

INAUGURAL - DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker Markos Mitsos
aus Athen

Tag der mündlichen Prüfung: 30.05.01

Thema

Singuläre Modulformen und involutive Algebren

Gutachter: Prof. Dr. Eberhard Freitag
Prof. Dr. Siegfried Böcherer

Zusammenfassung

Ausgangspunkt dieser Arbeit ist eine einfache, (assoziative und unitäre,) endlich-dimensionale $\mathbb{Q}$ -Algebra $A = A_{\mathbb{Q}}$, auf welche eine positive Involution J gegeben ist. Dieser Algebra kann man eine symplektische Gruppe $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ zuordnen. Sie besteht aus allen (2×2) -Matrizen mit Koeffizienten aus der Tensorierung $A_{\mathbb{R}} := A_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, die die Eigenschaft

$$J(M)IM = I, \quad \text{mit} \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 1_A \\ -1_A & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad J(M) = \begin{pmatrix} J(a) & J(c) \\ J(b) & J(d) \end{pmatrix},$$

besitzen. Im Falle der Matrixalgebra $A = M_n(\mathbb{Q})$ und der Standardinvolution ist dies die gewöhnliche reelle symplektische Gruppe. Wir zeichnen in A noch eine Ordnung $\mathcal{O}$ als „ganz“ aus, und betrachten die Untergruppe der rationalen symplektischen Matrizen $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{Q}})$, sowie die Untergruppe $\Gamma = \Gamma_{\mathcal{O}}$ aller symplektischer Matrizen $M \in M_2(\mathcal{O})$. Diese Gruppe stellt eine Verallgemeinerung der klassischen Siegelschen Modulgruppe, sowie der in der Literatur behandelten weiteren Fälle der Hilbert-Siegelschen, Hermiteschen und quaternären Modulgruppen, dar.

Im übrigen sind je zwei positive Involutionen auf der einfachen Algebra $A_{\mathbb{Q}}$ ähnlich (vergleiche Kapitel 1, Definition 1.2.3 und Satz 1.5.13). Die algebraische Gruppe $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{C}})$ ist über $\mathbb{Q}$ definiert, und diese $\mathbb{Q}$ -Struktur ist von der Wahl der Involution in der Ähnlichkeitsklasse unabhängig. Daher ist das Gebilde der Kongruenzgruppen von der Wahl des Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse der Involution, und außerdem noch von der der Ordnung, unabhängig (vergleiche 4.2.13). Es genügt also, sich auf eine Matrixalgebra $M_n(D)$ über einem positiv definiten Schiefkörper $D = (D, J)$ zu beschränken, deren Involution die Matrixausdehnung von J ist, und von einer maximalen Ordnung $\mathcal{O} = J(\mathcal{O})$ in D , sowie der zugehörigen maximalen Ordnung $M_n(\mathcal{O}) \subset A_{\mathbb{Q}}$, auszugehen.

Ziel der Abhandlung ist es, die Theorie der singulären Modulformen, im Sinne von [Fr1] und [Fr2], in diesem Rahmen aufzubauen. Wir werden zu diesem Zweck den Begriff der Thetareihe in diesem allgemeinen Rahmen prägen, und wie üblich zeigen, daß Thetareihen Modulformen zu bestimmten Kongruenzgruppen sind. Das Hauptresultat wird sein, daß umgekehrt jede Modulform von hinreichend kleinem (singulärem) Gewicht als endliche Linearkombination bestimmter Thetareihen darstellbar ist, was das Theorem von E. Freitag aus dem Siegelschen Fall verallgemeinert.

Wie bei Freitag wird das Problem der Erzeugung der erwähnten Modulformen auf ein kombinatorisches Lemma zurückgeführt. Dies ist ein algebraischer Hilfssatz kombinatorischer Natur über endlich erzeugte Moduln über endlichen kommutativen Hauptidealringen, der von ihm, unter einer gewissen Bedingung an das Gewicht, in den erwähnten LNM bewiesen wurde. Den Beweis dieses Lemmas kann man auch auf eine größere Klasse von (auch nicht-kommutativen) Ringen verallgemeinern, und kann so den Beweis des Darstellungssatzes durchführen.

Die Schwierigkeiten des allgemeinen Falles im Vergleich zum Siegelschen stammen auf der einen Seite von der Nicht-Kommutativität des Grundbereiches (eines Schiefkörpers), und auf der anderen von der Nicht-Trivialität der Klassenzahl. Die Behandlung der Nicht-Kommutativität erfordert genaue Einsicht in die Strukturtheorie einfacher Algebren und ihrer Komplettierungen. In einer Arbeit über Hilbert-Siegelsche Modulformen, [Fr3], hat Freitag gezeigt, wie man, für total reelle Zahlkörper, das zweite Problem behandeln kann. Diese Arbeit benutzte ich auch immer wieder, neben den LNM 1487 und meiner Diplomarbeit, als Leitfaden.

Das Erzeugendensystem, das man erhält, besteht im skalaren Fall aus Thetareihen der Form

$$\vartheta_{\mathcal{L}}(S, V; Z) = \sum_{\substack{G = G^{(r,n)} \\ (G) \subset \mathcal{L}}} e^{\pi i \sigma \{S[G]Z + 2\overline{V}'G\}}.$$

Dabei ist σ , bis auf Normierung, die reduzierte Spur auf $M_n(D)$, $S[G] = J(G)SG$, $S = S^{(r)} = J(S) > 0$ eine, unter der Involution invariante, positive Matrix aus $M_r(D)$ und $V = V^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$ eine sogenannte isotrope Matrix. $Z \in \mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}) \subset A_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ variiert im kanonisch gebildeten Tubengebiet zur Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$ von $M_n(D)$; $\mathcal{L} \subset D^r$ ist ein rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter und die Summe

läuft über alle $G = G^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$, deren Spalten einen rechts- $\mathcal{O}$ -Untermodul von $\mathcal{L}$ aufspannen. Der vektorwertige Fall ist nur wenig komplizierter, man benutzt noch gewisse vektorwertige harmonische Polynome, zu deren Bildung man die ausgezeichnete euklidische Vektorraumstruktur von $A_{\mathbb{R}}$ benötigt.

Inhaltsverzeichnis

1	Ordnungen in einfachen, involutiven Algebren	5
1.1	Involutive Algebren	6
1.1.1	Halb-einfache Algebren	6
1.1.2	Involutive Algebren	7
1.1.3	Matrixinvolutionen in reellen Algebren	9
1.1.4	Formal-reelle Involutionen	10
1.1.5	Positive rationale Algebren	12
1.2	Positive Matrizen und die Wurzelfunktion	16
1.2.1	(Totale) Positivität in $A_{\mathbb{R}}$	16
1.2.2	Beschreibung des Wedderburn-Isomorphismus	17
1.2.3	Die obere Halbebene	19
1.3	Maximale Ordnungen	22
1.3.1	Ordnungen in Zahlkörpern	22
1.3.2	Ordnungen in einfachen Algebren	23
1.3.3	Komplette Ordnungen	24
1.4	Die symplektische Gruppe und die Modulgruppe	27
1.4.1	Endomorphismen von Tubengebieten	27
1.4.2	Definition der Modulgruppe	28
1.5	Determinanten und Spuren	32
1.5.1	Die Spur	32
1.5.2	Die Determinante	34
1.5.3	Eigenschaften positiver Matrizen	37
1.6	Darstellungen und Modulformen	39
1.6.1	Kanonische Automorphiefaktoren	39
1.6.2	Multiplikatorsysteme	41
1.6.3	Irreduzible Darstellungen	42
1.6.4	Vektorwertige Modulformen	44
2	Thetareihen über einfachen Algebren	47
2.1	Vektorwertige Thetareihen	48
2.1.1	Gitter und harmonische Formen	48
2.1.2	Thetareihen	50
2.2	Die Thetainvolution	51
2.2.1	Die Inversionsformel	51
2.2.2	Invarianzeigenschaften	53
2.3	Thetareihen als Modulformen	56
2.3.1	Wirkungen von $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$	56
2.3.2	Transformation unter Translationen und Kegelautomorphismen	57
2.3.3	Die Transformationsformel	59
2.4	Der Raum der Thetareihen	64
2.4.1	Der Raum $\Theta = \Theta(q, r, n)$	64

3	Singuläre Modulformen	66
3.1	Die Fourier-Jacobi-Entwicklung	67
3.1.1	Fourier-Jacobi-Entwicklung	67
3.1.2	Singuläre Modulformen und singuläre Gewichte	71
3.2	Der singuläre Raum	74
3.2.1	Ein Raum singulärer Modulformen	74
3.2.2	Der singuläre Raum	78
3.3	Die Umkehrrelation	81
3.3.1	Die eingebettete Involution	81
3.3.2	Die Relation zwischen den Koeffizienten	82
4	Fourier-Reihen und Kernformen	87
4.1	Semi-positive Matrizen	88
4.1.1	Die reduzierte Determinante	88
4.1.2	Normalform semi-positiver Matrizen	92
4.2	Kernformen	94
4.2.1	Kernformen	94
4.2.2	Potentielle Kernformen	96
4.3	Das Relationensystem und duale Moduln	98
4.3.1	Das Relationensystem	98
4.3.2	Duale Moduln	102
4.4	Ein kombinatorisches Problem	106
4.4.1	Die Beweisstrategie	106
4.4.2	Das „fundamental lemma“ von Freitag	108
4.4.3	Der Fall quasi-kommutativer Ringe	109
4.4.4	Matrixalgebren und die Erzeugung von $\overline{\mathbf{M}(q)}$	114
5	Die Ergebnisse	117
5.1	Die Thetarelationen	118
5.1.1	Die Wirkung der Einheitengruppe	118
5.1.2	Die Relationen	119
5.2	Das Theorem	120
5.2.1	Singuläre Modulformen über einfachen Algebren	120

Kapitel 1

Gruppen von biholomorphen Selbstabbildungen von Tubengebieten über einfachen rationalen Algebren mit positiv definiter Involution, die ein ganzes Gitter invariant lassen

In diesem vorbereitenden Kapitel werden die notwendigen Eigenschaften der Algebren zusammengestellt, über denen dann Modulformen definiert werden sollen. Es werden die positiv definiten involutiven Algebren über $\mathbb{Q}$ klassifiziert, die uns interessieren, und die für die Theorie notwendigen Begriffe eingeführt, insbesondere werden maximale Ordnungen studiert, die zur Definition der ganzen Gitter benötigt werden. Ferner wird die symplektische Gruppe definiert und als Wirkungsgruppe untersucht. Schließlich werden Multiplikatorsysteme und vektorwertige Modulformen gebildet.

1.1 Einfache Algebren über $\mathbb{Q}$ mit positiv definiter Involution

Es werden, mit Hilfe des Satzes von Wedderburn, grundlegende Eigenschaften von einfachen Algebren mit positiver Involution, über dem Körper der rationalen Zahlen, zusammengestellt, und die uns interessierenden Fälle hervorgehoben. Die nötigen Sätze findet man z.B. in [Al], [Ja1] und [Mal].

1.1.1 Halb-einfache endliche Algebren, Zentrum und Rang

Wir werden unter Algebren immer assoziative, endlich-dimensionale Algebren mit Eins verstehen. Wir werden Involutionen auf den Algebren einführen, und fordern, daß diese positiv (definit) sind.

1.1.1 Satz von Wedderburn : *Sei K ein Körper der Charakteristik 0. Dann ist jede endlich-dimensionale halb-einfache K -Algebra A zu einem endlichen Produkt von Matrixalgebren isomorph,*

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_k}(D_k).$$

Dabei sind $D_1, \dots, D_k$ (endlich-dimensionale) Schiefkörper über K , und diese Darstellung ist, in naheliegender Weise, eindeutig bestimmt. $\square$

Der für uns wichtigste Fall ist der des Körpers der rationalen Zahlen $K = \mathbb{Q}$, also einer rationalen Algebra $A = A_{\mathbb{Q}}$; diese wird außerdem einfach sein.¹ Wir müssen aber noch die Grundkörpererweiterung $A_{\mathbb{R}} = A \otimes \mathbb{R} = A_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$, sowie deren Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, betrachten, und deswegen daneben noch $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ benutzen. Wir werden gelegentlich auch den Begriff „endlich“ für „endlich-dimensional“ verwenden. Es gelten

1.1.2 Satz : *Die einzigen endlichen, also endlich-dimensionalen, Schiefkörper über den reellen Zahlen sind, bis auf Isomorphie, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$.* $\square$

1.1.3 Satz : *Über algebraisch abgeschlossenen Körpern existieren keine (endlichen, echten) Schiefkörper, insbesondere ist jede einfache Komponente von $A_{\mathbb{C}}$ eine komplexe Matrixalgebra $M_{n_i}(\mathbb{C})$.* $\square$

Über eine halb-einfache Algebra A von obiger Gestalt notieren wir

1.1.4 Bemerkung : Das Zentrum der halb-einfachen K -Algebra A kann komponentenweise gebildet werden,

$$\mathcal{Z}(A) \cong \mathcal{Z}(M_{n_1}(D_1)) \times \cdots \times \mathcal{Z}(M_{n_k}(D_k)) \cong \mathcal{Z}(D_1) \times \cdots \times \mathcal{Z}(D_k) = K_1 \times \cdots \times K_k.$$

Dabei sind die K_i algebraische Erweiterungskörper von K , also Zahlkörper im Falle $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ im Falle $K = \mathbb{R}$, und $\mathbb{C}$ selbst im Falle $K = \mathbb{C}$. $\square$

Wir brauchen den Begriff des Ranges einer Algebra. Für unsere Zwecke ist folgendes ausreichend.

1.1.5 Definition : a) Der Rang einer (vollen) Matrixalgebra ist die Anzahl der Zeilen,

$$\text{rank}(M_n(D)) := n,$$

für einen (rationalen oder reellen) Schiefkörper D .

b) Der Rang eines direkten Produktes von Algebren ist die Summe der Ränge, also insbesondere

$$\text{rank}(A_{\mathbb{R}}) := n_1 + \dots + n_k, \quad \text{für } A_{\mathbb{R}} = \prod M_{n_i}(\mathbb{K}_i), \quad \mathbb{K}_i \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}. \quad \square$$

¹Die Bedingung der Einfachheit ist, wie man z.B. in [Ja2] nachlesen kann, für endlich-dimensionale Jordan-Algebren, sehr eng mit „formal-reell“ und „nicht-degeneriert“ verknüpft. Dies sind sinnvolle Voraussetzungen, um Modulformen über Jordan-Algebren zu bilden, wie in [Fr4] gezeigt.

1.1.2 Positiv definite involutive Algebren und innere Automorphismen

Die wichtigste Zusatzstruktur unserer Algebra wird eine Involution sein.

1.2.1 Definition : a) Eine Involution J auf einer Algebra A ist ein Antiautomorphismus

$$J : A \longrightarrow A, \quad \text{d.h.} \quad J(M \cdot N) = J(N) \cdot J(M),$$

mit der Eigenschaft $J^2 = \text{id} = \text{id}_A$, also $J(J(M)) = M$, für alle $M \in A$.

b) Seien (A_1, J_1) und (A_2, J_2) zwei involutive Algebren. Falls ein Algebren-Isomorphismus

$$\sigma : A_1 \longrightarrow A_2 \quad \text{existiert, so daß} \quad \sigma \circ J_1 = J_2 \circ \sigma \quad \text{gilt,}$$

heißen die (involutiven) Algebren isomorph, $(A_1, J_1) \cong (A_2, J_2)$. Zwei Involutionen J_1, J_2 auf derselben Algebra $A = A_1 = A_2$ heißen äquivalent, $J_1 \cong J_2$, falls $(A, J_1) \cong (A, J_2)$. $\square$

Auf jeder endlichen, halb-einfachen K -Algebra existiert eine ausgezeichnete Spurfunktion $\text{Tr} : A \longrightarrow K$, die jedem Element $M \in A$ die Spur der Translation $h_M : A \longrightarrow A$, $h_M(X) = M \cdot X$, zuordnet.² Wichtig ist

1.2.2 Definition und Bemerkung : a) Eine endliche Algebra A über $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$, ausgestattet mit der Involution J , heißt positiv definit,

$$\text{falls} \quad \text{Tr}(MJ(M)) > 0, \quad \text{für alle} \quad 0 \neq M \in A,$$

gilt. Man nennt dann auch die Involution selbst positiv. Für eine positive Involution J auf einer rationalen Algebra $A_{\mathbb{Q}}$ ist die $\mathbb{R}$ -lineare Ausdehnung $J = J_{\mathbb{R}}$ auf die Tensorierung $A_{\mathbb{R}} = A_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ ebenfalls positiv.

b) Wir bezeichnen die Menge der unter J invarianten Elemente mit

$$\mathcal{S}(A) = \mathcal{S}(A, J) := \{M \in A ; J(M) = M\},$$

bzw. mit $\mathcal{S}_n(D, J) = \mathcal{S}_n(D) = \mathcal{S}(n, D)$ für Matrixalgebren $(A, J) = A = M_n(D)$. Für äquivalente Involutionen auf A , folgt aus $J_1(M) = M$ auch $\sigma(M) = \sigma(J_1(M)) = J_2(\sigma(M))$, also $\mathcal{S}(A, J_2) = \sigma(\mathcal{S}(A, J_1)) \cong \mathcal{S}(A, J_1)$. $\square$

Die Äquivalenz von Involutionen ist eine starke Eigenschaft (bzw. Einschränkung). Wir kommen in dieser Arbeit mit folgendem, schwächeren Äquivalenzbegriff aus (vergleiche auch 1.5.13 und 4.2.13).

1.2.3 Definition : a) Sei $A = A_{\mathbb{Q}}$ eine rationale Algebra. Zwei Involutionen J und $\tilde{J}$ auf A heißen ähnlich, $J \sim \tilde{J}$, falls ein $M = J(M) \in \mathcal{S}(A, J)$ existiert, das in der Tensorierung $\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J) = \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J_{\mathbb{R}})$ Quadrat eines invertierbaren Elementes $\tilde{M}$ ist, so daß $\tilde{J}(X) = M J(X) M^{-1}$, für alle $X \in A$, gilt. Die Ähnlichkeit ist natürlich eine Äquivalenzrelation. Falls lediglich $M = J(M)$ gilt, also M nicht notwendig ein Quadrat in $A_{\mathbb{R}}$ ist, nennen wir die Involutionen gelegentlich auch schwach ähnlich.

b) Ferner bezeichnen wir auch zwei involutive Algebren als ähnlich, $(A, J) \sim (\tilde{A}, \tilde{J})$, falls eine weitere Involution, $\hat{J}$, auf $\tilde{A}$, sowie ein Algebren-Isomorphismus $(A, J) \cong (\tilde{A}, \hat{J})$ existieren, so daß $\tilde{J} \sim \hat{J}$ ähnlich sind. $\square$

1.2.4 Bemerkung : Seien $J \sim \tilde{J}$ zwei ähnliche Involutionen auf der rationalen Algebra A , und $M = \tilde{M}^2$ wie in der Definition.

a) Falls sogar $M = N^2$, $N \in \mathcal{S}(A, J)$, oder allgemeiner $M = J(N)N$, $N \in A^{\times}$, gilt, so sind die Involutionen äquivalent, $J \cong \tilde{J}$.

b) Die Abbildungen $\mathcal{S}(A, J) \longrightarrow \mathcal{S}(A, \tilde{J})$, gegeben durch $X \longmapsto M \cdot X$ und $X \longmapsto X \cdot M^{-1}$, mit entsprechenden Umkehrabbildungen $\tilde{X} \longmapsto M^{-1} \cdot \tilde{X}$ und $\tilde{X} \longmapsto \tilde{X} \cdot M$, sind $\mathbb{Q}$ -Vektorraum-Isomorphismen.

²Diese werden wir später, für $A = A_{\mathbb{Q}}$, mit der gewöhnlichen Matrixspur, mittels einer bestimmten Einbettung in $A_{\mathbb{R}}$, in Verbindung bringen.

c) Die Abbildung $X \mapsto \widetilde{M}X\widetilde{M}^{-1}$ ist ein Isomorphismus involutiver Algebren $(A_{\mathbb{R}}, J) \rightarrow (A_{\mathbb{R}}, \widetilde{J})$, insbesondere ist $\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J) \cong \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, \widetilde{J})$.

Beweis : a) Aus $J(M) = M$ folgt auch $\widetilde{J}(M) = MJ(M)M^{-1} = MMM^{-1} = M$ (und umgekehrt). Jedes $N \in A^{\times}$ liefert einen inneren Automorphismus $\sigma(X) = J(N)^{-1}XJ(N)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\sigma(\widetilde{J}(X)) &= J(N)^{-1}(MJ(X)M^{-1})J(N) = J(N)^{-1}(J(N)N)J(X)(N^{-1}J(N)^{-1})J(N) = \\ &= J(J(N)^{-1}XJ(N)) = J(\sigma(X)).\end{aligned}$$

b) Es folgt aus $J(X) = X$,

$$\widetilde{J}(MX) = M(J(X)J(M))M^{-1} = MXMM^{-1} = MX, \quad \text{ sowie }$$

$$\widetilde{J}(XM^{-1}) = M(J(M)^{-1}J(X))M^{-1} = MM^{-1}XM^{-1} = XM^{-1}.$$

Umgekehrt folgt aus $\widetilde{J}(\widetilde{X}) = \widetilde{X}$, $J(M^{-1}\widetilde{X}) = (M^{-1}\widetilde{J}(\widetilde{X})M)J(M)^{-1} = M^{-1}\widetilde{X}$ und $J(\widetilde{X}M) = M(M^{-1}\widetilde{J}(\widetilde{X})M) = \widetilde{X}M$.

c) Es ist $\widetilde{J}(\widetilde{M}X\widetilde{M}^{-1}) = MJ(\widetilde{M}^{-1})J(X)J(\widetilde{M})M^{-1} = \widetilde{M}J(X)\widetilde{M}^{-1}$. $\square$

Wir stellen die

1.2.5 Forderung : *Im folgenden sei stets $A_{\mathbb{Q}} = (A_{\mathbb{Q}}, J)$ eine einfache Algebra über $\mathbb{Q}$, die mit einer positiven Involution J ausgestattet ist.* $\square$

Auf der Teilmenge der invarianten Elemente einer involutiven Algebra A , $\mathcal{S}(A, J) \subset (A, J)$, kann man dann die sogenannte Jordan-Multiplikation $a \circ b := \frac{1}{2}(a \cdot J(b) + b \cdot J(a)) = \frac{1}{2}(a \cdot b + b \cdot a)$ einführen, die $\mathcal{S}(A) = (\mathcal{S}(A), \circ) \subset (A, \circ)$ zur Jordan-Algebra macht.³ Wir wollen die Bedingung der Positivität von $A_{\mathbb{Q}}$ zuerst auf der Seite der Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$ untersuchen. Hier hat man folgenden Begriff.

1.2.6 Definition : Eine Jordan-Algebra $A = (A, \circ)$ über $\mathbb{R}$ heißt formal-reell, falls -1 (oder äquivalent 0) keine Quadratsumme ist, d.h. wenn keine $M_i \in A$ mit $\sum M_i^2 = \sum M_i \circ M_i = -1$ existieren. $\square$

1.2.7 Lemma : *Wenn $A_{\mathbb{Q}} = (A_{\mathbb{Q}}, J)$, und damit $A_{\mathbb{R}}$, positiv definit ist, dann ist $\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}) = \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J) = (\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J), \circ)$, aufgefaßt als Jordan-Algebra, formal-reell.* $\square$

Wir werden sehen, daß die Umkehrung davon im allgemeinen falsch ist. Ferner benutzen wir folgendes wichtige Hilfsmittel zum Studium von Involutionen.

1.2.8 Definition : Eine einfache K -Algebra A heißt zentraleinfach (oder zentral), falls $\mathcal{Z}(A) = K$ gilt. $\square$

1.2.9 Satz von Skolem-Noether : *Automorphismen von endlichen, zentraleinfachen Algebren A sind innere Automorphismen (, siehe z.B. [Lo]).* $\square$

Dann sind natürlich auch Automorphismen endlicher, einfacher Algebren, die das Zentrum $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}(A)$ (elementweise) festlassen, innere Automorphismen, wobei man A als $\mathcal{Z}$ -Algebra auffaßt. Wir bemerken, daß eine Involution J auf einer K -Algebra A , z.B. dem Schiefkörper $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, als $\mathbb{R}$ -Algebra aufgefaßt, auch eine auf dem Zentrum von A induziert.

1.2.10 Lemma : *Die einzigen positiven Involutionen auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ sind die gewöhnlichen, nämlich*

$$\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \overline{} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad (\overline{(x_1 + x_2 i)} = x_1 - x_2 i) \quad \text{ und }$$

$$\overline{} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H} \quad (\overline{(x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k)} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k).$$

³Die Isomorphie zweier involutiver Algebren (A, J) und $(\widetilde{A}, \widetilde{J})$ erzwingt die Isomorphie der zugehörigen Jordan-Algebren, während die schwache Ähnlichkeit, im Falle $A = \widetilde{A}$, die Existenz einer sogenannten Mutation $(\mathcal{S}(A, J), \circ_x)$ der einen Jordan-Algebra bedeutet, so daß letztere zu $(\mathcal{S}(A, \widetilde{J}), \circ)$ isomorph ist.

Beweis : Im komplexen Fall ist die Involution durch die Wirkung auf i festgelegt. Aus der Verträglichkeit mit den Rechenoperationen folgt man sofort, daß $J(i) = \pm i$ gelten muß. Von diesen zwei Involutionen ist aber nur die Standardinvolution $J = -$ positiv. Im quaternären Fall ist $J(x) = a\bar{x}a^{-1}$, mit einem invertierbaren $a \in \mathbb{H}$, und wegen $J^2 = \text{id}_{\mathbb{H}}$ muß $a = r\bar{a}$, mit $r \in \mathcal{Z}(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$, gelten. Es genügt $r = \pm 1$ zu betrachten. Der erste Fall liefert $a = a_1 \in \mathbb{R}$, also die Standardinvolution, im zweiten genügt es $|a| = 1$ zu betrachten, und es ist dann

$$x = J(x) = a\bar{x}a^{-1} = a \cdot (\bar{x} \cdot \bar{a}) \quad \text{äquivalent zu} \quad \bar{a}x = a^{-1}x = \overline{(ax)}.$$

Außerdem muß $a = a_2i + a_3j + a_4k$ gelten, also $\bar{a}x = -ax$, und es existiert ein $0 \neq x = x_2i + x_3j + x_4k$, mit $(ax)_1 = -(a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4) = 0$. Dann ist aber, für dieses x , $\overline{(ax)} = -ax$, also $J(x) = x$, und die Involution J ist nicht positiv. $\square$

1.1.3 Formal-reelle Involutionen auf vollen Matrixalgebren $M_n(\mathbb{K})$ über $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$, die Standardmatrixinvolution

Nun untersuchen wir die Matrixalgebren $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, und zeigen, daß jede positive Involution J auf diesen äquivalent zur Standardmatrixinvolution $J_{\text{Stan}}(M) := \overline{M}'$ ist, wobei $-$ die Standardinvolution auf dem Schiefkörper (die auf M elementweise wirkt) und $'$ die Matrixtransposition sind. Die Zusammensetzung der Involution mit dieser Standardmatrixinvolution läßt das Zentrum elementweise fest, ist also, nach Skolem-Noether, ein innerer Automorphismus, $J(X) = M\overline{X}'M^{-1}$. Die Bedingung

$$X = J^2(X) = (M\overline{M}'^{-1})X(\overline{M}'M^{-1})$$

ergibt $M = \zeta\overline{M}'$, mit einem zentralen ζ vom Betrag 1, denn es muß auch $\overline{M}' = \overline{(\zeta\overline{M}')} = \zeta M = \zeta\zeta\overline{M}'$ gelten, also $\zeta = \pm 1$ im reellen und quaternären Fall. Andererseits liefert $\widetilde{M} = xM$, für ein x aus dem Zentrum, denselben inneren Automorphismus. Im komplexen Fall wählt man $x = \zeta^{1/2}$, und erhält $\widetilde{M} = \overline{M}'$. Es kann also stets $M = \pm\overline{M}'$ angenommen werden. Umgekehrt liefert jedes $M = \pm\overline{M}'$ eine Involution $J = J_M$, $J_M(X) = M\overline{X}'M^{-1}$.

Die Äquivalenz zweier Involutionen, J_{M_1} und J_{M_2} , bedeutet die Existenz einer (invertierbaren) Matrix N mit $M_2 = NM_1\overline{N}' = M_1[\overline{N}']$, denn es muß

$$(\sigma \circ J_{M_1})(X) = NM_1\overline{X}'M_1^{-1}N^{-1} = M_2\overline{N}'^{-1}\overline{X}'\overline{N}'M_2^{-1} = (J_{M_2} \circ \sigma)(X),$$

für alle X und einen inneren Automorphismus $\sigma(X) = NXN^{-1}$, gelten, und das Element x aus dem Zentrum in $M_2 = xM_1[\overline{N}']$ kann wieder ignoriert werden. Solche Transformationen kann man also immer benutzen, um M zu vereinfachen. Damit erhält man

1.3.1 Bemerkung : Sei J eine Involution auf $A = M_n(\mathbb{R})$, so daß $\mathcal{S}(A, J)$ formal-reell ist. Dann ist J zu einer Involution J_M äquivalent, $J \cong J_M$, mit einem M , das entweder die Einheitsmatrix

$$\text{ist, oder die Form } M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_k \end{pmatrix} \text{ hat, wobei jedes der } M_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist, und}$$

$n = 2k$.

Beweis : J selbst kommt von einer Matrix $\widetilde{M}$, $J = J_{\widetilde{M}}$. Da $\widetilde{M} = \pm\overline{\widetilde{M}}$ gilt, besagt ein Satz aus der linearen Algebra über die Normalform symmetrischer und alternierender Bilinearformen, daß man immer eine Matrix N findet, so daß $M = \widetilde{M}[N]$ die gewünschte Form hat. Die zugehörige Involution $\widetilde{J} = J_M$ ist zu J äquivalent. $\square$

Genauso erhält man im komplexen und quaternären Fall

1.3.2 Bemerkung : Sei J eine Involution auf $A = M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, so daß $\mathcal{S}(A, J)$ formal-reell ist. Dann ist J zu der Standardinvolution $\overline{}' = J_E$ äquivalent.

Beweis : Im komplexen Fall kann man sowieso von $M = \overline{M}'$ ausgehen. Im quaternären liefert $M = -\overline{M}'$ kein formal-reelles $\mathcal{S}(A, J)$, da die äquivalente Involution $\tilde{J}$ aus der letzten Bemerkung

die Matrix $X = \begin{pmatrix} X_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & X_k \end{pmatrix}$, $n = 2k$ und $X_i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$, invariant läßt, und $X^2 = -E$

ist. $\square$

Weiterhin zeigt man, daß, falls im reellen Fall mehr als ein nicht-triviales Kästchen auftritt, die Matrix

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ die Eigenschaft } J(X) = X \text{ für } X = \begin{pmatrix} E^{(n-4)} & 0 \\ 0 & \tilde{X} \end{pmatrix} \text{ erzwingt.}$$

Da jedoch $\tilde{X}^2 = -E^{(4)}$ gilt, ist $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ nicht formal-reell.

Schließlich rechnet man nach, daß die Involution, deren Matrix nur ein $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ -Kästchen enthält, tatsächlich formal-reell und nicht äquivalent zur Transposition ist (reeller Fall mit $n = 2$). Man erhält also die folgende Klassifikation der einfachen Komponenten der uns interessierenden tensorierten involutiven Algebren $A_{\mathbb{R}}$, mit formal-reellem $\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J)$.

1.3.3 Satz : Sei $A = A_{\mathbb{R}} = M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, eine volle Matrixalgebra mit Involution J , so daß $\mathcal{S}(A, J)$ formal-reell ist. Dann ist (A, J) isomorph zu einer der Algebren

$$M_n(\mathbb{R}), M_n(\mathbb{C}) \text{ oder } M_n(\mathbb{H}), \text{ jeweils mit der Standardinvolution,}$$

oder zu $(M_2(\mathbb{R}), J)$, mit der Involution $J = J_M$, die durch die Matrix $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben wird. $\square$

Die Ausnahmeeinvolution $J = J_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$ wird in der Arbeit keine Rolle spielen. Man kann sie mit Paaren von komplexen Einbettungen von Zahlkörpern in Verbindung bringen. Sie ist nur deswegen interessant, weil sie nicht positiv definit ist, obwohl $\mathcal{S}(A, J)$ formal-reell ist. Dazu folgende

1.3.4 Bemerkung : a) Es gilt $\mathcal{S}(M_2(\mathbb{R}), J) = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \cdot E^{(2)} \cong \mathbb{R}$, $J = J_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}$.

Beweis : Es ist $J(M) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ -a & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, also folgt aus $J(M) = M$, $b = c = 0$ und $a = d$. $\square$

1.1.4 Formal-reelle Involutionen auf halb-einfachen Algebren über $\mathbb{R}$

Die bei uns auftretende, mit $\mathbb{R}$ tensorierte, Algebra zerfällt in ein Produkt von einfachen Komponenten. Wir untersuchen erst

$$A_{\mathbb{R}} = \left(\prod_i M_{n_i}(\mathbb{R})^{\alpha_i} \right) \times \left(\prod_j M_{n'_j}(\mathbb{C})^{\beta_j} \right) \times \left(\prod_k M_{n''_k}(\mathbb{H})^{\gamma_k} \right).$$

(In Wirklichkeit tritt bei uns immer nur einer der drei geklammerten Faktoren auf.) Es muß noch gesehen werden, wie die Involution diese Bestandteile (möglicherweise) „durcheinanderwirft“. Da

das Zentrum unter der Involution invariant ist, können reelle, komplexe und quaternäre Bestandteile nur jeweils untereinander abgebildet werden. Idempotente Elemente werden auf solche abgebildet, da $J(X^2) = J(X)^2$.

Betrachte also die halb-einfache Algebra $(A, J) = \prod M_{n_i}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. J induziert eine Involution (ebenfalls mit J bezeichnet) auf dem Zentrum $\mathcal{Z}(A) \cong \mathcal{Z}(\mathbb{K})^m$. Dessen einzige minimale Idempotente sind die Basisvektoren $v_i = (0, \dots, E^{(n_i)}, \dots, 0)$. Aus $0 \neq J(v_i) = \sum c_{ij} v_j$, $c_{ij} \in \{0, 1\}$, und $J(1) = 1 = \sum v_i$, folgt, daß zu jedem i ein j existiert mit $J(v_i) = v_j$. Falls also die ursprüngliche Involution nicht auf die einfachen Komponenten von A zerfällt, ist sie nicht positiv, da $(0, \dots, E^{(n_i)}, \dots, 0)J((0, \dots, E^{(n_i)}, \dots, 0)) = (0, \dots, E^{(n_i)}, \dots, 0)(0, \dots, E^{(n_j)}, \dots, 0) = 0$ (für $i \neq j$) keine positive Spur hat.

Außerdem folgt allgemeiner aus $J((0, \dots, E^{(n_i)}, \dots, 0)) = (0, \dots, E^{(n_j)}, \dots, 0)$ über ein Rangargument auch leicht $n_i = n_j$.

Um die möglichen Randfälle, also nicht-positive Involutionen mit formal-reellem $\mathcal{S}(A, J)$ zu beschreiben, hat man also nur noch ein Matrixalgebren-Paar $M_n(\mathbb{K}) \times M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, zu betrachten, und eine Involution mit $J((E, 0)) = (0, E)$ und $J((0, E)) = (E, 0)$. Dann hat aber $\tilde{J}((X_1, X_2)) = (\overline{X_2}', \overline{X_1}')$ dieselbe Wirkung wie J auf $\mathcal{Z}(A)$, also gilt $J((X_1, X_2)) = \sigma((\overline{X_2}', \overline{X_1}'))$, wobei σ ein innerer Automorphismus ist. Die Reduktion des letzten Abschnittes liefert daher

1.4.1 Bemerkung : Die Involution J auf $A_{\mathbb{R}}$ ist zu einer äquivalent, die, für den komplexen und quaternären Bestandteil, in die Standardinvolution auf den einfachen Komponenten zerfällt, denn sonst wäre für ein Paar $M_n(\mathbb{K})^2$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$,

$$J\left((iE^{(n)}, -iE^{(n)})\right) = (iE^{(n)}, -iE^{(n)})$$

invariant und $\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}})$ nicht formal-reell. $\square$

Für reelle Paare muß man noch sehen, wann $J((X_1, X_2)) = (\overline{X_2}', \overline{X_1}') = (X_2', X_1')$ einen formal-reellen invarianten Anteil liefert. Man kann jedoch, falls $n \geq 2$, für eine solche Vertauschungsinvolution,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad X_2 = -X_1 \quad \text{betrachten, und} \quad J((X_1, X_2)) = (X_1, X_2)$$

ausrechnen. Da $(X_1, X_2)^2 = -\left(\begin{pmatrix} E^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$ gilt, kann wiederum $\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}})$ nicht formal-reell sein. Es kann also nur bei $n = 1$ solch eine Vertauschung vorkommen, dann ist $\mathcal{S}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, J) = \{(a, a) ; a \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} \cdot (1, 1) \cong \mathbb{R}$. Insgesamt erhält man

1.4.2 Satz : a) Sei (A, J) eine halb-einfache Algebra über den reellen Zahlen mit Involution J , so daß $\mathcal{S}(A, J)$ formal-reell ist. Dann ist A ein kartesisches Produkt aus folgenden drei Grundtypen involutiver Algebren:

- i) „Regulären“ Matrixalgebren $M_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, mit der Standardinvolution,
- ii) Paaren $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mit der „Vertauschungsinvolution“ $J_1((a, b)) = (b, a)$ und
- iii) Matrixalgebren $M_2(\mathbb{R})$ mit der „Ausnahmeinvolution“ $J_2\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

b) Die (uninteressanten) exzeptionellen Komponenten ii) und iii) liefern als invarianten Teil jeweils eine „aufgeblähte“ reelle Gerade $\mathbb{R} \cdot (1, 1) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R} \cdot E^{(2)} \subset M_2(\mathbb{R})$. $\square$

Nun sind die, den exzeptionellen Involutionen zugeordneten, Jordan-Algebren zwar formal-reell, die halb-einfachen Algebren $(\mathbb{R}^2, J_1)$ und $(M_2(\mathbb{R}), J_2)$ selbst aber nicht positiv definit, wie die Elemente $(a, b) = (1, -1)$ bzw. $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ zeigen. Wir haben also folgendes erreicht

1.4.3 Satz : Sei $A_{\mathbb{R}}$ eine halb-einfache, involutive, positiv definite Algebra über den reellen Zahlen. Dann kann der Wedderburn-Isomorphismus involutiver Algebren

$$A_{\mathbb{R}} \cong \left(\prod_i M_{n_i}(\mathbb{R})^{\alpha_i} \right) \times \left(\prod_j M_{n'_j}(\mathbb{C})^{\beta_j} \right) \times \left(\prod_k M_{n''_k}(\mathbb{H})^{\gamma_k} \right)$$

so gewählt werden, daß sich auf der Seite der Matrixalgebren die Standardinvolution (auf den einfachen Komponenten) ergibt. $\square$

1.1.5 Positiv definite, involutive, endlich-dimensionale, einfache Algebren über den rationalen Zahlen

Nun sei $A = A_{\mathbb{Q}}$ eine endlich-dimensionale, einfache Algebra über $\mathbb{Q}$, die mit einer positiven Involution J ausgestattet ist. Unser Ziel ist es, den Repräsentanten Ähnlichkeitsklasse der Algebra, so zu wählen, daß sich eine Matrixalgebra mit der Matrixausdehnung einer positiven Involution auf einem Schiefkörper ergibt. Die entscheidenden Sätze stammen von Mumford ([Mu]).

1.5.1 Bemerkung : Selbstverständlich ist jede, zu einer positiven Involution J äquivalente, Involution $\tilde{J}$, $J \cong \tilde{J}$, auf einer Algebra A ebenfalls positiv. $\square$

Wir studieren also positive Involutionen auf vollen Matrixalgebren $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D) = (A, J)$, über einem rationalen Schiefkörper D und mit positiver Involution J , mit dem Ziel

1.5.2 Satz : Sei (A, J) eine einfache Algebra über $\mathbb{Q}$ mit positiver Involution. Dann existiert ein Wedderburn-Isomorphismus $A \rightarrow M_n(D)$, und eine **positive** Involution $\tilde{J}$ auf D , so daß die durch J induzierte, und genauso bezeichnete, (positive) Involution auf $M_n(D)$, zu der positiven Matrixausdehnung von $\tilde{J}$, $\tilde{J}(M) = (\tilde{J}(m_{ji}))_{(i,j)}$, ähnlich ist, $J \sim \tilde{J}$. Kürzer ausgedrückt ist also A ähnlich zu einer Matrixalgebra mit positiver Matrixinvolution, $(A, J) \sim (M_n(D), \tilde{J})$. $\square$

Der Beweis erfolgt in mehreren Schritten.

1.5.3 Bemerkung : J induziert eine positive Involution $\tilde{J}$ auf dem Zentrum K von D .

Beweis : Man identifiziert D mit $D \cdot E^{(n)}$ mittels der Diagonaleinbettung, und damit auch die Zentren, $K = \mathcal{Z}(A)$. J bildet das Zentrum $\mathcal{Z}(A)$ auf sich ab, also $J(kE^{(n)}) = \tilde{k}E^{(n)}$, und $\tilde{J}(k) := \tilde{k}$ liefert eine Involution auf K . $\square$

Den Zahlkörper K fassen wir gelegentlich als in $\mathbb{C}$ gelegen auf, $K \subset \mathbb{C}$. Nun ist die Menge $K_0 := \{x \in K ; \tilde{J}(x) = x\}$ ein Unterkörper von K , und es können nur zwei Fälle auftreten, nämlich entweder $K = K_0$, oder $[K : K_0] = 2$. Solche Involutionen nennt man entsprechend erster, bzw. zweiter Art. Die Einschränkung der (positiven) Involution auf K_0 ist also die Identität, daher muß K_0 total reell sein. Für Involutionen zweiter Art ist also automatisch $K = K_0[\sqrt{a}]$, mit einem total negativen Element $a < 0$ von K_0 . Albert bewies

1.5.4 Satz : Es gibt eine Involution $\tilde{J}$ auf D , die dieselbe Wirkung wie J auf das Zentrum $K = \mathcal{Z}(D) \cong \mathcal{Z}(M_n(D))$ hat. $\square$

Nun dehnt man die Involution $\tilde{J}$ auf D gemäß $\tilde{J}(M) = (\tilde{J}(m_{ji}))_{(i,j)}$ auf A aus. Dann

1.5.5 Bemerkung : Es gilt

$$J(X) = M\tilde{J}(X)M^{-1}, \text{ mit } M = \pm J(M) = \pm \tilde{J}(M), \quad M \in A = M_n(D).$$

(M ist natürlich nur bis auf $k \in K$ bestimmt.)

Beweis : Nach Skolem-Noether unterscheiden sich J und $\tilde{J}$ nur um einen inneren Automorphismus, also existiert $M \in A^\times$, mit $J(X) = M\tilde{J}(X)M^{-1}$. Es muß aber $J^2 = \text{id}$ gelten, also

$$M(\tilde{J}(M\tilde{J}(X)M^{-1}))M^{-1} = M\tilde{J}(M)^{-1}X\tilde{J}(M)M^{-1} = X,$$

für alle $X \in A$. Damit muß aber $\tilde{J}(M)M^{-1} = kE^{(n)}$, mit $k \in K = \mathcal{Z}(A)$, gelten. Außerdem folgt aus $\tilde{J}(M) = kM$ auch

$$M = \tilde{J}^2(M) = \tilde{J}(kM) = \tilde{J}(k)kM, \quad \text{also } \tilde{J}(k)k = 1.$$

Im Falle einer Involution erster Art ist $K = K_0$ total reell, und $\tilde{J}|_K = \text{id}|_K$, also $k = \pm 1$. Falls die Involution zweiter Art ist, so muß $K = K_0(i\sqrt{a})$, mit einem (total) positiven $0 < a \in K_0$, gelten, und die positive Involution $\tilde{J}$ muß $i\sqrt{a} \mapsto -i\sqrt{a}$ abbilden. Dann ist aber,

$$\text{für } x \in K \text{ und } \tilde{M} = xM, \quad \tilde{J}(\tilde{M}) = \tilde{J}(x)kM = \frac{\tilde{J}(x)k}{x}\tilde{M} = \frac{\tilde{J}(x)^2k}{|x|^2}\tilde{M},$$

und dieser Bruch liegt, bei geeigneter Wahl von x , in $K \cap \mathbb{R} = K_0$. Es hat nämlich $k = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ das Minimalpolynom $(X - k)(X - \bar{k})$, es müssen also sogar $\cos(\varphi)$ und $i \sin(\varphi)$ in K liegen. Es gilt nun $x := \sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}}(\cos(\frac{\varphi}{2}) \pm i \sin(\frac{\varphi}{2})) =$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}} \left(\sqrt{\frac{1+\cos(\varphi)}{2}} \pm i \sqrt{\frac{1-\cos(\varphi)}{2}} \right) = \frac{1+\cos(\varphi)}{2} \pm i \frac{\sin(\varphi)}{2} \in K,$$

daher liefert eins dieser x das gewünschte. Anders ausgedrückt ist also jedes Element von K das Produkt eines Quadrates und eines Elementes aus K_0 , und man erhält auch in diesem Fall $\tilde{J}(M) = \pm M$. (Hier kann man sogar aus $\tilde{J}(M) = -M$, mit $\tilde{M} = i\sqrt{a}M$, immer $\tilde{J}(\tilde{M}) = \tilde{M}$ erreichen.) Dann ist auch $J(M) = M\tilde{J}(M)M^{-1} = M(\pm M)M^{-1} = \pm M$. $\square$

Die Äquivalenz zweier Involutionen J_1 und J_2 ist wiederum gleichbedeutend mit der Existenz einer invertierbaren Matrix $N \in M_n(D)$, die die, den Involutionen zugehörigen, Matrizen M_1 und M_2 verbindet, $M_1 = k\tilde{J}(N)M_2N$, $k \in K$, letzteres kann man wieder in M_1 aufnehmen, also $M_1 = M_2[N] := J(N)M_2N$. Damit reduziert man auf

1.5.6 Lemma : M ist o.B.d.A. diagonal, $M = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix}$, wobei $m_i \in D$ und entweder

$m_i = \tilde{J}(m_i)$, für alle i , oder $m_i = -\tilde{J}(m_i)$, für alle i , gilt.

Beweis : a) Die Reduktion durch Basiswechsel ergibt hier für M zuerst die Blockform $M = \begin{pmatrix} M_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & M_k \end{pmatrix}$, wobei jedes M_i entweder ein Element $m_i \in D$, mit $m_i = \pm \tilde{J}(m_i)$, oder ein Kästchen $M_i = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ c_i & 0 \end{pmatrix}$, mit $c_i = \pm \tilde{J}(b_i)$, ist. Nun ist jedoch

$$\begin{pmatrix} 0 & b_i \\ \pm \tilde{J}(b_i) & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \tilde{J}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b_i x \\ \pm \tilde{J}(b_i) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b_i x \\ \pm \tilde{J}(b_i x) & 0 \end{pmatrix},$$

man erreicht also sogar $b_i = 1$, $c_i = \pm 1$.

b) Kästchen der Form $M_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ können jedoch nicht vorkommen, denn sonst hätte man in einer Unteralgebra $\tilde{A} = M_2(D)$ das invariante Element $J\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, und $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 = -E^{(2)}$.

c) Wie im tensorierten Fall, darf auch höchstens ein nicht-triviales Kästchen auftreten. Die Ausnahmeinvolution $J(X) = J\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ liefert zwar ein formal-reelles $\mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J)$, aber $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} J\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = -E^{(2)}$ hat keine positive Spur, also kann man auch diesen Fall ausschließen. $\square$

Nun fahren wir nach der Methode von [Fr4], und den dort benutzten Sätzen von Mumford, fort. Falls $\tilde{J}|_D = \text{id}|_D$ die Identität ist, so muß D kommutativ sein, also $D = \mathcal{Z}(D) = K$. Es gilt also

1.5.7 Bemerkung : Falls $\tilde{J}$ die Identität auf $D = K$ ist, so kann man erreichen, daß $m_i > 0$, für alle i gilt, also die Aussage des Satzes.

Beweis : Es muß $K = K_0$ total reell sein, sonst wäre $\text{id}|_K$ keine positive Involution, und es ist

$$M = \pm \tilde{J}(M) \neq 0. \text{ Es können jedoch nicht verschiedene Vorzeichen in } M = \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & m_n \end{pmatrix},$$

$m_i < 0 < m_j$, auftreten, sonst wäre

$$XJ(X) = \begin{pmatrix} 0 & x_i \\ x_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_i & 0 \\ 0 & m_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_j \\ x_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_i^{-1} & 0 \\ 0 & m_j^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_i m_j \\ x_j m_i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_j m_j^{-1} \\ x_i m_i^{-1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_j}{m_i} x_i^2 & 0 \\ 0 & \frac{m_i}{m_j} x_j^2 \end{pmatrix},$$

und dies würde, geeignet ausgedehnt, eine negative Spur liefern. Ein globales Vorzeichen kann immer in M aufgenommen werden, also die Behauptung. $\square$

Es bleibt der Fall einer Diagonalmatrix $M = \pm \tilde{J}(M)$, mit $\tilde{J}|_D \neq \text{id}|_D$, zu untersuchen. Die Einschränkung der Involution $\tilde{J}|_{K_0}$ ist die Identität. Nun ist, im Falle einer Involution erster Art, D entweder selbst der Körper $K = K_0$ (, also doch $\tilde{J}|_D = \text{id}|_D$,) oder ein Quaternionenschiefkörper, $D = \begin{pmatrix} a & b \\ & K \end{pmatrix} = K \cdot 1_D + K \cdot i_a + K \cdot j_b + K \cdot k_{ab}$. Es genügt, nach eventueller Umbenennung der Basiselemente, die Fälle $a, b < 0$ und $a, b > 0$ zu betrachten, also

1.5.8 Lemma (Beweis von 1.5.2 im Falle von Involutionen erster Art) : *Für Involutionen erster Art kann man den Wedderburn-Isomorphismus immer so wählen, daß in $M_n(D)$ die Involution zu der Matrixausdehnung einer positiven Involution auf D ähnlich ist.*

Beweis : a) Es ist $D \otimes_K \mathbb{R} \cong \mathbb{H}$ oder $M_2(\mathbb{R})$, über dem Zentrum $K = K_0$, das als Teil der reellen Zahlen aufgefaßt wird, $K \subset \mathbb{R}$. Im ersten Fall, also $a, b < 0$, wählt man als (positive) Involution auf D die Standardinvolution

$$\tilde{J}(x) = \tilde{J}(x_1 + x_2 i_a + x_3 j_b + x_4 k_{ab}) = x_1 - x_2 i_a - x_3 j_b - x_4 k_{ab} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k.$$

Aus $m_i = \tilde{J}(m_i)$ folgt dann $m_i \in K = K_0$, und man kann wieder auf eine reelle Diagonalmatrix M mit positiven Einträgen reduzieren. Es genügt aber $M = \tilde{J}(M)$ zu betrachten, da man sonst, wie in $\mathbb{H}$ selbst, keine positive Involution J auf $M_n(D)$ erhält. Es ist nämlich $J(x) = m \tilde{J}(x) m^{-1} = x$, mit $m = -\tilde{J}(m) \in D$, also $m = m_2 i + m_3 j + m_4 k$, äquivalent zu $m^{-1} x = \tilde{J}(x) m^{-1}$, also, wegen $m^{-1} = \frac{\tilde{J}(m)}{|m|^2}$, zu $-mx = \tilde{J}(x) \tilde{J}(m) = \tilde{J}(mx)$. Es existiert aber $0 \neq x = x_2 i + x_3 j + x_4 k$, mit $(m \cdot x)_1 = 0$, und es ist $x^2 = ax_2^2 + bx_3^2 - abx_4^2 < 0$, also die Involution nicht positiv.

b) Im zweiten Fall, also $a, b > 0$, wählt man auf D als Involution

$$\tilde{J}(x) = \tilde{J}(x_1 + x_2 i_a + x_3 j_b + x_4 k_{ab}) = x_1 + x_2 i + x_3 j - x_4 k.$$

Man rechnet nach, daß aus $\tilde{J}(m) = -m$, also $m = m_4 k$, folgt, daß $J(x) = m \tilde{J}(x) m^{-1}$ keine positive Involution auf D definiert. Danach erhält man, daß in $m = m_1 + m_2 i + m_3 j$, $m_1 \neq 0$ gelten muß, und daß man genau für $m_1^2 - am_2^2 - bm_3^2 > 0$ tatsächlich eine positive Involution erhält. („>“ bedeutet hier total positiv als Element von K .) In der $\mathbb{R}$ -Tensorierung besitzt dieses Element also eine Wurzel.

c) Außerdem rechnet man nach, daß im ersten Falle a und b sogar total negativ, im zweiten total positiv sein müssen, daß also in $D_{\mathbb{R}} = D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{H}^l$, $k + l = m = [K : \mathbb{Q}]$, entweder $k = 0$ oder $l = 0$ gilt, der Schiefkörper also rein ist (, falls die Involution positiv ist). $\square$

Aus dem Beweis folgt auch

1.5.9 Zusatz : *Bezüglich der Einbettung $\iota : D \rightarrow M_2(L) \subset M_2(\mathbb{R})$, falls $D \otimes_K \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$, bzw. $M_2(\mathbb{C})$, falls $D \otimes_K \mathbb{R} \cong \mathbb{H}$, $L = K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ ein algebraischer Erweiterungskörper von K , gegeben durch*

$$1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i_a \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix}, \quad j_b \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad k_{ab} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \\ -\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix},$$

gehen diese Involutionen in die entsprechende Standardmatrixinvolution über. Darüber erhält man, durch Zusammensetzung mit der auf L erweiterten Einbettung von K nach $\mathbb{R}^m \cong K_{\mathbb{R}}$ (, K ist ja total reell), eine Einbettung $D \rightarrow \iota(D) \rightarrow M_2(\mathbb{R}^m) \cong D_{\mathbb{R}}$, bzw. $M_2(\mathbb{C}^m)$, falls $D_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}^m$, die dies ebenfalls erfüllt. Das Bild von D ist auf der Matrixseite unter der Involution invariant, und das Bild von M ist ein m -Tupel von Quadraten invertierbarer hermitescher Matrizen. $\square$

Schließlich noch

1.5.10 Lemma (Beweis von 1.5.2 im Falle von Involutionen zweiter Art) : *Für Involutionen zweiter Art ist J äquivalent zu einer weiteren Involution auf $M_n(D)$, die zur Matrixausdehnung einer positiven Involution $\tilde{J}$ auf D ähnlich ist.*

Beweis : Es muß, für Involutionen $\tilde{J}$ zweiter Art, ein Element $k \in K$ aus dem Zentrum existieren, mit $\tilde{J}(k) = -k$, also genügt es $\tilde{J}(M) = M$ zu betrachten. Falls sich K reell einbetten läßt, so erhält

man auf $K \otimes_{K_0} \mathbb{R} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die Vertauschungsinvolution, diese ist nicht positiv. Es muß also K eine rein imaginäre Erweiterung des total reellen Zahlkörpers K_0 sein. Dann besagt jedoch ein Satz von Albert, daß eine Involution zweiter Art auf D existiert (, mit derselben Wirkung auf dem Zentrum K wie J), und eine Verfeinerung von Mumford, daß man diese sogar positiv wählen kann. Wir können also davon ausgehen, daß $\tilde{J}$ die Matrixausdehnung einer solchen ist. Man kann, nach Mumford, sogar einen Isomorphismus von $D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_s(\mathbb{C}^{m/2})$, $m = [K : \mathbb{Q}]$, wählen, so daß sich auf der Matrixseite die Standardinvolution ergibt, und das Bild von D darunter invariant ist. Dieser liefert dann wieder eine Einbettung in die, zur Tensorierung isomorphen, Matrixalgebra, $D \longrightarrow M_s(\mathbb{C}^{m/2}) \cong D_{\mathbb{R}}$, mit dieser Eigenschaft, D muß wiederum rein sein. Zusätzlich muß M , da J positiv ist, ein Quadrat in $S(ns, \mathbb{C}^{m/2}) \cong S(n, D_{\mathbb{R}})$ sein. $\square$

Man erhält also den erstrebten Satz. Die ganze Untersuchung liefert noch folgenden

1.5.11 Zusatz : *a) Sei $(A_{\mathbb{Q}}, J)$ eine einfache, positiv definite Algebra über $\mathbb{Q}$, $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$, $\mathcal{Z}(D) = K$. Dann ist das Zentrum K entweder total reell, oder eine rein imaginäre Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers. Die Tensorierung $A_{\mathbb{R}} = A \otimes \mathbb{R}$ ist isomorph zu einer Matrixalgebra der Form*

$$M_{n'}(\mathbb{K}^{m'}), \quad \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\},$$

genauer tritt einer der Fälle $A_{\mathbb{R}} \cong M_n(\mathbb{R}^m)$ (, also $D = \mathcal{Z}(D) = K$ total reell), $M_{2n}(\mathbb{R}^m)$, $M_n(\mathbb{H}^m)$ oder $M_{ns}(\mathbb{C}^{m/2})$ auf, mit dem sogenannten Schurindex $s = s(D)$ und dem Körpergrad $m = m(K) = [K : \mathbb{Q}]$. Ein positiv definiter rationaler Schiefkörper D ist also stets rein. $\square$

Sei nun D ein Schiefkörper mit positiver Involution J . Diese dehnen wir $\mathbb{R}$ -linear zu einer Involution J auf $D_{\mathbb{R}}$ aus, diese ist positiv. Wir wissen also, daß ein Wedderburn-Isomorphismus von $D_{\mathbb{R}} = D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ in eine halb-einfache Algebra über $\mathbb{R}$ existiert, die die Standardinvolution trägt (, und so daß diese äquivalent sind). Wir treffen also folgende

1.5.12 Wahl des Wedderburn-Isomorphismus und des Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse : *Sei $A = A_{\mathbb{Q}}$ eine einfache, involutive, positiv definite Algebra über den rationalen Zahlen. Wir werden stets annehmen, daß A eine volle Matrixalgebra $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$ ist, und daß die Involution die Matrixausdehnung einer positiven Involution auf dem Schiefkörper D ist, und den Isomorphismus $D_{\mathbb{R}} \cong M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, so wählen, daß sich die Standardinvolution ergibt. Diese dehnen wir dann auf $A_{\mathbb{R}} = M_n(D_{\mathbb{R}})$ aus. Der Einfachheit halber werden wir sogar gelegentlich $A_{\mathbb{R}} = M_{nn'}(\mathbb{K}^{m'})$ dafür schreiben. $\square$*

Als Folgerung aus dem jetzt bewiesenen Satz 1.5.2 erhalten wir auch

1.5.13 Satz : *Je zwei positive Involutionen J und $\tilde{J}$ auf einer einfachen, endlich-dimensionalen, rationalen Algebra A sind ähnlich, $J \sim \tilde{J}$. $\square$*

Die Frage welche Schiefkörper D eine positive Involution zulassen, läßt sich folgendermaßen beantworten: D muß rein sein; insbesondere muß sein Zentrum K entweder ein total reeller Zahlkörper sein, oder eine rein-imaginäre Erweiterung eines solchen. Im ersten Fall ist D Quaternionenschiefkörper, auf dem wir eine positive Involution angegeben haben. Im zweiten, geben die benutzten Sätze von Mumford genaue Auskunft über die Struktur von D : D läßt genau dann eine positive Involution zu, wenn seine sogenannten lokalen Hasse-Invarianten $I_P \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, an jeder Primstelle

$$I_P + I_{\overline{P}} = 0, \quad \text{und sogar } I_P = 0, \quad \text{falls } P = \overline{P},$$

erfüllen.

1.2 Total positiv definite symmetrische Matrizen in involutiven Algebren, die verallgemeinerte obere Halbebene und die Wurzelfunktion für Matrizen

Nun werden die notwendigen Begriffe der Positiv-Definitheit, sowie der oberen Halbebene, definiert, und die (eindeutige) Wurzelfunktion auf dieser Halbebene eingeführt.

1.2.1 (Total) positiv definite Matrizen der tensorierten Algebra $A_{\mathbb{R}}$

Als erstes führen wir den Begriff der (totalen) Positivität für Elemente halb-einfacher reeller involutiver Algebren ein.

2.1.1 Definition : Sei $A = (A_{\mathbb{R}}, J)$ eine positiv definite Algebra über $\mathbb{R}$. Ein Element $S \in A = A_{\mathbb{R}}$ der Algebra heißt total positiv semi-definit, oder semi-positiv, falls es das Quadrat eines unter der Involution invarianten Elementes ist, $S = M^2$, $M = J(M) \in \mathcal{S}(A, J)$, und total positiv definit, oder einfach positiv, falls dieses $M \in A^{\times}$ eine Einheit ist. Man schreibt für total semi-positive Elemente $S \succeq 0$ und für total positive $S \succ 0$ (, und solche Elemente sind nach Definition invariant unter der Involution). $\square$

Über Matrixalgebren gibt es auch folgenden Begriff.

2.1.2 Definition : Eine hermitesche (bzw. symmetrische) Matrix $S = S^{(r)} = \overline{S}' \in M_r(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, heißt positiv semi-definit, in Zeichen $S \geq 0$, falls $S[x] = \overline{x}' S x \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{K}^r$ gilt, und positiv (definit), $S > 0$, falls zusätzlich aus $S[x] = 0$ noch $x = 0$ folgt. $\square$

Wir wollen den abstrakten Begriff der totalen Positivität, für die uns interessierenden Algebren, mit dem gewöhnlichen Begriff der Positivität von Matrizen in Verbindung bringen. Genauer wollen wir folgendes sehen.

2.1.3 Satz : Sei $A = (A_{\mathbb{R}}, J)$ die halb-einfache, involutive, positiv definite, reelle Algebra

$$A_{\mathbb{R}} = \prod A_{\mathbb{R},i} = \left(\prod M_{n_i}(\mathbb{R})^{\alpha_i} \right) \times \left(\prod M_{n'_j}(\mathbb{C})^{\beta_j} \right) \times \left(\prod M_{n''_k}(\mathbb{H})^{\gamma_k} \right),$$

ausgestattet mit der Standardinvolution $J = \overline{}$. Ein Element $S \in A_{\mathbb{R}}$ ist genau dann total positiv semi-definit im Sinne von 2.1.1, $S \succeq 0$, wenn jede seiner Komponenten (als Matrix) positiv semi-definit ist, und genau dann total positiv definit, $S \succ 0$, wenn jede seiner Komponenten positiv definit ist. (Da wir auf $A = A_{\mathbb{R}}$ nur mit der Standardinvolution arbeiten, werden wir meistens nicht zwischen den Schreibweisen „ $\succeq$ “ und „ $\succ$ “ unterscheiden.) $\square$

Dazu zitieren wir die benötigten Tatsachen über positiv definite reelle, komplexe und quaternäre Matrizen. Es gilt im reellen, wie im komplexen bzw. quaternären, Fall folgende

2.1.4 Bemerkung : Hermitesche Matrizen $S = S^{(r)} = \overline{S}'$ sind durch unitäre Transformationen diagonalisierbar, es existiert also ein unitäres U , mit

$$S[U] = \overline{U}' S U = D = \begin{pmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_r \end{pmatrix},$$

wie man über die Zerlegung von $\mathbb{K}^r$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, in paarweise orthogonale Eigenräume bezüglich S zeigt. Dabei nennt man eine Matrix U unitär, falls $U \overline{U}' = E^{(r)}$ gilt.

Dies ist in den Fällen $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ wohlbekannt, $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ findet man z.B. in [Kr]. (Man benutzt die weiter unten folgende Einbettung $\mathbb{H} \rightarrow M_2(\mathbb{C})$, um letzteren Fall auf den komplexen zu reduzieren, und um zu zeigen, daß man $S = \overline{S}' \in M_r(\mathbb{H})$ tatsächlich über $M_r(\mathbb{H})$, und nicht nur über $M_{2r}(\mathbb{C})$ diagonalisieren kann.) $\square$

Die Hermitizität von S liefert, angewandt auf $\langle v, S v \rangle$, auch $d = \overline{d}$, für alle Eigenwerte, diese sind also sämtlich reell. Falls S reell ist, ist U sogar (reell) orthogonal. Daraus folgt

2.1.5 Bemerkung : Positive Matrizen $S = S^{(r)} > 0$ besitzen eine, eindeutig bestimmte, positive und hermitesche Quadratwurzel $S^{1/2} = \overline{(S^{1/2})} > 0$, $S = (S^{1/2})^2$, $S^{1/2} \in M_r(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$.

Beweis : Es existiert U mit $U\overline{U}' = E$, so daß $S[U] = D$ diagonal ist und positive Einträge hat. Man kann stets $D^{1/2}$ bilden, und dann $S^{1/2} := UD^{1/2}\overline{U}'$ definieren. (Daß mit S auch $S[X]$, $X = X^{(r,k)}$, k beliebig, hermitesch ist, wird ständig benutzt.) $\square$

Man erhält also die Charakterisierung der positiven Matrizen als Quadrate von invertierbaren hermiteschen Matrizen, und damit den erstrebten Satz. Wir benutzen die folgende Bezeichnung

2.1.6 Definition : Die Menge der positiven Elemente

$$\mathcal{P}(A_{\mathbb{R}}) = \mathcal{P}(A_{\mathbb{R}}, J) := \{M \in A_{\mathbb{R}} ; M = N^2 \in A^{\times}, N \in \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J)\}$$

von A wird der (positive) Kegel genannt. $\square$

Nebenbei hat man somit auf jeder einfachen, endlich-dimensionalen, positiv definiten, involutiven, rationalen Algebra $A = (A_{\mathbb{Q}}, J)$ den natürlichen, abstrakten Positivitäts-Begriff mit positiv definiten Matrizen in Verbindung gebracht.

1.2.2 Auszeichnung eines Isomorphismus zwischen der Tensorierung $D_{\mathbb{R}}$ und einer Matrixalgebra

Nun konkretisieren wir den Wedderburn-Isomorphismus zwischen der Tensorierung einer einfachen rationalen Algebra, die mit der in 1.5.12 gewählten positiven Involution ausgerüstet ist, und einer Matrixalgebra. Wir gehen also von einer Matrixalgebra $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$ aus, mit

$$D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_s(\mathbb{R}^m), \mathbb{H}^m \text{ oder } M_s(\mathbb{C}^{m/2}), \text{ bzw. allgemein } D_{\mathbb{R}} \cong M_{n'}(\mathbb{K}^{m'}), \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\},$$

also mit reinem Schiefkörper D , und $s = 1$ oder 2 im reellen Fall, und wählen diesen Isomorphismus.

Der Schiefkörper D hat einen algebraischen Zahlkörper K vom Körpergrad $m = [K : \mathbb{Q}]$ als Zentrum, $\mathcal{Z}(D) = K$. Dieser besitzt m verschiedene Einbettungen

$$\sigma_i : K \longrightarrow \mathbb{C}, i = 1, \dots, m,$$

in den Körper der komplexen Zahlen. Wir haben gesehen, daß die Bedingung an die Involution, positiv zu sein, erzwingt, daß entweder K total reell ist, oder eine rein-imaginäre Erweiterung eines solchen, es gilt also entweder $K_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^m$ oder $K_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{C}^{m/2}$. In letzterem Falle ist also m gerade, und alle Einbettungen sind (echt) komplex, und bilden $m/2$ Paare zueinander komplex konjugierter Abbildungen, von denen wir je einen Repräsentanten wählen. Trivialerweise hat man also, durch $\mathbb{R}$ -lineare Ausdehnung der σ_i ,

2.2.1 Bemerkung : Es ist

$$\phi_K = \phi = (\sigma_i)_{(i)} : K_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad i = 1, \dots, m,$$

für K total reell, bzw.

$$\phi_K = \phi = (\sigma_i)_{(i)} : K_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathbb{C}^{m/2}, \quad i = 1, \dots, m/2,$$

sonst, ein Isomorphismus, mittels welchem die von K stammende Involution die Standardinvolution induziert. Damit ist, im Körperfall $D = \mathcal{Z}(D) = K$, ϕ_K eine mit der Involution verträgliche Einbettung nach $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{C}^{m/2}$. $\square$

Falls nun D ein (echter) Schiefkörper über einem total reellen Zahlkörper K ist, so muß der Schurindex $s(D) = 2$ sein. Für Quaternionenschiefkörper $D = \begin{pmatrix} a, b \\ K \end{pmatrix}$ über solch einem K hatten wir in beiden möglichen Fällen, nämlich $a, b > 0$, $D \otimes_K \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R})$, $D_{\mathbb{R}} = D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong M_2(\mathbb{R}^m)$ (, also auch $\sigma_i(a), \sigma_i(b) > 0$, für alle i), sowie $a, b < 0$, $D \otimes_K \mathbb{R} \cong \mathbb{H}$, $D_{\mathbb{R}} = D \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \cong \mathbb{H}^m$

(also auch $\sigma_i(a), \sigma_i(b) < 0$, für alle i), eine explizite Einbettung $\iota_D = \iota : D \longrightarrow M_2(L)$, in eine Matrixalgebra über dem Erweiterungskörper $L = K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ von K , angegeben, mit

$$\iota(i) = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \iota(j) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{b} \\ \sqrt{b} & 0 \end{pmatrix},$$

sowie eine ausgezeichnete (positive) Involution J , mit $J(i) = \text{sgn}(a)i$ und $J(j) = \text{sgn}(b)j$, gewählt. Zusammen mit der weiter unten (2.3.4) folgenden Einbettung von $\mathbb{H}$ nach $M_2(\mathbb{C})$ erhält man

2.2.2 Bemerkung : Im Falle eines Quaternionenschiefkörpers über einem total reellen Zahlkörper, ist die Zusammensetzung $\phi_D = \phi = (\tilde{\sigma}_i \circ \iota)_{(i)}$, von ι mit den auf $\mathbb{R}$ ausgedehnten Einbettungen σ_i von K , ein Isomorphismus $\phi : D_{\mathbb{R}} \longrightarrow M_2(\mathbb{R}^m)$ bzw. $\mathbb{H}^m$, so daß die gewählte Involution von D auf der Matrixseite die Standardinvolution ergibt. Ferner definiert ϕ eine Matrixeinbettung von D nach $M_2(\mathbb{R}^m)$ bzw. $\mathbb{H}^m$, die mit den Standardinvolutionsen verträglich ist.

