac{x}{y} = \operatorname{tg} \omega$$

Aus (I) erhält man

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2(1 - \cos \omega)}{2}$$

und daraus (III)

$$\cos \omega = 1 - \frac{2(x^2 + y^2)}{R^2}$$

(II) kann auch geschrieben werden

$$\frac{\sin \omega}{\cos \omega} = \frac{x}{y}$$

letztere Gleichung mit (III) multipliziert giebt

$$(IV) \quad \sin \omega = \frac{x}{y} \left\{ 1 - \frac{2(x^2 + y^2)}{R^2} \right\}$$

(III) und (IV) quadriert und addiert giebt:

$$1 = \left\{ 1 - \frac{2(x^2 + y^2)}{R^2} \right\}^2 \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right)$$

Daraus folgt:

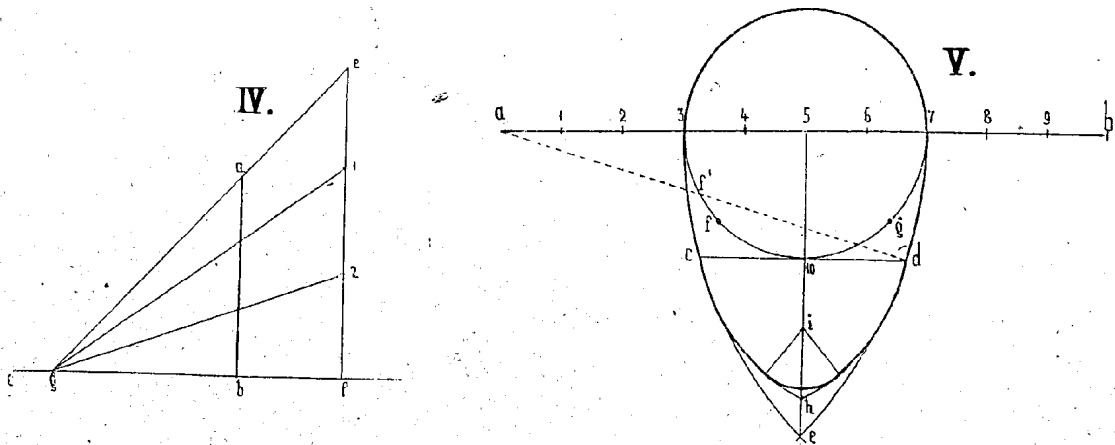
$$R^4 y^2 = (R^2 - 2(x^2 + y^2))^2 (x^2 + y^2)$$

Diese Gleichung geordnet giebt:

$$4(x^2 + y^2)^3 - 4R^2(x^2 + y^2)^2 + R^4 x^2 = 0.$$

Die Figur III zeigt die durch diese Gleichung dargestellte vollständige Kurve, welche aus vier Zweigen besteht, deren jeder eine Dürer'sche Schneckenlinie bildet.

Nun kommt Dürer nochmals auf eine graphische Darstellung der archimedischen Spirale zu sprechen, um dann erst zu Aufgaben überzugehen, die man bei einem gewöhnlichen Lehrgange der Geometrie lange vor einer Behandlung höherer Kurven erwarten würde. Dürer zeigt nämlich jetzt erst, wie eine Strecke triseziert oder halbiert wird und wie man auf einem Kreisbogen eine Normale errichtet. Seine Trisektion ist von dem heutzutage gewöhnlich angewandten Verfahren abweichend und deshalb möge dieselbe durch Fig. IV erläutert werden. (ab) ist die zu trisezierende Strecke, auf der hiezu parallelen (fe) ist ein beliebiges Stück dreimal abgetragen etc. Doch nicht lange hält Dürer sich bei derlei elementar-geometrischen Konstruktionen auf, sogleich wieder schweift er davon ab, um seiner Freude an Form und Gestalt Genüge zu thun, wohl auch um die Leser aus den von ihm ins Auge gefassten Kreisen nicht zu ermüden, sondern deren Interesse fortwährend rege zu erhalten. Die Aufgabe, zu der Dürer übergeht, betrifft die Konstruktion eines Eirunds aus Kreisbogenstücken; Fig. V giebt die Dürer'sche Zeichnung wieder. Die Konstruktion ist folgende: eine Strecke (ab) wird in 10 gleiche Teile geteilt und um Punkt 5 mit Radius (5,3) ein Kreis beschrieben,



so dann um a und b mit den Radien (a,7) und (b,3) Kreisbögen, welche sich in e treffen; eine mit (ab) parallele Tangente an den erst gezeichneten Kreis berührt denselben in 10 und schneidet die beiden Kreisbögen um a und b in d und c. Nun werden die Quadranten (10,3) und (10,7) in f und g halbiert und um diese Punkte mit den Radien (fd) und (gc) Kreisbögen beschrieben, welche sich in h schneiden. Zuletzt wird um den Halbierungspunkt i der Strecke (h,10) ein Kreisbogen beschrieben, welcher die beiden sich in h schneidenden Kreisbögen berührt. Diese Konstruktion ist als eine teilweise verfehlte anzusehen; denn sollen die um a und f beschriebenen Kreisbögen in d ohne Ecke in einander übergehen, d. h. sich berühren, so müssen die 3 Punkte a, f und d in einer Geraden liegen, was in der Dürer'schen Konstruktion nicht der Fall ist¹. Allerdings ist der bei d entstehende Winkel so stumpf, dass

Das Prinzip, das der Bildung obiger Kurve zu Grunde liegt, lässt sich leicht verallgemeinern. Die Polargleichung der ganzen Gruppe von Kurven wäre $\rho = R \cdot \sin \frac{m\omega}{n}$, wobei m und n ganze Zahlen wären. Ich möchte diese Gruppe von Kurven „Dürer'sche Blätter“ nennen.

¹ Wie leicht zu berechnen, schneidet (ad) den Kreis um 5 in einem Punkte f', so dass $\angle (3, 5, f')$ etwa gleich 29° und nicht gleich 45° ist. Würden die Punkte f und g als Schnittpunkte der (ad) und (bc) mit dem Kreise um 5 bestimmt, so wäre der im Texte angegebene Fehler umgangen.

derselbe bei der graphischen Ausführung kaum stört. Es ist diese Konstruktion ein deutlicher Beleg für die Art und Weise der mathematischen Produktion Dürers, die, wenn ich so sagen darf, empirischer Natur war. Nach dieser Abschweifung kommt Dürer wieder auf zwei elementar-geometrische Aufgaben zurück. Erstens: zu einem Kreisbogen den Mittelpunkt zu finden, zweitens: durch 3 gegebene Punkte einen Kreis zu legen. Diesen beiden Aufgaben schliesst sich eine weitere an, wie sie in der Praxis des Zeichnens auftreten kann. Ein Kreis von grossem Radius berührt eine Gerade und zwar in der Zeichnung scheinbar nach messbarer Strecke; welches ist der Berührungspunkt? Dürers Lösung, die den Kreismittelpunkt¹ nicht benützt, ist folgende: Man ziehe mit der Tangente eine parallele Sehne und falle von den Endpunkten derselben Lote auf die Tangente. Der Halbierungspunkt der durch diese Lote auf der Tangente ausgeschnittenen Strecke ist der gesuchte Berührungspunkt.

In den beiden nun folgenden Betrachtungen kommt Dürer auf Fragen zu sprechen, welche das mathematisch Unendliche betreffen. Zunächst sagt er: „*Waer ist es | das zwu linien | die da in einem puncten eyn spitzigen winckel machen | allweg enger zusammen getzogen mügen werden | und doch ewiglich nymer mehr zusammen komen.*“ Um dies zu beweisen, denkt sich Dürer auf einer von zwei Parallelen dadurch eine unendliche Anzahl von Punkten festgelegt, dass er eine beliebige Strecke auf ihr abträgt. Denkt man sich nun einen Punkt der andern Parallelen der Reihe nach mit den auf der ersten festgelegten Punkten verbunden, „*so neygt sich dise ortlini² stetiglich | neher zu der bartlini³ uñ macht für und für eyn engern winkel | darumb das sie stetz neher zu der andern laufft | und komen doch ewiglich nymer meer zusammen.*“ Weiter sagt Dürer: „*Es mag ein ewige lini erdacht werden | die da stetiglich zu ein Centrum⁴ cynwartz | auch an dem andern teyl in die weyten über einander laufft | uñ nymer mehr zu keym end kombt.*“ Dürer kennt keine durch ein festes Bildungsgesetz bestimmte Kurve, an welcher er diese Möglichkeit zeigen könnte; da er jedoch alles durch Figuren klarlegen will, schreibt er einfach: „*Ich heb an bey ein puncten a uñ zeuch dise lini zirckelsweis hynein | als soll sie zu ein Centrū lauffen | uñ so oft sie in eynander laufft | brich jch der weiten zwischē der lini ein halbteil ab | des gleichē thu jch | so jch mit der lini vom a herauß lauff | so oft jch mit jr über eynander lauff | so oft gib jch der lini ein halbteyl zu | von der weyten | Also laufft dise lini ye lenger ye enger hynein unnd lenger ye weyter herauß | unnd kumbt doch nymer meer zu keim ende | weder hynein noch herauß wie ich das zuverstehen hic unden hab auffgeriessen.*“ Diese zuletzt erwähnte Figur erinnert am meisten an die logarithmische Spirale⁵. Allerdings

¹ Wohl weil derselbe in der Praxis in einem solchen Falle auch nicht mehr auf dem Zeichenblatte liegen würde.

² „*ortlini*“ nennt Dürer jede Gerade, welche zu der von ihm in seiner Zeichnung als wagrecht gedachten Geraden schief steht.

³ Parallellinie.

⁴ Es tritt hier der Begriff des asymptotischen Punktes klar zu Tage. Dagegen ist mir unerfindlich, auf welche Kurve sich die folgende Bemerkung Günthers in seiner Geschichte des math. Unt. etc. S. 364 bezieht: „Auch das Wesen der asymptotischen Kurven ist unserem Autor nicht unbekannt. Dürer sucht nämlich eine Kurve durch punktuelle Konstruktion zu bestimmen, die sie einem Kreise mehr und mehr nähert, ohne ihn je zu erreichen.“

⁵ Und zwar würde, je nachdem obige Stelle aufzufassen ist, die logarithmische Spirale von der speziellen Polargleichung $\rho = (2)^{\frac{\omega}{2\pi}}$ resp. $\rho = (2)^{\frac{\omega}{\pi}}$ vollständig den Dürer'schen Intensionen entsprechen.

ist die Zeichnung ziemlich ungenau, so dass auch aus ihr das Bildungsgesetz nicht ersehen werden kann, das in obiger Stelle nicht ganz klar und in sich widerspruchlos¹ gegeben wurde.

Nach diesen Betrachtungen konstruiert Dürer eine Kurve, welche von dem Endpunkt b einer Strecke (ab) beschrieben wird, wenn (ab) sich so bewegt, dass a auf einer Geraden fortrückt und zugleich der Weg von b zu dem Weg von a sich wie 4:3 verhält. Diese Kurve², welche Dürer augenscheinlich sehr gefällt, wird nun, wie dies z. B. oben bei der archimedischen Spirale beschrieben wurde, mehrfach abgeändert; zugleich giebt Dürer an, dass dieselbe zu den Blättern eines Kapitāls, sowie zu einem Turmdach, zu verwenden sei. An diese Kurve schliesst sich weiterhin eine nur ihrer praktischen Verwendung halber aufgeführte Kurve an. Es handelt sich darum, einen Gewölbebogen bei gegebener Spannweite a und Höhe b zu konstruieren³. Dürer zeichnet zunächst einen Halbkreis mit b und zeigt nun, wie derselbe ohne Veränderung seiner Höhe „in die Länge gezogen“ werden kann. Hierzu errichtet er auf dem Durchmesser des Halbkreises und auf einer Strecke gleich a eine gleiche Anzahl äquidistanter Lote und schneidet auf den letzteren der Reihe nach die durch den Halbkreis auf den ersteren bestimmten Stücke ab. Die so erhaltene Kurve ist eine Halbellipse von den Achsen a und $2b$. Obgleich unmittelbar an diese Aufgabe die Behandlung der Kegelschnitte sich anschliesst, so wäre es doch verfehlt, daraus folgern zu wollen, Dürer habe erkannt, dass diese Kurve eine Halbellipse sei. Erstens fehlt jegliche diesbezügliche Andeutung und Dürer beginnt den folgenden Abschnitt als etwas ganz Neues mit einer kurzen historischen Notiz und zweitens werden wir sehen, dass Dürer gerade bei der Ellipse in einem fundamentalen Irrtum befangen war, indem er dieselbe als nur zur grossen, nicht auch zur kleinen Achse symmetrisch ansah⁴.

Die eigentliche Konstruktion der Kegelschnitte fasst Dürer vollständig als eine Aufgabe der darstellenden Geometrie auf und da er, wie wir gesehen haben, mit dem Grund- und Aufrisszeichnen bestimmter Raumgebilde in hohem Grade vertraut war, so genügte es für ihn, zu wissen, durch welche Schnittebenenführung die einzelnen Kegelschnitte entstehen, um dieselben völlig selbständig zeichnen zu können. Wir haben es in den folgenden Abschnitten mit einer der ältesten Behandlungen der Kegelschnitte bei einem Neueren, ja mit der ältesten Behandlung in deutscher Sprache zu thun.

Nachdem Dürer erklärt hat, durch welche Schnittebenenführung jede der 3 Arten der Kegelschnitte erzeugt wird, fährt er fort: „*diser dreyer schnydt namen weis ich auf deutzsch nit zusagenn | wir wöllenn in aber namen geben | dabey man sie kennen müg | Die Elipsis will ich ein eyer lini nennen | darumb das sie schyer einem ey gleich ist | Die Parabola sey genennt eyn brennlini | darumb so man aufs jr ein spiegel macht so zündt sie an | Aber die*

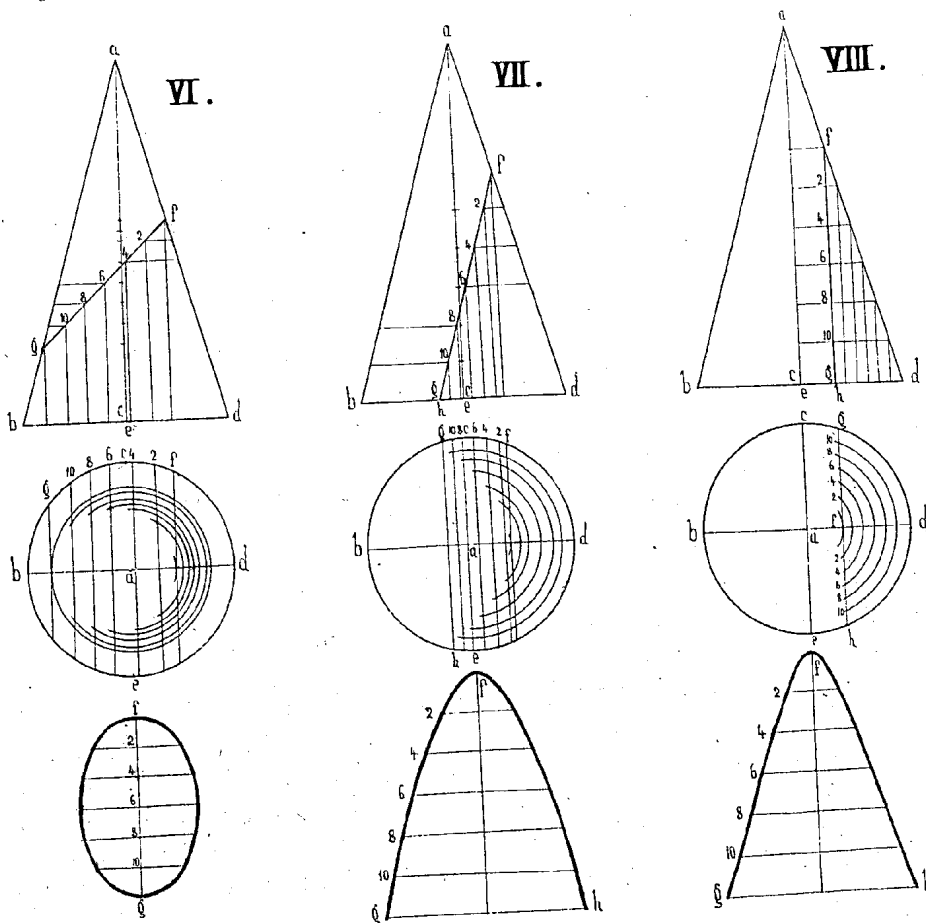
¹ Es würde zwei verschiedenen Bildungsgesetzen entsprechen, wenn beim Hineingehen resp. Herausgehen der Radius Vektor bei jeder Umdrehung um seine Hälfte zu verkleinern, resp. zu vergrössern wäre.

² Dieselbe ist bestimmt durch die Gleichung $x - \sqrt{r^2 - y^2} = x \cdot \int_0^x dx \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

³ Eine statische Lösung der Aufgabe darf natürlich nicht erwartet werden.

⁴ Ich kann die Angabe Günthers (vergl. dessen Gesch. des math. Unterr. etc. S. 364—365), Dürer habe für die Ellipse rein planimetrische Konstruktionen angegeben, nur auf den eben behandelten Abschnitt beziehen und möchte deshalb jenen Ausspruch, wie oben geschah, näher präzisieren.

Hiperbole will ich ein gabellini nennen. | " Die Fig. VI zeigt Dürers Konstruktion der Ellipse, nur habe ich in ihr ebenso wie in Fig. VII u. VIII (fg) in 6 statt in 12 gleiche Teile geteilt. Da zur Beurteilung der mathematischen Verwendung des Grund- und Aufrisszeichnens bei Dürer von Wert ist, eine der betreffenden Stellen im Wortlaut kennen zu lernen, möchte ich als interessantestes Beispiel diese Konstruktion wählen. Dürer schreibt: „Nun so jch auf reissen will die eyer lini Elipsis | mußs jch zuvor den kegel aufreissen | unnd den schnyt darinn an- tzeigenn | desgleichen den grund darunder machen dem thu jch also | Des kegels spitz sey oben |



a. und der fußs unden b. c. d. e. nun reißs jch außs dem a. ein aufrechte lini herab | und der schlem schnyt durch den kegel sey oben f. unden g. disen schnyt f. g. teil jch mit 11 puncten in 12 teyl | und heb die zal under dem f. an. under disem kegel reißs ich seyn grund | so wirdt das a. Centrum unnd b. c. d. e. seyn zirckellini | wie das der aufrecht kegel gibt | So nun außs allen puncten aufrecht linien | von jm herab fallen in den grund | so durch schneyden dise linien | als f. g. und die zahn die darzwischen sind 1. 2. 3. etc. den zirckelrifs | die belzeichnen jch auch mit jren bustaben und ziffern | So das gemacht ist alsdann nym jch ein zirckel | und setz jm im kegel mit dē ein fußs in die aufrechte lini a. in der höch des schlemen schnydes f. g. des puncten 1. un in diser höch setz jch den zirckel | mit dem andrn fußs | heraußs an die lini a. d. unnd behalt dise weyten mit dem zirckel | und drag sie in den nyder

gedruckten grund | uñ setz den ein fuß des zirckels | in den Centrū a. uñ den andern fuß | setz jch auff die gestreckt lini 1. uñ reißs rund hynaufs gegen dem d. bifs wider zu der lini 1. Darnach setz jch den zirckel wider mit dem ein fuß in dē kegel auff die aufrecht lini a. in der höch des punctē 2. des schnydes f. g. uñ den andern fuß setz jch in die lini a. d. und trag die selb weite wider in den grund | und setz des zirckels einen fuß | ins Centrum a. und den andern fuß auff die gerad lini 2 und reißs von dañ rund gegen dem d. bifs wider auff die gerad lini 2. Also thu jch im vort bifs auff 4. Darnach went jch den zirckel in der zal 5. mitt dem ein fuß auff die lini a. b. und drag das herab | unnd reißs im grund rund herum | aufs dem Centrum a. von der gestreckten 5 gegen dem | d | bifs wider zu diser lini | 5 | Also thu jch jm darnach durch die gantzen zal | drag all ding aufs dem öbern kegel in grundt | Darnach mach jch aufs disem grund die blossē lini Elipsis also | jch reißs die leng des schnydes f. g. aufrecht | wie sie dann mit jren eilff puncten in 12 gleiche felt geteilt ist | und reißs durch all puncten eyloff zwerch barlinien | Darnach nym jch die breiten aufs dem grund | auf der geraden lini 1. so weit sie der zirckel abschneydt | uñ drag sie zu dem schnyd f. g. setz sie auf die lini 1. und punctir die breytē | zu beiden seyten | Also thu jch jm durch die gantzen zal | so dann dise puncten zu rings herum gemacht sind | alsdañ zeuch jch die eyer lini Elipsis von punct zu punct | wie jch sölchs hie bey hab aufgeryssen.“

Sowohl aus der beigegebenen Zeichnung als auch aus der oben gegebenen Begründung der Wahl des Namens Eierlinie ist zu entnehmen, dass Dürer glaubte, die Ellipse habe nur eine Symmetrieachse, sei aber an dem im Kegel der Basis näher liegenden Ende dieser Symmetrieachse stumpfer als am andern Ende. Es ist dies ein Fehler, der nur zu leicht einer oberflächlichen Raumanschauung entspringen kann. Da Dürer die Parabel und die Hyperbel ganz analog wie die Ellipse konstruiert, kann ich mich bei diesen beiden Kegelschnitten auf Wiedergabe der Figuren der Unterweisung beschränken; setzt doch Dürer selbst der Konstruktion der Hyperbel die Worte bei: „wie jch das hie unden hab aufgeryssen | so eygentlich | ob schon keyn schryft dabey wer | vermeint jch | dis solt alles durch sehen kintlich seyn.“ Noch möchte ich darauf aufmerksam machen, dass Dürer alle 3 Kurven zweiter Ordnung aus demselben spitzwinkligen Kegel ableitet. Die Parabel giebt Dürer Gelegenheit, auf den Brennspiegel zu sprechen zu kommen, und zwar sagt er, dass die zu einem solchen zu verwendende Parabel aus einem rechtwinkligen¹ Kegel zu schneiden sei, eine Notiz, welche die Abhängigkeit Dürers von seinen Quellen nur zu deutlich verrät. Die Art und Weise der Wirkung eines Brennspiegels wird durch eine Figur² klargelegt und im Anschlusse hieran das Reflexionsgesetz ausgesprochen und ebenfalls durch eine Figur erläutert. Die Asymptoten der Hyperbel kennt Dürer nicht.

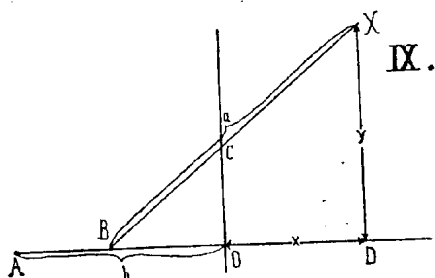
An diese Behandlung der Kegelschnitte schliesst sich die Behandlung zweier weiterer Kurven an und zwar folgt zunächst eine Muschellinie. Auf der Abscissenachse eines rechtwinkligen Koordinatensystems³ (vergl. Fig. IX) ist ein Punkt A angenommen. Bewegt

¹ In der beigegebenen Figur zwar ist der Achsenschnitt des Kegels kein rechtwinkliges, sondern ein gleichseitiges Dreieck.

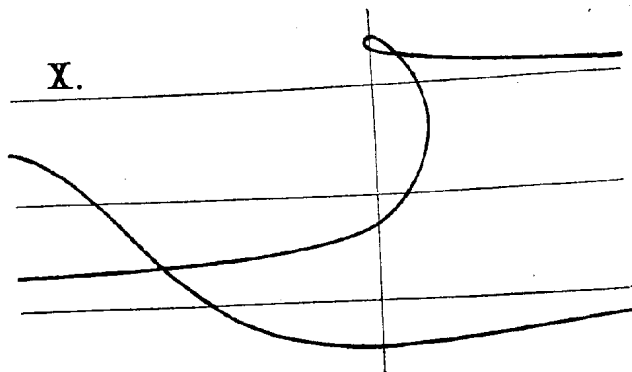
² Die Auflage vom Jahre 1525 enthielt zuerst eine Figur, in welcher der Brennpunkt mehr als doppelt so weit vom Scheitel der Parabel entfernt angenommen war, als er eigentlich hätte sein sollen, deshalb wurde in der ganzen Auflage diese Figur durch eine richtige überklebt.

³ Es ist selbstverständlich, dass Dürer diese Ausdrücke nicht gebraucht, er spricht einfach von zwei zu einander senkrechten Geraden. Ich bin überhaupt häufig genötigt, der Kürze des Ausdrucks und der leichten Verständlichkeit halber, im Texte Kunstausrücke zu gebrauchen, welche Dürer nicht kennt.

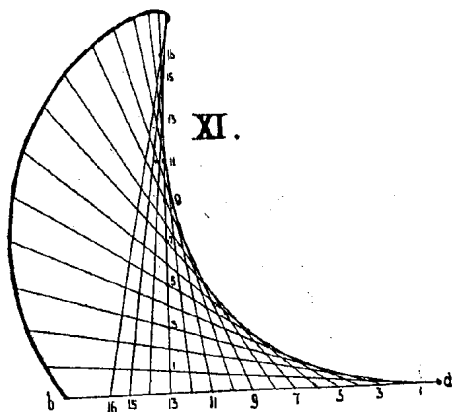
sich nun eine Strecke BX von konstanter Länge, welche die Ordinatenachse in C schneidet, so, dass erstens B auf der Abscissenachse, zweitens $OC = AB$ bleibt, so beschreibt X die Dürer'sche Muschellinie¹. Dieselbe ist, wie schon Kästner bemerkt, von der des Nikomedes verschieden. Beistehende Fig. XI ist Dürers Unterweisung entnommen. Treffend bemerkt Günther zu dieser Figur, sie gebe zu der Vermutung Anlass, „dass sich Dürer der Möglichkeit, eine Kurve gleichmässig durch Tangenten wie durch Punkte zu verzeichnen, voll und ganz bewusst



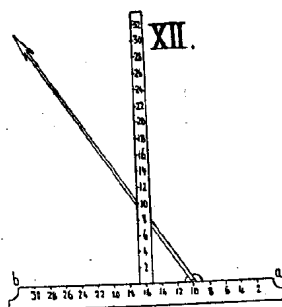
IX.



X.



XI.



XII.

¹ Günther versucht in seiner Gesch. des math. Unterr. S. 365 die Gleichung dieser Kurve zu bestimmen und stellt auch, allerdings nicht gerade auf einfachstem Wege, die kartesischen Koordinaten x und y eines Punktes derselben als Funktionen eines Parameters u auf. In den betreffenden Ausdrücken haben sich jedoch zwei Druckfehler eingeschlichen, indem zweimal im Nenner dem Gliede u^2 der Koeffizient 2 fehlt. Seiner Entwicklung setzt Günther die Worte bei: „Würde man u aus beiden Gleichungen eliminieren, so erhielte man die sehr wenig übersichtliche Orthogonalgleichung einer Kurve achter Ordnung.“ Dieser Schluss ist falsch, wie die folgende sehr einfache Ableitung zeigen mag: Es sei $OA = b$ und die Länge der konstanten Strecke $BX = a$, so ist $BD = \sqrt{a^2 - y^2}$, also $BO = \sqrt{a^2 - y^2} - x$, und $AD = b + x$ (vergl. Fig. IX),

damit wird $OC = AB = AD - BD = b + x - \sqrt{a^2 - y^2}$.

