# INAUGURAL-DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Helmut Hetznecker
aus Regensburg

Tag der mündlichen Prüfung: 25. Juni 2001

# Die Entstehungsgeschichte der dichten Kerne von Cdm-Halos

Gutachter: Priv.-Doz. Dr. Andreas Burkert
Prof. Dr. Immo Appenzeller

## Die Entstehungsgeschichte der dichten Kerne von CDM-Halos

Im Zusammenhang mit der zentralen Struktur Dunkler Halos gibt es einander widersprechende Aussagen aus numerischen Simulationen und der Beobachtung von galaktischen Rotationskurven. Während in theoretischen Arbeiten übereinstimmend singuläre Dichteprofile $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$ mit $\alpha \geq 1$ in Zentrumsnähe gefunden wurden, sprechen Beobachtungen für Innenbereiche mit konstanter Dichte. Verschiedene Versuche seitens der Theorie, durch modifizerte Modelle der Haloformation oder veränderter Eigenschaften der Dunklen Materie die beobachtete Struktur zu rekonstruieren sind bis heute gescheitert. In der vorliegenden Arbeit soll im Rahmen kosmologischer $N$-Körper-Simulationen untersucht werden, wie sich eine lokal begrenzte Veränderung der kosmologischen Anfangsbedingungen auf die Struktur der Dunklen Halos bei $z = 0$ auswirkt. Dazu wurde mit Hilfe eines bereits vorhandenen *hierarchischen Treecodes*, der um die Möglichkeit eines expandierenden Simulationsvolumens erweitert wurde, und der Spezial-Hardware GRAPE eine Reihe von Simulationen mit unterschiedlichen kosmologischen Parametern durchgeführt, und darin eine Anzahl hinreichend aufgelöster Dunkler Halos identifiziert. Wie sich zunächst zeigte, stammt die Materie, die die Halozentren besiedelt stets aus primordialen Gebieten mit lokal maximaler Dichte. Dies gilt gleichermaßen für Halos, die in ihrer Entwicklung einen oder mehrere ,,equal mass merger" erleiden, wie auch für solche, die vornehmlich durch den dynamisch weniger komplexen Vorgang der kontinuierlichen Akkretion von Materie entstehen. Bei einer Anzahl zufällig ausgewählter Vertreter beider Klassen wurden die Geschwindigkeitsvektoren der ,,Kernmaterie" bei hoher Rotverschiebung in willkürlicher Weise verändert und unter sonst identischen Bedingungen wiederholt simuliert. Wie sich zeigte, nimmt eine derartige lokale Veränderung der Anfangsbedingungen einen kaum merklichen Einfluss auf die zentrale Struktur Dunkler Halos. Die Effektivität ,,heftiger Relaxation" ist offensichtlich hoch genug, um das wiederholt gefundene universelle Dichteprofil zu erzeugen. Ein Lösung des Dichteproblems der Halozentren kann auf diesem Wege nicht erreicht werden.

## The Formation History of the Dense Cores of CDM-Halos

Concerning the central structure of dark matter halos, there are inconsistent statements coming from numerical simulations and observations of galactic rotation curves. While theoretical work finds singular density profiles $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$ with $\alpha \geq 1$ near the center, observations argue for central regions with constant densities. Various attempts on the part of theory to reproduce the observed structure by modified models of halo formation and evolution have failed until now. The aim of the present work is to investigate the effect of a locally restricted modification of the cosmological initial conditions on the structure of dark haloes at $z = 0$, using cosmological $N$-body simulations. For this purpose a series of simulations has been carried out using an already available *hierarchical Treecode* — which was extended to treat comoving coordinates — and the special purpose hardware GRAPE. As it turns out, the matter which occupies the halo centers always originates from primordial regions of local maximum density. This is valid for halos suffering a number of "equal mass mergers" during their formation as well as for those which form primarily by the dynamically less complex process of continuous accretion. The simulations were repeated under identical conditions for a randomly chosen number of haloes of either class with only the velocity vectors of the "core matter" arbitrarily modified. We find that such a local modification of the initial conditions does not noticeably affekt the inner structure of dark haloes. The effectiveness of "violent relaxation" is obviously high enough to produce the universal numerical density profile. Hence, a solution to the density problem of the halo centers is unreachable this way.

SOKRATES: *Man wird zwar die Gestirne, diese Zierden des Himmels, für das Schönste und Regelrechteste halten unter allem Sichtbaren, aber da sie nun mal im* Sichtbaren *gebildet sind, so wird man zugeben, dass sie weit hinter dem Wahrhaften zurückbleiben, nämlich hinter dem, in welchem sich die Geschwindigkeit, welche ist, und die Langsamkeit, welche ist, nach der wahrhaften Zahl und allen wahrhaften Figuren gegeneinander bewegen und, was darin ist, mit sich führen. Dies ist denn nur mit dem Verstand zu fassen, nicht durch das Gesicht. Oder meinst du etwa?*

GLAUKON *Nimmermehr.*

PLATON, *Der Staat*, VII, 529c-d

# Inhaltsverzeichnis

# Einleitung

Das gegenwärtige Bild der Kosmologie ist in zahlreichen Aspekten geprägt vom Begriff der *Dunklen Materie*. Vertraut man der seit langem etablierten Theorie der primordialen Synthese der leichten Elemente, so liefert baryonische Materie einen Anteil von höchstens 5% der kritischen Dichte des Universums. Sowohl neuere Beobachtungen, wie etwa diejenigen im Rahmen des *Supernova Cosmology Projects*, als auch die Theorie der kosmischen Inflation sprechen klar für einen höheren Anteil der gesamten Materie an der kritischen Dichte. Jedes Modell der Bildung großskaliger kosmologischer Strukturen ohne Dunkle Materie widerspräche den COBE-Beobachtungen von 1992, wonach die Amplituden der Temperaturfluktuationen in der kosmischen Hintergrundstrahlung lediglich von der Größenordnung $\delta\rho/\rho \approx 10^{-5}$ sind. Im Hinblick darauf wäre nach gegenwärtiger Auffassung eine Ausbildung kosmologischer Strukturen mit ihren heute zu beobachtenden Dichtekontrasten ohne die ,,Hilfe" Dunkler Materie nicht denkbar.

In ebenso deutlicher Weise sprechen Beobachtungen von eher ,,extragalaktischer" denn kosmologischer Natur für die überragende Bedeutung der Dunklen Materie. So ist die Dynamik von Galaxienhaufen nur zu verstehen unter der Annahme einer gemeinsamen, gravitativ dominierenden Komponente, in die die sichtbaren Galaxien quasi eingebettet sind. Schließlich — und damit nähern wir uns dem Gegenstand der vorliegenden Arbeit — sind die flachen Rotationsprofile der sichtbaren Komponenten von Scheibengalaxien nicht durch den alleinigen Einfluss ihrer selbst zu erklären. Es gilt längst als gesichert, dass diese Scheiben nur einen Bruchteil der Materie eines vielfach massiveren Systems darstellen; den dominierenden Anteil bildet ein Halo jener Dunklen Materie.

Die Struktur Dunkler Halos, insbesondere der radiale Verlauf ihrer Dichte, ist bis heute nicht vollständig geklärt. Auf Navarro et al. (1996b, 1997) geht die Auffassung zurück, dass die Dichteprofile aller Dunkler Halos eine Ein-Parameter-Familie bilden und damit durch eine universelle Funktion beschreibbar sind. Nahezu allen Arbeiten auf der Grundlage numerischer Simulationen hierzu stellen fest, dass die Dichte in der Umgebung des Zentrums gemäß $\rho(r) \propto r^{-\alpha}$ rapide ansteigt, wobei $\alpha \geq 1$. Im Gegensatz dazu scheinen zahlreiche Messungen von Rotationskurven — insbesondere von Dunkle-Materie-dominierten Zwerggalaxien — darauf hin zu deuten, dass die Dichten in den Halozentren von konstantem Wert sind. Theorie und Beobachtung wiedersprechen einander in diesem Punkte. Entsprechend groß sind bis heute die Bemühungen, zu einem einheitlichen Bild zu gelangen. Sämtliche Versuche, die Theorie der Entwicklung der Dunklen Halos so zu ergänzen oder zu modifizieren, dass die zentrale Singularität in der Dichte vermieden werden könnte, waren letztlich zum Scheitern verurteilt. Dabei konzentrieren sich Ideen im Wesentlichen auf die ungeklärte Natur der Dunklen Materie und ihrer dynamischen Eigenschaften.

In der hier vorliegenden Arbeit soll untersucht werden, inwieweit eine Einflussnahme auf die zentrale Struktur Dunkler Halos möglich ist durch gezielte lokale Veränderungen der

Anfangsbedingungen — also der Phasenraumverteilung der Dunklen Materie bei sehr hoher Rotverschiebung. Dabei ist es zunächst unwesentlich, ob und wie die konkrete Umverteilung der Dunklen Materie im Phasenraum physikalisch motiviert ist; vielmehr kommt es darauf an, den prinzipiellen Effekt solch einer Einflussnahme zu untersuchen, um gegebenenfalls darauf gründend die beobachtete Struktur Dunkler Halos im Rahmen kosmologischer Simulationen konsistent zu erhalten. Damit eng verbunden ist die Frage nach der kosmologischen Herkunft der Materie in den Halozentren. Es wurde untersucht, welcher Zusammenhang zwischen jener Materie und dem Dichtefeld des frühen Universums besteht. Dies ist nötig, um ausgezeichnete Gebiete zu definieren, in denen die Anfangsbedingungen sinnvoller Weise zu ändern sind.

Als ,,Versuchsplattformen" hierfür dienen, wie schon angedeutet, kosmologische Simulationen von stoßfreier, kalter Dunkler Materie. Trotz der weitgehend unbekannten Natur der Dunklen Materie, herrscht doch ein allgemeiner Konsens darüber, dass es sich bei ihr um ein stoßfreies System handelt, dessen Dynamik allein durch den Einfluss eines selbstkonsistenten globalen Potenzials bestimmt wird. Dank der dominierenden Rolle der Dunklen Materie kann im Rahmen kosmologischer Rechnungen in guter Näherung darauf verzichtet werden, die kompliziertere Physik ,,sichtbarer" Materie mit einzubeziehen. Für die Durchführung von Stoßfreien Simulationen standen am Max-Planck-Institut für Astronomie der *Barnes-Hut-Treecode* zur Verfügung sowie mehrere Boards der Spezial-Hardware GRAPE. Eine Kombination beider Komponenten ermöglicht numerische $N$-Körper-Simulationen mit bis zu $3 \times 10^6$ Teilchen — innerhalb eines Zeitraums von allerdings mehreren Wochen. Hier gilt es, einen Kompromiss zwischen hoher numerischer Auflösung und einem realistischen Zeitaufwand einzugehen.

Dem kosmologischen Rahmenmodell gilt ein hohes Maß an Aufmerksamkeit in der vorliegenden Arbeit. Das CDM-Paradigma — das ,,bottom-up"-Modell hierarchischer Strukturbildung mit kalter Dunkler Materie — stellt bis dato das erfolgreichste Rahmenmodell zur Strukturformation dar. Seine Schwächen sind dennoch unübersehbar, wenn man die Ausprägung kleinskaliger Strukturen im Modell mit der Beobachtung konfrontiert. Denn offensichtlich liegt etwa die tatsächliche Häufigkeit von Zwerggalaxien, wie man sie z.B. in der Lokalen Gruppe zählt, um einen Faktor von mehr als $10^2$ unter dem, was aufgrund von CDM-Simulationen zu erwarten wäre. Ebenso könnte das Problem der überdichten Halozentren – wie schon erwähnt — eine Unzulänglichkeit des CDM-Modells sein.

Beobachtungsergebnisse aus verschiedenen Projekten haben in den letzten 3 Jahren der Kosmologischen Konstante zu einer Renaissance verholfen, mit der Konsequenz, dass das bisherige CDM-Standard-Modell mit den Parametern $\Omega_{matter} = 1$ und $\Lambda = 0$ abgelöst wurde durch ein Modell mit den Parametern $\Omega_{matter} = 0.3$ und $\Lambda = 0.7$. Dem wurde in der vorliegenden Arbeit Rechnung getragen.

Die Arbeit widmet sich zunächst in der notwendigen Ausführlichkeit dem allgemeinen kosmologischen Rahmenmodell (Kap. 1), bevor in einem eigenem Abschnitt die Theorie der Strukturbildung zu erläutern ist (Kap. 2). Ein weiteres Kapitel widmet sich anschließend der Physik stoßfreier $N$-Körper-Systeme, den Grundlagen zu ihrer Untersuchung mit Hilfe numerischer Simulationen sowie den kosmologischen Anfangsbedingungen (Kap. 3). Im Hauptabschnitt (Kap. 4) wird ausführlich auf das Problem der dichten Halozentren eingegangen, bevor die Ergebnisse der verschiedenen numerischen Simulationen eingehend diskutiert werden. Eine kurze Zusammenfassung sowie ein Ausblick auf weitergehende Fragen bilden den Abschluss der Arbeit.

Vor dem Einstieg in die eigentliche Arbeit, ist es mir ein Anliegen, einige Bemerkungen über den manchmal leidigen Gebrauch der Sprache zu verlieren. Der vorliegende Gegenstand und — vor allem — die Gewohnheit bringen es mit sich, dass Vieles am besten und bequemsten durch den Gebrauch der in der Branche etablierten englischsprachigen Begriffe zu bezeichnen ist. Meist lassen sich die geläufigen englischen Fachbegriffe ohnehin nur schwer übersetzen. Ein allzu hemmungsloses Durcheinenader von deutschem und fremdsprachigem Vokabular gilt indes als ,,schlechter Stil". Nachdem ich anfangs bemüht war, dieser Regel soweit möglich Rechnung zu tragen, habe ich mich mit fortschreitender Dauer der Niederschrift gänzlich davon verabschiedet, da die Lage hoffnungslos zu werden schien...

Dieselbe Zunahme an Gleichgültigkeit wird man bei der Beachtung der neuen Rechtschreibregeln finden. Hiervon habe ich letztlich nur übernommen, was mir sinnvoll erscheint, bzw. was ich verstanden habe.

Branchenübliche Abkürzungen englischer Begriffe (wie etwa CDM, HDM FOF, ...) wurden unverändert übernommen und stets in SMALL CAPITALS gesetzt. Ein Überblick über die verwendeten Abkürzungen soll diese Einleitung abschließen.

| | |
|---|---|
| CDM | Cold Dark Matter |
| CMB | Cosmic Microwave Background |
| COBE | Cosmic Microwave Background Explorer |
| DM | Dunkle Materie |
| GRAPE | Gravity Pipeline |
| HDM | Hot Dark Matter |
| ΛCDM | CDM-Modell mit Kosmologischer Konstante |
| LSB | Low Surface Brightness |
| MACHOs | Massive Cold Halo Objects |
| NFW | Navarro-Frenk-White |
| OCDM | CDM-Modell mit offener Geometrie |
| PS | Press-Schechter |
| RWM | Robertson-Walker-Metrik |
| SCDM | Standard CDM-Modell |
| WIMPs | Weakly Interacting Massive Particles |

# Kapitel 1

# Der kosmologische Rahmen

Das Verständnis der Eigenschaften von Galaxien und den sie umgebenden Dunklen Halos setzt eine detaillierte Kenntnis der Entwicklung des Kosmos als Ganzem voraus. Während der Epoche der Inflation werden nach heutiger Ansicht die makroskopischen Fluktuationen des Dichtefeldes generiert. Die anschließende Entwicklung des Dichtekontrastes hängt maßgeblich vom Zustand der Materie und ihrer Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld ab. Solange die baryonische Materie in ionisierter Form existiert kann der Dichtekontrast lediglich der *Dunklen* Materie anwachsen. Nach der Entkopplung von Strahlung und Materie ist unter anderem die Expansionsrate des Universums dafür verantwortlich, bei welchen Rotverschiebungen Objekte bestimmter Masse das Universum bevölkern.

In diesem einführenden Abschnitt sollen die theoretischen Grundlagen in ihren wesentlichen Zügen dargestellt werden. Besonderes Augenmerk wird dabei auf Aspekte gerichtet, die für die Bildung kosmischer Strukturen relevant sind. Andere wichtige Themen, wie die primordiale Nukleosynthese oder Alternativen zur Inflation (kosmische Strings), müssen hier weitgehend unberücksichtigt bleiben.

## 1.1 Das kosmologische Standardmodell

Grundlage für das Gebäude der modernen Kosmologie ist das Konzept des sog. *heißen Urknalls*. Für die Annahme, dass das Universum in einem Zustand unendlich hoher Dichte und Temperatur seinen Anfang nahm, liegen verschiedene Hinweise vor. (1) E. Hubble bewies Ende der 20er Jahre die Existenz extragalaktischer Objekte sowie die Expansion des Universums (Hubble & Humason, 1931). (2) Der kosmische Mikrowellen-Hintergrund (CMB, *C*osmic *M*icrowave *B*ackground) liefert als nahezu perfekte Schwarzkörperstrahlung einen entscheidenden Hinweis auf die Existenz eines frühen heißen sowie hochgradig homogenen Zustandes des Universums im thermodynamischen Gleichgewicht. (3) Die letztgenannte Annahme rechtfertigt eine Anwendung der einfachen thermodynamischen Gesetze, um die Synthese der Elemente zu rekonstruieren (siehe etwa Wagoner et al., 1967). Die theoretischen Vorhersagen stimmen sehr gut mit den beobachteten Häufigkeiten von Wasserstoff, Helium und weiterer leichter Elemente überein. (4) Schließlich erlaubt die Entdeckung[1] der bereits früher postulierten kleinen Fluktuationen (Bennett et al., 1996) im sonst isotropen Mikrowellen-Hintergrund die Rekonstruktion der Bildung kosmischer Strukturen im Rahmen des Urknall-Modells.

[1]1992 durch den Forschungssatelliten **COBE** (**CO**smic **B**ackground **E**xplorer)

Das Konzept des heißen Urknalls hat sich im Laufe der Jahrzehnte als unumstrittenes Rahmenmodell in der Kosmologie etabliert.

### 1.1.1 Das Friedmann-Lemaitre-Universum

Am Anfang aller mathematischen Kosmologie stehen die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie. Sie stellen einen Zusammenhang her zwischen einer Massenverteilung, ausgedrückt durch den Energie-Impulstensor $T_{ik}$ und der Geometrie (bzw. der Metrik $g_{\mu\nu}$) der Raumzeit:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{1.1}$$

mit $\kappa = 8\pi G c^{-1}$. Hier ist $G = 6.672 \times 10^{-11} \mathrm{Nm}^2 \mathrm{kg}^{-2}$ die Gravitationskonstante und $c \approx 3 \times 10^8 \mathrm{ms}^-1$ die Lichtgeschwindigkeit. Der *Riemannsche Krümmungstensor* $R_{\mu\nu}$ und der *Ricci-Skalar* $R$ sind Funktionen der Metrik. Eine Ableitung der Feldgleichungen findet sich bei Fließbach (1998). Einführungen in die Gebiete der Riemannschen Geometrie und der Allgemeinen Relativitätstheorie geben z.B. Islam (1992), Sexl & Urbantke (1975) oder Fließbach (1998).

Gleichung (1.1) ersetzt die Potenzialgleichung der Newtonschen Theorie und stellt ein System von 10 partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung zur Bestimmung der Metrik $g_{\mu\nu}$ dar. (*Zehn* Gleichungen, denn $\mu, \nu = \{0, 1, 2, 3\}$ und aufgrund der Isotropie des Raumes ist der metrische Tensor symmetrisch. 6 der 16 Gleichungen kommen deshalb doppelt vor.) Die Gleichungen sind nichtlinear in der 1. Ableitung, was das Finden exakter Lösungen sehr erschwert. Der physikalische Grund für die Nichtlinearität der Theorie ist (wie auch bei der starken Wechselwirkung) die Tatsache, dass das Feld mit sich selbst wechselwirkt.

Einer Beschreibung der Dynamik des Universums im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie geht eine fundamentale Annahme voraus, die man als *kosmologisches Prinzip* bezeichnet. Es postuliert, dass das Universum auf hinreichend großen Skalen *überall* isotrop und homogen[2] ist. Diese Annahme wird unter anderem durch die außerordentliche Isotropie der kosmischen Hintergrundstrahlung gestützt. Das kosmologische Prinzip ist die einzige Randbedingung, der die Wahl des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$ — also der Massenverteilung — in Gl. (1.1) unterliegt. Die Translations- und Rotations-Invarianz gilt ebenso für die Krümmung[3] des Raumes. Bei der Suche nach einer Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen kommt also nur eine Metrik $g_{\mu\nu}$ für die vierdimensionale Raumzeit in Betracht, die eine konstante Krümmung im dreidimensionalen Unterraum beschreibt („maximal symmetrischer Unterraum"). Im Zweidimensionalen gibt es genau drei maximal symmetrische Räume, die Fläche konstanter positiver, negativer und verschwindender Krümmung (also Kugelfläche, Hyperboloid und Ebene; diese Flächen besitzen keine ausgezeichneten Punkte). Auch in drei Dimensionen gibt es gerade drei Unterräume mit diesen Eigenschaften. Die allgemeinste Metrik $g_{\mu\nu}$, die dieser Randbedingung genüge leistet ist die *Robertson-Walker-Metrik* (RWM) mit dem Weg- oder *Linien*element

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2 \Theta d\phi^2 \right]. \tag{1.2}$$

[2] Genau genommen impliziert Isotropie *überall* bereits Homogenität

[3] Genauer: *intrinsische* Krümmung. Für eine sehr anschauliche Erklärung des Begriffes der Krümmung siehe etwa Fließbach (1998, Kap. 13). Für eine strengere Einführung siehe Fließbach (1998, Kap. 18) oder Sexl & Urbantke (1975)

Als Zeitkoordinate $t$ dient dabei die Eigenzeit eines frei fallenden Körpers. Den genaueren Weg der Herleitung zeigt Islam (1992). Die sphärischen Koordinaten $(r, \Theta, \phi)$, die die Positionen im Raum beschreiben, nehmen dabei an der kosmischen Expansion teil, d.h. sie sind für Objekte, die keine vom Hubble-Fluss[4] verschiedene Pekuliargeschwindigkeit haben zeitlich konstant („mitbewegte Koordinaten"). Physikalische Distanzen zum Zeitpunkt $t$ können dann durch $d(t) = a(t)r$ ausgedrückt werden. Der Parameter $k$ kann die Werte $k = 0, -1, 1$ annehmen und führt zu den erwähnten unterschiedlich gekrümmten Räumen[5]. $a(t)$ heißt *Skalenfaktor* und beschreibt die Änderung der physikalischen Abstände mit der Zeit $t$. Konventionell gilt $a(t_0) = 1$, wobei $t_0$ den heutigen Zeitpunkt bezeichnet[6]

### Die Friedmann-Gleichungen

Dem Linienelement (1.2) entspricht die Metrik

$$g = -a \times \mathrm{diag}(-c/a, (1 - kr^2)^{-1/2}, r, r \sin\Theta). \tag{1.3}$$

Setzt man diese als Lösungsansatz in die Einsteinsche Feldgleichung (1.1) ein, so sind fast alle resultierenden Gleichungen identisch erfüllt. Übrig bleiben lediglich zwei Differenzialgleichungen für den Skalenparameter $a$,

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a \left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) \quad \text{und} \tag{1.4}$$

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - kc^2. \tag{1.5}$$

Hier ist $\rho$ die Materie- und Strahlungsdichte des Universums und $p$ der Druck. Entsprechend der Eigenheiten der Allgemeinen Relativitätstheorie besitzt auch der Druck eine gravitative Wirkung (wenn auch in viel geringerem Maße als die Dichte). Interessant ist, dass die Friedmann-Gleichung sehr leicht aus der klassischen Newtonschen Mechanik hergeleitet werden kann, denn es handelt sich lediglich um eine Energiebilanz zwischen kinetischer- ($\dot{a}^2$) und potenzieller Energie ($8\pi G\rho/3$). $kc^2$ erscheint als Integrationskonstante.

Zur Lösung der Friedmann-Gleichungen benötigt man eine Zustandsgleichung $p(\rho)$. In seiner frühen Phase wird das Universum von Strahlung, d.h. Photonen und relativistischen Teilchen dominiert. Die Zustandsgleichung für solche Materie lautet

$$p = \frac{1}{3} \rho c^2. \tag{1.6}$$

Eine ausführliche Herleitung dazu aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik findet man im Lehrbuch von Longair (1998, S. 153ff).

In der frühen Phase des Universum wird die Energiedichte von der Strahlung bestimmt. Während der Expansion des Universums nimmt die Materiedichte (auf Grund der Massenerhaltung) mit $a^{-3}$ ab, die Strahlungsdichte hingegen mit $a^{-4}$ (siehe Kap. 1.1.2). Die Strahlung trägt demnach ab einer bestimmten Epoche einen nur noch verschwindenden Teil zur Energiedichte bei. Der Strahlungsdruck kann in diesem Fall vernachläßigt werden. Da die Dominanz

---

[4]Darunter ist die Gesamtheit der Bewegungen kosmischer Objekten zu verstehen, die durch die Expansion des Universums bedingt ist — im Gegensatz zu den *Pekuliar*geschwindigkeiten, die von der gravitativen Wechselwirkung der Objekte untereinander herrühren.

[5]$k = 0$ – flach, $k = -1$ – hyperbolisch, $k = 1$ – sphärisch

[6]Der Index 0 einer Größe bezeichnet immer deren *heutigen* Wert, sofern nicht anders bemerkt.

der Strahlung nur ca. $10^4$ Jahre währt, gilt für die überwiegende Zeitdauer der kosmischen Entwicklung Gleichung (1.4) mit $p = 0$. Außerdem kann in diesem Fall in Gleichung (1.5) $\rho$ durch $\rho_0 a^{-3}$ ersetzt werden. Der einfachste Fall, $k = 0$, entspricht dem so genannten **Einstein-de Sitter-Modell** (EdS). Für $a(t)$ ergibt sich die Lösung

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad t_0 = \frac{2}{3H_0}. \tag{1.7}$$

$H(t) \equiv \dot{a}/a$ heißt *Hubble-Parameter.* $H_0 \approx 50 \ldots 70 \mathrm{kms}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1}$ ist sein heutiger Wert. $t_0$ ist das Alter des Universums in diesem Modell. Das Universum expandiert in diesem Fall unendlich lange, allerdings mit stets abnehmender Rate $H(t) \to 0$ für $t \to \infty$. Zu Beginn der Entwicklung, solange die Zustandsgleichung (1.6) gilt, verläuft die Expansion etwas langsamer, hier gilt $a(t) \propto t^{1/2}$.

Aus der RWM, Gl. (1.2), kann man sehen, dass der Wert $k = 0$ einer flachen, euklidischen Geometrie des Raumes entspricht[7]. Und aus der Friedmann-Gleichung (1.5) folgt, dass dieser spezielle Fall mit einem bestimmten Wert der mittleren Dichte — der kritischen Dichte $\rho_c$ — des Universums verbunden ist, nämlich

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.88 \times 10^{-33} H_0^2 \mathrm{gcm}^{-3}. \tag{1.8}$$

$\rho_c$ stellt den Grenzfall zwischen einem offenen und einem geschlossenen Universum dar, das durch durch die Werte $k = +1$ und $k = -1$ beschrieben wird. In der RWM (1.2) wird diese geometrische Konsequenz der Werte von $k$ deutlich: $k = -1$ entspricht einem 3-dimensionalen Hyperboloid, $k = +1$ einer 3-Sphäre. Die Dynamik des Skalenparameters ist in diesen Fällen nicht mehr explizit sondern nur noch in parametrischer Form darstellbar:

$$k < 1 \quad : \quad a(\Theta) = \beta(1 - \cos\Theta), \quad t(\Theta) = \gamma(\Theta - \sin\Theta) \tag{1.9}$$

$$k > 1 \quad : \quad a(\Theta) = \beta(\cosh\phi - 1), \quad t(\Theta) = \gamma(\sinh\phi - \phi), \tag{1.10}$$

mit $\beta = \Omega_0/2(\Omega_o - 1)$ und $\gamma = \Omega_0/2H_0(\Omega_0 - 1)^{3/2}$ (siehe z.B. Longair, 1998, S. 159 oder Monaco (1997, S. 172)). Dabei ist $\Omega := \rho/\rho_c$ der kosmische Dichteparameter, der den Bruchteil der tatsächlichen Dichte des Universums von seiner kritischen Dichte angibt. Ein geschlossenes ($\Omega > 1$) Universum expandiert, bis $a$ einen maximalen Wert erreicht, um anschließend wieder zu kontrahieren, bis es eventuell zu einem „Big Crunch" kommt, der das Ende des (oder zumindest *dieses*) Universums bedeuten würde. Ein offenes Universum ($\Omega < 1$) hingegen würde ewig expandieren, ohne je den quasistatischen Zustand ($H \to 0$) des flachen Universums zu erreichen.

### Die Kosmologische Konstante $\Lambda$

Insbesondere das Modell eines geschlossenen Universums mit $\Omega_0 > 1$ scheint heute durch Beobachtungen widerlegt zu sein, denn der Wert der mittleren (Massen-)Dichte tendiert deutlich zu Werten unterhalb 0.5 (Melchiorri et al., 2000, de Bernardis et al., 2000, Mauskopf et al., 2000). Dennoch liefern die Theorie des inflationären Universums (siehe Abschnitt 1.1.2) und v.a. auch Beobachtungsdaten (siehe Seite 11 und Tabelle 1.1) Hinweise darauf, dass das

[7] Ein Euklidischer Raum wird durch die Minkowski-Metrik $ds^2 = c^2dt^2 - a^2(t)\left(dr^2 + r^2 d\Theta^2 + r^2 \sin^2\Theta d\phi^2\right)$. repräsentiert. Dies entspricht gerade der RWM mit $k = 0$.

Universum eine flache Geometrie besitzt. Dies ist vorstellbar durch eine Erweiterung der Einsteinschen Feldgleichungen um einen konstanten Term.

Einstein selbst hat 1917 solch einen Term in die Feldgleichungen aufgenommen, um ein statisches Universum zu „retten", an dem zu rütteln zu damaliger Zeit keinerlei Anlass bestand. Nach der Entdeckung der Expansion des Kosmos durch Hubble (1928) erfuhr die Popularität der Kosmologische Konstante ein stetes Auf und Ab im Ansehen der Kosmologen. Die in den letzten Jahren wieder entflammte Diskussion um ihre Existenz gründet sich zum großen Teil auf Beobachtungen von entfernten Typ-Ia-Supernovae (Perlmutter et al., 1997, Goobar et al., 2000), die einen zeitlichen Verlauf der Expansionsrate H(t) nahelegen, der mit $\Lambda$-Kosmologien kompatibel erscheint.

In der modernen Interpretation sieht man in $\Lambda$ den Beitrag von Vakuumsfluktuationen zur Energiedichte des Universums (Vakuumsenergie), wie er sich in der Quantenfeldtheorie begründen läßt. Die charakteristische Eigenschaft der Kosmologischen Konstante, eine der Gravitation entgegengesetzte, repulsive Kraft zu beschreiben, liegt darin begründet, dass der Energie-Impuls-Tensor des Vakuums eine „negative" Zustandsgleichung $p = -\rho c^2$ erfüllt. In den Einsteinschen Feldgleichungen erscheint die Kosmologische Konstante $\Omega$ als additiver Term auf der Seite des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\kappa T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{1.11}$$

Die entsprechend modifizierte Friedmann-Gleichung (1.4) (für ein druckfreies Universum) lautet:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3a^2} + \frac{1}{3}\Lambda a \tag{1.12}$$

Damit wird die repulsive Wirkung von $\Lambda > 0$ deutlich. Schreibt man Gl. (1.4) unter Einbezug einer Massendichte des Vakuums $\rho_v$ und eines entsprechenden Drucks $p_v$,

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a(\rho_m + \rho_v + \frac{3p_v}{c^2}), \tag{1.13}$$

so folgt daraus mit $p_v = -\rho_v c^2$, $\rho_m = \rho_0/a^3$ und $\rho_v = \text{const}$:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G \rho_0}{3a^2} + \frac{8\pi G \rho_v a}{3}. \tag{1.14}$$

Ein Vergleich von (1.14) mit (1.12) ergibt den Zusammenhang zwischen der Kosmologischen Konstante $\Lambda$ und der Vakuum-Energiedichte

$$\Lambda \equiv 8\pi G \rho_v. \tag{1.15}$$

Ein entsprechender Dichteparameter ergibt sich dann zu

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H_0^2}. \tag{1.16}$$

Schließlich bleibt noch die Frage nach dem Einfluss einer Kosmologischen Konstante auf die Dynamik des Skalenparameters $a(t)$. An Gl. (1.14) ist leicht zu sehen, dass der $\Lambda$-Term gegenüber der Materiedichte im Laufe der kosmologischen Entwicklung an Einfluss gewinnt, da der „$\Lambda$ -Term" mit $a$ gewichtet ist, der „Materie-Term" hingegen mit $1/a^2$.

Ohne (längliche) Herleitung sei die Zeitabhängigkeit des Skalenparameters hier angegeben, da sie sich später bei der Implementierung der Kosmologischen Konstante in das Simulationsprogramm als notwendig erweisen wird.

$$a(t) \propto \left[\frac{1}{\Omega_0} - 1\right]^{-\frac{1}{3}} \sinh^{\frac{2}{3}}\left[\frac{3H_0}{2}\sqrt{\Lambda}t\right] \tag{1.17}$$

(Monaco, 1997, Fuchs, 1998). Dies ist gültig für ein Universum mit flacher Raumzeit, also $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. Die heute geschätzten Werte dieser Parameter liegen bei $\Omega_m \approx 0.3$ und $\Omega_\Lambda \approx 0.7$ (siehe Seite 11).

Zwei Probleme im Zusammenhang mit der Kosmologischen Konstanten sollten an dieser Stelle erwähnt werden.

- *Kosmisches Koinzidenz-Problem*: Die mit der Kosmologischen Konstanten verbundene Energiedichte $\rho_v$ behält im Laufe der Entwicklung des Universums denselben Wert. Die Materiedichte $\rho_m$ hingegen änderte ihren Wert im Laufe der Zeit wegen $\rho(t) \propto a(t)^{-3}$ beträchtlich. Warum haben $\rho_v$ und $\rho_m$ dann gerade *heute* vergleichbare Werte?

- Die aus der Quantenfeldtheorie heraus motivierte Interpretation der Konstante $\Lambda$ erlaubt eine Abschätzung der Vakuum-Energiedichte zu $\rho_v \approx 10^{95}$kg m$^{-3}$ (siehe Carroll et al., 1992). Der maximale in der Kosmologie zulässige Wert liegt im Bereich von $\rho_v \approx 10^{-27}$kg m$^{-3}$. Beide Theorien liefern also Vakuumenergien, die sich um über 120 Größenordnungen unterscheiden! Wie konnte die Vakuum-Energiedichte nach dem Ende der Inflation (siehe Abschnitt 1.1.2) eine solche Änderung erfahren?

Ohne auf diese Probleme näher einzugehen, soll im weiteren Verlauf dieser Arbeit den erwähnten — und noch ausführlicher zu erläuternden — aktuellen Beobachtungen Rechnung getragen werden, nach denen die Existenz einer nichtverschwindenden Kosmologischen Konstante wahrscheinlich ist.

### Weiter Grundlagen und Implikationen der Friedmann-Modelle

Die Expansion des Universums führt dazu, dass die von Galaxien ausgesandte Strahlung während ihrer Laufzeit eine Rotverschiebung erfährt. Ein irdischer Beobachter sieht die Strahlung weit entfernter Objekte mit einer Rotverschiebung

$$z = \frac{\lambda_{em} - \lambda_{obs}}{\lambda_{em}}, \tag{1.18}$$

wobei $\lambda_{em}$ und $\lambda_{obs}$ die Wellenlängen der emittierten bzw. der detektierten Strahlung sind. Das Verhältnis von ausgesandter und empfangener Wellenlänge entspricht dem Verhältnis der Skalenparameter zu beiden Zeitpunkten, d.h. $\lambda_{em}/\lambda_{obs} = 1 + z = a(t_{em})/a(t_{obs})$. Mit $a(t_{obs}) = 1$ und $a := a(t_{em})$ gilt also die fundamentale Beziehung

$$a = \frac{1}{1+z}. \tag{1.19}$$

Eine Implikation des Kosmologischen Prinzips ist es, dass das Universum überall in gleichem Maße expandiert. Die Geschwindigkeit $v$ von zwei beliebigen Galaxien relativ zueinander nimmt deswegen — im nichtrelativistischen Limes — linear mit ihrem Abstand $D$ zu. Das von E. Hubble 1928 gefundene Gesetz $v(t) = H(t)D$ kann durch $v = zc$ in eine einfache Rotverschiebungs-Abstands-Relation umgeschrieben werden,

$$D = \frac{z}{H_0}c, \tag{1.20}$$

die jedoch — als Grenzwert — nur für Rotverschiebungen $z \ll 1$ gilt. Die genauere Beziehung, deren Herleitung man jedem Standardlehrbuch der Kosmologie entnehmen kann, lautet

$$D = cH_0^{-1}\left[z + \frac{1}{2}(1+q_0)z^2 + \frac{1}{6}(3 + 6q_0 + 3q_0^2 - 3\Omega_0)z^3 + \dots\right] \tag{1.21}$$

mit dem *Verzögerungsparameter* $q_0 = -\ddot{a}/\dot{a}^2$. Interessant ist, dass der Abstand in 3. Ordnung in der Rotverschiebung von Dichteparameter $\Omega_0$ abhängt. Das heißt z.B. , dass Objekte in einem Universum mit $\Omega = 1$ bei gleicher Rotverschiebung heller erscheinen als in einem Modell mit unterkritischer Dichte.

#### Die Werte der kosmologischen Parameter

Gegenwärtig sind es v.a. zwei Projekte, die im Zusammenhang mit der Suche nach den Parameterwerten erwähnt werden müssen. Dies ist zum Einen das *Supernova Cosmology Project* (siehe etwa Perlmutter et al., 1994, 1995, 1997). Supernovae vom Typ Ia haben bis auf geringe Abweichungen immer dieselbe intrinsische Helligkeit. Sie eignen sich deshalb als Standardkerzen. Mit Hilfe der Helligkeits-Rotverschiebungsrelation $m(z) = M + 5\log d(z; \Omega_m, \Omega_v, H_0) + 25$ wurden die kosmologischen Parameteraus bisher mehr als 40 Supernovae mit Rotverschiebungen $z > 0.8$ geschätzt (Drell et al., 2000, Goobar et al., 2000).

Zum anderen werden gegenwärtig Ballon-Teleskop-Projekte betrieben (z.B. *BOOMERanG, MAXIMA*), die das Spektrum der Fluktuationen in der Kosmischen Hintergrundstrahlung auf immer kleineren Skalen vermessen (Bennett et al., 1996, Melchiorri et al., 2000, de Bernardis et al., 2000, Mauskopf et al., 2000). Die Lage der Peaks in diesem Spektrum läßt Schlüsse über die kosmologischen Parameter zu. Für Details verweise ich auf den Übersichtsartikel von Primack (2000) und die Referenzen darin. Tabelle (1.1) ist aus dieser Arbeit übernommen.

Für eine der aktuellsten Messungen des Hubble-Parameters $H_0$ bedienten sich Mason et al. (2001) des *Sunyaev-Zel'dovich-Effektes* der bei Röntgenbeobachtungen des heißen Gases in Galaxienhaufen auftritt. Ein gewisser Anteil der Photonen der Hintergrundstrahlung erleidet beim Durchqueren des Galaxienhaufens eine Compton-Streuung ($e^- + \gamma \rightarrow e^{-'} + \gamma'$) an den niederenergetischen freien Elektronen des ionisierten Gases. Dies führt zu einer Dämpfung der Intensität des langwelligen Bereichs des CMB. Aus ihr läßt sich nach einem in Peacock (1999) beschriebenen Prinzip die Entfernung des Galaxienhaufens berechnen und daraus bei bekannter Rotverschiebung schließlich die Hubble-Konstante. (Gemessener Wert siehe Tabelle 1.1.)

Wie in der Tabelle wird im Weiteren die Hubble-Konstante $H_0$ immer in Einheiten von 100 km s$^{-1}$Mpc$^{-1}$ angegeben.

### 1.1.2 Die frühen Epochen der kosmischen Entwicklung

Die frühe Entwicklung des Universums ist von großer Bedeutung für die später einsetzende Bildung von Dunklen Halos, Galaxien und Galaxienhaufen. Die Vorläufer dieser Objekte —

| Parameter | Wert | Quellen |
|---|---|---|
| $H_0$ | $= 100h$ km $\mathrm{s}^{-1}\mathrm{Mpc}^{-1}$,<br>$h = 0.66^{+0.14}_{-0.11} \pm 0.15_{sys}$ | Sunyaev-Zeldovich-Effekt |
| $t_0$ | $= 9 - 16$ Gyr<br>$= 9 - 17$ Gyr | Kugelsternhaufen,<br>Expansionsrate,<br>$\Lambda$CDM-Modelle) |
| $\Omega_b$ | $= (0.45 \pm 0.006)h^{-2}$<br>$> 0.04h^{-2}$ | Deuterium/Helium-Häufigkeiten<br>Ly-$\alpha$-Wald-Opazität |
| $\Omega_m$ | $= 0.4 \pm 0.2$<br>$= 0.34 \pm 0.1$<br>$= 0.4 \pm 0.2$<br>$> 0.3$<br>$= 0.5 \pm 0.2$<br>$\approx \frac{3}{4}\Omega_v - \frac{1}{4} \pm \frac{1}{8}$ | Baryonen-Anteil in Gal.-Clustern<br>Ly-$\alpha$-Wald $P(k)$<br>Entwicklung von Galaxienhaufen<br>Großskalige Strömungen<br>Grosßskalige Strömungen +SNe Ia<br>SNe Ia |
| $\Omega_m + \Omega_v$ | $= 1 \pm 0.06$ | Akkustische Peaks im CMB |
| $\Omega_v$ | $= 0.71 \pm 0.14$<br>$< 0.73$ | (wie $\Omega_m$ und $\Omega_\nu$)<br>QSO Linseneffekt (Radiobereich) |

Tabelle 1.1: Werte der kosmologischen Parameter, wie sie aus verschiedenen Methoden gewonnen wurden. $t_0$ bezeichnet das Alter des Universums und $\Omega_b$ den Anteil *baryonischer* Materie an der mittleren Dichte. Die Tabelle ist aus Primack (2000) übernommen, die Angaben für den Hubble-Parameter $H_0$ stammen aus einer aktuelleren Veröffentlichung (Mason et al., 2001). Zur Erläuterung des Ly-$\alpha$-Waldes siehe z.B. Longair, 1998.

Fluktuationen im Dichtefeld — sind schon der Kosmischen Hintergrundstrahlung aufgeprägt, wurden jedoch bereits viel früher, während der Inflation, generiert. Die heutige Hochenergie-Physik liefert Theorien der Materie und ihrer Wechselwirkungen bis zu Energieskalen von mehreren 100Gev. Das heißt, dass der Zustand des Universums zurück bis zu einem Zeitpunkt von nicht weniger als $10^{-6}$ s nach dem Urknall mit Hilfe laborgetesteter Physik zugänglich ist. Weniger große Einigkeit herrscht über den detaillierten Verlauf der kosmischen Entwicklung zu noch früheren Zeiten.

### Inflation

Von entscheidender Bedeutung für das heutige Verständnis des Universums ist das Konzept der kosmischen Inflation. Diese wesentliche Ergänzung erfuhr das kosmologische Standardmodell zu Beginn der 80er Jahre durch Starobinsky (1979), Guth (1981), Linde (1983) sowie Albrecht & Steinhardt (1982). Die ursprünglich verfolgte Absicht war, das Problem der Überproduktion massiver magnetischer Monopole zu lösen, wie sie durch Phasenübergänge in vielen „Großen vereinheitlichten Theorien"[8] entstehen sollten (siehe etwa Vilenkin & Shellard, 1994). Demnach sollte alleine aufgrund der Monopole die Dichte des heutigen Universums

[8]auch „*GUTs*" (*G*rand *U*nified *T*heories); zur Einführung und Übersicht siehe z.B. Narlikar, 1993.

$\Omega \gg 1$ sein. Wesentlicher Aspekt der kosmischen Inflation ist eine sehr kurze Phase äußerst rapider Expansion, die auf natürliche Weise einige weitere Problem zu lösen vermag, die in der „vor-inflationären" Kosmologie offenkundig waren:

So war längst bekannt, dass der Dichteparameter des Universums $\Omega_0$ wenigstens der Größenordnung nach gleich 1 sein muss. Ein flaches Universum ist aber instabil, denn für den Dichteparameter zu verschiedenen Epochen $\Omega(z)$ gilt $[1 - 1/\Omega(z)] = (1+z)^{-n}[1 - 1/\Omega]$ (Longair, 1998), für beliebige Rotverschiebung $z$. Dabei gilt $n = 2$ für die frühe strahlungsdominierte Phase und $n = 1$ für die spätere materiedominierte Epoche (Seite 14). Zur Planck-Zeit ($10^{-43}$s nach dem Urknall) durfte die Abweichung des Dichteparameters $\Omega_{init}$ deswegen höchstens $\mid \Omega_{init} - 1 \mid < 10^{-60}$ betragen, um heute einen Wert von $\Omega_0 \approx 1$ zu ermöglichen (Flachheitsproblem)

Ein weiteres grundlegendes Problem des vor-inflationären Modells ist eng verbunden mit dem Begriff des *Horizonts*. Darunter ist die Grenze eines Bereiches um einen Beobachter zu verstehen, innerhalb dessen ein Objekt prinzipiell in Wechselwirkung mit dem Beobachter stehen kann; die Ursachen für die Existenz eines endlichen Horizonts liegen also zum Einen im endlichen Alter des Universums, sowie, zum Anderen, in der endlichen Lichtgeschwindigkeit. Die größe des Horizonts ist durch die Distanz gegeben, die ein Lichtsignal vom Urknall bis zu einem bestimmten Zeitpunkt hat durchlaufen können. Man beachte, dass jedes kosmische Objekt einen individuellen Horizont besitzt, abhängig von seiner räumlichen Lage.

In diesem Zusammenhang nun ist die Homogenität der kosmischen Hintergrundstrahlung in einer Kosmologie ohne Inflation problematisch. In der Tat sollten Gebiete am Himmel, die bei einer Rotverschiebung von $z \approx 1000$ uns heute unter einem Winkelabstand von mehr als zwei Grad erscheinen *niemals* in kausalem Kontakt gestanden haben (d.h. ihre Horizonte überschnitten sich bei $z = 1000$ nicht), geht man von einer gleichförmigen Expansion des Universums aus. Die Gleichheit der Temperatur der Hintergrundstrahlung in kausal getrennten Gebieten ist nicht ohne weiteres zu verstehen (Horizontproblem).

Dem unvollkommenen Verständnis der Physik der Frühphasen des Universum entsprechend gibt es kein Modell, das als „Standard"-Theorie der Inflation angesehen werden könnte. Einigkeit herrscht aber in der Vorstellung, dass ca. $10^{-35}$s nach dem Urknall eine Phase einsetzt, während der sich das Universum innerhalb von ca. $10^{-32}$s um einen Faktor von mindestens 50 Zehnerpotenzen aufbläht. Der Horizont expandiert in dieser Zeit langsamer als das Universum an sich. Das für uns sichtbare Universum ist demnach nur ein winziger Bruchteil des gesamten Kosmos. Der auf superhorizontalen Skalen möglicherweise gekrümmte Raum erscheint uns in unserer lokalen Begrenztheit als flach, und eine Feinabstimmung des $\Omega$-Parameters ist nicht weiter nötig.

Ebenso anschaulich erklärt sich in diesem Bild, wieso scheinbar kausal getrennte Gebiete gleiche Eigenschaften (Temperatur, Dichte) haben: All diese Gebiete konnten *vor* der Inflation innerhalb des Horizonts liegen, so dass physikalische Wechselwirkungen die Angleichung ihrer Zustände haben bewirken können. Durch die spätere überlichtschnelle Expansion sind die Regionen so weit von einander entfernt worden, dass sich ihre Vergangenheits-Lichtkegel heute nicht überschneiden und der Eindruck von Akausalität entsteht.