Beweis : Im reellen Fall ist $M_2(L) \subset M_2(\mathbb{R})$, dasselbe gilt für die Zusammensetzung mit jedem $\tilde{\sigma}_i$. Im quaternionären Fall, also $a, b < 0$, sind $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ imaginär, $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ ist reell, und die Einbettung ι ist so gewählt, daß $\iota(D) \subset M_2(\mathbb{C})$ sogar im Bild von $\mathbb{H} \subset M_2(\mathbb{C})$ liegt. Ferner ist auch die Involution so gewählt, daß sich die Standardmatrixinvolution auf $M_2(\mathbb{C})$ ergibt, dieselbe ergibt sich auch durch die Standardinvolution auf $\mathbb{H}$. Die Reinheit ergibt schließlich die Verträglichkeit mit den $\tilde{\sigma}_i$, woraus sich dann die Aussage über $D_{\mathbb{R}}$ ergibt. $\square$

Es bleibt also der Fall (echter) reiner Schiefkörper D , deren Zentrum K eine rein-imaginäre Erweiterung eines total reellen Zahlkörpers ist. Man hat

2.2.3 Definition : Sei D ein Schiefkörper mit Zentrum $\mathcal{Z}(D) = K$. Man nennt einen algebraischen Erweiterungskörper L von K Zerfällungskörper von D , falls $D_L := D \otimes_K L$ (isomorph zu) eine(r) volle(n) Matrixalgebra über L ist. $\square$

Es gilt dann

2.2.4 Satz : a) Der Grad der Algebrenenerweiterung $(D : K) = s^2$ ist ein Quadrat. ($s = s(D)$ heißt der Schurindex von D .)

b) Zu jedem D existiert ein Zerfällungskörper L/K , also ein Erweiterungskörper von K mit der Eigenschaft $D_L \cong M_s(L)$. $\square$

Bei uns tritt der Fall eines reinen Schiefkörpers D , mit $D_{\mathbb{R}} = M_s(\mathbb{C}^{m/2})$, auf. Die benutzen Sätze von Mumford besagen jedoch, daß in diesem Fall der Zerfällungskörper $L \subset \mathbb{C}$, so gewählt werden kann, daß er unter der gewöhnlichen komplexen Konjugation invariant ist, $L = \overline{L}$. Die natürliche Einbettung von D , $\iota_D = \iota : D \longrightarrow M_s(L) \subset M_s(\mathbb{C})$, in eine Matrixalgebra über diesem Zerfällungskörper, liefert einen Isomorphismus $\iota : D_L \longrightarrow M_s(L)$, so daß sich auf der rechten Seite die Standardinvolution ergibt. Man kann nun wieder die Repräsentanten der $m/2$ Paare zueinander komplex konjugierter Einbettungen von K zu Einbettungen $\tilde{\sigma}_i : L \longrightarrow \mathbb{C}$ von L und dann $\mathbb{R}$ -linear ausdehnen, und erhält, wegen der Reinheit von D , durch Zusammensetzung (auch) für jeden (solchen) Schiefkörper einen Isomorphismus

$$\phi_D = \phi = (\phi_i)_{(i)} = (\tilde{\sigma}_i \circ \iota)_{(i)} : D_{\mathbb{R}} \longrightarrow M_{n'}(\mathbb{K}^{m'}), \quad \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\},$$

der auf der Matrixseite die Standardinvolution induziert, sowie eine Einbettung

$$\phi : D \longrightarrow \iota(D) \longrightarrow M_{ns}(\mathbb{C}^{m/2}),$$

die mit den Involutionsen verträglich ist.

Durch Matrixausdehnung (und unter der getroffenen Wahl des Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse) erhält man die

2.2.5 Auffassung von $A = A_{\mathbb{Q}}$ als Teil einer reellen Matrixalgebra : Zu jeder einfachen rationalen Algebra $A = M_n(D)$, mit positiver Involution, die Matrixausdehnung einer (positiven) Involution J auf D ist, existieren Einbettungen involutiver Algebren $\phi_i = \tilde{\sigma}_i \circ \iota : A \longrightarrow M_{n'}(\mathbb{K}) = M_{ns}(\mathbb{R}), M_{ns}(\mathbb{C})$ oder $M_n(\mathbb{H})$, $i = 1, \dots, m' = \frac{m}{\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{Z}(\mathbb{K}))}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, wobei die Matrixalgebra mit der Standardinvolution ausgestattet sei. Deren Zusammenfassung ist ein Isomorphismus

$$\phi_A = \phi = (\phi_i)_{(i)} : A_{\mathbb{R}} = M_n(D_{\mathbb{R}}) \longrightarrow M_{n'}(\mathbb{K}^{m'}) = M_{ns}(\mathbb{R}^m), \quad M_{ns}(\mathbb{C}^{m/2}) \quad \text{oder} \quad M_n(\mathbb{H}^m),$$

der die Involution respektiert. Dieses ϕ fixieren wir. Ein Element von A , also eine Matrix über D , werden wir gelegentlich als Matrixtupel $M = (M^{(i)})_{(i)}$ in der halb-einfachen reellen Algebra $A_{\mathbb{R}} = M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$ auffassen. $\square$

1.2.3 Die Komplexifizierung von A , die verallgemeinerte obere Halbebene und die Wurzelfunktion auf dieser

Nun muß man ein sogenanntes (konvexes) Tubengebiet konstruieren, das den Begriff der Siegelschen oberen Halbebene verallgemeinert, also eine Teilmenge der Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = A_{\mathbb{Q}} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ der einfachen rationalen Algebra $A = A_{\mathbb{Q}}$. Dies liefert die

2.3.1 Definition : Wir setzen

$$\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}) = \mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}, J) := \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J) + i\mathcal{P}(A_{\mathbb{R}}, J) \subset A_{\mathbb{C}} = A_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}. \quad \square$$

Andererseits kann man, für ein Produkt von Matrixalgebren, auch komponentenweise eine verallgemeinerte obere Halbebene wie üblich erklären.

2.3.2 Definition : Es bezeichne

$$\mathbf{H}_n^m = \mathbf{H}_n^m(\mathbb{K}) := \{Z \in A_{\mathbb{C}} = M_n(\mathbb{K}^m) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} ; Z = X + iY, X = \overline{X}', Y = \overline{Y}' > 0\},$$

$\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, die verallgemeinerte obere Halbebene. $\square$

Zu jeder einfachen rationalen Algebra $A = A_{\mathbb{Q}}$ gehört also eine der Halbebenen $\mathbf{H}_{ns}^m(\mathbb{R})$, $\mathbf{H}_{ns}^{m/2}(\mathbb{C})$ oder $\mathbf{H}_n^m(\mathbb{H})$. Wir wollen folgendes sehen.

2.3.3 Bemerkung : Im Falle einer positiven Algebra $A_{\mathbb{R}} \cong M_n(\mathbb{K}^m)$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, gilt $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}) \cong \mathbf{H}_n^m(\mathbb{K})$. $\square$

Wir werden die obere Halbebene stets durch ihren Grad, und gelegentlich auch den Körpergrad des Zentrums, um den Matrix-Tupelcharakter hervorzuheben, charakterisieren, und uns den Schurindex, sowie den zugrunde liegenden Schiefkörper dazudenken, und dafür einfach $\mathbb{H}_n$, bzw. $\mathbb{H}_n^m$, schreiben. Um zu sehen, daß man in jedem Fall durch beide Definitionen dasselbe erhält, ist die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ genauer zu untersuchen. Wir benutzen die expliziten

2.3.4 Standardeinbettungen : Wir betrachten die Schiefkörper-Einbettungen $\phi_{\mathbb{C}} = \phi : \mathbb{C} \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ und $\iota_{\mathbb{H}} = \iota : \mathbb{H} \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$, gegeben durch

$$\{1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\} \quad \text{und} \quad \{1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}\}.$$

Diese respektieren auch die Involution. Wir identifizieren die jeweiligen Mengen. $\square$

Man erhält also eine Einbettung $\mathbb{H} \longrightarrow M_2(M_2(\mathbb{R}))$. Diese kann man auf zwei Weisen zu einer Einbettung $\phi_{\mathbb{H}} = \phi : \mathbb{H} \longrightarrow M_4(\mathbb{R})$ zusammensetzen, nämlich

$$\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} \right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{pmatrix} \right)$$

entweder als

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_3 & a_4 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & d_1 & d_2 \\ c_3 & c_4 & d_3 & d_4 \end{pmatrix} \quad \text{oder aber als} \quad \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ c_1 & d_1 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & a_4 & b_4 \\ c_3 & d_3 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

auffassen. Diese sind zueinander konjugiert, haben also dieselbe Determinante und Spur. Genauso kann man alle diese Einbettungen auf zwei Arten (elementweise oder nach Blöcken) auf Matrizen ausdehnen. Von diesen wird ab jetzt jeweils stillschweigend die benutzt, die zu jeder Stelle am besten „paßt“.

Verwirrend ist allerdings, insbesondere im komplexen Fall, daß durch die Komplexifizierung von A nun zwei verschiedene „ i “'s auftreten. Wir bezeichnen deswegen ab jetzt die (jeweils auftretenden) imaginären Einheiten des Grundkörpers $\mathbb{K}$ mit $\tilde{i}$, $\tilde{j}$ und $\tilde{k}$, und schreiben in diesem Abschnitt auch $\mathbb{K} = \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{R} + \mathbb{R} \cdot \tilde{i}$ im komplexen Fall. Zusätzlich treffen wir folgende Konvention: Die imaginäre Einheit („ i “) der zusätzlichen Komplexifizierung steht stets vor Matrizen, die des zugrunde liegenden Schiefkörpers („ $\tilde{i}$ “) stets dahinter. Es gilt nun

2.3.5 Lemma : a) Die Abbildung $x \otimes w = x \otimes (w_1 + iw_2) \mapsto z := xw_1 + ixw_2 = xw$ liefert einen Isomorphismus $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$.

b) Die Abbildung $x \otimes w = (x_1 + x_2\tilde{i}) \otimes (w_1 + iw_2) \mapsto (z_1, z_2)$, $(z_1, z_2) :=$

$$:= (x_1w_1 - x_2w_2 + i(x_1w_2 + x_2w_1), x_1w_1 + x_2w_2 + i(x_1w_2 - x_2w_1)) = (x_1 + ix_2, x_1 - ix_2)w$$

liefert einen Isomorphismus $\iota_{\mathbb{C}} : \tilde{\mathbb{C}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2$, der sogar $\mathbb{C}$ -linear (im zweiten Faktor des Tensorprodukts) ist.

c) Die $\mathbb{C}$ -lineare Ausdehnung der Einbettung $\iota_{\mathbb{H}} : \mathbb{H} \longrightarrow M_2(\mathbb{C})$,

$$x \otimes w = (x_1 + x_2\tilde{i} + x_3\tilde{j} + x_4\tilde{k}) \otimes (w_1 + iw_2) \mapsto Z := \begin{pmatrix} x_1+ix_2 & x_3+ix_4 \\ -x_3+ix_4 & x_1-ix_2 \end{pmatrix} \cdot (w_1 + iw_2),$$

liefert einen Isomorphismus $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \cong M_2(\mathbb{C})$. $\square$

Mittels dieser Isomorphismen ist $\mathbb{H}_n$ in jedem Fall als Teilmenge von $M_{ns}(\mathbb{C}^m)$ aufzufassen. Unter diesem „Dach“ besitzt ein $Z \in \mathbb{H}_n^m$ folgende

2.3.6 Zerlegungen : a) *Reeller Fall:* $Z = Z_1 = X + iY = X' + iY'$, mit $X, Y \in M_{ns}(\mathbb{R}^m)$, $s = 1$ oder 2.

b) *Komplexer Fall:* $Z = X + iY = Z_1 + Z_2\tilde{i}$, $X = X_1 + X_2\tilde{i}$, $Y = Y_1 + Y_2\tilde{i}$, $Z_1 = X_1 + iY_1$, $Z_2 = X_2 + iY_2$, mit $X, Y \in M_{ns}(\tilde{\mathbb{C}}^{m/2})$, $Z_1, Z_2 \in M_{ns}(\mathbb{C}^{m/2})$.

c) *Quaternärer Fall:* $Z = X + iY = Z_1 + Z_2\tilde{i} + Z_3\tilde{j} + Z_4\tilde{k}$, $X = X_1 + X_2\tilde{i} + X_3\tilde{j} + X_4\tilde{k}$, $Y = Y_1 + Y_2\tilde{i} + Y_3\tilde{j} + Y_4\tilde{k}$, $Z_l = X_l + iY_l$, $l = 1, 2, 3, 4$, mit $X, Y \in M_n(\mathbb{H}^m) \subset M_{2n}(\mathbb{C}^m)$ und $Z_l \in M_{2n}(\mathbb{C}^m)$, $l = 1, 2, 3, 4$. $\square$

Die Involution wird nun natürlich $\mathbb{C}$ -linear auf die Komplexifizierung fortgesetzt, also

2.3.7 Bemerkung und Notation : Sei $Z \in \mathbb{H}_n$. Wir setzen $\overline{Z}' := \overline{X}' + i\overline{Y}' = \sum_l Z_l' \overline{e}_l$, mit

den jeweils auftretenden Basiselementen $e_l \in \{1, \tilde{i}, \tilde{j}, \tilde{k}\}$ von $\mathbb{K}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \tilde{\mathbb{C}}, \mathbb{H}\}$, aufgefaßt als $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Aus $Z = \overline{Z}'$ folgt

$$X = \overline{X}', \quad Y = \overline{Y}', \quad X_1 = X_1', \quad Y_1 = Y_1' \text{ und } X_l = -X_l', \text{ sowie } Y_l = -Y_l', \text{ für } l \neq 1.$$

Gelegentlich werden wir auch den Homomorphismus $\hat{Z} := X - iY$ benutzen. $\square$

Im komplexen Fall liefert die Identifizierung von $\tilde{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{C}$ mit $\mathbb{C}^2$ unter $\iota_{\mathbb{C}}$, $\iota_{\mathbb{C}}(x \otimes w) = (z_1, z_2)$, folgende

2.3.8 Bemerkung : $\overline{}$ entspricht der Vertauschungsinvolution $J((z_1, z_2)) = (z_2, z_1)$ auf $\mathbb{C}^2$, $\wedge \circ \overline{}$ der Standardinvolution $J((z_1, z_2)) = (\overline{z}_1, \overline{z}_2)$. Es gilt $\overline{}|_{\tilde{\mathbb{C}}} = (\wedge \circ \overline{})|_{\tilde{\mathbb{C}}}$, und dies ist natürlich die gewöhnliche komplexe Konjugation. $\square$

Insgesamt erhält man also für Matrizen

2.3.9 Bemerkung : a) Mittels der Gleichsetzung $M_n(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = M_n(\mathbb{C})$, ergibt die Zusammensetzung $\wedge \circ \overline{}$ die Standardinvolution auf der Matrixseite; sie dehnt die Standardinvolution $\overline{} = \overline{}$ von $M_n(\mathbb{R})$ auf die Komplexifizierung aus.

b) Bei der Ausdehnung von ι auf $M_n(\tilde{\mathbb{C}}) \otimes \mathbb{C} = M_n(\mathbb{C})^2$, ergibt $\wedge \circ \overline{}$ die Standardinvolution $J((Z_1, Z_2)) = (\overline{Z}_1', \overline{Z}_2')$. Für $Y = 0$, also $Z = X \in \iota(M_n(\tilde{\mathbb{C}}))$, fallen die Vertauschungs- und die Standardinvolution zusammen, $(\wedge \circ \overline{})|_{M_n(\tilde{\mathbb{C}})} = \overline{}|_{M_n(\tilde{\mathbb{C}})}$.

c) Auch im quaternären Fall $M_n(\mathbb{H}) \otimes \mathbb{C} = M_{2n}(\mathbb{C})$, liefert $\wedge \circ \overline{}$ die Standardinvolution, genauso wie $\overline{}$ dies für $Y = 0$, also $Z = X \in M_n(\mathbb{H}) \subset M_{2n}(\mathbb{C})$ tut. $\square$

Damit haben wir der Aussage $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}, J) \cong \mathbb{H}_n^m \subset M_{ns}(\mathbb{C}^m)$ einen Sinn gegeben. Nun ist die obere Halbebene $\mathbb{H}_n^m$ ein offener, konvexer Teil der Komplexifizierung $V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, des reellen Vektorraumes $V = M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$, und hat deswegen folgende wichtige Eigenschaft.

2.3.10 Satz : *Es existiert eine eindeutig bestimmte holomorphe Wurzelfunktion,*

$$Z \mapsto \sqrt{(Z/i)} = (Z/i)^{1/2},$$

die für $Z = iY$ mit der bereits eingeführten (2.1.5) Wurzelfunktion hermitescher Matrizen, $Y \mapsto Y^{1/2}$, übereinstimmt.

Beweis : Wie im rationalen Fall, betrachtet man, für ein festes Z , die Funktion (Kurve)

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{S}(ns, \mathbb{C}^m), \quad \alpha(t) = E + t(Z/i - E),$$

und definiert $l(x) = l(x, Z) := \int_0^x \dot{\alpha}(t)/\alpha(t) dt$, für $0 \leq x \leq 1$. Man erhält die gewünschte Wurzel über die Exponentialfunktion, $\sqrt{(Z/i)} := e^{\frac{l(1, Z)}{2}}$. $\square$

1.3 Ordnungen, maximale Ordnungen und unter der Involution invariante Ordnungen von positiven Algebren

In diesem Abschnitt wird der Begriff der Ordnung, als Verallgemeinerung der ganzen Zahlen, in rationalen Schiefkörpern eingeführt. Es werden Sätze über Ordnungen in Matrixalgebren über solchen Schiefkörpern zitiert, und die für die Theorie der Modulformen wichtigen Ordnungen klassifiziert.

1.3.1 Der Ring der ganzen Zahlen in einem algebraischen Zahlkörper K als maximale Ordnung

Nun muß der Begriff der Ganzzahlichkeit auf unsere Algebren verallgemeinert werden. Dies liefert die Theorie der Ordnungen. Uns interessiert der Fall einfacher, endlich-dimensionaler, positiv definiter Algebren über $\mathbb{Q}$. Wegen der speziellen Wahl des Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse und des Wedderburn-Isomorphismus, die wir getroffen haben, genügt es sich darunter eine Matrixalgebra $A = M_n(D)$, D ein Schiefkörper vom Schurindex $s = s(D)$ über einem Zahlkörper K , $(D : K) = s^2$, $[K : \mathbb{Q}] = m$, vorzustellen.

3.1.1 Definition : Sei R ein Dedekindring, oder ein (in seinem Quotientenkörper) ganz-abgeschlossener Integritätsbereich, $K = \text{Quot}(R)$ sein Quotientenkörper und V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. (Bei uns wird K also entweder $\mathbb{Q}$ selbst, oder ein algebraischer Zahlkörper, bzw. deren Lokalisierungen und Kompletierungen, sein.)

a) Ein R -Gitter M in V ist ein endlich erzeugter R -Untermodul von V , der V als K -Vektorraum erzeugt, also

$$V = K \cdot M = \left\{ \sum a_i m_i \text{ (endliche Summe)} ; a_i \in K, m_i \in M \right\}.$$

(Genauer bezeichnet man solch ein Gitter meistens als „voll“, bei uns treten jedoch nur solche auf.)

b) Eine R -Ordnung in einer endlich erzeugten K -Algebra A ist ein Unterring $\mathcal{O}$ von A , mit derselben Einheit $1_{\mathcal{O}} = 1_A$, der gleichzeitig ein R -Gitter in A ist.

c) Eine R -Ordnung heißt maximal, falls sie in keiner anderen echt enthalten ist. $\square$

Dieser Begriff verallgemeinert bekannte Resultate aus dem Körperfall, $A = A_{\mathbb{Q}} = D = K$. Der Ring der ganzen Zahlen ist eine Ordnung, gemäß

3.1.2 Satz : Die Menge $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$, aller $x \in K$, die einer normierten polynomialen Gleichung mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ genügen, also $P(x) = 0$ für ein normiertes $P \in \mathbb{Z}[X]$, bildet für jeden algebraischen Zahlkörper K eine endliche Ringerweiterung von $\mathbb{Z}$. Sie wird der ganze Abschluß von $\mathbb{Z}$ in K genannt. Weiterhin ist $\mathcal{O}$ ein freier $\mathbb{Z}$ -Modul, und hat als solcher den Rang $m = [K : \mathbb{Q}]$ (, also gerade den Körpergrad). Er besitzt eine Basis, die K als $\mathbb{Q}$ -Vektorraum erzeugt,

$$K = \mathbb{Q} \cdot \mathcal{O} = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O}_K.$$

(So eine Basis nennt man Ganzheitsbasis von K .) $\square$

Auf der anderen Seite gilt auch

3.1.3 Satz : $\mathcal{O}_K$ ist eine abelsche Gruppe, also, nach obigem Satz, ein $\mathbb{Z}$ -Gitter in K . Die Tensorisierung $K_{\mathbb{R}} = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ dieses Körpers ist ein reeller Vektorraum und der Rang des Gitters $\mathcal{O}_K$ ist gerade die Dimension $\dim_{\mathbb{R}}(K_{\mathbb{R}})$; in dieser Topologie ist $\mathcal{O}_K$ diskret. $\square$

Bei uns treten, wegen der Positivität der Involution, und wie im ersten Abschnitt erläutert, nur $K \subset K_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^m$ und $K \subset K_{\mathbb{R}} = \mathbb{C}^{m/2}$ auf. Auf jeden Fall ist

3.1.4 Beispiel : $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ ist ein Spezialfall einer Ordnung. $\square$

Aber sogar

3.1.5 Bemerkung : $\mathcal{O}_K$ ist die einzige maximale Ordnung in K . $\square$

3.1.6 Die Links- und Rechtsordnung eines Gitters : Sei M ein R -Gitter in der Algebra A . Dann sind die Mengen

$$\mathcal{O}_l(M) := \{x \in A ; xM \subset M\}, \quad \text{sowie}$$

$$\mathcal{O}_r(M) := \{x \in A ; Mx \subset M\},$$

Beispiele für Ordnungen in A . Sie werden entsprechend die dem Gitter M zugeordnete Links- bzw. Rechtsordnung genannt. Für Ordnungen $M = \mathcal{O}$, ist natürlich $\mathcal{O}_l(\mathcal{O}) = \mathcal{O}_r(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, da $1_A = 1_{\mathcal{O}} \in \mathcal{O}$ gilt. $\square$

1.3.2 Ordnungen und maximale Ordnungen in einfachen involutiven $\mathbb{Q}$ -Algebren, Teilbarkeitslehre

Nun stellen wir die notwendigen Resultate über maximale $\mathbb{Z}$ -Ordnungen $\mathcal{O}$ in einfachen rationalen Algebren $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$ mit Zentrum $\mathcal{Z}(D) = K$ zusammen. Es gilt dann immer $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}$, denn mit $\mathcal{O} = \sum \mathbb{Z}\lambda_i$ ist auch $\tilde{\mathcal{O}} = \sum \mathcal{O}_K\lambda_i$ eine $\mathbb{Z}$ -Ordnung in A , und aus der Maximalität folgt dann $\mathcal{O} = \tilde{\mathcal{O}}$. Wir dürfen also $\mathcal{O}$ auch als $\mathcal{O}_K$ -Ordnung auffassen; dies werden wir gelegentlich tun. Der Abschluß von $\mathbb{Z}$ in A ist i.a. weder endlich erzeugt als $\mathbb{Z}$ -Modul noch ein Ring, nämlich nicht abgeschlossen unter den Rechenoperationen. Es gelten folgende Sätze (, siehe z.B. [Re], vorwiegend Abschnitte 8, 9, 19 und 21).

3.2.1 Theorem : *Jedes Element a einer R -Ordnung $\mathcal{O}$ ist ganz über R . Falls R ganz-abgeschlossen ist, so ist das normierte Minimalpolynom von a in $R[X]$ enthalten.* $\square$

3.2.2 Theorem : *Jeder Unterring $\mathcal{O}$ von A , der R enthält, und der die Eigenschaften hat, daß $K \cdot \mathcal{O} = A$ und jedes Element $a \in \mathcal{O}$ ganz über R ist, ist eine R -Ordnung in A .* $\square$

Daraus erhält man, mit Hilfe des Zornschen Lemmas, folgendes

3.2.3 Korollar : *Jede R -Ordnung $\mathcal{O}$ ist in einer maximalen enthalten, insbesondere existieren maximale Ordnungen.* $\square$

Über Ordnungen kann man den Begriff des Gitters verallgemeinern.

3.2.4 Definition : Sei V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum. Ein (links- bzw. rechts-) $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L} \subset V$ ist ein (links- bzw. rechts-) $\mathcal{O}$ -Modul, der gleichzeitig ein R -Gitter in V ist, $K = \text{Quot}(R)$, also ein torsionsfreier R -Modul endlichen Typs, und der zusätzlich V als K -Vektorraum erzeugt, also $K \cdot \mathcal{L} = V$. (Auch hier betont man häufig diese letzte Eigenschaft durch die Spezifikation „voll“.) $\square$

Bei uns wird fast immer $V = D^r$ ein (links- bzw. rechts-) Vektorraum über einem Schiefkörper über einem algebraischen Zahlkörper sein. Für einen Dedekindring R (, z.B. $R = \mathcal{O}_K$, K algebraischer Zahlkörper,) hat man folgende Klassifikation von maximalen Ordnungen.

3.2.5 Theorem : *Sei $A = M_n(D)$ eine volle Matrixalgebra über dem Schiefkörper D mit Zentrum K , oder allgemeiner $A = \text{Hom}_D(V, V)$, V ein rechts- D -Vektorraum, Δ eine maximale R -Ordnung in D und $\mathcal{L}$ ein (rechts-) Δ -Gitter in D^n . Dann ist die Gruppe der (rechts-) Δ -Homomorphismen $\mathcal{O} = \text{Hom}_{\Delta}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$ eine maximale R -Ordnung in A . Umgekehrt kann man jede solche in dieser Form darstellen. Entsprechendes gilt natürlich auch für links- D -Vektorräume.* $\square$

Insbesondere beschreibt dieses Theorem, mit $n = 1$, alle maximalen Ordnungen in D selbst, und zwar in Abhängigkeit von der beliebigen maximalen Ordnung Δ . Man kann die Matrixalgebra $A = M_n(D)$ mit $\text{Hom}_D(D^n, D^n) = \text{End}(D^n)$ identifizieren, dann wird auch die dem Gitter Δ^n zugehörige Ordnung $\mathcal{O} = \text{Hom}_{\Delta}(\Delta^n, \Delta^n) = \text{End}(\Delta^n)$ mit $M_n(\Delta)$ identifiziert. Es gilt dann

3.2.6 Bemerkung : a) Sei $\mathcal{L} \subset D^n$ ein rechts- Δ -Gitter, das zu Δ^n isomorph ist, es existiere also eine invertierbare Matrix $M \in \text{Gl}(n, D)$, mit $M \cdot \mathcal{L} = \Delta^n$. Dann definiert $X \mapsto M^{-1}XM$, $X \in M_n(\Delta)$, einen inneren Isomorphismus $M_n(\Delta) \rightarrow \text{Hom}_{\Delta}(\mathcal{L}, \mathcal{L})$. Entsprechendes gilt für links- Δ -Gitter, die zu Δ^n isomorph sind.

b) Allgemeiner existiert, für ein beliebiges Δ -Gitter $\mathcal{L} \subset D^n$, eine natürliche Zahl q , so daß

$$q \cdot M_n(\Delta) \subset \text{Hom}_\Delta(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \subset \frac{1}{q} \cdot M_n(\Delta). \quad \square$$

Wir werden im folgenden für jeden rationalen Schiefkörper D eine maximale Ordnung $\mathcal{O}$ fixieren, und außerdem das Gitter $\mathcal{L} = \mathcal{O}^n$ wählen, und damit die maximale Ordnung $M_n(\mathcal{O})$ in $A = M_n(D)$. Wir dürfen diese Ordnung sowohl als $\mathbb{Z}$ - wie auch als $\mathcal{O}_K$ -Ordnung betrachten, im folgenden erwähnen wir den Grundring nicht. Man muß allerdings noch eine Änderung vornehmen: Eine (maximale) Ordnung muß a priori nicht unter der Involution invariant sein, und es gibt sogar positive Involutionen, die keine maximale invariante Ordnung zulassen. In manchen Fällen konnte bewiesen werden, daß man einen „guten“ Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse der Involution finden kann, in den übrigen postulieren wir dies, vergleiche Annahme 3.3.7.

Da wir die maximale Ordnung in D jedoch frei wählen durften, werden wir ab dem nächsten Abschnitt mit einer unter der Involution invarianten maximalen Ordnung $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$ weiterarbeiten. In Wirklichkeit benötigen wir die Maximalität von $\mathcal{O}$ erst für den Beweis der Erzeugung des Raumes aller singulären Modulformen durch Thetareihen, während die Invarianz unter der Involution zum Aufbau der Theorie notwendig ist.

Über die maximale Ordnung $\mathcal{O}$ braucht man noch Resultate der Teilbarkeitslehre, um mit den Primidealen des Zentrums $K = \mathcal{Z}(D)$ des Schiefkörpers arbeiten zu können. Sei also R ein Dedekindring, $K = \text{Quot}(R)$ und $\mathcal{O}$ eine R -Ordnung in einer K -Algebra A . (Für uns ist, wie immer, $K = \mathbb{Q}$ oder ein algebraischer Zahlkörper wichtig, solche Algebren sind immer separabel, was in manchen der folgenden Definitionen und Theoreme als Voraussetzung notwendig ist.)

3.2.7 Definition : Ein links- bzw. rechts-Ideal P in $\mathcal{O}$ ist ein links- bzw. rechts- $\mathcal{O}$ -Untermodul von $\mathcal{O}$, $0 \neq P \subset \mathcal{O}$, der gleichzeitig ein R -Gitter in $\mathcal{O}$ ist. $\square$

Wir brauchen folgende Idealtypen.

3.2.8 Definition : a) Ein Ideal P in $\mathcal{O}$ heißt zweiseitig, falls es sowohl links- wie auch rechts-Ideal in $\mathcal{O}$ ist.

b) Ein Ideal P in $\mathcal{O}$ heißt maximal, falls es zweiseitig ist, und aus $P \subset Q$, für ein weiteres zweiseitiges Ideal Q , sogar $P = Q$ folgt.

c) Ein Ideal P in $\mathcal{O}$ heißt zweiseitiges Hauptideal, falls es zweiseitig und von der Form $P = \mathcal{O} \cdot x \cdot \mathcal{O}$, für ein $x \in \mathcal{O}$, ist. Ein links- bzw. rechts-Ideal P in $\mathcal{O}$ heißt links- bzw. rechts-Hauptideal, falls $P = \mathcal{O} \cdot x$ bzw. $P = x \cdot \mathcal{O}$, $x \in \mathcal{O}$ gilt. Ein Ring heißt zweiseitiger Hauptidealring, falls jedes zweiseitige Ideal (zweiseitiges) Hauptideal ist, und entsprechenden links- bzw. rechtsseitiger Hauptidealring, falls jedes links- bzw. rechts-Ideal (links- bzw. rechts-) Hauptideal ist. $\square$

Uns interessieren Primideale. Für unsere Zwecke genügt es folgende Definition zu treffen.

3.2.9 Definition : Die Primideale von $\mathcal{O}$ sind genau die echten maximalen zweiseitigen Idealen von $\mathcal{O}$. $\square$

Es gilt

3.2.10 Satz : Ist $\mathcal{P}$ ein Primideal in $\mathcal{O}$, so ist $P = \mathcal{P} \cap R$ ein (von Null verschiedenes) Primideal von R und der Quotient $\mathcal{O}/P$ ist eine endlich-dimensionale einfache Algebra über dem Körper R/P . $\square$

1.3.3 Lokalisierungen und Komplettierungen von (unter der Involution invarianten) Ordnungen

Die eingeführten Ordnungen sind i.a. nicht kommutativ und keine (einseitige oder zweiseitige) Hauptidealringe. Man muß außer $\mathcal{O}$ auch seine Lokalisierungen nach Primidealen, und deren Komplettierungen, betrachten. Die zitierten Resultate findet man z.B. in [Re], Abschnitte 11, 12, 17, 18 und 22.

3.3.1 Definition : Seien R ein kommutativer, nullteilerfreier Ring, K sein Quotientenkörper, P ein Primideal von R , $R_P = S^{-1} \cdot R$ seine Lokalisierung am Mengenkomplement $S = R - P$, $\overline{R}_P$ dessen

Komplettierung und $\mathcal{O}$ eine Ordnung in einer K -Algebra A . Dann nennt man $\mathcal{O}_P := R_P \otimes_R \mathcal{O}$ die Lokalisierung (von $\mathcal{O}$) an P und $\hat{\mathcal{O}}_P := \hat{R}_P \otimes_R \mathcal{O}$ die entsprechende Komplettierung. $\square$

Diese Definition ist genauso auf beliebige (R - bzw. einseitige $\mathcal{O}$ -) Moduln zu verallgemeinern. Dabei ist zu beachten, daß bei uns $R = \mathcal{O}_K$ stets im Zentrum von $\mathcal{O}$ enthalten ist, $K = \mathcal{Z}(D)$, und daß $(\mathcal{O}_K)_P$ und $(\hat{\mathcal{O}}_K)_P$ ebenfalls kommutativ sind, das Tensorprodukt also wohldefiniert ist.

3.3.2 Lemma : a) Es gilt $\hat{\mathcal{O}}_P \cap A = \mathcal{O}_P$ für jede Primstelle P .

b) Es gilt $\mathcal{O} = \bigcap_{P \text{ prim}} \mathcal{O}_P$. $\square$

Für maximale Ordnungen hat man eine genauere Beschreibung der Primideale.

3.3.3 Theorem : Sei $\mathcal{O}$ eine maximale R -Ordnung in der zentraleinfachen K -Algebra A . Es existiert eine Bijektion zwischen den Primidealen P von R und $\mathcal{P}$ von $\mathcal{O}$, gegeben durch

$$P = R \cap \mathcal{P} \quad \text{und} \quad \mathcal{P} = \mathcal{O} \cap \text{rad}(\mathcal{O}_P).$$

Dabei ist $\text{rad}(\mathcal{O}_P) = \mathcal{P} \cdot \mathcal{O}_P$. Ferner ist $\text{rad}(\mathcal{O}_P)$ das einzige Primideal von $\mathcal{O}_P$. $\square$

Uns interessieren ferner

3.3.4 Satz : Sei R ein Dedekindring und $\mathcal{O}$ eine R -Ordnung in A . Genau dann ist $\mathcal{O}$ maximal, wenn alle Lokalisierungen $\mathcal{O}_P$ maximale R_P -Ordnungen in $A_P = A$ sind, oder wenn alle Komplettierungen $\hat{\mathcal{O}}_P$ maximale $\hat{R}_P$ -Ordnungen in der entsprechenden Komplettierung $\hat{A}_P$ von A längs P sind. $\square$

3.3.5 Theorem : Sei R ein vollständiger diskreter Bewertungsring, $K = \text{Quot}(R)$, und $A = M_n(D)$ eine einfache K -Algebra, mit einem über K endlich-erzeugten Schiefkörper D . Dann ist der ganze Abschluß Δ von R in D die einzige maximale Ordnung in diesem Schiefkörper, und $M_n(\Delta)$ ist, bis auf innere Automorphismen, die einzige maximale Ordnung in $M_n(D)$. Ferner sind Δ und $M_n(\Delta)$ Hauptidealringe. Genauer sind die zweiseitigen Ideale von Δ gerade die Potenzen seines einzigen maximalen (Prim)ideals $\text{rad}(\Delta)$, und links- bzw. rechts-Ideale sind automatisch zweiseitig. Entsprechendes gilt für $M_n(\Delta)$. $\square$

Außerdem hat man

3.3.6 Bemerkung : Unter der gewählten Standardinvolution auf einem Quaternionenschiefkörper D mit $D_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{H}^m$ (vergleiche 1.5.8) ist jede maximale Ordnung $\mathcal{O}$ invariant.

Beweis : Es ist $J(x) = x_1 - x_2i - x_3j - x_4k = 2x_1 - x$. Andererseits ist $\text{tr}_{D/K}(x) = 2x_1$. Falls also $x \in \mathcal{O}$ ist, also insbesondere x ganz, folgt $2x_1 \in \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}$, also auch $J(x) \in \mathcal{O}$. $\square$

Im quaternären Fall kann man also trivialerweise eine maximale, unter der Involution invariante Ordnung finden; in den übrigen Fällen konnte dies nicht bewiesen werden. Man kann jedoch andererseits, zumindestens im reellen Fall, positive Involutionen konstruieren, die keine maximale invariante Ordnung zulassen. Wir postulieren deshalb

3.3.7 Annahme : Es existiert stets ein Repräsentant der Ähnlichkeitsklasse der positiven Involution, der maximale invariante Ordnungen zuläßt. $\square$

Damit treffen wir folgende

3.3.8 Festlegung : a) In jeden rationalen, positiv definiten Schiefkörper $D = (D, J)$ wählen wir für die gesamte Arbeit eine maximale Ordnung

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_D, \quad \text{für die} \quad \mathcal{O} = J(\mathcal{O}) = \overline{\mathcal{O}} \quad \text{gilt.}$$

Dabei ist J die schon fest gewählte positive Involution auf D . $\mathcal{O}$ ist die unter der Involution invariante Ordnung, die wir der Theorie zugrunde legen.

b) In der einfachen Algebra $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D) = (A, J)$, die die positive Involution trägt, die die von D ausdehnt, wählen wir $M_n(\mathcal{O})$ als maximale Ordnung (und diese ist ebenfalls invariant unter $J = \overline{}$). $\square$

Ferner ist natürlich $\mathcal{O}_K = \overline{(\mathcal{O}_K)} \subset \mathcal{O}$, als einzige maximale $\mathbb{Z}$ -Ordnung in K . Mit Hilfe des Theorems 3.3.5 gewinnt man auch das entsprechende Resultat über Lokalisierungen von maximalen Ordnungen, nämlich

3.3.9 Theorem : Sei R ein diskreter Bewertungsring, $A = M_n(D)$ eine einfache K -Algebra über seinem Quotientenkörper und $\mathcal{O}$ eine maximale Ordnung in D . Dann ist $M_n(\mathcal{O})$, bis auf innere Automorphismen, die einzige maximale Ordnung in $M_n(D)$, insbesondere sind maximale Ordnungen in D stets zueinander konjugiert. Ferner ist $\mathcal{O}$ ein Hauptidealring. Genauer sind die zweiseitigen Ideale von $\mathcal{O}$ gerade die Potenzen seines einzigen maximalen (Prim)ideals $\text{rad}(\mathcal{O})$, und auch einseitige Ideale sind Hauptideale. Das Radikal der Kompletterung von $\mathcal{O}$ ist die Kompletterung des Radikals, $\text{rad}(\widehat{\mathcal{O}}) = (\widehat{\text{rad}(\mathcal{O})})$, und $\text{rad}(\widehat{\mathcal{O}}) \cap \mathcal{O} = \text{rad}(\mathcal{O})$. $\square$

Ferner sind dann $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L}$, $K \cdot \mathcal{L} = D^r$, über dieser maximalen Ordnung lokal frei, was heißt daß jede Lokalisierung $\mathcal{L}_P = (\mathcal{O}_K)_P \otimes \mathcal{L}$ (einseitig) $\mathcal{O}_P$ -isomorph zu $\mathcal{O}_P^r$ ist. Schließlich hat man folgende Aussage über Restalgebren.

3.3.10 Theorem : Sei $\mathcal{O}$ eine maximale Ordnung in einem Schiefkörper D über einem diskreten Bewertungsring R mit Quotientenkörper K . Dann ist die Kompletterung $\widehat{D} = \widehat{K} \otimes D$ eine Matrixalgebra $M_s(\widehat{D})$ über einem vollständigen, diskret bewerteten Schiefkörper $\widehat{D}$, und die Kompletterung $\widehat{\mathcal{O}}$ ist isomorph zu $M_s(\Delta)$, mit der einzigen maximalen Ordnung Δ von $\widehat{D}$. Ferner ist

$$\widehat{\text{rad}(\mathcal{O})} \cong \text{rad}(\widehat{\mathcal{O}}) \cong M_s(\text{rad}(\Delta)),$$

und entsprechend gilt für die Restalgebren

$$\mathcal{O}/\text{rad}(\mathcal{O}) \cong \widehat{\mathcal{O}}/\text{rad}(\widehat{\mathcal{O}}) \cong M_s(\Delta/\text{rad}(\Delta)),$$

wobei $\Delta/\text{rad}(\Delta)$ ein endlicher Schiefkörper über $\widehat{R}/\text{rad}(\widehat{R})$, also ein Körper ist. $\square$

Insgesamt geben diese Theoreme Auskunft über die algebraische Struktur der Lokalisierungen und Kompletterungen unserer maximalen Ordnung: $\widehat{\mathcal{O}}_P$ ist eine volle Matrixalgebra über einem (nicht-kommutativen) lokalen Ring, also einem, der ein einziges maximales links-Ideal besitzt, und die zusätzliche Eigenschaft hat, daß einseitige Ideale automatisch zweiseitig sind. $\widehat{\mathcal{O}}_P$ selbst hat zwar mehrere maximale links-Ideale, jedoch ein einziges zweiseitiges maximales Ideal, das Primideal dessen Potenz alle zweiseitigen Ideale in $\widehat{\mathcal{O}}_P$ sind.

1.4 Die symplektische Gruppe einer involutiven Algebra und die verallgemeinerte Modulgruppe

Es werden die symplektische Gruppe und gewisse arithmetische Untergruppen eingeführt, und es wird ihre Wirkung auf die obere Halbebene erklärt. In Verbindung mit den Ergebnissen aus den ersten drei Abschnitten, wird die in 1.5.12 getroffene Wahl gerechtfertigt.

1.4.1 Biholomorphe Selbstabbildungen von positiven Kegeln und Tubengebieten über positiv definiten involutiven Algebren

Sei $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$ eine einfache, endlich-dimensionale Algebra über $\mathbb{Q}$, ausgestattet mit einer positiven Involution, und der Repräsentant der Ähnlichkeitsklasse, sowie der Wedderburn-Isomorphismus der Tensorierung, seien so gewählt, wie im ersten Abschnitt erklärt, insbesondere so, daß sich auf der Matrixseite von $A_{\mathbb{R}} \cong M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$ die Standardinvolution ergibt. Wir führen gewisse spezielle Endomorphismen, genauer biholomorphe Automorphismen, des sogenannten Tubengebietes unserer Algebren ein. Für unsere positiven Involutionen hatten wir einen positiven Kegel definiert, nämlich die Menge aller positiver Elemente; dieser ist additiv abgeschlossen. Mit dessen Hilfe hatten wir das (konvexe) Tubengebiet erklärt. Der topologische Abschluß des positiven Kegels besteht genau aus den (total) semi-positiven Matrizen,

$$\overline{(\mathcal{P}(A_{\mathbb{R}}))}_{A_{\mathbb{R}}} = \{S = \overline{S'} = S^{(n)} \in M_n(D_{\mathbb{R}}) ; S \succeq 0\}.$$

Wir erinnern an

4.1.1 Bemerkung : Das Tubengebiet ist isomorph zu der verallgemeinerten oberen Halbebene, also

$$\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}) \cong \mathbb{H}_n^m = \mathbf{H}_{ns}^m(\mathbb{R}), \quad \mathbf{H}_{ns}^{m/2}(\mathbb{C}) \text{ oder } \mathbf{H}_n^m(\mathbb{H}),$$

wobei s der Schurindex von D , also $s = 1$ oder 2 im reellen Fall, und m der Körpergrad seines Zentrums K sind. $\square$

Wir benötigen folgende Information über die Beziehung zwischen Tubegebieten zu ähnlichen Involutionen.

4.1.2 Bemerkung : Sind $J \sim \tilde{J}$, $\tilde{J}(X) = MJ(X)M^{-1}$, zwei ähnliche Involutionen auf $A = A_{\mathbb{Q}}$, also $M = \tilde{M}^2 \in \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J)^2 \cap \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, \tilde{J})^2$, so liefert

$$\tau(Z) := ZM^{-1} \text{ einen Isomorphismus } \mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}, J) \cong \mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}, \tilde{J}).$$

Beweis : Im ersten Abschnitt (1.2.4) wurde bemerkt, daß durch τ Elemente, die unter J invariant sind, auf solche abgebildet werden, die unter $\tilde{J}$ invariant sind. Ist nun X positiv, so gilt $X = \tilde{X}^2$, $\tilde{X} \in \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}}, J)$, und es ist

$$\tau(X) = XM^{-1} = (\tilde{X}\tilde{M}^{-1})(\tilde{M}\tilde{X}M^{-1}).$$

Da $\tilde{J}(\tilde{X}\tilde{M}^{-1}) = M(\tilde{M}^{-1}\tilde{X})M^{-1} = \tilde{M}\tilde{X}M^{-1}$ gilt, ist auch $\tau(X)$ positiv (bezüglich $\tilde{J}$). $\square$

Da $\overline{(Z + H)}' = \overline{((X + H) + iY)}' = (X + \overline{H'}) + iY$ ist, für Elemente $Z = X + iY$ des Tubengebietes, liefert jede Translation um ein Element $H \in \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}})$ eine biholomorphe Selbstabbildung $Z \mapsto Z + H$ von $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}})$. Genauso ist $Z[U] = \overline{U}'(X + iY)U = X[U] + iY[U]$, also ist, für invertierbares $U \in \text{Gl}(A_{\mathbb{R}}) = A_{\mathbb{R}}^{\times}$, wegen $Y[U] \succ 0$, auch $Z \mapsto Z[U]$ eine solche. Schließlich

4.1.3 Bemerkung : Die Abbildung $Z \mapsto -Z^{-1}$ (die „Involution“) ist eine biholomorphe Selbstabbildung von $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}})$.

Beweis : Z ist natürlich als $(A \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})$ -Element invertierbar. Mit dem Homomorphismus

$$\widehat{Z} = X - iY \quad \text{gilt} \quad 2iY = Z - \widehat{Z} = (\widehat{Z}\widehat{Z}^{-1})Z - \widehat{Z}(Z^{-1}Z) = \widehat{Z}(\widehat{Z}^{-1} - Z^{-1})Z.$$

Man bezeichne Y mit $\text{IM}(Z) = \text{IM}(X + iY)$ und erhalte $\text{IM}(-Z^{-1}) = \widehat{Z}^{-1}Y Z^{-1}$. Es ist nach Definition

$$Y = \widehat{Y} \quad \text{und} \quad \text{IM}(-Z^{-1}) = (\text{IM}(\widehat{-Z^{-1}})),$$

also, wegen der linearen Ausdehnung der Involution,

$$\text{IM}(-Z^{-1}) = Y[[Z^{-1}]] := \widehat{Z}^{-1}Y Z^{-1} = Z^{-1}Y \widehat{Z}^{-1}, \quad \text{und} \quad \overline{Y[[Z^{-1}]]}' = \overline{Z'}^{-1} \overline{Y'} \overline{\widehat{Z}^{-1}'} = Z^{-1}Y \widehat{Z}^{-1}.$$

Dieselbe Gleichung zeigt, daß mit $Y \succ 0$ auch $Y[[Z^{-1}]] \succ 0$ gilt, denn man erhält die gewöhnliche Matrixinvolution auf (den einfachen Komponenten von) $A_{\mathbb{C}}$ mittels $Z \mapsto \widehat{Z}'$, und es gilt $\overline{(Z^{-1})}' = Z^{-1}$, sowie $Z = \overline{Z}'$, also $Y[[Z^{-1}]] = (\widehat{Z}')^{-1}Y Z^{-1} \cong_{\iota(Y)} [Z^{-1}]$ in der Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$. $\square$

1.4.2 Die symplektische Gruppe als Untergruppe der biholomorphen Endomorphismen des Tubengebiets, die Modulgruppe als Wirkungsgruppe

Nun können wir die symplektische Gruppe definieren. Wie immer ist $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$. Dabei ist E die Einheit (smatrix), also, je nach der Situation, $E = 1_A$ (in der Algebra $A = A_{\mathbb{Q}}$), also $E^{(n)} \in M_n(D)$ (im auftretenden Fall einer einfachen Algebra), $(E^{(ns)})^m$ (im reellen eingebetteten Fall), usw.

4.2.1 Definition : Sei $A = (A, J)$ eine involutive Algebra. Man nennt

$$\text{Sp}(A) = \text{Sp}(A, J) := \{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(A) ; I[M] = J(M)IM = I\}$$

die symplektische Gruppe von A (zur Involution J), wobei J stets kanonisch auf $M_2(A)$ ausgedehnt wird. $\square$

Um die getroffene Wahl eines Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse unserer einfachen rationalen Algebra $A = A_{\mathbb{Q}}$ zu rechtfertigen, brauchen wir

4.2.2 Lemma : Sei $A = A_{\mathbb{Q}}$ eine rationale Algebra, und J sowie $\tilde{J}$ seien zwei ähnliche Involutionen auf A , also $\tilde{J}(X) = MJ(X)M^{-1}$, mit $M = J(M) = \tilde{J}(M) \in A^{\times}$. Dann sind die entsprechenden symplektischen Gruppen isomorph, $\text{Sp}(A, J) \cong \text{Sp}(A, \tilde{J})$. Der Isomorphismus ist durch

$$\tilde{\tau}(X) := \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$$

gegeben.

Beweis : Es gelte $J(X)IX = I$, für $X \in M_2(A)$, und es sei $\tilde{X} := \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{X})I\tilde{X} &= (M \cdot E^{(2)}) \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & J(M)^{-1} \end{pmatrix} J(X) \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & J(M) \end{pmatrix} (M^{-1} \cdot E^{(2)}) \begin{pmatrix} 0 & 1_A \\ -1_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1_A \end{pmatrix} J(X) \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 1_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & M \\ -1_A & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1_A \end{pmatrix} J(X) \begin{pmatrix} 0 & 1_A \\ -1_A & 0 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & 1_A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1_A \\ -1_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M \\ -1_A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1_A \\ -1_A & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Es ist also $\tilde{X}$ symplektisch bezüglich $\tilde{J}$. $\square$

Dieses Lemma wird es uns, in Verbindung mit der Isomorphie der zugehörigen Tubengebiete, für ähnliche Involutionen, $J \sim \tilde{J}$, ermöglichen auf der einfachen rationalen Algebra $A = A_{\mathbb{Q}}$, stets den gewählten Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse der Algebra, also $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$, mit der Standardinvolution $J = \overline{}$, zu betrachten, ohne die Isomorphieklasse des Kongruenzgruppen-Gebildes zu beeinflussen. Wir schreiben die symplektische Gruppe auch als

$$\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{Q}}) = \mathrm{Sp}(n, D) := \{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(D) ; I[M] = J(M)IM = \overline{M}'IM = I\},$$

und fassen diese als Teil von $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ auf (, also

$$\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{Q}}) \subset \mathrm{Sp}(ns, \mathbb{R})^m, \quad \mathrm{Sp}(ns, \mathbb{C})^{m/2} \quad \text{oder} \quad \mathrm{Sp}(n, \mathbb{H})^m,$$

mit $s = 1$ oder 2 im reellen Fall, für unsere Algebren).

4.2.3 Bemerkung : Sei $A_{\mathbb{K}}$ eine involutive Algebra (, also bei uns entweder die einfache rationale Algebra $A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$, oder ihre Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$). Dann gelten

a) $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{K}})$ ist eine Gruppe für deren Elemente $M^{-1} = \begin{pmatrix} \overline{D}' & -\overline{B}' \\ -\overline{C}' & \overline{A}' \end{pmatrix}$ gilt. Mit M ist auch $\overline{M}'$ symplektisch.

b) Für symplektische Matrizen gelten die sogenannten symplektischen Relationen

$$\overline{A}'C = \overline{C}'A, \quad \overline{B}'D = \overline{D}'B, \quad \overline{A}'D - \overline{C}'B = E$$

(und auch $A\overline{B}' = B\overline{A}', C\overline{D}' = D\overline{C}', A\overline{D}' - B\overline{C}' = E$). Umgekehrt sind Matrizen, die diesen Relationen genügen, symplektisch.

c) Die Matrizen $\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $J(H) = \overline{H}' = H$, $\begin{pmatrix} \overline{U}' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, $U \in A_{\mathbb{K}}^{\times}$, und $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ sind symplektisch. $\square$

Die symplektische Gruppe(n) lassen wir, wie üblich, auf das Tubengebiet wirken.

4.2.4 Definition und Bemerkung : a) Die Festlegung

$$M\langle Z \rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1}, \quad M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

definiert eine Wirkung von $\mathrm{Sp}(n, D_{\mathbb{R}})$ auf dem Tubengebiet $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}})$. (Insbesondere ist $(CZ + D)$ stets invertierbar.)

b) Obige Exemplare symplektischer Matrizen wirken respektive gemäß

$$Z \mapsto Z + H, \quad Z \mapsto Z[U] \quad \text{und} \quad Z \mapsto -Z^{-1},$$

und erzeugen $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{K}})$, und zwar sowohl auf rationaler ($A_{\mathbb{K}} = A_{\mathbb{Q}}$), wie auch auf reeller ($A_{\mathbb{K}} = A_{\mathbb{R}}$) Ebene. $\square$

Außerdem gilt

4.2.5 Lemma : Der Isomorphismus der symplektischen Gruppen zu ähnlichen Involutionen $J \sim \tilde{J}$ auf A , $\tilde{\tau} : \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}, J) \rightarrow \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}, \tilde{J})$, ist mit dem entsprechenden Isomorphismus $\tau : \mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}, J) \rightarrow \mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}, \tilde{J})$, $\tau(Z) = ZM^{-1}$, verträglich, im Sinne von

$$\tau(X\langle Z \rangle) = \tilde{\tau}(X)\langle \tau(Z) \rangle,$$

für $Z \in \mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}, J)$.

Beweis : Mit $X = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ gilt $\tilde{\tau}(X)\langle \tau(Z) \rangle = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix} \langle ZM^{-1} \rangle =$

$$= \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \left\langle \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \langle Z \cdot M^{-1}M \rangle \right\rangle = \begin{pmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \langle (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \rangle = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \cdot M^{-1},$$

also die Behauptung. $\square$

In der Theorie der singulären Modulformen treten noch folgende symplektische Matrize (, außer den Elementen von $\mathrm{Sp}(n, D)$ selbst,) auf.

4.2.6 Definition : Man nennt, wie üblich, ein $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ projektiv rational, falls ein Vektor $t = (t_1, \dots, t_{m'}) \in \mathcal{Z}(\mathbb{K})^{m'}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, bestehend aus Elementen aus dem Zentrum des zugrunde liegenden Schiefkörpers, existiert, so daß

$$\widetilde{M} = t \cdot M = (t_1 M^{(1)}, \dots, t_{m'} M^{(m')}) \in M_{2n}(D) \subset M_{2n}(D_{\mathbb{R}})$$

gilt. (Dabei ist, wie immer, m' der (halbe) Körpergrad des Zentrums K von D .) $\square$

Eigentlich sollte man aus der (bzw. den) symplektischen Gruppe(n) noch die Untergruppe herausdividieren, die trivial wirkt, also alle $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ die jedes Z in sich überführen.

4.2.7 Bemerkung : Die trivial wirkenden $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{K}})$, $A_{\mathbb{K}} = A_{\mathbb{Q}}$ oder $A_{\mathbb{R}}$, bilden eine Untergruppe des Zentrums von $M_2(A_{\mathbb{K}})$.

Beweis : Aus $AZ + B = Z(CZ + D)$, für alle Z , folgt $B = C = 0$ und dann, mit Hilfe der symplektischen Relationen, wie im rationalen Fall, $M = \begin{pmatrix} \overline{U}' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, mit $U \in \mathcal{Z}(A_{\mathbb{K}})$ und

$$\frac{1}{i} \cdot M \langle i \cdot 1_A \rangle = J(U) 1_A U = \overline{U}' U = 1_{A_{\mathbb{K}}},$$

also ist M ein (trivialer) Kegelautomorphismus. Da $\mathcal{Z}(A_{\mathbb{K}}) = K \cdot E^{(n)}$ für die einfache Algebra $A_{\mathbb{K}} = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$ ist, und die Bedingungen an die Involution es uns erlauben, diese als Teil von $A_{\mathbb{R}}$ zu betrachten, sind dies lediglich $\pm \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$ in dem reellen und quaternären Fall (, sowohl für $A_{\mathbb{Q}}$ selbst, wie auch für die Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$), sowie

$$\begin{pmatrix} \zeta \cdot E & 0 \\ 0 & \zeta \cdot E \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} \zeta_1 \cdot E^{(ns)} & 0 \\ 0 & \zeta_1 \cdot E^{(ns)} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \zeta_{m/2} \cdot E^{(ns)} & 0 \\ 0 & \zeta_{m/2} \cdot E^{(ns)} \end{pmatrix} \right), \quad |\zeta_i| = 1,$$

für $A_{\mathbb{R}}$ im komplexen. In letzterem Fall liegt eine endliche Untergruppe von diesen Matrizen in $M_2(A_{\mathbb{Q}})$, und dann sogar in $\mathcal{O}_K \cdot E^{(2n)}$. $\square$

Nun definieren wir, wie üblich, die Modulgruppe und Kongruenzgruppen.

4.2.8 Definition : a) Man nennt

$$\Gamma_{A_{\mathbb{Q}}} = \Gamma_{n, \mathcal{O}} = \Gamma_n = \mathrm{Sp}(n, \mathcal{O}) := \{M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathcal{O}) ; I[M] = I\}$$

die Modulgruppe vom Grad n , über der einfachen Algebra $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$ und zur Ordnung $\mathcal{O}$.

b) Man nennt ferner

$$\Gamma_n[q] := \ker\{\varphi : \Gamma_n \longrightarrow \mathrm{Sp}(n, \mathcal{O}/q\mathcal{O})\} = \{M \in \Gamma_n ; M \equiv E^{(2n)} \pmod{q}\}$$

die Hauptkongruenzgruppe der Stufe q . Jede solche ist ein Normalteiler in Γ_n .

c) Schließlich nennt man eine Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$, die eine Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_n[q]$ als Untergruppe von endlichem Index enthält, Kongruenzgruppe. $\square$

Die Modulgruppe ist natürlich eng mit der Menge der ganzen Matrizen verbunden.

4.2.9 Bemerkung : a) Es gilt $\Gamma_n = \Gamma_n[1]$. Die Modulgruppe enthält die Translationen mit $H = \overline{H}' \in M_n(\mathcal{O})$, die Kegelautomorphismen mit $U \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O})$ und die Involution. Die zwei ersten Typen führen ganze Matrizen in solche über (, wobei natürlich die Eigenschaft $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$ notwendig ist).

b) Eine Translation, gegeben durch eine Matrix $H \in \mathcal{S}(n, D)$, die das Gitter invariant läßt, muß schon in $\mathcal{S}(n, \mathcal{O})$ liegen.

c) Die speziellen Translationen und Kegelautomorphismen mit $H \equiv 0$, $U \equiv E \pmod{q}$, liegen in $\Gamma_n[q]$ und lassen sogar die Menge $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}}) \cap (M_n(q\mathcal{O}) + iM_n(q\mathcal{O}))$ invariant. $\square$

Außerdem brauchen wir die

4.2.10 Definition : Man nennt, für eine Kongruenzgruppe Γ und eine symplektische Matrix $N \in \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$, $\Gamma^N := N^{-1}\Gamma N$ die konjugierte Gruppe. $\square$

4.2.11 Bemerkung : Für projektiv rationales N und eine Kongruenzgruppe Γ ist die konjugierte Gruppe Γ^N ebenfalls eine Kongruenzgruppe. $\square$

Ferner zeigt ein triviales Bewertungsargument, daß die Wahl der (maximalen) Ordnung in $A = M_n(D)$ zwar i.a. nicht dieselben Hauptkongruenzgruppen liefert, das gesamte Gebilde von Kongruenzgruppen jedoch davon unbeeinflußt bleibt. Wir dürfen also wegen dieser Komensurabilitätseigenschaft nicht nur $M_n(\mathcal{O})$ als (maximale) Ordnung in A wählen, sondern auch über $\mathcal{O} \subset D$ selbst verfügen, ohne die Theorie der Modulformen zu beeinflussen. Von dieser Möglichkeit haben wir schon im letzten Abschnitt Gebrauch gemacht, und somit z.B. $\mathcal{O} = J(\mathcal{O}) = \bar{\mathcal{O}}$ als maximal (und unter der Involution invariant) gewählt. Schließlich gilt

4.2.12 Lemma : Seien $J \sim \tilde{J}$ zwei ähnliche positive Involutionen auf der einfachen rationalen Algebra A , und $\mathcal{O} = J(\mathcal{O})$ sowie $\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{J}(\tilde{\mathcal{O}})$ zwei (maximale) Ordnungen in A , die unter den entsprechenden Involutionen invariant sind. Der Isomorphismus $\tilde{\tau}$ induziert dann eine Bijektion zwischen den Kongruenzgruppen in $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}, J)$ bezüglich $\mathcal{O}$ und denen in $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}, \tilde{J})$ bezüglich $\tilde{\mathcal{O}}$. $\square$

Aus den Sätzen, Lemmata und Bemerkungen 1.5.2, 1.5.13, 2.1.3, 2.3.3, 4.2.2, 4.2.5 und 4.2.12, sowie der Festlegung 3.3.8, erhalten wir zusammenfassend

4.2.13 Satz : Sei A eine positiv definite, endlich-dimensionale, rationale Algebra. Dann existiert genau eine Ähnlichkeitsklasse positiver Involutionen auf A . Diese entspricht, nach geeigneter Wahl des Wedderburn-Isomorphismus, der Ähnlichkeitsklasse der Standardinvolution $\text{---}'$ auf der Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$; letzere ist, nach der erwähnten Wahl, eine halb-einfache reelle Matrixalgebra der Form $M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Total positive Elemente sind (genau die) Tupel gewöhnlicher positiver Matrizen, das Tubengebiet ist ein Produkt von verallgemeinerten oberen Halbebenen. Es existiert stets eine, unter der Involution J invariante, maximale Ordnung $\mathcal{O}$ in A . Das Gebilde der Kongruenzgruppen ist von der Wahl von $\mathcal{O}$, sowie von der Wahl des Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse der Involution, unabhängig. Ferner ist die Wirkung der symplektischen Gruppe mit dieser Wahl verträglich. $\square$

Dieser Satz berechtigt uns vollkommen, die Standardinvolution auf einer Matrixalgebra $A = M_n(D)$, sowie eine feste (beliebige) maximale Ordnung $\mathcal{O} = J(\mathcal{O})$ unserer Theorie von Modulformen zugrunde zu legen.

1.5 Normen, Spuren und innere Matrixprodukte in involutiven Algebren

Nun werden die, zur Handhabung von Thetareihen notwendigen, Rechenoperationen von Matrizen auf positiv definite, involutive, rationale Algebren verallgemeinert.

1.5.1 Das skalare Produkt und die Spurfunktion auf einfachen, positiv definiten, involutiven, rationalen Algebren und deren Tensorierung

Hier soll die Spur $\sigma(M)$ für Elemente M einer rationalen Algebra $A_{\mathbb{Q}}$ vom untersuchten Typ, $M \in A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$, als abstrakte reduzierte Spurfunktion erklärt werden, und ihr Zusammenhang mit der gewöhnlichen Matrixspur erläutert werden.

5.1.1 Definition : Seien $A = M_n(D)$ eine endlich-dimensionale (reelle oder rationale) Matrixalgebra und L/K , $K = \mathcal{Z}(D) \cong \mathcal{Z}(A)$, ein Zerfällungskörper des Schiefkörpers D , also $D \otimes_K L = M_s(L)$. Setze, für $M \in A$,

$$\mathrm{tr}_{A/K}(M) := \mathrm{tr}_{M_{ns}(L)/K}(M \otimes 1_L),$$

wobei „ $\mathrm{tr}_{M_{ns}(L)/K}$ “ die gewöhnliche Matrixspur auf $M_{ns}(L)$ bedeute, und nenne dies die reduzierte Spur von M . $\square$

Aus [Re], Abschnitt 9a, insbesondere Theorem (9.3), Formel (9.7) und Theorem (9.8), folgt

5.1.2 Lemma : a) $\mathrm{tr}_{A/K}$ ist eine additive K -lineare Abbildung $A \rightarrow K$, und von der Wahl des Zerfällungskörpers L unabhängig.

b) Die abstrakte Algebraspur Tr aus dem ersten Abschnitt ist ein Vielfaches der reduzierten Spur.

c) Die Abbildung $A \times A \rightarrow K$, $(M, N) \mapsto \mathrm{tr}_{A/K}(MN)$ ist symmetrisch und K -bilinear. $\square$

Die reduzierte Spur unserer involutiver Algebren ist (wegen b) positiv, im natürlichen Sinne von $\mathrm{tr}_{A/K}(MJ(M)) \geq 0$, für alle $M \in A$. Für halb-einfache, nicht notwendigerweise zentrale Algebren vereinbart man (siehe [Re] (9.22)) folgendes.

5.1.3 Definition : Sei $A = \prod A_i = \prod M_{n_i}(D_i)$, $\mathcal{Z}(D_i) = K_i$ eine K -Algebra. Dann nennt man

$$\mathrm{tr}_{A/K} := \sum \mathrm{tr}_{K_i/K} \circ \mathrm{tr}_{A_i/K_i}$$

die reduzierte Spur von A . $\square$

Das umfaßt insbesondere einfache rationale Algebren A , dessen Zentrum ein algebraischer Zahlkörper ist. Die reduzierte Spur ist mit Konstantenerweiterung verträglich (siehe [Re] (9.27)), im Sinne von

5.1.4 Lemma : Für eine beliebige Körpererweiterung L/K des Zentrums $K = \mathcal{Z}(D)$ der Matrixalgebra $A = M_n(D)$, und für $A_L := A \otimes_K L$, kommutieren $\mathrm{tr}_{A/K}$ und $\mathrm{tr}_{A_L/L}$ mit den Inklusionen $A \subset A_L$ und $K \subset L$. $\square$

Dieses Lemma erlaubt es uns von der rationalen Algebra A in die Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$, sowie in die Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$, überzugehen; $A_{\mathbb{R}}$ ist eine halb-einfache, endlich-dimensionale, aber nicht notwendigerweise zentrale, reelle Algebra. Obige Definition ergibt folgende Spezialfälle.

5.1.5 Bemerkung : a) Sei $A = M_n(\mathbb{R})$. Dann ist $\mathrm{tr}_{A/\mathbb{R}}(M) = \sum m_{ii}$, $M = (m_{ij})_{(i,j)} \in A$, die gewöhnliche Matrixspur.

b) Sei $A = M_n(\mathbb{C})$. Dann ist $\mathrm{tr}_{A/\mathbb{R}}(M) = 2 \cdot \sum \mathrm{Re}(m_{ii})$ der doppelte Realteil der gewöhnlichen Matrixspur.

c) Sei $A = M_n(\mathbb{H})$. Dann ist $\mathrm{tr}_{A/\mathbb{R}}(M) = 2 \cdot \sum m_{ii,1}$ das doppelte der reellen Komponente der gewöhnlichen Matrixspur. $\square$

Dies setzt die reduzierte Spur unserer Algebren $A = M_n(D)$ mit einer gewöhnlichen Matrixspur in Verbindung. Wir führen noch eine (für uns günstige) Normierung ein.

5.1.6 Normierung der reduzierten Spur : a) Sei $A_{\mathbb{R}} = M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, eine halb-einfache, involutive, positive, reelle Algebra. Normiere die reduzierte Spur gemäß

$$\sigma = \sigma_{A_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}} := \frac{s(\mathbb{K})}{\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{K})} \text{tr}_{A_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}} = \frac{1}{s(\mathbb{K}) \cdot \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}(\mathbb{K}))} \text{tr}_{A_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}},$$

wobei $s(\mathbb{K})$ der Schurindex von $\mathbb{K}$ ist, und verstehe unter „Spur“ von $A_{\mathbb{R}}$ ab jetzt diese Funktion.

b) Sei ferner $A = A_{\mathbb{Q}}$ eine einfache, involutive, positive, rationale Algebra, mit $A_{\mathbb{R}} = M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Da obiger Normierungsfaktor rational ist, hat man automatisch auch $\sigma = \sigma_{A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$ definiert. Schließlich benutzt man selbstverständlich dieselbe Reskalierung und Bezeichnung für die reduzierte Spur von $A_{\mathbb{C}}$. $\square$

Wir definieren noch ein Skalarprodukt.

5.1.7 Definition : Sei $A_{\mathbb{R}}$ wie oben. Bilde, für $M, N \in A_{\mathbb{R}}$, das Skalarprodukt

$$\langle M, N \rangle := \frac{1}{2} \cdot \sigma_{A_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}}((MJ(N) + NJ(M))). \quad \square$$

Man beachte, daß man so ein positiv definites Skalarprodukt erhält (, mit reellen Werten). Aus der obigen Untersuchung folgt

5.1.8 Bemerkung : a) Es gilt, für $M = (M^{(1)}, \dots, M^{(m')}) \in A_{\mathbb{R}} = M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$,

$$\sigma(M) = \text{Re}\left(\sum_i \text{tr}(M^{(i)})\right), \quad \text{wobei} \quad \text{tr}(M^{(i)}) = \sum_j m_{jj}^{(i)}$$

die gewöhnliche Matrixspur ist. Die Definition der Spur σ entspricht, im komplexen und quaternionären Fall, gerade der Spur der nach $\mathbb{R}$ eingebetteten Matrizen M , reduziert um den „Aufblähungsfaktor“ der Einbettung.

b) Es ist $\sigma(M) = \overline{\sigma(M)} = \sigma(\overline{M}) \in \mathbb{R}$.

c) Für zwei Elemente $M, N \in A_{\mathbb{R}}$ ist $\sigma(M\overline{N}) = \langle M, N \rangle$ das Skalarprodukt, und für unter der Involution invariante $M \in \mathcal{S}(A_{\mathbb{R}})$ ist $\sigma(M)$, bis auf eine Konstante, die gewöhnliche Matrixspur.

d) Es gilt $\sigma(MN) = \sigma(NM)$, also auch allgemein $\sigma(M_1 \cdot \dots \cdot M_k) = \sigma(M_l \cdot \dots \cdot M_k \cdot M_1 \cdot \dots \cdot M_{l-1})$.

