Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

III. Internationaler Mathematiker-Kongress

Heidelberg, 1904

Autor: **Hilbert, David** (1862 – 1943)

Titel: **Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik**

Bereich: Wissenschaftliche Vorträge

Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses : in Heidelberg vom 8. bis 13. August 1904 / hrsg von A. Krazer. – Leipzig, 1905. – S. 174–185

Der Autor ist der Meinung, dass man durch die im Folgenden kurz dargestellte axiomatische Methode zu einer strengen und völlig befriedigenden Begründung des Zahlbegriffes gelangen kann.

Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik.

Von

D. Hilbert aus Göttingen.

Während wir heute bei den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie über die einzuschlagenden Wege und die zu erstrebenden Ziele im wesentlichen untereinander einig sind, ist es mit der Frage nach den Grundlagen der Arithmetik anders bestellt: hier stehen sich gegenwärtig noch die verschiedensten Meinungen der Forscher schroff einander gegenüber.

Die Schwierigkeiten bei der Begründung der Arithmetik sind zum Teil in der Tat anders geartete als diejenigen, die bei der Begründung der Geometrie zu überwinden waren. Bei der Prüfung der Grundlagen der Geometrie konnten gewisse Schwierigkeiten, die rein arithmetischer Natur sind, beiseite gelassen werden; bei der Begründung der Arithmetik aber erscheint die Berufung auf eine andere Grunddisziplin unerlaubt. Ich werde die wesentlichen Schwierigkeiten bei der Begründung der Arithmetik am deutlichsten hervortreten lassen, indem ich die Anschauungen einzelner Forscher einer kurzen kritischen Erörterung unterwerfe.

L. Kronecker hat bekanntlich in dem Begriff der ganzen Zahl das eigentliche Fundament der Arithmetik erblickt; er bildete sich die Auffassung, daß die ganze Zahl und zwar als Allgemeinbegriff (Parameterwert) direkt und unmittelbar da sei; dadurch wurde er verhindert zu erkennen, daß der Begriff der ganzen Zahl einer Begründung bedürftig und fähig ist. Insofern möchte ich ihn als *Dogmatiker* bezeichnen: er nimmt die ganze Zahl mit ihren wesentlichen Eigenschaften als Dogma hin und blickt nicht weiter rückwärts.

H. Helmholtz vertritt den Standpunkt des *Empiristen*; der Standpunkt der reinen Erfahrung aber scheint mir durch den Hinweis widerlegt, daß aus der Erfahrung, d. h. durch das Experiment, niemals die Möglichkeit oder die Existenz einer beliebig großen Zahl entnommen werden kann. Denn die Zahl der Dinge, die Gegenstand unserer Erfahrung sind, liegt, wenn sie auch groß ist, doch unterhalb einer endlichen Grenze.

E. B. Christoffel und alle diejenigen Gegner Kroneckers, die von dem richtigen Gefühl geleitet, daß ohne den Begriff der Irrationalzahl die gesamte Analysis zur Unfruchtbarkeit verurteilt bliebe, durch Auffindung „positiver" Eigenschaften dieses Begriffes oder durch ähnliche Mittel die Existenz der Irrationalzahl zu retten suchen, möchte ich als *Opportunisten* bezeichnen. Eine sachliche Widerlegung des Kroneckerschen Standpunktes aber wurde durch dieselben meiner Meinung nach nicht erreicht.

Unter den Gelehrten, welche tiefer in das Wesen der ganzen Zahl eingedrungen sind, nenne ich die folgenden:

G. Frege stellt sich die Aufgabe, die Gesetze der Arithmetik durch die Mittel der *Logik*, diese in hergebrachtem Sinne aufgefaßt, zu begründen. Er hat das Verdienst, die wesentlichen Eigenschaften des Begriffes der ganzen Zahl sowie die Bedeutung des Schlusses der vollständigen Induktion richtig erkannt zu haben. Indem er aber seinem Plane treu unter anderem auch dies als Grundsatz hinnimmt, daß ein Begriff (eine Menge) definiert und unmittelbar verwendbar sei, wenn nur für jeden Gegenstand bestimmt ist, ob er unter den Begriff falle oder nicht, und auch den Begriff „jeder" dabei keiner Einschränkung unterwirft, setzt er sich gerade denjenigen mengentheoretischen Paradoxien aus, die beispielsweise in dem Begriffe der Menge aller Mengen liegen und die, wie mir scheint, zeigen, daß die Auffassungen und Untersuchungsmittel der Logik, im hergebrachten Sinne aufgefaßt, nicht den strengen Anforderungen, die die Mengenlehre stellt, gewachsen sind. Die Vermeidung solcher Widersprüche und die Klärung jener Paradoxien ist vielmehr bei den Untersuchungen über den Zahlbegriff von vornherein als ein Hauptziel ins Auge zu fassen.