Die Frage nach einem möglichen Mechanismus, der für die Inflation verantwortlich ist, läßt sich analog zum Problem der Kosmologischen Konstante beantworten: Ein exponentielles Wachstum des Skalenparameters deutet allgemein auf eine „negative" Zustandsgleichung $p \propto -\rho$ hin. Im Unterschied zur Kosmologischen Konstante beruht die Zustandsgleichung hier aber nicht auf einer Eigenschaft des Vakuums; Bei einer Temperatur von ca. $10^{15}$ GeV sagt die moderne Hochenergiephysik den so genannten GUT-Phasenübergang voraus, bei dem die Starke Wechselwirkung von der Elektro-Schwachen abkoppelt. Dies ist mit dem Auftreten von skalaren (d.h. Spin=0-)Feldern — konkret dem *Higgs*-Feld — verbunden. Eine Eigenschaft skalarer Felder ist, dass sie negative Zustandsgleichungen erfüllen (siehe dazu Zel'dovich, 1986). Wenn skalare Felder den dominanten Beitrag zur gesamten Energiedichte bilden, dann reduziert sich die Friedmann-Gleichung (1.5) auf $\dot{a}/a$ =const., mit der Lösung $a(t) \propto \exp(Ht)$ und $H = (8\pi G\rho_{GUT}/3)^{1/2}$. Eine detailierte Behandlung der Materie erfordert eine tiefere Kenntnis der Quantenfeldtheorie und würde an dieser Stelle zu weit führen. Weitere Ein- und Übersicht schaffen etwa Narlikar & Padmanabhan (1991) oder Liddle & Lyth (2000). Die Idee der Inflation spielt auch im Zusammenhang mit der Bildung kosmischer Strukturen eine wichtige Rolle. Darauf wird in Kapitel 2 näher eingegangen.

#### Strahlungs- und materiedominierter Kosmos

Nach dem Ende der Inflation setzt das Universum seine Expansion gemäß der Friedmann-Gleichungen *ohne* dominante Quantenfelder[9] fort, wobei der dominante Beitrag zur gesamten Energiedichte zunächst von der Strahlung und relativistischen Teilchen stammt. Solange im Universum eine Temperatur von $T > 4000$ K herrscht, sind die Elektronen und die in den ersten Minuten gebildeten leichten Kerne nicht in Atomen gebunden. Die elektromagnetische Strahlung ist deswegen durch Compton-Streuung an den freien Ladungsträgern an die Materie gekoppelt, was die Ausbildung eines thermischen Gleichgewichtes ermöglicht. Die in frühen Phasen (bis $z \approx 3\times10^6, k_BT \approx 1$ keV) dominanten Streuprozesse sind *Bremsstrahlung* ($e$+$p \rightarrow e + p + \gamma$) und *doppelte Compton-Streuung* ($e + \gamma \rightarrow e + 2\gamma$). Ihnen ist gemeinsam, dass sie Photonen erzeugen und vernichten können, was wiederum die Erzeugung einer Schwarzkörper-Strahlung innerhalb des ersten Jahres nach dem Urknall ermöglicht (Lachize-Rey & Gunzig, 1999, S. 74f). Die Energiedichte dieser Strahlung hängt ab von der Zahl der Photonen pro Volumen sowie deren einzelner Energien. Während der Expansion nimmt die Photonendichte gemäß $a^{-3}$ ab. Die Rotverschiebung der Wellenlängen sorgt zusätzlich für einen Energieverlust um einen Faktor $a$. Insgesamt also nimmt die Energiedichte der Strahlung während der Expansion mit $a^{-4} = (z+1)^4$ ab. Wie man mit Hilfe der Friedmann-Gleichung (1.4) leicht nachprüft, gilt in diesem Falle $a(t) \propto t^{1/2}$ für den Skalenparameter.

Aus den heutigen Werten für die Energiedichten von Strahlung und Materie kann man die Werte zu allen Zeiten in der Vergangenheit zuückverfolgen und findet, dass beide bei einer Rotverschiebung von $z \approx 4 \times 10^4 \Omega_0 h^2$ gleich waren (Longair, 1998, S. 226f).

Die folgende Phase ist charakterisiert durch die (energetische) Dominanz der Materie gegenüber der Strahlung. Die Dynamik des Universums ändert sich, nun gilt $a(t) \propto t^{2/3}$. Auch ergeben sich andere Effekte in Bezug auf das Wachstum der kosmologischen Strukturen wie in Abschnitt 2 kurz erläutert wird. Der Zeitraum zwischen Strahlungs- und Materie-Equivalenz und Entkopplung (s.u.) wird oft *Plasma*-Epoche genannt, im Sinne einer Unterscheidung von der Epoche nach der Entkopplung, die - wenigstens über einen gewissen Zeitraum - ebenfalls Materiedominiert ist. Nach gegenwärtiger Auffassung ist das Universum heute - und wohl in alle Ewigkeit - *Vakuum*dominiert, denn $\rho_v \approx 2\rho_m$.

[9]D.h. ohne skalare Felder und Vakuumenergie

**Entkopplung und kosmische Hintergrundstrahlung**

Die letzte abrupte Änderung des globalen Zustandes ereignete sich nach etwa $3 \times 10^5$ Jahren ($z \approx 1500$). Sobald die Temperatur im Universum auf $T \approx 10^3$ K gesunken ist, bilden Elektronen und leichte Kerne schließlich Atome[10]. Konkret sind bei einer Rotverschiebung von $z = 1500$ noch 50% des Gases ionisiert. Dieser Zeitpunkt wird *Entkopplung* oder (missverständlich) *Rekombination* genannt. Das wesentlich Neue dieser Epoche ist, dass die Photonen nun nicht mehr von freien Ladungsträgern gestreut werden, sondern sich ungehindert durch das Universum ausbreiten können. Dies ermöglicht den Beginn der „eigentlichen" Strukturbildung, da die noch zu besprechenden Dämpfungseffekte (Kap. 2) mit der Entkopplung unwirksam werden. Die heute zu beobachtende 2.7K-Hintergrund-Strahlung ist das Relikt eben jener Phase der Entkopplung von Strahlung und Materie. Mit ihrer nahezu perfekten Planckschen Form ist sie eine wesentliche Stütze des Modells des heißen Urknalls. Der ausgesprochen hohe Grad an Isotropie bekräftigt zudem die Gültigkeit des Kosmologischen Prinzips.

## 1.2 Dunkle Materie

### 1.2.1 Hinweise auf die Existenz Dunkler Materie

a) Beobachtungen der 21-cm-Linie von neutralem Wasserstoff in Spiralgalaxien zeigen, dass die Bahngeschwindigkeiten $v_c$ der Molekülwolken ab bestimmten Entfernungen vom Zentrum der Galaxie im Wesentlichen konstant sind (z.B. Binney et al., 1982). Das entspricht nicht der Dynamik, wie sie aufgrund der alleinigen Wirkung der sichtbaren Materie in den Galaxien zu erwarten wäre. Vielmehr impliziert dieses Verhalten einen Verlauf der kumulativen Masse $M(< r) \propto r$ und damit die Existenz eines (näherungsweise) sphäroidalen Halos ausschließlich gravitativ wechselwirkender Materie um die sichbare Komponente[11]).

b) Bereits Zwicky (1933) beobachtete im Coma-Cluster eine Geschwindigkeitsdispersion der Galaxien, die auf ein Masse-Leuchtkraft-Verältnis von $M/L \approx 300h\mathrm{M}_\odot/L_\odot$ hindeutet. Auch in diesem Falle scheint ein wesentlicher Anteil der Masse in Form Dunkler Materie vorzuliegen.

c) Die bewährte Theorie der primordialen Nukleosynthese liefert einen oberen Grenzwert für den Beitrag der baryonischen Materie an der kritischen Dichte des Universums von etwa 5%. Sowohl Theorie wie Beobachtung sprechen aber für einen weit höheren Materieanteil an der gesamten Energiedichte. Selbst wenn man von einem Beitrag von 70% des Vakuums ausgeht, wie neuere Beobachtungen nahe legen, fehlt noch ein Anteil von ca. 0.25 für ein $\Omega_{tot} = 1$-Universum. Wenn dieser Rest in Form von nichtbaryonischer Dunkler Materie vorliegt, trägt diese zu mindestens 80% der Masse des Universums bei.

d) Der Drehimpuls von Galaxien und Dunklen Halos wird oft durch den Spinparameter $\lambda = J|E|^{1/2}G^{-1}M^{-2/5}$ charakterisiert (siehe Abschnitt 4.4). Die Größe des Spinparameters von Galaktischen Scheiben ist nur zu verstehen, wenn man davon ausgeht, dass das protogalaktische Gas innerhalb des Potenzialtopfes eines Dunklen Halos kollabiert. Ein Kollaps, der

[10] Eigentlich entspricht die Ionisierungsenergie von Wasserstoff (13.6 eV) einer Temperatur von $T > 10^5$ K. Da die Anzahl der Photonen diejenigen der Elektronen und Baryonen aber wesentlich übersteigt, reicht der hochenergetische Anteil der Planck-verteilten Photonen aus, um die Ionisation aufrecht zu erhalten.

[11] Sofern man die Gültigkeit des Newtonschen Gravitationsgesetzes annimmt. Alternative Theorien der Gravitation mit abweichendem Kraftgesetz wurden ebenfalls in Erwägung gezogen (Begeman et al., 1991, Milgrom, 1989 oder Milgrom, 1999

in Abwesenheit eines Dunklen Halos zu vergleichbaren Werten des Spinparameters wie den beobachteten führt, würde eine Zeitdauer, größer als das Alter des Universums beanspruchen (siehe etwa Padmanabhan, 1993).

e) Schließlich ist die Theorie der kosmologischen Strukturbildung in ihrer heutigen Form nicht ohne die Hilfe Dunkler Materie denkbar. Ohne sie hätte das Wachstum der primordialen Dichtefluktuationen bereits vor der Entkopplung so weit fortgeschritten sein müssen, dass der kosmischen Hintergrundstrahlung ein deutlich größerer Temperaturkontrast aufgeprägt sein müsste als man beobachtet.

### 1.2.2 Die Natur der Dunklen Materie

Zur Klassifizierung von Dunkler Materie sind zwei Möglchkeiten geläufig. Einerseits unterscheidet man zwischen baryonischer und nichtbaryonischer Dunkler Materie. Baryonische Dunkle Materie könnte etwa in Form von schwer detektierbaren *Braunen Zwergen* mit Massen $m < 0.08\mathrm{M}_\odot$ existieren. Diese Erscheinungsform Dunkler Materie bezeichnet man allgemein als *MACHOs* (*MA*ssive *C*old *H*alo *O*bject*s*, siehe z.B. Rix & Lake, 1993). Auch Schwarze Löcher zählen zu den möglichen Kandidaten dieser Klasse. Allerdings geht man davon aus, dass baryonische Dunkle Materie keine bedeutende Rolle spielt. Der Grund liegt zum einen in der vermuteten geringen Häufigkeit von Braunen Zwergen (Alcock et al., 1996), zum anderen in der Vorhersage der primordialen Nukleosynthese, die eine Baryonenhäufigkeit von weniger als 5% der kritischen Energiedichte des Iniversums vorhersagt.

Dunkle Materie scheint also überwiegend nichtbaryonischer Natur zu sein, und auch innerhalb *dieser* Gruppe ist eine Unterteilung in zwei verschiedene Arten gängig. *Heiße* Dunkle Materie (HDM) ist dadurch charakterisiert, dass sie zum Zeitpunkt ihrer thermischen Entkopplung von der Umgebung relativistisch ist. Dafür kommen v.a. massive Neutrinos in Frage, die bei ihrer Entkopplung ca. 1 s nach dem Urknall ultrarelativistisch sind. Die Häufigkeit der drei Neutrinoarten zusammen genommen übertrifft die Anzahl von Protonen und Elektronen um das $10^8 - 10^9$-fache. Die Frage ob Neutrinos massebehaftet sind, scheint sich seit den japanischen *Super-Kamiokande*-Experimenten zu bejahen (Primack & Gross, 1998). HDM-Modelle der Strukturbildung führen dennoch zu Vorhersagen über die großskalige Struktur, die mit den Beobachtungen nicht in Einklang stehen. Wie im Kapitel 2 über Strukturbildung erläutert wird, entstehen in HDM-Modellen große Strukturen wie Galaxienhaufen früher als etwa einzelne Galaxien. Dies ist in der Realität aber praktisch auszuschließen, da etwa die Dynamik von Haufengalaxien darauf schließen läßt, dass viele dieser Objekte noch in der Relaxationsphase - und also relativ jung sind. Möglicherweise sind die recht ungenau bekannten Massen der Neutrinos zu gering, als dass sie einen relevanten Beitrag zur mittleren Dichte des Kosmos leisten könnten.

Tremaine & Gunn (1979) schlugen ein Phasenraumkriterium vor, dass ein weiteres Argument gegen ein von Neutrinos dominiertes Universum darstellt, und das hier kurz zu erläutern ebenfalls lohnt (siehe auch Peacock, 1999, S. 386 und Peebles, 1993, S. 442ff): Neutrinos unterliegen als Fermionen dem Paulischen Ausschliessungsprinzip, d.h. jeder Teilchenzustand beansprucht ein Phasenraumvolumen $\hbar^3$. Innerhalb eines bestimmten Volumens kann sich also nur eine maximale Anzahl $N^*$ von Teilchen mit Impulsen $p < p_{max}$ aufhalten. Die rms-Geschwindigkeitsdispersion in virialisierten Dunklen Halos ist, wie in Abschnitt 3.2.2 genauer erläutert, $\sigma^2 = GM/R$, wobei die Gesamtmasse angenähert wird durch $M = N^* N_\nu m_\nu$. ($N_\nu$ ist die Anzahl der Neutrino-Arten, $m_\nu$ die Masse einer Spezies.) Die maximale Geschwindigkeit, die ein Teilchen haben darf, ohne aus dem Halo zu entweichen, ist gerade

$v_{max} = \sqrt{2}\sigma$. Aus diesen Beziehungen ergibt sich eine Bedingung für die *minimale* Masse eines DM-Teilchens bei bestimmter Masse und Ausdehnung des Halos:

$$m_\nu > 1.5[N_\nu \sigma_3 R^2_{\mathrm{Mpc}}]^{-1/4}\mathrm{eV}. \tag{1.22}$$

Hier ist zu beachten, dass die Geschwindigkeitsdispersion $\sigma_3$ in Einheiten von 1000 kms$^{-1}$ und $R$ in Mpc zu messen ist. Geht man von $N_\nu = 1$ (bzw. $N_\nu = 6$)[12], so ergibt sich für einen Galaxienhaufen mit $\sigma = 1000$ kms$^{-1}$ und $R = 1$ Mpc eine Mindestmasse für Neutrinos von $m_\mu = 1.5$ eV ($m_\mu = 0.9$ eV). Dies ist bei einer Neutrinohäufigkeit von $N_\nu \approx 10^8 N_{p,e}$ mit einem Dichteparameter $\Omega_{tot} < 1$ verträglich. Einzelne Galaxien ($\sigma = 150$ km s$^{-1}$, $R = 5$ kpc) führen mit $m_\nu > 33$ eV ($m_\nu > 21$ eV) bereits an die Grenze der kosmologisch tolerierbaren Neutrinomasse, denn $m_\nu = 33$ eV würde bereits für $\Omega_{tot} = 1$ hinreichend sein. Betrachtet man noch Zwerggalaxien mit $\sigma = 100$ km s$^{-1}$und $R = 1$ kpc, so müsste $m_\nu > 80$ eV ($m_\nu > 50$) betragen, damit ein gebundener Halo existieren kann. Neutrinos können also nicht den dominierenden Beitrag zur Masse von Zwerggalaxien ausmachen. Beobachtungsdaten weisen aber sehr wohl auf die Existenz dunkler Halos um Zwerggalaxien hin (Carr, 1994). Dunkle Materie sollte demnach (auch) aus massereicheren Teilchen geringerer Häufigkeit bestehen.

Die andere Klasse nichtbaryonischer Dunkler Materie ist die *Kalte Dunkle Materie* (CDM), die zum Zeitpunkt ihrer Entkopplung nichtrelativistisch war. Da für sie nur schwache und gravitative Wechselwirkung postuliert wird, muss ihre Entkopplung von der Umgebung ebenfalls sehr früh, zeitgleich mit den Neutrinos passieren. Die Masse muss jedoch sehr hoch sein, damit die Teilchen nichtrelativistisch sind. Die dafür in Frage kommenden Kandidaten werden unter der Sammelbezeichnung *WIMPs* (*W*eakly *I*nterakting *M*assive *P*articles) geführt. Dies könnten etwa die supersymmetrischen Partner der Photonen („Photinos"), oder der Gravitonen („Gravitinos") sein, sollten sie denn existieren. Entsprechend der Forderung, dass die Teilchen zum Zeitpunkt ihrer Entkopplung nichtrelativistisch sind, müssen die Teilchenmassen zwischen 1 und 10 GeV liegen (Longair, 1998, S. 294f). Aber auch CDM-Modelle leiden unter Mängeln, konkret unter der Vorhersage zu ausgeprägter Strukturen auf kleinen Skalen (z.B. zu hohe Anzahl von Zwerggalaxien). Die bisher besten Ergebnisse im Zusammenhang mit der Bildung von kosmologischen Strukturen (verglichen mit der Beobachtung) liefern Modelle mit Kalter Dunkler Materie und einem dominanten Anteil der Vakuum-Energiedichte $\Omega_v$. Im Unterschied zu HDM-Modellen geschieht die Strukturbildung unter beteiligung Kalter Dunkler Materie *hierarchisch*, d.h. Strukturen entstehen durch sukzessives Verschmelzen jeweils kleinerer Objekte, beginnend also bei kleinen Massen (im Gegensatz zu HDM-Modellen). Der genauere Hergang dieser Prozedur soll im nächsten Kapitel beleuchtet werden.

[12] $\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau +$ Antiteilchen

# Kapitel 2

# Die Bildung kosmologischer Strukturen

Das Kosmologische Prinzip, das wegweisend über den Friedmann-Lemaitre-Modellen steht, ist offensichtlich als Näherung für sehr große Skalen zu verstehen. Je kleiner die betrachteten räumlichen Dimensionen werden, um so mehr wird die Verteilung der Materie an Struktur gewinnen und vom Postulat der Homogenität abweichen. Die größten Objekte, die man im Universum kennt, sind Superhaufen von Galaxien. Ihre Gesamtmassen liegen im Bereich von $10^{15}\mathrm{M}_\odot$, ihre Ausdehnung kann einige $10^7$ pc betragen. Einzelne Galaxien wie die Milchstraße sind die elementaren Bausteine der kosmischen ,,Architektur". Ihre Massen bewegen sich im Bereich von $10^8 \ldots 10^{12}\mathrm{M}_\odot$. Die Dichte von Galaxien beträgt typischerweise das $10^8$-fache der mittleren Dichte des Universums.

Nach heutiger Ansicht wachsen kosmische Strukturen aus kleinen (aber makroskopischen) Dichtefluktuationen, deren ,,Keime" während der Phase der Inflation generiert wurden. Die Verteilung der Materie im Universum wird durch das kosmische Dichtefeld (oder den *Dichtekontrast*) $\delta((\mathbf{x},t))$ beschrieben, das durch

$$\delta((\mathbf{x},t)) \equiv \frac{\rho((\mathbf{x},t)) - \rho_b}{\rho_b} \tag{2.1}$$

definiert ist. $\rho_b$ ist dabei die mittlere (oder Hintergrund-)Dichte des Universums. Man beachte, dass sich $\delta$ und $\rho((\mathbf{x},t))$ immer auf eine feste räumliche Skala $X$ beziehen, über deren Volumen $V_X$ die Dichte $\rho_X = M_X/V_X$ zu mitteln ist. Solange eine Mode $\delta_X$ klein ist, d.h. $\delta_X < 1$, ist es möglich, ihre zeitliche Entwicklung im Rahmen einer linearen Theorie analytisch zu beschreiben. Ein wichtiges Mittel hierzu ist die *Zel'dovich*-Approximation, die in der ,,Praxis" eine Rolle spielt bei der Erstellung von Anfangsbedingungen für kosmologische $N$-Körper-Simulationen (siehe Kapitel 3). Diese werden notwendig, wenn das Dichtefeld Werte von $\delta > 1$ annimmt, denn die lineare Theorie (mit der Dichte $\rho$ als gestörte Größe) verliert dann ihre Gültigkeit.

Wie schon erwähnt, ist davon auszugehen, dass mehr als 80% der Materie im Kosmos aus nichtbaryonischer Dunkler Materie besteht. Dies ist bedauerlich im Hinblick auf die Beobachtbarkeit, nicht jedoch im Zusammenhang mit der numerischen Simulation der Strukturbildung. Denn diese ist dann von der numerisch schwieriger handhabbaren baryonischen Materie kaum beeinflusst. Ein wichtiges Charakteristikum Dunkler Materie (im Gegensatz zu Gas) ist ihre *stoßfreie* Dynamik, das heißt lokale Wechselwirkungen von einzelnen Partikeln oder Körpern mit ihren Nachbarn spielen keine Rolle für die globalen Eigenschaften des

Systems. Da Dunkle Materie ausschließlich gravitativ wirkt, gestaltet sich die numerische Simulation kosmologischer Strukturen — verglichen mit der Simulation hydrodynamischer Systeme — relativ einfach.

## 2.1 Das qualitative Bild

Vor der mathematischen Behandlung der Dichtefluktuationen und ihrer Entwicklung sei zunächst ein qualitativer Überblick über den Verlauf der Strukturbildung gegeben.

Die allerfrühste Epoche, die Generierung der primordialen Fluktuationen, ist — wie in der Kosmologie üblich — die spekulativste. Einer naheliegenden Vorstellung nach existierten Quantenfluktuationen (im Sinne des Heisenbergschen Unschärfeprinzips) bereits vor und während der inflationären Phase. Während der exponentiellen Aufblähung des Raumes wurden die Fluktuationen auf makroskopische Skalen gedehnt. Dabei konnten Dichtestörungen auf einem sehr großen Skalenbereich entstehen. Fluktuationen, die zu Beginn der Inflation auftraten, machten den gesamten „Dehnungsprozess" mit und wurden damit auf maximale Skalen vergrößert. Andere, am Ende der Inflation auftretende Fluktuationen erfuhren hingegen nur eine geringe Expansion. Auf diese Weise war nach der Inflation ein Spektrum von Dichtestörungen auf allen Skalen, auch größer als der Horizont, präsent. Diese Vorstellung führt auf natürliche Weise zu einem *skalenfreien* Fluktuationsspektrum, d.h. die Amplituden der Dichtestörungen sind gleich auf allen Skalen. Eine technisch detailliertere Behandlung des Ursprungs der Fluktuationen findet man bei Peacock (1999, S. 338ff).

### 2.1.1 Das baryonische Szenario

Nach Ablauf der Inflation und der „Geburt" der Dichtestörungen kann im Prinzip das Wachstum von Strukturen einsetzen, indem in einem fortlaufenden Prozess immer mehr Materie in die vorhandenen Potenzialtöpfe strömt, bis schließlich Klumpen für Klumpen Jeans-instabil (das heißt instabil gegen Gravitation) wird, kollabiert und letztlich in einem Gleichgewichtszustand verharrt.

Bis etwa $3 \times 10^5$ Jahre nach dem Urknall ist die Physik der Materie im Universum stark geprägt durch ihre Kopplung an die Strahlung. Dies führt zu verschiedenen Einflüssen auf die Entwicklung der baryonischen Komponente. Sind die Dichtefluktuationen der Materie mit denen der Strahlung gekoppelt (d.h. $\delta_m((\mathbf{x},t))/\delta_{rad}((\mathbf{x},t))$ =const), so spricht man von *adiabatischen* Fluktuationen. Sie führen zu einem *top-down*-Szenario der Strukturbildung[1], d.h. Objekte mit hohen Massen $M \approx 10^{14} \ldots 10^{15}\mathrm{M}_\odot$ kollabieren zuerst. Kleinere Strukturen, wie einzelne Galaxien, entstehen dann durch Fragmentation der massereicheren Objekte.

Einen andere Möglichkeit besteht darin, dass die Dichtefluktuationen ausschliesslich in der Materie vorkommen und nicht in der Strahlung (*isotherme Fluktuationen*, $\delta\rho_{rad} = 0$). Hier entstehen zuerst kleine Objekte mit $10^5 \ldots 10^6\mathrm{M}_\odot$, die dann durch Verschmelzung mit vergleichbaren Objekten (oder durch Akkretion kleinerer) nach und nach größere Strukturen bilden. Dieser Hergang wird entsprechend als *bottom-up*-Szenario bezeichnet.

Diese Modelle sind von vorwiegend historischer Bedeutung. Zunächst geraten sie in Konflikt mit ihren Vorhersagen bezüglich der beobachtbaren Temperaturfluktuationen in der Hintergrundstrahlung: In baryonischen Modellen wären Amplituden der Fluktuationen in Höhe von

[1] Man beachte das dies nur für ein rein baryonisches Modell der Strukturbildung gilt. In einem inflationären Modell mit CDM bilden sich zuerst kleine Strukturen, obwohl die primordialen Dichtefluktuationen als adiabatisch angenommen werden.

$\mathrm{d}T/T > 10^{-3}$ zu erwarten. Tatsächlich beobachtet man nur Amplituden von der Ordnung $\mathcal{O}(10^{-5})$. Vor Allem aber muss der Dunklen Materie als dominante Komponente eine zentrale Rolle auch bei der Bildung kosmologischer Strukturen zukommen. Interessanterweise — und deswegen wurden die Szenarien mit baryonischer Materie erwähnt — führen auch hier zwei unterschiedliche Modelle zu einem top-down- bzw. einem bottom-up-Szenario. Im Folgenden werden kurz die Bilder der Strukturbildung gezeichnet, wie sie sich mit heißer- bzw. kalter Dunkler Materie ergeben.

### 2.1.2 Das HDM-Szenario

Als Heiße Dunkle Materie kommen vor allem massive Neutrinos in Frage. Ihre charakteristische Eigenschaft ist, dass sie zum Zeitpunkt ihrer thermischen Entkopplung vom Hintergrund relativistisch sind. Die Geschwindigkeit der Teilchen ist also von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit $c$. Der entscheidende Aspekt im Zusammenhang mit der Bildung von Strukturen ist die Tatsache, dass diese relativistischen Teilchen aus den überdichten Regionen herausströmen können, sobald sie entkoppeln, und damit die Fluktuationen gewissermaßen auswaschen. Dieser wichtige Effekt wird als *free streaming* bezeichnet. Die Skalen, auf denen dieser Effekt wirkt, hängen davon ab, welche Strecken die Teilchen während einer bestimmten Epoche zurücklegen können. Sobald die Teilchen nichtrelativistisch werden, verliert der Effekt an Bedeutung. Eine eingehendere Erläuterung des free streaming findet man im Anhang A. Im Falle der Neutrinos geschieht dies etwa zum Zeitpunkt des Materie-Strahlungs-Gleichgewichtes, d.h. bei $z \approx z_{eq} \approx 10^4$. Daraus folgt ein *free streaming-Radius* der Neutrinos von der Ordnung $2ct_{eq}$. Genauere Rechnungen liefern eine Masse $M_{FS} = 4 \times 10^{15} (m_\nu/30\mathrm{ev})^{-2} \mathrm{M}_\odot$ als so genannte *free streamimg-Masse*, unterhalb derer Dichtefluktuationen durch den besprochenen Effekt ausgewischt werden. Dies entspricht gerade der Masse innerhalb des Horizontes bei $z = z_{eq}$. Die einzigen Strukturen, die die Strahlungsepoche „überlebten" entsprechen demnach der Größe heutiger Galaxienhaufen und darüber.

Danach ($z < z_{eq}$) konnten die Dichtestörungen in der Dunklen Komponente anwachsen. Die Fluktuationen in der baryonischen Materie konnten ebenfalls zunächst anwachsen, wurden jedoch wieder ausgewaschen, sobald die Dichte im Inneren eines kontrahierenden Klumpens hoch genug wurde, um von der nach aussen hin wirkenden Strahlung auseinander getrieben zu werden. Durch die darauf folgende Ausdünnung des Gases verliert die Strahlung wieder an repulsiver Wirkung, und der Prozess beginnt von Neuem. In der Tat oszillieren die Dichtestörungen des Gases in der Zeit zwischen $t_{eq}$ und $t_{rec}$ mit kaum abfallenden Amplituden[2]. Die in dieser Zeit bereits wachsenden Fluktuationen in der dunklen Komponente haben zum Zeitpunkt der Entkopplung von Strahlung und Materie bereits 10-fach höhere Amplituden als die Störungen des Gases. Nach der Rekombination konnte das von der Strahlung entkoppelte Gas ohne Behinderung in die bis dahin entstandenen Potenzialtöpfe der Dunklen Materie fallen. Sobald der Dichtekontrast $\delta$ (in Gas und DM) innerhalb einer Region den Wert 1 überschritt, konnte die Abkopplung von der globalen Expansion beginnen, der Kollaps setzte ein und es konnte ein isoliertes Objekt entstehen. Durch Dichtestörungen innerhalb dieser großen Objekte ($M \approx 10^{15} \mathrm{M}_\odot$) entstanden in der Folge durch Fragmentation kleinere Objekte wie einzelne Galaxien.

Dieses Szenario wurde im Wesentlichen von Zel'dovich und Mitarbeitern Anfang der 80er Jahre entwickelt (Zel'dovich, 1993). Im Rahmen dieser Theorie ist die großskalige, blasen-

[2] Dies gilt nur für Fluktuationen mit Massen $M > 10^{11}\ \mathrm{M}_\odot$. Kleinere Fluktuationen in der baryonischen Materie werden durch *Silk-Dämpfung* geglättet (siehe etwa Kolb & Turner, 1990, S. 353).

artige Verteilung der Galaxienhaufen durchaus zu erklären, wenngleich die vorhergesagten Amplituden im großskaligen Dichtekontrast zu hoch sind. Die entscheidende Schwäche besteht jedoch darin, dass sich Galaxien erst sehr spät im Laufe der kosmischen Entwicklung bilden können, nämlich wenn die Objekte auf Skalen von Galaxien-Clustern fragmentieren. Damit können weder Quasare bei Rotverschiebungen $z > 4$ erklärt werden, noch die Häufigkeit schwerer Metalle im intergalaktischen Medium (Ma & Bertschinger, 1994,Hut & White, 1984).

### 2.1.3 Das CDM-Szenario

Zum Zeitpunkt ihrer thermischen Entkopplung von der Umgebung sind WIMPs, die hypothetischen Teilchen der Kalten Dunklen Materie, nicht mehr relativistisch. Dadurch bleibt der Effekt der Dämpfung durch free streaming aus, da dieser nur von Bedeutung ist, solange die agierenden Teilchen relativistisch sind. Die Masse innerhalb des Horizontes zum Zeitpunkt der WIMP-Entkopplung ist kleiner als $1\mathrm{M}_\odot$. Das CDM-Szenario leidet deshalb nicht unter der Einschränkung, dass alle Strukturen unterhalb etwa $10^{15}\mathrm{M}_\odot$ während der Strahlungsdominierten Phase ausgewaschen werden. Dennoch können die Fluktuationen bis zu diesem Zeitpunkt nicht ungehemmt linear anwachsen, vielmehr erleidet ihre Entwicklung eine Stagnation durch den so genannten *Meszaros-Effekt* (Meszaros, 1974). Eine genauere Erläuterung dazu erfolgt auf Seite 25 unter Punkt (3).

Ansonsten entspricht der Verlauf ganz demjenigen im HDM-Modell. Bis zur Rekombination wachsen die Amplituden der Dichtestörungen der Dunklen Materie auf ein 10-faches der Fluktuationen im Gas an, so dass einerseits die Temperaturfluktuationen der Hintergrundstrahlung nicht höher als beobachtet sind, andererseits trotzdem schon bei hohen Rotverschiebungen nichtlineare Strukturen im Gas entstehen können. Im CDM-Szenario bilden sich zuerst isolierte Objekte mit Massen von $M \approx 10^5(\Omega_B h^2)^{-1/2}$. Dies entspricht der Massenskala von Kugelsternhaufen. Größere Strukturen bilden sich dann durch hierarchisches Verschmelzen kleinerer Objekte (*bottom-up-Szenario*).

Durch die frühe Entstehung von Galaxien (und damit Sternen) kann die Häufigkeit schwerer Elemente in der interstellaren Materie sowie die hohe Metallizität junger Sterne erklärt werden. Ebenso liefert des CDM-Modell Korrelationsfunktionen zwischen Galaxien, die den Beobachteten sehr gut entsprechen (siehe G. Efstathiou in Peacock et al., 1990). Andererseits leidet dieses Modell unter einer zu hohen Produktion von Zwerggalaxien und Unterstrukturen in Dunklen Halos (Moore et al., 1998, Moore et al., 1999a, Ghigna et al., 2000, Gelb & Bertschinger, 1994) Problematisch ist weiter, im Rahmen dieses Modells das gemessene Powerspektrum der Kosmischen Hintergrundstrahlung zu erklären.

Die Abbildung 2.1 und 2.2 veranschaulichen die Entstehung von kosmologischen Strukturen in einer CDM-Simulation, die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführt wurde. Die Entstehungsprozess der Dunklen Halos als eine Folge sukzessiver Verschmelzungsprozesse ist hier gut zu erkennen. Die Details im Zusammenhang mit den numerischen Simulationen werden in Kapiteln 3 und 4 in aller Ausführlichkeit behandelt.

### 2.1.4 OCDM und ΛCDM

Der Standard Fall des CDM-Szenarios (*S*tandard *C*old *D*ark *M*atter, SCDM, $\Omega_m = 1$, $\Lambda = 0$) birgt neben der Unzulänglichkeit einer zu ausgeprägten Strukturbildung auf kleinen Skalen eine weiteres wesentliches Problem. Es gibt verschiedene Hinweise darauf, dass die Energiedichte $\Omega_m$ der Materie im Universum durchaus von 1 verschieden ist (siehe Tabelle 1.1).

Ein CDM-Modell mit offener Geometrie (*O*pen CDM, OCDM, $\Omega_m < 1$) führt in numerischen Simulationen in der Tat zu einer besseren Übereinstimmung mit der beobachteten Struktur auf allen Skalen (Gott, 1997).

Der wesentliche Unterschied zur Physik des SCDM-Modells ist, dass sich die Gleichheit von Strahlungs- und Materiedichte später einstellt (Longair, 1998). Der Horizont zum Zeitpunkt $t_{eq}$ ist somit entsprechend größer und damit auch die Skalen, auf denen die Dämpfungseffekte wirken. Das Spektrum der Fluktuationen verschiebt sich deswegen hin zu größeren Skalen (siehe Abbildung 2.4).

Um schließlich auch noch der sowohl von den Beobachtungen als auch den inflationären Theorien geforderten Flachheit des Universums genüge zu tun, besinnt man sich einer nicht-verschwindenden Kosmologischen Konstanten $\Lambda$. Diese nimmt keinerlei Einfluss auf die Physik des frühen Universums, da der relative Beitrag der Kosmologischen Konstanten zur gesamten Energiedichte $\Omega_{tot}$ erst bei $z < 1$ mit dem der Materie vergleichbar wird. Der wesentliche neue Effekt ist damit eine Dehnung der Zeitskala bis $z = 0$, so dass die Strukturen verglichen mit denen eines offenen Universums länger Zeit haben, sich zu entwickeln (siehe Abbildung 2.3). Dieses $\Lambda$CDM-Modell steht mit den Beobachtungen der Strukturen auf allen zugänglichen Skalen bislang am besten im Einklang.

## 2.2 Lineare Störungstheorie für kleine Fluktuationen

Sobald die oben besprochenen Dämpfungseffekte unwirksam werden, verläuft die zeitliche Entwicklung der Dichtefluktuationen ausschließlich nach den Vorgaben der Standardgleichungen für ein Fluidum im Gravitationsfeld. Die Inhomogenitäten des Dichtefeldes sind zum Zeitpunkt der Entkopplung von der Ordnung $\delta = \mathcal{O}(10^{-5})$ in der baryonischen bzw. $\delta = \mathcal{O}(10^{-4})$ in der Dunklen Materie. Deswegen ist es gerechtfertigt, die Fluktuationen zunächst als kleine Störung der homogenen Robertson-Walker-Metrik zu betrachten und die zeitliche Entwicklung im Rahmen einer linearen Störungstheorie zu behandeln. Sobald auf einer gegebenen Skala der Dichtekontrast die Größenordnung 1 annimmt, erfolgt eine rasche Entwicklung gebundener isolierter Objekte. Die Störungstheorie bricht zusammen und eine weitere analytische Behandlung ist nur für Spezialfälle wie sphärische Dichtestörungen möglich[3]. In diesem Abschnitt sollen die Grundlagen der liearen Theorie und ihre wichtigsten Ergebnisse zusammengestellt werden. Die zentrale Größe ist der Dichtekontrast

$$\delta(\mathbf{x}, t) = \frac{\rho(\mathbf{x}, t) - \rho_0}{\rho_0} \tag{2.2}$$

am Ort $x$ zur Zeit $t$. Der Index 0 steht hier wie im gesamten Abschnitt für Größen im ungestörten, also perfekt homogenen System. Da im Rahmen einer linearen Theorie ausschließlich *kleine* Fluktuationen behandelt werden, sind die auftretenden Gravitationsfelder schwach. Deshalb kann man von den relativistischen Feldgleichungen absehen und sich auf die Newtonsche Theorie beschränken. Die Dichte $\rho_0$, das Potenzial $\phi_0$, der Druck $p_0$ und die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_0$ eines Fluid-Elements[4] hängen dann über die Grundgleichungen der Hydrodynamik zusammen, namentlich die Kontinuitätsgleichung (2.3), die Euler-Gleichung

[3] *Spherical collapse model*, siehe etwa Coles & Lucchin, 1995, S. 294ff.

[4] Darunter ist die Materie innerhalb eines Volumenelementes in einem (kontinuierlich mit Materie gefüllten) Modell-Universum zu verstehen.

(2.4) und die Poisson-Gleichung (2.5):

$$\dot{\rho}_0 = -\rho_0 \nabla \mathbf{v}_0, \tag{2.3}$$

$$\dot{\mathbf{v}}_0 = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 - \nabla \phi_0, \tag{2.4}$$

$$\nabla^2 \phi_0 = 4\pi G \rho_0. \tag{2.5}$$

Dieses System aus drei Gleichungen für vier Unbekannte bedarf noch einer Vervollständigung durch eine Zustandsgleichung $p(\rho)$. Die Schallgeschwindigkeit $v_s$ in einem Gas ist allgemein durch $v_s = \sqrt{(\partial p/\partial \rho)}$ gegeben, woraus man unmittelbar die Zustandsgleichung

$$p(\rho) = v_s^2 \rho. \tag{2.6}$$

erhält. Zur Berechnung der zeitlichen Entwicklung kleiner Störungen werden die Größen $\rho_0, \phi_0, \partial_0$ und $\mathbf{v}_0$ in den Gleichungen (2.3)-(2.5) ersetzt durch gestörten Größen

$$\rho = \rho_0 + d\rho, \quad \phi = \phi_0 + d\phi, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + d\mathbf{v} \quad \text{und} \quad p = p_0 + dp. \tag{2.7}$$

Unter Vernachlässigung aller nichtlinearen Terme erhält man daraus nach Fourier-Transformation in den $\mathbf{k}$-Raum die folgende Differenzialgleichung für den Dichtekontrast $\delta(\mathbf{k})$:

$$\ddot{\delta}(\mathbf{k}) + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta}(\mathbf{k}) = \left[4\pi G\rho_0 - v_s^2 k^2\right] \delta(\mathbf{k}), \tag{2.8}$$

wobei $k \equiv |\mathbf{k}|$. $a = a(t)$ ist der Skalenfaktor. Im $\mathbf{k}$-Raum sind die Dichtefluktuationen als Überlagerung mehrerer Dichtewellen mit den Wellenvektoren $\mathbf{k}$ und den Amplituden $\delta(\mathbf{k})$ vorstellbar.

Drei aufschlussreiche Fälle sind zu unterscheiden:

(1) Der statische Limes für ein nichtexpandierendes Medium ist charakterisiert durch $\dot{a} = 0$. Die Lösungen $\delta$ haben die Form ebener Wellen $\delta = \delta_0 \exp\{i(\mathbf{k}r - \omega t)\}$ mit der Dispersionsrelation $\omega^2 = v_s^2 k^2 - 4\pi G \rho_0$. Für $v_s^2 k^2 > 4\pi G\rho_0$ ergeben sich oszillierende Lösungen. Dies bedeutet physikalisch, dass kontrahierende Wolken durch den Gasdruck wieder aufgebläht werden und erneut kontrahieren wie auf Seite 21 bereits erläutert. Drückt man die eben genannte Bedingung unter Verwendung der Wellenlänge statt der Wellenzahl aus, so erhält man eine Grenzwellenlänge

$$\lambda_J = \frac{2\pi}{k_J} = v_s \sqrt{\frac{\pi}{G\rho}}, \tag{2.9}$$

die so genannte *Jeans-Länge*, unterhalb welcher Fluktuationen oszillieren, oberhalb der dagegen ein exponentieller Kollaps einsetzt: Im Falle $v_s^2 k^2 < 4\pi G \rho_0$ nämlich ergeben sich für (2.8) die Lösungen $\delta = \delta_0 \exp\{i\mathbf{k}r + \Gamma t\}$, wobei $\Gamma = \pm[4\pi G\rho_0(1 - \lambda_J^2/\lambda^2)]^{1/2}$. Schließlich betrachten wir noch den druckfreien Limes $p = v_s^2 k^2 = 0$ bzw. — gleichbedeutend — den Limes für Fluktuationen auf sehr großen Skalen $\lambda \gg \lambda_J$. Die Wachstumsrate wird damit $\Gamma = (4\pi G\rho)^{1/2}$. Damit ist eine charakteristische Zeitdauer $\tau_{coll}$ für den Kollaps einer überdichten Region der Dichte $\rho$ verbunden:

$$\tau_{coll} = \Gamma^{-1} \propto (G\rho)^{-1/2}. \tag{2.10}$$

(2) Der allgemeine Fall eines expandierenden Mediums ($\dot{a} > 0$) ist der in der Kosmologie eigentlich relevante — insbesondere, wenn man wiederum Fluktuationen in druckfreien Medien betrachtet, um der Natur der Dunklen Materie gerecht zu werden. Anhand der rechten

Seite von Gl. (2.8) sieht man, dass das Jeans-Kriterium im Prinzip erhalten bleibt. Wegen der geforderten Druckfreiheit ist nun aber stets der Fall einer anwachsenden Lösung $\delta$ gegeben. Die Wachstumsraten von $\delta(k)$ werden sich durch den nun nichtverschwindenden zweiten Term der linken Seite ändern. In einem EdS-Universum ($\Omega_m = 1$) vereinfacht sich (2.8) wegen $4\pi G\rho = 2/3t^2$ und $\dot{a}/a = 2/3t$ auf

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0. \tag{2.11}$$

Dies hat die allgemeine Lösung

$$\delta(k) = \alpha(k)\delta(t_0, k)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3}} + \beta(k)\delta(t_0, k)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}, \tag{2.12}$$

wobei der zweite Term einer abklingenden Mode entspricht und nicht weiter interessiert. Für die wachsende Mode $\delta \propto^{2/3}$ liefert das EdS-Modell mit $a(t) \propto t^{2/3}$ die einfache Beziehung

$$\boxed{\delta \propto a = (1+z)^{-1}.} \tag{2.13}$$

Dieser lineare Zusammenhang zwischen der Amplitude $\delta(\mathbf{k})$ der Mode k und dem Skalenparameter ist auch für andere Kosmologien, insbesondere das für diese Arbeit wichtige $\Lambda$CDM-Modell ($\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$) in guter Näherung gültig. Denn in den für die lineare Näherung in Frage kommenden frühen Epochen ($z > 100$) dominiert die Materiedichte bei weitem über die Vakuumsenergie. Die Dynamik des Skalenparameters ist deswegen dieselbe wie im EdS-Modell. Der Unterschied zwischen SCDM und $\Lambda$CDM besteht im Wesentlichen — wie noch zu erläutern sein wird — im Spektrum $P(k)$ der anfänglichen Fluktuationen.

(3) Gesonderte Aufmerksamkeit verdient noch der Fall eines nichtrelativistischen kollisionsfreien Mediums in einem dominanten Strahlungshintergrund. Dies ist gerade der Zustand des Universums mit kalter dunkler Materie während der Strahlungsepoche. Innerhalb des Horizonts sei die Dichteverteilung als perfekt homogen angenommen, d.h. $\delta_{rad} = 0$. Ferner sei die Betrachtung auf den einfachen Grenzfall sehr langwelliger Moden $\lambda \gg \lambda_J$ — also auf ein druckfreies Medium — konzentriert. Die Dynamik der Dichtestörungen folgt Gleichung (2.8), mit den Modifikationen $k = 0$ und $(\dot{a}/a)^2 = 8\pi G(\rho_m + \rho_{rad})/3$. Mit Hilfe der Substitution

$$y := \frac{\rho_m}{\rho} = \frac{a}{a_{eq}} \tag{2.14}$$

nimmt Gleichung (2.8) folgende Gestalt an:

$$\frac{d^2\delta}{dy^2} + \frac{2+3y}{2y(1+y)}\frac{d\delta}{dy} - \frac{3}{2y(1+y)}\delta = 0 \tag{2.15}$$

Auch hier erhält man eine abklingende sowie eine anwachsende Lösung. Nur letztere ist von Interesse, sie lautet

$$\delta \propto y + \frac{2}{3}. \tag{2.16}$$

Während der Zeit bis zum Strahlungs-Materie-Gleichgewicht kann eine Dichtestörung also maximal um den Faktor

$$\frac{\delta(y=1)}{\delta(y=0)} = \frac{5}{2} \tag{2.17}$$

anwachsen, wohingegen $\delta$ für $y \gg 1$, also $t \gg t_{eq}$ mit $\delta \propto a \propto t^{2/3}$ die Dynamik eines materiedominierten Universums annimmt. Dieses Ergebnis kann dahingehend interpretiert werden, dass während der strahlungsdominierten Ära die Expansionsrate des Universums hoch genug ist, um das (der Expansion entgegengesetzte) Kollapsbestreben der Dichtestörungen zu kompensieren.

## 2.3 Dichtefluktuationen und das Power-Spektrum

Ziel einer jeden Theorie der Strukturbildung ist eine Vorhersage statistischer Eigenschaften des heutigen kosmischen Dichtefeldes $\rho(\mathbf{x}, t_f)$ aus einem anfänglichen Dichtefeld $\rho(\mathbf{x}, t_i)$. Es ist also nötig, ein Spektrum der Fluktuationen $\delta(\mathbf{x}, t_i)$ zu bestimmen, das als „Saatfeld" für die weitere Entwicklung dienen soll. Mit Hilfe der oben beschriebenen linearen Theorie kann die anfängliche zeitliche Entwicklung einzelner $k$-Moden verfolgt werden. Solange die lineare Theorie gültig, also $\delta < 1$ ist, entwickeln sich die einzelnen Moden unabhängig voneinander. Darum ist es sinnvoll, das Dichtefeld als Überlagerung solcher ebener Wellen zu beschreiben. Dazu sei angemerkt, dass die Verwendung ebener Wellen als Basis einer Fourier-Analyse streng genommen nur in einer flachen Geometrie erlaubt ist. In einem gekrümmten Raum müssten stattdessen die Eigenfunktionen der Wellengleichung im gekrümmten Raum verwendet werden. Im Rahmen des inflationären Modells kann jedoch angenommen werden, das der für uns beobachtbare Teil des Universums nur ein kleiner Ausschnitt der Raumzeit ist. Auf Skalen kleiner als der heutige Horizont stellt der Euklidische Raum deswegen eine hinreichende Näherung für dar, denn Räume mit nichtverschwindender Krümmung sind lokal flach.