Nun besteht die Proportion

$$\frac{OC}{DX} = \frac{BO}{BD}$$

obige Werte eingesetzt giebt:

$$\frac{b + x - \sqrt{a^2 - y^2}}{y} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2} - x}{\sqrt{a^2 - y^2}}$$

daraus folgt

$$(b + x) \sqrt{a^2 - y^2} - (a^2 - y^2) = y (\sqrt{a^2 - y^2} - xy),$$

und hieraus

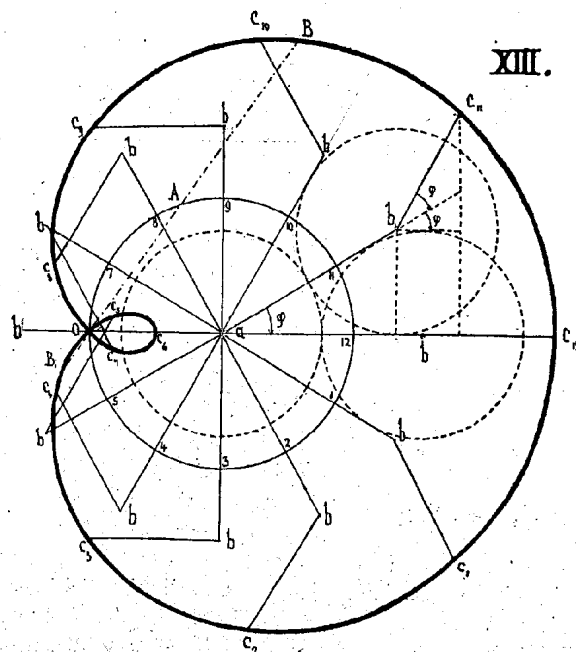
$$(b + x - y) \cdot \sqrt{a^2 - y^2} = a^2 - xy - y^2;$$

quadriert giebt

$$(b + x - y)^2 (a^2 - y^2) - (a^2 - xy - y^2)^2 = 0.$$

Wir erhalten also eine nicht allzu komplizierte Gleichung 4. Grades. Die durch dieselbe dargestellte Kurve zeigt Fig. X.

gewesen.“ Ja, sicher muss die in dieser Figur so deutlich hervortretende Parabel einem Auge wie Dürers aufgefallen sein. Bei der eben behandelten Kurve begnügt sich Dürer nicht damit zu zeigen, wie eine beliebige Anzahl von Punkten derselben gefunden werden kann, sondern er giebt auch ein Instrument an, vermittelst dessen man im Stande ist, die Kurve selbst direkt zu zeichnen. Fig. XII zeigt dieses Instrument. Der Name Muschellinie, die Eigenschaft derselben, dass ihre Punkte durch Abtragen einer sich gleich bleibenden Strecke auf einer bewegten Geraden gefunden werden, sowie die äussere Gestalt des zu ihrer graphischen Darstellung nötigen Instruments, könnten die Vermutung nahe legen, dass Dürer hier beeinflusst war durch ein nicht ganz verstandenes Manuskript, das die Konchoide des Nikomedes behandelte und zugleich vielleicht



auch eine Zeichnung des von demselben erfundenen Instruments enthielt. Hierbei könnte es sich etwa um ein Pappus- oder Eutokiusmanuskript handeln; auf eben diese Manuskripte weist auch die erste Hälfte des 4. Buches hin. Doch werde ich auf die Frage nach Dürers Quellen später eingehender zu sprechen kommen.

Wohl die interessanteste aus der Zahl der höheren Kurven, welche Dürer behandelt, ist die nun sich anschliessende. Ihre Erzeugung ist folgende (vergleiche hiezu beistehende Fig. XIII). Eine Strecke (ab) dreht sich um den festen Punkt a im Kreise, während eine zweite Strecke (bc) mit gleicher Winkelgeschwindigkeit, dieselbe jedoch gemessen in Bezug auf die bewegte (ab) , sich in einem Kreise um den bewegten Punkt b dreht. Der Punkt c beschreibt sodann die zu untersuchende Kurve¹. Denkt man sich wie in Fig. XIII um a u. b

¹ Um ihre Gleichung zu entwickeln, bezeichne ich die Länge von (ab) mit $2r$ und die Länge von (bc) mit d , so ist, wie aus Fig. XIII direkt entnommen werden kann:

je mit $\frac{1}{2}$ (ab) Kreise beschrieben, so kann man sich leicht überzeugen, dass unsere Dürer'sche

$$(I) x = 2r \cos \varphi + d \cos 2\varphi,$$

$$(II) y = 2r \sin \varphi + d \sin 2\varphi,$$

quadriert und addiert geben diese Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 4r^2 + d^2 + 4rd (\cos \varphi \cos 2\varphi + \sin \varphi \sin 2\varphi),$$

oder

$$x^2 + y^2 = 4r^2 + d^2 + 4rd \cos \varphi,$$

$$\text{da } \cos \varphi = \cos (2\varphi - \varphi) = \cos 2\varphi \cos \varphi + \sin 2\varphi \sin \varphi \text{ ist;}$$

hieraus folgt

$$x^2 + y^2 - 2r^2 - d^2 = 2r^2 + 4rd \cos \varphi = 2r (r + 2d \cos \varphi),$$

quadriert giebt

$$(III) (x^2 + y^2 - 2r^2 - d^2)^2 = 4r^2 (r^2 + 4rd \cos \varphi + 4d^2 \cos^2 \varphi).$$

Aus (I) folgt weiterhin

$$x = 2r \cos \varphi + d (2 \cos^2 \varphi - 1),$$

damit wird

$$d + x = 2r \cos \varphi + 2d \cos^2 \varphi$$

beiderseits mit $2d$ multipliziert und r^2 addiert giebt:

$$(IV) \quad r^2 + 2d^2 + 2dx = r^2 + 4rd \cos \varphi + 4d^2 \cos^2 \varphi$$

aus (III) und (IV) folgt $(x^2 + y^2 - 2r^2 - d^2)^2 = 4r^2 (r^2 + 2d^2 + 2dx).$

Man hat es hier also mit einer jener interessanten Kurven zu thun, welche den Namen kartesische Kurven tragen; dieselben sind Kurven 4. Grades mit zwei Spitzen, welche in die unendlich fernen Kreispunkte fallen. Wie man sich aus der Gleichung leicht überzeugt, hat unsere Kurve den Punkt $x = -d, y = 0$ zu einem Doppelpunkt, sie ist also speziell ein „Paskal'scher Limaçon“. Doch kann man sich von dieser Identität auch leicht direkt überzeugen. Zieht man von einem Punkte der Peripherie eines Kreises beliebige Sehnen und trägt auf diesen Sehnen von ihrem andern Endpunkte aus eine beliebige Strecke nach beiden Seiten hin ab, so ist bekanntlich eben der Paskal'sche Limaçon der geometrische Ort für die so bestimmten Punkte. Bezeichne ich, um vollständig dieselbe Gleichung wie oben zu erzielen, den Durchmesser des Kreises mit $2d$, die abzutragende Strecke mit $2r$, so erhalte ich als Polarkoordinatengleichung des Limaçon ohne weiteres (vergl. Fig. XIV), $\varrho = 2d \cos \varphi + 2r$, welche Gleichung, wie man sich leicht überzeugt, die Endpunkte der nach beiden Seiten hin abgetragenen Strecken umfasst. Um kartesische Koordinaten zu erhalten, habe ich nun aus den Gleichungen

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \varrho^2 = 4(d \cos \varphi + r)^2 \\ \frac{y}{x} = \tan \varphi \end{cases}$$

φ zu eliminieren und erhalte zunächst, da $\cos \varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \varphi}}$ ist,

$$x^2 + y^2 = 4 \left\{ \frac{d \cdot x}{\pm \sqrt{x^2 + y^2}} + r \right\}^2$$

hieraus folgt

$$(x^2 + y^2)^2 = 4(d \cdot x \pm r \sqrt{x^2 + y^2})^2,$$

damit

$$\pm (x^2 + y^2) = \pm 2(d \cdot x \pm r \sqrt{x^2 + y^2}).$$

Hiebei überzeugt man sich leicht, dass in unserem Falle die Möglichkeit der Zeichenzuordnung eine eindeutige ist; man erhält nämlich:

$$\frac{\pm (x^2 + y^2 - 2dx)}{(x^2 + y^2 - 2dx)^2} = \frac{\pm 2r \sqrt{x^2 + y^2}}{4r^2 (x^2 + y^2)}.$$

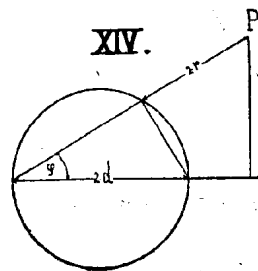
und damit

Setze ich noch, um denselben Koordinatenursprung wie oben zu haben,

$$\begin{cases} x = x' + d \\ y = y' \end{cases}$$

so geht diese Gleichung in folgende über, in welcher ich wieder x und y statt x' und y' setze:

$$(x^2 + y^2 - d^2)^2 = 4r^2 (x^2 + y^2) + 4r^2 (2dx + d^2).$$



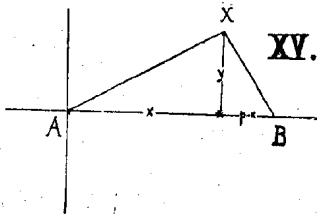
Kurve eine Rollkurve¹ und zwar speziell eine Epitrochoide ist². Ein so beredtes Zeugnis für seine mathematische Gestaltungskraft auch Dürer mit dieser Linie³, welche er „Spinnenlinie“⁴ nennt, sich ausstellt, so kann ich doch Günther nicht beistimmen, welcher deshalb Dürer als Begründer der Lehre von den Rollkurven angesehen wissen will. Gerade der Begriff des sich

Diese Gleichung kann ich auch in der Form

$$(x^2 + y^2 - d^2)^2 - 4r^2(x^2 + y^2 - d^2) + 4r^4 = 4r^2(2dx + 2d^2 + r^2)$$

schreiben, und dies giebt: $(x^2 + y^2 - d^2 - 2r^2)^2 = 4r^2(2dx + 2d^2 + r^2)$,
d. h. gerade unsere obige Gleichung.

Wir hätten damit eine zweite Erzeugungsart für unsere Kurve erhalten: Hierzu beschreibe man um a mit (bc) einen Kreis, welcher, wie oben bewiesen, durch den Doppelpunkt O geht; ziehe von O aus Sehnen in diesen Kreis und trage auf ihnen von ihrem andern Endpunkte aus



Strecken gleich (ab) ab. In unserer Fig. XIII ergibt z. B. Sehne OA auf solche Weise die Punkte B und B_1 . Ebenso kann man sich leicht von der Zugehörigkeit vorliegender Kurve zu den sogenannten kartesischen Ovalen überzeugen. Unter kartesischem Oval versteht man den Ort eines Punktes, dessen Entfernungen ρ und ρ_1 von zwei gegebenen Punkten A und B durch die Relation $a\rho + b\rho_1 = c$ verbunden sind. Führe ich kartesische Koordinaten ein, betrachte AB als Abscissenachse, A als Ursprung und bezeichne den Abstand der beiden Punkte A und B mit p , so ergibt mir obige Relation als Gleichung der gesuchten Kurve direkt folgende (vergl. bestehende Fig. XV)

$$a\sqrt{x^2 + y^2} + b\sqrt{(p-x)^2 + y^2} = c.$$

Zunächst wähle ich die Konstante $c = bp$ und erhalte

$$a\sqrt{x^2 + y^2} - bp = -b\sqrt{(p-x)^2 + y^2},$$

quadriert giebt

$$a^2(x^2 + y^2) - 2abp\sqrt{x^2 + y^2} + b^2p^2 = b^2(p-x)^2 + b^2y^2,$$

geordnet erhält man:

$$(a^2 - b^2)(x^2 + y^2) + 2b^2px = 2abp\sqrt{x^2 + y^2},$$

mit $(a^2 - b^2)$ beide Seiten der Gleichung dividiert und alsdann quadriert giebt:

$$\left(x^2 + y^2 - \frac{2b^2p}{b^2 - a^2}x\right)^2 = \frac{4a^2b^2p^2}{(a^2 - b^2)^2}(x^2 + y^2).$$

Setze ich nun $a = r$, $b = d$ und $p = \frac{d^2 - r^2}{d}$, so wird

$$\frac{2b^2p}{b^2 - a^2} = 2d \text{ und } \frac{4a^2b^2p^2}{(a^2 - b^2)^2} = 4r^2;$$

obige Gleichung geht also über in die Form:

$$(x^2 + y^2 - 2dx)^2 = 4r^2(x^2 + y^2)$$

aus welcher Gleichung ich schon oben durch Koordinatentransformation die Gleichung

$$(x^2 + y^2 - d^2 - 2r^2)^2 = 4r^2(2dx + 2d^2 + r^2)$$

entwickelte. Hiemit hätten wir eine dritte Ableitung unserer Kurve erhalten.

¹ In der Nomenklatur der Rollkurven herrscht noch heute vielfach Verwirrung; Chasles nennt unsere Kurve z. B. eine Epicykloide. Doch dringen gegenwärtig mehr und mehr folgende Unterscheidungen zu allgemeiner Anerkennung durch. Rollt ein Kreis auf einer Geraden, so beschreibt ein Punkt seiner Peripherie eine „Cykloide“, ein anderer in seiner Ebene mit ihm fest verbundener Punkt eine „Trochoide“. Rollt ein Kreis auf einem andern festen Kreise, so erhält man analog wie vorhin bei äusserer Berührung beider Kreise die Epicykloide resp. Epitrochoide, bei innerer Berührung die Hypocykloide resp. Hypotrochoide.

² Und damit hätten wir ein 4. Bildungsgesetz für unsere Kurve gefunden.

³ Diese hier von Dürer zuerst gezeichnete Kurve gehört einer Gruppe von Kurven an, welche das Interesse hervorragender Mathematiker auf sich zogen von Descartes an, der sie als durch die Relation $a\rho + b\rho_1 = c$ festgelegt betrachtete, bis auf Cayley, der sie unter der Gleichungsform

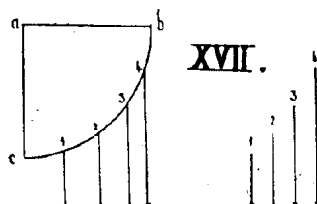
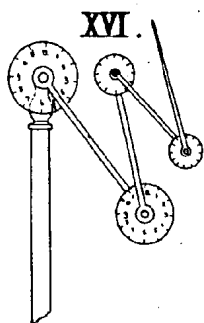
$$(x^2 + y^2 - a^2)^2 + 16A(x - m) = 0$$

zum Gegenstand seiner eindringenden Studien machte.

⁴ „darum dz sie im aufreissen | dadurch mans macht scheir einer spinnen enlich ist.“

abwickelnden Rollens schwebte Dürer in keiner Weise vor, und erst nachträglich kann bei der von ihm nach einem andern Bildungsgesetz konstruierten Kurve ihre Zugehörigkeit zu den Rollkurven gezeigt werden. Ich glaube vielmehr, dass Dürer zur Konstruktion dieser Kurve durch astronomische Betrachtungen kam, welche ihm, wie wir sehen werden, nicht ganz fremd waren. Es beschreibt b einfach den „deferierenden“ Kreis und c den Epicykel. Auch zum Zeichnen dieser und noch viel komplizierteren Kurven giebt Dürer ein Instrument an, dessen Konstruktion er sehr eingehend beschreibt und dabei vor allem auf hübsche Formverhältnisse grosses Gewicht legt. Fig. XVI zeigt dieses Instrument, dessen Verwendung ohne weiteres klar ist.

Die sich nun zunächst anschliessenden Abschnitte haben kein spezifisch mathematisches, sondern ein ästhetisches Interesse. Dürer leitet dieselben mit den Worten ein: „Die geraden linien | halten sich in der leng | gar mancherley sort in jren geschechten gegen eyn ander | der selben unterschid will ich eins teyls antzeigen | darum das sie zuvil dingen nütz sind dan man kan mancherley werck darauß machen | dieweil es nit schlechtlich bey den linien bleiben wirdet | sonder die mügen umbtrogenn werden unnd ebne feldt oder gantze Corpora machen | wie dann das die werck außs nottorft erheischen | darauß vil breuchliche unnd nütze ding zuerfinden sind.“ Nun schneidet Dürer eine Reihe von Loten, welche auf einer Ge-



raden in verschiedener Weise angeordnet sind, bald wieder durch eine Gerade, bald durch einen Kreisbogen ab. Die Bedeutung dieser Figuren, aus deren Zahl die beistehende Fig. XVII gewählt ist, liegt für Dürer, wie oben angedeutet, darin, dass die sich ergebenden Lotabschnitte als Längenmasse etc. der verschiedenen architektonischen Glieder eines „Werkes“ verwendet werden können¹. Bei diesen Konstruktionen kommt Dürer auf den Satz zu sprechen, dass die Zentrale zweier von innen sich berührender Kreise durch den Berührungspunkt geht; hierbei verweist er genau auf Euklid. Doch nicht nur „durch die mafs | wie das forñ angezeigt ist |“ sondern auch durch die Zahl könne man Linien abschneiden, fährt Dürer fort und setzt 2 Reihen von Strecken bei, welche sich wie 2 : 4 : 8 : 16 resp. wie 3 : 9 : 27 : 81 verhalten². „Aber wie man die linien die man durch die zal nit teylen kan | teylen soll |“ will er weiterhin zeigen³. Nun folgt die bekannte Aufgabe, zu 2 gegebenen

¹ Ich halte es für verfehlt, diese Partie so aufzufassen wie Günther, welcher hiezu schreibt: „Kurz und bündig können die etwas weitschweifenden Betrachtungen dahin zusammengefasst werden: die Änderungen der goniometrischen Funktionen sind nicht proportional den Änderungen des Arguments.“

² Hierzu macht Dürer die Bemerkung, dass das Verhältnis ein anderes werde, wenn man jede der Strecken um gleichviel verlängere.

³ Hier schwebt Dürer der Begriff eines irrationalen Streckenverhältnisses vor. Haben zwei Strecken ein rationales Verhältnis, so lässt sich die dritte Proportionale zu denselben durch „die Zahl“ finden, ist ihr Verhältnis jedoch irrational, so muss zur geometrischen Konstruktion geschritten werden.

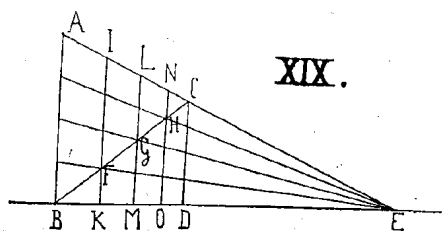
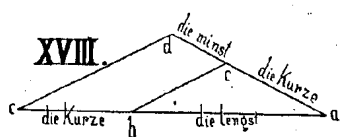
Strecken die 3. Proportionale¹ zu suchen. Dürer formuliert die Aufgabe folgendermassen: „Item wenn du zwu lini hast ein lange und ein kurtze | und wilt ein drytze und kürtzeste darzu finden die in vergleichlich sey | Also wie sich die zwu fürgegeben linien | die kürtzer gegen der lengeren heft | das sich auch die new erfunden und mynst gegen der mittlern auch also halt.“ Dürers Lösung ist die gleiche, welche wir heute verwenden; Fig. XVIII zeigt dieselbe.

Den nun folgenden Abschnitt enthält erst die vermehrte Auflage der Unterweisung vom Jahre 1538; er beginnt mit den Worten: „Noch cyn ander meynung etlich vergleichlich linien gegen eyinander zu finden.“ Auf einer Geraden (vergleiche hiezu Fig. XIX) werden zwei Lote AB und CD errichtet und AC gezogen, welche BD in E trifft. Sollen nun zwischen AB und CD etwa 3 „linien proporcionalen“ gefunden werden, so teile man AB in 4 gleiche Teile, verbinde die Teilpunkte mit E; diese Verbindungslinien schneiden BC in F, G u. H; fälle nun von F, G u. H Lote auf BD, so sind die auf diesen Loten erzeugten Abschnitte JK, LM und NO die gesuchten Strecken und AB, JK, LM, NO und CD „halten sich alle vergleichlich gegen eyinander“². Wie man sich leicht überzeugt ist hier die Aufgabe gelöst, zwischen 2 gegebene Strecken eine beliebige Anzahl „harmonischer Mittel“ einzufügen, denn aus der Figur ergeben sich sehr einfach folgende Relationen:

$$AB - JK : JK - LM = AB : LM$$

$$JK - LM : LM - NO = JK : NO$$

$$LM - NO : NO - CD = LM : CD.$$



Wie sehr Dürer von der Ansicht ausging, dass Grössenverhältnisse, die durch irgend welche regelmässigen geometrischen Konstruktionen erhalten werden, in Kunst und Technik zu verwenden seien, zeigt wieder die letzte Aufgabe dieses ersten Buches. Dürer schreibt: „Noch ist durch ein gerade ein krum lini durch krum lini zuteylen etc.“ Es handelt sich also um die Teilung eines Kreisbogens; hiezu zieht Dürer die zugehörige Sehne, teilt dieselbe in 3 gleiche Teile und beschreibt um den einen Endpunkt der Sehne Kreisbögen, welche durch die Teilungspunkte der Sehne gehen, so teilen dieselben den gegebenen Kreisbogen in 3 Teile³. Eine mathematische Untersuchung über die Art der so erhaltenen Teilung liegt Dürer natürlich ganz ferne, ihm genügt eine genaue Angabe der geometrischen Konstruktion, sowie die Beisetzung der bei ihm, ich möchte sagen stereotyp gewordenen Bemerkung: „dise teyllung ist zuwil dingen nütz.“

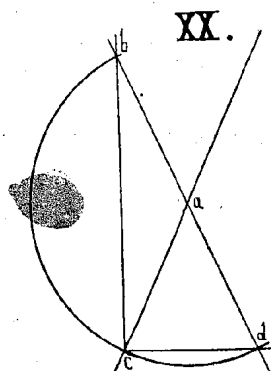
Das zweite Buch handelt „von den ebenen felder“, d. h. von ebenen Figuren. Dementsprechend beginnt dasselbe mit der Definition des Begriffs „Figur“ als eines allseitig be-

¹ Und nicht die 4. Proportionale, wie Günther angiebt, oder gar die mittlere, wie Zahn will.

² Dürer nennt überhaupt eine Reihe von Strecken „vergleichlich gegen einander“, wenn jeweils die folgende aus der vorhergehenden durch ein und dasselbe Bildungsgesetz abgeleitet werden kann, ohne genauere Festsetzung dieses Gesetzes.

³ Welche natürlich nicht gleich sind.

gränzten Stücks einer Ebene. Hiezu bemerkt Dürer sogleich, dass nach Euklid 2 gerade Linien keine Figur einschliessen können. Dann kommt Dürer auf den Begriff „Winkel“ zu sprechen; doch giebt er keine Definition desselben, sondern setzt nur folgende Bemerkung bei: *„ein winckel und ein eck haben gleich linien | Aber die unterschied des winckels und eckes | im werck ist diser | Wenn du aussen auf die scherpf siehst | so heist es eyn eck | siehstu aber innen in die tyfe | so heist es ein winckel.“* Die Konstruktion des rechten Winkels erfolgt mittelst des Halbkreises wie Fig. XX zeigt. Weiterhin werden spitze (enge) und stumpfe (weite) Winkel unterschieden, der Satz von den Scheitelwinkeln angeführt und schliesslich gezeigt, wie auch Bogenstücke Winkel bilden können. Hierauf kommt Dürer allgemein auf Drei- und Vierecke zu sprechen. Bei den Dreiecken unterscheidet er gleichseitige, gleichschenklige und ungleichseitige und führt die Sätze über die Winkel der beiden ersten Arten an. Bei den Vierecken unterscheidet er Quadrate, Rechtecke, Rhomben, Rhomboide etc. Analog wie bei den Winkeln werden auch Dreiecke und Vierecke aus Bogenstücken gebildet.



Nun geht Dürer zu den regulären Polygonen über und zwar speziell zu der Aufgabe, einem Kreis ein reguläres n-Eck einzuschreiben. Die Konstruktion des regulären Sechsecks und Dreiecks erfolgt zunächst in bekannter Art und Weise. Für das reguläre Siebeneck wird dann eine Näherungskonstruktion¹ gelehrt. Dürer schreibt: *„Nun will ich durch einen gemeinen weg | den man von behendigkeit weg | in der arbeyt braucht ein sibeneck machē“* und giebt hiezu an, dass als Seite des regulären Siebenecks die halbe Seite des demselben Kreise einbeschriebenen regulären Dreiecks gebraucht werden könne². An das reguläre Siebeneck schliessen sich das reguläre 14- und 28-Eck an, weiterhin kommt das Quadrat, dem wiederum das reguläre 8- und 16-Eck folgen. Für das reguläre 5-Eck wird die ptolemäische³ Konstruktion angegeben und aus der betreffenden Figur auch gleich die Seite des regulären Zehnecks abgelesen⁴. Eine zweite Konstruktion eines regulären Fünfecks über

¹ In Bezug auf die Näherungskonstruktionen der Unterweisung mache ich auf die früher erwähnte Programmatikabhandlung Günthers aufmerksam.

² Die Seite des einem Kreise vom Radius r einbeschriebenen regulären Dreiecks ist $r\sqrt{3}$, hieraus ergibt sich für den Zentriwinkel α , der in diesem Kreise zu einer Sehne gleich $\frac{r}{2}\sqrt{3}$ gehört, folgende Gleichung:

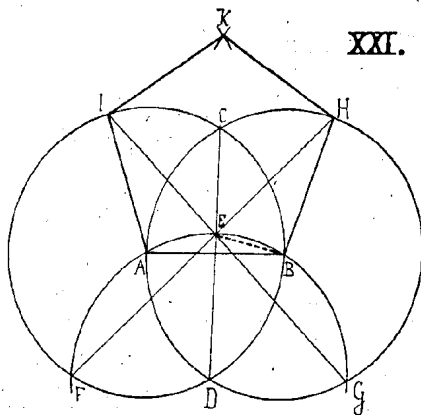
$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$, womit $\frac{\alpha}{2} = 25^\circ 39' 32''$ wird statt $25^\circ 42' 51''$. Man sieht also, dass diese Konstruktion gut

brauchbar ist; einen allerdings genaueren Näherungswert ($25^\circ 42' 20''$) ergibt die bekannte Konstruktion von Karl Bernhard zu Sachsen-Weimar. Doch rührt unsere Konstruktion der Seite des regulären Siebenecks keineswegs von Dürer selbst her, sondern sie war höchst wahrscheinlich die damals in der „Bauhütte“ gewöhnliche; dieselbe lässt sich schon bei Abū'l Wafā und Jordanus nachweisen und ist auch in der von Günther veröffentlichten „Geometria deutsch“ enthalten. (Vergl. Hist. lit. Abt. der Zeitschrift für Mathematik und Physik. Jahrgang XX.)