R. Dedekind hat die mathematischen Schwierigkeiten bei der Begründung des Zahlbegriffes klar erkannt und in äußerst scharfsinniger Weise zuerst einen Aufbau der Theorie der ganzen Zahlen geliefert. Ich möchte aber seine Methode insofern als eine *transzendentale* bezeichnen, als er den Nachweis für die Existenz des Unendlichen auf einem Wege führt, dessen Grundidee wohl in ähnlicher Weise von philosophischer Seite benutzt wird — ein Weg freilich, den ich wegen des unvermeidlichen Widerspruches des dabei zur Verwendung kommenden Begriffes der Gesamtheit aller Dinge als gangbar und sicher nicht anerkennen kann.

G. Cantor hat den genannten Widerspruch empfunden und diesem Empfinden dadurch Ausdruck verliehen, daß er „konsistente“ und „nichtkonsistente“ Mengen unterscheidet. Indem er aber meiner Meinung nach für diese Unterscheidung kein scharfes Kriterium aufstellt, muß ich seine Auffassung über diesen Punkt als eine solche bezeichnen, die dem *subjektiven* Ermessen noch Spielraum läßt und daher keine objektive Sicherheit gewährt.

Ich bin der Meinung, daß alle die berührten Schwierigkeiten sich überwinden lassen und daß man zu einer strengen und völlig befriedigenden Begründung des Zahlbegriffes gelangen kann, und zwar durch eine Methode, die ich die *axiomatische* nennen und deren Grundidee ich im folgenden kurz entwickeln möchte.

Man bezeichnet wohl die Arithmetik als einen Teil der Logik und setzt meist bei der Begründung der Arithmetik die hergebrachten logischen Grundbegriffe voraus. Allein bei aufmerksamer Betrachtung werden wir gewahr, daß bei der hergebrachten Darstellung der Gesetze der Logik gewisse arithmetische Grundbegriffe, z. B. der Begriff der Menge, zum Teil auch der Begriff der Zahl bereits zur Verwendung kommen. Wir geraten so in eine Zwickmühle und zur Vermeidung von Paradoxien ist daher eine teilweise gleichzeitige Entwicklung der Gesetze der Logik und der Arithmetik erforderlich.

Wie ich mir diesen gemeinsamen Aufbau denke, kann ich in der Kürze eines Vortrages nur andeuten. Ich bitte daher zu entschuldigen, wenn es mir nur gelingt, Ihnen eine ungefähre Vorstellung davon zu geben, in welcher Richtung meine Untersuchungen sich bewegen. Auch werde ich mich der leichteren Verständlichkeit wegen mehr der gewohnten Sprache „in Worten“ und der darin mittelbar zum Ausdruck kommenden Gesetze der Logik bedienen, als bei einem exakten Aufbau wünschenswert wäre.

Ein Gegenstand unseres Denkens heiße ein Gedankending oder kurz ein Ding und werde durch ein Zeichen benannt.

Wir legen unserer Betrachtung zunächst ein Gedankending 1 (eins) zugrunde. Die Zusammenfassungen dieses Dinges mit sich zu je zwei, drei oder mehr Malen, wie:

$$11, \quad 111, \quad 1111$$

bezeichnen wir als Kombinationen des Dinges 1 mit sich; ebenso heißen irgendwelche Kombinationen dieser Kombinationen, wie:

$$(1)(11), \quad (11)(11)(11), \quad ((11)(11))(11), \quad ((111)(1))(1)$$

wieder Kombinationen jenes Dinges 1 mit sich. Die Kombinationen werden ebenfalls schlechtweg als Dinge und dem gegenüber dann das zugrunde gelegte Gedankending 1 als einfaches Ding bezeichnet.

Wir fügen nun ein zweites einfaches Gedankending hinzu und benennen dasselbe mit dem Zeichen $=$ (gleich). Alsdann bilden wir die Kombinationen dieser zwei Gedankendinge, wie:

$$1=,\ 11=,\cdots (1)(=1)(===),\ ((11)(1)(=))(==),\ 1=1,\ (11)=(1)(1).$$

Wir sagen, die Kombination a der einfachen Dinge 1, $=$ differiere mit der Kombination b jener Dinge, wenn sie, was die Art und Reihenfolge der Kombination oder die Wahl und das Eingehen der Dinge 1, $=$ selbst anbetrifft, irgendwie voneinander abweichen, d. h. wenn a und b nicht miteinander identisch sind.