Eine plausible und wichtige Annahme ist, dass die *Phasen* der primordialen Fluktuationen $\delta_k$ unkorreliert sind. Dies vereinfacht die Theorie dadurch, dass den Fluktuationen damit eine Gaußsche Statistik aufgeprägt ist, die eine bequemere mathematische Bahandlung mit sich bringt (siehe Bardeen et al., 1986).

Die Fourierzerlegung des Dichtefeldes $\delta(\mathbf{x}) = [\rho(\mathbf{x}) - \rho_b]/\rho_b$ in einem endlichen Volumen $L^3$ ist

$$\delta(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} \delta_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{kx}} = \sum_{\mathbf{k}} \delta^*_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{kx}}, \tag{2.18}$$

wobei die Komponenten $i \in \{1, 2, 3\}$ der Wellenzahlen $k_i$ den Randbedingungen

$$k_i = n_i \frac{2\pi}{L}, \quad n_i \in \mathcal{Z} \tag{2.19}$$

unterliegen. Es soll $L \gg l_{max}$ vorausgesetzt werden, wobei $l_{max}$ die größte Skala ist, auf der das Universum als nicht homogen angesehen werden muss, also etwa $l_{max} \approx 500$ Mpc. $L^3$ wird als *fair-sample volume* bezeichnet. Das Universum kann dann als Aneinanderreihung von Würfeln der Kantenlänge $L$ gedacht werden.

In (2.18) ist wie im Weiteren die Zeitabhängigkeit nicht explizit angegeben, um die Schreibweise zu vereinfachen. Außerdem werden Fluktuationen im Ortsraum immer mit $\delta(\mathbf{x})$ bezeichnet, solche im **k**-Raum dagegen mit $\delta_{\mathbf{k}}$. Die Fourierkomponenten $\delta_{\mathbf{k}}$ sind komplexe Größen, konkret

$$\delta_{\mathbf{k}} = \frac{1}{L^3} \int_{V_u} \delta(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{kx}} d^3x. \tag{2.20}$$

Wegen $\delta(\mathbf{x}) \in \mathcal{R}$ ist $\delta_{\mathbf{k}} = -\delta^*_{\mathbf{k}}$. Als Gaußsches Zufallsfeld gelten für den Mittelwert und die Varianz der Fourierkomponenten:

$$\langle \delta_{\mathbf{k}} \rangle = 0 \tag{2.21}$$

$$\langle \delta^2_{\mathbf{k}} \rangle = \sigma^2 = \sum_{\mathbf{k}} \langle |\delta_{\mathbf{k}}|^2 \rangle = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \delta^2_{\mathbf{k}}. \tag{2.22}$$

Dies definiert zugleich die Größe $\delta_{\mathbf{k}}$. Die Beschränkung der Wellenzahlen auf diskrete Werte ist offensichtlich unphysikalisch. Den Übergang zu kontinuierlichen Werten vollzieht man formal durch $L \to \infty$, und unter Berufung auf das kosmologische Prinzip schreiben wir alle $\mathbf{k}$-abhängigen Größen als richtungsunabhängig, also nur abhängig von $k = |\mathbf{k}|$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{L^3} \sum_{\mathbf{k}} \delta^2_k \to \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty P(k) k^2 dk. \tag{2.23}$$

Gleichung (2.23) definiert das so genannte *Power-Spektrum* $P(k)$. Da das Fluktuationsfeld als Gaußsches Zufallsfeld angenommen wird, ist seine Statistik durch das Powerspektrum vollständig bestimmt. Üblicherweise wird für das primordiale Powerspektrum ein skaleninvarianter Ansatz $P(k) = Ak^n$ verwendet. Eine besondere Stellung nimmt das so genannte *Harrison-Zel'dovich*-Spektrum mit dem Spektralindex $n = 1$ ein. Bereits 1970 postuliert (Harrison, 1970), wurde es später aus den inflationären Theorien gefolgert (z.B. Guth & Pi, 1982). Auch COBE-Messungen, nach denen $n = 1.1^{+0.45}_{-0.65}$ beträgt, sind damit konsistent (Smoot et al., 1992).

**Die Transferfunktion**

Die Form des Spektrums, wie es unmittelbar nach der Inflation vorliegt, wird während der Dauer der Plasmaepoche durch die in 2.1.2 und 2.1.3 besprochenen Dämpfungseffekte verändert. Ohne letztere würde $P(k)$ auf allen Skalen linear mit dem Skalenparameter anwachsen und also die Form eines Potenzgesetzes behalten. In einem HDM-Modell spiegelt sich die Wirkung des free streaming-Effektes im Powerspektrum dadurch, dass Skalen unterhalb einer Grenzwellenlänge $\lambda_{max}$ praktisch nicht präsent sind. Interessanter im Zusammenhang mit dieser Arbeit sind Modelle mit kalter Dunkler Materie. Hier weist das Powerspektrum einen Knick bei einer Skala $\lambda_{eq} \approx 13/\Omega h^2$ auf. Dies ist gerade die Ausdehnung des Horizonts zum Zeitpunkt des Materie-Strahlungs-Gleichgewichtes. Für sehr kleine Skalen $\lambda \ll \lambda_{eq}$ verhält sich $P(k)$ asymptotisch wie $k^{n-4} \log^2 k$, wobei $n$ der oben genannte Spektralindex ist. Die Ursache dieser Verformung des Powerspektrums liegt darin, dass Fluktuationen auf verschiedenen Skalen zu unterschiedlichen Zeitpunkten in den Horizont eintreten. Fluktuationen kleiner als der Horizont zur Zeit $t_{eq}$ werden demnach noch während der strahlungsdominierten Epoche vom Horizont „eingeholt", und ihr Wachstum stagniert wegen des Meszaros-Effektes. Die Fluktuationen auf Skalen größer als $\lambda_{eq}$ werden durch diesen Effekt nicht beeinträchtigt, da diese während der Strahlungsepoche offensichtlich größer als waren der Horizont, der den Wirkungsradius sämtlicher physikalischer Effekte innerhalb einer bestimmten Zeit begrenzt.

Die Auswirkung aller Effekte, die auf das Powerspektrum Einfluss nehmen, kann in einer Funktion $T(k)$ zusammengefasst werden. Diese so genannte *Transferfunktion* stellt eine einfache Beziehung her zwischen dem ursprunglichen Powerspektrum $P(k, t_i)$ und demjenigen, das sich bis zum Abklingen der besprochenen Effekte zur Zeit $t_f$ eingestellt hat:

$$P(k, t_f) = T^2(k, t_f) \left[ \frac{\mathcal{D}(t_f)}{\mathcal{D}(t_i)} \right]^2 P(k, t_i). \tag{2.24}$$

Dabei ist noch das skalenunabhängige lineare Wachstum der Fluktuationen zwischen $t_i$ und $t_f$ berücksichtigt. Dies geschieht mit Hilfe des *linearen Wachstumsfaktors* $\mathcal{D}$, wobei für ein EdS-Universum $\mathcal{D}(t) \propto t^{2/3}$ gilt. Da spätestens zum Zeitpunkt der Entkopplung die Dämpfungseffekte ihre Wirkung verlieren, ist es angemessen, für $t_f$ einen beliebigen Zeitpunkt $t_{rec} < t_f < t_{lin}$ zu wählen, wobei $t_{lin}$ die Gültigkeit der linearen Näherung begrenzt.

In der Literatur findet man unterschiedliche Transferfunktionen für gleiche kosmologische Modelle. In der vorliegenden Arbeit wurde die von Bardeen et al. (1986) für CDM-Modelle vorgeschlagene gewählt:

$$T(k) = \frac{\log(1 + 2.34q)}{2.34q} \left[1 + 3.89q + (16.1q)^2 + (5.46q)^3 + (6.71q)^4\right]^{-\frac{1}{4}}, \tag{2.25}$$

mit $q = k\Theta^{1/2}/(\Omega h^2)$ und $\Theta = \Omega_{rel}/1.68\Omega_{rad}$. $\Omega_{rel}$ ist der Energiedichteanteil relativistischer Teilchen, $\Omega_{rad}$ derjenige der Photonen.

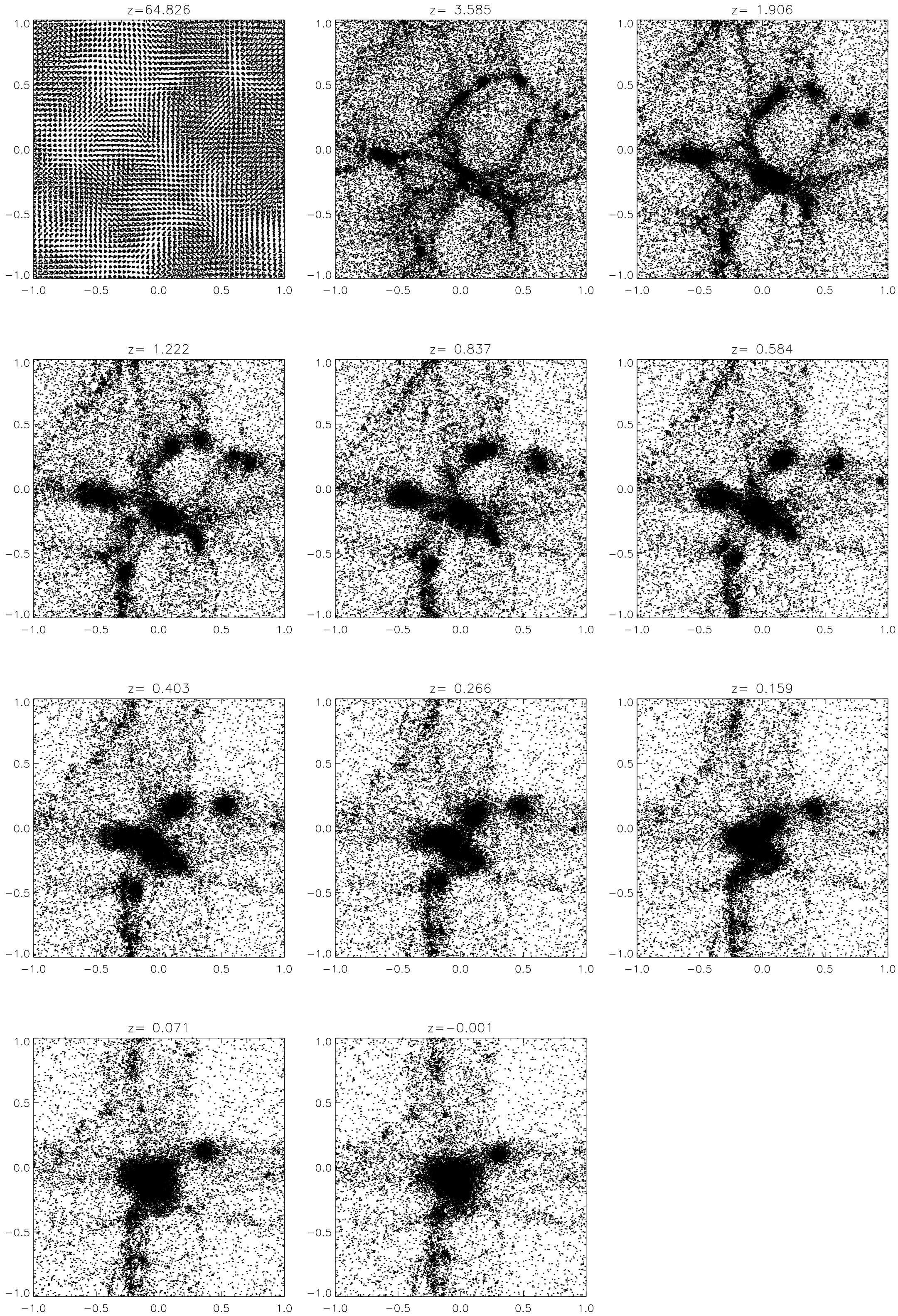


Abbildung 2.1: Die Entwicklung von Struktur in einem CDM-Modelluniversum, beginnend in einem primordialen Stadium bis $z = 0$. Die Kantenlänge der Simulationsbox beträgt 1 Mpc. Die Bilder zeigen die Entwicklung in gleichen zeitlichen Abständen von jeweils 1.3 Gyr, die entsprechende Rotverschiebung ist über jedem Bild angegeben.

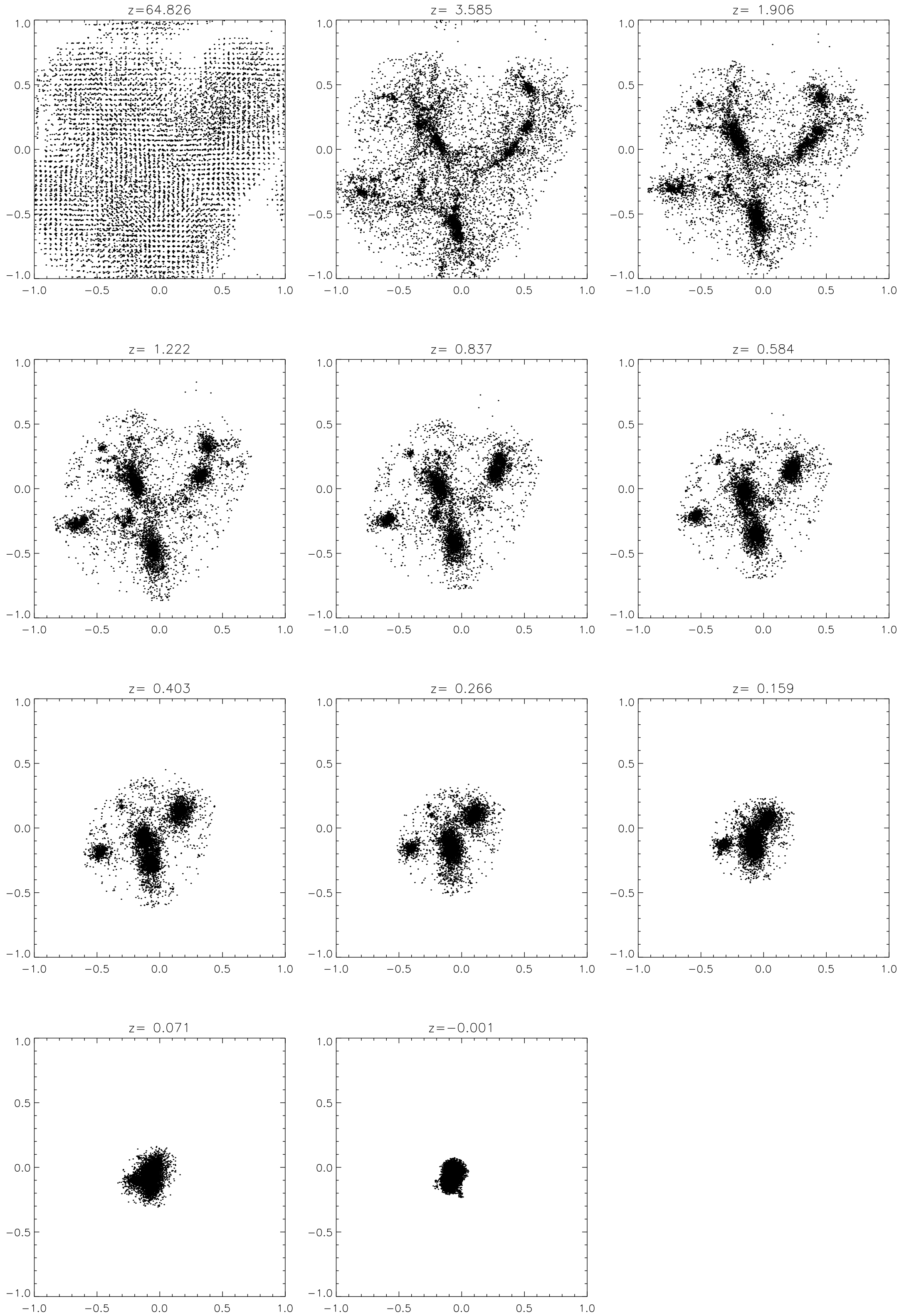


Abbildung 2.2: Die Entstehung eines Dunklen Halos in derselben Simulation wie in Abbildung 2.1. Es sind nur die Teilchen abgebildet, die bei $z = 0$ als zu dem Cluster gehörig identifiziert wurden. Die Bilder zeigen die Entwicklung in gleichen zeitlichen Abständen von jeweils 1.3 Gyr, die entsprechende Rotverschiebung ist über jedem Bild angegeben. Der hierarchische Formationsprozess wird hier anschaulich demonstriert.

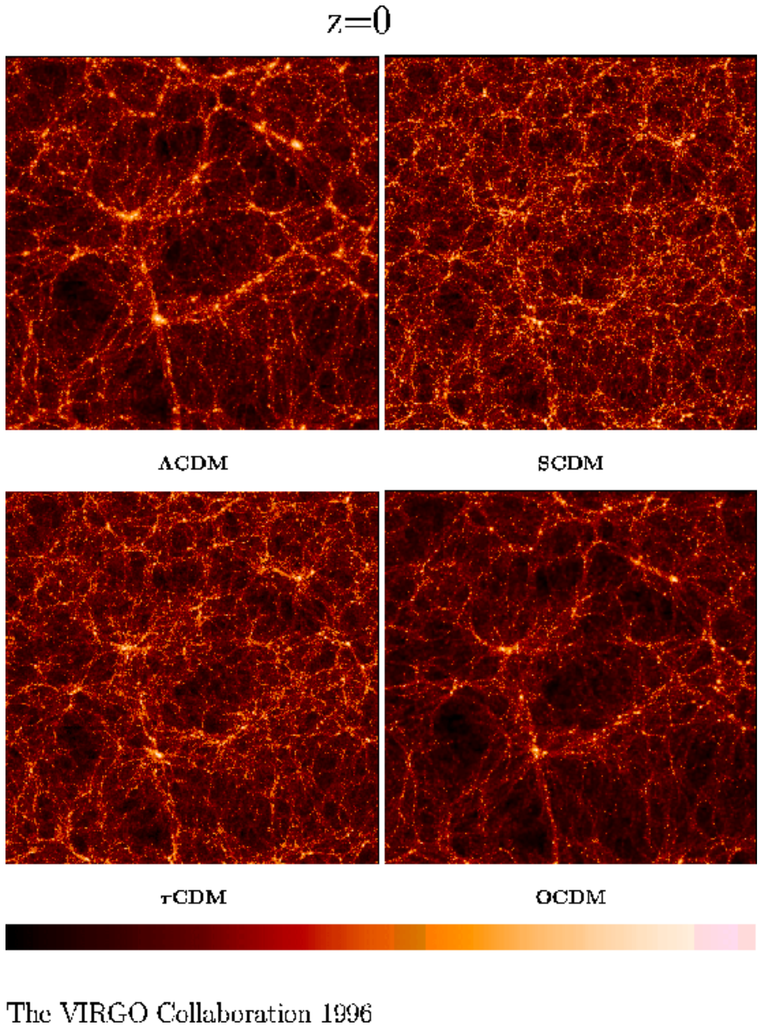


Abbildung 2.3: Simulationen der großskaligen Strukturbildung in verschiedenen kosmologischen Modellen. Das SCDM- sowie das $\tau$CDM-Modell sind von kritischer Dichte, $\Omega_m = 1$. $\tau$CDM steht für ein Universum mit zerfallenden Neutrinos als Dunkler Materie; dieses Modell sei hier nicht näher betrachtet. Die beiden anderen Modelle haben eine geringere Materiedichte von $\Omega_m = 0.3$. Die Kantenlänge ist in allen Fällen $240/h$ Mpc. Die offenen Modelle weisen entsprechend der Erläuterungen im Text sichtbar weniger Struktur auf kleineren Skalen und entsprechend größere Leerräume, so genannte *Voids* auf. Ein geneigter Betrachter mag feststellen, dass die auffallenden Knotenpunkte der Filamente im $\Lambda$CDM-Fall ausgeprägter erscheinen als im OCDM-Modell. Dies ist eine Folge der längeren Entwicklungsdauer des $\Lambda$CDM-Modells bei einer sonst gleichen Physik der Strukturbildung. (Abbildung mit freundlicher Genehmigung von Jörg M. Colberg und dem Virgo Consortium.)

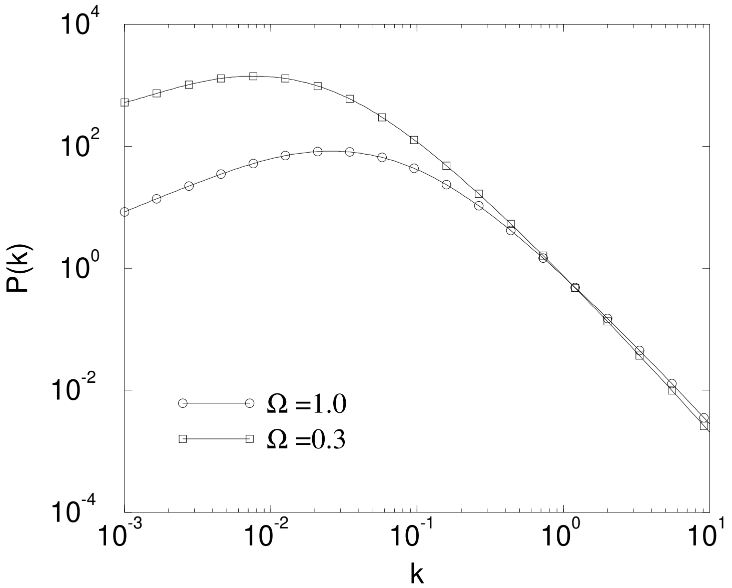


Abbildung 2.4: Powerspektrum der Dichtefluktuationen in einem EdS-Modell ($\Omega = 1$) und einem offenem (bzw. ΛCDM-)Modell. Im Falle eines Modells mit geringer Massendichte $\Omega = 0.3$ ist das Maximum zu kleineren Wellenzahlen, d.h. größeren Skalen hin verschoben. Dies wurde unter Abschnitt 2.1.4 erläutert. Die Einheiten auf beiden Achsen sind willkürlich.

# Kapitel 3

# Stoßfreie $N$-Körper-Systeme

Die Entwicklung der Computer-Ressourcen hinsichtlich ihrer Schnelligkeit und Speicherkapazität hat in den vegangenen Jahren einen rapiden Verlauf genommen. Vor diesem Hintergrund haben die verschiedenen Techniken der numerischen Simulation einen überragenden Stellenwert in vielen Disziplinen der modernen Astrophysik erhalten, in der kosmologischen Strukturbildung insbesondere. Moderne Software in Verbindung mit der Spezial-Hardware GRAPE ermöglicht Simulationen mit $10^6$ Teilchen binnen einer Woche, und Rechnungen mit 125000 Teilchen beanspruchen nicht mehr als eine Nacht. Der große Nutzen der Simulationen beschränkt sich aber nicht auf die Weiterführung der analytischen Methoden. Vielmehr haben manche Theorien im Rahmen der Strukturbildung wie etwa das *sphärische Kollaps-Modell* oder die lineare Theorie kleiner Störungen erst mit Hilfe numerischer Simulationen die Etablierung erfahren, die sie heute genießen, da sie vorher keinerlei Überprüfung zugänglich waren.

Sobald die anfänglichen Störungen des Dichtefeldes zu nichtlinearen Strukturen mit $\delta > 1$ anwachsen, kann ihre Dynamik nur noch mit Hilfe von Simulationen nachvollzogen werden. Zu ihrer Durchführung ist es notwendig, eine nach problemabhängigen Kriterien ausgewählte Anfangskonfiguration $\{\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i\}$ der Teilchenverteilung vorzugeben. Zu diesem Zweck hat sich die früher schon erwähnte Zel'dovich-Näherung als äußerst nützliches Hilfsmittel erwiesen. Sie gestattet eine Entwicklung des Systems beginnend bei einer homogenen gitterartigen Verteilung der Teilchen (entsprechend $a = 0$) bis hinein in das „gemäßigt nichtlineare" Regime ($\delta \approx 1$). Dies geschieht — darin liegt eine Stärke dieser Methode — mit einem Rechenzeitaufwand, der verschwindend gering ist, verglichen mit den noch zu besprechenden $N$-Körper-Methoden. Die Zel'dovich-Methode ihrerseits bedarf der Kenntnis des Potenzialfeldes, das von der Gesamtheit aller Teilchen erzeugt wird, um schließlich die einzelnen Teilchen entlang der Potenzialgradienten den lokalen Dichtemaxima zu zu bewegen. Die Verteilung der primordialen Fluktuationen genügt einer Gaußschen Statistik. Damit besteht die Möglichkeit, das Dichtefeld durch eine einzige Funktion zu charakterisieren, namentlich durch das Powerspektrum $P(k)$, wie es sich im Verlauf der Plasmaphase entwickelt.

In diesem Kapitel wird zuerst die vielzitierte Zel'dovich-Approximation erläutert, sowie die Art und Weise, wie die Anfangsbedingungen für die kosmologischen Simulationen in der vorliegenden Arbeit erzeugt wurden. Der zweite Abschnitt ist den grundlegenden Eigenschaften stoßfreier $N$-Körper-Systeme, der dritte den numerischen Techniken ihrer Simulation gewidmet.

## 3.1 Die kosmologischen Anfangsbedingungen

### 3.1.1 Zel'dovich-Approximation

In der vorliegenden Arbeit wurde bei der Beschreibung der Dichtefluktuationen, soweit bisher geschehen, von einer *Eulerschen* Formulierung Gebrauch gemacht. Das heißt, alle Größen wurden von einem Beobachter gemessen, der in einem mit der globalen Expansion des Universums sich mitbewegenden Koordinatensystem harrt. Alternativ dazu ist eine Formulierung der Theorie möglich, die die Perspektive eines mit dem *gestörten* Fluidum mitbewegten Beobachters zu Grunde legt (*Lagrangesche* Formulierung). Die von Zel'dovich (1970) vorgeschlagene Näherung macht davon Gebrauch. Ein wesentlicher Grundgedanke ist, dass die Trajektorien der Teilchen im linearen Regime auf Geraden liegen:

$$\mathbf{x}(\mathbf{q}, \mathcal{D}) = \mathbf{q} + \mathcal{D}\mathbf{S}(\mathbf{q}). \tag{3.1}$$

$\mathbf{q} = \mathbf{x}(t_i)$ ist die ursprüngliche, *ungestörte* Koordinate eines Teilchens, $\mathbf{x}$ die mitbewegte, Eulersche Koordinate. Der zweite Term der rechten Seite beschreibt die Auslenkung der Teilchen von ihrer Ausgangsposition. Dabei ist $\mathcal{D}$ der in Gl. (2.24) zuerst erwähnte lineare Wachstumsfaktor, $\mathbf{S}(q)$ ist das *konstante* Verschiebungsfeld, das ein Maß für die Abweichung der Teilchen von ihrer Ausgangslage darstellt[1]. Der Dichtekontrast entlang der Trajektorie berechnet sich dann mit Hilfe der Jakobi-Determinante

$$\det \mathcal{J}(\mathbf{q}, t) \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x_i}{\partial q_i} \tag{3.2}$$

der Abbildung $f : \mathbf{q} \rightarrow \mathbf{x}$ zu

$$\delta(\mathbf{q}, t) = \det \mathcal{J}(\mathbf{q}, t)^{-1}[1 + \delta(\mathbf{q}, t_i)] \tag{3.3}$$

(Monaco, 1997). Die Variable $t$ in der Jacobi-Determinante beschreibt die Zeitabhängigkeit des linearen Wachstumsfaktors $\mathcal{D} = \mathcal{D}(t)$ in Gleichung (3.1). Das Verschiebungsfeld $\mathbf{S}(\mathbf{q})$ hängt über die Beziehungen

$$\mathbf{S}(\mathbf{q}) = \nabla\Phi_0(\mathbf{q}) \quad \text{und} \quad \nabla^2\Phi_0(\mathbf{q}) = -\delta_0(\mathbf{q}) \tag{3.4}$$

mit dem Dichtefeld $\delta_0$ zusammen (Schneider & Bartelmann, 1995). $\delta_0$ seinerseits ist ein Gaußsches Feld, dem die gewünschten statistischen Eigenschaften des anfänglichen Dichtefeldes unter Verwendung des Powerspektrums aufgeprägt sind. Die Realisierung dieses Dichtefeldes mit einer Verteilung diskreter Massenpunkte geht dann so vor sich, dass die ursprünglich auf den Knoten eines regulären kubischen Gitters fixierten Teilchen mit Hilfe von Gleichung (3.1) aus ihrer Lage verschoben werden. Durch Ableitung derselben Gleichung folgt unmittelbar für die Teilchengeschwindigkeiten

$$\mathbf{v}(\mathbf{q}, \mathcal{D}) = \dot{\mathcal{D}}\mathbf{S}(\mathbf{q}). \tag{3.5}$$

Neben dem geringen Rechenaufwand ist es ein weiterer Vorteil dieser Methode gegenüber der Eulerschen linearen Theorie, dass die Näherung (3.1) bis in den nichtlinearen Bereich $\delta > 1$ hinein ihre Gültigkeit behält. Der Grund hierfür liegt in der Lagrangeschen Formulierung der Störungstheorie: Die Dichte erscheint nicht explizit und muss also nicht linearisiert werden.

[1]Hier sind die Abweichungen zu einer bestimmten, im Grunde willkürlich festzulegenden Zeit gemeint. Die tatsächliche Auslenkung der Teilchen zu einer beliebigen Zeit $t$ ist dann $\mathcal{D}(t)\mathbf{S}(\mathbf{q})$.

### 3.1.2 Erzeugung der Anfangsbedingungen

In der Praxis beginnt die Erzeugung einer Anfangskonstellation für eine kosmologische $N$-Körper-Simulation mit der Wahl eines Gaußschen Feldes $\delta_0$ das durch ein gewähltes Powerspektrum $P(k)$ charakterisiert wird. Von dem ausgehend können mit Hilfe der Gleichungen (3.4), (3.1) und (3.5) die Positionen und Geschwindigkeiten der Teilchen berechnet werden.

Das Powerspektrum, wie man es aus den Gleichungen (2.24) und (2.25) berechnen kann, ist allerdings noch zu normieren. Hier gibt es mehrere Möglichkeiten. Einen Überblick findet man z.B. bei Lachize-Rey & Gunzig (1999). In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Normierung über die rms-Massen-Fluktuation $\sigma_X$ auf einer Skala von $X = 8h^{-1}$ Mpc bei $z = 0$. Diese Wahl, $8h^{-1}$ Mpc, rührt daher, dass die rms-Fluktuationen auf dieser Skala heute in etwa von der Größe $\sigma_8 \approx 1$ und also noch linear sind. Ihre Amplituden können dann mit Hilfe der linearen Theorie auf jede Epoche $z > 0$ zurück gerechnet werden. Die Normierungsbedingung für $P(k)$ ist gegeben durch

$$\sigma_8^2 \equiv \int_0^\infty P(k)W^2(kR)d^3k; \quad R = 8h^{-1}\mathrm{Mpc} \tag{3.6}$$

mit der Filterfunktion

$$W(kR) = \frac{3}{(kR)^3}(\sin kR - kR\cos kR) \tag{3.7}$$

(Gelb & Bertschinger, 1994).

Der genaue Wert von $\sigma_8$ kann z.B. aus der von *COBE* gemessenen Anisotropie der Hintergrundstrahlung bestimmt werden — siehe etwa Wright et al. (1992), Efstathiou et al. (1992) oder Adams et al. (1993) — oder aber aus der beobachteten Anzahldichte von Galaxienhaufen, siehe Gladders & et al. (2000), Bahcall (1998) oder White et al. (1993). Letztere finden für flache Modelle ($\Omega_m + \Omega_l = 1$) den Zusammenhang zwischen $\sigma_8$ und der mittleren Materiedichte von der Form

$$\sigma_8 \approx 0.57\Omega_m^{-0.56}. \tag{3.8}$$

Aus dem normierten Powerspektrum berechnen sich dann die Moden des gesuchten Gaußschen Feldes zu

$$\delta_k = \sqrt{\frac{1}{2}P(k)}(R_1 + iR_2) \tag{3.9}$$

(Cen, 1992). Dabei ist $i = \sqrt{-1}$, und $R_1, R_2 \in [0,1]$ sind Gaußsche Zufallszahlen. Das Dichtefeld $\delta(\mathbf{x})$ im Ortsraum bei $z = 0$ erhält man durch Fourier-Transformation von $\delta_\mathbf{k}$.

Schließlich muss $\delta(\mathbf{x}, z = 0)$ noch auf eine Anfangsrotverschiebung $z_i$ normiert werden, bis zu der die Zel'dovich-Näherung angewendet werden soll. Bedingung hierfür kann ein maximaler auf dem gesamten Simulationsvolumen zugelassener Dichtekontrast $\delta_{max}(z) \equiv \max\{\delta(z, \mathbf{x})\}$ bei $z = z_i$ sein, wobei die Wahl des konkreten Wertes von $\delta_{max}(z_i)$ einer gewissen Willkür unterliegt. Mit dieser Bedingung berechnet sich die Anfangsrotverschiebung zu

$$z_i = \frac{\delta_{max}(0)}{\delta_{max}(z_i)} - 1. \tag{3.10}$$

Die bei *dieser* Rotverschiebung nach den Gleichungen der Zel'dovich-Näherung erhaltenen Positionen und Geschwindigkeiten der Teilchen bilden die Anfangskonstellation für numerische Simulationen.

In der hier vorliegenden Arbeit wurde die oben geschilderte Prozedur für jede Simulation mit Hilfe des frei zugänglichen f77-Programms *GRAFIC* (*G*aussian *RA*ndom *F*ield *I*nitial *C*onditions) ausgeführt, das einen Teil des Programm-Packetes *COSMICS* von E. Bertschinger (Ma & Bertschinger, 1995) darstellt.

## 3.2 Stoßfreie Systeme

### 3.2.1 Die Stoßfreie Boltzmann-Gleichung

Dem Standardparadigma folgend geht man davon aus, dass die Dunkle Materie im Universum stoßfrei ist und nur gravitativ wechselwirkt. Wann immer von einem *stoßfreien* System die Rede ist, sei damit gemeint, dass die einzelnen Teilchen sich unter dem Einfluss eines globalen Potenzials $\Phi$ bewegen, wobei Zwei-Körper-Wechselwirkungen keine Rolle spielen sollen. Geht man weiter von der Annahme aus, dass die in Kapitel 1.2.2 erwähnten *WIMPS* mit Massen $m < 10$ GeV den Großteil der Dunklen Materie ausmachen, so folgt daraus für eine mittlere Anzahldichte von ca. $10^{50}$ Teilchen/pc$^3$. Die Beschreibung solch eines Systems mit Hilfe gekoppelter Bewegungsgleichungen für die einzelnen Teilchen ist offensichtlich nicht möglich, vielmehr bedient man sich der Methoden der statistischen Mechanik. In ihr wird ein Ensemble von Teilchen durch eine kontinuierliche Funktion, die so genannte *Phasenraumdichte* $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ersetzt, die den Zustand eines Systems vollständig bestimmt. Ihre zeitliche Entwicklung unterliegt der *stoßfreien Boltzmann-Gleichung* (Binney & Tremaine, 1987)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \nabla\Phi\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0. \tag{3.11}$$

$\Phi$ ist das von der Gesamtheit der Teilchen erzeugte Gravitationspotenzial und es gilt

$$\nabla\Phi = \dot{\mathbf{v}}. \tag{3.12}$$

Zwei-Körper-stöße würden den betroffenen Teilchen Geschwindigkeiten aufprägen, für die Gleichung (3.12) nicht mehr gültig ist. Die Bewegungsgleichung für ein solches stoß*dominiertes* System unterscheidet sich von Gleichung (3.11) durch einen nichtverschwindenden Term auf der rechten Seite.

Die Masse innerhalb eines um $(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0)$ herum zentrierten Phasenraum-Volumenelmentes $d^3xd^3v$ ist gerade $f(\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0, t)d^3xd^3v$. Die Massendichte an einem festen Ort ergibt sich entsprechend durch Integration über alle Geschwindigkeiten im zugehörigen Abschnitt des Phasenraumes. Die Poisson-Gleichung kann damit wie folgt geschrieben werden:

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G \int f d^3\mathbf{v} \tag{3.13}$$

Die Funktion $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ ist also gerade dann eine Lösung eines stoßfreien Systems, wenn sie gleichzeitig die stoßfreie Boltzmann-Gleichung und die Poisson-Gleichung erfüllt. Die physikalische Aussage der fundamentalen Gleichung (3.11) ist, dass die Phasenraum-Dichte in der lokalen Umgebung eines Teilchens der Dunklen Materie (oder aber eines Sternes innerhalb einer Galaxie[2]) zeitlich konstant ist. Zur Erläuterung sei wieder auf Binney & Tremaine (1987)

[2]Alle in diesem Abschnitt zu besprechende Theorie gilt für die Sterne einer Galaxie in gleicher Weise wie für die Teilchen der Dunklen Materie. In der vorliegenden Arbeit wird im Wesentlichen von Dunkler Materie die Rede sein, deswegen bezeichne ich die Konstituenten eines stoßfreien Systems im Weiteren schlicht als „Teilchen".

verwiesen.

### 3.2.2 Das Virialgleichgewicht

Der gravitative Kollaps, den gebundene Systeme aus Dunkler Materie im Laufe der kosmologischen Entwicklung erfahren, führt letztlich zu Objekten, die gegen weiteren Kollaps stabil sind. Die stabilisierende Kraft kann ihre Ursache in einer Rotation des Systems haben, oder aber in einer hinreichend großen Geschwindigkeitsdispersion der einzelnen Teilchen. Der in diesem Abschnitt zu besprechende *Virialkoeffizient* $\eta$ stellt ein Maß für die Ausgeprägtheit eines dynamischen Gleichgewichtes in einem stoßfreien System dar. Bei der Herleitung des fundamentalen *Virialtheorems* halte ich mich an Longair (1998), wo von Beginn an die gravitative Natur der Kraft vorausgesetzt wird. Das Virialtheorem gilt indes — in allgemeinerer Form — für jedes der statistischen Mechanik zugängliche System und kann abgeleitet werden, ohne vorher ein Kraftgesetz zu spezifizieren (Goldstein, 1950).

Die mit Ortsvektor $\mathbf{r}_i$ multiplizierte Kraft aller Teilchen auf das Teilchen $i$ ist

$$m_i \mathbf{r}_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \tag{3.14}$$

Mit $d^2/dt^2(r_i^2) = 2(\ddot{\mathbf{r}}_i \mathbf{r}_i + \dot{\mathbf{r}}_i \dot{\mathbf{r}}_i)$ kann dies in der Form

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(m_i r_i^2) - m_i \dot{r}_i^2 = \sum_{i \neq j} G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} \tag{3.15}$$

geschrieben werden. Diese Gleichung summiere man über alle Teilchen,

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i r_i^2 - \underbrace{\sum_i m_i \dot{r}_i^2}_{2T} = \sum_i \sum_{j \neq i} G m_i m_j \frac{\mathbf{r}_i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|^3} = \underbrace{-\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}}_{U}, \tag{3.16}$$

wobei die zweite Identität unter Verwendung der Beziehung

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \mathbf{r}_i(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) = -\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 \tag{3.17}$$

folgt. Man beachte nun, dass der zweite Term der linken Seite bis auf einen Faktor der kinetischen Energie $T$ des Systems entspricht, während die rechte Seite gleich der potenziellen Energie $U$ ist. Für ein System im statistischen Gleichgewicht, charakterisiert durch

$$\frac{d^2}{dt^2}\sum_i m_i r_i^2 = 0, \tag{3.18}$$

folgt aus (3.16) unmittelbar das Virialtheorem

$$\boxed{2T = -U}. \tag{3.19}$$

Der Virialkoeffizient $\eta$ ist entsprechend definiert als

$$\eta = \left| \frac{U}{2T} \right|. \tag{3.20}$$

Für ein System im dynamischen Gleichgewicht hat $\eta$ demnach einen Wert $\geq 1$. Ein solches System heißt auch „virialisiert". Ein Objekt mit einem kleineren Virialkoeffizienten $\eta < 1$ hingegen ist noch in der Relaxationsphase. Dies wird in späteren Kapiteln als wichtiges Kriterium für die Wahl der zu untersuchenden Halos in den Simulationen herangezogen.

### 3.2.3 Zeitskalen

Der Begriff des „stoßfreien Systems" bedarf noch einer etwas genaueren — quantitativen — Erläuterung. Wie oben erwähnt soll ein System als „stoßfrei" bezeichnet werden, wenn die Wechselwirkung nahe benachbarter Teilchen keinen Einfluss auf das System als Ganzes nimmt. In einem System mit diskreter Massenverteilung kann dies immer nur eine Näherung sein, die zudem während der zeitlichen Entwicklung des Systems an Gültigkeit verlieren kann.

Jedem $N$-Körper-System sind 2 Zeitskalen aufgeprägt, deren Verhältnis zueinander als grobes Kriterium für die Anwendbarkeit der stoßfreien Boltzmann-Gleichung dienen kann.

#### Die Relaxationszeit $t_{relax}$

Die in jedem diskreten System vorhandenen 2-Körperstöße dürfen über *den* Zeitraum als unerheblich angesehen werden, während dessen die Änderung der Geschwindigkeit $\Delta\mathbf{v}$ eines Teilchens durch lokale Wechselwirkung klein gegen seine Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ ist. Binney & Tremaine (1987) führen eine Abschätzung der Größenordung von $\Delta\mathbf{v}/\mathbf{v}$ für ein System mit einem charakteristischen Radius

$$R = \frac{G(Nm)^2}{|U|} \tag{3.21}$$

durch. Hier ist $N$ die Zahl der Teilchen, $m$ deren Masse, die ohne Beschränkung der Allgemeinheit identisch für alle Teilchen angenommen sei, und $U$ ist die gesamte potenzielle Energie. Aus dem Virialtheorem (3.19) erhält man für die Teilchen des Systems eine typische Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ von

$$\mathbf{v} = \sqrt{\frac{GNm}{R}}. \tag{3.22}$$

Die stoßbedingte Änderung der Geschwindigkeitskomponente senkrecht zu $\mathbf{v}$, $\Delta\mathbf{v}_\perp$, ergibt sich durch Integration über alle möglichen Kräfte und Stoßparameter $b$ (von $b_{min}$ bis $R$) entlang der Bahn des betrachteten Teilchens zu

$$\frac{\Delta v_\perp^2}{v^2} = \frac{8\ln\Lambda}{N} \tag{3.23}$$

$$\text{mit} \qquad \Lambda = \frac{R}{b_{min}}$$

$$\text{und} \qquad b_{min} = \frac{Gm}{v^2}.$$

Dies gilt für *eine* „Reise" des Teilchens durch das System. Die Zahl der Durchquerungen, die nötig ist, um die Geschwindigkeit des Teilchens um einen Betrag der Ordnung $\mathcal{O}(\mathbf{v})$ zu ändern ist gerade

$$n = \frac{N}{8\ln\Lambda}. \tag{3.24}$$

Setzt man zuletzt eine Zeitdauer von $t_{cross} = R/v$, die das Teilchen für eine Durchquerung braucht, an, so ergibt sich damit eine dem System aufgeprägte Zeitskala, die *Relaxationszeit*, zu $t_{relax} = nt_{cross}$, also

$$\boxed{t_{relax} = \frac{R}{v}\frac{N}{8\ln N}}. \tag{3.25}$$

Hier wurde wegen $\Lambda = R/b_{min} \approx Rv^2/Gm \approx N$ noch $\Lambda$ durch $N$ ersetzt. Ein Teilchen erfährt also nach ca. $N/(8\ln N)$ Durchquerungen eine auf die „Körnigkeit" des Systems zurück zu führende signifikante Änderung seiner Geschwindigkeit.

Die Systeme, die vorwiegend Gegenstand dieser Arbeit sind — die Dunkle-Materie-Halos — sind damit als hochgradig stoßfrei anzusehen: Bereits ein kleiner Halo mit einer Ausdehnung von $R = 100$ kpc enthält in grober Abschätzung mindestens $N = 10^{68}$ Dunkle-Materie-Teilchen — WIMPS mit $m < 30$ GeV wiederum vorausgesetzt. Damit müsste ein Teilchen den Halo typischerweise $N/(8\ln N) \approx 10^{65}$ mal durchqueren, um eine signifikante stoßbedingte Änderung seiner Geschwindigkeit zu erfahren. Auch in Galaxien mit $N \approx 10^{11}$ Sternen benötigen diese noch mehr als $10^8$ Durchläufe, um stoßdominiert zu sein. Die typische Zeit, die ein Stern braucht um einen Galaxie zu umrunden ist $10^8$ Jahre. Damit ist die Relaxationszeit einer Galaxie bei weitem größer als das Alter des Universums. Galaxienhaufen andererseits bestehen nur aus etwa $10^3$ Konstituenten. Damit sind bereits weniger als 20 Durchquerungen ausreichend, um eine stoßdominierte Dynamik zu erhalten. Allerdings liegen die typischen Durchquerungszeiten für Galaxien in einem Haufen bei ca. $10^9$ Jahren, so dass die entsprechende Relaxationszeit in diesem Falle mit dem Alter des Universums vergleichbar ist. Demnach stehen Galaxienhaufen mehr oder minder stark unter dem Einfluss der Wechselwirkung zwischen den einzelnen Galaxien.

Allgemein bedingen die 2-Körper-Stöße innerhalb eines Systems einen Trend zur Gleichverteilung der Teilchenenergien. Nach Ablauf einer Zeit $t \approx t_{relax}$ verliert das System schließlich zunehemend die Information über seinen Anfangszustand.

An Stelle der hier angeführten Durchquerungszeit $t_{cross}$ findet in der Stellardynamik oft eine andere charakteristische Zeitskala Verwendung, die so genannte *dynamische Zeit* $t_{dyn}$, die definiert ist durch

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{3\pi}{16G\rho}} \tag{3.26}$$

(Binney & Tremaine, 1987). $\rho$ ist dabei die mittlere Dichte des betrachteten Systems. $t_{dyn}$ entspricht der Zeit, die ein anfangs in Ruhe befindliches Testteilchen benötigt, um zum Zentrum des Systems zu gelangen. Zudem charakterisiert diese Zeitskala die Dauer, nach der das System auf eine äußere Störung reagiert. Dies ist von Bedeutung bei der numerischen Simulation eines solchen Systems, denn die Zeitschritte, über die die Kräfte integriert werden, sollten wesentlich kleiner sein als $t_{dyn}$.

## 3.3 Die numerische Simulation stoßfreier $N$-Körper-Systeme

### 3.3.1 Die hierarchische *Tree*-Methode

Die vom Konzept her einfachste Möglichkeit der Simulation eines Systems vieler Teilchen besteht darin, die Beschleunigung eines jeden Teilchens aus der Summe der Kräfte aller anderen Teilchen auf je ein bestimmtes zu berechnen. Diese *direkte* oder *particle-particle-* (*PP*-)Methode hat den Nachteil eines rapide ansteigenden zeitlichen Aufwandes bei steigender Teilchenzahl. Der aufwendigste Teil der Rechenarbeit steckt in der Berechnung der Kraft zwischen je zwei Teilchen. Pro Zeitschritt sind $N(N-1)/2$ Paarwechselwirkungen zu berechnen, wobei $N$ die Anzahl der Teilchen ist. Die benötigte CPU-Zeit ist daher von der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$.

Seit nunmehr drei Jahrzehnten werden numerische Verfahren entwickelt, die auf eine höhere Effizienz bei gegebenen verfügbaren Computer-Ressourcen abzielen.

Die Klasse der so genannten *Gitter-Codes* arbeitet generell nach dem Prinzip, dass jeweils einzelne Gruppen von Teilchen innerhalb eines begrenzten Gebietes zusammengefasst und als „Pseudoteilchen" behandelt werden, die auf einem Knotenpunkt eines zuvor definierten Gitters lokalisiert sind (Miller, 1978, Hockney & Eastwood, 1988). Die aufwendigen Abstandsberechnungen der direkten Methode fallen damit bereits weg, da die Abstände der Knotenpunkte eines festen Gitters nur einmal berechnet werden müssen. Zudem reduziert sich die effektive Anzahl $N_{eff}$ der beteiligten Teilchen, was durch die $N_{eff}^2$-Skalierung der CPU-Zeit einen großen Gewinn an Effizienz mit sich bringt. Der Zeitaufwand dieser Methode als Funktion der Teilchenzahl $N$ skaliert mit $\mathcal{O}(N \log N)$.

