Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Michael Kuß

aus Wangen/Allgäu

Heidelberg, 27. Juli 2000

Thema

Die Funktionalgleichung der getwisteten Spinorzetafunktion und die Böcherer Vermutung

Gutachter: Prof. Dr. Winfried Kohnen,
Prof. Dr. Eberhard Freitag

Tag der mündlichen Prüfung: 27. November 2000

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Ist $L(s)$ eine „motivierte" Dirichletreihe (d.h. $L(s)$ kommt von einem algebraisch-geometrischen Objekt, z.B. einer algebraischen Varietät oder einer automorphen Form) und hat $L(s)$ ein Eulerprodukt, so hofft man, daß $L(s)$ eine meromorphe (oft sogar holomorphe) Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt und einer Funktionalgleichung unter $s \mapsto c - s$ $(c > 0)$ genügt.
Unter „guten" Umständen ist der zentrale kritische Wert $L\left(\frac{c}{2}\right)$ ein „motiviertes" vollständiges Quadrat. Wir geben zwei Beispiele, in denen dies erfüllt ist.

Die Hasse-Weil L-Funktion $L(E,s)$ einer elliptischen Kurve $E/\mathbb{Q}$ besitzt nach Wiles-Taylor (93–94) und Breuil-Conrad-Diamond (99–00) eine holomorphe Fortsetzung und eine Funktionalgleichung unter $s \mapsto 2 - s$. Nach der Birch-Swinnerton-Dyer-Vermutung ist der zentrale kritische Wert $L(E,1)$ im wesentlichen ein vollständiges Quadrat.

Sei f eine normalisierte cuspidale elliptische Hecke Neuform vom Gewicht $2k$ und Stufe N. Für eine Fundamentaldiskriminante D mit $(D,N) = 1$ ist der Twist der L-Reihe von f mit $\left(\frac{D}{\cdot}\right)$ definiert durch

$$L(f,D,s) := \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\tfrac{D}{\nu}\right) a(\nu)\nu^{-s} \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0),$$

dabei ist $a(\nu)$ der ν-te Fourierkoeffizient von f.
Nach Hecke besitzt $L(f,D,s)$ eine analytische Fortsetzung und eine Funktionalgleichung unter $s \mapsto 2k - s$ [10].
Waldspurger [22] hat 1981 gezeigt, daß unter gewissen Bedingungen die Werte $L(f,D,k)|D|^{k-\frac{1}{2}}$ proportional zu den Quadraten der $|D|$-ten Fourierkoeffizienten einer Modulform g vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ sind, wobei g unter der Shimura-Korrespondenz zu f gehört.

Betrachten wir einen Spezialfall des letzten Beispiels genauer. Sei S_{2k} der Raum der elliptischen Spitzenformen vom Gewicht $2k$ und $S^+_{k+\frac{1}{2}}$ der Raum der Spitzenformen vom Gewicht $k + \frac{1}{2}$ der Stufe 4 mit Fourierentwicklung

$$\sum_{\substack{n \geqslant 1 \\ (-1)^k n \equiv 0,1\ (4)}} c(n) e^{2\pi i n z}.$$

Dann ist S_{2k} als Hecke Modul isomorph zu $S^+_{k+\frac{1}{2}}$ [6]. Bezeichnet g die unter diesem Isomorphismus zu f gehörige Form in $S^+_{k+\frac{1}{2}}$, und sind $c(|D|)$ die Fourierkoeffizienten von g, dann gilt nach Kohnen-Zagier [13]

$$\frac{c(|D|)^2}{\langle g, g\rangle} = \frac{(k-1)!}{\pi^k} |D|^{k-\frac{1}{2}} \frac{L(f, D, k)}{\langle f, f\rangle}.$$

Wie verhält es sich im höher dimensionalen Fall, speziell für Siegelsche Modulformen zu $\Gamma_2 = \mathrm{Sp}_2(\mathbb{Z})$?

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne $S_k(\Gamma_2)$ den Raum der Siegelschen Spitzenformen vom Gewicht k bezüglich Γ_2. Sei $F \in S_k(\Gamma_2)$ eine Hecke Eigenform mit Fourierentwicklung

$$F(Z) = \sum_{T > 0} a(T) e^{2\pi i \operatorname{tr}(TZ)},$$

wobei T in der Summe alle halbganzen positiv definiten (2×2)-Matrizen durchläuft.
Die Spinorzetafunktion von F ist definiert durch

$$Z_F(s) := \prod_p Z_{F,p}(p^{-s})^{-1}, \tag{0.1}$$

wobei

$$\begin{aligned} Z_{F,p}(X) &:= (1 - \alpha_{0,p}X)(1 - \alpha_{0,p}\alpha_{1,p}X)(1 - \alpha_{0,p}\alpha_{2,p}X)(1 - \alpha_{0,p}\alpha_{1,p}\alpha_{2,p}X) \\ &= 1 - \lambda_F(p)X + \big(\lambda_F(p)^2 - \lambda_F(p^2) - p^{2k-4}\big)X^2 \\ &\qquad\qquad - \lambda_F(p)p^{2k-3}X^3 + p^{4k-6}X^4 \end{aligned}$$

das lokale Spinorpolynom zu p, $\alpha_{\nu,p}$ die Satake Parameter von F und $\lambda_F(p)$ bzw. $\lambda_F(p^2)$ die Eigenwerte von F unter den Heckeoperatoren $T(p)$ bzw. $T(p^2)$ sind.
Nach Andrianov [2] besitzt

$$Z_F^*(s) = (2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+2)Z_F(s)$$

eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ und genügt der Funktionalgleichung

$$Z_F^*(2k-2-s) = (-1)^k Z_F^*(s).$$

Evdokimov [8] und Oda [19] haben gezeigt, daß $Z_F(s)$ genau dann eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ besitzt, wenn k ungerade ist, oder k gerade ist und F nicht im Maaßraum liegt.

Sei jetzt k gerade, und F habe reelle Fourierkoeffizienten. Für eine negative Fundamentaldiskriminante D sei $\chi_D = \left(\frac{D}{\cdot}\right)$. Der quadratische Twist von Z_F mit χ_D ist gegeben durch

$$Z_F(s,\chi_D) := \prod_p Z_{F,p}\big(\chi_D(p)p^{-s}\big)^{-1} \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0).$$

In [4] hat Böcherer folgende Vermutung ausgesprochen:

Vermutung (Böcherer, 1986). *Hat $Z_F(s,\chi_D)$ „gute" analytische Eigenschaften, d.h.*

(i) *eine holomorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$,*

(ii) *eine Funktionalgleichung unter $s \mapsto 2k-2-s$ mit Wurzelzahl $+1$,*

dann existiert eine nur von F abhängige Konstante $C_F > 0$, so daß

$$Z_F(k-1,\chi_D) = C_F |D|^{1-k} \Big(\sum_{\{T>0 \,|\, \mathrm{disc}\, T = D\}/\Gamma_1} \frac{a(T)}{\varepsilon(T)} \Big)^2. \tag{0.2}$$

Dabei ist $\varepsilon(T) := \#\{U \in \Gamma_1 \mid T[U] = T\}$ (mit $\Gamma_1 := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$, $T[U] = U'TU$) die Ordnung der Einheitengruppe von T, und die Summation in (0.2) *erstreckt sich über alle T mit Diskriminante gleich D modulo der Aktion $T \mapsto T[U]$ von Γ_1.*

In [4] hat Böcherer seine Vermutung bewiesen für den Fall, daß F der Maaßlift einer Hecke Eigenform f vom Gewicht $2k-2$ bezüglich Γ_1 ist. Der Beweis beruht auf

(i) der Tatsache, daß $Z_F(s) = \zeta(s-k+1)\zeta(s-k+2)L(f,s)$, wobei $L(f,s)$ die Hecke L-Funktion von f ist [6];

(ii) Waldspurgers Theorem [22] über den Zusammenhang zwischen zentralen kritischen Werten von quadratischen Twists von $L(f,s)$ und Quadraten von Fourierkoeffizienten von Modulformen halbganzen Gewichts;

(iii) der expliziten Beschreibung des Maaßlifts auf der Ebene der Fourierkoeffizienten [2] und

(iv) Dirichlets klassischer Formel für die Klassenzahl.

Später haben Böcherer und Schulze-Pillot in [5] eine ähnliche Identität wie (0.2) im Fall von Stufen bewiesen, wobei F der Yoshida Lift einer elliptischen Modulform ist.
Ebenfalls in [4] wird eine analoge Formel zu (0.2) bewiesen für den Fall, daß F eine Siegel- oder Klingen–Eisensteinreihe ist.
Die Beweise in allen genannten Fällen machen wesentlichen Gebrauch von der Tatsache, daß die Spinorzetafunktion in diesen Fällen ein Produkt von „bekannten" L-Reihen ist.

So weit wir wissen, ist für den Fall, daß F eine „echte" Siegelsche Modulform, also nicht der Lift einer Modulform auf Γ_1 ist, nichts über die Vermutung von Böcherer bekannt.

In dieser Arbeit möchten wir die Vermutung *numerisch* überprüfen für kleine D ($D = -3, -4, -7, -8$) in den ersten „nicht-trivialen" Fällen, wenn F vom Gewicht 20, 22, 24 bzw. 26 und kein Maaßlift ist. Formeln für diese F hat Skoruppa in [21] angegeben.

In [15] haben Kohnen, Krieg und Sengupta die analytische Fortsetzbarkeit von $Z_F(s, \chi_D)$ bewiesen unter der Voraussetzung, daß der erste Fourier-Jacobi-Koeffizient f_1 von F nicht Null ist. Dies ist für die in Frage kommenden F erfüllt [21] (nach einer Vermutung von Skoruppa ist der erste Fourier-Jacobi Koeffizient einer Hecke Eigenform immer von Null verschieden).
Ist χ ein beliebiger – nicht notwendigerweise quadratischer – Dirichlet Charakter modulo N ($N > 1$), dann kann man den Twist von Z_F mit χ definieren durch

$$Z_F(s, \chi) := \prod_p Z_{F,p}\big(\chi(p)p^{-s}\big)^{-1} \qquad (\mathrm{Re}(s) \gg 0).$$

Unter der Voraussetzung, daß $f_1 \neq 0$, und sowohl χ als auch χ^2 primitiv sind – dies ist für $\chi = \chi_D$ offensichtlich nicht erfüllt – wurde die Funktionalgleichung

$$Z_F^*(2k - 2 - s, \chi) = \big(\tfrac{G_\chi}{\sqrt{N}}\big)^4 Z_F^*(s, \overline{\chi}) \tag{0.3}$$

für

$$Z_F^*(s, \chi) = \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s)\Gamma(s - k + 2) Z_F(s, \chi)$$

in [15] mittels Rankin-Selberg-Methode bewiesen, indem $Z_F(s,\chi)$ im wesentlichen dargestellt wird als Rankin Dirichletreihe zwischen den Fourier-Jacobi Koeffizienten von F und denen eines geeigneten Maaßlifts G.

In §1 beweisen wir die Funktionalgleichung (0.3) für $Z_F(s,\chi)$ unter den schwächeren Voraussetzungen $f_1 \neq 0$ und χ primitiv, insbesondere also für $\chi = \chi_D$. Dazu verallgemeineren wir die Methoden aus [15].

In §2 berechnen wir einen numerischen Näherungswert für $Z_F(k-1,\chi_D)$ für die oben genannten F und D. Dazu verwenden wir eine Reihendarstellung von Kohnen für zentrale kritische Werte (§2.1), die unter den in §1 gezeigten „guten" analytischen Eigenschaften von $Z_F(s,\chi_D)$ gültig ist.

Die für die numerische Berechnung von $Z_F(k-1,\chi_D)$ erforderlichen Eigenwerte $\lambda_F(p)$ für $p < 1.009$ prim und $\lambda_F(p^2)$ für $p < 71$ prim unter den gewöhnlichen Heckeoperatoren T_p und T_{p^2} (§2.3) berechnen wir mit Hilfe eines C++ Computerprogramms aus den Fourierkoeffizienten der in Frage kommenden F (§2.2). Dabei gehen wir ähnlich vor wie Skoruppa in [21].

Für die Fehlerabschätzung unserer Berechnungen verwenden wir die Ramanujan-Petersson-Vermutung für F, die von Weissauer in [23] bewiesen wurde.

Als Hauptresultat erhalten wir

Theorem. *Für $F = \Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$ gibt es von D unabhängige Konstanten C_F, so daß Gleichung* (0.2) *(d.h. dieBöcherer Vermutung)* numerisch *richtig ist für $D = -3, -, 4-7, -8$ auf mindestens* 5 *Stellen.*

Im Anhang und auf der beiliegenden CD sind einige Fourierkoeffizienten und Eigenwerte der Modulformen $\Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$ angegeben.

Die Reihendarstellung in §2.1, Proposition 2.1 auf Seite 71 ist der einzige Teil dieser Arbeit, der nicht allein vom Autor stammt.
Die Berechnungen aus §2 sind bereits als Preprint erhältlich [16].

Sehr herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. W. Kohnen für seine Anregungen, Kommentare und Verbesserungsvorschläge zu dieser Arbeit. Besonderer Dank gebührt auch meiner Freundin Anke, die viele Tippfehler entdeckt hat, und mich durch ihre zauberhafte Art immer wieder aufs Neue motiviert hat.

§1. Die Dirichletreihe $\mathbb{D}_{f,g}(s)$

§1.1. Einführende Bemerkungen

Seien $\mathbb{H}_n$ der Siegelsche Halbraum vom Grad n und $\Gamma_n := \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Z})$ die Siegelsche Modulgruppe vom Grad n. Jedes $f \in S_k(\Gamma_n)$ besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$f(Z) = \sum_{T>0} a_f(T) e^{2\pi i \,\mathrm{tr}(TZ)},$$

wobei T alle positiv definiten halbganzen $(n\times)$-Matrizen durchläuft, und $a_f(T)$ die komplexen Fourierkoeffizienten von f sind.
Von nun an sei $n \geqslant 2$. Wir betrachten dann die Zerlegung

$$Z = \begin{pmatrix} Z_1 & w \\ w' & z \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} T_1 & \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda' & m \end{pmatrix},$$

wobei der Index 1 jeweils den oberen linken $(n-1)\times(n-1)$ Block der zugehörigen Matrix bezeichnet. Die Fourier-Jacobi Entwicklung von f lautet

$$f(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(Z_1, w) e^{2\pi i m z}, \tag{1.1}$$

wobei

$$f_m(Z_1, w) = \sum_{\substack{T_1>0,\ \lambda\in\mathbb{Z}^{(n-1,1)} \\ \begin{pmatrix} T_1 & \frac{1}{2}\lambda \\ \frac{1}{2}\lambda' & m \end{pmatrix} > 0}} a_f(T) e^{2\pi i(\mathrm{tr}(T_1 Z_1) + \lambda' w)}.$$

Die Funktionen f_m sind holomorph auf $\mathbb{H}_{n-1} \times \mathbb{C}^{(n-1,1)}$. Aus dem Transformationsverhalten von f unter

$$\left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \mu \\ \lambda' & I & \mu' & \kappa \\ \hline & & I & -\lambda \\ & & & I \end{array}\right) \in \Gamma_n \quad \text{mit } \lambda, \mu \in \mathbb{Z}^{(n-1,1)}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

und

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A & & B & \\ & 1 & & \\ \hline C & & D & \\ & & & 1 \end{array}\right) \in \Gamma_n \quad \text{mit} \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{n-1}$$

ergibt sich ein bestimmtes Transformationsverhalten für f_m. Dieses Transformationsverhalten kann besonders einfach beschrieben werden mit Hilfe der Operation der Jacobigruppe auf $\mathbb{H}_{n-1} \times \mathbb{C}^{(n-1,1)}$. In dieser Terminologie ist f_m eine Jacobi Spitzenform vom Grad $n-1$, Gewicht k und Index m (vgl. [11, 12, 24, 26]).

Den Realteil von Z bezeichnen wir mit X, den Imaginärteil mit Y. Ferner seien

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & u \\ u' & x \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Y = \begin{pmatrix} Y_1 & v \\ v' & y \end{pmatrix},$$

wobei der Index 1 wieder den oberen linken $(n-1) \times (n-1)$ Block bezeichnet.

Ist $\mathcal{F}_n$ der Siegelsche Fundamentalbereich für die Aktion von Γ_n auf $\mathbb{H}_n$ [9], dann ist ein Fundamentalbereich für die Aktion der Jacobigruppe auf $\mathbb{H}_{n-1} \times \mathbb{C}^{(n-1,1)}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_n^* = \big\{(Z_1, w) \mid Z_1 \in \mathcal{F}_{n-1},\ w = u + iv,\ v \in \mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)} \\ |u_j| \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ für } 1 \leqslant j \leqslant n-1,\ u_1 \geqslant 0\big\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Für zwei Spitzenformen $f, g \in S_k(\Gamma_n)$ ist das Petersson Skalarprodukt der Fourier-Jacobi Koeffizienten f_m, g_m definiert durch

$$\langle f_m, g_m \rangle := \int_{\mathcal{F}_n^*} f_m(Z_1, w)\overline{g_m(Z_1, w)}(\det Y_1)^k e^{-4\pi m Y_1^{-1}[v]} \mathrm{d}v_n^*, \tag{1.3}$$

wobei $\mathrm{d}v_n^* = (\det Y_1)^{-n-1}\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ das invariante Volumenelement bezeichnet.

Ist χ ein Dirichlet Charakter modulo N, dann betrachten wir die Dirichletreihe

$$D_{f,g}(s, \chi) := L(2s - 2k + 2n, \chi^2) \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m)\langle f_m, g_m \rangle m^{-s}, \tag{1.4}$$

die absolut konvergiert für $\mathrm{Re}(s) > k+1$ [14, 17, 25]. Dabei ist

$$L(s,\chi^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi^2(m)}{m^s} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1) \tag{1.5}$$

die gewöhnliche Dirichlet L-Reihe zum Charakter χ^2.

Mit G_χ bezeichnen wir die zum Dirichlet Charakter χ gehörige Gaußsumme

$$G_\chi := \sum_{\nu(N)} \chi(\nu) e^{2\pi i \frac{\nu}{N}}, \tag{1.6}$$

dabei durchläuft ν ein beliebiges Repräsentantensystem für $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$.

Wir setzen

$$\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi) := \left(\tfrac{2\pi}{N}\right)^{-2s} \Gamma(s)\Gamma(s-k+n) D_{f,g}(s,\chi). \tag{1.7}$$

Ist χ nicht gleich dem trivialen Charakter modulo N, dann besitzt $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ eine holomorphe, und falls χ gleich dem trivialen Charakter ist, zumindest eine meromorphe Fortsetzung für alle $s \in \mathbb{C}$ (Theorem 1 in [15, Section 5]; Theorem 1.26 in §1.6 auf Seite 67 in dieser Arbeit).

Ziel dieses Kapitels ist es, zu beweisen, daß

$$\mathbb{D}_{f,g}(2k-n-s,\chi) = \left(\tfrac{G_\chi}{\sqrt{N}}\right)^4 \mathbb{D}_{f,g}(2k-n-s,\overline{\chi}) \tag{1.8}$$

gilt, wenn χ primitiv modulo N ($N>1$) ist (Theorem 1.27 in §1.7 auf Seite 69). Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß außer χ auch χ^2 primitiv modulo N ist, wurde die Funktionalgleichung (1.8) bereits in [15] gezeigt. In diesem Kapitel wird der dort gegebene Beweis so verallgemeinert, daß auf die Voraussetzung χ^2 primitiv verzichtet werden kann.

In §1.2 führen wir einige Untergruppen von Γ_n ein. Auf diesen Untergruppen definieren wir in §1.4 gewisse nicht-holomorphe Eisensteinreihen. Mit Hilfe dieser Eisensteinreihen und einem Dirichlet-Twist von f, den wir in §1.3 untersuchen, können wir in §1.5 verschiedene Integraldarstellungen für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ angeben. Dazu stellen wir $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ im wesentlichen als Skalarprodukt zwischen dem Produkt des Dirichlet-Twists von f aus §1.3 mit einer Eisensteinreihe aus §1.4 und g dar. Aus der Fortsetzbarkeit und dem Wachstumsverhalten der Eisensteinreihe leiten wir in §1.6 aus einer dieser Integraldarstellungen die Fortsetzbarkeit von $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ ab. Schließlich ergibt sich in §1.7 die Funktionalgleichung für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ aus den Integraldarstellungen in §1.5 und einer Funktionalgleichung der Eisensteinreihen aus §1.4.

Ist χ^2 primitiv vorausgesetzt, dann ist die Funktionalgleichung der Eisensteinreihen aus §1.4 derart, daß unter $s \mapsto n - s$ eine Eisensteinreihe in eine andere übergeführt wird. Ist χ^2 dagegen nicht primitiv, dann wird bei $s \mapsto n - s$ eine Eisensteinreihe in eine Summe von mehreren Eisensteinreihen übergeführt. Deshalb müssen wir in §1.5 im Vergleich zum Beweis in [15] zusätzliche Skalarprodukte ausrechnen, um die Funktionalgleichung für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ aus der Integraldarstellung ableiten zu können. Die Berechnungen dieser zusätzlichen Skalarprodukte ist wesentlich verwickelter als die Berechnung der Skalarprodukte für den Fall, daß χ^2 primitiv ist.

§1.2. Untergruppen von Γ_n

In diesem Abschnitt werden die Resultate aus [15, Section 3] verallgemeinert.

Im folgenden zerlegen wir eine $(2n \times 2n)$-Matrix M in

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.9}$$

mit $(n \times n)$-Matrizen A, B, C, D, die selbst wiederum zerlegt sind in

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & a_1 \\ a_2' & \alpha \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} B_1 & b_1 \\ b_2' & \beta \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} C_1 & c_1 \\ c_2' & \gamma \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} D_1 & d_1 \\ d_2' & \delta \end{pmatrix},$$

wobei $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ Skalare sind.

Im folgenden sei $\kappa \in \mathbb{N}$ stets ein Teiler von $N \in \mathbb{N}$.

Mit Hilfe der Blockzerlegung (1.9) definieren wir

$$\Gamma_{n,1}\big(N, \tfrac{N^2}{\kappa}\big) := \Big\{ M \in \Gamma_n \;\Big|\; c_2 \equiv d_2 \equiv 0 \; (N), \gamma \equiv 0 \; \big(\tfrac{N^2}{\kappa}\big) \Big\} \tag{1.10}$$

und

$$\Gamma^1_{n,1}\big(N, \tfrac{N^2}{\kappa}\big) := \Big\{ M \in \Gamma_n \;\Big|\; c_2 \equiv d_2 \equiv 0 \; (N), \gamma \equiv 0 \; \big(\tfrac{N^2}{\kappa}\big), \delta^2 \equiv 1 \; (N) \Big\}. \tag{1.11}$$

Außerdem seien

$$J := \left(\begin{array}{cc|cc} & & I & \\ & & & 1 \\ \hline -I & & & \\ & -1 & & \end{array}\right) \in \Gamma_n, \quad W_N := \left(\begin{array}{cc|cc} & & I & \\ & & & \frac{1}{N} \\ \hline -I & & & \\ & -N & & \end{array}\right) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q}), \tag{1.12}$$

wobei $I := I_{n-1}$ die Einheitsmatrix der Größe $(n-1) \times (n-1)$ bezeichnet. Ferner seien für $q, r \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$

$$M_r := \left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & 1 & & r \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q}) \text{ und } \mathcal{D}_q := \left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & q & & \\ \hline & & I & \\ & & & \frac{1}{q} \end{array}\right) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q}). \tag{1.13}$$

Lemma 1.1.

(i) *Zerlegt man $M \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ gemäß (1.9), so gelten*

$$a_1 \equiv c_1 \equiv 0\ (N) \quad \textit{und} \quad \alpha\delta \equiv 1\ (N).$$

(ii) *$\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ ist eine Untergruppe von Γ_n. Sind $M, \tilde{M} \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ und $\hat{M} = M\tilde{M}$ wie in (1.9) zerlegt, dann gilt $\hat{\delta} \equiv \delta\tilde{\delta}\ (N)$.*

(iii) $W_N \Gamma_{n,1}(N, N^2) W_N^{-1} = \Gamma_{n,1}(N, N^2)$.

(iv) *$\Gamma^1_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ ist eine Untergruppe von $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$.*

(v) $M'_N \Gamma^1_{n,1}(N, N^2) {M'_N}^{-1} = \Gamma^1_{n,1}(N, N^2)$.

(vi) *Ist χ ein Dirichlet Charakter modulo N, dann definiert χ durch*

$$\chi(M) := \chi(\delta) \quad \textit{für} \quad M \in \Gamma_{n,1}\big(N, \tfrac{N^2}{\kappa}\big)$$

einen Charakter auf $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$.
Ferner gilt für $M \in \Gamma_{n,1}\big(N, N^2\big)$

$$\overline{\chi}(M) = \chi(W_N M W_N^{-1}). \tag{1.14}$$

***Beweis von* (i).** Weil M symplektisch ist, gilt $I = AD' - BC'$. Modulo N erhalten wir

$$I \equiv \begin{pmatrix} A_1 & a_1 \\ a'_2 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D'_1 & 0 \\ d'_1 & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B_1 & b_1 \\ b'_2 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C'_1 & 0 \\ c'_1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & a_1\delta \\ * & \alpha\delta \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

wobei 0 jeweils eine Nullmatrix (geeigneter Größe) ist, und Matrizen, die für die weitere Rechnung nicht wichtig sind, mit einem $*$ bezeichnet werden. Aus (1.15) folgt $\alpha\delta \equiv 1\ (N)$, also insbesondere $(\delta, N) = 1$. Aus $a_1\delta \equiv 0\ (N)$ folgt dann $a_1 \equiv 0\ (N)$.

Weil M symplektisch ist, gilt $CD' = DC'$. Modulo N erhalten wir

$$0 \equiv \begin{pmatrix} C_1 & c_1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1' & 0 \\ d_1' & \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} D_1 & d_1 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1' & 0 \\ c_1' & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & c_1\delta \\ * & * \end{pmatrix},$$

und aus $c_1\delta \equiv 0\ (N)$ folgt wegen $(\delta, N) = 1$, daß $c_1 \equiv 0\ (N)$ gilt. ⊡

***Beweis von* (ii).** Seien $M, \tilde{M} \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ gemäß (1.9) zerlegt. Wegen Teil (i) und $\kappa \mid N$ ist dann

$$M\tilde{M} = \left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & a_1 & B_1 & b_1 \\ a_2' & \alpha & b_2' & \beta \\ \hline C_1 & c_1 & D_1 & d_1 \\ c_2' & \gamma & d_2' & \delta \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} \tilde{A}_1 & \tilde{a}_1 & \tilde{B}_1 & \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_2' & \tilde{\alpha} & \tilde{b}_2' & \tilde{\beta} \\ \hline \tilde{C}_1 & \tilde{c}_1 & \tilde{D}_1 & \tilde{d}_1 \\ \tilde{c}_2' & \tilde{\gamma} & \tilde{d}_2' & \tilde{\delta} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ \hat{c}_2' & \hat{\gamma} & \hat{d}_2' & \hat{\delta} \end{array}\right) \tag{1.16}$$

mit $\hat{c}_2 \equiv \hat{d}_2 \equiv 0\ (N)$, $\hat{\gamma} \equiv 0\ \big(\frac{N^2}{\kappa}\big)$ und $\hat{\delta} \equiv \delta\tilde{\delta}\ (N)$. Also liegt auch $M\tilde{M}$ in $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$.
Weil M symplektisch ist, gilt

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline * & * & * & * \\ -c_1' & \gamma & a_1' & \alpha \end{array}\right), \tag{1.17}$$

und mit Teil (i) folgt $M^{-1} \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$. Also ist $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ eine Untergruppe von Γ_n. ⊡

***Beweis von* (iii).** Sei $M \in \Gamma_n$ wie in (1.9) auf Seite 12 zerlegt. Wegen

$$W_N M W_N^{-1} = \left(\begin{array}{cc|cc} D_1 & Nd_1 & -C_1 & -\frac{1}{N}c_1 \\ \frac{1}{N}d_2' & \delta & -\frac{1}{N}c_2' & -\frac{1}{N^2}\gamma \\ \hline -B_1 & -Nb_1 & A_1 & \frac{1}{N}a_1 \\ -Nb_2' & -N^2\beta & Na_2' & \alpha \end{array}\right) \tag{1.18}$$

ist $W_N M W_N^{-1} \in \Gamma_n$ gleichbedeutend mit $a_1 \equiv c_1 \equiv c_2 \equiv d_2 \equiv 0\ (N)$ und $\gamma \equiv 0\ (N^2)$, also nach Teil (i) mit $M \in \Gamma_{n,1}(N, N^2)$. Demnach gilt

$$\Gamma_{n,1}(N, N^2) = \Gamma_n \cap W_N \Gamma_n W_N^{-1}.$$

Wegen $W_N^2 = -I_{2n} \in \Gamma_n$ folgt daraus

$$W_N \Gamma_{n,1}(N, N^2) W_N^{-1} = W_N \Gamma_n W_N^{-1} \cap \Gamma_n = \Gamma_{n,1}(N, N^2).$$ ⊡

***Beweis von* (iv)**. Seien $M, \tilde{M} \in \Gamma^1_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ und $\hat{M} = M\tilde{M}$ wie in (1.9) auf Seite 12 zerlegt. Nach Teil (ii) ist $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ eine Untergruppe von Γ_n, also gilt $\hat{M} \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$. Wegen $\hat{\delta} \equiv \delta\tilde{\delta}\ (N)$ ist $\hat{\delta}^2 \equiv \delta^2\tilde{\delta}^2 \equiv 1\ (N)$, und $\hat{M}$ liegt in $\Gamma^1_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$.
Ist $M \in \Gamma^1_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$, dann gilt nach Teil (i) $\alpha\delta\ (N) \equiv 1$. Aus $\delta^2 \equiv 1\ (N)$ folgt $\alpha^2 \equiv 1\ (N)$. Mit (1.17) ergibt sich dann $M^{-1} \in \Gamma^1_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$. ⊡

***Beweis von* (v)**. Sei $M \in \Gamma^1_{n,1}(N, N^2)$ wie in (1.9) auf Seite 12 zerlegt. Für $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ ist ${M'_N}^{\varepsilon} M {M'_N}^{-\varepsilon}$ gleich

$$\left(\begin{array}{cc|cc} A_1 & a_1 - N\varepsilon b_1 & B_1 & b_1 \\ a_2' & \alpha - N\varepsilon\beta & b_2' & \beta \\ \hline C_1 & c_1 - N\varepsilon d_1 & D_1 & d_1 \\ c_2' + N\varepsilon a_2' & \gamma - N^2\beta + N\varepsilon(\alpha-\delta) & d_2' + N\varepsilon b_2' & \delta + N\varepsilon\beta \end{array}\right).$$

Aus $\delta^2 \equiv 1\ (N)$ und $\alpha\delta \equiv 1\ (N)$ folgt $\alpha \equiv \delta\ (N)$. Also gilt

$${M'_N}^{\varepsilon} M {M'_N}^{-\varepsilon} \in \Gamma^1_{n,1}(N, N^2).$$

Es folgt

$${M'_N}^{\varepsilon} \Gamma^1_{n,1}(N, N^2) {M'_N}^{-\varepsilon} \subseteq \Gamma^1_{n,1}(N, N^2). \tag{1.19}$$

Für $\varepsilon = -1$ erhalten wir daraus

$$\Gamma^1_{n,1}(N, N^2) = M'_N\big({M'_N}^{-1}\Gamma^1_{n,1}(N, N^2)M'_N\big){M'_N}^{-1} \subseteq M'_N\big(\Gamma^1_{n,1}(N, N^2)\big){M'_N}^{-1}.$$

Zusammen mit (1.19) für $\varepsilon = 1$ ergibt sich

$$M'_N\Gamma^1_{n,1}(N, N^2){M'_N}^{-1} = \Gamma^1_{n,1}(N, N^2).$$ ⊡

***Beweis von* (vi)**. Aus Teil (i) folgt $(\delta, N) = 1$, also ist $\chi(M) \neq 0$.
Sind $M, \tilde{M} \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ und $\hat{M} = M\tilde{M}$ wie in (1.9) auf Seite 12 zerlegt, dann folgt aus Teil (ii), daß

$$\chi(M\tilde{M}) = \chi(\hat{\delta}) = \chi(\delta\tilde{\delta}) = \chi(\delta)\chi(\tilde{\delta}) = \chi(M)\chi(\tilde{M})$$

gilt. Also definiert χ einen Charakter auf $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$.
Für $M \in \Gamma_{n,1}(N, N^2)$ gilt nach Teil (i) $\alpha\delta \equiv 1\ (N)$. Wegen (1.18) erhalten wir

$$\chi(W_N M W_N^{-1}) = \chi(\alpha) = \chi(\alpha\delta)\overline{\chi}(\delta) = \overline{\chi}(\delta) = \overline{\chi}(M).$$ ⊡

Lemma von Gauß für Γ_n. *Zu jeder primitiven Zeile $\lambda \in \mathbb{Z}^{(1,2n)}$, gibt es eine Matrix $M \in \Gamma_n$ mit letzter Zeile λ.*

Obwohl das Lemma von Gauß allgemein bekannt ist (z.B. [9]), geben wir hier folgenden kurzen Beweis.

Beweis. Für $n = 1$ ist die Behauptung offensichtlich erfüllt.
Sei $n > 1$. Wir setzen $g := (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n-1})$ und $h := (\lambda_n, \lambda_{2n})$.
Wegen $\left(\frac{\lambda_n}{h}, \frac{\lambda_{2n}}{h}\right) = 1$ und $(g, h) = 1$ gibt es $\alpha, \beta, \mu, \nu \in \mathbb{Z}$ mit

$$\alpha\tfrac{\lambda_{2n}}{h} - \beta\tfrac{\lambda_n}{h} = 1 \quad \text{und} \quad \mu h - \nu g = 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix} A_\lambda & B_\lambda \\ C_\lambda & D_\lambda \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{n-1}$ mit letzter Zeile $\left(\frac{\lambda_1}{g}, \dots, \frac{\lambda_{n-1}}{g}, \frac{\lambda_{n+1}}{g}, \dots, \frac{\lambda_{n-1}}{g}\right)$ und $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda, D_\lambda \in \mathbb{Z}^{(n-1,n-1)}$.
Dann ist

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} I_{n-2} & & & & & \\ & h & -g & & & \\ & -\nu & \mu & & & \\ \hline & & & I_{n-2} & & \\ & & & & \mu & \nu \\ & & & & g & h \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & \alpha & & \beta \\ \hline & & I & \\ & \frac{\lambda_n}{h} & & \frac{\lambda_{2n}}{h} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} A_\lambda & & B_\lambda & \\ & 1 & & \\ \hline C_\lambda & & D_\lambda & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

eine Matrix in Γ_n mit letzter Zeile λ. $\square$

Für die Berechnung der Skalarprodukte in §1.5 brauchen wir

Lemma 1.2. *Seien ν und t Teiler von N. Wählt man zu jeder Zeile*

$$\left(Nc_2{}',\ \tfrac{N^2}{t}\gamma,\ Nd_2{}',\ 1\right) \quad \text{mit} \quad c_2, d_2 \in (\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z})^{(n-1,1)},\ \gamma \in (\mathbb{Z}/t\nu^2\mathbb{Z}) \tag{1.20}$$

eine Matrix $M_{c_2,\gamma,d_2} \in \Gamma_n$, die (1.20) als letzte Zeile hat, dann bilden alle Matrizen M_{c_2,γ,d_2} ein Vertretersystem für die Nebenklassen von

$$\Gamma_{n,1}\left(N\nu, (N\nu)^2\right)\backslash\Gamma_{n,1}\left(N, \tfrac{N^2}{t}\right). \tag{1.21}$$

Insbesondere gilt

$$\left[\Gamma_{n,1}\left(N, \tfrac{N^2}{t}\right) : \Gamma_{n,1}\left(N\nu, (N\nu)^2\right)\right] = t\nu^{2n}. \tag{1.22}$$

Korollar 1.2.1. *Ist ν ein Teiler von N, dann gelten*

$$\left[\Gamma_{n,1}(N,N\nu):\Gamma_{n,1}\big(N\nu,(N\nu)^2\big)\right]=N\nu^{2n-1}$$

und

$$\left[\Gamma_{n,1}(N,N\nu):\Gamma_{n,1}(N,N^2)\right]=\tfrac{N}{\nu}.$$

***Beweis von Korollar* 1.2.1**. Die erste Gleichung erhält man aus Lemma 1.2, wenn man dort t durch $\frac{N}{\nu}$ ersetzt. Die zweite Gleichung ergibt sich, wenn in Lemma 1.2 ν und t durch 1 und $\frac{N}{\nu}$ ersetzt werden. $\boxdot$

Korollar 1.2.2. *Sei ν ein Teiler von N. Zu jedem Teiler d von ν und jeder primitiven Zeile $\lambda\in\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)}$ sei eine Matrix $\left(\begin{smallmatrix}A_\lambda & B_\lambda\\ C_\lambda & D_\lambda\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_{n-1}$ mit $A_\lambda,B_\lambda,C_\lambda,D_\lambda\in\mathbb{Z}^{(n-1,n-1)}$ und letzter Zeile λ gewählt. Ferner sei für $\beta\in\mathbb{Z}$*

$$\mathcal{M}_{d,\beta}:=\left(\begin{array}{cc|cc} I & -Nd\mathfrak{e} & & \\ & 1 & & \\ \hline & & I & \\ & N\nu\beta & Nd\mathfrak{e}' & 1 \end{array}\right)\quad \textit{und}\quad \mathcal{M}_\lambda:=\left(\begin{array}{cc|cc} A_\lambda & & B_\lambda & \\ & 1 & & \\ \hline C_\lambda & & D_\lambda & \\ & & & 1 \end{array}\right) \tag{1.23}$$

gesetzt, wobei $\mathfrak{e}=(0,\dots,0,1)'\in\mathbb{Z}^{(n-1,1)}$.
Durchläuft d alle Teiler von ν, λ alle primitiven Zeilen in $\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)}$ und β ein Vertretersystem für $(\mathbb{Z}/N\nu\mathbb{Z})$, dann durchlaufen die Matrizen $\mathcal{M}_{d,\beta}\cdot\mathcal{M}_\lambda$ ein Vertretersystem für $\Gamma_{n,1}\big(N\nu,(N\nu)^2\big)\backslash\Gamma_{n,1}(N,N\nu)$.