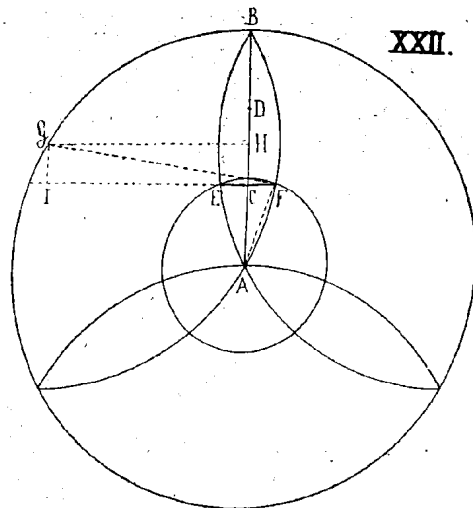
³ D. h. die in lib. I cap. 9 des Almagests angegebene.

⁴ Im Verlaufe dieses Abschnitts wiederholt Dürer die oben gegebene Anleitung zur Konstruktion der Seite des einem Kreise einbeschriebenen regulären Siebenecks und fügt die Worte bei: *„so hast du ein sibenteil des zirkels Mechanice.“*

einer gegebenen Strecke AB als Seite „aufs unverrückten¹ zirckel“, welche Dürer lehrt, zeigt Fig. XXI. Es werden hierbei sämtliche Kreise mit der Seite AB des gesuchten Fünfecks als Radius beschrieben, und zwar zunächst zwei Kreise um A und B, welche sich in C und D schneiden, sodann ein Kreis um D, welcher CD in E, die Kreise um A und B jedoch, ausser in B und A, noch in F und G trifft. FE treffe den Kreis um B in H, GE den Kreis um A in J; schliesslich werden um J und H Kreise beschrieben, deren richtig gewählter Schnittpunkt K die letzte Ecke des gesuchten Fünfecks ABHKJ ist. Das so konstruierte Fünfeck hat, wie Chasles für seine Zeit angiebt, den Namen „Fünfeck des Dürers“ beibehalten², dasselbe ist jedoch nur angenähert regulär³, was allerdings Dürer nicht geahnt zu haben scheint; auch wäre der strenge Nachweis hiefür⁴ weit über die Kräfte Dürers gegangen. Das reguläre 15-Eck wird wiederum richtig konstruiert durch Halbierung der Differenz der Bögen des regulären 3- und 5-Ecks. Dann folgt eine Näherungskonstruktion des regulären 9-Ecks, die ich sonst nirgends gefunden habe. Dieselbe könnte deshalb, falls sie nicht der



XXI.



XXII.

Tradition der Bauhütte entstammt, was sich wohl kaum mehr bestimmen lässt, Dürers geistiges Eigentum sein. Die Konstruktion ist folgende (vergl. Fig. XXII): In einem Kreis um A werden mit „unverrücktem zirckel drey fischs blosen“ eingezeichnet, die Achse AB

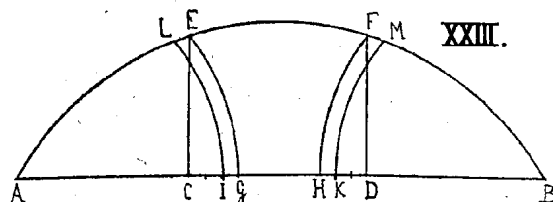
¹ Die Konstruktion geometrischer Gebilde mit nur einer Zirkelöffnung war, wie Cantor nach einer Bemerkung des Pappus geistreich vermutet, schon den Griechen bekannt; sicher nachweisbar ist dieselbe jedenfalls bei Abū'l Wafā und seit dieser Zeit bis auf unsere Tage (Steiner) haben hervorragende Mathematiker sich mit Aufgaben dieser Art beschäftigt.

² Auch diese Konstruktion scheint Dürer der Tradition der Bauhütte zu verdanken, jedenfalls ist dieselbe in der „Geometria deutsch“ enthalten.

³ Dies haben schon J. Bapt. de Benedictis (Diversarum speculationum mathematicarum Liber. 1585) und Clavius (Geometria practica 1604) nachgewiesen.

⁴ Bezeichne ich in Fig. XXI den festen Radius mit r , so ergibt sich direkt aus der Konstruktion $\angle EBA = 15^\circ$, $\angle BEG = 30^\circ$, $\angle GEF = 90^\circ$; also $\angle HEB = 60^\circ$. Nun ist $BE = \frac{r/2}{\cos 15^\circ}$, ferner $\sin \angle EHB : \sin \angle HEB = BE : BH$, also $\sin \angle EHB = \frac{r \sin 60^\circ}{2r \cos 15^\circ}$. Hieraus folgt $\angle EHB = 26^\circ 38' 2''$, womit $\angle ABH = 108^\circ 21' 58''$ statt 108° wird etc.

einer derselben wird in C und D triseziert und in C auf AB das Lot errichtet, welches die Seiten dieser Fischblase in E und F trifft. Beschreibt man nun um A einen Kreis, der durch E und F geht, so ist EF Seite des diesem Kreise einbeschriebenen regulären 9-Ecks¹. Bei dieser Konstruktion gibt Dürer nicht an, ob er dieselbe für eine mathematisch strenge oder nur für eine approximative gehalten wissen will; dagegen spricht er sich in dieser Beziehung bei den beiden nun folgenden Konstruktionen, nämlich denjenigen des regulären 11- und 13-Ecks mit vollster Deutlichkeit aus. Bei ersterer sagt er: „... und far mit diser leng herumb im zirckel das tryt beilcuftig ein | also das es sich Mechanice | aber nit demonstrative findet |“ und bei der zweiten: „... ist aber auch mechanice und nit demonstrative.“ Die Seite des regulären 11-Ecks soll approximativ gleich $\frac{9}{16}$ des Radius sein, die des regulären 13-Ecks gleich der Hälfte desselben². Weiterhin gibt Dürer noch ein Näherungsverfahren zur Trisektion eines Bogens an. Seine Konstruktion, vergl. hiezu Fig. XXIII, ist folgende: Man teile die zum gegebenen Bogen gehörige Sehne AB durch C und D in 3 gleiche Teile, errichte auf AB in C und D Lote, welche den Kreisbogen in E und F schneiden, beschreibe um A und B mit AE resp. BF Kreisbögen, welche AB in G und H treffen. Teile nun



CG und DH in 3 gleiche Teile, die G resp. H zunächst liegenden Teilpunkte seien J und K. Beschreibe um A und B mit AJ resp. BK Kreisbögen, welche den gegebenen in L und M

¹ Es sei der Radius des erstgezeichneten Kreises = r, so ist

$$FJ = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{6}\right)^2} = \frac{r}{6} \sqrt{35} \text{ (rechtwinkliges Dreieck GJF),}$$

$$CJ = GH = \frac{r}{2} \sqrt{3} \text{ (Höhe im gleichseitigen Dreieck BGA),}$$

$$CF = \frac{r}{6} \sqrt{35} - \frac{r}{2} \sqrt{3}$$

$$\text{und damit } \operatorname{tg} \angle FAC = \frac{\frac{r}{6} \sqrt{35} - \frac{r}{2} \sqrt{3}}{\frac{r}{3}} = \frac{\sqrt{35} - 3\sqrt{3}}{2}.$$

Hieraus folgt $\angle FAC = 19^\circ 47' 50''$ statt 20° . Auch hier giebt die oben erwähnte allgemeine Konstruktion den genaueren Wert $19^\circ 58' 10''$; doch hat Dürers Konstruktion insofern einen Vorzug, als bei ihr der Fehler gleichmässig verteilt wird, indem man die zwischen den Fischblasen liegenden Bogenstücke halbiert, während in der allgemeinen Konstruktion die ganze Summe der Fehler bei der letzten Seite sich anhäuft.

² Im Einheitskreise ist die Länge der Seite des regulären Elfecks = 0,56347; Dürers Annäherung giebt 0,5625, also einen recht brauchbaren Wert. Der Zentriwinkel des regulären Elfecks ist $32^\circ 43' 38''$, während der Dürer'schen Elfecksseite ein solcher von $32^\circ 40' 12''$ entspricht. Ebenso wäre im Einheitskreise die Seite des regulären Dreizehnecks = 0,478635, nach Dürer 0,5. Dies entspricht einer nicht mehr brauchbaren Annäherung. Der Zentriwinkel des regulären Dreizehnecks ist $27^\circ 41' 32''$, während dem halben Radius als Sehne ein Zentriwinkel von $28^\circ 57' 18''$ entspricht. Auch in der von Dürer beigegebenen Figur fällt der Fehler sogleich in hohem Grade störend ins Auge.

treffen, so ist der gegebene Kreisbogen in L und M triseziert¹. „wer es will geneuer haben | der such es demonstrative“ setzt Dürer hinzu. Diese Konstruktion ist insofern interessant, als es sich hier um eine planmässig vorgehende Annäherungsmethode handelt. E und F stellen gleichsam die erste Annäherung dar, diesen Punkten entsprechen die ungleichen Sehnenlängen AE, EF und FB. Diese Sehnenlängen werden nun auf AB abgetragen als AG, CD, BH und ihre Längen ausgeglichen; dabei wird allerdings von der nur näherungsweise geltenden Annahme ausgegangen, dass nachher im Kreise die zu kleine mittlere Sehne um das wachse, was den beiden zu grossen äusseren Sehnen weggenommen wird².

¹ Soll mit obiger Konstruktion z. B. ein Kreisbogen von 60° triseziert werden, so erhält man analog wie in Anmerkung 1 zu S. 25

$$CE = \frac{r}{6}\sqrt{35} - \frac{r}{2}\sqrt{3},$$

damit ist
$$AE = \sqrt{\left(\frac{r}{3}\right)^2 + \left(\frac{r}{6}\sqrt{35} - \frac{r}{2}\sqrt{3}\right)^2} = r \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{6}},$$

also
$$AL = AJ = \frac{r}{3} + \frac{2}{3} \left\{ r \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{6}} - \frac{r}{3} \right\} \\ = \frac{r}{9} + \frac{2}{3} r \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{6}}.$$

Bezeichne ich nun den zu AL gehörigen Zentriwinkel mit α , so ist

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{11 - \sqrt{105}}{6}}$$

und hieraus folgt

$$\frac{\alpha}{2} = 9^\circ 59' 59'' \text{ statt } 10^\circ$$

Man sieht also, welch geradezu verblüffende Genauigkeit obige Konstruktion hier giebt; würde dieselbe z. B. an einem Kreisbogen von 60°, dessen Radius selbst 1 m wäre, ausgeführt, so wäre Bogen AL nur um $\frac{1}{100}$ mm zu klein! Für grössere Kreisbögen stimmt die Konstruktion allerdings etwas weniger, doch ist noch:

bei einem Kreisbogen von 120° $\frac{\alpha}{2} = 19^\circ 59' 2'' \text{ statt } 20^\circ$

und „ „ „ „ 180° $\frac{\alpha}{2} = 29^\circ 44' 11'' \text{ statt } 30^\circ.$

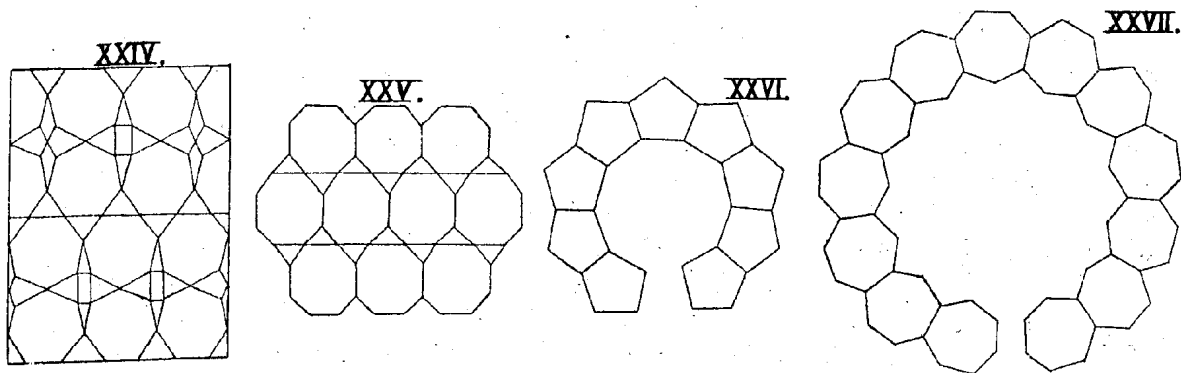
² Schon eine nur ganz oberflächliche Betrachtung des Gedankenganges dieser Annäherungsmethode legt die Vermutung nahe, dass je kleiner der Zentriwinkel des zu trisezierenden Bogens ist, desto genauer wohl auch die erhaltene Annäherung sein werde; ein Resultat, das wir oben für die Winkel 60°, 120° und 180° bestätigt fanden. Es muss deshalb auffallen, dass Günther in der schon mehrfach erwähnten Programmabhandlung S. 17 zu folgendem Schluss kommen konnte: „Aus dieser Nebeneinanderstellung geht hervor, dass für sehr grosse, also zumal für stumpfe Winkel, das Dürer'sche Verfahren eine recht leidliche Annäherung gewährt, weit weniger für spitze Winkel, die beträchtlicher von einem rechten abweichen.“ Die in jenem Programm enthaltene Günther'sche Behandlung unserer Trisektion ist zwar allgemein, dafür aber so umständlich, dass sich sowohl in der theoretischen Entwicklung, als auch in der praktischen Berechnung je ein Fehler eingeschlichen hat, welche Fehler jenes falsche Resultat bedingen. Zunächst muss auf S. 14 Zeile 17 v. o. das dritte Glied der linken Seite $\frac{4r^2}{3} \sin^2 \alpha$ statt $\frac{4r^2}{3} \sin \alpha$ heissen. Hiedurch nimmt die auf S. 15 Zeile 8 gegebene Gleichung die viel einfachere Form an:

$$m = \frac{2r}{9} \left\{ \sin \alpha + \sqrt{12 + 6 \cos^2 \alpha - 6 \cos \alpha \sqrt{9 - \sin^2 \alpha}} \right\},$$

aus welcher Gleichung sich ein mit meiner Berechnung vollständig übereinstimmendes Resultat ergibt.

Weiterhin sollte auf S. 17 Zeile 4 v. o. links stehen $s = 1,5$. Da $s = 2 \cdot \cos^2 \alpha$, so nimmt s für $\alpha = 30^\circ$ doch den Wert $2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right)^2 = 1,5$ an und nicht den Wert 1,50138. Die Behandlung, welche Kästner (Geom. Abhandl. I. S. 241 ff.) der Dürer'schen Trisektion angedeihen lässt, ist infolge ihrer grossen Ungenauigkeit für unsere Frage wertlos.

Als Anwendung der Konstruktionen regulärer Polygone will nun Dürer zeigen, wie letztere¹ teilweise mit Kreisen verbunden zu allerlei Masswerk verwendet werden können. Er leitet diesen Abschnitt mit den Worten ein: „So man zirkellini in den estrichē | oder in ein want zuversetzen brauchē will | mag man sy zweyerley art an ein ander rucken etc.“ und fährt dann später weiter: „Nun will ich etlich ecket figuren zusammen versetzen | wie man sie ein estrich ein bringen mag.“ In den nun folgenden Ornamenten sollen nur reguläre Polygone verwendet werden, denn am Ende dieses Abschnittes heisst es: „Man mag auch ander unregulirte figuren zusammen setzen | die da ungleich seyten haben | doch mit guter ordnung darauß begibt sich vil schöns dings,“ und weiterhin: „Auch mag man unregulirt figuren und geregulirt zusammen setzen | darauß auch hübsch ding und selzans zumachen ist | da kummen die selzamen züg und geng her. Solt ich das nun alles hy anzeygen | so wurd das büchlein vil zulang | darumb denk jm ein ylicher selbs nach.“ Nun sind aber die vorgeführten Ornamente nicht alle mit regulären Polygonen auszuführen. Fig. XXIV und XXV zeigen zwei derselben; hier können die verwendeten 7- und 8-Ecke unmöglich regulär sein. Noch bedenklicher für die Beurteilung gewisser mathematischer Kenntnisse Dürers und der Art ihrer Ver-



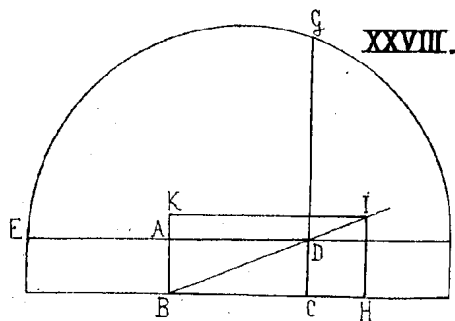
wendung sind die beiden Figuren XXVI und XXVII. Dürer schreibt hiezu: „Item so man die sibē eck mit den seyten nach einander an einander setzt | als das aussen zwey | unnd innen ein eck für schiessen | so gend sie in ein cirkel herum | schiessen aber nit | desgleichen thund auch die fünfeck.“ Wir haben hier wiederum ein ausgezeichnetes Beispiel, an dem wir ersehen können, wie Dürer seine Mathematik selbstthätig betrieb. Ihm fiel nicht ein, zu versuchen, die Winkel zu bestimmen, welche die aneinanderstossenden Seiten bei gehöriger Verlängerung bilden, sondern er glaubte, den von ihm ausgesprochenen Satz der Empirie entnehmen zu können. Allerdings, wer in Einzelkonstruktionen Polygon neben Polygon zeichnet, wird, schon wegen der Unzulänglichkeit des gewöhnlichen Zeichenmaterials, in den allermeisten Fällen zu finden glauben, dass dieselben den Kreis nicht schliessen².

Der jetzt noch folgende letzte Abschnitt des zweiten Buches beschäftigt sich der Hauptsache nach mit Verwandlungsaufgaben. Zuerst behandelt Dürer die Aufgabe, ein gleichseitiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln, indem er zuerst das Dreieck in ein Rechteck mit halber Grundlinie und gleicher Höhe verwandelt und dieses sodann mittelst des so-

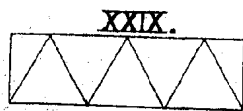
¹ und zwar 3- bis 8-Eck.

² Durch Rechnung überzeugt man sich ohne weiteres, dass in obiger Anordnung 14 reguläre Siebenecke, sowie 10 reguläre Fünfecke sich zu einem geschlossenen Ring zusammenfügen.

nannten Höhensatzes¹ in ein Quadrat. Dieser mathematisch strengen Lösung fügt Dürer „von der behendigkeit wegen“ eine allerdings ziemlich ungenaue Näherungskonstruktion an. Zur Quadratseite soll einfach $\frac{2}{3}$ der Dreiecksseite genommen werden². Als Vorbereitung zur folgenden Aufgabe will Dürer weiterhin über einer gegebenen Seite ein Rechteck zeichnen, das einem gegebenen ähnlich sei („gleiche gestalt habe“). Zur Lösung zeichnet Dürer die



Diagonale des gegebenen Rechtecks und kann nun leicht durch einfaches Ziehen von Parallelen das gesuchte Rechteck erhalten. Nun soll ein Rechteck gezeichnet werden, das einem gegebenen ähnlich und dabei doppelt so gross als dasselbe ist. Dürer setzt (vergl. Fig. XXVIII) an das gegebene Rechteck ABCD beiderseits ein ihm gleiches an und beschreibt über EF den Halbkreis, so ergibt ihm der Lotabschnitt DG die eine Seite des gesuchten Rechtecks. Indem er nun $BH = DG$ abträgt, erhält er vermittelst der vorigen Aufgabe das verlangte Rechteck BHJK. Ganz analog wird weiterhin die Aufgabe behandelt, wenn das gesuchte Rechteck das dreifache des gegebenen sein soll³. Ebenfalls durch Verwendung des Höhensatzes wird auch die Aufgabe gelöst, ein Quadrat zu zeichnen, das siebenmal so gross als ein gegebenes Quadrat ist. Dann folgt die Aufgabe, ein beliebiges Dreieck in ein Quadrat zu verwandeln. Zuerst wird das Dreieck in ein Rechteck mit gleicher Grundlinie und halber Höhe oder mit halber Grundlinie und gleicher Höhe verwandelt und das so erhaltene Rechteck in ein Quadrat. Soll ein reguläres Polygon in ein Quadrat verwandelt werden, so ziehe man zunächst die Radien nach den Ecken desselben und setze die so erhaltenen Dreiecke zu einem Rechteck zusammen, wie dies Fig. XXIX etwa für das reguläre Sechseck zeigt, und verwandle dieses Rechteck in ein Quadrat.



Die ganze Lehre von der Ausmessung des Kreises fertigt Dürer in der Ausgabe der Unterweisung vom Jahre 1525 mit folgenden kurzen Worten ab: „Von nöten wer zuwissen quadratura circuli | das ist | die vergleychnus eines cirkels | unnd eines quadrates | also das eins als vil inhielt als dz ander | aber soliches ist noch nit von den gelerten demonstrirt Mechanice | aber das ist beyleyffig | also das es im werck nit | oder gar ein kleyns felt | mag dise vergleychnus also gemacht werden. Rey/s ein fierung⁴ un teyl den ortstrich⁵ in zehen teyl | und rey/s darnach ein cirkelri/s des Diameter sol achtteyl haben | wie die quadratur zechnen hat | wie ich das unden hab aufgerissen. Vergleiche

¹ In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Höhe gleich dem Rechteck aus den Abschnitten, in welche die Hypotenuse durch diese Höhe zerlegt wird.

² Bezeichne ich die Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit a , so ist die Seite des gleich grossen Quadrats $= \sqrt{\frac{a^2}{4} \sqrt{3}} = 0,658037 a$, während obige Näherungslösung den Wert $0,666667 a$ annimmt.

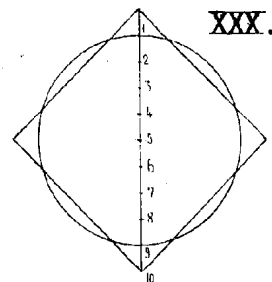
³ Dürer braucht hiezu eine neue Figur, da er nicht zu wissen scheint, dass GF in voriger Figur schon die verlangte Seite wäre.

⁴ Hier: „Quadrat“ (eigentlich nur Viereck).

⁵ Diagonale.

hiez u Fig. XXX. Bezeichnet r den Radius des Kreises, so wäre in diesem Falle also $r^2 \pi = 2 \left(\frac{5}{4} r\right)^2$, woraus $\pi = 3\frac{1}{8}$ folgen würde¹. Doch war Dürer in keiner Weise im stande zu durchschauen, wie seine Quadratur des Kreises implicate die Thatsache enthält, dass der Kreisumfang das $3\frac{1}{8}$ fache des Durchmessers ist. Im Gegenteil lehrt, wie wir später sehen werden, die Ausgabe der Unterweisung vom Jahr 1538 die Rektifikation des Kreises vermittelst des Wertes $\pi = 3\frac{1}{7}$. Beide Näherungskonstruktionen liefen als zwei gänzlich verschiedene Aufgaben wahrscheinlich in der Tradition der Bauhütte neben einander her, wobei jene Steinmetzen ebenso wenig als Dürer in der Lage waren, den innigen Zusammenhang beider Aufgaben sowie den inneren Widerspruch ihrer Lösungen zu erkennen.

Nach dieser Kreisberechnung führt Dürer den allgemeinen pythagoräischen Lehrsatz an und illustriert denselben durch zwei Figuren, in welchen das einmal gleichseitige Dreiecke, das anderemal Quadrate über den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks errichtet sind. Den Abschluss des Buches bildet eine Figur, bei welcher in den Zwickel zwischen 2 Kreisbögen Kreise eingezeichnet sind, die der Reihe nach sich gegenseitig und jene Kreisbögen berühren. Doch zeigt Dürer nicht, wie diese Kreise erhalten werden; dieselben sind in der Figur auch Nebensache, denn Dürer will nur den Zwickel durch Querlinien „ordentlich teylen und abschneyden“, und hiez u sind die abnehmenden Durchmesser dieser Hilfskreise das Mass für die Abstände, in welchen jene Querlinien auf einander folgen sollen. Wir haben es also hier, entgegengesetzt dem ersten Eindruck, den der Anblick der Figur hervorruft, nicht mit einer Aufgabe zu thun, welche



¹ In Betreff dieses Wertes liest man gewöhnlich, derselbe komme ausser hier bei Dürer nur noch bei Vitruv vor, doch scheint dieser Wert auch sonst in mittelalterlichen Manuskripten verwendet zu werden. Was das Vorkommen bei Vitruv anbelangt, möchte ich mir hier einige Worte erlauben, um meine Ansicht zu verteidigen, dass Vitruv $\pi = 3$ und nicht $\pi = 3\frac{1}{8}$ anwandte. Vitruv kommt nämlich im 14. (9.) Kapitel des X. Buches seiner Architektur auf Wagen und Schiffe zu sprechen, vermittelst welcher man durch geeignete Selbstregistrierung der Umdrehungszahlen eines Rades von bekanntem Umfange den zurückgelegten Weg messen kann. Nun enthalten allerdings manche Kodices und Drucke bei der Beschreibung der betreffenden Wagen die Angabe, einem Radhalbmesser von 4' entspreche ein Radumfang von $12\frac{1}{2}'$, woraus sich $\pi = 3\frac{1}{8}$ ergeben würde. Zunächst möchte ich vor allem darauf aufmerksam machen, dass fast alle Kodices und Drucke in der unmittelbar darauf folgenden Stelle, wo es sich um die betreffenden Schiffe handelt, angeben, der Halbmesser des Rades müsse $4\frac{1}{6}'$ sein, damit sein Umfang $12\frac{1}{2}'$ werde. Hier ist also π sicher gleich 3 angenommen. Würde eine solche Abweichung vom Schriftsteller selbst herrühren, so könnte sie doch nur den Sinn haben, durch ein absichtlich falsch in Rechnung gezogenes π gleichsam die geringere Reibung beim Schiffe auszugleichen. Doch daran ist in keiner Weise zu denken. Soll einer Umdrehung des Rades eine Fortbewegung des Schiffes um $12\frac{1}{2}'$ entsprechen und gleichzeitig die nicht zur streckengleichen Abwicklung genügende Reibung im Wasser berücksichtigt werden, so müsste hier der Radius kleiner, als beim Wagen, und nicht grösser gewählt werden. Zudem finde ich z. B. in einem Drucke vom Jahr 1523 auch an der ersten Stelle das Verhältnis $4\frac{1}{6} : 12\frac{1}{2}$ und Reber bemerkt in seiner deutschen Vitruv Ausgabe, die Kodices geben sowohl bei den Wagen als auch bei den Schiffen das Verhältnis $4\frac{1}{6} : 12\frac{1}{2}$ an. Diese Angabe ist nun allerdings in der Allgemeinheit, wie Reber will, nicht richtig, wovon man sich leicht durch die kritische Vitruv Ausgabe von Rose-Müller überzeugen kann, doch glaube ich, dass aus dem vorgelegten Material das gefolgert werden kann, dass Vitruv selbst jedenfalls das Verhältnis $4\frac{1}{6} : 12\frac{1}{2}$ d. h. $\pi = 3$ zu Grunde legte. Später wurde teilweise in manchen Manuskripten, sei es aus Versehen oder vielleicht absichtlich, statt $4\frac{1}{6}'$ 4' gesetzt; die hiebei leitende Absicht hätte die sein können, den Bruch zu umgehen und zugleich ein genaueres Resultat zu erhalten, also zwei Vorteile aus dieser kleinen Korrektur zu ziehen.

der Mathematiker Dürer sich stellt, sondern mit einer solchen, welche den Künstler Dürer beschäftigt.