Eine Weiterentwicklung dieser so genannten *particle-mesh-* oder kurz *PM*-Methode ist ihre Kombination mit der *PP*-Metode. Man bezeichnet solche Codes entsprechend als *particle-particle particle-mesh-* oder kurz *PPPM-* bzw. $P^3M$-Codes (Hockney & Eastwood, 1988, Efstathiou et al., 1985). Bei ihnen werden Teilchen, die nahe beieinander liegen der direkten Methode unterzogen, solche in größerer Distanz der *PM*-Methode. Dieses Verfahren ist unter anderem für kosmologische Simulationen gut geeignet, denn sie gestattet eine relativ genaue Berechnung kleinskaliger Strukturen bei verhältnismäßig unaufwendiger Einbeziehung des großräumigen Dichtefeldes. Der wesentliche Vorteil dieser Methode gegenüber der *PM*-Methode ist, dass ein relativ großer Bereich an Längenskalen gleichzeitig simuliert werden kann; allerdings wirkt sich die direkte Summation der unmittelbaren Nachbarteilchen zeitraubend aus, so dass die CPU-Zeit hier mit $\mathcal{O}(N_n N)$ skaliert, wobei $N_n$ die typische Anzahl der direkt zu berechnenden Nachbarteilchen ist.

Die zweite große Klasse von Codes zur *N*-Körper-Simulationen sind die *hierarchischen TREE-Codes*. Auch hier liegt das Prinzip zu Grunde, den Einfluss der unmittelbaren Umgebung auf ein Teilchen nach der direkten Methode zu berechnen, wohingegen der langreichweitige Anteil der Gravitation nur näherungsweise berücksichtigt wird. Die Mittelung des Dichtefeldes geschieht nun jedoch nicht mit einem festen Gitter, sondern einer veränderlichen, von der Geometrie des Systems abhängigen hierarchischen Unterteilung des Systems. Die in der vorliegenden Arbeit verwendete Version des Codes stammt in seinen wesentlichen Zügen von Barnes & Hut (1986).

### *Tree*-Struktur

Die Konstruktion der hierarchischen *Tree*-Struktur geschieht wie folgt: Das gesamte *N*-Körper-System ist in einem kubischen Volumen „verpackt", das in einem ersten Schritt in 8 identische Würfel unterteilt wird. Mit diesen neu entstandenen Teilvolumina 1. Ordnung wird ebenso verfahren wie auch mit allen weiteren neuen Teilvolumina (2., 3. usw. Ordnung), die sich in der Folge ergeben. Ein Raumgebiet wird erst dann nicht mehr auf diese Weise unterteilt, wenn sich in ihm nur noch *höchstens ein* Teilchen befindet. Nach Ende dieser Prozedur wird also jede nicht mehr unterteilte Region von *keinem* oder *einem* Teilchen „bewohnt". Bereits während der Aufteilungsprozedur wird für jedes Teilvolumen, das noch meherere Teilchen enthält die Gesamtmasse, der Massenschwerpunkt, und die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen berechnet. Die Kraft auf ein Teilchen wird nach einem Schema berechnet, dem der so genannte *TREE-walk* zu Grunde liegt. Dabei werden alle Untereinheiten des Simulationsvolumens durchlaufen — beginnend bei denen 1. Ordnung — die das gerade „aktive" Teilchen (d.h. das Teilchen, dessen Beschleunigung gerade berechnet werden soll) nicht enthalten. Sei nun $l$ die Länge der gerade betrachteten Zelle, $s$ der Abstand des aktiven Teilchens vom Rand der Zelle; wenn gilt

$$\frac{s}{l} < \Theta, \tag{3.27}$$

wobei $\Theta$ ein konstanter Toleranzparameter ist, so wird der Beitrag dieser Zelle zur Kraft auf das aktive Teilchen durch die Wirkung eines Pseudoteilchens angenähert, das die Gesamtmasse sowie die gemittelten weiteren Eigenschaften aller Teilchen in der aktuellen Zelle hat[3]. Optional kann an Stelle der einfachen Mittelung auch eine Multipolentwicklung der Massenverteilung erfolgen — mit dem Effekt höherer Genauigkeit auf Kosten höherer Rechenzeit (siehe etwa Pfalzner & Gibbon, 1997). Ist (3.27) nicht erfüllt, so wird die betrachtete Zelle aufgeteilt in ihre zuvor definierten Untereinheiten nächsthöherer Ordnung, und das Kriterium wird von neuem auf jedes Teilvolumen angewandt. Teilchen, die in hinreichend kurzer Distanz zum aktiven Teilchen liegen werden auf diese Weise nicht gruppiert, sondern tragen *einzeln* zur Beschleunigung des aktiven Teilchens bei — die nahe Umgebung wird also nach der direkten Methode berechnet.

Auf die geschilderte Weise wird die Gravitationswirkung der großräumigen Umgebung eines Teilchens in einer Genauigkeit berechnet, die sich an ihrer Entfernung vom aktiven Teilchen orientiert. Diese Näherung ist anschaulich gerechtfertigt durch die Tatsache, dass die Dynamik in der nahen Umgebung eines bestimmten Ortes nicht von der kleinskaligen Struktur in großer Distanz beeinflusst wird. Vielmehr kommt es darauf an, den Effekt der Gezeitenkräfte zu simulieren, den großskalige Strukturen auf die Entwicklung etwa des Drehimpulses einzelner Dunkler Halos ausüben (siehe auch Abschnitt 4.4).

Die *Tree*-Methode vereint die Vorteile der verschiedenen Gitter-Codes: Zum Einen können Längenskalen über viele Größenordnungen gleichzeitig simuliert werden, zum Anderen skaliert die CPU-Zeit mit $\mathcal{O}(N \log N)$, sofern der Wert des Toleranzparameters $\Theta$ aus dem Bereich $0.3 \ldots 1$ gewählt wird (Hernquist, 1987). Die typischen Fehler der Kraftberechnung liegen — verglichen mit der direkten Methode — bei weniger als 1%. Eine detailliertere Darstellung der *Tree*-Konstruktion sowie eine ausführliche Diskussion der *Tree*-Methode findet man bei Barnes & Hut, 1989 oder Pfalzner & Gibbon, 1997.

Alternativ zu der hier beschriebenen „top-down" Methode (beginnend beim gesamten System, hin zu den einzelnen Teilchen), ist es ebenso möglich, eine *bottom-up Tree*-Struktur zu erzeugen, deren Konstruktion bei den einzelnen Teilchen beginnt und zuletzt das System als Ganzes umfasst (Press, 1986). Die Pseudoteilchen werden in diesem Falle dadurch definiert, dass zunächst je zwei benachbarte Teilchen durch ihre Gesamtmasse, ihre mittlere Geschwindigkeit und ihren Massenschwerpunkt ersetzt werden (0. Ordnung). Alsdann werden die weiteren Pseudoteilchen durch Kombination derer 0. Ordnung erzeugt, bis letztlich die gemittelten Werte und die Gesamtmasse aller Teilchen auf einem Pseudoteilchen vereint sind.

[3]Dieses Kriterium führt nach Salmon & Warren (1990) zu Fehlern in der Kraftberechnung, wenn der geometrische und der Massenschwerpunkt innerhalb einer Zelle zu weit auseinander liegen. Sie haben deswegen als verbessertes Kriterium $s/\Theta + \delta < l$ vorgeschlagen, wobei $\delta$ der Abstand von geometrischen und Massenschwerpunkt innerhalb der Zelle ist.

Nachdem die *Tree*-Struktur durchlaufen ist, sind sämtliche Teilchen und Pseudoteilchen identifiziert, die in die Kraftberechnung eingehen. Die Koordinaten und Massen derselben können dann an die Spezial-Hardware GRAPE weitergegeben werden, die die Kraftberechnung auf direktem Wege (bei dennoch hoher Effizienz) durchführt — dazu siehe Abschnitt 3.3.3.

### 3.3.2 Zeitintegration

Neben der Berechnung der Kräfte hat jeder numerische Code zur $N$-Körper-Simulation die Aufgabe, das gesamte System mit Hilfe der Newtonschen Bewegungs-Gleichungen auf den neuen Zustand zu bringen, der sich nach je einem weiteren Zeitschritt und nach erneuter Berechnung der Kräfte einstellt. Die Dynamik eines Teilchens wird durch die Gleichungen

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} \tag{3.28}$$

beschrieben. Diese sind zu diskretisieren, um sie einer numerischen Lösung zugänglich zu machen. Zu diesem Zweck hat sich das so genannte *Leap-Frog*-Schema bewährt (Hockney & Eastwood, 1988), das den Ort $\mathbf{x}^{n+1}$ eines Teilchens nach dem $(n+1)$-ten Zeitschritt gemäß

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n + \mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}}\Delta t \tag{3.29}$$

aus dem Ort nach dem $n$-ten Zeitschritt berechnet, während die jeweiligen Geschwindigkeiten zu den Zeitpunkten *zwischen* zwei Ortsberechnungen bestimmt werden:

$$\mathbf{v}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{v}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{m}\mathbf{F}(\mathbf{x}^n)\Delta t. \tag{3.30}$$

Diese Form der Diskretisierung erfüllt mehrere notwendige Kriterien; so gehen die beiden obigen Gleichungen für immer kleinere Zeitschritte $\Delta t$ in die Bewegungsgleichungen (3.28) über. Auch ist in dieser Darstellung die zeitliche Umkehrbarkeit gegeben, wie sie von den Bewegungsgleichungen (3.28) erfüllt (und gefordert) wird. Schließlich ist der Fehler (d.h. die Differenz $\delta$ zwischen exakter und angenäherter Lösung), der durch die Diskretisierung der Variablen eingeführt wird von zweiter Ordnung in $\Delta t$ und somit hinreichend klein.

#### Bewegungsgleichung der mitbewegten Variablen

Im Zusammenhang mit der *Robertson-Walker-Metrik* (1.2) wurde bereits erwähnt, dass die Dynamik eines Teilchens im Universum einfacher zu beschreiben ist, wenn man sich eines *mitbewegten* Koordinatensystems bedient, das an der Expansion des Universums teilnimmt. Diese Abkopplung der Eigenbewegung eines Teilchens von der globalen Expansion muss in der Bewegungsgleichung berücksichtigt weden. Die mitbewegten Koordinaten $\{\mathbf{r}, \mathbf{v}\}$ hängen über den Skalenparameter $a \equiv a(t)$ mit den physikalischen Koordinaten $\{\mathbf{x}, \mathbf{u}\}$ zusammen:

$$\mathbf{r} = a\mathbf{x} \tag{3.31}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = a\dot{\mathbf{x}} + \dot{a}\mathbf{x} = a\mathbf{u} + \dot{a}\mathbf{x}. \tag{3.32}$$

Der Term $a\mathbf{u}$ beschreibt also die Eigen- oder *Pekuliar*-Bewegung des Teilchens, während $\dot{a}\mathbf{x}$ für den Beitrag der globalen Expansion steht. Analog hierzu kann eine mitbewegte Dichte definiert werden durch

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = a^3 \rho_{phys}(\mathbf{r}, \mathbf{t}). \tag{3.33}$$

Die Bewegungsgleichung im mitbewegten System erhält man, indem man die Lagrange-Funktion des Teilchens geeignet transformiert. Aus der neuen Lagrange-Funktion wird dann durch Ableitung nach der kanonischen Variablen $\mathbf{u}$ die neue Bewegungsgleichung gewonnen (Peebles, 1980). Die Herleitung wird im Folgenden kurz geschildert.

Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ des Teilchens unter dem Einfluss eines Potenzials $\Phi(\mathbf{x}, t)$ lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(a\dot{\mathbf{x}} + \dot{a}\mathbf{x})^2 - m\Phi(\mathbf{x}, t). \tag{3.34}$$

Die kanonische Transformation

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{d\Psi}{dt}, \quad \text{mit} \quad \Psi = \frac{1}{2}ma\dot{a}x^2 \tag{3.35}$$

führt auf den einfacheren Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}ma^2\dot{x}^2 - m\phi, \quad \text{mit} \quad \phi = \Phi + \frac{1}{2}a\ddot{a}x^2, \tag{3.36}$$

bei dem die Expansion des Universums nur noch in einem effektiven Potenzial $\phi$ erscheint. Für das neue Potenzial schreibt sich die Feldgleichung als

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\mathbf{x}, t)a^2 + 3a\ddot{a}. \tag{3.37}$$

Mit Hilfe der Friedmann-Gleichung (1.4) (im druckfreien Fall, $p = 0$, und ausgedrückt mit der mitbewegten Dichte $\rho(\mathbf{x}, t) = a^3\rho_{phys}(\mathbf{r}, t)$) kann man die Poisson-Gleichung für das neue Potenzial schreiben als

$$\nabla^2\phi = 4\pi Ga^2[\rho(\mathbf{x}, t) - \rho(t)]. \tag{3.38}$$

Aus der Ableitung des Lagrangian (3.36) nach der Ortskoordinate $\mathbf{x}$ erhält man nun zunächst den kanonischen Impuls $\mathbf{p}$,

$$\mathbf{p} \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial t} = ma^2\mathbf{u}, \tag{3.39}$$

und daraus mit $\dot{\mathbf{p}} = ma^2\dot{\mathbf{u}} + 2a\dot{a}m$ die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \frac{1}{a^2}\frac{\dot{\mathbf{p}}}{m} - 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} & (3.40)\\ &= -\frac{1}{a^3}\nabla\phi - 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} & (3.41)\\ &= \frac{1}{a^3}\frac{\mathbf{F}}{m} - 2H(t)\mathbf{u}. & (3.42) \end{aligned}$$

Für die letzte Gleichung wurde $\mathbf{F} = -m\nabla\phi$ und $H \equiv \dot{a}/a$ verwendet. Die Bewegungsgleichung enthält in mitbewegten Koordinaten also einen Faktor $a^{-3}$, der je nach räumlicher Ausdehnung des Universums die Kraft gewichtet, sowie einen der Gravitation entgegenwirkenden Viskositätsterm $2H(t)\mathbf{u}$. Im Spezialfall eines Einstein-de Sitter-Universums mit $H(t) = (2/3)t^{-1}$ lautet die Bewegungsgleichung

$$\dot{\mathbf{u}} = \left(\frac{t_H}{t}\right)^2\frac{\mathbf{F}}{m} - \frac{4}{3t}\mathbf{u}, \tag{3.43}$$

wobei $t_H = (2/3)H_0^{-1}$. Im allgemeinen Fall $\Lambda \neq 0$ erhält man $H(t)$ mit Hilfe des Skalenparameters

$$a(t) = C\left[\frac{1}{\Omega_0} - 1\right]^{-\frac{1}{3}} \sinh^{2/3}\left[\frac{3H_0}{2}\sqrt{\Lambda}t\right] \tag{3.44}$$

$$\text{mit} \quad C = \left[\frac{1}{\Omega_0} - 1\right]^{\frac{1}{3}} \sinh^{-2/3}\left[\frac{3H_0}{2}\sqrt{\Lambda}\right] \tag{3.45}$$

(Monaco, 1997, Fuchs, 1998). Das Alter des Universums, $t_0$, ergibt sich allgemein zu

$$t_0 = \frac{2}{3}(H_0\sqrt{\Omega_\Lambda})^{-1} \ln\left[\frac{1+\sqrt{\Omega_\Lambda}}{\sqrt{\Omega_0}}\right] \tag{3.46}$$

(Longair, 1998).

### 3.3.3 Die Spezial-Hardware GRAPE

Die bereits angesprochene Methode der direkten Kraftberechnung leidet unter ihrem rapide anwachsenden Zeitaufwand, sobald die Zahl der Teilchen entsprechend hoch wird. Auf der anderen Seite hat diese Methode attraktive Vorteile wie etwa ihre Unabhängigkeit von der Geometrie des Systems, oder die Tatsache, dass auf Näherungen verzichtet werden kann. Seit Beginn der 90er Jahre wird in Japan eine Spezial-Hardware entwickelt, die ausschließlich für die Berechnung des aufwendigen $r^{-2}$-Terms im Kraftgesetz konstruiert ist. Die so genannten GRAPE-Boards (GRAvity-PipE) bieten die Möglichkeit, *den* Schritt der direkten Methode sehr schnell auszuführen, der sonst wegen seines $\mathcal{O}(N^2)$-Skalierungsverhaltens den Engpass des Verfahrens ausmacht (Sugimoto et al., 1990, Ebisuzaki et al., 1993).

GRAPE-Boards liegen in verschiedenen Varianten vor: Solche mit ungerader Typenbezeichnung, GRAPE-1 (Makino et al., 1990), GRAPE-3 (Okumura et al., 1993) und GRAPE-5 (Kawai et al., 2000), dienen vornehmlich der Simulation stoßfreier Systeme; ihre Genauigkeit bei der Kraftberechnung ist durch Verwendung eines 20 bit *fixed-point-integer* Formats begrenzt. Das heißt, dass die Teilchenpositionen quasi auf einem Gitter mit der Gitterkonstanten $L/2^{20}$ dargestellt werden. Dies führt zu möglichen Fehlern insbesondere bei der Distanz nahe benachbarter Teilchen (Okumura et al., 1993). Bei der Simulation stoßdominierter Systeme, wie etwa einem Kugelsternhaufen oder der Innenregion eines galaktischen Bulge besteht ein höherer Anspruch an die Genauigkeit, um etwa die Dynamik eines Doppelsternsystems richtig zu aufzulösen. Dies wird durch die GRAPE-Versionen 2 und 4 gewährleistet, die mit *double-precision*-Zahlen arbeiten (Ito et al., 1991, Makino et al., 1997). Die GRAPE-Boards führen ausschließlich diejenigen Operationen durch, deren zeitlicher Aufwand mit $\mathcal{O}(N^2)$ skaliert, also die Berechnung des $r^{-2}$-Terms und des Potenzials. Dazu werden zu Beginn eines jeden Zeitschrittes die Positionen und Massen aller Teilchen vom Host-Rechner, einer gewöhnlichen Workstation, in den GRAPE-Speicher geladen. Die Kräfte zwischen den Teilchen werden dann, nachdem sie vom GRAPE-Board berechnet wurden, an den Host-Rechner zurückgeschickt, von dem schließlich die Zeitintegration ausgeführt wird. Aus der Sicht des Programmierers ist GRAPE also schlicht die Hardware-Version einer Subroutine zur Kraftberechnung.

Auf den GRAPE-Chips ist die $1/r^2$-Operation fest „verdrahtet"; dies trägt zu seiner ausserordentlich hohen Effizienz bei. Desweiteren arbeiten die Boards ab Version 3 mit einer *Pipeline*-Technik. Dies bedeutet, dass alle 19 verschiedenen Operationen für die Kraftberechnung gleichzeitig für jeweils verschiedene Teilchenpaare ausgeführt werden. Während also etwa das Abstandsquadrat $r_{ij}^2$ für das Paar {i,j} berechnet wird, kann für das nächste Paar {i,j+1} schon der Abstandsvektor $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ berechnet werden usw. Anstelle von $19(N-1)$ „clock-cycles", die ohne Pipeline-Technik zur Berechnung der Kraft auf ein Teilchen nötig wären, bedarf die Berechnung mit dieser Technik nur $(N-1)+19$ clock-cycles. Abbildung 3.1 zeigt symbolisch die Struktur des GRAPE-3-Chips, der in der vorliegenden Arbeit verwendet wurde.

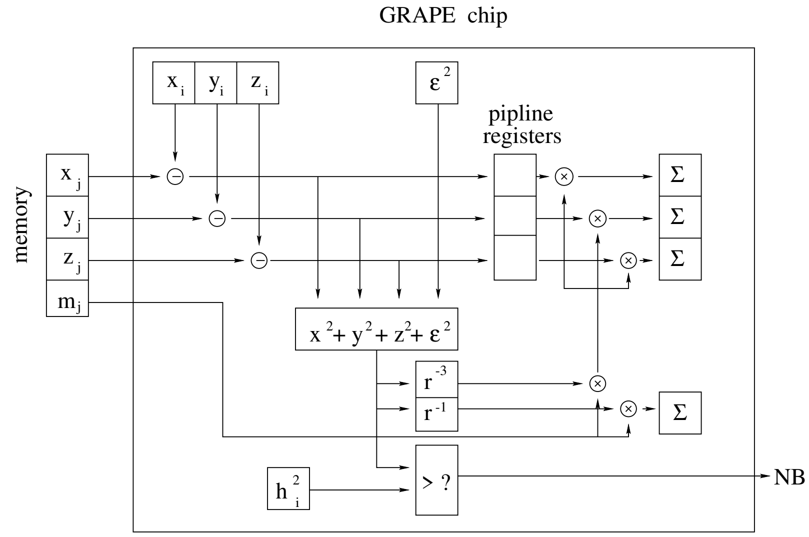


Abbildung 3.1: Schematischer Aufbau des G3-Chip (Okumura et al., 1993)

Der relative Fehler bei der Kraftberechnung liegt bei ca. 2%, was hinreichend genau für die Berechnung kollisionsfreier Systeme ist (Athanassoula et al., 1998). Insbesondere sind die GRAPE-internen Rundungsfehler kleiner als die Fehler, die durch den diskreten Charakters des Systems entstehen (Okumura et al., 1993).

Für weitere Details, insbesondere technischer Art, verweise ich neben den oben genannten Referenzen auf die am MPI für Astronomie vorgelegten Arbeiten von Naab (2000) und Wetzstein (2000). In den letztgenannten Arbeiten wird auch auf die Organisation des GRAPE-Clusters an diesem Institut eingegangen. Ein Vergleich zwischen GRAPE und general-purpose-Maschinen findet sich bei Ebisuzaki et al. (1993).

### 3.3.4 Potenzial-„softening"

Stoßfreie Systeme wie etwa die nichtbaryonische Dunkle Materie oder die Sterne einer galaktischen Scheibe, werden in numerischen Simulationen durch ein System von Teilchen weit geringerer Anzahl realisiert; mithin spielen 2-Körper-Stöße in vielen Modellen eine wichtige Rolle, da die Relaxations-Zeit gemäß (3.25) proportional zu $N/\ln N$ wächst. Relaxationseffekte gewinnen, anders ausgedrückt, in dem Maße an Bedeutung, wie die „Körnigkeit" des Potenzials zunimmt — also bei abnehmender Teilchenzahl. Eine Möglichkeit, Relaxationseffekte zu umgehen besteht darin, das Gravitationspotenzial zwischen den Teilchen künstlich zu glätten. Die zu diesem Zweck üblicherweise verwendete Form des Kraftgesetzes ist

$$\mathbf{F}_{ij} = -Gm_i m_j \frac{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}{(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 + \epsilon^2)^{3/2}} \tag{3.47}$$

(*Plummer softening*). Das Potenzial eines Teilchens lautet entsprechend

$$\phi(\mathbf{x}_i) = -G \sum_{i \neq j} \frac{m_j}{(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 + \epsilon^2)^{1/2}}. \tag{3.48}$$

Durch diese Form des Potenzials ist den einzelnen (Punkt-)Teilchen in gewissem Sinne die Geometrie einer ausgedehnten Sphäre mit einem Plummer-Dichteprofil

$$\rho(\mathbf{x}_i) = -\sum_j \frac{3m_j}{4\pi} \frac{\epsilon^2}{(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^2 + \epsilon^2)^{5/2}}. \tag{3.49}$$

aufgeprägt. Die genaue Form des softenings unterliegt indes einer gewissen Willkür, denn der Effekt eines näherungsweise stoßfreien Verhaltens wird ganz allgemein dadurch erreicht, dass bei einer nahen Begegnung zweier Teilchen das Potenzial und also die Kraft auf beide Teilchen endlich bleibt.

Der Einfluss des softening (oder auch *smoothing*) im Sinne einer verlängerten Relaxationszeit ist nach Huang et al. (1993)

$$t_{relax} = \frac{N}{8 \ln(R/\epsilon)} t_{cross}, \tag{3.50}$$

wobei $R$ eine charakteristische Länge ist. Bei der Wahl eines geeigneten smoothing-Parameters $\epsilon$ ist darauf zu achten, dass sich sowohl zu kleine als auch zu grosse Werte von $\epsilon$ fehlerhaft auswirken: Ein zu kleines $\epsilon$ gewährt den Zwei-Körper-Stößen zu hohen Einfluss, die es eigentlich zu unterdrücken gilt. Ein zu großer Wert verursacht Fehler bei der Kraftberechnung, sobald die Teilchendistanz unterhalb der smoothing-Länge $\epsilon$ liegt; diese stellt somit die kleinste noch aufzulösende Längenskala dar. Merritt (1996) schlägt einen optimalen smoothing-Parameters $\epsilon_{opt}$ für jedes kollisionsfreie System vor, der die Summe der angesprochenen Fehler minimiert. Als Näherung für spärische Systemem findet er

$$\epsilon_{opt} \propto N^{-\frac{1}{3}}. \tag{3.51}$$

Diese Proportionalität zwischen $\epsilon$ und dem mittleren Teilchenabstand $\bar{d}$ wird auch in der vorliegenden Arbeit verwendet. Konkret gilt hier für alle Simulationen

$$\epsilon = \frac{1}{40} \bar{d}, \tag{3.52}$$

was sich auch in der Erfahrung anderer Autoren bewährt hat (Colberg, 1998, Springel, 1999).

Navarro et al. (1996b) schlagen alternativ vor, die smoothing-Länge größer als den typischen Stoß-Parameter einer Zwei-Teilchen-Streuung zu wählen, die zu einer erheblichen Änderung der Teilchen-Bahnen führt. Der typische Stoßparameter ist von der Ordnung $Gm/\sigma^2$, wobei $\sigma$ die Geschwindigkeitsdispersion des Systems ist. Für einen Dunklen Halo gilt $\sigma^2 \approx GmN_h/2R$. Hier ist $m$ die Teilchenmasse, $N_h$ die Zahl der Teilchen im Halo und $R$ ist der Raduis des Halos. Damit erhält man einen smoothing-Parameter

$$\epsilon_{NFW} = \frac{2R}{N_h}. \tag{3.53}$$

### 3.3.5 Periodische Randbedingungen

Bei der Simulation der kosmologischen Strukturbildung hat man es — im Gegensatz zur Untersuchung etwa einzelner Galaxien — mit einem quasi unendlich ausgedehnten Objekt zu tun, das nur durch einen räumlich begrenzten Ausschnitt repräsentiert werden kann[4]. Dieser kann offensichtlich nicht als unabhängig von seiner Umgebung erachtet werden, vielmehr würde er ohne den Einfluß äußerer Kräfte durch seine Eigengravitation immer weiter kontrahieren. Mithin ist es notwendig, die Einbettung des Simulationsvolumens in eine weithin ausgedehnte Umgebung zu simulieren. Das Verfahren, das hierzu herangezogen wird, ist der Festkörperphysik entlehnt und diente ursprünglich der Behandlung eines quasi unendlich ausgedehnten kristallinen Gitters. Das Prinzip der *Ewald-Methode* (Ewald, 1921) besteht darin, die Struktur eines räumlich begrenzten Ausschnittes auf das gesamte System — bzw. bis ins Unendliche — zu extrapolieren und die Beiträge aller ,,virtuellen" Teilchen zum Potenzial durch einen ,,Kunstgriff" zu summieren.

GRAPE-Boards bieten durch die feste Verdrahtung der Rechenoperationen den Vorteil hoher Effizienz. Damit verbunden ist aber auch der Nachteil, dass es nicht möglich ist, das geänderte Kraftgesetz, wie es sich unter periodischen Randbedingungen (Periodic Boundary Conditions, PBCs) ergibt, zu programmieren. Die Einbindung der PBCs in Form von Potenzialkorrekturen zum isolierten System muss deshalb unabhängig vom GRAPE-Board auf dem Host-Rechner geschehen.

Ausgangspunkt für die Berechnung der Korrekturen ist die Poisson-Gleichung für das periodisch fortgesetzte System,

$$\nabla^2\phi = 4\pi G\rho(\mathbf{r}) = 4\pi G \sum_{\mathbf{n}} \sum_{j=1}^{N} m_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{n}L) \tag{3.54}$$

wobei $L$ die Kantenlänge des würfelförmigen Simulationsvolumens ist und $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^3$. Wie bei einer Gleichung der Form $\nabla^2 f(x) \propto \delta(x)$ üblich, kann (3.54) mit Hilfe einer geeigneten *Green*-Funktion $\mathcal{G}$ (bzw. $\hat{\mathcal{G}}$) gelöst werden:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= -G \sum_{\mathbf{n}} \sum_{j=1}^{N} m_j \mathcal{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j - \mathbf{n}L) && (3.55) \\ &= -\frac{G}{L^3} \sum_{j=1}^{N} \sum_{\mathbf{k}} \hat{\mathcal{G}}(\mathbf{k}) m_j \exp[i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)] && (3.56) \end{aligned}$$

(Hernquist et al., 1991, Klessen, 1997). Die Greenschen Funktion für die Gravitationskraft lautet $\mathcal{G} = 1/r$ oder, im Fourier-Raum, $\hat{\mathcal{G}} = 4\pi/k^2$. Das eigentlich Problem setzt an dieser Stelle ein, denn die Summe über $n$, bzw. $\mathbf{k}$ konvergiert äußerst langsam, was der Effizienz des numerischen Codes abträglich ist. Der ,,Trick" der Ewald-Methode besteht darin, die Green-Funktionen in (3.55) bzw. (3.56) aufzuspalten in je eine Funktion für den Nah- und den Fernbereich:

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}_S + \mathcal{G}_L, \tag{3.57}$$

Die etwas länglichen konkreten Ausdrücke finden sich in den zuletzt genannten Referenzen. Die neuen Green-Funktionen sind dergestalt, dass die erste, $\mathcal{G}_S$, im Ortsraum sehr schnell kon-

[4]Dies trifft auch auf ein geschlossenes und also endliches Universum zu, da die Größe des Simulationsvolumens durch die gewünschte Anforderug an die Massenauflösung stark beschränkt ist

vergiert, letztere, $\mathcal{G}_L$, im Fourier-Raum. Die Aufteilung der Green-Funktion, führt, eingesetzt in (3.55), zu einer analogen Aufteilung des gesuchten Potenzials,

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi_S(\mathbf{r}) + \phi_L(\mathbf{r}). \tag{3.58}$$

Die Kraft auf ein Teilchen berechnet sich schließlich zu

$$\mathbf{F}_i = -G \sum_{i \neq j} m_i m_j \left[ \frac{\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j}{(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|^2 + \epsilon^2)^{3/2}} - \mathbf{F}_c(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right] \tag{3.59}$$

mit dem Korrektur-Term $\mathbf{F}_c$. Die Berechnung dieses Terms erweist sich als aufwendig. Um sie nicht für jeden Zeitschritt von Neuem durchführen zu müssen, werden vor der Simulation Korrekturterme $\mathbf{F}_c(\mathbf{X}_i^g - \mathbf{X}_j^g)$ auf einem Gitter $\{\mathbf{X}^g\}$ berechnet. Die entsprechenden Werte werden tabelliert und nach jedem Zeitschritt auf die wahren Koordinaten der Teilchen interpoliert.

Die Implementierung der Ewald-Summation in die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Software hat Ralf Klessen am MPI für Astronomie durchgeführt. Weitere Details dazu finden sich bei Klessen (1998).

### 3.3.6 GrapeTree

Die oben besprochenen Grape-Systeme bieten den Vorteil der direkten Kraftberechnung mit hoher Effizienz, dennoch skaliert die dafür erforderliche CPU-Zeit mit $\mathcal{O}(N^2)$. Bei genügend hoher Teilchenzahl werden Grape-Boards also stets der *Tree*-Methode mit ihrem $N \log N$-Skalierungsverhalten unterlegen sein. Beide Werkzeuge können aber sehr wirkungsvoll kombiniert werden (Makino, 1991). Das Prinzip besteht darin, die Massen und Positionen der vom *Tree* erzeugten *Pseudoteilchen* bzw. *nodes* an das Grape-Board zu schicken, um dort die zugehörigen Kräfte zu berechnen. Dadurch wird die effektive Zahl der Teilchen, deren Wechselwirkungen zu berechnen sind auf $\log N$ reduziert, wodurch sich das Skalierungsverhalten der Grape-Boards nicht mehr nachteilig auswirkt. Der Host-Rechner muss also in jedem Zeitschritt und für jedes Teilchen eine Liste von Pseudoteilchen erstellen, die mit dem aktiven Teilchen wechselwirken. Die Anzahl der dazu nötigen Operationen ist vergleichbar mit der Zahl der Schritte zur Kraftberechnung, da in beiden Fällen die Abstände zwischen dem aktiven Teilchen und den einzelnen nodes berechnet werden müssen. Die hohe Effizienz des Grape-Boards bleibt damit ungenutzt. Aus diesem Grunde ist es sinnvoll, Gruppen von Teilchen zu bilden, die aufgrund ihrer räumlichen Nähe sehr ähnliche Werte des globalen Potenzials spüren. Für diese muss dann nur *ein tree* (d.h. *eine* Liste von Pseudoteilchen) entwickelt werden. Dieses Verfahren wurde von Barnes (1990) entwickelt und zuerst verwendet, allerdings nicht in unter Verwendung eines Grape-Boards, sondern eines *Cyber 205* Vektorrechners. Die Verbesserung der Performance betrug einen Faktor 2-3. Makino (1991) implementierte den Algorithmus in ein Grape-1A-System und erreichte damit eine ca. 300-fache Beschleunigung der Simulation. Am Max-Plank-Institut für Astronomie steht dieser Code in Verbindung mit Grape-3A-Maschinen zur Verfügung.

Abbildung 3.2 zeigt die Dichteprofile $\rho(r)$ einiger Dunkler Halos aus einer Simulation mit GrapeTree im Vergleich mit den entsprechenden Halos derselben Simulation mit Grape. Zur besseren Übersicht sind die Profile entlang der y-Achse gegeneinander verschoben. Man erkennt, dass die jeweiligen Profilpaare insbesondere in den Massenreichen Zentren sehr gut übereinstimmen. In den „wackligeren" Außenbereichen nehmen die Abweichungen der Profile zu, da hier bereits eine relativ geringer Unterschied in der Teilchenverteilung einen sichtbaren Unterschied im Dichteprofil verursacht. Auf die Art der Erstellung der Dichteprofile wird in Abschnitt 4.3 genauer eingegangen.

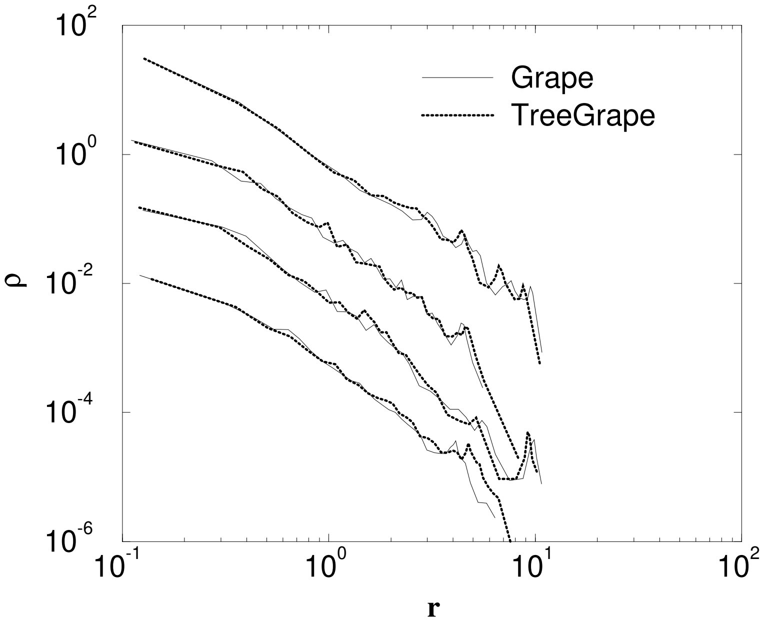


Abbildung 3.2: Vergleich der Dichteprofile Dunkler Halos aus zwei Simulationen mit identischen Anfangsbedingungen. Beide Simulationen wurden mit 262144 Teilchen durchgeführt und umfassen ein Volumen von 32 Mpc. Die kosmologischen Parameter sind $\Omega_m = 1$, $h = 0.5$ und $\sigma_8 = 0.63$. Die Profile sind zur besseren Übersicht gegeneinander verschoben, die Einheiten sind willkürlich.

Sämtliche in Kapitel 4 verwendeten Simulationen wurden mit dem hier beprochenem Verfahren durchgeführt.

# Kapitel 4

# Die Verteilung der Materie in Dunklen Halos

Die Galaxien in ihrer Vielzahl an Form und Größe sind die Grundbausteine des Universums, wie es sich in den Beobachtungen der großskaligen Materieverteilung darstellt. Mit Teleskopen, gleich welchen Typs, läßt sich jedoch nur die Strahlung der baryonischen Materie beobachten, die nur einen geringen Anteil von weniger als 5% der Masse des Universums ausmacht. Es gibt unterschiedliche Hinweise darauf, dass alle Galaxien nur die baryonische Komponente weit massiverer Objekte darstellen, in deren inneren Bereichen die sichtbaren Galaxien „leben" (siehe Abschnitt 1.2). Diese *Dunkle-Materie-Halos* (DMHs) müssen als die eigentlichen Grundbausteine der kosmischen Architektur angesehen werden.

In diesem Kapitel wird die interne Materieverteilung von DMHs anhand von kosmologischen Simulationen untersucht. Besonderes Augenmerk wird dabei auch auf die Geschichte der Materie gerichtet, die sich in den Zentren der Dunklen Halos befindet. Insbesondere diese Zentren waren bis in die jüngste Vergangenheit hinein Gegenstand einer lebhaften Kontroverse. Konkret ging es dabei um die Frage, ob die Dichte innerhalb eines kritischen Radius konstant bleibt oder aber einen weiteren Anstieg zum Zentrum hin erfährt. Die Entwicklung dieser Kontroverse bis zur Gegenwart wird im ersten Abschnitt kurz dargestellt. In Abschnitt 4.2 werden die kosmologischen Simulationen, die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführt wurden, charakterisiert, um anschließend die daraus gewonnenen Dichteprofile zu untersuchen (Abschnitt 4.3). Nach einer kurzen Diskussion der Drehimpulseigenschaften der Halos (4.4) wird in einem weiteren Abschnitt (4.5) untersucht, inwieweit Korrelationen zwischen lokalen primordialen Dichtemaxima und der Materie in den Zentren Dunkler Halos bestehen. Zuletzt wird schließlich der Einfluß modifizierter Anfangsbedingungen auf die Struktur der Dunklen Halos bei $z = 0$ untersucht (Abschnitt 4.6).

## 4.1 Der Stand der Forschung

Zunächst wird ein kurzer Überblick gegeben über die typischen Dichteprofile Dunkler Halos, wie sie in Simulationen gefunden werden sowie ihre Verträglichkeit mit Beobachtungen.

### 4.1.1 Das NFW-Profil

J. Navarro, C. Frenk und S. White haben in einer Reihe vielzitierter Arbeiten die interne Struktur, insbesondere die Dichteprofile Dunkler Halos mit Hilfe hochauflösender $N$-Körpersimulationen untersucht (Navarro et al., 1995, 1996b, 1997, im Weiteren „NFW199x"). In der Folge dieser Publikationen hat sich die Ansicht weitgehend etabliert, dass die Materiedichte in den Halos einem universellen, einparametrigen Ausdruck folgt, dem so genannten NFW-Profil

$$\rho_{NFW} = \rho_c \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1+r/r_s)^2}. \tag{4.1}$$

Hier ist $\rho_c$ die kritische Dichte des Universums, $\delta_c$ ist eine für den Halo charakteristische Dichte und $r_s$ der Skalenradius, in dessen Umgebung der Dichteverlauf sein Verhalten von $\rho \propto r^{-1}$ zu $\rho \propto r^{-3}$ ändert. Genauer gilt

$$\left(\frac{d\log\rho}{d\log r}\right)_{r=r_s} = -2. \tag{4.2}$$

Die beiden letztgenannten Parameter, $\delta_c$ und $r_s$ sind korreliert über die Beziehung

$$\delta_c = \frac{200}{3}\frac{c^3}{\ln(1+c) - c/(1+c)} \tag{4.3}$$

mit der *Konzentration* $c = r_{200}/r_s$. $r_{200}$ ist der Radius innerhalb dessen die mittlere Dichte gerade $200 \times \rho_c$ beträgt — dies ist eine einfache Abschätzung für den Virialradius[1] $r_{vir}$. Der verbleibende freie Parameter $c$ zeigt eine klare Tendenz zur Abhängigkeit von der Halomasse: Allgemein haben Halos kleinerer Masse höhere Konzentration. Dies steht in Zusammenhang mit dem hierarchischen Charakter der Strukturbildung: Halos geringerer Masse bilden sich *früher* als massive Halos, also zu Epochen, in denen die Hintergrunddichte entsprechend höher war. Auf diese $c-M$-Abhängigkeit wird in Abschnitt 4.3 nochmals eingegangen (siehe auch NFW1997).

Das NFW-Profil behält seine Gültigkeit in jeder Kosmologie und für jede Form des primordialen Powerspektrums (siehe etwa Cole & Lacey, 1996 und Tormen et al., 1997). Die kosmologischen Parameter haben nur insofern Einfluss auf das tatsächliche Dichteprofil, als sie für einen Halo der Masse $M$ die typische Entstehungsepoche bestimmen, was sich, wie eben erwähnt, in der Konzentration wider spiegelt. Huss et al. (1999a) führten numerischen Simulationen auch mit Heißer Dunkler Materie durch und fanden ebenfalls NFW-Profile. Dieselben Autoren untersuchten in einer späteren Arbeit, unter welchen Umständen sich Dichteprofile mit einem einfachen Potenzgesetz $\rho(r) \propto r^\alpha$ einstellen würden und kamen zu dem Ergebnis, dass in einem expandierenden[2] Universum nur eine Unterdrückung der nichtradialen Komponenten der Gravitationskraft zu solchen Profilen führt. Zu diesem Ergebnis führte ein Vergleich eines Standard-CDM-Modells und verschiedener sphärischer Kollaps-Modelle, in deren einem nur eine zentral gerichtete $1/r^2$-Kraft zugelassen war (Huss et al., 1999b). Die Autoren interpretieren die in allen anderen Fällen identischen Dichteprofile dahingehend, dass

[1] Aus dem sphärischen Kollaps-Modell folgt ein genauerer Wert für den Virialradius von $r_{vir} = r_{178}$ (Cole & Lacey, 1996). Da in der Natur wie in numerischen Simulationen die Entstehung Dunkler Halos sich nicht genau an dieses Modell hält, weicht der empirische Virialradius vom theoretischen ab.

[2] van Albada (1982) zeigte, dass der gravitative Kollaps in einem statischen Universum zu Objekten mit einem Dichteverlauf $\propto r^{-4}$ führen würde.

die Universalität des NFW-Profils keineswegs auf den hierarchischen Charakter der Strukturbildung zurückzuführen sei, wie von Syer & White (1998) vorgeschlagen. Vielmehr scheint sie, in einem kosmologischen Rahmen, dem gravitativen Kollaps als solchem aufgeprägt zu sein. Damit in engem Zusammenhang steht die in den selben Simulationen gemachte Beobachtung, dass die Geschwindigkeitsdispersion der Halopartikel sich in allen Modellen auf gleiche Weise entwickelt — wenngleich der Mechanismus unterschiedlich sein kann, vermöge dessen sich die interne Verteilung des Drehimpulses im Halo einstellt.

Mit der Universalität der Dichteverteilung in Dunklen Halos stehen zwei Prozesse kollisionsfreier Relaxation in engem Zusammenhang, deren Wirkungsweisen kurz erläutert werden sollen. Besonders in der Anfangsphase des Kollaps ist die einfallende Materie einem zeitlich stark veränderlichem Potenzial $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ausgesetzt. Dabei ändert sich die Gesamtenergie eines Teilchens der Masse $m$ gemäß

$$\dot{E} = m \frac{\partial \Phi}{\partial t} \tag{4.4}$$

(Binney & Tremaine, 1987). Lynden-Bell (1967) zeigte, dass hierdurch das gesamte System eine Gleichverteilung der Teilchengeschwindigkeiten erfährt, und so in relativ kurzer Zeit in einen Gleichgewichtszustand übergeführt wird, der das Virialtheorem $E_{pot} = -2E_{kin}$ erfüllt (*violent relaxation*).

Ein anderer Effekt, als *phase mixing* bezeichnet, rührt daher, dass in einem $N$-Körpersystem grundsätzlich zwischen mikroskopischer und makroskopischer Phasenraumdichte zu unterscheiden ist. Erstere wird durch die stoßfreie Boltzmann-Gleichung (3.11) beschrieben, letztere durch eine um $\{\mathbf{x}, \mathbf{v}\}$ gemittelte Funktion $\bar{f}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. Diese ist zeitlich nicht konstant; vielmehr verteilt sich das durch den Mikrozustand definierte Phasenraumgebiet unter Beibehaltung der (mikroskopischen) Dichte im Laufe der Zeit gleichmäßig über die einzelnen „Makrozellen". Auf diese Weise strebt die (über diese Zellen gemittelte) makroskopische Phasenraumverteilung einem Gleichgewichtszustand entgegen.

Dunkle Halos sind während ihrer Entstehung sicherlich heftiger Relaxation ausgesetzt, da speziell während der Verschmelzungsprozesse große zeitliche Fluktuationen im Potenzial auftreten. Es gibt eine Reihe von Hinweisen dafür, dass auch stellare Objekte, namentlich Elliptische Galaxien, den Einfluss heftiger Relaxation in ihrer Struktur spiegeln. Die radiale Abhängigkeit der Flächen-Leuchtkraftdichte $I(r)$ dieser Objekte folgt dem universellen, nach De Vaucouleurs (1948) benannten Profil $\log I(r)/I_e \propto 1 - (r/r_e)^{1/4}$ (siehe auch Gebhardt et al., 1996, Faber et al., 1997). Dieses Leuchtkraftprofil entspricht in guter Näherung einer Dichteverteilung, die durch ein so genanntes *Hernquist-Profil*

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\delta_c}{(r/r_c)(1 + r/r_c)^3} \tag{4.5}$$

beschrieben wird (Hernquist, 1990), sofern man ein konstantes Masse-Leuchtkraft-Verhältnis annimmt. Dieses Profil zeichnet sich durch eine hohe Ähnlichkeit mit dem NFW-Profil aus, das offensichtlich als Ergebnis heftiger Relaxation gelten kann. Dies legt die Vermutung nahe, dass dieser Effekt auch bei der Formation Elliptischer Galaxien eine gewichtige Rolle spielt. Das gegenwärtig favorisierte Entstehungs-Szenario für Elliptische Galaxien trägt der möglichen Bedeutung heftiger Relaxation prinzipiell Rechnung, da dieses Szenario von der Verschmelzung zweier oder mehrerer masseärmerer Galaxien ausgeht (siehe etwa Barnes, 1991, Barnes & Hernquist, 1992, Hernquist, 1992, Hernquist, 1993, Burkert & Naab, 2000). Dies wiederum wird etwa durch die große Häufigkeit Elliptischer Galaxien in den zentralen Gebieten von Galaxienhaufen (Hubble & Humason, 1931), oder der abnehmenden Häufigkeit von Ellipsen bei hoher Rotverschiebung (Dressler & Gunn, 1992) unterstrichen. Es sei an dieser Stelle dennoch darauf hingewiesen, dass der genaue Grad an Einflussnahme der heftigen Relaxation bei der Entstehung Elliptischer Galaxien keineswegs mit Sicherheit geklärt ist. So zeigen etwa viele dieser Galaxien deutlich Anzeichen dafür, dass auch dissipative, also stoßdominierte Prozesse eine Rolle spielen. Dies äußert sich etwa in der Präsenz von stellaren Scheibenkomponenten in vielen Galaxien (siehe etwa Bender, 1990, Rix & White, 1990, 1992).