Beweis : Die Aussage b) folgt aus a), denn die Einbettungen von $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ nach $M_2(\mathbb{R})$ und $M_4(\mathbb{R})$ respektive sind mit der Involution verträglich. $\square$

Ferner hat man für das Skalarprodukt das

5.1.9 Lemma : Es gilt, für $M, N \in A_{\mathbb{R}}$,

$$\langle M, N \rangle = \frac{1}{2} \sum_i \text{tr}((MJ(N) + NJ(M))^{(i)}).$$

Dabei ist „tr“ die Standardmatrixspur in einer einfachen Komponente von $A_{\mathbb{R}} = M_{n'}(\mathbb{K}^{m'})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, also die Summe der Diagonalelemente von $MJ(N) + NJ(M)$. $\langle, \rangle$ ist symmetrisch und bilinear, und entspricht dem Standardskalarprodukt im reellen euklidischen Vektorraum $A_{\mathbb{R}}$. $\square$

Das Skalarprodukt hat auch folgende Eigenschaft.

5.1.10 Bemerkung : J ist ein unitärer Operator (auf $A_{\mathbb{Q}}$ bzw. $A_{\mathbb{R}}$ bezüglich des Skalarproduktes).

Beweis : Man hat

$$\langle M, N \rangle = \sigma(MJ(N)) = \overline{\sigma(MJ(N))} = \sigma(NJ(M)) = \sigma(J(M)J(J(N))) = \langle J(M), J(N) \rangle,$$

wegen der Eigenschaften der Spur. $\square$

Die Spur $\sigma = \sigma_{A_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}}$ ist eine $\mathbb{C}$ -lineare Ausdehnung von $\sigma_{A_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}}$ auf $A_{\mathbb{C}}$, es gilt also $\sigma(Z) = \sigma(X) + i\sigma(Y)$, die Imaginärteile von Spuren stammen insbesondere immer von der zusätzlichen

Komplexifizierung. Dabei ergibt sich im reellen Fall die Summe der Standardspuren auf den einfachen Komponenten von $A_{\mathbb{C}} = M_{ns}(\mathbb{C}^m)$, während im quaternären Fall die Hälfte der entsprechenden Summe in $A_{\mathbb{C}} = M_{2n}(\mathbb{C}^m)$ entsteht. Im komplexen Fall schließlich ergibt $\iota(Z) = (W_1, W_2) \cong (Z, \overline{Z})$ wieder die Hälfte der Summe der Spuren der einfachen Komponenten der $W_i \in M_{ns}(\mathbb{C}^{m/2})$. Außerdem haben wir eine Reskalierung der reduzierten Spur von A als Spurfunktion auf $A = A_{\mathbb{Q}}$ definiert. Es gilt insbesondere

5.1.11 Bemerkung : a) Im Körperfall $D = K$ erhält man $\sigma(M) = \sum \text{Re}(\text{tr}(\sigma_i(M)))$, wobei $\sigma_i : K \rightarrow \mathbb{C}$ verschiedene Einbettungen von K durchläuft, und zwar alle im total reellen Fall, aber nur einen Repräsentanten jedes Paares im komplexen Fall. Man erhält also die Standardkörperspur, in letzterem Fall jedoch mit $1/2$ multipliziert (wegen $\sigma_i + \overline{\sigma}_i = 2\text{Re}(\sigma_i)$). (Z.B. ist, für $x \in K = \mathbb{Q}(i)$, $\sigma(x) = \sigma(x_1 + x_2\tilde{i}) = x_1$ und $\sigma(x\overline{x}) = \text{Re}\{(x_1 + x_2\tilde{i})(x_1 - x_2\tilde{i})\} = x_1^2 + x_2^2$.⁴)

b) Auch für beliebige Schiefkörper D erhält man die Zusammensetzung der gewöhnlichen, abstrakten, reduzierten Spurfunktion auf der Algebra $M_n(D) \subset M_{ns}(L)$, L/K ein Zerfällungskörper von D , über dem Zentrum $K = \mathcal{Z}(D)$ mit der Spur von K über $\mathbb{Q}$ (bzw. einem skalaren Vielfachen dieser), $\sigma = c \cdot \text{tr}_{K/\mathbb{Q}} \circ \text{tr}_{M_n(D)/K}$. (Auch hier ist z.B., für $x \in D = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, $\sigma(x) = \sigma(x_1 + x_2\tilde{i} + x_3\tilde{j} + x_4\tilde{k}) = x_1$ und $\sigma(x\overline{x}) = |x|^2$, und allgemeiner, in $D = \begin{pmatrix} a & b \\ \mathbb{Q} & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$, $\sigma(x\overline{x}) = |x|^2 = x_1^2 - ax_2^2 - bx_3^2 + abx_4^2$.) $\square$

Damit bilden wir die inverse Differentiale unserer Ordnung.

5.1.12 Definition : Man definiert, wie üblich, für die ausgewählte Ordnung $\mathcal{O}$ im Schiefkörper D , die inverse Differentiale $\mathcal{O}^*$ als die Menge aller $x \in D$ mit der Eigenschaft $\sigma(xy) \in \mathbb{Z}$, für alle $y \in \mathcal{O}$. Danach setzt man

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_n := \{T = \overline{T}' \in \mathcal{S}(n, D) ; \sigma(TX) \equiv 0 \pmod{2}, \forall X = \overline{X}' \in \mathcal{S}(n, \mathcal{O})\}. \quad \square$$

5.1.13 Bemerkung : Bei der Definition der inversen Differentiale kann man, wegen $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$, anstelle von „ x “ auch „ $\overline{x}$ “ schreiben. Das reziproke Gitter

$$\mathcal{O}^* = \{x \in D ; \sigma(\overline{x}y) \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathcal{O}\}$$

fällt also mit

$$\mathcal{O}^* = \{x \in D ; \sigma(xy) \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathcal{O}\}$$

zusammen. $\square$

Nun wollen wir noch $\mathcal{T}$ beschreiben. Setze dazu

$$\mathcal{O}_{\mathcal{S}} := \mathcal{O} \cap \mathcal{S}(D) = \{x \in \mathcal{O} ; x = \overline{x}\} \subset \mathcal{O}.$$

5.1.14 Lemma : $\mathcal{T}_n$ ist gerade die Menge aller $T \in \mathcal{S}(n, \mathcal{O}^*)$, deren Diagonalelemente sogar in $\mathcal{T}_1 = 2 \cdot \{y = \overline{y} \in D ; \sigma(\overline{y}x) \in \mathbb{Z}, \forall x = \overline{x} \in \mathcal{O}_{\mathcal{S}}\}$ liegen.

Beweis : Jedes $x \in \mathcal{O}$ besitzt eine Zerlegung $x = \frac{x+\overline{x}}{2} + \frac{x-\overline{x}}{2} = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}x''$, mit $x' \in \mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. Da $\sigma(\overline{y}x'') = \overline{\sigma(\overline{y}x'')} = \sigma(\overline{x''}y) = -\sigma(\overline{y}x'')$, falls $y = \overline{y}$, erhält man $\mathcal{T}_1$ wie angegeben. Die Form von $\mathcal{T}_n$ folgt aus der Definition. $\square$

1.5.2 Die Normfunktion auf einfachen, positiv definiten, involutiven, rationalen Algebren und deren Tensorierung als Determinante

Nun müssen die Determinanten der Elemente der zugrunde liegenden, sowie der tensorierten, Algebra, $A = A_{\mathbb{Q}}$ und $A_{\mathbb{R}}$, im reellen, komplexen und quaternären Fall erklärt werden, und mit

⁴Durch die Wahl der Normierung entstehen später, z.B. in der Inversionsformel für Thetareihen, keine zusätzlichen Faktoren.

den abstrakten Normfunktionen in Verbindung gebracht werden. „det“ bedeutet dabei immer die gewöhnliche Determinante einer reellen oder komplexen Matrix. Wir fangen wieder auf der Seite der reduzierten Norm an, und verfahren genauso wie bei der Spur (siehe wieder [Re]).

5.2.1 Definition : Seien $(A, J) = A = M_n(D)$ eine endlich-dimensionale (reelle oder rationale) Matrixalgebra und L/K , $K = \mathcal{Z}(D) \cong \mathcal{Z}(A)$, ein Zerfällungskörper des Schiefkörpers D , also $D \otimes_K L = M_s(L)$. Setze, für $M \in A$,

$$N_{A/K}(M) := N_{M_{ns}(L)/K}(M \otimes 1_L),$$

wobei „ $N_{M_{ns}(L)/K}$ “ die gewöhnliche Matrixdeterminante auf $M_{ns}(L)$ bedeute, und nenne dies die reduzierte Norm von M . $\square$

Nun folgt

5.2.2 Lemma : $N_{A/K}$ ist eine (multiplikative) K -Determinantenform $A \rightarrow K$, und von der Wahl des Zerfällungskörpers L unabhängig. $\square$

Für halb-einfache, nicht notwendigerweise zentrale Algebren vereinbart man entsprechend

5.2.3 Definition : Sei $A = \prod A_i = \prod M_{n_i}(D_i)$, $\mathcal{Z}(D_i) = K_i$, eine K -Algebra. Dann nennt man

$$N_{A/K} := \prod N_{K_i/K} \circ N_{A_i/K_i}$$

die reduzierte Norm von A . $\square$

Das umfaßt wieder unsere einfachen rationalen Algebren A . Auch die reduzierte Norm ist mit Konstantenerweiterung verträglich.

5.2.4 Lemma : Für eine beliebige Körpererweiterung L/K des Zentrums $K = \mathcal{Z}(D)$ der Matrixalgebra $A = M_n(D)$, und für $A_L := A \otimes_K L$, kommutieren $N_{A/K}$ und $N_{A_L/L}$ mit den Inklusionen $A \subset A_L$ und $K \subset L$. $\square$

Dieses Lemma erlaubt es uns erneut von der rationalen Algebra A in die Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$ überzugehen. Obige Definition ergibt nun folgende Spezialfälle.

5.2.5 Bemerkung : a) Sei $A = M_n(\mathbb{R})$. Dann ist $N_{A/\mathbb{R}}(M) = \det(M)$ die gewöhnliche Determinante.

b) Sei $A = M_n(\mathbb{C})$. Dann ist $N_{A/\mathbb{R}}(M) = |\det(M)|^2$ das Betragsquadrat der gewöhnlichen Determinante.

c) Sei $A = M_n(\mathbb{H})$. Dann ist $N_{A/\mathbb{R}}(M) = \det(\iota(M))$ die gewöhnliche Determinante der komplexen Einbettung von M , insbesondere ist letztere stets reell. $\square$

Dies setzt auch die reduzierte Norm unserer Algebren $A = M_n(D)$ mit einer gewöhnlichen Determinante in Verbindung. Im Gegensatz zur Spurfunktion, skalieren wir die reduzierte Norm nicht um.

5.2.6 Notation : a) Sei $A_{\mathbb{R}} = M_{n'}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, eine halb-einfache reelle Algebra, und $A_{\mathbb{C}}$ ihre Komplexifizierung. Setze

$$\text{Det} := N_{A_{\mathbb{C}}/\mathbb{C}} : A_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Damit erhält man automatisch $\text{Det}|_{A_{\mathbb{R}}} = N_{A_{\mathbb{R}}/\mathbb{R}} : A_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$. Ist ferner $A = A_{\mathbb{Q}}$ eine positiv definite, einfache, rationale Algebra, so ist ihre $\mathbb{R}$ -Tensorierung von obiger Form, und die entsprechende Einschränkung von Det auf A ist gerade $N_{A_{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}}$. Diese Funktion werden wir gelegentlich als Determinante bezeichnen.

b) Ferner bezeichnen wir $N_{A/K}$, für $A = A_{\mathbb{Q}}$ und $K = \mathcal{Z}(A)$, mit $\det$. $\square$

Damit gilt

5.2.7 Bemerkung : a) Mit dieser Definition erhält man eine reellwertige „Determinante“ auf $A_{\mathbb{R}}$, die $\text{Det}(M) = \text{Det}(\overline{M}')$ erfüllt. Im komplexen Fall kann man $\text{Det}(M) = \det(M) \det(\overline{M}')$ schreiben.

b) Man rechnet nach, daß man so im komplexen Fall gerade die Determinante des Bildes unter der reellen Einbettung erhält, im quaternären dagegen die Wurzel daraus, zumindestens für

positive Matrizen. Dies hat zum Vorteil, daß, für unitär diagonalisierbare, also z.B. hermitesche, Matrizen M ,

$$\text{Det}(M)^s = |\det(\phi(M))|,$$

$s = s(\mathbb{K})$ der Schurindex des (Schief)körpers $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, und $\phi_{\mathbb{K}} = \phi$ die reelle Einbettung, gilt. $\square$

Genauso kann man untersuchen, welche Determinante man auf der Komplexifizierung der Matrixalgebren $M_n(\mathbb{K}) \otimes \mathbb{C}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, und damit auf $A_{\mathbb{C}}$, erhält. Im reellen Fall erhält man $\text{Det}(M) = \det(M)$, $M \in M_n(\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C} = M_n(\mathbb{C})$, also die gewöhnliche Determinante auf $M_n(\mathbb{C})$. Im quaternionären Fall ist nun

$$\iota(\overline{M}') = \iota(\overline{(M_x + iM_y)'}) = \begin{pmatrix} M'_{x,1} - M'_{x,2}\tilde{i} + i(M'_{y,1} - M'_{y,2}\tilde{i}) & -(M'_{x,3} + M'_{x,4}\tilde{i}) - i(M'_{y,3} + M'_{y,4}\tilde{i}) \\ M'_{x,3} - M'_{x,4}\tilde{i} + i(M'_{y,3} - M'_{y,4}\tilde{i}) & M'_{x,1} + M'_{x,2}\tilde{i} + i(M'_{y,1} + M'_{y,2}\tilde{i}) \end{pmatrix},$$

wenn man $i = \tilde{i}$ setzt, nicht mehr gleich $\overline{\iota(M)'}^{'}$, geht jedoch durch Konjugation mit $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ aus

$$\iota(M)' = \begin{pmatrix} M'_{x,1} + M'_{x,2}\tilde{i} + i(M'_{y,1} + M'_{y,2}\tilde{i}) & -M'_{x,3} + M'_{x,4}\tilde{i} - i(M'_{y,3} - M'_{y,4}\tilde{i}) \\ M'_{x,3} + M'_{x,4}\tilde{i} + i(M'_{y,3} + M'_{y,4}\tilde{i}) & M'_{x,1} - M'_{x,2}\tilde{i} + i(M'_{y,1} - M'_{y,2}\tilde{i}) \end{pmatrix}$$

hervor, also ergibt sich eine komplexe Zahl $\text{Det}(M) = \det(\iota(M))$, und es gilt weiterhin $\text{Det}(\overline{M}') = \text{Det}(M)$.

Im komplexen Fall schließlich ergibt $\iota : \mathbb{C} \otimes \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ wieder die gewünschte Verbindung zu gewöhnlichen Determinanten. In M und $\overline{M}$ setzt man $i = \tilde{i}$ (im Sinne der Abbildung ι), und erhält $\text{Det}(M) = \det(\widetilde{M}) \det(\widetilde{\overline{M}})$, $\iota(M) = (\widetilde{M}, \widetilde{\overline{M}})$, mit den so entstehenden Elementen aus $M_n(\mathbb{C})$. Auch hier ist $\widetilde{\overline{M}}$ nicht mehr das komplex konjugierte von $\widetilde{M}$, aber $\iota(\overline{M}) = (\widetilde{\overline{M}}, \widetilde{M})$. Die „Determinante“ wurde damit in allen drei Fällen mit üblichen Begriffen in Verbindung gebracht; die „Komplexwertigkeit“ der Determinante stammt nur von der zusätzlichen Komplexifizierung, und zwar so, daß stets $\text{Det}(M') = \text{Det}(\overline{M}) = \text{Det}(M)$ gilt. Man erhält somit

5.2.8 Lemma : *Die Determinantenfunktion ist eine holomorphe Funktion auf der oberen Halbebene $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}})$, die eine eindeutige (holomorphe) Wurzelfunktion*

$$\sqrt{\text{Det}(Z)} = \text{Det}(X + iY)^{1/2}$$

besitzt, und so, daß $\text{Det}(Z/i)^{1/2}$, für $Z = iY$, das Produkt der gewöhnlichen Wurzeln der Determinanten der einfachen Komponenten von $\mathcal{T}(A_{\mathbb{R}})$ ist.⁵ $\square$

Sei wie immer $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$.

5.2.9 Bemerkung : a) Im Körperfall $D = K$ entspricht die erklärte Determinante der ausgezeichneten (reduzierten) Körperrnorm, $N_{K/\mathbb{Q}}(x) = \prod \sigma_i(x)$, ausgedehnt auf Matrizen.

b) Man hat insgesamt eine Determinante auf einfachen, involutiven, positiv definiten Algebren $A = (A_{\mathbb{Q}}, J)$ über den rationalen Zahlen erklärt, die eine Zusammensetzung der (reduzierten) Normen $N_{M_n(D)/K}$ (gebildet mit Hilfe eines Zerfällungskörpers L) und $N_{K/\mathbb{Q}}$ ist. $\square$

Damit definiert man die uns interessierenden Gruppen.

5.2.10 Definition : Wie üblich bildet man die spezielle(n) lineare(n) Gruppe(n) als die Menge aller Elemente deren reduzierte Norm 1 ist, also

$$\text{Sl}(n, D) := \{M \in M_n(D) ; \det(M) = \det(\iota(M)) = 1\} \quad \text{und}$$

$$\text{Sl}(n, \mathcal{O}) := \{M \in M_n(\mathcal{O}) ; \det(M) = \det(\iota(M)) = 1\}. \quad \square$$

⁵Man beachte, daß man dabei, im komplexen Fall, auch „reelle“ Elemente $Y \in A_{\mathbb{R}}$, als komplexifiziert auffaßt, $\iota(Y) \in A_{\mathbb{C}}$.

Die spezielle lineare Gruppe hat die sogenannte Eigenschaft der starken Approximation (siehe z.B. [Knes]). Bildet man entsprechend $\mathrm{Sl}(n, \mathcal{O}_P)$ und $\mathrm{Sl}(n, \widehat{\mathcal{O}}_P)$ über den Lokalisierungen und Kompletterungen von $\mathcal{O}$, so gilt

5.2.11 Strarker Approximationssatz : *Sei $\mathbf{S}$ eine endliche Menge von Primstellen in $K = \mathcal{Z}(D)$, und zu jedem $P \in \mathbf{S}$ seien $U_P \in \mathrm{Sl}(n, \widehat{\mathcal{O}}_P)$ und eine natürliche Zahl m_P gegeben. Dann existiert ein $U \in \mathrm{Sl}(n, D)$, so daß*

$$U \equiv U_P \pmod{P^{m_P}}, \text{ für alle } P \in \mathbf{S}, \text{ und } U \in \mathrm{Sl}(n, \mathcal{O}_P) \text{ sonst,}$$

gilt. $\square$

1.5.3 Eigenschaften der Determinante und der Spur von (total) positiven, unter der Involution invarianten, Matrizen

Mit den getroffenen Definitionen und Festlegungen lassen sich die für die Entwicklung der Theorie unentbehrlichen Eigenschaften total positiver Matrizen aus dem rationalen Fall übertragen. Neben $A = (A_{\mathbb{Q}}, J) = (M_n(D), J)$ selbst, betrachten wir nun auch Matrixalgebren $M_r(D)$, r beliebig, über D , natürlich stets ausgerüstet mit der Matrixausdehnung der positiven Involution J auf D . Die Einbettung $\phi : D \rightarrow D_{\mathbb{R}}$ liefert selbstverständlich auch für jede solche Matrixalgebra eine Einbettung nach $M_r(D_{\mathbb{R}})$, die die Standardinvolution ergibt.

5.3.1 Lemma : a) *Sei $S \in M_r(D)$.*

$$\text{Aus } S = \overline{S}' = S^{(r)} > 0 \text{ folgt } s_{jj} > 0, \quad j = 1, \dots, r,$$

im Sinne von $s_{jj} \succ 0$, und genauso für „ $\succeq$ “ (also „ $\succeq$ “). Die Bilder der Diagonalelemente, aufgefaßt als Matrizen aus $D_{\mathbb{R}}$, sind also total positive Matrizen.

b) *Seien $S, T \in M_r(D)$. Aus $S, T > 0$ folgt $\sigma(ST) > 0$, entsprechend für „ $\succeq$ “.*

c) *Seien $S = S^{(r)} > 0$ und $T = \overline{T}' = T^{(r)}$. Dann existiert $B \in M_r(D_{\mathbb{R}})$, so daß $S[B] = D_S$ und $T[B] = D_T$ beide diagonal sind.*

Beweis : a) Die Diagonalelemente von S entsprechen m' -Tupeln von $(s \times s)$ -Blöcken im Bild $\phi(S) = (S^{(1)}, \dots, S^{(m')})$, jedes $S^{(i)}$ ist eine gewöhnliche positive Matrix, woraus die Behauptung folgt. Da $S = \overline{S}'$ gilt, und im komplexen Fall mit S auch $\overline{S} = S'$ positiv ist, kann man außerdem stets noch das ganze in der Komplexifizierung $A_{\mathbb{C}}$ lesen.

b) Die Spur ist ja die Summe über die Spuren der Komponenten der Einbettungen, $\sigma(ST) = \sum_i \sigma(S^{(i)} T^{(i)})$, nach dem entsprechenden wohlbekannten Hilfssatz aus dem rationalen Fall ist jeder der Summanden positiv.

c) Es wird für den Beweis nur die Existenz einer positiven Wurzel von S (bzw. jedem der $S^{(i)}$) benötigt. Diese wurde gezeigt. Alle $S^{(i)}$ haben auf jeden Fall reelle, positive Eigenwerte. $\square$

Man vereinbart, für $S, T \geq 0$, noch die Schreibweise

$$S > T \quad (S \geq T), \text{ falls } S - T > 0 \quad (S - T \geq 0),$$

und erhält damit die Abschätzung der Determinanten

5.3.2 Lemma : *Seien $S, T \in \mathcal{S}(r, D)$. Aus $S - T > 0$ folgt $\mathrm{Det}(S) > \mathrm{Det}(T)$, genauso für „ $\succeq$ “.*

Beweis : Man benutzt ein B wie oben, sowie

$$\mathrm{Det}(\overline{B}') \mathrm{Det}(B) = |\mathrm{Det}(B)|^2 = (\mathrm{Det}(B))^2,$$

und schätzt

$$\mathrm{Det}(S) - \mathrm{Det}(T) = \frac{1}{\mathrm{Det}(B)^2} (\mathrm{Det}(S[B]) - \mathrm{Det}(T[B])) = \frac{1}{\mathrm{Det}(B)^2} (\mathrm{Det}(D_S) - \mathrm{Det}(D_T))$$

ab. Die Voraussetzung liefert die gewünschte Ungleichung für jedes Paar von Diagonalelementen $((D_S)_{jj}^{(i)}, (D_T)_{jj}^{(i)})$ und damit für deren Produkte, also auch für die Determinanten von S und T . $\square$

Somit erhält man die Abschätzung, die bei der Konvergenz der Thetareihen benötigt wird.

5.3.3 Lemma : *Sei $S = \overline{S}' > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß $S \geq \delta E^{(r)}$. Für beliebiges $t \in \mathbb{C}$ ist die Anzahl der Darstellungen $A(S, t) := |\{g \in \mathcal{O}^r ; S[g] = t\}|$ endlich.*

Beweis : Man hat δ als das minimale Diagonalelement (des Bildes) von S , also

$$\delta := \min\{S_{jj}^{(i)} ; i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, ns\},$$

zu wählen. Die Endlichkeit der Darstellungen von t ergibt sich aus der Tatsache, daß (das Bild von) $\mathcal{O}$ ein Gitter, also diskret ist. $\square$

1.6 Multiplikatorsysteme und irreduzible rationale Darstellungen der mit $\mathbb{R}$ tensorierten und komplexifizierten involutiven Algebren, vektorwertige Modulformen

In diesem Abschnitt werden sogenannte Multiplikatorsysteme eingeführt, um auch Modulformen von ungeradem Gewicht behandeln zu können. Außerdem werden auch ausgewählte Darstellungen von geeigneten, der Algebren zugeordneten, Gruppen studiert, die es ermöglichen, den Fall von vektorwertigen Modulformen zu erfassen. Danach werden letztere definiert.

1.6.1 Kanonische Automorphiefaktoren auf der Komplexifizierung einer maximalen kompakten Untergruppe von $\mathrm{Sp}(n, D_{\mathbb{R}})$

Im rationalen Fall Siegelscher Modulformen, hängt das Transformationsverhalten unter einer symplektischen Matrix $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, und an der Stelle $Z \in \mathbb{H}_n$ der oberen Halbebene, von der invertierbaren Matrix $J(M, Z) := CZ + D \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ab. Ferner definiert dieses

$$J : \mathrm{Sp}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

eine surjektive Abbildung. Diese verallgemeinern wir, in der allgemeineren Sprache der Automorphiefaktoren, auf die bei uns auftretenden symplektischen Gruppen, also

$$\mathrm{Sp}(n, D_{\mathbb{R}}) = \mathrm{Sp}(ns, \mathbb{R}^m), \quad \mathrm{Sp}(ns, \mathbb{C}^{m/2}) \quad \text{oder} \quad \mathrm{Sp}(n, \mathbb{H}^m).$$

Dazu

6.1.1 Bemerkung : Der Stabilisator des Punktes $Z = iE \in \mathbb{H}_n$ ist eine maximale kompakte Untergruppe $K = K(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$, von $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{K})$. Diese ist entsprechend isomorph zu

$$\mathrm{U}(n, \mathbb{C}), \quad \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \times \mathrm{U}(n, \mathbb{C}) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{U}(2n, \mathbb{C}).$$

Beweis : a) Es gelte $M \langle iE \rangle = iE$, für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{K})$. Dann ist $iA + B = -C + iD$, also $M = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. Wegen der symplektischen Relationen, muß

$$A\overline{A}' + B\overline{B}' = E, \quad \text{sowie} \quad \overline{A}'B = \overline{B}'A \quad \text{und} \quad A\overline{B}' = B\overline{A}',$$

gelten.

b) Im reellen Fall kann man $U := A + iB \in M_n(\mathbb{C})$ bilden. Es ist dann

$$U\overline{U}' = (A + iB)(\overline{A}' - i\overline{B}') = (A + iB)(A' - iB') = E,$$

also ist U unitär. (Vorsicht: $\overline{U}$ bedeutet hier in allen Fällen die gewöhnliche komplexe Matrixkonjugation, es wird nicht zwischen „ i “ und „ $\tilde{i}$ “ unterschieden.) Umgekehrt kann man jede unitäre Matrix U in Real- und Imaginärteil zerlegen, $U = A + iB$, und erhält mit $M := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ eine reelle symplektische Matrix.

c) Im komplexen Fall bildet man $U_1 := A + iB$ und $U_2 := A - iB$. (Das Paar (U_1, U_2) entspricht gerade $\iota(U)$, wenn man $U := A + iB \in M_n(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ bildet, also i als neue imaginäre Einheit auffaßt.) Es ist sowohl $U_1\overline{U}_1' = (A + iB)(\overline{A}' - i\overline{B}') = E$, wie auch $U_2\overline{U}_2' = (A - iB)(\overline{A}' + i\overline{B}') = E$. Beide Matrizen sind also unitär. Umgekehrt liefern zwei beliebige unitäre Matrizen U_1 und U_2 die komplexen Matrizen $A := \frac{U_1 + U_2}{2}$ und $B := \frac{U_1 - U_2}{2i}$. Es gilt dann

$$A\overline{B}' = \frac{(U_1 + U_2)(\overline{U}_1' - \overline{U}_2')}{2 \cdot (-2i)} = -\frac{U_1\overline{U}_1' - U_2\overline{U}_2' + U_2\overline{U}_1' - U_1\overline{U}_2'}{4i} = \frac{U_1\overline{U}_2' - U_2\overline{U}_1'}{4i} \quad \text{und}$$

$$B\overline{A}' = \frac{(U_1 - U_2)(\overline{U}_1' + \overline{U}_2')}{2i \cdot 2} = \frac{U_1\overline{U}_1' - U_2\overline{U}_2' + U_1\overline{U}_2' - U_2\overline{U}_1'}{4i} = \frac{U_1\overline{U}_2' - U_2\overline{U}_1'}{4i}, \text{ sowie}$$

$$\begin{aligned} A\overline{A}' + B\overline{B}' &= \frac{(U_1 + U_2)(\overline{U}_1' + \overline{U}_2')}{2 \cdot 2} + \frac{(U_1 - U_2)(\overline{U}_1' - \overline{U}_2')}{2i \cdot (-2i)} = \\ &= \frac{E + U_1\overline{U}_2' + U_2\overline{U}_1' + E}{4} + \frac{E - U_2\overline{U}_1' - U_1\overline{U}_2' + E}{4} = \frac{4E}{4} = E, \end{aligned}$$

also erhält man $M := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in \text{Sp}(n, \mathbb{C})$.

d) Im quaternionären Fall schließlich, identifiziert man A und B mit den entsprechenden komplexen Bildern $\begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ -\overline{A}_2 & \overline{A}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ -\overline{B}_2 & \overline{B}_1 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C})$. Es ist dann $A\overline{B}' = \begin{pmatrix} A_1\overline{B}_1' + A_2\overline{B}_2' & A_2B_1' - A_1B_2' \\ \overline{A}_1\overline{B}_2' - \overline{A}_2\overline{B}_1' & \overline{A}_1B_1' + \overline{A}_2B_2' \end{pmatrix}$, $B\overline{A}' = \begin{pmatrix} B_1\overline{A}_1' + B_2\overline{A}_2' & B_2A_1' - B_1A_2' \\ \overline{B}_1\overline{A}_2' - \overline{B}_2\overline{A}_1' & \overline{B}_1A_1' + \overline{B}_2A_2' \end{pmatrix}$ und $A\overline{A}' + B\overline{B}' = \begin{pmatrix} A_1\overline{A}_1' + A_2\overline{A}_2' + B_1\overline{B}_1' + B_2\overline{B}_2' & A_2A_1' - A_1A_2' + B_2B_1' - B_1B_2' \\ \overline{A}_1\overline{A}_2' - \overline{A}_2\overline{A}_1' + \overline{B}_1\overline{B}_2' - \overline{B}_2\overline{B}_1' & \overline{A}_1A_1' + \overline{A}_2A_2' + \overline{B}_1B_1' + \overline{B}_2B_2' \end{pmatrix}$. Bilde wieder $U := A + iB \in M_{2n}(\mathbb{C})$. Die symplektischen Relationen liefern dann

$$\begin{aligned} U\overline{U}' &= \begin{pmatrix} A_1 + iB_1 & A_2 + iB_2 \\ -\overline{A}_2 - i\overline{B}_2 & \overline{A}_1 + i\overline{B}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A}_1' - i\overline{B}_1' & -A_2' + iB_2' \\ \overline{A}_2' - i\overline{B}_2' & A_1' - iB_1' \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} A_1\overline{A}_1' + A_2\overline{A}_2' + B_1\overline{B}_1' + B_2\overline{B}_2' + i(B_1\overline{A}_1' - A_1\overline{B}_1' + B_2\overline{A}_2' - A_2\overline{B}_2') \\ \overline{A}_1\overline{A}_2' - \overline{A}_2\overline{A}_1' + \overline{B}_1\overline{B}_2' - \overline{B}_2\overline{B}_1' + i(\overline{A}_2\overline{B}_1' - \overline{B}_2\overline{A}_1' + \overline{B}_1\overline{A}_2' - \overline{A}_1\overline{B}_2') \\ A_2A_1' - A_1A_2' + B_2B_1' - B_1B_2' + i(A_1B_2' - B_1A_2' + B_2A_1' - A_2B_1') \\ \overline{A}_1A_1' + \overline{A}_2A_2' + \overline{B}_1B_1' + \overline{B}_2B_2' + i(\overline{B}_2A_2' - \overline{A}_2B_2' + \overline{B}_1A_1' - \overline{A}_1B_1') \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} E + i \cdot 0 & 0 + i \cdot 0 \\ 0 + i \cdot 0 & E + i \cdot 0 \end{pmatrix} = E^{(2n)}, \end{aligned}$$

also ist U unitär. Umgekehrt besitzt aus Dimensionsgründen jedes $U \in M_{2n}(\mathbb{C})$ eine Zerlegung $U = A + iB$ mit $A, B \in M_n(\mathbb{H})$, ein unitäres U liefert ein symplektisches $M := \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$. $\square$

Wir haben also für jeden positiv definiten Schiefkörper D eine maximale kompakte Untergruppe $K = K(D)$ von $\text{Sp}(n, D_{\mathbb{R}})$ ausgezeichnet; diese hängt nur vom Schiefkörper $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$ ab, der $D_{\mathbb{R}}$ zugrunde liegt. Die Komplexifizierung der (komplexen) unitären Gruppe ist die allgemeinen lineare Gruppe. Es gilt also

6.1.2 Folgerung : Die Komplexifizierung $K_{\mathbb{C}}$ der maximalen kompakten Untergruppe K , der symplektischen Gruppe $\text{Sp}(n, D_{\mathbb{R}})$ über der Tensorierung $D_{\mathbb{R}}$ eines rationalen, positiv definiten Schiefkörpers D , ist isomorph zu einer der Gruppen

$$\text{Gl}(ns, \mathbb{C}^m), \quad \text{Gl}(ns, \mathbb{C}^{m/2}) \times \text{Gl}(ns, \mathbb{C}^{m/2}) \quad \text{oder} \quad \text{Gl}(2n, \mathbb{C}^m),$$

also stets zu $\text{Gl}(ns, \mathbb{C})^m = \text{Gl}(n, D_{\mathbb{C}})$. $\square$

Nun muß, für jeden solchen Schiefkörper, ein sogenannter (kanonischer) Automorphiefaktor ausgezeichnet werden, also eine Abbildung $J : \text{Sp}(n, D_{\mathbb{R}}) \times \mathbb{H}_n^m \longrightarrow K_{\mathbb{C}}$, die, für jede symplektische Matrix M , holomorph in $Z \in \mathbb{H}_n$ ist, und die der Kozykel-Relation

$$J(MN, Z) = J(M, N\langle Z \rangle)J(N, Z)$$

genügt.

6.1.3 Bemerkung : Die Festlegung $J(M, Z) := (CZ + D)$, falls $\mathcal{Z}(D_{\mathbb{R}}) = \mathbb{R}^m$, bzw. $J(M, Z) := \iota(CZ + D) = (W_1, W_2) \hat{=}_{\mathbb{R}} (CZ + D, \overline{CZ}' + \overline{D})$, falls $\mathcal{Z}(D_{\mathbb{R}}) = \mathbb{C}^{m/2}$, liefert, für jeden rationalen

Schiefkörper, einen Automorphiefaktor $J : \mathrm{Sp}(n, D_{\mathbb{R}}) \times \mathbb{H}_n^m \longrightarrow \mathrm{Gl}(ns, \mathbb{C}^m)$. Dabei ist „ ι “, im komplexen Fall, natürlich der Isomorphismus aus 2.3.5. Man kann also auch

$$J(M, Z) = CZ + D, \quad J : \mathrm{Sp}(n, D_{\mathbb{R}}) \times \mathbb{H}_n^m \longrightarrow K_{\mathbb{C}},$$

in allen Fällen für den Automorphiefaktor schreiben; diese Matrix ist insbesondere im komplexen Fall ein Element aus $\mathrm{Gl}(ns, \mathbb{C}^{m/2}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.

Beweis : Genauso wie für $CZ + D$, ist auch, für $\tilde{J}(M, Z) = \overline{C}Z' + \overline{D}$ und $M_{12} = M_1 M_2$, $M_i \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$,

$$\tilde{J}(M_1 M_2, Z) = \overline{C}_{12}Z' + \overline{D}_{12} = \overline{(C_1 A_2 + D_1 C_2)}Z' + \overline{(C_1 B_2 + D_1 D_2)},$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{J}(M_1, M_2 \langle Z \rangle) \tilde{J}(M_2, Z) &= (\overline{C}_1((A_2 Z + B_2)(C_2 Z + D_2)^{-1})' + \overline{D}_1)(\overline{C}_2 Z' + \overline{D}_2) = \\ &= (\overline{C}_1 \overline{(A_2 Z + B_2)} + \overline{D}_1 \overline{(C_2 Z + D_2)})(\overline{C}_2 \overline{Z} + \overline{D}_2)^{-1}(\overline{C}_2 Z' + \overline{D}_2), \end{aligned}$$

wegen $Z = \overline{Z}'$ und $M_2 \langle Z \rangle = \overline{(M_2 \langle Z \rangle)'}'$, also erfüllt auch $\tilde{J}$ die Kozykel-Relation. $\square$

Es gilt

6.1.4 Bemerkung : Die Einschränkung von J auf den Unterraum $\mathrm{Sp}(n, D_{\mathbb{R}}) \times \{iE\}$, $J(\cdot, iE) : \mathrm{Sp}(n, D_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \mathrm{Gl}(n, D_{\mathbb{C}})$, definiert eine Einbettung $K \longrightarrow K_{\mathbb{C}}$. Damit hat jede stetige Darstellung von $K = K(D)$ die Form $\rho(J(\cdot, iE))$, mit einer Darstellung ρ von $\mathrm{Gl}(n, D_{\mathbb{C}})$. $\square$

1.6.2 Multiplikatorsysteme als komplexwertige Funktionen, die die eingeschränkte Kozykel-Relation erfüllen

Nun soll die Kozykel-Relation

$$J(MN, Z) = J(M, N \langle Z \rangle) J(N, Z),$$

der der kanonische Automorphiefaktor $J(M, Z) = CZ + D$ genügt, verallgemeinert werden. Für Matrizen(tupel) aus der oberen Halbebene hat man eine Determinantenfunktion definiert, diese ist multiplikativ, also

6.2.1 Bemerkung : Die Abbildung $J_2(M, Z) := \mathrm{Det}(CZ + D)$ erfüllt die Kozykel-Relation. $\square$

Nun will man auch ungerade Gewichte betrachten. Sei also, wie immer, $A = A_{\mathbb{Q}} = M_n(D)$ eine einfache Algebra und $A_{\mathbb{R}}$ ihre Tensorierung. Die Wurzelfunktion für Matrizen und deren Determinanten wurde definiert. Sie enthält jedoch eine Vorzeichenkonvention, deswegen gilt nur

6.2.2 Bemerkung : Es gibt für jedes $r \in \mathbb{Z}$ eine Abbildung

$$\omega = \omega_r : \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}) \times \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}) \longrightarrow \{\pm 1\},$$

so daß $J_r(M, Z) = (\mathrm{Det}(CZ + D))^{r/2}$ die eingeschränkte Kozykel-Relation

$$J_r(MN, Z) = \omega(M, N) J_r(M, N \langle Z \rangle) J_r(N, Z)$$

erfüllt ($\cdot$, für alle $Z \in \mathbb{H}_n$). $\square$

Dieses störende Vorzeichen soll von einem (konstanten) Transformationsfaktor absorbiert werden. Dazu

6.2.3 Definition : Sei Γ eine Kongruenzgruppe. Ein Multiplikatorsystem vom Gewicht $r \in \mathbb{Z}$ ist eine Abbildung $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^{\times}$, die die eingeschränkte Kozykel-Relation bezüglich ω_r erfüllt, und auf $v(M)J_r(M, Z) = 1$, falls $M \in \Gamma$ und $M = \begin{pmatrix} \zeta^E & 0 \\ 0 & \zeta^E \end{pmatrix}$ trivial wirkt (vergleiche 4.2.8), normiert ist. Dabei wird Γ als Teil von $M_2(A_{\mathbb{C}})$ aufgefaßt. $\square$

6.2.4 Bemerkung : a) Will man diese Multiplikatorsysteme mit den üblichen (siehe z.B. [Fr2]) in Verbindung bringen, so hat man zu berücksichtigen, daß jedes M und Z schon ein Matrixtupel darstellt. Eigentlich müßte man als Gewicht einen Vektor $r = (r_1, \dots, r_m)' \in \mathbb{Z}^m$ zulassen. (Im reellen und quaternären Fall stammen die m Komponenten r_i von den einfachen Komponenten der Tensorierung $A_{\mathbb{R}}$, im komplexen werden die $\frac{m}{2}$ r_i 's durch die Komplexifizierung verdoppelt.) Wir wollen das Multiplikatorsystem v jedoch mit der Determinante in Verbindung setzen, deswegen muß es in seinen Komponenten „homogen“ sein, $r = r \cdot (1, \dots, 1)'$. Ein Multiplikatorsystem läßt sich als (Tensor)produkt von gewöhnlichen Multiplikatorsystemen auf den einfachen Komponenten von $A_{\mathbb{C}}$ schreiben, $v(M) = \bigotimes_i v^{(i)}(M^{(i)})$.

b) Zu einem Multiplikatorsystem v auf Γ und einer projektiv rationalen symplektischen Matrix N erhält man eins (von demselben Gewicht) auf Γ^N , mittels

$$v^N(M^N) = v^N(N^{-1}MN) := v(M)\omega_r(M, N)\omega_r(N, N^{-1}MN), \quad M \in \Gamma. \quad \square$$

Es gilt auf jeden Fall

6.2.5 Bemerkung : Die Abbildung

$$J_{r,v} : \Gamma \times \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad J_{r,v}(M, Z) = v(M)\text{Det}(CZ + D)^{r/2},$$

v ein Multiplikatorsystem vom Gewicht r auf Γ , erfüllt die Kozykel-Relation. $\square$

1.6.3 Endlich-dimensionale, irreduzible, rationale, analytische Darstellungen der Komplexifizierung $\text{Gl}(ns, \mathbb{C}^m)$ der maximalen kompakten Untergruppe der symplektischen Gruppe

Nun sollen Darstellungen ρ der komplexifizierten maximalen kompakten Untergruppe $K_{\mathbb{C}} = \text{Gl}(ns, \mathbb{C})^m$, also Gruppenhomomorphismen von $\text{Gl}(A_{\mathbb{C}})$ in die allgemeine lineare Gruppe eines endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathcal{Z}$ studiert werden. Dabei benutzen wir $\text{Gl}(A_{\mathbb{C}})$ als kompakte Schreibweise für

$$\text{Gl}(ns, \mathbb{C})^m = \{M \in A_{\mathbb{C}} ; 0 \neq \text{Det}(M) \in \mathbb{C}^\times\}.$$

Entsprechen verwenden wir $\text{Gl}(A_{\mathbb{R}})$, $\text{Gl}(n, D_{\mathbb{C}})$ und $\text{Gl}(n, D_{\mathbb{R}})$. Wir verlangen, daß diese Darstellung rational ist, daß also jede ihrer Matrixkomponenten (nach einer Basiswahl in $\mathcal{Z}$) eine rationale Funktion ist. Insbesondere ist ρ analytisch. Es gilt (siehe z.B. [NS])

6.3.1 Theorem : Jede endlich-dimensionale analytische Darstellung von $G = \text{Gl}(n, \mathbb{C})$ ist vollständig reduzibel. Die Einschränkung einer irreduziblen, endlich-dimensionalen und analytischen Darstellung von G auf die unitäre Gruppe $U = U(n, \mathbb{C})$ ist irreduzibel. $\square$

Wir beschränken uns also auf irreduzible ρ . Ein weiterer Satz besagt dann jedoch, daß die gesuchte Darstellung ein Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen auf den einfachen Komponenten ist,

$$\rho = \bigotimes_{i=1}^m \rho^{(i)} : G = \text{Gl}(ns, \mathbb{C})^m \longrightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z}) = \text{Gl}\left(\bigotimes_{i=1}^m \mathcal{Z}^{(i)}\right), \quad \rho^{(i)} : \text{Gl}(ns, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z}^{(i)}).$$

Wir untersuchen erst eine solche Komponente $\rho^{(i)} = \rho$.

Da die Darstellung rational ist, existiert eine größte ganze Zahl $l \in \mathbb{Z}$, so daß

$$\rho_0(A) := \det(A)^{-l} \rho(A)$$

noch polynomial ist. Man nennt eine solche polynomiale Darstellung ρ_0 , die also für $\det(A) = 0$ nicht verschwindet, reduziert. Wir fixieren für jede einfache Komponente von $K_{\mathbb{C}}$ und für die gesamte Arbeit solch ein $\rho_0 = \rho_0^{(i)}$. Damit können wir, für jedes gerade $r = r^{(i)} \in \mathbb{Z}$, eine Abbildung

$$\rho = \rho^{(i)} : \text{Gl}(ns, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z}^{(i)}), \quad \rho(A) := \rho_0(A) \det(A)^{r/2},$$

bilden. Dieses ρ ist dann wieder eine Darstellung (und ihr Gewicht ist $r/2$). Wir wollen aber auch ungerade r zulassen. Wir bilden also, für jedes $r \in \mathbb{Z}$, das Paar $\rho = \rho^{(i)} = (\rho_0^{(i)}, r^{(i)})$. Wir nennen gelegentlich r das Gewicht von $\rho = (\rho_0, r)$. Um durch das Tensorprodukt $\bigotimes_i \rho^{(i)}$ einen sinnvollen Zusammenhang mit $\text{Det}(A) = \text{Det}(A^{(1)}, \dots, A^{(m)})$ zu erhalten, müssen die Gewichte der $\rho^{(i)}$ übereinstimmen. Insgesamt haben wir die

6.3.2 Festlegung : Für die gesamte Arbeit wird eine rationale Darstellung $\rho_0 = \bigotimes_i \rho_0^{(i)}$ fixiert, deren m Tensorkomponenten $\rho_0^{(i)}$ polynomial und reduziert sind, also sämtlich Gewicht 0 haben. Für jedes $r \in \mathbb{Z}$ bilden wir das Paar $\rho = (\rho_0, r)$. Dieses definiert eine, für jede symplektische Matrix holomorphe, Abbildung $\rho = \bigotimes_i \rho^{(i)} : \text{Sp}(n, D_{\mathbb{R}}) \times \mathbb{H}_n^m \longrightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z})$,

$$\rho(J(M, Z)) := \rho_0(J(M, Z)) J_r(M, Z) = \rho_0(CZ + D) \text{Det}(CZ + D)^{r/2}.$$

Gelegentlich nennen wir r das Gewicht von ρ . $\square$

Für gerades r ist, wie schon bemerkt, jede Tensorkomponente von ρ eine Darstellung, und $r/2$ ist das Gewicht jeder Komponente dieser Darstellung. Auf jeden Fall erfüllt $\rho_0 = \bigotimes_i \rho_0^{(i)}$, als Gruppenhomomorphismus, die Kozykel-Relation

$$\rho_0(J(MN, Z)) = \rho_0(J(M, N\langle Z \rangle)) \rho_0(J(N, Z)).$$

Wählt man ein Multiplikatorsystem vom selben Gewicht wie $\rho = (\rho_0, r)$, so erhält man trivialerweise

6.3.3 Bemerkung :

$$v(M) \rho(J(M, Z)) = \bigotimes_i v^{(i)}(M^{(i)}) \rho_0^{(i)}(C^{(i)} Z^{(i)} + D^{(i)}) \det(C^{(i)} Z^{(i)} + D^{(i)})^{r/2}$$

erfüllt die Kozykel-Relation, für alle $M = (M^{(1)}, \dots, M^{(m)}) \in \Gamma$ und alle $Z = (Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}) \in \mathbb{H}_n$. $\square$

Wir brauchen noch ein Paar Resultate aus der Theorie der höchsten Gewichte. Seien also $G = G(n) := \text{Gl}(ns, \mathbb{C})$ eine Komponente der dem Schiefkörper D zugeordneten allgemeinen linearen Gruppe $K_{\mathbb{C}} = \text{Gl}(ns, \mathbb{C})^m$, $D = D(n)$ die Untergruppe der Diagonal- und $T = T(n)$ die Untergruppe der strikten oberen Dreiecksmatrizen, sowie $\rho = \rho_0^{(i)}$ wie oben.

6.3.4 Definition : Man nennt einen Vektor $x \in \mathcal{Z} = \mathcal{Z}^{(i)}$ Vektor von höchstem Gewicht, falls

$$\rho(D)x = \alpha(D)x \quad \text{und} \quad \rho(T)x = x, \quad \text{für alle } D \in D(n) \quad \text{und} \quad T \in T(n),$$

mit einem stetigen Charakter α auf D , gilt. Dieser Charakter heißt (das) höchste Gewicht von ρ . $\square$

6.3.5 Theorem : a) Jedes irreduzible ρ besitzt genau einen eindimensionalen Unterraum von Vektoren höchsten Gewichtes, und genau ein höchstes Gewicht. Umgekehrt ist jede solche Darstellung, mit einem induktiven α , irreduzibel.

b) Genau dann sind zwei irreduzible Darstellungen äquivalent, wenn ihre höchsten Gewichte übereinstimmen. $\square$

Unsere Darstellungen sind rational, also hat α die Form $\alpha(D) = \prod_{i=1}^{ns} d_i^{r_i}$. Es wird also jede Tensorkomponente $\rho_0^{(i)}$ der Darstellung ρ_0 durch einen Vektor $r = r^{(i)} \in \mathbb{Z}^{ns}$, $r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_{ns}$, charakterisiert, und die r_j sind nicht-negativ, da $\rho_0^{(i)}$ polynomial ist. Unser obiges Gewicht von ρ_0 ist gerade dessen letzte Komponente $r = r_{ns} = 0$, also ist, für jedes $i = 1, \dots, m$, das höchste Gewicht $r^{(i)} = 0 \in \mathbb{Z}^{ns}$ der Nullvektor. Wir benutzen noch

6.3.6 Satz : Sei $\rho : \text{Gl}(n', \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z})$ irreduzibel, vom höchsten Gewicht $r = (r_1, \dots, r_{n'})'$, und $\mathcal{Z}_0 := \{x \in \mathcal{Z} ; \rho \left(\begin{pmatrix} E^{(m')} & \\ & E^{(n'-m')} \end{pmatrix} \right) x = x\}$. Angenommen es existiert ein $0 \neq x \in \mathcal{Z}_0$, das unter allen $\rho \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ & U \end{pmatrix} \right)$, $U \in \text{Sl}(n' - m', \mathbb{Z})$, invariant ist. Dann ist die Darstellung

$$\tilde{\rho} : \text{Gl}(m', \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z}_0), \quad \tilde{\rho}(A) = \rho \left(\begin{pmatrix} A & 0 \\ & E \end{pmatrix} \right) \Big|_{\mathcal{Z}_0}$$

irreduzibel. Ihr höchstes Gewicht ist $(r_1, \dots, r_{m'})'$ und es gilt $r_{m'+1} = \dots = r_{n'}$. $\square$

Für unser polynomiales und reduziertes ρ_0 ist, wie erwähnt, das höchste Gewicht der Nullvektor. Obige Einschränkung auf einen Unterraum ändert daran nichts, und die Multiplikation mit $J_r(M, Z)$, ebenfalls geeignet eingeschränkt auf $Z = \begin{pmatrix} \tilde{Z} & 0 \\ & E^{(n'-m')} \end{pmatrix}$, $\tilde{Z} \in \mathbb{H}_{m'}$, $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \tilde{A} & 0 \\ & E^{(n'-m')} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \tilde{B} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} \tilde{C} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} \tilde{D} & 0 \\ & E^{(n'-m')} \end{pmatrix}$, liefert dasselbe Gewicht. Wir erhalten also eine eingeschränkte Abbildung $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_0, r)$, $\tilde{\rho}(A) = \tilde{\rho}_0(A) \text{Det}(A)^{r/2}$, $A = \tilde{J}(\tilde{M}, \tilde{Z}) \in \mathbb{H}_{m'}$ von derselben Form wie ρ , also ein Paar $\tilde{\rho} = (\tilde{\rho}_0, r)$, mit einer reduzierten polynomialen Darstellung $\tilde{\rho}_0$ und demselben Gewicht r .

1.6.4 Vektorwertige Modulformen über einfachen involutiven Algebren, der verallgemeinerte Φ -Operator

Damit können wir, wie üblich, Modulformen definieren und das Koecher-Prinzip benutzen. Wie in den vorangegangenen Abschnitten, behandeln wir den Fall einer einfachen Algebra A mit positiver Involution.

6.4.1 Vorbemerkung : Periodische Funktionen lassen sich in Fourier-Reihen entwickeln. Da jede Kongruenzgruppe (als Wirkungsgruppe) ein gewisses Gitter invariant läßt, werden Modulformen eine Darstellung $f(Z) = \sum_{T \in \mathcal{T}} a(T) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{TZ\}}$, mit einer geeigneten natürlichen Zahl q , besitzen.

b) Aus dem Transformationsverhalten

$$f(M\langle Z \rangle) = v(M) \rho(J(M, Z)) f(Z), \quad M \in \Gamma,$$

für eine Funktion f folgt, daß $f^N(Z) := \rho(J(N, Z))^{-1} f(N\langle Z \rangle)$, $N \in \text{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ projektiv rational, das Transformationsverhalten

$$f^N(M^N\langle Z \rangle) = v^N(M^N) \rho(J(M^N, Z)) f^N(Z), \quad \text{für } M^N = N^{-1} M N \in \Gamma^N = N^{-1} \Gamma N,$$

besitzt, und insbesondere ebenfalls in eine Fourier-Reihe entwickelbar ist, in der, wegen der projektiven Rationalität von N , wieder nur über ein Gitter summiert werden muß.

c) Ist insbesondere $\Gamma = \Gamma_n[q]$ und $N \in \Gamma_n$, so ist $(\Gamma_n[q])^N = \Gamma_n[q]$ (, da die Hauptkongruenzgruppen Normalteiler in der Modulgruppe sind.) In der Fourier-Entwicklung von f^N wird also über dasselbe Gitter summiert, und die Koeffizienten können mit denen von f verglichen werden. $\square$

6.4.2 Definition : a) Eine vektorwertige Modulform f vom Gewicht r , zu der fest gewählten Darstellung ρ_0 , einer Kongruenzgruppe Γ und einem Multiplikatorsystem v vom Gewicht r auf Γ ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H}_n^m \longrightarrow \mathcal{Z}$, mit dem Transformationsverhalten

$$f(M\langle Z \rangle) = v(M) \rho(J(M, Z)) f(Z) = v(M) \rho_0(CZ + D) \text{Det}(CZ + D)^{r/2} f(Z),$$

und der Eigenschaft $(a^N(T) \neq 0 \implies T \geq 0)$ für die Koeffizienten ihrer Fourier-Entwicklung(en), $N \in \text{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ projektiv rational.

b) Wir bezeichnen den Raum der Modulformen zu $\rho = (\rho_0, r)$, v und Γ mit $[\Gamma, \rho, v]$ bzw. $[\Gamma, r, v]$.

c) Wir nennen eine Modulform singulär, falls zusätzlich $(a(T) \neq 0 \implies \text{Det}(T) = 0)$ gilt, und bezeichnen den entsprechenden Raum der singulären Modulformen mit $[\Gamma, \rho, v]_S = [\Gamma, r, v]_S$. $\square$

Wie immer gilt

6.4.3 Satz (Koecher-Prinzip) : *Die letzte Bedingung in der Definition von Modulformen ist für $n > 1$ automatisch erfüllt.* $\square$

An dieser Stelle ergänzen wir die Rechtfertigung der Wahl (des Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse) der Involution auf A (Satz 4.2.13).

6.4.4 Bemerkung : Seien $\tau = \hat{J} \sim \tilde{J}$ zwei ähnliche (positive) Involutionen auf A , und $\mathcal{O} = \hat{J}(\mathcal{O})$ sowie $\tilde{\mathcal{O}} = \tilde{J}(\tilde{\mathcal{O}})$ zwei (maximale) Ordnungen in dieser Algebra. Dann induziert der Isomorphismus $\tilde{\tau}$ aus dem vierten Abschnitt eine Bijektion $\Gamma \mapsto \tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}$ (Lemma 4.2.12) zwischen den Kongruenzgruppen in $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}, \hat{J})$ bezüglich $\mathcal{O}$ und denen in $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}}, \tilde{J})$ bezüglich $\tilde{\mathcal{O}}$, so daß die zugehörigen Räume von Modulformen isomorph sind, $[\Gamma, \rho, v] \cong [\tilde{\Gamma}, \tilde{\rho}, \tilde{v}]$,

$$\tilde{\rho}_0(J(\tilde{X}, Z)) := \rho_0(J(\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{X}), \tau^{-1}(Z))), \quad \tilde{v}(\tilde{X}) := v(\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{X})) \cdot \left(\frac{\mathrm{Det}(J(\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{X}), \tau^{-1}(Z)))}{\mathrm{Det}(J(\tilde{X}, Z))} \right)^{r/2}.$$

Dazu hat man lediglich $\tilde{f}(Z) := f(\tau^{-1}(Z))$, $f \in [\Gamma, \rho, v]$, zu bilden, das Transformationsverhalten nachzurechnen, und zu beachten, daß $J(\tilde{\tau}^{-1}(\tilde{X}), \tau^{-1}(Z)) = J\left(\begin{pmatrix} A & BM \\ M^{-1}C & M^{-1}DM \end{pmatrix}, ZM\right) = M^{-1}(CZ + D)M = M^{-1}J(\tilde{X}, Z)M$, $\tilde{X} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, gilt, also $\tilde{v}$ ein Multiplikatorsystem ist. $\square$

Nun definiert man wieder den Φ -Operator.

6.4.5 Definition : Für eine holomorphe Funktion f auf der verallgemeinerten oberen Halbebene $\mathbb{H}_n$ und $Z \in \mathbb{H}_{n-1} = \mathbb{H}_{n-1}^m = (\mathbb{H}_{(n-1)s})^m$ setzt man, im Falle der Existenz,

$$(f|\Phi)(Z) := \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \cdot 1_A \end{pmatrix}\right). \quad \square$$

Dabei wurde natürlich $1_A = (E^{(s)})^m$ identifiziert, und dieser Limes existiert, falls z.B. $f \in [\Gamma, r, v]$ eine Modulform ist, da man ihn auf jeden Term der Fourier-Entwicklung von f anwenden kann.

6.4.6 Bemerkung : Durch mehrfache Anwendung von Φ erhält man, für Modulformen $f \in [\Gamma, \rho, v]$,

$$(f|\Phi^j) = \lim_{t \rightarrow \infty} f\left(\begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \cdot E^{(j)} \end{pmatrix}\right), \quad Z \in \mathbb{H}_{n-j}, \quad E^{(j)} = (E^{(js)})^m. \quad \square$$

Wir benutzen folgende Verallgemeinerung eines aus dem Siegelschen Fall wohlbekannten Sachverhalts.

6.4.7 Bemerkung : Aus $(e^{\pi i \sigma \{TZ\}}|\Phi) \neq 0$, mit einer semi-positiven Matrix $T = \overline{T}' \in M_n(D)$, $T \geq 0$, folgt $T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T_0 \in M_{n-1}(D)$.

Beweis : Bei der Anwendung von Φ auf $e^{\pi i \sigma \{T\tilde{Z}\}}$, $\tilde{Z} = \begin{pmatrix} Z & 0 \\ 0 & it \cdot 1_A \end{pmatrix}$, $T = \begin{pmatrix} T_0 & t_1 \\ \bar{t}_1 & t_2 \end{pmatrix}$, $t_2 \in D$, $t_2 = \bar{t}_2 \geq 0$, hat man die Einbettung von D zu benutzen, und mit den Eigenschaften positiver Matrizen zu zeigen, daß der Limes nur dann nicht verschwindet, wenn $\sigma(t_2) = 0$ ist. Dann sind jedoch alle Diagonalelemente (des Bildes) von t_2 , und damit t_2 selbst, gleich Null. Nun räumt man wie üblich die zu t_2 gehörenden Zeilen und Spalten aus, und erhält, wie im rationalen Fall, $T = \begin{pmatrix} T_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $\square$

Es ist ρ_0 ein Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen. $\mathrm{Sl}(n, \mathcal{O})$ übernimmt hier als Untergruppe von $M_n(D_{\mathbb{C}}) = M_n(D \otimes \mathbb{C})$ die Rolle, die $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{Z}) \subset M_n(\mathbb{C})$ in der klassischen Theorie hat. Der Schluß von obigem Satz über die Einschränkung von irreduziblen Darstellungen auf Unterräume, basiert auf der Untersuchung einer rationalen Identität, kann also komponentenweise auf $\mathrm{Sl}(j, \mathcal{O})$, oder auch $\mathrm{Sl}(j, q\mathcal{O})$, anstelle von $\mathrm{Sl}(js, \mathbb{Z})^m$, angewendet werden. Dieselbe Überlegung wie in [Fr2] ergibt

6.4.8 Lemma : *Falls eine Modulform $f \in [\Gamma, \rho, v]$ existiert, so daß $f|\Phi^j$ nicht identisch verschwindet, so ist*

$$(\rho_0|\Phi^j)(A) := \rho_0 \left(\begin{pmatrix} A^{(n-j)} & 0 \\ 0 & E^{(j)} \end{pmatrix} \right) \Big|_{Z_0}$$

*eine irreduzible, polynomiale und reduzierte Darstellung von $\mathrm{Gl}(n-j, D_{\mathbb{C}})$ in den Raum Z_0 der, unter allen $\rho_0 \left(\begin{pmatrix} E^{(n-j)} & * \\ 0 & E^{(j)} \end{pmatrix} \right)$, invarianten Vektoren. (Ihr höchstes Gewicht ist also wieder der Nullvektor.) $\square$*

Multipliziert man dies mit der entsprechenden Potenz der eingeschränkten Determinante, so erhält man auch ein eingeschränktes ρ (zu demselben Gewicht). Schränkt man noch geeignet das Multiplikatorsystem ein, so ergibt die Einbettung der Modulgruppe vom Grad $n-j$ nach Γ_n folgende Operation von Φ auf den Raum der Modulformen.

6.4.9 Lemma : *Falls ein $f \in [\Gamma, \rho, v] = [\Gamma, r, v]$ existiert, so daß $f|\Phi^j \neq 0$, so definiert der Φ -Operator eine Abbildung*

$$\Phi^j : [\Gamma, \rho, v] \longrightarrow [\Gamma|\Phi^j, \rho|\Phi^j, v|\Phi^j] = [\Gamma|\Phi^j, r|\Phi^j, v|\Phi^j],$$

mit einer Abbildung $\rho|\Phi^j$ des betrachteten Types zum Gewicht $r|\Phi^j = r$, also dem Produkt einer irreduziblen und reduzierten Darstellung ρ_0 und einer Potenz der Determinante. $\square$

Diese Modulformen werden nun im Hauptteil, nach der Methode von Freitag, untersucht. Wie immer gilt

6.4.10 Lemma : *Jede Modulform von negativem Gewicht verschwindet identisch. Jede Modulform vom Gewicht 0 ist konstant. $\square$*

Kapitel 2

Vektorwertige Thetareihen über einfachen, involutiven, positiv definiten Algebren als Modulformen zu Hauptkongruenzgruppen

In diesem Kapitel werden nun die für uns wichtigsten Beispiele von Modulformen eingeführt, die Thetareihen. Nach ihrer Definition wird ihr Verhalten unter symplektischen Transformationen untersucht. Es wird gezeigt, daß Thetareihen Modulformen zu geeigneten Hauptkongruenzgruppen sind, und ein endlich-dimensionaler Unterraum von Thetareihen definiert, von dem es das Ziel ist zu zeigen, daß er alle singuläre Modulformen enthält.

2.1 Vektorwertige Thetareihen, mit beliebiger Charakteristik, über einem Gitter und zu einer harmonischen Form

Es werden vektorwertige Thetareihen mit Charakteristik definiert, und zwar zu einem Gitter über der Ordnung $\mathcal{O}$, und deren Konvergenz gezeigt. Der Vektorcharakter wird dabei von speziellen Polynomen, den sogenannten harmonischen Formen, getragen.

2.1.1 Gitter über Ordnungen, harmonische Formen zu der fest gewählten Darstellung ρ_0

Sei nun $A = M_n(D)$ eine einfache Algebra mit allen Zusatzeigenschaften und -strukturen aus dem ersten Kapitel (, also, neben der Positivität und der speziellen Wahl des Wedderburn-Isomorphismus, hauptsächlich die Spur und die Determinante). Wir hatten eine, unter der Involution invariante, maximale Ordnung $\mathcal{O}$ in dem Schiefkörper D fest gewählt. Über dieser hatten wir Gitter gebildet. Wir erinnern an die Definition, im Spezialfall des Grundringes $R = \mathbb{Z}$.

1.1.1 Definition und Bemerkung : Ein links- bzw. rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter ist ein links- bzw. rechts- $\mathcal{O}$ -Modul, der gleichzeitig ein $\mathbb{Z}$ -Gitter in einem endlich-dimensionalen $\mathbb{Q}$ -Vektorraum V ist, also ein torsionsfreier $\mathbb{Z}$ -Modul endlichen Typs. Wir können natürlich jedes solche Gitter, auch als $\mathcal{O}_K$ -Modul und $\mathcal{O}_K$ -Gitter auffassen, also $\mathcal{O}$ -Gitter über dem Zentrum $K = \mathcal{Z}(D)$ der Algebra untersuchen. Außerdem werden wir gelegentlich einfach von Gittern sprechen (ohne die Spezifikation „ $\mathcal{O}$ “). $\square$

Bei uns werden hauptsächlich rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L} \subset D^r$ auftreten. Die Schreibweise $\langle G \rangle$ bedeute, für $G = G^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$, den von den Spalten von G erzeugten $\mathcal{O}$ -Modul. Damit meinen wir die Menge $G \cdot \mathcal{O}^n$, also genauer ein rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter. Dies wird z.B. als Bedingung der Form „ $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$ “ in Summen benutzt.

1.1.2 Definition : Die Menge

$$\mathcal{L}^* := \{x \in D^r ; \sigma(\overline{x'}y) \in \mathbb{Z}, \forall y \in \mathcal{L}\}$$

heißt das, zu dem $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L} \subset D^r$, reziproke Gitter. $\square$

1.1.3 Bemerkung : a) Sei $\mathcal{L}$ ein links- bzw. rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter. Dann ist $\mathcal{L}^*$ automatisch ein $\mathcal{O}$ -Gitter derselben Art wie $\mathcal{L}$.

b) Sei $A \in \text{Gl}(n, D)$ und $\mathcal{L}$ ein rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter. Dann ist auch $\tilde{\mathcal{L}} := A \cdot \mathcal{L} = \{Ax ; x \in \mathcal{L}\}$ ein Gitter und es gilt $\tilde{\mathcal{L}}^* = \overline{A'}^{-1} \cdot \mathcal{L}^*$. Für das spezielle Gitter $\mathcal{L} = \mathcal{O}^r$ gilt $\mathcal{L}^* = (\mathcal{O}^*)^r$.

Beweis : a) Es gilt $\sigma\{\overline{x'}(y \cdot r)\} = \sigma\{(r \cdot \overline{x'})y\} = \sigma\{(\overline{x \cdot \overline{r}})'y\}$, für alle $r \in \mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$, also die Aussage für rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter, und entsprechend auch für den anderen Fall.

b) Es gilt, für $\tilde{y} \in \tilde{\mathcal{L}}$, $\sigma(\overline{x'}\tilde{y}) = \sigma(\overline{x'}Ay) = \sigma\left(\overline{(\overline{A'}x)}'y\right)$, $y \in \mathcal{L}$, also ist $\overline{A'} \cdot \tilde{\mathcal{L}}^* = \mathcal{L}^*$. $\square$

Unter dem Volumen eines Gitters $\mathcal{L}$, $L = \text{vol}(\mathcal{L}) = |\mathcal{L}|$, werden wir stets das euklidische Volumen der Einbettung $\phi(\mathcal{L}) \subset D_{\mathbb{R}}^r$ des Gitters verstehen, also in diesem Zusammenhang nur die ausgezeichnete euklidische $\mathbb{R}$ -Vektorraum-Struktur von $D_{\mathbb{R}}$ berücksichtigen, die durch das Skalarprodukt induziert wird (vergleiche Definition 5.1.7 und Lemma 5.1.9 aus dem ersten Kapitel).

Um vektorwertige Thetareihen zu definieren, brauchen wir geeignete Vorfaktoren. Dies sind Funktionen

$$P : D_{\mathbb{C}}^{(r,n)} \times \mathbb{H}_n^m \longrightarrow \mathcal{Z}, \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{Z}) < \infty,$$

deren Komponenten P_i , bezüglich einer Basis des Vektorraumes $\mathcal{Z}$, Polynome sind. Selbst wenn diese im voraus nicht von $Z \in \mathbb{H}_n^m$ abhängen, wird es beim Beweis der Transformationsformeln notwendig sein, uns Z als zusätzliches Argument vorzustellen, $P(X) = P(X, Z)$, da es in X selbst

implizit enthalten sein wird, und nicht unberücksichtigt bleiben darf. Über dem reellen Vektorraum $D_{\mathbb{C}}$ hat man den natürlichen Begriff eines harmonischen Polynoms. Dieser basiert auf der Tatsache, daß $D_{\mathbb{R}}$, wie bemerkt, ein euklidischer Vektorraum ist, und daß das euklidische Volumenelement dU in $D_{\mathbb{R}}$, sowie der Differentialoperator $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, wobei x_i die Koordinaten bezüglich einer euklidischen Basis sein, unter orthogonalen Transformationen invariant sind. Man erhält also den gewöhnlichen Begriff aus dem Raum $\mathbb{R}^{n'}$.