Jetzt denken wir uns die Kombinationen jener zwei einfachen Dinge in zwei Klassen, die Klasse der Seienden und die der Nichtseienden verteilt: jedes Ding, das der Klasse der Seienden angehört, differiert mit jedem Dinge, das der Klasse der Nichtseienden angehört. Jede Kombination der zwei einfachen Dinge 1, $=$ gehört einer dieser beiden Klassen an.

Wenn a eine Kombination der zwei zugrunde liegenden Dinge 1, $=$ ist, so bezeichnen wir mit a auch die Aussage, daß a der Klasse der Seienden angehört, und mit $\bar{a}$ die Aussage, daß a der Klasse der Nichtseienden angehört. Wir bezeichnen a als eine richtige Aussage, wenn a der Klasse der Seienden angehört; dagegen heiße $\bar{a}$ eine richtige Aussage, wenn a der Klasse der Nichtseienden angehört. Die Aussagen a und $\bar{a}$ bilden einen Widerspruch.

Der Inbegriff zweier Aussagen A, B, in Zeichen

$$A \mid B,$$

in Worten: „aus A folgt B“ oder „wenn A richtig ist, ist auch B richtig“ heißt ebenfalls eine Aussage und zwar heißt A dann die Voraussetzung, B die Behauptung. Voraussetzung und Behauptung können selbst wiederum aus mehreren Aussagen A_1, A_2 bez. B_1, B_2, B_3 usw., bestehen in Zeichen:

$$A_1 \text{ u. } A_2 \mid B_1 \text{ o. } B_2 \text{ o. } B_3,$$

in Worten: „aus A_1 und A_2 folgt B_1 oder B_2 oder B_3“ usw.

Wegen des Zeichens o. (oder) wäre, da die Negation bereits eingeführt ist, das Zeichen $\mid$ zu vermeiden möglich; ich benutze es in diesem Vortrage lediglich, um mich an die gewohnte Wortsprache möglichst anzuschließen.

Wir wollen unter A_1, A_2, $\cdots$ bez. diejenigen Aussagen verstehen, die — kurz ausgedrückt — aus einer Aussage $A(x)$ hervorgehen, indem wir an Stelle der „Willkürlichen" x die Gedankendinge 1, $=$ und die Kombinationen derselben nehmen; dann schreiben wir die Aussagen

$$A_1 \text{ o. } A_2 \text{ o. } A_3, \cdots \quad \text{bez.} \quad A_1 \text{ u. } A_2 \text{ u. } A_3, \cdots$$

auch wie folgt

$$A(x^{(o)}), \quad \text{in Worten „wenigstens für ein } x\text{"}$$

$$\text{bez. } A(x^{(u)}), \quad \text{in Worten „für jedes einzelne } x\text{"},$$

hierin erblicken wir lediglich eine abkürzende Schreibweise.

Wir bilden nun aus den zugrunde gelegten zwei Dingen 1, $=$ die folgenden Aussagen:

$$1. \quad x = x$$

$$2. \quad \{x = y \text{ u. } w(x)\} \,|\, w(y).$$

Dabei bedeutet x (im Sinne von $x^{(u)}$) jedes der zwei zugrunde gelegten Gedankendinge und jede Kombination derselben; in 2. ist y (im Sinne von $y^{(u)}$) ebenfalls jedes jener Dinge und jede Kombination, ferner $w(x)$ eine „willkürliche" Kombination, die die „Willkürliche" x (im Sinne von $x^{(u)}$) enthält; die Aussage 2. lautet in Worten: Aus $x = y$ und $w(x)$ folgt $w(y)$.

Die Aussagen 1., 2. bilden die Definition des Begriffes $=$ (gleich) und werden insofern auch Axiome genannt.

Wenn man an Stelle der Willkürlichen x, y in den Axiomen 1., 2. die einfachen Dinge 1, $=$ oder besondere Kombinationen derselben setzt, so entstehen besondere Aussagen, welche Folgerungen jener Axiome heißen mögen. Wir betrachten eine Reihe gewisser Folgerungen von der Art, daß die Voraussetzungen der letzten Folgerung der Reihe mit den Behauptungen der voranstehenden Folgerungen identisch sind. Nehmen wir dann die Voraussetzungen der voranstehenden Folgerungen als Voraussetzung und die Behauptung der letzten Folgerung als Behauptung, so entsteht eine neue Aussage, die wiederum als Folgerung aus den Axiomen bezeichnet werden möge. Durch Fortsetzung dieses Schlußverfahrens können wir weitere Folgerungen erhalten.