#### Abweichungen von NFW

Es ist zu beachten, dass es sich bei den von NFW untersuchten Halos grundsätzlich um solche im dynamischen Gleichgewicht handelt, d.h. solche mit einem Virialkoeffizient $\eta = 1$. Jing (2000) untersuchte, ebenfalls mit hochauflösenden numerischen Simulationen, Dunkle Halos gleichermaßen *im* sowie *außerhalb* des Virialgleichgewichtes und fand, dass die Dichteverläufe um so häufiger dem NFW-Profil genügen je näher sie sich im Gleichgewichtszustand befinden. Insgesamt lassen sich in einem EdS-Universum ca. 70% aller Halos gut durch ein NFW-Profil fitten. Die restlichen Halos weisen in Folge ihrer jüngeren Verschmelzungsgeschichte signifikante Unterstrukturen auf, die ein (vorübergehendes) dynamisches Ungleichgewicht verursachen.

Deutlich zeigt sich auch der Einfluss der Halo-Umgebung auf die interne Dichteverteilung. Diese Frage wurde u.a. von Avila-Reese et al. (1999) untersucht. In ihren Simulationen erwiesen sich 70% aller Halos als isolierte Objekte, also solche, die keine Unterstruktur eines größeren Objekts bilden und keinen Begleiter vergleichbarer Masse innerhalb einer Umgebung von $3r_{vir}$ haben. Dieser Arbeit zu Folge haben Halos in dichter Umgebung im Allgemeinen eine höhere Konzentration $c$. Halos, die innerhalb des halben Virialradius eines größeren Halos liegen weisen eine schnellere Dichteabnahme $\beta := -d\log\rho/d\log r$ im äußeren Bereich auf, konkret bis $\beta \approx 4$ (statt $\beta \approx 3$ bei NFW). Im Gegensatz dazu haben die Halos kleinerer Galaxiengruppen flachere Profile ($\beta = 2.3 \ldots 2.7$).

Die Ergebnisse aller Autoren lassen sich stets durch eine allgemeinere Fit-Formel mit drei unabhängigen Parametern beschreiben (Zhao, 1996):

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\delta_c r_s^\beta}{r^\alpha (r_s^{1/\gamma} + r^{1/\gamma})^{\gamma(\beta-\alpha)}} \tag{4.6}$$

Der physikalische Hintergrund ist gleichwohl ein anderer: Zhao schlug dieses Profil vor, um damit die zentralen Regionen von Galaxien, gegebenenfalls mit Schwarzen Löchern, zu beschreiben. Das NFW-Profil ist denn als Spezialfall des Zhao-Profils mit $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 3, 1)$ anzusehen.

### 4.1.2 Die zentralen Regionen: „cusps" und „cores"

Die Ergebnisse der Arbeiten von NFW gelten gemeinhin als Standard in der Untersuchung der Struktur Dunkler Halos. Trotzdem oder gerade deswegen erfreuen sich die Unsicherheiten der Materieverteilung innerhalb des Skalenradius $r_s$ besonderer Aufmerksamkeit. Die in der Einleitung zu diesem Kapitel angesprochene Kontroverse um die Dichteprofile Dunkler Halos betrifft eben jene zentralen Bereiche. Die Unsicherheiten sind von zweierlei, ganz verschiedener Art. Die NFW-Profile sind sowohl inkonsistent mit numerischen Simulationen sehr hoher Auflösung (Ghigna et al., 2000), als auch mit den beobachteten Rotationskurven von Zwerggalaxien (Burkert, 1995).

### Effekte der numerischen Auflösung, Moore-Profile

Eine detailierte Untersuchung des Zusammenhangs zwischen Auflösung und der Halostruktur unternahmen Moore et al. (1998), Ghigna et al. (2000) und Klypin et al. (2000). Wie schon NFW bedienten sie sich dazu einer speziellen Technik der hochauflösenden Simulation, bei der zuerst ein großes Volumen mit überall gleicher Auflösung simuliert wird, um anschließend kleinere räumliche Bereiche von Interesse — also etwa *einen* Dunklen Halo — mit hoher Auflösung erneut zu simulieren. Dazu werden die Haloteilchen bei der Anfangsrotverschiebung $z = z_{init}$ identifiziert und das Fluktuationsspektrum in dem von ihnen besetzten Raumgebiet durch höherfrequente Moden ergänzt. Anders ausgedrückt: die bisher verwendeten Teilchen werden unter Beachtung der geforderten Statistik ersetzt durch eine höhere Anzahl von Teilchen entsprechend geringerer Masse. Umgekehrt sind die Teilchen in der entfernteren Umgebung durch eine geringere Anzahl von Teilchen höherer Masse zu ersetzen, um die Rechenzeit konstant zu halten. Dies bedeutet keinen Verlust an Genauigkeit, da das Gezeitenfeld praktisch nicht von der kleinskaligen Struktur des Fernbereichs abhängt. Eine nähere Erläuterung dieser Simulationtechnik findet man zum Beispiel bei Klypin et al. (2000).

Während die Simulationen von NFW noch auf Halos mit typischerweise $10^4$ Teilchen innerhalb des Virialradius $r_{200}$ beschränkt waren, konnten Moore et al. (1998) bereits Halos mit mehr als $2 \times 10^6$ Teilchen erzeugen. Damit waren sie in der Lage, die Dichteprofile einzelner Halos bis herab auf einen Bereich von ca. $0.01 r_{200}$ zu untersuchen. Als Ergebnis ihrer Simulationen zeigte sich, dass die Steigung des Dichteprofils innerhalb des Skalenradius $r_s$ größer wird, wenn die Auflösung genügend hoch ist, wie in Abbildung 4.1 veranschaulicht. Wiederholte Simulationen desselben Clusters[3] mit $N_{vir} = 1.4 \times 10^3, 1.3 \times 10^4, 1.0 \times 10^5$ und $2.7 \times 10^6$ Teilchen innerhalb $r_{200} \approx 2$ Mpc, führten zu Steigungen von bis zu $\alpha \equiv d \log \rho / d \log r = -1.4$ bei $r < r_s$ (im Gegensatz zu $\alpha_{NFW} = -1$). Eine Reihe von Simulationen deutlich besserer Auflösung ($10^7$ Teilchen innerhalb $r_{200}$, smoothing $10^{-4} r_{200}$) zeigte wenig später, dass der (logarithmische) Dichtegradient im Zentrum gegen einen Wert von $\alpha = -1.5$ konvergiert (Moore et al., 1999b), so dass sich ein Dichteprofil der Form

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\delta_c}{(r/r_s)^{1.5}(1 + (r/r_s)^{1.5})} \tag{4.7}$$

ergibt.

### Nach der Theorie die Beobachtung: Das Burkert-Profil

Jede Theorie muss sich letztlich der Beobachtung stellen. Die in diesem Abschnitt besprochenen Aussagen über die Dichteverteilung in Dunklen Halos lassen sich am ehesten durch Beobachtungen der Rotationskurven von Zwerggalaxien und *low surface brightness* (LSB)-Galaxien nachprüfen, da diese — insbesondere in den inneren Bereichen — von Dunkler Materie dominiert sind (siehe z.B. Persic & Salucci, 1988 oder de Blok et al., 1996). Die Rotationskurven werden damit nicht durch den Einfluss der galaktischen Scheibe „verfälscht".

Beobachtungen dieser Art deuten seit langem darauf hin, dass die tatsächlichen Dichteprofile in den Innenbereichen Dunkler Halos nicht mit den Vorhersagen von NFW und Moore et al. vereinbar sind. Vielmehr scheinen die Dichteprofile einen flachen Verlauf $\rho(r) =$const innerhalb eines *core*-Radius $r_c$ zu nehmen (Moore, 1994, Burkert, 1995, de Blok et al., 1996,

[3]Unter einem Cluster ist im Weiteren eine Gruppe von Simulationsteilchen zu verstehen, also nicht etwa ein Galaxienhaufen!

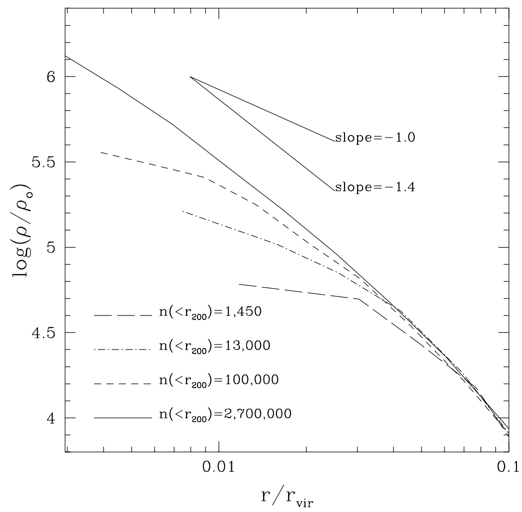


Abbildung 4.1: Dichteprofil eines Halos bei verschiedenen Auflösungen. Bei zunehmender Anzahl von Teilchen innerhalb des Virialradius nimmt die logarithmische Steigung der Dichte im Zentralbereich signifikant zu (Abbildung aus Moore et al. (1998)).

McGaugh & de Blok, 1998, Salucci & Burkert, 2000). Die Zentralregion eines Dunklen Halos wird in der Literatur als „*core*" bezeichnet, wenn sie konstante Dichte aufweist und als „*cusp*" wenn ein singuläres Dichteprofil vorliegt. Auch die Messung der Rotationskurven verschiedener *high surface brightness* Scheibengalaxien durch Salucci & Boriello (2000) zeigte, dass das Potenzial im Bereich der gesamten Scheibe durch den Einfluss einer exponentiellen Scheibe sowie eines sphärischen Halos mit *core*-Struktur zu erklären ist. Flores & Primack (1994) kommen durch die Analyse des Gravitationslinsen-Effektes von Galaxienhaufen, also bei Objekten „am oberen Ende" der Massenskala Dunkler Halos, ebenfalls zu dem Schluss, dass die entsprechenden Halos Zentren konstanter Dichte haben (siehe auch Tyson et al., 1998).

Einige der hier erwähnten Messungen von Rotationskurven wurden mit Hilfe der 21 cm-Radioemission des neutralen Wasserstoffs in den galaktische Scheiben durchgeführt. Solche Beobachtungen leiden wegen der langwelligen Natur der Radiostrahlung in höheren Maße als etwa optische Beobachtungen an dem Effekt des *beam smearing*. Daher wurden zwischenzeitlich Einwände an den oben geschilderten Ergebnissen laut. van den Bosch et al. (2000) und van den Bosch & Swaters (2000) befanden ihre Beobachtungsdaten als konsistent mit den Vorhersagen des CDM-Modells, sofern man den Effekt des *beam smearing* in korrekter Weise berücksichtige. McGaugh & de Blok (1998) haben indes bereits vorher gezeigt, dass dieser Effekt einen signifikanten peak-artigen Anstieg der Dichte im Zentrum, wie er dem CDM-Modell entspräche, nicht zu verschleiern in der Lage wäre. Die aktuellsten Beobachtungen in diesem Zusammenhang erhärten erneut den „Trend" zu flachen, *core*-artigen Dichteprofilen (Stand: März 2001). Es handelt sich konkret um hochaufgelöste $H_\alpha/HI$-Beobachtungen an LSB-Galaxien (De Block et al., 2001 sowie Referenzen darin), die auf eine maximale Steigung $|\alpha| = 0.2$ des Dichteprofils innerhalb eines *core*-Radius von wenigen kpc hindeuten. So lässt sich zum gegenwärtigen Zeitpunkt feststellen, dass die Frage nach der Struktur der zentralen Dichteprofils Dunkler Halos als nicht abschließend geklärt angesehen werden darf, wenngleich die Zeichen in der Mehrheit auf ein universelles Profile mit einer flachen *core*-Struktur hindeuten.

Eine empirische Fit-Formel für die beobachteten Dichteprofile hat Burkert (1995) unter Verwendung von 4 massearmen Spiralgalaxien angegeben. Das so genannte *Burkert-Profil* hat die Form

$$\rho(r) = \frac{\rho_0 r_c^3}{(r + r_c)(r^2 + r_c^2)} \tag{4.8}$$

Dabei sind die Dichte im Zentrum, $\rho_0$, und der *core*-Radius $r_c$ durch die einfache Beziehung

$$\rho_0 \propto r_c^{-2/3} \tag{4.9}$$

verknüpft. Im Innenbereich ($r \ll r_c$) entspricht dies einem modifizierten isothermen Profil, wie es gelegentlich als Modell für Dunkle Halos verwendet wird, um der gemessenen konstanten Rotationsgeschwindigkeit der stellaren und Gaskomponente in hinreichender Entfernung vom galaktischen Zentrum genüge zu leisten (Begeman et al., 1991). In den Außenbereichen ($r \gg r_c$) dagegen stimmt das empirische Profil (4.8) mit den Ergebnissen der numerischen CDM-Simulationen überein. Dies steht in keinem Widerspruch zu den konstanten Rotationsgeschwindigkeiten von galaktischen Scheiben, da diese im Allgemeinen eine sehr viel geringere Ausdehnung haben als die entsprechenden Halos, und somit im wesentlichen in dem näherungsweise isothermen ($\rho(r) \propto r^{-2}$) Übergang zwischen dem $\rho(r) \propto r^{-1}$– und dem $\rho(r) \propto r^{-3}$–Bereich liegen.

### Mögliche Ursachen der Diskrepanz

Es stellt sich sogleich die Frage nach dem Grunde für die Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung. Obwohl die in den CDM-Simulationen vernachlässigte baryonische Materie auch in der Natur kaum einen gravitativen Einfluss auf die Bildung und Entwicklung massearmer dunkler Halos nehmen sollte, kann ihr Einfluss doch in anderer Weise zum Tragen kommen. So könnte etwa Gas durch Supernova-getriebene Winde aus dem inneren Bereich hinausgeschleudert werden. Dies könnte das Potenzial im Zentrum so vermindern, dass eine stärkere Kontraktion der Dunklen Materie verhindert oder rückgängig gemacht werden könnte. Navarro et al. (1996a) zeigten, dass auf diese Weise den Dunklen Halos von Zwerggalaxien *cores* mit Skalenradien im Bereich weniger kpc aufgeprägt werden können. Solch einem Prozess spricht allerdings entgegen, dass hierdurch wenigstens *ein* weiterer freier Parameter in das Dichteprofil eingehen müßte: Die Struktur des Innenbereiches wäre in dem geschilderten Falle das Ergebnis eines lokalen gasdynamischen Prozesses, wohingegen die Struktur in den Außenregionen sich in Folge eines kosmologischen Prozesses einstellte, nämlich einem dissipationsfreien Kollaps im expandierenden Universum. Mithin wäre die Universalität der Dichteprofile, wie sie auch von Kravtsov et al. (1998) beobachtet wird sehr unwahrscheinlich. Wie Burkert & Silk (1997) zudem feststellen, wäre es im Falle der DM-dominierten Zwerggalaxie DDO 154 nötig gewesen, ca. $10^9 M_\odot$ Dunkler Materie von den inneren 2 kpc in den Bereich von 2-4 kpc Entfernung vom Zentrum zu befördern, um mit dem geschilderten Prozess die beobachtete Rotationskurve erklären zu können. Dies würde die zu erwartende Leistung eines solchen Prozesses bei weitem übersteigen. Ebenso kann ein lokaler gasdynamischer Prozess nicht für die von Flores & Primack (1994) beobachtete *core*-Struktur von Halos auf Cluster-Skala verantwortlich sein.

Eine andere Möglichkeit bestünde darin, dass die innere Struktur Dunkler Halos von den kosmologischen Parametern bestimmt wird. Dies ist aber den Arbeiten von NFW zu Folge auszuschließen, die eine Universalität der Dichteprofile in Simulationen mit unterschiedlichen Kosmologien gefunden haben. Insbesondere Dubinski & Carlberg (1991) zeigten, dass durch den Effekt der *violent relaxation* in den Dunklen Halos jede Information über die Kosmologie verloren geht.

Somit gelangt man zu der Annahme, dass die beobachteten Dichteprofile kosmologischen Ursprungs sind, auch wenn dies eine Infragestellung etwa der kollisionsfreien oder überwiegend nichtbaryonischen Natur der Dunklen Materie bedeutet. Bis zum gegenwärtigen Zeitpunkt gibt es eine Fülle von Vorschlägen dazu, von einer Klärung kann im Moment aber mitnichten gesprochen werden. Dies liegt zum Teil sicher an der mangelnden Überprüfbarkeit der Theorien, die sich zum Teil auf die Natur der Dunklen Materie beziehen. Ein Abriss der unterschiedlichen Ideen in der gebotenen Kürze soll zum Überblick dienen.

- Phasenraum-Kriterium (Burkert, 1997)

Die stoßfreie Boltzmann-Gleichung (3.11) besagt, dass das lokale Phasenraumvolumen $d\mathbf{f} = d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ in einem stoßfreien System zeitlich konstant ist. Dies stellt eine Rahmenbedingung für die zeitliche Entwicklung der Dunklen Materie dar. Setzt man die Existenz einer maximalen primordialen Phasenraumdichte $f_{max}$ voraus, so kann diese auch in den Dunklen Halos bei $z = 0$ nicht überboten werden. In Dunklen Halos mit *cusp*-Struktur würde die Phasenraumdichte gemäß $d\mathbf{f} \propto \rho\sigma^{-3} = r^{-4}$ (wegen $\rho \propto r^{-1}$ und $\sigma \propto r$) divergieren. In einem Modell mit kalter Dunkler Materie stellt dies kein Problem dar, da diese durch eine verschwindende Geschwindigkeitsdispersion $\sigma$ ausgezeichnet ist, was einem (theoretisch) unendlich hohen Wert für die maximale Phasenraumdichte gleichkommt. Warme Dunkle Materie jedoch würde diese Grenze auf einen endlichen Wert mindern, da $\sigma$ in dem Falle nicht mehr verschwindet. Ein Widerspruch mit der Struktur Dunkler Halos könnte dann nur durch einen endlich ausgedehnten Bereich vermieden werden, innerhalb dessen $\rho\sigma^{-3} = \text{const}$ gilt. Dies ist wegen der von Burkert (1995) angegebenen Skalierungsbeziehungen

$$\sigma_0 \propto r_0^{2/3} \quad \text{und} \quad \rho_0 \propto r_0^{-2/3} \tag{4.10}$$

nur durch $\rho = \text{const}$ und $\sigma = \text{const}$ erfüllbar.

Diese attraktive Möglichkeit hätte jedoch folgende Konsequenz: Mit den Skalenbeziehungen (4.10) folgt auch

$$f_0 \propto \rho_0\sigma_0^{-3} \propto r_0^{-8/3}. \tag{4.11}$$

Demnach kann $f_o$ nur dann konstant und gleich $f_{max}$ sein, wenn $r_0$ eine universelle Konstante ist. Dies ist offensichtlich nicht der Fall, vielmehr nimmt $r_0$ mit wachsender Halomasse zu. Dies schließt die Möglichkeit Warmer Dunkler Materie aus und insbesondere kann das *core*-Problem so nicht gelöst werden.

- Baryonische Komponente

Als andere Möglichkeit zur Lösung des *core*-Problems wurde von Burkert & Silk (1997) vorgeschlagen, dass der Dunkle Halo von Zwerggalaxien sich aus zwei Komponenten zusammensetzt: der nichtbaryonischen Kalten Dunklen Materie sowie einem baryonischen zum galaktischen Zentrum hin konzentrierten Anteil. Hierbei kann es sich nicht um diffuses Gas in der Scheibe handeln, da diese bei hinreichend hoher Masse instabil gegen Fragmentation wird, was einen nicht beobachteten hohen stellaren Anteil in der Scheibe zur Folge hätte. Vielmehr wird eine baryonischen Komponente in Form von MACHOs (*MA*ssive *C*old *H*alo *O*bjects, siehe Abschnitt 1.2.2) angenommen, die in sphärischer Verteilung um das Zentrum einen wesentlichen Teil des Dunklen Halos ausmacht. Eine baryonische Komponente der Dunklen Materie hätte wegen ihrer unterschiedlichen dynamischen Eigenschaften eine von der nichtbaryonischen Dunklen Materie unterschiedliche Massenverteilung und somit — im Falle hinreichender Masse — Einfluss auf die Form der Rotationskurve. Die Existenz einer solchen zusätzlichen baryonischen Komponente ist konsistent mit den Vorhersagen der Standardtheorie der primordialen Nukleosynthese.

Als Modell dient wiederum die Zwerggalaxie DDO 154. Burkert und Silk zeigten, dass es möglich ist mit Hilfe eines solchen 2-Komponenten Modells die sehr genau vermessene Rotationskurve zu reproduzieren. Mit der dazu erforderlichen Wahl der freien Parameter, der charakteristischen Masse $M_0$ und dem Skalenradius $R_s$, ergibt sich eine bemerkenswerte Übereinstimmung mit der MACHO-Population der Milchstraße, wie sie von Alcock et al. (1996) beobachtet wurde. In beiden Fällen, Milchstraße und DDO 154, haben die MACHO- und CDM-Komponente je eine in etwa gleiche Masse, die das 4-5-fache Masse der galaktischen Scheibe ausmacht. Die MACHOs sind sphärisch verteilt bis zu einer Entfernung von 14 Scheiben-Skalenlängen, und in beiden Fällen beträgt die Masse der MACHOs etwa das 5-fache der Masse des neutralen Wasserstoffs in der Scheibe.

Dieses attraktive Modell gerät dadurch ins Wanken, dass inzwischen die Entfernungen von drei MACHOS bestimmt wurden (Alcock et al., 2000). Alle drei liegen im Bereich der Großen- bzw. Kleinen Magellanschen Wolke. Dies stellt die Existenz eines MACHO-Halos in Frage.

- Selbstwechselwirkende Dunkle Materie

Von Spergel & Steinhardt (2000) stammt ein Vorschlag der die Natur und die fundamentalen Eigenschaften der Dunklen Materie betrifft und mit dessen Hilfe wenigstens eine „Linderung der Probleme auf kleinen Skalen denkbar ist. Demnach sollte die Dunkle Materie nicht wie bisher angenommen nur vermöge der gravitativen und der schwachen Kraft wechselwirken. Vielmehr sollte die DM aus Teilchen bestehen, die eine zusätzliche 2-Körper-Streuung erleiden mit einem (spezifischen) Wirkungsquerschnitt im Bereich von $\sigma/m \approx 0.1$ cm$^2$g$^{-1}$. Dieser Wert korrespondiert mit einer mittleren freien Weglänge eines DM-Teilchens von ca. $1 - 1000$ kpc und einer Häufigkeit von ca. $1 - 1000$ Stößen pro Hubble-Zeit, je nach Umgebungsdichte.

Solch eine zusätzliche Wechselwirkung sollte die Temperaturinversion in den Zentralbereichen eines NFW-Halos aufheben, indem „Wärme"[4] vom Bereich des Skalenradius nach Innen transportiert werden kann. Die Folge ist eine Expansion des Zentrums und also eine Abflachung des Dichteprofils. Nachdem sich eine flache Dichtestruktur eingestellt hat, kommt es jedoch zu einem weiteren Austausch von Wärme zwischen dem heißen Zentrum und den kühleren Außenbereichen. Durch die Abkühlung des Zentrums kann dieses wieder kollabieren („*core collapse*") und somit einen Dichtegradienten erreichen, der über dem des NFW-Profils liegt (Kochanek & White, 2000). Allerdings geschieht letzteres bei geeigneter Wahl der mittleren freien Weglänge von $\approx 0.1$ cm$^2$g$^{-1}$ auf Zeitskalen jenseits der Hubble-Zeit (Yoshida et al., 2000b).

[4]Dies ist als Maß für den Betrag der Geschwindigkeitsdispersion zu verstehen.

Solch eine zusätzliche Wechselwirkung sollte einen Prozess der Gleichverteilung der Geschwindigkeiten bewirken und somit in den zentralen Halogebieten eine isotherme, flache *core*-Struktur bedingen. Als weitere Konsequenz der „neuen" Wechselwirkung sollte sich eine isotrope Geschwindigkeitsdispersion einstellen, mit der beobachtbaren Folge sphärischer Halos. Dies deckt sich mit Röntgenbeobachtungen von Galaxienhaufen, die bis auf eine leichte Abplattung auf sphärische Halos schließen lassen (Mohr et al., 1995). Eine leichte Abweichung von der perfekten sphärischen Symmetrie steht durchaus in Einklang mit den gewünschten Eigenschaften der Wechselwirkung: Bei der angegeben Wahl der mittleren freien Weglänge werden nur die inneren Bereiche der Halos von der Gleichverteilung der Geschwindigkeiten betroffen, so dass sich in der Umgebung des Virialradius keineswegs eine Symmetrie einstellen muss.

Praktisch alle numerischen Simulationen, die in diesem Zusammenhang bislang unternommen wurden, führten zu Halos mit flachen *cores* (Burkert, 2000b, Moore et al., 2000, Yoshida et al., 2000b, Kochanek & White, 2000, Yoshida et al., 2000a).

Die Diskrepanz zwischen den theoretisch erwarteten und den beobachteten Dichten in den Zentren Dunkler Halos ist nur der Spezialfall eines allgemeineren Problems. Das CDM-Modell leidet allgemein unter einer zu hohen Ausprägung von Strukturen auf subgalaktischen Skalen. Dies äußert sich auch in einer Überhäufigkeit von Unterstrukturen in massereichen Halos. In der lokalen Gruppe etwa kennt man deutlich weniger als 100 Galaxien (Mateo, 1998), wohingegen CDM-Simulationen auf eine Häuffigkeit von ca. 1000 isolierter Dunkler Halos schließen lassen (Moore et al., 1999a, Klypin et al., 1999). Auch diesen Mangel kann selbstwechselwirkende Dunkle Materie beheben , was die Attraktivität dieser Idee großen Vorschub leistet (Moore et al., 2000).

Die konkrete Natur solch einer postulierten Wechselwirkung ist ungeklärt, ebenso wie die Natur der entsprechenden Teilchen. Für einen Abriss der laufenden Diskussion siehe etwa (Wandelt et al., 2000).

Aber auch die Idee der selbstwechselwirkenden Dunklen Materie ist nicht frei von Widersprüchen: Da die Zeitskala, auf der sich der *core*-Kollaps vollzieht bei gegebenem $\sigma/m$ von der Ausdehnung des *cores* abhängt, sollte man sowohl Halos mit *cores* als auch solche mit *cusps*, also kollabierten *cores* beobachten. Dies ist nicht der Fall und das *core*-Problem bleibt offen.

## 4.2 Die kosmologischen Simulationen

Trotz einer Fülle von Vorschlägen ist eine allgemein akzeptierte Lösung des *core*-Problems noch nicht in Sicht. In einem Teil der vorliegenden Arbeit soll ein anderer Weg versucht werden. Wie die im letzten Abschnitt besprochenen Ideen muss es sich auch hier um einen kosmologischen Ansatz handeln, der sich unter anderem wegen der Existenz der Skalierungsbeziehungen zwischen den Parametern aufdrängt (Burkert, 1995). Konkret soll der Einfluss veränderter Anfangsbedingungen auf die Halostruktur und die Zentren insbesondere Untersucht werden. Die Abschnitte 4.5 und 4.6 handeln davon. Zuvor soll noch überblicksartig erläutert werden wie die entsprechenden numerischen Simulationen gestaltet sind.

### Kosmologische Parameter

Im gegenwärtig favorisierten kosmologischen Modell gilt $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$, genauer $\Omega_m = 0.3$ und $\Omega_\Lambda = 0.7$ (siehe Seite 11f und die dort angegebenen Referenzen). Von diesen Werten wird in den Simulationen dieser Arbeit Gebrauch gemacht. Um einen eventuellen Unterschied zu einem Modell mit hoher Dichte zu untersuchen, wurden ebensoviele Simulationen mit $\Omega_m = 1.0$ und $\Omega_\Lambda = 0$ durchgeführt.

Für die Expansionsrate wurden ebenfalls zwei Werte gewählt, zum einen der in den Arbeiten von NFW, Moore et al. (1998) und Moore et al. (1999a) verwendete $h = 0.5$ zum anderen der durch Beobachtungen im Augenblick favorisierte Wert $h = 0.65$ (wobei$H_0 = 100h$ km/Mpc/s).

Die rms-Massenfluktuation $\sigma_8$ richtet sich nach dem Wert der Materiedichte $\Omega_m$ wobei konkret Gleichung (3.8) verwendet wird, also $\sigma_8 \approx 0.57\Omega_m^{-0.56}$ (siehe Abschnitt 3.1.2 bzw. White et al., 1993). In einem $\Omega_m = 0.3$-Modell gilt also $\sigma_8 = 1.13$, in einem EdS-Modell ist $\sigma_8 = 0.63$.

### Simulationsbox, Teilchenzahl und Teilchenmasse

Die am MPI für Astronomie zur Verfügung stehende Hard- und Software ermöglicht prinzipiell Simulationen mit bis zu $10^6$ Teilchen. Allerdings beanspruchen diese eine entsprechend lange Zeit im Bereich von einer Woche. Die wiederholte Durchführung solcher Simulationen ist deswegen der Beliebtheit innerhalb der Arbeitsgruppe sehr abträglich. Jedoch: Der wesentliche Teil der Aufmerksamkeit richtet sich auf die zentralen Bereiche der Dunklen Halos, wohingegen die großskalige Verteilung der Materie in dieser Arbeit weniger von Interesse ist. Deswegen ist ein Kompromiß zwischen hoher Teilchenzahl und geringen Rechenaufwand möglich: Die meisten Simulationen werden innerhalb eines Volumens von 1 Mpc$^3$ unter Verwendung von 125000 Teilchen durchgeführt. Bei einer smoothing-Länge von 1/40 des mittleren Teilchenabstandes erreicht man damit eine untere Grenze für die räumliche Auflösung von 500 pc. Die Massenauflösung wird bestimmt durch die Masse eines Teilchens, die sich zu

$$m_P = \frac{3H^2}{8\pi GN}\Omega_m L^3 = 2.78 \times 10^{11} h^2 N^{-1} L^3 \Omega_m \mathrm{M}_\odot \tag{4.12}$$

berechnet, wobei $L$ die Kantenlänge des Simulationsvolumens ist, $N$ die Zahl der Teilchen und $h$ die Hubble-Konstante in Einheiten von 100 kms$^{-1}$Mpc$^{-1}$. Die Teilchenmassen bei den hier durchgeführten Simulationen liegen dann im Bereich $10^5 < m_P \mathrm{M}_\odot^{-1} < 10^6$; die genaueren Werte entnehme man Tabelle 4.1.

### Zur Notation

Die unterschiedlichen Simulationen werden mit Kürzeln bezeichnet, aus denen die Eingabe-Parameter ersichtlich sind. Die Anzahl der Teilchen wird dabei in der Form „n$x$" angegeben, wobei $x$ die 3. Wurzel der Teilchenzahl ist. „n50" zeigt also die Verwendung von 125000 Teilchen an. Die Kantenlänge des Simulations„würfels" wird durch ein „cl" (für *cubelength*) bezeichnet, gefolgt von der Kantenlänge in Mpc (also z.B. „cl10"). „H50" bzw. „H65" steht für die Expansionsrate. Simulationen, die eine nichtverschwindende Vakuumsenergie berücksichtigen werden in der Notation durch ein $\Lambda$ gekennzeichnet. Fehlt dieses Symbol, so gilt $\Omega_m = 1.0$. Beispiel: Die Notation „n50cl1H50Λ" steht für eine Simulation mit 125000 Teilchen, einer Kantenlänge von 1 Mpc, einer Hubble-Konstante von 50 kms$^{-1}$Mpc$^{-1}$ und einem Beitrag der Vakuumsenergie von $\Omega_\Lambda = 0.7$. Man beachte, dass ein Kürzel dieser Art nicht für *eine bestimmte* Simulation steht, sondern für eine ganze Reihe von Rechnungen mit eben diesen Parametern. Die einzelnen Rechnungen unterscheiden sich dann nur durch die Zufallsrealisierung des anfänglichen Dichtefeldes.

Sämtliche anderen Größen ergeben sich aus den Werten dieser Parameter:

- Das Alter des Universums, $t_0$, ergibt sich allgemein aus Gleichung (3.46), die sich im Falle eines EdS-Universums auf $t_0 = 2/3H_0$ vereinfacht.

- Die anfängliche Rotverschiebung ergibt sich aus der Forderung, dass der maximale Dichtekontrast nach Anwendung der Zeldovich-Näherung gerade 1 ist.

- Die Zeitschrittlänge $dt$ ergibt sich aus der Forderung, dass die Weglänge der schnellsten Teilchen während einer Zeitschrittdauer nicht größer ist als die smoothing-Länge. Bei den Standardsimulationen, also denjenigen mit $N = 125000$ und $L = 1$ Mpc, beträgt die smoothing-Länge 500 pc. Die Geschwindigkeiten der DM-Teilchen liegen typischerweise unterhalb 100 kms$^{-1}$. Damit ergibt sich eine maximale Zeitschrittlänge von $dt = 500\text{pc}/100\text{kms}^{-1} \approx 5 \times 10^6 yr$. Die verwendete Software in Verbindung mit den GRAPE-3 Boards läßt es wegen der hohen Rechengeschwindigkeit zu, dass die Länge der Zeitschritte deutlich unterhalb dieses Wertes liegen, ohne den Nachteil unverhältnismäßig langer Rechenzeiten einzugehen. Die verwendeten Zeitschritte liegen deshalb bei ca. $2 \times 10^6$ Jahren. In dieser Zeit legen die meisten Teilchen eine Distanz von weniger als 200 pc zurück; dies liegt deutlich unter der durch das smoothing begrenzten räumlichen Auflösung. Die *kleinsten* Halos, die in den Standardsimulationen noch sinnvoll aufgelöst werden können haben Virialradien von ca. 10 kpc. Selbst bei unrealistisch hohen Konzentrationsparametern von $r_{200}/r_s = 20$ läge die typische Weglänge während eines Zeitschrittes deutlich unterhalb des Skalenradius.

- Die Zahl der Zeitschritte $nsteps$ schließlich ergibt sich aus der Forderung, dass die Struktur der Dunklen Halos bei $z = 0$ untersucht werden soll. Damit ist $nsteps = t_0/dt$.

Sämtliche Parameter, wie sie in den einzelnen Simulationenn verwendet wurden, sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

### Die Identifizierung der Halos

Um aus den Simulationen überhaupt Aussagen über die Struktur der Dunklen Halos treffen zu können, ist es selbstverständlich notwendig, die Halos als solche zu identifizieren. Zu diesem Zweck stehen mehrere *public domain* Codes zur Verfügung, deren meistgenutzten, SKID, DENMAX und FRIENDS-OF-FRIENDS, von Götz et al. (1998) erläutert und gegenübergestellt wurden. Als Maßstab für die Qualität eines ,,halo finder"-Algorithmus kann die Übereinstimmung der aus ihm hervorgehenden kosmologischen Massenfunktion $N(M)$ mit derjenigen gelten, die durch den Press-Schechter-PS-Formalismus vorhergesagt wird[5]. In den vergleichenden Tests der ebengenannten Autoren erweisen sich die drei Algorithmen in dieser Hinsicht als gleichwertig. Allerdings kommt dem FRIENDS-OF-FRIENDS-(FOF)-Algorithmus der schlagende Vorteil hoher Effizienz bei einfacher Konzeption zu. Dies ist neben dem offensichtlichen Vertrauen vieler anderer Autoren in diesen Algorithmus (siehe etwa Efstathiou et al., 1985, Frenk et al., 1988, Cole & Lacey, 1996, NFW96, Knebe & Müller, 1999, Jing, 2000, White, 2001, Jenkins et al., 2001) Anlass genug, den FOF-Code in der vorliegenden Arbeit zu verwenden.

[5]Zur Press-Schechter-Theorie siehe Press & Schechter, 1974. Eine weniger technische Einführung bietet Longair (1998).

| | | | $\Omega_m = 1.0$, $\Omega_\Lambda = 0$ | $\Omega_m = 0.3$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ |
|---|---|---|---|---|
| $h = 0.5$ | N | Teilchenzahl | 125000 | 125000 |
| | $\sigma_8$ | Normierung | 0.63 | 1.13 |
| | $\epsilon$ | smoothing | 500 pc | 500 pc |
| | $t_0$ | Alter des Univ. | 13.0 Gyr | 1.89 Gyr |
| | $m_P$ | Teilchenmasse | $5.55 \times 10^5 M_\odot$ | $1.67 \times 10^5 M_\odot$ |
| | $L$ | Kantenlänge | 1 Mpc | 1 Mpc |
| | nsteps | # Zeitschritte | 6500 | 9000 |
| | $dt$ | Zeitschrittlänge | 2.003 Myr | 2.095 Myr |
| $h = 0.65$ | N | Teilchenzahl | 125000 | 125000 |
| | $\sigma_8$ | Normierung | 0.63 | 1.13 |
| | $\epsilon$ | smoothing | 500 pc | 500 pc |
| | $t_0$ | Alter des Univ. | 10.0 Gyr | 1.45 Gyr |
| | $m_P$ | Teilchenmasse | $9.83 \times 10^5 M_\odot$ | $2.81 \times 10^5 M_\odot$ |
| | $L$ | Kantenlänge | 1 Mpc | 1 Mpc |
| | nsteps | # Zeitschritte | 6500 | 7000 |
| | $dt$ | Zeitschrittlänge | 1.541 Myr | 2.072 Myr |

Tabelle 4.1: Übersicht über die Parameter der Standardsimulationen mit $50^3$ und $L = 1$Mpc.

Der FOF-Algorithmus definiert eine Verbindung zwischen zwei Teilchen, wenn ihr Abstand kleiner ist als ein Schwellenwert $l$ („friends"). In demselben Sinne können auch mehrere verbundene Teichen*paare* verbunden sein („friends of friends"). Ein Cluster ist schließlich definiert durch eine möglichst große Menge direkt oder indirekt verbundener Teilchen. Abbildung 4.2 mag dies besser veranschaulichen.

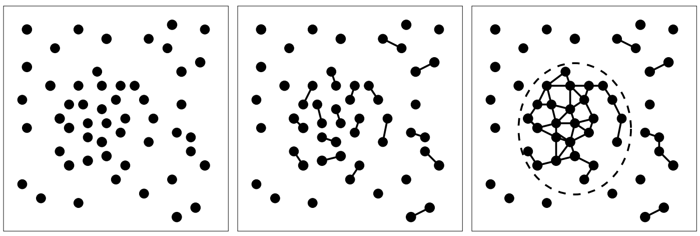

Abbildung 4.2: Prinzip der Cluster-Identifizierung mit dem FOF-Algorithmus. Die Linien symbolisieren Verbindungen zwischen Teilchen mit Abständen $D < l$. Das umrandete Objekt ist der FOF-Cluster.

Der Schwellenwert $l$ für den maximal „erlaubten" Abstand zweier Teilchen, auch als *linking length* bezeichnet, ist der einzige freie Parameter dieses Algorithmus. Aus den Tests von Götz et al. (1998) geht hervor, dass ein Wert von $b = 0.2$, in Einheiten des über das gesamte Simulationsvolumen gemittelten Teilchenabstandes, die beste Übereinstimmung mit der Press-Schechter-Theorie liefert. Ebenso liegen die mittleren Dichten der Halos im Mittel am nächsten bei $200\rho_c$ (Lacey & Cole, 1994), in bester Verträglichkeit mit der üblichen Definition des Virialradius.

Die fälschliche Identifizierung zufällig nahegelegener kleiner Teilchengruppen als Halos wird durch einen zusätzlichen Parameter $N_{min}$ vermieden, der die Minimalzahl von Teilchen vorgibt, aus denen ein Halo zu bestehen hat. Eine weitere Option dient dazu, diejenigen Teilchen aus einem FOF-Cluster zu entfernen, die sich nur zufällig in kritischer Nähe eines Clusters befinden, ohne an diesen gebunden zu sein. Dies ist einfach zu bewerkstelligen, indem man potentielle und kinetischer Energie eines jeden Teilchens vergleicht. In der Praxis beschert dieses Verfahren jedoch hohe Kosten in Form von Rechenzeit, die bei weitem über dem der eigentlichen Haloidentifizierung liegt. Denn der Zeitaufwand für die Berechnung des Potentials steigt etwa mit $N_h^2$ ($N_h =$ Zahl der Teilchen in einem Halo). Zudem muss die Potenzialberechnung nach jedem ,,ertappten" Teilchen von Neuem begonnen werden, da sich die Potenziale mit jedem Teilchen, das den Cluster verläßt ändern. Nach meiner Erfahrung halten weniger als 1% aller Teilchen in einem Halo dem Bindungskriterium nicht stand. Zudem sind diese Teilchen vor allem in den ohnehin rauschempfindlichen Außenregionen angesiedelt, so dass ich zu Gunsten ersparter Rechenzeit auf diese Korrektur verzichtet habe.

Da der FOF-Algorithmus ausschließlich nach geometrischen Kriterien arbeitet, ist in einem weiteren Punkte Vorsicht geboten: So kann es vorkommen, dass zwei individuelle, jedoch nah benachbarte Halos durch eine zufällige ,,Teilchenbrücke" miteinander verbunden werden. Insbesondere können zwei wechselwirkende oder gerade verschmelzende Halos nicht als solche identifiziert werden. Objekte mit diesen ,Krankheiten" können entweder leicht durch deutliche Anomalien ihrer Dichteprofile erkannt werden, durch einen deutlich von 1 verschiedenen Virialkoeffizienten oder durch große räumliche Distanz von Massenschwerpunkt und dem Teilchen mit dem höchsten Potenzial.

Abbildung 4.3 zeigt einen Vergleich der gemittelten FOF-Massenfunktionen mehrerer meiner Simulationen mit der Vorhersage der PS-Theorie. Die Halomasse $M$ wird in der graphischen Darstellung durch die so genannte *Multiplizität* $m$ gemessen, definiert durch

$$m = \log_2 \left( \frac{M}{M_*} \right), \tag{4.13}$$

mit einer (für diesen Zweck willkürlichen) Referenzmasse $M_*$. Über einen großen Bereich von $m$ ergibt sich eine gute Übereinstimmung von Simulation und PS-Formalismus.

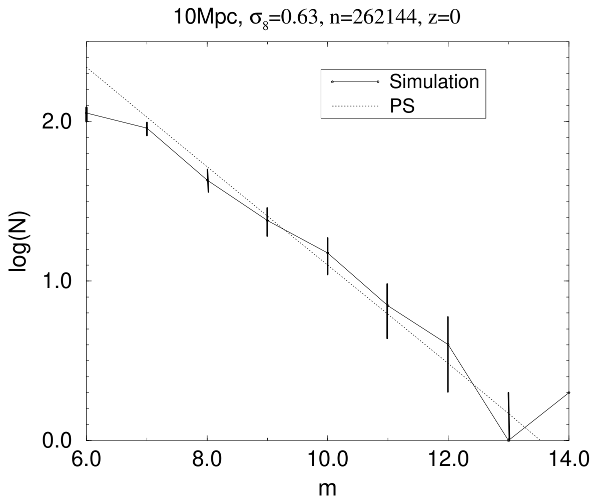


Abbildung 4.3: Vergleich der gemittelten Multiplizitäts-Funktion N(m) mehrerer Simulationen mit $\Omega_m = 1$, $N = 64^3$ und $L = 10$ Mpc. Die durchgezogene Linie zeigt ein von Khochfar (2000) zur Verfügung gestelltes Ergebnis des analytischen PS-Verfahrens. Die senkrechte Achse misst die Anzahl der Halos mit einer Multiplizität zwischen $m$ und $m+1$. Die Abweichung der Ergebnisse bei kleinen $m$ rührt von der begrenzten Auflösung der Simulation, die Abweichung bei großen $m$ ist statistisches Rauschen, da nur sehr wenige Halos in diesem Massenbereich entstehen. Die senkrechten Balken geben die $1\sigma$-Fehlertoleranz an.

## 4.3 Dichteprofile

Im folgenden Abschnitt werden die Dichteprofile der Dunklen Halos dargestellt, wie sie sich aus den Simulationen mit unterschiedlichen kosmologischen und numerischen Parametern ergeben. Die Dichten sind immer als sphärisch gemittelte Teilchenzahldichten zu verstehen. Die Einteilung des Halos in sphärische Bins erfolgt so, dass jeweils eine feste Anzahl von Teilchen innerhalb einer Schale liegt. Auf diese Weise orientiert sich die Länge der Bins an der unterschiedlichen Auflösungsanforderung innerhalb eines Halos (hohe Auflösung bei hohem Dichtegradienten). In etwas zeitraubender Prozedur werden für sämtliche Teilchen eines jeden Halos die Potenziale berechnet. Das Teilchen mit dem betragsmässig höchsten Potenzial definiert den Mittelpunkt des Systems, um den herum die Bins durch konzentrische Schalen festgelegt sind.

Die logarithmische Steigung $\beta := d\log\rho/d\log r$ der Profile in den äußeren Halobereichen wird durch einen least-square-(ls-)fit ermittelt. Hier ist ein geringes Maß an Willkür nicht zu vermeiden: Besonders in den Gebieten sehr geringer Dichte, also in den äußeren Halobereichen, unterliegt die Teilchenverteilung hohen statistischen Schwankungen, die unmittelbar auf $\beta$ Einfluss nehmen. Diesen Bereich beim Fit mit einzubeziehen würde das Ergebnis für die mittlere Steigung verfälschen. Die Wahl des Radius, an dem der Halo „abgeschnitten" wird unterliegt einer gewissen Willkür. In der vorliegenden Arbeit wurde jedoch ein *einheitlicher* Bereich so gewählt, dass alle ausgewerteten, skalierten Profile innerhalb dieses Bereiches keine augenscheinliche Abweichung vom $r^{-\beta}$-Verlauf aufweisen. Auch wenn dies die gefundenen Dichtegradienten in geringem Maße verfälscht, so bleibt dennoch die Möglichkeit eines direkten Vergleichs aller Werte von $\beta$ gewährleistet, weil die Wahl des Fit-Bereiches immer dieselbe ist.

Von ohnehin höherem Interesse sind die Dichtegradienten $\alpha$ in den zentralen Bereichen $r < r_s$. Der Übergang vom zentralen zum äußeren Bereich hinsichtlich des Dichtegradienten erfolgt kontinuierlich über einen ausgedehnten Bereich um $r_s$. Um zu gewährleisten, dass der Gradient des interessierenden innersten Bereiches möglichst korrekt erfasst wird, wurde der Differenzen-Quotient lediglich der beiden innersten Dichte-„Meßpunkte" als Wert für $\alpha$ verwendet. Dies sollte dem gesuchten Wert sehr nahe kommen, da in diesem Bereich hoher Teilchendichte statistische Fehler von untergeordnete Bedeutung sind.

Die Simulation mit dem größten Simulationsvolumen ist n64cl32H50. Die dazugehörige smoothing-Länge ist $\epsilon = 12.5$ kpc, die Masse der Teilchen ist $m_p = 8.68 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$. In der Simulation ergeben sich Halos mit Massen von bis zu $7 \times 10^{13} \mathrm{M}_\odot$. Abbildung 4.4 zeigt Dichteprofile willkürlich ausgewählter Halos dieser Simulation, aufgeteilt in verschiedene Massenbereiche. Man erkennt deutlich die zunehmenden Schwankungen des zentralen Dichtegradienten sowie den Trend zu flacheren zentralen Profilen mit abnehmender Halomasse. Der erste Effekt beruht auf statistischem Rauschen, der zweite auf einem zunehmenden Einfluss des smoothings. Eine konkrete Angabe von $\alpha$ im Zentrum ist mit einer hohen statistischen Unsicherheit behaftet, da sich in den meisten Halos weniger als 100 Teilchen in den einzelnen Bins befinden. Nur die Halos mit $N > 1600$ Teilchen ($M > 1.4 \times 10^{13} \mathrm{M}_\odot$) haben zentrale Dichtegradienten von annähernd 1, wie es einem NFW-Profil entspräche. In den weiter außen gelegenen Bereichen ergibt sich für die zufällig ausgewählten Halos eine mittlere Steigung von $\beta \approx 2.2$. Dies ist deutlich flacher als der von NFW gefundene Wert. Ein Trend von $\beta$ mit der Masse (bzw. der Massenauflösung ist nicht auszumachen (siehe Abbildung 4.4).