1.1.4 Definition : a) Sei $P : D_{\mathbb{C}}^{(r,n)} \longrightarrow \mathcal{Z}$, $D_{\mathbb{C}} = D_{\mathbb{R}} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, ein Polynom in X . Setze $\Delta P(X) := \sum_i \frac{\partial^2}{\partial z_i^2} P(X)$, wobei z_i die (komplexen) Koordinaten bezüglich einer orthonormalen $\mathbb{R}$ -Basis des euklidischen Vektorraumes $D_{\mathbb{R}}^{(r,n)}$, der das Skalarprodukt aus 5.1.9 im ersten Kapitel trägt, sein. Nenne P harmonisch, falls $\Delta P \equiv 0$ identisch verschwindet.

b) Nenne, für ein Polynom P ,

$$P^*(X) := \int_{(D_{\mathbb{R}})^{(r,n)} \subset (D_{\mathbb{C}})^{(r,n)}} P(X + U) e^{-\pi \sigma \{\overline{U}' U\}} dU,$$

dU das euklidische Volumenelement in diesem (reellen) euklidischen Vektorraum, seine Gauß-Transformierte. $\square$

Auf jeden Fall können wir unsere Standardeinbettung benutzen, um solche Integrale konkret zu berechnen. Es gilt allgemein

1.1.5 Lemma : Die Gauß-Transformierte eines Polynoms ist wieder ein Polynom, und es gilt $P^* = e^{\frac{\Delta}{4\pi}} P$. $\square$

1.1.6 Korollar : a) Die Gauß-Transformation ist invertierbar.

b) Ist P oder P^* harmonisch, also $\Delta P = 0$ oder $\Delta P^* = 0$, so gilt $P = P^*$.

c) Sind P und P^* homogen, so auch harmonisch. $\square$

Wir benötigen eine stärkere Eigenschaft als die Harmonizität der Polynome.

1.1.7 Definition : a) Ein Polynom P auf $D_{\mathbb{C}}^{(r,n)}$ heißt pluriharmonisch, falls

$$\Delta P(XA) = 0, \text{ für alle } A \in M_n(D_{\mathbb{C}}) = M_{ns}(\mathbb{C}^m),$$

gilt.

b) Ein Polynom $P : D_{\mathbb{C}}^{(r,n)} \times \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}$ heißt (pluri)harmonisch, falls jede Vektorkomponente $P_i(\cdot, Z)$, bezüglich einer Basis von $\mathcal{Z}$ und für jedes feste $Z \in \mathbb{H}_n$, (pluri)harmonisch ist. $\square$

Nun erhalten wir die gewünschten Vorfaktoren für die Thetareihen mittels

1.1.8 Definition : Ein harmonisches vektorwertiges Polynom $P = \begin{pmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_k \end{pmatrix} : D_{\mathbb{C}}^{(r,n)} \longrightarrow \mathcal{Z}$ heißt

harmonische Form bezüglich der Darstellung ρ , falls

$$P(XA) = \rho(\overline{A}') P(X), \text{ für alle } A \in \text{Gl}(n, D_{\mathbb{C}}) = \text{Gl}(ns, \mathbb{C})^m$$

gilt. Ein harmonisches Polynom $P : D_{\mathbb{C}}^{(r,n)} \times \mathbb{H}_n \longrightarrow \mathcal{Z}$ heißt harmonische Form, falls $P(\cdot, Z)$ für jedes feste $Z \in \mathbb{H}_n$ eine harmonische Form ist. $\square$

Eine harmonische Form ist natürlich pluriharmonisch. Bei uns wird die Darstellung immer das fest gewählte ρ_0 sein. Die harmonischen Formen bezüglich ρ_0 bilden natürlich einen endlich-dimensionalen ($\mathbb{C}$ -)Vektorraum. Wir benötigen noch

1.1.9 Lemma : Die Zuordnung $P \longmapsto P^{(A)}$, $P^{(A)}(X) := P(\overline{A}' X)$, definiert eine Wirkung der unitären (bzw. genauer orthogonalen, im reellen Fall,) Gruppe $U(r, D_{\mathbb{R}}) = \{A \in \text{Gl}(r, D_{\mathbb{R}}) ; \overline{A}' A = E\}$ auf den Raum der harmonischen Formen.

Beweis : Unitäre Matrizen entsprechen orthogonalen Transformationen bezüglich der zugrundeliegenden euklidischen Vektorraumstruktur von $D_{\mathbb{C}}$. Solche Transformationen lassen aber das (euklidische) Skalarprodukt invariant, $P^{(A)}$ ist also stets harmonisch.

Die Eigenschaft Form zu sein, bleibt natürlich auch für $P^{(A)}$ erhalten, und

$$(P^{(A_1)})^{(A_2)}(X) = P^{(A_2)}(\overline{A_1}' X) = P\left(\overline{(A_1 A_2)}' X\right) = P^{(A_1 A_2)}(X). \quad \square$$

2.1.2 Definition und Konvergenz von Thetareihen mit Charakteristik

Seien nun $U, V \in D_{\mathbb{C}}^{(r,n)}$ zwei beliebige komplexe Matrizen, $\mathcal{L}$ ein rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter und P eine vektorwertige Funktion auf $D_{\mathbb{C}}^{(r,n)} \times \mathcal{T}(M_n(D_{\mathbb{R}}))$. Bei uns wird P fast ausschließlich eine harmonische Form sein. Man muß auch eine Z -Abhängigkeit von P zulassen, weil diese bei den Transformationsformeln automatisch auftritt. Wir schreiben aber trotzdem $P = P(X)$, anstelle von $P = P(X, Z)$, da dies die Schreibweise vereinfacht und durchsichtiger macht. Außerdem sei $S = \overline{S}' \in S(r, D)$, $S > 0$, und $Z \in \mathbb{H}_n$.

1.2.1 Definition : Wir setzen

$$\vartheta_{\mathcal{L}, P} \left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \right] (S; Z) := \sum_{\substack{G = G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}(G + U)) e^{\pi i \sigma \{S[G+U]Z + 2\overline{V}'(G+U)\}}$$

und nennen das Paar (U, V) die Charakteristik der Thetareihe. Falls $U = 0$ ist, schreiben wir auch

$$\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, V; Z) = \sum_{\substack{G = G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}G) e^{\pi i \sigma \{S[G]Z + 2\overline{V}'G\}}. \quad \square$$

1.2.2 Lemma : Die Thetareihen konvergieren als Funktion von Z auf der verallgemeinerten oberen Halbebene $\mathbb{H}_n$ absolut, und in Bereichen der Art $\{Y = \text{IM}(Z) \geq \delta > 0\}$ sogar gleichmäßig. $\vartheta_{\mathcal{L}, P} \left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix} \right] (S; Z)$ ist eine holomorphe Funktion von Z auf $\mathbb{H}_n$, und eine holomorphe Funktion von U und V , jeweils auf dem gesamten $D_{\mathbb{C}}^{(r,n)}$.

Beweis : Die, auf der fundamentalen Gleichung $|e^{x+iy}| = e^x$ basierende, Abschätzung kann übertragen werden, da die Spur auf der Algebra so definiert wurde, daß der Imaginärteil nur von der zusätzlichen Komplexifizierung, und nicht von den komplexen bzw. quaternären Komponenten der Algebra selbst, kommt. Außerdem wurde gezeigt, daß man die fundamentalen Eigenschaften positiver Matrizen übertragen kann. Man kann also den klassischen Beweis aus dem rationalen Fall (siehe z.B. [Fr1]) übernehmen. Die wesentliche Abschätzung ist die von $|e^{\pi i \sigma \{S[G]Z\}}| = e^{-\pi \sigma \{S[G]Y\}} \leq e^{-\pi \delta \sigma \{S[G]\}}$. Hier muß man lediglich den Hilfsatz über Darstellungen von (reellen) Zahlen durch $S > 0$ auf das Gitter $\mathcal{L}$ verallgemeinern, was jedoch trivial ist, da dessen Bild, genauso wie $\mathcal{O}$ selbst, ein $\mathbb{Z}$ -Gitter ist, also diskret. $\square$

Damit haben wir das Hauptwerkzeug der Theorie der Modulformen, die Thetareihen, auf einfache Algebren $A = A_{\mathbb{Q}}$ übertragen. In den nächsten Abschnitten werden nun die Eigenschaften von Thetareihen untersucht.

2.2 Die Wirkung der Involution auf Thetareihen

Nun wird die Wirkung der Involution $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ auf Thetareihen untersucht und die Inversionsformel hergeleitet. Es werden auch gewisse Invarianzeigenschaften von Thetareihen gezeigt.

2.2.1 Die Wirkung der Involution auf vektorwertige Thetareihen mit Charakteristik über einem Gitter

Als erstes muß das Verhalten der Thetareihen unter der (symplektischen) Involution $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$ untersucht werden. Dies geschieht, wie üblich, mit Hilfe des Poissonschen Summationsverfahrens. An der Stelle, an der wir ein Volumen (Funktionaldeterminante) konkret berechnen, benutzen wir unsere Standardeinbettung, um $D_{\mathbb{R}} \subset D_{\mathbb{C}}$ als Teil von $M_s(\mathbb{C}^m)$ aufzufassen. Es gilt genauer

2.1.1 Bemerkung : Seien $W = W^{(r,n)} \in D_{\mathbb{R}}^{(r,n)}$, $A \in M_r(D_{\mathbb{R}})$ und $B \in M_n(D_{\mathbb{R}})$. Die lineare Variablentransformation $W \mapsto AWB$ hat die Funktionaldeterminante $\text{Det}(A)^{ns} \text{Det}(B)^{rs}$.

Beweis : Im reellen Fall faßt man A und B als m -Tupel gewöhnlicher Matrizen auf,

$$A = (A^{(1)}, \dots, A^{(m)}) \in M_{rs}(\mathbb{R}^m) \quad \text{und} \quad B = (B^{(1)}, \dots, B^{(m)}) \in M_{ns}(\mathbb{R}^m).$$

Es ist $\text{Det}(A) = \prod \det(A^{(i)})$, $\text{Det}(B) = \prod \det(B^{(i)})$. Die Funktionaldeterminante der zwei Teiltransformationen ergibt sich jeweils als eine Potenz dieser Zahlen; man muß dazu die Spalten- bzw. Zeilenanzahl der Komponenten von $W \in (\mathbb{R}^m)^{(rs,ns)}$ berücksichtigen. Im komplexen Fall muß man entsprechend von jeder der $m/2$ Komponenten $A^{(i)} \in M_{rs}(\mathbb{C})$ bzw. $B^{(i)} \in M_{ns}(\mathbb{C})$ die reelle Determinante

$$\det(\phi(A^{(i)})) = |\det(A^{(i)})|^2 = \text{Det}(A^{(i)}) \quad \text{bzw.} \quad \det(\phi(B^{(i)})) = |\det(B^{(i)})|^2 = \text{Det}(B^{(i)})$$

bilden. Deren Produkt ergibt aber gerade wieder den richtigen Faktor $\text{Det}(A) = \prod_{i=1}^{m/2} \text{Det}(A^{(i)}) = \prod_{i=1}^m \det(A^{(i)})$, bzw. entsprechend für B . Im quaternionären Fall schließlich, erhält man ein zusätzliches Quadrat durch die Einbettung ins reelle,

$$\text{Det}(A) = \prod \det(\iota(A^{(i)})), \quad \text{aber} \quad \det(\phi_{\mathbb{H}}(A^{(i)})) = \det(\phi_{\mathbb{C}} \circ \iota(A^{(i)})) = \det(\iota(A^{(i)}))^2,$$

und entsprechend für B , die Komponenten der Matrizen $A \in M_r(\mathbb{H}^m)$ und $B \in M_n(\mathbb{H}^m)$ selbst haben jedoch nur die Größe $r(s/2) = r$, bzw. $n(s/2) = n$. $\square$

Damit erhält man

2.1.2 Satz : i) Sei P ein Polynom. Dann gilt

$$\vartheta_{\mathcal{L},P} \left[\begin{matrix} U \\ V \end{matrix} \right] (S; Z) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det} \left(\frac{Z}{i} \right)^{-\frac{rs}{2}} e^{2\pi i \sigma \{ \overline{V}' U \}} \vartheta_{\mathcal{L}^*,Q} \left[\begin{matrix} V \\ -U \end{matrix} \right] (S^{-1}; -Z^{-1}),$$

wobei $Q(X, Z)$ die Gauß-Transformierte von $\tilde{P}(W) = P(W(-iZ)^{1/2})$ an der Stelle $M = X(iZ)^{1/2}$ ist. Für ein pluriharmonisches P ist dieses Q einfach

$$Q(X, Z) = \tilde{P}^*(M) = \tilde{P}(X(iZ)^{1/2}) = P(X(-i^2 Z^2)^{1/2}) = P(XZ).$$

(Man beachte, daß man in Q (überall) den Wert $-Z^{-1}$ einsetzen muß.)

ii) Ist insbesondere P eine harmonische Form, so gilt

$$\vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det} \left(\frac{Z}{i} \right)^{-\frac{rs}{2}} \rho_0(-Z^{-1}) \vartheta_{\mathcal{L}^*,P} \left[\begin{matrix} V \\ 0 \end{matrix} \right] (S^{-1}; -Z^{-1}) =$$

$$= v(I)\rho(J(-I, -Z^{-1}))\vartheta_{\mathcal{L}^*, P} \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} (S^{-1}; -Z^{-1}),$$

mit einem Multiplikatorsystem $v = v_\vartheta$ vom Gewicht rs (und dem fest gewählten Paar $\rho = (\rho_0, rs)$ zu diesem Gewicht).

Beweis : a) Wir benutzen die Holomorphie in U und definieren

$$\begin{aligned} f(W) &:= \vartheta_{\mathcal{L}, P} \begin{bmatrix} U+W \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}(G+U+W))e^{\pi i \sigma \{S[G+U+W]Z+2\overline{V}'(G+U+W)\}}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist periodisch: $f(W+H) = f(W)$, für $H = H^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$ mit $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}$. Sie besitzt also eine Fourier-Entwicklung

$$f(W) = \sum_{\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*} a(H)e^{2\pi i \sigma \{\overline{H}'W\}}.$$

Diese Koeffizienten hängen nicht vom „Imaginärteil“ $\text{IM}(W) = W_y$ ab, wir werden diesen in $W = W_x + iW_y$ frei wählen können.

b) Betrachte nun $a(H) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{L}^n)} \int_{\mathcal{L}^n} f(W)e^{-2\pi i \sigma \{\overline{H}'W\}} dW_x$. Dabei ist dW_x das euklidische Volumenelement im euklidischen Vektorraum $D_{\mathbb{R}}^{(r,n)}$, induziert durch das Skalarprodukt. Es wird über eine Fundamentalmasche von $\mathcal{L}^n = \mathcal{L} \times \cdots \times \mathcal{L}$ integriert. Da $\sigma(\overline{H}'G) \equiv 0 \pmod{2}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$ gilt, ist dies, nach Vertauschung von Summation und Integration,

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int_{D_{\mathbb{R}}^{(r,n)}} P(S^{1/2}(U+W))e^{\pi i \sigma \{S[U+W]Z+2\overline{(V-H)}'(U+W)\}}e^{2\pi i \sigma \{\overline{H}'U\}} dW_x.$$

$$\begin{aligned} \text{c) Nun liefern die Eigenschaften der Spur } \sigma\{S[U+W+S^{-1}(V-H)Z^{-1}]Z\} = \\ = \sigma\{S[U+W]Z+2\overline{(V-H)}'(U+W)\} - \sigma\{S^{-1}[V-H](-Z)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Man ergänzt also quadratisch, und erhält

$$\begin{aligned} a(H) &= \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} e^{2\pi i \sigma \{\overline{H}'U\}} e^{\pi i \sigma \{S^{-1}[V-H](-Z)^{-1}\}} \\ &\int_{D_{\mathbb{R}}^{(r,n)}} P(S^{1/2}(U+W))e^{\pi i \sigma \{S[U+W+S^{-1}(V-H)Z^{-1}]Z\}} dW_x. \end{aligned}$$

d) Es genügt die Inversionsformel für $Z = iY$ zu beweisen. Man verschiebt die Integration in W_x und wählt W_y , so daß

$$\begin{aligned} a(H) &= \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} e^{2\pi i \sigma \{\overline{H}'U\}} e^{\pi i \sigma \{S^{-1}[V-H](-iY)^{-1}\}} \\ &\int_{D_{\mathbb{R}}^{(r,n)}} P(S^{1/2}(W_x + iS^{-1}(V-H)Y^{-1}))e^{\pi i \sigma \{S[W_x](iY)\}} dW_x. \end{aligned}$$

Wir lassen den Index „x“ weg, und transformieren $W \mapsto S^{-1/2}WY^{-1/2}$. Die Determinante wurde so definiert, daß sich dadurch der Faktor $\text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det}(Y)^{-\frac{rs}{2}}$ ergibt.

e) Schließlich faßt man die Fourier-Koeffizienten zu $\vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = f(0) = \sum_{\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*} a(H)$ zusammen, und ersetzt noch $H \mapsto -H$ in der Summe. $\square$

2.1.3 Bemerkung : Der Wert des Multiplikatorsystems $v(I) = v_{\vartheta}(I)$ hängt von S und $\mathcal{L}$ ab. Man muß also genauer von einem Multiplikatorsystem $v = v_{S,\mathcal{L}} = v_{\vartheta,S,\mathcal{L}}$ für jede Matrix $S = \overline{S}' > 0$ und jedes Gitter $\mathcal{L}$ sprechen. Andererseits hängt $v_S(I)$ z.B. für $\mathcal{L} = \mathcal{O}^r$ nur von der unimodularen Klasse von S ab. Dieses Thema wird in den nächsten Abschnitten behandelt. $\square$

2.2.2 Stabilität gewisser Thetareihen unter ausgewählten Modulsstitutionen

Für den Beweis der Erzeugung des Raumes der singulären Modulformen zu einer Hauptkongruenzgruppe $\Gamma_n[q]$ durch Thetareihen $\vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z)$, braucht man nicht zu wissen, daß letztere tatsächlich solche Modulformen sind. Es genügt das Verhalten von

$$f(Z) = \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z) \text{ und } g(Z) = \rho(Z)^{-1} \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; -Z^{-1})$$

unter ausgewählten Modulsstitutionen zu kennen, und zwar der Translationen $Z \mapsto Z + qH$, $H = \overline{H}' \in M_n(\mathcal{O})$, und der Kegelautomorphismen $Z \mapsto Z[U]$, $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, $U \equiv E \pmod{q}$. Deren Untersuchung stellen wir dem allgemeinen Transformationsformalismus voran.

Ab jetzt sei stets $S = S^{(r)} > 0$ eine positive Matrix, $Z = Z^{(n)} \in \mathbb{H}_n$, P eine harmonische Form bezüglich ρ_0 und ρ das fest gewählte Paar vom Gewicht rs . (Wir werden nur den Fall $r < n$ benötigen, damit ist dann $n > 1$ automatisch erfüllt, was man an manchen Stellen braucht.)

2.2.1 Bemerkung : Die Thetareihe $\vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z)$ ist unter allen $M = \begin{pmatrix} E & qH \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \Gamma_n[q]$ invariant, wenn $qS[G] \in \mathcal{T}$, für alle $G = G^{(r,n)}$ mit $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$, gilt.

Beweis : Der durch die Translation entstehende Exponentialfaktor $e^{q\pi i \sigma \{S[G]H\}}$ ist für alle G (und H) gleich 1. $\square$

2.2.2 Bemerkung : Es gilt dann $\vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; M\langle Z \rangle) = \rho(J(M, Z)) \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z)$, für alle $M = \begin{pmatrix} \overline{U}' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_n[q]$, wenn $q\langle V \rangle \subset \mathcal{L}^*$ gilt.

$$\begin{aligned} \text{Beweis :} \text{ Es ist } \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z[U]) &= \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}G) e^{\pi i \sigma \{S[G](Z[U]) + 2\overline{V}'G\}} = \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P\left(S^{1/2}(G\overline{U}')\overline{U}'^{-1}\right) e^{\pi i \sigma \{S[G\overline{U}']Z + 2(\overline{V}U^{-1})'(G\overline{U}')\}} = \rho_0(U^{-1}) \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, VU^{-1}; Z), \end{aligned}$$

also die Behauptung, da $\text{Det}(U) = 1$ und $VU^{-1} = V + qV\tilde{U}$, $\tilde{U} \in M_n(\mathcal{O})$. $\square$

2.2.3 Bemerkung : Die Funktion $\rho(Z)^{-1} \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; -Z^{-1})$ ist unter obigen Translationen invariant, wenn $qS^{-1}[G+V] \in \mathcal{T}$, für alle $G = G^{(r,n)}$ mit $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*$, gilt.

Beweis : Nun genügt es, daß der Exponentialfaktor $e^{q\pi i \sigma \{S^{-1}[G+V]H\}}$ für alle solche G (und H) trivial ist, wie man an der rechten Seite der Inversionsformel abliest. $\square$

2.2.4 Bemerkung : Es gilt dann

$$\rho(M\langle Z \rangle)^{-1} \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; -(M\langle Z \rangle)^{-1}) = \rho(J(M, Z)) \rho(Z)^{-1} \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; -Z^{-1}),$$

für alle $M = \begin{pmatrix} \overline{U}' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_n[q]$, wenn $q\langle V \rangle \subset \mathcal{L}^*$ gilt.

$$\begin{aligned} \text{Beweis :} \text{ Hier ist } \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; -(Z[U])^{-1}) &= \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}G) e^{\pi i \sigma \{S[G](-U^{-1}Z^{-1}\overline{U}'^{-1}) + 2\overline{V}'G\}} = \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}(GU^{-1})U) e^{\pi i \sigma \{S[GU^{-1}](-Z)^{-1} + 2(\overline{V}\overline{U}')'(GU^{-1})\}} = \rho_0(\overline{U}') \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V\overline{U}'; -Z^{-1}). \end{aligned}$$

Man hat also $\rho(Z[U])^{-1}\rho(\overline{U}') = \rho(U^{-1})\rho(Z)^{-1}$ zu zeigen, also $\rho(\overline{U}')\rho(Z) = \rho(Z[U])\rho(U^{-1})$. Weil ρ_0 die Kozykel-Relation erfüllt und die auftretenden Determinanten gleich sind, steht auf beiden Seiten $\rho\left(J\left(\begin{pmatrix} 0 & -U^{-1} \\ \overline{U}' & 0 \end{pmatrix}, Z\right)\right)$. $\square$

Insgesamt erhält man also die

2.2.5 Invarianzeigenschaften von Thetareihen : *Es habe S die Eigenschaften $qS[G] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$, und $qS^{-1}[G + V] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*$. Außerdem gelte $q\langle V \rangle \subset \mathcal{L}^*$ für die Charakteristik. Dann gilt, für die in 2.2.1 und 2.2.2 angegebenen Modulsstitutionen,*

$$f(M\langle Z \rangle) = \rho(J(M, Z))f(Z) \quad \text{und} \quad g(M\langle Z \rangle) = \rho(J(M, Z))g(Z). \quad \square$$

Diese Bedingungen an S kann man umschreiben.

2.2.6 Bemerkung : a) Die Bedingungen

$$qS[G] \in \mathcal{T}, \quad \text{bzw.} \quad qS^{-1}[H] \in \mathcal{T}, \quad \text{für alle } \langle G \rangle \subset \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*,$$

sind, falls $n > 1$, zu den Forderungen

$$qS[g] \in \mathcal{T}_1 \quad \text{und} \quad qSg \in \mathcal{L}^*, \quad \text{bzw.} \quad qS^{-1}[h] \in \mathcal{T}_1 \quad \text{und} \quad qS^{-1}h \in \mathcal{L}, \quad \text{für alle } g \in \mathcal{L} \quad \text{und} \quad h \in \mathcal{L}^*,$$

entsprechend äquivalent. Im Falle $n = 1$ muß die zweite Forderung zu $\overline{g}'(qS)\tilde{g} \in \mathcal{O}_S^*$, bzw. $\overline{h}'(qS^{-1})\tilde{h} \in \mathcal{O}_S^*$, für alle $g, \tilde{g} \in \mathcal{L}$ und $h, \tilde{h} \in \mathcal{L}^*$ abgeschwächt werden. (Wir erinnern daran, daß $\mathcal{O}^* \subset \mathcal{O}_S^*$ gilt.)

Beweis : Die erste Forderung ist gerade die Bedingung an die Diagonalelemente von $qS[G]$ und $qS^{-1}[H]$. Die Elemente außerhalb der Diagonale liefern ($n > 1$) die Forderungen

$$\overline{g}'(qS)\tilde{g} \in \mathcal{O}^*, \quad \text{bzw.} \quad \overline{h}'(qS^{-1})\tilde{h} \in \mathcal{O}^*,$$

für alle $g, \tilde{g} \in \mathcal{L}$ und $h, \tilde{h} \in \mathcal{L}^*$. Da jedoch $\mathcal{L}$ und $\mathcal{L}^*$ (rechts-) $\mathcal{O}$ -Moduln sind, und

$$\sigma(\overline{x} \cdot \overline{g}'(qS)\tilde{g}) = \sigma\left(\overline{(gx)}'(qS)\tilde{g}\right) \in \mathbb{Z}, \quad \text{bzw.} \quad \sigma(\overline{x} \cdot \overline{h}'(qS^{-1})\tilde{h}) = \sigma\left(\overline{(hx)}'(qS^{-1})\tilde{h}\right) \in \mathbb{Z},$$

für alle $x \in \mathcal{O}$ gelten muß, folgt die Behauptung.

Falls $n = 1$ ist, variiert man (die einzige Bedingung), $qS[g + \tilde{g}] \in \mathcal{T}_1$, bzw. $qS^{-1}[h + \tilde{h}] \in \mathcal{T}_1$. Durch Subtraktion erhält man $\overline{g}'(qS)\tilde{g} + \overline{\tilde{g}}'(qS)g \in \mathcal{T}_1$, bzw. $\overline{h}'(qS^{-1})\tilde{h} + \overline{\tilde{h}}'(qS^{-1})h \in \mathcal{T}_1$. Da aber

$$\sigma(\overline{g}'(qS)\tilde{g}x) = \sigma(\overline{x}\overline{\tilde{g}}'(qS)g) = \sigma\left(\overline{\tilde{g}}'(qS)gx\right), \quad \text{für } x \in \mathcal{O}_S,$$

(und entsprechend für S^{-1} .) kann man die Summanden trennen. Es ist jedoch lediglich $qSg \in \frac{1}{2}\mathcal{L}^*$, $qS^{-1}h \in \frac{1}{2}\mathcal{L}$. $\square$

Aus dem Beweis erhält man auch

2.2.7 Folgerung : *Seien $G, \tilde{G}, H$ und $\tilde{H}$ Matrizen aus $D^{(r,n)}$. Falls $n > 1$ und $B = B^{(r,n)} \equiv 0 \pmod{q}$ ist, so gilt*

$$2\sigma(\overline{G}'S\tilde{G}B) \equiv 2\sigma(\overline{H}'S^{-1}\tilde{H}B) \equiv 0 \pmod{2}, \quad \text{falls } \langle G \rangle, \langle \tilde{G} \rangle \subset \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \langle H \rangle, \langle \tilde{H} \rangle \subset \mathcal{L}^* \text{ gelten.}$$

Falls $n = 1$, sind diese Spuren lediglich ganz. $\square$

Schon bei obiger Untersuchung von Thetareihen erschien V in der natürlichen Bedingung an S^{-1} . Beim allgemeinen Transformationsformalismus wird auch U vollkommen symmetrisch in der Bedingung an S auftauchen.

2.2.8 Bemerkung : Für Matrizen $U, V \in D^{(r,n)}$, und $n > 1$, kann man auch die (verschärften) Bedingungen

$$qS[G + U] \in \mathcal{T}, \quad \text{bzw.} \quad qS^{-1}[H + V] \in \mathcal{T}, \quad \text{für alle } \langle G \rangle \subset \mathcal{L} \quad \text{und} \quad \langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*,$$

umschreiben auf die Forderungen

$$qS[G], qS[U] \in \mathcal{T} \text{ und } qSU \in (\mathcal{L}^*)^n, \text{ bzw. } qS^{-1}[H], qS^{-1}[V] \in \mathcal{T} \text{ und } qS^{-1}V \in \mathcal{L}^n.$$

Beweis : Wir behandeln S , S^{-1} geht vollkommen analog. Mit $G = 0$ erhält man die zweite Forderung und damit $qS[G] + \overline{U}'(qS)G + \overline{G}'(qS)U \in \mathcal{T}$. Nun betrachtet man die speziellen Matrizen $G = (g \ 0 \cdots 0)$ und $G = (0 \ g \ 0 \cdots 0)$, $g \in \mathcal{L}$, und erhält $\overline{g}'(qSU)_i \in \mathcal{O}^*$, $i = 1, \dots, n$, für die Spalten von $qSU = ((qSU)_1 \cdots (qSU)_n)$, und für alle $g \in \mathcal{L}$. Daraus folgt wiederum $qSU \in (\mathcal{L}^*)^n$. Damit ergibt dann obige Aufspaltung der ursprünglichen Bedingung in Summanden auch $qS[G] \in \mathcal{T}$. (Also ist $qS[G + U] \in \mathcal{T}$ tatsächlich eine Verschärfung letzterer Bedingung.) $\square$

2.2.9 Folgerung : Mit einer Matrix S und einem $U = (u_1 \cdots u_r)$ bzw. $V = (v_1 \cdots v_r)$, die obige verschärfte Bedingung erfüllen, erfüllen sie auch S und jede Matrix $\tilde{U} = (\tilde{u}_1 \cdots \tilde{u}_{r'})$ bzw. $\tilde{V} = (\tilde{v}_1 \cdots \tilde{v}_{r'})$, deren Spaltenvektoren $\tilde{u}_i = \sum_j u_j a_{ij}$ bzw. $\tilde{v}_i = \sum_j v_j a_{ij}$, $a_{ij} \in \mathcal{O}$, endliche Linearkombinationen der Spaltenvektoren von U bzw. V sind. Insbesondere spannen letztere einen rechts- $\mathcal{O}$ -Modul auf, dessen Elemente sämtlich die Bedingung bezüglich S erfüllen. $\square$

Wir wollen in dieser Arbeit singuläre Modulformen f behandeln. Wie sich ergibt, muß dann, falls f nicht konstant ist, $0 < r < n$ gelten, nur diese Gewichte werden wir behandeln. Wir brauchen also den Fall $n = 1$ nicht für die Thetareihen und ihr Transformationsverhalten.

2.3 Der allgemeine Transformationsformalismus für Thetareihen

In diesem Abschnitt wird nun das Verhalten von Thetareihen unter allgemeinen Substitutionen aus einer geeigneten Hauptkongruenzgruppe untersucht, und gezeigt, daß diese tatsächlich Modulformen sind.

2.3.1 Die Wirkung von symplektischen Matrizen auf Polynome und Charakteristiken von Thetareihen

Als erstes führen wir die Wirkung von symplektischen Matrizen auf vektorwertige Polynome P und beliebige Charakteristiken $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ ein, und außerdem noch, wie bei [Kr], eine Funktion κ , die bei der allgemeinen Transformationsformel als Faktor auftritt. Sei wie immer $S = \overline{S}' = S^{(r)} > 0$ eine positive Matrix in $M_r(D)$.

3.1.1 Definition und Lemma : Seien $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ und $U = U^{(r,n)}, V = V^{(r,n)} \in D_{\mathbb{C}}^{(r,n)}$. Wir setzen

$$M * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} U\overline{D}' - S^{-1}V\overline{C}' \\ V\overline{A}' - SU\overline{B}' \end{bmatrix}.$$

Dies definiert eine Wirkung von $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ auf $D_{\mathbb{C}}^{(r,n)} \times D_{\mathbb{C}}^{(r,n)}$.

Beweis : Es ist $M_1 * (M_2 * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) = M_1 * \begin{bmatrix} U\overline{D}_2' - S^{-1}V\overline{C}_2' \\ V\overline{A}_2' - SU\overline{B}_2' \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} (U\overline{D}_2' - S^{-1}V\overline{C}_2')\overline{D}_1' - S^{-1}(V\overline{A}_2' - SU\overline{B}_2')\overline{C}_1' \\ (V\overline{A}_2' - SU\overline{B}_2')\overline{A}_1' - S(U\overline{D}_2' - S^{-1}V\overline{C}_2')\overline{B}_1' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} U\overline{(D_1D_2 + C_1B_2)}' - S^{-1}V\overline{(D_1C_2 + C_1A_2)}' \\ V\overline{(A_1A_2 + B_1C_2)}' - SU\overline{(A_1B_2 + B_1D_2)}' \end{bmatrix} = (M_1M_2) * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}. \quad \square$$

3.1.2 Bemerkung : Für Translationen, Kegelautomorphismen und die Involution gilt respektive $\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ V - SUH \end{bmatrix}$, $\begin{pmatrix} \overline{U}' & 0 \\ 0 & \overline{U}'^{-1} \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U\overline{U}'^{-1} \\ V\overline{U}' \end{bmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S^{-1}V \\ -SU \end{bmatrix}$. $\square$

3.1.3 Definition und Lemma : Wir setzen ferner

$$\kappa(M, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) := e^{\pi i \sigma \{S[U]\overline{D}'B + S^{-1}[V]\overline{A}'C - 2\overline{V}'U\overline{B}'C\}}.$$

Die so definierte komplexwertige Funktion hat die Eigenschaft $\kappa(M_1M_2, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) = \kappa(M_1, M_2 * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix})\kappa(M_2, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix})$.

Beweis : Man hat die zwei Spuren

$$a = \sigma \{S[U]\overline{(C_1B_2 + D_1D_2)}' (A_1B_2 + B_1D_2) + S^{-1}[V]\overline{(A_1A_2 + B_1C_2)}' (C_1A_2 + D_1C_2) -$$

$$- 2\overline{V}'U\overline{(A_1B_2 + B_1D_2)}' (C_1A_2 + D_1C_2)\}$$

und

$$b = \sigma \{S[U\overline{D}_2' - S^{-1}V\overline{C}_2']\overline{D}_1'B_1 + S^{-1}[V\overline{A}_2' - SU\overline{B}_2']\overline{A}_1'C_1 -$$

$$-2(\overline{V\overline{A}_2 - S\overline{U}\overline{B}_2})'(U\overline{D}_2' - S^{-1}V\overline{C}_2')\overline{B}_1'C_1\} + \sigma\{S[U]\overline{D}_2'B_2 + S^{-1}[V]\overline{A}_2'C_2 - 2\overline{V}'U\overline{B}_2'C_2\}$$

zu vergleichen. Nach ausmultiplizieren sammelt man in b jeweils die Terme, die $S[U]$, $S^{-1}[V]$ oder $\overline{V}'U$ enthalten, und wendet mehrmals die Eigenschaften der Spur und die symplektischen Relationen an. $\square$

3.1.4 Bemerkung : Für Translationen, Kegelautomorphismen und die Involution gilt respektive $\kappa\left(\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}\right) = e^{\pi i \sigma\{S[U]H\}}$, $\kappa\left(\begin{pmatrix} \overline{U}' & 0 \\ 0 & \tilde{U}^{-1} \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}\right) = 1$ und $\kappa\left(\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}\right) = e^{2\pi i \sigma\{\overline{V}'U\}}$. $\square$

3.1.5 Definition und Lemma : Schließlich setzen wir, für eine Funktion $f = f(X, Z)$, $X = X^{(r,n)} \in D_{\mathbb{C}}^{(r,n)}$, $Z \in \mathbb{H}_n$,

$$f^M(X, Z) := f(X\overline{J(M^{-1}, Z)}', M^{-1}\langle Z \rangle).$$

Dies definiert eine Wirkung von $\mathrm{Sp}(A_{\mathbb{R}})$ auf die Menge dieser Funktionen.

Beweis : Es ist $(f^{M_1})^{M_2}(X, Z) = f^{M_2}(X\overline{J(M_1^{-1}, Z)}', M_1^{-1}\langle Z \rangle) =$

$$= f(X\overline{J(M_1^{-1}, Z)}' \overline{J(M_2^{-1}, M_1^{-1}\langle Z \rangle)}', M_2^{-1}\langle M_1^{-1}\langle Z \rangle \rangle) =$$

$$= f(X\overline{J(M_2^{-1}M_1^{-1}, Z)}', (M_1M_2)^{-1}\langle Z \rangle). \quad \square$$

3.1.6 Bemerkung : Für harmonische Formen $P(X) = f(X, Z)$ gilt

$$P^M(X, Z) = \rho_0(J(M^{-1}, Z))P(X),$$

also, weil ρ_0 die Kozykel-Relation erfüllt, $P^M(X, M\langle Z \rangle) = \rho_0(J(M, Z))^{-1}P(X)$. $\square$

Diese Lemmata werden natürlich dazu benutzt, das Transformationsverhalten der Thetareihen unter Modulsubstitutionen als eine Wirkung zu erkennen.

2.3.2 Umsummieren in Gittern, das Transformationsverhalten von Thetareihen unter der von Translationen, Kegelautomorphismen und der Involution erzeugten Kongruenzgruppe

Bei dem Beweis der allgemeinen Transformationsformel, sowie bei der Fourier-Jacobi-Entwicklung, werden wir gelegentlich Summationen ändern. Im ersten Fall z.B. werden wir anstelle von $G = G^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$, $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$, über $\tilde{G}$ und $\tilde{H}$, $G = \tilde{G} + \tilde{H}A$ und $\langle \tilde{H} \rangle \subset \mathcal{L}$ summieren. Nun gilt bekanntlich

3.2.1 Lemma : Sind $\mathcal{L}$ und $\tilde{\mathcal{L}}$ zwei ($\mathbb{Z}$ -) Gitter mit $\tilde{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$, so existiert eine natürliche Zahl k mit $k \cdot \mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$. Insbesondere hat $\tilde{\mathcal{L}}$ als Untergruppe von $\mathcal{L}$ endlichen Index. $\square$

Wenn also insbesondere $A \in M_n(\mathcal{O})$ invertierbar (als Element von $M_n(D)$) ist, so hat das Gitter $\mathcal{L}^n \cdot A \subset D^{(r,n)}$ endlichen Index in $\mathcal{L}^n$, und wir werden unter der Schreibweise „ $\tilde{G} \bmod \mathcal{L}^n \cdot A$ “ (oder auch einfach „ $\tilde{G} \bmod A$ “) verstehen, daß $\tilde{G}$ ein Repräsentantensystem von $\mathcal{L}^n / (\mathcal{L}^n \cdot A)$ durchläuft. Entsprechende Notation wird auch in den anderen Fällen benutzt, und die Umsummierungen sind immer sinnvoll, da wir es nur mit absolut konvergenten Reihen zu tun haben. Wir benutzen noch

3.2.2 Bemerkung : Ist $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n[q]$ eine symplektische Matrix, und $q > 1$, so ist $A \in \mathrm{Gl}(n, D)$ invertierbar.

Beweis : Wenn nicht, so hätte A die reduzierte Norm $\mathrm{Det}(A) = 0$, wie sich aus den allgemeinen Eigenschaften einer Normfunktion über dem Schiefkörper D ergibt. Die symplektische Relation $\overline{A}'D - \overline{C}'B = E$ ergibt aber $\mathrm{Det}(A) \equiv 1 \bmod q$. $\square$

Der Fall der vollen Modulgruppe nimmt also eine besondere Stellung ein, und wir ziehen ihn, bzw. seinen einfachen „Sonderteil“, vor. Γ_n muß zwar i.a. nicht von Translationen, Kegelautomorphismen und der Involution erzeugt werden, wir untersuchen aber erst, wann sich eine Thetareihe unter allen diesen symplektischen Matrizen wie eine Modulform verhält. Ähnlich wie bei den Invarianzbedingungen aus dem letzten Abschnitt erhalten wir die

3.2.3 Erste Bedingung : Sei P eine harmonische Form. Die Thetareihe $\vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z)$ transformiert sich, unter allen Translationen und Kegelautomorphismen, gemäß

$$\vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = \kappa(M, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) \rho(J(M, Z))^{-1} \vartheta_{\mathcal{L},P} \left[M * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right] (S; M \langle Z \rangle),$$

stets dann, wenn $S[G] \in \mathcal{T}$ ist, für alle $G = G^{(r,n)}$ mit $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$ (auch für $n = 1$).

Beweis : a) Sei $M = \begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix}$ eine Translation. U bleibt unter M invariant, während V in $V - SUH$ übergeführt wird. Im Exponenten der Thetareihe auf der rechten Seite erhält man also den Zusatzterm

$$\pi i \sigma \{S[G + U]H - 2\overline{(SUH)}' (G + U)\} =$$

$$= \pi i \sigma \{S[G]H + 2\overline{G}' (SUH) + S[U]H - 2\overline{(SUH)}' G - 2S[U]H\} \equiv -\pi i \sigma \{S[U]H\} \pmod{2}.$$

Dieser hebt sich aber gegen den Exponenten des κ -Faktor weg.

$$\begin{aligned} \text{b) Sei } M &= \begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & \tilde{U}^{-1} \end{pmatrix} \text{ ein Kegelautomorphismus. Es ist } \vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U\tilde{U}^{-1} \\ V\tilde{U} \end{bmatrix} (S; Z[\tilde{U}]) = \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P \left(S^{1/2} \left(G + U\tilde{U}'^{-1} \right) \right) e^{\pi i \sigma \left\{ \left(S \begin{bmatrix} G+U\tilde{U}'^{-1} \end{bmatrix} \right)_{Z[\tilde{U}]+2\overline{(V\tilde{U})}'} (G+U\tilde{U}'^{-1}) \right\}} \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P \left(S^{1/2} \left(G\tilde{U}' + U \right) \tilde{U}'^{-1} \right) e^{\pi i \sigma \left\{ S \begin{bmatrix} G\tilde{U}' + U \end{bmatrix}_{Z+2\overline{V'}} (G\tilde{U}' + U) \right\}} = \rho_0(\tilde{U}^{-1}) \vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z). \end{aligned}$$

Da $\text{Det}(\tilde{U}) = 1$, muß man dies gerade mit $\rho(J(M, Z))^{-1}$ multiplizieren. $\square$

Nun benutzen wir die Inversionsformel für die

3.2.4 Zweite Bedingung : Sei $n > 1$ und P weiterhin eine harmonische Form. Es gilt dann

$$\vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = v(I)^{-1} e^{2\pi i \sigma \{\overline{V'} U\}} \rho(-Z)^{-1} \vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} S^{-1}V \\ -SU \end{bmatrix} (S; -Z^{-1}),$$

wenn zusätzlich $S^{-1}[G] \in \mathcal{T}$ ist, für alle $G = G^{(r,n)}$ mit $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*$.

Beweis : Es ist nach der Involutionsformel 2.1.2

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} S^{-1}V \\ -SU \end{bmatrix} (S; -Z^{-1}) &= e^{2\pi i \sigma \{\overline{(-SU)}' (S^{-1}V)\}} v(I) \rho(Z) \vartheta_{\mathcal{L}^*,P} \begin{bmatrix} -SU \\ -S^{-1}V \end{bmatrix} (S^{-1}; Z) = \\ &= e^{-2\pi i \sigma \{\overline{V'} U\}} v(I) \rho(-Z) \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*}} P((S^{-1})^{1/2} (G + (SU))) e^{\pi i \sigma \{(S^{-1})[G+(SU)]Z+2\overline{(S^{-1}V)}' (G+(SU))\}} = \\ &= e^{-2\pi i \sigma \{\overline{V'} U\}} v(I) \rho(-Z) \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*}} P(S^{1/2} (S^{-1}G + U)) e^{\pi i \sigma \{S[S^{-1}G+U]Z+2\overline{V'} (S^{-1}G+U)\}}. \end{aligned}$$

Wegen der Bedingung(en) an S gilt jedoch $S \cdot \mathcal{L}^n \subset (\mathcal{L}^*)^n$ und auch $S^{-1} \cdot (\mathcal{L}^*)^n \subset \mathcal{L}^n$, also sogar überall Gleichheit. Dann durchläuft aber mit G auch $S^{-1}G$ gerade $\mathcal{L}^n$, und man erhält die Reihe $\vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z)$. $\square$

Diese Bedingungen kann man als eine Verallgemeinerung des Begriffes „gerade“, in Bezug auf das Gitter, betrachten. Im Siegelschen Fall kann man aus diesen zwei Bedingungen ablesen, wann eine Thetareihe Modulform zur vollen Kongruenzgruppe ist. Hier muß zuerst noch der allgemeine Transformationsformalismus entwickelt werden.

2.3.3 Der allgemeine Transformationsformalismus für Thetareihen, spezielle Thetareihen als Modulformen zu Hauptkongruenzgruppen und zur vollen Modulgruppe

Nun wenden wir uns Hauptkongruenzgruppen $\Gamma_n[q]$ (mit $q > 1$) zu. Wir modifizieren eine Methode von Krieg. Um die Transformationsformel zu beweisen, vergleichen wir erst die Fourier-Entwicklungen von zwei Transformierten einer Thetareihe mit pluriharmonischen Koeffizienten P . Dabei nehmen wir stets $n > 1$ an. Dort wo Integrale explizit berechnet werden, benutzen wir unsere Standardeinbettung von $D_{\mathbb{R}}$ nach $M_s(\mathbb{C}^m)$.

3.3.1 Definition : Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n[q]$ fest, und $\begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} := M * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$. Setze

$$\varphi(W) := \vartheta_{\mathcal{L},PM} \begin{bmatrix} W + U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} (S; M\langle Z \rangle) \quad \text{und}$$

$$\psi(W) := e^{\pi i \sigma \{S[W](AZ+B)\overline{A'} + 2(\overline{V\overline{A'} - SU\overline{B'}})' W\}} \vartheta_{\mathcal{L},PW} \begin{bmatrix} U \\ V + SW(AZ+B) \end{bmatrix} (S; Z),$$

wobei $P_W(X) := P(X + S^{1/2}WA)$ sei. $\square$

3.3.2 Bemerkung : Es gilt $\varphi(0) = \vartheta_{\mathcal{L},PM} \begin{bmatrix} M * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \end{bmatrix} (S; M\langle Z \rangle)$ und $\psi(0) = \vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z)$. $\square$

3.3.3 Lemma : φ ist $\mathcal{L}^n$ -periodisch mit den Fourier-Koeffizienten

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det} \left(\frac{M\langle Z \rangle}{i} \right)^{-\frac{rs}{2}} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H'} U_0 - S^{-1}[V_0 - H](M\langle Z \rangle)^{-1}\}}$$

$$P \left(S^{-1/2}(H - V_0) \overline{(AZ + B)'}^{-1} \right), \quad \langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*.$$

Beweis : a) Die Periodizität $\varphi(W + H) = \varphi(W)$, $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}$ ist klar. Es ist

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int \varphi(W) e^{-2\pi i \sigma \{\overline{H'} W\}} dW_x, \quad \langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*.$$

b) Wir ersetzen wieder die Integration über die Fundamentalmasche durch die über den ganzen Raum, und benutzen $2\sigma(\overline{H'} G) \equiv 0 \pmod{2}$, also

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int P \left(S^{1/2}(W + U_0) \overline{(CZ + D)'}^{-1} \right) e^{\pi i \sigma \{S[W + U_0]M\langle Z \rangle + 2\overline{V_0'}(W + U_0) - 2\overline{H'} W\}} dW_x$$

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int P \left(S^{1/2}W \overline{(CZ + D)'}^{-1} \right) e^{\pi i \sigma \{S[W]M\langle Z \rangle + 2(\overline{V_0 - H})' W\}} e^{2\pi i \sigma \{\overline{H'} U_0\}} dW_x.$$

c) Nun ergänzen wir wieder quadratisch, wählen (erneut) W_y , und transformieren die Variable.

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H'} U_0 - S^{-1}[V_0 - H](M\langle Z \rangle)^{-1}\}}$$

$$\int P \left(S^{1/2} W \overline{(CZ + D)}'^{-1} \right) e^{\pi i \sigma \{S[W + S^{-1}(V_0 - H)(M\langle Z \rangle)^{-1}]M\langle Z \rangle\}} dW_x$$

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H}' U_0 - S^{-1}[V_0 - H](M\langle Z \rangle)^{-1}\}}$$

$$\int P \left(S^{1/2} (W_x - S^{-1}(V_0 - H)(M\langle Z \rangle)^{-1}) \overline{(CZ + D)}'^{-1} \right) e^{\pi i \sigma \{S[W_x]M\langle Z \rangle\}} dW_x$$

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det} \left(\frac{M\langle Z \rangle}{i} \right)^{-\frac{rs}{2}} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H}' U_0 - S^{-1}[V_0 - H](M\langle Z \rangle)^{-1}\}}$$

$$\int P \left(\left(W \left(\frac{M\langle Z \rangle}{i} \right)^{-1/2} - S^{-1/2}(V_0 - H)(M\langle Z \rangle)^{-1} \right) \overline{(CZ + D)}'^{-1} \right) e^{-\pi \sigma \{\overline{W}' W\}} dW.$$

d) Da P pluriharmonisch ist, kann der Wert des Integrals angegeben werden. Ferner ist $\overline{(M\langle Z \rangle)}' = M\langle Z \rangle$ und $\overline{(N_1 N_2)}'^{-1} = (\overline{N_1}')^{-1} (\overline{N_2}')^{-1}$, also ist dieser gerade

$$a(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det} \left(\frac{M\langle Z \rangle}{i} \right)^{-\frac{rs}{2}} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H}' U_0 - S^{-1}[V_0 - H](M\langle Z \rangle)^{-1}\}}$$

$$P \left(\left(S^{-1/2}(H - V_0) \overline{(AZ + B)}'^{-1} \overline{(CZ + D)}' \right) \overline{(CZ + D)}'^{-1} \right). \quad \square$$

Genauso arbeiten wir mit ψ .

3.3.4 Lemma : *Es gelte $qS[G] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$, sowie $qS^{-1}[H] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$. Dann ist ψ $\mathcal{L}^n$ -periodisch mit Fourier-Koeffizienten*

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \sum_{G \bmod A} \text{Det}(A)^{-\frac{rs}{2}} e^{-\pi i \sigma \{S[G]A^{-1}B\}} \text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det} \left(\frac{AZ + B}{i} \right)^{-\frac{rs}{2}}$$

$$e^{\pi i \sigma \{2\overline{H}' U_0 - S^{-1}[V_0 - H](M\langle Z \rangle)^{-1} + S[U]\overline{D}' B + S^{-1}[V]\overline{A}' C - 2\overline{V}' U \overline{B}' C\}} P \left(S^{-1/2}(H - V_0) \overline{(AZ + B)}'^{-1} \right),$$

$\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$. (Wenn man den Fall $n = 1$ mitbehandeln will, so muß man die Nebenbedingungen (vergleiche 2.2.6) an qS und qS^{-1} zusätzlich fordern, um z.B. in den Punkten a und e des Beweises die Spuren in den Griff zu bekommen.)

Beweis : a) Wir ordnen erst die Spur im Exponenten um:

$$\begin{aligned} & \sigma \{S[W](AZ + B)\overline{A}' + 2(\overline{V\overline{A}' - SU\overline{B}'})' W + S[U + G]Z + 2(\overline{V + SW(AZ + B)})'(G + U)\} = \\ & = \sigma \{S[W](AZ)\overline{A}' + S[W]B\overline{A}' + 2(\overline{V\overline{A}'})' W - 2(\overline{SU\overline{B}'})' W + S[(U + G)A^{-1}](AZ)\overline{A}' + \\ & + 2(\overline{V\overline{A}'})'(G + U)A^{-1} + 2(\overline{(G + U)A^{-1}})' SW(AZ)\overline{A}' + 2(\overline{(G + U)A^{-1}})' SWB\overline{A}'\} = \\ & = \sigma \{S[(U + G)A^{-1} + W](AZ)\overline{A}' + S[(U + G)A^{-1} + W]B\overline{A}' - S[U + G]A^{-1}B + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2(\overline{V\overline{A'}})'((G+U)A^{-1}+W)-2(\overline{SU\overline{B'}})'W\} = \\
& = \sigma\{S[(U+G)A^{-1}+W](AZ+B)\overline{A'}+2(\overline{V\overline{A'}}-\overline{SU\overline{B'}})'((G+U)A^{-1}+W)+ \\
& \quad +S[U]A^{-1}B-S[G]A^{-1}B\}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Periodizität $\psi(W+H)=\psi(W)$ klar, da die Umsummierung $G \mapsto G+HA$ den Faktor $e^{\pi i \sigma \{-S[H]B\overline{A'}-2\overline{G'}SHB\}}=1$ erzeugt.

b) Nun ist $b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int_{\mathcal{L}^n} \psi(W) e^{-2\pi i \sigma \{\overline{H'}W\}} dW_x$

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int_{\mathcal{L}^n} \sum_{\substack{G=G^{(r,n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}((G+U)A^{-1}+W)A) e^{\pi i \sigma \{S[(G+U)A^{-1}+W](AZ+B)\overline{A'}\}}$$

$$e^{\pi i \sigma \{2(\overline{V_0-H'})'((G+U)A^{-1}+W)+2\overline{H'}(G+U)A^{-1}+S[U]A^{-1}B-S[G]A^{-1}B\}} dW_x$$

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int_{\mathcal{L}^n} \sum_{\substack{G=\tilde{G}+\tilde{H}A \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}((\tilde{G}+\tilde{H}A+U)A^{-1}+W)A) e^{\pi i \sigma \{S[(\tilde{G}+\tilde{H}A+U)A^{-1}+W](AZ+B)\overline{A'}\}}$$

$$e^{\pi i \sigma \{2(\overline{V_0-H'})'((\tilde{G}+\tilde{H}A+U)A^{-1}+W)+2\overline{H'}(\tilde{G}+U)A^{-1}+S[U]A^{-1}B-S[\tilde{G}]A^{-1}B\}} dW_x.$$

c) Ersetze wieder die Summation durch Integration über den gesamten Raum, ergänze quadratisch und erhalte

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \int \sum_{G \bmod A} P(S^{1/2}((G+U)A^{-1}+W)A) e^{\pi i \sigma \{S[(G+U)A^{-1}+W](AZ+B)\overline{A'}\}}$$

$$e^{\pi i \sigma \{2(\overline{V_0-H'})'((G+U)A^{-1}+W)+2\overline{H'}(G+U)A^{-1}+S[U]A^{-1}B-S[G]A^{-1}B\}} dW_x$$

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \sum_{G \bmod A} \int P(S^{1/2}WA) e^{\pi i \sigma \{S[W](AZ+B)\overline{A'}+2(\overline{V_0-H'})'W+2\overline{H'}(G+U)A^{-1}\}}$$

$$e^{\pi i \sigma \{S[U]A^{-1}B-S[G]A^{-1}B\}} dW_x$$

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \sum_{G \bmod A} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H'}GA^{-1}-S[G]A^{-1}B\}} \int P(S^{1/2}WA)$$

$$e^{\pi i \sigma \{S[W+S^{-1}(V_0-H)\overline{A'}^{-1}(AZ+B)^{-1}](AZ+B)\overline{A'}-S^{-1}[V_0-H]\overline{A'}^{-1}(AZ+B)^{-1}+2\overline{H'}UA^{-1}+S[U]A^{-1}B\}} dW_x.$$

d) Das ist wiederum, nach geeigneter Wahl von W_y , und wegen der symplektischen Relationen,

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \sum_{G \bmod A} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H'}GA^{-1}-S[G]A^{-1}B\}}$$

$$\int P(S^{1/2}(W_x - S^{-1}(V_0 - H)\overline{A'}^{-1}(AZ+B)^{-1})A)$$

$$e^{\pi i \sigma \{S[W_x](AZ+B)\overline{A}' - S^{-1}[V_0-H]\overline{A}'^{-1}(AZ+B)^{-1} + 2\overline{H}'UA^{-1} + S[U]A^{-1}B\}} dW_x$$

$$b(H) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-n} \sum_{G \bmod A} e^{\pi i \sigma \{2\overline{H}'GA^{-1} - S[G]A^{-1}B\}} \text{Det}(S)^{-\frac{ns}{2}} \text{Det}\left(\frac{AZ+B}{i}\right)^{-\frac{rs}{2}}$$

$$\text{Det}(\overline{A}')^{-\frac{rs}{2}} P\left(-S^{-1/2}(V_0-H)(\overline{AZ+B})'^{-1}\right) e^{\pi i \sigma \{-S^{-1}[V_0-H]\overline{A}'^{-1}(AZ+B)^{-1} + 2\overline{H}'UA^{-1} + S[U]A^{-1}B\}}.$$

e) Nun ist $\overline{A}'^{-1} = \overline{A}'^{-1}(\overline{A}'D - \overline{C}'B + \overline{A}'CZ - \overline{C}'AZ) = (CZ + D) - CA^{-1}(AZ + B)$, also $\overline{A}'^{-1}(AZ + B)^{-1} = (M\langle Z \rangle)^{-1} - CA^{-1}$. Der Term in Z im Exponenten liefert also einen Faktor

$$e^{-\pi i \sigma \{S^{-1}[V_0-H](M\langle Z \rangle)^{-1}\}} e^{\pi i \sigma \{S^{-1}[V_0]CA^{-1} - 2\overline{H}'S^{-1}V_0CA^{-1}\}} e^{\pi i \sigma \{S^{-1}[H]CA^{-1}\}}.$$

Behandle erst $c(G, H) := e^{\pi i \sigma \{S^{-1}[H]CA^{-1} + 2\overline{H}'GA^{-1} - S[G]A^{-1}B\}}$. Der erste Summand der Spur ist

$$\sigma\{S^{-1}[H]C\overline{D}' - S^{-1}[H]C\overline{B}'CA^{-1}\} \equiv -\sigma\{S[S^{-1}HC]A^{-1}B\} \bmod 2,$$

und der zweite

$$2\sigma\{\overline{H}'G\overline{D}' - \overline{H}'G\overline{B}'CA^{-1}\} \equiv -2\sigma\{(\overline{S^{-1}HC})'SG(A^{-1}B)\} \bmod 2.$$

Es ist also $\sum c(G, H) = \sum e^{-\pi i \sigma \{S[G + S^{-1}HC]A^{-1}B\}}$. Wegen der Voraussetzung an S ist dies jedoch von H unabhängig und gleich $\sum e^{-\pi i \sigma \{S[G]A^{-1}B\}}$.

f) Setze schließlich noch $V_0 = V\overline{A}' - S\overline{U}\overline{B}'$ ein. Es ist $2\sigma\{-\overline{H}'S^{-1}V_0CA^{-1} + \overline{H}'UA^{-1}\} =$

$$= 2\sigma\{-\overline{H}'S^{-1}V\overline{C}' + \overline{H}'S^{-1}S\overline{U}\overline{B}'CA^{-1} + \overline{H}'U(\overline{D}'A - \overline{B}'C)A^{-1}\} = 2\sigma\{\overline{H}'U_0\}.$$

Genauso ist

$$\sigma\{S^{-1}[V_0]CA^{-1}\} = \sigma\{S^{-1}[V]\overline{A}'C - 2\overline{V}'U\overline{B}'C\} + \sigma\{S[U](\overline{B}'C)(A^{-1}B)\}.$$

Der letzte Term ergibt, zusammen mit $\sigma\{S[U]A^{-1}B\}$, $\sigma\{S[U](\overline{D}'A)(A^{-1}B)\}$. $\square$

Nun kann man die Fourierkoeffizienten vergleichen. Faßt man das, durch die Determinanten entstehende, Vorzeichen, die Determinante von A , und die Summe über G in den Koeffizienten $b(H)$ zu einem Koeffizienten zusammen, so erhält man, durch Vergleich der zwei Fourier-Reihen an der Stelle $W = 0$,

3.3.5 Satz : *Unter den getroffenen Voraussetzungen an S gilt, für pluriharmonisches P und $M \in \Gamma_n[q]$,*

$$\vartheta_{\mathcal{L}, P}\left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right](S; Z) = v(M)^{-1} \kappa(M, \left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right]) \text{Det}(J(M, Z))^{-\frac{rs}{2}} \vartheta_{\mathcal{L}, PM}\left[M * \left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right]\right](S; M\langle Z \rangle),$$

mit einem Multiplikatorsystem $v = v_\vartheta$ vom Gewicht rs . $\square$

3.3.6 Zusatz : *Das Multiplikatorsystem ist für Translationen und Kegelautomorphismen trivial.*

Beweis : Für $A = E$ oder $\overline{U}'$ (unimodular) durchläuft HA (genau) das gesamte Gitter, es genügt in $b(H)$ über $G = 0$ zu summieren, außerdem ist $\text{Det}(E) = \text{Det}(\overline{U}') = 1$. $\square$

3.3.7 Satz : *Für eine harmonische Form P , eine Charakteristik $\left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right]$, die $q\langle U \rangle \subset \mathcal{L}$ und $q\langle V \rangle \subset \mathcal{L}^*$ erfüllt, und eine positive Matrix S , mit $qS[U + G]$, $qS^{-1}[V + H] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$ und $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$, ist*

$$\vartheta_{\mathcal{L}, P}\left[\begin{smallmatrix} U \\ V \end{smallmatrix}\right](S; Z) \in [\Gamma_n[q], \rho, v]$$

eine Modulform vom Gewicht rs . (Wir erinnern daran, daß stets $n > 1$ gilt. Für $n = 1$ muß man zusätzlich noch $qS \cdot \mathcal{L}^n \subset (\mathcal{L}^*)^n$ und $qS^{-1} \cdot (\mathcal{L}^*)^n \subset \mathcal{L}^n$ fordern, um eine Modulform zu erhalten.)

Beweis : In diesem Fall verschwinden alle drei Spursummanden in $\kappa(M, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix})$ modulo 2, und es ist sowohl $\langle U - U_0 \rangle \subset \mathcal{L}$, wie auch $\langle V - V_0 \rangle \subset \mathcal{L}^*$. Da außerdem P eine harmonische Form ist, erhält man $P^M(X) = \rho_0(J(M, Z))^{-1}P(X)$. $\square$

Insbesondere sind die Thetareihen $\vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z)$, die die natürlichen Invarianzeigenschaften letzten Abschnittes besitzen, tatsächlich Modulformen. Der Fall $q = 1$, also der der vollen Modulgruppe ist bis jetzt ausgeschlossen, da Γ_n Matrizen $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ enthält, mit nicht-invertierbarem

A. Nun sei jedoch $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ eine symplektische Matrix. Dann ist $\begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A+HC & B+HD \\ C & D \end{pmatrix}$. Da $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \text{Gl}(2, A_{\mathbb{R}})$ invertierbar ist, findet man $H \in M_n(\mathcal{O})$, so daß $(A + HC)^{-1}$ existiert. Damit schließt man, in Verbindung mit 3.2.3 und 3.2.4, die Lücke, und erhält, unter den getroffenen Bedingungen an S , das gewünschte Transformationsverhalten für die Thetareihe, und damit die Sätze 3.3.5 und 3.3.7 auch für $q = 1$, also eine Verallgemeinerung des klassischen Satzes über gerade unimodulare Matrizen.

3.3.8 Satz : Seien $n > 1$, $S = S^{(r)} > 0$, so daß $S[G]$, $S^{-1}[H] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$ und $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$, und P pluriharmonisch. Dann gilt, für alle $M \in \Gamma_n$,

$$\vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (S; Z) = v(M)^{-1} \kappa(M, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) \text{Det}(J(M, Z))^{-\frac{rs}{2}} \vartheta_{\mathcal{L},PM} \left[M * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right] (S; M\langle Z \rangle),$$

mit einem gewissen Multiplikatorsystem $v = v_{\vartheta}$ vom Gewicht rs . Insbesondere ist, für eine harmonische Form P , $\vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} (S; Z) = \vartheta_{\mathcal{L},P}(S, 0; Z)$ eine Modulform, vom Gewicht rs , zur vollen Modulgruppe. $\square$

Will man auch für $n = 1$ Modulformen zur vollen Modulgruppe Γ_n konstruieren, so muß man zusätzlich $S \cdot \mathcal{L}^n \subset (\mathcal{L}^*)^n$ und $S^{-1} \cdot (\mathcal{L}^*)^n \subset \mathcal{L}^n$ fordern.

3.3.9 Bemerkung : Eigentlich hängt das Multiplikatorsystem $v = v_{\vartheta}$ von der Matrix S und dem Gitter $\mathcal{L}$ ab. Da jedoch, für unimodulares $\tilde{U} \in \text{Gl}(r, \mathcal{O})$, sowohl $\text{Det}(S) = \text{Det}(S[\tilde{U}])$, wie auch $\mathcal{L} = \tilde{U} \cdot \mathcal{L}$ gilt, falls z.B. $\mathcal{L} = \mathcal{O}^r$, zeigt die Definition von v , daß es genügt, für jede unimodulare Klasse $S[\text{Gl}(r, \mathcal{O})]$, ein $v = v_{S, \mathcal{O}^r} = v_{\vartheta, S, \mathcal{O}^r}$ zu betrachten. Im nächsten Abschnitt wird diese Wahl noch weiter verfolgt und auf beliebige Gitter verallgemeinert. $\square$

2.4 Definition eines nützlichen endlich-dimensionalen Vektorraumes von Thetareihen

Es wird ein Vektorraum Θ von speziellen Thetareihen gebildet, und, mittels der Reduktionstheorie, gezeigt, daß dieser endlich erzeugt ist. Ziel der Arbeit ist es, zu zeigen, daß Θ schon „alle“ singuläre Modulformen enthält.

2.4.1 Definition eines Vektorraumes von Thetareihen mit harmonischen Formen als vektorwertigen Koeffizienten

4.1.1 Definition : Seien q eine natürliche Zahl, und $r, n \in \mathbb{Z}$ ganz. Wir bezeichnen mit $\Theta = \Theta(q) = \Theta_{\mathcal{O}}(q, r, n)$ die Menge aller Thetareihen $\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, V; Z)$, zu einer positiven Matrix $S = S^{(r)} > 0$, mit beliebiger Charakteristik $V = V^{(r, n)} \in D_{\mathbb{C}}^{(r, n)}$ und einer harmonischen Form P , zu einem Gitter $\mathcal{L}$ über der Ordnung $\mathcal{O}$, die die Invarianzbedingungen $q\langle V \rangle \subset \mathcal{L}^*$, sowie $qS[G]$, $qS^{-1}[H + V] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}$ und $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$, erfüllen. (Wir gehen wiederum überall von $n > 1$ aus, was auch natürlich ist, da uns $r < n$ interessiert.) $\square$

4.1.2 Bemerkung : a) Θ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. Es gilt $\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, V; Z) \in [\Gamma_n[q], \rho, v]$, mit einem Multiplikatorsystem $v = v_{\vartheta} = v_{\vartheta, S, \mathcal{L}}$ vom Gewicht rs , für jedes Element $\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, V; Z) \in \Theta$, wie im letzten Abschnitt gezeigt wurde, also $\Theta \subset \sum_{v=v_{\vartheta, S, \mathcal{L}}} [\Gamma_n[q], \rho, v]$.

b) Da $\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, V; Z) = \sum_{\substack{G=G^{(r, n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}G) e^{\pi i \sigma \{S[G]Z + 2\overline{V}'G\}}$ schon Fourier-entwickelt ist, liest man ab, daß, genau für $r < n$, diese Thetareihen singulär sind, also $\Theta_{\mathcal{O}}(q, r, n) \subset \sum_v [\Gamma_n[q], rs, v]_S$. Das Hauptresultat dieser Arbeit ist, daß hier sogar Gleichheit gilt. $\square$

Nun wollen wir untersuchen, ob Θ auch endlich-dimensional ist. Dazu benutzen wir folgende Reduktion.

4.1.3 Lemma : Es sei $\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, V; Z) \in \Theta(q)$. Dann gelten

$$\vartheta_{M\mathcal{L}, P}(S, V; Z) = \vartheta_{\mathcal{L}, P((S[M])^{-1/2}\overline{M}'S^{1/2})}(S[M], \overline{M}'V; Z) \quad \text{und}$$

$$\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S[U], V; Z) = \vartheta_{\mathcal{L}, P(S^{-1/2}\overline{U}'^{-1}(S[U])^{1/2})}(S, \overline{U}'^{-1}V; Z).$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis : a) Es ist } \vartheta_{M\mathcal{L}, P}(S, V; Z) &= \sum_{\substack{G=G^{(r, n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2}MG) e^{\pi i \sigma \{S[MG]Z + 2\overline{V}'MG\}} = \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r, n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P\left(\overline{((S[M])^{-1/2}\overline{M}'S^{1/2})}'(S[M])^{1/2}G\right) e^{\pi i \sigma \{(S[M])[G]Z + 2(\overline{M}'V)'G\}} = \\ &= \vartheta_{\mathcal{L}, P((S[M])^{-1/2}\overline{M}'S^{1/2})}(S[M], \overline{M}'V; Z). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) Genauso ist } \vartheta_{\mathcal{L}, P}(S[U], V; Z) &= \sum_{\substack{G=G^{(r, n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P((S[U])^{1/2}G) e^{\pi i \sigma \{(S[U])[G]Z + 2\overline{V}'G\}} = \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r, n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P\left(\overline{(S^{-1/2}\overline{U}'^{-1}(S[U])^{1/2})}'S^{1/2}(UG)\right) e^{\pi i \sigma \{S[UG]Z + 2(\overline{U}'^{-1}V)'(UG)\}} = \\ &= \vartheta_{\mathcal{L}, P(S^{-1/2}\overline{U}'^{-1}(S[U])^{1/2})}(S, \overline{U}'^{-1}V; Z), \text{ da } U \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L} \text{ gilt. } \quad \square \end{aligned}$$

Ferner müssen wir natürlich V nur modulo $\mathcal{L}^n$, also Repräsentanten der endlich vielen Klassen $(\mathcal{L}/q\mathcal{L})^n$, betrachten, und daß die pluriharmonischen Polynome einen endlich-dimensionalen Vektorraum bilden hatten wir schon erwähnt. Umgekehrt zeigt der Beweis, daß mit $\vartheta_{\mathcal{L},P}(S, V; Z)$ auch

$$\vartheta_{M\mathcal{L},P}(S[M^{-1}], \overline{M}'^{-1}V; Z), \quad M \in \mathrm{Gl}(r, D) \quad \text{und} \quad \vartheta_{\mathcal{L},P}(S[U], \overline{U}'V; Z), \quad U \in \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}, \mathcal{L}),$$

in $\Theta(q)$ liegen, denn man sieht sofort, daß die auf P wirkende Matrizen unitär sind, z.B. ist

$$\overline{(S[M])^{-1/2} \overline{M}' S^{1/2}}' ((S[M])^{-1/2} \overline{M}' S^{1/2}) = S^{1/2} M (S[M])^{-1} \overline{M}' S^{1/2} = E.$$

Damit sind aber, nach Lemma 1.1.9, die transformierten Polynome ebenfalls harmonische Formen.