***Beweis von Korollar* 1.2.2**. Die letzte Zeile von $\mathcal{M}_{d,\beta}\cdot\mathcal{M}_\lambda\in\Gamma_n$ ist

$$(Nd\lambda_1,\dots,Nd\lambda_{n-1},\ N\nu\beta,\ Nd\lambda_n,\dots,Nd\lambda_{2n-2},\ 1).$$

Wenn d alle Teiler von ν, λ alle primitiven Zeilen in $\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)}$ und β ein Vertretersystem für $(\mathbb{Z}/N\nu\mathbb{Z})$ durchlaufen, dann durchlaufen die letzten Zeilen von M alle Zeilen der Form (1.20) mit $t=\frac{N}{\nu}$. $\boxdot$

***Beweis von Lemma* 1.2**. Sei $\tilde{M}$ ein Repräsentant einer Nebenklasse von (1.21). $\tilde{M}$ sei wie in (1.9) auf Seite 12 zerlegt. Nach Lemma 1.1(i) auf Seite 13 gilt $(\delta,N)=1$. Wegen $\nu\mid N$ gilt dann auch $(\delta,N\nu)=1$. Weil die letzte Spalte von $\tilde{M}$ primitiv ist, ist auch

$$\begin{pmatrix} N\nu\tilde{b}_1\\ (N\nu)^2\tilde{\beta}\\ N\nu\tilde{d}_1\\ \delta\end{pmatrix}$$

eine primitive Spalte. Also gibt es $\hat{c}_2, \hat{d}_2 \in \mathbb{Z}^{(n-1,1)}$ und $\hat{\gamma}, \hat{\delta} \in \mathbb{Z}$ mit

$$1 = \begin{pmatrix} \hat{c}_2{}' & \hat{\gamma} & \hat{d}_2{}' & \hat{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N\nu\tilde{b}_1 \\ (N\nu)^2\tilde{\beta} \\ N\nu\tilde{d}_1 \\ \tilde{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N\nu\hat{c}_2{}' & (N\nu)^2\hat{\gamma} & N\nu\hat{d}_2{}' & \hat{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{d}_1 \\ \tilde{\delta} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, daß $\begin{pmatrix} N\nu\hat{c}_2{}' & (N\nu)^2\hat{\gamma} & N\nu\hat{d}_2{}' & \hat{\delta} \end{pmatrix}$ eine primitive Zeile ist. Nach dem Lemma von Gauß gibt es eine Matrix $\hat{M} \in \Gamma_{n,1}\big(N\nu, (N\nu)^2\big)$, die genau diese Zeile als letzte Zeile hat. Ersetzen wir $\tilde{M}$ durch $\hat{M}\tilde{M}$, dann dürfen wir annehmen, daß $\tilde{\delta} = 1$ gilt.

Wegen $\tilde{M} \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{t}\big)$ können wir $c_2, d_2 \in (\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z})^{(n-1,1)}$ und $\gamma \in (\mathbb{Z}/t\nu^2\mathbb{Z})$ wählen mit

$$\begin{aligned} &Nc_2 \equiv \tilde{c}_2 \pmod{N\nu}, \quad Nd_2 \equiv \tilde{d}_2 \pmod{N\nu} \quad \text{und} \\ &\tfrac{N^2}{t}\gamma \equiv \tilde{\gamma} + (\tilde{c}_2{}' - Nc_2{}')\tilde{d}_2 - (\tilde{d}_2{}' - Nd_2{}')\tilde{c}_2 \pmod{(N\nu)^2}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Wegen $\tilde{M}\tilde{M}^{-1} = I_{2n}$ und

$$\begin{pmatrix} Nc_2{}' & \frac{N^2}{t}\gamma & Nd_2{}' & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \tilde{c}_2{}' & \tilde{\gamma} & \tilde{d}_2{}' & 1 \end{pmatrix} \pmod{N}$$

gilt

$$\begin{pmatrix} Nc_2{}' & \frac{N^2}{t}\gamma & Nd_2{}' & 1 \end{pmatrix} \tilde{M}^{-1} \equiv (0, \ldots, 0, 1) \pmod{N}. \tag{1.25}$$

Aus (1.24) folgt

$$\begin{pmatrix} Nc_2{}' & \frac{N^2}{t}\gamma & Nd_2{}' & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{d}_2 \\ 1 \\ -\tilde{c}_2 \\ -\tilde{\gamma} \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{(N\nu)^2}. \tag{1.26}$$

Aus $\tilde{M}\tilde{M}^{-1} = I_{2n}$ und

$$\tilde{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{D}' & -\tilde{B}' \\ -\tilde{C}' & \tilde{A}' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} * & \tilde{d}_2 & * & * \\ * & 1 & * & * \\ \hline * & -\tilde{c}_2 & * & * \\ * & -\tilde{\gamma} & * & * \end{array}\right)$$

erhalten wir zusammen mit (1.25) und (1.26), daß

$$M_{c_2,\gamma,d_2}\tilde{M}^{-1} \in \Gamma_{n,1}\big(N\nu, (N\nu)^2\big)$$

gilt. M_{c_2,γ,d_2} und $\tilde{M}$ liegen also beide in derselben Nebenklasse, und in jeder Nebenklasse gibt es einen Vertreter der Form M_{c_2,γ,d_2}.

Zu zeigen bleibt noch, daß verschiedene M_{c_2,γ,d_2} in verschiedenen Nebenklassen liegen. Sei also $M \in \Gamma_{n,1}(N\nu, \big(N\nu)^2\big)$ mit

$$MM_{c_2,\gamma,d_2} = M_{\tilde{c}_2,\tilde{\gamma},\tilde{d}_2} \quad \text{und} \quad c_2, d_2, \tilde{c}_2, \tilde{d}_2 \in (\mathbb{Z}/\nu\mathbb{Z})^{(n-1,1)},\ \gamma, \tilde{\gamma} \in (\mathbb{Z}/t\nu^2\mathbb{Z}).$$

Wegen $MM_{c_2,\gamma,d_2} = M_{\tilde{c}_2,\tilde{\gamma},\tilde{d}_2}$ muß der $(2n, 2n)$-te Eintrag von MM_{c_2,γ,d_2} gleich 1 sein. Daraus ergibt sich, daß der $(2n, 2n)$-te Eintrag von M kongruent 1 modulo $N\nu$ ist. Demnach ist die letzte Zeile von M modulo $N\nu$ kongruent zu $(0, \ldots, 0, 1)$, woraus $c_2 = \tilde{c}_2$ und $d_2 = \tilde{d}_2$ folgen.

Aus $MM_{c_2,\gamma,d_2} = M_{\tilde{c}_2,\tilde{\gamma},\tilde{d}_2}$ ergibt sich wegen $M \in \Gamma_{n,1}(N\nu, \big(N\nu)^2\big)$, daß der $(2n, n)$-te Eintrag von $M_{\tilde{c}_2,\tilde{\gamma},\tilde{d}_2}M^{-1}_{c_2,\gamma,d_2}$ kongruent 0 modulo $(N\nu)^2$ ist. Daraus folgt wegen $c_2 = \tilde{c}_2$ und $d_2 = \tilde{d}_2$, daß $\gamma = \tilde{\gamma}$ gilt.

Weil es genau $(\nu^{n-1})^2 t\nu^2 = t\nu^{2n}$ verschiedene Matrizen M_{c_2,γ,d_2} gibt, erhalten wir (1.22) auf Seite 16. ☺

§1.3. Twists Siegelscher Modulformen

Definition 1.3. Ist $f \in S_k(\Gamma_n)$ mit Fourier-Jacobi Entwicklung

$$f(Z) = \sum_{m=1}^{\infty} f_m(Z_1, w)e^{2\pi imz},$$

und ist χ ein Dirichlet Charakter modulo N, dann definieren wir

$$f_\chi(Z) := \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) f_m(Z_1, w)e^{2\pi imz}. \tag{1.27}$$

Im folgenden verwenden wir die von Petersson eingeführte Schreibweise

$$(F|_r M)(Z) := \det(CZ + D)^{-r} F\big(M\langle Z\rangle\big) \tag{1.28}$$

mit

$$M\langle Z\rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \tag{1.29}$$

für eine Funktion $F : \mathbb{H}_n \to \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{Z}$ und $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ wie in (1.9) auf Seite 12 zerlegt. Sind $M_1, M_2 \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$, dann gilt (siehe [9])

$$f|_r(M_1M_2) = \big(f|_rM_1\big)\big|_r M_2.$$

Proposition 1.4. *Es gilt*

$$f_\chi(Z) = \tfrac{1}{N} \sum_{\nu(N)} \sum_{\mu(N)} \chi(\nu) e^{-2\pi i\mu\nu/N} f|_k M_{\mu/N}.$$

Die Funktion f_χ ist eine holomorphe Siegelsche Spitzenform vom Gewicht k bezüglich $\Gamma_{n,1}(N, N^2)$ mit Charakter χ^2.

Beweis. Siehe [15, Section 3, Proposition 1].

Korollar 1.4.1. *Ist χ primitiv modulo N, dann gilt*

(i) $f_\chi = \frac{1}{G_{\overline{\chi}}} \sum_{\mu(N)} \overline{\chi}(\mu) f|_k M_{\mu/N}$,

(ii) $f_\chi|_k W_N = \frac{G_\chi^2}{N} f_{\overline{\chi}}$.

Wir reproduzieren hier die Beweise aus [15, Section 3, Corollary 1], die auch für $N = 1$ korrekt sind, in [15] allerdings nur für $N > 1$ geführt werden.

***Beweis von Teil* (i).** Weil χ primitiv ist, gelten (siehe [3, Chapter 8])

$$\sum_{\nu(N)} \chi(\nu) e^{-2\pi i\mu\nu/N} = \overline{\chi}(-\mu) G_\chi \qquad \text{und} \qquad G_\chi G_{\overline{\chi}} = \chi(-1)N.$$

Mit Proposition 1.4 ergibt sich daraus die Behauptung.

***Beweis von Teil* (ii).** In der Summe in Korollar 1.4.1(i) genügt es, über $\mu \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ zu summieren. Zu jedem solchen μ können wir ein $\mu^* \in \mathbb{Z}$ wählen mit $\mu\mu^* \equiv 1(N)$. Wegen

$$M_{\mu/N} W_N M_{\mu^*/N} = \left(\begin{array}{cc|cc} & & I & \\ & -\mu & & \frac{1-\mu\mu^*}{N} \\ \hline -I & & & \\ & -N & & -\mu^* \end{array}\right) \in \Gamma_n$$

erhalten wir aus Teil (i)

$$f_\chi|_k W_N = \tfrac{1}{G_{\overline{\chi}}} \sum_{\mu(N)^\times} \overline{\chi}(\mu) f|_k M_{\mu/N} W_N = \tfrac{1}{G_{\overline{\chi}}} \sum_{\mu(N)^\times} \overline{\chi}(\mu) f|_k (M_{\mu^*/N})^{-1}$$

$$= \frac{1}{G_{\overline{\chi}}} \sum_{\mu(N)^\times} \overline{\chi}(\mu) f|_k M_{-\mu^*/N} = \frac{\chi(-1)}{G_{\overline{\chi}}} \sum_{\mu(N)^\times} \chi(-\mu^*) f|_k M_{-\mu^*/N}$$

$$= \frac{\chi(-1)}{G_{\overline{\chi}}} \sum_{\mu(N)^\times} \chi(\mu) f|_k M_{\mu/N} = \frac{\chi(-1) G_\chi}{G_{\overline{\chi}}} f_{\overline{\chi}} = \frac{G_\chi^2}{N} f_{\overline{\chi}},$$

dabei zeigt der Summationsindex $\mu(N)^\times$ an, daß μ ein beliebiges Vertretersystem für $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$ durchläuft. ⌻

Definition 1.5. Seien χ ein Dirichlet Charakter modulo N und p eine Primzahl. Mit $\mathrm{v}_p(N)$ bezeichnen wir den p-Exponenten von N, also die eindeutig bestimmte nicht negative ganze Zahl mit

$$p^{\mathrm{v}_p(m)} \mid N \quad \text{und} \quad p^{\mathrm{v}_p(m)+1} \nmid N.$$

Wir schreiben N als $N = N_1 p^{\mathrm{v}_p(N)}$. Dann ist $\chi = \chi_1 \chi_2$ mit Dirichlet Charakteren χ_1 modulo N_1 und χ_2 modulo $p^{\mathrm{v}_p(N)}$. Wir nennen χ_2 den *p-Anteil* von χ.

Das folgende Lemma benutzen wir in §1.5, um das Verschwinden gewisser Skalarprodukte zu zeigen.

Lemma 1.6. *Seien χ ein Dirichlet Charakter modulo N und p ein Primteiler von N. Ist der p-Anteil von χ primitiv, dann gilt*

$$\sum_{\nu(p)} f_\chi|_k M'_{N^2\nu/p} = 0.$$

Für den Beweis von Lemma 1.6 benötigen wir

Lemma 1.7. *Ist χ ein primitiver Dirichlet Charakter modulo N, und ist $m \in \mathbb{N}$ mit $N \nmid m$, dann gibt es ein $\varrho \in \mathbb{Z}$ mit $(\varrho, N) = 1$, $\varrho \equiv 1\ (m)$ und $\chi(\varrho) \neq 1$.*

***Beweis von Lemma* 1.7**. Wegen $N \nmid m$ gibt es eine Primzahl p mit

$$\alpha := \mathrm{v}_p(N) > \beta := \mathrm{v}_p(m).$$

Der Dirichlet Charakter χ kann dann geschrieben werden als Produkt zweier primitiver Dirichlet Charaktere χ_1 modulo p^α und χ_2 modulo $\frac{N}{p^\alpha}$. Wegen $\left(p, \frac{m}{p^\beta} \frac{N}{p^\alpha}\right) = 1$ gibt es ein $p^* \in \mathbb{Z}$ mit $pp^* \equiv 1 \left(\frac{m}{p^\beta} \frac{N}{p^\alpha}\right)$.

Zunächst zeigen wir, daß es ein $r \in \mathbb{Z}$ gibt mit $r \equiv 1\ (p^{\alpha-1})$ und $\chi_1(r) \neq 1$. Ist $\alpha = 1$, dann gibt es ein solches r, denn χ_1 ist primitiv. Betrachten wir also den Fall, daß $\alpha \geqslant 2$ gilt. Angenommen, es gäbe kein solches r. Für beliebiges $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,p) = 1$ gibt es ein $a^* \in \mathbb{Z}$ mit $aa^* \equiv 1(p)$. Wegen $\alpha \geqslant 2$ und $\chi_1(-a^*p^{\alpha-1}+1) = 1$ gilt dann

$$\begin{aligned}\chi_1(a+p^{\alpha-1}) &= \chi_1(-a^*p^{\alpha-1}+1)\chi(a+p^{\alpha-1})\\ &= \chi_1\Big((-a^*p^{\alpha-2} - \tfrac{aa^*-1}{p})p^\alpha + a\Big)\\ &= \chi_1(a).\end{aligned}$$

Für $a \in \mathbb{Z}$ mit $(a,p) \neq 1$ gilt $\chi_1(a+p^{\alpha-1}) = 0 = \chi_1(a)$. Also besitzt dann χ_1 die Periode $p^{\alpha-1}$. Dies steht im Widerspruch dazu, daß χ_1 primitiv ist. Demnach gibt es ein $r \in \mathbb{Z}$ mit $r \equiv 1\ (p^{\alpha-1})$ und $\chi_1(r) \neq 1$.

Wir setzen

$$\varrho := r + (pp^*)^\alpha(1-r).$$

Offensichtlich gilt $\varrho \equiv r\ (p^\alpha)$, also insbesondere $\varrho \equiv 1\ (p^{\alpha-1})$ und $\varrho \equiv 1\ (p^\beta)$. Aus der Definition von p^* folgt $\varrho \equiv 1\ \left(\frac{m}{p^\beta}\frac{N}{p^\alpha}\right)$. Es folgt $\varrho \equiv 1(m)$.

Wegen $\varrho \equiv r\ (p^\alpha)$ und $\varrho \equiv 1\ \left(\frac{N}{p^\alpha}\right)$ gilt $\chi(\varrho) = \chi_1(r)\chi_2(1) \neq 1$, und ϱ hat die geforderten Eigenschaften. ⊡

***Beweis von Lemma* 1.6**. Wegen

$$W_N^2 = -I_{2n} \quad \text{und} \quad W_N M'_{N^2\nu/p} = M_{-\nu/p}W_N$$

gilt nach Korollar 1.4.1 auf Seite 20

$$\begin{aligned}\sum_{\nu(p)} f_\chi|_k M'_{N^2\nu/p} &= \tfrac{G_{\chi^2}}{N}\sum_{\nu(p)} f_{\overline{\chi}}|_k(W_N M'_{N^2\nu/p})\\ &= \tfrac{G_\chi}{N}\sum_{\nu(p)}\sum_{\mu(N)}\chi(\mu) f|_k(M_{\mu/N}M_{-\nu/p}W_N)\\ &= \tfrac{G_\chi}{N}\sum_{\nu(p)}\sum_{\mu(N)}\chi(\mu) f|_k(M_{(\mu-\nu\frac{N}{p})/N}W_N)\\ &= \tfrac{G_\chi}{N}\sum_{\nu(p)}\sum_{\mu(N)}\chi\big(\mu+\nu\tfrac{N}{p}\big) f|_k(M_{\mu/N}W_N).\end{aligned}$$

Wir schreiben χ als $\chi = \chi_1\chi_2$ mit Dirichlet Charakteren χ_1 modulo $p^{\mathrm{v}_p(N)}$ und χ_2 modulo $\frac{N}{p^{\mathrm{v}_p(N)}}$. Wegen $\mathrm{v}_p(N) \geqslant 1$ erhalten wir dann

$$\sum_{\nu(p)} f_\chi|_k M'_{N^2\nu/d} = \frac{G_\chi}{N} \sum_{\mu(N)} \sum_{\nu(p)} \chi_1\big(\mu + \nu\tfrac{N}{p}\big)\chi_2(\mu) f|_k(M_{\mu/N}W_N).$$

Nach Voraussetzung ist χ_1 primitiv. Also gibt es nach Lemma 1.7 ein $\varrho \in \mathbb{Z}$ mit $\varrho \equiv 1 \ \big(\frac{N}{p}\big)$, $(\varrho, p) = 1$ und $\chi_1(\varrho) \neq 1$. Für die innere Summe in der letzten Gleichung erhalten wir

$$\chi_1(\varrho) \sum_{\nu(p)} \chi_1\big(\mu + \nu\tfrac{N}{p}\big) = \sum_{\nu(p)} \chi_1\Big(\mu + \big(\varrho\nu + \mu\tfrac{\varrho-1}{N/p}\big)\tfrac{N}{p}\Big) = \sum_{\nu(p)} \chi_1\big(\mu + \nu\tfrac{N}{p}\big).$$

Wegen $\chi_1(\varrho) \neq 1$ verschwindet die letzte Summe, und wir erhalten die Behauptung. ⊡

§1.4. Eisensteinreihen auf $\boldsymbol{\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)}$

In diesem Abschnitt verallgemeinern wir die Resultate aus [15, Section 4].

$\Gamma_{n,1}$ sei die Gruppe aller Matrizen aus Γ_n mit letzter Zeile $(0, \dots, 0, 1)$.

Definition 1.8. Zu einem Dirichlet Charakter χ modulo N definieren wir eine Klingen-Eisensteinreihe auf $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ durch

$$E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z, s) := \sum_{M \in \Gamma_{n,1}\backslash\Gamma_{n,1}\left(N, \frac{N^2}{\kappa}\right)} \chi(M) \left(\frac{\det \mathrm{Im}(M\langle Z\rangle)}{\det \mathrm{Im}(M\langle Z\rangle)_1}\right)^s \tag{1.30}$$

für $Z \in \mathbb{H}_n$, $s \in \mathbb{C}$ und $\mathrm{Re}(s) > n$.
Wird χ induziert durch einen Charakter χ_L modulo L, dann setzen wir

$$E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi_L}(Z, s) := E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z, s).$$

Bemerkung **1.8.1.** Ein Vertretersystem für $\Gamma_{n,1}\backslash\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ erhält man, indem man jede primitive Zeile $\lambda \in \mathbb{Z}^{(1,2n)}$ mit $(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n-1}) = N$ und $\lambda_n \equiv 0 \ \big(\frac{N^2}{\kappa}\big)$ mit Hilfe des Gaußschen Lemmas zu einer ganzzahligen symplektischen Matrix $\mathcal{M}_\lambda$ mit letzter Zeile λ ergänzt.

Beweis. Bei Linksmultiplikation mit Matrizen aus $\Gamma_{n,1}$ bleibt die letzte Zeile einer Matrix unverändert. Deshalb liegen verschiedene $\mathcal{M}_\lambda$ in verschiedenen Nebenklassen von $\Gamma_{n,1}\backslash\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$.

Sei $T \in \Gamma\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ beliebig. Die letzte Zeile von T sei λ. Wegen $\mathcal{M}_\lambda \mathcal{M}_\lambda^{-1} = I_{2n}$ gilt $\lambda \mathcal{M}_\lambda^{-1} = (0, \dots, 0, 1)$. Daraus folgt $T\mathcal{M}_\lambda^{-1} \in \Gamma_{n,1}$, also liegen T und $\mathcal{M}_\lambda$ in derselben Nebenklasse von $\Gamma_{n,1} \backslash \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$. ⍈

Proposition 1.9. *Die Reihe* $E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$ *ist wohldefiniert und konvergiert absolut für* $Z \in \mathbb{H}_n$ *und* $s \in \mathbb{C}$ *mit* $\mathrm{Re}(s) > n$. *Bei festem* s *ist* $E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)$ *eine nicht-holomorphe Modulform vom Gewicht* 0 *bezüglich* $\Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ *mit Charakter* $\overline{\chi}$, *d.h. für alle* $S \in \Gamma_{n,1}\big(N, \frac{N^2}{\kappa}\big)$ *gilt*

$$E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 S = \overline{\chi}(S) E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s).$$

Ist Γ' eine Untergruppe von Γ_n dann bezeichnen wir im folgenden mit $[\Gamma', k, \chi]$ den Vektorraum der (nicht notwendigerweise holomorphen) Siegelschen Modulformen vom Gewicht k bezüglich Γ' mit Charakter χ.

Korollar 1.9.1. *Bei festem* s *gilt* $E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_N \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2), 0, \chi\big]$.

***Beweis von Korollar* 1.9.1.** Sei $M \in \Gamma_{n,1}(N,N^2)$. Nach Lemma 1.1 auf Seite 13 gilt $W_N M W_N^{-1} \in \Gamma_{n,1}(N,N^2)$ und $\overline{\chi}(W_N M W_N^{-1}) = \chi(M)$. Also gilt

$$\begin{aligned}\big(E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_N\big)\big|_0 M &= \big(E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0(W_N M W_N^{-1})\big)\big|_0 W_N \\ &= \overline{\chi}(W_N M W_N^{-1}) E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_N \\ &= \chi(M) E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_N.\end{aligned}$$ ⍈

***Beweis von Proposition* 1.9.** Wie Krieg in [17] setzen wir

$$P_Z := \begin{pmatrix} Y & 0 \\ 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ X & I_n \end{pmatrix}\right] \tag{1.31}$$

für $Z = X + iY \in \mathbb{H}_n$. Dann ist P_Z eine reelle symplektische positiv definite Matrix, und für $M = \left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ gelten

$$P_{M<Z>} = P_Z[M'], \quad P_Z^{-1} = P_{J\langle Z\rangle} \tag{1.32}$$

und

$$\big(\mathrm{Im}(M\langle Z\rangle)\big)^{-1} = P_Z\left[\begin{pmatrix} C' \\ D' \end{pmatrix}\right]. \tag{1.33}$$

Nach der Cramerschen Regel ist der (n,n)-te Eintrag von $(\mathrm{Im}\, M\langle Z\rangle)^{-1}$ gleich

$$\frac{\det \mathrm{Im}(M\langle Z\rangle)_1}{\det \mathrm{Im}(M\langle Z\rangle)},$$

nach (1.33) gleich $P_Z[\lambda]$, wobei λ die letzte Spalte von M' bezeichnet. Wegen Bemerkung 1.8.1 auf Seite 23 gilt also

$$E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s) = \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\(\lambda_1,\dots,\lambda_{2n})=1\\(\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (N)\\ \lambda_n\equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_Z[\lambda]^{-s}, \tag{1.34}$$

und die Reihe in (1.30) ist wohldefiniert.

Die verallgemeinerte Epsteinsche ζ-Funktion zur positiv definiten Matrix P_Z ist definiert durch

$$\zeta(s,u,v,P_Z) := \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\\ \lambda+v\neq 0}} e^{2\pi i u'\lambda} P_Z[\lambda+v]^{-s} \qquad \big(u,v\in\mathbb{R}^{(2n,1)}\big). \tag{1.35}$$

Die Reihe konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s)>n$ [7, 20].

Offensichtlich ist $\zeta(\mathrm{Re}(s),0,0,P_Z)$ eine absolut konvergente Majorante für $E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$.

Wegen der absoluten Konvergenz von $E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$ gilt für $\mathrm{Re}(s)>n$

$$\begin{aligned}
E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(S\langle Z\rangle,s) &= \sum_{M\in\Gamma_{n,1}\setminus\Gamma_{n,1}\left(N,\frac{N^2}{\kappa}\right)} \chi(M)\left(\frac{\det\mathrm{Im}(M\langle S\langle Z\rangle\rangle)}{\det\mathrm{Im}(M\langle S\langle Z\rangle\rangle)_1}\right)^s\\
&= \sum_{M\in\Gamma_{n,1}\setminus\Gamma_{n,1}\left(N,\frac{N^2}{\kappa}\right)} \overline{\chi}(S)\chi(MS)\left(\frac{\det\mathrm{Im}\big((MS)\langle Z\rangle\big)}{\det\mathrm{Im}\big((MS)\langle Z\rangle\big)_1}\right)^s\\
&= \overline{\chi}(S) E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s).
\end{aligned}$$

Für $\mathrm{Re}(s)>n$ setzen wir

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s) := \pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)L(2s,\chi)E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s). \tag{1.36}$$

In §1.5 werden wir $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ im wesentlichen darstellen als Skalarprodukt zwischen $f_\chi\mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}$ und g (Proposition 1.20 auf Seite 43). Um aus der dort bewiesenen Integraldarstellung für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ die analytische Fortsetzung von $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ zu folgern, benötigen wir Aussagen über die Fortsetzbarkeit und das Wachstumsverhalten von $\mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}$.

Proposition 1.10. *Seien χ ein Dirichlet Charakter modulo N und κ ein Teiler von N.*

(i) *Ist χ nicht der triviale Charakter, dann besitzt $\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$ eine holomorphe Fortsetzung für alle $s \in \mathbb{C}$.*

(ii) *Ist χ der triviale Charakter, dann besitzt $\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$ eine meromorphe Fortsetzung für alle $s \in \mathbb{C}$, die außer einem einfachen Pol bei $s = n$ mit Residuum $\frac{\varphi(N)\kappa}{N}$ holomorph ist. Dabei bezeichnet φ die Eulersche φ-Funktion.*

In beiden Fällen gelten

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s) = \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \setminus \{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1}) \equiv 0\ (N) \\ \lambda_n \equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_Z[\lambda]^{-s} \tag{1.37}$$

und

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s) = N^{-2s} \sum_{\substack{\alpha,\gamma \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)} \\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^{\times}}} \chi(\delta) \zeta^*\left(s, 0, \left(\tfrac{\alpha}{N}, \tfrac{\beta}{\kappa}, \tfrac{\gamma}{N}, \tfrac{\delta}{N^2}\right)', P_Z\right), \tag{1.38}$$

wobei

$$\zeta^*(s,u,v,P_Z) := \pi^{-s} \Gamma(s) \zeta(s,u,v,P_Z)$$

ist.

***Bemerkung* 1.10.1.** Für $\kappa = 1$ erhalten wir die Aussagen a) und b) von Proposition 2 in [15, Section 4].

***Beweis*.** Aus (1.34) auf Seite 25 erhalten wir

$$\begin{aligned} L(2s,\chi) E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(m)}{m^{2s}} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \setminus \{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n}) = 1 \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1}) \equiv 0\ (N) \\ \lambda_n \equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_Z[\lambda]^{-s} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \setminus \{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n}) = 1 \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1}) \equiv 0\ (N) \\ \lambda_n \equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(m\lambda_{2n}) P_Z[m\lambda]^{-s} \end{aligned}$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \setminus \{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n})=m \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1}) \equiv 0\ (N) \\ \lambda_n \equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_Z[\lambda]^{-s}$$

$$= \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \setminus \{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1}) \equiv 0\ (N) \\ \lambda_n \equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_Z[\lambda]^{-s},$$

und mit (1.36) folgt (1.37).
Aus (1.37) erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s) \\
&= \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) \sum_{\substack{\alpha,\gamma \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)} \\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^\times}} \chi(\delta) \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \setminus \{0\} \\ \lambda \equiv \left(N\alpha, \frac{N^2}{\kappa}\beta, N\gamma, \delta\right)'\ (N^2)}} P_Z[\lambda]^{-s} \\
&= \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) \sum_{\substack{\alpha,\gamma \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)} \\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^\times \\ \lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \\ N^2\lambda + \left(N\alpha, \frac{N^2}{\kappa}\beta, N\gamma, \delta\right)' \neq 0}} \chi(\delta) P_Z\left[N^2\lambda + \left(N\alpha, \tfrac{N^2}{\kappa}\beta, N\gamma, \delta\right)'\right]^{-s} \\
&= \pi^{-s} N^{-2s} \Gamma(s) \sum_{\substack{\alpha,\gamma \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)} \\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^\times \\ \lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \\ \lambda + \left(\frac{\alpha}{N}, \frac{\beta}{\kappa}, \frac{\gamma}{N}, \frac{\delta}{N^2}\right)' \neq 0}} \chi(\delta) P_Z\left[\lambda + \left(\tfrac{\alpha}{N}, \tfrac{\beta}{\kappa}, \tfrac{\gamma}{N}, \tfrac{\delta}{N^2}\right)'\right]^{-s} \\
&= N^{-2s} \sum_{\substack{\alpha,\gamma \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)} \\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^\times}} \chi(\delta) \zeta^*\left(s, 0, \left(\tfrac{\alpha}{N}, \tfrac{\beta}{\kappa}, \tfrac{\gamma}{N}, \tfrac{\delta}{N^2}\right)', P_Z\right).
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Die Funktion $\zeta^*(s,u,v,P_Z)$ besitzt eine meromorphe Fortsetzung in die ganze s-Ebene, die überall holomorph ist, wenn $u \notin \mathbb{Z}^{(2n,1)}$, und holomorph ist außer einem einfachen Pol bei $s = n$ mit Residuum 1 falls $u \in \mathbb{Z}^{(2n,1)}$ [7, 20].
Wegen (1.39) besitzt $\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa}}(Z,s)$ eine meromorphe Fortsetzung in die ganze s-Ebene und besitzt höchstens in $s = n$ einen einfachen Pol.

Das Residuum von $\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa}}(Z,s)$ bei $s=n$ berechnet sich zu

$$N^{-2n} \sum_{\substack{\alpha,\gamma\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)}\\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^\times}} \chi(\delta) = \tfrac{\kappa}{N} \sum_{\delta(N)^\times} \chi(\delta) = \begin{cases} \frac{\varphi(N)\kappa}{N} & \text{falls } \chi \text{ trivial,}\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Ist χ also nicht trivial, dann besitzt $\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$ sogar eine holomorphe Fortsetzung in die ganze s-Ebene. ⊡

Proposition 1.11. *Seien χ ein Dirichlet Charakter modulo N und κ ein Teiler von N. Ferner sei $\delta=1$, falls χ der triviale Charakter ist, und $\delta=0$ sonst. Dann ist*

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}\big(M\langle Z\rangle,s\big) - \delta\cdot\tfrac{\kappa\varphi(N)/N}{s-n}$$

für $M\in\Gamma_n$, $Z\in\mathcal{F}_n$ und s in einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$ beschränkt durch eine Potenz von $\operatorname{tr}(Y)$.

Für den Beweis benötigen wir

Lemma 1.12. *Für $t_0\in\mathbb{R}$, $t_0>0$ sei*

$$C_{t_0} := 1 + 2\sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-\lambda^2\cdot t_0}.$$

Für $u\in\mathbb{R}^{(m,1)}$ ($m\in\mathbb{N}$) gibt es eine von u abhängige Konstante $C(u)$, so daß gilt

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(m,1)}\\ \lambda+u\neq 0}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t} \leqslant C_{t_0}^m\cdot e^{-C(u)\cdot t} \quad \textit{für alle } t\geqslant t_0$$

und

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^{(m,1)}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t} \leqslant (C_{t_0}-1)^m,$$

dabei bezeichnet $\|\cdot\|_2$ die Euklidische Norm.

***Beweis von Lemma* 1.12**. Ist $u=(u_1,\dots,u_m)'$, dann folgt die zweite Abschätzung aus

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^{(m,1)}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t} = \prod_{1\leqslant\nu\leqslant m}\Big(\sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} e^{-(\lambda+u_\nu)^2\cdot t}\Big) \leqslant \prod_{1\leqslant\nu\leqslant m}\Big(2\sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-\lambda^2\cdot t}\Big)$$

$$= (C_{t_0}-1)^m.$$

Wir führen den Beweis der ersten Abschätzung durch Induktion nach m. Sei zunächst $m=1$.