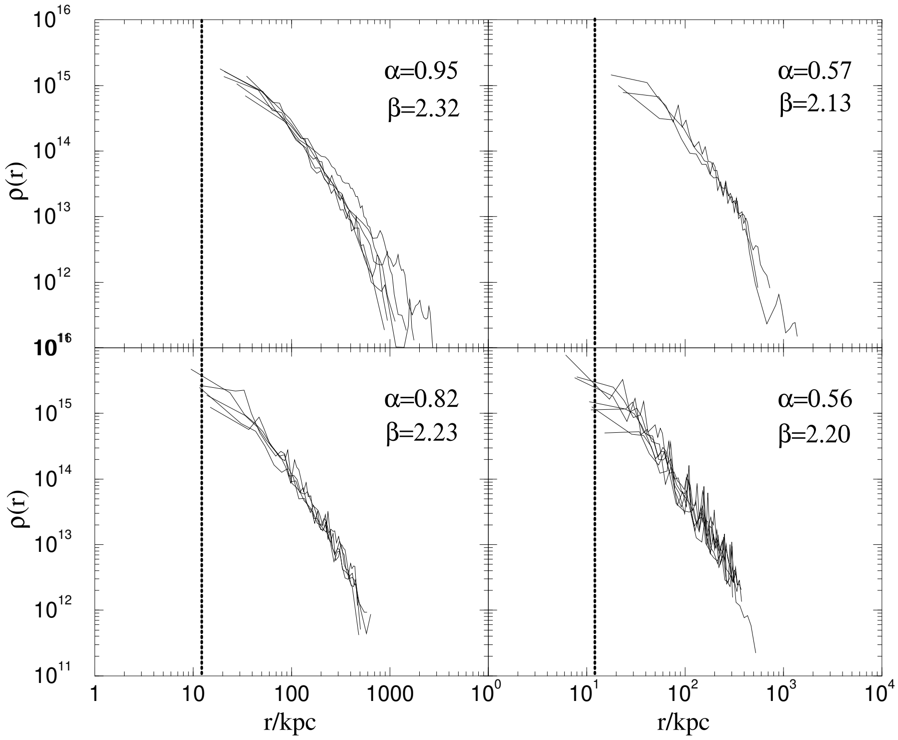


Abbildung 4.4: Unskalierte Dichteprofile $\rho(r)$ der Simulation n64cl32H50. Die Bildabschnitte sind nach disjunkten Massenbereichen aufgeteilt. Die Profile links oben gehören zu Halos mit $m > 14 \times 10^{12} \mathrm{M}_{\odot}$, dies entspricht einer Teilchenzahl von $8200 > N_H > 1600$ innerhalb eines FOF-Clusters. Rechts oben: $9 \times 10^{12} > M > 4.5 \times 10^{12}$ $(1600 > N_H > 1000)$; links unten: $4.5 \times 10^{12} \mathrm{M}_{\odot} < M < 6.4 \times 10^{12} \mathrm{M}_{\odot}$ $(500 < N_H < 700)$ ; rechts unten: $M < 2.6 \times 10^{12} \mathrm{M}_{\odot}$ $(200 < N_H < 300)$. Die senkrechten Linien stellen die smoothing-Länge $l = 1.25$ kpc dar. Die in den Bildabschnitten angegebenen Werte $\alpha$ und $\beta$ sind über die dargestellten Grafen gemittelt.

Die Simulation mit der besten Auflösung ist n100cl01H50. Halos bei $z = 0$ bestehen hier aus wenigen Hundert bis 180000 Teilchen zu je $2.08 \times 10^5 \mathrm{M}_{\odot}$ Dem geringen Simulationsvolumen von 1 Mpc entsprechend sind die Halos von relativ geringer Masse, nämlich etwa $1 \times 10^8 \ldots 4 \times 10^{10} \mathrm{M}_{\odot}$. Abbildung 4.5 zeigt die skalierten Dichteprofile von Dunklen Halos unterschiedlicher Massenbereiche. Die Profile sind bezüglich des Skalenradius $r_s$ und der charakteristischen Dichte $\rho_c$ des NFW-Profils skaliert, wobei die Parameter durch ls-fits eines NFW-Profils an das jeweils betrachtete Dichteprofil aus der Simulation gefunden wurden. Wiederum deutlich sichtbar ist die Abhängigkeit vor allem der zentralen Dichtegradienten von der Anzahl der Teilchen im Halo. Im ersten Bildabschnitt, links oben, sind Halos mit mehr als $10^4$ bis maximal $1.8 \times 10^5$ Teilchen dargestellt, deren zentralen Dichtegradienten gut mit dem eines NFW-Profils übereinstimmen. Die Steigung in den äußeren Bereichen ist jedoch wiederum — also auch bei vergleichsweise gut aufgelösten Objekten — etwas geringer als bei NFW, nämlich $\beta \approx 2.4 - 2.5$.

Im zweiten Bildabschnitt (rechts oben) sind Halos mit $N = 10^3 \ldots 10^4$ Teilchen dargestellt. Hier ist bereits ein klarer Trend zu flacheren inneren Profilen auszumachen, der sich zu kleineren Teilchenzahlen hin fortsetzt (untere Reihe), begleitet von einer Zunahme der Standardabweichung von $\sigma_\alpha$ (siehe Bildtext). Halos geringerer Teilchenzahl haben entsprechend geringere Radien und also kleinere Skalenlängen. Durch die Annäherung der Skalenlänge an die smoothing-Länge machen sich Relaxationseffekte bemerkbar, die das Abflachen der zentralen Profile verursachen.

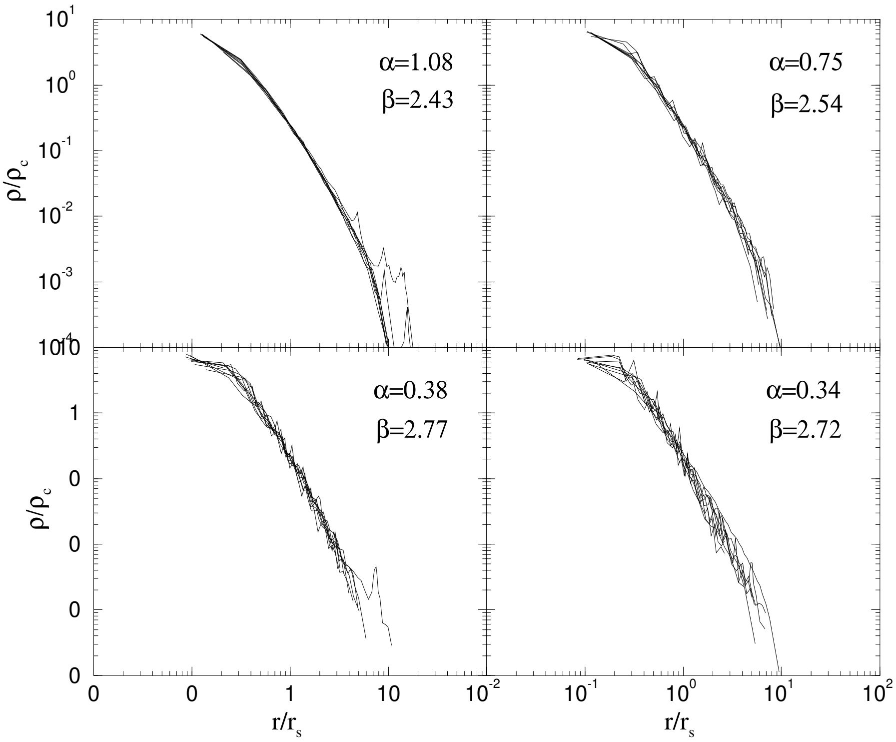


Abbildung 4.5: Skalierte Dichteprofile von Halos der Simulation n100cl01H50. Massenbereiche: links oben $2.3 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot < M < 3.7 \times 10^{10} \mathrm{M}_\odot$; Dies entspricht Teilchenzahlen $N$ von $11000 < N_H < 180000$. rechts oben: $3.3 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot < M < 1.2 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot (1600 < N_H < 6000)$; links unten: $1.6 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot < M < 2.1 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot (770 < N_H < 1000)$; rechts unten: $1.0 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot < M < 1.2 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot (500 < N_H < 580)$. Die Standardabweichungen der zentralen Dichteprofile sind (in derselben Reihenfolge) $\sigma_\alpha = 0.13, 0.24, 0.24, 0.38$.

Abbildung 4.6 zeigt ausschließlich Profile von Halos mit mehr als $10^4$ Teilchen. Die zu Grunde liegenden Rechnungen sind die Standardsimulationen n50cl01H50($\Lambda$) bzw. n50cl01H65($\Lambda$). Die Masse der Teilchen (und somit die Halomassen) hängen von den jeweiligen kosmologischen Parametern ab. Die Wahl von $N = 125000$ und $L = 1$ erweist sich als brauchbarer Kompromiss zwischen hoher Auflösung und kurzer Rechenzeit, da sich hier genügend Halos mit Teilchenzahlen von $N_H > 10^4$ bilden, die die (in Simulationen) zu erwartende Übereinstimmung von $\alpha$ mit dem NFW-Profil gewährleistet.

Die vier Bildabschnitte von Abbildung 4.6 zeigen die Dichteprofile der massereichsten Halos aus Simulationen mit jeweils unterschiedlicher Kosmologie. Wie zu erwarten (z.B. NFW) läßt sich keinerlei Trend in den Parametern $\alpha$ und $\beta$ mit der Kosmologie ausmachen. Die geringfügigen Unterschiede in den mittleren Dichtegradienten der Halos liegen innerhalb der Grenzen, die die jeweilige Standardabweichung $\sigma_\alpha$ und $\sigma_\beta$ zulässt (Bildunterschrift).

Wie in den vorherigen Simulationen bleiben die Werte von $\beta$ unterhalb der von NFW gefundenen.

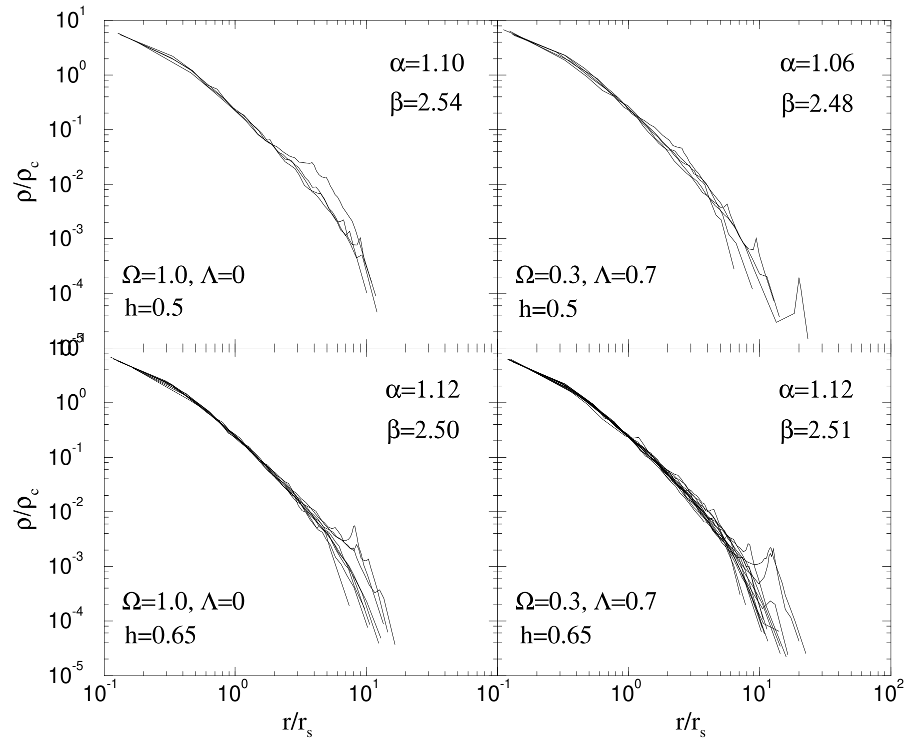


Abbildung 4.6: Skalierte Dichteprofile von Halos der Standardsimulationen mit $N = 50^3$ und $L = 1$ Mpc. Dargestellt sind die jeweils massereichsten Halos einer Serie von Simulationen mit identischen Kosmologien. links oben: n50cl01H50 ($8.8 \times 10^9 < M < 3.1 \times 10^{10} \mathrm{M}_\odot, 17000 < N_H < 56000$); rechts oben: n50cl01H50Λ ($2.3 \times 10^9 < M < 5.8 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot, 14000 < N_H < 35000$); links unten: n50cl01H65 ($1.4 \times 10^{10} < M < 5.0 \times 10^{10} \mathrm{M}_\odot, 15000 < N_H < 53000$); rechts unten: n50cl01H65Λ ($4.0 \times 10^9 < M < 1.5 \times 10^{10} \mathrm{M}_\odot, 14000 < N_H < 53000$). $\sigma_\alpha = 0.14, 0.12, 0.11, 0.09$.

Offensichtlich sollte also der Struktur von Halos mit deutlich weniger als $10^4$ Teilchen nur ein beschränktes Vertrauen entgegengebracht werden, da sich bei fast allen numerischen Arbeiten anderer Autoren übereinstimmend singuläre Dichteprofile mit $\alpha \geq 1$ herausgebildet haben (NFW, Moore et al., 1998, Kravtsov et al., 1998, Avila-Reese et al., 1999, Ghigna et al., 2000). In den Standardsimulationen der vorliegenden Arbeit wird dieses Kriterium von den Halos mit mehr als $10^4$ Teilchen erfüllt. Dies dient als grobes Auswahlkriterium für die im Weiteren zu untersuchenden Halos. Von den Clustern geringerer Teilchenzahl soll dagegen zunächst abgesehen werden.

### Konzentrationsparameter

Die in der vorliegenden Arbeit gefundenen Dichteprofile weichen auch für Halos mit hoher Auflösung in den Außenbereichen $r \gg r_s$ vom NFW-Profil ab. Letzteres ist durch einen Dichtegradienten von $\beta = -3$ gekennzeichnet, wohingegen die Halos in den hier vorlegenden Simulationen durchwegs flachere Dichtegradienten $\beta \approx -2.3... -2.6$ aufweisen. Dies wäre verständlich, wenn der durch die Profile abgedeckte Bereich den Virialradius $r_{200}$ nicht erreicht, so dass fälschlicherweise der Übergangsbereich zwischen dem Zentrum und dem Außenbereich gemessen würde. Dem ist jedoch nicht so, da mehr als 90% aller FOF-Cluster hireichend große Radien $R > r_{200}$ haben, so dass der gesamte relevante Bereich durch die gezeigten Dichteprofile abgedeckt sind. Dieses Problem ist einer weiteren Untersuchung Wert; allerdings ist es für die vorliegende Arbeit von nicht sehr hoher Bedeutung, da es hier im Wesentlichen um die zentralen Regionen gehen soll. Eben dort haben die Profile der massereichen Halos Steigungen von $\alpha \approx -1$, wie es dem NFW-Profil entspricht. Um die Konzentrationen eines Halos zu ermitteln, benötigt man den Wert für den Skalenradius $r_s$ sowie den Virialradius $r_{200}$. Letzterer ist sehr einfach und unzweideutig durch das Aufsummieren der Punktmassen von Zentrum nach außen zu erhalten. Der Skalenradius $r_s$ dagegen ist nur in Näherung durch einen Fit eines analytischen Profils an das numerische zu erhalten. Verwendet man zu diesem Zweck ein NFW-Profil so ist folgendes zu beachten: Die Dichte in den numerischen Halos fällt außen wie erwähnt etwas flacher ab, als im NFW-Falle. Dadurch wird bei einem least-square-fit der flachere *Übergangsbereich* des analytischen Halos in Richtung des ebenfalls flacheren *Außenbereiches* des numerischen Dichteprofiles verschoben. Dies liefert einen zu hohen Wert für den Skalenradius, und somit eine zu geringe Konzentration. Es ist deswegen sinnvoll, nicht mit NFW-Profilen als fit-Kurven zu arbeiten, sondern mit modifizierten, den numerischen Profilen dieser Arbeit angepassten Kurven der Form

$$\rho(r) = \rho_c \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1+r/r_s)^{3/2}} \tag{4.14}$$

Die daraus resultierenden Werte der Halokonzentrationen sind, wie Abbildung 4.7 zeigt, dennoch größer als bei NFW. Dies ist aber konsistent mit den flacheren numerischen Profilen in den Außenbereichen, da dies gleichbedeutend ist mit größeren Virialradien.

Dieser „Schönheitsfehler" ändert aber nichts an der zu erwartenden Massenabhängigkeit der Konzentrationsparameter (siehe ebenfalls Abbildung 4.7): Im Rahmen des hierarchischen Szenarios der Strukturbildung ist zu erwarten, dass die Halokonzentrationen mit steigender Masse tendenziell kleiner werden. Der Grund hierfür liegt in der geringeren Hintergrunddichte des Universums während der späteren Formationsepochen[6] von Halos größerer Masse (NFW1997, Salvador-Sole et al., 1998). Die Abbildung bestätigt dieses Verhalten innerhalb der beiden Modelle, SCDM und ΛCDM. Die Abhängigkeit der Konzentration vom Dichteparameter $\Omega_0$ des verwendeten Modells begründet sich ganz analog. Ein ls-fit für beide Modelle ergibt

$$c(M) = 2.1 \times 10^3 \left(\frac{M}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{-0.17\pm0.05} \quad (\mathrm{SCDM}) \tag{4.15}$$

$$\text{bzw.} \quad c(M) = 1.1 \times 10^3 \left(\frac{M}{\mathrm{M}_\odot}\right)^{-0.17\pm0.06} \quad (\Lambda\mathrm{CDM}). \tag{4.16}$$

[6]Unter der Formationszeit ist nach allgemeiner Konvention der Zeitpunkt zu verstehen, zu dem gerade die Hälfte der Endmasse des Halos in *einem* Objekt in gebundener Form vorliegt.

Wegen der geringen Anzahl von Halos mit hinreichender Auflösung sind die Exponenten mit relativ hohen statistischen Fehlern behaftet. Im Bereich der Fehlergrenzen ist dieses Ergebnis konsistent mit den von NFW gefundenen Werten (siehe Burkert & Silk, 1999).

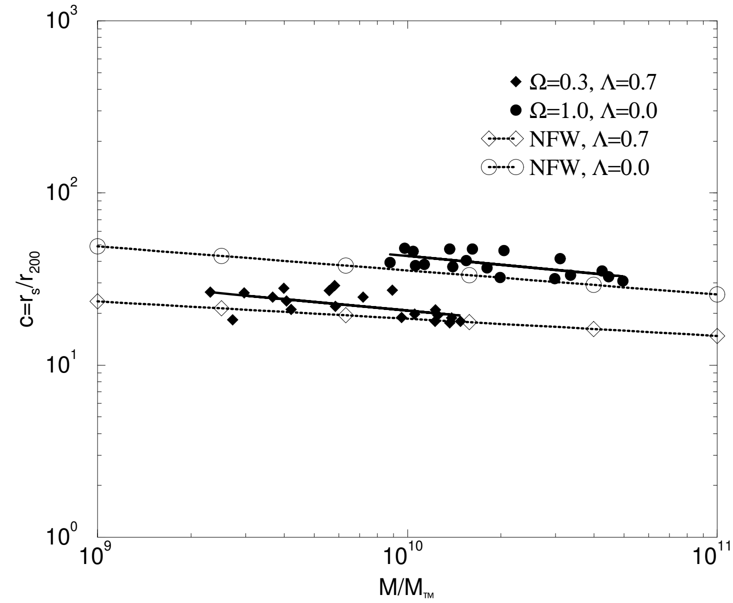


Abbildung 4.7: Konzentrationsparameter $c$ in Abhängigkeit von der Masse. Die ausgefüllten Kreis- und Karosymbole repräsentieren die $c$-Parameter der Halos in den Simulationen dieser Arbeit. Die gepunkteten Linien geben die $c(M)$-Abhängigkeit in den Arbeiten von NFW wieder, die durchgezogenen Linien zeigen die ls-fits für die Werte in der vorliegenden Arbeit.

Abbildung 4.8 zeigt die Virialkoeffizienten sämtlicher in den Standardsimulationen identifizierten Halos. Man erkennt, dass insbesondere die Halos mit Massen $M > 10^9 \mathrm{M}_\odot$ bis auf wenige Ausnahmen in hohem Maße relaxiert sind. Das Histogramm zeigt den rapiden Abfall der Haloanzahl mit Virialkoeffizienten $\eta > 1.1$ bzw. $\eta < 0.9$. Der $M$-$\eta$-Plot zeigt, dass es sich bei den Halos mit deutlich von 1 verschiedenen Virialkoeffizienten in der Mehrzahl um solche mit Massen kleinen $M < 10^9 \mathrm{M}_\odot$ handelt. Dies bedeutet, dass sich alle Aussagen, die im Weiteren getroffen werden auf relaxierte Halos beziehen, sofern nicht anders bemerkt.

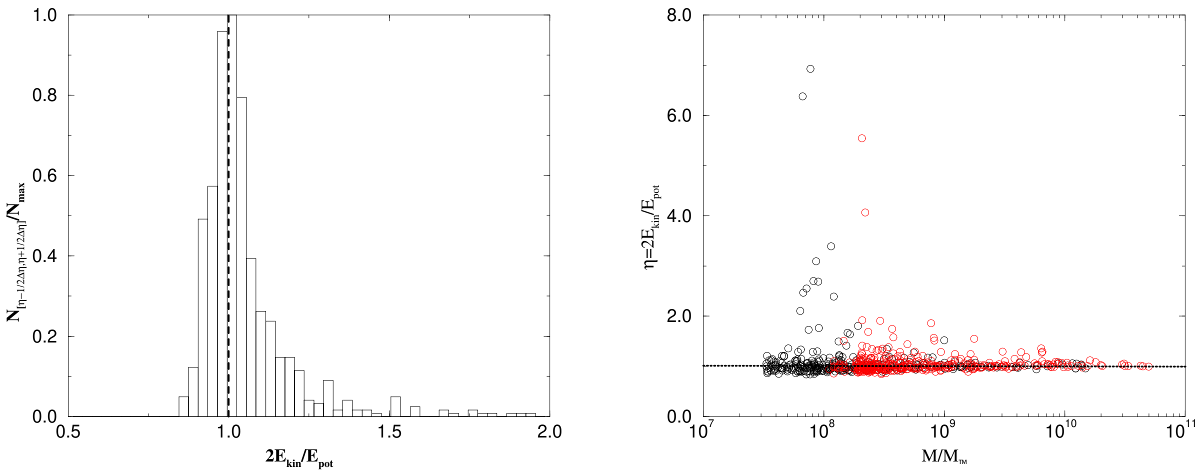


Abbildung 4.8: Virialkoeffizienten sämtlicher Halos aus den Standardsimulationen n50cl01. Links: Relative Häufigkeit von Halos mit Virialkoeffizienten im Intervall $[\eta - 1/2\Delta\eta, \eta + 1/2\Delta\eta[$. Rechts: Virialkoeffizienten derselben Halos in Abhängigkeit von der Masse.

## 4.4 Drehimpuls

Neben charakteristischen Größen wie etwa Masse und Radius ist der Drehimpuls ein wichtiger dynamischer Parameter bei der Beschreibung von Galaxien und Dunklen Halos. Größe und interne Verteilung des Drehimpulses ermöglichen Rückschlüsse auf die Entstehungsgeschichte kollabierter Objekte und sind deswegen Gegenstand sowohl analytischer wie numerischer Untersuchungen auf dem Gebiet der Galaxienentstehung.

### Erhaltung des Drehimpulses in einem expandierendem Universum

Die Erhaltung des Drehimpulses in einem expandierendem Koordinatensystem ist offensichtlich nicht trivial. Aus den grundlegenden Gleichungen 2.5–2.4 zur Beschreibung eines Fluids im expandierenden Universum kann folgende Gleichung für die Entwicklung der Pekuliargeschwindigkeiten $\mathbf{u}$ abgeleitet werden:

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u} = -\frac{1}{a^2}\nabla_c \delta\phi \tag{4.17}$$

(Longair, 1998). Hier wurde sogleich der druckfreie Fall angenommen. $\delta\phi$ ist der aus den Dichteschwankungen resultierende Potenzialgradient. Der Index $c$ bedeutet die Gradientenbildung in mitbewegten (*comoving*) Koordinaten. Die Geschwindigkeit $u$ kann nun in zwei Komponenten aufgespalten werden, $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\parallel + \mathbf{u}_\perp$, wobei $\mathbf{u}_\perp$ senkrecht zu $\nabla_c\delta\phi$ verläuft. Man betrachte die Gleichung für $\mathbf{u}$ nur für die Komponente $\mathbf{u}_\perp$:

$$\frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} + 2\frac{\dot{a}}{a}\mathbf{u}_\perp = 0. \tag{4.18}$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn $\mathbf{u}_\perp \propto a^{-2}$. $\mathbf{u}_\perp$ ist eine Größe im mitbewegten Koordinatensystem, für die entsprechende physikalische Geschwindigkeit gilt damit $\mathbf{v}_\perp = a\mathbf{u}_\perp \propto a^{-1}$.

Rotationsartige Geschwindigkeiten (d.h. solche, die senkrecht zum Potenzialgradienten verlaufen) werden demnach bei der Expansion des Universums gedämpft. Dies kommt einer Erhaltung des Drehipulses gleich, denn $mvr$ =constant für $r \propto a$.

### Ursprung und zeitliche Entwicklung

Grundsätzlich geht man davon aus, dass der Drehimpuls von Galaxien und galaktischen Halos von den Gezeitenkräften herrührt, die während der Kollapsphase auf die noch großräumig verteilte Materie wirken. Ausgehend davon ist es möglich, eine einfache Abschätzung für den zeitlichen Verlauf des Drehimpulses *kollabierender* Objekte zu geben (Peacock, 1999): Man glättet das kosmische Dichtefeld mit einem Filter der Skala $R$ und beschränkt die Betrachtung somit auf Objekte einer bestimmten Massenskala. Dies ist physikalisch gerechtfertigt, da nichtlineare kleinskalige Überdichten keinen Effekt auf großräumige Strukturen haben. Das Dichtefeld besteht damit aus „Klumpen" mit Durchmessern und typischen Abständen der Größe $R$. Diese Klumpen erfahren nun ein durch die Gezeitenwirkung verursachtes Drehmoment $T$, das sich zusammensetzt aus

$$\Rightarrow T \propto \delta \frac{GM}{a^2R^2} \times \frac{M}{2} \times \frac{aR}{2} = \delta \frac{GM^2}{4Ra}. \tag{4.19}$$

Der erste Term des Produktes entspricht der Gezeitenbeschleunigung, M ist die Masse und der dritte Term entspricht dem „Hebelarm" der Protogalaxie. Da der Dichtekontrast $\delta$ für $\delta < 1$ linear mit dem Skalenfaktor $a$ geht, ergibt sich aus obiger Gleichung ein konstantes Drehmoment $T$ und also ein zeitlich linear anwachsender Drehimpuls $L$:

$$L \propto t. \tag{4.20}$$

Dieser einfache Zusammenhang endet natürlich mit dem Abkoppeln des Protohalos von der kosmischen Expansion und dem anschließenden Kollaps.

Physikalisch fundierter ist der Zugang mit Hilfe der erwähnten Zel'dovich-Näherung (Padmanabhan, 1993). Der Drehimpuls einer Materieansammlung, die später einen Halo bilden soll schreibt sich wie

$$\mathbf{L} = \int_V d^3r\{\mathbf{r}(\mathbf{q},t) - \bar{\mathbf{r}}\} \times \{\mathbf{v}(\mathbf{q},t) - \bar{\mathbf{v}}\}\rho(\mathbf{r},t). \tag{4.21}$$

$\mathbf{r}$ und $\mathbf{v}$ sind hierbei Ort und Pekuliargeschwindigkeit im physikalischen (also nicht-mitbewegten) Koordinatensystem, $\bar{\mathbf{r}}$ und $\bar{\mathbf{v}}$ beziehen sich auf den Massenschwerpunkt des Volumens $V$, das die Materie der Protogalaxie enthält. Beim Übergang in ein mitbewegtes Koordinatensystem kann man unter Ausnutzung der Massenerhaltung

$$\rho(\mathbf{r},t)d^3r = \bar{\rho}d^3q \tag{4.22}$$

das Integral in ein solches über ein mitbewegtes Volumen $V_l$ umwandeln. Ersetzt man weiter $\mathbf{r}$ durch die Zel'dovich-Näherung

$$\mathbf{r}(t) = a(t)[\mathbf{q} + b(t)\mathbf{p}(\mathbf{q})] \tag{4.23}$$

(mit dem linearen Wachstumsfaktor $b(t)$), so nimmt der Drehimpuls folgende Form an:

$$\mathbf{L}(t) = a^2 \int_{V_L} ([\mathbf{q} - \bar{\mathbf{q}}] + b(t)[\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}})]) \times \dot{b}(\mathbf{p}(\mathbf{q}) - \mathbf{p}(\bar{\mathbf{q}}))\bar{\rho}d^3q. \tag{4.24}$$

Das Kreuzprodukt $b \times \dot{b}$ verschwindet wegen $b \parallel \dot{b}$. Mit $\mathbf{p}(\mathbf{q}) = \nabla\Phi_0(\mathbf{q})$ ergibt sich schließlich

$$\mathbf{L}(t) = \bar{\rho}a^2\dot{b}\int_{V_L}(\mathbf{q} - (\bar{q})) \times [\nabla\Phi_0(\mathbf{q}) - \nabla\Phi_0(\bar{\mathbf{q}})]. \tag{4.25}$$

Da das Integral sowie $\bar{\rho}$ konstant ist, wird die zeitliche Entwicklung des Drehimpulses durch $a^2\dot{b}$ bestimmt. Mit $b(t) \propto a(t)$ erhält man in einem Einstein-de Sitter-Universum

$$b(t) \propto a(t) \propto t^{2/3} \Rightarrow \dot{b}(t) \propto t^{-1/3} \Rightarrow a^2\dot{b} \propto t, \tag{4.26}$$

der Drehimpuls wächst also linear mit der Zeit.

Für die praktische Berechnung des Drehimpulses konkreter Halos ist die gezeigte Methode dennoch nicht günstig, denn es ist ,,in der Praxis" nicht möglich, das Volumen $V_L$, aus dem sich der Halo entwickelt, konkret abzugrenzen. Auch müsste die nichtlineare Entwicklung des Drehimpulses während der Kollapsphase eigens in Betracht gezogen werden. Dies fällt natürlich aus dem Rahmen der Zel'dovich-Approximation. Andererseits verläuft die Entwicklung eines Protohalos vergleichsweise schnell, sobald er von der kosmischen Expansion abkoppelt, d.h. sobald $\delta \geq 1$. Die Rotation des Halos ist deshalb im Wesentlichen durch die Erhaltung des Drehimpulses bestimmt, den der Halo bis zur Abkopplung von der Hubble-Expansion angesammelt hat.

### Der Spinparameter $\lambda$

Stellt man einen Vergleich an zwischen Spiral- und elliptischen Galaxien, so stellt man einen grundsätzlichen Unterschied hinsichtlich der Art fest, wie in beiden Typen die Stabilität gegen gravitativen Kollaps gewahrt wird. Den Einfluss der Rotation auf die Stabilität eines Objektes beschreibt man, indem man die Zentripedalbeschleunigung $\zeta$ des Systems in Verhältnis setzt zur entgegengesetzt nach innen gerichteten gravitativen Beschleunigung $g$. Aus

$$\zeta = v_\phi^2 rm, \quad \text{und} \quad g = \frac{GM}{r^2}, \tag{4.27}$$

eliminiert man $v_\phi$ und $r$ mit $J \propto Mrv_\phi$ und $E = GM^2/r$.[7] So erhält man:

$$\frac{\zeta}{g} = \frac{v_\phi^2}{r}\frac{r^2}{GM} \propto J^2EG^{-2}M^{-5} =: \lambda^2 \tag{4.28}$$

Dies definiert den dimensionslosen Spinparameter

$$\lambda \equiv \frac{J\sqrt{E}}{GM^{5/2}}, \tag{4.29}$$

mit Hilfe dessen die Rotation eines Halos oder einer Galaxie üblicherweise beschrieben wird. $\lambda$ stellt also ein Maß dar für den Anteil der Rotation an der Stabilität eines Systems. Ist $\lambda \approx 1$, so wird das System durch Rotation gestützt. Im Falle $\lambda < 1$ muss die Stabilität von Druckkräften herrühren.

Beide Möglichkeiten kommen in Galaxien vor: Die Scheiben von Spiralgalaxien haben relativ hohe Werte des Spinparameters von $\lambda \approx 0.5$. Stellare Scheiben verdanken ihre Stabilität

[7] $E$ ist eigentlich die Gesamtenergie $E_{kin} + E_{pot}$. Die Beziehung $E = GM^2/r$ gilt somit exakt nur im virialisierten Falle $E = E_{pot} - 2E_{pot} = -E_{pot}$.

also ihrer Rotation. Im Gegensatz dazu werden (massereiche) elliptische Galaxien vom Druck stabilisiert, der von der Geschwindigkeitsdispersion der Sterne herrührt. Die Spinparameter liegen bei $\lambda \approx 0.05$. Entsprechend liegen auch die spezifischen Drehimpulse von elliptischen Galaxien deutlich unterhalb derer von stellaren Scheiben.

Für die dimensionslose Größe $\lambda$ ist eine Massenabhängigkeit nicht zu erwarten. Der linke Teil von Abbildung 4.9 zeigt die Werte der Spinparameter von ca. 300 Dunklen Halos aus den Standardsimulationen. Ein Abhängigkeit von der Masse ist nicht zu erkennen, vielmehr zeigt sich eine Verteilung der Werte um einen Mittelwert von $\bar{\lambda} \approx 0.045$. Die Verteilung läßt sich in sehr guter Näherung durch die Funktion

$$p(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\lambda} \exp\left[-\frac{\ln^2(\lambda/\bar{\lambda})}{2\sigma_\lambda^2}\right] \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} \tag{4.30}$$

beschreiben, wobei $\bar{\lambda} \approx 0.045$ und $\sigma_\lambda \approx 0.45$ ist. $p(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ ist die relative Häufigkeit eines Spinparameters $\lambda$ im Intervall $]\lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda]$. Dieses empirische Gesetz wurde mit ähnlichen Werten bereits vorher in mehrerern Arbeiten gefunden (Barnes & Efstathiou, 1987, Efstathiou et al., 1988, Warren et al., 1992, Cole & Lacey, 1996, Lemson & Kauffmann, 1999, Cole et al., 2000).

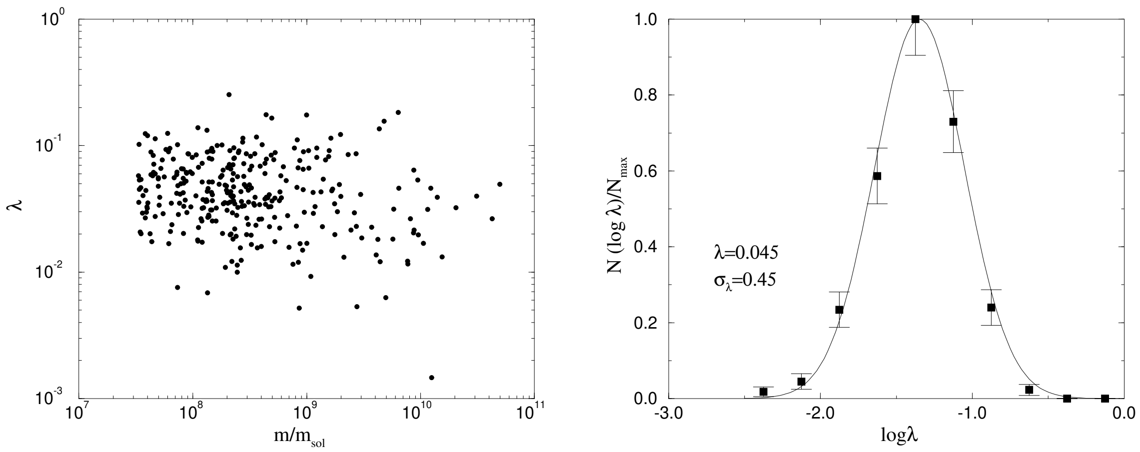


Abbildung 4.9: Spinparameter von ca. 300 Halos aus den Standardsimulationen. Links: Abhängigkeit der Werte von der Halomasse. Rechts: Häufigkeit der Spinwerte im Intervall $]\lambda, \lambda + \mathrm{d}\lambda]$. Die Fehler betragen je $\sqrt{N}$, wobei $N$ die tatsächlsiche Häufigkeit pro Bin ist.

Aus der Massenunabhängigkeit des Spinparameters ergibt sich folgende Massenabhängigkeit des Gesamtdrehimpulses eines Halos:

$$\lambda \approx \text{const} \Rightarrow J \propto \frac{M^{5/2}}{\sqrt{E}} \propto \frac{M^{5/2}}{\sqrt{M^2}} = M^{3/2} \tag{4.31}$$

Abbildung 4.10 zeigt diesen Zusammenhang, wie er sich aus eigenen Simulationen ergibt. Der least square Fit ergibt einen Zusammenhang gemäß $L \propto M_h^{1.51}$, in bester Übereinstimmung mit dem zu erwartendem Wert.

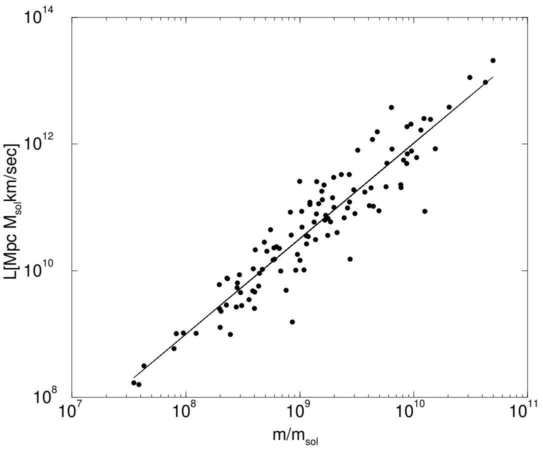


Abbildung 4.10: Massenabhängigkeit des Gesamtdrehimpulses der Halos. Die Linie entspricht einem least-square-fit. In Übereinstimmung mit dem zu erwartendem Wert liefert dieser eine Steigung eine Wert von 1.51.

Die in diesem Abschnitt kurz diskutierten Drehimpulswerte der Dunklen Halos sollen zeigen, dass es kein Problem darstellt, Simulationen auf Kantenlängen von nur 1 Mpc durchzuführen. Die Übereinstimmung der Spinparameter mit denen aus den zitierten anderen Arbeiten bedeuten, dass das großskalige Gezeitenfeld, das für den Drehimpuls kollabierter Objekte hauptsächlich verantwortlich ist, offensichtlich hinreichend wirksam ist.

Wie erwähnt sind galaktische Scheiben rotationsgestützte Systeme. Deshalb hängen insbesondere ihre Skalenradien eng mit dem Betrag des Drehimpulses zusammen, den das Gas bis zum einsetzenden Kollaps von der Umgebung erhalten hat. In gasdynamischen Simulationen, beobachtet man, dass das Gas durch eine relativ frühe Kühlung schon während des Einfalls in den Halo Klumpen ausbildet, die dann durch dynamische Reibung einen Großteil ihres Drehimpulses an den Halo abgeben. Als Konsequenz davon haben numerischen Scheiben grundsätzlich zu wenig Drehimpuls und damit Skalenradien, die bis zu einem Faktor 10 kleiner sind, als die „von der Natur geformten". Dies wird als *Kosmologisches Drehimpulsproblem* bezeichnet. Eine Lösung diese Problems steht noch aus. Für Details und Lösungsansätze verweise ich an dieser Stelle auf Navarro & Steinmetz (1997),Klapp & Cervantes-Cota (1998), Sommer-Larsen et al. (1999), Burkert (2000a) oder Sommer-Larsen & Dolgov (2001).

## 4.5 Die Herkunft der Materie in den Halozentren

Die gegenwärtige Auffassung über den Verlauf der hierarchischen Strukturbildung wurde in Kapitel 2 in wesentlichen Punkten erläutert. Nach diesem Bild kollabiert im Universum zuerst die Materie in den Dichtemaxima, die sich nach dem vermuteten Ereignis der Inflation ausgebildet haben, um fortan weitere Materie zu akkretieren. Im Allgemeinen begleitet von „*equal mass merger*"-Prozessen, d.h. der Verschmelzung zweier Halos mit Massen vergleichbarer

Größenordnung, bilden sich schließlich die Halos von heute zu beobachtenden Massen.

Neben den *equal mass-* bzw. *major merger*[8]-Ereignissen kommt der Akkretion von Materie eine entscheidende Rolle bei der Bildung dunkler Halos zu. Unter akkretierter Materie ist solche zu verstehen, die entweder in diffuser Form oder in Gestalt kollabierter Objekte sehr geringer Masse $m \ll M$ in den massiven Protohalo der Masse $M$ einfällt. Es ist zu vermuten, dass zumindest bei solchen Halos, die ihre Materie ausschließlich durch Akkretion angesammelt haben, eben jene Materie in den Zentren zu finden sein sollte, die bereits bei hoher Rotverschiebung in den Gebieten hoher Dichte angesiedelt war. Diese Materie kollabiert während sehr früher Epochen, um dann ausschließlich Materie aus der weniger dichten Umgebung aufzunehmen, die nur zu einem geringen Anteil (bedingt durch dynamische Reibung) ins Zentrum des Protohalos fällt, und so die Korrelation stört, die zwischen Halozentrum und einem Gebiet primordialer Überdichte besteht.

Sollte sich dies bestätigen, so wäre zunächst gezeigt, dass die Materie, die heute die Zentren der Dunklen Halos bildet aus ausgezeichneten Regionen des frühen Universums stammt und ein unmittelbarer Zusammenhang zwischen der Struktur der Halozentren und den Eigenschaften der primordialen Dichtemaxima wäre plausibel. Dann kann über die Frage nachgedacht werden, ob eine auf die dichten Regionen lokal begrenzte Abweichung der gaußschen Anfangsbedingungen zu merklichen Veränderungen der zentralen Materieverteilung in den Dunklen Halos bei $z = 0$ führt (Abschnitt 4.6).

Der eben erwähnte Effekt der *dynamischen Reibung* ist von großer Bedeutung bei der Formation der zentralen Gebiete eines Dunklen Halos und bedarf deswegen einer kurzen Erläuterung. Man stelle sich dazu ein kompaktes Objekt vor, das sich in einer Umgebung geringerer Dichte bewegt. Durch die gravitative Wirkung des sich relativ zur umgebenden Materie bewegenden kompakten Objektes, wird die Materie abgelenkt und verdichtet sich „hinter" dem kompakten Objekt (in Bezug auf seine Bewegung). Diese höhere Materiedichte *hinter* dem Objekt geht mit einer stärkeren gravitativen Wirkung einher, was zu einer Abbremsung des Objektes führt — und damit zu einer Annäherung an das Zentrum. Gleichzeitig wird durch diesen Prozess Drehimpuls auf den Halo übertragen, was in Bezug auf die Drehimpulsverteilung im Halo von wesentlicher Bedeutung ist.

### 4.5.1 Die Identifizierung der Halozentren

In diesem Abschnitt soll nun zunächst die Vermutung über die Herkunft der Materie in den Halozentren überprüft werden. Zu diesem Zweck soll das Augenmerk einerseits auf diejenigen Halos gerichtet werden, die sich aufgrund ihrer relativ hohen Auflösung ($> 10^4$) Teilchen als konsistent mit den NFW-Dichteprofilen erwiesen haben. Andererseits müßen gerade auch masseärmere und also weniger gut aufgelöste Halos untersucht werden, da unter diesen wegen ihrer früheren Formations-Epochen leichter Objekte zu finden sind, die keinen *equal mass merger* durchlebt haben. Von allen untersuchten Halos werden die zentralen Gebiete, also die Gebiete innerhalb des Skalenradius, als FOF-Cluster identifiziert, was folgendermaßen gelingt: Wie von Summers et al. (1995) vorgeschlagen kann der in der FOF-Prozedur verwendete kritische Abstand (*linking length*) $b$ (Abschnitt 4.2) direkt in einen Schwellenwert $\rho_{min}$ für die Dichte umgerechnet werden, die lokal an der äußeren Grenze des identifizierten Objektes

[8]So bezeichnet man im Allgemeinen jene Spezialfälle von equal mass mergern, deren sämtliche Teilnehmer Massen über einem gewissen Bruchteil (übliche Konvention: 10%) an der Endmasse ($z = 0$) des Halos haben. Diese letzten Verschmelzungsprozesse sind nach der favorisierten Theorie für die Entstehung Elliptischer Galaxien maßgebend.

herrscht. Es ist dies die mittlere Dichte innerhalb einer Kugel mit dem Radius $b$, wenn sich 2 Simulationsteilchen innerhalb derselben befinden, also

$$\rho_{min} = \frac{2m_p}{\frac{4}{3}\pi b^3}. \tag{4.32}$$

Es versteht sich, dass es sich hierbei nur um eine grobe Näherung handelt. Um die Zentralregion eines Halos zu isolieren setzt man für die Dichte einen Schwellenwert von $\rho(r_s)$ an, wobei $r_s = r_{200}/c$. Der Virialradius $r_{200}$ sowie die Konzentration $c$ ist für jeden Halo bekannt. $\rho(r_s)$ kann aus den unskalierten Dichteprofilen der Halos direkt, wegen der begrenzten Auflösung allerdings auch nur in Abschätzung entnommen werden. Aus Gleichung (4.32) kann der kritische Teilchenabstand für die FOF-Prozedur dann direkt berechnet werden.

Ein konkretes Beispiel soll die Tauglichkeit der Methode demonstrieren. Eine der n50cl01H50-Simulationen enthält einen als FOF-Cluster identifizierten Halo der Masse $M = 2.7 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$. Aus seinem Dichteprofil entnimmt man als Abschätzung für die Dichte am Skalenradius $\rho(r_c) \approx 3.1 \times 10^{14} \mathrm{M}_\odot Mpc^{-3}$. Die Teilchenmasse in dieser Simulation ist $m_p = 1.67 \times 10^5 \mathrm{M}_\odot$. Für den kritischen Abstand ergibt sich damit nach (4.32) ein Wert von $b = 640pc$.

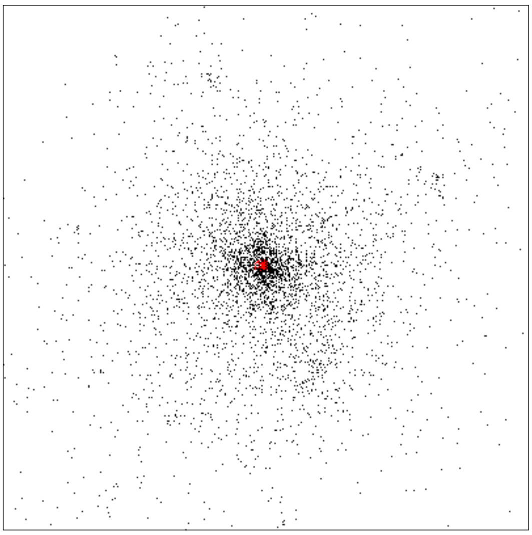

Abbildung 4.11: FOF-Cluster mit dem gesondert identifizierten Zentrum (rote Teilchen). Die Kantenlänge des Bildes ist 250 kpc. Der Virialradius des Halos liegt bei $r_{200} \approx 67$ kpc, das „Zentralobiekt" hat eine Abmessung von etwa $(3.4 \times 2.2 \times 2.0)$ kpc$^3$. Die Methode zur Identifizierung des zentralen Bereiches ist im Text beschrieben.