Die Bedingungen an S aus der Definition von $\Theta(q)$ liefern jeweils eine, nur von q abhängige, untere bzw. obere Schranke für $\mathrm{Det}(S)$. (Man hat dabei zu benutzen, daß eine natürliche Zahl l existiert, mit $\mathcal{O}^r \subset l \cdot \mathcal{L}$. Im klassischen Spezialfall $D = K = \mathbb{Q}$, $\mathcal{O} = \mathbb{Z}$, bedeutet „ qS und qS^{-1} gerade“ z.B., daß $\frac{1}{q} \leq \mathrm{Det}(S) \leq q$ gilt.) Ferner ist die Menge der Determinanten aller solcher S diskret, denn es gilt $\mathrm{Det}(S) \in \mathbb{Q}$, und es existieren natürliche Zahlen l_1 und l_2 , so daß $l_1 \cdot \mathcal{O}^r \subset \mathcal{L}$ und $\mathcal{O}^* \subset \frac{1}{l_2} \cdot \mathcal{O}$, also existiert auch ein l_3 mit $S \in \frac{1}{l_3} \cdot M_r(\mathcal{O})$, und damit $\mathrm{Det}(S) \in \frac{1}{l_4} \cdot \mathbb{Z}$, für ein weiteres $l_4 \in \mathbb{N}$.

Es muß also die Anzahl der Klassen isomorpher Gitter, $\mathrm{Gl}(r, D) \cdot \mathcal{L}$, sowie die der unimodularen Klassen hermitescher (bzw. symmetrischer) Matrizen, $S[\mathrm{Gl}(r, \mathcal{O})]$, mit gegebener Determinante, untersucht werden. $\mathrm{Gl}(r, \mathcal{O})$ besteht gerade aus den invertierbaren Elementen von $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}^r, \mathcal{O}^r)$. Da man ferner jedes rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L} \subset D^r$ über eine natürliche Zahl mit $\mathcal{O}^r$ vergleichen kann, $l \cdot \mathcal{O}^r \subset \mathcal{L} \subset \frac{1}{l} \cdot \mathcal{O}^r$, ist, falls die zweite dieser Anzahlen endlich ist, auch die der Klassen $[S]_{\mathcal{L}} = S[G]$, mit $G = \mathrm{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L}) \subset M_r(D)$, für jedes auftretende $\mathcal{L}$, endlich. Es gilt (siehe z.B. [Ro], VI.4.1 im Spezialfall $A = D$)

4.1.4 Satz : *Für eine $\mathcal{O}_K$ -Ordnung $\mathcal{O}$ in einem Schiefkörper D , mit $\mathcal{Z}(D) = K$, und einen festen, endlich erzeugten D -Modul M , existieren nur endlich viele nicht-isomorphe $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L}_i$, $i = 1, \dots, k$, mit $D \cdot \mathcal{L}_i = M$. $\square$*

4.1.5 Folgerung : *Die Anzahl der Isomorphie-Klassen $\mathrm{Gl}(r, D) \cdot \mathcal{L}$ von rechts- $\mathcal{O}$ -Gittern $\mathcal{L} \subset D^r$ ist endlich.*

Beweis : Wir wissen, daß wir unsere Ordnungen und Gitter immer als $\mathcal{O}_K$ -Ordnungen auffassen können. Wir wählen speziell $M = D^r$. Wir arbeiten mit $\mathcal{O}$ -Gittern $\mathcal{L}$, also $D \cdot \mathcal{L} = D^r$. $\square$

Die notwendige Aussage über unimodulare Klasse von Matrizen kann man z.B. aus der Reduktionstheorie von Koecher erhalten. Sie folgen aber auch aus der allgemeinen Reduktionstheorie von Borel, deren Resultate sehr viel allgemeiner sind. Wir geben lediglich das gewünschte Ergebnis an.

4.1.6 Lemma : *Die Anzahl der unimodularen Klassen von positiven Matrizen, $S[\mathrm{Gl}(r, \mathcal{O})]$ mit $S > 0$, von vorgegebener Determinante $\mathrm{Det}(S)$, ist endlich. $\square$*

Aus allen hergeleiteten und zitierten Endlichkeitsaussagen ergibt sich

4.1.7 Satz : *Für $r < n$ und eine beliebige Stufe q , ist $\Theta = \Theta(q) = \Theta_{\mathcal{O}}(q, r, n) \subset \sum [\Gamma_n[q], rs, v]_S$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum von Modulformen. $\square$*

Außerdem erhalten wir aus diesen Überlegungen den

4.1.8 Zusatz : *Die Thetareihen in $\Theta(q)$ hängen von nur endlich vielen (möglicherweise verschiedenen) Thetamultiplikatorsystemen $v_{i,j} = v_{S_i, \mathcal{L}_j} = v_{\vartheta, S_i, \mathcal{L}_j}$ ab, also $\Theta \subset \sum_{i,j} [\Gamma_n[q], \rho, v_{i,j}]_S$. $\square$*

Für die folgende Untersuchung treffen wir die

4.1.9 Festlegung : *Zu jeder Stufe q fixieren wir ein Multiplikatorsystem $v = v_q$. $\square$*

Kapitel 3

Eigenschaften von singulären Modulformen, die Fourier-Jacobi-Entwicklung und die Umkehrrelation

Nachdem Thetareihen, als Beispiele von Modulformen, studiert wurden, werden nun alle (singulären) Modulformen betrachtet. Mit Hilfe der Resultate des letzten Kapitels, wird die algebraische Struktur dieses Vektorraumes untersucht, indem seine Elemente als Fourier-Reihen betrachtet werden. Es werden Beziehungen zwischen den Koeffizienten dieser Reihen hergeleitet, und das Problem der Erzeugung des singulären Raumes allmählich algebraisiert.

3.1 Die Fourier-Jacobi-Entwicklung von singulären Modulformen über einfachen Algebren

In diesem Abschnitt werden die Fourierkoeffizienten einer singulären Modulform studiert. Die betrachtete besondere Zusammenfassung dieser Koeffizienten heißt Fourier-Jacobi-Entwicklung. Es treten auf natürliche Art und Weise Thetareihen auf, deren Transformationsformalismus den Beweis der wichtigen Sätze ermöglicht, die den Rang und das Gewicht einer Modulform mit der Eigenschaft singulär zu sein, in Verbindung bringen.

3.1.1 Die Fourier-Jacobi-Entwicklung einer Modulform

Ein sehr wichtiges Hilfsmittel zum Studium von Modulformen, insbesondere der singulären ist, wie üblich, die sogenannte

1.1.1 Fourier-Jacobi-Entwicklung : Sei $f \in [\Gamma_n[q], r, v]$ eine nicht-konstante Modulform und $\nu < n$ eine natürliche Zahl. Wir zerlegen die Variable Z (genauer jede Komponente $Z^{(i)}$ von $Z = (Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)})$) in Blöcke, $Z = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ \overline{Z}_1 & Z_2 \end{pmatrix}$, $Z_0 = Z_0^{(n-\nu)}$, $Z_1 = Z_1^{(n-\nu, \nu)}$, $Z_2 = Z_2^{(\nu)}$. Genauso zerlegen wir die Elemente von $\mathcal{T} = \mathcal{T}_n$ in $T = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 \\ \overline{T}_1 & T_2 \end{pmatrix}$ und nennen die Umordnung der Fourier-Entwicklung

$$f(Z) = \sum_{T \in \mathcal{T}} a(T) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{TZ\}} = \sum_{T_2 \in \mathcal{T}_\nu} \varphi_{T_2}(Z_0, Z_1) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{T_2 Z_2\}}$$

von f Fourier-Jacobi-Entwicklung, und die Funktionen

$$\varphi(Z_0, Z_1) = \varphi_{T_2}(Z_0, Z_1) = \sum_{T = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 \\ \overline{T}_1 & T_2 \end{pmatrix}} a(T) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{T_0 Z_0 + 2\overline{T}_1' Z_1\}}$$

Fourier-Jacobi-Koeffizienten, der Stufe ν , von f . $\square$

1.1.2 Bemerkung : Jedes φ läßt sich in eine Fourier-Reihe

$$\varphi(Z_0, Z_1) = \sum_{H \in (\mathcal{O}^*)^{(n-\nu, \nu)}} b_H(Z_0) e^{\frac{2\pi i}{q} \sigma\{\overline{H}' Z_1\}}$$

entwickeln.

Beweis : f ist unter der Translation $Z \mapsto Z + S$, $S = \begin{pmatrix} 0 & qG \\ q\overline{G}' & 0 \end{pmatrix}$, $G = G^{(n-\nu, \nu)} \in \mathcal{O}^{(n-\nu, \nu)}$, invariant, also ist $\varphi(Z_0, Z_1)$, als Funktion von Z_1 , $q\mathcal{O}^{(n-\nu, \nu)}$ -periodisch. $\square$

Nun betrachten wir $U = \begin{pmatrix} E & G \\ 0 & E \end{pmatrix} \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, $G \equiv 0 \pmod{q}$. Es ist

$$Z[U] = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{G}' & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_0 & Z_0 G + Z_1 \\ \overline{Z}_1' & \overline{Z}_1' G + Z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_0 G + Z_1 \\ (Z_0 G + Z_1)' & Z_0[G] + \overline{G}' Z_1 + \overline{Z}_1' G + Z_2 \end{pmatrix},$$

und $f(Z[U]) = \rho_0(U)^{-1} f(Z)$. Wir erhalten also

1.1.3 Bemerkung : a) Es gilt $\varphi(Z_0, Z_1 + Z_0 G) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & -G \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) e^{-\frac{\pi i}{q} \sigma\{T_2(Z_0[G] + 2\overline{G}' Z_1)\}} \varphi(Z_0, Z_1)$, für $G \equiv 0 \pmod{q}$.

b) Sei $G = G^{(n-\nu, \nu)}$, $\langle G \rangle \subset \mathcal{O}^{n-\nu}$. Dann gilt

$$b_{H+qGT_2}(Z_0) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & qG \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) e^{\pi i \sigma\{qT_2(Z_0[G]) + 2\overline{H}' Z_0 G\}} b_H(Z_0).$$

Beweis : a) Die Behauptung folgt aus dem Transformationsverhalten der Modulform.

b) Man ändert in der Fourier-Entwicklung von $\varphi(Z_0, Z_1 - qZ_0 G)$ die Summation $H \mapsto H + qGT_2$ und vergleicht mit $\varphi(Z_0, Z_1)$. $\square$

Ab jetzt nehmen wir an, daß T_2 invertierbar ist.

1.1.4 Lemma : Es gilt $\varphi_{T_2}(Z_0, Z_1) = \sum_{H \bmod qT_2} \vartheta_{\mathcal{O}^\nu, P} \left[\begin{smallmatrix} (qT_2)^{-1} \overline{H}' \\ T_2 \overline{Z}_1' \end{smallmatrix} \right] (qT_2; Z_0) c_H(Z_0)$. Dabei ist $P(X) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & q^{1/2} \overline{X}' T_2^{-1/2} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)$, $X = X^{(\nu, n-\nu)}$, und

$$c_H(Z_0) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & -HT_2^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) e^{-\pi i \sigma \{ (qT_2)^{-1} (Z_0[H]) \}} b_H(Z_0).$$

Beweis : Es ist $P((qT_2)^{1/2}(G + (qT_2)^{-1} \overline{H}')) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & q^{1/2}(\overline{G}' + \frac{1}{q} HT_2^{-1}) q^{1/2} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & q \overline{G}' + HT_2^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)$, $G = G^{(\nu, n-\nu)}$, $\langle G \rangle \subset \mathcal{O}^\nu$. Im Exponenten der Thetareihe steht die Spur

$$\begin{aligned} \sigma \{ qT_2[G + (qT_2)^{-1} \overline{H}'] Z_0 + 2Z_1 T_2 G + \frac{2}{q} Z_1 \overline{H}' \} = \\ = \sigma \{ qT_2(Z_0[\overline{G}']) + 2\overline{H}' Z_0 \overline{G}' + (qT_2)^{-1} [\overline{H}'] Z_0 + \frac{2}{q} \overline{(q \overline{G}' T_2)}' Z_1 + \frac{2}{q} \overline{H}' Z_1 \}. \end{aligned}$$

Diesen vergleicht man mit dem in $\varphi(Z_0, Z_1) =$

$$= \sum_{H \bmod qT_2} \sum_{\langle G \rangle \subset \mathcal{O}^{n-\nu}} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & qG \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) e^{\pi i \sigma \{ qT_2(Z_0[G] + 2\overline{H}' Z_0 G) \}} e^{\frac{2\pi i}{q} \sigma \{ \overline{(H + qGT_2)}' Z_1 \}} b_H(Z_0). \quad \square$$

1.1.5 Bemerkung : Sei $M_0 = \begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \in \Gamma_{n-\nu}[l]$. Dann wirkt das Bild $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ von M_0 in $\Gamma_n[l]$, $A = \begin{pmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} D_0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, gemäß

$$M \langle Z \rangle = \begin{pmatrix} A_0 Z_0 + B_0 & A_0 Z_1 \\ C_0 Z_0 + D_0 & C_0 Z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 Z_0 + D_0 & C_0 Z_1 \\ 0 & E \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} M_0 \langle Z_0 \rangle & \overline{(C_0 Z_0 + D_0)}'^{-1} Z_1 \\ \overline{Z}_1' (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} Z_2 - \overline{Z}_1' (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 Z_1 \end{pmatrix},$$

weil aus den symplektischen Relationen folgt, daß $-(A_0 Z_0 + B_0)(C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 Z_1 + A_0 Z_1 = \overline{(C_0 Z_0 + D_0)}'^{-1} Z_1$ gilt. $\square$

1.1.6 Folgerung : Für jedes $l \geq q$, $q|l$, gilt $\varphi(M_0 \langle Z_0 \rangle, \overline{(C_0 Z_0 + D_0)}'^{-1} Z_1) =$

$$v(M) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} C_0 Z_0 + D_0 & C_0 Z_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \text{Det} \left(\begin{pmatrix} C_0 Z_0 + D_0 & C_0 Z_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)^{r/2} e^{\frac{\pi i}{q} \sigma \{ T_2 [\overline{Z}_1'] (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 \}} \varphi(Z_0, Z_1). \quad \square$$

Andererseits wollen wir untersuchen, wie sich die zu obigem P gebildete Thetareihe, jedoch mit beliebiger Charakteristik, unter M transformiert. (Diese ist zwar keine Funktion, sondern ein Operator, das stört jedoch nicht.) Dazu wählen wir $l, q|l$, so groß, daß $l(qT_2)[G], l(qT_2)^{-1}[H] \in \mathcal{T}_{(n-\nu)}$, für alle $\langle G \rangle \subset \mathcal{O}^\nu$ und $\langle H \rangle \subset (\mathcal{O}^*)^\nu$, gilt. Dann kann man wie im Beweis der allgemeinen Transformationsformel von Thetareihen verfahren, denn dort wird noch keine Bedingung an die Charakteristik $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$ gestellt. Die verwackelten Operatoren $\xi(W)$ (um Verwechslung mit $\varphi(Z_0, Z_1)$ zu vermeiden) und $\psi(W)$, oder genauer die Funktionen, die durch ihre Anwendung auf den konstanten Vektor $c_H(Z_0) \in \mathcal{Z}$ entstehen, lassen sich wieder in Fourier-Reihen entwickeln. Der ganze Vergleich der Koeffizienten bleibt identisch, bis auf die Ausführung der Gauß-Transformation. ($\begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix}$ ist wieder $M * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$.)

1.1.7 Bemerkung : Unter den getroffenen Voraussetzungen an l , erhält man für die, gemäß Kapitel 2, Definition 3.3.1, gebildeten, „Verwacklungen“ ξ und ψ von $\vartheta_{\mathcal{O}^\nu, P} \left[\begin{smallmatrix} (qT_2)^{-1} \overline{H}' \\ T_2 \overline{Z}_1' \end{smallmatrix} \right] (qT_2; Z_0) c_H(Z_0)$, und wie in den dort folgenden Lemmata 3.3.3 und 3.3.4, die folgenden Aussagen.

a) Hier erscheint in den Fourier-Koeffizienten $d(K) = d_\xi(K)$ das Integral

$$\int P \left(\left(W \left(\frac{M_0 \langle Z_0 \rangle}{i} \right)^{-1/2} - (qT_2)^{-1/2} (V_0 - K) (M_0 \langle Z_0 \rangle)^{-1} \right) \overline{(C_0 Z_0 + D_0)}'^{-1} \right) e^{-\pi \sigma \{ \overline{W'} W \}} dW.$$

Nun kann man die Definition von P einsetzen. Die Eigenschaft

$$\rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & X_1 + X_2 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & X_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & X_2 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)$$

liefert dann das Produkt

$$P \left((qT_2)^{-1/2} (K - V_0) \overline{(A_0 Z_0 + B_0)}'^{-1} \right) \\ \int \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & q^{1/2} (C_0 Z_0 + D_0)^{-1/2} \left(\frac{A_0 Z_0 + B_0}{i} \right)^{-1/2} \overline{W'} T_2^{-1/2} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) e^{-\pi \sigma \{ \overline{W'} W \}} dW.$$

b) In $e(K) = e_\psi(K)$ erscheint entsprechend das Integral

$$\int P \left((qT_2)^{1/2} (W_x - (qT_2)^{-1} (V_0 - K) \overline{A_0}'^{-1} (A_0 Z_0 + B_0)^{-1} A_0) e^{\pi i \sigma \{ (qT_2) [W_x] (A_0 Z_0 + B_0) \overline{A_0}' \}} dW_x.$$

Trennt man P wie oben, so ist der erste Faktor, wegen den symplektischen Relationen, wieder

$$P \left((qT_2)^{-1/2} (K - V_0) \overline{(A_0 Z_0 + B_0)}'^{-1} \right).$$

Das übrigbleibende Integral ist nun

$$\int P(W \overline{A_0}'^{-1/2} \left(\frac{A_0 Z_0 + B_0}{i} \right)^{-1/2} A_0) e^{-\pi \sigma \{ \overline{W'} W \}} dW = \\ = \int \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & \pm q^{1/2} \overline{A_0}'^{+1/2} \left(\frac{A_0 Z_0 + B_0}{i} \right)^{-1/2} \overline{W'} T_2^{-1/2} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) e^{-\pi \sigma \{ \overline{W'} W \}} dW,$$

wobei sich, durch die vorgenommene Vertauschung zwei der Faktoren des Produktes in ρ_0 und wie angedeutet, (höchstens) ein Vorzeichen ergibt. $\square$

Nun gilt allgemein

$$\rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & XG \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} X^{-1} & G \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & G \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} X^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right).$$

Diese Zerlegung benutzt man, um, nach der Argumentation von [Fr2], III.2.5-III.2.8, die Trivialität (jeder Tensorkomponente) dieser Operatorintegrale zu erhalten. Genauer zeigt Freitag im rationalen Fall, daß die Anwendung der unter den Integralen stehenden Operatoren auf $c_H(Z_0)$ jeweils ein pluriharmonisches Polynom ergibt, jedes der beiden auf $c_H(Z_0)$ angewandten Integrale ist jedoch der Wert der Gauß-Transformierten des entsprechenden Polynoms an der Stelle 0, also beidesmal $\rho_0(E) c_H(Z_0) = c_H(Z_0)$.

Im reellen und quaternären Fall kann man diesen Beweis übernehmen, im komplexen muß man noch bemerken, daß eine polynomiale Darstellung $\rho : \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z})$, so daß die Einschränkung $\tilde{\rho}(t) := \rho(t, t)$ auf einem Unterraum $\mathcal{Z}_0 \subset \mathcal{Z}$ trivial wirkt (e.g die Elemente von $\mathcal{Z}_0$ konstant läßt), auf diesem Unterraum ebenfalls trivial wirkt, $\rho(t_1, t_2)a = a$, für alle $a \in \mathcal{Z}_0$. Wir lassen Einzelheiten weg, und verweisen auf Lemma 3.2.5, wo eine fast identische Situation detailliert behandelt wird. Damit gilt

1.1.8 Satz : Sei Z_0 der von allen $c_H(Z_0)$ erzeugte Unterraum von $\mathcal{Z}$, und $a \in Z_0$ beliebig. Es existiert ein $l \in \mathbb{N}$, so daß $\vartheta_{\mathcal{O}^\nu, P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (qT_2; Z_0)a =$

$$= v(M_0)^{-1} \kappa(M_0, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) \text{Det}(J(M_0, Z_0))^{-\frac{\nu_s}{2}} \vartheta_{\mathcal{O}^\nu, P^{M_0}} \left[M_0 * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} \right] (qT_2; M_0 \langle Z_0 \rangle) a,$$

für alle $M_0 \in \Gamma_{n-\nu}[l]$, gilt. $\square$

Wähle nun $\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} (qT_2)^{-1} \overline{H}' \\ T_2 \overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} \end{bmatrix}$. Dann gilt

1.1.9 Bemerkung : a) $\begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \end{bmatrix} := M_0^{-1} * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{D}'_0 & -\overline{B}'_0 \\ -\overline{C}'_0 & \overline{A}'_0 \end{pmatrix} * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} U A_0 + (qT_2)^{-1} V C_0 \\ V D_0 + (qT_2) U B_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0 + \frac{1}{q} \overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 \\ T_2 \overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} D_0 + \overline{H}' B_0 \end{bmatrix}.$$

b) $\kappa(M_0, M_0^{-1} * \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) = \kappa(M_0^{-1}, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix})^{-1} = e^{\pi i \sigma \{ (qT_2) [U] A_0 \overline{B}'_0 + (qT_2)^{-1} [V] D_0 \overline{C}'_0 + 2 \overline{V}' U B_0 \overline{C}'_0 \}} =$

$$= e^{\frac{\pi i}{q} \sigma \{ T_2^{-1} [\overline{H}'] A_0 \overline{B}'_0 + T_2 [\overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1}] D_0 \overline{C}'_0 + 2 H \overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 \overline{B}'_0 \}}. \quad \square$$

Nun folgt, durch Verwendung des Satzes für M_0^{-1} und an der Stelle $M_0 \langle Z_0 \rangle$, anstatt für M_0 an der Stelle Z_0 , sowie für $a = c_H(M_0 \langle Z_0 \rangle)$,

1.1.10 Lemma : Es gilt $\vartheta_{\mathcal{O}^\nu, P} \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} (qT_2; M_0 \langle Z_0 \rangle) c_H(M_0 \langle Z_0 \rangle) =$

$$= v(M_0) \text{Det}(J(M_0, Z_0))^{-\frac{\nu_s}{2}} e^{\frac{\pi i}{q} \sigma \{ T_2 [\overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 \}} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} C_0 Z_0 + D_0 & C_0 Z_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right)$$

$$\vartheta_{\mathcal{O}^\nu, P} \begin{bmatrix} (qT_2)^{-1} \overline{H}' \\ T_2 \overline{Z}'_1 \end{bmatrix} (qT_2; Z_0) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) c_H(M_0 \langle Z_0 \rangle),$$

für l hinreichend groß, $q|l$.

Beweis : a) Der Exponentialfaktor auf der rechten Seite der Transformationsformel ist

$$\kappa(M_0^{-1}, \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}) e^{\pi i \sigma \{ qT_2 [G + U_0] Z_0 + 2 \overline{V}'_0 (G + U_0) \}},$$

die Spur also

$$\begin{aligned} & \sigma \{ qT_2 [G + (qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0] Z_0 + \frac{1}{q} T_2 [\overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1}] C_0 Z_0 \overline{C}'_0 + \\ & \quad \overline{2(G + (qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0) T_2 \overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 Z_0} + \\ & \quad + 2(G + (qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0) T_2 \overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} D_0 + \frac{2}{q} T_2 [\overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1}] D_0 \overline{C}'_0 + \\ & \quad + 2 \overline{G' H'} B_0 + 2 \overline{A'_0 H} (qT_2)^{-1} \overline{H'} B_0 + \frac{2}{q} \overline{C'_0 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1}} Z_1 \overline{H'} B_0 - (qT_2)^{-1} [\overline{H'}] A_0 \overline{B}'_0 - \\ & \quad - \frac{1}{q} T_2 [\overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1}] D_0 \overline{C}'_0 - \frac{2}{q} H \overline{Z}'_1 (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0 \overline{B}'_0 \}. \end{aligned}$$

b) Der zweite, fünfte und zehnte Summand lassen sich zu der Spur des gewünschten Vorfaktors $e^{\frac{\pi i}{q} \sigma \{T_2[\overline{Z}_1](C_0 Z_0 + D_0)^{-1} C_0\}}$ zusammenfassen. Der dritte und vierte ergeben

$$\sigma \left\{ \overline{2(G + (qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0)}' T_2 \overline{Z}_1' \right\},$$

während der sechste modulo 2 verschwindet. Der siebte und neunte addieren sich zu

$$\sigma \{ (qT_2)^{-1} [\overline{H}'] A_0 \overline{B}_0' \} \equiv 0 \pmod{2},$$

nach Wahl von l , und der achte und elfte schließlich heben sich gegenseitig auf.

c) Der vektorwertige Koeffizient in der im Satz auftretenden Thetareihe ist $P^{M_0^{-1}}(X, Z) = P(X(\overline{C_0 Z_0 + D_0})', M_0^{-1} M_0 \langle Z_0 \rangle)$, also

$$\begin{aligned} P^{M_0^{-1}}((qT_2)^{1/2}(G + U_0)) &= \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & q(C_0 Z_0 + D_0) \overline{(G + (qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0)}' + \frac{1}{q} \overline{C_0}' (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} Z_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) = \\ &= \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & C_0 Z_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} C_0 Z_0 + D_0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & q \overline{(G + (qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0)}' \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} (C_0 Z_0 + D_0)^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

d) Nun ist $(qT_2)^{-1} \overline{H}' A_0 \equiv (qT_2)^{-1} \overline{H}' \pmod{\mathcal{O}^{(\nu, n-\nu)}}$, und man kann die Summation $G \mapsto G + (qT_2)^{-1} \overline{H}' (A_0 - E)$ ändern. Die Spur entspricht gerade der Thetareihe mit der richtigen Charakteristik. $\square$

Durch Vergleich der beiden Transformationsformeln 1.1.6 von $\varphi(Z_0, Z_1)$ und 1.1.10 der Thetareihe in φ erhält man

1.1.11 Satz : Die Koeffizienten $c_H(Z_0)$ sind (für invertierbares T_2) Modulformen vom Gewicht $r - \nu s$ zu einer geeigneten Hauptkongruenzgruppe.

Beweis : Das richtige Transformationsverhalten wurde gezeigt. Die auftretende Darstellung

$$\tilde{\rho}_0(\tilde{J}(M_0, Z_0)) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} C_0 Z_0 + D_0 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right), \quad \tilde{J} : \mathrm{Sp}(n - \nu, D_{\mathbb{R}}) \times \mathbb{H}_{n-\nu} \longrightarrow \mathrm{Gl}(n - \nu, D_{\mathbb{C}}),$$

ist zwar nicht mehr zwangsweise irreduzibel, die, bei der Einführung von Darstellungen erwähnte, Einschränkungseigenschaft, und die Argumentation von Freitag (S. 87 in [Fr2]), zeigen jedoch, daß sie auf einem geeigneten Unterraum Z_0 irreduzibel ist, in dem die $c_H(Z_0)$ liegen. $\square$

3.1.2 Der Rang von Modulformen zu Hauptkongruenzgruppen, die singulären Gewichte und der Zusammenhang mit singulären Modulformen

Wir benutzen nun die Fourier-Jacobi-Entwicklung, um singuläre Modulformen zu studieren. Wir führen zwei Begriffe ein.

1.2.1 Definition : Sei $f \in [\Gamma_n, \rho, v]$ eine Modulform.

a) Wir setzen $\mathrm{Rang}(f) := \max\{\mathrm{rank}(T) ; T \in \mathcal{T} \text{ und } a(T) \neq 0\}$, wobei der Rang einer Matrix T über D die maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren ist.

b) Wir nennen das Gewicht r von f singulär, wenn $r = \tilde{r}s$, mit $0 \leq \tilde{r} < n$ und dem Schurindex $s = s(D)$ von D , gilt. $\square$

Genau dann ist eine Modulform singulär, wenn ihr Rang kleiner als n ist, der Rang einer Konjugierten f^M einer Modulform f stimmt mit dem von f überein. Wir wollen den Rang einer Modulform mit ihrem Gewicht in Verbindung bringen. Die Thetareihen nehmen nur die speziellen Werte rs , $r \in \mathbb{Z}$, als Gewichte an. Die singulären unter ihnen haben also singuläre Gewichte. Wir wollen sehen, daß dies für beliebige singuläre Modulformen gilt, und das umgekehrt singuläre Modulformen singuläres Gewicht haben. Wir beginnen mit

1.2.2 Satz : Ist $f \in [\Gamma_n[q], \rho, v]$ eine nicht-konstante Modulform von Gewicht $0 < r \leq (n-1)s$, so ist f singulär.

Beweis : a) Die Fourier-Jacobi-Entwicklung der Stufe $\nu = n-1$, ergibt, daß alle $c_H(z_0)$, zu jedem invertierbarem T_2 , konstant sind, und, falls $r < (n-1)s$ gilt, sogar identisch verschwinden. In letzterem Fall ist dann $\varphi_{T_2}(z_0, Z_1) = 0$, also $f(Z) = \sum_{T=\begin{pmatrix} t_0 & T_1 \\ \overline{T}_1 & T_2 \end{pmatrix}; \text{Det}(T_2)=0} a(T) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{TZ\}}$. Da

jedoch (das Bild von) T_2 diagonalisierbar ist,

$$T \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} * & * \\ * & T_2[U_2] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & D_2 \end{pmatrix},$$

folgt aus $\text{Det}(T_2) = 0$, daß mindestens ein Diagonalelement von D_2 verschwindet. Dann muß jedoch die ganze zugehörige Zeile und Spalte in (der hermiteschen Matrix) $T[U]$ gleich 0 sein, also $\text{Det}(T) = 0$. Damit ist f singulär.

b) Für konstante $c_H = c_H(z_0)$ und $a(T) \neq 0$ haben wir zwei Darstellungen $\varphi(z_0, Z_1) =$

$$\sum_{H=H^{(1,n-1)}, \langle H \rangle \subset \mathcal{O}^*} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & HT_2^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) c_H e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{z_0(T_2^{-1}[\overline{H}']) + 2\overline{H}'Z_1\}} = \sum_{T=\begin{pmatrix} t_0 & T_1 \\ \overline{T}_1 & T_2 \end{pmatrix}} a(T) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{t_0 z_0 + 2\overline{T}_1 Z_1\}}.$$

Die erste entsteht einfach durch Einsetzen der Definition von $c_H(Z_0)$ aus 1.2.4 in die Fourier-Entwicklung von φ nach Z_1 , die zweite ist die Definition von φ . T hat also, falls $a(T) \neq 0$, die Form $T = \begin{pmatrix} T_2^{-1}[h] & \overline{h}' \\ h & T_2 \end{pmatrix}$. Da aber $\overline{h}'T_2^{-1}(h, T_2) = (T_2^{-1}[h], \overline{h}')$, hat T nicht vollen Rang, also $\text{Det}(T) = 0$. Danach verfährt man wie oben. $\square$

Das gewonnene Resultat muß noch verfeinert werden. Dazu

1.2.3 Bemerkung : Sei $f \in [\Gamma_n[q], r, v]$, $0 < r < s$. Dann verschwindet $f \equiv 0$ identisch.

Beweis : Die Fourier-Jacobi-Entwicklung der Stufe $\nu = 1$ ergibt wie eben

$$f(Z) = \sum_{T=\begin{pmatrix} T_0 & t_1 \\ \overline{T}_1 & t_2 \end{pmatrix}; \text{Det}(t_2)=0} a(T) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{TZ\}}.$$

Da aber D ein Schiefkörper ist, folgt aus $\text{Det}(t_2) = 0$, $t_2 = 0$, und daraus $t_1 = 0 \in D^{n-1}$. Nun kann man die Fourier-Jacobi-Entwicklung derselben Stufe $\nu = 1$ von f auch nach den anderen Diagonalelementen von T durchführen, und erhält $f(Z) = a(0) = 0$ (, da ja das Gewicht von f verschieden Null ist). $\square$

Man erhält die Fourier-Jacobi-Entwicklung von f nach den anderen Diagonalelementen, als die Entwicklung der konjugierten Modulform f^U , mit geeigneten Permutationsmatrizen U . Damit kann man sich jetzt hocharbeiten zu

1.2.4 Satz : Sei $f \in [\Gamma_n[q], \rho, v]$ eine nicht-konstante Modulform vom Gewicht $0 < \tilde{r} < ns$. Dann ist das Gewicht $\tilde{r} = rs \equiv 0 \pmod{s}$ singulär, und f ist singulär.

Beweis : Die Bemerkung erlaubt es, obiges Resultat 1.2.2 über die Singularität von f auf den Fall $(n-1)s < \tilde{r} < ns$ zu erweitern. Falls nun $s < \tilde{r} < 2s$ gilt, so führt man wieder die Fourier-Jacobi-Entwicklung(en) der Stufe $\nu = 1$ durch. Die auftretenden $c_H(Z_0)$ sind (für invertierbares $t_2 \in D$) nun Modulformen vom Gewicht $0 < \hat{r} < s$, und verschwinden, woraus sich, wie in der Bemerkung, ergibt, daß, falls $T \geq 0$ ein Diagonalelement $t_2 \neq 0$ besitzt, der Koeffizient $a(T) = 0$ verschwindet, und dann $f = 0$. Wenn allgemeiner $\tilde{r}$ nicht durch s teilbar ist, findet man immer ein $0 < \nu < n$, so daß $0 < \tilde{r} - \nu s < s$ gilt. Die Entwicklung(en) der Stufe 1 von f , ergeben dann sukzessive $f = 0$. (Man kann annehmen, daß Modulformen vom Gewicht $(\nu-1)s < \hat{r} < \nu s$ verschwinden.) $\square$

Eine Variation dieser Methode, die auf der Theorie der höchsten Gewichte basiert, ergibt (siehe [Fr2], III.4.5-III.4.7), daß das Gewicht auch keine gebrochenen rationale Werte annehmen kann.

Herr Freitag teilte mir eine Idee mit, die umgekehrt zeigt, daß singuläre Modulformen nur singuläre Gewichte annehmen. Diese benutzt sehr elegant die Fourier-Jacobi-Entwicklung, und vermeidet die komplizierte Verwendung von Differentialoperatoren (vergleiche dazu z.B. [Fr1]).

1.2.5 Satz : Sei $f \in [\Gamma_n[q], r', v]_S$ eine nicht-konstante singuläre Modulform. Dann ist ihre Gewicht singulär, also $r' = rs$, für eine ganze Zahl $0 < r < n$.

Beweis : a) Sei $f = \sum a(T) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{TZ\}}$ die Fourier-Entwicklung von f , und $T \in \mathcal{T}$ eine Matrix, mit $a(T) \neq 0$ und $\text{rank}(T) = \text{Rang}(f) = r$. Es ist $0 < r < n$, weil f als singulär angenommen wurde. Indem man eventuell eine geeignete konjugierte Modulform $f^M = f^U$, $M = \begin{pmatrix} \overline{U} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$, mit unimodularen $U \in \text{Sl}(n, D)$, betrachtet (vergleiche dazu auch Bemerkung 3.2.8), die natürlich dasselbe Gewicht wie f hat und ebenfalls singulär ist, kann man annehmen, daß $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix}$, $S = S^{(r)} = \overline{S}' > 0$, gilt.

b) Nun führt man die Fourier-Jacobi-Entwicklung (siehe 1.1.1) der Stufe r durch. Wir untersuchen den Koeffizienten φ_S . Dieser besitzt nach 1.1.4 eine Entwicklung

$$\varphi_S(Z_0, Z_1) = \sum_{H \bmod qS} \vartheta_{\mathcal{O}^r, P} \left[\begin{pmatrix} (qS)^{-1} \overline{H}' \\ S \overline{Z}'_1 \end{pmatrix} \right] (qS; Z_0) c_H(Z_0).$$

Die Faktoren $c_H(Z_0)$ sind nach Satz 1.1.11 Modulformen vom Gewicht $r' - rs$.

c) Andererseits kann man genau angeben welche $a(\tilde{T})$ in φ_S zusammengefaßt werden. Solch ein $\tilde{T} = \begin{pmatrix} * & * \\ * & S \end{pmatrix} \in \mathcal{T}$ hat den Rang $\tilde{r} \geq r = \text{Rang}(f)$; es kann also nur dann der zugehörige Fourier-Koeffizient von Null verschieden sein, wenn Gleichheit gilt, $\tilde{r} = r$. Dann hat aber (vergleiche Lemma 3.1.3) $\tilde{T}$ die Gestalt $\tilde{T} = \begin{pmatrix} S^{-1}[\overline{H}'] & H \\ \overline{H}' & S \end{pmatrix}$, $H = H^{(n-r, r)} \in (\mathcal{O}^*)^{(n-r, r)}$. Direkter Vergleich mit der Fourier-Entwicklung 1.1.2 von φ_S ergibt $b_H(Z_0) = a \left(\begin{pmatrix} S^{-1}[\overline{H}'] & H \\ \overline{H}' & S \end{pmatrix} \right) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{(S^{-1}[\overline{H}'])Z_0\}}$, also, nach Bildung (1.1.4) der $c_H(Z_0)$,

$$c_H(Z_0) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & -HS^{-1} \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) a \left(\begin{pmatrix} S^{-1}[\overline{H}'] & H \\ \overline{H}' & S \end{pmatrix} \right).$$

Es ist also jedes $c_H(Z_0)$ konstant.

d) Falls nun $r' \neq rs$ wäre, so müßten diese Koeffizienten identisch verschwinden, $c_H(Z_0) \equiv 0$, insbesondere wäre, mit $H = 0$, $a(T) = a \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \right) = 0$, im Widerspruch zur Annahme. Es ist also $r' = rs$ singuläres Gewicht, wie behauptet, und es ergibt sich automatisch auch, daß $\text{Rang}(f) \cdot s$ das Gewicht von f ist. $\square$

Wir erhalten aus dem Beweis also auch den

1.2.6 Zusatz : Sei f eine nicht-konstante singuläre Modulform vom Gewicht rs . Dann ist

$$\text{Rang}(f) = r. \quad \square$$

Damit wurde das Gewicht einer singulären Modulform mit ihrem Rang in Zusammenhang gebracht. Insgesamt erhalten wir also

1.2.7 Theorem : Sei $f \in [\Gamma_n[q], \rho, v]$ eine Modulform. Genau dann ist f eine singuläre Modulform, wenn ihr Gewicht kleiner als ns ist. Falls f nicht identisch verschwindet ist dieses sogar singulär, also von der Form rs , $0 \leq r < n$. Dann ist auch $\text{Rang}(f) = r$. $\square$

1.2.8 Folgerung : Es gilt $[\Gamma_n[q], rs, v] = [\Gamma_n[q], rs, v]_S$, $r < n$. Mit f ist auch f^M , M projektiv rational, singulär. $\square$

3.2 Definition der Räume $P(r)$ und des sogenannten großen singulären Raums $M(\infty)$

Es wird die Teilbarkeitslehre in Ordnungen weiter verfolgt. Mit deren Hilfe werden singuläre Modulformen, als Fourier-Reihen betrachtet, klassifiziert, und zu bestimmten Räumen zusammengefaßt. Diese sind dann algebraisch beschrieben, und werden auch so weiteruntersucht.

3.2.1 Ein Raum von Fourier-Reihen, der die singulären Modulformen enthält, „lokale Ganzheit“

Die bewiesenen Resultate erlauben es uns, nun einen speziellen Raum von Fourier-Reihen, genannt $\mathbf{P}$, wie Freitag zu bilden.

2.1.1 Definition : a) Es sei q eine natürliche Zahl, und $0 < r < n$. Dann bezeichnen wir mit $\mathbf{P}(q) = \mathbf{P}_{\mathcal{O}}(q, r, n)$ den Vektorraum aller in $\mathbb{H}_n^m$ konvergenter vektorwertiger Fourier-Reihen $f : \mathbb{H}_n^m \rightarrow \mathcal{Z}$, der Form $f(Z) = \sum_{T=\overline{T}'} a(T) e^{\pi i \sigma \{TZ\}}$, mit folgenden Eigenschaften:

1) Aus $a(T) \neq 0$ folgt $qT \in \mathcal{T} = \mathcal{T}_n \subset M_n(D)$ (, es wird also nur über ein $\mathbb{Z}$ -Gitter summiert).

2) Aus $a(T) \neq 0$ folgt $T \succeq 0$.

3) Aus $a(T) \neq 0$ folgt $\text{rank}(T) \leq r$ (, aufgefaßt als $(n \times n)$ -Matrix über D).

4) Es gilt $a(T[U]) = \rho_0(\overline{U}') a(T)$, für alle $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ mit $U \equiv E \pmod{q}$.

b) Es gilt $\mathbf{P}_{\mathcal{O}}(q, r-1, n) \subset \mathbf{P}_{\mathcal{O}}(q, r, n)$. Wir setzen

$$\overline{\mathbf{P}(q)} = \overline{\mathbf{P}_{\mathcal{O}}(q)} := \frac{\mathbf{P}_{\mathcal{O}}(q, r, n)}{\mathbf{P}_{\mathcal{O}}(q, r-1, n)}. \quad \square$$

2.1.2 Bemerkung : Es gilt

$$\Theta_{\mathcal{O}}(q, r, n) \subset \sum_v [\Gamma_n[q], rs, v]_S = \sum_v [\Gamma_n[q], rs, v] \subset \mathbf{P}_{\mathcal{O}}(q, r, n).$$

Außerdem sind die natürlichen Projektionen $\Theta(q) \hookrightarrow \overline{\mathbf{P}(q)}$ und $[\Gamma_n[q], rs, v] \hookrightarrow \overline{\mathbf{P}(q)}$ injektiv.

Beweis : Das ist gerade der Inhalt der Transformationsformel für Thetareihen, der Definition von Θ (vergleiche Kapitel 2, Definition 4.1.1 und Bemerkung 4.1.2), und des Theorems 1.2.7 über singuläre Modulformen. $\square$

Wir müssen die Kompletterungen der Lokalisierungen von $\mathcal{O}$ und $\mathbf{P}(q)$ betrachten. Unsere Ordnung $\mathcal{O}$ ist maximal und unter der Involution invariant, $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$. Wir wissen, daß deren Primideale in Bijektion mit denen von $\mathcal{O}_K$, $K = \mathcal{Z}(D)$, stehen.

2.1.3 Bemerkung : Es gilt $\mathcal{O}_K \setminus \overline{P} = \overline{(\mathcal{O}_K \setminus P)}$, also $\overline{((\mathcal{O}_K)_P)} = (\mathcal{O}_K)_{\overline{P}}$, und damit

$$\overline{(\mathcal{O}_P)} = (\overline{\mathcal{O}})_{\overline{P}} = \mathcal{O}_{\overline{P}}.$$

Lokalisierungen von $\mathcal{O}_K$ -Moduln $\mathcal{M}$ sind natürlich stets als Tensorierungen zu verstehen, $\mathcal{M}_P = (\mathcal{O}_K)_P \otimes \mathcal{M}$ also insbesondere

$$\mathcal{O}_P = (\mathcal{O}_K)_P \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}, \quad \mathcal{O}_{\overline{P}} = (\mathcal{O}_K)_{\overline{P}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O},$$

usw. Entsprechend sind Kompletterungen von solchen Moduln zu bilden, $\widehat{\mathcal{M}}_P = (\widehat{\mathcal{O}_K})_P \otimes \mathcal{M}$. Da $\mathcal{O}_K \subset \mathcal{Z}(D)$ gilt, sind diese Tensorprodukte stets wohldefiniert. $\square$

Die zwei Lokalisierungen $\mathcal{O}_P$ und $\mathcal{O}_{\overline{P}}$ der maximalen Ordnung $\mathcal{O}$ liegen zwar beide in D , die Übergänge zur Kompletterung längs P bzw. $\overline{P}$ sind jedoch verschieden. Es entstehen also dadurch Probleme, daß K nicht total reell zu sein braucht. Wir erhalten zwei verschiedene, a priori nicht vergleichbare Objekte.

2.1.4 Bezeichnung : Wir bezeichnen die Kompletterungen von $\mathcal{O}_P$ und $\mathcal{O}_{\overline{P}}$ entsprechend mit $\hat{\mathcal{O}}_P$ und $\hat{\mathcal{O}}_{\overline{P}}$. Dies sind maximale Ordnungen in den entsprechenden Kompletterungen $\hat{D}_P = \hat{K}_P \otimes D$ bzw. $\hat{D}_{\overline{P}} = \hat{K}_{\overline{P}} \otimes D$ von D , $\hat{K}_P$ und $\hat{K}_{\overline{P}}$ die Kompletterungen des Zentrums K . $\square$

Wir wissen, daß $\hat{D}_P \cong M_{s_P}(\tilde{D}_P)$ ist, mit einem „inneren“ Schiefkörper vom (lokalen) Schurindex $\tilde{s}_P$. Insbesondere ist

$$\hat{\mathcal{O}}_P \cong M_{s_P}(\tilde{\Delta}_P),$$

mit der einzigen maximalen Ordnung $\tilde{\Delta}_P$ von $\tilde{D}_P$; unter allen möglichen solchen Isomorphismen wählen wir weiter unten einen aus. Außerdem werden wir noch Schnitte der Lokalisierungen der maximalen Ordnungen brauchen.

2.1.5 Definition : Sei S eine Menge von Primstellen. Wir setzen $\mathcal{O}_S := \bigcap_{P \in S} \mathcal{O}_P$. $\square$

2.1.6 Bemerkung : Falls $P = \overline{P}$ gilt, so ist $\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}} = \mathcal{O}_P$. Falls also das Zentrum $K = \mathcal{Z}(D)$ des zugrunde liegenden Schiefkörpers total reell ist, ist dies an jeder Primstelle der Fall. $\square$

Die Involution J induziert nun an jeder Primstelle $P \subset \mathcal{O}_K$ eine bijektive Abbildung, genauer einen Antiisomorphismus, zwischen den Kompletterungen,

$$J_P : \hat{D}_P \longrightarrow \hat{D}_{\overline{P}}.$$

Diesen kann man auch als Isomorphismus $\hat{D}_P^{\text{opp}} \longrightarrow \hat{D}_{\overline{P}}$ auffassen. Es gilt trivialerweise

$$M_{s_P}(\tilde{D}_P)^{\text{opp}} \cong M_{s_P}(\tilde{D}_P^{\text{opp}}).$$

Wir erhalten

2.1.7 Lemma : a) Für die Kompletterungen

$$\hat{D}_P \text{ und } \hat{D}_{\overline{P}} \text{ gilt } s_P = s_{\overline{P}}.$$

Man kann die Isomorphismen $\hat{D}_P \cong M_{s_P}(\tilde{D}_P)$ so wählen, daß J_P auf der Matrixseite auf $\tilde{D}_P$ wirkt, im Sinne, daß für die Einschränkung auf die Diagonaleinbettung dieses Schiefkörpers

$$J_P(\tilde{D}_P) = \tilde{D}_{\overline{P}} \text{ und } J_P(\tilde{\Delta}_P) = \tilde{\Delta}_{\overline{P}}$$

gilt; diese Isomorphismen fixieren wir.

b) Falls $P = \overline{P}$ gilt, definiert $J_P = J_{\overline{P}}$ eine Involution auf $\hat{D}_P = \hat{D}_{\overline{P}}$, die, mittels der gewählten Isomorphismen, der Matrixausdehnung der durch J induzierten Involution $\neg$ auf $\tilde{D}_P$ entspricht, es existiert also $M_P \in M_{s_P}(\tilde{D}_P)$, so daß

$$J_P(X) = M_P \overline{X}^t M_P^{-1}, \quad X \in M_{s_P}(\tilde{D}_P),$$

gilt. Diese läßt natürlich $\hat{\mathcal{O}}_P$ invariant. In jedem Fall (also für beliebiges P) läßt die Abbildung J_P den Schnitt $\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}} \subset D$ invariant.

Beweis : i) Es ist erst $s_P = s_{\overline{P}}$ im komplexen Fall zu begründen. Der Klassifikationssatz von Mumford über positive Involutionen, den wir ganz am Anfang für die Wahl des Repräsentanten der Ähnlichkeitsklasse unserer involutiven Algebra benutzten, besagt sogar, daß in diesem Fall die lokalen Hasse-Invarianten $I_P = I_P(D) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ von D den Gleichungen

$$I_P + I_{\overline{P}} = 0, \text{ sowie } I_P = 0, \text{ falls } P = \overline{P},$$

genügen. Dabei ist $I_P = \frac{r_P}{s_P}$, $\tilde{s}_P$ der lokale Index von D an der Stelle P , also der Schurindex von $\tilde{D}_P$, und $1 \leq r_P \leq \tilde{s}_P$, $(r_P, \tilde{s}_P) = 1$ (, siehe auch [Re], Theorem (14.5) und anschließende Bemerkung). Es gilt $s_P \tilde{s}_P = s = s(D)$, für alle P . Aus $\frac{r_P}{s_P} + \frac{r_{\overline{P}}}{s_{\overline{P}}} \equiv 0 \pmod{1}$ folgt aber damit $\tilde{s}_P = \tilde{s}_{\overline{P}}$, also $s_P = s_{\overline{P}}$.

ii) Sei nun $P \neq \overline{P}$, und weiterhin $D_{\mathbb{R}} \cong M_s(\mathbb{C}^{m'})$. Da die lokalen Schurindizes der inneren Schiefkörper der Kompletierungen $\widehat{D}_P$ und $\widehat{D}_{\overline{P}}$ von D an P und $\overline{P}$ gleich sind, $\tilde{s}_P = \tilde{s}_{\overline{P}}$, existiert ein Antiisomorphismus

$$\tilde{J}_P : \tilde{D}_P \longrightarrow \tilde{D}_{\overline{P}}.$$

Man kann also die Isomorphismen $\widehat{D}_P \cong M_{s_P}(\tilde{D}_P)$ und $\widehat{D}_{\overline{P}} \cong M_{s_{\overline{P}}}(\tilde{D}_{\overline{P}})$ so wählen, daß sie mit J_P und $\tilde{J}_P$ kommutieren. Da $\tilde{J}_P$ den Ring der ganzen Zahlen $\tilde{\Delta}_P$ antiisomorph auf $\tilde{\Delta}_{\overline{P}}$ abbildet, kann man zusätzlich erreichen, daß diese Isomorphismen $\widehat{O}_P$ mit $M_{s_P}(\tilde{\Delta}_P)$ (und entsprechend an $\overline{P}$) identifizieren.

iii) Sei nun, weiterhin im komplexen Fall, $P = \overline{P}$. Wegen der zweiten Bedingung an die lokalen Hasse-Invarianten muß ein solches D an jeder Stelle $P = \overline{P}$ voll zerfallen: $r_P = \tilde{s}_P$, $\tilde{D}_P$ ist ein Schiefkörper vom Schurindex 1 über dem Zentrum $\widehat{K}_P$, also $\widehat{D}_P \cong M_s(\widehat{K}_P)$, $K = \mathcal{Z}(D)$. J induziert wegen $P = \overline{P}$ eine Involution $\bar{}$ auf dem Körper $\widehat{K}_P = \tilde{D}_P$, und aus dem Satz von Skolem-Noether folgt, daß J andererseits für jede Wahl des Isomorphismus $\widehat{D}_P \cong M_s(\widehat{K}_P)$ eine Involution $J_P(X) = M_P \overline{X} M_P^{-1}$ auf $M_s(\widehat{K}_P)$ induziert, mit geeignetem $M_P = J_P(M_P) \in \text{Gl}(s, \widehat{K}_P)$. Wegen unserer Annahme aus dem ersten Kapitel, die die Existenz der maximalen Ordnung $\mathcal{O} = J(\mathcal{O})$ sichert, kann man erreichen, daß der gewählte Isomorphismus $\widehat{O}_P$ mit $M_s(\mathcal{O}_{\widehat{K}_P})$ identifiziert, und daß J_P letzteren Ring invariant läßt.

iv) Im reellen und quaternären Fall ist K total reell, also $P = \overline{P}$, für alle P , der Schurindex ist $s(D) = 2$. Es ist also entweder $\widehat{D}_P \cong M_2(\widehat{K}_P)$ eine Matrixalgebra über einem Körper, oder ein Schiefkörper. Im ersten Fall argumentiert man wie in iii, im zweiten ist nichts zu wählen, und es gilt zwangsweise $J_P(\widehat{O}_P) = J_P(\tilde{\Delta}_P) = \widehat{O}_P$. $\square$

Hier muß noch kurz erläutert werden, wie sich reziproke Gitter bei Lokalisierung verhalten. Für Lokalisierungen von $\mathcal{O}_K$ -Moduln $\mathcal{M}$, also $(\mathcal{O}_K)_P$ -Moduln $\mathcal{M}_P \subset D^r$ ist es natürlich

$$(\mathcal{M}_P)^* := \{x \in D^r ; \sigma(\overline{x}y) \in \mathbb{Z}_{(p)}, \forall y \in \mathcal{M}_P\}$$

zu setzen, mit $(p) = \mathbb{Z} \cap P$. Andererseits kann man $\mathcal{M}^*$ lokalisieren. Wegen $(p) = \mathbb{Z} \cap \overline{P}$ und $\text{Tr}_{D/\mathbb{Q}} = \text{Tr}_{K/\mathbb{Q}} \circ \text{Tr}_{D/K}$ folgt

2.1.8 Bemerkung : Es gilt $(\mathcal{M}_P)^* = (\mathcal{M}^*)_{\overline{P}}$. $\square$

Insbesondere gilt dies für $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L}$. Mit den erklärten Ausdehnungen der Involution, die wir kanonisch auf Vektoren wirken lassen, kann man entsprechend

$$(\widehat{\mathcal{M}}_P)^* := \{x \in \widehat{D}_{\overline{P}}^r ; \sigma(J_{\overline{P}}(x)'y) \in \widehat{\mathbb{Z}}_p, \forall y \in \widehat{\mathcal{M}}_P\}$$

setzen, mit $\widehat{\mathbb{Z}}_p = (\widehat{\mathbb{Z}_{(p)}})$, und erhält wieder $(\widehat{\mathcal{M}}_P)^* = (\widehat{\mathcal{M}^*})_{\overline{P}}$. Allerdings muß man immer beachten, daß man dabei die Kompletierung wechselt. Genauso bilden wir, für eine Menge $\mathbf{S}$ von Primstellen P aus $\mathcal{O}_K$,

$$(\mathcal{O}_{\mathbf{S}})^* := \{x \in D ; \sigma(\overline{x}y) \in \bigcap_{(p)=P \cap \mathbb{Z} ; P \in \mathbf{S}} \mathbb{Z}_{(p)}, \forall y \in \mathcal{O}_{\mathbf{S}}\} \supset \bigcap_{P \in \mathbf{S}} (\mathcal{O}_P)^* = \bigcap_{P \in \overline{\mathbf{S}}} (\mathcal{O}^*)_P = (\mathcal{O}^*)_{\overline{\mathbf{S}}}.$$

Im Spezialfall $\mathbf{S} = \{P, \overline{P}\}$ erhalten wir sogar

$$(\mathcal{O}_P)^* \cup (\mathcal{O}_{\overline{P}})^* \subset (\mathcal{O}_P)^* + (\mathcal{O}_{\overline{P}})^* \subset (\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^* = \{x \in D ; \sigma(\overline{x}y) \in \mathbb{Z}_{(p)}, \forall y \in \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}}\}.$$

Jetzt können wir die „lokale Ganzheit“ erklären.

2.1.9 Definition : a) Ein Element $x \in D$ heißt $\mathcal{O}$ -ganz (oder einfach ganz) an der Stelle P , wobei $P \subset \mathcal{O}_K$ ein Primideal des Zentrums K von D ist, falls $x \in \mathcal{O}_P$ gilt. Eine Matrix M heißt $\mathcal{O}$ -ganz an P , falls dies für alle ihre Elemente zutrifft, und $\mathcal{O}$ -unimodular an P , falls $M \in \text{Gl}(n, \mathcal{O}_P)$ gilt. Ferner nennen wir x $\mathcal{O}$ -ganz an einer Menge $\mathbf{S}$ von Primstellen, wenn x $\mathcal{O}$ -ganz an allen $P \in \mathbf{S}$ ist; entsprechend verfahren wir mit Matrizen.

b) Wir setzen J_P auf Matrizen kanonisch fort, und definieren, im Falle $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}$,

$$\mathrm{Sp}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}}) := \{M \in M_{2n}(\mathcal{O}_{\mathbf{S}}) ; I[M] = J(M)IM = I\}. \quad \square$$

2.1.10 Bemerkung : a) Falls $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}$ gilt, so ist x genau dann ganz an $\mathbf{S}$, wenn es $\overline{x}$ ist. Im reellen und quaternären Fall, wenn also das Zentrum total reell ist, ist dies stets so.

b) Die $\mathrm{Sp}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}})$ sind Gruppen, denn es ist $M^{-1} = \begin{pmatrix} J(D) & -J(B) \\ -J(C) & J(A) \end{pmatrix}$, falls $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, und mit x ist auch $J(x) \in \mathcal{O}_{\mathbf{S}}$.

c) Es gilt $\bigcap_{P \subset \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}} = \left(\bigcap_{P \subset \mathcal{O}_K} \mathcal{O}_P \right) \cap \left(\bigcap_{P \subset \mathcal{O}_K} \overline{\mathcal{O}_P} \right) = \mathcal{O} \cap \overline{\mathcal{O}} = \mathcal{O}$ und

$$\bigcap_{P \subset \mathcal{O}_K} \mathrm{Sp}(n, \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}}) = \mathrm{Sp}(n, \mathcal{O}) = \Gamma_n. \quad \square$$

Man braucht auch die entsprechenden Bewertungen. Wir benutzen Resultate aus [Re], Abschnitte 12 und 13. Es sei, wie schon weiter oben, $\tilde{s}_P = \tilde{s}_P(\tilde{D}_P)$ der Schurindex des Schiefkörpers in $\hat{D}_P = M_{s_P}(\tilde{D}_P)$, der sogenannte lokale Index von D an der Stelle P .

Es existiert eine diskrete Bewertung $v_P = v_{\tilde{D}_P}$ auf $\tilde{D}_P$, die die Bewertung $v_{\hat{K}_P}$ erweitert, und bezüglich welcher $\tilde{D}_P$ vollständig ist. Sie ist durch

$$v_{\tilde{D}_P}(x) = \frac{\tilde{s}_P}{(\tilde{D}_P : \hat{K}_P)} \cdot v_{\hat{K}_P}(\mathrm{N}_{\tilde{D}_P/\hat{K}_P}(x)) = \frac{1}{\tilde{s}_P} \cdot v_{\hat{K}_P}(\mathrm{N}_{\tilde{D}_P/\hat{K}_P}(x)),$$

$\mathrm{N}_{\tilde{D}_P/\hat{K}_P}$ wie immer die reduzierte Norm, gegeben, und durch die Normierung eindeutig bestimmt. Wir erhalten, für jedes $x \in \tilde{D}_P$, eindeutige Darstellungen $x = \pi^{v_P(x)} u' = u'' \pi^{v_P(x)}$, mit Einheiten $u', u'' \in \tilde{\Delta}_P^\times$ und einem Primelement π von $\tilde{\Delta}_P$. $\tilde{\Delta}_P$ enthält genau die Elemente von $\tilde{D}_P$ mit nicht-negativer Bewertung.

Genauso wird $\hat{D}_P$, und damit natürlich auch $\hat{\mathcal{O}}_P$ sowie $\mathcal{O}_P$, mit Hilfe des gewählten Isomorphismus $\hat{D}_P \cong M_{s_P}(\tilde{D}_P)$, diskret bewertet,

$$v_P(x) := v_{\hat{K}_P}(\mathrm{N}_{\hat{D}_P/\hat{K}_P}(x)) = v_{\hat{K}_P}(\mathrm{N}_{M_{s_P}(\tilde{D}_P)/\hat{K}_P}(x)).$$

Die so gewonnene Bewertung v_P hängt nicht von der Wahl des Isomorphismus ab. Die Normierung wurde hier so gewählt, daß $v_P(x) = s \cdot v_{\hat{K}_P}(x) = s \cdot v_{\tilde{D}_P}(x)$, $s = s(D)$, für $x \in \hat{K}_P$, gilt. Dies ist sinnvoll, da auch global $\mathrm{N}_{D/K}(x) = x^s$, $x \in K = \mathcal{Z}(D)$, gilt.

Der Durchschnitt $P \cap \mathbb{Z} = \overline{P} \cap \mathbb{Z} = (p)$ liefert ein Primideal in $\mathbb{Z}$. Der Körpergrad von $\mathcal{O}_K/P$ über $\mathbb{Z}/(p)$ sei m_P , dann ist die Ordnung (Mächtigkeit) von $\mathcal{O}_K/P$ die Primzahlpotenz p^{m_P} . Mit dem Verzweigungsindex e_P , $p \cdot \mathcal{O}_K = P^{e_P} Q$, $(p, Q) = 1$, gilt $m = [K : \mathbb{Q}] = m_P e_P$. Uns interessiert

2.1.11 Satz : Der P -adische Betrag von $x \in \hat{D}_P$ sei $|x|_P := p^{-m_P \cdot v_P(x)}$. Es gilt, für $x \in D$, die Geschlossenheitsrelation

$$|\mathrm{N}_{D/\mathbb{Q}}(x)| = |\mathrm{Det}(x)| = \prod_{P \subset \mathcal{O}_K} |x|_P^{-1}. \quad \square$$

Die Geschlossenheitsrelation besagt, daß man bei Bewertungsfragen jede reelle Stelle im unendlichen einfach, jede komplexe jedoch doppelt zählen muß.

2.1.12 Bemerkung : a) Für jedes $x \in D$ sind nur endlich viele P -adische Beträge von 1 verschieden. Ist ein $x \in D$ $\mathcal{O}$ -ganz an P , dann ist seine Bewertung an P nicht-negativ, $v_P(x) \geq 0$. Die Umkehrung gilt nur an Stellen mit $s_P = 1$, falls also $\hat{D}_P = \tilde{D}_P$ ein Schiefkörper ist. Die Involution erhält Bewertungen $v_P(x) = v_{\overline{P}}(\overline{x})$, $x \in D$.

b) Man kann die Geschlossenheitsrelation auch auf der Ebene der (reduzierten) Norm $\mathrm{N}_{M_n(D)/\mathbb{Q}}$ lesen, und erhält

$$\mathrm{Det}(S) = \prod_P |\det(S)|_P^{-1}, \quad \text{für } S = \overline{S'} > 0.$$

(Wir erinnern daran, daß wir mit „det“ die (reduzierte) Norm $\mathrm{N}_{M_n(D)/K}$ bezeichnen, also die Determinante des Bildes von S in einem Zerfällungskörper.) $\square$

3.2.2 Die Lokalisierungen von $\mathbf{P}(q)$ und der große singuläre Raum

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun $\mathbf{P}(q)$ nach Primidealen $P \subset \mathcal{O}_K$ und auch nach Mengen von solchen lokalisieren. Dazu

2.2.1 Definition : a) Eine natürliche Zahl l heißt teilerfremd zu P , in Zeichen $(l, P) = 1$, falls $v_P(l) = 0$ gilt. $\square$

Man beachte, daß dann, wegen $l = \bar{l} \in \mathcal{O}_K \subset \mathcal{O}_{\{P, \bar{P}\}}$, also

$$v_P(l) \geq 0 \quad \text{und} \quad v_{\bar{P}}(l) \geq 0,$$

diese zwei Bewertungen beide gleich 0, die entsprechenden Beträge gleich 1 sind. Es gilt also

2.2.2 Bemerkung : a) Es ist $(l, P) = 1$ genau dann wenn $(l, \bar{P}) = 1$. Dies ist äquivalent dazu, daß P nicht in der Zerlegung $(l) = l \cdot \mathcal{O}_K = \prod P_i^{e_i}$ von l in Primideale über $\mathcal{O}_K$ erscheint.

b) Sei q eine natürliche Zahl, $N \in \text{Sp}(n, D)$ eine symplektische Matrix, und $\mathbf{S}$ eine endliche Menge von Primstellen, so daß N und N^{-1} $\mathcal{O}$ -ganz an allen $P \in \mathbf{S}$ sind. Dann existiert ein, zu allen $P \in \mathbf{S}$ teilerfremdes, natürliches l mit

$$\Gamma_{n, \mathcal{O}}[ql] \subset \Gamma_{n, \mathcal{O}}^N[q] = N^{-1} \Gamma_{n, \mathcal{O}}[q] N.$$

Dasselbe gilt dann natürlich auch, wegen der speziellen Form der Inversen einer symplektischen Matrix, wenn N $\mathcal{O}$ -ganz an $\mathbf{S} \cup \bar{\mathbf{S}}$ ist.

Beweis : Es gibt jeweils nur endlich viele Stellen an denen die Bewertungen von N bzw. N^{-1} echt negativ sind. Davon ist keine in $\mathbf{S}$ enthalten. Es existieren daher $l', l'' \in \mathbb{N}$, mit $(l', P) = (l'', P) = 1$ für alle $P \in \mathbf{S}$, so daß $l'N, l''N^{-1} \in M_n(\mathcal{O})$. Für $l = l'l''$, ist mit $M \equiv E \pmod{ql}$ auch

$$NMN^{-1} = E + q(l'N)\widetilde{M}(l''N^{-1}) \equiv E \pmod{q}. \quad \square$$

2.2.3 Folgerung : N erfülle obige Bedingung. Die Zuordnung

$$f \longmapsto f^N, \quad f^N(Z) = \rho(J(N, Z))^{-1} f(N\langle Z \rangle),$$

definiert dann eine lineare Abbildung $[\Gamma_n[q], \rho, v] \longrightarrow [\Gamma_n[ql], \rho^N, v^N]$, $\rho^N(J(M, Z)) = \rho(J(M^N, Z))$, $M^N = N^{-1}MN$, für eine geeignete natürliche Zahl l . $\square$

Nun lokalisieren wir $\mathbf{P}(q)$.

2.2.4 Definition : Die Lokalisierung von $\mathbf{P}(q)$ an einer Primstelle P von $K = \mathcal{Z}(D)$, bzw. einer Menge $\mathbf{S}$ von solchen, ist

$$\mathbf{P}(q)_P := \bigcup_{(l, P)=1} \mathbf{P}(ql), \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{P}(q)_{\mathbf{S}} := \bigcap_{P \in \mathbf{S}} \mathbf{P}(q)_P. \quad \square$$

Da $\{l \in \mathbb{N} ; (l, P) = 1, \forall P \subset \mathcal{O}_K\} = \{l \in \mathbb{N} ; v_P(l) = 0, \forall P \subset \mathcal{O}_K\} = \{1\}$, gilt

$$\bigcap_P \mathbf{P}(q)_P = \mathbf{P}(q). \quad \text{Außerdem ist} \quad \mathbf{P}(q)_P = \mathbf{P}(q)_{\bar{P}} = \mathbf{P}(q)_{\{P, \bar{P}\}}.$$

Man muß noch $\mathcal{T}$ lokalisieren. Falls K total reell ist, so ist $\mathcal{T}_1$ und damit auch $\mathcal{T}$ ein $\mathcal{O}_K$ -Modul. Es gilt allgemein

2.2.5 Bemerkung : Die Lokalisierungen $\mathcal{M}_P = (\mathcal{O}_K)_P \otimes \mathcal{M}$ und die Kompletterungen $\widehat{\mathcal{M}}_P = (\widehat{\mathcal{O}_K})_P \otimes \mathcal{M}$ eines $\mathcal{O}_K$ -Moduls $\mathcal{M} \subset D^r$, erfüllen $\mathcal{M} = \bigcap_P \mathcal{M}_P = \bigcap_P (\widehat{\mathcal{M}}_P \cap D^r)$. Das gilt insbesondere für $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L}$. $\square$

Im reellen und quaternären Fall kann man also $\mathcal{T}$ an jeder Primstelle lokalisieren und auch komplettieren. Im komplexen Fall kann man nur an Primstellenpaaren $\{P, \bar{P}\}$, bzw. allgemeiner Mengen von Primstellen der Form $\mathbf{S} = \bar{\mathbf{S}}$ lokalisieren. Wir berücksichtigen die (mögliche) Aufspaltung der Primstellen in $P \neq \bar{P}$ folgendermaßen.

2.2.6 Definition : Setze $(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})_S := \{x \in \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}} ; x = \overline{x}\}$, sowie

$$\mathcal{T}_P = (\mathcal{T}_n)_P := \{X = \overline{X}' \in M_n(D) ; \sigma(XY) \in 2\mathbb{Z}_{(p)}, \forall Y = \overline{Y}' \in M_n(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})\},$$

und damit $\mathcal{T}_S := \bigcap_{P \in S} \mathcal{T}_P$, für $S = \overline{S}$. $\square$

Es ist klar, daß man so für $P = \overline{P}$, wegen $\mathcal{O}_P = \mathcal{O}_{\overline{P}}$, tatsächlich die Lokalisierungen erhält. Es ist auch $\mathcal{T}_P = \mathcal{T}_{\overline{P}}$; eigentlich müßte man $\mathcal{T}_P$ mit $\mathcal{T}_{\{P, \overline{P}\}}$ bezeichnen, das würde die Notation jedoch weiter belasten. Man hat

2.2.7 Lemma : Es gilt $\mathcal{O}^* = \bigcap_P (\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^*$. Es ist

$$\mathcal{T}_P = \{X = \overline{X}' \in M_n((\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^*), x_{ii} = \overline{x}_{ii} \in 2(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^*_S\}$$

die Umschreibung von $\mathcal{T}_P$ auf Matrixform. Ferner gilt $\bigcap_P \mathcal{T}_P = \mathcal{T}$.

Beweis : a) Liegt $x \in D$ in allen $(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^*$ und ist $y \in \mathcal{O} = \bigcap \mathcal{O}_P$, so ist $\sigma(\overline{xy}) \in \mathbb{Z}_{(p)}$, für alle $(p) = P \cap \mathbb{Z}$, also $\sigma(\overline{xy}) \in \mathbb{Z}$, und damit $x \in \mathcal{O}^*$. Umgekehrt sei $x \in \mathcal{O}^*$ und $y \in \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}}$. Dann existiert $l \in \mathbb{Z}$, $(l, P) = 1$, mit $ly \in \mathcal{O}$, also ist $\sigma(\overline{xy}) = \frac{1}{l} \cdot \sigma(\overline{xy}) \in \mathbb{Z}_{(p)}$, also $\mathcal{O}^* \subset (\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^*$, für alle P .

b) Die Beschreibung der Matrixelemente von $\mathcal{T}_P$, also $\mathcal{T}_P \subset M_n((\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^*)$, sowie die Form der Diagonalelemente, folgt aus der Definition, genau wie die Beschreibung von $\mathcal{T}$ selbst aus dem ersten Kapitel (5.1.14). Aus letzterer ergibt sich auch, zusammen mit dem folgenden Resultat über die Diagonalelemente, die Formel über den Durchschnitt der Lokalisierungen.

c) Liegt $x \in D$ in allen $(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})_S^*$, und ist $y = \overline{y} \in \mathcal{O}$, so liegt y in allen $(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})_S$, also ist $\sigma(\overline{xy}) \in \bigcap_P \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}$, und daher $\bigcap_P (\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})_S^* \subset \mathcal{O}_S^*$. Umgekehrt sei $x \in \mathcal{O}_S^*$ und $y = \overline{y} \in \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}}$.