Ist $u \in \mathbb{Z}$, dann gilt

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}\\ \lambda+u\neq 0}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t} = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} e^{-\lambda^2\cdot t} = 2\sum_{\lambda\geqslant 1} e^{-\lambda^2\cdot t} = 2\sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-(\lambda+1)^2\cdot t}$$

$$= 2\sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-(\lambda^2+2\lambda+1)\cdot t} \leqslant 2e^{-t}\cdot\sum_{\lambda\geqslant 0} e^{-\lambda^2\cdot t} < C_{t_0}\cdot e^{-t}$$

Ist $u\notin\mathbb{Z}$, dann sei $\mu\in\mathbb{Z}$ so gewählt, daß $|u-\mu|$ minimal ist. Wegen $u\notin\mathbb{Z}$ ist $|u-\mu|>0$. Dann gilt

$$\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}\\ \lambda+u\neq 0}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t} = \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}} e^{-(\lambda+|u-\mu|)^2\cdot t} \leqslant e^{-|u-\mu|^2\cdot t} + 2\sum_{\lambda\geqslant 1} e^{-(\lambda+|u-\mu|)^2\cdot t}$$

$$\leqslant e^{-|u-\mu|^2\cdot t}\cdot\Big(1+2\sum_{\lambda\geqslant 1} e^{-\lambda^2\cdot t}\Big) < C_{t_0}\cdot e^{-|u-\mu|^2\cdot t}.$$

Für $m>1$ sei $\lambda = \binom{\boldsymbol{\lambda}}{\lambda_m}$ und $u=\binom{\boldsymbol{u}}{u_m}$ mit $\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{Z}^{(m-1,1)}$, $\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^{(m-1,1)}$, $\lambda_m\in\mathbb{Z}$ und $u_m\in\mathbb{R}$. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(m,1)}\\ \lambda+u\neq 0}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t}\\
=\;& \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(m,1)}\\ \boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{u}\neq 0}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t} + \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(m,1)}\\ \boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{u}=0\\ \lambda_m+u_m\neq 0}} e^{-\|\lambda+u\|_2^2\cdot t}\\
\leqslant\;& \sum_{\substack{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{Z}^{(m-1,1)}\\ \boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{u}\neq 0}} e^{-\|\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{u}\|_2^2\cdot t}\cdot\sum_{\lambda_m\in\mathbb{Z}} e^{-\|\lambda_m+u_m\|_2^2\cdot t} + \sum_{\substack{\lambda_m\in\mathbb{Z}\\ \lambda_m+u_m\neq 0}} e^{-\|\lambda_m+u_m\|_2^2\cdot t}\\
\leqslant\;& C_{t_0}^{m-1}e^{-C(\boldsymbol{u})\cdot t}(C_{t_0}-1) + C_{t_0}^{m-1}e^{-C(u_m)\cdot t}\\
\leqslant\;& C_{t_0}^{m}e^{-\min\big(C(\boldsymbol{u}),C(u_m)\big)\cdot t}.
\end{aligned}$$

Beweis von Proposition 1.11. Siegel beweist in [20, Gln. (60)] die folgende Integraldarstellung für die Epsteinsche ζ-Funktion

$$\zeta^*(s,0,v,P_{M\langle Z\rangle}) = \tfrac{1}{s-n} + \int_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\\ \lambda+v\neq 0}} e^{-\pi t P_{M\langle Z\rangle}[\lambda+v]}t^{s-1}\mathrm{d}t$$

$$+\int_1^\infty \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}} e^{-\pi t P^{-1}_{M\langle Z\rangle}[\lambda]+2\pi i v'\lambda} t^{n-s-1}\mathrm{d}t,$$

falls $v \notin \mathbb{Z}^{(2n,1)}$.

Wegen $P_Z^{-1} = P_{J\langle Z\rangle}$ und $P_{M\langle Z\rangle} = P_Z[M']$ ergibt sich jetzt aus (1.38) auf Seite 26

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(M\langle Z\rangle,s) - \delta\cdot\tfrac{\kappa\varphi(N)/N}{s-n}\\
&= \quad N^{-2s} \sum_{\substack{\alpha,\gamma\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)}\\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^\times\\ v=\left(\frac{\alpha}{N},\frac{\beta}{\kappa},\frac{\gamma}{N},\frac{\delta}{N^2}\right)'}} \chi(\delta)\Bigg(\int_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\\ \lambda+M'v\neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+M'v]} t^{s-1}\mathrm{d}t\\
&\qquad \int_1^\infty \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}} e^{-\pi t P_Z[\lambda]+2\pi i v'(MJ)'^{-1}\lambda} t^{n-s-1}\mathrm{d}t\Bigg)\\
&\quad + (N^{2n-2s}-1)\delta\cdot\tfrac{\kappa\varphi(N)/N}{s-n}.
\end{aligned}$$

Weil $Z\in\mathcal{F}_n$ ist, gilt $\mathrm{tr}(Y) > 1$ (siehe [9]). Da s in einem Kompaktum variiert und $(N^{2n-2s}-1)\delta\cdot\frac{\kappa\varphi(N)/N}{s-n}$ eine ganze Funktion ist, genügt es deshalb, zu zeigen, daß für jede Wahl von $u\in\mathbb{R}^{(2n,1)}$ ein $c(u)\in\mathbb{N}$ existiert, so daß

$$\int_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\\ \lambda+u\neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+u]} t^{s-1}\mathrm{d}t \tag{1.40}$$

beschränkt ist durch $\mathrm{tr}(Y)^{c(u)}$ für alle $Z\in\mathcal{F}_n$.

Wegen $Z\in\mathcal{F}_n$ kann der kleinste bzw. größte Eigenwert $e_{\min}$ bzw. $e_{\max}$ von Y abgeschätzt werden durch

$$e_{\min} \geqslant e_1 \quad \text{und} \quad e_{\max} \leqslant e_2\,\mathrm{tr}(Y)$$

mit geeigneten Konstanten e_1, e_2, die nur von n abhängen [9].

Sei $a := \min\bigl(e_{\min}, e_{\max}^{-1}\bigr)$.

Für $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{Z}^{(n,1)}$, $u_1,u_2\in\mathbb{R}^{(n,1)}$, $\lambda = \binom{\lambda_1}{\lambda_2}$ und $u = \binom{u_1}{u_2}$ gilt

$$P_Z[\lambda+u] = \begin{pmatrix} Y & 0\\ 0 & Y^{-1}\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} I_n & 0\\ X & I_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1+u_1\\ \lambda_2+u_2\end{pmatrix}\right]$$

$$= Y[\lambda_1 + u_1] + Y^{-1}[X(\lambda_1 + u_1) + \lambda_2 + u_2].$$

Für die Reihe in (1.40) erhalten wir für $t \geqslant 1$ mit Lemma 1.12 (mit $t_0 = \pi a t$)

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \\ \lambda + u \neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+u]} = \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \\ \lambda_1 + u_1 \neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+u]} + \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \\ \lambda_1 + u_1 = 0 \\ \lambda_2 + u_2 \neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+u]}$$

$$\leqslant \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^{(n,1)} \\ \lambda_1 + u_1 \neq 0}} e^{-\pi t (e_{\min} \|\lambda_1 + u_1\|_2^2 + {e_{\max}}^{-1} \|X(\lambda_1+u_1) + \lambda_2 + u_2\|_2^2)}$$

$$+ \sum_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}^{(n,1)} \\ \lambda_1 + u_1 = 0 \\ \lambda_2 + u_2 \neq 0}} e^{-\pi t (e_{\max}^{-1} \|\lambda_2 + u_2\|_2^2)}$$

$$\leqslant C_{t_0}^n e^{-C(u_1)\pi t e_{\min}} \cdot (C_{t_0} - 1)^n + C_{t_0}^n e^{-C(u_2)\pi t e_{\max}^{-1}}$$

$$\leqslant C_{t_0}^{2n} e^{-\min\big(C(u_1), C(u_2)\big)\pi t a}$$

$$\leqslant C_1(Y) e^{-C_2(u)\pi t a}$$

mit

$$C_1(Y) = C_{t_0}^{2n} = \Big(1 + 2\sum_{\lambda \geqslant 0} e^{-\pi a \lambda^2 t}\Big)^{2n}$$

und

$$C_2(u) := \min\big(C(u_1), C(u_2)\big).$$

Sei $A \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $A \geqslant \frac{1}{a}$. Dann gilt für $t \geqslant 1$

$$\sum_{\lambda \geqslant 0} e^{-\pi a \lambda^2 t} = \sum_{\substack{\mu \geqslant 0 \\ 0 \leqslant \nu < A}} e^{-\pi a (A\mu + \nu)^2 t} \leqslant A \sum_{\mu \geqslant 0} e^{-\pi a (A\mu)^2 t} \leqslant A \sum_{\mu \geqslant 0} e^{-\pi \mu^2}.$$

Wegen $\operatorname{tr}(Y) > 1$ und $\frac{1}{a} \leqslant \max\big(e_1^{-1}, e_2 \operatorname{tr}(Y)\big)$ ist A und damit dann auch $C_1(Y)$ beschränkt durch eine Potenz von $\operatorname{tr}(Y)$.
Mit $b = C_2(u)a$ erhalten wir für das Integral (1.40)

$$\Bigg| \int_1^\infty \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \\ \lambda + u \neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+u]} t^{s-1} \mathrm{d}t \Bigg| \leqslant C_1(Y) \int_1^\infty e^{-\pi t b} t^{C_s - 1} \mathrm{d}t$$

mit einer nur von s abhängigen Konstanten C_s.
Ist $b \geqslant 1$, dann ist

$$\left|\int_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\\ \lambda+u\neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+u]} t^{s-1}\mathrm{d}t\right| \leqslant C_1(Y)\int_1^\infty e^{-\pi t} t^{C_s-1}\mathrm{d}t,$$

und wegen $\operatorname{tr}(Y) > 1$ ist dies beschränkt durch eine Potenz von $\operatorname{tr}(Y)$.
Ist $b < 1$, dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_1^\infty \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\\ \lambda+u\neq 0}} e^{-\pi t P_Z[\lambda+u]} t^{s-1}\mathrm{d}t\right| & \\ \leqslant \quad & C_1(Y) b^{-C_s}\left(\int_b^1 e^{-\pi t} t^{C_s-1}\mathrm{d}t + \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{C_s-1}\mathrm{d}t\right) \\ \leqslant \quad & C_1(Y) b^{-C_s}\left(\max(b^{C_s-1},1) + \int_1^\infty e^{-\pi t} t^{C_s-1}\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Wegen $b < 1$, $b = \min\bigl(C_2(u)e_1,\, C_2(u)(e_2\operatorname{tr}(Y))^{-1}\bigr)$ und $\operatorname{tr}(Y) > 1$ ist jede Potenz von b beschränkt durch eine Potenz von $\operatorname{tr}(Y)$, und damit dann auch das letzte Integral. ⌻

Im folgenden bezeichnen wir mit $\mathbb{1}_N$ den trivialen Charakter modulo N.

Um eine Funktionalgleichung für $\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$ unter $s \mapsto n-s$ zu erhalten, benötigen wir noch einige Lemmas.

Lemma 1.13. *Seien L ein Teiler von N und χ_L ein primitiver Dirichlet Charakter modulo L. Dann ist die kleinste Periode des von χ_L modulo N induzierten Charakters gleich LR mit*

$$R = \prod_{\substack{p\,|\,N\\ p\nmid L}} p.$$

Insbesondere ist R quadratfrei und teilerfremd zu L.

Beweis. Der modulo N durch χ_L induzierte Charakter stimmt auf $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{1}_N\chi_L$ überein. Die kleinste Periode von $\mathbb{1}_N$ ist gleich

$$\prod_{p\,|\,N} p. \tag{1.41}$$

Weil χ_L primitiv ist, ist die kleinste Periode von χ_L gleich L. Also ist die kleinste Periode von $\mathbb{1}_N\chi_L$ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von L und (1.41), also gleich

$$L\prod_{\substack{p\,|\,N\\ p\nmid L}} p = LR.$$

Lemma 1.14. *Seien χ_L ein primitiver Dirichlet Charakter modulo L und ϱ eine natürliche quadratfreie Zahl. Sind ϱ und L teilerfremd, dann gilt für $m\in\mathbb{Z}$*

$$\sum_{\delta(L\varrho)}\big(\mathbb{1}_\varrho\chi_L\big)(\delta)e^{2\pi i m\frac{\delta}{L\varrho}} = \chi_L(\varrho)\overline{\chi_L}(m)\mu(r)\varphi\big(\tfrac{\varrho}{r}\big)G_{\chi_L},$$

wobei $r := \frac{\varrho}{(\varrho,m)}$ und μ die Möbiusfunktion bezeichnet.

***Beweis von Lemma* 1.14**. Wegen $(L,\varrho)=1$ ist

$$\sum_{\delta(L\varrho)}\big(\mathbb{1}_\varrho\chi_L\big)(\delta)e^{2\pi i m\frac{\delta}{L\varrho}} = \sum_{\alpha(L),\ \beta(\varrho)}\big(\mathbb{1}_\varrho\chi_L\big)(\alpha\varrho+\beta L)e^{2\pi i m\left(\frac{\alpha}{L}+\frac{\beta}{\varrho}\right)}$$

$$= \chi_L(\varrho)\sum_{\alpha(L)}\chi_L(\alpha)e^{2\pi i m\frac{\alpha}{L}}\sum_{\beta(\varrho)}\mathbb{1}_\varrho(\beta)e^{2\pi i m\frac{\beta}{\varrho}}. \tag{1.42}$$

Weil χ_L primitiv ist modulo L, gilt

$$\sum_{\alpha(L)}\chi_L(\alpha)e^{2\pi i m\frac{\alpha}{L}} = \overline{\chi_L}(m)G_{\chi_L}. \tag{1.43}$$

Die Summe über β in (1.42) berechnet sich zu

$$\sum_{\beta(\varrho)}\mathbb{1}_\varrho(\beta)e^{2\pi i m\frac{\beta}{\varrho}} = \sum_{\substack{\beta(\varrho)\\(\beta,\varrho)=1}} e^{2\pi i m\frac{\beta}{\varrho}} = \sum_{\beta(\varrho)}\Big(\sum_{a\,|\,(\beta,\varrho)}\mu(a)\Big)e^{2\pi i m\frac{\beta}{\varrho}}$$

$$= \sum_{a\,|\,\varrho}\mu(a)\sum_{\substack{\beta(\varrho)\\ a\,|\,\beta}} e^{2\pi i m\frac{\beta}{\varrho}} = \sum_{a\,|\,\varrho}\mu\big(\tfrac{\varrho}{a}\big)\sum_{\substack{\beta(\varrho)\\ \frac{\varrho}{a}\,|\,\beta}} e^{2\pi i m\frac{\beta}{\varrho}}$$

$$= \sum_{a \mid \varrho} \mu\left(\tfrac{\varrho}{a}\right) \sum_{\beta(a)} e^{2\pi i m \frac{\beta}{a}} = \sum_{a \mid \varrho} \mu\left(\tfrac{\varrho}{a}\right) \begin{cases} a & \text{wenn } a \mid m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \sum_{a \mid (\varrho, m)} \mu\left(\tfrac{\varrho}{a}\right) a = \sum_{a \mid (\varrho,m)} \mu\left(\tfrac{a\varrho}{(\varrho,m)}\right) \tfrac{(\varrho,m)}{a}.$$

Ist $(\varrho, m) = \frac{\varrho}{r}$ mit $r \in \mathbb{N}$, dann vereinfacht sich die letzte Gleichung wegen ϱ quadratfrei zu

$$\sum_{\beta(\varrho)} \mathbb{1}_\varrho(\beta) e^{2\pi i m \frac{\beta}{\varrho}} = \sum_{a \mid \frac{\varrho}{r}} \mu(ra) \tfrac{\varrho}{ra} = \mu(r) \tfrac{\varrho}{r} \sum_{a \mid \frac{\varrho}{r}} \mu(a) a^{-1}$$

$$= \mu(r) \tfrac{\varrho}{r} \prod_{p \mid \frac{\varrho}{r}} \Big(\sum_{a \mid p} \mu(a) a^{-1} \Big) = \mu(r) \tfrac{\varrho}{r} \prod_{p \mid \frac{\varrho}{r}} \left(1 - \tfrac{1}{p}\right)$$

$$= \mu(r) \varphi\left(\tfrac{\varrho}{r}\right).$$

Zusammen mit (1.42) und (1.43) erhalten wir für $(\varrho, m) = \frac{\varrho}{r}$

$$\sum_{\delta(L\varrho)} \big(\mathbb{1}_\varrho \chi_L\big)(\delta) e^{2\pi i m \frac{\delta}{L\varrho}} = \chi_L(\varrho) \overline{\chi_L}(m) \mu(r) \varphi\left(\tfrac{\varrho}{r}\right) G_{\chi_L}.$$ ☺

Proposition 1.15. *Sei χ ein Dirichlet Charakter modulo N, der induziert wird von einem primitiven Charakter χ_L modulo L. Ferner sei LR die kleinste Periode von χ. Ist κ ein Teiler von N, dann gilt*

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z, n-s) = \frac{\varphi(R)}{R} \frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}} \sum_{r \mid R} \frac{\mu(r)}{\varphi(r)} \chi_L(r) \pi^{-s} (Lr)^{2s} \Gamma(s) \cdot \sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Z}^{(2n,1)} \setminus \{0\} \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n-1}) \equiv 0 \ (Lr) \\ \lambda_n \equiv 0 \ (L\kappa r)}} \left(\overline{\mathbb{1}_r \chi_L}\right)(\lambda_{2n}) P_{W_N\langle Z \rangle}[\lambda]^{-s}. \tag{1.44}$$

Beweis. Mit Hilfe der Funktionalgleichung der verallgemeinerten Epsteinschen ζ-Funktion (siehe [7, 20])

$$\zeta^*(n-s, u, v, P_Z) = \zeta^*(s, -v, u, P_Z^{-1})$$

erhalten wir aus (1.38) in Proposition 1.10 auf Seite 26

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z, n-s)$$

$$= N^{2s-2n} \sum_{\substack{\alpha,\gamma\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)}\\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)^\times}} \chi(\delta)\zeta^*\big(s, -\big(\tfrac{\alpha}{N}, \tfrac{\beta}{\kappa}, \tfrac{\gamma}{N}, \tfrac{\delta}{N^2}\big)', 0, P_Z^{-1}\big).$$

$$= N^{2s-2n}\pi^{-s}\Gamma(s) \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ \alpha,\gamma\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)}\\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)}} \chi(\delta)e^{-2\pi i(\frac{\alpha}{N},\frac{\beta}{\kappa},\frac{\gamma}{N},\frac{\delta}{N^2})\cdot\lambda} P_Z^{-1}[\lambda]^{-s}. \tag{1.45}$$

Weil χ die Periode LR besitzt, erhalten wir mit $\nu := \frac{N}{RL}$ für die Summe über $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

$$\sum_{\substack{\alpha,\gamma\in(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^{(1,n-1)}\\ \beta(\kappa),\ \delta(N^2)}} \chi(\delta)e^{-2\pi i(\frac{\alpha}{N},\frac{\beta}{\kappa},\frac{\gamma}{N},\frac{\delta}{N^2})\cdot\lambda}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\kappa N^{2n}}{LR} \displaystyle\sum_{\delta(LR)} \chi(\delta)e^{-2\pi i\frac{\lambda_{2n}}{N\nu}\cdot\frac{\delta}{LR}} & \text{wenn} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) \equiv 0\ (N), \\ & \phantom{\text{wenn}} \quad (\lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{2n-1}) \equiv 0\ (N), \\ & \phantom{\text{wenn}} \quad \lambda_n \equiv 0\ (\kappa),\ \ \lambda_{2n} \equiv 0\ (N\nu), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1.46}$$

Weil χ die Periode LR hat und durch χ_L induziert wird, stimmt χ auf $\mathbb{Z}$ mit $\mathbb{1}_R\chi_L$ überein.

Nach Lemma 1.13 auf Seite 32 ist R quadratfrei und teilerfremd zu L. Aus Lemma 1.14 auf Seite 33 erhalten wir wegen $G_{\chi_L}G_{\overline{\chi_L}} = \overline{\chi_L}(-1)L$, daß

$$\sum_{\delta(LR)} \chi(\delta)e^{2\pi i m\frac{\delta}{RL}} = \frac{L}{G_{\overline{\chi_L}}}\chi_L(R)\overline{\chi_L}(-m)\mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big), \tag{1.47}$$

für $m \in \mathbb{Z}$ und $r = \frac{R}{(R,m)}$ gilt.

Aus (1.45), (1.46) und (1.47) finden wir

$$\Big(\pi^{-s}\Gamma(s)\tfrac{\kappa}{RG_{\overline{\chi_L}}}\Big)^{-1}\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z, n-s)$$

$$= N^{2s}\chi_L(R) \sum_{\substack{r\,|\,R\\ \lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\equiv 0\ (N),\ \lambda_n\equiv 0\ (\kappa)\\ (\lambda_{n+1},\ldots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (N)\\ \lambda_{2n}\equiv 0\ (N\nu),\ \left(\frac{\lambda_{2n}}{N\nu},R\right)=R/r}} \mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big)\overline{\chi_L}\big(\tfrac{\lambda_{2n}}{N\nu}\big)P_Z^{-1}[\lambda]^{-s}. \tag{1.48}$$

Wegen $JW_N^{-1} = \mathcal{D}_N$ und (1.32) auf Seite 24 gilt

$$P_Z^{-1} = P_{J\langle Z\rangle} = P_{JW_N^{-1}W_N\langle Z\rangle} = P_{W_N\langle Z\rangle}\big[(JW_N^{-1})'\big] = P_{W_N\langle Z\rangle}[\mathcal{D}_N].$$

Der Beitrag für ein festes r in (1.48) berechnet sich deshalb zu

$$\begin{aligned}
N^{2s}\chi_L(R) &\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (N),\ \lambda_n\equiv 0\ (N\kappa)\\ \lambda_{2n}\equiv 0\ (\nu),\ \left(\frac{\lambda_{2n}}{\nu},R\right)=R/r}} \mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big)\overline{\chi_L}\big(\tfrac{\lambda_{2n}}{\nu}\big)P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}\\
= N^{2s}\chi_L(r) &\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (N),\ \lambda_n\equiv 0\ (N\kappa)\\ \lambda_{2n}\equiv 0\ (\nu),\ \left(\frac{\lambda_{2n}}{\nu},R\right)=R/r}} \mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big)\overline{\chi_L}\big(\tfrac{\lambda_{2n}}{\nu R/r}\big)P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}\\
= N^{2s}\chi_L(r)\mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big) &\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (N),\ \lambda_n\equiv 0\ (N\kappa)\\ \lambda_{2n}\equiv 0\ (\nu R/r),\ \left(\frac{\lambda_{2n}}{\nu R/r},r\right)=1}} \overline{\chi_L}\big(\tfrac{\lambda_{2n}}{\nu R/r}\big)P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}\\
= (Lr)^{2s}\chi_L(r)\mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big) &\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Lr)\\ \lambda_n\equiv 0\ (L\kappa r),\ (\lambda_{2n},r)=1}} \overline{\chi_L}(\lambda_{2n})P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}\\
= (Lr)^{2s}\chi_L(r)\mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big) &\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Lr)\\ \lambda_n\equiv 0\ (L\kappa r)}} \big(\overline{\mathbb{1}_r\chi_L}\big)(\lambda_{2n})P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Weil R quadratfrei ist, gilt $\varphi\big(\frac{R}{r}\big) = \frac{\varphi(R)}{\varphi(r)}$. Aus (1.48) und (1.49) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,n-s) = \frac{\varphi(R)}{R}\frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}}\sum_{r\mid R}\frac{\mu(r)}{\varphi(r)}\chi_L(r)\pi^{-s}(Lr)^{2s}\Gamma(s)\\
\cdot \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Lr)\\ \lambda_n\equiv 0\ (L\kappa r)}} \big(\overline{\mathbb{1}_r\chi_L}\big)(\lambda_{2n})P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}.
\end{aligned}$$

☺

Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß κ ein Teiler von L ist, kann man die rechte Seite von (1.44) in Proposition 1.15 auf Seite 34 als Summe verschiedener Eisensteinreihen schreiben.

Proposition 1.16. *Sei χ ein Dirichlet Charakter modulo N, der induziert wird von einem primitiven Charakter χ_L modulo L. Ist κ ein Teiler von L, dann genügt $\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$ der Funktionalgleichung*

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,n-s) = \frac{\varphi(N)}{\varphi(L)}\frac{L}{N}\frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}}\sum_{r\,|\,\frac{N}{L}}\frac{\mu(r)}{\varphi(r)}\chi_L(r)\mathbb{E}_{Lr,L\kappa r,\overline{\chi_L}}(W_N\langle Z\rangle,s). \tag{1.50}$$

Bemerkung. Der Spezialfall, daß χ primitiv (also $N = L$) und $\kappa = 1$ ist, wurde bereits in [15, Proposition 2c] behandelt.
Den „einfachsten“ neuen Fall, der in Proposition 1.16 enthalten ist, erhalten wir für $\kappa = 1$, $N = p$ und $\chi = \mathbb{1}_p$ mit einer Primzahl p. In diesen Fall erhalten wir aus (1.50)

$$\mathbb{E}_{p,p^2,\mathbb{1}_1}(Z,n-s) = \big(1-\tfrac{1}{p}\big)\mathbb{E}_{1,1,\mathbb{1}_1}(W_p\langle Z\rangle,s) - \tfrac{1}{p}\mathbb{E}_{p,p,\mathbb{1}_1}(W_p\langle Z\rangle,s). \tag{1.51}$$

***Beweis von Proposition* 1.16**. Nach Lemma 1.13 auf Seite 32 ist R das Produkt aller Primteiler von N, die L nicht teilen. Also gilt

$$\frac{\varphi(R)}{R} = \prod_{p\,|\,R}\big(1-\tfrac{1}{p}\big) = \prod_{\substack{p\,|\,N\\ p\nmid L}}\big(1-\tfrac{1}{p}\big) = \frac{\prod_{p\,|\,N}\big(1-\tfrac{1}{p}\big)}{\prod_{p\,|\,L}\big(1-\tfrac{1}{p}\big)} = \frac{\varphi(N)/N}{\varphi(L)/L}.$$

Mit Proposition 1.15 auf Seite 34 erhalten wir

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,n-s) = \frac{\varphi(N)}{\varphi(L)}\frac{L}{N}\frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}}\sum_{r\,|\,R}\frac{\mu(r)}{\varphi(r)}\chi_L(r)\pi^{-s}(Lr)^{2s}\Gamma(s)$$
$$\cdot \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Lr)\\ \lambda_n\equiv 0\ (L\kappa r)}} \big(\overline{\mathbb{1}_r\chi_L}\big)(\lambda_{2n})P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}.$$

In der Summe über r durchläuft r alle Teiler von R, das sind genau die quadratfreien Teiler von $\frac{N}{L}$, die zu L teilerfremd sind, also genau die Teiler r von $\frac{N}{L}$, für die $\mu(r)\chi_L(r)$ von Null verschieden ist. Deshalb können wir in der letzten Gleichung die Teilbarkeitsbedingung $r\,|\,R$ durch die Bedingung $r\,|\,\frac{N}{L}$ ersetzen.

Wegen $\kappa\,|\,L$ folgt die Behauptung nun aus (1.37) in Proposition 1.10 auf Seite 26. ⌻

Analog zur Vorgehensweise in [15] könnten wir mit Hilfe von Proposition 1.16 die Fortsetzbarkeit und die Funktionalgleichung für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ beweisen. Dazu müßten wir Proposition 1.16 anwenden auf $\mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}(Z,s)$. Die Reihe $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ kann dann im wesentlichen dargestellt werden als Skalarprodukt zwischen dem Produkt von f_χ mit der linken bzw. rechten Seite der erhaltenen Funktionalgleichung für $\mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}(Z,s)$ und g.
Im „einfachsten" Fall, wenn $N = p \equiv 3\ (4)$ eine Primzahl und $\chi = \left(\frac{-p}{\cdot}\right)$ sind, erhalten wir für $\mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}(Z,s)$ die Funktionalgleichung (1.51), und müßten die Skalarprodukte zwischen $f_\chi \mathbb{E}_{p,p^2,\mathbb{1}_1}$ und g, $f_\chi \mathbb{E}_{1,1,\mathbb{1}_1}$ und g, und $f_\chi \mathbb{E}_{p,p,\mathbb{1}_1}$ und g berechnen.
Bereits in diesem Fall stellt sich heraus, daß die Berechnung von Skalarprodukten zwischen $f_\chi \mathbb{E}_{M,M,\chi}$ und g (M ein Teiler von N) wesentlich schwieriger ist, als die Berechnung von Skalarprodukten zwischen $f_\chi \mathbb{E}_{M,M^2,\chi}$ und g.

Die Herleitung der Funktionalgleichung von $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ wird einfacher, wenn wir an Stelle von Proposition 1.16 von einer Funktionalgleichung ausgehen, die eine einzige Eisensteinreihe der Form $\mathbb{E}_{M,M,\chi}(Z,s)$ in Beziehung setzt zu mehreren Eisensteinreihen der Form $\mathbb{E}_{\frac{M}{r},(\frac{M}{r})^2,\overline{\chi}}(Z,n-s)$. Diese Funktionalgleichung gibt uns

Proposition 1.17. *Sei χ ein Dirichlet Charakter modulo N, der von einem primitiven Charakter χ_L modulo L induziert wird. Ferner sei LR die kleinste Periode von χ. Ist κ ein Teiler von L, dann gilt*

$$\sum_{t\,|\,R} \frac{\mu(t)\varphi(t)}{t} \mathbb{E}_{\frac{LR}{t},\frac{L^2R^2}{\kappa t^2},\chi_L}(W_{\frac{LR}{t}}\langle Z\rangle, n-s) = \frac{\mu(R)}{R}\frac{\chi_L(R)}{G_{\overline{\chi_L}}}\kappa \mathbb{E}_{LR,LR\kappa,\overline{\chi_L}}(Z,s). \tag{1.52}$$

Beweis. Ist t ein Teiler von R, dann hat der modulo $\frac{LR}{t}$ von χ_L induzierte Dirichlet Charakter nach Lemma 1.13 auf Seite 32 die kleinste Periode $\frac{LR}{t}$. Wegen $\kappa\,|\,L$ gilt auch $\kappa\,|\,\frac{LR}{t}$, und wir können die linke Seite von (1.52) mit Hilfe von Proposition 1.16 auf Seite 37 berechnen. Weil R quadratfrei ist, und $W_{\frac{N}{t}}^2 = -I_{2n}$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{t\,|\,R} \frac{\mu(t)\varphi(t)}{t} \mathbb{E}_{\frac{LR}{t},\frac{L^2R^2}{\kappa t^2},\chi_L}(W_{\frac{LR}{t}}\langle Z\rangle, n-s) \\
&\qquad = \sum_{t\,|\,R} \frac{\mu(t)\varphi(t)}{t}\frac{\varphi(\frac{LR}{t})}{\varphi(L)}\frac{L}{\frac{LR}{t}}\frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}}\sum_{r\,|\,\frac{R}{t}}\frac{\mu(r)}{\varphi(r)}\chi_L(r)\mathbb{E}_{Lr,L\kappa r,\overline{\chi_L}}(Z,s) \\
&\qquad = \frac{\varphi(R)}{R}\frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}}\sum_{t\,|\,R}\sum_{r\,|\,\frac{R}{t}}\mu(t)\frac{\mu(r)}{\varphi(r)}\chi_L(r)\mathbb{E}_{Lr,L\kappa r,\overline{\chi_L}}(Z,s)
\end{aligned}$$

$$= \quad \frac{\varphi(R)}{R}\frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}}\sum_{r\,|\,R}\Big(\sum_{t\,|\,\frac{R}{r}}\mu(t)\Big)\frac{\mu(r)}{\varphi(r)}\chi_L(r)\mathbb{E}_{Lr,L\kappa r,\overline{\chi_L}}(Z,s)$$

$$= \quad \frac{\mu(R)}{R}\frac{\kappa}{G_{\overline{\chi_L}}}\chi_L(R)\mathbb{E}_{LR,LR\kappa,\overline{\chi_L}}(Z,s).$$

Um aus Proposition 1.17 die Funktionalgleichung für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ zu erhalten, müssen wir Proposition 1.17 anwenden auf den Charakter χ^2 und dann die Skalarprodukte zwischen dem Produkt aus $f_\chi|_kW_N$ mit der rechten bzw. linken Seite der erhalten Funktionalgleichung und $g|_kW_N$ berechnen (im Vergleich zu den Erläuterungen vor Proposition 1.17 ist Z inzwischen durch $W_N\langle Z\rangle$ ersetzt worden). Insbesondere benötigen wir die Skalarprodukte zwischen $f_\chi|_kW_N\mathbb{E}_{\frac{LR}{t},(\frac{LR}{t})^2,\chi_L}(\cdot,s)|_0W_{\frac{LR}{t}}$ und $g|_kW_N$, die wir in §1.5 durch Induktion über die Anzahl der Primteiler von t berechnen (Proposition 1.20 auf Seite 43). Um dort im Beweis den Induktionsschritt durchführen zu können, benötigen wir einige Eigenschaften von gewissen Differenzen von Eisensteinreihen.

Definition 1.18. Seien χ ein Dirichlet Charakter modulo N, κ ein Teiler von N, p eine Primzahl und $r\in\mathbb{N}$. Dann definieren wir $\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(Z,s)$ für $Z\in\mathbb{H}_n$ und $\mathrm{Re}(s)>n$ durch die Gleichung

$$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)|_0W_{Npr}=\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0W_N-\mathbb{E}_{Np,\frac{N^2p^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0W_{Np}.$$

Wird χ induziert durch einen Charakter χ_L, dann setzen wir

$$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi_L}(Z,s):=\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(Z,s).$$

Proposition 1.19. *Unter den Voraussetzungen von Definition 1.18 gilt:*

(i) $$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(Z,s)=\pi^{-s}(Npr)^{2s}\Gamma(s)\sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\(\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Npr)\\ \lambda_n\equiv 0\ (\frac{N^2p^2r^2}{\kappa})\\ p\,|\,\lambda_{2n}}}\chi(\lambda_{2n})P_Z[\lambda]^{-s}. \tag{1.53}$$

(ii) *Ist p ein Teiler von N, dann ist $\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)$ identisch Null.*

(iii) $\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)\in\big[\Gamma_{n,1}\big(Npr,(Npr)^2\big),0,\overline{\chi}\big]$.