Wir wählen nun aus diesen Folgerungen diejenigen aus, die die einfache Form der Aussage a (Behauptung ohne Voraussetzung) haben, und fassen die so entstehenden Dinge a in der Klasse der Seienden zusammen, während die von diesen differierenden Dinge zu der Klasse der Nichtseienden gehören mögen. Wir erkennen, daß aus 1., 2. immer nur Folgerungen von der Form $\alpha = \alpha$ entstehen, wo α eine Kombination der Dinge 1, $=$ ist. Die Axiome 1., 2. sind auch ihrerseits gegenüber der getroffenen Verteilung der Dinge in die zwei Klassen erfüllt, d. h. richtige Aussagen, und wegen dieser Eigenschaft der

Axiome 1., 2. bezeichnen wir den durch dieselbe definierten Begriff $=$ (gleich) als einen *widerspruchsfreien* Begriff.

Ich möchte darauf aufmerksam machen, daß die Axiome 1., 2. eine Aussage von der Form $\bar{a}$, d. h. eine Aussage, wonach eine Kombination in der Klasse der Nichtseienden vorkommen soll, überhaupt nicht enthalten. Wir würden also auch den Axiomen genügen können, indem wir die Kombinationen der zwei einfachen Dinge sämtlich in die Klasse der Seienden aufnehmen und die Klasse der Nichtseienden leer ließen. Die vorhin gewählte Verteilung in die zwei Klassen zeigt jedoch besser, wie man in den späteren schwierigeren Fällen zu verfahren hat.

Wir führen jetzt den Bau der logischen Grundlagen des mathematischen Denkens weiter, indem wir zu den zwei Gedankendingen 1, $=$ die drei weiteren Gedankendinge $\mathfrak{u}$ (unendliche Menge, Unendlich), $\mathfrak{f}$ (Folgendes), $\mathfrak{f}'$ (begleitende Operation) hinzufügen und für dieselben die folgenden Axiome festsetzen:

$$3.\quad \mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}(\mathfrak{f}'x)$$

$$4.\quad \mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{f}(\mathfrak{u}y) \mid \mathfrak{u}x = \mathfrak{u}y$$

$$5.\quad \overline{\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}1}$$

Dabei bedeutet die Willkürliche x (im Sinne von $x^{(u)}$) jedes der fünf jetzt zugrunde liegenden Gedankendinge und jede Kombination derselben. Das Gedankending $\mathfrak{u}$ werde kurz *unendliche Menge* und die Kombination $\mathfrak{u}x$ (z. B. $\mathfrak{u}1$, $\mathfrak{u}(11)$, $\mathfrak{u}\mathfrak{f}$) ein *Element* dieser unendlichen Menge $\mathfrak{u}$ genannt. Das Axiom 3. drückt dann aus, daß auf jedes Element $\mathfrak{u}x$ ein bestimmtes Gedankending $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x)$ folgt, welches einem Element der Menge $\mathfrak{u}$, nämlich dem Element $\mathfrak{u}(\mathfrak{f}'x)$ gleich ist, d. h. ebenfalls der Menge $\mathfrak{u}$ angehört. Das Axiom 4. spricht die Tatsache aus, daß, wenn auf zwei Elemente der Menge $\mathfrak{u}$ das gleiche Element folgt, jene Elemente ebenfalls einander gleich sind. Nach Axiom 5. gibt es in $\mathfrak{u}$ kein Element, dem das Element $\mathfrak{u}1$ folgt; dieses Element $\mathfrak{u}1$ heiße daher das erste Element in $\mathfrak{u}$.

Wir haben nun die Axiome 1.—5. der entsprechenden Untersuchung zu unterwerfen, wie vorhin die Axiome 1., 2.; dabei ist zu beachten, daß jene Axiome 1., 2. zugleich eine Erweiterung ihrer Gültigkeit erfahren, insofern nunmehr die Willkürlichen x, y beliebige Kombinationen der fünf zugrunde liegenden einfachen Dinge bedeuten.

Wir fragen wiederum, ob gewisse Folgerungen aus den Axiomen 1. bis 5. einen Widerspruch bilden oder ob im Gegenteil die zugrunde gelegten fünf Gedankendinge 1, $=$, $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ und deren Kombinationen sich in die Klasse der Seienden und die Klasse der Nichtseienden verteilen lassen derart, daß die Axiome 1.—5. dieser Klasseneinteilung gegenüber sich erfüllen, d. h. jede Folgerung aus jenen Axiomen zu einer richtigen Aussage gegenüber jener Klasseneinteilung wird. Zur Beantwortung dieser Frage berücksichtigen wir, daß das Axiom 5. das einzige ist, welches zu Aussagen von der Form $\bar{a}$, d. h. daß eine Kombination a der fünf zugrunde liegenden Gedankendinge zur Klasse der Nichtseienden gehören soll, Anlaß gibt. Aussagen, die mit 5. einen Widerspruch bilden, müssen daher jedenfalls von der Form

$$6. \quad \mathfrak{f}(\mathfrak{u}x^{(o)}) = \mathfrak{u}1$$

sein; eine solche Folgerung aber kann aus den Axiomen 1.—4. auf keine Weise entstehen.