Dann existiert ein l , $(l, P) = (l, \overline{P}) = 1$, so daß $ly \in \mathcal{O}$ gilt, also ist $\sigma(\overline{xy}) \in \frac{1}{l} \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}_{(p)}$, und damit $\mathcal{O}_S^* \subset (\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})_S^*$. Durch Symmetrisierung ergibt sich damit die Aussage über die Diagonalelemente. $\square$

Man entnimmt dem Beweis, daß der Versuch, in der Definition von $\mathcal{T}_P$ die Bedingung durch „ $\forall Y = \overline{Y}' \in M_n(\mathcal{O}_P \cup \mathcal{O}_{\overline{P}})$ “ zu ersetzen, was näher an „ $\mathcal{T}_P \cap \mathcal{T}_{\overline{P}}$ “ liegt, nicht zu was sinnvollem führt. Damit erhalten wir

2.2.8 Bemerkung : Die Elemente f von $\mathbf{P}(q)_P$ sind Fourier-Reihen, mit der Eigenschaft

$$a(T) \neq 0 \implies qT \in \mathcal{T}_P,$$

denn es existiert l , $(l, P) = 1$, so daß $f \in \mathbf{P}(ql)$ gilt, also $qlT \in \mathcal{T}$, falls $a(T) \neq 0$. Zu $X = \overline{X}' \in M_n(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})$ existiert weiterhin l' , $(l', P) = 1$, so daß $l'X \in M_n(\mathcal{O})$ ganz ist, also ist insgesamt $\sigma(TX) \in 2 \cdot \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{l \cdot l'} \cdot \mathbb{Z} \subset 2 \cdot \frac{1}{q} \cdot \mathbb{Z}_{(p)}$, also $T \in \frac{1}{q} \cdot \mathcal{T}_P$. $\square$

Jetzt definieren wir den Unterraum der uns eigentlich interessiert.

2.2.9 Definition : Der singuläre Raum $\mathbf{M}(q)$ besteht aus allen (vektorwertigen) holomorphen Funktionen f auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}_n^m$, mit der Eigenschaft, daß, für eine beliebige endliche Menge $S = \overline{S}$ von Primstellen P aus K und jede Matrix $M \in \text{Sp}(n, \mathcal{O}_S)$, $f^M \in \mathbf{P}(q)_S$ gilt. $\square$

Insbesondere gilt, für solche f , $f = f^E \in \mathbf{P}(q)_P$, für alle P , also $f \in \mathbf{P}(q)$. Andererseits zeigt obige Folgerung über konjugierte Kongruenzgruppen, daß Modulformen die Eigenschaft in der Definition des singulären Raumes besitzen. Es gilt also

2.2.10 Lemma : $\Theta(q) \subset \sum_{v=v_{\theta, S, L}} [\Gamma_n[q], \rho, v] = \sum_{v_{i,j}} [\Gamma_n[q], rs, v_{i,j}] \subset \mathbf{M}(q) \subset \mathbf{P}(q)$, $0 < r < n$. $\square$

Nun betrachten wir noch $\overline{\mathbf{M}(q)}$, das Bild von $\mathbf{M}(q)$ in $\overline{\mathbf{P}(q)}$, und bilden

2.2.11 Definition : Es ist $\mathbf{P}(\infty) := \bigcup_{q \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(q)$. Entsprechend werden $\overline{\mathbf{P}(\infty)}$, $\mathbf{M}(\infty)$ und $\overline{\mathbf{M}(\infty)}$

gebildet. $\mathbf{M}(\infty)$ heißt der große singuläre Raum. $\square$

Letzterer enthält alle singulären Modulformen (zu beliebigen Hauptkongruenzgruppen) eines gegebenen Gewichtes. Ziel ist es zu zeigen, daß er doch nicht zu groß ist, im Sinne von $\Theta(q) = \overline{\mathbf{M}}(q)$, für beliebiges q .

3.3 Die eingebettete Involution und deren Wirkung auf die Fourier-Koeffizienten einer singulären Modulform

Nun werden die Elemente der oberen Halbebene wieder in Blöcke gespaltet, und eine „Teilinvolution“ auf solch einen Block betrachtet. Das Verhalten einer singulären Modulform, unter dieser Wirkung, wird untersucht. Die Fourier-Jacobi-Entwicklung liefert einen wichtigen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der ursprünglichen und der daraus entstehenden Modulform, die Umkehrrelation.

3.3.1 Die eingebettete Involution und ihre Wirkung auf Fourier-Reihen

Wir unterteilen, für $0 < r < n$, $(n \times n)$ -Matrizen über D bzw. $D_{\mathbb{C}}$ wieder in Blöcke

$$Z = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ \overline{Z}_1' & Z_2 \end{pmatrix}, \text{ mit } Z_0 = Z_0^{(r)}, \quad Z_1 = Z_1^{(r, n-r)}, \quad Z_2 = Z_2^{(n-r)}, \quad \text{und entsprechend} \quad T = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 \\ \overline{T}_1' & T_2 \end{pmatrix},$$

für $Z \in \mathbb{H}_n$ und $T = \overline{T}' \in M_n(D) \subset M_n(D_{\mathbb{R}})$.

3.1.1 Definition : Die Matrix

$$I_r = I_r^{(n)} = \begin{pmatrix} E_r & E - E_r \\ E_r - E & E_r \end{pmatrix}, \quad E_r = E_r^{(n)} = \begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

heißt die eingebettete Involution der Stufe r (, vom Grad n). $\square$

3.1.2 Bemerkung : I_r ist eine symplektische Matrix, und wirkt gemäß

$$I_r \langle Z \rangle = \begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{Z}_1' & -Z_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} Z_0 - Z_2^{-1} [\overline{Z}_1'] & -Z_1 Z_2^{-1} \\ -Z_2^{-1} \overline{Z}_1' & -Z_2^{-1} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Man kann I_r auf Elemente f von $\mathbf{P}(\infty) = \bigcup_q \mathbf{P}(q, r, n)$, $f(Z) = \sum a(T) e^{\pi i \sigma \{TZ\}}$, anwenden. Falls auch $g \in \mathbf{P}(\infty)$, für

$$g(Z) := \rho(J(I_r, Z))^{-1} f(I_r \langle Z \rangle) = c \cdot \text{Det}(Z_2)^{-\frac{rs}{2}} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -Z_2^{-1} \overline{Z}_1' & -Z_2^{-1} \end{pmatrix} \right) f(I_r \langle Z \rangle),$$

gilt, so besitzt g ebenfalls eine Entwicklung $g(Z) = \sum b(T) e^{\pi i \sigma \{TZ\}}$. In beiden Summen durchläuft T in Wahrheit nur ein Gitter in $M_n(D)$. Diese beiden Fourier-Reihen wollen wir vergleichen. Dazu

3.1.3 Lemma : Sei $S = \overline{S}' > 0$, $S = S^{(r')} \in M_{r'}(D)$, $0 < r' < n$. Dann besteht eine Bijektion zwischen der Menge aller $T = T^{(n)} = \begin{pmatrix} S & * \\ * & * \end{pmatrix} \in M_n(D)$, $T = \overline{T}' \geq 0$, $\text{rank}(T) = r'$, und der der Matrizen $G = G^{(r', n-r')} \in D^{(r', n-r')}$, gegeben durch $T = S[E^{(r')}, S^{-1}G] = \begin{pmatrix} S & G \\ \overline{G}' & S^{-1}[G] \end{pmatrix}$.

Beweis : Wir wählen eine Einbettung von D in eine Matrixalgebra über einem algebraisch abgeschlossenen Körper, z.B. unsere Standardeinbettung $\iota : D \rightarrow M_s(L) \subset M_s(\mathbb{C})$, L ein Zerfällungskörper von $K = \mathcal{Z}(D)$. Da das Bild $\iota(T)$ von T hermitesch ist, existiert ein unitäres U , so daß $\iota(T)[U] = D$ diagonal ist, und D den Rang $\tilde{r} = r's$ hat. Insbesondere ist, nach eventueller Anwendung einer Permutationsmatrix,

$$\iota(T)[U] = D = \begin{pmatrix} \tilde{D}^{(\tilde{r})} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } M_{rs}(\mathbb{C}).$$

Zerlegen wir $U^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, so folgt $\iota \left(\begin{pmatrix} S & G \\ \overline{G}' & * \end{pmatrix} \right) = \iota(T) = \begin{pmatrix} D[A] & \overline{A}' DB \\ \overline{B}' DA & D[B] \end{pmatrix}$. Es ist also $\iota(S) = D[A]$ (insbesondere ist diese Matrix invertierbar), sowie $\iota(G) = \overline{A}' DB$, und außerdem

$$D[B] = (\overline{B}' DA) \cdot (D[A])^{-1} \cdot (\overline{A}' DB) = \iota(\overline{G}') \iota(S)^{-1} \iota(G),$$

also die Behauptung. $\square$

3.3.2 Eine weitere Form der Fourier-Jacobi-Entwicklung und die Umkehrrelation zwischen die Fourier-Koeffizienten von f und g

Wir fassen nun die Fourier-Koeffizienten von f erneut zu Funktionen zusammen.

3.2.1 Lemma : Sei $f \in \mathbf{P}(\infty)$. Die Fourier-Reihe $f(Z) = \sum a(T)e^{\pi i \sigma \{TZ\}}$ besitzt eine Entwicklung

$$f(Z) = \sum_{T=\begin{pmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1' & T_2 \end{pmatrix}} \varphi_{T_0}(Z_1, Z_2) e^{\pi i \sigma \{T_0 Z_0\}}.$$

Ist $T_0 = S > 0$ invertierbar, so gilt $\varphi_S(Z_1, Z_2) = \sum_{G \in G(r, n-r)} a(S[E, S^{-1}G]) e^{\pi i \sigma \{S^{-1}[G]Z_2 + 2\overline{G}'Z_1\}}$.

(In beiden Summen summiert man nur über ein Gitter, genauer gilt $qT \in \mathcal{T}$, für $f \in \mathbf{P}(q) = \mathbf{P}(q, r, n)$. Dies bedeutet wiederum $q\langle G \rangle \subset (\mathcal{O}^*)^r$, sowie $qS^{-1}[G] \in \mathcal{T}_{n-r}$.)

Beweis : Da $\text{Rang}(f) = r$ gilt, muß man obige Korrespondenz für $0 < r' \leq r$ (und zusätzlich $T = 0$) benutzen, es gibt nämlich kein $T = \begin{pmatrix} T_0 & T_1 \\ T_1' & T_2 \end{pmatrix}$ mit $\text{rank}(T) > r$ und $a(T) \neq 0$. $\square$

Da, für $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ mit $U \equiv E \pmod{q}$, $a(T[U]) = \rho_0(\overline{U}')a(T)$ gilt, ist speziell mit $U = \begin{pmatrix} E & qH \\ 0 & E \end{pmatrix}$, $\langle H \rangle \subset \mathcal{O}^r$, $a(S[E, S^{-1}G + qH]) = \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ qH' & E \end{pmatrix}\right) a(S[E, S^{-1}G])$. Es gilt daher

3.2.2 Bemerkung : $\varphi_S(Z_1, Z_2) = \sum_{G \bmod qS} \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{G}'S^{-1} & E \end{pmatrix}\right)$

$$\sum_{qSH = \overline{(qSH)'} \in qS \cdot \mathcal{O}^{(r, n-r)}} \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ (qSH + G)'S^{-1} & E \end{pmatrix}\right) a(S[E, S^{-1}G]) e^{\pi i \sigma \{S^{-1}[qSH + G]Z_2 + 2\overline{(qSH + G)'}Z_1\}} =$$

$\sum_{G \bmod qS} \vartheta_{\mathcal{L}, P} \left[\begin{matrix} G \\ Z_1 \end{matrix} \right] (S^{-1}; Z_2)$. Dabei ist die erste Summe endlich, $\mathcal{L}^{n-r} = \mathcal{L} \times \dots \times \mathcal{L} = qS \cdot \mathcal{O}^{(r, n-r)}$ und

$$P(X) = \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{X}'S^{-1/2} & E \end{pmatrix}\right) \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{G}'S^{-1} & E \end{pmatrix}\right) a(S[E, S^{-1}G]). \quad \square$$

3.2.3 Folgerung : Es gilt $f(I_r \langle Z \rangle) = \left(\sum_{\substack{S=S(r) > 0 \\ G \bmod \mathcal{L}}} \vartheta_{\mathcal{L}, P} \left[\begin{matrix} G \\ -Z_1 Z_2^{-1} \end{matrix} \right] (S^{-1}; -Z_2^{-1}) + \right.$

$$\left. + \sum_{\substack{\text{rank}(T) \leq r \\ \text{Det}(T_0) = 0}} \varphi_{T_0}(-Z_1 Z_2^{-1}, -Z_2^{-1}) \right) e^{\pi i \sigma \{SZ_0 - S[Z_1]Z_2^{-1}\}}. \quad \square$$

Uns interessiert die erste Summe. Jetzt müssen wir die aufgetauchte Thetareihe invertieren, wobei P , zumindestens noch an dieser Stelle, nicht als pluriharmonisch vorausgesetzt werden kann. Wir machen die

3.2.4 Annahme : Es gilt $g \in \mathbf{P}(\infty)$. (Diese ist z.B. für Modulformen $f \in [\Gamma_n[q], \rho, v]$ erfüllt, aber auch allgemeiner für $f \in \mathbf{M}(q)$, nach Definition von $\mathbf{M}(q)$.) $\square$

Dann folgt

3.2.5 Lemma : Es gilt $\vartheta_{\mathcal{L}, P} \left[\begin{matrix} G \\ -Z_1 Z_2^{-1} \end{matrix} \right] (S^{-1}; -Z_2^{-1}) =$

$$= c \cdot \text{Det}(Z_2)^{\frac{rs}{2}} e^{-2\pi i \sigma \{\overline{G}'Z_1 Z_2^{-1}\}} \vartheta_{\mathcal{L}^*, \tilde{P}} \left[\begin{matrix} Z_1 Z_2^{-1} \\ G \end{matrix} \right] (S; Z_2), \quad \tilde{P}(X) = P(X(-Z_2)),$$

mit einer Konstanten c .

Beweis : a) Die Beweisidee der Inversionsformel (vergleiche Kapitel 2, Satz 2.1.2) liefert, mit $\psi(W) := \vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} G+W \\ -Z_1 Z_2^{-1} \end{bmatrix} (S^{-1}; -Z_2^{-1})$, $\psi(0) = \vartheta_{\mathcal{L},P} \begin{bmatrix} G \\ -Z_1 Z_2^{-1} \end{bmatrix} (S^{-1}; -Z_2^{-1}) = \sum c(K)$, wobei

$$c(K) = \text{vol}(\mathcal{L})^{-(n-r)} \int \psi(W) e^{-2\pi i \sigma \{\overline{K'} W\}} dW_x$$

die Fourier-Koeffizienten sind. Diese sind hier

$$c(K) = \text{vol}(\mathcal{L})^{(r-n)} \text{Det}(S)^{\frac{(n-r)s}{2}} \text{Det} \left(-\frac{Z_2}{i} \right)^{\frac{rs}{2}} e^{2\pi i \sigma \{\overline{K'} G\}} e^{\pi i \sigma \{S[-Z_1 Z_2^{-1} - K] Z_2\}}$$

$$\int_{D_{\mathbb{R}}^{(r,n)}} P \left(S^{-1/2} \left(S^{1/2} W \left(\frac{Z_2}{i} \right)^{1/2} - S(-Z_1 Z_2^{-1} - K)(-Z_2) \right) \right) e^{-\pi \sigma \{\overline{W'} W\}} dW.$$

Dabei ist $P(X) = P_a(X) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X'} S^{-1/2} & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \right) a$, mit einem Vektor $a \in \mathcal{Z}$, und es ist zu zeigen, daß der Wert des Integrals $P(S^{1/2}(Z_1 Z_2^{-1} + K)(-Z_2))$ ist. Dazu genügt es zu zeigen, daß P pluriharmonisch ist; tatsächlich zeigt man sogar, daß P konstant ist.

b) Nun ist der Wert des Polynoms als die Anwendung eines Operators L auf einen konstanten Vektor gegeben, dieser Operator hat die Eigenschaft $L(X_1 + X_2) = L(X_1)L(X_2)$, es gilt also

$$P(X_1 + X_2) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X'} S^{-1/2} & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \right) P(X_2),$$

und man kann den Faktor $\rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X'} S^{-1/2} & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \right)$ abspalten und vor das Integral ziehen. Für das übrigbleibende Integral zeigt Freitag ([Fr2], S. 103) im rationalen Fall, daß es gleich dem Vektor a ist. Im reellen und quaternionären Fall kann dieser Beweis übernommen werden. Genauer wird dabei gezeigt, daß das Polynom $P = P_a$ für jedes a aus dem Unterraum, der durch die Fourier-Koeffizienten der Modulform aufgespannt wird, konstant, also insbesondere pluriharmonisch ist. Daher ist auch $\tilde{P}(X) := P(X(\frac{Z_2}{i})^{1/2})$ mit seiner Gauß-Transformierten identisch, das Integral ist jedoch gerade deren Wert an der Stelle 0, also

$$\tilde{P}^*(0) = \tilde{P}(0) = P(0) = a = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X'} S^{-1/2} & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \right) a(S[E, S^{-1}G]).$$

Es ist sogar so, daß $\rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X'} S^{-1/2} & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \right)$ trivial auf den erwähnten Unterraum $\mathcal{Z}_0$ wirkt.

c) Im komplexen Fall ist eine „komplexe Stelle“, also eine Darstellung $\rho_0 = \rho_0^{(1)} \otimes \rho_0^{(2)}$ auf einem Paar $\text{Gl}(n', \mathbb{C})^2 \cong \text{Gl}(n', \mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$ zu untersuchen, und ein Polynom $P(X) = P(X^{(1)}, X^{(2)}) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X'} S^{-1/2} & 0 \\ E & E \end{pmatrix} \right) a$, $a \in \mathcal{Z}$ fest. Hier erhält man, nach der Argumentation von Freitag, $P_t^*(tX) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & t^2 E \end{pmatrix} \right) P^*(X)$, und daraus wieder

$$\lim_{t \rightarrow 0} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & t^2 E \end{pmatrix} \right) P^*(t^{-2}X) = P(X).$$

Dabei ist $tE = (t_1 E, t_2 E) = \iota(Z)$, mit einem $Z = \overline{Z'} \in M_n(\mathbb{C} \otimes \mathbb{C})$, woraus $t_1 = t_2$ folgt, und der Vektor a ist in einem gewissen Unterraum $\mathcal{Z}_0$ enthalten, der durch alle $a(T)$ aufgespannt wird, und ist fest aber beliebig. Daraus ist zu folgern, daß, nach geeigneter Basiswahl, die Komponenten von P und P^* konstant(e Polynome) sind. Man kann nun wieder eine Basis von $\mathcal{Z}_0$ wählen, bezüglich welcher die eingeschränkte Darstellung $\tilde{\rho}_0 : \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z})$, $\tilde{\rho}_0(t) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} \right)$, diagonal ist. In dieser Basis werden die Komponenten von P und P^* homogene Polynome, also $P = P^*$.

d) Dann ist aber $\tilde{\rho}_0$ konstant auf $\mathcal{Z}_0$. Betrachtet man nun die Darstellung

$$\hat{\rho}_0 : \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \rightarrow \text{Gl}(\mathcal{Z}), \quad \hat{\rho}_0(t_1, t_2) = \rho_0^{(1)} \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & t_1 \end{pmatrix} \right) \otimes \rho_0^{(2)} \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & t_2 \end{pmatrix} \right),$$

so ist $\hat{\rho}_0(t, t) = \tilde{\rho}_0(t)$ auf $\mathcal{Z}_0$ konstant. Da man aber $\hat{\rho}_0$ diagonalisieren kann, und es sich um eine polynomiale Darstellung handelt, wirkt auch $\hat{\rho}_0(t_1, t_2)$ trivial auf $\mathcal{Z}_0$, und man erhält wieder, daß $\rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{X}' S^{-1/2} & E \end{pmatrix} \right)$ trivial auf $\mathcal{Z}_0$ wirkt. $\square$

Der Beweis ergibt auch den

3.2.6 Zusatz : Für alle $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ und für alle $P = P_a$, $a \in \mathcal{Z}_0$, gilt

$$P(tX) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & tE \end{pmatrix} \right) P(X) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & t_1 E \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & t_m E \end{pmatrix} \right) P_a(X), \quad \text{für alle } X. \quad \square$$

Nun folgt

3.2.7 Satz : Sei $f \in \mathbf{P}(\infty)$, $f(z) = \sum a(T) e^{\pi i \sigma \{TZ\}}$, eine Fourier-Reihe. Falls die Transformierte g von f ebenfalls in $\mathbf{P}(\infty)$ liegt, so gilt für die Fourier-Koeffizienten $b(T)$ von $g(Z)$ die Umkehrrelation

$$\beta_S(H) = c \cdot \sum \alpha_S(G) e^{2\pi i \sigma \{\overline{H}' S G\}},$$

mit $\alpha_S(G) := \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{G}' & E \end{pmatrix} \right) a(S[E, G])$, $\beta_S(H) := \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{H}' & E \end{pmatrix} \right) b(S[E, H])$ und einer Konstanten $c \neq 0$. Die Koeffizienten $\beta_S(H)$ sind nur für $H = H^{(r, n-r)} \in D^{(r, n-r)}$ aus einem Gitter von Null verschieden. In der Summe, die über $D^{(r, n-r)} / (q\mathcal{O}^{(r, n-r)})$ läuft, sind nur endlich viele Summanden nicht-trivial.

Beweis : a) Wir setzen für invertierbares S obige Inversionsformel 3.2.5 in die Summendarstellung 3.2.3 von $g(Z) = c \cdot \rho(J(I_r, Z))^{-1} f(I_r \langle Z \rangle)$ ein. Es gilt für die uns interessierenden Summanden

$$\begin{aligned} & \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -Z_2^{-1} \overline{Z}_1' & -Z_2^{-1} \end{pmatrix} \right) \sum_{G \bmod \mathcal{L}} c \cdot e^{-2\pi i \sigma \{\overline{G}' Z_1 Z_2^{-1}\}} \vartheta_{\mathcal{L}^*, \overline{P}} \left[\begin{matrix} Z_1 Z_2^{-1} \\ \overline{G}' \end{matrix} \right] (S; Z_2) e^{\pi i \sigma \{S Z_0 - S[Z_1] Z_2^{-1}\}} = \\ & = c \cdot \sum_{G, H} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -Z_2^{-1} \overline{Z}_1' & -Z_2^{-1} \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -Z_2(Z_2^{-1} \overline{Z}_1' + \overline{H}') & E \end{pmatrix} \right) e^{-2\pi i \sigma \{\overline{G}' Z_1 Z_2^{-1}\}} e^{\pi i \sigma \{S[H] Z_2 + S[Z_1] Z_2^{-1}\}} \end{aligned}$$

$$e^{2\pi i \sigma \{\overline{H}' S Z_1\}} e^{2\pi i \sigma \{(\overline{H} + Z_1 Z_2^{-1})' G\}} e^{\pi i \sigma \{S Z_0 - S[Z_1] Z_2^{-1}\}} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{G}' S^{-1} & E \end{pmatrix} \right) a(S[E, S^{-1} G]).$$

Die Spur im Exponenten ist gerade $\sigma(S Z_0 + 2S H \overline{Z}_1' + S[H] Z_2 + 2\overline{G}' H) = \sigma(S[E, H] Z) + 2\sigma(\overline{G}' H)$, die zwei ersten Faktoren ergeben $\rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{H}' & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & Z_2^{-1} \end{pmatrix} \right)$. Der zweite dieser Operatoren läßt jedoch den Rest des Produktes invariant, wie aus dem Zusatz 3.2.6 und der anschließenden Bemerkung 3.2.9 folgt.

b) Nun ersetzt man $S^{-1}G \mapsto G$, bringt den obigen ρ_0 -Faktor auf die linke Seite, multipliziert also

$$g(Z) = \sum b(T) e^{\pi i \sigma \{TZ\}} \quad \text{mit} \quad \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{H}' & E \end{pmatrix} \right)^{-1},$$

wobei ein Minuszeichen vor $\overline{H}'$ entsteht, und schreibt auf dieser Seite der Gleichung wieder alle $T = \begin{pmatrix} S & * \\ * & * \end{pmatrix}$, mit $\text{rank}(T) = r$, als $T = \begin{pmatrix} S & H \\ \overline{H}' & S[H] \end{pmatrix}$. Danach vergleicht man die Teilsummen über die Fourier-Koeffizienten dieser Form auf beiden Seiten der Identität.

c) Man muß noch darauf achten, daß man nicht „Information“ verliert, daß man also nicht etwa $b(T_i)$ und $b(T_j)$, mit gleichem $S = S(T_i) = S(T_j)$, aber verschiedenen $G_i \neq G_j$, auf der Seite von f zusammenfaßt. Es ist jedoch

$$I_r^2 = \begin{pmatrix} 2E_r - E & 0 \\ 0 & 2E_r - E \end{pmatrix}, \quad I_r^2 \langle Z \rangle = \begin{pmatrix} Z_0 & -Z_1 \\ -\overline{Z}_1' & Z_2 \end{pmatrix}.$$

I_r wirkt also (fast) involutiv, $f(Z)$ und $f(I_r^2 \langle Z \rangle)$ können sich nur um eine Konstante unterscheiden, wie der Vergleich der Fourier-Reihen ergibt. Dann müssen aber auch die Fourier-Koeffizienten dieser beiden Funktionen, und damit auch die von f und g , da wir schon $g \in \mathbf{P}(\infty)$ angenommen haben, aus demselben Gitter $\frac{1}{q}\mathcal{T}$ stammen, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Diese wichtige, rein algebraische Beziehung zwischen den Fourier-Reihen f und g ist die Basis der weiteren Untersuchung. Wir wollen noch obige Thetareihen als solche mit harmonischen Formen als Koeffizienten erkennen. Dazu verallgemeinern wir erst eine schon benutzte

3.2.8 Bemerkung : Sei $U \in \mathrm{Gl}(n, D)$, $N = \begin{pmatrix} \overline{U} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$. Dann gilt $a^U(T[\overline{U}']) = \rho_0(U)a(T)$, $qT \in \mathcal{T}$. Dabei sind $a^N(\tilde{T}) = a^U(\tilde{T})$ die Fourier-Koeffizienten der konjugierten Fourier-Reihe f^N . (Wir hatten bei der Fourier-Jacobi-Entwicklung den Fall $U \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O})$ Permutationsmatrix schon benutzt.)

Beweis : Für Translationen $M = \begin{pmatrix} E & H \\ 0 & E \end{pmatrix}$, ist $N^{-1}MN = \begin{pmatrix} E & H[U^{-1}] \\ 0 & E \end{pmatrix}$ wieder eine Translation und umgekehrt, die Perioden von f^U liegen gerade in $\mathcal{S}(n, \mathcal{O})^U := \mathcal{S}(n, \mathcal{O})[U^{-1}]$. Nun ist $M_n(\mathcal{O})^U := M_n(\mathcal{O})[U^{-1}]$ ein $\mathbb{Z}$ -Gitter in $M_n(D)$. Es ist, für

$$\mathcal{T}^U := \{\tilde{X} \in \mathcal{S}(n, D) ; \sigma(\tilde{X}\tilde{Y}) \equiv 0 \pmod{2}, \forall \tilde{Y} \in \mathcal{S}(n, \mathcal{O})^U\},$$

$$\mathcal{T}^U = \{\tilde{X} = X[\overline{U}'], X \in \mathcal{S}(n, D) ; \sigma(UX\overline{U}'\overline{U}'^{-1}YU^{-1}) \equiv 0 \pmod{2}, \forall Y \in \mathcal{S}(n, \mathcal{O})\} = \mathcal{T}[\overline{U}'].$$

Nun liefert der Vergleich von $f^U(Z) = \sum_{q\tilde{T} \in \mathcal{T}^U} a^U(\tilde{T})e^{\pi i \sigma\{\tilde{T}Z\}}$ und $f(Z) = \sum_{qT \in \mathcal{T}} a(T)e^{\pi i \sigma\{TZ\}}$ das gewünschte. $\square$

Damit erhält man

3.2.9 Bemerkung : a) Es ist $\alpha_S(G) = a^U(S[E, 0])$, $U = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{G}' & E \end{pmatrix}$. Für $\tilde{U} \in \mathrm{Sl}(n, D)$,

$$\tilde{U} \equiv E \pmod{q} \cdot U M_n(\mathcal{O}) U^{-1}, \text{ ist } \rho_0(\overline{\tilde{U}}') a^U(T) = a^U(T[\tilde{U}']).$$

b) $P(X) = \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{X}'S^{-1/2} & E \end{pmatrix}\right) \alpha_S(G)$ ist eine harmonische Form bezüglich der Darstellung $A = A^{(n-r)} \mapsto \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right)$.

Beweis : a) Es handelt sich bei der ersten Aussage um einen Spezialfall obiger Bemerkung über konjugierte Fourier-Reihen. Es ist, für $\tilde{U} \in \mathrm{Sl}(n, \mathcal{O})$, $\tilde{U} \equiv E \pmod{q}$, $f^U(Z[U\tilde{U}U^{-1}]) = f(Z[U\tilde{U}]) = \rho_0(\tilde{U}^{-1})f^U(Z)$, und Vergleich der zwei Fourier-Reihen ergibt das richtige Verhalten der Fourier-Koeffizienten.

b) Sei zuerst $A \in \mathrm{Sl}(n-r, D)$, $A \equiv E \pmod{q} \cdot U M_n(\mathcal{O}) U^{-1}$. Dann ist $P(XA) =$

$$\begin{aligned} &= \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ (\overline{XA})'S^{-1/2} & E \end{pmatrix}\right) \alpha_S(G) = \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ \overline{X}'S^{-1/2} & E \end{pmatrix}\right) \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}\right) a^U(S[E, 0]) = \\ &= \rho_0\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}\right) P(X), \text{ da, mit } \tilde{U} := \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}(n, D), \end{aligned}$$

$$\rho_0(\tilde{U})a^U(S[E, 0]) = a^U((S[E, 0])[\overline{\tilde{U}}']) = a^U\left(S\left[(E, 0)\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{pmatrix}\right]\right) = a^U(S[E, 0])$$

gilt. Da dies jedoch eine polynomiale Identität ist, gilt sie allgemein für $A \in \mathrm{Sl}(n-r, D)$. Nun liefert der Zusatz 3.2.6 die Behauptung $\square$

Nach derselben Argumentation ist aber auch allgemeiner $\rho_0\left(\begin{pmatrix} E & A_2 \\ 0 & A_4 \end{pmatrix}\right) \alpha_S(G) = \alpha_S(G)$. Dehnt man nun P zu einem Polynom in $X^{(r,n)}$ aus, und normiert man es auf

$$P(X) = P_{S,G}(X) = \rho_0\left(\begin{pmatrix} \overline{X}'_1 S^{-1/2} & 0 \\ \overline{X}'_2 S^{-1/2} & E \end{pmatrix}\right) E(S)^{-1} \alpha_S(G),$$

$X = (X_1, X_2)$, $E(S) = E(S, \mathcal{L}) = |\mathcal{E}(S, \mathcal{L})| = |\{U \in \text{Gl}(r, D) ; S[U] = S, U \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}\}|$, so erhält man

3.2.10 Bemerkung : Die Polynome $P = P_{S,G}$ sind harmonische Formen, charakterisiert durch $P_{S,G}(S^{1/2}, 0) = E(S)^{-1} \alpha_S(G)$. (Die sogenannte Einheitengruppe von S bezüglich $\mathcal{L}$, $\mathcal{E}(S, \mathcal{L})$, enthält z.B. für $\mathcal{L} = \mathcal{O}^r$ alle unimodularen U mit $S[U] = S$, und ist natürlich eine endliche Gruppe.)

Beweis : Mit geeigneten Permutationen folgert man die Harmonizität für die übrigen Koordinaten. Es ist $P_{S,G}(XA) = P_{S,G}(X_1 A_1 + X_2 A_3, X_1 A_2 + X_2 A_4) =$

$$= \rho_0(\overline{A}') \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X}_1 S^{-1/2} & 0 \\ \overline{X}_2 S^{-1/2} & E \end{pmatrix} \right) \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & B_2 \\ 0 & B_4 \end{pmatrix} \right) E(S)^{-1} \alpha_S(G),$$

mit geeignetem $B_2 = B_2^{(r, n-r)}$ und invertierbarem $B_4 = B_4^{(n-r)}$. Unter dem letzten ρ_0 -Faktor ist $\alpha_S(G)$ jedoch invariant. $\square$

Somit haben wir einen Operator gewonnen, der auf die (konstanten) Vektoren $\alpha_S(G)$ angewendet, harmonische Formen liefert. Die daraus resultierenden Thetareihen werden wir in der Fourier-Reihe f aufspüren und sukzessive davon abziehen.

Kapitel 4

Modulformen als Fourier-Reihen, algebraische Beziehungen zwischen deren Koeffizienten und ein endliches kombinatorisches Problem

Ausgehend von der Umkehrrelation werden nun Modulformen, als Fourier-Reihen, rein algebraisch untersucht. Mit Hilfe von Kompletterungen werden Eigenschaften spezieller Darstellungen von semi-positiven Matrizen gewonnen, die es erlauben, algebraische Relationen zwischen den Fourier-Koeffizienten herzuleiten. Genau dazu ist es notwendig von einer maximalen Ordnung $\mathcal{O}$ auszugehen, wie wir sie im ersten Kapitel wählten. Damit wird das Problem der Erzeugung von singulären Modulformen durch Thetareihen schließlich auf das „fundamental lemma“ von Freitag zurückgeführt.

4.1 Die reduzierte Determinante und spezielle Darstellungen von semi-positiven Matrizen

In diesem Abschnitt werden semi-positive Matrizen untersucht. Ziel ist es, solche in einer einfachen, ausgezeichneten Normalform darzustellen. Im Siegelschen (rationalen) Fall ist dies trivial. In unserer Verallgemeinerung müssen wir die Methode von Freitag aus [Fr3] teilweise auf Komplettierungen erweitern, und dabei unbedingt von einer maximalen Ordnung $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$ in D ausgehen, wie wir sie fest gewählt haben.

4.1.1 Die reduzierte Determinante einer semi-positiven Matrix und Folgerungen über deren Darstellungen

In der rationalen Theorie singulärer Modulformen stellt man an dieser Stelle jede rationale symmetrische Matrix $T = T' = T^{(n)} \geq 0$ vom Rang r , $0 < r < n$, als $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U]$, $S = S^{(r)} > 0$, $U \in \text{Sl}(n, \mathbb{Z})$, dar. Dies ist hier nicht möglich. Man kann jedoch das Lemma 3.1.3 aus dem dritten Kapitel verbessern, und T rational diagonalisieren. Es gilt genauer

1.1.1 Lemma : *Zu jeder hermiteschen semi-positiven Matrix $T = T^{(n)} \in M_n(D)$, mit $0 < \text{rank}(T) = r < n$, existieren*

$$U \in \text{Sl}(n, D) \text{ und } S = \overline{S'} > 0, \text{ so daß } T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U]$$

gilt. Ist $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}$ eine endliche Menge von Primstellen von K (und $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$ wie immer maximal), so kann man $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}})$ erreichen. Insbesondere existiert zu jedem $P \subset \mathcal{O}_K$ eine Darstellung

$$T = \begin{pmatrix} S_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U_P], \quad U_P \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}}), \quad S_P = J_P(S_P) = J(S_P) > 0, \quad S_P \in M_r(D).$$

Beweis : a) Die Aussage über D selbst ist klar, und allgemein genügt es natürlich $r + 1 = n$ zu behandeln. Da dann ein $0 \neq g \in D^n$ existiert, mit $Tg = 0$, und $\mathbb{Z}^{-1} \cdot \mathcal{O} = D$ gilt, findet man sogar ein solches $g \in \mathcal{O}^n$. Ergänzt man dieses zu einem $U = (* \cdots * g) \in M_n(D)$, so ist

$$T[U] = (* \cdots * 0) \text{ und } T[U] = \overline{(T[U])'}, \text{ also } T[U] = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es genügt also, für eine Primstelle P eine unimodulare Ergänzung $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}}) = \text{Sl}(n, \mathcal{O}_P \cap \mathcal{O}_{\overline{P}})$ zu finden. Dann ist dies auch für endlich viele Stellen gleichzeitig möglich.

b) Über der maximalen Ordnung $\mathcal{O}_P$ existiert stets eine Ergänzung $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}})$, $\mathbf{S} := \{P, \overline{P}\}$, da wir es hier mit Hauptidealringen zu tun haben. Um dies zu zeigen, benutzen wir den Kern eines

Lemmas von Gauß, zeigen also, daß ein $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}}) = \text{Sl}(n, \mathcal{O}_P \cap \mathcal{O}_{\overline{P}})$ existiert mit $Ug = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Es genügt den Fall $n = 2$ zu behandeln. Da Permutationsmatrizen in $\text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}})$ liegen, können wir $g_1 \neq 0$ annehmen, und wählen U so, daß der Betrag $|x_1|_P$ minimal unter allen $Ug = x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ wird. Danach wenden wir $\begin{pmatrix} 1 & r \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ auf x an, und erhalten $y = \begin{pmatrix} x_1 + rx_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Es ist daraus, durch geeignete Wahl von $r \in \mathcal{O}_{\mathbf{S}}$, $x_2 = 0$ zu folgern, indem man aus der Annahme $x_2 \neq 0$ einen Widerspruch zur Maximalität der Bewertung $v_P(x_1)$ konstruiert. Es genügt dazu zu zeigen, daß man immer ein r findet, so daß $v_P(x_1 + rx_2) > v_P(x_1)$ gilt.

c) Die Frage reduziert sich also, nach abspalten der Potenz $\pi^{v_P(x_2)}$, $v_P(x_2) \leq v_P(x_1)$, auf die Auflösung von $z_1 + r'z_2 = 0$ nach r' in der zugehörigen Restalgebra. In $\overline{(\mathcal{O}_P)}_P \cong M_{s_P}(\overline{(\Delta_P)}_P)$ ist diese aber stets möglich, falls $z_2 \neq 0$ (, wobei „ $\overline{(\)}_P$ “ die Restalgebra bedeute), da es sich um eine

Matrixalgebra über einem endlichen Körper handelt. Man erhält also $r' \in \mathcal{O}_P$ mit $|x_1 + r'x_2|_P < |x_1|_P$. Nach dem schwachen Approximationssatz gibt es dann aber auch $r \in D$, $r \equiv r' \pmod{P}$ und $r \in \mathcal{O}_{\overline{P}}$, für dieses Element von D gilt also

$$|x_1 + rx_2|_P < |x_1|_P \quad \text{und} \quad r \in \mathcal{O}_{\mathbf{S}},$$

im Widerspruch zur Minimalität von $|x_1|_P$. Es muß also bereits $x_2 = 0$ gelten. $\square$

Es sei noch bemerkt, daß wir bis jetzt ständig die Invarianz der Ordnung $\mathcal{O}$ unter der Involution, nicht aber deren Maximalität benutzt haben. Hier wurde zum erstem Mal tatsächlich angenommen, daß $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$ bereits maximal ist. Kann man umgekehrt für jedes $T = T^{(n)} \in M_n(D)$, mit $\text{rank}(T) = r \leq n$, und jede Primstelle P ein $U \in \text{Gl}(n, \mathcal{O}_P)$ finden, so daß $TU = (\tilde{T}^{(n,r)}, 0^{(n,n-r)})$ gilt, so betrachte man ein beliebiges rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter $\mathcal{L} \subset D^r$. Dieses ist endlich erzeugt, also existieren

$$n \geq r \quad \text{und} \quad X = X^{(r,n)} \in D^{(r,n)}, \quad \text{mit} \quad \langle X \rangle = \mathcal{L}.$$

Ergänze X irgendwie zu $T = T^{(n)} = \begin{pmatrix} X \\ * \end{pmatrix}$, $\text{rank}(T) = r$, und finde dazu ein geeignetes unimodulares U , mit $TU = (*, 0)$. Dann folgt, daß $\mathcal{L}_P = (\mathcal{O}_K)_P \otimes \mathcal{L} \cong \mathcal{O}_P^r$ ist, also ist, da P beliebig war, jedes solche Gitter lokal frei, also, nach allgemeinen Sätzen über Dedekindringe, projektiv. Damit ist aber $\mathcal{O}$ erblich, und dann sogar maximal (, siehe z.B. [Re], Abschnitt 40). Nun führen wir folgende Hilfsgröße ein.

1.1.2 Definition : Wir setzen, für eine Darstellung $T = \begin{pmatrix} S_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U_P]$, $U_P \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})$, wie oben,

$$\delta_P(T) := |\det(S_P)|_P^{-1}, \quad \text{und dann} \quad \delta(T) := \prod_P \delta_P(T).$$

Diese Größe nennen wir die reduzierte Determinante von T . $\square$

Wir erinnern daran, daß „ $\det(S_P)$ “ die Determinante des Bildes von S_P in $M_r(D_L) = M_r(D) \otimes L$ bedeutet, L ein Zerfällungskörper von D , also die reduzierte Norm $N_{M_r(D)/K}(S_P)$, $\delta_P(T)$ ist das inverse deren P -Betrages.

1.1.3 Bemerkung : Die $\delta_P(T)$ hängen nicht von der Wahl der Darstellung ab. Die reduzierte Determinante ist eine wohldefinierte positive rationale Zahl, und sogar ganz, falls $T \in M_n(\mathcal{O})$ gilt.

Beweis : a) Sind $T = \begin{pmatrix} S_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U_P] = \begin{pmatrix} \tilde{S}_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\tilde{U}_P]$ zwei solche Darstellungen, so folgt

$$\begin{pmatrix} \tilde{S}_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A_P & B_P \\ C_P & D_P \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} J_P(A_P) & J_P(C_P) \\ J_P(B_P) & J_P(D_P) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_P A_P & S_P B_P \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_P [A_P] & J_P(A_P) S_P B_P \\ J_P(B_P) S_P A_P & S_P [B_P] \end{pmatrix},$$

also $B_P = 0$, wegen $S_P > 0$, und $\tilde{S}_P = S_P [A_P]$. Die Elemente von $A_P, J_P(A_P) \in M_r(\mathcal{O}_P)$ haben aber sämtlich nicht-negative P -Bewertungen, $v_P(a_{ij}) \geq 0$, also gilt

$$|\det(\tilde{S}_P)|_P \leq |\det(S_P)|_P,$$

und damit, aus Symmetriegründen, die Gleichheit.

b) Die P -adischen Beträge der Normen der S_P sind positive rationale Zahlen (, und nur endlich viele sind von 1 verschieden). Dann ist auch, wegen

$$\begin{pmatrix} S_P & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = T [U_P^{-1}] \in M_n(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}}), \quad \text{falls} \quad T \in M_n(\mathcal{O}) \quad \text{gilt,}$$

$\delta_P(T) \in \mathbb{Z}_{(p)}$, $(p) = \mathbb{Z} \cap P$, für alle P . Nun kann man U_P ($\mathcal{O}$ -) ganz an der Menge $\mathbf{S}$ aller Stellen wählen, an denen überhaupt $\delta_P(T) \neq 1$ ist. Da aber dann alle auftretenden Elemente positive Bewertung an allen diesen Stellen haben, und $v_P(1) = 0$ für alle $P \notin \mathbf{S}$ gilt, liegt $\delta(T) = \prod_{P \in \mathbf{S}} \delta_P(T)$

sogar in

$$\mathbb{Z} = \bigcap_{(p) \subset \mathbb{Z}} \{x \in \mathbb{Q} ; v_{(p)} \geq 0\}. \quad \square$$

Die Geschlossenheitsrelation 2.1.12 zeigt uns, daß $\delta(T)$ eine sinnvolle Verallgemeinerung der Determinante ist. Falls man nämlich sogar eine unimodulare Darstellung $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U]$, $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, von T hat, so ist $\delta(T)$ gerade die Determinante von S . Die reduzierte Determinante mißt T in folgendem Sinne.

1.1.4 Bemerkung : Seien $T_1, T_2 \geq 0$ zwei $(n \times n)$ -Matrizen über D vom selben Rang r , und es existiere, für jede Primstelle P , eine Matrix $G_P \in M_n(\mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})$ mit $T_2 = T_1[G_P]$. Dann gilt $\delta(T_2) \geq \delta(T_1)$. Gleichheit gilt genau dann, wenn man sogar an allen Stellen eine unimodulare „Übergangsmatrix“ $G_P = U_P \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})$ findet.

Beweis : a) Der obige Beweis liefert die Ungleichung $\delta_P(T_2) \geq \delta_P(T_1)$ an jeder Primstelle, daraus folgt sie für das Produkt, da es sich um positive Zahlen handelt. Wenn Gleichheit gilt, muß also $\delta_P(T_1) = \delta_P(T_2)$, für alle P , gelten. Aus den Darstellungen $T_i = \begin{pmatrix} S_{i,P} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U_{i,P}]$, $i = 1, 2$, folgt

$$\begin{pmatrix} S_{2,P} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{1,P} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U_{1,P}G_P U_{2,P}^{-1}],$$

und man erhält wieder die spezielle Gestalt $U_{1,P}G_P U_{2,P}^{-1} = \begin{pmatrix} A_P & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$ für die Übergangsmatrix. Da $S_{1,P}, S_{2,P} > 0$ beide positiv sind, muß A_P invertierbar sein, und die Gleichheit der P -adischen Determinanten liefert dann sogar $A_P \in \text{Gl}(r, \mathcal{O}_S)$, $S := \{P, \overline{P}\}$, also insbesondere

$$x = N_{M_r(D)/K}(A_P) = \det(A_P) \in (\mathcal{O}_K)_P^\times \cap (\mathcal{O}_K)_{\overline{P}}^\times \subset \mathcal{O}_S^\times.$$

„ $x \in \mathcal{O}_S^\times$ “ soll bedeuten, daß die Determinante von A_P sowohl in $\mathcal{O}_P$, wie auch in $\mathcal{O}_{\overline{P}}$ invertierbar ist.

b) Nun muß ein $x_P \in \mathcal{O}_S$ gefunden werden mit $\det(x_P) = \det(A_P)$. Es gibt jedoch ein sehr viel stärkeres Theorem von Eichler, das besagt, daß man zu einem beliebigen $x \in \mathcal{O}_K$, das Norm eines Elementes x_1 aus D ist, sogar ein über $\mathcal{O}_K$ ganzes Element x_2 mit derselben Norm findet, also dieses Problem global löst ([Re], Abschnitt 34, insbesondere (34.8)). Dieses liegt in einer maximalen Ordnung. Da im lokalen Fall je zwei maximale Ordnungen konjugiert sind, findet man ein $x_P \in \mathcal{O}_P$ mit der richtigen Determinante. Nach dem schwachen Approximationssatz kann man gleichzeitig $x_P \in \mathcal{O}_{\overline{P}}$ erreichen, also $x_P \in \mathcal{O}_S$.

c) Bilde nun $B_P := \begin{pmatrix} E^{(n-r-1)} & 0 \\ 0 & x_P \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & x_P^{-1} \end{pmatrix}$. Dann ist $|\det \left(\begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} \right)|_P = 1$, und

$$U_P := U_{1,P}^{-1} \begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} U_{2,P} \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_S)$$

liefert $T_1[U_P] = \begin{pmatrix} S_P[A_P] & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U_{2,P}] = T_2$. Man beachte noch, daß man für $n \geq 2r$ trivialerweise $B_P = \begin{pmatrix} E^{(n-2r)} & 0 \\ 0 & A_P^{-1} \end{pmatrix}$ wählen kann, das ist der für uns wichtigste Fall. $\square$

Um, unter Umständen, aus diesen U_P ein unimodulares U erhalten zu können, brauchen wir

1.1.5 Lemma : Seien $W = W^{(r,n)}, Q = Q^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$, $0 < r < n$, zwei Matrizen vom selben Rang r , mit

$$\mathcal{L} = \langle W \rangle = \langle Q \rangle, \quad \text{sowie } W - Q \in q \cdot \mathcal{L}^n,$$

für eine natürliche Zahl q . Dann existiert ein unimodulares $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, $U \equiv E \pmod{q}$, so daß $WU = Q$ gilt.

Beweis : a) Der rechts- $\mathcal{O}$ -Modul $\mathcal{L} = \sum w_i \cdot \mathcal{O} = \sum q_i \cdot \mathcal{O}$, $W = (w_1 \cdots w_n)$, $Q = (q_1 \cdots q_n)$, ist endlich erzeugt und torsionsfrei. Die zwei linearen Abbildungen $\mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{L}$,

$$x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto W(x) := \sum w_i x_i = Wx \quad \text{und} \quad x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto Q(x) := \sum q_i x_i = Qx$$

haben dasselbe Bild. (Die jeweils rechte Seite dieser Gleichungen ist als Matrixmultiplikation zu lesen, und $x = x^{(n,1)}$ als Spaltenvektor aufzufassen.) Bezeichnet man die entsprechenden Kerne

mit $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$, so erhält man zwei kurze exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow \mathcal{K}_i \longrightarrow \mathcal{O}^n \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0, \quad i = 1, 2.$$

Nun ist $\mathcal{L}$, als $\mathcal{O}$ -Gitter über einer maximalen Ordnung projektiv, (siehe z.B. [Re], (40.1)-(40.6),) und die Sequenzen zerfallen. Man hat also zwei Zerlegungen

$$\mathcal{O}^n = \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{K}_1 = \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{K}_2, \quad \mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2 \cong \mathcal{L}.$$

b) Nun sind $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$, $\mathcal{K}_1$ und $\mathcal{K}_2$ $\mathcal{O}$ -Gitter. Nach einem Korollar zum Kürzungstheorem von Jacobinski ([Ro], VIII.5.8, die sogenannte Eichler-Bedingung ist für $n > 1$ stets erfüllt,) gilt jedoch dann die Kürzungsregel, weil jede Lokalisierung $\mathcal{O}_P$ ein Hauptidealring ist, und daher jedes Gitter lokal frei ist, also $\mathcal{K}_1 \cong \mathcal{K}_2$. Man erhält dann einen Automorphismus $\varphi : \mathcal{O}^n \longrightarrow \mathcal{O}^n$, der obige Abbildungen verbindet, also

$$Q(x) = W(\varphi(x)) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{O}^n.$$

Dieser entspricht gerade einer unimodularen Matrix $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, mit $WU = Q$. (Für $r = n$ könnte man i.a. nur $U \in \text{Gl}(n, \mathcal{O})$ erreichen.)

c) Falls nun ein $\tilde{U} \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ existiert, mit $\tilde{U} \equiv U \pmod{q}$ und $W\tilde{U} = W$, so ist

$$W(\tilde{U}^{-1}U) = WU = Q \quad \text{und} \quad \tilde{U}^{-1}U \equiv E \pmod{q}.$$

Man betrachte also die arithmetische Gruppe $G(\mathcal{O}) =$

$$= G_W(\mathcal{O}) := \{A \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}) ; WA = W\} \subset G_W := \{A \in M_n(D_{\mathbb{C}}) = M_{ns}(\mathbb{C}^m) ; WA = W\}.$$

Die Voraussetzung besagt, daß $WU = Q \equiv W \pmod{q}$ gilt.

d) Man kann annehmen, daß $W = (E, 0)$ gilt. Man kann nämlich W von links und rechts mit $U_1 \in \text{Gl}(r, D)$ und $U_2 \in \bigcap_{(q,P) \neq 1} \text{Sl}(n, \mathcal{O}_P)$ multiplizieren, und $\widehat{W} := U_1 W U_2$ betrachten. Ist nun $\widehat{A} \in G_{\widehat{W}}$, so ist $\widehat{W}\widehat{A} = \widehat{W}$, also auch $WU_2\widehat{A} = WU_2$, und damit $A := U_2\widehat{A}U_2^{-1} \in G_W$. Es gilt also $G_W = U_2 G_{\widehat{W}} U_2^{-1}$. Beweist man daher, daß $G_{\widehat{W}}(\mathcal{O})$ starke Approximation hat, so hat sie $G_W(\mathcal{O})$ ebenfalls.

e) Wir zerlegen nun $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, also $Q = (E, 0)U = (A, B)$. Falls ein $\tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix} \in G(\mathcal{O})$ wie gewünscht existiert, so ist

$$(E, 0) = W = W\tilde{U} = (\tilde{A}, \tilde{B}), \quad \text{also} \quad \tilde{U} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung $W - Q = W(E - U) \in q \cdot \mathcal{L}^n$ liefert aber auch $A \equiv E \pmod{q}$ und $B \equiv 0 \pmod{q}$. Man kann immer $\tilde{C} \equiv C \pmod{q}$ wählen, und braucht noch ein Urbild $\tilde{D} \in \text{Sl}(n - r, \mathcal{O})$ vom Bild von D unter der Restriktion modulo q , $\overline{D} \in \text{Sl}(n - r, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$. In [BM] (S. 101) findet man eine Bemerkung von Matsumoto, die dies liefert, da $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$ semilokal ist. Man kann aber auch mit dem starken Approximationssatz (aus demselben Band, S. 187-8) argumentieren: q hat endlich viele Primteiler P in $\mathcal{O}_K$, fasse diese zu $\mathbf{S}$ zusammen. Man betrachtet die Bilder D_P von D in $M_{(n-r)}(\mathcal{O}_P)$ modulo P . (Für $(q, P) = 1$ sind diese trivial.) Da $\mathbf{S}$ endlich ist, findet man ein $\tilde{D} \in \text{Sl}(n - r, D)$, mit $\tilde{D} \in \text{Sl}(n - r, \mathcal{O}_P)$, $P \notin \mathbf{S}$, und sogar $\tilde{D} \equiv D_P \pmod{P}$, $P \in \mathbf{S}$, also das gesuchte. $\square$

Damit können wir nun obige Bemerkung erweitern, bzw. umkehren.

1.1.6 Lemma : *Seien $T_1, T_2 \geq 0$ zwei semi-positive $(n \times n)$ -Matrizen über D vom selben Rang r , $0 < r < n$, und es gelte $\delta(T_1) = \delta(T_2)$. Ferner existiere $G \in M_n(\mathcal{O})$ mit $T_2 = T_1[G]$. Dann existiert sogar eine unimodulare Matrix $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ mit derselben Eigenschaft. Falls zusätzlich $G \equiv E \pmod{q}$ gilt, so kann man auch $U \equiv E \pmod{q}$ erreichen.*

Beweis : a) Es existiert eine Darstellung $T_1 = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\tilde{U}] = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right] = S[A, B]$, mit $\tilde{U} \in \text{Sl}(n, D)$ und $S = S^{(r)} > 0$. Setze $W := (A, B)$, und erhalte

$$T_2 = T_1[G] = S[WG] = S[Q], \quad \text{mit } Q = WG,$$

also $\langle Q \rangle \subset \langle W \rangle$. Falls hier sogar Gleichheit gilt, so existiert $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ mit $WU = Q$, also

$$T_2 = S[Q] = S[WU] = T_1[U].$$

Außerdem folgt aus $G \equiv E \pmod{q}$ auch $Q = WG \equiv W \pmod{q \cdot \mathcal{L}^n}$, $\mathcal{L} = \langle W \rangle$, also der Zusatz. Es ist also, für jede Primstelle P (einschließlich der unendlichen), $\langle W \rangle_P = \langle Q \rangle_P$ zu zeigen.

b) Nach obiger Bemerkung über die Gleichheit von reduzierten Determinanten existiert für jedes P ein $U_P \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})$, mit $T_2 = T_1[U_P]$, also $S[Q] = S[WU_P]$. Finde nun wieder ein invertierbares $\tilde{U}_1$ und ein an P und $\overline{P}$ unimodulares $\tilde{U}_2$, mit $\tilde{U}_1 Q \tilde{U}_2 = (E, 0)$ (beachte $\text{rank}(Q) = r$), und arbeite mit diesem weiter, sowie mit $\tilde{U}_1 W \tilde{U}_2 U_P$ anstelle von W , wodurch die fragliche Gleichheit der Erzeugnisse unbeeinflusst bleibt,

$$\langle \tilde{U}_1 Q \tilde{U}_2 \rangle_P = \tilde{U}_1 \cdot \langle Q \rangle_P \quad \text{und} \quad \langle \tilde{U}_1 W \tilde{U}_2 U_P \rangle_P = \tilde{U}_1 \cdot \langle W \rangle_P.$$

Dann ist $S[Q] = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = S[W_1, W_2]$, also $W = (W_1, 0)$, $W_1 \in \text{Gl}(r, D)$.

c) Jetzt gilt

$$\langle Q \rangle_P = \langle E \rangle_P = \mathcal{O}_P^r \subset \langle W \rangle_P = \langle W_1 \rangle_P,$$

also $\langle W_1^{-1} \rangle_P \subset \mathcal{O}_P^r$, und damit $W_1^{-1} \in M_r(\mathcal{O}_P)$. Genauso gilt $W_1^{-1} \in M_n(\mathcal{O}_{\overline{P}})$. Wegen $S[W_1] = S$, also äquivalent $S[W_1^{-1}] = S$, muß dann aber sogar $W_1 \in \text{Gl}(n, \Delta_P)$ gelten, also auch $\langle W \rangle_P = \langle W_1 \rangle_P = \mathcal{O}_P^r$. Natürlich gilt auch $\langle W \rangle_\infty = \langle Q \rangle_\infty$, da $\text{rank}(W) = \text{rank}(Q) = r$, also $W \cdot D^{(n,1)} = D^r = Q \cdot D^{(n,1)}$. $\square$

4.1.2 Die kanonische Darstellung einer semi-positiven Matrix von gegebenem Rang

Wir werden semi-positive Matrizen $T \in M_n(D)$ häufig als $T = S[Q]$ darstellen, mit $S = S^{(r)} > 0$, wobei r der Rang von T ist, $\text{rank}(T) = r$. Es gilt folgende relative aber doch weitgehende

1.2.1 Eindeutigkeit der Darstellung : Seien $S = S^{(r)} > 0$, $\tilde{S} = \tilde{S}^{(r)} > 0$, $Q = Q^{(r,n)}$ und $\tilde{Q} = \tilde{Q}^{(r,n)}$ Matrizen über D , sämtlich vom Rang r , und es gelte $S[Q] = \tilde{S}[\tilde{Q}]$. Dann existiert eine Matrix $A \in \text{Gl}(r, D)$, mit $\tilde{S} = S[A]$ und $Q = A\tilde{Q}$.

Beweis : Es existieren Ergänzungen $U = \begin{pmatrix} Q \\ * \end{pmatrix}, \tilde{U} = \begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ * \end{pmatrix} \in \text{Sl}(n, D)$. Es gilt dann

$$\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U] = \begin{pmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\tilde{U}],$$

also hat $U\tilde{U}^{-1}$ wieder die Form $\begin{pmatrix} A & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$. Wegen der Bedingungen an die Ränge ist dann aber A invertierbar und $\tilde{S} = S[A]$. Außerdem ist $\begin{pmatrix} Q \\ * \end{pmatrix} = U = \begin{pmatrix} A & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \tilde{U} = \begin{pmatrix} A\tilde{Q} \\ * \end{pmatrix}$. $\square$

Im Gegensatz zu D , ist über $\mathcal{O}$ nicht jede Matrix ergänzbar.

1.2.2 Definition : Eine Matrix $Q = Q^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$ vom Rang r heißt primitiv, falls sie ganz ist, und zu einer invertierbaren Matrix $U = \begin{pmatrix} Q \\ * \end{pmatrix} \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ ergänzbar ist. Sie heißt primitiv an der Primstelle P , falls die entsprechende Aussage über $\mathcal{O}_P$ gilt, und primitiv an der Menge $\mathbf{S}$ von Primstellen, falls sie dies an jedem $P \in \mathbf{S}$ ist. $\square$

Wir wählen nun eine ausgezeichnete, in gewissem Sinne „minimale“, Ergänzung aus. Diese werden wir bei der Darstellung von semi-positiven Matrizen $T = S[Q]$ benutzen.

1.2.3 Lemma : Sei $Q = Q^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$, $0 < \text{rank}(Q) = r < n$. Es existiert dann eine Ergänzung $U \in \text{Sl}(n, D)$, $Q = (E, 0)U$, so daß, für jedes $X = X^{(r,n-r)} \in D^{(r,n-r)}$ und

$$Q_X := (E, X)U, \quad \langle Q \rangle \subset \langle Q_X \rangle$$

gilt. Man kann erreichen, daß U an den Primstellen unimodular ist, an denen Q primitiv ist.

Beweis : a) Wir zeigen, daß ein geeignetes U existiert, so daß $\langle Q \rangle_P \subset \langle Q_X \rangle_P$, für jedes X und jede Primstelle P , gilt. Man findet, für jedes P , ein $A_P \in \text{Gl}(r, D)$ und ein $U_P \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_P)$, mit $Q = (A_P, 0)U_P$. Wähle wieder ein $x_P \in \mathcal{O}_P$ mit der Norm $\det(A_P)$, und bilde $B_P = \begin{pmatrix} E^{(n-r-1)} & 0 \\ 0 & x_P^{-1} \end{pmatrix}$. Dann ist $Q = (E, 0) \begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} U_P$, mit $\begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} U_P \in \text{Sl}(n, D)$.

b) Die Menge $\mathbf{S}$ aller Primstellen, an denen ein Element von Q eine nicht-triviale $\mathcal{O}$ -P-Bewertung hat, ist endlich. An allen weiteren Stellen P liegt Q in $(\mathcal{O}_P^\times)^{(r,n)}$, besteht also nur aus Einheiten von $\mathcal{O}_P$. Nach dem starken Approximationssatz existiert ein $U_1 \in \text{Sl}(n, D)$, mit

$$U_1 \equiv \begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} U_P \pmod{P}, \quad P \in \mathbf{S}, \quad \text{und} \quad U_1 \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_P) \text{ sonst.}$$

Es existiert also, zu jedem P , ein $V_P \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_P)$, so daß $\begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} U_P = U_1 V_P$ gilt, also $Q = (E, 0)U_1 V_P$.

c) Setze nun $W := (E, 0)U_1$. Es gilt $\langle Q \rangle_P = \langle W \rangle_P$, für alle P . Dann existiert aber, nach obigem Lemma, ein unimodulares $\tilde{U} \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, mit $Q = W\tilde{U}$, also $Q = (E, 0)U$, $U := U_1\tilde{U} \in \text{Sl}(n, D)$, und U sogar ganz an den Stellen, an denen Q primitiv ist. Sei nun $Q_X = (E, X)U$. Dann gilt

$$\langle Q \rangle_P = \langle (E, 0) \begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} U_P \rangle_P = \left\langle (E, 0) \begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} \right\rangle_P = \langle (A_P, 0) \rangle_P \subset$$

$$\subset \langle (A_P, X B_P) \rangle_P = \left\langle (E, X) \begin{pmatrix} A_P & 0 \\ 0 & B_P \end{pmatrix} U_P \right\rangle_P = \langle (E, X)U_1 \rangle_P = \langle (E, X)U \rangle_P = \langle Q_X \rangle_P. \quad \square$$

Diese Minimalitätseigenschaft ist nützlich in Verbindung mit

1.2.4 Lemma : Seien $S = S^{(r)} > 0$, $Q = Q^{(r,n)}$ und $W = W^{(r,n)}$ Matrizen vom selbem Rang $0 < r < n$, mit $S[Q] = S[W]$ und $\langle Q \rangle \subset \langle W \rangle$. Dann gilt sogar $\langle Q \rangle = \langle W \rangle$.

Beweis : Es existiert, wegen obiger Eindeutigkeitseigenschaft, ein $A \in \text{Gl}(r, D)$ mit $S = S[A]$ und $Q = AW$, und außerdem, zu einer beliebigen Primstelle P ,

$$U_1 \in \text{Gl}(r, D), \quad U_2 \in \text{Gl}(n, \mathcal{O}_P), \quad \text{mit} \quad U_1 Q U_2 = (E, 0).$$

Nehme also wieder $Q = (E, 0)$ an. Dann ist $W = (W_1, 0)$, und $\mathcal{O}_P^\times = \langle Q \rangle_P \subset \langle W_1 \rangle_P$ liefert wieder $W_1 \in \text{Gl}(r, \mathcal{O}_P)$, und damit $\langle Q \rangle_P = \langle W \rangle_P$. Da P beliebig war, folgt die Behauptung. $\square$

4.2 Der Begriff der (potentiellen) Kernform einer Modulform, Folgerungen aus der Umkehrrelation

Es wird der wichtige Begriff der Kernform einer (singulären) Modulform eingeführt. Das sind spezielle Matrizen, deren zugehörige Fourier-Koeffizienten nicht verschwinden. Die Umkehrrelation erlaubt es, Aussagen über solche zu machen. Um diese herum aufbauend, werden später die Thetareihen konstruiert, die die Modulform erzeugen.

4.2.1 Der Begriff der Kernform, Eigenschaften von solchen

Nun definieren wir, genau wie Freitag in [Fr3], die „Keime“ unser Thetareihen.

2.1.1 Definition : Sei $f \in \mathbf{P}(\infty)$, $f(Z) = \sum a(T)e^{\pi i \sigma\{TZ\}}$, eine Fourier-Reihe. Eine Matrix $T = T^{(n)} = \tilde{T}' \geq 0$, mit $0 < \text{rank}(T) = r < n$, heißt Kernform von f , oder f -Kernform (bzw. einfach Kernform), falls $a(T) \neq 0$ gilt, und folgende Eigenschaft erfüllt ist: Zu jedem weiteren $\tilde{T}$ vom selben Rang r , mit $a(\tilde{T}) \neq 0$, das eine Darstellung $T = \tilde{T}[G]$, $G \in M_n(\mathcal{O})$, erlaubt, existiert sogar ein unimodulares $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, so daß $T = \tilde{T}[U]$ gilt. $\square$

Wir erinnern daran, daß Matrizen T , mit $a(T) \neq 0$, höchstens den Rang r haben, dieser wird genau dann angenommen, wenn $0 \neq f \in \mathbf{P}(\infty)$ gilt. Es gilt

2.1.2 Bemerkung : Sei $f \in \mathbf{P}(\infty)$, $\text{Rang}(f) = r$. Dann besitzt f eine (f -) Kernform.

Beweis : Es existiert ein q , so daß $f \in \mathbf{P}(q)$ gilt. Alle nicht-verschwindenden Fourier-Koeffizienten $a(T) \neq 0$ gehören dann zu einem Gitter, $qT \in \mathcal{T}$, also existiert

$$0 < \delta := \min\{\delta(T) ; a(T) \neq 0, \text{rank}(T) = r\}.$$

Ein $T = T_1$ mit dieser reduzierten Determinante erfüllt jedoch die Bedingungen des Hilfssatzes 1.1.6, falls $\tilde{T} = T_2$ eine Darstellung $T_1 = T_2[G]$ erlaubt, da ja dann $\delta \geq \delta(T_2)$ gelten muß, also Gleichheit. $\square$

Damit kommen wir zu Darstellungen, die wir dann mit der ausgezeichneten Minimaldarstellung aus dem letzten Abschnitt vergleichen werden, um Einschränkungen an die f -Kernformen zu gewinnen.

2.1.3 Lemma : Seien $f \in \mathbf{P}(q)$, T eine Kernform, $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U]$ eine Darstellung von T , mit $U \in \text{Sl}(n, D)$ (so eine muß ja existieren) und $Q = Q^{(r,n)}$ die zugehörige Einschränkung von $U = \begin{pmatrix} Q \\ * \end{pmatrix}$, also $T = S[Q]$. Falls $W = W^{(r,n)}$ existiert, mit $a(S[W]) \neq 0$ und $\langle Q \rangle \subset \langle W \rangle$, so sind diese Moduln sogar gleich.

Beweis : Die Bedingung $\langle Q \rangle \subset \langle W \rangle$ liefert die Existenz einer Matrix $A \in M_n(\mathcal{O})$ mit $Q = WA$, also, für

$$\tilde{T} := S[W], \quad \tilde{T}[A] = S[WA] = S[Q] = T.$$

Da aber T Kernform ist, gilt sogar $T = \tilde{T}[\tilde{U}]$, mit unimodularem $\tilde{U}$. Dann ist jedoch $\langle Q \rangle \subset \langle W \rangle = \langle W\tilde{U} \rangle$, und $S[Q] = S[W\tilde{U}]$, also die Behauptung, nach Lemma 1.2.4. $\square$

2.1.4 Satz : Seien $T = S[Q]$ eine Kernform von $f \in \mathbf{M}(q)$, $\mathcal{L} = \langle Q \rangle$ und $0 < r < n$. Dann gilt

$$qS^{-1}[H] \in \mathcal{T}_{n-r}, \quad \text{für alle } H = H^{(r,n-r)} \in (\mathcal{L}^*)^{n-r},$$

falls $n - r > 1$ ist, und dann folgt sogar $qS^{-1}[H] \in \mathcal{T}_{n'}$, für $H = H^{(r,n')}$ mit $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$ und beliebigem n' . Dies wird stets angenommen.