(iv) *Es gilt*

$$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)|_0M'_{N^2pr^2/\kappa}=\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s). \tag{1.54}$$

Korollar 1.19.1. *Seien N, κ und χ wie in Proposition 1.19. Ist $m \in \mathbb{N}$, und ist jeder Primteiler von m ein Teiler von N, dann gilt*

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_N = \mathbb{E}_{Nm,\frac{N^2m^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_{Nm}.$$

***Beweis von Korollar* 1.19.1.** Die Behauptung ergibt sich durch mehrfache Anwendung von Proposition 1.19(ii) und Definition 1.18. ⊡

***Beweis von Proposition* 1.19(i).** Wegen (1.37) in Proposition 1.10 auf Seite 26 und (1.32) auf Seite 24 gilt

$$\begin{aligned}
&\big(\pi^{-s}\Gamma(s)\big)^{-1}\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(W_N\langle Z\rangle,s) \\
&= N^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (N) \\ \lambda_n\equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_{W_N\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s} \\
&= (Np)^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (N) \\ \lambda_n\equiv 0\ \left(\frac{N^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_{W_N\langle Z\rangle}\left[\mathcal{D}_{\frac{1}{p}}\left(\begin{array}{cc|cc} pI & & & \\ & p^2 & & \\ \hline & & pI & \\ & & & 1\end{array}\right)\lambda\right]^{-s} \\
&= (Np)^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Np) \\ \lambda_n\equiv 0\ \left(\frac{N^2p^2}{\kappa}\right)}} \chi(\lambda_{2n}) P_{(\mathcal{D}_{\frac{1}{p}}W_N)\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s} \\
&= (Np)^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Np) \\ \lambda_n\equiv 0\ \left(\frac{N^2p^2}{\kappa}\right) \\ p\,|\,\lambda_{2n}}} \chi(\lambda_{2n}) P_{W_{Np}\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s} \\
&\qquad + (Np)^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Np) \\ \lambda_n\equiv 0\ \left(\frac{N^2p^2}{\kappa}\right) \\ p\nmid\lambda_{2n}}} \chi(\lambda_{2n}) P_{W_{Np}\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (Npr)^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Np)\\ \lambda_n\equiv 0\ (\frac{N^2p^2}{\kappa})\\ p\,|\,\lambda_{2n}}} \chi(\lambda_{2n}) P_{W_{Np}\langle Z\rangle}\left[\mathcal{D}_{\frac{1}{r}}\left(\begin{array}{cc|cc} rI & & & \\ & r^2 & & \\ \hline & & rI & \\ & & & 1\end{array}\right)\lambda\right]^{-s}\\
&\qquad + (Np)^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Np)\\ \lambda_n\equiv 0\ (\frac{N^2p^2}{\kappa})}} \big(\mathbb{1}_p\chi\big)(\lambda_{2n}) P_{W_{Np}\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}\\
&= (Npr)^{2s} \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Npr)\\ \lambda_n\equiv 0\ (\frac{N^2p^2r^2}{\kappa})\\ p\,|\,\lambda_{2n}}} \chi(\lambda_{2n}) P_{(\mathcal{D}_{\frac{1}{r}}W_{Np})\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s}\\
&\qquad + \big(\pi^{-s}\Gamma(s)\big)^{-1}\mathbb{E}_{Np,\frac{N^2p^2}{\kappa},\chi}(W_{Np}\langle Z\rangle, s).
\end{aligned}$$

Wegen $\mathcal{D}_{\frac{1}{r}}W_{Np} = W_{Npr}$ erhalten wir mit Definition 1.18 die Behauptung. ⊡

***Beweis von Proposition* 1.19(ii)**. Ist N durch p teilbar, dann ist die rechte Seite von (1.53) identisch Null, denn dort ist $\chi(\lambda_{2n}) = 0$. ⊡

***Beweis von Proposition* 1.19(iii)**. Nach Korollar 1.9.1 auf Seite 24 gelten

$$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_N \in \big[\Gamma_{n,1}\big(N,N^2\big),0,\chi\big]$$

und

$$\mathbb{E}_{Np,\frac{N^2p^2}{\kappa},\chi}(\cdot,s)|_0 W_{Np} \in \big[\Gamma_{n,1}\big(Np,(Np)^2\big),0,\chi\big].$$

Also folgt aus Definition 1.18 auf Seite 39, daß gilt

$$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)|_0 W_{Npr} \in \big[\Gamma_{n,1}\big(Np,(Np)^2\big),0,\chi\big].$$

Insbesondere ist also

$$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)|_0 W_{Npr} \in \big[\Gamma_{n,1}\big(Npr,(Npr)^2\big),0,\chi\big].$$

Analog zum Beweis von Korollar 1.9.1 auf Seite 24 ergibt sich

$$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s) \in \big[\Gamma_{n,1}\big(Npr,(Npr)^2\big),0,\overline{\chi}\big].$$ ⊡

***Beweis von Proposition* 1.19(iv).** Nach Teil (i) ist

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)|_0 M'_{N^2pr^2/\kappa} \\
&= \pi^{-s}(Npr)^{2s}\Gamma(s) \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Npr) \\ \lambda_n\equiv 0\ (\frac{N^2p^2r^2}{\kappa}) \\ p\,|\,\lambda_{2n}}} \chi(\lambda_{2n}) P_{M'_{N^2pr^2/\kappa}\langle Z\rangle}[\lambda]^{-s} \\
&= \pi^{-s}(Npr)^{2s}\Gamma(s) \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Npr) \\ \lambda_n\equiv 0\ (\frac{N^2p^2r^2}{\kappa}) \\ p\,|\,\lambda_{2n}}} \chi(\lambda_{2n}) P_Z[M_{N^2pr^2/\kappa}\lambda]^{-s} \\
&= \pi^{-s}(Npr)^{2s}\Gamma(s) \sum_{\substack{\lambda\in\mathbb{Z}^{(2n,1)}\setminus\{0\} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-1})\equiv 0\ (Npr) \\ \lambda_n\equiv 0\ (\frac{N^2p^2r^2}{\kappa}) \\ p\,|\,\lambda_{2n}}} \chi(\lambda_{2n}) P_Z\left[\left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & 1 & & \frac{N^2pr^2}{\kappa} \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right)\lambda\right]^{-s}.
\end{aligned}$$

Bei festem, durch p teilbarem $\lambda_{2n}\neq 0$ durchläuft mit λ_n auch $\lambda_n+\frac{N^2pr^2}{\kappa}\lambda_{2n}$ alle durch $\frac{N^2p^2r^2}{\kappa}$ teilbaren ganzen Zahlen, also gilt

$$\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s)|_0 M'_{N^2pr^2/\kappa} = \mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(\cdot,s).$$

§1.5. Integraldarstellungen für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$

Ist Γ' eine Untergruppe von endlichem Index in Γ_n mit $-I\in\Gamma'$, so definieren wir für $F,G\in[\Gamma',k,\chi]$ das Petersson Skalarprodukt zwischen F und G durch

$$\{F,G\}_{\Gamma'} := \frac{1}{[\Gamma_n:\Gamma']}\int_{\mathcal{F}'} F(Z)\overline{G(Z)}(\det Y)^k \mathrm{d}v_n, \tag{1.55}$$

falls das Integral konvergiert. Dabei ist $\mathrm{d}v_n=(\det Y)^{-n-1}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$ das unter der Aktion von $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ auf $\mathbb{H}_n$ invariante Volumenelement auf $\mathbb{H}_n$, und $\mathcal{F}'$ ist ein Fundamentalbereich für die Aktion von Γ' auf $\mathbb{H}_n$.
Wegen

$$\det\Big(\operatorname{Im}\big(M\langle Z\rangle\big)\Big) = |\det(CZ+D)|^{-2}\det(\operatorname{Im} Z) \quad \text{für } M\in\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \tag{1.56}$$

ist die rechte Seite von (1.55) wohldefiniert.

Ist Γ'' eine Untergruppe von Γ', dann gilt

$$\{F,G\}_{\Gamma''} = \{F,G\}_{\Gamma'}.$$

Wird Γ' durch $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$ normalisiert, dann folgt aus

$$\Gamma'\backslash\mathbb{H}_n = \Gamma'\backslash\big(M\langle\mathbb{H}_n\rangle\big) = M\big\langle\Gamma'\backslash\mathbb{H}_n\big\rangle,$$

daß

$$\{F,G\}_{\Gamma'} = \{F|_k M, G|_k M\}_{\Gamma'}$$

gilt.

Wir setzen

$$i_N := \big[\Gamma_n : \Gamma_{n,1}(N,N^2)\big].$$

Proposition 1.20. *Sei χ ein Dirichlet Charakter modulo N. χ^2 werde induziert von einem primitiven Charakter $\chi^{(2)}$ modulo $N^{(2)}$, und t sei ein Teiler von $\frac{N}{N^{(2)}}$. Für $t \neq 1$ sei zusätzlich χ primitiv. Dann gilt für $f,g \in S_k(\Gamma_n)$*

$$\begin{aligned}\big\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathbb{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t}},\ g|_k W_N\big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} & \\ = \tfrac{2}{i_N}\big(\tfrac{\pi}{N^2}\big)^{k-n}\mathbb{D}_{f,g}(s+k-n,\chi) & \qquad (1.57)\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > n+1$. Insbesondere ist die linke Seite von (1.57) von t unabhängig.

Bemerkung. Weil $\Gamma_{n,1}(N,N^2)$ durch W_N normalisiert wird, ist die Aussage von Proposition 1.20 im Fall $t=1$ äquivalent zu Lemma 2 in [15, Section 5].

Korollar 1.20.1. *Sei χ ein primitiver Dirichlet Charakter modulo N. χ^2 werde induziert von einem primitiven Charakter $\chi^{(2)}$ modulo L, und seien $f,g \in S_k(\Gamma_n)$. Ist LR die kleinste Periode von χ^2, dann gilt*

$$\begin{aligned}\Big\{f_\chi|_k W_N \cdot \sum_{t\,|\,R} \tfrac{\mu(t)\varphi(t)}{t}\mathbb{E}_{\frac{LR}{t},(\frac{LR}{t})^2,\chi^{(2)}}(\cdot,s-k+n)|_0 W_{\frac{N}{t}},\ g|_k W_N\Big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} & \\ = \tfrac{2}{i_N R}\big(\tfrac{\pi}{N^2}\big)^{k-n}\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi) &\end{aligned}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > k+1$.

***Beweis von Korollar* 1.20.1**. Weil R ein Teiler von $\frac{N}{L}$ ist, gilt nach Proposition 1.20 für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > n+1$

$$\Big\{ f_\chi|_k W_N \cdot \sum_{t\,|\,R} \tfrac{\mu(t)\varphi(t)}{t} \mathbb{E}_{\frac{LR}{t},(\frac{LR}{t})^2,\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t}},\ g|_k W_N \Big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}$$

$$= \sum_{t\,|\,R} \tfrac{\mu(t)\varphi(t)}{t} \Big\{ f_\chi|_k W_N \cdot \mathbb{E}_{\frac{LR}{t},(\frac{LR}{t})^2,\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t}},\ g|_k W_N \Big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}$$

$$= \sum_{t\,|\,R} \tfrac{\mu(t)\varphi(t)}{t} \tfrac{2}{i_N} \big(\tfrac{\pi}{N^2}\big)^{k-n} \mathbb{D}_{f,g}(s+k-n,\chi).$$

Nach Lemma 1.13 auf Seite 32 ist R quadratfrei. Die Behauptung folgt jetzt aus

$$\sum_{t\,|\,R} \tfrac{\mu(t)\varphi(t)}{t} = \prod_{p\,|\,R} \Big(\sum_{t\,|\,p} \tfrac{\mu(t)\varphi(t)}{t} \Big) = \prod_{p\,|\,R} \big(1 + \tfrac{-1(p-1)}{p}\big) = \prod_{p\,|\,R} \tfrac{1}{p} = \tfrac{1}{R},$$

wenn wir s durch $s-k+n$ ersetzen. ⊡

***Beweis von Proposition* 1.20**. Weil $\Gamma_{n,1}(N,N^2)$ durch W_N normalisiert wird, gilt $g|_k W_N \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),k,\mathbb{1}_N\big]$. Nach Korollar 1.4.1 und Proposition 1.4 auf Seite 20 gilt $f_\chi|_k W_N \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),k,\overline{\chi}^2\big]$. Wegen Korollar 1.9.1 auf Seite 24 ist $\mathbb{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t}} \in \big[\Gamma_{n,1}\big(\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2}\big),0,\chi^{(2)}\big]$, insbesondere also

$$\mathbb{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t}} \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),0,\chi^2\big].$$

Somit ist

$$f_\chi|_k W_N \cdot \mathbb{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t}} \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),k,\mathbb{1}_N\big],$$

und die linke Seite von (1.57), die wir mit $H(s)$ bezeichnen wollen, ist wohldefiniert.

Betrachten wir zunächst den Fall $t=1$. Nach Definition ist

$$\mathbb{E}_{N,N^2,\chi^{(2)}} = \mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}.$$

Weil $\Gamma_{n,1}(N,N^2)$ durch W_N normalisiert wird, gilt

$$H(s) = \big\{ f_\chi \cdot \mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}(\cdot,s),\ g \big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}$$

$$= \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) L(2s,\chi^2) \big\{ f_\chi \cdot E_{N,N^2,\chi^2}(\cdot, s),\ g \big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}. \tag{1.58}$$

Wegen

$$\begin{aligned} \det Y &= \det \begin{pmatrix} Y_1 & v \\ v' & y \end{pmatrix} = \det \left(\begin{pmatrix} Y_1 & v \\ v' & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Y_1^{-1} v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} Y_1 & 0 \\ v' & y - Y_1^{-1}[v] \end{pmatrix} = \big(y - Y_1^{-1}[v] \big) \det Y_1 \end{aligned} \tag{1.59}$$

erhalten wir durch Entfalten aus (1.58)

$$\begin{aligned} &\big(\tfrac{2}{i_N} \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) L(2s,\chi^2) \big)^{-1} H(s) \\ &= \int\limits_{\mathcal{F}_{n,1}} f_\chi(Z) \overline{g(Z)} \big(\tfrac{\det Y}{\det Y_1} \big)^s (\det Y)^k \mathrm{d}v_n \\ &= \int\limits_{\mathcal{F}_{n,1}} f_\chi(Z) \overline{g(Z)} (\det Y_1)^{k-n-1} \big(y - Y_1^{-1}[v] \big)^{s+k-n-1} \mathrm{d}X \mathrm{d}Y, \end{aligned}$$

wobei $\mathcal{F}_{n,1}$ ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\Gamma_{n,1}$ auf $\mathbb{H}_n$ ist.
Ein solcher Fundamentalbereich ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_{n,1} = \Big\{ Z \in \mathbb{H}_n \mid (Z_1, w) \in \mathcal{F}_n^*,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y > Y_1^{-1}[v] \Big\}, \tag{1.60}$$

dabei ist $\mathcal{F}_n^*$ ein Fundamentalbereich für die Aktion der Jacobigruppe auf $\mathbb{H}_{n-1} \times \mathbb{C}^{(n-1,1)}$.
Durch Einsetzen der Fourier-Jacobi Entwicklungen für f_χ und g finden wir

$$\begin{aligned} &\big(\tfrac{2}{i_N} \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) L(2s,\chi^2) \big)^{-1} H(s) \\ &= \int\limits_{\substack{(Z_1,w) \in \mathcal{F}_n^* \\ y > Y_1^{-1}[v] \\ 0 \leqslant x \leqslant 1}} \sum_{m_1,m_2 \geqslant 1} \chi(m_1) f_{m_1}(Z_1,w) \overline{g_{m_2}(Z_1,w)} e^{-2\pi(m_1+m_2)y + 2\pi i (m_1-m_2)x} \\ &\qquad \cdot\ (\det Y_1)^{k-n-1} \big(y - Y_1^{-1}[v] \big)^{s+k-n-1} \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}Y_1 \\ &= \int\limits_{\substack{(Z_1,w) \in \mathcal{F}_n^* \\ y > Y_1^{-1}[v]}} \sum_{m \geqslant 1} \chi(m) f_m(Z_1,w) \overline{g_m(Z_1,w)} e^{-4\pi m y} (\det Y_1)^{k-n-1} \end{aligned}$$

$$\cdot \quad \left(y - Y_1^{-1}[v]\right)^{s+k-n-1} \mathrm{d}y\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1$$

$$= \int\limits_{\substack{(Z_1,w)\in\mathcal{F}_n^* \\ y>0}} \sum_{m\geqslant 1} \chi(m) f_m(Z_1,w)\overline{g_m(Z_1,w)} e^{-4\pi m y - 4\pi m Y_1^{-1}[v]}$$

$$\cdot \quad (\det Y_1)^{k-n-1} y^{s+k-n-1} \mathrm{d}y\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1$$

$$= \int\limits_{(Z_1,w)\in\mathcal{F}_n^*} \sum_{m\geqslant 1} \chi(m)(4\pi m)^{-s-k+n}\Gamma(s+k-n) f_m(Z_1,w)\overline{g_m(Z_1,w)}$$

$$\cdot \quad e^{-4\pi m Y_1^{-1}[v]}(\det Y_1)^{k-n-1} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1$$

$$= (4\pi)^{-s-k+n}\Gamma(s+k-n)\sum_{m\geqslant 1}\chi(m) m^{-s-k+n}$$

$$\cdot \int\limits_{\mathcal{F}_n^*} f_m(Z_1,w)\overline{g_m(Z_1,w)}(\det Y_1)^k e^{-4\pi m Y_1^{-1}[v]} \mathrm{d}v_n^*$$

$$= (4\pi)^{-s-k+n}\Gamma(s+k-n)\sum_{m\geqslant 1}\frac{\chi(m)\langle f_m, g_m\rangle}{m^{s+k-n}}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s+k-n) > k+1$ (siehe [14, 17, 25]), also für $\mathrm{Re}(s) > n+1$. Alle vorherigen Umformungen sind deshalb wegen absoluter Konvergenz gerechtfertigt.

Mit der Definition von $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ in (1.7) auf Seite 11 erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} H(s) &= \tfrac{2}{i_N}\left(\tfrac{\pi}{N^2}\right)^{k-n}\left(\tfrac{2\pi}{N}\right)^{2n-2s-2k}\Gamma(s+k-n)\Gamma(s)L(2s,\chi^2)\sum_{m\geqslant 1}\frac{\chi(m)\langle f_m, g_m\rangle}{m^{s+k-n}} \\ &= \tfrac{2}{i_N}\left(\tfrac{\pi}{N^2}\right)^{k-n}\mathbb{D}_{f,g}(s+k-n,\chi). \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für $t=1$ bewiesen.

Sei jetzt $t>1$. Dann ist t durch eine Primzahl p teilbar. Nach Definition 1.18 auf Seite 39 gilt

$$\mathbb{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t}} = \mathbb{E}_{\frac{N}{t/p},\frac{N^2}{(t/p)^2},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_{\frac{N}{t/p}} + \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_N.$$

Weil wir per Induktion annehmen dürfen, daß (1.57) auf Seite 43 gültig ist mit $\frac{t}{p}$ an Stelle von t, genügt es zu zeigen, daß

$$\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_N,\ g|_k W_N\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} = 0. \tag{1.61}$$

Ist $\frac{N}{t}$ durch p teilbar, dann ist $\mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)$ nach Proposition 1.19(ii) auf Seite 39 identisch Null, und (1.61) ist erfüllt.

Bleibt also der Fall, daß $p \nmid \frac{N}{t}$ gilt. Weil $\Gamma_{n,1}(N,N^2)$ durch W_N normalisiert wird, und $\Gamma^1_{n,1}(N,N^2)$ eine Untergruppe von $\Gamma_{n,1}(N,N^2)$ ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_N,\ g|_k W_N\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} \\
= \quad &\left\{f_\chi \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s),\ g\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} \\
= \quad &\left\{f_\chi \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s),\ g\right\}_{\Gamma^1_{n,1}(N,N^2)}.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.1(v) auf Seite 13 wird $\Gamma^1_{n,1}(N,N^2)$ durch $M'_{N^2/p} = {M'_N}^{N/p}$ normalisiert, also gilt für jedes $\nu \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}
&\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_N,\ g|_k W_N\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} \\
= \quad &\left\{f_\chi|_k {M'_{N^2/p}}^\nu \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 {M'_{N^2/p}}^\nu,\ g|_k {M'_{N^2/p}}^\nu\right\}_{\Gamma^1_{n,1}(N,N^2)}.
\end{aligned}$$

Wegen ${M'_{N^2/p}}^\nu = M'_{N^2\nu/p}$, $g \in S_k(\Gamma_n)$ und Proposition 1.19(iv) auf Seite 39 erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
&\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_N,\ g|_k W_N\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} \\
= \quad &\frac{1}{p}\sum_{\nu(p)}\left\{f_\chi|_k {M'_{N^2/p}}^\nu \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 {M'_{N^2/p}}^\nu,\ g|_k {M'_{N^2/p}}^\nu\right\}_{\Gamma^1_{n,1}(N,N^2)} \\
= \quad &\frac{1}{p}\sum_{\nu(p)}\left\{f_\chi|_k M'_{N^2\nu/p} \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi}(\cdot,s),\ g\right\}_{\Gamma^1_{n,1}(N,N^2)}.
\end{aligned}$$

Wegen $t > 1$ ist χ nach Voraussetzung primitiv. Mit Lemma 1.6 auf Seite 21 folgt

$$\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathcal{E}_{\frac{N}{t},\frac{N^2}{t^2},p,\frac{t}{p},\chi^{(2)}}(\cdot,s)|_0 W_N,\ g|_k W_N\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} = 0.$$ ☺

Bei der Berechnung weiterer Skalarprodukte wird eine Charaktersumme auftreten, die wir bereits jetzt genauer untersuchen wollen.

Definition 1.21. Sind χ ein Dirichlet Charakter modulo N, ν ein Teiler von N und $m \in \mathbb{Z}$, dann setzen wir

$$A_{\chi,\nu}(m) := \nu^{-2} \sum_{\substack{\beta(N\nu)^\times \\ \gamma(N\nu)^\times \\ \beta\equiv\gamma\ (\nu)}} \chi\big(\tfrac{\beta-\gamma}{\nu}\big) e^{2\pi i m \frac{\gamma^*-\beta^*}{N\nu}}, \tag{1.62}$$

dabei sind $\beta^*, \gamma^* \in \mathbb{Z}$ jeweils so gewählt, daß $\beta\beta^* \equiv \gamma\gamma^* \equiv 1\ (N\nu)$ gilt. Ergänzend setzen wir $A_{\chi,\nu} := A_{\chi,\nu}(1)$.

***Bemerkung* 1.21.1.** Für $\nu = 1$ entspricht die Charaktersumme $A_{\chi,\nu}$ der Charaktersumme A_χ in [15].

Lemma 1.22. *Seien χ ein primitiver Dirichlet Charakter modulo N und ν ein Teiler von N. χ^2 werde induziert durch einen primitiven Dirichlet Charakter $\chi^{(2)}$ modulo L. Außerdem sei LR die kleinste Periode von χ^2 und $r = \frac{N}{(N,L\nu)}$. Dann gilt für $m \in \mathbb{Z}$*

$$A_{\chi,\nu}(m) = \begin{cases} \frac{1}{LR\nu}\chi(-m)\chi^{(2)}(R)\overline{\chi^{(2)}}\big(\frac{LR\nu}{N}\big)\mu(r)\varphi\big(\frac{R}{r}\big)G_{\overline{\chi}}^3 G_{\chi^{(2)}} & \textit{falls } N \mid LR\nu, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Insbesondere ist also $A_{\chi,\nu}(m) = \chi(m)A_{\chi,\nu}$.

***Beweis*.** Es ist

$$A_{\chi,\nu}(m) = \nu^{-2} \sum_{\substack{\beta(N\nu)^\times \\ \gamma(N\nu)^\times \\ \beta\equiv\gamma\ (\nu)}} \chi\big(\tfrac{\beta-\gamma}{\nu}\big) e^{2\pi i m \frac{\gamma^*-\beta^*}{N\nu}}$$

$$= \nu^{-2} \sum_{\substack{\beta(N\nu)^\times \\ \gamma(N\nu)^\times \\ \beta\equiv\gamma\ (\nu)}} \chi(\beta\gamma)\chi\big(\tfrac{\gamma^*-\beta^*}{\nu}\big) e^{2\pi i m \frac{\gamma^*-\beta^*}{N\nu}}$$

$$= \nu^{-2} \sum_{\substack{\beta(N\nu)^\times \\ \gamma(N\nu)^\times \\ \beta\equiv\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}(\beta^*\gamma^*)\chi\big(\tfrac{\gamma^*-\beta^*}{\nu}\big) e^{2\pi i m \frac{\gamma^*-\beta^*}{N\nu}}$$

$$= \nu^{-2} \sum_{\substack{\beta(N\nu) \\ \gamma(N\nu) \\ \beta\equiv\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}(\beta\gamma)\chi\big(\tfrac{\gamma-\beta}{\nu}\big)e^{2\pi i m\frac{\gamma-\beta}{N\nu}}$$

$$= \nu^{-2} \sum_{\substack{\beta(N\nu) \\ r(N)}} \overline{\chi}\big(\beta(\beta+\nu r)\big)\chi(r)e^{2\pi i m\frac{r}{N}}$$

$$= \nu^{-1} \sum_{\substack{\beta(N)^\times \\ r(N)^\times}} \overline{\chi}\big(\beta(\beta+\nu r)\big)\chi(r)e^{2\pi i m\frac{r}{N}}$$

$$= \nu^{-1} \sum_{\substack{\beta(N)^\times \\ r(N)^\times}} \overline{\chi}\big(\beta r(\beta r+\nu r)\big)\chi(r)e^{2\pi i m\frac{r}{N}}$$

$$= \nu^{-1} \sum_{\substack{\beta(N)^\times \\ r(N)^\times}} \overline{\chi}\big(\beta(\beta+\nu)\big)\overline{\chi}(r)e^{2\pi i m\frac{r}{N}}.$$

Weil $\overline{\chi}$ primitiv ist, gilt

$$\sum_{r(N)^\times} \overline{\chi}(r)e^{2\pi i m\frac{r}{N}} = \chi(m)G_{\overline{\chi}},$$

und wir erhalten weiter

$$A_{\chi,\nu}(m) = \nu^{-1}\chi(m)G_{\overline{\chi}} \sum_{\beta(N)^\times} \overline{\chi}(\beta)\overline{\chi}(\beta+\nu)$$

$$= \nu^{-1}\chi(m)\tfrac{G_{\overline{\chi}}}{G_\chi} \sum_{\beta(N)^\times} \overline{\chi}(\beta)\overline{\chi}(\beta+\nu)G_\chi.$$

Weil χ primitiv ist, gelten

$$\overline{\chi}(\beta+\nu)G_\chi = \sum_{\gamma(N)^\times} \chi(\gamma)e^{2\pi i(\beta+\nu)\frac{\gamma}{N}} \qquad \text{und} \qquad \tfrac{1}{G_\chi} = \tfrac{\chi(-1)G_{\overline{\chi}}}{N}.$$

Also ergibt sich

$$A_{\chi,\nu}(m) = \nu^{-1}\chi(-m)\tfrac{G_{\overline{\chi}}^2}{N} \sum_{\substack{\beta(N)^\times \\ \gamma(N)^\times}} \overline{\chi}(\beta)\chi(\gamma)e^{2\pi i(\beta+\nu)\frac{\gamma}{N}}$$

$$= \nu^{-1}\chi(-m)\frac{G_\chi^2}{N} \sum_{\substack{\beta(N)^\times \\ \gamma(N)^\times}} \overline{\chi}(\beta\gamma^*)\chi(\gamma)e^{2\pi i(\beta\gamma^*+\nu)\frac{\gamma}{N}}$$

$$= \nu^{-1}\chi(-m)\frac{G_\chi^2}{N} \sum_{\substack{\beta(N)^\times \\ \gamma(N)^\times}} \overline{\chi}(\beta)\chi^2(\gamma)e^{2\pi i\frac{\beta+\nu\gamma}{N}}$$

$$= \nu^{-1}\chi(-m)\frac{G_\chi^3}{N} \sum_{\gamma(N)^\times} \chi^2(\gamma)e^{2\pi i\frac{\nu\gamma}{N}}$$

$$= \nu^{-1}\chi(-m)\frac{G_\chi^3}{N} \sum_{\substack{\gamma(LR)^\times \\ r(\frac{N}{LR})}} \big(\mathbb{1}_R\chi^{(2)}\big)(rLR+\gamma)e^{2\pi i\frac{\nu(rLR+\gamma)}{N}}$$

$$= \nu^{-1}\chi(-m)\frac{G_\chi^3}{N} \sum_{\substack{\gamma(LR)^\times \\ r(\frac{N}{LR})}} \big(\mathbb{1}_R\chi^{(2)}\big)(\gamma)e^{2\pi i\frac{\nu(rLR+\gamma)}{N}}.$$

Gilt $N \nmid LR\nu$, dann ergibt die Summe über r, daß $A_{\chi,\nu}(m) = 0$ gilt.
Sei also $\frac{LR\nu}{N} \in \mathbb{Z}$. Dann erhalten wir

$$A_{\chi,\nu}(m) = \chi(-m)\frac{G_\chi^3}{LR\nu} \sum_{\gamma(LR)} \big(\mathbb{1}_R\chi^{(2)}\big)(\gamma)e^{2\pi i\frac{\nu LR}{N}\frac{\gamma}{LR}}.$$

Mit Lemma 1.14 auf Seite 33 ergibt sich

$$A_{\chi,\nu}(m) = \chi(-m)\frac{G_\chi^3}{LR\nu}\chi^{(2)}(R)\overline{\chi^{(2)}}\big(\tfrac{\nu LR}{N}\big)\mu(r)\varphi\big(\tfrac{R}{r}\big)G_{\chi^{(2)}}$$

mit

$$r = \frac{R}{(R, \frac{LR\nu}{N})} = \frac{NR}{\big(NR, LR\nu\big)} = \frac{N}{(N, L\nu)}.$$ ☺

Proposition 1.23. *Seien $\nu \in \{1,2,4\}$ und χ ein primitiver Dirichlet Charakter modulo N ($N>1$). Ist $\nu \neq 1$, so sei N durch 2ν teilbar. Ist $\nu = 4$, so sei N nicht durch 16 teilbar. χ^2 werde induziert von einem Charakter $\chi^{(2)}$ modulo $N^{(2)}$. Ferner seien $f, g \in S_k(\Gamma_n)$. Ist $N^{(2)}$ ein Teiler von $\frac{N}{\nu}$, dann gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > n+1$*

$$\big\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathbb{E}_{\frac{N}{\nu},\frac{N}{\nu},\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot, s),\ g|_k W_N\big\}$$

$$= \frac{2}{i_N}\frac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}}\left(\frac{\pi}{N^2}\right)^{k-n}\mathbb{D}_{f,g}(s+k-n,\overline{\chi}). \qquad (1.63)$$

Bemerkung. Die Aussage von Proposition 1.23 für $\nu = 1$ wurde bereits in [15, Section 5, Lemma 3] behandelt.

Korollar 1.23.1. *Sei χ ein primitiver Dirichlet Charakter modulo N mit $N > 1$. Ferner werde χ^2 induziert durch einen primitiven Dirichlet Charakter $\chi^{(2)}$ modulo L, und LR sei die kleinste Periode von χ^2. Dann gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit* $\mathrm{Re}(s) > n+1$

$$\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathbb{E}_{LR,LR,\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot,s),\ g|_k W_N\right\}$$

$$= \frac{2}{i_N}\left(\frac{\pi}{N^2}\right)^{k-n}\overline{\chi^{(2)}}(R)\mu(R)G_{\overline{\chi^{(2)}}}\left(\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\right)^4\mathbb{D}_{f,g}(s+k-n,\overline{\chi}). \qquad (1.64)$$

Für den Beweis von Korollar 1.23.1 benötigen wir

Lemma 1.24. *Ist χ ein primitiver Charakter modulo N, dann ist die kleinste Periode von χ^2 gleich*

$$\begin{cases} N & \textit{falls } \mathrm{v}_2(N) = 0, \\ \frac{N}{4} & \textit{falls } \mathrm{v}_2(N) = 3, \\ \frac{N}{2} & \textit{sonst.} \end{cases}$$

***Beweis von Lemma* 1.24**. Ist $N = N_1N_2$ mit $(N_1,N_2) = 1$, dann ist χ das Produkt von zwei primitiven Dirichlet Charakteren χ_1 modulo N_1 und χ_2 modulo N_2. Deshalb genügt es, die Behauptung für den Fall zu beweisen, daß $N = p^\alpha$ eine Primzahlpotenz ist.

Gilt $p \neq 2$ und $\alpha = 1$, dann ist die kleinste Periode von χ^2 gleich p, weil sie wegen $\chi^2(1) \neq \chi^2(0) = 0$ nicht 1 sein kann.

Für $p \neq 2$ und $\alpha > 1$ ist ein Dirichlet Charakter modulo p^α genau dann primitiv, wenn er primitive $p^{\alpha-1}$-te Einheitswurzeln annimmt. Deshalb ist in diesem Fall auch χ^2 primitiv, und die kleinste Periode von χ^2 ist p^α.

Zu $p = 2$ und $\alpha = 1$ gibt es keinen primitiven Dirichlet Charakter.

Zu $p = 2$ und $\alpha \in \{2,3\}$ sind alle Dirichlet Charaktere reell, in diesen Fällen besitzt χ^2 also die kleinste Periode 2.

Für $p = 2$ und $\alpha \geqslant 3$ ist ein Dirichlet Charakter modulo 2^α genau dann primitiv, wenn er primitive $2^{\alpha-2}$-te Einheitswurzeln annimmt. Ist also χ ein primitiver Dirichlet Charakter modulo 2^α mit $\alpha \geqslant 4$, dann wird χ^2 induziert von einem primitiven Charakter modulo $2^{\alpha-1}$. Demnach ist die kleinste Periode von χ^2 in diesem Fall gleich $2^{\alpha-1}$. ⊡

***Beweis von Korollar* 1.23.1.** Ist N gerade, dann ist N sogar durch 4 teilbar, denn χ ist primitiv. Deshalb erfüllt $\nu := \frac{N}{RL}$ nach Lemma 1.24 die Voraussetzungen von Proposition 1.23, und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > n+1$ gilt

$$\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathbb{E}_{LR,LR,\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot, s),\ g|_k W_N\right\}$$

$$= \frac{2}{i_N} \frac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}} \left(\frac{\pi}{N^2}\right)^{k-n} \mathbb{D}_{f,g}(s+k-n, \overline{\chi}). \tag{1.65}$$

Wegen $LR\nu = N$, $\frac{N}{(N,L\nu)} = R$ und $\chi(-1)G_{\overline{\chi}}G_\chi = N$ erhalten wir aus Lemma 1.22 auf Seite 48

$$A_{\overline{\chi},\nu} = \overline{\chi^{(2)}}(R)\mu(R)G_{\overline{\chi^{(2)}}}G_{\overline{\chi}}\left(\frac{G_\chi}{\sqrt{N}}\right)^4,$$

und die Behauptung folgt aus (1.65). ⌻

Für den Beweis von Proposition 1.23 benötigen wir noch

Lemma 1.25. *Sei χ ein Dirichlet Charakter modulo N, und N sei gerade. Ist der 2-Anteil von χ primitiv, dann gilt*

$$\chi\left(m + \tfrac{N}{2}\right) = -\chi(m) \quad \textit{für alle} \quad m \in \mathbb{Z}.$$

***Beweis*.** Weil N gerade ist, und der 2-Anteil von χ primitiv ist, muß N durch 4 teilbar sein. Für gerade $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\chi(m)\chi\left(\tfrac{N}{2}+1\right) = 0 = \chi\left(m + \tfrac{N}{2}\right), \tag{1.66}$$

und für ungerade $m \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\chi(m)\chi\left(\tfrac{N}{2}+1\right) = \chi\left(m + \tfrac{N}{2} + \tfrac{m-1}{2}N\right) = \chi\left(m + \tfrac{N}{2}\right). \tag{1.67}$$

Die kleinste Periode von χ sei M. Weil der 2-Anteil von χ primitiv ist, gilt $\mathrm{v}_2(M) = \mathrm{v}_2(N)$. Deshalb kann $\frac{N}{2}$ keine Periode von χ sein. Wegen (1.66) und (1.67) muß dann $\chi\left(\frac{N}{2}+1\right) \neq 1$ sein.

Weil

$$\chi\left(\tfrac{N}{2}+1\right)^2 = \chi\left(N\left(\tfrac{N}{4}+1\right)+1\right) = \chi(1) = 1$$

gilt, folgt $\chi\left(\frac{N}{2}+1\right) = -1$. Aus (1.66) und (1.67) ergibt sich jetzt die Behauptung. ⌻

***Beweis von Proposition* 1.23 *auf Seite* 50**. Weil $\Gamma_{n,1}(N,N^2)$ normalisiert wird durch W_N, gilt $g|_kW_N \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),k\big]$. Nach Korollar 1.4.1 und Proposition 1.4 auf Seite 20 gilt $f_\chi|_kW_N \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),k,\overline{\chi}^2\big]$. Wegen Proposition 1.9 auf Seite 24 ist $\mathbb{E}_{\frac{N}{\nu},\frac{N^2}{\nu^2},\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot,s) \in \big[\Gamma_{n,1}\big(\frac{N}{\nu},\frac{N^2}{\nu^2}\big),0,\chi^{(2)}\big]$, insbesondere also

$$\mathbb{E}_{\frac{N}{\nu},\frac{N^2}{\nu^2},\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot,s) \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),0,\chi^2\big].$$

Somit ist

$$f_\chi|_kW_N\cdot\mathbb{E}_{\frac{N}{\nu},\frac{N^2}{\nu^2},\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot,s) \in \big[\Gamma_{n,1}(N,N^2),k,\mathbb{1}_N\big],$$

und die linke Seite von (1.63) auf Seite 51, die wir mit $H(s)$ bezeichnen wollen, ist wohldefiniert.