Weitaus die geringste Ausbente für unser Thema giebt das dritte Buch der Unterweisung, das „*von den Corperlichen dingen*“ handelt, obgleich dasselbe dem Umfange nach das grösste ist. Dürer definiert zunächst den Begriff „Säule“ und „Pyramide“, um dann sogleich zu einer sehr eingehenden Beschreibung von Basis, Schaft und Kapital einer Reihe von Säulen überzugehen. In den einleitenden Bemerkungen hiezu schreibt Dürer: „*So man aber von dem gantzen bauwerk oder seynen teylen reden will | acht ich es sey keynem berümbten baumeister oder werkmann verborgē wie künstlich und meysterlich der alt Römer Vitruvius in seinen büchern von der bsteendigkeit | nutzbarkeit | unnd zierden der gebau geschriben hab | der halb jme auch for anderen zufolgen | und sich seiner ler zu brauchen ist. So ich aber ytzo für nym ein seulen oder zwo leren zu machen | für die jungen gesellen | sich darynn zu üben | so bedenck ich der deutschen gemüt | dann gewonlich alle die etwas neues bauen wollen | wolten auch geren ein neue fatzon dar zu haben | die for nye gesehen wer. Darumb will ich etwas anders machen | darauß nem ein ytlicher was jm gefall | und mach nach seinem willen.*“ Nun folgt die Beschreibung von 6 Säulen. Die 3 ersten, welche als Stützsäulen gedacht sind, entfernen sich nicht allzusehr von auch sonst üblichen Formen, dagegen haben die 3 letzten jederzeit Kopfschütteln hervorgerufen. Dürer leitet die erste derselben ein mit den Worten: „*Es begibt sich oft | so man in schlachten ein felt erobert das man dann ein gedechtnus oder seulen an der stadt da man die feynd erlegt hat aufricht.*“ Nun beschreibt Dürer zuerst eine solche Gedächtnissäule auf den Sieg über „*mechtig leut*“; dieselbe ist aus Kriegstrophäen zusammengesetzt. Die zweite Gedächtnissäule auf den Sieg über aufrührerische Bauern besteht aus lauter landwirtschaftlichen Geräten und ist oben mit einem von hinten durchbohrten Bauern gekrönt. Am Fuss derselben befindet sich eine meisterhaft gezeichnete Gruppe gefesselten Viehs. Nicht unwitzig bemerkt Kästner hiezu: „Man könnte wohl einen *studiosum oeconomiae* über die landwirtschaftlichen Werkzeuge examinieren, die dieses Siegeszeichen ausmachen.“ Die dritte dieser Säulen endlich ist auf das Grab eines Trunkenboldes bestimmt und ist aus lauter Ess- und Trinkgeschirren aufgebaut. Dürer schliesst diese Beschreibung mit den Worten: „*der gleychen von anderen dingē möcht man gar manicherley nach eines yetlichen leben sein begrebnus zieren | solichs hab ich von abenteuer wegen wollen anzeygen unnd zusamt den anderen seulen aufgerissen.*“ Unwillkürlich fragt man sich, was eigentlich Dürer mit diesen 3 Säulen beabsichtigte, von denen zu alledem noch die Bauernsäule auch konstruktiv verfehlt ist. Wie könnte dieses Zusammengestoppel von Ackergerätschaften etc. den auf einem „*küner körble*“ und einem „*schmaltzhafen*“ sitzenden Bauern tragen? Sollte man es in diesen Säulen, wie Thapsing will, in der That nur mit einem Scherze zu thun haben? Ich glaube dies nicht. Dagegen spricht mir zu laut die Thatsache, dass Dürer diese Säulen in ein Werk aufnahm, dessen Zweck, Belehrung der Jugend, er deutlich ausspricht und sonst überall im Auge hat. Es muss, das ist meine feste Überzeugung, vom Standpunkte Dürers aus, auch das Hinzuziehen dieser Ausgeburten seiner Phantasie mit dem Zwecke des ganzen Werkes im Einklang stehen. Hiezu möchte ich zunächst darauf aufmerksam machen, dass z. B. bei der Bauernsäule Dürer peinlich genau die Längen- und Breitenverhältnisse der einzelnen Glieder als „*kesnapf*“, „*butterfas*“, „*milich krug*“, „*garbe mit mistgabel* etc.“ angiebt. Halte ich diese detaillierte Beschreibung der Dimensionen zusammen mit manchen Aussprüchen Dürers über die Wichtigkeit der Proportionalität für die Schönheit der Dinge, wie solche

Aussprüche hauptsächlich seine „Vier Bücher von menschlicher Proportion“ enthalten, so komme ich zu folgendem Schlusse. Für Dürer war die ästhetische Wirkung gewisser Zahl- und Grössenverhältnisse so sehr Dogma, dass er fest überzeugt war, dieselben üben die von ihm beabsichtigte Wirkung aus, ganz abgesehen davon, in welcher konkreten Gestalt und Form sie in die Erscheinung treten. In dieser kunsttheoretischen Überzeugung, dass gewisse mathematische Verhältnisse an Kunstwerken deren Schönheit bedingen, war Dürer ganz Kind seiner Zeit und stand vollständig auf demselben Boden mit den Kunsttheoretikern der italienischen Renaissance. So waren ihm jene Säulen „Ernst“; doch glaube auch ich natürlich nicht, dass Dürer einen eventuell in dieser Art an ihn gekommenen Auftrag ähnlich ausgeführt haben würde; davor hätte ihn sein künstlerischer Genius bewahrt, der in seinem innersten Wesen sich gegen jenes Dogma sträubte.

Nach diesen Säulen beschreibt Dürer die Höhenverhältnisse eines Turmes und giebt weiterhin eine Methode zum Messen der Höhe eines solchen an, welche darauf beruht, dass der Höhenwinkel in die Horizontalebene umgeklappt und nun in derselben die der Turmhöhe entsprechende Distanz gemessen wird. Sodann kommt Dürer auf die Konstruktion von Sonnenuhren zu sprechen. Als Einleitung hiezu lehrt er erstens, mit Zirkel und Lineal von einem Punkt ausserhalb einer Geraden auf dieselbe das Lot fallen (und zwar verfährt er ganz in derselben Weise, wie wir dies heute noch thun) und zweitens einen rechten Winkel in 90 gleiche Teile zu teilen. Von einer streng mathematischen Lösung dieser zweiten Aufgabe kann natürlich nicht die Rede sein, aber auch seine Anordnung der durch Probieren zu findenden Teilung, welche durch die Identität $90 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5$ ausgedrückt ist, kann keine glücklich gewählte genannt werden; verzichtet er hiebei doch schon da auf eine streng mathematische Lösung, wo eine solche noch möglich wäre. Dürer leitet die Angabe der Konstruktion seiner Sonnenuhren mit den Worten ein: *„Es ist auch den steinmetzen | maleren | und schreyneren nutz das sie an die thürn heuser und gemeur ein gemeine sonnē or können aufrichten | des halben will ich nachfolget ein wenig darfan anzeygen | so vil für den gemeinen man not ist | und die klein or von .12. stunden leren machen.“* Zuerst konstruiert Dürer die gewöhnliche Äquinoktialuhr¹ (Äquatorialuhr) und aus ihr sodann in ein und derselben Zeichnung die vertikale Mittagsuhr und die Horizontaluhr. Darauf zeigt er, wie diese Uhren alle in bekannter Weise an einem achtseitigen prismatischen Block², der auf einer seiner Seitenflächen liegt, angebracht werden können. Oben trägt derselbe die Horizontaluhr, dann folgt nach Norden unter einem Winkel von 41° gegen den Horizont geneigt die Sommeräquinoktialuhr, ihr parallel gerade gegenüber die Winteräquinoktialuhr, weiterhin gegen Norden die vertikale Mitternachtssuhr und wieder ihr parallel gegenüber die vertikale Mittagsuhr. In Betreff der auf den Grundflächen dieses Prismas zu konstruierenden Sonnenuhren, bei welchen ein senkrecht auf diesen Grundflächen stehender Zeiger³ nicht durch die Richtung, sondern durch den Endpunkt seines Schattens die Zeit angiebt, schreibt Dürer einfach: *„Darnach richt die horalogia auch an die zwo nebē seitē gegen dem auf und nidergang | wie das alles hernach ist aufgerissen.“* Vollends über die an den beiden noch

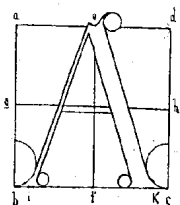
¹ Die Sonnenuhren sind alle für den Parallelkreis von Nürnberg konstruiert. Im Texte giebt Dürer die Polhöhe Nürnbergs zu 49° an, seine Figur aber zeigt den der Wahrheit noch näher kommenden Wert von etwa $49\frac{1}{4}^\circ$, ob absichtlich oder nicht, bleibe dahingestellt.

² Fälschlich nennt Günther denselben „ein gerades Prisma von regulär-achteckiger Basis“. Die Winkel der Basis sind vielmehr abwechselungsweise 131° und 139° .

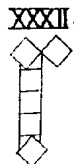
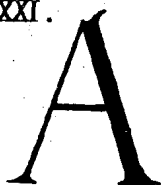
³ Der also in der Ost-West-Richtung sich befindet.

freien Seitenflächen unseres Prismas anzubringenden Sonnenuhren ist weder aus der Zeichnung noch den paar ganz unklaren Worten, die sich mit ihnen beschäftigen, irgend etwas Brauchbares zu entnehmen. In Betreff der Konstruktion einer Sonnenuhr an beliebig schiefer Wand endlich verweist Dürer nur auf eine Zeichnung, welche jedoch zur Erklärung dieser Konstruktion ebenfalls ungenügend ist.

Weiterhin will Dürer zeigen, wie die Grösse der Buchstaben verschiedener Zeilen einer Inschrift zu bemessen ist, wenn diese Zeilen in erheblichem Höhenunterschied, z. B. an einer Turmwand, sich befinden und dabei die scheinbare Höhe¹ aller Buchstaben von einem bestimmten Punkte aus die gleiche sein soll. Doch dürfte dies Verfahren in praxi nicht zu verwenden sein, denn erstens besteht bei demselben jene Gleichheit eben nur für den angenommenen Standpunkt und zweitens ist hiebei das subjektive Moment, das im unwillkürlichen Schätzen und Vorstellen der wahren Grösse beruht, ganz ausser acht gelassen, was sich sehr störend fühlbar machen würde. Im Anschluss an diese Aufgabe schreibt Dürer: „So daß die bauleut auch maler und ander etwan schrift an die hohen gemauer pflegen zu machen | so thut not das sie recht bustaben leren machen | darumb will ich hie ein wenig dafon anzeygen | erstlich ein Lateinisch .a.b.c. für schreyben | darnach ein textur | die zu schrift man



XXXI.



XXXII.

gewonlich zu solchen dingen braucht.“ Es folgt nun zuerst eine prächtige Antiqua-Majuskel („Lateinisch .a.b.c.“). Jeder Buchstabe wird in ein Quadrat einbeschrieben und Dürer giebt bis aufs genaueste dessen Konstruktion an. Als Beispiel möge beistehendes A dienen. Hierauf folgt eine Fraktur-Minuskel („Textur“); hiebei wird jeder Buchstabe aus einer Reihe kleiner Quadrätchen aufgebaut, wie solches an beistehendem r zu sehen ist. Zum Schluss schreibt Dürer: „Difs ist nun die alte meynung wie for gemelt | aber yetz macht man die textur freyer . . . solichs hab ich auch hernach für geschriben | uñ die kleinen verschal² die man in den zeylen an die wörter setzt darzu gemacht | “ Und nun folgt auf dem letzten Blatt dieses dritten Buchs eine etwas freier gehaltene Fraktur-Minuskel mit den dazu gehörigen Versalbuchstaben. —

Wie das 3. Buch, so handelt auch das 4. Buch von Körpern; während aber dort Dürer einzig und allein die Bedürfnisse seines in der Praxis stehenden Lesers im Auge hat, so wendet er sich hier in erster Linie an den Mathematiker. Dürer beginnt dieses Buch mit der Behandlung der 5 regulären Polyeder³. Zuerst werden deren Flächen-, Ecken- und Kantenzahlen angegeben, dann das Netz vorgeführt und schliesslich eine Horizontal- und Vertikalprojektion des Körpers gezeichnet. Da sich diese sehr oberflächliche Behandlung bei allen wiederholt, möge sie im Wortlaut z. B. für das Ikosaeder⁴ folgen: „Das dryt corpus hat zweyntzig

¹ d. h. der Schwinkel.

² d. h. grosse oder Anfangsbuchstaben, welche nach ihrer Anwendung bei Versanfängen „Versalien oder Versalbuchstaben“ benannt werden.

³ Er verweist in Betreff dieser Zahl auf Euklid.

⁴ Beim Oktaeder fügt Dürer die Worte bei: „Das ander corpus ist wie ein diamant punct etc.“

driangliche gleyche felder von gleychẽ wincklen | uñ zwelf gleycher fünfecketer eck und dreyssig scharpfer gleycher seyten. Wie jeh das hernach gantz | offen darnach zugethan nider in grund gelegt | und darnach wider aufgezozen hab aufgerissen“. Wie diese Projektionen erhalten werden, zeigt Dürer nicht, dementsprechend kommen in denselben auch ziemlich schwere Fehler vor. So z. B. kann ein auf der Horizontalebene stehendes reguläres Tetraeder in der Vertikalprojektion nie ein reguläres Dreieck zeigen, wenn die betreffende Vertikalebene einer der Grundkanten des Tetraeders parallel geht, wie dies in Dürers Figur der Fall ist. Wenn dann Dürer weiterhin sagt, dass die Ecken aller dieser Körper auf einer Kugel liegen, welche er ebenfalls aufgerissen habe, so ist hiezu zu bemerken, dass in allen Horizontal- und Vertikalprojektionen ausser beim Oktaeder und Ikosaeder die als Umkreise der betreffenden Projektionen eingezeichneten Kreise nicht als Horizontal- und Vertikalprojektionen der umschriebenen Kugeln gelten können. In der Vertikalprojektion des Ikosaeders aber sind 6 Punkte als auf der Peripherie eines Kreises liegend gezeichnet, welche überhaupt nicht auf einem Kreise liegen können etc. Als Anmerkung zu diesen regulären Körpern fügt Dürer bei, man könne daraus andere Körper ableiten, indem man auf jede Seitenfläche eine Pyramide aufsetze. Eine weitere Figur zeigt, wie aus 16 richtig gewählten Bogenzweiecken ein kugelähnlicher Körper gebildet werden kann.

Nun geht Dürer zu den archimedischen¹ Körpern über, die er als solche definiert, deren Ecken auf einer Kugel liegen, deren Seitenflächen aber verschiedenartige reguläre Polygone sind. Dürer giebt bei der Behandlung derselben meist nur die Zahlen für die Flächen, Ecken und Kanten an, setzt aber stets die Figur des Netzes hinzu und fordert seine Leser auf, daraus den Körper selbst sich zu fertigen, mit den Worten: „*welicher sie aber machen will der reißt sie gröfser auf ein zwifach gepabt papier | uñ schneyd mit einem scharpfen messer auf der einen seyten all ryfs durch den einen pogen papiers | und sodan all ding aufs dem übrigẽ papier geledigt wirt | als dan legt man das corpus zusammen | so lest es sich gëren in den rissen piegen.* |“ In diesem Entwerfen der Netze einer Reihe archimedischer Körper, von denen Dürer nur die Zahl ihrer Flächen etc. überkam, haben wir eine der wichtigsten selbständigen Leistungen Dürers als Mathematiker vor uns, und es ist deshalb angezeigt, dass ich etwas näher auf diese Körper eingehe und deren Netze in einem besonderen Anhang abbilde (vergl. hiezu die Skizzen auf Seite 58 und 59). Die in oben angedeuteter Weise von Dürer behandelten archimedischen Körper sind der Reihe nach folgende²:

I. Das „Tetraedron truncum“. Die Oberfläche desselben besteht aus 4 regulären Sechsecken und 4 regulären Dreiecken³; der Körper selbst hat 12 Ecken und 18 Kanten⁴.

¹ Den Namen „archimedischer Körper“ gebraucht Dürer nicht.

² Die von mir im Texte oben gewählten Namen stammen nicht von Dürer; dieselben entnahm ich vielmehr Keplers: *Harmonices Mundi*, Lib. II, Prop. XXVIII; dagegen ist die beigesetzte Beschreibung Dürer entnommen. In den Anmerkungen gebe ich sodann für den Leser eine kurze Orientierung über die Ableitung jedes einzelnen dieser Körper aus den regulären Polyedern.

³ Sämtliche Ausgaben, sogar die Lateinische und die „verbesserte“, reproduzieren hier einen Druckfehler aus Dürers erster Auflage, wo von drei regulären Dreiecken die Rede ist.

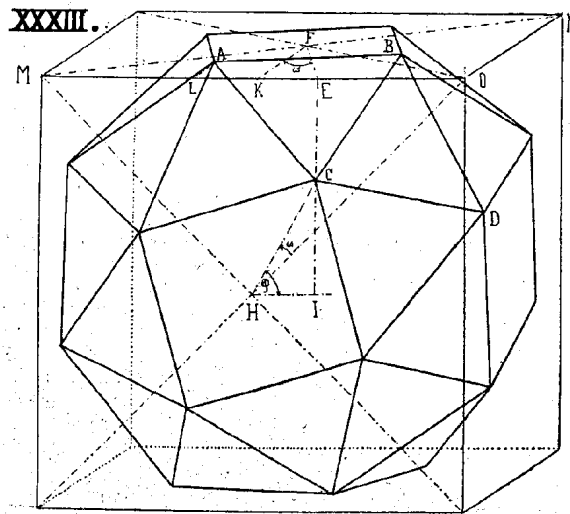
⁴ Das „Tetraedron truncum“ kann aus dem Tetraeder abgeleitet werden, indem man dessen Ecken durch Ebenen so abstumpft, dass aus den ursprünglichen Seitenflächen des Tetraeders reguläre Sechsecke entstehen. Die abstumpfenden Ebenen nehmen je $\frac{1}{3}$ der Kanten des Tetraeders weg.

II. Der „Kubus truncus“. Die Oberfläche desselben besteht aus 6 regulären Achtecken und 8 regulären Dreiecken; der Körper selbst hat 24 Ecken und 36 Kanten¹.

III. Das „Kuboktaedron“. Die Oberfläche desselben besteht aus 6 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken; der Körper selbst hat 12 Ecken und 24 Kanten².

IV. Das „Oktaedron truncum“. Die Oberfläche desselben besteht aus 8 regulären Sechsecken und 6 regulären Vierecken; der Körper selbst hat 24 Ecken und 36 Kanten³.

V. Das „Rhombikuboktaedron“. Die Oberfläche desselben besteht aus 18 Quadraten und 8 gleichseitigen Dreiecken; der Körper selbst hat 24 Ecken und 48 Kanten⁴.



VI. Der „Kubus sinus“. Die Oberfläche desselben besteht aus 6 Quadraten und 32 gleichseitigen Dreiecken; der Körper selbst hat 24 Ecken und 60 Kanten⁵.

¹ Der „Kubus truncus“ kann aus dem Würfel abgeleitet werden, indem man dessen Ecken durch Ebenen so abstumpft, dass aus den ursprünglichen Seitenflächen des Würfels reguläre Achtecke entstehen. Die abstumpfenden Ecken nehmen je $\frac{2 - \sqrt{2}}{2}$ der Kanten des Würfels weg.

² Das „Kuboktaedron“ wird aus dem Würfel oder dem Oktaeder dadurch erhalten, dass man die Ecken bis zu den Halbierungspunkten der Kanten abstumpft.

³ Das „Oktaedron truncum“ kann aus dem Oktaeder abgeleitet werden, indem man dessen Ecken durch Ebenen so abstumpft, dass aus den ursprünglichen Seitenflächen des Oktaeders reguläre Sechsecke entstehen. Die abstumpfenden Ebenen nehmen je $\frac{1}{6}$ der Kanten des Oktaeders weg.

⁴ Das „Rhombikuboktaedron“ wird am einfachsten aus dem Rhombendodekaeder dadurch abgeleitet, dass man dessen Ecken bis zu den Halbierungspunkten der Kanten abstumpft. Das Rhombendodekaeder selbst ist das Polarpolyeder zum obigen „Kuboktaedron“ und wird aus dem Würfel oder dem Oktaeder dadurch erhalten, dass man durch die Kanten derselben Ebenen legt, welche mit den in den Kanten zusammenstossenden Seitenflächen gleiche Winkel bilden.

⁵ Am meisten Schwierigkeit bietet die Ableitung des „Kubus sinus“ aus dem Würfel. Man denke sich zunächst in jede Seitenfläche eines Würfels, dessen Kante $2a$ sein möge, ein Quadrat eingezeichnet, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Würfelquadrats zusammenfällt und dessen Seiten den entsprechenden Würfelkanten parallel laufen. Nun drehe man sämtliche eingezeichnete Quadrate um ihre Mittelpunkte und zwar vom Mittelpunkt des Würfels aus gesehen in gleichem Sinn um gleiche Winkel bis zwischen ihnen in der Anordnung, wie dies Fig. XXXIII zeigt, lauter gleichschenklige Dreiecke entstehen. Denke ich mir hierbei die zunächst noch beliebige gedachte Seite der eingezeichneten Quadrate so gewählt, dass diese Dreiecke nicht nur

VII. Das „Kuboktaedron truncum“. Die Oberfläche desselben besteht aus 6 regulären Achtecken, 8 regulären Sechsecken und 12 regulären Vierecken; der Körper selbst hat 48 Ecken und 72 Kanten¹.

Hiezu kommen noch, sicher von Dürers Hand herrührend, in der Formschneider'schen Ausgabe vom Jahr 1538 folgende zwei Polyeder:

VIII. Das „Ikosaedron truncum“. Die Oberfläche desselben besteht aus 12 regulären Fünfecken und 20 regulären Sechsecken; der Körper selbst hat 60 Ecken² und 90 Kanten³.

gleichschenkelig sondern gleichseitig werden, so habe ich den „Kubus simus“. Hiezu ist nach den Grundsätzen der zentrischen Symmetrie nötig und ausreichend, dass $AB = AC = BC$ werde. Um diese Lage der eingezeichneten Quadrate und ihre Seitenlängen rechnerisch zu bestimmen, nenne ich die halbe Diagonale der eingezeichneten Quadrate r , den Drehwinkel ω , bezeichne zugleich den Winkel $(45^\circ + \omega)$ mit φ und falle CE , FK und AL senkrecht auf MO , so ist, da $AC = CB$, auch $AE = EB$, also FE Mittellot auf AB ; damit erhalte ich:

$$a \cdot \operatorname{tg} \omega = r \cdot \cos \varphi \quad (\text{d. h. nichts anderes als } KE = HJ)$$

hieraus folgt

$$r = \frac{a}{\cos \varphi} \cdot \operatorname{tg} \omega = \frac{a}{\cos \varphi} \cdot \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi}; \quad (*)$$

$$\text{ferner ist } AB^2 = AC^2 \text{ d. h. } 2r^2 = AL^2 + LE^2 + EC^2 \\ = 2EC^2 + 4HJ^2 \quad (\text{da } AL = CE \text{ und } LK = KE = HJ)$$

damit
also

$$r^2 = EC^2 + 2HJ^2 = (a - r \sin \varphi)^2 + 2r^2 \cos^2 \varphi \\ 0 = a^2 - 2ar \sin \varphi + r^2 \cos^2 \varphi.$$

Obigen Wert (*) von r hierin eingesetzt, beide Seiten der so erhaltenen Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert und die ganze Gleichung geordnet, giebt:

$$2 \cos^3 \varphi + 2 \sin \varphi \cdot \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi - 2 \sin^3 \varphi = 0.$$

Hieraus folgt als Bestimmungsgleichung für φ die sehr elegante Relation:

$$\operatorname{ctg}^3 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi + \operatorname{ctg} \varphi = 1.$$

Diese Gleichung aufgelöst giebt
und damit

$$\varphi = 61^\circ 28' 7'' \\ \omega = 16^\circ 28' 7'' \text{ etc.}$$

Hieraus lässt sich leicht die Lage der beim „Kubus simus“ neu auftretenden Ebenen gegen die Ecken und Kanten des ursprünglichen Würfels ableiten. Eine andere einfachere Art der Bestimmung dieser Lage, welche dagegen jenen Drehwinkel nicht direkt ergibt und auch auf keine ganz so elegante Gleichung führt, ist folgende: Ich bezeichne mit x und y je die Entfernungen der Ecken der einbeschriebenen Quadrate von denjenigen zwei Seiten der entsprechenden Würfelquadrate, bei welchen x und y kleiner als a sind; zugleich möge $x > y$ sein. Nun erhält man sehr leicht:

$$AB^2 = (x - y)^2 + (2a - x - y)^2$$

$$BC^2 = x^2 + (x - y)^2 + y^2$$

$$AC^2 = 2y^2 + (2a - 2x)^2$$

$AB = AC$ gesetzt, giebt

$$x^2 - 2ax + 2ay = 0, \text{ also } y = \frac{2ax - x^2}{2a}$$

$AC = BC$ gesetzt, giebt

$$2x^2 + 2xy - 8ax + 4a^2 = 0.$$

Setzt man nun in diese letzte Gleichung obigen Wert für y , so erhält man

$$x^3 - 4ax^2 + 8a^2x - 4a^3 = 0 \text{ etc.}$$

¹ Das „Kuboktaedron truncum“ kann durch gleichzeitige Abstumpfung der Kanten und Ecken sowohl aus dem Würfel als auch aus dem Oktaeder abgeleitet werden. Will man es z. B. aus dem Würfel ableiten, so müssen diejenigen Ebenen, welche die Ecken abstumpfen, von den betreffenden Kanten je $\frac{3(4 - \sqrt{2})}{14}$ wegnommen, während eine Ebene, welche eine Kante abstumpfen soll, von den 4 diese Kante schneidenden Kanten $\frac{4 - \sqrt{2}}{14}$ wegnimmt.

² Die Formschneider'sche Ausgabe giebt hier irrthümlicher Weise 62 Ecken an.