Beweis : a) Die Bedingung $qS^{-1}[H] \in \mathcal{T}$, für alle $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$ ist dazu äquivalent, daß $qS^{-1}[h] \in \mathcal{T}_1$ und $\tilde{h}'(qS^{-1})\tilde{h} \in \mathcal{O}^*$, für alle $h, \tilde{h} \in \mathcal{L}^*$. Es genügt also $qS^{-1}[H^{(r,n-r)}] \in \mathcal{T}_{n-r}$, für $H \in (\mathcal{L}^*)^{n-r}$,

zu zeigen, um die entsprechende Aussage für beliebige n' zu erhalten, für alle n bis auf den ausgeschlossenen Grenzfall $n = r + 1$.

b) Die Bemerkung über die Eindeutigkeit der Darstellung (1.2.1) liefert, zusammen mit $\tilde{\mathcal{L}} = \langle \tilde{Q} \rangle = \langle A^{-1}Q \rangle = A^{-1} \cdot \mathcal{L}$ und $\tilde{\mathcal{L}}^* = \overline{A}^{-1} \cdot \mathcal{L}^*$, sowie $q\tilde{S}^{-1}[\overline{A}^{-1}H] = qS^{-1}[H]$, daß es genügt, die Aussage für eine Darstellung zu zeigen, sie gilt dann für jede. Ferner muß diese nur lokal nachgewiesen werden, im Sinne von

$$qS^{-1}[H] \in (\mathcal{T}_{n-r})_P, \quad \text{für alle } \langle H \rangle \in \mathcal{L}^* \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}} \subset (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}})^*, \quad \mathbf{S} := \{P, \overline{P}\}.$$

Dabei ist $\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}}$ der $\mathcal{O}_{\mathbf{S}}$ -Modul $= \mathcal{L}_P \cap \mathcal{L}_{\overline{P}}$, und unter $(\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}})^*$ ist

$$(\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}})^* = \{x \in D^r; \sigma(\overline{x}y) \in \mathbb{Z}_{(p)}, \forall y \in \mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}}\},$$

$(p) = \mathbb{Z} \cap P = \mathbb{Z} \cap \overline{P}$, zu verstehen. Das umfaßt aber $(\mathcal{L}_P)^* \cup (\mathcal{L}_{\overline{P}})^*$ und damit $\mathcal{L}^* \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}}$. Ein $x \in \mathcal{L}^*$ liegt nämlich in jedem $\mathcal{L}^* \cdot \mathcal{O}_{\mathbf{S}}$, aus den lokalen Aussagen und $\langle H \rangle \subset \mathcal{L}^*$ folgt also $qS^{-1}[H] \in \bigcap_P (\mathcal{T}_{n-r})_P$. Außerdem ist der Durchschnitt aller $\mathcal{T}_P$ gerade $\mathcal{T}$, wie im dritten Kapitel (Lemma 2.2.7) gezeigt. Die Bedingung an der unendlichen Stelle, also $qS^{-1}[H] \in \mathcal{S}(n-r, D)$, für alle $H \in D^{(r, n-r)}$, ist selbstverständlich.

c) Sei also P eine Primstelle, und die Darstellung $T = S[Q] = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}[U]$ sei so gewählt, daß $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}})$ unimodular an $\mathbf{S}$, also insbesondere Q primitiv an P und $\overline{P}$ ist. Dieses U kann man dann aber nach Lemma 1.2.3 sogar so wählen, daß es die Minimalitätseigenschaft $\langle (E, 0)U \rangle \subset \langle (E, X)U \rangle$, für alle $X = X^{(r, n)} \in D^{(r, n)}$, besitzt. Betrachte nun, außer f , auch $\tilde{f} := f\overline{U}^{-1}$ und $\tilde{g} := g(\tilde{f})$, also

$$\tilde{f}(Z) = \rho_0(\overline{U}'^{-1})f(Z[\overline{U}'^{-1}]) = \sum \tilde{a}(T)e^{\pi i \sigma\{TZ\}} \quad \text{und}$$

$$\tilde{g}(Z) = c \cdot \text{Det}(Z_2)^{-\frac{rs}{2}} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -Z_2^{-1}\overline{Z}_1' & -Z_2^{-1} \end{pmatrix} \right) \tilde{f}(I_r \langle Z \rangle) = \sum \tilde{b}(T)e^{\pi i \sigma\{TZ\}}.$$

Da, nach Definition von $\mathbf{M}(q)$, $\tilde{f}, \tilde{g} \in \mathbf{P}(q)_P$ gilt, durchlaufen die Koeffizienten dieser Fourier-Reihen $\frac{1}{q}\mathcal{T}_P$. Genauer durchlaufen die Koeffizienten von $\tilde{f}$ das Gitter $\frac{1}{q} \cdot \mathcal{T}\overline{U}'^{-1} = \frac{1}{q} \cdot \mathcal{T}[U^{-1}]$ (vergleiche Bemerkung 3.2.8 aus dem dritten Kapitel), und da $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}})$ ist, ist tatsächlich $\mathcal{T}[U^{-1}] \subset \mathcal{T}_P \subset \mathcal{S}(n, D)$ (und Gitter). Deswegen kann man $\tilde{f}$ mit $f(Z) = \sum a(T)e^{\pi i \sigma\{TZ\}}$, $qT \in \mathcal{T}$, vergleichen, und es gilt $\tilde{a}(T) = \rho_0(\overline{U}'^{-1})a(T[U])$, $qT \in \mathcal{T}_P$.

d) Die Umkehrrelation (Kapitel 3, Satz 3.2.7) lautet

$$\tilde{\beta}_S(G) = c \cdot \sum \tilde{\alpha}_S(X)e^{2\pi i \sigma\{\overline{G}'SX\}} = c \cdot \sum \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{X}' & E \end{pmatrix} \right) \rho_0(\overline{U}'^{-1})a(S[(E, X)U])e^{2\pi i \sigma\{\overline{G}'SX\}}.$$

Nach Voraussetzung ist $a(S[(E, 0)U]) = a(T) \neq 0$, also existiert, nach Vertauschung der Rollen $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{g}$ (und weil I_r quasi-involutiv wirkt), auch ein G mit $\tilde{\beta}_S(G) \neq 0$. Nun ist T Kernform, also folgt, nach obigem Lemma und aus der Minimalitätseigenschaft von $(E, 0)U$, aus

$$a(S[(E, X)U]) \neq 0 \quad \text{auch} \quad \langle (E, X)U \rangle = \langle (E, 0)U \rangle.$$

Damit muß aber $X = X^{(r, n-r)} \in D^{(r, n-r)}$ sogar $\mathcal{O}$ -ganz an P und $\overline{P}$ sein, $x \in \mathcal{O}_{\mathbf{S}}^{(r, n-r)}$. Aus der Gittereigenschaft von $\mathcal{T}[U^{-1}]$, in dem die Fourier-Koeffizienten $a(S[(E, X)U])$ ja liegen, hatten wir, beim Beweis der Umkehrrelation und von 3.2.3 ausgehend, schon gefolgert, daß diese nur für endlich viele X von 0 verschieden sind, also existiert ein $l \in \mathbb{N}$, $(l, P) = 1$, so daß sogar $l \cdot X \in \mathcal{O}^{(r, n-r)}$ (für alle solche X) gilt.

e) Sei nun $H \in (\mathcal{O}^*)^{(r, n-r)}$. Dann gilt $e^{2\pi i \sigma\{\overline{(lS^{-1}H)}SX\}} = 1$, für alle X , also

$$\tilde{\beta}_S(G + lS^{-1}H) = \tilde{\beta}_S(G).$$

Da aber aus $\tilde{b}(T) \neq 0$ auch $qT \in \mathcal{T}_P$ folgt, muß $qS[E, G + lS^{-1}H] \in \mathcal{T}_P$, für alle solche H gelten, also

$$ql^2S^{-1}[H] + ql(\overline{H}'G + \overline{G}'H) \in (\mathcal{T}_{n-r})_P.$$

Da $n - r > 1$ ist, betrachtet man (vergleiche auch Kapitel 2, Bemerkung 2.2.6) die speziellen $H = (h0 \cdots 0)$ und $H = (0h0 \cdots 0)$, $h \in (\mathcal{O}^*)^r$, spaltet so die linearen Terme ab, und erhält $qS^{-1}[H] \in (\mathcal{T}_{n-r})_P$.

f) Nun kann man jedoch überall auch $H \in ((\mathcal{O}^*)_P \cap (\mathcal{O}^*)_{\overline{P}})^{(r, n-r)}$ zulassen, da man dann immernoch ein geeignetes l , $(l, P) = 1$ findet, wie in e gefordert, und erhält dann auch

$$qS^{-1}[H] \in (\mathcal{T}_{n-r})_P, \quad \text{für } H \in ((\mathcal{O}_P)^* \cap (\mathcal{O}_{\overline{P}})^*)^{(r, n-r)}.$$

Es folgt also die Behauptung, da ja die Darstellung primitiv an P und $\overline{P}$ gewählt wurde, also $\mathcal{L} \subset \mathcal{L}_P \cap \mathcal{L}_{\overline{P}} = \langle Q \rangle \cdot \mathcal{O}_S = \mathcal{O}_S^*$ und damit auch

$$\mathcal{L}^* \cdot \mathcal{O}_S = (\mathcal{L}^*)_P \cap (\mathcal{L}^*)_{\overline{P}} = (\mathcal{L}_{\overline{P}})^* \cap (\mathcal{L}_P)^* = (\mathcal{O}_P^r)^* \cap (\mathcal{O}_{\overline{P}}^r)^*.$$

(Man könnte in e auch gleich mit dem allgemeineren H arbeiten, würde dann im Exponenten jedoch nur ein Element aus $\mathbb{Z}_{(p)}$, $(p) = \mathbb{Z} \cap P$, erhalten, und müßte wieder ein geeignetes l einfügen und lokalisieren.) $\square$

4.2.2 Potentielle Kernformen einer Fourier-Reihe aus dem singulären Raum

Diese starke Einschränkung an Kernformen benutzt man nun als notwendige Voraussetzung für deren Existenz. Man hat die folgenden Kandidaten.

2.2.1 Definition : Sei $f \in \mathbf{P}(\infty)$. Eine hermitesche semi-positive Matrix $T = T^{(n)} = \overline{T}' \geq 0$, vom Rang $0 < r < n$, heißt potentielle Kernform, der Stufe q , von f , falls $qT \in \mathcal{T}$ im zugehörigen Gitter liegt, und für eine Darstellung $T = S[Q]$, $S = S^{(r)} = \overline{S}' > 0$, und das Gitter $\mathcal{L} = \langle Q \rangle$,

$$qS^{-1}[G] \in \mathcal{T}, \quad \text{für alle } \langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*,$$

gilt. $\square$

2.2.2 Bemerkung : Die zweite Bedingung in der Definition gilt dann automatisch auch für jede weitere Darstellung $T = \tilde{S}[\tilde{Q}]$ von T , wie im Beweis des Satzes unter b gezeigt. Kernformen von Elementen aus $\mathbf{M}(q)$ sind nach dem eben bewiesenen Satz potentielle Kernformen. Mit T ist, für $U \in \text{Gl}(n, \mathcal{O})$, auch $T[U]$ eine potentielle Kernform, denn $\mathcal{T}$ ist zwar kein $\mathcal{O}$ -Modul, aber unter solchen Kegelautomorphismen invariant, und es gilt $\langle QU \rangle = \langle Q \rangle = \mathcal{L}$. $\square$

Man kann also unimodulare Klassen $T[\text{Gl}(n, \mathcal{O})]$ potentieller Kernformen betrachten.

2.2.3 Bemerkung : Es existieren nur endlich viele unimodulare Klassen $T[\text{Gl}(n, \mathcal{O})]$ potentieller Kernformen einer festen Stufe q .

Beweis : Alle Repräsentanten einer Klasse haben dieselbe reduzierte Determinante $\delta(T)$. Bei festem q ist diese, wegen $qT \in \mathcal{T}$, global für alle Klassen, nach unten beschränkt. Die zweite Bedingung in der Definition potentieller Kernformen liefert jedoch eine untere Schranke für (den Nenner von) $\text{Det}(S)^{-1}$. Damit sind aber die $\delta(T)$ auch nach oben beschränkt. Insgesamt sind die reduzierten Determinanten also beschränkt. Weil $\mathcal{T}$ ein Gitter ist, können dann nur endlich viele verschiedene reduzierte Determinanten $\delta_1, \dots, \delta_k \in \mathbb{Q}$ von potentiellen Kernformen $T \in \frac{1}{q} \cdot \mathcal{T}$ angenommen werden. Wegen der Eindeutigkeit der Darstellung von T , ist die Isomorphieklasse des der Kernform zugeordneten Gitters $\mathcal{L}$ eindeutig bestimmt. Es gibt aber nur endlich viele solcher Klassen.

Die Bedingung $qS^{-1}[G] \in \mathcal{T}$, $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*$, ergibt aber auch eine obere Schranke für $\text{Det}(S)$, es werden also auch nur endlich viele verschiedene solche Determinanten angenommen. Für jedes $U \in$

$M_r(D)$, das ein Element ϕ_U aus der Menge der Gitter-Automorphismen definiert, $\phi_U \in \text{Aut}_{\mathcal{O}}(\mathcal{L})$, ist $\langle UQ \rangle = \phi_U(\langle Q \rangle) = \mathcal{L}$, also existiert $\tilde{U} \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$, mit

$$(S[U])[Q] = S[UQ] = (S[Q])[\tilde{U}] \in T[\text{Gl}(n, \mathcal{O})].$$

Es gibt aber, nach der Reduktionstheorie, nur endlich viele solche Klassen, für jede feste gegebene Determinante $\text{Det}(S)$ und jedes Gitter $\mathcal{L}$. $\square$

2.2.4 Folgerung : *Es existieren nur endlich viele Klassen $[T]$ von potentiellen Kernformen einer festen Stufe q ,*

$$[T] := T[\text{Sl}(n, \mathcal{O})].$$

Aus $\tilde{T} = T[U]$, $U \in \text{Gl}(n, \mathcal{O})$, folgt $\delta(\tilde{T}) = \delta(T)$, und damit existiert sogar $\tilde{U} \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ mit $\tilde{T} = T[\tilde{U}]$, also gilt $[T] = T[\text{Gl}(n, \mathcal{O})]$. $\square$

Wir wählen ein Repräsentantensystem $T_1, \dots, T_k$ der unimodularen Klassen von potentiellen Kernformen und denken es uns nach aufsteigender reduzierten Determinante geordnet, $\delta(T_1) \leq \dots \leq \delta(T_k)$.

Damit ist $\overline{\mathbf{M}(q)}$ endlich-dimensional. Man könnte jetzt schon versuchen ein Erzeugendensystem so zu konstruieren, daß man eine Modulform (z.B. eine Thetareihe) f_1 , mit $a_1(T_1) \neq 0$, von einem beliebigen f abzieht (, falls $a(T_1) \neq 0$ gilt). Man muß dabei sichern, daß alle zu dieser Klasse gehörenden Koeffizienten verschwinden. Danach will man induktiv fortfahren. Im folgenden wird gezeigt, wie man diese Überlegungen präzisieren kann.

4.3 Algebraische Relationen zwischen den Fourier-Koeffizienten zu Kernformen und duale Moduln

Nun werden Relationen zwischen den Fourier-Koeffizienten zu Kernformen hergeleitet, und das Problem der Erzeugung der singulären Modulformen in die Sprache der endlichen Moduln übersetzt.

4.3.1 Der Begriff der isotropen Matrix und die algebraischen Relationen zwischen Kernformen

Sei $f \in \mathbf{M}(q)$ und T eine Kernform der Stufe q von f . Wir wollen die Elemente der unimodularen Klasse von T untersuchen. Wir stellen dazu T als $T = S[Q]$ dar, mit $S = S^{(r)} > 0$ und Q primitiv an allen Stellen P mit $(q, P) \neq 1$, was nach 1.1.1 möglich ist, und bilden $\mathcal{L} := \langle Q \rangle$. Dadurch haben wir folgendes erzwingen

3.1.1 Bemerkung : Es ist $\mathcal{L}_P = \mathcal{O}_P^r$, für alle $P \in \mathbf{S} := \{P' \subset \mathcal{O}_K ; (q, P') \neq 1\}$, für das der Kernform zugeordnete Gitter. $\square$

Nun betrachten wir Matrizen der Form $\tilde{T} = S[W]$, $W = W^{(r,n)}$. Wir wissen (Lemma 1.1.5), daß aus $\langle Q \rangle = \langle W \rangle$ die Existenz eines $U \in \mathrm{Sl}(n, \mathcal{O}) \subset \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O})$ folgt, mit $W = QU$, also liegt in diesem Fall $\tilde{T} = T[U]$ in der unimodularen Klasse von T . Umgekehrt liefern solche Matrizen $W = QU$, $U \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{O})$, denselben Modul $\mathcal{L}$. Dasselbe Lemma liefert aber sogar den Zusatz $U \equiv E \pmod{q}$, falls $Q - W \in q \cdot \mathcal{L}^n$ (und auch hier ist die Umkehrung trivial). Alle $W = QU$, $U \in \mathrm{Sl}(n, \mathcal{O})$, sind natürlich primitiv an allen Stellen aus $\mathbf{S}$. Wir halten fest

3.1.2 Bemerkung : a) Sei $T = S[Q]$ obige Darstellung einer Kernform und $\mathcal{L} = \langle Q \rangle$. Die Matrizen $S[W]$, $W = W^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$ mit $\langle W \rangle \subset \mathcal{L}$, umfassen die volle unimodulare Klasse von T .

b) Der Wert der Abbildung

$$\alpha(W) = \alpha_T(W) := \rho_0(\overline{U'}^{-1})a(S[W]), \quad W = W^{(r,n)}, \quad \langle W \rangle \subset \mathcal{L},$$

$S[W] = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U]$, $U = \begin{pmatrix} W \\ * \end{pmatrix}$ eine $\mathbf{S}$ -unimodulare Ergänzung von W , ist nur für W verschieden 0, die primitiv an $\mathbf{S}$ sind. Er hängt ferner nur von dem Bild $\overline{W}$ von W in $(\mathcal{L}/q\mathcal{L})^n$ ab.

Beweis : Die erste Behauptung folgt, nach dem eben bemerkten, aus der Definition einer Kernform. Zwei Ergänzungen U_1 und U_2 von W unterscheiden sich nur durch Multiplikation von links mit einem $\tilde{U} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$, und $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & 0 \\ * & * \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also ist $\alpha(W)$ wohldefiniert.

Die Fourier-Koeffizienten von f haben die Transformationseigenschaft $a(T[\tilde{U}]) = \rho_0(\overline{\tilde{U}}')a(T)$, für unimodulares $\tilde{U} \equiv E \pmod{q}$. Es unterscheiden sich jedoch, nach dem zitierten Lemma 1.1.5, zwei verschiedene Matrizen W und $\widehat{W}$, mit $T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [U] = \begin{pmatrix} \hat{S} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} [\widehat{U}]$, $U = \begin{pmatrix} W \\ * \end{pmatrix}$, $\widehat{U} = \begin{pmatrix} \widehat{W} \\ * \end{pmatrix}$, die dasselbe Bild $\overline{W} = \overline{\widehat{W}}$ modulo $q \cdot \mathcal{L}$ besitzen, nur durch Multiplikation von rechts mit einem solchen $\tilde{U}$, und es ist auch

$$\rho_0(\overline{\tilde{U}}'^{-1}) = \rho_0(\overline{(U\tilde{U})}'^{-1}) = \rho_0(\overline{U'}^{-1})\rho_0(\overline{\tilde{U}}')^{-1}, \quad \text{also} \quad \alpha(W) = \alpha(\widehat{W}). \quad \square$$

Falls $a(S[W]) \neq 0$ gilt, und die ursprüngliche Darstellung von T so gewählt werden konnte, daß Q von der Form $Q = (E, 0)$ ist, also insbesondere $\mathcal{L} = \mathcal{O}^r$, und W die spezielle Form $W = (E, G)$ hat, dann ist $\alpha_T(W) = \alpha_S(G)$, mit den schon früher definierten (Kapitel 3, Satz 3.2.7) $\alpha_S(G)$ und $U = \begin{pmatrix} E & G \\ 0 & E \end{pmatrix}$. Die $\alpha_T(W)$ stellen also eine Verallgemeinerung der $\alpha_S(G)$ dar.

Wir betrachten nun den $\mathcal{O}$ - und $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$ -Modul $\mathcal{M} := \mathcal{L}/q\mathcal{L}$, nennen n -Tupel von Elementen aus $\mathcal{M}$ primitiv, falls sie $\mathcal{M}$ erzeugen, und bezeichnen mit $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n = (\mathcal{M}^n)_{\text{prim}}$ die Menge aller solcher Tupel. (Diese ist nicht leer, da ja $\overline{Q} = (\overline{q}_1 \cdots \overline{q}_n)$ so ein Tupel liefert.) Außerdem bilden wir $\mathcal{M}^* = \mathcal{L}^*/q\mathcal{L}^*$. (Vorsicht: $(q\mathcal{L})^* = \frac{1}{q} \cdot \mathcal{L}^* \neq q\mathcal{L}^*$.)

3.1.3 Bemerkung : a) $\alpha_T = \alpha : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$, $\alpha(\overline{W}) := \alpha(W)$, ist wohldefiniert.

b) In der Sprache der Moduln bedeutet der oben erläuterte Sachverhalt, daß $\text{Sl}(n, \mathcal{O})$ transitiv auf der Menge aller $W = W^{(r,n)}$, mit $\langle W \rangle = \mathcal{L}$, operiert. Wir haben jedoch schon gezeigt (und benutzt), daß die natürliche Restriktionsabbildung $\text{Sl}(n, \mathcal{O}) \longrightarrow \text{Sl}(n, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$ surjektiv ist, damit operiert auch $\text{Sl}(n, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$ transitiv auf $\mathcal{P} = \mathcal{P}_n$. $\square$

3.1.4 Definition : Sei $\mathcal{L} \subset D^r$ ein rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter, z.B. $\mathcal{L} = \langle Q \rangle$, $Q = Q^{(r,n)} \in D^{(r,n)}$. Eine Matrix $V = V^{(r,k)}$, mit $\langle V \rangle \subset \mathcal{L}^*$, heißt isotrop bezüglich S , $\mathcal{L}$ und q , falls, für jede Matrix

$$X = X^{(r,k)} \quad \text{mit} \quad \langle X \rangle \subset \mathcal{L}^*, \quad (qS)^{-1}[V + qX] \in \mathcal{T}_k$$

gilt. Diese Bedingung hängt nur von dem Bild $\overline{V}$ der Matrix in $(\mathcal{M}^*)^k$ ab, wir bezeichnen also auch dieses als isotrop. $\square$

3.1.5 Bemerkung : Die Thetareihen $\vartheta_{\mathcal{L}, \mathcal{P}}(S, V; Z)$ aus $\Theta(q)$ zum Gitter $\mathcal{L}$ enthalten Charakteristiken V . Für jede solche ist qV eine isotrope Matrix bezüglich S , $\mathcal{L}$ und q . $\square$

Da wir zwischen $k = n$ und $k = n-r$ umschalten werden müssen, schließen wir ab jetzt (erneut) den Randfall $n = r + 1$ aus. Wir können nun das angekündigte Relationensystem erhalten. Dabei halten wir q fest, benutzen große Buchstaben für Matrizen und kleine für Modulelemente, und bilden folgende Paarung.

3.1.6 Definition : Seien $\mathcal{L}$ ein rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter in D^r , $\mathcal{M} := \mathcal{L}/q\mathcal{L}$, $x \in \mathcal{M}^{n-r}$, $w \in (\mathcal{M}^*)^{n-r}$, und X, W Urbilder von x und w in $\mathcal{L}^{n-r}$ bzw. $(\mathcal{L}^*)^{n-r}$. Dann setzt man $\epsilon(x, w) = \epsilon(w, x) := e^{\frac{2\pi i}{q} \sigma\{X'W\}}$. Dies ist wohldefiniert, nach Definition des reziproken Gitters $\mathcal{L}^*$. $\square$

3.1.7 Satz : Seien $e = (e_1, \dots, e_r) \in \mathcal{M}^r$, mit $\langle e \rangle = \mathcal{M}$, und $w \in (\mathcal{M}^*)^{n-r}$ anisotrop, im Sinne von „nicht isotrop“. Dann gilt, für jedes $u \in \text{Gl}(n, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$,

$$\sum_{x \in \mathcal{M}^{n-r}} \alpha((e, x)u) \epsilon(x, w) = 0.$$

Beweis : a) Sei die Behauptung für ein e (und alle w und u) bewiesen, und $f = (f_1, \dots, f_r)$ ein weiteres Erzeugendensystem. Dann existiert ein $a \in \text{Gl}(r, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$ mit $f = ea$. Ergänze dieses zu $\tilde{a} \in \text{Gl}(n, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$, mittels der Erweiterung $A \longmapsto \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E^{(n-r)} \end{pmatrix}$ eines Urbildes $A \in M_r(\mathcal{O})$ von a . Es ist

$$(f, x)u = (ea, x)u = (e, x)(\tilde{a}u),$$

also gilt die Behauptung für beliebiges f .

b) Sei nun $b \in \text{Gl}(n-r, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$ beliebig, w anisotrop, also entweder $w \notin (\mathcal{M}^*)^{n-r}$, oder die Bedingung in der Definition der Isotropie ist verletzt. Da aber $\mathcal{M}^*$ ein $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$ -Modul ist, ist $wb \in (\mathcal{M}^*)^{n-r} \iff w \in (\mathcal{M}^*)^{n-r}$. Es existiere also, falls letzteres eintritt, ein

$$x \in (\mathcal{M}^*)^{n-r} \quad \text{mit} \quad M := (qS)^{-1}[W + qX] \notin \mathcal{T}_{n-r},$$

für Urbilder X und W von x und w . Dann gilt, für $\tilde{X} = XB$ (wieder für ein Urbild $B \in M_{n-r}(\mathcal{O})$ von b),

$$\tilde{M} := (qS)^{-1}[WB + q\tilde{X}] = ((qS)^{-1}[W + qX])[B] \notin \mathcal{T}_{n-r},$$

da $B \in \text{Gl}(n-r, D)$, und aus $\sigma(MY) \notin 2 \cdot \mathbb{Z}$ auch $\sigma(\tilde{M}\tilde{Y}) \notin 2 \cdot \mathbb{Z}$, $\tilde{Y} := Y[\overline{B'}^{-1}]$, folgt, also ist auch wb anisotrop. Ferner gilt $\epsilon(x, wb) = \epsilon(x\overline{b'}, w)$ (immer über Urbilder), sowie

$$\alpha((e, x)u) = \alpha \left(\left(e, x\overline{b'} \right) \cdot \begin{pmatrix} \overline{b'}^{-1} & \\ & u \end{pmatrix} \right),$$

mit der Erweiterung $\tilde{B} = \begin{pmatrix} E^{(r)} & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$. Es genügt also $u \in \text{Sl}(n, \mathcal{O}/q\mathcal{O})$ (und alle anisotropen w) zu betrachten, dann existiert aber ein unimodulares Urbild $U \in \text{Sl}(n, \mathcal{O})$ von u .

c) $\text{Sl}(n, \mathcal{O})$ wirkt jedoch auf $\mathbf{M}(q)$, und der Vergleich der Fourier-Koeffizienten zeigt, daß, mit einer f -Kernform T , $T[\overline{U}']$ eine f^U -Kernform ist, $f^U = f^M$, $M = \begin{pmatrix} \overline{U}' & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix}$. Da der Satz für beliebige Kernformen gelten soll, genügt es ein festes e und ein festes u , sowie beliebiges w , zu untersuchen. Die Eindeutigkeitsaussage (1.2.1) über die Darstellung $T = S[Q]$ erlaubt es wieder, diese frei zu wählen, ohne die Aussage des Satzes zu ändern. Bilde also $\mathbf{S} = \{P \subset \mathcal{O}_K ; (q, P) \neq 1\}$, und wähle Q primitiv an allen Stellen aus $\mathbf{S}$. (Die Existenz solch einer Darstellung wurde in 1.1.1 gezeigt.) Da P genau dann in $\mathbf{S}$ liegt, wenn $\overline{P} \in \mathbf{S}$, ist dies gleichbedeutend damit, daß Q ganz an allen $P \in \mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}$ und sogar unimodular ergänzbar an diesen Stellen ist. Damit sind die Lokalisierungen $\mathcal{L}_P = \mathcal{O}_P^*$, $P \in \mathbf{S}$, also $\mathcal{L}_P/q\mathcal{L}_P = (\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)^r$ und damit

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}/q\mathcal{L} \cong \prod_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{L}/P^{v_P} \mathcal{L} \cong \prod_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{L}_P/q\mathcal{L}_P = \prod_{P \in \mathbf{S}} (\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)^r.$$

d) Nun ergänzt man Q gemäß 1.2.3 minimal, also zu $U \in \text{Sl}(n, D) \cap \text{Sl}(n, \mathcal{O}_{\mathbf{S}})$, $Q = (E, 0)U$, mit der Eigenschaft $\langle Q \rangle \subset \langle Q_X \rangle$, für $Q_X = (E, X)U$ und alle $X \in D^{(r, n-r)}$. Es ist

$$\mathcal{O}/q\mathcal{O} \cong \prod_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{O}/P^{v_P} \mathcal{O} \cong \prod_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P,$$

nach Definition von $\mathbf{S}$. Der Isomorphismus ist durch die natürlichen Projektionen gegeben: Mittels diesem kanonischen Isomorphismus wählt man nun u als das Bild von U in $\prod \text{Sl}(n, \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)$, sowie e als das Bild der Einheitsmatrix $E^{(r)}$ in $\mathcal{M}^r$. (Dies zeigt auch, daß überhaupt ein Erzeugendensystem e von $\mathcal{M}$ der Länge r existiert.)

e) Die Summe läuft über die Elemente $x \in \mathcal{M}^{n-r}$, diese wollen wir als Bilder von Matrizen $X \in D^{(r, n-r)}$ auffassen; es müssen insbesondere alle $X \in \bigcap_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{O}_P^{(r, n-r)}$ ganz an allen $P \in \mathbf{S}$, nach Wahl von Q sein. Sei dazu $\mathcal{N} := \{X \in D^{(r, n-r)} ; \langle Q \rangle = \langle Q_X \rangle\}$. Dies ist ein $\mathcal{O}_K$ -Modul, denn aus $X, Y \in \mathcal{N}$ folgt

$$\langle Q \rangle \subset \langle Q_{X+Y} \rangle \subset \langle Q_X \rangle + \langle Q_Y \rangle = \langle Q \rangle,$$

also $X+Y \in \mathcal{N}$. Er ist endlich erzeugt, da die X , für die der α -Koeffizient nicht verschwindet, in einem Gitter liegen. Unter seinem reziproken versteht man natürlich $\mathcal{N}^* = \{X \in D^{(r, n-r)} ; \sigma(\overline{X}Y) \in \mathbb{Z}, \forall Y \in \mathcal{N}\}$. Man erhält wieder eine diagonale Einbettung in die Lokalisierungen

$$\mathcal{N}/q\mathcal{N} \cong \prod_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{N}_P/q\mathcal{N}_P, \quad \mathcal{N}_P = (\mathcal{O}_K)_P \otimes \mathcal{N} = (\mathcal{O}_K)_P \cdot \mathcal{N}.$$

Nun ist jedoch $\langle Q \rangle \subset \langle Q_X \rangle$, für alle $X \in D^{(r, n)}$, nach Wahl der Ergänzung U von Q . Gleichheit gilt genau für $X \in \mathcal{O}_{\mathbf{S}}^{(r, n)}$, also $\mathcal{N}_P = \mathcal{O}_P^{(r, n-r)}$, $P \in \mathbf{S}$. Man erhält damit einen $(\mathcal{O}_P)_P/q(\mathcal{O}_K)_P$ -Modul Isomorphismus $\mathcal{N}/q\mathcal{N} \cong \mathcal{M}^{n-r}$ und jedes x kann als Bild eines $X \in \mathcal{N}$ aufgefaßt werden. Wegen $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}$ und $(\mathcal{L}^*)_P = (\mathcal{L}_{\overline{P}})^*$, sowie $(\mathcal{N}^*)_P = (\mathcal{N}_{\overline{P}})^*$, erhält man auch $\mathcal{N}^*/q\mathcal{N}^* \cong (\mathcal{M}^*)^{n-r}$, wieder als $(\mathcal{O}_K)_P/q(\mathcal{O}_K)_P$ -Modul.

f) Man kann auch die Paarung $\epsilon(x, w) = e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{X}_1 W_1\}}$, X_1, W_1 Urbilder von x und w in $\mathcal{L}^{n-r}$ bzw. $(\mathcal{L}^*)^{n-r}$, längs $\mathcal{N}$ liften. Sind nämlich X und W Urbilder in $\mathcal{N}$ bzw. $\mathcal{N}^*$, so ist $e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{X}' W\}}$ von der Wahl dieser Repräsentanten (unter den kanonischen Restriktionen modulo q) unabhängig, und die Gleichheit der Bilder mit denen von X_1 und W_1 bedeutet gerade die der lokalen Spuren an den fraglichen Stellen, also denen mit $(q, P) \neq 1$. Nach Definition von $\mathbf{S}$ ist also $\epsilon(x, w) = e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{X}' W\}}$. Damit ist

$$\sum_{X \in \mathcal{N}} \alpha((E, X)U) e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{X}' W\}} = 0$$

zu zeigen.

g) Was bedeutet nun die Anisotropie für das geliftete W ? Wir wissen, daß ein $X_1, \langle X_1 \rangle \subset \mathcal{L}^*$ existiert, mit $(qS)^{-1}[W_1 + qX_1] \notin \mathcal{T}_{n-r}$, also existiert eine Primstelle P_0 , an der

$$(qS)^{-1}[W_1 + qX_1] \notin (\mathcal{T}_{n-r})_{P_0} = (\mathcal{T}_{n-r})_{\overline{P}_0}$$

gilt. Sei nun $X_2 := \frac{1}{q}(W_1 - W) + X_1$. Dann ist

$$X_2 \in (\mathcal{L}^*)_P^{n-r} = (\mathcal{O}^*)_P^{(r, n-r)} = (\mathcal{N}^*)_P,$$

für alle $P \in \mathbf{S}$. Wegen $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{S}}$, ist auch $X_2 \in (\mathcal{N}^*)_{\overline{P}}$, und damit $X_2 \in (\mathcal{O}_K)_{\{P, \overline{P}\}} \cdot \mathcal{N}^* \subset ((\mathcal{O}_K)_{\{P, \overline{P}\}} \cdot \mathcal{N}^*)^*$. Daher existiert eine natürliche Zahl l , $(q, l) = 1$, so daß $lX_2 \in \mathcal{N}^*$ gilt. Zusätzlich kann man (durch Multiplikation mit k , $l \mapsto k \cdot l$.) noch $q|(l-1)$ erreichen. Für $(q, P) = 1$ ist $\langle \frac{1}{q}W_1 + X_1 \rangle \in \mathcal{L}^* \cdot \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}} \subset (\mathcal{L} \cdot \mathcal{O}_{\{P, \overline{P}\}})^*$, also, wie beim Beweis des Hauptsatzes über Kernformen gezeigt,

$$(qS)^{-1}[W_1 + qX_1] \in (\mathcal{T}_{n-r})_P,$$

also muß $P_0 \in \mathbf{S}$ sein. Dann ist aber $l \in \mathcal{O}_{\{P_0, \overline{P}_0\}}^\times$, und

$$(qS)^{-1}[lW_1 + qlX_1] = (qS)^{-1}[lW + qlX_2] \notin (\mathcal{T}_{n-r})_{P_0}.$$

Mit $X := \frac{l-1}{q}W + lX_2$ gilt dann $W + qX = W + (l-1)W + qlX_2 = lW + qlX_2$ und damit

$$(qS)^{-1}[W + qX] \notin (\mathcal{T}_{n-r})_{P_0}.$$

Außerdem ist $X = \frac{l}{q}(W_1 + qX_1) - \frac{1}{q}W = \frac{1}{q}(lW_1 - W) + lX_1 = \frac{l-1}{q}W_1 + \frac{1}{q}(W_1 - W) + lX_1 \in \mathcal{N}^*$.

h) Umgekehrt seien $W, X \in \mathcal{N}^*$ mit $(qS)^{-1}[W + qX] \notin (\mathcal{T}_{n-r})_{P_0}$, für ein P_0 , gegeben, sowie ein $W_1 \in (\mathcal{L}^*)^{n-r}$ mit demselben Bild w wie W . Definiere $X_2 := \frac{1}{q}(W - W_1) + X$. Das obige Argument zeigt wieder, angewandt auf $\frac{1}{q}W + X$, daß $P_0 \in \mathbf{S}$ gilt. Da $\langle X_2 \rangle \subset (\mathcal{L}^*)_P$, $P \in \mathbf{S}$, gilt, existiert wieder ein l , $(q, l) = 1$ und $q|(l-1)$, so daß $\langle lX_2 \rangle \subset \mathcal{L}^*$. Definiere nun $X_1 := \frac{l-1}{q}W_1 + lX_2 = \frac{l-1}{q}W_1 + \frac{1}{q}(W - W_1) + lX$, und erhalte $W + qX_1 = l(W + qX)$, und damit die Verletzung der Isotropiebedingung an P_0 für $\langle X_1 \rangle \subset \mathcal{L}^*$. Damit ist auch die Anisotropie mit der Liftung verträglich.

i) Da $e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{Y}'(qX)\}} = 1$, für $Y \in \mathcal{N}$ und $X \in \mathcal{N}^*$, gilt, kann man in der Anisotropiebedingung $W + qX \mapsto W$ ersetzen, und hat

$$\sum_{X \in \mathcal{N}} \alpha((E, X)U) e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{X}'W\}} = 0, \text{ für } W \in \mathcal{N}^* \text{ mit } (qS)^{-1}[W] \notin \mathcal{T}_{n-r},$$

zu beweisen. Die Isotropie muß dann wieder an (mindestens) einer Primstelle P_0 verletzt sein, diese muß aber dann in $\mathbf{S}$ liegen. Betrachte

$$\tilde{T} = S[E, (qS)^{-1}W] = \left(\overline{W}'^S_{(qS)^{-1}S} \begin{matrix} S \\ S[(qS)^{-1}W] \end{matrix} \right) = \left(\frac{1}{q}\overline{W}'^S \begin{matrix} \frac{1}{q}W \\ \frac{1}{q}(qS)^{-1}[W] \end{matrix} \right),$$

und die konjugierten Funktionen $\tilde{f} = f^{\overline{U}'^{-1}}$, $\tilde{g} = g(\tilde{f})$ (vergleiche den Beweis zum Satz 2.1.4, Punkt c). Diese sind Elemente aus $\bigcap_{P \in \mathbf{S}} \mathbf{P}(q)_P = \mathbf{P}(q)_S$, und es gilt $\tilde{b}(\tilde{T}) = 0$, da $q\tilde{T} \notin \bigcap_P \mathcal{T}_P$.

j) Die Umkehrrelation (Kapitel 3, Satz 3.2.7) liefert also $0 = \sum_X \tilde{\alpha}_S(X) e^{2\pi i \sigma\{\overline{W}'(qS)^{-1}SX\}} =$

$$= \sum \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{X}' & E \end{pmatrix} \right) \tilde{a}(S[E, X]) e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{X}'W\}} = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{X}' & E \end{pmatrix} \right) \rho_0(\overline{U}'^{-1}) a(S[E, X]U) e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\overline{X}'W\}}.$$

Es ist aber $\begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix} U$ eine Ergänzung der Matrix $(E, X)U$, und $\overline{\begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix}}'^{-1} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ -\overline{X}' & E \end{pmatrix}$, also die Behauptung, nach Definition von $\alpha((E, X)U) = \alpha_T((E, X)U)$. $\square$

4.3.2 Der Zusammenhang zwischen reziproken Gittern und dualen Moduln

Das Relationensystem wurde schon in Modulsprache ausgedrückt. Um, wie angestrebt, Anschluß an das „fundamental lemma“ von Freitag zu erhalten, muß man noch $\mathcal{R} := \mathcal{O}/q\mathcal{O}$ als Ring betrachten. Wir haben schon den R -Modul $\mathcal{M} = \mathcal{L}/q\mathcal{L}$ eingeführt, und sein reziprokes (Gitter) $\mathcal{M}^* = \mathcal{L}^*/q\mathcal{L}^*$ benutzt. Als erstes

3.2.1 Bemerkung : Jeder rechts- $\mathcal{O}$ -Modul $\mathcal{N}$ kann auch, mittels $(r, x) \mapsto x \cdot \bar{r}$, $r \in \mathcal{O}$ und „ $\cdot$ “ natürlich die gewöhnliche Multiplikation in D , als links- $\mathcal{O}$ -Modul aufgefaßt werden. $\square$

Außerdem haben wir

3.2.2 Bemerkung : Sei $\mathcal{N}$ weiterhin ein rechts- $\mathcal{O}$ -Modul. Es ist $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ ein links- $\mathcal{O}$ -Modul. Dabei bedeute „ $\text{Hom}_{\mathcal{O}}$ “ die abelsche Gruppe aller rechts- $\mathcal{O}$ -Homomorphismen Entsprechendes gilt über $\mathcal{R}$.

Beweis : Für einen rechts- $\mathcal{O}$ -Homomorphismus ϕ gilt $\phi(x \cdot r) = \phi(x) \cdot r$, $x \in \mathcal{N}$ und $r \in \mathcal{O}$. Setzt man nun $(r \cdot \phi)(x) := r \cdot (\phi(x))$ für ein $\phi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O})$, so ist $r \cdot \phi$ offensichtlich wieder ein rechts- $\mathcal{O}$ -Homomorphismus. $\square$

Man beachte jedoch, daß man für einen beliebigen rechts- $\mathcal{O}$ -Modul $\mathcal{N}'$ keine $\mathcal{O}$ -Modulstruktur für die Homomorphismengruppe $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{N}')$ erhält: $(\phi \cdot r)(x) = \phi(x) \cdot r$ liefert, wegen der nicht-Kommutativität, keinen Homomorphismus, und auch die Involution hilft dabei nicht weiter. Allerdings tragen diese Gruppen natürlich immer eine $\mathcal{O}_K$ -Struktur. Auf lokaler Ebene ist die entgegengesetzte Algebra von $\mathcal{O}_P$ nun isomorph zu $\overline{(\mathcal{O}_P)} = \mathcal{O}_{\overline{P}}$. Hier gilt also

3.2.3 Bemerkung : Jeder rechts- $\mathcal{O}_P$ -Modul $\mathcal{N}$ trägt auch eine links- $\mathcal{O}_{\overline{P}}$ -Struktur. Die abelsche Gruppe $\text{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{N}, \mathcal{O}_P)$ ist ein links- $\mathcal{O}_P$ - und rechts- $\mathcal{O}_{\overline{P}}$ -Modul. Entsprechendes gilt über $\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$. $\square$

Wichtig ist noch das Doppelduale eines rechts- $\mathcal{O}$ - bzw. rechts- $\mathcal{O}_P$ -Moduls. Es gilt

3.2.4 Bemerkung : Sei $\mathcal{N}$ ein rechts- $\mathcal{O}$ -Modul. Dann ist $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}), \mathcal{O})$ ein rechts- $\mathcal{O}$ -Modul. Genauer könnte man dafür $\text{Hom}_{\mathbf{l}-\mathcal{O}}(\text{Hom}_{\mathbf{r}-\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}), \mathcal{O})$ schreiben, da es sich bei der äußeren Homomorphismengruppe um links-, bei der inneren hingegen um rechts- $\mathcal{O}$ -Homomorphismen handelt. Die Zuordnung

$$x \mapsto \Phi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}), \mathcal{O}), \quad \Phi_x(\phi) := \phi(x), \quad x \in \mathcal{N}, \quad \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}),$$

ist ein rechts- $\mathcal{O}$ -Homomorphismus. Entsprechendes gilt natürlich lokal, also für rechts- $\mathcal{O}_P$ -Moduln $\mathcal{N}$, sowie über $\mathcal{R}$ und $\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$.

Beweis : a) Man setzt $(\Phi \cdot r)(\phi) := \Phi(\phi) \cdot r$, $r \in \mathcal{O}$. Es ist

$$(\Phi \cdot r)(r' \cdot \phi) = \Phi(r' \cdot \phi) \cdot r = r' \cdot \Phi(\phi) \cdot r = r' \cdot (\Phi \cdot r)(\phi),$$

da ja Φ die links- $\mathcal{O}$ -Struktur von $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O})$ respektiert, also ist auch das so definierte Produkt $\Phi \cdot r \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O}), \mathcal{O})$.

b) Nun ist $\Phi_x(r \cdot \phi) = (r \cdot \phi)(x) = r \cdot \phi(x) = r \cdot \Phi_x(\phi)$, nach Definition der links- $\mathcal{O}$ -Struktur der Homomorphismengruppe $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{N}, \mathcal{O})$. Ferner ist

$$\Phi_{x \cdot r}(\phi) = \phi(x \cdot r) = \phi(x) \cdot r = \Phi_x(\phi) \cdot r = (\Phi_x \cdot r)(\phi),$$

für alle ϕ , also $\Phi_{x \cdot r} = \Phi_x \cdot r$. $\square$

Allen diesen Strukturen unterliegen selbstverständlich entsprechende $\mathcal{O}_K$ - bzw. $(\mathcal{O}_K)_P$ -Modulstrukturen, auf dieser Ebene ist nicht mehr zwischen „links-“ und „rechts-“ zu unterscheiden. Wir wissen, daß das reziproke eines rechts- $\mathcal{O}$ -Gitters $\mathcal{L}$ ebenfalls ein rechts- $\mathcal{O}$ -Modul ist. Das reziproke einer seiner Lokalisierungen $\mathcal{L}_P$, also $(\mathcal{L}_P)^* = (\mathcal{L}^*)_{\overline{P}}$, ist ein rechts- $\mathcal{O}_{\overline{P}}$ -Modul. In unserer speziellen Situation werden die Gitter $\mathcal{L}$ durch $\mathbf{S}$ -primitive Matrizen $Q = Q^{(r,n)}$ erzeugt, $\mathcal{L} = \langle Q \rangle$, es ist also $\mathcal{L}_P = \mathcal{O}_P^r$, $P \in \mathbf{S} = \{P' ; (q, P') \neq 1\}$. Wir brauchen

3.2.5 Lemma : Sei $\mathcal{L} \subset D^r$ ein rechts- $\mathcal{O}$ -Gitter, dessen Lokalisierungen $\mathcal{L}_P$, für alle Primstellen P mit $(q, P) \neq 1$, frei und sogar $\mathcal{L}_P = \mathcal{O}_P^r$ sind, und $\mathcal{M} = \mathcal{L}/q\mathcal{L}$. Dann existiert ein Isomorphismus abelscher Gruppen

$$\Psi : \mathcal{M}^* \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}), \quad \text{mit} \quad \Psi(a \cdot r) = \bar{r} \cdot \Psi(a), \quad r \in \mathcal{R}, \quad a \in \mathcal{M}.$$

Er setzt sich aus lokalen Isomorphismen Ψ_P zwischen

$$(\mathcal{L}_P)^*/q(\mathcal{L}_P)^* = (\mathcal{L}^*)_{\bar{P}}/q(\mathcal{L}^*)_{\bar{P}} \quad \text{und} \quad \text{Hom}_{\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P}(\mathcal{L}_P/q\mathcal{L}_P, \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P), \quad (q, P) \neq 1,$$

zusammen.

Ferner ist die kanonische Einbettung von $\mathcal{M}$ in sein Doppelduales $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}), \mathcal{R})$ ein rechts- $\mathcal{R}$ -Isomorphismus. $\mathcal{M}$ und $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ sind als abelsche Gruppen und sogar als $\mathcal{O}_K$ -Moduln isomorph, haben also insbesondere dieselbe Ordnung.

Beweis : a) Wir benutzen die natürlichen rechts- $\mathcal{O}_P$ -Isomorphismen

$$\tau_P : (\mathcal{O}^*)_P \longrightarrow \mathcal{O}_P, \quad \tau_P(x_P) = \pi_{\mathcal{O}_P}^{-1} \cdot x_P,$$

die durch die Multiplikation mit einer geeigneten Potenz eines Prielementes gegeben sind, an den Primstellen, die q teilen. Ferner benutzen wir die natürliche Paarung

$$\Xi : \mathcal{L}^* \times \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}^*, \quad \Xi(x, y) = \bar{x}'y.$$

Es $\mathcal{M}^* \cong \prod_{(q, P) \neq 1} (\mathcal{L}^*)_P/q(\mathcal{L}^*)_P = \prod_{(q, P) \neq 1} ((\mathcal{O}^*)_P)^r/q((\mathcal{O}^*)_P)^r$, sowie

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}/q\mathcal{L} \cong \prod_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{L}/P^{v_P} \mathcal{L} = \prod_{P \in \mathbf{S}} (\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)^r, \quad \mathbf{S} = \{P ; (q, P) \neq 1\},$$

und auch $\mathcal{R} \cong \prod_{P \in \mathbf{S}} \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$.

b) Die Abbildungen τ_P und Ξ drücken auf Quotienten durch. Wir erhalten also, für jedes P mit $(q, P) \neq 1$, einen Isomorphismus $\tau_P : (\mathcal{O}^*)_P/q(\mathcal{O}^*)_P \longrightarrow \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$, sowie eine Paarung $\Xi_P : (\mathcal{L}_P)^*/q(\mathcal{L}_P)^* \times \mathcal{L}_P/q\mathcal{L}_P \longrightarrow (\mathcal{O}^*)_P/q(\mathcal{O}^*)_P$, und daraus eine lokale Paarung

$$\Psi_P : (\mathcal{L}_P)^*/q(\mathcal{L}_P)^* \times \mathcal{L}_P/q\mathcal{L}_P \longrightarrow \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P.$$

c) Die Zusammensetzung dieser Paarungen liefert ein $\Psi : \mathcal{M}^* \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{R}$, also auch einen Isomorphismus $\Psi : \mathcal{M}^* \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$. Dieser hat die angegebenen Eigenschaften.

d) Nun haben wir auf der einen Seite $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}^*$, i.a. allerdings nur als abelsche Gruppe und $\mathcal{O}_K$ -Modul. Auf der anderen ist

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P}(\mathcal{L}_P/q\mathcal{L}_P, \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P) = \text{Hom}_{\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P}((\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)^r, \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P) \cong (\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)^r.$$

Damit ist aber auch

$$\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}), \mathcal{R}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{R}}\left(\prod_{(q, P) \neq 1} (\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)^r, \mathcal{R}\right) \cong \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}) \cong \prod_{(q, P) \neq 1} (\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)^r,$$

zunächst als $\mathcal{O}_K$ -Modul. Es wurde jedoch gezeigt, daß die natürliche Abbildung,

$$x \longmapsto \Phi_x, \quad \Phi_x(\phi) := \phi(x), \quad x \in \mathcal{M}, \quad \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}),$$

$\Phi_x \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}), \mathcal{R})$, ein (injektiver) rechts- $\mathcal{R}$ -Homomorphismus ist, also ist sie sogar ein Isomorphismus. $\square$

Schließlich wollen wir noch ein Analogon der Paarung

$$\epsilon(X, Y) = e^{\frac{2\pi i}{q}\sigma\{\bar{X}'Y\}}, \quad X \in (\mathcal{M}^*)^k, \quad Y \in \mathcal{M}^k,$$

für $X \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}^k, \mathcal{R})$ bilden.

3.2.6 Bemerkung : Es existiert ein additiver Charakter $\epsilon : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$, der fundamental ist in folgendem Sinne: Er ist auf keinem (nicht-trivialen) Ideal von $\mathcal{R}$ ausgeartet, also trivial, man kann jeden weiteren Charakter ϵ' auf $\mathcal{R}$ als dessen (Rechts-) Translat darstellen,

$$\epsilon'(x) = \epsilon(xa), \quad \text{für alle } x \in \mathcal{R} \text{ und ein } a \in \mathcal{R}.$$

Dieser ist ein Produkt lokaler fundamentaler Charaktere $\epsilon_P : \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P \rightarrow \mathbb{C}^\times$, $P \in \mathbf{S} = \{P' \subset \mathcal{O}_K ; (q, P') \neq 1\}$. Ferner existieren lokale Automorphismen $\tau_P \in \text{Aut}(\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P)$, so daß

$$\epsilon_P(x_P r_P) = \epsilon_P(\tau_P(r_P) x_P), \quad \text{und damit } \epsilon(xr) = \epsilon(\tau(r)x), \quad \tau = (\tau_P), \quad x = (x_P), \quad r = (r_P) \in \mathcal{R},$$

gilt.

Beweis : a) Wir wollen ϵ lokal definieren, also erst $\epsilon_P(x_P)$ für $x_P \in \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$ bilden, und dann $\epsilon(x) := \prod_{P \in \mathbf{S}} \epsilon_P(x_P)$, $x = (x_P)$ setzen. Sei also $P \in \mathbf{S}$. Um sicherzustellen, daß der Charakter ϵ_P fundamental wird, müssen wir x_P geeignet in die (lokale) inverse Differentiale abbilden. Nun ist

$$\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P \cong \hat{\mathcal{O}}_P/q\hat{\mathcal{O}}_P \cong M_{s_P}(\tilde{\Delta}_P/q\tilde{\Delta}_P).$$

Nach der allgemeinen Theorie (siehe [Re], Abschnitt 14), entsteht $\tilde{\Delta}_P$ aus dem Ring $\mathcal{O}_{\hat{K}_P}$ der ganzen Zahlen über der Komplettierung $\hat{K}_P$ durch Adjunktion eines Primelementes $\pi = \pi_{\tilde{\Delta}_P}$ und einer Einheitswurzel ω . Die inverse Differentiale von $\tilde{\Delta}_P$ ist $\tilde{\Delta}_P^* = (\pi)^{1-\tilde{s}_P}$, und die Algebraordnung $(\tilde{D}_P : \hat{K}_P) = \tilde{s}_P^2$. Konjugation mit π liefert einen Automorphismus von $\tilde{\Delta}_P$.

b) Die Erweiterung $\hat{L}_P = \hat{K}_P(\omega)$ des Zentrums ist ein Zerfällungskörper von $\tilde{D}_P$, es existiert also ein Isomorphismus zwischen der entsprechenden Tensorierung und einer vollen Matrixalgebra, $\tilde{D}_{P, \hat{L}_P} = \tilde{D}_P \otimes_{\hat{K}_P} \hat{L}_P \cong M_{\tilde{s}_P}(\hat{L}_P)$. Man erhält (siehe Kapitel 1, 5.1.1) die reduzierte Spur von $\tilde{D}_P$ als eine gewöhnliche Matrixspur, $\text{tr}_{\tilde{D}_P/\hat{K}_P}(\tilde{x}_P) := \text{tr}_{\hat{L}_P/\hat{K}_P}(\tilde{x}_P \otimes 1_{\hat{L}_P})$. Die (reduzierte) Spur von $\hat{D}_P = M_{s_P}(\tilde{D}_P)$ über dem Zentrum $\hat{K}_P$ ist natürlich die Matrixausdehnung von $\text{tr}_{\tilde{D}_P/\hat{K}_P}$. Davor schalten wir noch $\text{tr}_{\hat{K}_P/\hat{\mathbb{Z}}_p}$, wobei $(p) = P \cap \mathbb{Z}$ ist, und erhalten die (lokale) Spur über $\hat{\mathbb{Z}}_p$,

$$\sigma = \sigma_P = \text{tr}_{\hat{K}_P/\hat{\mathbb{Z}}_p} \circ \text{tr}_{\hat{D}_P/\hat{K}_P} : \hat{D}_P \rightarrow \hat{\mathbb{Z}}_p.$$

c) Wir definieren nun

$$\epsilon_P(\overline{(x_P)}_{\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P}) := e^{\frac{2\pi i}{p^m} \bar{\sigma} \{ \pi^{1-\tilde{s}_P} x_P \}},$$

wobei $\bar{x}_P = \overline{(x_P)}_{\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P}$ das Bild von $x_P \in \hat{\mathcal{O}}_P$ in $\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$ ist, $q = p^m q'$, mit $(p, q') = 1$, $\bar{\sigma}$ das Bild der Spur in $\hat{\mathbb{Z}}_p/q\hat{\mathbb{Z}}_p \cong \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$, und letzterer Isomorphismus benutzt wird, um das ganze zu einem Charakter zu machen. (Man beachte, daß der durch q teilbare Teil von x_P für den Wert des Charakters unwichtig ist). Das ist der gewünschte fundamentale lokale Charakter, denn die (links-) Multiplikation mit $\pi^{1-\tilde{s}_P}$ liefert einen (einseitigen) Isomorphismus $\tilde{\Delta}_P \rightarrow \tilde{\Delta}_P^*$, und alle Charaktere auf $\tilde{\Delta}_P$ haben die Form

$$\epsilon'_P(\overline{(x_P)}_{\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P}) = e^{\frac{2\pi i}{p^m} \bar{\sigma} \{ a x_P \}}, \quad a \in \tilde{\Delta}_P^*.$$

d) Da trivialerweise $\sigma(\pi_{\mathcal{O}, P}^{1-\tilde{s}_P} x_P r_P) = \sigma(r_P \pi_{\mathcal{O}, P}^{1-\tilde{s}_P} x_P)$ gilt, ergibt die Konjugation von r_P mit dem Primelement den gewünschten lokalen Automorphismus τ_P , der

$$\epsilon_P(x_P r_P) = \epsilon_P(\tau_P(r_P) x_P), \quad \text{für alle } r_P, x_P \in \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P,$$

erfüllt. $\square$

Aus dem Beweis bzw. der Konstruktion von ϵ ergibt sich noch der

3.2.7 Zusatz : Der fundamentale Charakter ϵ_P und der lokale Automorphismus τ_P sind schon auf der Ebene des „inneren“ Ringes $\tilde{\Delta}_P/q\tilde{\Delta}_P$ definiert. $\square$

Damit können wir nun eine natürliche Paarung zwischen Homomorphismen und Modulelementen bilden, die eine bestimmte schwache „Verschiebungseigenschaft“ hat.

3.2.8 Definition : Wir setzen

$$\epsilon(\phi, x) := \epsilon_\phi(x) := \epsilon(\phi(x)), \quad x \in \mathcal{M}, \quad \phi \in \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}).$$

Dies dehnen wir dann auf Tupel aus, setzen also

$$\epsilon(V, X) := \epsilon_V(X) := \prod \epsilon(v_i, x_i), \quad X = (x_1, \dots, x_k) \in \mathcal{M}^k, \quad V = (v_1, \dots, v_k) \in (\mathcal{M}^*)^k. \quad \square$$

Es gilt

3.2.9 Bemerkung : a) Der gegebene ein Automorphismus τ von $\mathcal{R}$, erfüllt, für jedes $r \in \mathcal{R}$ und $\tilde{r} := \tau(r) \in \mathcal{R}$, $\epsilon(\phi, xr) = \epsilon(\tilde{r}\phi, x)$, für alle Homomorphismen ϕ und alle $x \in \mathcal{M}$, gilt. Dazu ist lediglich zu beachten, daß die Modulstruktur der Homomorphismengruppe gerade durch $(\tilde{r} \cdot \phi)(x) = \tilde{r} \cdot \phi(x)$ gegeben ist.

b) Entsprechend existiert zu jedem $U \in \text{Gl}(k, \mathcal{R})$ ein $\tilde{U} \in \text{Gl}(k, \mathcal{R})$, so daß

$$\epsilon(V, XU) = \epsilon(\tilde{U}V, X), \quad \text{für alle } V \in (\mathcal{M}^*)^k \text{ und } X \in \mathcal{M}^k.$$

Dabei müssen Elemente der Homomorphismengruppe als Zeilenvektoren aufgefaßt werden, $V = V^{(k, r)}$. Mittels der entgegengesetzten Algebra, kann man V auch als $V^{(r, k)}$ auffassen, und dafür $\epsilon(V, XU) = \epsilon(VJ(\tilde{U}), X) = \epsilon(V\tilde{U}', X)$ schreiben. $\square$

Da der konstruierte Charakter fundamental ist, ist die im Relationensystem erscheinende Paarung ein Translat der eben definierten, und hat sowieso die uns interessierende schwache Verschiebungseigenschaft. Allerdings muß man für jedes $a \in \mathcal{M}^*$ eine andere Translation wählen, um $\epsilon(a, \cdot)$ mit $\epsilon(\Psi(a), \cdot)$ zu vergleichen, daß ist jedoch im folgenden nicht wichtig. Die Konstruktion des fundamentalen Charakters ϵ erfolgte zunächst auf lokaler Ebene, auf diese wollen wir uns zurückziehen. Unser Grundring hat folgende Eigenschaften ([Re], Abschnitte 21 und 22, sowie (25.7) und (32.1)).

3.2.10 Bemerkung : a) $\mathcal{R} = \mathcal{O}/q\mathcal{O}$ ist ein endliches Produkt nicht notwendig kommutativer endlicher Hauptidealringe $\mathcal{R}_P = \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$; jedes zweiseitige Ideal in $\mathcal{R}_P$ ist von der Form $\mathcal{R}_P \cdot x \cdot \mathcal{R}_P$. Genauer hat $\mathcal{R}$ nur endlich viele (zweiseitige) Primideale und auch jedes einseitige Ideal ist Hauptideal.

b) Jede Komponente

$$\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P \cong \hat{\mathcal{O}}_P/q\hat{\mathcal{O}}_P \cong M_{s_P}(\tilde{\Delta}_P/(\text{rad}(\tilde{\Delta}_P))^{v_P})$$

von $\mathcal{R}$ ist eine volle Matrixalgebra über einem lokalen Hauptidealring $\tilde{\mathcal{R}}_P$, also einem nicht notwendig kommutativen Ring, der ein einziges maximales links-Ideal $\tilde{\mathcal{R}}_P \cdot \pi_P$ besitzt. Ferner sind einseitige Ideale in $\tilde{\mathcal{R}}_P$ automatisch zweiseitig, und sämtlich Potenzen des einzigen Primideals (π_P) . Der Restring $\tilde{\mathcal{R}}_P/(\pi_P) \cong \tilde{\Delta}_P/\text{rad}(\tilde{\Delta}_P)$ ist ein endlicher Schiefkörper, also ein Körper. $\square$

Wir haben somit alle Voraussetzungen für den Anschluß an das „fundamental lemma“ von Freitag zusammengestellt.

4.4 Die Beweisstrategie, isotrope Strukturen und das „fundamental lemma“ von Freitag

In diesem Abschnitt wird nun gezeigt, wie man, durch sukzessives Abziehen von Thetareihen zu Kernformen, das Problem der Summendarstellung einer Modulform auf ein endliches kombinatorisches Problem zurückführt. Diese Aussage über sogenannte isotrope Strukturen von endlich erzeugten Moduln behandelt das fundamentale Lemma von Freitag ([Fr2]), allerdings nur unter der Einschränkung $2r \leq n$, für kommutative lokale Ringe. Wir imitieren den Beweis in unserem Fall.

4.4.1 Die Beweisstrategie des Erzeugungstheorems und isotrope Strukturen

Wir betrachten nun wieder ein $f = f_0 \in \mathbf{M}(q)$, dessen Bild $\bar{f} \in \overline{\mathbf{M}(q)}$ nicht verschwindet, und das endliche Repräsentantensystem $T_1, \dots, T_k$ unimodularer Klassen von potentiellen Kernformen, geordnet nach steigender reduzierter Determinante, $\delta(T_1) \leq \dots \leq \delta(T_k)$. Es gibt dann ein kleinstes $i = i_0$ und ein zugehöriges unimodulares $U_i \in \text{Gl}(n, \mathcal{O})$, so daß der Fourier-Koeffizient $a(T_i[U_i]) \neq 0$ nicht verschwindet.

4.1.1 Problem : *Existiert eine Linearkombination von Thetareihen*

$$g(Z) = g_1(Z) = \sum b(T) e^{\pi i \sigma \{TZ\}} \in \Theta(q),$$

mit der Eigenschaft, daß nur die Fourier-Koeffizienten $b(T)$ zu Matrizen der Form $T = T_i[G]$, $G \in M_n(\mathcal{O})$, verschieden von Null sind, und so, daß $a(T_i[U]) = b(T_i[U])$, für unimodulares U , gilt? $\square$

Aus $T = T_i[G]$ folgt $\delta(T) \geq \delta(T_i)$. Falls sogar Gleichheit gilt, so existiert, wie in Lemma 1.1.6 bewiesen, sogar ein unimodulares U , mit $T = T_i[U]$. Aus $b(T) \neq 0$ folgt also, für solch ein $g = g_1$, daß entweder $T \in T_i[\text{Gl}(n, \mathcal{O})]$, oder $\delta(T) > \delta(T_i)$ gilt. Man hat also folgende

4.1.2 Beweisstrategie : *Bilde $f_1 := f - g = f_0 - g_1$. Für $\delta(T) < \delta(T_i)$ ist dann $a_1(T) = 0$, aber, für unimodulares U , auch*

$$a_1(T_i[U]) = a_0(T_i[U]) - b_1(T_i[U]) = a(T_i[U]) - b(T_i[U]) = 0.$$

Falls ferner $\delta(T) \geq \delta(T_i)$, aber $T \notin T_i[\text{Gl}(n, \mathcal{O})]$, so ist $a_1(T) = a_0(T)$. Man kann also induktiv mit $i_1 = i_1(f_1) > i = i_0(f_0)$ fortfahren, bis man $\bar{f}_{k'} = 0 \in \overline{\mathbf{M}(q)}$ erreicht. $\square$

Um geeignete Thetareihen zu erhalten, wählt man eine Darstellung $T_i = S_i[Q_i] = S[Q]$, mit $S = S^{(r)} > 0$, $Q = Q^{(r,n)}$ primitiv an $\mathbf{S} := \{P \subset \mathcal{O}_K ; (q, P) \neq 1\}$, also zu einem $U = \begin{pmatrix} Q \\ * \end{pmatrix}$ $\mathbf{S}$ -unimodular ergänzbar, und bildet das Gitter $\mathcal{L} = \langle Q \rangle$. Aus $b(S[G]) \neq 0$ folgt, für das noch zu konstruierende g , $qS[G] \in \mathcal{T}$, da $g \in \mathbf{M}(q) \subset \mathbf{P}(q)$ gelten soll, also die erste Invarianzbedingung für Thetareihen in $\Theta(q)$. Wenn $V = V^{(r,n)}$ isotrop ist, so erfüllt $\tilde{V} := \frac{1}{q}V$ sowohl $q\langle \tilde{V} \rangle \subset \mathcal{L}^*$, wie auch $qS^{-1}[G + \tilde{V}] \in \mathcal{T}$, $\langle G \rangle \subset \mathcal{L}^*$. Man kann also zu diesen Daten Thetareihen bilden, die in $\Theta(q)$ liegen. Wir hatten (Kapitel 3, 3.2.9 und 3.2.10), für jedes $\tilde{f} \in \mathbf{M}(q)$, Polynome $P_{S,G}(X)$ konstruiert, die zu den $\tilde{a}_S(G) = \tilde{a}_T(E, G)$, also zu den Fourier-Koeffizienten von $\tilde{f}$, gehören.

4.1.3 Definition : Man betrachtet allgemeiner als in Kapitel 3, zu jedem an allen Primstellen aus $\mathbf{S}$ primitiven W das Polynom

$$P_{T,W}(X) := \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X}_1 S^{-1/2} & 0 \\ \overline{X}_2 S^{-1/2} & E \end{pmatrix} \right) E(S)^{-1} \alpha_T(W).$$

Dabei ist $X = X^{(r,n)} = (X_1, X_2)$ und $E(S)$ die Mächtigkeit der S -Einheiten bezüglich $\mathcal{L}$, also

$$E(S) = |\mathcal{E}(S, \mathcal{L})| = |\{U \in \text{Gl}(r, D) ; S[U] = S, U \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}\}|.$$

Die so definierten Polynome umfassen die $P_{S,G} = P_{T,(E,G)}$. $\square$

4.1.4 Bemerkung : Sei W primitiv. Dann ist das Polynom $P_{T,W}$ eine harmonische Form, und durch $P_{T,W}(S^{1/2}(E, 0)) = E(S)^{-1}\alpha_T(W)$ charakterisiert. (Der Beweis aus dem dritten Kapitel kann übernommen werden.) $\square$

Nun betrachten wir

$$\mathcal{Z}_0 := \langle \{\alpha_T(W) = \rho_0(\overline{U}'^{-1})a(S[W]) ; U = \begin{pmatrix} W \\ * \end{pmatrix}, W \text{ primitiv an } \mathbf{S}\} \subset \mathcal{Z},$$

den von allen solchen Koeffizienten unseres $f = \sum a(T)e^{\pi i \sigma \{TZ\}} \in \mathbf{M}(q)$ aufgespannten Unterraum, und eine Basis $e_1, \dots, e_l$ von $\mathcal{Z}_0$. Wir bilden die harmonischen Formen

$$P_i(X) := \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \overline{X}_1 S^{-1/2} & 0 \\ \overline{X}_2 S^{-1/2} & E \end{pmatrix} \right) E(S)^{-1} e_i.$$

Die Fourier-Koeffizienten von $\vartheta_{\mathcal{L}, P_i}(S, \frac{V}{q}; Z)$ sind gerade

$$b(S[G]) = \sum_{\tilde{U} \in \mathcal{E}(S, \mathcal{L})} P_i(S^{1/2}(\tilde{U}G)) e^{\frac{2\pi i}{q} \sigma \{\overline{V}'(\tilde{U}G)\}}.$$

Man erhält

4.1.5 Bemerkung : Es gilt,

$$\text{für } \beta_T(G) = \rho(\overline{U}_G'^{-1})b(S[G]), \quad \beta_T(G) = \sum_{\tilde{U} \in \mathcal{E}(S, \mathcal{L})} \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) E(S)^{-1} e^{\frac{2\pi i}{q} \sigma \{\overline{V}'\tilde{U}G\}} e_i,$$

falls $G = (G_1, G_2) = W$ primitiv ist, und mit einer $\mathbf{S}$ -unimodularen Ergänzung U_G von G .