Weil $\Gamma_{n,1}(N,N^2)$ durch W_N normalisiert wird, erhalten wir

$$H(s)=\big\{f_\chi\cdot\mathbb{E}_{\frac{N}{\nu},\frac{N}{\nu},\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot,s)|_0W_N,\ g\big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}.$$

Nach Voraussetzung ist $\frac{N}{\nu}$ durch jeden Primteiler von ν teilbar, deshalb erhalten wir aus Korollar 1.19.1 auf Seite 40

$$H(s)=\big\{f_\chi\cdot\mathbb{E}_{N,N\nu,\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot,s)|_0W_{N\nu},\ g\big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}.$$

Der Dirichlet Charakter χ^2 wird durch $\chi^{(2)}$ induziert. Deshalb gilt

$$H(s)=\big\{f_\chi\cdot\mathbb{E}_{N,N\nu,\overline{\chi}^2}(\cdot,s)|_0W_{N\nu},\ g\big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}.$$

Weil $\Gamma_{n,1}\big(N\nu,(N\nu)^2\big)$ durch $W_{N\nu}$ normalisiert wird, gilt

$$H(s)=\big\{f_\chi|_kW_{N\nu}\cdot\mathbb{E}_{N,N\nu,\overline{\chi}^2}(\cdot,s),\ g|_kW_{N\nu}\big\}_{\Gamma_{n,1}(N\nu,(N\nu)^2)}.$$

Aus der Definition des Petersson Skalarprodukts in (1.55) auf Seite 42 folgern wir

$$\begin{aligned}H(s)&=\big\{\mathbb{E}_{N,N\nu,\overline{\chi}^2}(\cdot,s),\ \overline{f_\chi|_kW_{N\nu}}\cdot g|_kW_{N\nu}\cdot\big(\det\operatorname{Im}(\cdot)\big)^k\big\}_{\Gamma_{n,1}(N\nu,(N\nu)^2)}\\&=\Big\{\mathbb{E}_{N,N\nu,\overline{\chi}^2}(\cdot,s),\ \operatorname{tr}\Big(\overline{f_\chi|_kW_{N\nu}}\cdot g|_kW_{N\nu}\cdot\big(\det\operatorname{Im}(\cdot)\big)^k\Big)\Big\}_{\Gamma_{n,1}(N,N\nu)},\end{aligned}$$

dabei ist tr die Spurabbildung (adjungiert zur Inklusion) von Modulformen vom Gewicht 0 und Charakter χ^2 auf $\Gamma_{n,1}\big(N\nu,(N\nu)^2\big)$ zu solchen auf $\Gamma_{n,1}(N,N\nu)$.

Für eine Modulform F vom Gewicht 0 und Charakter χ^2 auf $\Gamma_{n,1}\big(N\nu,(N\nu)^2\big)$ gilt

$$\operatorname{tr}(F) = c_\nu^{-1} \sum_{M\in\Gamma_{n,1}\left(N\nu,(N\nu)^2\right)\backslash\Gamma_{n,1}(N,N\nu)} \overline{\chi}(M)^2 F|_0 M$$

mit

$$c_\nu = \big[\Gamma_{n,1}(N,N\nu) : \Gamma_{n,1}\big(N\nu,(N\nu)^2\big)\big].$$

Nach Korollar 1.2.1 auf Seite 17 gilt $c_\nu = N\nu^{2n-1}$ und

$$\frac{1}{\big[\Gamma_n : \Gamma_{n,1}(N,N\nu)\big]} = \frac{\big[\Gamma_{n,1}(N,N\nu) : \Gamma_{n,1}(N,N^2)\big]}{\big[\Gamma_n : \Gamma_{n,1}(N,N^2)\big]} = \frac{1}{i_N}\frac{N}{\nu}.$$

Mit dem Vertretersystem aus Korollar 1.2.2 auf Seite 17 erhalten wir unter Beachtung von (1.56) auf Seite 42

$$\operatorname{tr}\Big(\overline{f_\chi|_k W_{N\nu}} \cdot g|_k W_{N\nu} \cdot \big(\det\operatorname{Im}(\cdot)\big)^k\Big) = S\cdot\det\big(\operatorname{Im}(\cdot)\big)^k$$

mit

$$S := \sum_{\substack{d\,|\,\nu \\ \lambda\in\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-2})=1 \\ \beta(N\nu)}} f_\chi|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\beta}\mathcal{M}_\lambda)\cdot\overline{g|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\beta}\mathcal{M}_\lambda)}.$$

Wegen (1.36) auf Seite 25 und (1.55) auf Seite 42 erhalten wir

$$H(s) = \tfrac{1}{i_N}\nu^{-2n}\pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)L(2s,\overline{\chi}^2)\int\limits_{\mathcal{C}} E_{N,N\nu,\overline{\chi}^2}(Z,s)S(Z)(\det Y)^k\mathrm{d}v_n,$$

dabei ist $\mathcal{C}$ ein Fundamentalbereich für die Operation von $\Gamma_{n,1}(N,N\nu)$ auf $\mathbb{H}_n$.

Wegen (1.59) auf Seite 45 ergibt sich durch Entfalten

$$H(s) = \tfrac{2}{i_N}\nu^{-2n}\pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)L(2s,\overline{\chi}^2)$$
$$\cdot\int\limits_{\mathcal{F}_{n,1}} (\det Y_1)^{k-n-1}\big(y - Y_1^{-1}[v]\big)^{s+k-n-1}S(Z)\mathrm{d}X\mathrm{d}Y, \tag{1.68}$$

wobei $\mathcal{F}_{n,1}$ ein Fundamentalbereich für die Aktion von $\Gamma_{n,1}$ auf $\mathbb{H}_n$ ist.

Ein solcher Fundamentalbereich ist gegeben durch

$$\mathcal{F}_{n,1} = \Big\{ Z \in \mathbb{H}_n \;\Big|\; (Z_1, w) \in \mathcal{F}_n^*,\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ y > Y_1^{-1}[v] \Big\},$$

dabei ist

$$\mathcal{F}_n^* := \Big\{ (Z_1, w) \;\Big|\; Z_1 \in \mathcal{F}_{n-1},\ w = u + iv,\ v \in \mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)}, \\ 0 \leqslant u_1 \leqslant \tfrac{1}{2},\ |u_j| \leqslant \tfrac{1}{2} \text{ für } 2 \leqslant j \leqslant n-1 \Big\}$$

ein Fundamentalbereich für die Operation der Jacobigruppe auf $\mathbb{H}_{n-1} \times \mathbb{C}^{(n-1,1)}$.

Durch Addition der Gleichung (1.68) zu den Fundamentalbereichen $\mathcal{F}_{n,1}$ und $\mathcal{D}_{-1}\langle \mathcal{F}_{n,1} \rangle$ finden wir

$$\Big(\tfrac{1}{i_N} \nu^{-2n} \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) L(2s, \overline{\chi}^2)\Big)^{-1} H(s) \\ = \int\limits_{\substack{Z_1 \in \mathcal{F}_{n-1} \\ v \in \mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)} \\ u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{(n-1,1)} \\ y > Y_1^{-1}[v] \\ 0 \leqslant x \leqslant 1}} (\det Y_1)^{k-n-1} \big(y - Y_1^{-1}[v]\big)^{s+k-n-1} S(Z) \mathrm{d}X \mathrm{d}Y.$$

Wegen $S \cdot \det\big(\mathrm{Im}(\cdot)\big)^k \in \big[\Gamma_{n,1}(N, N\nu), 0, \chi^2\big]$ und (1.56) auf Seite 42 gilt $S\big(\mathcal{D}_\varepsilon\langle Z\rangle\big) = S(Z)$ für $\varepsilon \in \{\pm 1\}$. Wir erhalten

$$\Big(\tfrac{1}{2i_N} \nu^{-2n} \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) L(2s, \overline{\chi}^2)\Big)^{-1} H(s) \\ = \int\limits_{\substack{Z_1 \in \mathcal{F}_{n-1} \\ v \in \mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)} \\ u \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{(n-1,1)} \\ y > Y_1^{-1}[v] \\ 0 \leqslant x \leqslant 1}} (\det Y_1)^{k-n-1} \big(y - Y_1^{-1}[v]\big)^{s+k-n-1} \\ \cdot \sum_{\varepsilon \in \{\pm 1\}} S\big(\mathcal{D}_\varepsilon\langle Z\rangle\big) \mathrm{d}X \mathrm{d}Y. \tag{1.69}$$

Mit Korollar 1.4.1(i) auf Seite 20 ergibt sich aus

$$M_{\mu/N} W_{N\nu} = W_{N\nu} M'_{-N\mu\nu^2} \qquad \text{und} \qquad M'_{-N\mu\nu^2} \mathcal{M}_{d,\beta} = \mathcal{M}_{d,\beta-\mu\nu},$$

daß gilt

$$\begin{aligned}
G_{\overline{\chi}} \sum_{\varepsilon\in\{\pm1\}} S|_0 \mathcal{D}_\varepsilon
&= \sum_{\substack{\varepsilon\in\{\pm1\}\\ d\,|\,\nu \\ \lambda\in\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-2})=1 \\ \beta(N\nu),\ \mu(N)}} \overline{\chi}(\mu) f|_k(M_{\mu/N} W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\beta}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon) \cdot \overline{g|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\beta}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)} \\
&= \sum_{\substack{\varepsilon\in\{\pm1\}\\ d\,|\,\nu \\ \lambda\in\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-2})=1 \\ \beta(N\nu),\ \mu(N)}} \overline{\chi}(\mu) f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\beta-\mu\nu}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon) \cdot \overline{g|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\beta}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)} \\
&= \sum_{\substack{\varepsilon\in\{\pm1\}\\ d\,|\,\nu \\ \lambda\in\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-2})=1 \\ \beta(N\nu),\ \gamma(N\nu) \\ \beta\equiv\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}\left(\tfrac{\beta-\gamma}{\nu}\right) f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\gamma}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon) \cdot \overline{g|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,\beta}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)} \\
&= \sum_{\substack{\varepsilon\in\{\pm1\}\\ d\,|\,\nu \\ \lambda\in\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)} \\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-2})=1 \\ B\,|\,N\nu,\ \beta\left(\frac{N\nu}{B}\right)^\times \\ C\,|\,N\nu,\ \gamma\left(\frac{N\nu}{C}\right)^\times \\ B\beta\equiv C\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}\left(\tfrac{B\beta-C\gamma}{\nu}\right) f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon) \cdot \overline{g|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,B\beta}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{1.70}$$

Zunächst wollen wir bei festem B, C, d und λ die Fourier-Jacobi Entwicklung von $f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)$ berechnen.

Zu jedem $\gamma \in \left(\mathbb{Z}/\frac{N\nu}{C}\mathbb{Z}\right)^\times$ wählen wir ein $\gamma^* \in \mathbb{Z}$ mit $\gamma\gamma^* \equiv 1 \ \left(\frac{N\nu}{C}\right)$. Wegen $C\,|\,N\nu$, $\nu\,|\,4$ und $d\,|\,\nu$ können wir $\mu \in \{1,2,4\}$ minimal wählen, so daß $C\,|\,Nd\mu$ gilt. Dann ist $Nd\mu$ ein Teiler von $N\nu$ und $\frac{\nu}{d\mu}$ eine ganze Zahl.

Weil $\frac{\nu}{d\mu}$ ein Teiler von $\frac{N\nu}{C}$ ist, ist die Restklasse von γ^* modulo $\frac{\nu}{d\mu}$ eindeutig bestimmt. Wegen $\frac{\nu}{d\mu} \in \{1,2,4\}$ liegt in dieser primen Restklasse ein Vertreter $\varepsilon_\gamma \in \{\pm 1\}$.

Ist $\mu = 1$ und N durch $C\nu$ teilbar, dann setzen wir $r := \frac{\varepsilon_\gamma - \gamma^*}{\nu/d}$ und

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma} := \mathcal{D}_{\varepsilon_\gamma} \mathcal{M}_\lambda^{-1} \left(\begin{array}{cc|cc} I & & -\frac{Nd^2\varepsilon_\gamma}{C\nu}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & \\ & 1 & & \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} I & & \frac{Ndr}{C}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & r\mathfrak{e} \\ & 1 & r\mathfrak{e}' & \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -I & \frac{Nd}{C}\mathfrak{e} & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -I & \\ & & \frac{Nd}{C}\mathfrak{e}' & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & \frac{\gamma\gamma^*-1}{N\nu/C} & & -\gamma^* \\ \hline & & I & \\ & \gamma & & -\frac{N\nu}{C} \end{array}\right) J$$

liegt in Γ_n, denn r ist eine ganze Zahl.
Wegen

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma} W_{N\nu} \mathcal{M}_{d,C\gamma} \mathcal{M}_\lambda \mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}_C \left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \frac{d}{C\nu}\boldsymbol{\lambda_2} \\ \frac{d}{C\nu}\boldsymbol{\lambda_1}' & 1 & \frac{d}{C\nu}\boldsymbol{\lambda_2}' & \frac{\gamma^*}{NC\nu} \\ \hline & & I & -\frac{d}{C\nu}\boldsymbol{\lambda_1} \\ & & & 1 \end{array}\right) \mathcal{D}_{\varepsilon\varepsilon_\gamma}$$

mit

$$\boldsymbol{\lambda_1} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})', \qquad \boldsymbol{\lambda_2} = (\lambda_n, \ldots, \lambda_{2n-2})',$$

$\varepsilon\varepsilon_\gamma \in \{\pm 1\}$ und $\mu = 1$ gilt

$$\begin{aligned}\big(f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\boldsymbol{\mathcal{M}}_\lambda \mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z) &= \big(f|_k(\mathcal{N}_{d,C,\gamma}W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\boldsymbol{\mathcal{M}}_\lambda \mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z) \\ &= C^k \sum_{m \geqslant 1} f_{m,C,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\gamma) e^{2\pi i m\left(\frac{C^2}{\mu^2}z + \frac{C\gamma^*}{N\mu^2\nu}\right)}\end{aligned} \tag{1.71}$$

mit Funktionen

$$f_{m,C,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,\varepsilon_\gamma) := f_m\big(Z_1,\varepsilon\varepsilon_\gamma Cw+\tfrac{d}{\nu}(Z_1\boldsymbol{\lambda_1}+\boldsymbol{\lambda_2})\big)e^{2\pi i m\left(\frac{d^2}{\nu^2}(Z_1[\boldsymbol{\lambda_1}]+\boldsymbol{\lambda_1}'\boldsymbol{\lambda_2})+\frac{2d}{\nu}C\varepsilon\varepsilon_\gamma\boldsymbol{\lambda_1}'w\right)}. \tag{1.72}$$

Wir zeigen jetzt, daß auch in allen anderen Fällen eine Formel analog zu (1.71) gilt.

Ist $\mu=1$ und N nicht durch $C\nu$ teilbar, dann setzen wir wieder $r:=\frac{\varepsilon_\gamma-\gamma^*}{\nu/d}$. Wieder liegt

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma} := \left(\begin{array}{cc|cc} I & & \frac{Ndr}{C}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & r\mathfrak{e} \\ & 1 & r\mathfrak{e}' & \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} -I & \frac{Nd}{C}\mathfrak{e} & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -I & \\ & & \frac{Nd}{C}\mathfrak{e}' & 1 \end{array}\right)$$

$$\cdot\left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & \frac{\gamma\gamma^*-1}{N\nu/C} & & -\gamma^* \\ \hline & & I & \\ & \gamma & & -\frac{N\nu}{C} \end{array}\right)J$$

in Γ_n, weil r eine ganze Zahl ist.
Wegen

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma}W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma} = \mathcal{D}_C\left(\begin{array}{cc|cc} I & & \frac{Nd^2\varepsilon_\gamma}{C\nu}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & \frac{d\varepsilon_\gamma}{C\nu}\mathfrak{e} \\ & 1 & \frac{d\varepsilon_\gamma}{C\nu}\mathfrak{e}' & \frac{\gamma^*}{NC\nu} \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

gilt

$$\begin{aligned}\big(f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z) &= \big(f|_k(\mathcal{N}_{d,C,\gamma}W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z)\\ &= C^k\sum_{m\geqslant 1} f_{m,C,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,\varepsilon_\gamma)e^{2\pi i m\left(\frac{C^2}{\mu^2}z+\frac{C\gamma^*}{N\mu^2\nu}\right)}\end{aligned}$$

mit Funktionen $f_{m,C,d,\lambda}$, die von Z_1, w und ε, nicht aber von z, und nur über ε_γ von γ abhängen.

Jetzt betrachten wir den Fall, daß $\mu = 2$, also $2Nd$ aber nicht Nd durch C teilbar ist. Dann ist $\frac{2Nd}{C}$ ungerade, und wegen $\nu \,|\, 4$ ist $\frac{N\nu}{C}$ nicht durch 4 teilbar. Also können wir γ^* sogar so wählen, daß außer $\gamma\gamma^* \equiv 1 \left(\frac{N\nu}{C}\right)$ auch $\gamma^* \equiv 1 \ (2\nu)$ gilt. Dann ist $r := \frac{\gamma^*-1}{\nu}$ eine gerade Zahl, und die Matrix

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma} := \left(\begin{array}{cc|cc} I & & -\frac{4Nd^2r}{C}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & dr\left(\frac{2Nd}{C}-1\right)\mathfrak{e} \\ & 1 & dr\left(\frac{2Nd}{C}-1\right)\mathfrak{e} & dr\left(1-\frac{Nd}{C}\right) \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} I+\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & -\mathfrak{e} & & \\ -\mathfrak{e}' & 1 & & \\ \hline & & I & \mathfrak{e} \\ & & \mathfrak{e}' & 2 \end{array}\right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -I & \left(\frac{Nd}{C}+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{e} & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -I & \\ & & \left(\frac{Nd}{C}+\frac{1}{2}\right)\mathfrak{e}' & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & \frac{\gamma\gamma^*-1}{N\nu/C} & & -\gamma^* \\ \hline & & I & \\ & \gamma & & -\frac{N\nu}{C} \end{array}\right) J$$

liegt in Γ_n.
Wegen

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma} W_{N\nu} \mathcal{M}_{d,C\gamma} = \left(\begin{array}{cc|cc} I+\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & & & \\ -\mathfrak{e}' & \frac{C}{2} & & \\ \hline & & I-\frac{1}{2}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & \frac{1}{C}\mathfrak{e} \\ & & & \frac{2}{C} \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} I & & \frac{Nd^2}{C\nu}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & \frac{d}{C\nu}\mathfrak{e} \\ & 1 & \frac{d}{C\nu}\mathfrak{e}' & \frac{\gamma^*}{NC\nu} \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

gilt auch in diesem Fall

$$\begin{aligned} \big(f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z) &= \big(f|_k(\mathcal{N}_{d,C,\gamma}W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z) \\ &= C^k \sum_{m\geqslant 1} f_{m,C,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,\varepsilon_\gamma)e^{2\pi i m\left(\frac{C^2}{\mu^2}z+\frac{C\gamma^*}{N\mu^2\nu}\right)} \end{aligned}$$

mit Funktionen $f_{m,C,d,\lambda}$, die von Z_1, w und ε, nicht aber von z, ε_γ oder γ abhängen.

Bleibt der Fall, daß $\mu = 4$, also $4Nd$ aber nicht $2Nd$ durch C teilbar ist. Weil $\frac{4Nd}{C}$ ungerade ist, können wir $\varepsilon_C \in \{\pm 1\}$ so wählen, daß $\frac{4Nd}{C} \equiv \varepsilon_C \ (4)$

gilt. Analog zum vorigen Fall können wir γ^* so wählen, daß $\gamma^* \equiv 1\ (4\nu)$ gilt. Dann ist $r := -\frac{12Nd}{C} - \varepsilon_C$ durch 4 teilbar, und $s := \frac{3d(\gamma^*-1)}{4\nu}(r - \varepsilon_C)$ ist eine ganze Zahl. Also liegt

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma} = \left(\begin{array}{cc|cc} I & & -\frac{16Nd^2\gamma^*}{C\nu}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & \frac{dr\gamma^*\varepsilon_C}{\nu}\mathfrak{e} \\ & 1 & \frac{dr\gamma^*\varepsilon_C}{\nu}\mathfrak{e}' & s \\ \hline & & I & \\ & & & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} I+3\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & \varepsilon_C\mathfrak{e} & & \\ 3\varepsilon_C\mathfrak{e}' & 1 & & \\ \hline & & I & -3\varepsilon_C\mathfrak{e} \\ & & -\varepsilon_C\mathfrak{e}' & 4 \end{array}\right)$$

$$\cdot \left(\begin{array}{cc|cc} -I & \left(\frac{Nd}{C} - \frac{\varepsilon_C}{4}\right)\mathfrak{e} & & \\ & 1 & & \\ \hline & & -I & \\ & & \left(\frac{Nd}{C} - \frac{\varepsilon_C}{4}\right)\mathfrak{e}' & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} I & & & \\ & \frac{\gamma\gamma^*-1}{N\nu/C} & & -\gamma^* \\ \hline & & I & \\ & \gamma & & -\frac{N\nu}{C} \end{array}\right) J,$$

in Γ_n.
Wegen

$$\mathcal{N}_{d,C,\gamma} W_{N\nu} \mathcal{M}_{d,C\gamma} = \left(\begin{array}{cc|cc} I+3\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & & & \\ 3\varepsilon_C\mathfrak{e}' & \frac{C}{4} & & \frac{\gamma^*}{4N\nu} + \frac{6d(C\varepsilon_C + 6Nd)}{C^2\nu} \\ \hline & & I - \frac{3}{4}\mathfrak{e}\mathfrak{e}' & \frac{-3\varepsilon_C}{C}\mathfrak{e} \\ & & & \frac{4}{C} \end{array}\right)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \big(f|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathscr{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z) &= \big(f|_k(\mathcal{N}_{d,C,\gamma}W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,C\gamma}\mathscr{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)\big)(Z) \\ &= C^k \sum_{m\geqslant 1} f_{m,C,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\gamma) e^{2\pi i m\left(\frac{C^2}{\mu^2}z + \frac{C\gamma^*}{N\mu^2\nu}\right)} \end{aligned}$$

mit Funktionen $f_{m,C,d,\lambda}$, die von Z_1, w und ε, nicht aber von z, ε_γ oder γ abhängen.

Formen wir $g|_k(W_{N\nu}\mathcal{M}_{d,B\beta}\mathcal{M}_\lambda\mathcal{D}_\varepsilon)$ in entsprechender Weise um, dann erhalten wir aus (1.70) auf Seite 56

$$G_{\overline{\chi}} \sum_{\varepsilon\in\{\pm 1\}} S\big(\mathcal{D}_\varepsilon\langle Z\rangle\big)$$

$$= \quad (BC)^k \sum_{\substack{\varepsilon\in\{\pm 1\}\\ d\,|\,\nu\\ \lambda\in\{1,\dots,\frac{\nu}{d}\}^{(1,2n-2)}\\ (\lambda_1,\dots,\lambda_{2n-2})=1\\ B\,|\,N\nu,\ \beta(\frac{N\nu}{B})^\times\\ C\,|\,N\nu,\ \gamma(\frac{N\nu}{C})^\times\\ B\beta\equiv C\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}\big(\tfrac{B\beta-C\gamma}{\nu}\big) f_{m_1,C,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,\varepsilon_\gamma)e^{2\pi i m_1\left(\frac{C^2}{\mu_1^2}z+\frac{C\gamma^*}{N\mu_1^2\nu}\right)}$$
$$\cdot\ \overline{g_{m_2,B,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,\varepsilon_\beta)e^{2\pi i m_2\left(\frac{B^2}{\mu_2^2}z+\frac{B\beta^*}{N\mu_2^2\nu}\right)}}. \tag{1.73}$$

Um daraus

$$G_{\overline{\chi}}\sum_{\varepsilon\in\{\pm 1\}}\int_0^1 S\big(\mathcal{D}_\varepsilon\langle Z\rangle\big)\mathrm{d}x$$

zu berechnen, berechnen wir zunächst

$$\int_0^1 (BC)^k \sum_{\substack{m_1,m_2\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}\\ \beta(\frac{N\nu}{B})^\times\\ \gamma(\frac{N\nu}{C})^\times\\ B\beta\equiv C\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}\big(\tfrac{B\beta-C\gamma}{\nu}\big) f_{m_1,C,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,\varepsilon_\gamma)e^{2\pi i m_1\left(\frac{C^2}{\mu_1^2}z+\frac{C\gamma^*}{N\mu_1^2\nu}\right)}$$
$$\cdot\ \overline{g_{m_2,B,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,\varepsilon_\beta)e^{2\pi i m_2\left(\frac{B^2}{\mu_2^2}z+\frac{B\beta^*}{N\mu_2^2\nu}\right)}}\mathrm{d}x. \tag{1.74}$$

für festes B, C, d und λ.

Im folgenden wollen wir zeigen, daß (1.74) nur für $B = C = 1$ von Null verschieden sein kann.

Zunächst zeigen wir, daß (1.74) gleich Null ist, wenn $\mu_1\mu_2 \neq 1$ ist. Aufgrund der Symmetrie dürfen wir annehmen, daß $\mu_1 \neq 1$ ist, also $\mu_1 \in \{2,4\}$. Wegen $\mu_1\,|\,\nu$ muß also $\nu \in \{2,4\}$ sein. Nach Voraussetzung gilt dann $2\nu\,|\,N$, und aus $\mathrm{v}_2(C) = \mathrm{v}_2(Nd\mu_1)$ und $\mathrm{v}_2(N) \geqslant \mathrm{v}_2(2\nu)$ folgt $2\mu_1\nu\,|\,C$.
Wir zeigen jetzt sogar, daß (1.74) bereits gleich Null ist, wenn $2\mu_1\nu\,|\,C$ gilt, unabhängig vom Wert von ν.

Aus $2\,|\,C$, $C\,|\,N\nu$ und $\nu\,|\,N$ ergibt sich, daß N gerade ist. Weil χ primitiv modulo N ist, muß dann N sogar durch 4 teilbar sein.

Wegen $\nu \mid C$ folgt aus der Kongruenzbedingung $B\beta \equiv C\gamma\ (\nu)$ in (1.74), daß $\nu \mid B$. Außerdem dürfen wir annehmen, daß $\left(\frac{B}{\nu}, \frac{C}{\nu}\right) = 1$, also insbesondere $\mathrm{v}_2(B) = \mathrm{v}_2(\nu)$, weil sonst $\overline{\chi}\left(\frac{B\beta - C\gamma}{\nu}\right) = 0$ für alle β, γ gilt. Aus $\mathrm{v}_2(B) = \mathrm{v}_2(\nu)$ und $4 \mid N$ folgt $B \mid \frac{N\nu}{4}$. Für $\nu = 1$ gilt also $B \mid \frac{N}{4}$. Ist dagegen $\nu \neq 1$, dann folgt aus $\mathrm{v}_2(N) \geqslant \mathrm{v}_2(2\nu) = \mathrm{v}_2(2B)$, daß $B \mid \frac{N}{2}$. In jedem Fall gilt also $B \mid N$ und deshalb $\mu_2 = 1$.
Das Integral in (1.74) ist nur für $m_1 \frac{C^2}{\mu_1^2} = m_2 B^2$ von Null verschieden. Wegen $(B, C) = \nu$ ist dies gleichbedeutend mit $m_1 = m\frac{B^2}{\nu^2}$, $m_2 = m\frac{C^2}{\mu_1^2\nu^2}$ mit $m \in \mathbb{N}$. In diesem Fall erhalten wir aus (1.74)

$$(BC)^k \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ \varepsilon \in \{\pm 1\} \\ \beta\left(\frac{N\nu}{B}\right)^\times \\ \gamma\left(\frac{N\nu}{C}\right)^\times}} \overline{\chi}\left(\tfrac{B}{\nu}\beta - \tfrac{C}{\nu}\gamma\right) f_{\frac{mB^2}{\nu^2},C,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\gamma) \overline{g_{\frac{mC^2}{\mu_1^2\nu^2},B,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\beta)} \cdot e^{-4\pi y m \frac{B^2C^2}{\mu_1^2\nu^2} + 2\pi i \frac{mBC(B\gamma^* - C\beta^*)}{N\mu_1^2\nu^3}}. \tag{1.75}$$

Wegen $B \mid \frac{N\nu}{4}$ besitzen $\frac{N\nu}{2B}$ und $\frac{N\nu}{B}$ die gleichen Primteiler. Also gibt es zu jedem β in dem gewählten Vertretersystem für $\left(\frac{N\nu}{B}\right)^\times$ in (1.75) ein $\tilde{\beta}$ in demselben Vertretersystem mit $\tilde{\beta} \equiv \beta - \frac{N\nu}{2B}\ \left(\frac{N\nu}{B}\right)$. Wegen $B \mid \frac{N}{2}$ gilt $\tilde{\beta} \equiv \beta\ (\nu)$, und deshalb auch $\varepsilon_{\tilde{\beta}} = \varepsilon_\beta$. Nach Lemma 1.25 auf Seite 52 gilt

$$\overline{\chi}\left(\tfrac{B}{\nu}\tilde{\beta} - \tfrac{C}{\nu}\gamma\right) = \overline{\chi}\left(\tfrac{B}{\nu}\beta + \tfrac{N}{2} - \tfrac{C}{\nu}\gamma\right) = -\overline{\chi}\left(\tfrac{B}{\nu}\beta - \tfrac{C}{\nu}\gamma\right).$$

Weil $\frac{N\nu}{2B}$ gerade ist, und β, β^* ungerade sind, gilt modulo $\frac{N\nu}{B}$

$$\begin{aligned}\tilde{\beta}\left(\beta^* + \tfrac{N\nu}{2B}\right) &\equiv \left(\beta - \tfrac{N\nu}{2B}\right)\left(\beta^* + \tfrac{N\nu}{2B}\right) \\ &\equiv \beta\beta^* + \tfrac{N\nu}{2B}\left(\beta - \beta^*\right) + \tfrac{N\nu}{B}\tfrac{N\nu}{4B} \equiv \beta\beta^* \equiv 1 \equiv \tilde{\beta}\tilde{\beta}^*.\end{aligned}$$

Also gilt $\tilde{\beta}^* \equiv \beta^* + \frac{N\nu}{2B}\ \left(\frac{N\nu}{B}\right)$. Wegen $2\mu_1\nu \mid C$ gilt

$$2\pi i \frac{mBC(B\gamma^* - C\tilde{\beta}^*)}{N\mu_1^2\nu^3} \equiv 2\pi i \frac{mBC(B\gamma^* - C\beta^*)}{N\mu_1^2\nu^3} \pmod{2\pi i},$$

und die Beiträge zu β und $\tilde{\beta}$ in (1.75) addieren sich zu Null.
Also kann (1.74) nur dann von Null verschieden sein, wenn $\mu_1 = \mu_2 = 1$ und $2\nu \nmid C$, und aus Symmetriegründen auch $2\nu \nmid B$ gelten.

Von nun an sei $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\delta = (B, C)$, $b = \frac{B}{\delta}$ und $c = \frac{C}{\delta}$. Das Integral in (1.74) verschwindet außer für $m_1\delta^2c^2 - m_2\delta^2b^2 = 0$, also für $m_1 = mb^2$,

$m_2 = mc^2$ mit $m \in \mathbb{N}$. Wir erhalten in diesem Fall aus (1.74)

$$(\delta^2 bc)^k \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ \varepsilon \in \{\pm 1\} \\ \beta(\frac{N\nu}{\delta b})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta c})^\times \\ \delta b\beta \equiv \delta c\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}\Big(\tfrac{\delta(b\beta - c\gamma)}{\nu}\Big) f_{mb^2,C,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\gamma)\overline{g_{mc^2,B,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\beta)} \cdot e^{-4\pi ymb^2c^2\delta^2 + 2\pi i \frac{m\delta bc(b\gamma^* - c\beta^*)}{N\nu}} \tag{1.76}$$

$$= (\delta^2 bc)^k \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ \varepsilon \in \{\pm 1\} \\ \beta_1(\frac{N\nu}{\delta bc})^\times, \\ \gamma_1(\frac{N\nu}{\delta bc})^\times}} \Bigg(\sum_{\substack{\beta(\frac{N\nu}{\delta b})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta c})^\times \\ \beta - \beta_1 \equiv \gamma - \gamma_1 \equiv 0\ (\frac{N\nu}{\delta bc}) \\ \delta b\beta \equiv \delta c\gamma\ (\nu)}} \overline{\chi}\Big(\tfrac{\delta(b\beta - c\gamma)}{\nu}\Big) f_{mb^2,C,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\gamma) \cdot \overline{g_{mc^2,B,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\beta)} e^{2\pi i \frac{m\delta bc(b\gamma^* - c\beta^*)}{N\nu}} \Bigg) e^{-4\pi ymb^2c^2\delta^2}. \tag{1.77}$$

Wir dürfen annehmen, daß δ durch keinen ungeraden Primteiler von N teilbar ist, denn sonst wäre $\overline{\chi}\big(\frac{\delta(b\beta - c\gamma)}{\nu}\big) = 0$ für alle γ, β. Wegen $2\nu \nmid B$ und $2\nu \nmid C$ muß also $\delta \mid \nu$ gelten. Ist $\delta = \nu$, dann sind b und c ungerade, denn $2\nu \nmid B$ und $2\nu \nmid C$. Ist $\delta < \nu$, dann ist B oder C nicht durch 2δ teilbar, also ist b oder c ungerade. Aus der Kongruenzbedingung $\delta b\beta \equiv \delta c\gamma\ (\nu)$ folgt dann wegen $2 \mid \nu$, daß b und c ungerade sind.
Wegen $\delta \mid \nu$ und $\nu \mid N$ ist auch $\frac{N\nu}{\delta bc}$ durch ν teilbar. Deshalb sind alle β der inneren Summe kongruent einem β_1 modulo ν, und alle β^* der inneren Summe liegen in der gleichen Restklasse modulo $\frac{N\nu}{\delta bd}$. Ein Vertreter dieser Restklasse sei β_1^*. Weil alle β der inneren Summe den gleichen Rest modulo ν haben, haben alle ε_β in der inneren Summe den gleichen Wert, den wir mit ε_{β_1} bezeichnen. Entsprechendes gilt für γ an Stelle von β, und wir erhalten

$$(\delta^2 bc)^k \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ \beta_1(\frac{N\nu}{\delta bc})^\times, \\ \gamma_1(\frac{N\nu}{\delta bc})^\times \\ \delta b\beta_1 \equiv \delta c\gamma_1\ (\nu)}} \Bigg(\sum_{\substack{\beta(\frac{N\nu}{\delta b})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta c})^\times \\ \beta - \beta_1 \equiv \gamma - \gamma_1 \equiv 0\ (\frac{N\nu}{\delta bc})}} \overline{\chi}\Big(\tfrac{\delta(b\beta - c\gamma)}{\nu}\Big)\Bigg) f_{mb^2,C,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_{\gamma_1}) \cdot \overline{g_{mc^2,B,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_{\beta_1})} e^{-4\pi ymb^2c^2\delta^2} e^{2\pi i \frac{m\delta bc(b\gamma_1^* - c\beta_1^*)}{N\nu}}.$$

Ist $bc > 1$, dann gilt $N \nmid \frac{N\nu}{\delta bc}$, denn bc ist ungerade. Nach Lemma 1.7 auf Seite 21 gibt es dann ein $\varrho \in \mathbb{Z}$ mit $\varrho \equiv 1\ \big(\frac{N\nu}{\delta bc}\big)$, $(\varrho, N) = 1$ und $\chi(\varrho) \neq 1$.

Also verschwindet in diesem Fall die innere Summe wegen

$$\overline{\chi(\varrho)} \sum_{\substack{\beta(\frac{N\nu}{\delta b})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta c})^\times \\ \beta-\beta_1\equiv\gamma-\gamma_1\equiv 0\ (\frac{N\nu}{\delta bc})}} \overline{\chi}\big(\tfrac{\delta(b\beta-c\gamma)}{\nu}\big) = \sum_{\substack{\beta(\frac{N\nu}{\delta b})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta c})^\times \\ \beta-\beta_1\equiv\gamma-\gamma_1\equiv 0\ (\frac{N\nu}{\delta bc})}} \overline{\chi}\big(\tfrac{\delta(b(\varrho\beta)-c(\varrho\gamma))}{\nu}\big)$$

$$= \sum_{\substack{\beta(\frac{N\nu}{\delta b})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta c})^\times \\ \beta-\beta_1\equiv\gamma-\gamma_1\equiv 0\ (\frac{N\nu}{\delta bc})}} \overline{\chi}\big(\tfrac{\delta(b\beta-c\gamma)}{\nu}\big).$$

Demnach kann (1.76) nur für $b = c = 1$ von Null verschieden sein.