Um dies einzusehen, bezeichnen wir die Gleichung, d. h. das Gedankending $a = b$ als eine homogene Gleichung, wenn sowohl a wie b Kombinationen von je zwei einfachen Dingen sind, ebenso wenn a und b beide irgendwelche Kombinationen von je drei oder beide irgendwelche Kombinationen von je vier oder mehr einfachen Dingen sind; beispielsweise heißen

$$(11) = (\mathfrak{f}\mathfrak{u}), \qquad (\mathfrak{f}\mathfrak{f} = (\mathfrak{u}\mathfrak{f}'), \qquad (\mathfrak{f}11) = (\mathfrak{u}1 =),$$
$$(\mathfrak{f}1)(\mathfrak{f}1) = (1111), \qquad (\mathfrak{f}(\mathfrak{f}\mathfrak{f}'\mathfrak{u})) = (1\mathfrak{u}\mathfrak{u}1),$$
$$((\mathfrak{f}\mathfrak{f})(111)) = ((1)(11)(11)), \qquad (\mathfrak{f}\mathfrak{u}111=) = (\mathfrak{u}\mathfrak{u}111\mathfrak{u})$$

homogene Gleichungen. Aus den Axiomen 1. und 2. allein folgen, wie wir vorhin gesehen haben, lauter homogene Gleichungen, nämlich die Gleichungen von der Form $\alpha = \alpha$. Ebenso liefert Axiom 3., wenn wir darin für x irgend ein Gedankending nehmen, nur homogene Gleichungen. Desgleichen weist Axiom 4. in der Behauptung gewiß stets eine homogene Gleichung auf, sobald die Voraussetzung eine homogene Gleichung ist und somit können überhaupt nur homogene Gleichungen als Folgerungen aus den Axiomen 1.—4. auftreten. Nun ist aber die Gleichung 6., die doch bewiesen werden sollte, gewiß keine homogene Gleichung, da man darin an Stelle von $x^{(o)}$ eine Kombination zu nehmen hat und dadurch die linke Seite eine Kombination von drei oder mehr einfachen Dingen wird, während die rechte Seite eine Kombination von den zwei einfachen Dingen $\mathfrak{u}$ und 1 bleibt.

Hiermit ist, wie ich glaube, der Grundgedanke, um die Richtigkeit meiner Behauptung zu erkennen, dargelegt; zur vollständigen Durchführung des Beweises bedarf es des Begriffes der endlichen Ordnungszahl und gewisser Sätze über den Begriff der Gleichzahligkeit, die man in der Tat an dieser Stelle schon ohne Mühe aufstellen und ableiten kann: man hat eben zur vollständigen Durchführung des dargelegten Grundgedankens noch diejenigen Gesichtspunkte zu berücksichtigen, auf die ich am Schlusse meines Vortrages (vgl. V.) noch kurz hinweisen will.

Die gewünschte Klasseneinteilung ergibt sich also, wenn man alle Dinge a, wo a eine Folgerung aus den Axiomen 1.—4. ist, zur Klasse der Seienden zählt und alle diejenigen Dinge in die Klasse der Nichtseienden aufnimmt, die mit diesen differieren, insbesondere die Dinge $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x) = \mathfrak{u}1$. Wegen der so gefundenen Eigenschaft der aufgestellten Axiome erkennen wir, daß dieselben überhaupt nie zu einem Widerspruch führen, und bezeichnen daher die durch dieselben definierten Gedankendinge $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ als widerspruchsfreie Begriffe oder Operationen oder als widerspruchsfrei existierend. Was insbesondere den Begriff des Unendlichen $\mathfrak{u}$ anbetrifft, so erscheint durch die oben angedeutete Darlegung die Behauptung der Existenz des Unendlichen $\mathfrak{u}$ gerechtfertigt; denn sie erhält jetzt eine bestimmte Bedeutung und einen später stets anzuwendenden Inhalt.

Die eben skizzierte Betrachtung bildet den ersten Fall, in dem es gelingt, den direkten Nachweis für die Widerspruchslosigkeit von Axiomen zu führen, während die sonst — inbesondere in der Geometrie — für solche Nachweise übliche Methode der geeigneten Spezialisierung oder Bildung von Beispielen hier notwendig versagt.