Beweis : Falls G primitiv ist, so auch jedes $\tilde{U}G$, $\tilde{U} \in \mathcal{E}(S, \mathcal{L})$, und $U_{\tilde{U}G} = \begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} U_G$ ist eine Ergänzung von $\tilde{U}G$. Da P eine harmonische Form ist, gilt $P(S^{1/2}\tilde{U}G) = \rho_0(\overline{U}_{\tilde{U}G}')P(S^{1/2}(E, 0))$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Andererseits kann man trivialerweise jeden Fourier-Koeffizienten $a(T) = a(S[G])$ von f auch als $a(T) = \sum_{\tilde{U}} E(S)^{-1}a(S[\tilde{U}G])$ schreiben. Man rechnet sofort nach, daß $\alpha(\tilde{U}G) = \rho_0 \left(\begin{pmatrix} \tilde{U} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right) \alpha(G)$ gilt, und damit, daß

$$\text{aus } \alpha(G) = \sum_{i,j} c_{i,j} e^{2\pi i \sigma \{\overline{V}'_{i,j}G\}} e_i \quad \text{auch} \quad \alpha(G) = \sum_{\tilde{U}} E(S)^{-1} \alpha(G) = \sum_{i,j} c_{i,j} \beta_{i,j}(G) \quad \text{folgt,}$$

mit den entsprechenden zu den P_i und $V_{i,j}$ gehörenden $\beta_{i,j}$. Damit hat man

4.1.6 Zweite Formulierung des Problems : Kann man jedes vorgegebene Koeffizientensystem $\alpha_i(W) = \alpha(W) : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{C}$, das das Relationensystem erfüllt, als (endliche) Linearkombination $\alpha(W) = \sum_j c_j e^{\frac{2\pi i}{q} \sigma \{\overline{V}_j' W\}}$, mit isotropen V_j , darstellen? $\square$

Dieses System entspricht einer Vektorkomponente $\alpha_i(W)$ vom ursprünglichen $\alpha_T(W)$, somit wurde der Vektorcharakter vollständig eliminiert. Außerdem bedeutet das Relationensystem gerade, daß sich jedes der Koeffizientensysteme $\alpha_U(W') = \alpha((E, W')U)$, $W' \in \mathcal{M}^{n-r}$, $U \in \text{Gl}(n, \mathcal{R})$ und $E = (e_1, \dots, e_r)$ ein minimales Erzeugendensystem von $\mathcal{M}^r$, als eine solche Linearkombination darstellen läßt, mit isotropen $V_j = V_j^{(r, n-r)}$. Bevor wir das fundamentale Lemma formulieren, wollen wir das Problem lokalisieren. Dazu geben wir folgende vorläufige Definition von isotropen Strukturen.

4.1.7 Definition : Eine isotrope Struktur L auf dem rechts- $\mathcal{R}$ -Modul $\mathcal{M}$, $\mathcal{R} = \mathcal{O}/q\mathcal{O}$, ist eine Menge sogenannter isotroper links-Untermodule $\mathcal{L}' \subset \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$, die den 0-Modul, sowie jeden Untermodul eines isotropen Moduls enthält, und außerdem noch die Summe, $\mathcal{L}' = \mathcal{L}'_1 + \dots + \mathcal{L}'_k$,

jedes Systems von isotropen Moduln $\mathcal{L}'_1, \dots, \mathcal{L}'_k$, deren Annihilatoren $\mathbf{a}_i = \{x \in \mathcal{R} ; x \cdot \mathcal{L}'_i = 0\}$ paarweise teilerfremd sind, also den Grundring erzeugen, $\mathcal{R} = \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j$, $i \neq j$. $\square$

4.1.8 Bemerkung : Die von den Bilder modulo q der Spaltenvektoren aller bezüglich $S, \mathcal{L}$ und q isotroper Matrizen erzeugten rechts- $\mathcal{R}$ -Untermodule von $\mathcal{M}^*$ bilden eine isotrope Struktur auf $\mathcal{M} = \mathcal{L}/q\mathcal{L}$. Dies ist so zu verstehen, daß man die Existenz eines Isomorphismus $\Psi : \mathcal{M}^* \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$, mit $\Psi(ar) = \bar{r}\Psi(a)$, benutzt (vergleiche 3.2.5), um diese rechts- $\mathcal{R}$ -Module als links- $\mathcal{R}$ -Untermodule von $\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$ aufzufassen.

Beweis : Es gilt $\langle \bar{V} \rangle \subset \mathcal{M}^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$, für isotrope V nach Definition. $V = 0$ ist isotrop, denn

$$(qS)^{-1}[0 + qX] = qS^{-1}[X] \in \mathcal{T},$$

wie Satz 2.1.4 gezeigt. Mit $V = (v_1 \cdots v_{(n-r)})$ ist auch jede Matrix $\tilde{V} = \tilde{V}^{(r,k)}$, deren Spaltenvektoren Linearkombinationen der v_i sind, isotrop, wie wir wissen (vergleiche Kapitel 2, Folgerung 2.2.9). Insbesondere sind Linearkombinationen der Spaltenvektoren $\tilde{v} = \sum v_i a_i$ isotrop. (Man beachte nochmals, daß der Randfall $n = r + 1$ ausgeschlossen wurde.)

Ob mit V_1 und V_2 auch $V_1 + V_2$ isotrop ist, hängt von den gemischten Termen in

$$(qS)^{-1}[V_1 + V_2 + qX] \text{ ab, also von } \bar{V}'_1(qS)^{-1}V_2 + \bar{V}'_2(qS)^{-1}V_1.$$

Die Bedingung an die Annihilatoren bedeutet jedoch gerade, falls sie erfüllt ist, für jede Stelle P mit $(q, P) \neq 1$, also $v_P(q) \geq 1$, daß falls z.B. P den Annihilator $\mathbf{a}_1$ teilt, dann auch $P^{v_P(q)}$ alle Elemente von V_2 teilt. Insgesamt hat also das Bild von $\bar{V}'_1(qS)^{-1}V_2 + \bar{V}'_2(qS)^{-1}V_1$, für jedes $P \in \mathbf{S}$, bis auf Einheiten, die Gestalt

$$\bar{V}'_1(qS)^{-1}(qX) + \overline{(qX)}'(qS)^{-1}V_1, \quad \langle X \rangle \subset (\mathcal{L}^*)_P$$

(bzw. entsprechend mit V_2 anstelle von V_1), und liegt damit in $\mathcal{T}_P$. Die übrigen Primstellen $P \notin \mathbf{S}$ sind jedoch unwichtig, da mit $q\langle V_2 \rangle \subset \mathcal{L}^*$ auch $\frac{1}{q} \cdot \langle V_2 \rangle \subset (\mathcal{L}^*)_P$ gilt, und die fragliche Summe immer die gewünschte Gestalt hat. $\square$

Damit können wir, wie Freitag, das Problem lokalisieren, uns also auf die Komponenten $\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P \cong M_{s_P}(\tilde{\Delta}_P/(\text{rad}(\tilde{\Delta}_P))^{v_P})$, $(q, P) \neq 1$, von $\mathcal{R}$ beschränken, und die zu beweisende Aussage rein algebraisch formulieren. (Das uns interessierende Hauptresultat über Moduln bezieht sich auf die „inneren“ Ringe $\tilde{\mathcal{R}}_P = \tilde{\Delta}_P/(\text{rad}(\tilde{\Delta}_P))^{v_P}$, dieses werden wir auch zuerst herleiten.)

4.4.2 Ein kombinatorisches Problem und das fundamentale Lemma

Sei also $\mathcal{R}$ ein endlicher, nicht notwendig kommutativer Ring mit Eins. $\mathcal{R}$ habe genau ein (zweiseitiges) Primideal. Es existiere ein fundamentaler Charakter $\epsilon : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$. Diesen wählen wir ab jetzt fest. „Fundamental“ bedeutet dabei, daß ϵ auf keinem (nicht-trivialen) zweiseitigen Ideal ausgeartet ist (e.g. verschwindet), man erhält dann alle weiteren Charaktere als Translate ϵ' , $\epsilon'(x) = \epsilon(xa)$, von ϵ . Sei ferner $\mathcal{M}$ ein rechts- $\mathcal{R}$ -Modul. Für jeden Homomorphismus $\phi \in \mathcal{M}^*$, setzen wir

$$\epsilon(\phi, x) := \epsilon_\phi(x) := \epsilon(\phi(x)), \quad x \in \mathcal{M}.$$

$(\mathcal{M}^*)^n$ ist kanonisch isomorph zum dualen von $\mathcal{M}^n$. Wir dehnen den Charakter linear auf Tupel aus, und benutzen die Schreibweise

$$\epsilon(V, X) := \epsilon_V(X) := \epsilon(V(X)), \quad \text{für } X \in \mathcal{M}^n, \quad V \in (\mathcal{M}^*)^n.$$

Damit können wir den Begriffsapparat von Freitag übernehmen.

4.2.1 Definition : a) eine isotrope Struktur L auf dem rechts- $\mathcal{R}$ -Modul $\mathcal{M}$ ist eine Menge von links- $\mathcal{R}$ -Untermodule $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}^*$, die den Null-Modul, sowie jeden Untermodul $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ eines beliebigen $\mathcal{L} \in L$ enthält. Die Elemente von L heißen isotrope Moduln.

b) Ein Tupel $V = (v_1 \cdots v_n) \in (\mathcal{M}^*)^n$ heißt isotrop, falls $\mathcal{L} := \mathcal{R}v_1 + \cdots + \mathcal{R}v_n \in L$ isotrop ist, und primitiv, falls $\mathcal{L} = \mathcal{M}^*$ gilt.

c) Ein Tupel $P = (p_1 \cdots p_n) \in \mathcal{M}^n$ heißt primitiv, falls $\mathcal{M} = p_1\mathcal{R} + \cdots + p_n\mathcal{R}$ gilt. Die Menge aller primitiver Tupel wird mit $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}(\mathcal{M}, n)$ bezeichnet.

d) Eine Funktion $f : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{C}$, auf einer Untermenge $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^m$, degeneriert (bezüglich der isotropen Struktur L), falls sie sich als Linearkombination von $\epsilon_{V_i}|_{\mathcal{N}}$, mit isotropen V_i , $i = 1, \dots, j$, schreiben läßt.

e) Ein Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$ heißt erlaubt, falls eine Funktion $f : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{C}$ schon dann degeneriert, wenn für jedes Erzeugendensystem $E = (e_1 \cdots e_r)$ von $\mathcal{M}$ mit $r \leq n$, und für jedes unimodulares $U \in \text{Gl}(n, \mathcal{R})$, alle $f_U : \mathcal{M}^{n-r} \rightarrow \mathbb{C}$, $f_U(Y) := f((E, Y)U)$, degenerieren. $\square$

In den uns interessierenden Fällen wird man in äquivalent die Existenz eines minimalen Erzeugendensystems fordern können bezüglich welchem die Hilfsfunktionen f_U degenerieren. Man hat also folgende algebraische Frage zu untersuchen.

4.2.2 Kombinatorisches Problem : *Unter welchen Voraussetzungen an $(\mathcal{R}, \epsilon,)$ $\mathcal{M}$, n und L , ist das Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$ erlaubt?* $\square$

Diese Frage werden wir unter einschränkenden Bedingungen an den endlichen Ring $\mathcal{R}$ und den fundamentalen Charakter ϵ untersuchen. Wie werden also in gewissen Fällen erlaubte Tripel angeben. Genauer werden wir folgendes beweisen

4.2.3 „fundamental lemma“ : *a) Sei $\mathcal{R}$ zusätzlich ein Hauptidealring, in dem außerdem die Begriffe „einseitiges“ und „zweiseitiges“ Ideal zusammenfallen; es existiere ferner ein Automorphismus τ von $\mathcal{R}$, so daß für den Charakter ϵ die Gleichung $\epsilon(xx') = \epsilon(\tau(x')x)$, für alle $x, x' \in \mathcal{R}$, gilt. Dann ist das Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$, für $n > r = \text{rank}(\mathcal{M})$ (e.g. die Länge eines minimalen Erzeugendensystems) und ein L das ein maximales Element $\mathcal{L}$ enthält, also $L = \{\mathcal{L}' \subset \mathcal{M}^* ; \mathcal{L}' \subset \mathcal{L}\}$, erlaubt. Für $n \geq 2r$ ist das Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$ sogar für jede isotrope Struktur L erlaubt.*

b) Sei allgemeiner $\mathcal{R}$ eine volle Matrixalgebra über einem Ring $\mathcal{R}'$ mit einem Charakter, die die Voraussetzungen von a erfüllen; der Charakter von $\mathcal{R}$ entstehe mit Hilfe der kanonischen Spurfunktion aus dem von $\mathcal{R}'$. Dann ist das Tripel $(\mathcal{R}', n, L)$, für $n > r$ und ein L das ein maximales Element enthält, erlaubt. Für $n \geq 2r$ ist sogar jedes Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$ erlaubt. $\square$

Dieses fundamentale Lemma wird insbesondere die uns interessierenden Fällen umfassen, wobei $\mathcal{R}$ einer der inneren Ringe $\tilde{\mathcal{R}}_P = \tilde{\Delta}_P/q\tilde{\Delta}_P$ ist (und die Voraussetzungen aus a erfüllt), und man b auf die Lokalisierung $\mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$, also die Matrixalgebra vom Rang s_P darüber, anwenden kann.

4.4.3 Das kombinatorische Problem über Ringen die fast kommutativ sind

Sei nun $\mathcal{R}$ ein endlicher, nicht notwendig kommutativer, lokaler Hauptidealring mit Eins, in dem die Begriffe „einseitiges“ und „zweiseitiges“ Ideal zusammenfallen. Das einzige maximale links-Ideal $\mathfrak{m} = \mathcal{R} \cdot \pi$ von $\mathcal{R}$ sei also sogar das einzige (zweiseitige) Primideal $\pi = (\pi)$, alle weiteren Ideale sind Potenzen von diesem. Ferner ist der Restring $k := \mathcal{R}/\pi$ ein endlicher Schiefkörper, also kommutativ.

4.3.1 Bemerkung : Sei $\mathcal{M}$ ein (endlich erzeugter) rechts- $\mathcal{R}$ -Modul vom Rang r , im Sinne der Dimension des Vektorraumes $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{R}} k$. $\mathcal{M}$ ist als abelsche Gruppe (nicht-kanonisch) isomorph zu $\mathcal{M}^* := \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$, insbesondere haben $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^*$ dieselbe Ordnung. Außerdem ist die kanonische Einbettung von $\mathcal{M}$ in sein Doppelduales

$$\mathcal{M}^{**} := \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}), \mathcal{R}), \quad x \mapsto \Phi_x, \quad \Phi_x(\phi) := \phi(x)$$

ein Isomorphismus von rechts- $\mathcal{R}$ -Moduln. Der Hom-Funktor, $\mathcal{M} \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R})$, ist exakt, liefert also insbesondere eine Bijektion zwischen den Untermoduln von $\mathcal{M}^*$ und den Faktormoduln von $\mathcal{M}$ selbst, sowie eine zwischen den Faktormoduln von $\mathcal{M}^*$ und den Untermoduln von $\mathcal{M}$.

Beweis : Für endlich erzeugte Moduln über lokalen Ringen gilt das Krull-Schmidt-Theorem ([Re], Abschnitt 6b, in Verbindung mit Ideen aus den Aufgaben dazu). $\mathcal{M}$ besitzt also eine, bis auf die

Reihenfolge der Summanden und $\mathcal{R}$ -Isomorphie eindeutige, direkte Zerlegung $\mathcal{M} \cong \bigoplus_i \mathcal{M}_i$ in unzerlegbare Komponenten. Man kann diese jedoch genauer beschreiben. Es ist nämlich $\mathcal{M}$ ein Faktormodul des freien Moduls $\mathcal{R}^l$, l der Rang von $\mathcal{M}$. Es existiert also ein Untermodul $\mathcal{N}$ von $\mathcal{R}^l$, und eine diagonale Zerlegung $\mathcal{N} \cong \bigoplus \mathcal{N}_i$ ([Re], (2.44)), mit Idealen $\mathcal{N}_i$, da $\mathcal{R}$ Hauptidealring, also erblich ist. Die Ideale von $\mathcal{R}$ sind aber bekannt, es gilt $\mathcal{N}_i \cong (\pi)^{j'_i}$, und damit $\mathcal{M} \cong \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{R}/\pi^{j'_i} \mathcal{R} \cong \bigoplus_{i=1}^l (\pi)^{j_i}$, mit $j_i = j - j'_i$ und der Ordnung j von π , also der kleinsten natürlichen Zahl mit $(\pi)^j = (0)$. Damit ist aber

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}) \cong \bigoplus_{i=1}^l \mathrm{Hom}_{\mathcal{R}}((\pi)^{j_i}, \mathcal{R}) \cong \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{R}/\mathrm{ann}((\pi)^{j_i}) \cong \bigoplus_{i=1}^l \mathcal{R}/(\pi)^{j-j_i} \cong \mathcal{M}.$$

Auch die Aussage über das Doppelduale ist somit klar. Außerdem ist der $\mathcal{R}$ -Modul $\mathcal{R}$ frei, insgesamt ergibt sich auch die Exaktheit des Hom-Funktors. $\square$

In dieser Situation ist der Rang r eines Moduls $\mathcal{M}$ also wohldefiniert, jedes minimale Erzeugendensystem von $\mathcal{M}$ hat die Länge r und zwei solche werden durch Multiplikation mit einer unimodularen Matrix ineinander übergeführt. Falls $r < n$ genügt es also zu zeigen, daß für beliebige f aus der Degeneriertheit der Hilfsfunktionen f_U (vergleiche die Definition 4.2.1.e) bezüglich eines festen minimalen Erzeugendensystems die Degeneriertheit von f folgt, um zu beweisen, daß ein Tripel erlaubt ist, und umgekehrt folgt aus der Erlaubtheit, daß jedes f schon dann degeneriert, wenn es die f_U zu diesem Erzeugendensystem tun.

Wir nehmen ab jetzt ferner an, daß zu dem fest gewählten fundamentalen additiven Charakter $\epsilon : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein Ringautomorphismus τ von $\mathcal{R}$ mit der Eigenschaft

$$\epsilon(xr) = \epsilon(\tau(r)x), \quad \text{für alle } x, r \in \mathcal{R},$$

existiert. Die allgemein definierte Paarung $\epsilon(\phi, x) = \epsilon(\phi(x))$, zwischen Homomorphismen $\phi \in \mathcal{M}^*$ und Elementen $x \in \mathcal{R}$, hat nun die uns interessierende Verschiebungseigenschaft

$$\epsilon_\phi(x \cdot r) = \epsilon_{\tilde{r}\phi}(x), \quad \tilde{r} := \tau(r), \quad \text{für alle } \phi \in \mathcal{M}^* \text{ und } x \in \mathcal{M}.$$

Es ist also insbesondere $\tilde{r}$ eine Einheit, falls r eine ist. Wir hatten den Charakter schon linear auf Tupel ausgedehnt, und die Schreibweise $\epsilon(V, X) := \epsilon_V(X) := \epsilon(V(X))$, für $X \in \mathcal{M}^n$, $V \in (\mathcal{M}^*)^n$ benutzt. Wir erhalten somit, für $U \in \mathrm{Gl}(n, \mathcal{R})$,

$$\epsilon(V, XU) = \epsilon(\tilde{U}V, X), \quad \text{für alle } V \in (\mathcal{M}^*)^n \text{ und } X \in \mathcal{M}^n,$$

und ein geeignetes invertierbares $\tilde{U}$. Dabei muß V allerdings als $(n \times r)$ -Matrix aufgefaßt werden. Wir können aber auch V als $V^{(r,n)}$ betrachten, und $\epsilon(V, XU) = \epsilon(V, \overline{\tilde{U}}', X)$ schreiben, wobei $\overline{\tilde{U}}' = \tilde{U}'$ als Element der entgegengesetzten Matrixalgebra aufgefaßt wird.

Wir erinnern an unseres

4.3.2 Kombinatorisches Problem : *Unter welchen Voraussetzungen an $\mathcal{M}$, n und L , ist das Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$ erlaubt?* $\square$

Als erstes untersuchen wir den einfachsten Fall, nämlich den in welchem L mit zwei Untermoduln $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ von $\mathcal{M}^*$ auch deren Summe enthält. Da dieser nur von geringer Bedeutung für uns ist, geben wir stichwortartig den Beweis aus [Fr2], V.3, für folgendes wieder.

4.3.3 Satz : *Sei $\mathcal{M}$ ein rechts- $\mathcal{R}$ -Modul, L eine isotrope Struktur auf $\mathcal{M}$, die ein $\mathcal{L} \in L$ enthält, so daß jedes Element $\mathcal{L}' \in L$ Untermodul von $\mathcal{L}$ ist, und $n > r$. Dann ist das Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$ erlaubt.*

Beweis : a) Die Eigenschaft einer Funktion f auf $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}^m$ zu degenerieren, ist in diesem Fall äquivalent zur Periodizität bezüglich des orthogonalen Komplements von $\mathcal{L}$, also des rechts- $\mathcal{R}$ -Moduls

$$\mathcal{L}^\perp := \{x \in \mathcal{M} ; \phi(x) = 0, \forall \phi \in \mathcal{L}\} \subset \mathcal{M}.$$

Man kann daher o.B.d.A. $\mathcal{L} = 0$ annehmen, indem man die Bijektion zwischen den Untermoduln von $\mathcal{M}$ und den Faktormoduln von $\mathcal{M}^*$ benutzt, um $\mathcal{M}$ durch $\mathcal{L}^\perp$ zu ersetzen: Es ist nämlich $\mathcal{L}$ gerade der zu $\mathcal{N} := \mathcal{M}/\mathcal{L}^\perp$ gehörenden Untermodul von $\mathcal{M}^*$, und damit $\mathcal{M}^*/\mathcal{L}$ der zu $\mathcal{L}^\perp$ gehörende Faktormodul. Es ist dann also $L = \{\{0\}\}$, und man kann ferner $\mathcal{M}$ durch den freien Modul $\mathcal{R}^{r'}$, $r' \leq r$, also o.E. $r' = r$, ersetzen. Dann ist zu zeigen, daß, falls alle $f_U(Y) = f((E, Y)U)$ konstant sind, auch $f(X)$ selbst konstant ist.

b) Für jedes invertierbare $A \in \text{Gl}(r, \mathcal{R})$ sei also $f((A, Y)) = f\left((E, Y) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E^{(n-r)} \end{pmatrix}\right)$ konstant, setze $F(A) := f((A, 0))$. Nun existiert zu jedem $U \in \text{Gl}(n, \mathcal{R})$ ein $Y \in \mathcal{M}^{n-r}$, so daß $(E, Y)U = (\tilde{A}, *)$ gilt, mit invertierbarem $\tilde{A}^{(r)}$. Um dies zu sehen, muß man sich auf den Körper k beschränken können, was aber möglich ist, da über dem lokalen Ring $\mathcal{R}$ ein Element genau dann eine Einheit ist, wenn es nicht in (π) liegt. Damit kann man das Argument von Freitag benutzen: Man zerlegt $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ in Blöcke. Da man die Matrix $((E, Y)U)_1 = A + YC$ von links und rechts mit invertierbaren $U_1 = U_1^{(r)}$ und $U_2 = U_2^{(r)}$ multiplizieren kann, ohne an der Aussage was zu ändern, genügt es den Fall $U = \begin{pmatrix} E^{(r')} & 0 & B \\ 0 & 0 & D \\ C_1 & C_2 & D \end{pmatrix}$, $r' \leq r$, zu behandeln, und nach $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_2 \end{pmatrix}$, $Y_2 = Y_2^{(r-r', n-r)}$ zu suchen. Dann ist zu erreichen, daß $A + YC = \begin{pmatrix} E & 0 \\ Y_2 C_1 & Y_2 C_2 \end{pmatrix}$ invertierbar ist, und da U vollen Rang hat, also auch $\text{rank}(C_2) = r - r'$ gilt, $C_2 = C_2^{(n-r, r-r')}$, muß $r - r' \leq n - r$ sein, und damit ist es stets möglich ein geeignetes Y_2 zu finden.

c) Es genügt also die Funktion F zu untersuchen. Seien $A, B \in \text{Gl}(r, \mathcal{R})$. Falls $X = X^{(n-r, r)}$ und $Y = Y^{(r, n-r)}$ existieren, so daß $B - A = YX$ gilt, so betrachte die konstante Funktion $\tilde{f}(\tilde{Y}) := f\left((E, \tilde{Y}) \begin{pmatrix} A & 0 \\ X & E \end{pmatrix}\right)$. Es ist dann $\tilde{f}(\tilde{Y}) = \tilde{f}(0) = f\left((E, 0) \begin{pmatrix} A & 0 \\ X & E \end{pmatrix}\right) = f((A, 0)) = F(A)$ andererseits aber auch

$$\tilde{f}(\tilde{Y}) = \tilde{f}(Y) = f\left((E, Y) \begin{pmatrix} A & 0 \\ X & E \end{pmatrix}\right) = f((B, Y)) = f((B, 0)) = F(B),$$

also $F(A) = F(B)$.

d) Man kann aber stets solche X und Y finden, falls $\text{rank}(B - A) \leq 1$ gilt, und stets zwei invertierbare A und B durch eine Kette $A_i \in \text{Gl}(r, \mathcal{R})$, $i = 0, \dots, j$, $A_0 = A$ und $A_j = B$, mit $\text{rank}(A_{i+1} - A_i) \leq 1$, $i = 0, \dots, j - 1$, verbinden. $\square$

Sei $\mathcal{M}$ weiterhin ein beliebiger rechts- $\mathcal{R}$ -Modul. Wir führen folgende ausgezeichnete isotrope Struktur auf $\mathcal{M}$ ein.

4.3.4 Definition : Wir bilden die isotrope Struktur der echten links-Untermoduln von $\mathcal{M}^*$,

$$L_e := \{\mathcal{L} \subset \mathcal{M}^* ; \mathcal{L} \neq \mathcal{M}^*\},$$

und nennen diese die exzeptionelle isotrope Struktur von $\mathcal{M}$. $\square$

Wir können nun unverändert das Resultat (V.5) von Freitag übernehmen.

4.3.5 Lemma : Falls $\mathcal{R} = k$ schon ein Körper ist, und $n \geq 2r$ gilt, so ist das Tripel $(\mathcal{M}, n, L_e)$ erlaubt. $\square$

Als nächstes überzeugen wir uns, das im Beweis der Verallgemeinerung (V.6) nur Eigenschaften benutzt werden, die unser Ring besitzt.

4.3.6 Lemma : Falls $n \geq 2r$ gilt, so ist das Tripel $(\mathcal{M}, n, L_e)$ stets erlaubt.

Beweis : a) Für diese isotrope Struktur ist die Isotropie von V dazu äquivalent, daß V nicht primitiv ist. Das Lemma von Nakayama zeigt (auch im nicht-kommutativen Fall), daß diese Bedingung nur modulo dem maximalen Ideal (π) zu betrachten ist. Man zerlegt dann ein gegebenes

$f : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathbb{C}$, von dessen System von Hilfsfunktionen f_U , $f_U(Y) = f((E, Y)U)$, bekannt ist, daß diese sämtlich degenerieren, in Eigenfunktionen bezüglich des maximalen Ideals, $f = \sum f_i$, und benutzt die Exaktheit des Hom-Funktors, um jeweils einen geeigneten Charakter $\chi_i : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{C}^\times$ zu finden, so daß $\phi_i(P) := \chi_i(-P)f_i(P)$ die Periodizitätseigenschaft

$$\phi_i(P + X) = \phi_i(P), \quad P \in \mathcal{P}_n, \quad X \in \mathcal{M}^n \cdot \pi,$$

besitzt. Wir untersuchen eins der ϕ_i und lassen den Index „ i “ weg.

b) Man will das Bild Φ von ϕ modulo dem maximalen Ideal betrachten, und schreibt dazu den Charakter als $\chi(X) = \epsilon(A, X)$, $A \in (\mathcal{M}^*)^n$. Die Bedingung an die f_U ergibt dann

$$\phi_U(Y) := \phi((E, Y)U) = \epsilon(-A, (E, Y)U) \cdot \sum_{V \text{ nicht primitiv}} C_U(V) \epsilon(V, Y).$$

Es ist aber $\epsilon(-A, (E, Y)U) = \epsilon((-A\widetilde{U})_1, -(A\widetilde{U})_2, (E, Y)) = C \cdot \epsilon(-(A\widetilde{U})_2, Y)$, mit einem (eindeutig bestimmten) $\widetilde{U} \in \text{Gl}(n, \mathcal{R})$, also

$$\phi((E, Y)U) = C \cdot \sum C'_U(W) \epsilon(W, Y).$$

Die Summe läuft über alle W , für die $V = W + (A\widetilde{U})_2$ nicht primitiv ist.

c) Die Periodizität von ϕ erlaubt es dann, das maximale Ideal herauszudividieren, und die restringierte Abbildung $\Phi : (k)^{(r, n)} \rightarrow \mathbb{C}$ zu erhalten. Über dem Körper k erhält man orthogonale Komplemente als duale Vektorräume. In den Zerlegungen der Funktionen $\Phi_U : (k)^{(r, n-r)} \rightarrow \mathbb{C}$, die von den degenerierenden Funktionen f_U stammen,

$$\Phi_U(Y) = \phi((E, Y)U) = \sum D_U(V) \epsilon(V, Y),$$

sind also nur Koeffizienten zu solchen V verschieden Null, die ein Urbild $W \in (\mathcal{M}^*)^{n-r}$ besitzen, so daß $W + (A\widetilde{U})_2$ nicht primitiv ist, und die Einschränkung $W|_{\mathcal{M}^{n-r} \cdot \pi} = 0$ trivial ist. Auf der anderen Seite bedeutet die zu beweisende Degeneriertheit von Φ selbst (und damit auch von f), daß $\Phi(X) = \sum D(V) \epsilon(V, X)$ gilt, und daß in der Summe wieder nur V auftreten, die ein Urbild $W \in \mathcal{M}^n$ besitzen, mit nicht-primitivem $W + A$ und trivialer Einschränkung $W|_{\mathcal{M}^n \cdot \pi} = 0$.

d) Nun besagt das Krull-Schmidt-Theorem in Verbindung mit obiger Strukturtheorie (4.3.1) $\mathcal{M} \cong \bigoplus_{i=1}^j \mathcal{R} / \pi^{m_i} \mathcal{R}$. Falls $m_i = 1$ für alle i gilt, so existiert kein nicht-triviales Ideal, $(\pi) = (0)$, und man kann $A = 0$, also $\chi(X) = \epsilon(A, X) = 1$ trivial, wählen. Damit erhält man aber den Körperfall (mit der exzeptionellen isotropen Struktur), für diesen wurde bereits bewiesen, daß Φ degeneriert, es treten nur $D(V) \neq 0$ zu isotropen, also nicht-primitiven, $V = W = W + A$ auf.

e) Falls $m_i > 1$, für alle i , gilt, so folgt, für beliebiges m und $W \in (\mathcal{M}^*)^m$, aus $W|_{\mathcal{M}^m \cdot \pi} = 0$ auch $W \in \pi \cdot (\mathcal{M}^*)^m$. Um dies zu sehen, genügt es den Fall $m = 1$, $\mathcal{M} = \mathcal{R} / \pi^{m_i} \mathcal{R}$, zu behandeln. Wir hatten schon $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}^*$ (als abelsche Gruppe) gesehen. Beschreibt man also einen Homomorphismus $\phi = \phi_a \in \mathcal{M}^*$, $a \in \mathcal{M}$, als $x \mapsto \overline{a}'x$, so bedeutet $\phi|_{\mathcal{M} \cdot \pi} = 0$, daß $\overline{a}'x \equiv 0 \pmod{(\pi)^{m_i}}$, für alle $x \equiv 0 \pmod{(\pi)}$, also auch $a \equiv 0 \pmod{(\pi)^{m_i-1}}$, und da $m_i - 1 > 0$, ist dann $\phi \in (\pi) \cdot \mathcal{M}^*$.

f) Dies bedeutet aber, daß für so ein W , $W + B$ genau dann primitiv ist, wenn es B selbst ist. Die Anwendung auf den Fall $m = n - r$ liefert dann aber $\Phi_U = 0$, also $\Phi((E, Y)U) = 0$ für alle Y , falls $(A\widetilde{U})_2$ primitiv ist, denn dann müssen alle Koeffizienten $D_U(V)$ verschwinden. Genauso bedeutet die Degeneriertheit von f , daß $\Phi = 0$ dann die Nullfunktion ist, wenn A primitiv ist. Da wir sonst eine leere Bedingung erhalten, können wir also annehmen, daß A primitiv ist, sogar $A = (E, 0)$, und müssen das Verschwinden von $\Phi(P)$, $P \in \mathcal{P}_n$, aus dem von geeigneten $\Phi_U(Y)$, $Y \in \mathcal{M}^{n-r}$, herleiten. Wenn man eine Darstellung

$$P = (E, Y)U = (E, Y) \begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix},$$

mit primitiven U und U_3 finden kann, so hat U_3 den Rang r , nach Definition der isotropen Struktur, also hat auch $\widetilde{U}_3 = \widetilde{U}'_3$ den Rang r (man beachte, daß im Körperfall ein Antiautomorphismus auch Isomorphismus ist, k ist gleich seiner entgegengesetzten Algebra), da $U \mapsto \widetilde{U}$ die Matrixausdehnung einen Automorphismus von $\mathcal{R}$ ist, und ist damit primitiv. Es ist aber auch $A\widetilde{U}' = A\widetilde{U}' = (E, 0) \begin{pmatrix} \widetilde{U}'_1 & \widetilde{U}'_3 \\ \widetilde{U}'_2 & \widetilde{U}'_4 \end{pmatrix} = (\widetilde{U}'_1, \widetilde{U}'_3)$, also ist dann $(A\widetilde{U}')_2$ primitiv, und damit $\Phi(P) = \Phi_U(Y) = 0$.

g) Man kann aber stets sogar eine Darstellung $P = (E, 0, Y)U = (E^{(r)}, 0^{(r, n-2r)}, Y^{(r)})U$, mit primitiven U , U_3 und invertierbarem $Y = Y^{(r)}$ finden. Es existiert nämlich ein $V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ v_{3,1} & v_{4,1} \\ v_{3,2} & v_{4,2} \end{pmatrix} \in \text{Gl}(n, k)$, mit $P = (0, 0, E^{(r)})V$, da P primitiv ist. Nun ist auch

$$(E, 0, Y) \begin{pmatrix} -Y & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ E & 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} = (-Y + Y, 0, YY^{-1}) = (0, 0, E^{(r)}),$$

$$\text{also } P = (E, 0, Y) \begin{pmatrix} -Y & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ E & 0 & Y^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \\ V_3 & V_4 \end{pmatrix} = (E, 0, Y) \begin{pmatrix} -YV_1 & -YV_2 \\ v_{3,1} & v_{4,1} \\ v_{3,1} + Y^{-1}v_{3,2} & v_{2,1} + Y^{-1}v_{4,2} \end{pmatrix} =: (E, 0, Y)U,$$

und man findet ein geeignetes Y , so daß die so definierte Matrix U primitiv, und auch $V_1 + Y^{-1}V_{3,2}$ invertierbar ist, und daher vollen Rang hat. Damit ist auch der Fall $m_i > 1$, für alle i , bewiesen.

h) Im gemischten Fall trennt man die Komponenten von $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ so, daß in $\mathcal{M}_1$ genau die $m_i = 1$ auftreten. $P = (P^{(1)}, P^{(2)})$ ist genau dann primitiv, wenn es seine Komponenten sind, in $A = (A^{(1)}, A^{(2)})$ kann man $A^{(1)} = 0$ annehmen. Falls $A^{(2)}$ nicht primitiv ist, so auch $W^{(2)} + A^{(2)}$, also auch $W + A$, dann ist die zu beweisende Bedingung leer, im Sinne, daß die zugehörigen Koeffizienten in der Darstellung von f zu isotropen Elementen gehören, und damit auftreten dürfen. Sei also $A^{(2)}$ primitiv. Dann ist aber $W^{(2)} + A^{(2)}$ stets primitiv, und die Primitivität von $W + A$ wird durch die von $W^{(1)} + A^{(1)}$ bestimmt, $W^{(2)}$ kann frei gewählt werden. Die Funktion $\Phi^{(1)}(P^{(1)}) := \Phi(P^{(1)}, P^{(2)})$ degeneriert aber für jedes feste $P^{(2)}$. Man kann nämlich, nach g, $P^{(2)} = (E^{(2)}, Y^{(2)})U^{(2)}$ mit invertierbarem $U^{(2)}$ und primitivem $(U^{(2)})_3$ darstellen. Dann ist $U := (U^{(1)}, U^{(2)})$ für jedes primitive $U^{(1)}$ primitiv, also degeneriert $\Phi_U^{(1)}$,

$$\Phi_U^{(1)}(Y^{(1)}) := \Phi_U((E^{(1)}, Y^{(1)})U^{(1)}, (E^{(2)}, Y^{(2)})U^{(2)}).$$

Aus dem Körperfall folgt die Degeneriertheit von (jedem) $\Phi^{(1)}$, und damit von Φ , da jedes $W^{(2)}$ als Komponente eines Koeffizienten $W = (W^{(1)}, W^{(2)})$ erscheinen darf. $\square$

Durch Reduktion auf die exzeptionelle isotrope Struktur, erhalten wir nun das wichtige Resultat. Die Einschränkung an n ergibt sich dabei aus der für obige Beweise notwendige. Der Widerspruchsbeweis von Freitag kann übernommen werden. Wir fassen uns deshalb kurz, und weisen nur auf die Stellen hin, wo die Exaktheit des Hom-Funktors und die Verschiebungseigenschaft $\epsilon(V, XU) = \epsilon(V\widetilde{U}, X)$ verwendet werden.

4.3.7 Satz : Sei $n \geq 2r$. Dann ist jedes Tripel $(\mathcal{M}, n, L)$ erlaubt.

Beweis : a) Wir nehmen an, daß jede mögliche Darstellung von f als Linearkombination von Charakteren $f(X) = \sum C(V)\epsilon(V, X)$ auch (nicht-triviale) Koeffizienten zu nicht-isotropen V enthält, während jedes f_U degeneriert. Wir definieren

$$r' = \max\{\text{rank}(\langle V \rangle) ; V \text{ nicht isotrop und } C(V) \neq 0\}$$

für solch ein Darstellung von f und

$$\mathcal{A} := \{V \subset \mathcal{M}^* ; V \text{ nicht isotrop, } C(V) \neq 0 \text{ und } \text{rank}(\langle V \rangle) = r'\}.$$

Wir wählen die Darstellung so, daß r' minimal und, unter dieser Nebenbedingung, auch $|\mathcal{A}|$ minimal werden, und fixieren ein $V_0 \in \mathcal{A}$.

b) Die Exaktheit des Hom-Funktors liefert einen Faktormodul $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$, mit $\mathcal{N}^* = \langle V_0 \rangle$. Mit der Menge

$$\mathcal{B} := \{V \in \mathcal{A} ; \langle V \rangle \subset \mathcal{N}^* = \langle V_0 \rangle\}$$

aller nicht-isotroper Untermoduln von $\mathcal{N}^*$ vom selben Rang wie $\mathcal{N}^*$ selbst, deren Koeffizienten $C(V) \neq 0$ nicht verschwinden, bildet man die Teilsumme $g(X) = \sum_{V \in \mathcal{B}} C(V) \epsilon(V, X)$ von f , und betrachtet sie als Funktion auf $\mathcal{N}^n$.

c) Die Verschiebungseigenschaft des Charakters liefert nun

$$f((E, Y)U) = \sum_{V=(V_1, W) \overline{U}'^{-1}} C(V) \epsilon((V_1, W) \overline{U}'^{-1}, (E, Y)U) = \sum_{V=(V_1, W) \overline{U}'^{-1}} C(V) \epsilon(V_1, E) \epsilon(W, Y),$$

also $C_U(W) = \sum_{V_1 \in \mathcal{M}^r} C((V_1, W) \overline{U}'^{-1}) \epsilon(V_1, E)$, für ein geeignetes $\tilde{U} \in \text{Gl}(n, \mathcal{R})$. Genauso liefert die Teilsumme g die Gleichung

$$C'_U(W) = \sum_{V_1 \in \mathcal{M}^r, V=(V_1, W) \overline{U}'^{-1} \in \mathcal{B}} C(V) \epsilon(V_1, E),$$

für die Koeffizienten von $g_U(Y) = g((E, Y)U) = \sum C'_U \epsilon(W, Y)$. Es gilt also

$$C'_U(W) = C_U(W) - \sum_{V=(V_1, W) \overline{U}'^{-1} \notin \mathcal{B}} C(V) \epsilon(V_1, E).$$

d) Damit folgt, daß stets $\langle W \rangle \neq \mathcal{N}^*$ ist, falls $C'_U(W)$ nicht verschwindet: Falls W isotrop ist, so ist dies ja sowieso erfüllt (unabhängig von $C'_U(W)$), und falls W nicht isotrop ist, so verschwindet $C_U(W) = 0$. In diesem Fall existiert ein $V_1 \in \mathcal{M}^{n-r}$ mit $V = (V_1, W) \overline{U}'^{-1} \notin \mathcal{B}$. Aus der Annahme $\langle W \rangle = \mathcal{N}^*$, erhält man dann über ein Rangargument $V \in \mathcal{B}$, was nicht sein kann. Betrachtet man nun wieder g als Funktion von $X \in \mathcal{M}^n$, so ist man in der Lage obiges Lemma anzuwenden, g degeneriert bezüglich der exzeptionellen isotropen Struktur L_e , und man ersetzt diese Teilsumme von f durch eine, in der nur Charaktere zu isotropen (bezüglich der exzeptionellen Struktur) V auftreten, also

$$f(X) = \sum_{\text{rank}(\langle V \rangle) < r'} C'(V) \epsilon(V, X) + \sum_{V \notin \mathcal{B}} C(V) \epsilon(V, X).$$

e) Nun können nicht alle $C(V)$ für nicht-isotrope $V \notin \mathcal{B}$ verschwinden, sonst hätte man eine Darstellung von f , die der Minimalität von r' widersprechen würde. Dann existiert ein nicht-isotropes $V \notin \mathcal{B}$ vom Rang r' , so daß $C(V) \neq 0$, und es kann auch kein nicht-isotropes V von echt größerem Rang mit dieser Eigenschaft existieren. Auf der anderen Seite gehört $\mathcal{N}^*$ selbst zu $\mathcal{A}$, aber auch zu $\mathcal{B}$, und da $\text{rank}(\mathcal{N}^*) = r'$ gilt, kann es in keiner der zwei Teilsummen dieser Summendarstellung von f auftreten, im Widerspruch zur Minimalität von $|\mathcal{A}|$. Das beweist aber den Satz. $\square$

Damit hat man auch das Problem der Erzeugung von $\overline{\mathbf{M}(q)}$ gelöst, sofern D an allen Stellen P mit $(q, P) \neq 1$ ein Schiefkörper bleibt, $\hat{D}_P = \tilde{D}_P = M_1(\tilde{D}_P)$ (, was zwar sehr unwahrscheinlich, aber dennoch möglich ist).

4.4.4 Der Fall von Matrixalgebren, die Anwendung des fundamentalen Lemmas auf die Komponenten von $\mathcal{O}/q\mathcal{O}$ und die Erzeugung des singulären Raumes

Nun müssen wir noch den uns interessierenden Fall, nämlich den eines Ringes $\mathcal{R}' = M_s(\mathcal{R})$ und des Moduls $\mathcal{M}' = (\mathcal{R}')^r$ behandeln, wobei $\mathcal{R}$ die Voraussetzungen des letzten Paragraphen erfüllt.

Wir haben den Begriff der isotropen Struktur auf rechts- $\mathcal{R}'$ -Moduln $\mathcal{M}'$, sowie die der Primitivität und Degeneriertheit, und auch den der Erlaubtheit (eines Tripels) erklärt. Auf $\mathcal{R}'$ wählen wir als fundamentalen Charakter

$$\epsilon'(x') := \epsilon(\text{Tr}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}(x')) = \prod_{i=1}^s \epsilon(x_{ii}),$$

mit dem fundamentalen Charakter ϵ von $\mathcal{R}$, und damit die Paarung $\epsilon'(\phi', x') := \epsilon'_{\phi'}(x') := \epsilon'(\phi'(x'))$, für Homomorphismen $\phi' \in \text{Hom}_{\mathcal{R}'}(\mathcal{M}', \mathcal{R}')$ eines rechts- $\mathcal{R}'$ -Moduls $\mathcal{M}'$, und $x' \in \mathcal{M}'$. Wir beweisen

4.4.1 Satz : *Sei $\mathcal{M}' = (\mathcal{R}')^r$. Falls $n \geq 2r$ gilt, so ist jedes Tripel $(\mathcal{M}', n, L)$ erlaubt. Falls $n > r$ und L ein maximales Element L enthält, also $L = \{\mathcal{L}' \subset (\mathcal{M}')^* ; \mathcal{L}' \subset L\}$, so ist das Tripel $(\mathcal{M}', n, L)$ erlaubt.*

Beweis : a) Wir fassen $\mathcal{M}' = (\mathcal{R}')^r$ als $\mathcal{R}^{(rs, s)}$ auf, also $(\mathcal{M}')^n = \mathcal{M}' \times \cdots \times \mathcal{M}'$ als $\mathcal{M}^{ns}$, mit dem (freien) rechts- $\mathcal{R}$ -Modul $\mathcal{M} = \mathcal{R}^{rs}$. Es gilt somit $\mathcal{M}' = \mathcal{M}^s$. Ein Tupel $X = (x_1 \cdots x_n) \in (\mathcal{M}')^n$ ist genau dann $\mathcal{R}'$ -primitiv, wenn X , aufgefaßt als $X^{(rs, ns)} \in \mathcal{R}^{(rs, ns)}$, $\mathcal{R}$ -primitiv ist, denn die allgemeinen linearen Gruppen $\text{Gl}(n, \mathcal{R}') = \text{Gl}(n, M_s(\mathcal{R}))$ und $\text{Gl}(ns, \mathcal{R})$ fallen zusammen.

b) Die Elemente der Homomorphismengruppen fassen wir als Zeilenvektoren auf,

$$\mathcal{M}^* = \text{Hom}_{\mathcal{R}}(\mathcal{M}, \mathcal{R}) \cong \mathcal{R}^{(1, rs)} \quad \text{und} \quad (\mathcal{M}')^* = \text{Hom}_{\mathcal{R}'}(\mathcal{M}', \mathcal{R}') \cong (\mathcal{R}')^{(1, r)} \cong \mathcal{R}^{(s, rs)} \cong (\mathcal{M}^*)^s.$$

Sei L' eine isotrope Struktur auf $\mathcal{M}'$, und $\mathcal{L}' \in L'$. Die Zeilen aller $V' \in \mathcal{L}'$ erzeugen einen links- $\mathcal{R}$ -Untermodul $\mathcal{L}$ von $\mathcal{M}^*$. Man erhält also ein System $L = \{\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{L}') \subset \mathcal{M}^* ; \mathcal{L}' \in L'\}$ von solchen Untermoduln.

c) Sei jetzt ein $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{L}')$ fixiert, und $\tilde{\mathcal{L}} \subset \mathcal{L}$ ein links- $\mathcal{R}$ -Untermodul von $\mathcal{L}$. $\mathcal{L}'$ wird von (höchstens) r Elementen $X_i \in (\mathcal{R}')^{(1, r)}$ erzeugt, $\mathcal{L}$ also von rs Zeilenvektoren $x_i^j \in \mathcal{R}^{(1, rs)}$. Aus Ranggründen wird dann auch $\tilde{\mathcal{L}}$ von (höchstens) rs Zeilenvektoren y_i^j , $i = 1, \dots, r$, $j = 1, \dots, s$, minimal erzeugt, diese sind Linearkombinationen der x_i^j . Wähle nun, für jedes $i = 1, \dots, r$, Matrizen

$$Y_{ik} \in M_s(\mathcal{R}) = \mathcal{R}', \quad k = 1, \dots, r, \quad \text{so daß} \quad \sum_{k=1}^r Y_{ik} X_k = (y_i^j)^{(j)} = \begin{pmatrix} y_i^1 \\ \vdots \\ y_i^s \end{pmatrix} =: Y_i \quad \text{gilt.}$$

Es ist dann aber $Y_i \in \mathcal{L}'$, für alle i , also ist

$$\tilde{\mathcal{L}}' := \mathcal{R}' \cdot Y_1 + \cdots + \mathcal{R}' \cdot Y_r \subset \mathcal{L}'$$

ein Untermodul von $\mathcal{L}'$, also $\tilde{\mathcal{L}}' \in L'$. Offensichtlich ist aber $\tilde{\mathcal{L}} = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{\mathcal{L}}')$, also gilt $\tilde{\mathcal{L}} \in L$, nach Definition von L . Damit ist L eine isotrope Struktur auf $\mathcal{M}$.

d) Nun sei $f : \mathcal{P}(\mathcal{M}', n) \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben, alle $f_U : (\mathcal{M}')^{n-r} \rightarrow \mathbb{C}$ seien degeneriert. Betrachte f als Funktion auf $\mathcal{P}(\mathcal{M}, ns)$, und jedes f_U als Funktion auf $\mathcal{M}^{(n-r)s}$. Da $ns \geq 2rs$ (, bzw. $ns > rs$ und L ein maximales Element enthält), ist jedes Tripel $(\mathcal{M}, ns, L)$ (, bzw. das spezielle Tripel $(\mathcal{M}, ns, L)$,) erlaubt, und f degeneriert. Die isotropen $V_i \in (\mathcal{M}^*)^{ns}$, die in der Summendarstellung von f auftreten, faßt man wieder als $V_i' \in ((\mathcal{M}')^*)^n$ auf, diese sind ebenfalls isotrop. $\square$

Dies benutzen wir insbesondere im Falle $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}_P$, $\mathcal{R}' = M_{s_P}(\tilde{\mathcal{R}}_P) \cong \mathcal{O}_P/q\mathcal{O}_P$. In Verbindung mit dem angegebenen Lokalisierungsargument (4.1.7 und 4.1.8), erhalten wir die gewünschte Aussage über das ursprüngliche $\mathcal{R} = \mathcal{O}/q\mathcal{O}$, nämlich

4.4.2 Folgerung : *Falls $n \geq 2r$ gilt, so läßt sich jedes Koeffizientensystem $\alpha(W)$, das das Relationensystem erfüllt, mit Hilfe von isotropen Matrizen V_i erzeugen.* $\square$

Das „fundamental lemma“ hat also unser kombinatorisches Problem positiv beantwortet. Allerdings genügt es nicht $n > r$ zu fordern. Der Beweis funktioniert nur im Falle $n \geq 2r$ in voller Allgemeinheit. In diesem Fall ist $\mathbf{M}(q)$ endlich erzeugt. Genauer gilt $\overline{\mathbf{M}(q)} = \Theta(q) = \Theta(q, r, n)$,

$n \geq 2r$. Die benutzten Thetareihen gehören zu den Gittern $\mathcal{L}_i = \langle Q_i \rangle$, die durch die primitiven Darstellungen $T_i = S_i[Q_i]$ eines Repräsentantensystems der unimodularen Klassen potentieller Kernformen entstehen.

Der untersuchte Spezialfall isotroper Strukturen, die ein maximales Element enthalten, gilt allgemein für $n > r$. Es kann nun vorkommen, daß eine Matrix S so beschaffen ist, daß die daraus resultierende isotrope Struktur diese Eigenschaft hat. Der Unterraum vom singulären Raum, dessen Elemente nur Kernformen T besitzen, für die man die Darstellung $T = S[Q]$ so wählen kann, daß dies gilt, wird also für alle $n > r + 1$ durch Thetareihen endlich erzeugt, was natürlich nicht besonders aussagekräftig ist. Ob man das fundamentale Lemma allgemein für diese Ränge n und Gewichte r beweisen kann, ist unklar. Herr Freitag teilte mir mit, daß er gewisse Schritte in diese Richtung tat, den Beweis jedoch nie vervollständigte.

Kapitel 5

Die Thetarelationen und das Hauptresultat

Es wird das Hauptresultat über singuläre Modulformen zu Hauptkongruenzgruppen formuliert, und die sogenannten Thetarelationen hergeleitet.

5.1 Nicht-triviale algebraische Relationen zwischen Theta-reihen

In diesem Abschnitt werden die, durch die Wirkung der S -Einheitengruppe entstehenden, nicht-trivialen algebraischen Relationen zwischen den Elementen aus $\Theta(q)$, die sogenannten Thetarelationen, untersucht.

5.1.1 Eine Zerlegung von $\Theta(q)$ und die Wirkung von Einheiten auf Thetareihen

Wir wollen aus dem gewonnenen Erzeugendensystem für singuläre Modulformen eine Basis konstruieren. Dazu müssen wir die algebraischen Relationen zwischen den Elementen dieses Systems untersuchen. Wir betrachten eine potentielle Kernform T und eine primitive Darstellung $T = S[Q]$, also mit einem Q , daß an allen Stellen aus $\mathbf{S} := \{P \subset \mathcal{O}_K ; (q, P) \neq 1\}$ unimodular ergänzbar ist. Wir benennen den Raum aller Thetareihen zu dem Gitter $\mathcal{L} = \langle Q \rangle$ und allen (bezüglich S) isotropen Matrizen V mit $\Theta(T, q)$. Dies ist ein Unterraum von $\Theta(q)$. Es gilt

1.1.1 Bemerkung : $\Theta(T, q)$ hängt nicht von der Wahl der Darstellung ab.

Beweis : Wir wissen, daß sich zwei Darstellungen $T = S[Q] = \tilde{S}[\tilde{Q}]$ nur um ein invertierbares $A \in \text{Gl}(n, D)$ mit $\mathcal{L} = A \cdot \tilde{\mathcal{L}}$ und $\tilde{S} = S[A]$ unterscheiden. Ist V isotrop bezüglich S , $\mathcal{L}$ und q , so ist $\tilde{V} = \overline{A}' V$ isotrop bezüglich $\tilde{S}$, $\tilde{\mathcal{L}}$ und q . Es gilt auch

$$\begin{aligned} \vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, \frac{V}{q}; Z) &= \sum_{\substack{G=G^{(r, n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(S^{1/2} G) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{q S[G] Z + 2 \overline{V}' G\}} = \\ &= \sum_{\substack{G=G^{(r, n)} \\ \langle G \rangle \subset \mathcal{L}}} P(U \tilde{S}^{1/2} (A^{-1} G)) e^{\frac{\pi i}{q} \sigma\{q (S[A]) [A^{-1} G] Z + 2 \overline{(\tilde{A}' V)}' (A^{-1} G)\}} = \vartheta_{\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{P}}(\tilde{S}, \frac{\tilde{V}}{q}; Z), \end{aligned}$$

mit der unitären Matrix $U = S^{1/2} A (S[A])^{-1/2}$ und der harmonischen Form $\tilde{P}(X) = P(UX)$. $\square$

Wir haben also zu jeder unimodularen Klasse von potentiellen Kernformen einen Raum

$$\Theta(T_i, q) \subset \Theta(q).$$

Das fundamentale Lemma liefert

1.1.2 Theorem : Falls $n \geq 2r$ gilt, so ist $\sum_{i=1}^k \Theta(T_i, q) = \Theta(q) = \overline{\mathbf{M}(q)}$. $\square$

Wir haben bestimmte Funktionen $\alpha : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $\mathcal{M} = \mathcal{L}/q\mathcal{L}$ degeneriert genannt. Speziell haben wir ein endliches System von isotropen Matrizen V_i erhalten, so daß der Raum aller solchen Funktionen durch die $\alpha_i = \alpha_{V_i} = \alpha_{v_i}$ erzeugt wird, wobei der Wert $\alpha_i(x) = \epsilon(v_i, x)$ über die Paarung gegeben ist, und v_i das Bild von V_i in $\mathcal{M}^*$ ist. (Diese speziellen Abbildungen waren ursprünglich nur auf der Menge $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{M}^n$ der primitiven Tupel definiert, man kann sie aber natürlich zu Funktionen auf ganz $\mathcal{M}^n$ fortsetzen.) Wir betrachten also

1.1.3 Definition : $\mathcal{A} = \mathcal{A}(S, \mathcal{L}) := \{\alpha : \mathcal{M}^n \rightarrow \mathbb{C} ; \alpha = \sum c_i \alpha_i\}$ ist der Raum aller endlicher Summen der ausgezeichneten Abbildungen $\alpha_i = \alpha_{v_i}$. Ferner setzen wir

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(S, \mathcal{L}) := \{\alpha|_{\mathcal{P}_n} ; \alpha \in \mathcal{A}\},$$

die Einschränkung der α auf primitive Tupel. $\square$

Uns interessieren natürlich nur die Elemente aus $\mathcal{B}$ und deren Erzeugung. Wir wissen, daß die Gruppe der S -Einheiten,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(S, \mathcal{L}) = \{U \in \text{Sl}(r, D) ; S[U] = S, U \cdot \mathcal{L} = \mathcal{L}\},$$

auf $\Theta(T, q)$ wirkt: Mit V ist auch $\overline{U}'V$ isotrop, $G = G^{(r,n)}$ und UG durchlaufen dasselbe Gitter, und aus P wird wieder eine harmonische Form, wobei die Wirkung in obiger Bemerkung beschrieben wurde. Die entsprechende Wirkung in $\mathcal{A}$ können wir über die Paarung beschreiben, nämlich

$$\alpha_{\overline{U}'V_i}(x) = \epsilon(x, \overline{u}'v_i) = \epsilon(\tilde{u}x, v_i) = \alpha_{v_i}(\tilde{u}x).$$

Durch lineare Ausdehnung erhält man also zu jedem $\alpha \in \mathcal{A}$ ein $\tilde{\alpha} = \alpha^u$, $\tilde{\alpha}(x) = \alpha(ux)$.

Außerdem kann man jedem $\alpha \in \mathcal{A}$ ein Koeffizientensystem

$$\alpha(G) := \alpha(g)e_i, \quad \langle G \rangle \subset \mathcal{L}, \quad g = \overline{G} \in \mathcal{M}^n \text{ und } e_i \in \mathcal{Z}_0 \text{ ein Basiselement,}$$

zuordnen. Daraus bildet man ein System von Fourier-Koeffizienten

$$a(S[G]) := \rho_0 \left(\left(\begin{smallmatrix} \overline{G}_1' & \overline{U}_3' \\ \overline{G}_2' & \overline{U}_4' \end{smallmatrix} \right) \right) \alpha(G),$$

$U = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$ eine Ergänzung von $G = (G_1, G_2)$, und erhält so ein Element aus $\Theta(T, q)$, nämlich $\sum_{\langle G \rangle \subset \mathcal{L}} a(S[G])e^{\pi i \sigma \{S[G]Z\}}$. Man hat also eine, nach dem Theorem bzw. dem fundamentalen Lemma surjektive, Abbildung $\mathcal{A} \rightarrow \Theta(T, q)$ (, wenn man $i = 1, \dots, l$ die Basis von $\mathcal{Z}_0$ durchlaufen läßt).

Man kann jedoch auch allgemeiner, mit einer beliebigen harmonischen Form $P \in \mathcal{H} = \mathcal{H}(\rho_0)$ ($\mathcal{H}(\rho_0)$ der Vektorraum der harmonischen Formen bezüglich ρ_0), das Element

$$\vartheta_{\alpha, P}(Z) := \sum_{\langle G \rangle \subset \mathcal{L}} \alpha(g)P(S^{1/2}G)e^{\pi i \sigma \{S[G]Z\}} \in \Theta(T, q)$$

bilden. Jede solche Thetareihe ist eine endliche Linearkombination von den ursprünglich definierten $\vartheta_{\mathcal{L}, P}(S, V; Z)$. Sie muß sich natürlich wieder als solche schreiben lassen. Die so gewonnene Abbildung

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{H} \rightarrow \Theta(T, q)$$

ist (auch) surjektiv, die Wirkung von $\mathcal{E}$ ist mit dieser verträglich.

5.1.2 Ein System von Thetarelationen

Nun treten erstmal triviale Relationen (Invarianzen) von Thetareihen, durch die Wirkung von $\mathcal{E}$ auf ein Paar $\alpha \otimes P$, auf. Wenn man den unter den S -Einheiten invarianten Teilraum $(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})^{\mathcal{E}}$ betrachtet, und obige Abbildung auf diesen einschränkt, so ist auch die Einschränkung surjektiv.

Die echten Thetarelationen ergeben sich jetzt dadurch, daß nur die Einschränkung jedes Paares auf $\mathcal{B} \otimes \mathcal{H}$, also auf primitive n -Tupel in $\mathcal{M}^n$ bzw. primitive Matrizen $G = G^{(r,n)}$, wichtig ist. Die natürliche Einschränkung

$$(\mathcal{A} \otimes \mathcal{H})^{\mathcal{E}} \rightarrow (\mathcal{B} \otimes \mathcal{H})^{\mathcal{E}}$$

ist jedoch zwar surjektiv, aber nicht injektiv. Man muß also einen Unterraum

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(S, \mathcal{L}) \subset (\mathcal{A}(S, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{H}(\rho_0))^{\mathcal{E}(S, \mathcal{L})} \text{ wählen, mit } \mathcal{C} \cong (\mathcal{B}(S, \mathcal{L}) \otimes \mathcal{H}(\rho_0))^{\mathcal{E}(S, \mathcal{L})}.$$

1.2.1 Bemerkung : Nach Konstruktion ist $\mathcal{C} \rightarrow \Theta(T, q)$ injektiv. Die Einschränkung des Zielbereiches auf das Bild $\Theta_0(T, q)$ ist also ein Isomorphismus. Diese Einschränkung beschreibt also (wenigstens prinzipiell) alle nicht-trivialen Thetarelationen, allerdings nicht mehr in $\Theta(T, q)$ selbst, sondern in der Summe $\Theta(q) = \sum \Theta(T, q)$. $\square$

5.2 Das Resultat: Erzeugung der singulären Modulformen gegebenen Gewichtes zu Hauptkongruenzgruppen

Es wird das bewiesene Theorem formuliert, also eine (endliche) Basis von Thetareihen für $\overline{\mathbf{M}(q)}$ angegeben.

5.2.1 Der Hauptsatz über singuläre Modulformen zu Hauptkongruenzgruppen

Wir fassen die gewonnenen Resultate zusammen.

2.1.1 Voraussetzungen : Seien $A = M_n(D)$ eine einfache, involutive, endliche, positiv definite $\mathbb{Q}$ -Algebra, D ein Schiefkörper vom Schurindex $s = s(D) = \sqrt{(D : K)}$ über seinem Zentrum K , K/Q ein algebraischer Zahlkörper vom Körpergrad $[K : Q] = m$, $\mathcal{O}$ eine maximale Ordnung in D , die unter der Involution invariant ist, $\mathcal{O} = \overline{\mathcal{O}}$. Seien ferner q, r und n natürliche Zahlen, so daß $0 < 2r \leq n$ (und auch $r + 1 < n$, der Grenzfall $r = 1$ und $n = 2$ wird ausgeschlossen), und $T_1, \dots, T_k$ ein Vertretersystem der unimodularen Klassen potentieller Kernformen der Stufe q (vergleiche Kapitel 4, Bemerkung 2.2.3 und Folgerung 2.2.4), mit den entsprechenden Darstellungen $T_i = S_i[Q_i]$ und den Gittern $\mathcal{L}_i = \langle Q_i \rangle$. Insbesondere umfassen die unimodularen Klassen der T_i die Kernformen aller Elemente aus $\mathbf{M}(q)$ (vergleiche Kapitel 3, Definition 2.2.9 und Kapitel 4, Bemerkung 2.2.2). Sei schließlich ρ das Paar $\rho = (\rho_0, rs)$, bestehend aus der fest gewählten irreduziblen und reduzierten Darstellung $\rho_0 : \mathrm{Gl}(A_{\mathbb{C}}) \rightarrow \mathrm{GL}(\mathcal{Z})$, mit einem endlich-dimensionalen $\mathbb{C}$ -Vektorraum $\mathcal{Z}$, und dem Gewicht rs , sowie v ein Multiplikatorsystem vom selben Gewicht. Dann gilt

2.1.2 Theorem :

$$\overline{\mathbf{M}(q)} = \Theta(q) = \sum_{i=1}^k \Theta(T_i, q) = \bigoplus_{i=1}^k \Theta_0(T_i, q),$$

also insbesondere

$$\dim \overline{\mathbf{M}(q)} = \dim \Theta(q) = \sum_{i=1}^k \dim \Theta_0(T_i, q) = \sum_{i=1}^k \dim \mathcal{C}(S_i, \mathcal{L}_i). \quad \square$$

Wie im zweiten Kapitel, Sätze 3.3.7 und 3.3.8, sowie Bemerkung 4.1.2, gezeigt, besteht $\Theta(q)$ aus Modulformen. Es gilt sogar

2.1.3 Theorem :

$$[\Gamma_n[q], \rho, v] = [\Gamma_n[q], rs, v] = \sum_{v_{\Theta, S_i, \mathcal{L}_i} = v} \Theta(T_i, q) = \bigoplus_{v_{\Theta, S_i, \mathcal{L}_i} = v} \Theta_0(T_i, q),$$

also insbesondere

$$\dim[\Gamma_n[q], \rho, v] = \dim[\Gamma_n[q], rs, v] = \sum_{v_{\Theta, S_i, \mathcal{L}_i} = v} \dim \Theta_0(T_i, q) = \sum_{v_{\Theta, S_i, \mathcal{L}_i} = v} \dim \mathcal{C}(S_i, \mathcal{L}_i). \quad \square$$

Das zeigt auch, daß das Multiplikatorsystem einer nicht-verschwindenden Modulform automatisch auf einer geeigneten Hauptkongruenzgruppe mit einem Thetamultiplikatorsystem übereinstimmt.

Literaturverzeichnis

- [AM] Andrianov A.N. – Maloletkin G.N. : *Behavior of Theta-Series of degree n under Modular Substitutions*, Mathematics of the USSR Izvestija 9, S. 173-193, 1975
- [Al] Albert A. : *Structure of Algebras*, American Mathematical Society, 1939
- [BK] Braun H. – Koecher M. : *Jordan-Algebren*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 128, Springer, 1966
- [BH] Borel A. – Harish-Chandra : *Arithmetic Subgroups of Algebraic Groups*, Annals of Mathematics 75, S. 485-535, 1962
- [BM] Borel A. – Mostow G.D. (Ed.) : *Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume IX, AMS, Providence, 1966
- [Bö] Böcherer S. : *Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen*, Mathematische Zeitschrift, Band 183, S. 21-46, 1983
- [Ca] Cassels J.W.S. : *Rational Quadratic Forms*, London Mathematical Society Monographies, Volume 13, Academic Press, London, 1978
- [CF] Cassels J.W.S. – Fröhlich A. (Ed.) : *Algebraic Number Theory*, Proceedings of an Instructional Conference, Academic Press, London and New York, 1967
- [Fr1] Freitag E. : *Siegelsche Modulfunktionen*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 254, Springer, 1983
- [Fr2] Freitag E. : *Singular Modular Forms and Theta Relations*, LNM 1487, Springer, 1991
- [Fr3] Freitag E. : *Hilbert-Siegelsche Singuläre Modulformen*, Preprint, Heidelberg, 1993
- [Fr4] Freitag E. : *Theta Series on Tube Domains*, Preprint, Heidelberg, 1995
- [Fr5] Freitag E. : *Cliffordsche Modulformen*, Preprint, Heidelberg, 1996
- [FH] Freitag E. – Hermann C.F. : *Some Modular Varieties of Low Dimension*, Preprint, Heidelberg – Mannheim, 1998
- [Ha] Hartshorne R. : *Algebraic Geometry*, GTM 52, Springer, 1977
- [Hi] Hirzebruch U. : *Halbräume und ihre Holomorphen Automorphismen*, Mathematische Annalen 153, S. 395-417, 1964
- [Hu] Humphreys J.E. : *Linear Algebraic Groups*, Graduate Texts in Mathematics 21, Springer, 1975
- [Ja1] Jacobson N. : *The Theory of Rings*, American Mathematical Society, 1943
- [Ja2] Jacobson N. : *Structure and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society, 1968

- [KV] Kashiwara M. – Vergé M. : *On the Segal-Shale-Weil Representation and Harmonic Polynomials*, Inventiones Mathematicae 44, S. 1-47, 1978
- [Kneb] Knebusch M. : *Elementarteilerttheorie über Maximalordnungen*, Journal für reine und angewandte Mathematik 226, S. 175-183, 1967
- [Knes] Kneser M. : *Starke Approximation in Algebraischen Gruppen I*, Journal für reine und angewandte Mathematik 218, S. 190-203, 1965
- [Ko1] Koecher M. : *Zur Theorie der Modulformen n -ten Grades I*, Mathematische Zeitschrift, Band 59, S. 399-416, 1954, und II., Math. Z., B. 61, S. 455-466, 1955
- [Ko2] Koecher M. : *Beiträge zu einer Reduktionstheorie in Positivitätsbereichen I*, Mathematische Annalen, Band 141, S. 384-432, 1960, und II., Math. Ann., B. 144, S. 175-182, 1961
- [Kr] Krieg A. : *Modular Forms on Half-Spaces of Quaternions*, LNM 1143, Springer, 1985
- [KR] Koecher M. – Roelcke R. : *Diskontinuierliche und Diskrete Gruppen von Isometrien Metrischer Räume*, Mathematische Zeitschrift, Band 71, S. 258-267, 1959
- [Lo] Lorenz F. : *Einführung in die Algebra II*, Spektrum Akademischer Verlag, 1997
- [Ma1] Matsumura H. : *Commutative Algebra*, W.A. Benjamin Inc., 1970
- [Ma2] Matsumura H. : *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press, 1988
- [Me] Mennicke J. : *Zur Theorie der Siegelschen Modulgruppe*, Mathematische Annalen 159, S. 115-129, 1965
- [Mi] Mitsos M. : *Singuläre Modulformen zu Kongruenzgruppen der Siegelschen Modulgruppe*, Diplomarbeit, Heidelberg, 1996
- [Mu] Mumford D. : *Abelian Varieties*, Oxford University Press, 1970
- [NS] Naimark M.A. – Stern A.I. : *Theory of Group Representations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 246, Springer, 1982
- [Ne] Neukirch J. : *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, 1992
- [O'M] O'Meara O.T. : *Introduction to Quadratic Forms*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 117, Springer, 1963
- [On] Onishchik A.L. (Ed.) : *Lie Groups and Lie Algebras I*, EMS 20, Springer, 1993
- [PR] Platonov V. - Rapinchuk A. : *Algebraic Groups and Number Theory*, Pure and Applied Mathematics 139, Academic Press, Inc., 1994
- [Re] Reiner I. : *Maximal Orders*, Academy Press Inc., 1975
- [Re] Resnikoff H.L. : *Automorphic Forms of Singular Weight are Singular Forms*, Mathematische Annalen 215, S. 173-193, 1975
- [RH] Roggenkamp K.W. – Huber-Dyson V. : *Lattices over Orders I*, LNM 115, Springer, 1970
- [Ro] Roggenkamp K.W. : *Lattices over Orders II*, LNM 142, Springer, 1970
- [SW] Stein E.M. – Weiss G. : *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, 1971
- [Ti] Tits J. : *Liesche Gruppen und Algebren*, Springer, 1983
- [We] Weil A. : *Basic Number Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 144, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967