Von nun an sei $b = c = 1$.Wegen $\delta \mid \nu$ erhalten wir aus (1.76)

$$\delta^{2k} \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ \varepsilon\in\{\pm 1\} \\ \beta(\frac{N\nu}{\delta})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta})^\times \\ \beta\equiv\gamma\ (\frac{\nu}{\delta})}} \overline{\chi}\big(\tfrac{\beta-\gamma}{\nu/\delta}\big) f_{m,\delta,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\gamma)\overline{g_{m,\delta,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, \varepsilon_\beta)}e^{-4\pi y m\delta^2+2\pi i\frac{m(\gamma^*-\beta^*)}{N\nu/\delta}}. \tag{1.78}$$

Gilt $\delta = \nu > 1$, dann ist N gerade, und $\chi\big(\frac{\beta-\gamma}{\nu/\delta}\big) = 0$ in (1.78) für alle β, γ, denn β und γ sind ungerade. Wegen $\delta \mid \nu$ und $\nu \in \{1, 2, 4\}$ muß also $\delta \in \{1, 2\}$ gelten, wenn (1.78) nicht verschwindet.

Ist $\delta = 1$, dann gilt $B\nu = C\nu = \nu$, also $B\nu \mid N$ und $C\nu \mid N$. Ist $\delta = 2$, dann ist $\nu = 4$ und $B\nu = C\nu = \delta\nu = 2\nu$, und wieder gelten $B\nu \mid N$ und $C\nu \mid N$. In jedem Fall ist also $f_{m,\delta,d,\lambda}$ durch (1.72) auf Seite 58 gegeben und hängt nur über das Produkt $\varepsilon\varepsilon_\gamma$ von ε und ε_γ ab. Entsprechend hängt $g_{m,\delta,d,\lambda}$ nur über das Produkt $\varepsilon\varepsilon_\beta$ von ε und ε_β ab. Wegen $\beta \equiv \gamma\ \big(\frac{\nu}{\delta}\big)$ gilt $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$, also insbesondere $\varepsilon_\beta\varepsilon_\gamma = 1$. Ersetzen wir ε durch $\varepsilon\varepsilon_\gamma$, dann erhalten wir aus (1.78)

$$\delta^{2k} \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ \varepsilon\in\{\pm 1\} \\ \beta(\frac{N\nu}{\delta})^\times \\ \gamma(\frac{N\nu}{\delta})^\times \\ \beta\equiv\gamma\ (\frac{\nu}{\delta})}} \overline{\chi}\big(\tfrac{\beta-\gamma}{\nu/\delta}\big) f_{m,\delta,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, 1)\overline{g_{m,\delta,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, 1)}e^{-4\pi y m\delta^2+2\pi i\frac{m(\gamma^*-\beta^*)}{N\nu/\delta}}.$$

Mit der Definition 1.21 von $A_{\overline{\chi},\nu}(m)$ auf Seite 48 erhalten wir

$$\delta^{2k}\nu^2 \sum_{\substack{m\geqslant 1 \\ \varepsilon\in\{\pm 1\}}} A_{\overline{\chi},\frac{\nu}{\delta}}(m) f_{m,\delta,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, 1)\overline{g_{m,\delta,d,\lambda}(Z_1, w, \varepsilon, 1)}e^{-4\pi y m\delta^2}. \tag{1.79}$$

Sei LR die kleinste Periode von χ^2.

Ist $\nu = 2$ dann ist nach Voraussetzung $\mathrm{v}_2(N) \geqslant 2$, und nach Lemma 1.24 auf Seite 51 gilt $\frac{N}{LR} \in \{2,4\}$. Für $\delta = 2$ gilt also $N \nmid \frac{\nu}{\delta}LR$, und nach Lemma 1.22 auf Seite 51 verschwindet dann (1.79).

Ist $\nu = 4$, dann ist nach Voraussetzung $\mathrm{v}_2(N) = 3$, und nach Lemma 1.24 gilt $\frac{N}{LR} = 4$. Für $\delta \in \{2,4\}$ gilt also $N \nmid \frac{\nu}{\delta}LR$, und wieder verschwindet (1.79) nach Lemma 1.22.

In jedem Fall ist somit (1.79) gleich Null für $\delta \neq 1$. Für $\delta = 1$ erhalten wir aus (1.79) mit Lemma 1.22 auf Seite 51

$$\nu^2 A_{\overline{\chi},\nu} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}}} \overline{\chi}(m) f_{m,1,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,1)\overline{g_{m,1,d,\lambda}(Z_1,w,\varepsilon,1)}e^{-4\pi y m}.$$

Zur Abkürzung setzen wir $h_m := f_m\overline{g_m}$ und $\Lambda := \{1,\ldots,\nu\}^{(n-1,1)}$. Mit der Definition von $f_{m,1,d,\lambda}$ bzw. $g_{m,1,d,\lambda}$ in (1.72) auf Seite 57 erhalten wir aus (1.73) auf Seite 61

$$\Big(\tfrac{\nu^2 A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}}\Big)^{-1} \int_0^1 S\big(\mathcal{D}_\varepsilon\langle Z\rangle\big)\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}\\ \boldsymbol{\lambda_1},\boldsymbol{\lambda_2}\in\Lambda}} \overline{\chi(m)} h_m\big(Z_1, \varepsilon w + \tfrac{1}{\nu}(Z_1\boldsymbol{\lambda_1}+\boldsymbol{\lambda_2})\big)e^{-4\pi m(y+\frac{1}{\nu^2}Y_1[\boldsymbol{\lambda_1}]+2\varepsilon\boldsymbol{\lambda_1}'v)}.$$

Mit (1.69) auf Seite 55 ergibt sich dann

$$\Big(\tfrac{1}{2i_N}\tfrac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}}\nu^{2-2n}\pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)L(2s,\overline{\chi}^2)\Big)^{-1}H(s)$$

$$= \int\limits_{\substack{Z_1\in\mathcal{F}_{n-1}\\ v\in\mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)}\\ u\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{(n-1,1)}\\ y>Y_1^{-1}[v]}} (\det Y_1)^{k-n-1}\big(y - Y_1^{-1}[v]\big)^{s+k-n-1}$$

$$\cdot \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}\\ \boldsymbol{\lambda_1},\boldsymbol{\lambda_2}\in\Lambda}} \overline{\chi(m)} h_m\big(Z_1, \varepsilon w + \tfrac{1}{\nu}(Z_1\boldsymbol{\lambda_1}+\boldsymbol{\lambda_2})\big)$$

$$\cdot\ e^{-4\pi m(y+\frac{1}{\nu^2}Y_1[\boldsymbol{\lambda_1}]+2\varepsilon\boldsymbol{\lambda_1}'v)}\mathrm{d}y\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1.$$

Wenn wir die Integration über y ausführen, erhalten wir

$$\Big(\tfrac{1}{2i_N}\tfrac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}}(4\pi)^{-s+k+n}\nu^{2-2n}\pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)\Gamma(s+k-n)L(2s,\chi^2)\Big)^{-1}H(s)$$

$$= \int\limits_{\substack{Z_1\in\mathcal{F}_{n-1}\\ v\in\mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)}\\ u\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{(n-1,1)}}} (\det Y_1)^{k-n-1} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}\\ \boldsymbol{\lambda_1},\boldsymbol{\lambda_2}\in\Lambda}} \overline{\chi(m)}m^{-s+k+n}$$

$$\cdot\ h_m\big(Z_1,\varepsilon w+\tfrac{1}{\nu}(Z_1\boldsymbol{\lambda_1}+\boldsymbol{\lambda_2})\big)e^{-4\pi m Y_1^{-1}[v+\frac{\varepsilon}{\nu}Y_1\boldsymbol{\lambda_1}]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1.$$

Weil h_m in jeder Komponente des zweiten Arguments 1-periodisch ist, erhalten wir weiter

$$\Big(\tfrac{1}{2i_N}\tfrac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}}(4\pi)^{-s+k+n}\nu^{2-2n}\pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)\Gamma(s+k-n)L(2s,\overline{\chi}^2)\Big)^{-1}H(s)$$

$$= \nu^{n-1}\int\limits_{\substack{Z_1\in\mathcal{F}_{n-1}\\ v\in\mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)}\\ u\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{(n-1,1)}}} (\det Y_1)^{k-n-1} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}\\ \boldsymbol{\lambda_1}\in\Lambda}} \overline{\chi(m)}m^{-s+k+n}$$

$$\cdot\ h_m\big(Z_1,\varepsilon w+\tfrac{i}{\nu}Y_1\boldsymbol{\lambda_1}\big)e^{-4\pi m Y_1^{-1}[v+\frac{\varepsilon}{\nu}Y_1\boldsymbol{\lambda_1}]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1$$

$$= \nu^{n-1}\int\limits_{\substack{Z_1\in\mathcal{F}_{n-1}\\ v\in\mathbb{R}^{(n-1,1)}/\mathbb{Z}^{(n-1,1)}\\ u\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{(n-1,1)}}} (\det Y_1)^{k-n} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}\\ \boldsymbol{\lambda_1}\in\Lambda}} \overline{\chi(m)}m^{-s+k+n}$$

$$\cdot\ h_m\big(Z_1,\varepsilon u+i\varepsilon Y_1(v+\tfrac{\varepsilon}{\nu}\lambda_1)\big)e^{-4\pi m Y_1^{-1}[Y_1(v+\frac{\varepsilon}{\nu}\boldsymbol{\lambda_1})]}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1.$$

Der Integrand des letzten Integrals ist 1-periodisch in jeder Komponente von v, deshalb ergibt sich

$$\Big(\tfrac{1}{2i_{N,N}}\tfrac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}}(4\pi)^{-s+k+n}\nu^{2-2n}\pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)\Gamma(s+k-n)L(2s,\overline{\chi}^2)\Big)^{-1}H(s)$$

$$= \nu^{2n-2}\int\limits_{\substack{Z_1\in\mathcal{F}_{n-1}\\ v\in\mathbb{R}^{(n-1,1)}/\mathbb{Z}^{(n-1,1)}\\ u\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{(n-1,1)}}} (\det Y_1)^{k-n} \sum_{\substack{m\geqslant 1\\ \varepsilon\in\{\pm 1\}}} \overline{\chi(m)}m^{-s+k+n}h_m(Z_1,\varepsilon u+i\varepsilon Y_1 v)$$

$$\cdot \quad e^{-4\pi m Y_1^{-1}[Y_1 v]} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}Y_1$$

$$= \quad \nu^{2n-2} \int\limits_{\substack{Z_1 \in \mathcal{F}_{n-1} \\ v \in \mathbb{R}^{(n-1,1)}/Y_1\mathbb{Z}^{(n-1,1)} \\ u \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^{(n-1,1)}}} (\det Y_1)^{k-n-1} \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ \varepsilon \in \{\pm 1\}}} \overline{\chi(m)} m^{-s+k+n} h_m(Z_1, \varepsilon w)$$

$$\cdot \quad e^{-4\pi m Y_1^{-1}[v]} \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}X_1 \mathrm{d}Y_1.$$

Wegen $h_m\big(Z_1, \varepsilon w\big) = h_m(Z_1, w)$ für $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ erhalten wir weiter

$$\Big(\tfrac{1}{2i_N} \tfrac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}} (4\pi)^{-s+k+n} \nu^{2-2n} \pi^{-s} N^{2s} \Gamma(s) \Gamma(s+k-n) L(2s, \overline{\chi}^2)\Big)^{-1} H(s)$$

$$= \quad 2\nu^{2n-2} \sum_{m \geqslant 1} \overline{\chi(m)} m^{-s+k+n} \int\limits_{\mathcal{D}_{-1}\langle \mathcal{F}_n^* \rangle \cup \mathcal{F}_n^*} f_m(Z_1, w) \overline{g_m(Z_1, w)} (\det Y_1)^k$$

$$\cdot \quad e^{-4\pi m Y_1^{-1}[v]} \mathrm{d}v_n^*$$

$$= \quad 4\nu^{2n-2} \sum_{m \geqslant 1} \frac{\overline{\chi(m)} \langle f_m,\ g_m \rangle}{m^{s-k-n}}.$$

Der letzte Ausdruck konvergiert absolut für $\mathrm{Re}(s+k-n) > k+1$ (siehe [14, 17, 25]), also für $\mathrm{Re}(s) > n+1$. Alle vorherigen Umformungen sind deshalb wegen absoluter Konvergenz gerechtfertigt.
Mit der Definition von $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ in (1.7) auf Seite 11 ergibt sich

$$H(s) = \tfrac{2}{i_N} \tfrac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}} \big(\tfrac{\pi}{N^2}\big)^{k-n}$$
$$\cdot \quad \big(\tfrac{2\pi}{N}\big)^{2n-2s-2k} \Gamma(s+k-n) \Gamma(s) L(2s, \overline{\chi}^2) \sum_{m \geqslant 1} \frac{\overline{\chi}(m) \langle f_m, g_m \rangle}{m^{s+k-n}}$$

$$= \tfrac{2}{i_N} \tfrac{A_{\overline{\chi},\nu}}{G_{\overline{\chi}}} \big(\tfrac{\pi}{N^2}\big)^{k-n} \mathbb{D}_{f,g}(s+k-n, \overline{\chi}).$$ □

§1.6. Meromorphe Fortsetzung von $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$

Theorem 1.26. *Seien $f, g \in S_k(\Gamma_n)$ und χ ein Dirichlet Charakter modulo N. Ist $\chi \neq \mathbb{1}_N$, dann besitzt $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ eine holomorphe Fortsetzung für alle*

$s \in \mathbb{C}$. Ist $\chi = \mathbb{1}_N$, dann besitzt $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ eine meromorphe Fortsetzung für alle $s \in \mathbb{C}$, die außer einem möglichen einfachen Pol bei $s = k$ mit Residuum

$$\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{N^2}\right)^{n-k}\tfrac{\varphi(N)}{N}\left\{f_{\mathbb{1}_N},\ g\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}$$

holomorph ist.

Bemerkung. Für $N > 1$ wurde Theorem 1.26 bereits in [15, Section 5, Theorem 1] bewiesen, der Fall $N = 1$ wurde in [14, 17, 25] behandelt.

Beweis. Weil $\Gamma(N, N^2)$ durch W_N normalisiert wird, erhalten wir aus Proposition 1.20 auf Seite 43

$$\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi) = \tfrac{i_N}{2}\left(\tfrac{\pi}{N^2}\right)^{n-k}\left\{f_\chi \cdot \mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}(\cdot, s-k+n),\ g\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} \tag{1.80}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > k+1$. Nach Proposition 1.11 auf Seite 28 sind

$$\mathbb{E}_{N,N^2,\mathbb{1}_N}\big(M\langle Z\rangle, s-k+n\big) - \tfrac{\varphi(N)/N}{s-k} \quad \text{für} \quad \chi^2 \neq \mathbb{1}_N$$

und

$$\mathbb{E}_{N,N^2,\chi^2}\big(M\langle Z\rangle, s-k+n\big) \quad \text{für} \quad \chi^2 \neq \mathbb{1}_N$$

beschränkt durch eine Potenz von $\mathrm{tr}(Y)$ für $M \in \Gamma_n$, $Z \in \mathcal{F}_n$ und s in einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{C}$.
Deshalb, und weil f_χ und g Spitzenformen sind, ist die rechte Seite von (1.80), und damit $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ holomorph fortsetzbar bis auf einen möglichen einfachen Pol bei $s = k$ falls $\chi^2 = \mathbb{1}_N$. Im Fall $\chi^2 = \mathbb{1}_N$ berechnet sich das Residuum von $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$ bei $s = k$ zu

$$\tfrac{i_N}{2}\left(\tfrac{\pi}{N^2}\right)^{n-k}\tfrac{\varphi(N)}{N}\left\{f_\chi,\ g\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)}. \tag{1.81}$$

Zu zeigen ist noch, daß (1.81) verschwindet, wenn $\chi \neq \mathbb{1}_N$ ist. Sei L die kleinste Periode von χ. Der Charakter χ wird induziert durch einen Charakter χ_L modulo L. Wegen $\chi \neq \mathbb{1}_N$ gibt es eine Primzahl p, für die der p-Anteil von χ nicht trivial ist. Der p-Anteil von χ_L ist dann primitiv.

$$\left\{f_\chi,\ g\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} = \left\{f_{\chi_L},\ g\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} = \left\{f_{\chi_L},\ g\right\}_{\Gamma^1_{n,1}(L,L^2)}.$$

Weil $\Gamma^1_{n,1}(L, L^2)$ durch $M'_{L^2/p}$ normalisiert wird, gilt

$$\begin{aligned}\left\{f_\chi,\ g\right\}_{\Gamma_{n,1}(N,N^2)} &= \tfrac{1}{p}\Big\{\sum_{\nu(p)} f_{\chi_L}|_k M^\nu_{L^2/p},\ g|_k M^\nu_{L^2/p}\Big\}_{\Gamma^1_{n,1}(L,L^2)} \\ &= \tfrac{1}{p}\Big\{\sum_{\nu(p)} f_{\chi_L}|_k M_{L^2\nu/p},\ g\Big\}_{\Gamma^1_{n,1}(L,L^2)} = 0\end{aligned}$$

nach Lemma 1.6 auf Seite 21. ⊡

§1.7. Funktionalgleichung für $\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$

Theorem 1.27. *Sind $f,g \in S_k(\Gamma_n)$, $n \geqslant 2$, und ist χ ein primitiver Dirichlet Charakter modulo N $(N > 1)$, dann gilt*

$$\mathbb{D}_{f,g}(2k-n-s,\chi) = \left(\tfrac{G_\chi}{\sqrt{N}}\right)^4 \mathbb{D}_{f,g}(s,\overline{\chi}) \tag{1.82}$$

Bemerkung. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß auch χ^2 primitiv ist, wurde die Funktionalgleichung (1.82) bereits in [15, Section 5, Theorem 2] bewiesen.

Beweis. Sei χ^2 induziert von einem primitiven Charakter $\chi^{(2)}$ modulo L, und LR sei die kleinste Periode von χ^2.

Nach Korollar 1.23.1 auf Seite 51 gilt dann

$$\begin{aligned}&\left\{f_\chi|_k W_N \cdot \mathbb{E}_{LR,LR,\overline{\chi^{(2)}}}(\cdot, n-s),\ g|_k W_N\right\}\\ &= \tfrac{2}{i_N}\left(\tfrac{\pi}{N^2}\right)^{k-n}\overline{\chi^{(2)}}(R)\mu(R)G_{\overline{\chi^{(2)}}}\left(\tfrac{G_\chi}{\sqrt{N}}\right)^4 \mathbb{D}_{f,g}(k-s,\overline{\chi})\end{aligned} \tag{1.83}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) < -1$.

Analog zum Beweis von Theorem 1.26 schließen wir, daß die linke Seite von (1.83) holomorph fortsetzbar ist für alle $s \in \mathbb{C}$. Aus Korollar 1.20.1 auf Seite 43 und Proposition 1.17 auf Seite 38 ergibt sich dann die Funktionalgleichung

$$\mathbb{D}_{f,g}(s+k-n,\chi) = \left(\tfrac{G_\chi}{\sqrt{N}}\right)^4 \mathbb{D}_{f,g}(k-s,\overline{\chi})$$

für alle $s \in \mathbb{C}$.
Wenn wir s durch $k-s$ ersetzen, erhalten wir die Behauptung. ⊡

§1.8. Anwendung auf die Spinorzetafunktion $Z_F(s,\chi)$

Seien $k \in 2\mathbb{Z}$ und $F \in S_k(\Gamma_2)$ eine Hecke Eigenform mit Eigenwerten $\lambda_F(n)$. Wenn der erste Fourier-Jacobi Koeffizient f_1 von F nicht verschwindet, kann man G im Maaßraum so wählen, daß der erste Fourier-Jacobi Koeffizient von $F-G$ gleich Null ist. Dann gilt nach dem Hauptresultat in [14, Section 2]

$$\mathbb{D}_{F,G}(s,1) = \langle f_1, f_1\rangle Z_F^*(s).$$

Deshalb ist $\mathbb{D}_{F,G}(s,\chi) = \langle f_1, f_1\rangle Z_F^*(s,\chi)$, und wir erhalten aus Theorem 1.26 auf Seite 67 und Theorem 1.27

Theorem 1.28. *Seien $k \in 2\mathbb{Z}$ und $F \in S_k(\Gamma_2)$ eine Hecke Eigenform mit erstem Fourier-Jacobi Koeffizienten $f_1 \neq 0$. Sei χ ein Dirichlet Charakter modulo N ($N > 1$), und*

$$Z_F^*(s,\chi) := \left(\tfrac{2\pi}{N}\right)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+2)Z_F(s,\chi).$$

Dann besitzt $Z_F^*(s,\chi)$ eine für $\chi \neq \mathbb{1}_N$ holomorphe und für $\chi = \mathbb{1}_N$ außer einem möglichen einfachen Pol bei $s = k$ holomorphe Fortsetzung für $s \in \mathbb{C}$.

Ist χ primitiv modulo N, dann gilt die Funktionalgleichung

$$Z_F^*(2k-2-s,\chi) = \left(\tfrac{G_\chi}{\sqrt{N}}\right)^4 Z_F^*(s,\overline{\chi}).$$

Korollar 1.28.1. *Seien $k \in 2\mathbb{Z}$ und $F \in S_k(\Gamma_n)$ eine Hecke Eigenform mit erstem Fourier-Jacobi Koeffizienten $f_1 \neq 0$. Ferner sei D eine negative Fundamentaldiskriminante, $\chi_D := \left(\tfrac{D}{\cdot}\right)$. Dann besitzt $Z_F^*(s,\chi_D)$ eine holomorphe Fortsetzung für alle $s \in \mathbb{C}$ und genügt der Funktionalgleichung*

$$Z_F^*(2k-2-s,\chi_D) = Z_F^*(s,\chi_D).$$

Beweis. χ_D ist ein primitiver reeller Charakter modulo $|D|$. Für die Gaußsumme G_{χ_D} gilt $G_{\chi_D}^2 = |D|$. ⊡

§2. Numerische Überprüfung der Böcherer Vermutung

§2.1. Reihendarstellung für $Z_F(k-1, \chi_D)$

Die folgende Proposition stammt von Kohnen.

Proposition 2.1. *Sei $k \in \mathbb{N}$ gerade. Ist $f \in S_k(\Gamma_2)$ eine Hecke Eigenform, deren erster Fourier-Jacobi Koeffizient f_1 von Null verschieden ist, dann gilt*

$$Z_F(k-1, \chi_D) = \tfrac{4(2\pi)^k}{|D|^k (k-2)!} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-k+1} \int_n^{\infty} K_{k-2}\left(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\right) y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}y, \qquad (2.1)$$

dabei sind $\lambda_{F,D}$ die Koeffizienten der Dirichletreihe $Z_F(s, \chi_D)$.

Beweis. Für $y > 0$ und $c > k-2$ ist

$$\tfrac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(s-k+2) y^{-s} \mathrm{d}s = 2y^{-\frac{k}{2}+1} K_{k-2}(2\sqrt{y}), \qquad (2.2)$$

dabei ist $K_{k-2}(y)$ die modifizierte Bessel Funktion der Ordnung $k-2$ [1]. Unter Verwendung von (2.2) finden wir für $y > 0$ und $c \gg 0$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} Z_F^*(s, \chi_D) y^{-s} \mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \left(\tfrac{2\pi}{|D|}\right)^{-2s} \Gamma(s)\Gamma(s-k+2) \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-s} y^{-s} \mathrm{d}s \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) \tfrac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \Gamma(s)\Gamma(s-k+2) \left(\tfrac{4\pi^2 n y}{D^2}\right)^{-s} \mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$= \quad y^{-\frac{k}{2}+1} f_{F,D}(y) \tag{2.3}$$

mit

$$f_{F,D}(y) = 2\left(\tfrac{4\pi^2}{D^2}\right)^{-\frac{k}{2}+1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-\frac{k}{2}+1} K_{k-2}\left(\tfrac{4\pi\sqrt{ny}}{|D|}\right).$$

Nach Theorem 1.28 auf Seite 70 besitzt $Z_F^*(s,\chi_D)$ eine holomorphe Fortsetzung. Nach dem Prinzip von Phragmen-Lindelöf klingt $Z_F^*(s,\chi_D)$ exponentiell ab für $\mathrm{Im}(s) \to \infty$. Deshalb können wir den Integrationsweg in (2.3) nach links bis zur Geraden $c = k-1$ verschieben. Wenn wir außerdem y durch $\frac{1}{y}$ ersetzen und die Funktionalgleichung von $Z_F^*(s,\chi_D)$ unter $s \mapsto 2k-2-s$ anwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}
y^{\frac{k}{2}-1} f_{F,D}\left(\tfrac{1}{y}\right) &= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-1-i\infty}^{k-1+i\infty} Z_F^*(s,\chi_D) y^s \mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-1-i\infty}^{k-1+i\infty} Z_F^*(2k-2-s,\chi_D) y^s \mathrm{d}s \\
&= \tfrac{1}{2\pi i} \int\limits_{k-1-i\infty}^{k-1+i\infty} Z_F^*(s,\chi_D) y^{2k-2-s} \mathrm{d}s \\
&= y^{\frac{3}{2}k-1} f_{F,D}(y).
\end{aligned}$$

Also genügt $f_{F,D}(y)$ der Funktionalgleichung $f_{F,D}(\frac{1}{y}) = y^k f_{F,D}(y)$.
Mit dem üblichen Aufspaltungstrick und der für $\mathrm{Re}(s) > k-2$ gültigen Formel [1]

$$2\int\limits_0^{\infty} K_{k-2}(2\sqrt{y}) y^{s-\frac{k}{2}} \mathrm{d}y = \Gamma(s)\Gamma(s-k+2)$$

schließen wir für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ auf

$$Z_F^*(s,\chi_D) = 2\left(\tfrac{2\pi}{|D|}\right)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-s} \int\limits_0^{\infty} K_{k-2}(2\sqrt{y}) y^{s-\frac{k}{2}} \mathrm{d}y$$

$$= 2\left(\tfrac{2\pi}{|D|}\right)^{-2s} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-s} \left(\tfrac{4\pi^2 n}{D^2}\right)^{s-\frac{k}{2}+1} \int_0^{\infty} K_{k-2}\left(\tfrac{4\pi\sqrt{ny}}{|D|}\right) y^{s-\frac{k}{2}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\infty} f_{F,D}(y) y^{s-\frac{k}{2}} \mathrm{d}y$$

$$= \int_1^{\infty} f_{F,D}(y)(y^{\frac{3}{2}k-2-s} + y^{s-\frac{k}{2}}) \mathrm{d}y. \tag{2.4}$$

Weil $f_{F,D}(y)$ für $y \to \infty$ exponentiell abklingt, besitzt die rechte Seite von (2.4) eine holomorphe Fortsetzung in die ganze komplexe Ebene, und (2.4) ist gültig für alle $s \in \mathbb{C}$.

Setzen wir in (2.4) $s = k - 1$, so erhalten wir

$$Z_F^*(k-1, \chi_D) = 4\left(\tfrac{4\pi^2}{D^2}\right)^{-\frac{k}{2}+1} \int_1^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-\frac{k}{2}+1} K_{k-2}\left(\tfrac{4\pi\sqrt{ny}}{|D|}\right) y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}y$$

$$= 4\left(\tfrac{4\pi^2}{D^2}\right)^{-\frac{k}{2}+1} \sum_{n=1}^{\infty} \int_1^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-\frac{k}{2}+1} K_{k-2}\left(\tfrac{4\pi\sqrt{ny}}{|D|}\right) y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}y$$

$$= 4\left(\tfrac{4\pi^2}{D^2}\right)^{-\frac{k}{2}+1} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-k+1} \int_n^{\infty} K_{k-2}\left(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\right) y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}y, \tag{2.5}$$

dabei ist die Vertauschung von Summation und Integration in (2.5) wegen dem exponentiellen Abklingen von $K_{k-2}(y)$ für $y \to \infty$ gerechtfertigt.
Also gilt

$$Z_F(k-1, \chi_D) = \tfrac{4(2\pi)^k}{|D|^k (k-2)!} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) n^{-k+1} \int_n^{\infty} K_{k-2}\left(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\right) y^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}y.$$

§2.2. Berechnung der Fourierkoeffizienten von $\Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$

Sei $M_k(\Gamma_1)$ der Raum der elliptischen Modulformen vom Gewicht k bezüglich Γ_1.

Für $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\tau) > 0$ setzen wir $q = \exp(2\pi i\tau)$ und bezeichnen mit

$$\Delta = q\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

die Ramanujansche Δ-Funktion ($\Delta \in S_{12}(\Gamma_1)$) und für $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 2$ mit

$$E_{2k} = 1 - \frac{4k}{B_{2k}}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{2k-1}(n)q^n$$

die normierte Eisensteinreihe in $M_{2k}(\Gamma_1)$, dabei ist

$$\sigma_{2k-1}(n) = \sum_{d\,|\,n} d^{2k-1},$$

und B_{2k} ist die $2k$-te Bernoullizahl.

Bezeichnet $J_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$ den Raum der Jacobischen Spitzenformen auf Γ_1 vom Index 1 und Gewicht k, dann ist der Maaßraum das Bild der Hecke invarianten Einbettung $V : J_{k,1}^{\mathrm{cusp}} \hookrightarrow S_k(\Gamma_2)$, die definiert ist durch

$$\phi = \sum_{\substack{D,r\in\mathbb{Z},D<0\\ D\equiv r^2 \bmod 4}} C_\phi(D)q^{(r^2-D)/4}\zeta^r \quad\longmapsto\quad \sum_{\substack{n,r,m\in\mathbb{Z}\\ r^2-4mn<0,\\ n,m>0}} a(n,r,m)q^n\zeta^r q'^m,$$

wobei

$$a(n,r,m) := \sum_{d\,|\,(n,r,m)} d^{k-1}C_\phi\left(\tfrac{r^2-4mn}{d^2}\right) \tag{2.6}$$

und $\zeta = \exp(2\pi i z)$ ($z \in \mathbb{C}$), $q' = \exp(2\pi i\tau')$ ($\tau' \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\tau') > 0$) [18].

Mit ϕ_{10} bzw. ϕ_{12} bezeichnen wir die Jacobischen Spitzenformen in den eindimensionalen Räumen $J_{10,1}^{\mathrm{cusp}}$ bzw. $J_{12,1}^{\mathrm{cusp}}$, die derart normalisiert sind, daß $C(-3) = 1$ gilt.

Die ersten cuspidalen Hecke Eigenformen vom Grad 2, die nicht zum Maaßraum gehören, treten im Gewicht 20, 22, 24 und 26 auf. In [21] gibt Skoruppa die folgenden expliziten Formeln an (man beachte dort den Druckfehler in der Formel für Υ_{22} — statt $-2^5\cdot3\cdot5\cdot1.423$ müßte es dort $-2^5\cdot3\cdot5\cdot7\cdot1.423$ heißen)

$$\Upsilon_{20} = -2^9\cdot3^2\cdot5\cdot7\cdot11\cdot V(\phi_{10})^2 + \tfrac{1}{2}V(\phi_{12}E_8) + \tfrac{1}{2}V(\phi_{10}E_{10}),$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{22} = &-2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 1.423 \cdot V(\phi_{10})V(\phi_{12}) \\ &- \tfrac{5}{2\cdot 3}V(\phi_{12}E_{10}) + \tfrac{11}{2\cdot 3}V(\phi_{10}E_6^2) + 2^4 \cdot 3 \cdot 61 \cdot V(\phi_{10}\Delta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{24a} = &-2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 157 \cdot V(\phi_{10})V(\phi_{10}E_4) \\ &+ 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 157 \cdot V(\phi_{12})^2 \\ &- \tfrac{7}{2\cdot 3}V(\phi_{12}E_6^2) - 2^4 \cdot 3 \cdot 67 \cdot V(\phi_{12}\Delta) + \tfrac{13}{2\cdot 3}V(\phi_{10}E_{14})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{24b} = &-2^7 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 83 \cdot V(\phi_{10})V(\phi_{10}E_4) - 2^6 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot 83 \cdot V(\phi_{12})^2 \\ &+ \tfrac{41}{2\cdot 3} \cdot V(\phi_{12}E_6^2) + 2^6 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot V(\phi_{12}\Delta) - \tfrac{23}{2\cdot 3}V(\phi_{10}E_{14})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{26a} = &-2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 29 \cdot V(\phi_{10})V(\phi_{10}E_6) \\ &- 2^6 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 11 \cdot 29 \cdot V(\phi_{12})V(\phi_{10}E_4) \\ &- \tfrac{1}{2}V(\phi_{12}E_{14}) + \tfrac{3}{2}V(\phi_{10}E_8^2) - 2^5 \cdot 3^2 \cdot 31 \cdot V(\phi_{10}\Delta E_4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Upsilon_{26b} = &-2^6 \cdot 3^3 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 13^2 \cdot V(\phi_{10})V(\phi_{10}E_6) \\ &+ 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13^2 \cdot V(\phi_{12})V(\phi_{10}E_4) \\ &+ \tfrac{5\cdot 13}{2\cdot 3}V(\phi_{12}E_{14}) - \tfrac{47}{2\cdot 3}V(\phi_{10}E_8) + 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 251 \cdot V(\phi_{10}\Delta E_4)\end{aligned} \tag{2.7}$$

und berechnet mit Hilfe dieser Formeln die ersten Fourierkoeffizienten von $\Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$.
Bei der Berechnung von $\Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$ tauchen zwei Arten von rechenintensiven Multiplikationen auf. Zum einen die Multiplikation von Jacobiformen mit elliptischen Modulformen und zum anderen die Multiplikation zweier Formen aus dem Maaßraum.

Um die Multiplikationen von Jacobiformen mit elliptischen Modulformen zu umgehen, verfahren wir wie folgt.
Der Operator $\mathcal{D}_{2\nu}$, der für $\nu \in \mathbb{N}_0$ definiert ist durch

$$\mathcal{D}_{2\nu}\phi := \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_r p_{2\nu}^{(k-1)}(r, nm)c(n,r)\Big)q^n$$

mit $\phi = \sum_{n,r} c(n,r)q^n\zeta^r \in J_{k,m}^{\text{cusp}}$ und

$$\frac{(k-\nu-2)!}{(2\nu)!(k-2)!}\, p_{2\nu}^{(k-1)}(r,n) = \text{Koeffizient von } t^{2\nu} \text{ in } (1 - rt + nt^2)^{-k+1},$$

bildet $J_{k,1}^{\mathrm{cusp}}$ auf $S_{k+2\nu}(\Gamma_1)$ ab [6].

Weil $S_{k+2\nu}(\Gamma_1)$ endlich dimensional ist, finden wir durch Vergleich der ersten Fourierkoeffizienten, daß folgende Tabelle gültig ist.