Daß dieser direkte Nachweis hier gelingt, ist, wie man sieht, wesentlich dem Umstande zu verdanken, daß eine Aussage von der Form $\bar{a}$, d. h. eine Aussage, wonach eine gewisse Kombination der Klasse der Nichtseienden angehören soll, nur an einer Stelle als Behauptung, nämlich in Axiom 5., auftritt.

Indem wir die bekannten Axiome für die vollständige Induktion in die von mir gewählte Sprache übertragen, gelangen wir in ähnlicher Weise zu der Widerspruchsfreiheit der so vermehrten Axiome, d. h. zum Beweise der widerspruchsfreien Existenz des sogenannten kleinsten Unendlich*) (d. h. des Ordnungstypus 1, 2, 3, $\cdots$).

Es bietet keine Schwierigkeit, den Begriff der endlichen Ordnungszahl nach den oben aufgestellten Prinzipien zu begründen; es geschehe dies auf Grund des Axioms, daß jede Menge, die das erste Element der Ordnungszahl und, falls ihr irgend eines angehört, auch das diesem folgende enthält, gewiß stets das letzte Element enthalten muß. Der Beweis der Widerspruchslosigkeit der Axiome erfolgt hier sehr leicht durch Heranziehung eines Beispiels, etwa der Zahl zwei. Es kommt dann darauf an zu zeigen, daß eine Anordnung der Elemente der endlichen Ordnungszahl möglich ist, so daß jede Teilmenge derselben ein erstes

*) Vgl. meinen auf dem Internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900 gehaltenen Vortrag: Mathematische Probleme, 2. Die Widerspruchslosigkeit der arithmetischen Axiome.

und ein letztes Element besitzt — eine Tatsache, die wir dadurch beweisen, daß wir ein Gedankending $<$ durch das Axiom

$$(x < y \text{ u. } y < z) \mid x < z$$

definieren und dann die Widerspruchsfreiheit der aufgestellten Axiome unter Hinzufügung dieses neuen Axiomes erkennen, sobald x, y, z willkürliche Elemente der endlichen Ordnungszahl bedeuten. Mit Benutzung der Tatsache der Existenz des kleinsten Unendlich folgt dann auch der Satz, daß zu jeder endlichen Ordnungszahl eine noch größere Ordnungszahl gefunden werden kann.

Die Prinzipien, die für den Aufbau und die weitere Ausführung der Gesetze des mathematischen Denkens in der beabsichtigten Weise maßgebend sein müssen, sind kurz folgende:

I. Auf einem bestimmten Standpunkt in der Entwicklung der Theorie angelangt darf ich eine weitere Aussage als richtig bezeichnen, sobald erkannt worden ist, daß sie als Axiom zu den bisher als richtig befundenen Aussagen hinzugefügt, keinen Widerspruch ergibt, d. h. zu Folgerungen führt, die gegenüber einer gewissen Verteilung der Dinge in die Klasse der Seienden und die der Nichtseienden sämtlich richtige Aussagen sind.

II. In den Axiomen vertreten die Willkürlichen — als Ersatz für den Begriff „jedes" oder „alle" in der üblichen Logik — nur diejenigen Gedankendinge und deren Kombinationen untereinander, die auf jenem Standpunkt zugrunde gelegt sind oder neu definiert werden sollen. Bei der Herleitung von Folgerungen aus den Axiomen dürfen daher die Willkürlichen, die in den Axiomen auftreten, nur durch solche Gedankendinge und deren Kombinationen ersetzt werden. Auch ist in gehöriger Weise zu berücksichtigen, daß durch die Zufügung und Zugrundelegung eines neuen Gedankendinges die bisherigen Axiome eine Erweiterung ihrer Gültigkeit erfahren bez. einer sinngemäßen Abänderung zu unterwerfen sind.

III. Die Menge ist allgemein als ein Gedankending m definiert und die Kombinationen mx heißen die Elemente der Menge m, so daß also — im Gegensatz zu der üblichen Auffassung — der Begriff des Elementes einer Menge erst als späteres Erzeugnis des Mengenbegriffes selbst erscheint.

Genau so wie der Begriff „Menge" sind auch „Zuordnung", „Transformation", „Beziehung", „Funktion" Gedankendinge, für die, genau wie vorhin mit dem Begriff „Unendlich" geschehen ist, die passenden Axiome in Ansatz zu bringen sind und die dann im Falle der Möglichkeit der Verteilung der betreffenden Kombinationen in die Klasse der Seienden und die der Nichtseienden als widerspruchslos existierend erkannt werden können.