Abbildung 4.11 zeigt das Ergebnis dieses Verfahrens. Der betrachtete Halo hat einen Virialradius von $r_{200} \approx 34kpc$ und eine Konzentration $c \approx 28$. Damit erwartet man für das mit $b = 640kpc$ erwartete zentrale Objekt einen Durchmesser von einen Durchmesser von $d \approx 2.4$ kpc. Einen tatsächlichen Durchmesser für das gefundene Objekt anzugeben ist wegen seiner Unförmigkeit nicht eben sinnvoll. Man kann allerdings leicht die Ausdehnung des Objektes in 3 orthogonalen Raumrichtungen angeben. Hier findet man 3.4 kpc, 2.2 kpc und 2.0 kpc. Berücksichtigt man, dass es sich bei dem beschriebenen Verfahren nur um eine grobe Näherung handelt, so sind diese Werte mit dem erwarteten Durchmesser von 2.4 kpc des

„idealen" Objekts bestens vereinbar. Die Anwendung der Methode auf andere Halos erwies sich als ebenso erfolgreich.

Im Folgenden wird nun die Herkunft der Kernmaterie[9] genauer untersucht. Dazu werden zunächst Halos betrachtet, an deren Entwicklung ein oder mehrere merger-Prozesse beteiligt waren. Dieses Kriterium ist um so wahrscheinlicher erfüllt, je größer die Masse des Halos ist, da massereicheren Objekten im Allgemeinen eine spätere Formationszeit zukommt. Die so genannte *Erweiterte Press-Schechter-Theorie* ermöglicht eine Aussage darüber, mit welcher Wahrscheinlichkeit einem beliebigen Halo im Rotverschiebungsintervall $[z_1, z_2]$ ein *equal mass merger* widerfährt (Bower, 1991, Bond et al., 1991). Demnach haben 90% aller Dunklen Halos im Zeitraum zwischen $z = 5$ und $z = 0$ mindestens *einen* solchen Prozess genossen (siehe etwa Khochfar, 2000). Bei der Auswahl *solcher* Halos zehrt man also von dem Vorteil, dass mit großer Wahrscheinlichkeit gerade die massiveren Objekte in Frage kommen.

Um eine Auswahl hinsichtlich der jeweiligen Verschmelzungsgeschichte zu treffen, ist es nötig, die Auswahlkriterien etwas konkreter zu fassen. Im Weiteren gilt folgende Konvention: Ein Halo hat definitionsgemäß *dann* einen *equal mass merger* erfahren,

1. wenn er aus zwei oder mehreren disjunkten Teilchengruppen besteht, die bei höherer Rotverschiebung bereits als separate FOF-Cluster identifiziert wurden und
2. wenn mindestens zwei der bei irgend einem $z > 0$ gleichzeitig identifizierten Vorläuferhalos ein Massenverhältnis von $m/M < 0.1$ zueinander haben.

Eine wichtige Einschränkung ist jedoch notwendig: Bei hinreichend hohen Rotverschiebungen erleiden selbstverständlich *alle* Halos mehrere equal mass merger, die am Beginn des hierarchischen Formationsprozess stehen. Was diese „primordialen"[10] merger jedoch wesentlich von den späteren unterscheidet, ist die Tatsache, dass bei jenen (wie man in Abschnitt 4.5.3 sehen wird) ausschließlich Klumpen aus den Gebieten hoher primordialer Dichen beteiligt sind; denn es handelt sich naturgemäß um die ersten kollabierten Objekte. Diese „primordialen" merger-Prozesse kommen daher nicht als Ursache dafür in Frage, einen möglichen Zusammenhang zwischen Kernmaterie und primordialen Überdichten zu zerstören, indem sie aufgrund einer etwaigen komplexen Dynamik die Kernmaterie mit der später einfallenden Materie vermischen. Bei Mergern zu späteren Epochen ist, wie sich zeigen wird, immer auch (oder ausschließlich) Materie beteiligt, die nicht im Zentrum des Halos landen wird.

### 4.5.2 Halos mit aktiver Verschmelzungsgeschichte

Bei den massiveren unter den im Folgenden näher diskutierten Halos ist notwendig, die auf Seite 78 genannten Kriterien zu überprüfen, da sich eine rege Verschmelzungsaktivität in ihrer Vergangenheit bereits beim Betrachten der Teilchenverteilung des Clusters zu verschiedenen Zeiten verrät — siehe z.B. Abbildung 4.12: Es handelt sich hierbei um einen Halo der Masse $M = 2.72 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$ aus einer n50cl01H50Λ-Simulation. Der Halo wird durch ca. 16300 Teilchen repräsentiert. Die Abbildung zeigt die Entwicklung des Clusters, insbesondere seines Zentrums, bei vier verschiedenen Rotverschiebungen. Diejenigen Teilchen, die bei $z = 0$ im Zentrum des Halos liegen, sind in jedem Bild rot gefärbt. Offensichtlich hat sich diese Materie bereits bei hohen Rotverschiebungen in den zentralen Gebieten der Vorgängerhalos befunden, die im Laufe der Zeit zu dem betrachteten Halo bei $z = 0$ verschmolzen. Es handelt sich also

[9] Mangels besserer Alternativen verwende ich im Weiteren diesen Begriff, wenn von jener Materie die Rede ist, die bei $z = 0$ das Zentrum, also den „Kern" eines Halos definiert.

[10] *prim-ordial* bedeutet wörtlich *von erster Ordnung*

um die Materie, die bei hoher Rotverschiebung „Keime" für weitere Akkretion bildete. Die Kernmaterie ist bei $z = 0$ im Wesentlichen in *drei* Gebieten zu finden, die jeweils — in grober Näherung — eine Abmessung von $0.2 - 0.3$ Mpc in jede Raumrichtung haben.

Um zu überprüfen, ob die Kernmaterie aus überdichten primordialen Regionen stammt, wurde das gesamte Simulationesvolumen gescanned, um dann durch einfaches Teilchenzählen die relative Teilchenzahlichte $\delta(X) := N(\mathbf{r}, X)/\bar{N}(X) - 1$ am jedem (Gitter-)Punkt $\mathbf{r}$ auf der Skala $X$ zu ermitteln. Hier ist $N(\mathbf{r}, X)$ die Anzahl der Teilchen innerhalb einer Kugel um den Punkt $\mathbf{r}$ mit dem Radius $X$. $\bar{N} := N_{tot} \times (4/3)\pi X^3/1\ \mathrm{Mpc}^3$ ist die mittlere Teilchenzahl innerhalb des Kugelvolumens. Im Bild links oben von Abbildung 4.12 sind die drei Gebiete höchster Überdichte auf einer Skala von $X = 0.12$ Mpc durch Kreise gekennzeichnet. Die Werte von $\delta_N$ sind 0.41, 0.37, und 0.32. Alle drei dieser Gebiete liegen, wie die Abbildung zeigt, in den Bereichen, aus denen die Kernmaterie stammt[11]. Dies bleibt im Folgenden durch weitere Beispiele für Halos mit aktiver Verschmelzungsgeschichte zu verifizieren; zuvor ist aber noch eine Bemerkungen zur Wahl der Skala $X$ nötig, auf der die eben erwähnten Überdichten des primordialen Dichtefeldes zu suchen sind.

Um zu entscheiden, ob es einen Zusammenhang gibt zwischen der Herkunft der Kernmaterie und den Maxima des primordialen Dichtefeldes, ist für unsere Zwecke eine qualitative Abschätzung im Sinne einer „ja/nein"-Entscheidung durchaus hinreichend. Dies ist ohne weiteres möglich mit Hilfe eines Plots wie ihn etwa Abbildung 4.12 links oben darstellt. So spricht konkret nichts gegen die Vereinbarung, ein Zusammenfallen von Kernmaterie und Dichtemaxima für einen bestimmten Halo festzustellen, wenn sich auf Grund der Abbildung erweist, dass der Mittelpunkt des markierten Kreisgebietes (also der tatsächliche *peak* der Fluktuation) augenscheinlich zu dem Gebiet gehört, das von der Kernmaterie besiedelt wird. Zweifelsfälle sind hier natürlich möglich wenngleich nicht die Regel. Zweifellos wäre es konsequenter, als Maß für die Qualität der räumlichen Deckung etwa den Abstand zu nehmen, den der Schwerpunkt der Kernmaterie (bzw. eine FOF-Gruppe derselben) vom Mittelpunkt der Testkugel einnimmt. Dies erfordert einiges an Aufwand, da etwa die einzelnen Gruppen der Kernmaterie bei hoher Rotverschiebung einzeln als FOF-Gruppen identifiziert werden müßten. Dies bedarf jedoch seinerseits der willkürlichen Wahl eines Parameters, nämlich der kritischen Distanz $b$. Vor allem jedoch ist damit nichts gewonnen, was den höheren Aufwand rechtfertigen würde.

Die tatsächlich gewählte Skala $X$, auf der die Maxima der Dichtefluktuationen gesucht werden sollen, richtet sich nun nach der Ausdehnung der voneinander mehr oder minder isolierten Gruppen, die die Kernmaterie bei früher Rotverschiebung bildet. Die schwachen, wohl aber hinreichenden Kriterien an die Wahl der Fluktuationsskala sind: 1) Sie sollte in etwa der Ausdehnung der Kernmaterie entsprechen, jedoch 2.) deren Ausdehnung nicht überschreiten, sondern eher unterbieten. Mit dem zweiten Punkt ist der Möglichkeit Rechnung getragen, dass Materie aus der *Umgebung* der überdichten Region in diese hineinströmt. Es zeigt sich auch, dass die Wahl der Fluktuationsskala im Rahmen der genannten Kriterien keinen wesentlichen Einfluss auf die Lage der Peaks hat. Die Entscheidung, ob eine Gruppe von Kernteilchen aus dem Gebiet eines Dichtemaximums stammt oder nicht, wird von der genauen Wahl der Fluktuationsskala also nicht (oder kaum) berührt. Zusammenfassend sei also bemerkt, dass der Radius der sphärischen Filters für die Dichtebestimmung willkürlich im Rahmen der beiden

[11] Hierbei handelt es sich selbstverständlich nicht um einen Projektionseffekt. Auf die entsprechende, ansonsten nicht weiter instruktive Abbildung wurde aus Platzgründen verzichtet. Dies gilt auch für die weiteren angeführten Abbildungen dieser Art.

genannten Kriterien erfolgt ist. Und damit zurück zum Eigentlichen.

Ein zweiter Halo aus einer n50cl01H50Λ-Simulation in seiner Entwicklung ist in Abbildung 4.13 dargestellt. Seine Masse beträgt $4.21 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$, die Anzahl er Simulationsteilchen ist ca. 25300. Bei $z = 1.55$ sind bereits mehrere Halos zu erkennen, deren Zentren durch die Kernmaterie gebildet werden. Bei $z = 0.22$ sind im Wesentlichen noch 2 Verschmelzungspartner vergleichbarer Masse zu sehen. Ihr Massenverhältnis beträgt etwa 8.1:1, wohingegen das Massenverhältnis der *Kernmaterie* in beiden Clustern etwa 180:1 ist. Der hier bevorstehende merger geschieht zu einem relativ späten Zeitpunkt, so dass nur die Materie höchster Dichte des kleineren Halos durch dynamische Reibung abgebremst in des Zentrum des größeren Halos gelangt. Im ersten Teilbild sind wiederum die Gebiete des höchsten Dichtekontrastes auf einer Skala von $X = 0.12$ Mpc gekennzeichnet; ihre Lage deckt sich mit den Herkunftsgebieten der Kernmaterie sehr gut im Rahmen der diskutierten Kriterien.

Die weiteren angeführten Beispiele hierzu (Abb. 4.14 - 4.16) sind in den Bildunterschriften diskutiert. In Tabelle 4.2 sind die entscheidenden Parameter im Zusammenhang mit den Abbildungen im Überblick dargestellt.

| Simulation | | $M_H/\mathrm{M}_\odot$ | $X$/kpc | $\delta_{max}(X)$ |
|---|---|---|---|---|
| n50cl01H50Λ | I | $2.72 \times 10^9$ | 120 | 0.41 / 0.37 / 0.32 |
| n50cl01H50Λ | II | $4.21 \times 10^9$ | 120 | 0.45 / 0.38 |
| n50cl01H50 | I | $1.40 \times 10^{10}$ | 250 | 0.31 |
| | | | 180 | 0.44 |
| | | | 150 | 0.28 |
| n50cl01H50 | II | $9.46 \times 10^9$ | 180 | 0.31 |
| | | | 130 | 0.43 |
| n50cl01H65 | I | $4.25 \times 10^{10}$ | 180 | 0.43 / 0.36 |

Tabelle 4.2: Übersicht über die Parameter zur Korrelation zwischen Kernmaterie und primordialen Dichtemaxima. Die Auswahlkriterien für die 5 Halos sind lediglich: mindestens 1 *equal mass merger* während der Formation, möglichst hohe Teilchenzahl. Die Auswahl im Rahmen dieser Kriterien ist ansonsten willkürlich. Die Fluktuationsskalen $X$, auf denen die Überdichten bei hoher Rotverschiebung gesucht wurden orientieren sich an der räumlichen Ausdehnung der einzelnen Kernteilchen-Gruppen bei dieser Rotverschiebung und können deshalb für denselben Halo mehrere unterschiedliche Werte haben. Die römischen Ziffern in der zweiten Spalte unterscheiden Simulationen mit identischen kosmologischen Parametern aber unterschiedlichen Zufallsrealisationen des primordialen Dichtefeldes.

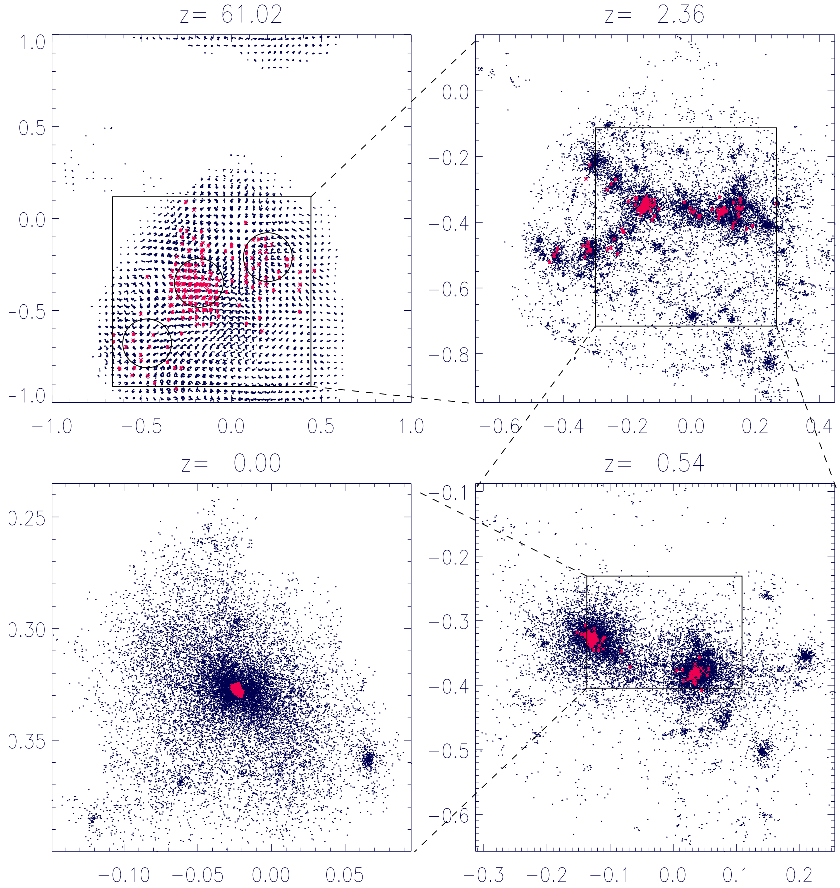


Abbildung 4.12: Vier Entwicklungsstadien eines merger-dominierten Clusters und seines Zentralbereiches (rot markierte Teilchen) in einer n50cl01H50Λ-Simulation. Es sind ausschließlich die Teilchen geplottet, die den bei $z = 0$ gezeigten Cluster bilden. Die Teilchen am oberen Rand des linken oberen Bildes gehören zu dem dargestellten Cluster, erscheinen aber wegen der periodischen Randbedingungen abgetrennt. Man beachte auch die veränderliche (mitbewegte) Abmessung der einzelnen Ausschnitte. Bei $z = 2.36$ sind die rot markierten Teilchen bereits als Zentren mehrerer individueller Halos bzw. Protohalos zu erkennen. Bei $z = 0.77$ liegen die markierten Teilchen in den Zentren der zweier Halos, die bis $z = 0$ einen *major merger* vollziehen. Die Kernmaterie „lebt" also bereits bei hohen Rotverschiebungen in den Zentren von Vorläuferhalos. Die Kreise im Bild links oben markieren die Regionen hoher primordialer Überdichte auf einer durch den Kreisdurchmesser definierten Skala $X$; diese entspricht in etwa der räumlichen Ausdehnung der Gruppen, in die sich die Zentrumsmaterie zu dieser Zeit aufteilt.

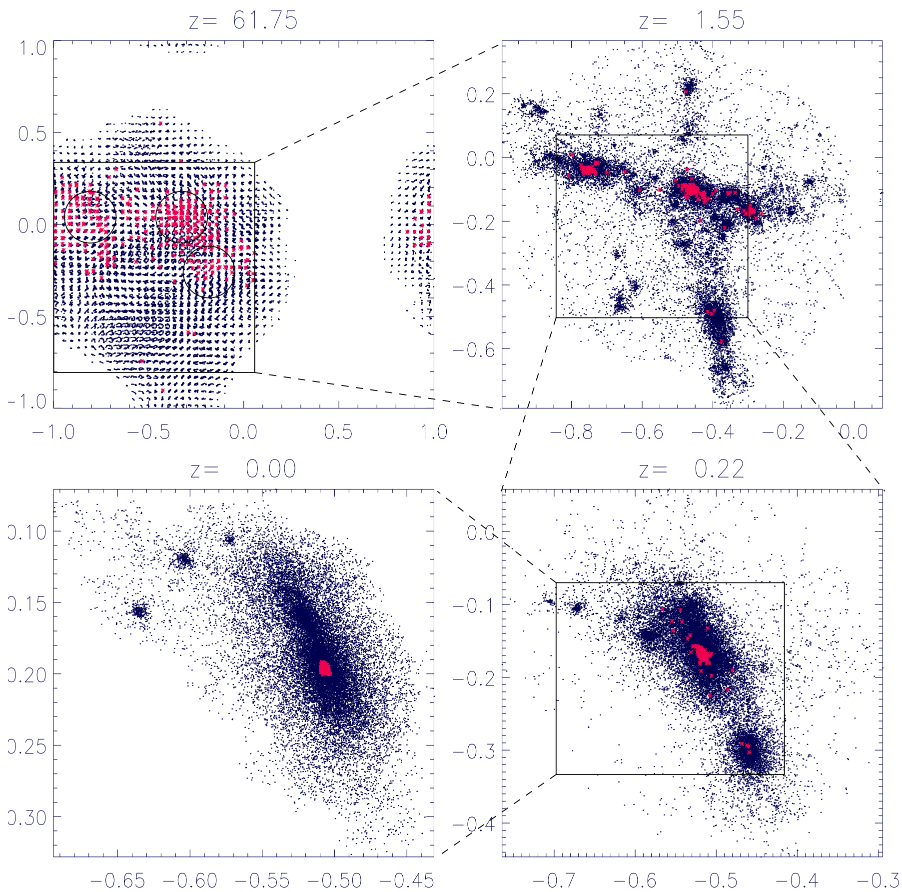


Abbildung 4.13: Wie Abbildung 4.12 für einen anderen Halo einer n50cl01H50Λ-Simulation. Bei $z = 1.55$ bildet die Kernmaterie bereits die Zentren mehrerer individueller Protohalos. Bei $z = 0.22$ ist ein Großteil der Kernmaterie im Zentrum des Massiven Vorläufers auszumachen. Ein sehr geringer Anteil der Kernmaterie befindet sich in dem einfallenden kleineren Halo. Die Lage der Maxima im primordialen Dichtefeld (Kreise links oben) stimmt gut mit der Verteilung der Kernmaterie zu dieser Zeit überein.

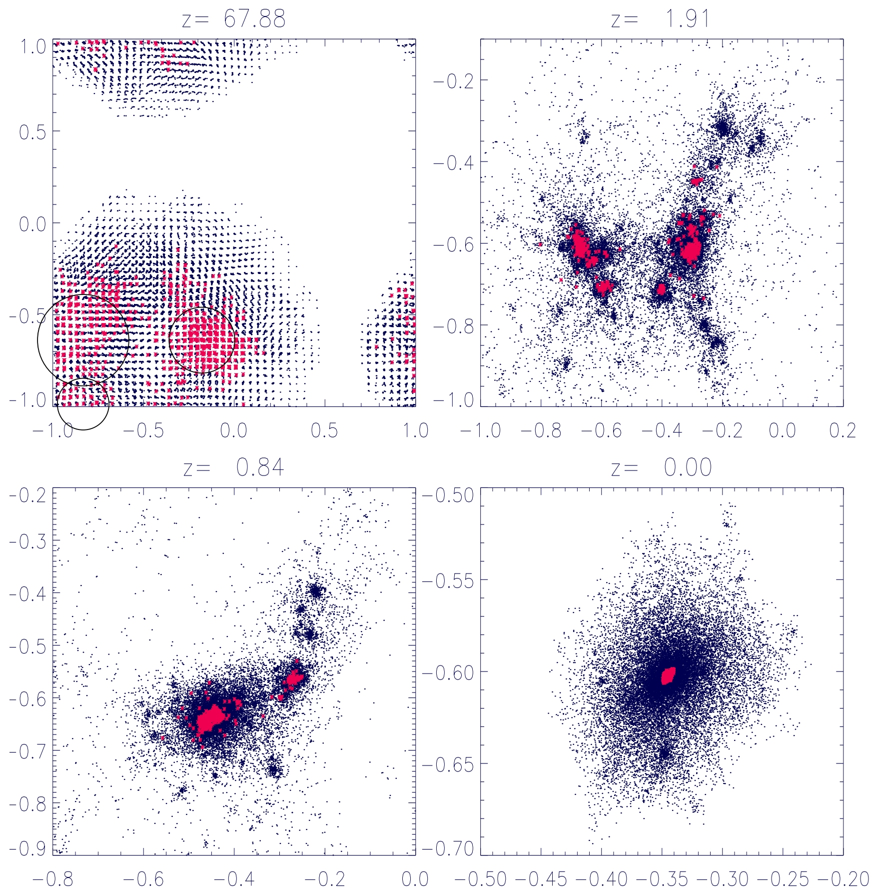


Abbildung 4.14: Halo der Masse $M = 1.40 \times 10^{10}\mathrm{M}_\odot$ aus einer n50cl01H50-Simulation ($\Lambda = 0$), repräsentiert durch 25200 Teilchen. Entsprechend der räumlichen Ausdehnung der einzelnen Gruppen von Kernteilchen wurden die höchsten Dichtekontraste auf den Skalen $X = 0.25, 0.18$ und $0.15$ Mpc markiert. Die dazugehörigen Dichtekontraste sind $\delta(X) \approx 0.31, 0.44$ bzw. $0.28$. Die räumlich Deckung zwischen den Dichtemaxima und den Aufenthaltsgebieten der Kernmaterie ist wiederum sehr gut.

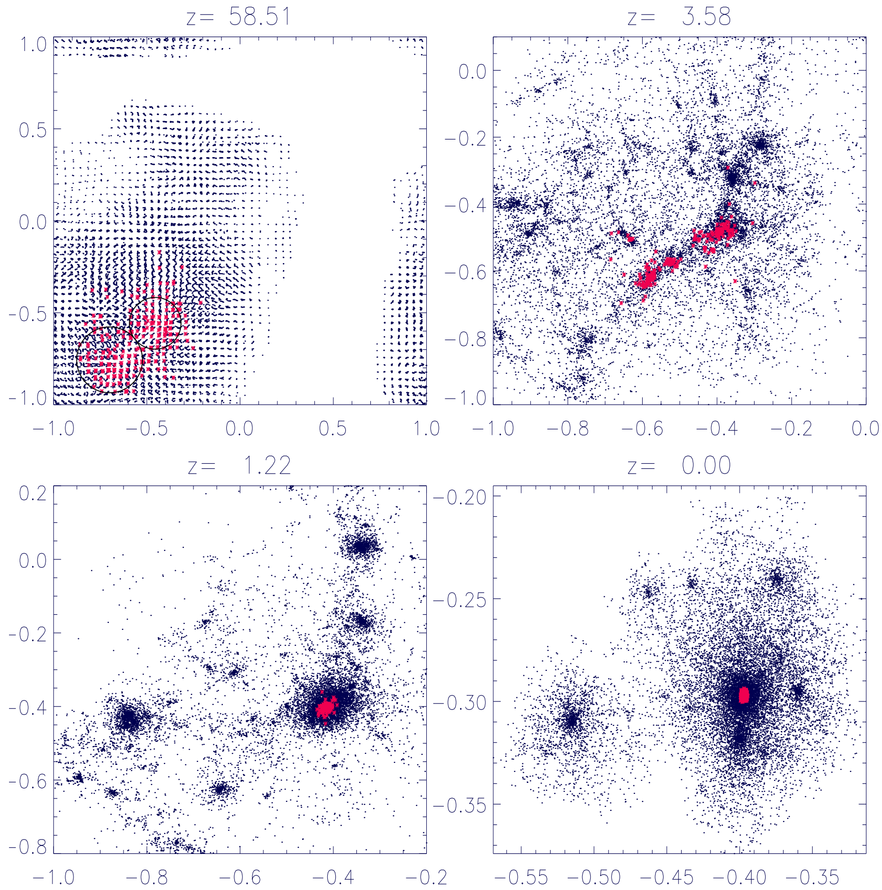


Abbildung 4.15: Halo aus einer n50cl01H50-Simulation. Die Masse ist $M = 9.46 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$, die Zahl der Teilchen beträgt ca. 17000. Die höchsten Dichtekontraste bei $z \approx 59$ sind $\delta(18Mpc) \approx 0.31$ sowie $\delta(13Mpc) \approx 0.43$. Das Bild rechts oben demonstriert durch seine relativ hohe Rotverschiebung deutlicher als vorangehenden Bilder, dass die Kernmaterie früher als die restliche Materie zu zu Protohalos kollabiert. Dies ist indes eine natürliche Konsequenz aus der Tatsache, dass die Kernmaterie aus den Gebieten maximaler Dichte stammt. Auch dies erweist sich auch für den vorliegenden Fall. Bei $z = 0$ erkennt man neben dem „eigentlichen" Halo einen weiteren von geringerer Masse. Dieses Artefakt der FOF-Prozedur ist für die Identifizierung der Kernmaterie jedoch unerheblich, da der „Kern" des Systems mit Hilfe der einzelnen Teilchenpotenziale definiert wurde.

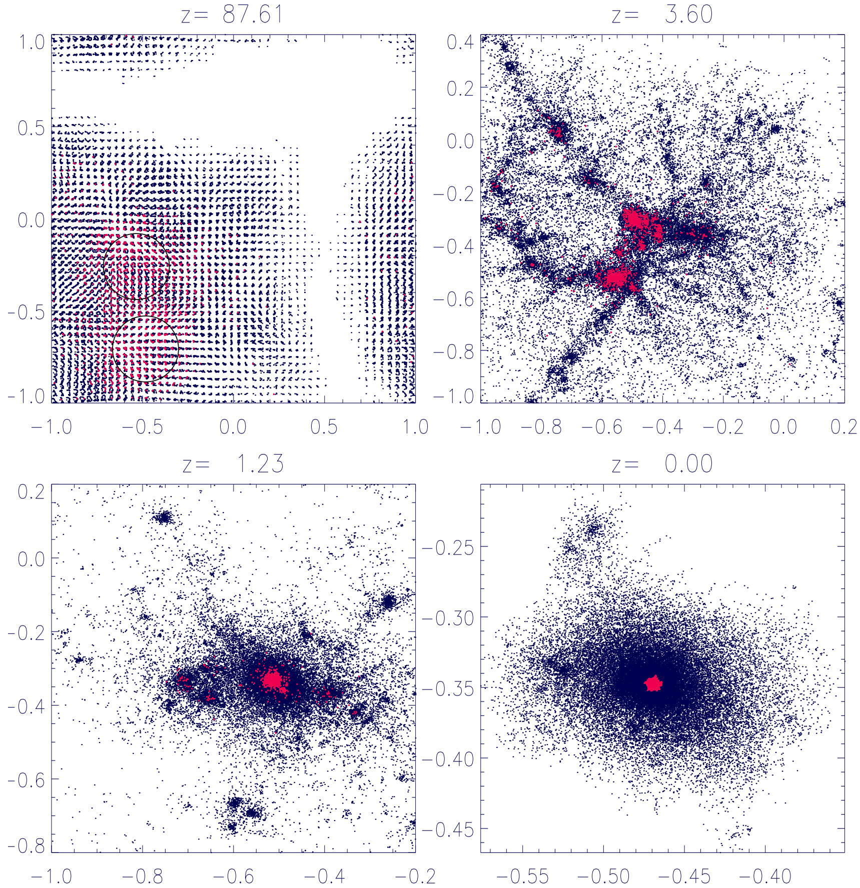


Abbildung 4.16: Der hier dargestellte Halo hat eine Masse von $4.25 \times 10^{10} M_\odot$ und stammt aus einer n50cl01H65-Simulation; die Teilchenzahl beträgt ca. 45300. Die beiden Regionen höchster Dichte auf einer Skala von $X = 18$ Mpc haben Dichtekontraste von $\delta(X) \approx 0.43$ (oberer Kreis) bzw. $\delta(X) \approx 0.36$. Auch hier findet man einen engen Zusammenhang der Kernmaterie mit den Primordialen Dichtemaxima.

### 4.5.3 Halos mit akkretionsdominierter Enstehungsgeschichte

Für Halos, die im Laufe ihrer Entstehung mindestens einen *major merger* durchlebt haben läßt sich nunmehr feststellen, dass zwischen den Herkunftsgebieten der Kernmaterie und den Dichtemaxima früher Epochen qualitativ[12] ein enger Zusammenhang besteht. In jedem der gezeigten Fälle enthalten die Protohalos, die später den „heutigen" Halo formen, von Beginn an die Kernmaterie in ihren Zentren. Im Rahmen der Verschmelzungsprozesse werden die dichten Zentren nicht durch die Gezeitenwirkung des Verschmelzungspartners zerstört, sondern fallen, abgebremst durch den Effekt der dynamischen Reibung als quasi eigenständige, stabile Objekte in das Zentrum des massiveren „neuen" Halos. Vor dem Hintergrund einer *merger*-dominierten Formationsgeschichte ist es plausibel, dass die Kernmaterie nicht von Beginn an *einem gemeinsamen* Dichtemaximum zugeordnet werden kann, sondern mehreren benachbarten Fluktuationen.

Wenn für merger-dominierte Halos ein Zusammenhang von der soweit diskutierten Art gezeigt ist, so wird man für Halos mit *akkretionsdominierter* Formationsgeschichte noch eher eine Herkunft der Kernmaterie aus überdichten Gebieten erwarten. Denn ihre Entstehung vollzieht sich ohne den vergleichsweise komplexen Prozess der Verschmelzung mehrerer Objekte, der zu einer Durchmischung der Materie führen, und somit die diskutierte Korrelation zerstören könnte.

Die Kriterien, die ein akkretionsdominierter Halo zu erfüllen hat wurden auf Seite 78 genannt und für jedes der hier gezeigten Beispiele sorgfältig kontrolliert. Die Abbildungen 4.18 bis 4.22 zeigen eine willkürlich Auswahl von Halos, die offensichtlich keine *major merger* durchlebt haben. Aus Platzgründen sind auch hier wiederum nur vier Stationen in der Entwicklung eines jeden Objektes dargestellt. Von den Standardsimulationen liegen auf Grund der begrenzten Speicher-Ressourcen grundsätzlich nicht mehr als 10 Daten-Outputs mit jeweils gleichen Zeitintervallen vor. Der erste Output geschieht üblicherweise bei $z \approx 3 \ldots 4$, was das Geschehen zwischen dieser und einer extrem hohen Rotverschiebung von $z \approx 70$ (Input-File) offen läßt. Aus diesem Grund wurde für 2 der akkretionsdominierten Halos diese „dunkle Epoche" ein zweites Mal und mit mehreren Daten-Outputs zwischen $z \approx 70$ und $z \approx 4$ simuliert. Die dazugehörigen Abbildungen 4.19 und 4.23 legen nahe, dass auch während dieser Zeit die Formation der zentralen Region in mehr oder weniger kontinuierlicher Weise vonstatten ging — zumindest soweit die Auflösungen der Simulationen darüber eine Aussage erlauben.

Akkretionsdominierte Halos sind deutlich seltener zu finden als solche, die mindestens einen major merger erfahren haben. Mit Hilfe des *Erweiterten Press-Schechter-Formalismus* (Bower, 1991, Bond et al., 1991) ist es möglich eine Aussage über die merger-Wahrscheinlichkeiten während gewisse Zeitintervalle zu erhalten. Demnach hat ein beliebiger Halo zwischen $z = 7$ und $z = 0$ mit einer Wahrscheinlichkeit von knapp 97% einen major merger erlebt. Abbildung 4.17 (links) zeigt diese Wahrscheinlichkeit für den Rotverschiebungsbereich bis $z = 7$ (Khochfar, 2000).

Für diejenigen Halos, deren Entwicklung für $z > 4$ nicht eigens dargestellt ist, soll eine weitere interessante Rechnung von Khochfar (2000) in diesem Zusammenhang hinreichend sein. Das rechte Bild von Abbildung 4.17 zeigt die Wahrscheinlichkeit eines major merger-Prozesses für einen beliebigen Halo im Rotverschiebungsintervall $[z, 3]$. Explizit dargestellt sind zwei Klassen von Ereignissen, bei denen die Verschmelzungspartner die in der Abbildung angegebenen Massenverhältnisse besitzen. Leider liegt für weitere Massenverhältnisse keine

[12] Natürlich besteht auch ein „quantitativer" Zusammenhang, der hier lediglich nicht untersucht ist.

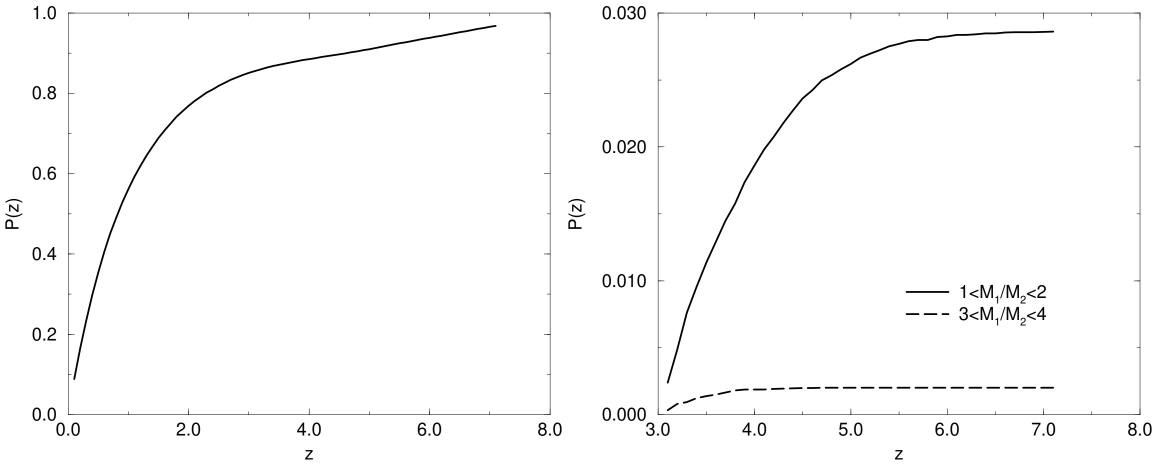


Abbildung 4.17: Links: Wahrscheinlichkeit für einen beliebigen Halo, zwischen $z$ und $z = 0$ einen major merger erfahren zu haben. Rechts: Wahrscheinlichkeit für einen major merger zwischen $z$ und $z = 3$. Die Daten wurden von Khochfar (2000) mit Hilfe des Erweiterten Press-Schechter-Formalismus berechnet.

Rechnung vor. Da jedoch davon auszugehen ist, dass die Häufigkeit der Merger-Ereignisse um so geringer wird, je weiter sich das Massenverhältnis von 1 entfernt, kann aus dem rechten Bild von Abbildung 4.17 ohne Weiteres geschlossen werden, dass die Wahrscheinlichkeit eines major merger-Ereignisses ($M_1/M_2 < 10$) für einen Halo zwischen $z = 3$ und $z = 8$ in grober Abschätzung geringer als 7% ist. Damit sind mit 80% Wahrscheinlichkeit alle drei der weniger genau dokumentierten Halos nicht von einem major merger beeinflusst.

Die Kommentare (soweit nötig) zu den abgebildeten akkretionsdominierten Halos entnehme man den Bildunterschriften.

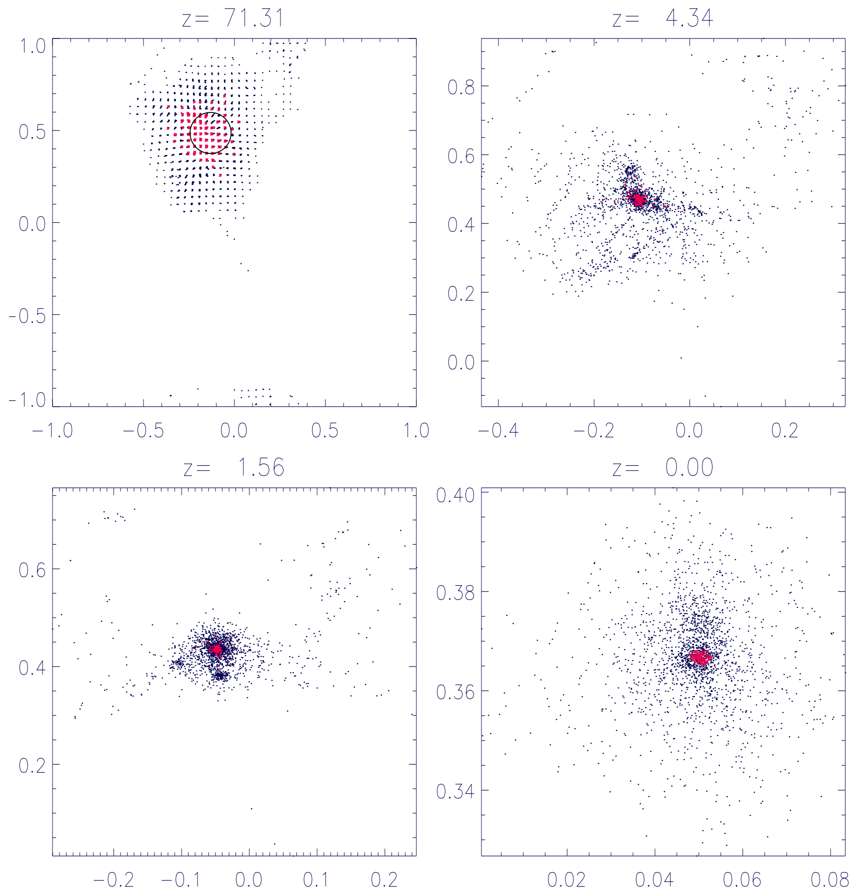


Abbildung 4.18: Simulation: n50cl01H50Λ; Halomasse: $M = 3.60 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot$, 2156 Teilchen. Die Kernmaterie verteilt sich bei hoher Rotverschiebung nicht wie bei dem massiveren merger-dominierten Halos auf mehrere benachbarte Regionen, sondern (im Rahmen der Auflösbarkeit) auf lediglich ein Gebiet. Im Zentrum dieses Gebietes hat das auf $X = 100$ kpc gefilterte Dichtefeld ein lokales Maximum vom Betrag $\delta \approx 0.35$. Bereits bei $z = 4.3$ befindet sich praktisch die gesamte Kernmaterie im Zentrum des Protohalos. Die Entwicklung zwischen $z = 71$ und $z = 4.3$ zeigt die nächste Abbildung.

Es wurden nun mehrere Beispiele von Halos dargestellt, die nach unseren definierten Kriterien als akkretions- bzw. merger-dominierte Halos aufgefasst werden können. Es hat sich erwiesen, dass die Materie, die sich bei $z = 0$ im Zentrum eines Halos befindet in allen Fällen bei hohen Rotverschiebungen in Gebieten liegen, die lokale Maxima des Dichtefeldes darstellen. Ein signifikanter Unterschied zwischen den zwei Klassen von Halos besteht darin, dass es bei den merger-dominierten Halos stets mehrere (mehr oder weniger voneinander isolierte) Gebiete sind auf die sich die Kernmaterie von dem Beginn der Strukturbildung verteilt. Dies ist keineswegs überraschend, da in diesen Gebieten die eigenständigen Klumpen entstehen, die in der Folge für die merger-Ereignissen mit den massivsten Partizipienten verantwortlich sind. Im Gegensatz dazu findet man bei akkretionsdominierten Halos nur jeweils *ein* zusammenhängendes Gebiet, in dem sich die Kernmaterie bei hoher Rotverschiebung aufhält. Diese Gebiet erfährt einen frühen Kollaps, ohne dann in der weiteren Entwicklung einen merger zu

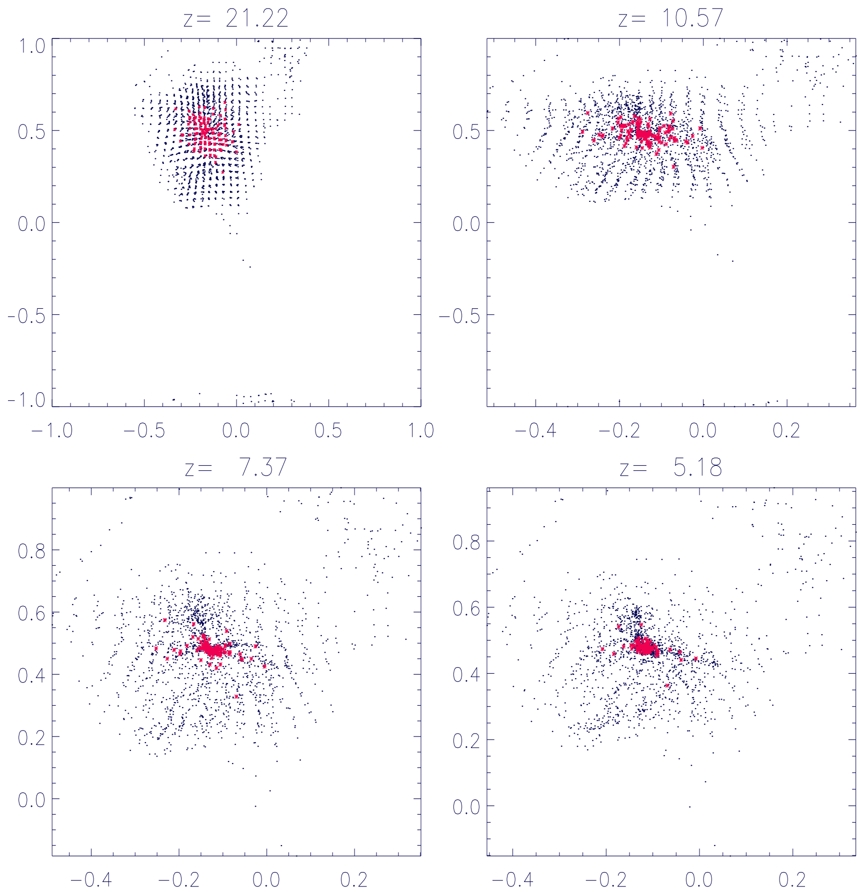


Abbildung 4.19: Derselbe Halo wie in Abbildung 4.18 mit zeitlich besser aufgelößter früher Entwicklung. Zwar erkennt man bei $z \approx 10.6$ eine offensichtlich rege Mergeraktivität, es handelt sich dabei jedoch um Klumpen, die ausschließlich aus Materie aus dem Gebiet des lokalen Dichtemaximum handelt — mithin also um Kernmaterie bestehen. Dies macht den Halo noch nicht zu einem merger-dominierten Halo, wie auf Seite 78 erläutert.

durchleben. Vielmehr fällt die Materie quasi kontinuierlich in den Protohalo ein.

| Simulation | | $M_H/\mathrm{M}_\odot$ | $X$/kpc | $\delta_{max}(X)$ |
|---|---|---|---|---|
| n50cl01H65 | I | $9.22 \times 10^8$ | 120 | 0.29 |
| n50cl01H65 | II | $2.57 \times 10^9$ | 100 | 0.28 |
| n50cl01H50 | I | $3.60 \times 10^8$ | 100 | 0.35 |
| n50cl01H50Λ | I | $2.00 \times 10^8$ | 100 | 0.31 |

Tabelle 4.3: Übersicht über die dargestellten akkretionsdominierten Halos . Die Auswahl ist willkürlich bis auf die vereinbarten Kriterien. Die römischen Ziffern in der zweiten Spalte unterscheiden Simulationen mit identischen kosmologischen Parametern aber unterschiedlichen Zufallsrealisationen des primordialen Dichtefeldes. Der als Beispiel eines Artefaktes der FOF-Prozedur gezeigte Halo ist nicht aufgelistet.

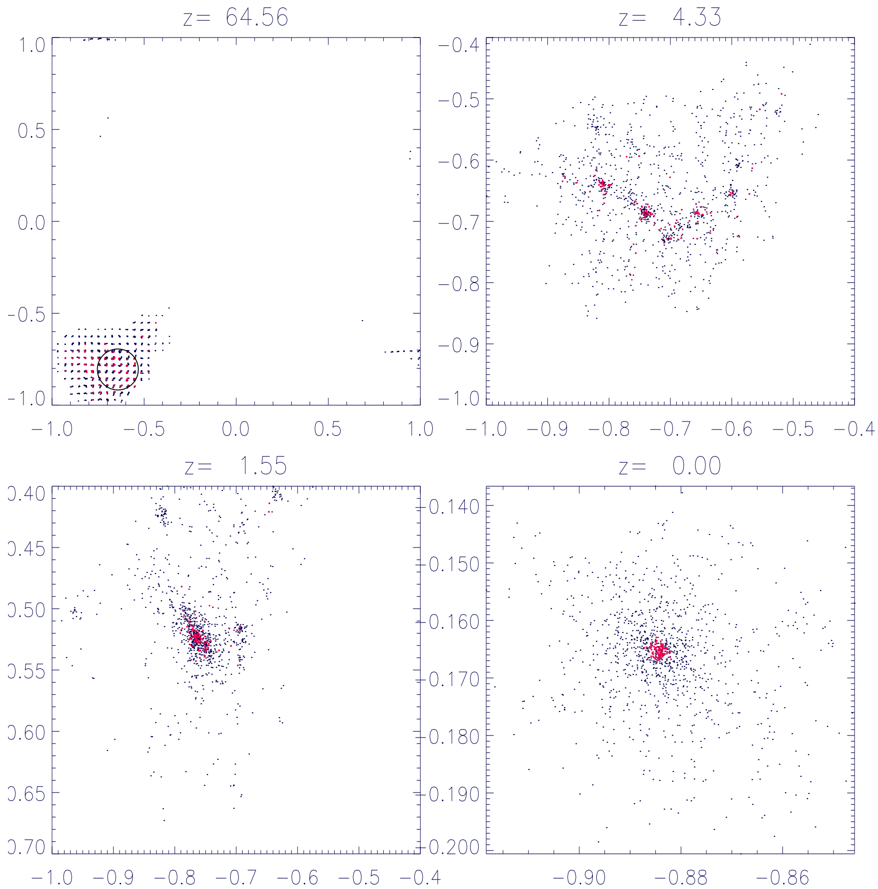


Abbildung 4.20: Simulation: n50cl01H50Λ; Halomasse: $M = 2.00 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot$, 1190 Teilchen. Die Kernmaterie stammt aus der Umgebung eines lokalen Dichtemaximums $\delta(X = 100$ kpc$) \approx 0.31$. Wie im vorhergehenden Beispiel bilden sich innerhalb der Kernmaterie mehrere Klumpen geringer Masse, deren Verschmelzung praktisch ohne Materie abläuft, die sich nicht auch bei $z = 0$ im Zentrum befindet. Demnach wird der Halo durch diese merger-Prozesse nicht als akkretions-dominierter Halo „disqualifiziert".