³ Das „Ikosaedron truncum“ kann aus dem Ikosaeder abgeleitet werden, indem man dessen Ecken so abstumpft, dass aus den ursprünglichen Seitenflächen des Ikosaeders reguläre Sechsecke entstehen. Die abstumpfenden Ebenen nehmen je $\frac{1}{3}$ der Kanten des Ikosaeders weg.

IX. Das „Ikosidodekaedron“. Die Oberfläche desselben besteht aus 12 regulären Fünfecken und 20 regulären Dreiecken; der Körper selbst hat 30 Ecken und 60 Kanten¹.

In dieser Behandlung der archimedischen Körper fehlen also nur 4, nämlich das „Dodekaedron truncum“, das „Ikosidodekaedron truncum“, das „Rhombikosidodekaedron“ und das „Dodekaedron simum“; doch füge ich der Vollständigkeit halber auch deren Netze, sowie kurze Notizen über die Ableitung dieser Körper selbst bei².

Ferner giebt Dürer das Netz eines Körpers, dessen Oberfläche aus 6 regulären Zwölfecken, 24 gleichschenkligen und 8 gleichseitigen Dreiecken gebildet wird. Es ist dies ein Körper, den Dürer selbständig durch Abschneiden der Ecken eines Würfels erzeugte; am Ende dieser Betrachtungen schreibt er nämlich: „So man den for gemachten Corporen mit glatten schnittē jre eck weg nimbt | und dan die beleybenden eck | aber hinein nymbt | so may man manicherley corpora darauß machen.“ Unser Körper kann aus dem Würfel abgeleitet werden, indem man jede Ecke durch 3 Ebenen so abstumpft, dass aus den ursprünglichen Seitenquadraten des Würfels reguläre Zwölfecke entstehen³, und dann noch jede von einem solchen Ebenentriplett neugebildete Ecke durch eine weitere Ebene wegnimmt, welche durch die 3 jener Ecke zunächstliegenden Zwölfecks-Ecken geht. Während Dürer bei den archimedischen Körpern darauf angewiesen war, aus spärlichen Notizen über Zahl, Art und Anordnung der Begrenzungsflächen derselben diese Körper selbst aufzubauen, hat er bei diesem Körper sicher direkt am massiven Würfel operiert. Nur daher kann es kommen, dass, während dort alle Netze tadellos richtig sind, sich hier bei dem nach einem massiven Modell frei entworfenen Netze ein sehr bedenklicher Fehler einschleicht. Nicht weniger als achtmal nämlich lässt Dürer in demselben 4 jeweils in einer Ecke zusammenstossende Flächen die Zeichnungsebene ganz ausfüllen⁴. Hätte Dürer auch diesen Körper aus seinem Netze aufgebaut, so könnte ihm ein solcher Fehler sicherlich nicht entgangen sein. Der nächste Körper, von dem Dürer ein Netz giebt, ist einfach ein reguläres sechsseitiges Prisma mit beiderseits aufgesetzten regulären sechsseitigen Pyramiden, und zwar sind die Seitenflächen des Prismas Quadrate, diejenigen der Pyramiden gleichschenklige Dreiecke, deren Höhe gleich der Grundlinie ist.

Weiterhin bietet nun die Ausgabe vom Jahr 1538 gegenüber der früheren abermals 2 neue Zusätze. Der erste Zusatz beschäftigt sich mit einem Körper, der dadurch erzeugt wird, dass

¹ Das „Ikosidodekaedron“ wird aus Ikosaeder oder Dodekaeder dadurch erhalten, dass man die Ecken bis zu den Halbierungspunkten der Kanten abstumpft.

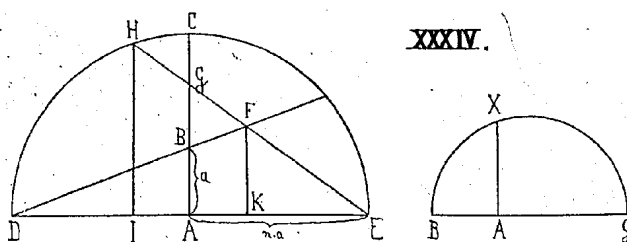
² Das „Dodekaedron truncum“ kann aus dem Dodekaeder abgeleitet werden, indem man dessen Ecken so abstumpft, dass aus den ursprünglichen Seitenflächen des Dodekaeders reguläre Zehnecke entstehen. Das „Ikosidodekaedron truncum“ kann aus dem Ikosaeder oder Dodekaeder analog erhalten werden, wie das „Kuboktaedron truncum“ aus dem Oktaeder oder Würfel. Das „Rhombikosidodekaedron“ kann aus dem Rhombentriakontaeder dadurch abgeleitet werden, dass man dessen Ecken bis zu den Halbierungspunkten der Kanten abstumpft. Das Rhombentriakontaeder selbst ist das Polarpolyeder zu obigem „Ikosidodekaedron“ und kann aus Ikosaeder oder Dodekaeder dadurch erhalten werden, dass man durch die Kanten derselben Ebenen legt, welche mit den in diesen Kanten zusammenstossenden Seitenflächen gleiche Winkel bilden. Das „Dodekaedron simum“ endlich kann aus dem Dodekaeder analog entwickelt werden, wie oben der „Kubus simus“ aus dem Würfel. Überhaupt lässt sich diese Entwicklungsart, welche meines Wissens neu ist, auch auf die übrigen regulären Polyeder anwenden; man erhält vermittelst derselben aus dem Tetraeder das Ikosaeder, aus dem Oktaeder dagegen wieder den „Kubus simus“, der deshalb ebensogut „Oktaedron simum“ genannt werden könnte, und schliesslich ergäbe analog das Ikosaeder nichts anderes als das „Dodekaedron simum“.

³ Eine dieser Ebenen schneidet je von einer Kante $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, von den beiden andern $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ ab.

⁴ d. h. die Seiten der betreffenden 8 Vierkante würden zusammen jeweils 360° betragen.

auf einer Kugeloberfläche 12 äquidistante Meridiane und 6 äquidistante Parallelkreise gezogen und nun in sämtlichen 12 Vollkreisen der Reihe nach die Schnittpunkte verbunden werden. Von dem so erzeugten Körper wird Grund- und Aufriss gegeben. Der zweite Zusatz hätte schon in das erste Buch gehört; denn derselbe lehrt die Rektifikation des Kreises und zwar wird der Kreisumfang gleich $3\frac{1}{7}$ des Durchmessers gesetzt. Die dabei gegebene Figur erinnert in sehr hohem Masse an die von Günther aus der „Geometria deutsch“ veröffentlichte.

Die letzte mathematische Aufgabe, die Dürer sich vorlegt und auch eingehend behandelt, ehe er zur Perspektive übergeht, welcher der Schluss des ganzen Werkes gewidmet ist, wird mit folgender historischer Einleitung versehen: „Als auf ein zeyt die stat Athenis mit der plag der pestilentz beschwert | was fragten die burger den Abgot Apollinem rates | wie sie defs seuchens möchten abkomē | der anwardet jn | wēn sie seinen altar zwispalten | würden sie erlöst | also liessen sie ein stein machē der eben so gross was als d'altar | legten jn auf denselben | als aber die plag nit aufhören wolt | fragten sie den Abgot wider wie das zu gieng so sie doch sein geheyfs folbracht hetten | der antwort jn sie hetten nit gehandelt wie er sie geheyssen het | sonder hetten den altar gar vill grösser dann noch einmal gemach || als aber jr werckleut nit findē konten wie sie der sacht sollten thun | hetten sie der gelerten und in sonders defs philosophen Platonis ratt der leret die wie sie zwischen zweyen ungleichen fürgebnen linien

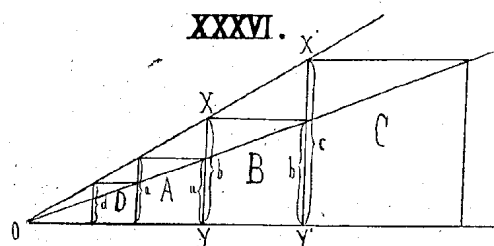
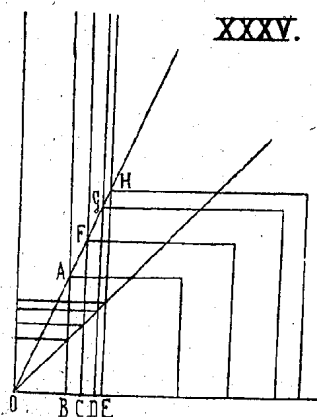


zwo ander linien die sich vergleichlich gegen den selben hielten sollten finden | daß durch soliches mochten sie den cubum | dz ist ein vierecket corpus wi: ein würffel | und alle andre ding dupliciren tripliciren | und für un für meeren und vorgrössen die weyl nun solichs ein ser nutze kunst ist und allen werckleuten dient | auch von den gelerten in grösser geheim und verporgenheyt gehalten wirt | wil ich die an den tag legen un lernen machen | daß außs diser kunst kan man puxen und kloken giessen die sich vergrössen und dupliren wie man wil | un doch alweg jr rechte proporcion | auch jr gewicht behalten | defs gleychen kan man durch die fesser | druhen | mes | reder | zimer | pild und was man haben will vergrossen. Darumb nem ein yeglicher werckman der acht die weyl die pijs auf disen tag als ich acht in Teutscher sprach nie beschriben ist worden“. Es handelt sich also um das altberühmte delische Problem.

Dürer giebt zu diesem Problem 3 Lösungen. Die erste derselben ist in der Geschichte der Mathematik bekannt unter dem Namen Lösung des Sporus; sie ist uns in dem Kommentar erhalten, welches Eutokius von Ascalon zu Archimedes „Zwei Bücher von der Kugel und dem Cylinder“ giebt. Vermittelst derselben löst Dürer der Reihe nach die Aufgaben, einen Würfel zu zeichnen, der 2, 3 und 4mal so gross als ein gegebener Würfel ist. Aus dieser Reihe von Aufgaben ist leicht zu entnehmen, wie allgemein ein Würfel ver„n“facht werden kann; doch geht Dürer hier auf diese allgemeine Aufgabe nicht ein, dagegen werde ich an ihr Dürers Verfahren zeigen, um so die 3 von ihm gegebenen Lösungen in eine zusammenzufassen.

Die Seite des gegebenen Würfels sei a , so beschreibe man mit $n \cdot a$ einen Halbkreis, der zugehörige Durchmesser sei DE (vergleiche Fig. XXXIV). Errichte nun auf DE den

senkrechten Radius AC , trage auf demselben $AB = a$ ab und ziehe DB ; die Aufgabe ist dann auf folgende zurückgeführt: von E aus einen Strahl so zu ziehen, dass das von ihm zwischen die verlängerte DB und den Halbkreis fallende Stück FH durch AC in G halbiert werde¹. Diese Aufgabe löst Dürer durch folgende mechanische Operation. Auf einem Lineal trägt er von einem beliebigen Nullpunkte aus nach beiden Seiten gleiche Teile ab und verschiebt nun dieses Lineal, während es stets durch E geht, so, dass der Nullpunkt auf AC bleibt, wodurch die Lage der EH mechanisch ziemlich rasch und mit genügender Genauigkeit gefunden werden kann. Die mittlere Proportionale AX zu AB und AG , welche Dürer wie früher schon mehrfach vermittelt des Höhensatzes findet, ist dann die verlangte Würfelseite². Einen Beweis hiezu fügt Dürer nicht bei. Sind nun so zu einem Würfel 3 andere gefunden, welche 2, 3 und 4mal so gross als derselbe sind, so kann man leicht vermittelt einer einfachen Proportion zu irgend einem andern gegebenen Würfel den 2, 3 und 4mal so grossen finden. Fig. XXXV zeigt Dürers Konstruktion. OB , OC , OD und OE sind die zuerst gefundenen Kanten solcher Würfel, welche sich wie $1:2:3:4$ verhalten. Ist nun AB die Kante des beliebig gegebenen Würfels, so sind wiederum AB , FC , GD und HE Kanten solcher



Würfel, welche sich wie $1:2:3:4$ verhalten. Soll ferner in der nächsten Aufgabe zu 2 Würfeln, welche sich wie $1:2$ resp. $1:3$ verhalten, eine Reihe weiterer Würfel gefunden werden, von welchen immer der folgende das 2 oder 3fache des vorhergehenden ist, so

¹ Mit Zirkel und Lineal ist diese Aufgabe, wie überhaupt das ganze delische Problem, natürlich nicht zu lösen.

² Der Beweis des Sporus, wie ihn Eutokius überliefert, ist in ziemlich umständlicher Art und Weise durchgeführt. Auf die einfachste Form gebracht, würde derselbe folgendermassen lauten. Fülle zunächst HJ und $FK \perp DE$, so ist $AJ = AK$ und damit $DJ = EK$. Nun ist

$$EJ:JD = EJ^2:EJ \cdot JD = EJ^2:JH^2 = EA^2:AG^2,$$

ferner ist

$$AG:JH = EA:EJ = DA:DK = AB:KF,$$

hieraus folgt

$$AG:AB = JH:KF = EJ:EK = EJ:JD = EA^2:AG^2,$$

also auch

$$EA:AG = \sqrt{AG}:\sqrt{AB} = AG:\sqrt{AB \cdot AG} = AG:AX.$$

Man hat also:

$$EA:AG = AG:AX = AX:AB$$

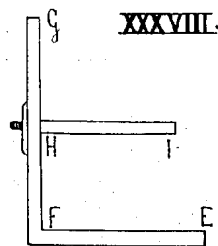
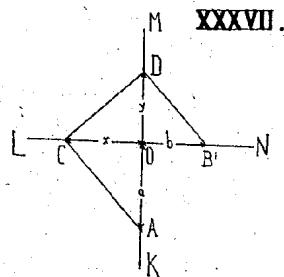
hieraus folgt vergl. Anmerkung 2 zu S. 42:

$$a^3:x^3 = 1:n$$

Diese Lösung des Sporus ist im Grunde, wie schon Eutokius selbst angiebt, mit den Lösungen des Pappus und des Diokles identisch.

ordnet Dürer die Lösung dieser ebenfalls mittelst Proportionalität sehr leicht zu behandelnden Aufgabe so an, wie es Fig. XXXVI zeigt. Es sei A die Grundfläche eines Würfels, B die Grundfläche des doppelt so grossen, so ist C die Grundfläche eines Würfels, welcher doppelt so gross ist als der Würfel über B, während der Würfel über D die Hälfte des Würfels über A ist etc.

Weiterhin schreibt Dürer: „Noch ist nutz zu wissen einem der ein cubum ergrösseren wil oder vilfeltigen | wie er zwischen zweyen ungleichen fürgebnen linien zwo ander linien die sich vergleichlich gegen den selben halten finden soll | also das si sich all vier vergleichlich gegen einander halten.“ Es handelt sich also zunächst um die Aufgabe, zwischen 2 gegebene Strecken, z. B. a und b, zwei mittlere Proportionalen einzuschalten¹, d. h. 2 weitere Strecken x und y so zu finden, dass $a : x = x : y = y : b$ sich verhalten. Hierzu giebt Dürer zwei Lösungen und zwar zuerst die unter Platos Namen — ob mit Recht, ist fraglich — bekannte. Trage ich auf zweien in O sich senkrecht schneidenden Geraden KM und LN (vergl. Fig. XXXVII) OA = a und OB = b ab, so habe ich auf diesen Geraden nur die Punkte C und D so zu suchen, dass $\sphericalangle ACD =$ einem Rechten und $\sphericalangle CDB =$ einem Rechten ist, um in OC und OD die beiden mittleren Proportionalen zwischen a und b zu erhalten, was sich nach Dürers eigener Angabe direkt aus der achten Proposition des sechsten Buchs der



Elemente Euklids ergibt. Eine Skizze des Instruments, mittelst dessen diese Aufgabe nun mechanisch² gelöst wird, zeigt Fig. XXXVIII. EFG stellt einen rechten Winkelhaken vor, in einer Nute des Schenkels FG lässt sich ein dritter beweglicher Schenkel HJ so zwischen F und G verschieben, dass er stets senkrecht zu FG bleibt. Um mit diesem Apparat die vorgelegte Aufgabe zu lösen, lege man denselben so auf die Fig. XXXVII, dass A auf EF, F auf OL und H auf OM zu liegen kommt und bewege den Winkelhaken nun so, dass eben jene Punkte A, F und H auf den Geraden EF, OL und OM bleiben, so giebt die Lage, bei welcher HJ durch B geht, ohne weiteres die Lösung.

Die zweite Lösung der vorliegenden Aufgabe, welche Dürer weiterhin giebt, rührt von Heron von Alexandria³ her. Diese Lösung müssen wir hier deshalb um so eingehender be-

¹ Die Reduktion des delischen Problems auf die Aufgabe, zwischen 2 gegebene Strecken 2 mittlere Proportionalen einzuschalten, rührt von dem Chier Hippokrates her, welche Thatsache ein Brief des Mathematikers Eratosthenes an König Ptolemäus uns überliefert hat. Dieser Brief ist in dem oben erwähnten Kommentar des Eutokios zu Archimedes erhalten.

² Eine Lösung nur mit Zirkel und Lineal ist, wie schon gesagt, unmöglich.

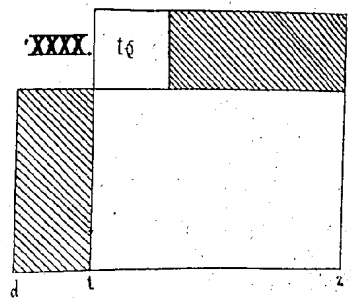
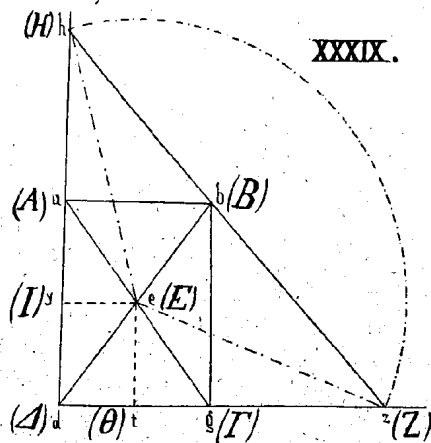
³ Diese Lösung hat sich dreifach, und zwar stets ausdrücklich unter dem Namen Herons erhalten:

a) In „*Ἡρώδης Κτησίβλου βελονοικία*“, abgedruckt in dem von Thevenot herausgegebenen Bande: *Veteres mathematici*. Paris 1693. S. 143—144.

b) In Pappus' „*Συναγωγή*“, Edit. Hultsch, p. 62 ff.

c) In „*Eutocii Ascalonitae Commentaria in Archimede*“, Edit. Heiberg, p. 70.

trachten, als wir in ihr den einzigen Fall vor uns haben, in dem Dürer einen vollständigen und mathematisch strengen Beweis giebt. Fig. XXXIX zeigt diese Lösung; in ihr wähle ich die gleichen Buchstaben wie Dürer, um dessen Beweis wörtlich beisetzen zu können. Zunächst werden auf den Schenkeln eines rechten Winkels die Strecken (ba) und (bg) abgetragen, zu welchen die beiden mittleren Proportionalen zu suchen sind, sodann Rechteck $abgd$ gezeichnet. Der Mittelpunkt dieses Rechtecks sei e . Nun drehe man ein Lineal um den Punkt b so lange, bis dessen Schnittpunkte z und h ¹ mit den verlängerten Rechteckseiten (dg) und (da) von e gleiche Entfernung haben², so sind alsdann (ah) und (gz) die beiden mittleren Proportionalen zu (ab) und (bg) . Der Beweis, den Dürer giebt, lautet nun folgendermassen: „*zeich ein aufrechte lini .e.t. auf die lini .d.g. also teylet .e.t. die lini .d.g. in zwey gleyche teyl durch die ander propositiō des sechsten buch* *Euclidis* | *daraufs folget dz die rechtanglich vierecket figur so gemacht wirt von .d.z.*³ *uñ .z.g.* *mit dem quadrat der linien .g.t. ist geleych dem quadrat so aufs .t.z. gemacht wirt* | (∞) *nun auf peden teylen wirt hinzu gelegt dz quadrat so aufs .t.e. gemacht ist* | *dem nach dz quadrangel od' vierecket recht wincklich figur* | *welche aufs .d.z. uñ .z.g. gemacht wirt mit dem*



quadrat .e.g. ist geleych dem quadrat so von .e.z. gemacht wirt. Gleycher weyßs auch das quadrangel oder die recht wincklich figur | *welche aufs den linien .d.h. uñ .h.a. gemacht wirt mit dem quadrat von .a.e. gemacht ist* | *geleych dem quadrat so von der lini .e.h. gemacht wirt. So nun aber wie yetzund gemacht ist die zwo linien .e.h. und .e.z. geleych sind* | *der gleychen auch die zwo linien .e.a. und .e.g. sind gleych. Daraufs folget das die recht anglich vierecket figur so von .d.z.³ uñ .z.g. gemacht wirt* | *ist geleych der recht anglichen figur mit der inhaltung* | *welche von den linien .d.h. und .h.a. gemacht wirt (das ist also zufersten die lini .d.h. wirt zu dem ersten quadrangel für die langen seyten* | *und .h.a. zu den kurtzen genommen* | *des gleychen die lini .d.z.³ wirt zu der langen seyten* | *und .z.g. zu der kurtzen des anderen quadrangels genommen* | *also helt der quadrangel .d.h.a. so vill innen als der quadrangel .d.z.g. das noch weyter zubeweren mach dise quadrangel zu rechten quadraten. Wie fornen im*

¹ Man sieht schon aus der Buchstabenwahl, dass Dürer ein griechisches Original vorlag und zwar das schon mehrfach erwähnte Kommentar des Eutokius; statt der dort enthaltenen Buchstaben $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H$ setzt Dürer a, b, g, d, e, z, h . Ich habe wegen späterer Verwendung der Fig. XXXIX in ihr auch die Buchstaben des Eutokius, und zwar in Klammern, beigeetzt.

² Was natürlich wiederum nur durch Probieren erreicht werden kann.

³ In der Ausgabe vom Jahre 1525 steht tz .

büchle in der planen in der 31. figur anzeygt ist.) Aber das das forder also sey | wirt durch die fünffzehnten proposition des sechsten buchs Euclidis angezeygt das sich die lini .d.z. halt zu der lini .d.h. wie sich die lini .h.a. zu der lini .g.z. helt | und wie sich die lini .d.z. hat zu der lini .d.h. also helt sich auch die lini .g.z. zu der lini .g.b. der gleychē auch die lini .a.b. zu der lini .a.h. dem nach durch die vierten proposition des sechsten buchs Euclidis die lini .a.b. helt sich zu der lini .a.h. wie die lini .a.h. zu der lini .g.z. und also auch die lini .g.z. zu der lini .g.b. uñ also ist offen war gemacht | das zwischen den zweyen linien .a.b. und .b.g. sind gefunden zwo medie proportionals da sind die zwo lini | .a.h. und | .g.z.

In Bezug auf diesen Beweis zeigt die Ausgabe vom Jahre 1538 einen Zusatz und zwar dort, wo in obigem Texte das Zeichen ($\times$) steht; derselbe lautet folgendermassen: „Das verste also mach aufs .d.z. un .z.g. ein ablange fierung zu gleychen winckeln. Darnach mach ein rechtz quadrat aufs .t.z. so helt das so vil jnnen als die ablang fierung .d.z. und .z.g. und das jnner so du ein quadrat aufs .t.g. gemacht hinzusetzest | und ein winkel mit erfülltest wie das hernach auff gerissen ist.“ Hiezu gibt Dürer beistehende Fig. XXXX. In unsere heutige mathematische Zeichensprache übergeführt würde dieser Beweis folgendermassen lauten:

Fälle	et $\perp$ dg, so ist	$dt = tg$ (Eukl. B. VI. Satz 2)
hieraus folgt	$dz \cdot zg + gt^2 = tz^2$	$(\times \times)$
	$te^2 = te^2$	
addiert giebt	$dz \cdot zg + eg^2 = ez^2$	
Analog erhält man	$dh \cdot ha + ae^2 = eh^2$	
Da nun aber	$ez = eh$	
	und $eg = ea$ ist	
so folgt	$dz \cdot zg = dh \cdot ha$	$(\times \times \times)$
hieraus erhält man	$dz : dh = ha : gz$	(Eukl. B. VI Satz 15)
nun ist ferner	$dz : dh = gz : gb = ab : ah$	(Eukl. B. VI Satz 4)
also auch	$ab : ah = ah : gz = gz : gb$	(q. e. d.)

Wo in obigem Beweise nun das Zeichen ($\times \times$) steht, ist jener Zusatz der Ausgabe vom Jahre 1538 eingeschaltet, den ich folgendermassen wiedergebe: Zeichne aus dz und zg ein Rechteck und über tz das Quadrat, so ist letzteres, wie Fig. XXX zeigt, gleich jenem Rechteck plus dem Quadrat über tg¹. Sehr charakteristisch für die mathematische Denkungsart Dürers erweist sich die von ihm in Klammern beigegebene Bemerkung, welche dort eingeschoben ist, wo ich das Zeichen ($\times \times \times$) beisetzte. Nachdem nämlich Dürer mit beinahe euklidischer Strenge die Gleichheit der Rechtecke dz . zg und dh . ha bewiesen hat, fügt er hinzu, dass, um „das noch weyter zubeweren“, man beide Rechtecke in Quadrate verwandeln soll. Wenn schon die Buchstabenwahl auf ein griechisches Original und zwar speziell auf das Archimedeskommentar des Eutokius hinweist, so wird die Abhängigkeit Dürers von jenem Werke zur Gewissheit durch eine Vergleichung des oben gegebenen Dürer'schen Beweises mit der unten² gegebenen Stelle, welche eben jener Arbeit des Eutokius entnommen ist.

¹ Es ist dies der 6. Satz des II. Buchs der Elemente Euklids. Da man sich leicht von der Gleichheit der beiden schraffierten Rechtecke überzeugt, so folgt in der That der Satz direkt aus der Figur. Dürers Figur zeigt die Schraffierung nicht.