In I. kommt das schöpferische Prinzip zum Ausdruck, das uns im freiesten Gebrauch zu immer neuen Begriffsbildungen berechtigt mit der einzigen Beschränkung der Vermeidung eines Widerspruchs. Die zu Anfang dieses Vortrages erwähnten Paradoxien werden durch II. und III. unmöglich; insbesondere gilt dies von dem Paradoxon der Menge aller sich nicht selbst als Element enthaltenden Mengen.

Um die weitgehende inhaltliche Übereinstimmung des in III. definierten Mengenbegriffes mit dem üblichen Mengenbegriffe erkennen zu lassen, beweise ich folgenden Satz:

Es seien auf einem bestimmten Standpunkte in der Entwicklung $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}$ die zugrunde liegenden Gedankendinge und $a(\xi)$ eine Kombination derselben, die die Willkürliche ξ enthält; ferner sei $a(\alpha)$ eine richtige Aussage (d. h. $a(\alpha)$ in der Klasse der Seienden): alsdann existiert gewiß ein Gedankending m von der Art, daß $a(mx)$ für die Willkürliche x lauter richtige Aussagen darstellt (d. h. $a(mx)$ immer in der Klasse der Seienden sich befindet) und auch umgekehrt jedes Ding ξ, für welches $a(\xi)$ eine richtige Aussage darstellt, einer Kombination $mx^{(o)}$ gleich wird, so daß die Aussage

$$\xi = mx^{(o)}$$

richtig ist, d. h. die Dinge ξ, für die $a(\xi)$ eine richtige Aussage wird, bilden die Elemente einer Menge m im Sinne obiger Definition.

Zum Beweise stellen wir das folgende Axiom auf: es ist m ein Gedankending, für welches die Aussagen

$$7. \quad a(\xi) \,|\, m\xi = \xi$$

$$8. \quad \overline{a(\xi)} \,|\, m\xi = \alpha$$

richtig sind, d. h. wenn ξ ein Ding ist, derart, daß $a(\xi)$ zur Klasse der Seienden gehört, so soll $m\xi = \xi$, sonst $m\xi = \alpha$ gelten, fügen dieses Axiom zu den Axiomen hinzu, die für die Dinge $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}$ gelten, und nehmen dann an, daß dadurch ein Widerspruch zustande komme, d. h. daß für die Dinge $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{k}, m$ etwa die Aussagen

$$p(m) \quad \text{und} \quad \overline{p(m)}$$

zugleich Folgerungen seien, wo $p(m)$ eine gewisse Kombination der Dinge $1, \cdots, \mathfrak{k}, m$ ist. Dabei bedeutet 8. in Worten die Festsetzung $m\xi = \alpha$, wenn $a(\xi)$ zur Klasse der Nichtseienden gehört. Überall, wo in $p(m)$ das Ding m in der Kombination $m\xi$ auftritt, ersetze man den Axiomen 7. und 8. entsprechend und mit Rücksicht auf 2. die Kombination $m\xi$ durch ξ bez. α; aus $p(m)$ entstehe auf diese Weise $q(m)$ (wo nun $q(m)$ das Ding m nicht mehr in einer Kombination mx enthält), dann müßte $q(m)$ eine Folgerung aus dem ursprünglich zugrunde liegenden Axiome für $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{f}$ sein und mithin auch richtig bleiben, wenn wir für m irgend eines dieser Dinge etwa das Ding 1 nehmen. Da die nämliche Überlegung auch für die Aussage $\overline{p(m)}$ gilt, so wäre also auch auf dem ursprünglichen Standpunkte bei Zugrundelegung der Dinge $1, \cdots, \alpha, \cdots, \mathfrak{f}$ der Widerspruch

$$q(1) \quad \text{und} \quad \overline{q(1)}$$

vorhanden, was nicht sein kann — vorausgesetzt, daß die Dinge $1, \cdots, \mathfrak{f}$ widerspruchsfrei existieren. Wir müssen also unsere Annahme, daß ein Widerspruch zustande komme, verwerfen, d. h. m existiert widerspruchsfrei, was zu beweisen war.