Jacobiform ϕ	$\mathcal{D}_0(\phi)$	$\mathcal{D}_2(\phi)$	$\mathcal{D}_4(\phi)$	$\mathcal{D}_6(\phi)$
ϕ_{10}	0	20Δ	0	
ϕ_{12}	12Δ	0	$196\Delta E_4$	
$\phi_{10}E_4$	0	$28\Delta E_4$	$120\Delta E_6$	
$\phi_{10}E_6$	0	$32\Delta E_6$	$204\Delta E_8$	$-360\Delta E_{10}$
$\phi_{10}E_{10}$	0	$40\Delta E_{10}$		
$\phi_{12}E_8$	$12\Delta E_8$	$16\Delta E_{10}$		
$\phi_{10}\Delta$	0	$44\Delta^2$		
$\phi_{10}E_6^2$	0	$44\Delta E_6^2$		
$\phi_{12}E_{10}$	$12\Delta E_{10}$	$20\Delta E_6^2 + 20.736\Delta^2$	$696\Delta E_{14}$	
$\phi_{10}E_{14}$	0	$48\Delta E_{14}$		
$\phi_{12}\Delta$	$12\Delta^2$	0	$676\Delta^2 E_4$	
$\phi_{12}E_6^2$	$12\Delta E_6^2$	$24\Delta E_{14}$		
$\phi_{10}\Delta E_4$	0	$52\Delta^2 E_4$		
$\phi_{10}E_8^2$	0	$52\Delta E_8^2$		
$\phi_{12}E_{14}$	$12\Delta E_{14}$	$28\Delta E_8^2 - 27.648\Delta^2 E_4$		

(2.8)

Aus $\mathcal{D}_0(\phi_{10}) = 0$ und $\mathcal{D}_4(\phi_{10}) = 0$ können die Fourierkoeffizienten von ϕ_{10} berechnet werden (siehe [6]). Aus $\mathcal{D}_2(\phi_{10}) = 20\Delta$ erhalten wir dann die Fourierkoeffizienten von Δ. Danach können wir aus $\mathcal{D}_0(\phi_{12}) = 12\Delta$ und $\mathcal{D}_2(\phi_{12}) = 0$ die Koeffizienten von ϕ_{12} berechnen. Wenn wir in entsprechender Weise fortfahren und

$$\Delta^2 = -\tfrac{47}{11.708.928}\mathcal{D}_4(\phi_{10}E_{10}) + \tfrac{5}{1.672.704}\mathcal{D}_4(\phi_{12}E_8),$$

$$\Delta E_6^2 = \tfrac{19}{2.904}\mathcal{D}_4(\phi_{10}E_{10}) - \tfrac{3}{968}\mathcal{D}_4(\phi_{12}E_8),$$

$$\Delta E_8^2 = \tfrac{1}{844}\mathcal{D}_4(\phi_{12}E_6^2) + \tfrac{333.504}{211}\Delta^2 E_4$$

beachten, dann können wir die Koeffizienten aller Jacobiformen (und aller elliptischen Modulformen) aus Tabelle (2.8) berechnen, ohne daß irgendwelche Jacobiformen bzw. Modulformen miteinander multipliziert werden müssen. Die ersten Koeffizienten sind jeweils im Anhang A1 und A2 auf Seite 82 und Seite 84 angegeben.

Die zeitintensive Multiplikation zweier Maaßlifts konnten wir nicht vermeiden. Beim Quadrieren eines Maaßlifts kann man jedoch zusätzliche Symmetrien ausnutzen.
Um die Berechnung der Fourierkoeffizienten des Maaßlifts $V(\phi)$ einer Jacobiform ϕ aus (2.6) auf Seite 74 zu beschleunigen, benutzt unser Programm Teilertabellen.
Weil alle auftretenden Fourierkoeffizienten ganze Zahlen sind, genügt es, die Koeffizienten modulo hinreichend vieler verschiedener „geeigneter" Primzahlen p (geeignet bedeutet hierbei, daß p keinen der in (2.8) auftretenden Nenner teilt) zu berechnen. Diese Vorgehensweise hat mehrere Vorteile:

(i) Die Berechnung kann leicht auf mehrere Prozessoren (Rechner) aufgeteilt werden.

(ii) Bei der direkten Berechnung müßte man beim Multiplizieren der Maaßlifts ganze Zahlen der Größe 10^{30} miteinander multiplizieren. Rechnet man dagegen modulo p und wählt p klein genug ($p < 2^{32}$), dann können alle Multiplikationen registerintern (64-Bit) durchgeführt werden. Wir wählen $p \approx 2^{25}$. Das gibt uns die Möglichkeit, viele vorzeichenbehaftete Rechenoperationen in einem 64-Bit-Register durchzuführen, ohne daß die Gefahr eines Überlaufs besteht. So müssen wir nicht nach jedem einzelnen Rechenschritt (Addition, Multiplikation) die relativ zeitintensive Reduktion modulo p durchführen.

(iii) Weil die Koeffizienten (Größenordnung 10^{60}) nur modulo p berechnet werden müssen ($p \approx 2^{25}$), sinkt der Speicherbedarf auf einen Bruchteil. Dadurch wird es möglich, die ganzen Koeffiziententabellen im Speicher zu halten. Bei der direkten Berechnung müßten wenigstens Teile auf Festplatte ausgelagert werden, was die Berechnung dramatisch verlangsamen würde.

Diese Ideen haben wir in einem C++ Programm umgesetzt, das die Fourierkoeffizienten $C(D)$ aller Jacobiformen aus Tabelle (2.8) für $|D| \leqslant 3.000.000$ und die Fourierkoeffizienten $c(m)$ aller elliptischen Spitzenformen aus Tabelle (2.8) für $n \leqslant 750.000$ modulo p berechnet. Die gesamte Rechenzeit auf mehreren Intel PII-400 Prozessoren betrug mehr als 300 Stunden.

Aus all diesen Koeffizienten, von denen die ersten in Dateien tabelliert werden, ermittelt das Programm Koeffizienten der Maaßlifts und Produkte von Maaßlifts, die nach (2.7) auf Seite 75 zur Berechnung von Fourierkoeffizienten von $\Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$ nötig sind. Dabei müssen nur die Fourierkoeffizienten berechnet werden, die für die Bestimmung der Eigenwerte in §2.3 nötig sind. Der Vollständigkeit halber berechnen wir allerdings auch hier eine Tabelle der ersten Fourierkoeffizienten.

§2.3. Berechnung der Eigenwerte

In [21] berechnet Skoruppa die Eigenwerte $\lambda_F(p)$, $\lambda_F(p^2)$ (p prim) einer Hecke Eigenform

$$F = \sum_{\substack{r,n,m\in\mathbb{Z},\\ r^2-4mn<0,\\ n,m>0}} a(n,r,m)q^n\zeta^r q'^m \in S_k(\Gamma_2)$$

mit Hilfe der Formeln

$$\lambda_F(p)a(1,1,1) = a(p,p,p) + p^{k-2}\big(1+\big(\tfrac{p}{3}\big)\big)a(1,1,1)$$

und

$$\begin{aligned}
&\lambda_F(p^2)a(1,1,1)\\
&= \Big[\lambda_F(p)^2 - \lambda_F(p)p^{k-2}\big(1+\big(\tfrac{p}{3}\big)\big) - p^{2k-3} + p^{2k-4}\big(\big(\tfrac{p}{3}\big)+\big(\tfrac{p}{3}\big)^2\big)\Big]\, a(1,1,1)\\
&\quad - \quad p^{k-2}a(1,p,p^2) - p^{k-2}\sum_{\substack{\nu \bmod p,\\ 1+\nu+\nu^2\not\equiv 0 \bmod p}} a(1+\nu+\nu^2, p(1+2\nu), p^2),
\end{aligned}$$

die auf Andrianovs Ergebnissen in [2] beruhen.

Mit Hilfe eines anderen C++ Programms haben wir die Eigenwerte $\lambda_F(p)$ für $p < 1.009$ prim und $\lambda_F(p^2)$ für $p < 71$ prim von $F = \Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$ aus den obigen Formeln berechnet. Einige Eigenwerte geben wir in den Tabellen im Anhang A3 ab Seite 87 an.

§2.4. Numerische Auswertung von $Z_F(k-1, \chi)$

Nach Proposition 2.1 auf Seite 71 gilt

$$Z_F(k-1,\chi_D) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{F,D}(n) g_D(n) \tag{2.9}$$

mit

$$g_D(n) = \tfrac{4(2\pi)^k}{|D|^k(k-2)!}\, n^{-k+1} \int\limits_n^\infty K_{k-2}\big(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\big) y^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}y. \tag{2.10}$$

Für $n \to \infty$ klingt $g_D(n)$ exponentiell ab, und $\lambda_{F,D}(n)$ wächst polynomiell. Für eine numerische Berechnung von $Z_F(k-1,\chi_D)$ ist es somit wichtig, so viele Terme wie möglich in der Reihe (2.9) für *kleine* n ($n \leqslant N$ für ein geeignetes N – wir wählen später $N = 4.000$) zu berücksichtigen, während wir für *große* n ($n > N$) erwarten, daß die Summe *aller* Terme mit $n > N$ ziemlich klein ist.

Deshalb nähern wir $Z_F(k-1,\chi_D)$ an durch

$$\mathcal{Z}_{F,D}(k-1) = \sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ n \text{ hat keinen Prim-}\\ \text{teiler}\geqslant 1.009}} \lambda_{F,D}(n) g_D(n).$$

Die dafür nötigen Werte von $\lambda_{F,D}(n)$ können aus der Eulerproduktentwicklung (0.1) auf Seite 4 von $Z_F(s,\chi_D)$ für $n < 71^2$ berechnet werden.
Angenommen, es gebe positive Konstanten C_1, C_2, α und β, so daß die Abschätzungen $|\lambda_F(p)| \leqslant C_1 \cdot p^\alpha$ (p prim) und $|\lambda_F(n)| \leqslant C_2 \cdot n^\beta$ ($n > N$) gelten. Dann kann der Fehler

$$\varepsilon(F,D) := Z_F(k-1,\chi_D) - \mathcal{Z}_{F,D}(k-1)$$

abgeschätzt werden durch

$$|\varepsilon(F,D)| \leqslant \sum_{\substack{p\geqslant 1.009\\ p \text{ prim}\\ 1\leqslant \nu\leqslant N/p}} |\lambda_{F,D}(\nu p)| g_D(\nu p) + \sum_{n>N} |\lambda_{F,D}(\nu n)| \int\limits_n^\infty K_{k-2}\big(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\big) y^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}y. \tag{2.11}$$

Wir wollen annehmen, daß $N < 1.007^2$. Dann gilt für die erste Summe $\sum_1$ in der letzten Gleichung offensichtlich die Abschätzung

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\substack{p\geqslant 1.009\\ p \text{ prim}\\ 1\leqslant \nu\leqslant N/p}} \big|\lambda_{F,D}(\nu)\lambda_F(p)\big|\, g_D(\nu p) \leqslant C_1 \sum_{\substack{p\geqslant 1.009\\ p \text{ prim}\\ 1\leqslant \nu\leqslant N/p}} |\lambda_{F,D}(\nu)| p^\alpha g_D(\nu p).$$

Die zweite Summe $\sum_2$ in (2.11) genügt der Abschätzung

$$\begin{aligned}
\tfrac{|D|^k(k-2)!}{4(2\pi)^k}\sum\nolimits_2 &= \sum_{n>N} |\lambda_{F,D}(n)| n^{-k+1} \int_n^\infty K_{k-2}\bigl(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\bigr) y^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C_2 \sum_{n>N} n^{\beta-k+1} \int_n^\infty K_{k-2}\bigl(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\bigr) y^{\frac{k}{2}-1}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C_2 \sum_{n>N} \int_n^\infty K_{k-2}\bigl(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\bigr) y^{\beta-\frac{k}{2}}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C_2 \sum_{n>N} \sum_{m\geqslant n} \int_m^{m+1} K_{k-2}\bigl(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\bigr) y^{\beta-\frac{k}{2}}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C_2 \sum_{m>N} (m-N) \int_m^{m+1} K_{k-2}\bigl(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\bigr) y^{\beta-\frac{k}{2}}\mathrm{d}y \\
&\leqslant C_2 \int_{N+1}^\infty K_{k-2}\bigl(\tfrac{4\pi\sqrt{y}}{|D|}\bigr) y^{\beta-\frac{k}{2}}(y-N)\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Um den dominierenden Term $\sum_1$ in $\varepsilon(F,D)$ abzuschätzen, verwenden wir das Resultat von Weissauer [23], daß jede Hecke Eigenform $F \in S_k(\Gamma_2)$, die nicht zum Maaßraum gehört, die Ramanujan–Petersson Vermutung erfüllt (d.h. alle (komplexen) Nullstellen von $Z_{F,p}$ haben den Betrag $p^{\frac{3}{2}-k}$). Demnach müssen wir $C_1 = 4$ und $\alpha = k - \frac{3}{2}$ wählen, um die mit unseren Methoden *bestmögliche* Abschätzung für $\sum_1$ zu erhalten.

Der Betrag von $\sum_2$ zu $\varepsilon(F,D)$ ist verschwindend klein im Vergleich zu $\sum_1$, wenn N groß genug ist. Deshalb müssen wir nicht die optimale Abschätzung für $\lambda_F(n)$ investieren. Man erhält eine grobe (aber einfache und für unsere Zwecke ausreichende) Abschätzung für $\lambda_F(n)$ aus der Ramanujan–Petersson Vermutung, wenn man $\sigma_0(n)$ durch n abschätzt, nämlich

$$|\lambda_F(n)| \leqslant \sum_{d\,|\,n} \sigma_0(d)\sigma_0(\tfrac{n}{d}) n^{k-\frac{3}{2}} \leqslant \sum_{d\,|\,n} n^{k-\frac{1}{2}} = \sigma_0(n) n^{k-\frac{1}{2}} \leqslant n^{k+\frac{1}{2}}.$$

Also setzen wir $C_2 = 1$ und $\beta = k + \frac{1}{2}$.
Wir wählen $N = 4.000$ (dann gilt $\sum_2 \ll \sum_1$ für die in Frage kommenden D) und berechnen die numerischen Näherungswerte von $Z_F(k-1, \chi_D)$ und die zugehörigen Fehlerabschätzungen mit Hilfe von MATHEMATICA™.

Aus (0.2) auf Seite 5 haben wir Konstanten $C_F = C_F(D)$ für $F = \Upsilon_{20}, \ldots,$ Υ_{26b} und $D = -3, -4, -7, -8$ berechnet.
Die numerischen Berechnungen wurden kontrolliert mit Hilfe von MAPLE™.

Wir erhalten folgende numerische Konstanten

D	$C_{\Upsilon_{20}}$	$C_{\Upsilon_{22}}$
-3	$2.067215202868\,8 \cdot 10^{11} \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$	$1.305668526829\,0 \cdot 10^{12} \pm 0.5 \cdot 10^{-1}$
-4	$2.067215202868\,8 \cdot 10^{11} \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$	$1.305668526829\,0 \cdot 10^{12} \pm 0.5 \cdot 10^{-1}$
-7	$2.067215202\,9206 \cdot 10^{11} \pm 2.9 \cdot 10^{1}$	$1.3056685268\,295 \cdot 10^{12} \pm 1.1 \cdot 10^{1}$
-8	$2.067215202\,8644 \cdot 10^{11} \pm 3.1 \cdot 10^{1}$	$1.305668\,5179067 \cdot 10^{12} \pm 1.1 \cdot 10^{6}$

D	$C_{\Upsilon_{24a}}$	$C_{\Upsilon_{24b}}$
-3	$1.095337244519\,4 \cdot 10^{13} \pm 0.5 \cdot 10^{0}$	$6.138805283929\,6 \cdot 10^{11} \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$
-4	$1.095337244519\,4 \cdot 10^{13} \pm 0.5 \cdot 10^{0}$	$6.138805283929\,6 \cdot 10^{11} \pm 0.5 \cdot 10^{-2}$
-7	$1.0953372445\,111 \cdot 10^{13} \pm 8.7 \cdot 10^{2}$	$6.1388052\,891963 \cdot 10^{11} \pm 9.3 \cdot 10^{3}$
-8	$1.09533724\,45386 \cdot 10^{13} \pm 2.6 \cdot 10^{4}$	$6.1388\,034612038 \cdot 10^{11} \pm 1.3 \cdot 10^{6}$

D	$C_{\Upsilon_{26a}}$	$C_{\Upsilon_{26b}}$
-3	$9.615528574589\,1 \cdot 10^{13} \pm 0.5 \cdot 10^{0}$	$6.232883950541\,7 \cdot 10^{12} \pm 0.5 \cdot 10^{-1}$
-4	$9.615528574589\,1 \cdot 10^{13} \pm 0.5 \cdot 10^{0}$	$6.232883950541\,7 \cdot 10^{12} \pm 0.5 \cdot 10^{-1}$
-7	$9.61552857\,46522 \cdot 10^{13} \pm 1.1 \cdot 10^{4}$	$6.232883950\,5729 \cdot 10^{12} \pm 2.3 \cdot 10^{2}$
-8	$9.615528\,5333968 \cdot 10^{13} \pm 8.2 \cdot 10^{6}$	$6.232883\,9821394 \cdot 10^{12} \pm 1.6 \cdot 10^{5}$

Insgesamt haben wir also gezeigt

Theorem 2.2. *Für* $F = \Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}$ *gibt es von* D *unabhängige Konstanten* C_F, *so daß Gleichung* (0.2) *(d.h. die Böcherer Vermutung)* numerisch *richtig ist für* $D = -3, -, 4-7, -8$ *auf mindestens* 5 *Stellen.*

Anhang: Tabellen

A1. Elliptische Spitzenformen

n	n-ter Fourierkoeffizient von Δ	ΔE_4	ΔE_6	ΔE_8	ΔE_{10}
1	1	1	1	1	1
2	-24	216	-528	456	-288
3	252	-3 348	-4 284	50 652	-128 844
4	-1 472	13 888	147 712	-316 352	-2 014 208
5	4 830	52 110	-1 025 850	-2 377 410	21 640 950
6	-6 048	-723 168	2 261 952	23 097 312	37 107 072
7	-16 744	2 822 456	3 225 992	-16 917 544	-768 078 808
8	84 480	-4 078 080	-8 785 920	-383 331 840	1 184 071 680
9	-113 643	-3 139 803	-110 787 507	1 403 363 637	6 140 423 133
10	-115 920	11 255 760	541 648 800	-1 084 098 960	-6 232 593 600
11	534 612	20 586 852	-753 618 228	-16 212 108	-94 724 929 188
12	-370 944	-46 497 024	-632 798 208	-16 023 861 504	259 518 615 552
13	-577 738	-190 073 338	2 541 064 526	50 421 615 062	-80 621 789 794
14	401 856	609 650 496	-1 703 323 776	-7 714 400 064	221 206 696 704
15	1 217 160	-174 464 280	4 394 741 400	-120 420 571 320	-2 788 306 561 800
16	987 136	-1 335 947 264	-14 721 941 504	-8 939 761 664	3 883 087 691 776
17	-6 905 934	1 646 527 986	-5 429 742 318	225 070 099 506	3 052 282 930 002
18	2 727 432	-678 197 448	58 495 803 696	639 933 818 472	-1 768 441 862 304
19	10 661 420	1 563 257 180	1 487 499 860	-1 710 278 572 660	-7 920 788 351 740
20	-7 109 760	723 703 680	-151 530 355 200	752 098 408 320	-43 589 374 617 600

Tabelle 1: Fourierkoeffizienten von Δ, ΔE_4, ΔE_6, ΔE_8 und ΔE_{10}.

n	n-ter Fourierkoeffizient von Δ^2	ΔE_6^2	ΔE_{14}	$\Delta^2 E_4$	ΔE_8^2
1	0	1	1	0	1
2	1	-1 032	-48	1	936
3	-48	245 196	-195 804	192	331 452
4	1 080	10 965 568	-33 552 128	-8 280	53 282 368
5	-15 040	60 177 390	-741 989 850	147 200	3 468 981 150
6	143 820	-1 130 921 568	9 398 592	-1 438 020	36 142 047 072
7	-985 824	870 123 128	39 080 597 192	7 491 456	-49 669 351 144
8	4 857 920	17 092 861 440	3 221 114 880	-4 626 880	-1 621 002 216 960
9	-16 295 040	8 116 105 797	-808 949 403 027	-246 965 760	-636 029 920 683
10	28 412 910	-337 171 912 560	35 615 512 800	2 112 385 950	30 718 019 156 400
11	38 671 600	367 609 228 932	8 419 515 299 052	-9 443 825 600	21 146 810 100 372
12	-424 520 544	1 740 603 771 648	6 569 640 870 912	23 625 035 616	-279 026 822 801 664
13	1 268 350 272	194 208 033 446	-81 651 045 335 314	-14 413 771 008	-449 881 202 272 138
14	-1 211 937 160	-18 927 852 049 344	-1 875 868 665 216	-118 710 609 640	1 351 594 971 873 216
15	-4 306 546 080	27 958 559 930 280	145 284 580 589 400	427 914 230 400	6 424 242 877 729 800
16	18 293 091 840	-20 778 447 171 584	1 125 667 983 917 056	-467 038 103 040	-9 532 183 303 614 464
17	-23 522 231 424	163 991 021 597 298	-2 519 900 028 948 078	-645 319 017 984	-18 152 449 500 792 654
18	-26 299 018 683	-306 398 284 588 584	38 829 571 345 296	1 640 006 523 477	-46 685 061 999 999 288
19	137 218 594 320	-213 577 329 781 060	-6 082 056 370 308 940	2 800 373 100 480	216 497 599 044 378 860
20	-150 999 182 320	362 804 908 341 120	24 895 338 421 900 800	-8 506 579 320 400	-42 624 786 964 636 800

Tabelle 2: Fourierkoeffizienten von Δ^2, ΔE_6^2, ΔE_{14} $\Delta^2 E_4$ und ΔE_8^2.

A2. Jacobische Spitzenformen

D	Fourierkoeffizient $C(D)$ von ϕ_{10}	ϕ_{12}	$\phi_{10}E_4$	$\phi_{10}E_6$	$\phi_{10}E_{10}$	$\phi_{12}E_8$	$\phi_{10}\Delta$
-3	1	1	1	1	1	1	0
-4	-2	10	-2	-2	-2	10	0
-7	-16	-88	224	-520	-280	392	1
-8	36	-132	-444	1 044	564	4 668	-2
-11	99	1 275	-1 581	-8 469	-131 109	20 955	-40
-12	-272	736	4 048	14 848	261 088	556 576	84
-15	-240	-8 040	-4 320	93 000	-3 056 040	-3 794 760	735
-16	1 056	-2 880	96	-214 656	5 590 464	2 679 360	-1 640
-19	-253	24 035	65 987	-90 973	459 107	-9 382 045	-8 120
-20	-1 800	13 080	-129 000	628 200	-11 836 920	-15 165 480	19 600
-23	2 736	-14 136	-161 184	-1 104 552	111 950 088	192 733 224	58 837
-24	-1 464	-54 120	589 896	764 616	-194 115 384	-70 387 560	-158 340
-27	-4 284	-128 844	-195 804	748 692	73 332	-21 201 804	-280 728
-28	12 544	115 456	-928 256	-2 874 368	386 643 712	-2 180 864	894 208
-31	-6 816	389 520	1 078 464	16 100 016	-1 459 494 384	-3 135 119 280	777 770
-32	-19 008	38 016	21 312	-23 811 840	1 910 620 800	1 283 792 256	-3 458 352
-35	27 270	-256 410	640 710	-32 117 850	-1 310 051 610	5 332 103 910	-247 680
-36	-4 554	-697 950	-671 274	109 122 534	-1 177 348 986	3 681 263 970	7 934 400
-39	-6 864	-806 520	-5 095 584	-54 300 264	14 794 499 016	5 714 456 040	-7 809 555
-40	39 880	963 160	8 205 640	-143 559 800	-23 920 968 440	-25 382 024 360	-1 490 020

Tabelle 3: Fourierkoeffizienten von ϕ_{10}, ϕ_{12}, $\phi_{10}E_4$, $\phi_{10}E_6$, $\phi_{10}E_{10}$, $\phi_{12}E_8$ und $\phi_{10}\Delta$.

D	Fourierkoeffizient $C(D)$ von $\phi_{10}E_6^2$	$\phi_{12}E_{10}$	$\phi_{10}E_{14}$	$\phi_{12}\Delta$	$\phi_{12}E_6^2$
-3	1	1	1	0	1
-4	-2	10	-2	0	10
-7	-1 024	-352	-40	1	-1 096
-8	2 052	-2 772	84	10	-10 212
-11	236 979	-110 925	-196 149	-112	310 731
-12	-478 064	-1 318 736	392 128	-372	2 341 312
-15	12 887 040	6 376 800	-35 120 280	3 639	-4 200 312
-16	-24 815 904	-34 285 920	69 456 384	6 424	135 307 008
-19	157 308 227	217 428 035	-1 018 050 013	-62 288	-764 576 221
-20	-265 458 600	-106 371 000	1 897 579 560	-68 528	1 980 045 624
-23	-185 103 360	43 301 664	-7 264 838 472	672 661	-11 270 281 704
-24	875 345 736	558 675 480	10 804 758 216	510 276	5 017 834 392
-27	-4 039 384 860	-7 172 200 476	5 017 740 372	-4 924 944	9 358 116 948
-28	6 014 417 920	3 577 885 696	-29 609 681 408	-2 875 232	-16 785 955 328
-31	-4 901 799 936	1 073 071 680	185 932 085 616	24 775 850	236 393 475 120
-32	-1 805 395 392	4 888 914 624	-298 254 044 160	13 135 632	-211 830 750 720
-35	55 933 564 230	72 852 481 350	308 550 741 030	-80 446 464	363 459 226 662
-36	-99 647 124 714	-67 240 349 550	-34 423 641 306	-50 931 648	-228 540 628 926
-39	91 205 078 016	76 339 829 280	-1 672 076 816 904	114 553 101	-2 961 610 909 608
-40	24 911 227 720	-96 266 330 600	3 019 597 469 320	163 132 484	1 851 425 907 928

Tabelle 4: Fourierkoeffizienten von $\phi_{10}E_6^2$, $\phi_{12}E_{10}$, $\phi_{10}E_{14}$, $\phi_{12}\Delta$ und $\phi_{12}E_6^2$.

D	Fourierkoeffizient $C(D)$ von $\phi_{10}\Delta E_4$	$\phi_{10}E_8^2$	$\phi_{12}E_{14}$
-3	0	1	1
-4	0	-2	10
-7	1	944	-112
-8	-2	-1 884	-372
-11	200	338 979	-193 245
-12	-396	-674 192	-1 962 416
-15	-6 705	55 970 640	-20 998 800
-16	14 200	-110 594 784	-356 702 880
-19	88 600	3 908 309 507	1 505 914 115
-20	-206 000	-7 596 107 400	-11 201 914 200
-23	-553 643	66 022 771 056	65 248 365 264
-24	1 532 700	-116 965 264 824	-107 938 120 680
-27	569 592	383 027 709 636	513 762 860 484
-28	-4 380 992	-539 940 160 256	-345 690 216 704
-31	17 652 650	-53 677 022 496	-57 261 095 520
-32	-25 464 432	1 055 410 011 072	714 772 678 464
-35	-146 943 360	-8 183 390 107 770	-10 875 140 221 050
-36	344 088 000	13 505 096 310 966	9 608 220 742 770
-39	552 804 525	-20 949 227 913 744	-20 608 286 428 080
-40	-1 832 142 340	15 229 435 838 920	22 757 957 954 200

Tabelle 5: Fourierkoeffizienten von $\phi_{10}\Delta E_4$, $\phi_{10}E_8^2$ und $\phi_{12}E_{14}$.

A3. „Echte“ Siegelsche Modulformen

D	n, r, m	a(n,r,m)	D	n, r, m	a(n,r,m)
-3	1, 1, 1	1	-27	1, 1, 7	-10 564 236
-4	1, 0, 1	4		3, 3, 3	-40 484 529
-7	1, 1, 2	56	-28	1, 0, 7	192 231 424
-8	1, 0, 2	2 616		2, 2, 4	-76 453 888
-11	1, 1, 3	-55 077	-31	1, 1, 8	-2 297 306 832
-12	1, 0, 3	408 832		2, 1, 4	1 172 793 648
	2, 2, 2	-840 960	-32	1, 0, 8	1 597 206 528
-15	1, 1, 4	-3 425 400		2, 0, 4	-2 885 720 064
	2, 1, 2	3 670 920		3, 2, 3	3 811 258 368
-16	1, 0, 4	4 134 912	-35	1, 1, 9	2 011 026 150
	2, 0, 2	-4 412 416		3, 1, 3	3 203 207 910
-19	1, 1, 5	-4 461 469	-36	1, 0, 9	1 251 957 492
-20	1, 0, 5	-13 501 200		2, 2, 5	-621 470 988
	2, 2, 3	29 076 720		3, 0, 3	1 387 743 840
-23	1, 1, 6	152 341 656	-39	1, 1, 10	10 254 477 528
	2, 1, 3	-81 836 904		2, 1, 5	-19 564 259 112
-24	1, 0, 6	-132 251 472		3, 3, 4	31 394 414 808
	2, 0, 3	236 757 168	-40	1, 0, 10	-24 651 496 400
				2, 0, 5	31 040 422 960

Tabelle 6: Die ersten Fourierkoeffizienten von Υ_{20}.

p	Eigenwert λ_p von Υ_{20}
2	-840 960
3	346 935 960
5	-5 232 247 240 500
7	2 617 414 076 964 400
11	1 427 823 701 421 564 744
13	-83 773 835 478 688 698 980
17	14 156 088 476 175 218 899 620
19	146 957 560 176 221 097 673 720
23	-7 159 245 922 546 757 692 913 520
29	1 055 528 218 470 800 414 110 149 180
31	4 031 470 549 468 367 403 585 068 224
37	-154 882 657 977 740 251 483 442 365 940
41	1 126 683 124 934 949 617 518 831 346 964
43	74 572 686 686 194 644 813 168 430 600
47	-13 773 335 595 379 978 013 820 602 730 720
53	29 292 488 702 536 161 643 591 933 657 260
59	521 943 213 201 995 351 655 113 144 025 960
61	896 978 197 899 858 751 399 574 623 768 444
67	-2 921 787 486 641 381 474 027 809 454 434 280
71	-10 040 723 756 183 052 209 438 026 581 108 816

Tabelle 7: Die ersten Eigenwerte λ_p von Υ_{20}.

p^2	Eigenwert λ_{p^2} von Υ_{20}
2^2	248 256 200 704
3^2	−452 051 040 393 665 991
5^2	−94 655 785 156 653 029 446 859 375
7^2	−5 501 629 950 184 780 949 434 983 315 951
11^2	−126 258 221 861 417 704 499 584 077 355 164 268 151
13^2	2 528 254 555 352 510 520 887 488 261 241 887 242 369
17^2	262 144 933 510 286 336 089 464 293 262 250 165 947 750 ,889
19^2	−283 417 759 450 334 375 466 210 009 895 464 677 379 295 086 759
23^2	127 862 428 522 278 879 932 688 110 084 314 434 400 497 ,569 566 129
29^2	408 550 299 154 535 330 723 926 336 201 059 419 422 405 ,306 949 883 361
31^2	−9 417 686 481 892 622 568 784 061 821 415 683 057 728 289 096 885 473 471
37^2	4 270 657 975 661 931 417 960 508 434 757 260 969 748 219 593 839 247 065 169
41^2	129 620 395 091 878 626 890 240 343 719 327 738 119 688 ,391 311 944 613 269 369
43^2	−2 118 391 905 744 174 698 890 014 439 813 915 105 652 042 393 393 982 400 772 151
47^2	10 717 867 956 150 312 430 187 083 192 735 560 357 439 349 298 395 760 667 696 609
53^2	−6 359 983 052 359 692 969 866 068 986 893 310 598 482 880 773 029 488 944 413 754 191
59^2	159 291 906 542 794 821 742 879 348 124 552 646 753 906 ,149 121 778 952 350 318 431 721
61^2	−653 805 853 261 332 407 170 328 486 766 159 640 869 797 840 457 778 124 369 821 593 951
67^2	25 254 882 862 606 589 034 647 035 623 760 404 781 292 970 925 413 106 240 956 567 868 089
71^2	173 803 021 217 204 348 159 401 727 499 142 397 151 285 ,125 090 266 111 617 333 373 599 889

Tabelle 8: Die ersten Eigenwerte λ_{p^2} von Υ_{20}.

D	n, r, m	a(n,r,m)	D	n, r, m	a(n,r,m)
-3	1, 1, 1	1	-27	1, 1, 7	-2 250 676 764
-4	1, 0, 1	-12		3, 3, 3	-6 478 415 721
-7	1, 1, 2	1 344	-28	1, 0, 7	10 663 102 464
-8	1, 0, 2	216		2, 2, 4	-5 796 446 208
-11	1, 1, 3	409 779	-31	1, 1, 8	-7 603 549 056
-12	1, 0, 3	468 448		2, 1, 4	3 068 267 904
	2, 2, 2	-2 215 680	-32	1, 0, 8	-17 510 041 728
-15	1, 1, 4	20 464 320		2, 0, 4	-705 079 296
	2, 1, 2	-17 785 920		3, 2, 3	18 292 182 912
-16	1, 0, 4	-21 726 144	-35	1, 1, 9	41 109 259 590
	2, 0, 2	39 171 072		3, 1, 3	-113 115 708 090
-19	1, 1, 5	83 433 027	-36	1, 0, 9	-103 420 847 484
-20	1, 0, 5	-340 642 800		2, 2, 5	161 882 817 156
	2, 2, 3	347 861 520		3, 0, 3	35 899 575 840
-23	1, 1, 6	-203 166 144	-39	1, 1, 10	80 726 408 256
	2, 1, 3	141 086 016		2, 1, 5	-180 828 732 864
-24	1, 0, 6	675 618 096		3, 3, 4	228 410 584 896
	2, 0, 3	-1 313 394 384	-40	1, 0, 10	121 529 747 760
				2, 0, 5	96 743 592 240

Tabelle 9: Die ersten Fourierkoeffizienten von Υ_{22}.

p	Eigenwert λ_p von Υ_{22}
2	$-2\,215\,680$
3	$-2\,991\,631\,320$
5	$91\,050\,137\,983\,500$
7	$-59\,174\,906\,232\,302\,000$
11	$-124\,516\,321\,901\,496\,573\,576$
13	$69\,077\,291\,327\,878\,261\,852\,060$
17	$-28\,071\,195\,295\,366\,866\,651\,998\,940$
19	$-8\,911\,928\,438\,917\,010\,023\,989\,560$
23	$1\,288\,399\,464\,282\,335\,021\,926\,848\,240$
29	$1\,008\,725\,620\,889\,990\,251\,611\,276\,547\,260$
31	$-1\,946\,523\,939\,767\,828\,063\,167\,594\,540\,736$
37	$228\,942\,700\,477\,793\,631\,681\,544\,175\,791\,180$
41	$-215\,088\,394\,079\,600\,199\,814\,926\,229\,007\,916$
43	$-4\,126\,190\,905\,731\,126\,629\,420\,301\,201\,590\,600$
47	$-3\,982\,691\,707\,552\,903\,647\,559\,503\,680\,777\,760$
53	$182\,439\,844\,999\,070\,928\,085\,488\,585\,362\,902\,380$
59	$1\,913\,265\,999\,070\,486\,469\,213\,509\,812\,751\,845\,720$
61	$2\,472\,310\,622\,637\,653\,213\,167\,013\,576\,678\,620\,924$
67	$-36\,077\,616\,168\,689\,433\,727\,149\,625\,374\,711\,607\,640$
71	$74\,352\,697\,553\,681\,667\,189\,879\,183\,805\,706\,049\,744$

Tabelle 10: Die ersten Eigenwerte λ_p von Υ_{22}.

p^2	Eigenwert λ_{p^2} von Υ_{22}
2^2	1 236 604 616 704
3^2	6 450 908 894 978 270 409
5^2	−1 644 734 727 519 011 280 046 109 375
7^2	−74 849 498 188 648 254 451 583 039 640 126 351
11^2	−3 196 189 869 207 766 811 624 065 534 521 696 176 944 391
13^2	−1 548 430 150 433 588 532 565 220 859 475 529 639 461 005 231
17^2	80 990 641 964 571 847 053 294 756 361 179 029 645 875 049 051 689
19^2	−32 948 147 955 166 328 719 437 213 944 382 944 585 520 ,305 452 254 039
23^2	10 993 424 930 314 669 778 683 612 563 920 935 310 512 605 394 781 669 329
29^2	−786 402 133 132 511 455 838 317 131 720 311 194 929 887 845 893 130 638 642 959
31^2	10 465 123 499 124 283 477 409 861 650 697 561 634 294 047 045 067 367 659 132 609
37^2	585 630 509 073 453 827 100 342 187 905 983 517 715 888 ,485 458 625 505 659 440 769
41^2	−775 826 683 922 069 520 987 437 492 155 355 137 743 586 721 937 395 258 722 083 071 591
43^2	3 696 000 330 443 722 503 197 357 394 208 183 618 992 456 673 532 966 886 498 582 091 449
47^2	−44 301 347 206 992 571 573 025 957 145 202 529 613 115 ,278 543 093 401 291 622 216 276 191
53^2	−28 071 253 283 850 135 331 499 382 308 346 466 401 383 ,951 894 362 256 852 353 295 626 240 991
59^2	−3 112 022 888 478 723 407 364 973 747 947 983 759 999 864 370 229 624 545 176 408 261 858 377 319
61^2	−14 047 366 070 076 485 109 729 686 600 599 766 091 029 ,993 895 311 014 515 331 239 785 946 710 991
67^2	746 968 490 048 153 186 547 006 207 433 584 574 798 169 ,048 021 425 715 933 378 423 953 467 938 889
71^2	−4 187 177 838 668 656 928 430 404 904 879 660 322 668 745 954 654 904 728 677 601 832 502 277 669 391

Tabelle 11: Die ersten Eigenwerte λ_{p^2} von Υ_{22}.