² Archimedis Opera Omnia cum commentariis Eutocii. Edit. Heiberg. vol. III. p. 72. [ἡ γὰρ δὲ ἀπὸ τοῦ B ἐπὶ τὴν ΓΔ κείμενος ἡ ΕΘ. διχα τέμνει δὴ δηλονότι τὴν ΓΔ. ἐπεὶ οὖν διχα τέμνεται ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Θ, καὶ προσκείνεται ἡ ΓΖ, τὸ ὑπὸ ΔΖΓ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΘ ἴσον ἐστὶν τῷ ἀπὸ ΘΖ. λοιπὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ

Wiewohl Dürer sicher der, allerdings auch lateinisch geschriebene, Libellus¹ des Pfarrherrn Johannes Werner zugänglich war, so entspricht es ganz dem Charakter Dürers, direkt auf das Original zurückgreifen zu wollen. Wahrscheinlich verdankte er die Übersetzung seinem Freunde Pirkheimer, der sie ihm, wie der dreimalige Fehler eines falschen „t“ statt des richtigen „d“ nahelegt, vielleicht gar in die Feder diktierte. Dass Dürer selbst dem von ihm gegebenen strengen Beweise nicht vollständig folgen konnte, lässt neben jenem Schreibfehler, der ja auch Druckfehler sein könnte, die eingeschobene Bemerkung vermuten. Zur Gewissheit wird diese Vermutung dadurch, dass wir sonst in der ganzen „Unterweisung“ jeglichen Beweis vermissen, dagegen aber eine Reihe von Fehlern finden, welche kaum denkbar sind bei einem Mathematiker, der in euklidischer Behandlung der Geometrie wohl bewandert wäre. Nachdem nun so Dürer die von ihm eingeschobene Hilfsaufgabe gelöst hat, kehrt er zu seiner ursprünglichen Aufgabe, nämlich der delischen, zurück. Um nun einen Würfel zu konstruieren, der das Doppelte eines gegebenen Würfels sein soll, hat man nur zwischen der Kante des gegebenen Würfels und der doppelten Länge dieser Kante zwei mittlere Proportionalen einzuschalten, um in der kleineren derselben die Kante des gesuchten Würfels zu erhalten. Analog kann überhaupt, sagt Dürer, der Würfel beliebig vervielfältigt werden². Dem so behandelten delischen Probleme giebt nun Dürer folgende praktische Verwendung. Hat man eine Metallkugel von 1 Pfund Gewicht und betrachtet deren Durchmesser als Kante eines Würfels, zu dem man den 2, 3 und 4fachen konstruiert, so geben die Kanten der letzteren die Durchmesser der Kugeln, welche 2, 3 und 4 Pfund schwer sind. Schliesslich giebt die Ausgabe vom Jahre 1538 noch einen weiteren Weg, wie unter der Voraussetzung, dass zu irgend einem Würfel, der doppelt so grosse konstruiert ist, man zu demselben eine Reihe weiterer finden kann, von denen jeder folgende das Doppelte des vorhergehenden ist. Auch diese Lösung beruht natürlich, wie die oben näher beschriebenen, auf einfacher Proportionalität; doch spricht hier Dürer dies ausdrücklich aus und fügt bei: „difs ist alles recht und voll von vielen demonstrirt worden.“

Dürer leitet nunmehr den letzten und für viele Leser wohl interessantesten Abschnitt seines Werkes mit den Worten ein: „So jch daforen manicherley corpora wie man die mach anzeigt hab | will jch auch leren so man solche gemecht ansicht wie man die in ein gemel nüg pringē | zu solichem will jch das schlechtest corpus fürnemen | als den

EΘ. τὸ ἄρα ὑπὸ $AZΓ$ μετὰ τῶν ἀπὸ $ΓΘ$, $ΘΕ$ ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ $ZΘ$, $ΘΕ$. καὶ ἐστὶ τοῖς μὲν ἀπὸ $ΓΘ$, $ΘΕ$ ἴσον τὸ ἀπὸ $ΓΕ$, τοῖς δὲ ἀπὸ $ZΘ$, $ΘΕ$ ἴσον τὸ ἀπὸ $ΕΖ$. τὸ ἄρα ὑπὸ $AZΓ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΓΕ$ ἴσον τῷ ἀπὸ $ΕΖ$. ὁμοίως δὲ δεῖξθῆσεται, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ $ΔΗΑ$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $ΑΕ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΕΗ$. καὶ ἐστὶν ἴση ἡ μὲν $ΑΕ$ τῇ $ΕΓ$, ἡ δὲ $ΗΕ$ τῇ $ΕΖ$. καὶ τὸ ὑπὸ $AZΓ$ ἄρα ἴσον ἐστὶν τῷ ὑπὸ $ΔΗΑ$. [ἐὼν δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ἀκρῶν ἴσον ἢ τῷ ὑπὸ τῶν μέσων, αἱ τέσσαρες εὐθείαι ἀνάλογόν εἰσιν.] ἐστὶν ἄρα, ὥς ἡ $ΖΑ$ πρὸς $ΔΗ$, οὕτως ἡ $ΑΗ$ πρὸς $ΓΖ$. ἀλλ' ὥς ἡ $ΖΑ$ πρὸς $ΔΗ$, οὕτως ἡ $ΖΓ$ πρὸς $ΓΒ$, καὶ ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΗ$. [τηνῶν γὰρ τοῦ $ΖΑΗ$ παρὰ μίαν μὲν τὴν $ΔΗ$ ἔσται ἡ $ΓΒ$, παρὰ δὲ τὴν $ΑΖ$ ἡ $ΑΒ$.] ὥς ἄρα ἡ $ΒΑ$ πρὸς $ΑΗ$, οὕτως ἡ $ΑΗ$ πρὸς $ΓΖ$, καὶ ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΓΒ$. τῶν ἄρα $ΑΒ$, $ΒΓ$ μέσαι ἀνάλογόν εἰσιν αἱ $ΑΗ$, $ΓΖ$. [ὅπερ ἔδει εὐρεῖν.] Die in obiger Stelle eingeklammerten Teile sind Zusätze des Eutokius zu Herons Texte, wie sich derselbe in dessen oben erwähntem Werke von der Anfertigung von Geschützen erhalten hat.

¹ Vergl. S. 53 Anmerkung 3.

² Aus der Proportion:

folgt:

$$a : x = x : y = y : na$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a : x = a : x \\ a : x = x : y \\ a : x = y : na \end{array} \right\}$$

damit

$$a^3 : x^3 = 1 : n$$

würffel | darpey anzeygē das man mit allen körperen also handeln mag | auch von licht uñ schatten etwas zuverstē geben | uñ eins mit dem anderen zu gebrauchen.“ Wegen des vielseitigen Interesses, das diese „Dürer'sche Perspektive“ wohl berechtigt ist in Anspruch zu nehmen, will ich dieselbe, obwohl sie meinem eigentlichen Thema teilweise ferner liegt, doch eingehend behandeln.

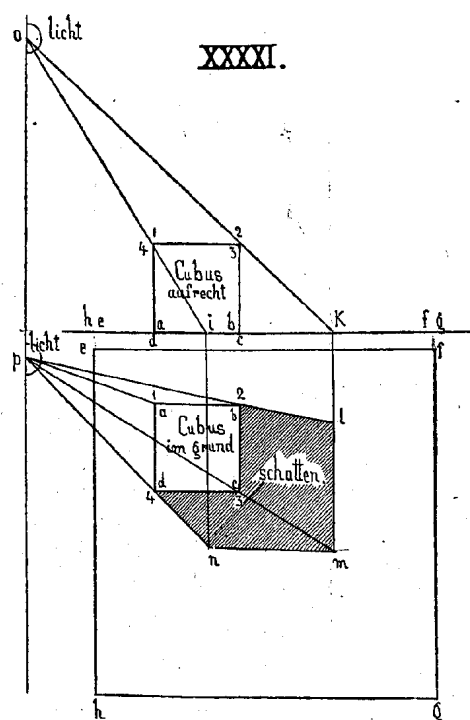
Zunächst erwähnt Dürer die geradlinige Fortpflanzung des Lichtes und die daraus sich ergebende Erscheinung des Schattenwerfens undurchsichtiger Körper und will dies auch „im auffreyssē anzeygen“. Hiezu wird das Entwerfen der Fig. XXXXI, welche der Unterweisung entnommen ist, genau beschrieben. Ich brauche nicht weiter auf diese Konstruktion einzugehen, da ein Blick auf die Figur zeigt, wie dieselbe entstanden gedacht werden muss. Nur

den Schlusssatz, welcher für Dürers ganze Auffassung und wissenschaftliche Begründung seiner „darstellenden“ Geometrie charakteristisch ist, möchte ich wörtlich beisetzen: „Und merk sunderlich das dise¹ zwey liecht ein liecht sein | des gleychen die lini.e.h.uñ.f.g. mit dem plano darunter.e.f.g.h. ein ding wie for gemelt auch der nider gedruckt uñ aufgezozen würffel ist eins | suma pede grund und pede liecht ist als ein ding | aber zum gebrauch von leychte wegen gespalten.“ Nachdem so Grund-

und Aufriss des Würfels, des Lichtpunkts und des Schlagschattens gezeichnet sind, fährt Dürer weiter:

„So du nun disen for beschribnen würffel auf seinem gefertē feld mit liecht und schatten in ein abgestolen gemel wilt pringen² | so thut for not das du wist was darzu gehör | und durch was mittel das zu machen sey.“ Diese Fragen beantwortet Dürer folgendermassen. Zunächst sind 3 Dinge nötig: das Auge, das sieht, der Körper, der gesehen werden soll, und das Licht, ohne das nichts gesehen wird.

Da aber das Auge nur durch gerade Linien sieht, müssen die Dinge so gestellt werden, dass „solichs die streym linien des gesichts begreifen mögen“³. Ferner muss die Entfernung des Auges von dem abzubildenden Gegenstand eine dem Gegenstande selbst und der beabsichtigten Wirkung im Gemälde entsprechende sein. Und nun „merk das zwischen der weyten des augs und des das geschē wirt soll genommen werden ein ebne durchsichtige abschneydung aller der streym linien die aufs dem aug fallen auf die ding die es sieht.“ Dürer giebt hier also die alte Definition: „das Bild ist der ebene Schnitt der Sehstrahlenpyramide“ und fügt dann bei: je nachdem man den Schnitt näher beim Auge annimmt oder weiter entfernt von ihm, wird das Bild kleiner oder grösser, überhaupt scheinen dem Auge alle Gegenstände, welche von denselben beiden vom Auge ausgehenden geraden Linien begrenzt sind, gleich gross. Nun will Dürer „zum werck greiffen“, und muss dazu zunächst in die vorige Figur

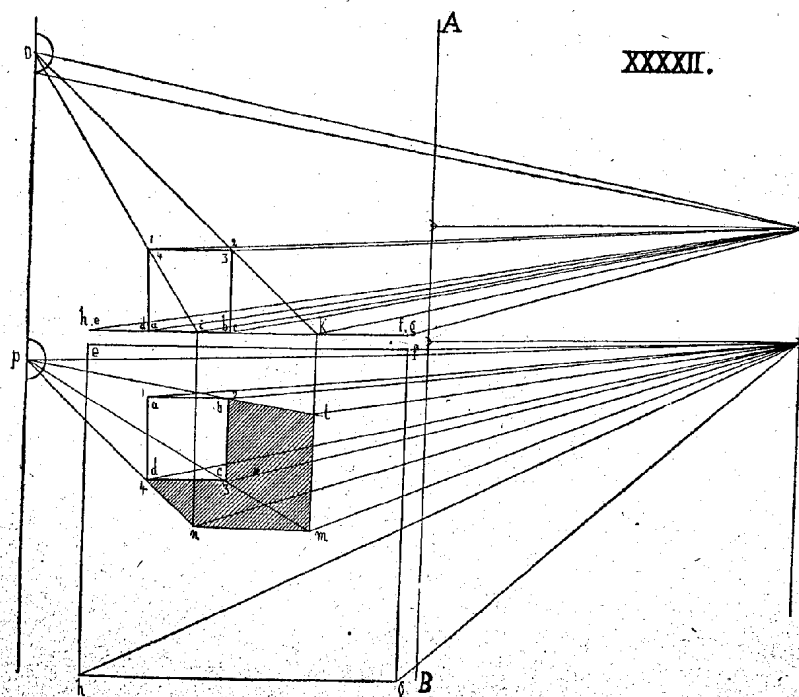


¹ d. h. Grund- und Aufriss des lichtausstrahlenden Körpers.

² d. h. soviel als ein den strengen Regeln der Perspektive entsprechendes Bild davon entwerfen.

³ Das Sehen denkt sich also Dürer neben dem Licht vermittelt durch vom Auge ausgehende Sehstrahlen.

Grund- und Aufriss des Auges eintragen, oder wie er sich ausdrückt, das Auge in zwei zerteilen; hierauf werden vom Auge nach den Ecken des Würfels etc. Sehstrahlen gezogen, d. h. sowohl in der Horizontal- als auch in der Vertikalebene der Punkt des Auges mit den betreffenden Punkten verbunden; hiedurch entsteht Fig. XXXXII. Soll jetzt das, was das so angenommene Auge sieht, in „ein gemel gebracht werden“, so hat man, wie schon bemerkt, nur jene Sehstrahlen durch eine Ebene zu durchschneiden. Diese Ebene, welche man „in dem aufreyssenn ein lini sein lassen“ muss, stellt die Gerade A B vor. Auf dieselbe fälle nun, fährt Dürer weiter, von der Horizontal- und Vertikalprojektion des Auges Lote „und reysfs in die puncten do sie an rüren auch zwey augen | dise vier augen bedeuten nun ein gesicht | aber dise zerspaltung pringt leychtigkeit in der arbeyt. So du nun die for beschriben

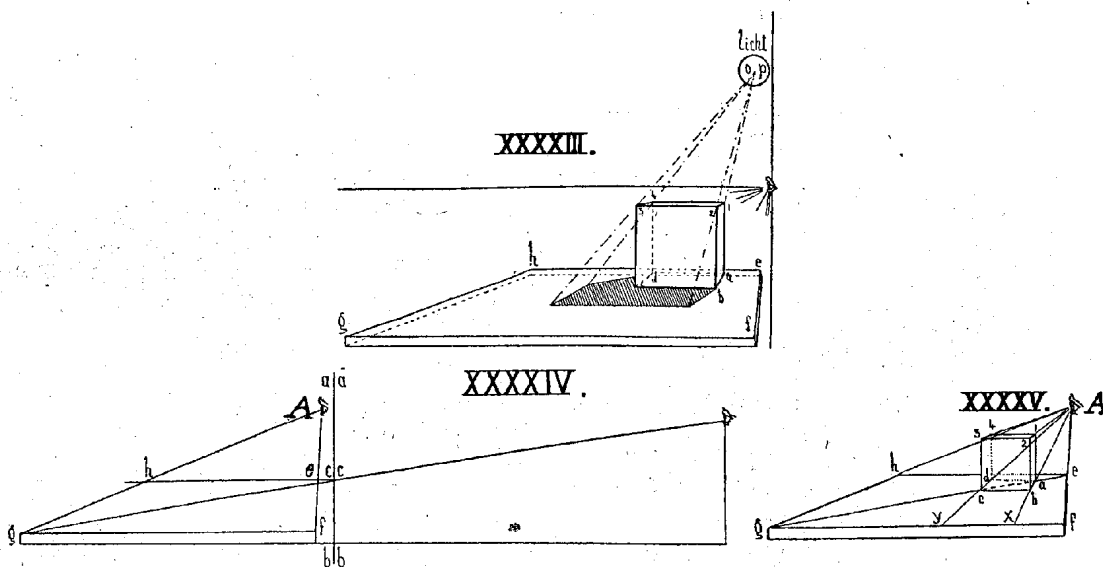


meynung vor augen sihest und verstest sie | so nym ein ander papir und reysf darauf zwo kreutz linien zu rechten winkeln | und in der mitt da sie sich durch einander schliessen | da setz den puncten des augs | das stet hic an stat der forigen vier augen | zu disem puncten des augs müssen alle höhe | nideren | tieffen und preytzen auf peden seyten gepracht und gisetzet werden | die dy forigen streym linien anzeygen;“ d. h. es werden die Koordinaten jedes Schnittpunkts eines Sehstrahls mit der Bildfläche, bezogen auf das festgelegte Achsenkreuz, aus der Hauptfigur entnommen, und zwar als die Abstände der in A B liegenden „Augen“ von den Horizontal- resp. Vertikalprojektionen jener Schnittpunkte. Vermittelt dieser Koordinaten kann dann leicht auf dem neuen Zeichenblatt — der eigentlichen Bildebene — die wahre Lage jener Schnittpunkte bestimmt¹ und dieselben, wie Fig. XXXXIII zeigt, ver-

¹ Hiezu macht Dürer eine Bemerkung, welche verrät, dass derselbe solche Konstruktionen in der That oft vornahm. Er schreibt nämlich: „Darumb nym zwen cirkel zu deinem messen von minder yrikeyt wegen | den einen brauch zu dem aufrechten grund | den anderen zu dem nider gedruckten.“

bunden werden. Dürer schliesst diese Konstruktion mit folgenden Worten: „*difs ist der recht grund des abstelens was zu der malcrey gehört.*“ Dieser eben besprochenen Lösung der Aufgabe, das perspektivische Bild eines Körpers zu zeichnen, welcher durch Grund und Aufriss gegeben ist, fühlt man es deutlich an, dass Dürer gewohnt war, mit ihr zu operieren, auch entspricht sie vollständig der Vorliebe Dürers für anschauliches, leicht verständliches Verfahren.

Anders liegen die Verhältnisse bei der zweiten Lösung jener Aufgabe, zu welcher Dürer übergeht und welche er den „näheren Weg“ nennt. In ihr werden wir, wenn auch noch nicht bis zur völligen Klarheit durchgedrungen, die Verwendung des sogenannten Distanzpunktes kennen lernen. Die Konstruktion selbst ist folgende. Vergleiche hiezu Fig. XXXIV. Ziehe ($\overline{fg}$), welche Strecke die vordere Kante des quadratischen Feldes (Tisches) vorstellt, auf welchem der Würfel stehen soll; nehme nun ein „nahes Auge“ in der Lage an, wie vorhin den Kreuzungspunkt der beiden Koordinatenachsen. Was Dürer hier mit dem Worte

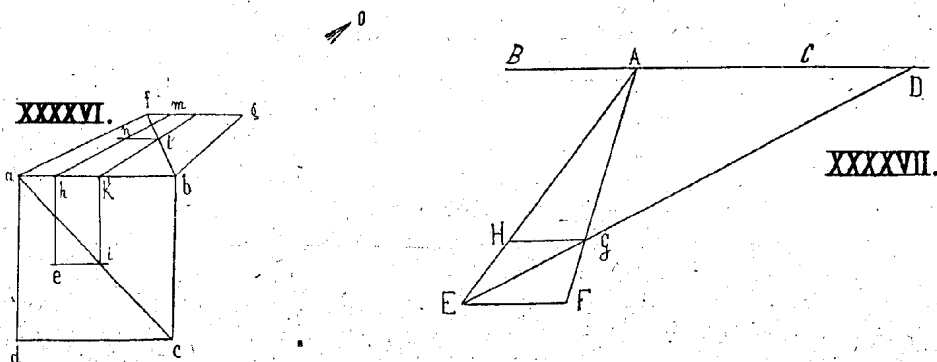


„nahes Auge“ bezeichnet, ist das, was wir heute in der Perspektive den Augpunkt nennen, welchen Namen ich auch weiterhin hierfür gebrauchen werde. Ziehe nun von diesem Augpunkt A^1 zwei Strahlen nach f und g ; wodurch schon 3 Seiten des Tisches erhalten sind. Um nun zu finden, um wieviel die noch fehlende vierte Seite „übersich steygt“, nehme man ein zweites Auge in derselben Höhe wie den Augpunkt an, jedoch ebenso weit auf der Seite wie in der ersten Lösung. Ziehe nun aus diesem „weiteren Auge“ einen Strahl nach g , welcher das auf ($\overline{gf}$) in f^2 errichtete Lot in cc treffe; ziehe hierauf durch cc eine Parallele zu ($\overline{fg}$), welche ($\overline{Af}$) in e und ($\overline{Ag}$) in h schneidet, so ist $efgh$ das Bild des Tisches. Um nun das Bild des Würfels zu erhalten, schneide man auf ($\overline{fg}$) ein Stück (xy) gleich der Kante des Würfels ab, (vergl. Fig. XXXV) und zwar in der richtigen Entfernung von

¹ Dürer selbst hat dem Augpunkt keinen Buchstaben beigesetzt, sonst aber ist obige Figur genau der Dürer'schen entsprechend.

² Dürer selbst schreibt: „*Darnach reys ein aufrechte lini aa. bb. die das forder eck an rür,*“ in der Zeichnung jedoch geht $aa\ bb$ nicht genau durch f , wie es nach dem Texte also sein sollte, und wie auch meine spätere Interpretation dieses Verfahrens verlangt.

f' , ziehe sodann $(\overline{Ax})$ und $(\overline{Ay})$. Weiterhin erlaubt sich nun Dürer die spezielle Annahme, dass die Diagonale der unteren Seitenfläche des Würfels in die Diagonale des Tisches falle²; deshalb zeichne man $(\overline{ge})$, welche $(\overline{Ax})$ in a und $(\overline{Ay})$ in c trifft. Ziehe sodann $(\overline{ad})$ und $(\overline{cb})$ parallel $(\overline{fg})$ und durch a, b, c und d vier „aufrechte“ Linien. Schneide auf den beiden vorderen die Stücke $(b\overline{2})$ und $(c\overline{3})$ gleich (bc) ab, verbinde A mit 2 und 3 , welche Verbindungslinien die in a und d errichteten Lote in 1 und 4 treffen und ziehe schliesslich $(\overline{23})$ und $(\overline{14})$, so „ist der würffel recht gemacht | wie in dem forigen abgestolnẽm grund.“ Wollte man nun auch wieder den Schlagschatten des Würfels finden, so nehme man das Licht O beliebig an, fälle von O ein Lot auf $(\overline{fg})$ und bestimme weiterhin „das under licht“ p , d. h. den Fusspunkt des von O auf den Tisch gefällten Lotes; je nachdem man das Licht näher oder ferner haben will, tiefer oder höher auf diesem Lote; dann geben die Schnittpunkte der Strahlen $(\overline{O2})$, $(\overline{O3})$ etc. mit den Strahlen $(\overline{pb})$, $(\overline{pc})$ etc. die Eckpunkte des Schlagschattens. Dürer schliesst diesen Abschnitt mit den Worten: „Zu gleycher weysf wie ich den cubus in ein abgestolen gemel gebracht hab | also mag man alle corpora die man in grund legen und aufziehen kan | durch soliche weg in ein gemel pringen;“ welcher Satz in dieser Allgemeinheit



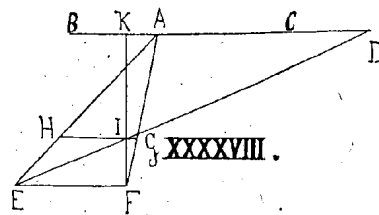
nur von Dürers erstem Verfahren gilt. Ein letztes, allerdings nur in der Ausgabe von 1538 enthaltenes Problem verlangt im perspektivischen Bilde eines Quadrats einen im Quadrate selbst bestimmten Punkt zu finden. Es sei (vergl. Fig. XXXVI) $abcd$ ein Quadrat und $abgf$ das perspektivische Bild eines solchen; im Quadrate $abcd$ ist nun ein Punkt e gegeben; es soll im Bilde derjenige Punkt gesucht werden, der e entspricht. Dürer löst diese Aufgabe folgendermassen: man ziehe eh parallel da , und hm durch O ; zeichne nun weiterhin eine Parallele zu dc durch e , welche ac in i schneidet, ziehe ik parallel cb und verbinde k mit O . Diese Verbindungslinie trifft fb in l ; ziehe schliesslich durch l eine Parallele mit ba , so ist deren Schnitt n mit hm der gesuchte Punkt. Analog, fügt Dürer bei, ist auch ein gegebener Punkt in einem Würfel zu finden, vermitteltst zweier Hilfsebenen.

Ehe ich nun weiter gehe, möchte ich zuvor eine Würdigung des eben beschriebenen „näheren Wegs“ geben. Aus demselben geht, was auch nicht anders zu erwarten war, zunächst klar hervor, dass Dürer den Satz kannte: „die Bilder aller zur Bildebene senkrechten Geraden gehen durch den Augpunkt.“ Die Frage ist nur die: Kannte Dürer auch unsere

¹ Es ist $(\overline{fx})$ die Entfernung des Würfels von der Tischkante $(\overline{ef})$, welche Entfernung Dürer dem Grundriss der Fig. XXXXI entnimmt.

² Schon den früheren Figuren liegt diese Annahme zu Grunde, doch ohne dass sie dort benützt wurde.

heutige Verwendung des Distanzpunktes? Diese Frage wurde bis jetzt überall bejaht. Zunächst möchte ich dieselbe spezieller so fassen: ist das, was Dürer sein „weiteres Auge“ nennt, identisch mit dem, was wir Distanzpunkt nennen? Dürers „näherer Weg“ reduziert sich in der Hauptsache auf die Aufgabe, ein horizontales Quadrat in gerader Ansicht zu zeichnen. Die heutige Methode der Lösung zeigt Fig. XXXXVII. Ist hierbei A der Augpunkt, so lege ich durch denselben zunächst den Horizont BC und trage auf ihm ein Stück AD nach rechts oder links gleich der Distanz, d. h. gleich der Entfernung des Auges von der Bildfläche ab; D ist sodann der Distanzpunkt, das heisst der Fluchtpunkt der einen Schar horizontaler Geraden, welche die Bildebene unter 45° schneiden. Nehme ich nun EF als vordere Seite des zu zeichnenden Quadrates an, so habe ich in AE und AF die Richtungen seiner beiden nächsten Seiten, und vermöge der oben festgelegten Eigenschaft des Distanzpunktes ist ED Richtung der Quadratdiagonale, und damit EFGH das verlangte Quadrat. Dürers Konstruktion (vergl. Fig. XXXXVIII) unterscheidet sich dadurch von der vorigen, dass HG erhalten wird als Parallele zu EF durch den Schnittpunkt J der DE mit dem auf EF in F errichteten Lote. Würde Dürer unter D den Distanzpunkt in unserem Sinne verstehen, so wäre diese Konstruktion falsch. Aber so darf auch Dürers Konstruktion nicht aufgefasst werden. Dürer will mit seiner Konstruktion finden, um wieviel, wie er sich ausdrückt, HG gegenüber EF in die Höhe steige. Um dies zu ersehen, kann er doch, da die zu zeichnende Figur ja ein Quadrat ist, EF sich auch vorstellen als den senkrechten Abstand der beiden Quadratseiten EF und HG. Errichtet er nun auf EF in F das Lot FK und schneidet auf BC ein Stück KD gleich der Distanz ab, so stellt ihm jetzt KF die Bildfläche und D den Ort des Auges vor. Der Lotabschnitt JF giebt ihm also direkt an, „umwieviel die hintere Seite des Quadrats gegenüber der vorderen in die Höhe steigt.“ So aufgefasst ist Dürers Konstruktion richtig und so kann sie nach dem Wortlaut des Textes auch nur aufgefasst werden. Ich komme also zu dem Schlusse, dass die oben von mir gestellte Frage, ob Dürers „weiteres Auge“ mit unserem heutigen Distanzpunkte identisch sei, zu verneinen ist. Allerdings wählt Dürer in seiner Figur den Augpunkt so, dass er beinahe in den von mir mit K bezeichneten Punkt fällt, wodurch sich in der Zeichnung seine Konstruktion kaum von der heutigen unterscheidet. Aus dieser Ähnlichkeit ist jedenfalls jene falsche, aber allgemein verbreitete Ansicht¹ entstanden, Dürer habe den Distanzpunkt gekannt². Doch bleibt noch ein Punkt zu erörtern. Während, dem Texte entsprechend, in der Fig. 59 der Unterweisung (vergl.



¹ Vergleiche z. B. Wiener, Darstellende Geometrie; Schreiber, Lehrbuch der Perspektive etc.