IV. Wenn man ein bestimmt vorgelegtes System von Axiomen nach den obigen Prinzipien untersuchen will, so hat man die Kombinationen der zugrunde liegenden Dinge in die zwei Klassen, die der Seienden und die der Nichtseienden zu verteilen, wobei den Axiomen die Rolle von Vorschriften zufällt, denen die Verteilung genügen muß. Die Hauptschwierigkeit wird darin bestehen, die Möglichkeit der Verteilung aller Dinge in die zwei Klassen, die der Seienden und die der Nichtseienden, zu erkennen. Die Frage nach der Möglichkeit dieser Verteilung ist wesentlich gleichbedeutend mit der Frage, ob die Folgerungen, die man aus den Axiomen durch Spezialisierung und Verbindung in dem früher erläuterten Sinne gewinnen kann, zu einem Widerspruch führen oder nicht, wenn man noch die bekannten logischen Schlußweisen wie

$$\{(a \mid b) \text{ u. } (\bar{a} \mid b)\} \mid b$$
$$\{(a \text{ o. } b) \text{ u. } (a \text{ o. } c)\} \mid \{a \text{ o. } (b \text{ u. } c)\}$$

hinzunimmt. Die Widerspruchslosigkeit der Axiome kann dann entweder so erkannt werden, daß man zeigt, wie ein etwaiger Widerspruch sich schon auf einem früheren Standpunkt in der Entwicklung der Theorie zeigen müßte, oder indem man die Annahme macht, es gäbe einen Beweis, der aus den Axiomen auf einen bestimmten Widerspruch führt, und alsdann dartut, daß ein solcher Beweis nicht möglich ist, nämlich in sich einen Widerspruch enthielte. So lief ja auch der vorhin skizzierte Beweis für die widerspruchsfreie Existenz des Unendlichen darauf hinaus, zu erkennen, daß ein Beweis für die Gleichung 6. aus den Axiomen 1.—4. nicht möglich ist.

V. Wenn im Bisherigen von mehreren Gedankendingen, Kombinationen, Kombinationen mehrfacher Art oder mehreren Willkürlichen die Rede war, so sollte dabei stets eine begrenzte Anzahl solcher

Dinge gemeint sein. Nach Aufstellung der Definition der endlichen Zahl sind wir imstande, jene Ausdrucksweise in ihrer allgemeinen Bedeutung zu fassen. Auch die Bedeutung der „beliebigen" Folgerung und des „Differierens" einer Aussage mit allen Aussagen von gewisser Art ist nunmehr auf Grund der Definition der endlichen Zahl — der Idee der vollständigen Induktion entsprechend — durch ein rekurrentes Verfahren einer exakten Beschreibung fähig. So ist dann auch die vollständige Durchführung des vorhin angedeuteten Beweises zu denken, daß die Aussage $\mathfrak{f}(\mathfrak{u}x^{(o)}) = \mathfrak{u}1$ von jeder Aussage differiert, die durch eine endliche Anzahl von Schritten als Folgerung aus den Axiomen 1.—4. entsteht: man hat eben den Beweis selbst als ein mathematisches Gebilde, nämlich eine endliche Menge zu betrachten, deren Elemente durch Aussagen verbunden sind, die zum Ausdruck bringen, daß der Beweis aus 1.—4. auf 6. führt, und man hat dann zu zeigen, daß ein solcher Beweis einen Widerspruch enthält und also nicht in unserem definierten Sinne widerspruchsfrei existiert.

Ähnlich wie die Existenz des kleinsten Unendlich bewiesen werden kann, folgt die Existenz des Inbegriffs der reellen Zahlen: in der Tat sind die Axiome, wie ich sie für die reellen Zahlen aufgestellt habe*), genau durch solche Formeln ausdrückbar, wie die bisher aufgestellten Axiome. Was insbesondere dasjenige Axiom betrifft, das ich das Vollständigkeitsaxiom genannt habe, so bringt dasselbe zum Ausdruck, daß der Inbegriff der reellen Zahlen im Sinne der umkehrbar eindeutigen elementweisen Beziehbarkeit jede andere Menge enthält, deren Elemente ebenfalls die vorangehenden Axiome erfüllen; in dieser Auffassung wird auch das Vollständigkeitsaxiom eine durch Formeln von obiger Bauart ausdrückbare Forderung und die Axiome für den Inbegriff der reellen Zahlen unterscheiden sich qualitativ in keiner Hinsicht etwa von den zur Definition der ganzen Zahlen notwendigen Axiomen. In der Erkenntnis dieser Tatsache liegt, wie ich meine, die sachliche Widerlegung der von L. Kronecker vertretenen und zu Anfang meines Vortrages als dogmatisch bezeichneten Auffassung der Grundlagen der Arithmetik.

In gleicher Weise zeigt sich, daß den Grundbegriffen der Cantorschen Mengenlehre, insbesondere den Cantorschen Alefs die widerspruchsfreie Existenz zukommt.

---

*) Grundlagen der Geometrie, zweite Auflage, Leipzig 1903, S. 24—26