D	n, r, m	a(n,r,m)	D	n, r, m	a(n,r,m)
-3	1, 1, 1	1	-27	1, 1, 7	15 792 587 604
-4	1, 0, 1	-16		3, 3, 3	-84 398 984 289
-7	1, 1, 2	-2 024	-28	1, 0, 7	-35 323 949 056
-8	1, 0, 2	-20 064		2, 2, 4	28 232 630 272
-11	1, 1, 3	-427 317	-31	1, 1, 8	47 381 330 928
-12	1, 0, 3	-685 568		2, 1, 4	-119 955 850 512
	2, 2, 2	-5 560 320	-32	1, 0, 8	-441 325 412 352
-15	1, 1, 4	-82 896 600		2, 0, 4	195 716 775 936
	2, 1, 2	69 632 040		3, 2, 3	371 028 860 928
-16	1, 0, 4	-28 028 928	-35	1, 1, 9	503 206 669 350
	2, 0, 2	156 073 984		3, 1, 3	-422 947 232 730
-19	1, 1, 5	-1 113 451 229	-36	1, 0, 9	355 842 357 552
-20	1, 0, 5	2 021 755 200		2, 2, 5	-310 721 062 608
	2, 2, 3	-1 638 932 160		3, 0, 3	848 286 794 880
-23	1, 1, 6	-4 755 099 144	-39	1, 1, 10	-536 023 148 232
	2, 1, 3	1 352 678 136		2, 1, 5	433 753 944 888
-24	1, 0, 6	15 915 121 728		3, 3, 4	371 966 582 328
	2, 0, 3	-17 932 972 992	-40	1, 0, 10	3 857 830 222 400
				2, 0, 5	-5 323 173 676 480

Tabelle 12: Die ersten Fourierkoeffizienten von Υ_{24a}.

p	Eigenwert λ_p von Υ_{24a}
2	$-5\,560\,320$
3	$-53\,017\,924\,680$
5	$-33\,324\,163\,624\,500$
7	$8\,954\,840\,553\,122\,354\,800$
11	$-61\,252\,789\,757\,496\,550\,366\,296$
13	$-2\,963\,462\,751\,193\,974\,369\,381\,860$
17	$7\,125\,866\,170\,377\,830\,821\,368\,031\,140$
19	$23\,401\,630\,456\,738\,283\,839\,109\,704\,600$
23	$-5\,704\,707\,774\,363\,351\,635\,801\,133\,259\,440$
29	$-859\,235\,757\,087\,405\,470\,046\,585\,070\,354\,500$
31	$2\,277\,199\,951\,585\,294\,792\,967\,883\,826\,861\,504$
37	$-58\,294\,149\,976\,153\,941\,157\,306\,256\,285\,825\,780$
41	$5\,070\,777\,629\,336\,360\,944\,446\,794\,228\,361\,645\,204$
43	$-3\,889\,131\,864\,432\,370\,691\,974\,776\,343\,521\,051\,800$
47	$-8\,571\,360\,633\,164\,353\,883\,430\,207\,677\,698\,739\,040$
53	$-972\,926\,959\,062\,690\,416\,131\,853\,487\,557\,501\,642\,580$
59	$1\,275\,325\,142\,720\,553\,399\,097\,156\,201\,951\,556\,368\,200$
61	$7\,600\,239\,939\,718\,565\,937\,385\,988\,863\,689\,529\,687\,804$
67	$27\,294\,804\,905\,881\,182\,898\,633\,310\,702\,239\,570\,774\,840$
71	$-16\,900\,376\,961\,476\,840\,854\,220\,080\,481\,974\,809\,198\,096$

Tabelle 13: Die ersten Eigenwerte λ_p von Υ_{24a}.

p^2	Eigenwert λ_{p^2} von Υ_{24a}
2^2	4 359 228 227 584
3^2	33 581 886 607 436 193 369
5^2	1 106 312 387 343 948 020 418 650 640 625
7^2	29 976 440 312 492 735 832 448 947 592 543 690 449
11^2	−8 011 104 541 118 850 732 742 719 190 253 640 325 902 638 231
13^2	−119 237 094 753 060 470 700 689 137 031 846 976 749 720 577 414 111
17^2	1 655 879 389 575 400 900 155 429 615 080 863 543 049 307 182 901 236 329
19^2	−5 509 177 177 626 935 884 750 778 678 426 551 641 448 625 832 523 101 523 719
23^2	6 661 120 643 015 120 671 272 825 587 319 802 229 659 474 638 181 259 400 154 609
29^2	389 789 565 905 386 146 293 170 142 246 575 443 891 418 ,108 136 387 013 318 589 624 321
31^2	−3 659 141 971 302 946 867 059 989 518 913 204 929 405 446 318 753 067 791 127 957 438 911
37^2	−28 994 447 900 857 716 147 443 415 252 216 563 535 370 ,528 386 693 175 414 891 703 561 176 911
41^2	13 227 068 934 795 405 682 687 384 444 911 654 556 245 644 083 639 302 846 097 438 517 096 248 249
43^2	−38 900 843 791 668 463 726 676 246 968 000 876 418 233 ,953 888 763 230 387 380 383 527 649 284 951
47^2	−3 332 992 706 191 547 795 183 818 012 772 906 063 993 060 756 867 637 443 222 189 825 384 679 088 031
53^2	141 427 716 105 548 183 728 983 859 894 796 541 970 180 ,780 569 291 325 230 196 016 471 618 900 346 769
59^2	−43 718 565 068 191 197 309 301 967 287 620 482 102 067 ,874 488 225 439 430 238 780 362 710 405 740 075 959
61^2	119 948 201 471 641 986 363 548 891 461 533 586 277 157 ,280 044 816 254 105 460 672 475 268 409 700 511 169
67^2	7 043 655 613 253 535 877 490 024 795 279 130 092 590 649 380 766 542 058 545 306 759 733 760 699 970 368 729
71^2	−286 026 616 623 004 798 263 950 591 036 225 397 313 144 507 705 063 839 605 753 023 964 413 658 084 624 029 871

Tabelle 14: Die ersten Eigenwerte λ_{p^2} von Υ_{24a}.

D	n, r, m	a(n,r,m)	D	n, r, m	a(n,r,m)
-3	1, 1, 1	3	-27	1, 1, 7	11 616 837 372
-4	1, 0, 1	76		3, 3, 3	-134 880 882 723
-7	1, 1, 2	-616	-28	1, 0, 7	-20 521 808 384
-8	1, 0, 2	-2 904		2, 2, 4	9 149 837 312
-11	1, 1, 3	2 122 593	-31	1, 1, 8	1 069 109 463 792
-12	1, 0, 3	11 995 968		2, 1, 4	-634 157 052 432
	2, 2, 2	-19 395 072	-32	1, 0, 8	-215 931 513 600
-15	1, 1, 4	130 379 688		2, 0, 4	30 954 688 512
	2, 1, 2	-95 847 768		3, 2, 3	162 320 792 832
-16	1, 0, 4	701 517 696	-35	1, 1, 9	760 259 970 162
	2, 0, 2	-810 108 928		3, 1, 3	899 616 083 058
-19	1, 1, 5	-1 740 654 487	-36	1, 0, 9	-1 771 997 680 548
-20	1, 0, 5	5 795 748 624		2, 2, 5	1 697 426 584 668
	2, 2, 3	-2 800 894 704		3, 0, 3	-1 032 021 832 032
-23	1, 1, 6	-44 644 762 248	-39	1, 1, 10	-13 058 249 912 136
	2, 1, 3	24 354 611 832		2, 1, 5	5 252 147 921 592
-24	1, 0, 6	-3 700 650 096		3, 3, 4	8 778 355 278 264
	2, 0, 3	6 253 357 968	-40	1, 0, 10	2 172 537 030 928
				2, 0, 5	2 829 501 563 152

Tabelle 15: Die ersten Fourierkoeffizienten von Υ_{24b}.

p	Eigenwert λ_p von Υ_{24b}
2	−6 465 024
3	−13 579 234 632
5	7 032 516 891 223 500
7	−3 279 669 013 278 636 944
11	−411 753 195 096 491 986 335 576
13	16 342 404 062 618 944 031 393 308
17	−856 692 579 106 069 166 650 458 204
19	40 197 203 784 315 674 208 085 503 640
23	−2 612 738 224 352 475 069 296 861 434 032
29	359 342 665 208 336 201 286 820 281 525 180
31	−2 300 225 511 530 419 634 587 240 392 028 736
37	72 670 813 301 721 690 148 152 281 004 607 756
41	−2 265 149 297 209 222 996 491 488 597 220 803 436
43	4 374 561 996 478 999 842 484 416 559 005 169 768
47	3 248 500 105 931 023 347 538 613 113 581 602 976
53	−91 507 430 240 877 355 211 736 505 896 274 699 092
59	1 232 839 488 134 494 379 446 912 126 425 199 177 800
61	2 896 103 774 180 696 965 087 264 703 197 792 932 604
67	139 422 451 645 844 556 182 466 564 330 219 983 536 696
71	−291 010 689 489 697 699 722 653 438 792 782 121 492 496

Tabelle 16: Die ersten Eigenwerte λ_p von Υ_{24b}.

p^2	Eigenwert λ_{p^2} von Υ_{24b}
2^2	$-43\,702\,573\,334\,528$
3^2	$-2\,708\,334\,987\,967\,327\,251\,879$
5^2	$11\,644\,293\,436\,952\,024\,315\,268\,602\,640\,625$
7^2	$27\,091\,583\,264\,970\,454\,785\,691\,561\,719\,738\,838\,737$
11^2	$71\,958\,648\,045\,065\,820\,140\,969\,637\,076\,138\,959\,337\,778\,493\,289$
13^2	$-67\,540\,536\,863\,276\,144\,913\,386\,006\,043\,968\,830\,024\,351\ ,809\,457\,119$
17^2	$-1\,294\,803\,054\,343\,542\,460\,665\,322\,270\,289\,113\,859\,823\,060\,620\,111\,502\,743$
19^2	$-5\,373\,687\,317\,118\,145\,744\,959\,502\,692\,343\,629\,468\,383\,292\,046\,524\,687\,694\,599$
23^2	$5\,650\,614\,217\,414\,056\,479\,065\,281\,761\,320\,066\,226\,524\,715\,789\,089\,896\,738\,151\,921$
29^2	$-888\,402\,045\,852\,522\,225\,803\,959\,319\,699\,941\,640\,148\,261\,121\,608\,230\,764\,324\,439\,746\,559$
31^2	$-4\,084\,509\,524\,204\,847\,356\,912\,873\,916\,672\,797\,553\,279\,079\,171\,614\,802\,246\,179\,751\,625\,151$
37^2	$-10\,548\,097\,109\,255\,511\,508\,673\,610\,510\,869\,661\,444\,034\ ,253\,641\,082\,199\,431\,868\,033\,226\,260\,303$
41^2	$-1\,445\,550\,721\,930\,078\,673\,713\,801\,398\,789\,816\,079\,661\,620\,357\,933\,270\,066\,461\,293\,934\,292\,331\,591$
43^2	$-22\,859\,111\,614\,170\,787\,358\,792\,698\,970\,661\,850\,930\,547\ ,555\,874\,166\,431\,969\,417\,541\,995\,330\,469\,719$
47^2	$-1\,646\,714\,616\,608\,927\,944\,953\,590\,201\,785\,537\,564\,210\,860\,845\,747\,623\,049\,950\,333\,970\,789\,788\,999\,583$
53^2	$-40\,736\,231\,491\,087\,211\,945\,943\,360\,332\,387\,853\,726\,387\ ,522\,129\,368\,607\,182\,748\,978\,632\,076\,388\,364\,399$
59^2	$51\,306\,676\,628\,702\,643\,382\,428\,284\,423\,762\,296\,277\,662\,926\,003\,954\,639\,167\,472\,780\,192\,914\,618\,228\,840\,521$
61^2	$39\,911\,582\,580\,443\,259\,517\,473\,617\,944\,133\,421\,168\,025\,497\,649\,388\,789\,001\,610\,341\,030\,892\,594\,756\,203\,969$
67^2	$-7\,006\,024\,314\,085\,987\,990\,552\,714\,207\,102\,697\,103\,071\,365\,576\,532\,037\,641\,214\,009\,066\,961\,300\,731\,626\,690\,343$
71^2	$15\,520\,823\,493\,989\,741\,027\,830\,440\,196\,612\,546\,010\,701\,018\,318\,946\,266\,317\,015\,014\,424\,067\,580\,767\,216\,891\,729$

Tabelle 17: Die ersten Eigenwerte λ_{p^2} von Υ_{24b}.

D	n, r, m	a(n,r,m)	D	n, r, m	a(n,r,m)
-3	1, 1, 1	1	-27	1, 1, 7	312 574 816 836
-4	1, 0, 1	-8		3, 3, 3	-464 727 524 121
-7	1, 1, 2	-7 456	-28	1, 0, 7	-597 951 635 456
-8	1, 0, 2	15 216		2, 2, 4	384 862 257 152
-11	1, 1, 3	-1 180 509	-31	1, 1, 8	-209 487 845 184
-12	1, 0, 3	3 505 408		2, 1, 4	-90 256 363 584
	2, 2, 2	-18 063 360	-32	1, 0, 8	1 453 075 126 272
-15	1, 1, 4	154 317 600		2, 0, 4	-530 134 204 416
	2, 1, 2	-121 298 400		3, 2, 3	-1 018 208 176 128
-16	1, 0, 4	-114 318 336	-35	1, 1, 9	-5 525 604 733 050
	2, 0, 2	278 724 608		3, 1, 3	639 373 954 950
-19	1, 1, 5	4 318 486 403	-36	1, 0, 9	12 381 516 431 064
-20	1, 0, 5	-3 954 036 000		2, 2, 5	-15 403 222 282 536
	2, 2, 3	-646 644 000		3, 0, 3	1 458 383 901 120
-23	1, 1, 6	71 352 898 656	-39	1, 1, 10	-26 055 137 455 776
	2, 1, 3	-34 649 014 944		2, 1, 5	7 695 364 701 024
-24	1, 0, 6	-135 162 782 496		3, 3, 4	9 165 114 582 624
	2, 0, 3	70 777 492 704	-40	1, 0, 10	27 822 541 592 800
				2, 0, 5	15 241 222 424 800

Tabelle 18: Die ersten Fourierkoeffizienten von Υ_{26a}.

p	Eigenwert λ_p von Υ_{26a}
2	$-18\,063\,360$
3	$-182\,297\,987\,640$
5	$-89\,814\,382\,966\,912\,500$
7	$1\,151\,208\,859\,247\,827\,853\,200$
11	$2\,860\,679\,382\,686\,468\,860\,157\,784$
13	$-289\,790\,102\,247\,301\,565\,432\,471\,780$
17	$-203\,597\,670\,925\,072\,095\,879\,395\,989\,980$
19	$16\,061\,064\,810\,704\,566\,657\,580\,599\,093\,480$
23	$1\,723\,965\,639\,346\,061\,287\,785\,316\,101\,052\,080$
29	$-12\,771\,745\,042\,985\,861\,122\,765\,487\,725\,750\,980$
31	$-4\,178\,565\,348\,405\,391\,135\,487\,065\,485\,063\,467\,456$
37	$236\,192\,903\,719\,555\,305\,489\,362\,915\,934\,522\,115\,660$
41	$-5\,210\,478\,863\,496\,309\,105\,467\,767\,372\,318\,113\,596\,076$
43	$138\,208\,204\,894\,605\,369\,889\,881\,326\,084\,399\,138\,200$
47	$50\,434\,886\,823\,861\,009\,199\,603\,613\,563\,124\,403\,504\,480$
53	$-1\,586\,684\,477\,568\,310\,316\,934\,513\,905\,758\,392\,990\,747\,540$

Tabelle 19: Die ersten Eigenwerte λ_p von Υ_{26a}.

p^2	Eigenwert λ_{p^2} von Υ_{26a}
2^2	−413 097 940 484 096
3^2	−419 421 518 686 314 534 707 991
5^2	−4 811 842 127 810 002 503 917 857 724 609 375
7^2	583 291 954 807 680 764 469 972 614 007 615 773 369 649
11^2	−428 250 069 092 333 938 369 764 865 777 245 899 486 825 570 930 471
13^2	−900 674 408 666 054 607 971 998 674 532 579 842 293 287 047 371 759 631
17^2	107 870 502 621 982 079 949 157 315 554 080 346 862 363 ,195 121 752 926 021 289
19^2	30 168 383 104 699 275 588 159 507 093 134 849 148 603 240 011 754 998 300 553 801
23^2	−6 109 329 667 860 193 892 127 256 313 898 880 731 828 010 045 035 419 856 233 025 906 671
29^2	−637 584 849 651 854 959 267 927 604 523 853 254 735 049 482 479 892 630 281 675 956 344 361 199
31^2	−325 979 164 599 358 361 536 927 902 365 750 530 910 103 264 329 361 371 876 971 838 189 050 431
37^2	−58 791 113 321 061 405 221 535 770 231 712 318 759 892 ,196 699 504 548 657 620 527 411 559 725 446 431
41^2	3 097 232 598 340 148 469 550 310 028 089 759 845 841 028 813 089 407 212 675 452 929 460 322 557 398 489
43^2	29 529 465 397 285 264 016 752 666 742 149 782 923 320 234 803 874 956 971 804 881 176 323 159 569 303 449
47^2	2 892 232 821 994 314 687 165 213 225 192 125 132 871 395 298 389 957 266 098 104 919 569 887 773 042 338 209
53^2	−3 079 314 332 731 822 655 735 382 982 408 861 573 689 081 967 178 309 333 384 491 351 073 916 066 440 858 203 391

Tabelle 20: Die ersten Eigenwerte λ_{p^2} von Υ_{26a}.

D	n, r, m	a(n,r,m)	D	n, r, m	a(n,r,m)
-3	1, 1, 1	3	-27	1, 1, 7	2 599 692 818 508
-4	1, 0, 1	124		3, 3, 3	-3 924 983 637 963
-7	1, 1, 2	51 632	-28	1, 0, 7	220 642 949 632
-8	1, 0, 2	-109 752		2, 2, 4	-2 004 901 126 144
-11	1, 1, 3	7 299 177	-31	1, 1, 8	863 537 110 752
-12	1, 0, 3	-39 833 376		2, 1, 4	964 112 931 552
	2, 2, 2	-15 828 480	-32	1, 0, 8	-2 057 985 120 384
-15	1, 1, 4	-1 069 832 880		2, 0, 4	2 420 402 122 752
	2, 1, 2	1 383 235 920		3, 2, 3	5 850 708 690 816
-16	1, 0, 4	-2 142 547 392	-35	1, 1, 9	-62 562 664 556 910
	2, 0, 2	-2 734 618 624		3, 1, 3	64 094 183 724 690
-19	1, 1, 5	-8 963 757 559	-36	1, 0, 9	19 026 998 064 108
-20	1, 0, 5	-74 260 669 200		2, 2, 5	78 548 259 427 308
	2, 2, 3	77 829 596 400		3, 0, 3	-127 211 394 512 160
-23	1, 1, 6	156 327 462 768	-39	1, 1, 10	-25 853 206 393 872
	2, 1, 3	-61 995 660 432		2, 1, 5	49 009 547 244 528
-24	1, 0, 6	-160 771 884 912		3, 3, 4	37 090 085 945 328
	2, 0, 3	-33 212 307 312	-40	1, 0, 10	16 879 042 537 360
				2, 0, 5	-252 350 164 400 240

Tabelle 21: Die ersten Fourierkoeffizienten von Υ_{26b}.

p	Eigenwert λ_p von Υ_{26b}
2	$-5\,276\,160$
3	$-1\,025\,898\,342\,840$
5	$123\,782\,053\,762\,111\,500$
7	$-463\,678\,549\,119\,092\,946\,800$
11	$9\,361\,989\,869\,489\,206\,278\,893\,784$
13	$2\,318\,177\,700\,689\,017\,495\,380\,417\,820$
17	$-894\,120\,376\,097\,897\,344\,962\,132\,604\,380$
19	$28\,037\,547\,257\,558\,160\,431\,582\,101\,650\,280$
23	$-2\,455\,694\,249\,118\,004\,577\,637\,986\,236\,157\,520$
29	$-39\,511\,687\,687\,642\,226\,320\,928\,547\,332\,547\,780$
31	$1\,868\,693\,497\,837\,115\,307\,246\,284\,965\,084\,500\,544$
37	$351\,631\,080\,871\,085\,397\,481\,857\,141\,652\,358\,544\,460$
41	$-41\,726\,899\,221\,041\,980\,855\,484\,665\,560\,677\,948\,076$
43	$7\,779\,914\,721\,581\,314\,697\,783\,864\,803\,068\,520\,082\,200$
47	$-206\,615\,638\,831\,597\,153\,775\,370\,982\,621\,004\,434\,089\,120$
53	$1\,671\,936\,663\,660\,947\,011\,102\,518\,968\,506\,618\,712\,689\,260$

Tabelle 22: Die ersten Eigenwerte λ_p von Υ_{26b}.

p^2	Eigenwert λ_{p^2} von Υ_{26b}
2^2	133 181 064 085 504
3^2	368 682 036 331 968 976 831 209
5^2	−10 380 462 410 189 041 572 635 951 948 609 375
7^2	64 235 305 205 624 188 970 296 719 378 433 802 681 649
11^2	−3 821 043 267 390 172 511 331 536 118 191 147 619 924 975 794 471
13^2	9 101 910 638 051 644 783 286 612 682 222 638 447 846 644 415 990 769
17^2	−2 582 236 823 061 739 475 050 896 537 710 163 372 521 786 388 415 259 815 149 911
19^2	−261 372 697 178 874 911 562 476 200 191 993 783 491 299 158 447 026 969 731 766 199
23^2	−4 640 732 716 173 044 029 245 573 273 346 498 874 410 736 326 392 894 123 720 685 785 071
29^2	−471 232 921 709 008 252 585 022 217 483 069 996 649 747 283 312 525 620 737 890 818 501 801 199
31^2	251 727 480 438 072 432 383 657 771 459 077 535 657 327 ,601 297 237 021 556 861 485 957 637 569
37^2	−11 113 524 668 250 292 302 814 667 342 587 689 895 883 ,608 577 780 863 662 750 236 079 490 884 512 031
41^2	−7 583 324 523 493 032 730 714 450 055 332 278 461 216 384 429 377 413 241 864 581 944 212 002 808 873 511
43^2	−26 642 941 813 772 569 431 392 062 513 707 165 880 039 ,602 179 912 440 245 743 046 716 512 016 350 888 551
47^2	18 996 515 114 858 607 180 356 500 203 576 284 623 983 724 584 102 710 144 637 449 583 616 940 341 794 261 409
53^2	−29 873 389 388 435 767 749 392 158 271 684 470 463 433 ,540 817 160 770 346 608 262 807 242 914 081 369 000 191

Tabelle 23: Die ersten Eigenwerte λ_{p^2} von Υ_{26b}.

Häufig verwendete Symbole

$\|\| \cdot \|\|_2$	Euklidische Norm
$\sum\limits_{\mu(N)}, \sum\limits_{\mu(N)^\times}$	Summe über alle μ in einem beliebigen Vertretersystem für $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ bzw. $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times$
$\|_r$	Peterssonsche Schreibweise (siehe (1.28) auf Seite 19)
$M\langle Z\rangle$	Schreibweise für die Operation von $\mathrm{Sp}_n(R)$ auf $\mathbb{H}_n$ (siehe (1.29) auf Seite 19)
$\langle f_m, g_m\rangle$	Petersson Skalarprodukt der Fourier-Jacobi Koeffizienten f_m, g_m (siehe (1.3) auf Seite 10)
$\{F, G\}_{\Gamma'}$	Petersson Skalarprodukt von $F, G \in [\Gamma', k, \chi]$, falls dieses existiert (siehe (1.55) auf Seite 42)
$\mathbb{1}_N$	trivialer Dirichlet Charakter modulo N
$D_{f,g}(s,\chi)$	spezielle Dirichletreihe (siehe (1.4) auf Seite (1.4))
$\mathbb{D}_{f,g}(s,\chi)$	$= \left(\frac{2\pi}{N}\right)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s-k+n)L(2s-2k+2n,\chi^2)D_{f,g}(s,\chi)$
$\mathfrak{D}_q$	spezielle Diagonalmatrix in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$ (siehe (1.13) auf Seite 13)
$\mathrm{d}v_n$	$= (\det Y)^{-n-1}\mathrm{d}X\mathrm{d}Y$
$\mathrm{d}v_n^*$	$= (\det Y_1)^{-n-1}\mathrm{d}X_1\mathrm{d}Y_1\mathrm{d}u\mathrm{d}v$
$\varphi(\cdot)$	Eulersche φ-Funktion
$[\Gamma', k, \chi]$	Vektorraum der nicht notwendigerweise holomorphen Siegelschen Modulformen vom Gewicht k bezüglich einer Untergruppe Γ' von Γ_n mit Charakter χ

$\boldsymbol{E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)}$	Klingen-Eisensteinreihe auf $\Gamma_{n,1}\big(N,\frac{N^2}{\kappa}\big)$ (siehe Definition 1.8 auf Seite 23)
$\mathbb{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$	$= \pi^{-s}N^{2s}\Gamma(s)L(2s,\chi)E_{N,\frac{N^2}{\kappa},\chi}(Z,s)$
$\boldsymbol{\mathcal{E}_{N,\frac{N^2}{\kappa},p,r,\chi}(Z,s)}$	siehe Definition 1.18 auf Seite 39
$\boldsymbol{\mathcal{F}_n}$	Siegelscher Fundamentalbereich für die Aktion von Γ_n auf $\mathbb{H}_n$
$\boldsymbol{\mathcal{F}_{n,1}}$	Fundamentalbereich für die Aktion von $\Gamma_{n,1}$ auf $\mathbb{H}_n$ (siehe (1.60) auf Seite 1.60)
$\boldsymbol{\mathcal{F}_n^*}$	Fundamentalbereich für die Aktion der Jacobi-Gruppe auf $\mathbb{H}_{n-1}\times\mathbb{C}^{(n-1,1)}$ (siehe (1.2) auf Seite 10)
$\boldsymbol{F}$	Spitzenform in $S_k(\Gamma_2)$
$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$	Spitzenformen in $S_k(\Gamma_n)$
$\boldsymbol{f_m}$, $\boldsymbol{g_m}$	m-ter Fourier-Jacobi Koeffizient von f bzw. g (siehe (1.1) auf Seite 9)
$\boldsymbol{f_\chi}$	Dirichlet-Twist von f mit χ (siehe (1.27) auf Seite 19)
$\boldsymbol{\Gamma_n}$	Siegelsche Modulgruppe vom Grad n
$\boldsymbol{\Gamma_{n,1}}$	Untergruppe der Matrizen aus Γ_n mit letzter Zeile $(0,\ldots,0,1)$
$\boldsymbol{\Gamma_{n,1}\big(N,\frac{N^2}{\kappa}\big)}$	Untergruppe von Γ_n (siehe (1.10) auf Seite 12)
$\boldsymbol{\Gamma^1_{n,1}\big(N,\frac{N^2}{\kappa}\big)}$	Untergruppe von $\Gamma_{n,1}\big(N,\frac{N^2}{\kappa}\big)$ (siehe (1.11) auf Seite 12)
$\boldsymbol{G_\chi}$	zum Dirichlet Charakter χ gehörige Gaußsumme (siehe (1.6) auf Seite 11)
$\boldsymbol{\mathbb{H}_n}$	Siegelscher Halbraum vom Grad n
$\boldsymbol{I_m}$	Einheitsmatrix der Größe $m\times m$
$\boldsymbol{I}$	abkürzende Schreibweise für I_{n-1}
$\boldsymbol{J}$	spezielle Matrix in $SP_n(\mathbb{Q})$ (siehe (1.12) auf Seite 12)

$\boldsymbol{\kappa}$	Teiler von N
$\boldsymbol{k}$	Gewicht der Siegelschen Modulformen f und g
$\boldsymbol{L(s,\chi)}$	gewöhnliche Dirichlet L-Reihe zum Charakter χ
$\boldsymbol{\lambda_F(m)}$	Eigenwert der Hecke Eigenform F unter $T(m)$
$\boldsymbol{M_r}$	spezielle Matrix in $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{Q})$ (siehe (1.13) auf Seite 13)
$\boldsymbol{\mathcal{M}_{d,\beta}}$, $\boldsymbol{\mathcal{M}_\lambda}$	siehe (1.23) auf Seite 17
$\boldsymbol{\mu(\cdot)}$	Möbiusfunktion
$\mathbb{N}$	$= \{1,2,3,\dots\}$
$\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{N^{(2)}}$	natürliche Zahlen, χ ist Charakter modulo N, $\chi^{(2)}$ ist primitiver Charakter modulo $N^{(2)}$
$\boldsymbol{n}$	Grad von $\mathbb{H}_n$, $n \geqslant 2$
$\boldsymbol{L}$	Teiler von N, χ_L ist Charakter modulo L
$\boldsymbol{P_Z}$	von Z abhängige reelle symplektische positiv definite Matrix (siehe (1.31) auf Seite 24)
$\boldsymbol{p}$	Primzahl
$\boldsymbol{R}$	LR ist die kleinste Periode von χ_L (siehe Lemma 1.13 auf Seite 32).
$\boldsymbol{S_k(\Gamma')}$	Raum der (holomorphen) Siegelschen Spitzenformen vom Gewicht k bezüglich einer Untergruppe Γ' von Γ_n
$\mathbf{Sp}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{Q})$, $\mathbf{Sp}_{\boldsymbol{n}}(\mathbb{R})$	Gruppe der symplektischen Matrizen in $\mathbb{Q}^{(2n,2n)}$ bzw. in $\mathbb{R}^{(2n,2n)}$
$\boldsymbol{s}$	komplexe Variable
$\boldsymbol{T(m)}$	Heckeoperator
$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$	Real- und Imaginärteil von w
$\mathbf{v}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{(N)}$	p-Exponent von N (siehe Definition 1.5 auf Seite 21)
$\boldsymbol{W_N}$	siehe (1.12) auf Seite 12

$\boldsymbol{X}\ ,\ \boldsymbol{Y}$	Real- und Imaginärteil von Z
$\boldsymbol{X_1}\ ,\ \boldsymbol{Y_1}$	Real- und Imaginärteil von Z_1
$\boldsymbol{x}\ ,\ \boldsymbol{y}$	Real- und Imaginärteil von z
$\boldsymbol{Z}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{z}$	$Z = \left(\begin{smallmatrix} Z_1 & w \\ w' & z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{H}_n$ mit $Z_1 \in \mathbb{C}^{(n-1,n-1)}$
$\boldsymbol{\chi}$	Dirichlet Charakter modulo N
$\boldsymbol{\chi_L}$	Dirichlet Charakter modulo L, induziert χ
$\boldsymbol{\chi^{(2)}}$	primitiver Charakter modulo $N^{(2)}$, induziert χ^2
$\boldsymbol{\chi_D}$	quadratischer Charakter $(\frac{D}{\cdot})$ zu einer negativen Fundamentaldiskriminante D
$\boldsymbol{\zeta(s, u, v, P_z)}$	verallgemeinerte Epsteinsche ζ-Funktion (siehe (1.35) auf Seite 25)
$\boldsymbol{\zeta^*(s, u, v, P_z)}$	$=\ \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(s, u, v, P_Z)$
$\boldsymbol{\Upsilon_{20}, \ldots, \Upsilon_{26b}}$	siehe (2.7) auf Seite 75

A

Literaturverzeichnis

[1] M. Abramowitz, I. Stegun: *Pocketbook of mathematical functions.* Verlag Harri Deutsch, (1984).

[2] Andrianov, A.: *Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2.* Russ. Math. Surveys 29, No.3, 45-116 (1974).

[3] Apostol, T. M.: *Introduction to analytic number theory.* Springer, New York (1976).

[4] S. Böcherer: *Bemerkungen über die Dirichletreichen von Koecher und Maaß.* Math. Gottingensis, Schriftenr. d. Sonderforschungsbereichs Geom. Anal. 68, (1986).

[5] S. Böcherer, R. Schulze-Pillot: *The Dirichlet series of Koecher and Maass and modular forms of weight 3/2.* Math. Z. 209, No.2, 273-287 (1992).

[6] Eichler, M.; Zagier, D.: *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics, Vol. 55. Boston-Basel-Stuttgart. Birkhäuser (1985).

[7] Epstein, P.: *Zur Theorie allgemeiner Zetafunktionen I, II.* Math. Ann. 56 (1903), 614-644, 63 (1907), 205-216.

[8] Evdokimov, S.A.: *A characterization of the Maass space of Siegel cusp forms of second degree.* Math. USSR, Sb. 40, 125-133 (1981).

[9] Freitag, E.: *Siegelsche Modulfunktionen.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 254. Springer-Verlag (1983)

[10] Hecke, E.: *Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung.* Math. Ann. 112 (1936), 664-699

[11] Klingen, H.: *Metrisierungstheorie und Jacobiformen.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 57, 165-178 (1987).

[12] Klingen, H.: *Über Kernfunktionen für Jacobiformen und Siegelsche Modulformen.* Math. Ann. 285, No. 3, 405-416 (1989).

[13] Kohnen, W.; Zagier, D.: *Values of L-series of modular forms at the center of the critical strip.* Invent. Math. 64, 175-198, (1981).

[14] Kohnen, W.; Skoruppa, N.-P.: *A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two.* Invent. Math. 95, No. 3, 541-558 (1989).

[15] Kohnen, W.; Krieg, A.; Sengupta, J.: *Characteristic twists of a Dirichlet series for Siegel cusp forms.* Manuscr. Math. 87, No. 4, 489-499 (1995).

[16] Kohnen, W.; Kuss, M.: *Some numerical computations concerning spinor zeta functions in genus* 2 *at the central point.* Preprint (1999).

[17] Krieg, A.: *A Dirichlet series for modular forms of degree n.* Acta Arith. 59, No. 3, 243-259 (1991).

[18] Maaß, H.: *Über eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades. I, II, III* Invent. Math. 52, 95-104 (1979), Invent. Math. 53, 249-253, 255-265 (1979).

[19] Oda, T.:*On the poles of Andrianov L-functions.* Math. Ann. 256, 323-340 (1981).

[20] Siegel, C. L.: *Lectures on advanced analytic number theory. (Notes by S. Raghavan.)* Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics. No. 23. Bombay. (1965)

[21] Skoruppa, N. P.: *Computations of Siegel modular forms of genus two.* Math. Comput. 58, No.197, 381-398 (1992).

[22] J.L. Waldspurger: *Sur les coefficients de Fourier des formes modulaires de poids demi- entier.* J. Math. Pures Appl., IX. Ser. 60, 375-484 (1981).

[23] Weissauer, R.: *The Ramanujan conjecture for genus two Siegel Modular forms (an application of the trace formula).* Preprint, Mannheim (1993)

[24] Yamazaki, T.: *Jacobi forms and a Maass relation for Eisenstein series.* J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. I A 33, 295-310 (1986).

[25] Yamazaki, T.: *Rankin-Selberg method for Siegel cusp forms.* Nagoya Math. J. 120, 35-49 (1990).

[26] Ziegler, C.: *Jacobi forms of higher degree.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamb. 59, 191-224 (1989).