² Hier möchte ich auch die auffallende Thatsache anführen, dass vielfach Dürers Unterweisung mit einem anonym erschienenen Lehrgang der praktischen Perspektive zusammengebunden vorkommt. So ist den beiden Ausgaben der Unterweisung in den Exemplaren der Stuttgarter Staatsbibliothek jener Lehrgang angebunden und zwar der Ausgabe vom Jahr 1525 mit der näheren Bezeichnung: „Getruckt zu Siemeren uff dem Hunesrucke in verlegug Hieronimi Rodlers 1531“; der Ausgabe vom Jahr 1538 dagegen mit folgender Bezeichnung: „Zu Franckfort truckts Cyriacus Jacob zum Bart. 1546.“ In diesem anonymen Werke ist nun ausdrücklich auf Dürers Lehre von der Perspektive hingewiesen, dabei aber bemerkt, dieselbe „sei so überkünstlich und unbegreiflich gemacht das es alleyn den hochverständigen dienlich“, deshalb soll hier „die kunst Perspectiva schlechter unnd begreiflicher dann Dürers Bücher aufweisen“ gelehrt werden. Auch in diesem Lehrgange der Perspektive, welcher wissenschaftlich allerdings tief unter Dürers Arbeit steht, sucht man vergebens die Verwendung des Distanzpunktes.

obige Fig. XXXIV) der Strahl aus dem weiteren Auge nach g nicht durch e geht, liegt in der Fig. 61, in welcher der Schlagschatten konstruiert wird, e auf jenem Strahle. Auch sonst fällt dem aufmerksamen Leser bei dem „näheren Wege“, ganz im Gegensatze zur ersten Behandlung der Aufgabe, eine gewisse Unsicherheit und Unfreiheit auf.

Im Oktober 1506 schreibt Dürer aus Venedig an seinen Freund Pirkheimer unter anderem¹: „ich bin in noch 10 Tagen hier fertig; darnach werde ich nach Bologna reiten, um der Kunst in geheimer Perspektive willen, die mich einer² lehren will.“ Und dass Dürer diesen Plan auch wirklich ausführte und von den Künstlern in Bologna glänzend empfangen wurde, wissen wir von einem Augenzeugen.³ Diese Kunst der geheimen Perspektive war nun nach meiner Überzeugung nichts anderes, als die praktische Verwendung des Distanzpunkts bei perspektivischen Konstruktionen. Wurde aber diese Verwendung Dürer ohne mathematische Begründung mitgeteilt, was bei der augenscheinlichen Geheimniskrämerei des bologneser Meisters sicher der Fall war, so suchte ein Mann wie Dürer die neugelernte Art der Konstruktion mit der von ihm früher geübten und in ihrer mathematischen Begründung klar erkannten in Einklang zu bringen. So entstand das von ihm als näherer Weg bezeichnete Verfahren, das ja auch in der That dem äusseren Ansehen nach vollständig an eine Konstruktion mittelst des Distanzpunkts erinnert, während es seiner thatsächlichen Berechtigung nach nichts anderes darstellt, als die alte Konstruktion des Schnitts der Sehpypyramide durch die Bildebene. Dürer betrachtete das von ihm in seiner mathematischen Richtigkeit nicht ganz verstandene⁴ Distanzpunktverfahren wohl nur als eine unter gewissen Umständen gut brauchbare Näherungsmethode; daher die Unfreiheit in der Wahl des Augpunkts etc.

Zum Schlusse seines ganzen Werkes giebt Dürer noch einige Instrumente an zum Entwerfen perspektivischer Bilder. Dieselben beruhen teils darauf, dass von einem festen Punkte ein Faden nach den einzelnen Punkten des abzubildenden Gegenstands gespannt und sodann auf irgend eine Weise der Schnittpunkt dieses Fadens mit der Bildebene bestimmt wird, teils darauf, dass bei festgelegtem Ort des Auges das Bild entweder auf eine Glastafel, oder, wenn statt derselben ein Fadengitter eingeschoben ist, auf ein entsprechend eingeteiltes Papier gezeichnet wird. Solche, durch gute Schnitte erläuterte Instrumente zeigt die Ausgabe von 1525 zwei, die Ausgabe von 1538 vier, wovon eines als von einem gewissen Jakob Keser erfunden bezeichnet wird. Welchen grossartigen Einfluss insbesondere dieser letzte Teil der Dürer'schen Unterweisung auf seine Leser ausübte, erkennen wir am besten aus der grossen

¹ Vergleiche Dürer, Briefe, Tagbücher und Reime, herausgegeben von Thausing. Quellenschriften für Kunstgeschichte III.

² Wer dieser Meister in Bologna war, lässt sich nicht mehr sicher feststellen; von den meisten Schriftstellern, welche sich diese Frage vorlegen (vergl. Harzen, Thausing etc.) wird an Lukas Paciolo gedacht. An anderer Stelle (vergl. Hist. lit. Abt. der Zeitschrift für Math. u. Physik XXXIV. S. 94) habe ich diese Vermutung zurückgewiesen. Unerfindlich ist es mir, wie Thausing behaupten kann (p. 273), Harzen vermute in jenem Meister den greisen Pietro degli Franceschi, indem gerade in der angezogenen Stelle (Archiv für die zeichn. Künste 1856. S. 231 ff.) Harzen ebenfalls Paciolo nennt.

³ Vergleiche Thausing, Dürer S. 271 ff.

⁴ Auffallen kann uns diese Thatsache nicht, wenn wir uns klar machen, dass eine mathematische Begründung des Distanzpunktverfahrens für Dürer doch nicht so ganz einfach gewesen wäre. So habe ich z. B. an anderer Stelle (vergl. Repertorium für Kunstwissenschaft, XIV, 4) nachgewiesen, dass auch Leone Battista Alberti, dem ebenfalls die Kenntnis des Distanzpunkts zugeschrieben wurde, dieselbe nicht besass.

Zahl von Werken über Perspektive, welche, direkt oder indirekt dadurch hervorgerufen, in rascher Aufeinanderfolge, vorzugsweise in Nürnberg erschienen¹.

Ausser der bisher behandelten Unterweisung liess Dürer noch zwei weitere Werke im Druck erscheinen. Dieselben tragen die Titel: „*Hierin sind begriffen vier bücher von menschlicher Proportion | durch Albrechten Dürer von Nürenberg erfunden und beschriben | zu nutz allen denen | so zu diser kunst lieb tragen. MDXXVIII.*“ und „*Elliche underricht | zu befestigung der Stett | Schloßz | und flecken. MCCCCCXVII.*“ Für unser Thema bieten diese Werke kaum eine nennenswerte Ausbeute, man müsste denn dahin jene Konstruktionen rechnen, durch welche Dürer z. B. die Massverhältnisse des menschlichen Körpers nach bestimmten Regeln abändert. Derartige Konstruktionen, welche ihrem innersten Wesen nach als vollständig unkünstlerisch und deshalb verfehlt bezeichnet werden müssen, führt Dürer in seinem Proportionswerk unter folgenden Namen auf: „Zwilling, Zeiger, Fälscher etc.“ Durch den „Zwilling“ wird z. B. ein Bild so verändert, dass die Ordinaten der einzelnen Punkte desselben sich gleich bleiben, dagegen die Abscissen in einem festen Verhältnis wachsen oder abnehmen. Doch ist auch Dürer sich des Misslichen und Unnatürlichen solcher Konstruktionen wohl bewusst. In dem einzigen Falle, in welchem bei einer derartigen Konstruktion Dürer einen mathematischen Satz ausspricht, ist derselbe zu allem hin noch verfehlt². Dagegen tritt auch in diesem Werke die grosse Übung Dürers im Grund- und Aufrisszeichnen und in der praktischen Verwendung dieser seiner „darstellenden Geometrie“ hell zu Tage. Unter anderem behandelt Dürer am menschlichen Kopfe die Aufgabe, aus Grund- und Aufriss eines Körpers in einer bestimmten Lage jene Projektionen in anderer Lage des Körpers abzuleiten.

Auch der handschriftliche Nachlass Dürers, soweit er mir durch Veröffentlichung zugänglich war, ist für unser Thema ohne Belang; dagegen wird ein kurzes Briefchen Tschertes an Dürer uns später noch beschäftigen.

Wenn wir bisher Dürer nur als Geometer kennen gelernt haben, so zeigt jener berühmte Kupferstich, den ich eine Illustration zu Fausts verzweiflungsvollem Monologe nennen möchte, dass auch zahlwissenschaftliche Fragen Dürers Interesse anregten. In jenem Kupferstiche, der „Melancholie“ nämlich, bringt Dürer das folgende magische Quadrat an:

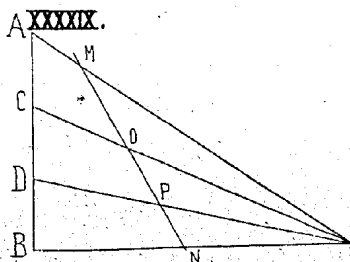
16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

¹ Es ist dies zunächst das oben erwähnte anonym bei Rodler 1531 etc. erschienene Werk; weiterhin die Werke von Hirschvogel, Nürnberg 1543, von Rivius, Nürnberg 1558, von Lautensack, Frankfurt a. M. 1564, von Stür, Augsburg 1567, von Jamnitzer, Nürnberg 1568, von Lenker, Nürnberg 1571, von Haiden, Nürnberg 1590, und von Pfinzing aus Nürnberg, Augsburg 1606 etc.

² Bei dem sogenannten „Vergleicher“, d. h. einem rechtwinkligen Dreieck, in welchem von dem einen Endpunkt der Hypotenuse Strahlen nach den Trisektionspunkten der Gegenkathete gezogen sind (vergl. Fig. XXXIX), glaubt Dürer, eine beliebige Schnittgerade MN werde so geteilt, dass $MO : OP = OP : PN$ sich verhalte. Nun besteht aber nach dem Fundamentalsatz der Projektivität folgende Gleichung zweier

Doppelverhältnisse: $\frac{OM}{OP} : \frac{NM}{NP} = \frac{CA}{CD} : \frac{BA}{BD} = 1 : 3$. Daraus ergibt sich statt Dürers Proportion folgende richtige:

$$MO : OP = \frac{1}{3} MN : PN.$$



Wahrscheinlich war man im Abendlande nach dem Falle Konstantinopels durch flüchtige Gelehrte mit der Arbeit des Griechen Manuel Moschopoulos bekannt geworden; doch bleibt Dürer der erste Deutsche, von welchem sich diese Bekanntschaft nachweisen lässt, und zudem unterscheidet sich sein Quadrat etwas von dem entsprechenden des Griechen. Letzteres zeigt nämlich verglichen mit dem Dürer'schen die beiden mittleren Vertikalreihen vertauscht.

Auch die der Mathematik so nah verwandte Disziplin der Kartographie verdankt Dürer einige Förderung. Hierbei war Dürers Umgang mit jenem vielseitigen Stabius bestimmend, für welchen Kaiser Maximilian einen neuen Lehrstuhl der Astronomie und Mathematik in Wien stiftete. Stabius hatte nämlich das sprachliche, historische und allegorische Material zu Kaiser Maximilians „Triumph“ zu sichten und zu schichten, während die künstlerische Ausführung dieser einzig dastehenden Leistung des Holzschnitts Dürer übertragen war. Dem so eingeleiteten Verkehre Dürers mit Stabius entsprangen zwei astronomische und eine geographische Karte; erstere zeigen die nördliche und südliche Hemisphäre, letztere die östliche Erdhalbkugel. Jene Himmelskarten, deren erste die Unterschrift trägt: „Joann. Stabius ordinavit. Conradus Heinfogel stellas posuit. Albertus Duerer imaginibus circumscipit.“ nennt Mädlar das erste Werk dieser Art im Abendlande.

Nachdem wir nun bisher den Umfang der mathematischen Kenntnisse Dürers dargelegt haben, tritt zunächst die Frage nach den Quellen derselben an uns heran. Hier möchte ich vor allem ausdrücklich betonen, dass es eine vollständige Verkenntung des mathematischen Inhalts der „Unterweisung“ bedeutet, wollte man, wie so vielfach geschieht¹, in erster Linie auf die Elemente des Euklid hinweisen. Zu einer solchen Auffassung lag allerdings für den oberflächlichen oder nicht mathematisch gebildeten Leser eine scheinbare Berechtigung in dem einleitenden Satze der „Unterweisung“. Dieser Satz, den ich schon einmal zitierte, lautet nämlich: „Der aller scharff sinnigst Euclides | hat den gründt der Geometria zusamē gesetzt | wer den selben woll versteht | der darff diser hernach geschriebē ding gar nit“ etc. Aber nichtsdestoweniger giebt es wohl kaum verschiedenartigere Behandlungen der Geometrie als die euklidische und die Dürer'sche. Nein, sicher nicht Euklid, sondern die Zunfttradition der mittelalterlichen Bauhütte ist die erste und wichtigste Quelle der mathematischen Kenntnisse Dürers. Damit will ich keineswegs sagen, Dürer sei Mitglied der Bauhütte gewesen. Die mittelalterliche Zunfttradition eines jeden Handwerks, das auf ein zeichnendes Entwerfen körperlicher Gebilde angewiesen war, musste einen eisernen Bestand von mathematischen Regeln aufweisen. Wenn wir nun wissen, dass Dürer zuerst bei seinem als tüchtigem Goldschmied bekannten Vater in die Lehre trat, so ist schon damit gegeben, dass sehr lange, ehe Dürer an eine systematische Darlegung seines mathematischen Wissens dachte, er schon im

¹ So schreibt z. B. Zahn in seiner „Kunstlehre Dürers“, die „Unterweisung“ bilde einen Lehrgang der angewandten Geometrie und sei im Anschluss an Euklid, aus dessen Elementen die Konstruktionen zumeist gezogen seien, verfasst. In Naumann-Weigels Archiv vom Jahre 1856 schreibt Hausmann im Anschluss an die Angabe, dass Dürers Euklidexemplar in Wolfenbüttel sich vorfinde, eine grosse Zahl der auf dem Rande der Druckbogen vorhandenen mathematischen Figuren Euklids seien dieselben, welche sich in dem Dürer'schen Werke finden. Jenes Euklidexemplar kaufte sich Dürer, laut eigenhändiger Bemerkung in demselben, auf seiner italienischen Reise im Jahre 1507 zu Venedig. Es war die ebendasselbst im Jahre 1505 durch Johann Tacinus nach der lateinischen Übersetzung des Bartolomeo Zamberto veranstaltete Ausgabe. Obgleich ich nun diese Ausgabe nicht zu Gesicht bekommen konnte, so ist doch soviel sicher, dass nur ein verschwindend kleiner Bruchteil der Figuren der „Unterweisung“ überhaupt in einer Euklid Ausgabe vorkommen kann. So bietet ja z. B. Dürer bei der Konstruktion des regulären Fünfecks nicht einmal die euklidische, sondern die ptolemäische Lösung.

Besitz von Kenntnissen war, welche an die in der Hütte gepflegten erinnerten; und wie oft weist Dürer bei seinen Konstruktionen selbst darauf hin, wie auch die „künstlichen“ Steinmetzen solches zu machen verstehen. Dass weiterhin Dürer im Umgange mit Mitgliedern der Hütte seine mathematischen Kenntnisse zu erweitern strebte, dafür haben wir in dem schon oben erwähnten, noch erhaltenen Briefe des kaiserlichen Baumeisters Tscherte¹ in Wien einen vollgültigen Beweis. In diesem Briefe², in welchem Tscherte den ihm engbefreundeten Dürer zu einem Frühmahle einlädt, ist folgende Stelle enthalten: „ Hiemit schicke ich Euch die Proposition mit dem Dreieck von drei ungleichen Winkeln. Bevor ich noch gestern von Euch heimgekommen war, habe ich es unterwegs gefunden. Aber aus dem Quadrat ein Dreieck von gleichem Flächeninhalt zu finden, das ist kunstvoll. Ich nehme an, Ihr kennt es wohl. Die Kugel soll ich nicht verstecken; sobald ich etwas Musse habe, will ich versuchen, was ich ausrichte; es soll Euch nicht vorenthalten sein. J. Tscherte.“

Über diesen Tscherte fand ich weiterhin eine Stelle³, aus der hervorgeht, welcher tüchtiger Mathematiker und vor allem Perspektiviker derselbe war. Diese Stelle zusammengehalten mit obigem Briefe lässt keinen Zweifel darüber, dass wir im wissenschaftlichen Verkehre Dürers mit Tscherte eine nicht unwichtige Quelle der mathematischen und wohl auch perspektivischen Kenntnisse des ersteren zu suchen haben.

Auf dem so erworbenen Grunde lagern sich nun, gleichsam als eine zweite Schichte, eigene Leistungen Dürers auf. Da ich schon bei der Analyse der „Unterweisung“ dieselben nicht unerwähnt liess, so kann ich mich hier auf eine zusammenfassende Übersicht beschränken. Es handelt sich hauptsächlich um zwei grosse Gruppen selbständiger hervorragender Leistungen Dürers als Mathematiker. Die erste Gruppe umfasst beinahe alles das, was Dürer über die Konstruktion und die Eigenschaften der von ihm behandelten höheren Kurven vorträgt, während der zweiten Gruppe jene Abschnitte der „Unterweisung“ zugehören, in denen das Grund- und Aufrisszeichnen räumlicher Gebilde ausschliesslich zu spezifisch mathematischen Zwecken verwendet wird, wie z. B. in der Dürer'schen Behandlung der Kegelschnitte und teilweise auch in seiner Perspektive.

Zu weit geht Gerhardt, wenn er ohne Restriktion in seiner „Geschichte der Mathematik in Deutschland“ behauptet, Dürer habe die erste darstellende Geometrie in deutscher Sprache

¹ Es ist dies derselbe Tscherte, an den Pirkheimer nach Dürers Tod den berüchtigten Brief über Dürers häusliches Unglück richtete. So sehr sich auch Thausing bemüht, Dürers Frau von dem in jenem Briefe ausgesprochenen Vorwurfe zu reinigen, so bleiben für den unbefangenen Beurteiler der ehelichen Verhältnisse Dürers ausser diesem Briefe noch eine Reihe von Stellen aus Dürers eigenen Briefen an Pirkheimer übrig, welche nur zu deutlich durchmerken lassen, dass Dürer sich in seiner Ehe unglücklich fühlte. Eine dieser Stellen, welche ich allerdings ihrer Derbheit halber hier nicht wiedergeben kann, spricht mehr, als ganze Briefe voll Klagen sprechen könnten.

² Dieser Brief befindet sich im Britischen Museum. Vergl. Jahrbücher für Kunstwissenschaft I, 21, woselbst weiterhin die Bemerkung folgt, dass derselbe am Schlusse eine Figur zeige, welche die Konstruktion eines Rechtecks von gleichem Flächeninhalt mit einem Dreieck lehre.

³ In der Einleitung zu dem später noch zu erwähnenden Libellus Joannis Vernerii ist folgende Stelle enthalten: „Tuae tunc prudentiae comes erat conterraneus tuus Joannes Scherte, vir profecto insignis ac in plerisque bonis artibus haud parum peritus praesertim in mathematica excellens, praecipue in ea ipsius parte quam hoc tempore multi latinorum perspectivam, veteres autem Graeci monocromaton vocavere, Velut id in Viennensium civitate aedis suae cenatio quaedam atque pergula juxta catoptricam rationem ab ipso descriptae testantur, quarum lineamenta in vestibulis hostiorum ac eminus consistenti cuncta corporea et eminentia tanquam ex solida quadam materie compacta videbuntur, ubi deinde propius accedas, nil tale praeter lineamenta illa et monocromata intueberis.“

geschrieben. Im allgemeinen nicht unzutreffend bemerkt hierauf Günther, die ersten Anklänge an jene Disziplin fänden sich lange vor Dürer in den Anleitungen zur Reisskunst von seiten der Baumeister und zudem lasse sich das, was den Kern der darstellenden Geometrie ausmache, das Projizieren, in irgend erheblichem Umfange bei Dürer nicht nachweisen¹. Doch möchte ich mir zu dieser Günther'schen Zurückweisung der Behauptung Gerhardts ein paar Bemerkungen erlauben. Es ist zunächst eben das grosse Verdienst Dürers, jene „Reisskunst“ auch der reinen Mathematik dienstbar gemacht zu haben. Was dann das „Projizieren“ bei Dürer betrifft, so möchte ich auf zwei Stellen, welche ich eben zu diesem Behufe früher ausführlich mitteilte, verweisen. In der einen dieser Stellen (vergl. S. 43) sehen wir Dürer in ganz eigentümlicher Weise nach Worten ringen, um dem Leser das Wesen des Grund- und Aufrisses klarzulegen. Aus dieser Stelle geht aber nur das eine unzweideutig hervor, dass Dürer selbst nicht zu einer vollständigen Klarheit über die mathematische Bedeutung jener Begriffe durchgedrungen war. Er sah, dank seiner eminenten Fähigkeit im Vorstellen räumlicher Gebilde, ohne das konstruktive Zwischenglied der Orthogonalprojektion nötig zu haben, gleichsam als identisch mit der vorgestellten Raumgrösse, direkt den Grund- und Aufriss. Hierbei vertrat ihm beim Grundriss der zunächst rein mechanisch gedachte Vorgang des „Niederdrückens“ das orthogonale Projizieren². Zur Erkenntnis der absoluten Gleichwertigkeit des Grund- und Aufrisses ist Dürer nicht durchgedrungen. Ihm war, wenn ich mich eines gewagten Ausdrucks bedienen darf, der Grundriss gleichsam eine erste, der Aufriss eine zweite höhere „Annäherung“ an das räumliche Gebilde selbst. Doch treten auch Stellen auf, in denen, wenigstens beim Grundriss, Dürer sich in nicht misszuverstehender Weise des orthogonalen Projizierens bedient. Hierzu vergleiche man z. B. die S. 15 mitgeteilte Stelle, wo folgender Passus vorkommt: *„So nun aufs allen puncten aufrecht linien | von jm (d. h. dem Kegel) herab fallen in den grundt“* etc. Weiterhin aber finden wir in jener ersten Konstruktion des perspektivischen Bildes eines Würfels das Zentralprojizieren mit einer Schärfe und Deutlichkeit beschrieben, welche nichts zu wünschen übrig lässt. Hienach möchte ich meine Stellung in der uns beschäftigenden Frage dahin präzisieren, dass ich in Dürer ein notwendiges und sehr wichtiges Zwischenglied zwischen der „Reisskunst“ und der eigentlichen „darstellenden Geometrie“ erblicke. Jahrhunderte stand es noch an, bis in jener Disziplin, welche ich „darstellende Geometrie“ im weitesten Sinne des Wortes nennen möchte, Dürer von Männern, die allerdings nicht direkt auf seinen Schultern standen, überflügelt wurde.

Auf diese eben besprochene zweite Schichte, welche wir im Stoffe der „Unterweisung“ zu unterscheiden haben, lagern sich nun als dritte und höchste Schichte jene Abschnitte, welche Dürer direkt antiken Mathematikern entnahm. Hieher gehört vor allem das, was er über die regulären und archimedischen Körper, sowie über das delische Problem vorträgt. Schon äusserlich sondern sich diese Teile vom übrigen dadurch ab, dass sie in die erste Hälfte des vierten und letzten Buches zusammengefasst sind. In naturgemässer Steigerung erblickt Dürer in diesem vierten Buche, das in seiner zweiten Hälfte die Lehre von der Perspektive enthält, den Gipfel seines Werkes. Viel schärfer aber als jene äusserliche Absonderung ist die innere Verschiedenheit zwischen den drei ersten Büchern und der ersten Hälfte des vierten Buches; ganz im Gegensatze zu jenen sucht hier Dürer selbst bis zu einer

¹ Günther, Gesch. d. math. Unterr., S. 358.

² Vergl. hiezu auch das bei der „aufgezogenen“ Spirale S. 9 Gesagte.

euklidischen Strenge des Beweises vorzudringen, dafür steht er aber auch seinem Stoff hier vollständig unfrei gegenüber.

Dank dem rastlosen Sammeleifer eines Regiomontans erfreuten sich wohl wenige Städte diesseits der Alpen eines Schatzes seltener Manuskripte antiker Mathematiker, wie Nürnberg. Wurden auch nach Regiomontans (1476) und dessen Freundes Bernhard Walthers (1504) Tod diese Manuskripte zerstreut, ja kamen zum Teil ganz abhanden, so wissen wir doch von Schöner¹, dass Dürers Freund und Gönner Pirkheimer aus jenem Nachlasse mathematische Manuskripte erstand. Unter den in Nürnberg erhaltenen antiken mathematischen Schriftstellern befand sich jedenfalls ein „Archimedes“, wenigstens das Eutokiuskommentar zu demselben. Aus ihm veröffentlichte nämlich der bedeutende Mathematiker Johann Werner², Pfarrer zu St. Johannis bei Nürnberg, unter anderem im Jahr 1522 die dort gegebenen Lösungen der delischen Aufgabe³. Gelegenheit war somit Dürer in seiner Vaterstadt genügend geboten, jene Lösungen kennen zu lernen, und zwar glaube ich aus den schon früher dargelegten Gründen, dass neben der Werner'schen Arbeit, welche ja auch lateinisch war, Dürer in erster Linie das griechische Original, wohl durch Vermittlung seines gelehrten Freundes Pirkheimer, benützte. Ebenso werden wir wohl nicht fehl gehen, wenn wir als letzte Quelle dessen, was Dürer über die archimedischen Körper giebt, ein Pappusmanuskript vermuten. Doch hier beschränkt sich Dürer nicht auf eine einfache Wiedergabe dessen, was er vorfand. Körper von solch regelmässiger Gestalt mussten einen Dürer mächtig anziehen, wie wir auch Ähnliches von berühmten italienischen Künstlern der Renaissance wissen⁴. Ausgehend von der trockenen Aufzählung der Flächen, wie sie Pappus⁵ giebt, hat Dürer wohl durch mühsame Versuche die Netze und damit die Körper selbst sich konstruiert. Dass hier Dürer nicht auf eine uns vielleicht unbekannte Arbeit, welche jene Netze enthielt, sich stützen konnte, geht klar aus der Thatsache hervor, dass, während die Ausgabe der „Unterweisung“ vom Jahre 1525 nur 7 solcher Netze enthielt, diejenige vom Jahre 1538 deren 9 vorführt. Zugleich haben wir hierin einen Beleg dafür, wie lebhaft mathematische Fragen Dürer noch in seinen allerletzten Lebensjahren bewegten. Diese Konstruktion der Netze von 9 archimedischen Körpern⁶, welche noch zu den oben erwähnten selbständigen Leistungen Dürers hinzutritt, ist eine mathematische That, welche für sich allein schon Dürer einen ehrenvollen Platz in der Geschichte der Mathematik sichern würde.

¹ Vergl. die Vorrede von „Joannis de Regiomonte de triangulis etc.“, welches Werk eben jener Schöner 1533 herausgab.

² Eben dieser Johannes Werner hat auch im Auftrage des berühmten Stückgießers Sebald Beham für dessen Sohn die 15 Bücher Euklids ins Deutsche übersetzt und mit erläuternden Beispielen ausgestattet. Leider war schon sehr frühe dies Manuskript verloren gegangen. Vergl. Quellenschriften für Kunstgeschichte, X, p. 48.

³ Vergl. Libellus Joannis Veneri Nurembergen. super vigintiduobus elementis conicis. Ejusdem Commentarius seu paraphrastica enarratio in undecim modos conficiendi ejus problematis, quod cubi duplicatio dicitur. etc.

⁴ So beschäftigte sich z. B. Lionardo da Vinci im Vereine mit Pacinolo mit den regulären, manchen halbrekulären und ähnlichen Körpern. Vergl. meine biographische Skizze, Lukas Pacinolo, hist.-lit. Abteilung d. Zeitschr. f. Math. u. Phys., XXXIV, 3 u. 4.

⁵ So schreibt Pappus, vergl. Edit. Hultsch S. 352, vom „Tetraedron truncum“ z. B. nur: *το μέν γάρ πρῶτον ὀκτάεδρον ἐστὶν περιεχόμενον ὑπὸ τετραγώνων δ' καὶ ἑξαγώνων δ'.*

⁶ Wozu noch die Netze der fünf regulären und einiger weiterer Körper kommen.

Wenn wir nun so in Obigem die Quellen des stofflichen Inhalts von Dürers „Unterweisung“ klarlegten, müssen wir jetzt noch eines Werkes gedenken, das auf Dürer jedenfalls von einigem Einflusse war. Ich meine die „Divina proportionē“ von Lukas Paciolo¹. Doch wird gewöhnlich der Einfluss, den dieses Werk auf Dürers „Unterweisung“ ausübte, verkannt. Nicht eine einzige Zeile mathematischen Inhalts der „Unterweisung“ stellt sich als aus der „Divina proportionē“ geschöpft dar². Wie hätte auch der „Geometer“ Dürer nur im Stande sein können, von Paciolo, dem Algebraiker par excellence, der gerade in seiner „Divina proportionē“ ja alle geometrischen Probleme nur rechnend behandelte, überhaupt etwas zu entlehnen? Sollte es noch eines weiteren Beweises dafür bedürfen, dass Dürers „Unterweisung“ in mathematischer Beziehung von Paciolos „Divina proportionē“ vollständig unabhängig ist, so genügt die Aufführung einer einzigen Thatsache. Dürer erwähnt in seinem ganzen Werke mit keinem Worte den goldenen Schnitt, während doch das ganze Paciolo'sche Werk demselben, wenn ich so sagen darf, gewidmet ist, und der erste, auch dem Umfange nach nicht unbeträchtliche Teil dieses Werkes, überhaupt nur mit jenem Probleme sich beschäftigt. Ja aus dieser Thatsache geht für mich noch mehr hervor. Als Dürer seine „Unterweisung“ schrieb, war ihm sicher Paciolos Werk nicht mehr zugänglich. Wie hätte er sonst den goldenen Schnitt übergehen können, dessen metaphysischen Charakter Paciolo uns in Worten nahelegt, welche heute seltsam klingen³, und von dessen grosser Bedeutung gerade für den ausübenden Künstler durchdrungen Paciolo überhaupt sein Werk nur schreibt⁴. War Dürer auch nicht im Stande, der arithmetischen Behandlung Paciolos zu folgen, so hätte er doch sicher, nach dessen Verweisung, Euklids Konstruktion gegeben. Dagegen spricht nicht nur die vollständige Übereinstimmung im Zwecke⁵, sondern auch eine Reihe von Aeusserlichkeiten⁶ dafür, dass kaum angenommen werden kann, Dürer habe nie Paciolos Werk gesehen. Nun wissen wir, dass Dürer sich in den Jahren 1505–1507 in Venedig aufhielt, Paciolo aber 1506 seinen florentiner Wirkungskreis verliess und zur Drucklegung seiner Euklidübersetzung, sowie seiner „Divina proportionē“ nach Venedig übersiedelte, wo wir ihn sicher 1508 nachweisen können. Hier nun in Venedig wohl machte Dürer die Bekanntschaft Paciolos⁷ und dessen Manuskripts, das ihn sicher schon

¹ Vergl. hiezu auch meine schon oben erwähnte biographische Skizze des Lukas Paciolo.

² Vergl. hingegen was z. B. Thausing in seinem Werke S. 273 sagt.

³ So findet Paciolo unter einer ganzen Reihe anderer Eigenschaften, welche es bedingen, dass die durch den goldenen Schnitt erhaltene Proportion mit Recht den Namen „göttliches“ Verhältnis führe, auch die Ähnlichkeit des goldenen Schnitts mit der Trinität. Er schreibt: „Cioe si commo in divinis una medesima substantia sia fra tre persone padre figlio e spirito sancto. Così una medesima proportionē de questa sorte sempre conven se trovi fra tre termini e mai ne in piu ne in manco se po ritrovare.“

⁴ Vergl. hiezu nur z. B. den Titel des Werkes: „Divina proportionē. Opera a tutti gl'ingegni perspicaci e curiosi necessaria Ove ciascun studioso di Philosophia: Prospectiva Pictura Sculptura: Architectura: Musica: e altre Mathematiche: suavissima: sottile: e admirabile doctrina consequira: e delectarassi: con varie questionē de secretissima scientia.“

⁵ Vergl. hiezu den Titel der „Divina proportionē“ mit dem einleitenden Briefe der „Unterweisung“ etc.

⁶ So vor allem die Beigabe einer geometrischen Konstruktion der Buchstaben und die Behandlung der regulären, halbrekulären und ähnlicher Körper.

⁷ Auch von anderer Seite und ganz anderem Gesichtspunkte ausgehend sieht man sich zu der Vermutung veranlasst, Dürer habe die persönliche Bekanntschaft des Paciolo gemacht. Vergl. hiezu Thausing S. 275. Hiezu möchte ich beifügen, dass allerdings, wie Thausing vermutet, Paciolo mit den Massverhältnissen des berühmten Reiterstandbilds des Francesco Sforza in Mailand bekannt war. Es geht dies aus dem Briefe Paciolos an Ludwig Sforza hervor, welcher Brief in der „Divina proportionē“ enthalten ist.

deshalb mächtig anzog, da die zugehörigen Figuren von der Meisterhand Lionardo da Vincis herrührten. Als nun Dürer später selbst zur Feder griff, um ein Werk ähnlichen Zweckes zu schreiben, genügte die Erinnerung an jenes Manuskript, um die Übereinstimmungen, welche wir im Inhalte thatsächlich finden, vollständig zu erklären; die Übereinstimmung im Zwecke beider Werke aber entsprang ein und demselben Grunde, nämlich jenem Zuge nach Popularisierung der Mathematik, welchen wir durch das ganze Zeitalter der Renaissance hin finden. Die Konstruktionen der Buchstaben bei Dürer erinnern allerdings stark an diejenigen des Paciolo, doch kann von einer Gleichheit beider entfernt nicht die Rede sein; schon durch das, was überhaupt gezeichnet werden sollte, war eine grosse Übereinstimmung in der Konstruktion bedingt und zudem giebt ja Paciolo nur eine Antiqua-majuskel. Dürer, der an Gestaltungskraft keinem seiner grossen italienischen Zeitgenossen nachsteht, hatte nicht nötig, bei solch einfachen Konstruktionen sich mit fremden Federn zu schmücken; doch ist es nicht unmöglich, dass er ein nach Paciolos Manuskript geschriebenes Alphabet von Venedig mit nach Hause brachte; ein solches hatte für ihn, ganz abgesehen von dem Gedanken an eine Veröffentlichung, einen nicht zu unterschätzenden Wert. Was dann die regulären und halbrekulären Körper anbelangt, so giebt Paciolo stets ein perspektivisches Bild nie ein Netz, Dürer umgekehrt stets ein Netz, nie ein perspektivisches Bild; zudem kommen von den 9 bei Dürer behandelten archimedischen Körpern folgende 3 bei Paciolo überhaupt nicht vor: der Kubus truncus, das Kuboktaedron truncum und der Kubus simus. Letzteren nach seiner Methode abzuleiten, wäre überhaupt Paciolo unmöglich gewesen. Es kann also von einer Abhängigkeit der „Unterweisung“ von der „Divina proportione“, welche über eine Ähnlichkeit des Vorwurfs hinausgeht, in keiner Weise die Rede sein. Hiemit glaube ich das Verhältnis beider Werke dargelegt zu haben.

Schon oben erwähnte ich die Vermutung, dass Dürer wohl in fremdsprachlichen Schwierigkeiten sich des Beistandes seines Freundes Pirkheimer erfreuen dürfte; doch auch auf den deutschen Text der Arbeiten Dürers erstreckte sich diese, allerdings nur das Sprachliche berücksichtigende Beihilfe; Dürers Manuskripte tragen teilweise Korrekturen von Pirkheimers Feder¹. Hauptsächlich dürften wohl die Vorreden etc. in Dürers Werken ein Produkt gemeinsamer Beratung beider Freunde sein. So hat sich ein Brief erhalten, in welchem Dürer seinem Freunde 7 Punkte bezeichnet, welche in der Vorrede zum Proportionswerk beobachtet werden sollten². Dagegen rühren jene Versuche, die Fremdwörter zu umgehen, sicher von Dürer selbst her, der auch in dem eben erwähnten Briefe als fünften Punkt den angiebt, dass er allein für unsere deutsche Jugend schreibe, welchen Gedanken man in der Vorrede, wie sie vorliegt, vergeblich sucht.

Zum Abschlusse dieser meiner Arbeit möchte ich das, was ich in ausgedehnter Untersuchung über Dürer als Mathematiker gegeben habe, in einem kurzen Überblick nochmals zusammenfassen.

Beurteilten wir Dürer nur nach der Strenge seiner Beweisführung und dem lücken- und fehlerlosen Bau seiner „Unterweisung“, so dürften wir ihn nie und nimmer einen Mathematiker nennen. Heute, nachdem wir uns wieder vollständig jene unsterblichen Leistungen hellenischen Geistes, wie sie z. B. in dem Lehrgebäude eines Euklid über Jahrtausende zu uns herüberstrahlen, zu eigen gemacht haben und die in ihnen zu Tage tretende Schärfe mathe-

¹ Vergl. Naumann-Weigels Archiv für zeichnende Künste. 1858. S. 20.

² Vergl. Dürers Briefe etc. herausgegeben von Thausing in den Quellenschriften für Kunstgeschichte. III.

matischen Denkens uns selbst in Fleisch und Blut übergegangen ist, heute sind wir gewöhnt, einen Massstab anzulegen, nach welchem wohl Dürers Landsmann und Zeitgenossen Werner, nie aber ihm selbst der Titel eines „Geometers“ zukäme. Zwar ist der deutsche Künstler Dürer nicht blind für die hehre Schönheit des wie aus Erz gemeisselten euklidischen Beweises, aber die nimmer wegzuleugnende Starrheit und Unproduktivität jenes Lehrgebäudes stösst ihn ab. Ihm ist Bewegung, ihm ist direkte Anschauung alles. Nur einmal versucht er es, den lückenlosen Bau eines Beweises, wie ihn griechischer Geist schuf, aufzuführen, aber losgelöst von jeder Anschauung vermag er nicht dem starren Gefüge der Schlüsse zu folgen; mitten im Beweise unterbricht er sich, um sich durch direkte Anschauung von dem zu vergewissern, was er eben bewiesen hat. Doch ist er sich der tiefeinschneidenden Wichtigkeit eines solchen Beweises voll und ganz bewusst. Wenn wir gesehen haben, dass z. B. der Fehler seiner Winkeltrisektion für einen Kreisbogen von etwa 60° nimmermehr aus der Anschauung, aus der Erfahrung, erkannt werden kann, so ist ihm nichtsdestoweniger jene Aufgabe eben doch nur „mechanisch“ und nicht „demonstrativ“ gelöst. Welch freie und hohe Stellung nimmt hier Dürer einer Zunfttradition gegenüber ein, von der er ja selbst ausgegangen war, welche aber als einziges Kriterium für die Richtigkeit einer Konstruktion nur das Experiment kannte. Und wie hat weiterhin Dürer das Hilfsmittel des Praktikers, das Grund- und Aufrisszeichnen, zu einem Hilfsmittel des Theoretikers umgewandelt.

Einen hervorragenden Zug im geistigen Bilde unseres Künstlers oder vielmehr einen ganzen Komplex von Zügen dürfen wir hier nicht vergessen. Immer wieder weht in den Schriften Dürers, in ihren Vorzügen und in ihren Fehlern, dem aufmerksamen Leser ein Hauch entgegen, der ihm zeigt, wie sehr Dürer ein Kind jener Geistesrichtung war, welche wir heute im Blick auf jene Zeit kurzweg „Humanismus“ nennen. Wenn auch, wie wir gesehen haben, Dürers mathematische Produktion vielfach eine empirische, eine auf dem Experimente aufbauende war, so erblickte er in der Zeichnung doch nur ein äusserliches Hilfsmittel, das mit dem innersten Wesen seiner Wissenschaft wenig zu thun hat. Nichts wäre verfehlter, als in Dürer einen „Banausen“ sehen zu wollen, dem die Mathematik nichts anderes als eben ein Konglomerat praktischer Regeln war. Nein, ihm war sie eine Wissenschaft göttlichen Ursprungs von grossartigem erkenntnistheoretischem Werte, wenn er schreibt¹: „*Aber unmöglich bedunckt mich so einer spricht er wisse die beste mass inn menschlicher gestalt anzuzeiggen | daß die lügen ist in unsrer erkantnus | und stecht die finsternus so hart in uns das auch unser nach dappen felt | welcher aber durch die Geometria sein ding beweyst | und die gründlichen warheyt anzeygt | dem sol alle welt glauben | dann da ist man gefangen | und ist billich ein solcher als von Got begabt für ein meyster in solchem zuhalten | und der selben ursachen jrer beweysung sind mit begirten zu hören | und noch frölicher jre werck zu sehen.*“

Wohl schon nach dem nur bisher Rekapitulierten dürften wir unserem ersten Aussprüche entgegen Dürer einen Mathematiker nennen. Gehen wir aber einen Schritt weiter und erblicken wir wie Clebsch in seiner Gedächtnisrede auf Plücker², die „Freude an der Gestalt“ als Kennzeichen des echten Geometers, ja dann war Dürer der Geometer $\alpha\alpha\tau' \epsilon\zeta\omicron\chi\eta\nu$. Wie tritt diese Freude an der Gestalt bei seiner Behandlung der archimedischen Körper und der höheren Kurven so glänzend zu Tage und wie befähigte sie ihn, in jenen Kurven über die von ihm selbst als unerreichbar verehrte antike Mathematik, wenn auch nur mit einem kleinen Schrittschen, hinauszugehen!

¹ Vergl. Dürers 4 Bücher von menschlicher Proportion. Ausgabe vom Jahre 1528, Blatt T II Seite 2.

² Gehalten vor der gelehrten Gesellschaft zu Göttingen 1871.

Doch ungleich höher, als wir bisher, im Hinblick auf die Vermehrung des Wissensschatzes der Mathematik, Dürers Verdienst als Geometer stellten, müssen wir dasselbe werten, wenn wir die Geschichte unserer Wissenschaft ins Auge fassen. Die Werke eines Werner, welchen ich oben als „pars pro toto“ Dürer gegenüberstellte, lateinisch geschrieben, waren bald in den Bibliotheken vergessen; Dürers Werke, in der Sprache des Volkes und für das Volk geschrieben, sie erlebten beinahe ein Jahrhundert nach ihrem ersten Erscheinen eine Neuauflage, welche mit der regen Nachfrage nach denselben motiviert wird, und in mehr als einer Richtung lässt sich ihre lang andauernde, tiefgehende und reiche Früchte zeitigende Einwirkung verfolgen. Mit schöner Objektivität hat Dürer in dem von uns mitgeteilten Briefe an Pirkheimer seine Leistungen und sein Werk beurteilt, wenn er unter anderem schreibt: „Gar leicht verlieren sich die Künste, aber nur schwer werden sie wieder erfunden; deshalb hoffe ich, dass diese meine Unterweisung kein Verständiger tadeln wird, dieweil ich sie in guter Absicht allen Wissensdurstigen zu lieb geschrieben habe. Auch weiss ich, dass wer sie gebraucht, nicht allein einen guten Grund legen, sondern durch die tägliche Übung zu einem immer grösseren Verständnis gelangen, weiter suchen und viel mehr, als ich hier gebe, selbst finden wird.“

Wenn ich nun am Ende meiner Arbeit angelangt, nochmals kurz „Dürer als Mathematiker“ charakterisieren soll, so drängen sich mir unwillkürlich jene Worte auf, mit welchen auch Thausing sein Werk abschliesst. Dürer schrieb dieselben schon im Jahre 1513, also beinahe am Anfange seiner litterarischen Thätigkeit¹, und prophetisch klingen sie, wenn wir auf die „Unterweisung“ hinsehen. Klar und deutlich skizziert gleichsam Dürer selbst seine Verdienste um unsere Wissenschaft, und in schönem Bilde ist auch seine hohe Wertschätzung der Mathematik als „der Fackelträgerin einer neuen Zeit“ gezeichnet, wenn er, im Ausblick auf die von ihm geplanten theoretischen Werke, schreibt:

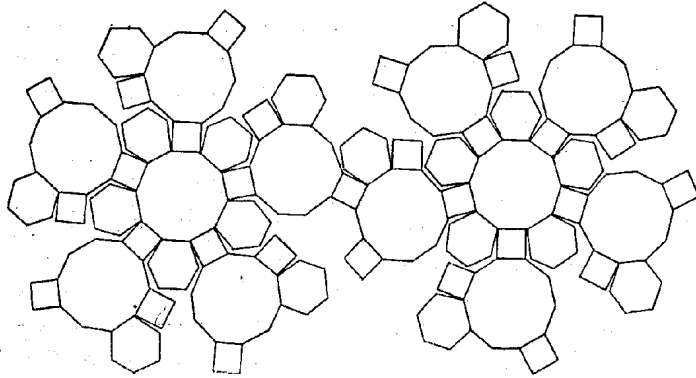
„Denn so ich etwas anzünde und ihr alle Mehrung mit künstlicher Besserung dazu thut, so mag mit der Zeit ein Feuer daraus geschürt werden, das durch die ganze Welt leuchtet.“

¹ Jene Worte sind in dem Vorrede-Fragment zu jenem von Dürer geplanten Werke enthalten, das den Titel: „Eine Speise der Malerknaben“ führen sollte. Vergl. Jahrbücher für Kunstwissenschaft I. p. 7.

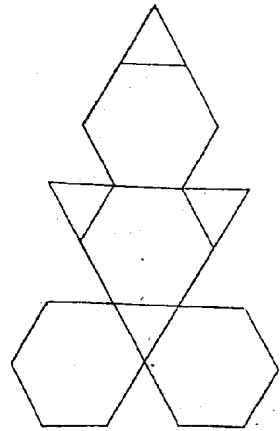
Ehe ich die Feder aus der Hand lege, möchte ich einer Pflicht der Dankbarkeit genügen, indem ich auch an dieser Stelle Herrn Repetent Richter meinen herzlichsten Dank ausspreche für die vielfachen Unterstützungen, welche derselbe mir bei dieser Arbeit, hauptsächlich im Zeichnen der Figuren, angedeihen liess.

Stuttgart, im Juli 1891.

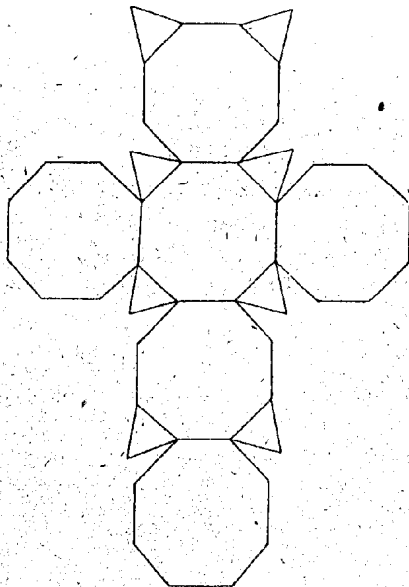
Professor Dr. Staigmüller.



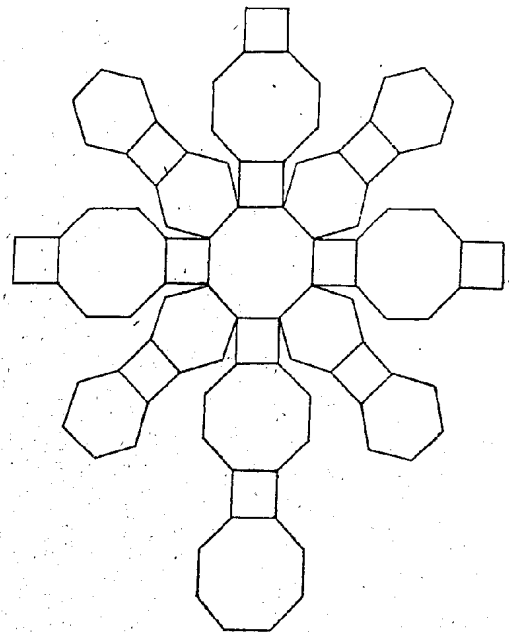
Ikosidodekaedron truncum.



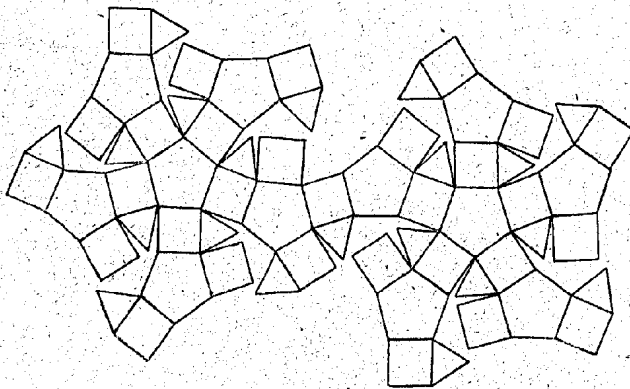
Tetraedron truncum.



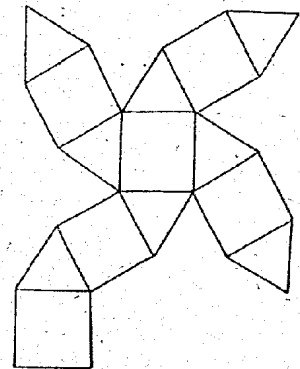
Kubus truncus.



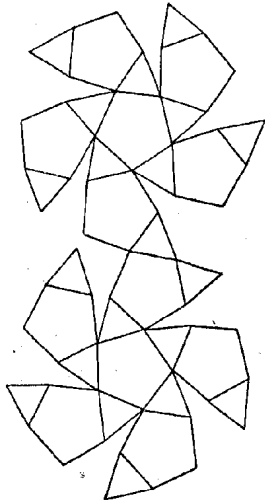
Kuboktaedron truncum.



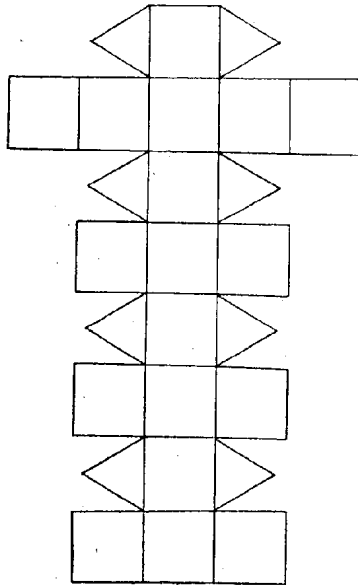
Rhombikosidodekaedron.



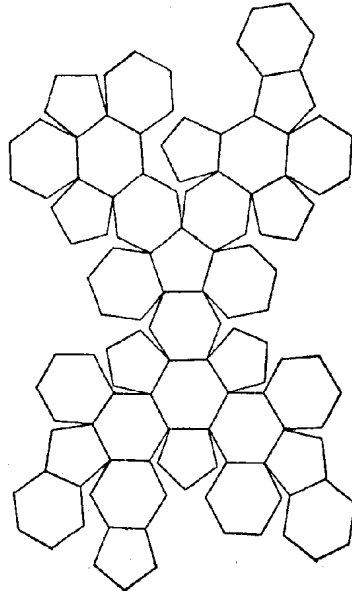
Kuboktaedron.



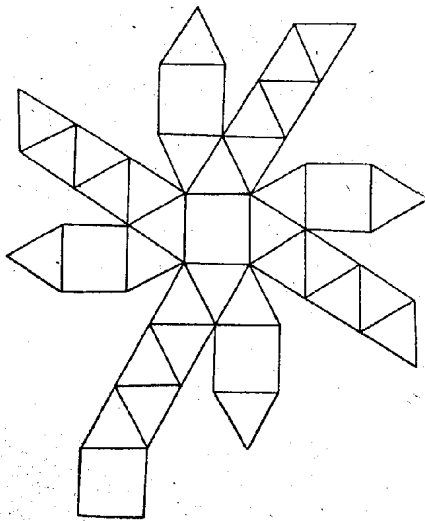
Ikosidodekaedron.



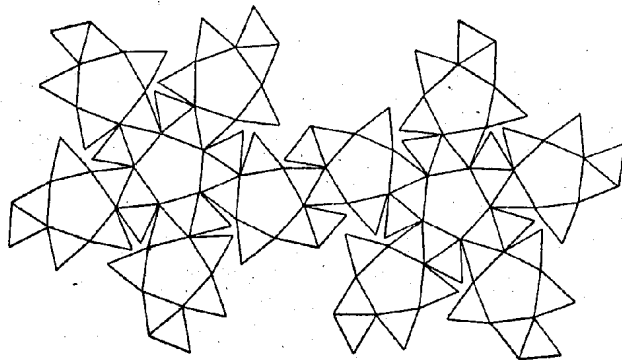
Rhombikuboktaedron.



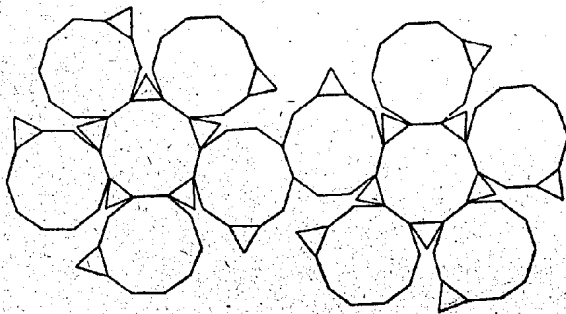
Iksaedron truncum.



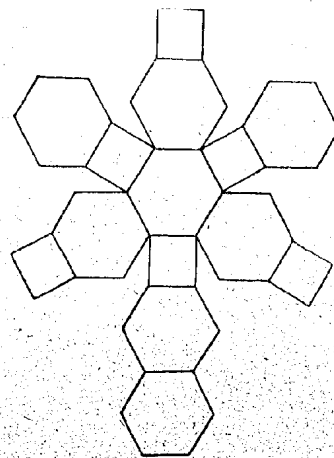
Kubus simus.



Dodekaedron simum.



Dodekaedron truncum.



Oktaedron truncum.