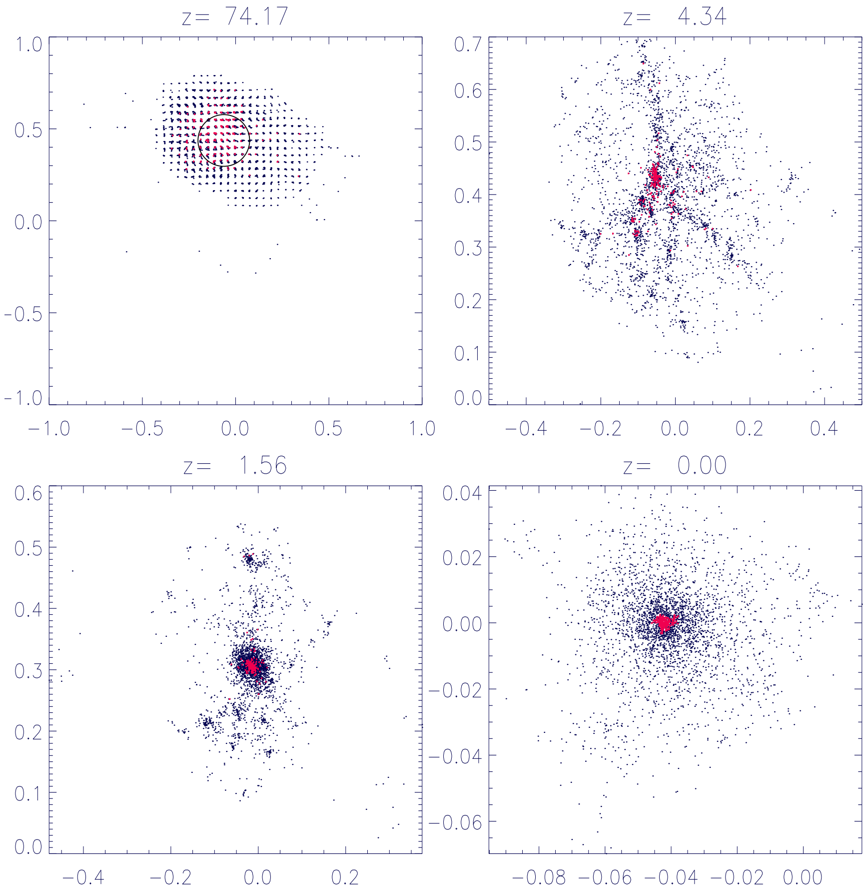


Abbildung 4.21: Simulation: n50cl01H65Λ; Halomasse: $9.22 \times 10^8 \mathrm{M}_\odot$, 3272 Teilchen. In diesem Falle besteht bei $z = 4.3$ ein relativ dominierendes Zentrum aus Kernmaterie. Der weitere Materie-Einfall geschieht in Form von Akkretion im Sinne der genannten Konvention: Sämtliche bei $z = 4.3$ mit FoF identifizierbare Klumpen haben weniger als 10% der Masse des zentralen Objektes. Die hier nicht dargestellte Entwicklung zwischen $z = 4.3$ und $z = 1.56$ bringt keinen qualitativen Unterschied (d.h. keinen equal mass merger). Die Kernmaterie ist auf *ein* Gebiet in der Umgebung eines lokalen Dichtemaximums $\delta(X = 120 \text{ kpc}) \approx 0.29$ konzentriert.

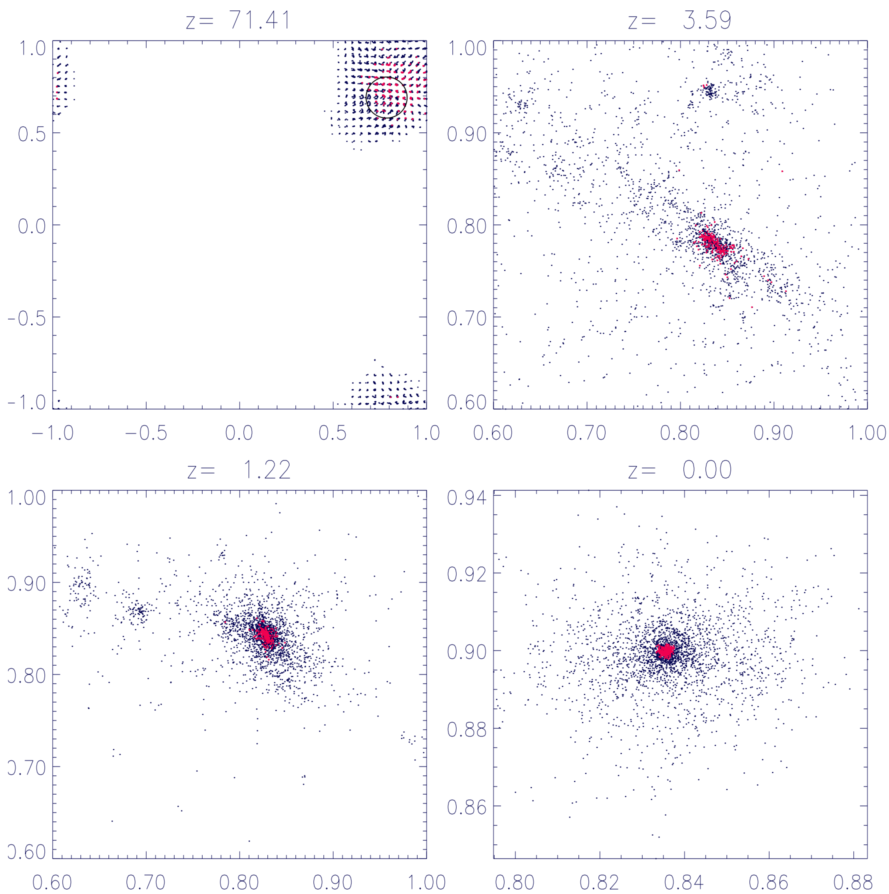


Abbildung 4.22: Simulation: n50cl01H65; Halomasse: $2.57 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$, 2739 Teilchen. Bereits bei $z \approx 3.6$ besteht das Zentrum des Protohalos nur aus Kernmaterie, aller weiterer Materieeinfall geschieht als Akkretion. Die nächste Abbildung zeigt vier weitere Stadien zwischen $z = 71$ und $z = 4$. Bei $z > 70$ ist die Kernmaterie wiederum auf *einem* zusammenhängenden Gebiet in der Umgebung eines Dichtemaximums mit $\delta(X = 100 \text{ kpc}) \approx 0.28$ verteilt.

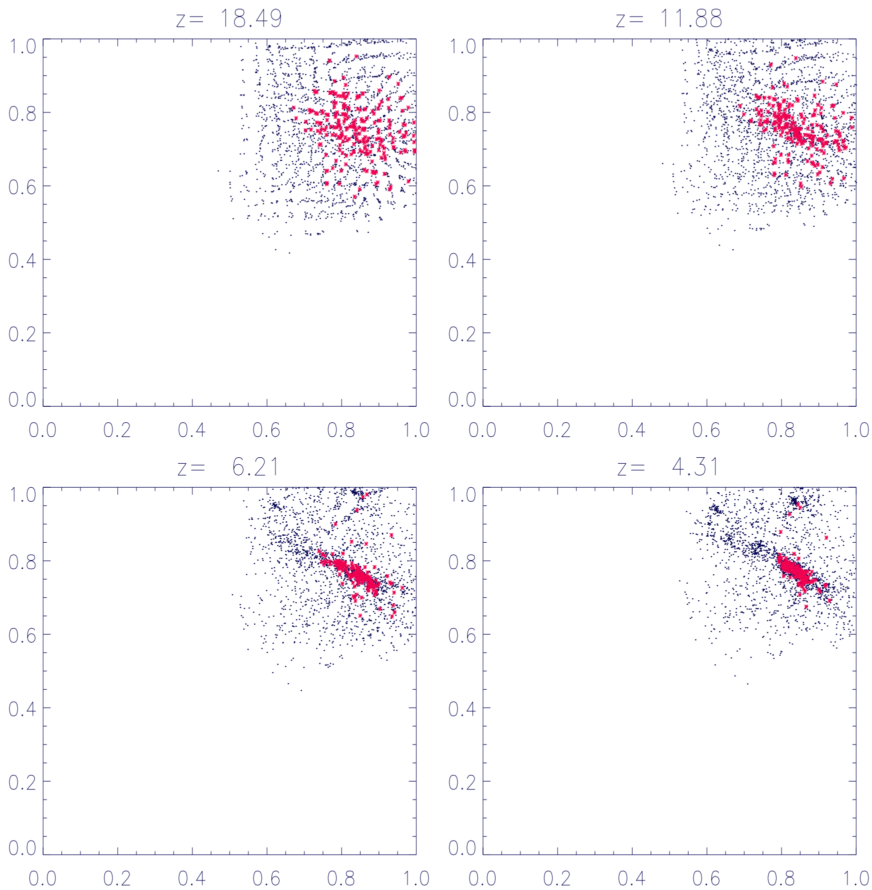


Abbildung 4.23: Zeitlich höher aufgelößtes frühes Stadium des Halos aus der vorangehenden Abbildung. Selbst innerhalb der früh kollabierenden Kernmaterie ist kaum merger-Aktivität zu erkennen. Man beachte, dass es sich bei den isolierten Strukturen von Kernmaterie im Bild links oben nicht um frühste Klumpen handelt, sondern nur um einzelne Teilchen, die mit größeren Symbolen als die umliegenden Teilchen dargestellt sind. Dies gilt ebenso für die im rechten oberen Bild einfallende Kernmaterie. Der Halo erscheint demnach während aller (im Rahmen der räumlichen und zeitlichen Auflösung) erfassbaren Entwicklungsstadien nahezu komplett frei von equal mass mergern.

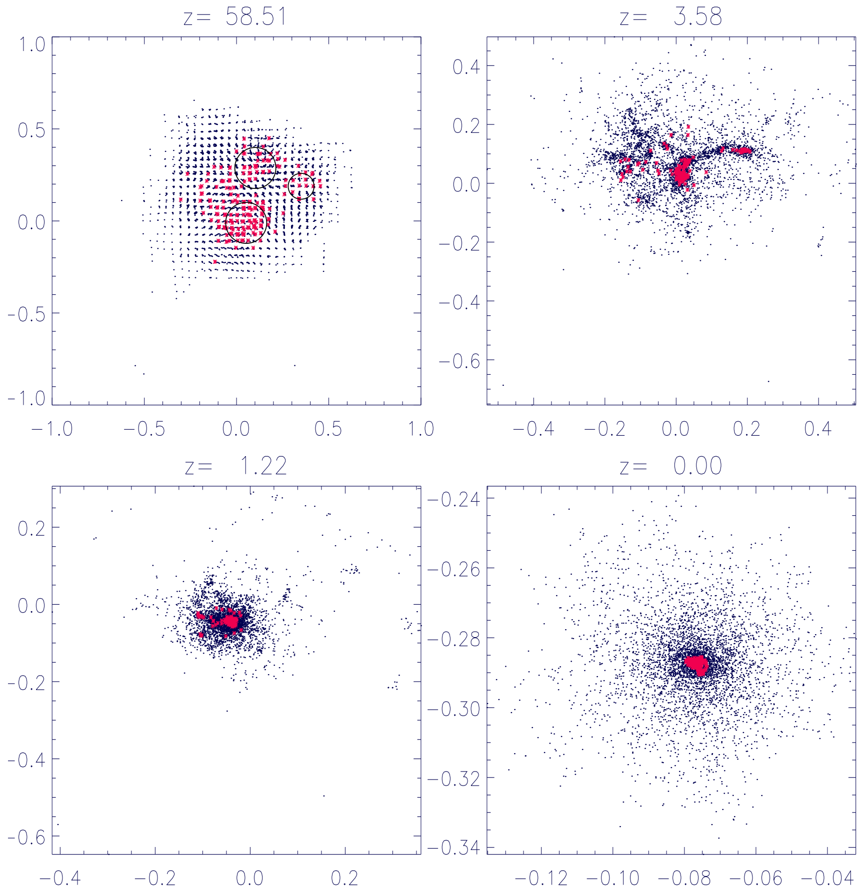


Abbildung 4.24: Simulation: n50cl01H50; Halomasse: $2.76 \times 10^9 \mathrm{M}_\odot$, 4978 Teilchen. Das letzte der angeführten Beispiele zeigt ein offensichtliches Artefakt der FOF-Prozedur. Im rechten oberen Bild erkennt man deutlich einen bevorstehenden merger zweier Objekte, die sowohl Kern- als auch umliegende Materie enthalten. Jedoch ist es hier nicht möglich, mit Hilfe des FOF-Algorithmus innerhalb der langgezogenen Struktur (Mitte $\rightarrow$ Rechts) zwei isolierte Objekte zu identifizieren. Bei strenger Anwendung der vereinbarten Kriterien müßte man demnach von einem akkretionsdimonierten Halo sprechen, die Abbildung widerlegt dies jedoch. Auch das Bild links unten zeigt, dass innerhalb des Protohalos, der bereits einen Großteil der Endmasse beinhaltet, noch Materie von den Randgebieten in des Zentrum fällt. Dies widerspricht ebenfalls dem Wesen eines akkretionsdominierten Halos, bei dem die Kernmaterie schon in den allerfrühesten Stadien das Zentrum bildet. Entsprechend befindet sich die Kernmaterie bei $z > 58$ nicht innerhalb eines zusammenhängenden Gebietes. Vielmehr lassen sich deutlich drei isolierte Regionen ausmachen. Diese fallen jedoch wiederum sehr gut mit lokalen Maxima in der Dichte zusammen: Die Skalen und die zugehörigen Überdichten sind: $\delta(X = 100$ kpc$) \approx 0.34$ (unterer Kreis), $\delta(X = 100$ kpc$) \approx 0.29$ (oben), $\delta(X = 70$ kpc$) \approx 0.22$ (rechts),

## 4.6 Der Einfluss modifizierter Anfangsbedingungen

Dass die primordiale Verteilung der Materie im Universum exakt einer Gaußschen Statistik genügt, ist etwa durch die Theorie der Inflation motiviert, kann aber keineswegs als gesichert angesehen werden: So zeigen sich in den jüngeren COBE-Daten Abweichungen von einer perfekten Gaußizität (siehe etwa Ferreira et al., 1999, Magueijo, 2000, Banday et al., 2000). Es ist jedoch unklar, ob diese Abweichungen tatsächlich kosmologischen Ursprungs sind, oder ob es sich dabei um eine Kontaminierung des Spektrums durch Quellen im Vordergrund handelt. Neuere BOOMERANG-Messungen des winkelabhängigen CMB-Power-Spektrums haben ebenfalls Überraschendes zu Tage gebracht. Demnach scheint die Amplitude des zweiten Peaks deutlich geringer zu sein, als bislang vermutet (White et al., 2000). Die Frage nach der genauen Struktur der Hintergrundstrahlung — und damit der primordialen Dichtefluktuationen — kann jedenfalls nicht als geklärt betrachtet werden.

Allen Simulationen der vorliegenden Arbeit liegt dennoch die mathematisch einfache und theoretisch motivierte Annahme Gaußscher Dichtefluktuationen zu Grunde (siehe Abschnitt 3.1). Diejenigen Halos, die eine hinreichende Auflösung aufweisen, zeigen dabei logarithmische Dichtegradienten im Bereich von $\alpha \approx -1$ in den zentralen Bereichen (Abschnitt 4.3). Die Diskussion um die Haltbarkeitkeit solch singulärer Dichteverteilungen angesichts abweichender Beobachtungsdaten wurde in Abschnitt 4.1 ausführlich erläutert.

In diesem Abschnitt soll nun untersucht werden, ob geringe Veränderungen in den Anfangsbedingungen auf die Struktur der Halozentren Einfluss nehmen können. Hier erweist sich das Ergebnis des vorangehenden Abschnittes als nützlich, wonach die Kernmaterie aller Halos aus ausgezeichneten Regionen des frühen Universums stammt. Denn dies rechtfertigt die Idee, im frühesten Stadium eine Änderung der Phasenraumverteilung der Kernmaterie vorzunehmen. Durch die Ergebnisse der Abschnitte 4.5.2 und 4.5.3 kommt dies einem Eingriff nur in ausgezeichneten Regionen gleich, eben jenen von lokal hoher Dichte. Würde die Kernmaterie nicht aus ausgezeichneten gemeinsamen Gebieten stammen, so wäre es nicht sinnvoll zu rechtfertigen, diese Teilchen einem kollektiven Einfluss zu unterziehen von dem nicht auch ein Großteil der anderen Materie betroffen sein soll.

Um die Möglichkeit zu untersuchen, ob solche lokal begrenzte Änderungen der Anfangsbedingungen die Struktur der Halos beeinflussen, ist es keineswegs von Bedeutung, ob die konkrete Umverteilung im Phasenraum physikalisch wohlmotiviert ist. Es ist vielmehr instruktiv, zunächst sehr einfache Änderungen vorzunehmen, um so besser einen Zusammenhang zwischen der Art des künstlichen Einflusses und der möglichen Änderung der Halostruktur studieren zu können. Denkbar einfache Möglichkeiten bestehen darin, die Geschwindigkeitsvektoren aller Kernteilchen eines ausgewählten Halos etwa zu halbieren oder aber umzukehren.

Diese Änderungen der Teilchengeschwindigkeiten wurden für sämtliche Halos durchgeführt, die im vergangenen Abschnitt bereits diskutiert wurden. Die Simulationen, aus denen die entsprechenden Halos stammen, wurden jeweils mit völlig identischen numerischen und kosmologischen Parametern wiederholt. Die einzige Änderung der jeweils ersten Simulation besteht darin, die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_K$ der Kernteilchen gemäß

$$\mathbf{v}_K \longrightarrow \frac{1}{2}\mathbf{v}_K \tag{4.33}$$

zu verändern. In der jeweils zweiten Simulation wird lediglich die Ersetzung

$$\mathbf{v}_K \longrightarrow -\mathbf{v}_K. \tag{4.34}$$

in dem zu untersuchenden Halo vorgenommen.

Die Auswirkungen der geänderten Anfangsbedingungen auf die Dichteprofile sind in den Abbildungen 4.25 und 4.26 dargestellt. Die Erste davon zeigt die Profile jener Halos, die sich als merger-dominiert herausgestellt haben: Überraschenderweise werden die Profile der Halos, insbesondere in den zentralen Regionen, trotz der nicht unwesentlichen Eingriffe in die Anfangsbedingungen nur in sehr geringem Maße beeinflusst. Dieses Ergebnis stellt man übereinstimmend in jedem der ausgewählten Halos fest. Auch bei den akkretions-dominierten Halos sind nur sehr geringe Veränderung der Profile festzustellen (Abbildung 4.26). Lediglich in zwei Fällen ist hier ein signifikanter Einfluss erkennbar: Das zweite Profil in der linken Spalte von Abbildung 4.26 hat ursprünglich eine logarithmische Steigung von $\alpha = -0.41$. Dieser Wert ändert sich durch die Halbierung der Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_K$ auf immerhin $\alpha = -0.95$. Bei einer Umkehrung der Geschwindigkeitswerte hingegen flacht das Profil wieder ab auf einen Wert von $\alpha = -0.69$.[13] Auffallend ist dennoch, dass es sich bei diesem Halo um denjenigen mit dem geringsten Dichtegradienten $\alpha_{orig}$ aller ursprünglichen Halos handelt. Bei den anderen Fällen ist jedoch keine Abhängigkeit dergestalt erkennbar, dass ein ursprünglich flacheres Dichteprofil zu einem größeren Einfluss der veränderten Anfangsbedingungen führte. Desweiteren liegt bei diesem Halo ein sehr hohes Kern/Halo-Massenverhältnis von $m/M \approx 0.097$ vor; dies ist umso interessanter, als auch bei dem zweiten Halo, das eine signifikante Änderung von $\alpha$ erleidet, eine hoher Wert dieses Verhältnisses vorliegt (konkrete Werte siehe Tabelle 4.4). Der Verdacht auf einen vorliegenden Trend wird jedoch dadurch entschärft, dass bei dem ersten der beiden Halos der tolerierbare Wert von $|\alpha|$ *überschritten* wird und zwar bei der ($\mathbf{v} \to 1/2\mathbf{v}$)-Re-Simulation, wohingegen im Falle des zweiten Halos der Wert von $|\alpha|$ *unterhalb* des „erlaubten" liegt — und dies bei der ($\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$)-Re-Simulation. Die Parameter $\alpha$ und $m/M$ sind in Tabelle 4.4 zusammengestellt.

In lediglich 12 von 24 Re-Simulationen nimmt der logarithmische Dichtegradient ab - wenn auch in geringem Maße. Bei der ($\mathbf{v} \to \frac{1}{2}\mathbf{v}$)-Re-Simulation ist dies viermal der Fall, bei der ($\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$)-Simulation achtmal. Dieselbe Aufteilung ergibt sich zwischen merger- und akkretionsdominierten Halos: Die Profile der Ersteren werden in 4 Fällen flacher, die der

[13] Wann ist eine Änderung von $\alpha$ „signifikant"? Hier liegt folgende vereinfachende Überlegung zugrunde: Jeder radiale Bin des Dichteprofils enthält 200 Teilchen. Die Bin-Länge sei nun nicht als durch die Teilchenzahl definiert angenommen sondern durch den radialen Abstand vom Zentrum. Die Teilchenzahl betrachte man dann als normalverteilte Zufallsgröße. Damit ist eine relative Dichteschwankung im Zentrum von $\pm\sigma_{200} = \pm\sqrt{200}/200 = \pm 0.07$ tolerierbar. Dies gilt ebenso für den zweiten Bin. Der maximale statistisch tolerierbare Dichteunterschied zwischen dem innersten und dem zweiten Meßpunkt ist damit

$$\Delta\rho_{max} = (1+\sigma_{200})\rho(r_1) - (1-\sigma_{200})\rho(r_2). \tag{4.35}$$

Die maximale Differenz in der logarithmischen Skala ist entsprechend

$$\Delta_{\log}\rho_{max} = \log\frac{\rho(r_1)}{\rho(r_2)} + \log\frac{1+\sigma_{200}}{1-\sigma_{200}} \approx \Delta_{\log}\rho + 0.06. \tag{4.36}$$

Dabei ist $\Delta_{\log}\rho$ der logarithmische Dichteunterschied der beiden innersten Bins im *ursprünglichen* Halo. Für den minimalen statistisch begründbaren logarithmischen Dichteunterschied erhält man in ganz analoger Weise

$$\Delta_{\log}\rho_{max} \approx \Delta_{\log}\rho - 0.06. \tag{4.37}$$

Somit gilt für die tolerierbaren Grenzwerte $\alpha_{max}$ und $\alpha_{min}$ des logarithmischen Dichtegradienten

$$\alpha_{min/max} \approx \frac{\log(\rho(r_1)/\rho(r_2)) \pm 0.06}{\log(r_1/r_2)}. \tag{4.38}$$

| $\alpha_{orig}$ | $\alpha_{min}/\alpha_{max}$ | $\alpha_{\mathbf{v}\to\frac{1}{2}\mathbf{v}}$ | $\alpha_{\mathbf{v}\to-\mathbf{v}}$ | $m/M$ | $\Lambda$ | h |
|---|---|---|---|---|---|---|
| merger-dominiert | | | | | | |
| 1.01 | 0.83/1.18 | 1.07 | 1.03 | 1.7% | 0.7 | 0.50 |
| 1.26 | 1.09/1.43 | 1.19 | 1.22 | 1.6% | 0.7 | 0.50 |
| 1.10 | 0.93/1.27 | 1.10 | 1.12 | 3.4% | 0 | 0.50 |
| 0.98 | 0.80/1.16 | 1.05 | 0.82 | 3.0% | 0 | 0.50 |
| 1.04 | 0.87/1.21 | 1.09 | 1.02 | 4.6% | 0 | 0.65 |
| 0.77 | 0.58/0.95 | 0.78 | 0.64 | 4.1% | 0 | 0.50 |
| akkretions-dominiert | | | | | | |
| 0.93 | 0.75/1.10 | 0.81 | 0.85 | 7.0% | 0.7 | 0.50 |
| 0.92 | 0.74/1.09 | 0.87 | 0.90 | 7.8% | 0.7 | 0.65 |
| 0.41 | 0.22/0.60 | 0.95* | 0.69 | 9.7% | 0.7 | 0.50 |
| 1.22 | 1.05/1.39 | 1.12 | 0.96* | 8.3% | 0 | 0.50 |
| 0.94 | 0.77/1.11 | 0.96 | 0.88 | 7.4% | 0 | 0.65 |
| 0.60 | 0.42/0.84 | 0.61 | 0.67 | 7.0% | 0.7 | 0.65 |

Tabelle 4.4: Zentrale Dichtegradienten der diskutierten (re-simulierten) Halos. $\alpha_{orig}$ ist der zentrale Dichtegradien des ursprünglichen Halos. $\alpha_{max}$ sowie $\alpha_{min}$ sind die maximalen bzw. minimalen Werte von $\alpha$, die statistisch tolerierbar sind. $\alpha_{\mathbf{v}\to 1/2\mathbf{v}}$ ist der tatsächliche zentrale Dichtegradient in der Re-Simulation mit halbierten Geschwindigkeiten der Kernteilchen; $\alpha_{\mathbf{v}\to-\mathbf{v}}$ steht für die Re-Simulation mit konvertierten Geschwindigkeiten; $m/M$ ist das Massenverhältnis von Kern und gesamten Halo, $\Lambda$ und $h$ sind die Vakuum-Energiedichte sowie die Expansionsrate der zu Grunde liegenden Modelle. Außer in den beiden mit einem * gekennzeichneten Fällen variieren die Steigungen innerhalb der statistischen Fehlergrenze. Bei den beiden auffallenden Halos handelt es sich um diejenigen mit den höchsten Kern/Halo-Massenverhältnissen.

letzteren wiederum in 8. Die Aussagekraft einer Statistik hierfür leidet natürlich an der relativ geringen Anzahl von Fallbeispielen.

Die Kerne der „neuen", in den Re-Simulationen gebildeten Halos enthalten nur noch zum Teil die Materie, die sich ursprünglich in den Zentren befand. Dies wurde in den Re-Simulationen von je vier merger- und akkretionsdominierten Halos untersucht. Bei den merger-dominierten Halos ist in sämtlichen Fällen 15-20% der ursprünglichen Kernmaterie auch nach der Re-Simulation in den Zentren zu finden. Dabei ist kein Unterschied hinsichtlich der Art der Re-Simulation ($1/2\mathbf{v}_K$ oder $-\mathbf{v}_K$) festzustellen. Bei den akkretionsdominierten Halos, deren Kernmaterie bei hoher Rotverschiebung in der Umgebung nur *eines* Dichtemaximums lokalisiert ist, beträgt der Anteil der Materie, die in den Zentren verharrt deutlich höher, nämlich zwischen 23% und 35%. Einen Überblick über diese Werte verschafft Tabelle 4.5.

Jedoch scheint die Möglichkeit nunmehr ausgeschlossen zu sein, dass mit einer Modifikation der Anfangsbedingungen von der hier besprochenen Art eine Veränderung der zentralen Dichte zu erzielen ist. Eine Lösung des „cusp"-Problems ist auf diesem Wege mithin nicht zu erreichen. Dies liefert einen weiteren Hinweis darauf, dass die Struktur Dunkler Halos generell stabil ist gegen veränderte Anfangsbedingungen, so wie sich dies bereits in einer Vielzahl von Arbeiten herausgestellt hat (Cole & Lacey, 1996, NFW96, Ghigna et al., 2000). Der bereits angesprochene Prozess der *violent relaxation* ist offensichtlich effektiv genug, um die geänderten Anfangsbedingungen wett zu machen und jegliche Information über den Zustand

| $\mathbf{v} \rightarrow \frac{1}{2}\mathbf{v}$ | $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$ | $\Lambda$ | h |
|---|---|---|---|
| merger-dominiert | | | |
| 17% | 15% | 0.7 | 0.50 |
| 15% | 13% | 0.7 | 0.50 |
| 18% | 16% | 0 | 0.50 |
| 15% | 18% | 0 | 0.50 |
| akkretions-dominiert | | | |
| 23% | 29% | 0.7 | 0.50 |
| 34% | 26% | 0.7 | 0.65 |
| 31% | 27% | 0.7 | 0.50 |
| 26% | 34% | 0 | 0.65 |

Tabelle 4.5: Anteil der ursprünglichen Kernmaterie, die nach der Re-Simulatione wieder im Zentrum ist. Dargestellt sind die Werte für je vier merger- und akkretionsdominierte Halos. Es zeigt sich keine Abhängigkeit von der Art der Re-Simulation; wohl aber ist der Anteil bei akkretionsdominierten Halos größer als bei merger-dominierten.

des primordialen Universums aus der Halostruktur auszulöschen. Sollten sich in Zukunft die bislang erzielten Beobachtungsergebnisse bestätigen, nach denen die zentralen Gebiete Dunkler Halos einen konstanten Dichteverlauf haben, so muss die Ursache dafür offensichtlich in Prozessen gesucht werden, die
1.) bei geringerer als primordialer Rotverschiebung stattfinden,
2.) lokal begrenzt innerhalb eines kollabierenden (oder kollabierten) Objektes ablaufen und
3.) möglicherweise gasdynamischer Natur sind.
Der Grund für die ersten Punkt ist schlicht, dass sich bei keiner Arbeit inklusive der vorliegenden eine zwingende Abängigkeit der Struktur Dunkler Halos von den bei hoher Rotverschiebung definierten Anfangsbedingungen herausgestellt hat. Der zweite Punkt ist eine konsequenz des Ersten, denn ab dem Zeitpunkt des „turnarounds", d.h. der Abkopplung der Materie eines begrenzten Raumgebietes von der Hubble-Expansion, ist das Objekt im wesentlichen als isoliertes System anzusehen. Der einzige Einfluss von „außerhalb" geschieht nur durch die Wirkung des Gezeitenfeldes anderer Objekte. Hiervon ist jedoch keine Wirkung auf das räumlich sehr gering ausgedehnte Zentrum eines Dunklen Halos zu erwarten. Über den 3. Punkt, den Einfluss gasdynamischer Prozesse, läßt die vorliegende Arbeit keine Aussagen zu, da hier ausschließlich stoßfreie Simulationen durchgeführt wurden. Auch wenn bisher einige Versuche fehlgeschlagen sind, Gas für die beobachteten Dichten verantwortlich zu machen, kann es dennoch nicht sls Träger eines Effektes ausgeschlossen werden, der flachen Profile erklären könnte. Ebenso kann weiterhin die noch immer ungeklärte Natur der Dunklen Materie einen Weg zur Lösung des Problems bereiten.

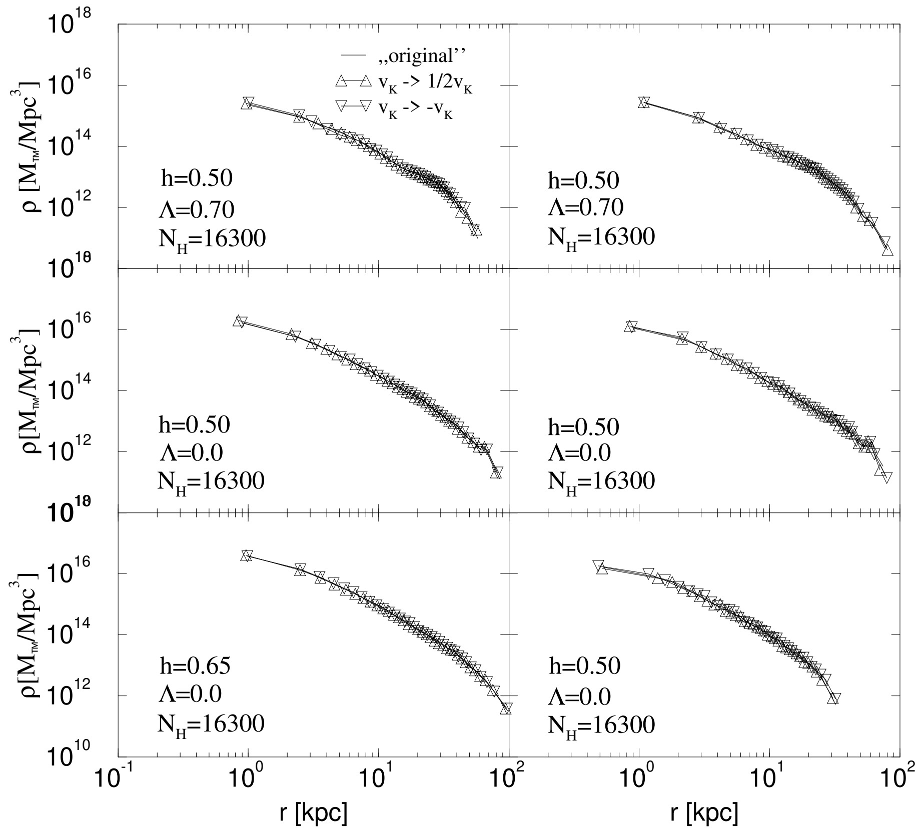


Abbildung 4.25: Vergleich der Dichteprofile der re-simulierten merger-dominierten Halos. In jedem Teilbild sind die Profile eines ursprünglichen und die der jeweils entsprechenden Halos aus den modifizierten Simulationen übereinander geplottet. Es ist keine signifikante Veränderung der Dichteprofile durch die veränderten Teilchengeschwindigkeiten auszumachen.

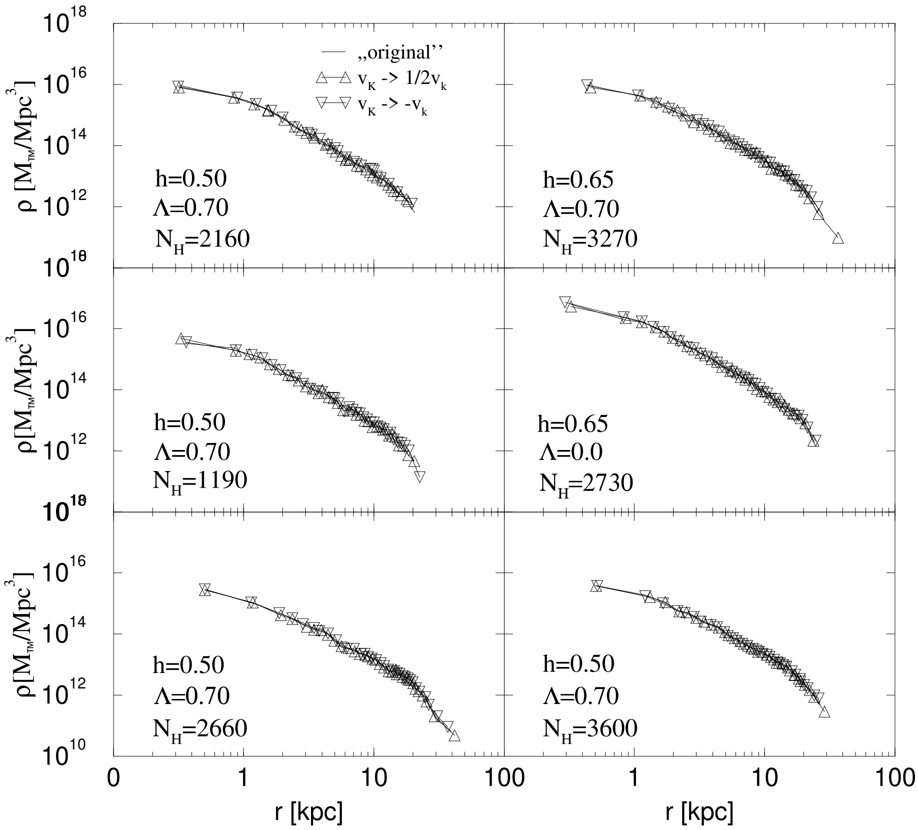


Abbildung 4.26: Wie Abbildung 4.25, hier jedoch für die akkretionsdominierten Halos. Der Einfluss der veränderten Anfangsbedingungen ist hier lediglich in 2 Fällen signifikant (Reihe 2, 1. und 2. Spalte., siehe Tabelle 4.4).

# Kapitel 5

# Zusammenfassung und Ausblick

Zentraler Gegenstand der vorliegenden Arbeit war die Frage, inwieweit durch lokale Veränderungen der kosmologischen Anfangsbedingungen ein Veränderung der innersten Struktur Dunkler Halos zu erreichen ist. Die Motivation hierzu bestand in einer offensichtlichen Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung: Während in numerischen Simulationen zahlreicher Autoren übereinstimmend Dunkle Halos mit singulären Dichteprofilen auftreten, beobachtet man in der Natur Rotationskurven von galaktischen Scheiben, die auf zentrale Regionen konstanter Dichte hindeuten. Um diese Frage zu untersuchen wurde eine Reihe numerischer Rechnungen durchgeführt, mit denen im Rahmen eines CDM-Modelluniversums die Entstehung und Entwicklung Dunkler Halos simuliert wurde.

Der numerische $N$-Body-Code, wie er zu Beginn dieser Arbeit vorlag, wurde innerhalb der Arbeitsgruppe bereits seit längerem für Simulationen auf galaktischen und subgalaktischen Skalen verwendet, und war mithin auf diesem Gebiet zur genüge getestet. Für kosmologische Simulationen war er bis dahin jedoch nicht geeignet, da er nur für ein statisches Simulationsvolumen ausgelegt war. Der Code wurde deswegen um die Fähigkeit erweitert, einem *mitbewegten* Koordinatensystem — und so der Expansion des Universums — Rechnung zu tragen. Dabei wurde auch die Möglichkeit variabler kosmologischer Parameter $\Omega, \Lambda$ und $H_0$ berücksichtigt, mit der physikalisch gerechtfertigten Einschränkung $\Omega + \Lambda = 1$. Der so modifizierte Code fand mittlerweile Verwendung bei weiteren Projekten der Theoriegruppe am Max-Plank-Institut für Astronomie.

Die Verbindung des *Treecode*s mit der Spezial-Hardware GRAPE ermöglicht eine stoßfreie Simulation von 125000 Teilchen innerhalb 10-14 Stunden. Um mit dieser für kosmologische Simulationen relativ geringen Anzahl von Teilchen dennoch eine brauchbare Massenauflösung einzelner Dunkler Halos zu erreichen, ist es nötig, das Simulationsvolumen verhältnismäßig klein zu wählen. So erhält man in einem kubischen Simulationsvolumen von 1 $Mpc^3$ Halos mit immerhin bis zu $N \approx 4 \times 10^4$ Teilchen. Dies entspricht einer Massenauflösung von $1.7 \times 10^5 - 9.4 \times 10^5 \mathrm{M}_\odot$ pro Testteilchen. Auf diese Weise konnten in guter Übereinstimmung die singulären Dichteprofile rekonstruiert werden, wie sie in den numerischen Arbeiten u.a. von Navarro et al. (1996b, 1997) gefunden wurden. Die geringfügigen Abweichungen in Form zu flacher Profile in den äußeren Regionen sind einer Aufklärung wert. Es ist denkbar, dass dies ein numerischer Effekt zu kleiner Simulationsvolumina ist. In der vorliegenden Arbeit wurde diese Frage jedoch als zweitrangig betrachtet, da sie den eigentlichen Gegenstand — die Formation der zentralen Gebiete — nicht unmittelbar berührt.

Die gezwungenermaßen kleine Wahl des Simulationsvolumens von 1 Mpc birgt die Gefahr, dass die Wirkung des großskaligen Gezeitenfeldes auf einen in der Entstehung begriffenen Halo nur unzureichend berücksichtigt wird. Dies ist jedoch einem unmittelbarem Test zugänglich, denn die Dunklen Halos erhalten ihren Drehimpuls im Wesentlichen durch die Wirkung des Gezeitenfeldes während ihrer frühen Entwicklung ($\delta < 1$). Die Spinparameter der hier simulierten Halos zeigen eine Verteilung, die sich mit der von anderen Autoren übereinstimmend gefundenen sehr gut deckt. Das Simulationsvolumen kann somit als hinreichend groß erachtet werden.

Die kosmologischen Anfangsbedingungen genügten den Kriterien, wie sie durch das CDM-Standardmodell und seiner Parameter vorgegeben sind. Hierfür wurde der public domain code GRAFIC von E. Bertschinger (Ma & Bertschinger (1995)) verwendet. Dieser berechnet mit Hilfe des Zel'dovich-Verfahrens eine zufällige Teilchenverteilung, das den statistischen Anforderungen des primordialen Dichtefeld genügt.

Die aus den Simulationen resultierenden Dunklen Halos wurden zunächst auf einige grundlegende Eigenschaften hin untersucht. Die Konzentrationsparameter zeigten hierbei eine leichte Massenabängigkeit in Übereinstimmung mit NFW. Die Werte lagen jedoch generell über denen von NFW, was mit den etwas zu flachen Dichteprofilen in den Außenbereichen zu begründen ist. Die zentralen Regionen hingegen erwiesen sich wie erwähnt als konsistent mit NFW. Es zeigte sich keinerlei Abhängigkeit der zentralen Dichtegradienten von den kosmologischen Parametern. Die geringe Anzahl hinreichend aufgelöster Halos steht einer zuverlässigen statistischen Aussage hierüber allerdings im Wege.

Es wurde dann untersucht, ob es einen einfach zu formulierenden Zusammenhang gibt zwischen der Materie in den Halozentren bei $z = 0$ — der „Kernmaterie" — und dem primordialen Dichtefeld. Dabei wurde zwischen zwei Klassen von Halos unterschieden: Solchen, in deren Entstehung die komplexe Dynamik von „equal mass mergern" eine Rolle spielte, und solchen, die lediglich der einfacheren Dynamik kontinuierlicher Akkretion ausgesetzt waren. Es zeigte sich, dass in beiden Fällen mit hoher Signifikanz die Kernmaterie aus lokalen Maxima des primordialen Dichtefeldes stammt. Bei den merger-dominierten Fällen findet sich die Kernmaterie bei hoher Rotverschiebung stets auf mindestens zwei mehr oder minder deutlich getrennte Gebiete verteilt, in denen die Dichte lokal maximal ist. Diese Gebiete stellen gewissermaßen die „Geburtsstätten" der Vorläuferhalos dar, die im Laufe der kosmischen Entwicklung verschmelzen. Die dichten Zentren der Vorläuferhalos bleiben dabei im wesentlichen stabil und bilden nach der Relaxation des neuen Halos dessen Zentrum. Die Kernmaterie akkretionsdominierter Halos stammt in allen untersuchten Fällen aus genau einem zusammenhängendem Gebiet, das ebenfalls mit einem lokalen Dichtemaximum identisch ist. Der frühe Kollaps in diesem Gebiet erzeugt den Kern des Protohalos, der bis $z = 0$ diese Position behauptet, unbehelligt durch den etwaigen Einfall des kompakten Kerns eines Verschmelzungspartners. Die Skalen, auf die sich die lokalen Dichtemaxima beziehen, richten sich nach der räumlichen Verteilung der Kernmaterie im primordialen Universum.

Auf diese Weise kann die Kernmaterie mit ausgezeichneten Regionen des frühen Universums in Verbindung gebracht werden. Dies rechtfertigt seinerseits eine lokal begrenzte (versuchsweise) Umverteilung der Kernmaterie im Phasenraum. Im Falle einer willkürlichen räumlichen Verteilung der Kernmaterie im frühen Universum wäre eine solcher Eingriff nicht zu rechtfertigen, sofern er nur die Gebiete betreffen soll, der die Kernmaterie enthält. In zwei „Versuchsreihen" wurden nun mit veränderten Bedingungen die Simulationen wiederholt, aus denen die betrachteten Halos stammen. In einer ersten Reihe wurden die Geschwindigkeiten Kernteilchen bei hoher Rotverschiebung in willkürlicher Manier halbiert. In einem zweiten Versuch wurden die Geschwindigkeiten der Kernteilchen umgekehrt. Sämtliche kosmologischen und numerischen Parameter blieben im Vergleich zu den ursprünglichen Simulationen unverändert. Beide Male stellte sich heraus, dass die hieraus entstandenen Halos von den veränderten Bedingungen kaum beeinflusst wurden — d.h. die zentralen Dichtegradienten der Re-Simulierten Halos unterschieden sich nicht signifikant von den „originalen" Halos. Dennoch handelt es sich bei der Materie in den „neuen" Zentren nur zum Teil um diejenige, die sich schon in den Zentren der ursprünglichen Halos befand. Ein Unterschied hinsichtlich der Art der Re-Simulation ist nicht festzustellen, wohl aber hinsichtlich des Halo-Typs: Bei den merger-dominierten Halos landen typischerweise 15-20% der Kernmaterie auch im re-simulierten Halozentrum, bei den akkretionsdominierten sind es dagegen 25-35%.

Als entscheidende Konsequenz dieser Arbeit ist festzustellen, dass der Effekt der heftigen Relaxation offensichtlich in der Lage ist, weitgehend unabhängig von den kosmologischen Anfangsbedingungen für ein universelles Dichteprofil Dunkler Halos zu sorgen. Dem Problem der zu hohen Dichten in den Halozentren ist auf diese Weise nicht beizukommen. Ebenso läßt dieses Ergebnis einmal mehr die Möglichkeit unwahrscheinlich erscheinen, dass ein Rückschluss von der Struktur Dunkler Halos auf das frühe Universum möglich ist.

# Anhang A

# Free-Streaming Skalen

Relativistische Teilchen in einem kollisionsfreien Medium können ungehindert aus überdichten Regionen heraus strömen und auf diese Weise Dichtestörungen glätten. Die Skalen, auf denen dieser sog. *free-streaming*-Effekt wirksam ist, wird hier abgeschätzt. Ich folge dabei der Methode von Kolb & Turner (1990).

Die free-streaming (FS-)Skala $\lambda_{FS}$ entspricht gerade der mittleren Distanz, die ein betrachtetes Teilchen vom Zeitpunkt seiner Entkopplung an zurücklegen kann, also

$$\lambda_{FS}(t) = \int_{t_i}^{t} \frac{v(t')}{R(t')} dt' \tag{A.1}$$

Da ab dem Zeitpunkt des Materie-Strahlungs-Gleichgewichtes $t_{eq}$ Jeans-Instabilitäten in der Dunklen Materie auftreten können, interessiert uns die FS-Skala zu ebendiesem Zeitpunkt. Zudem spalten wir das Integral auf in je eines für die Zeit *vor* und *nach* $t_{nr}$, wobei die Teilchen zum Zeitpunkt $t_{nr}$ nicht-relativistisch werden.

$$\lambda_{FS} \approx \int_{0}^{t_{nr}} \frac{c}{R(t')} dt' + \int_{t_{nr}}^{t_{eq}} \frac{v(t')}{R(t')} dt' \tag{A.2}$$

Die Näherung besteht darin, für die gesamte relativistische Phase den konstanten Wert $c$ anzunehmen. Da Neutrinos etwa $t_i \approx 1$ s $\ll t_{nr}$ nach dem Urknall entkoppeln, ist $t_i = 0$ gesetzt. Der Impuls $p$ eines frei fallenden Teilchens im expandierenden Universum erleidet eine Rotverschiebung gemäß $p \propto R^{-1}$. Das bedeutet im nicht-relativistischen Falle $v \propto R^{-1}$. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
\lambda_{FS} &\approx \int_{0}^{t_{nr}} \frac{c dt'}{R(t')} + \int_{t_{nr}}^{t_{eq}} \frac{R_{nr}}{R^2(t')} dt' && \text{(A.3)}\\
&= \int_{0}^{t_{nr}} \frac{c dt'}{t'^{1/2}} + \int_{t_{nr}}^{t_{eq}} \frac{R_{nr}}{t'} dt' && \text{(A.4)}\\
&= 2\frac{c t_{nr}}{R_{nr}} + \int_{t_{nr}}^{t_{eq}} \frac{R_{nr}}{t'} dt'. && \text{(A.5)}
\end{aligned}$$

Dabei wurde in A.4 und A.5 $R(t) \propto t^{1/2}$ verwendet. Mit $t = t_{nr}(R/R_{nr})^2$ ergibt sich schließlich

$$\lambda_{FS} \approx \frac{c t_{nr}}{R_{nr}} \left\{ 2 + \ln\left(\frac{t_{eq}}{t_{nr}}\right) \right\}. \tag{A.6}$$

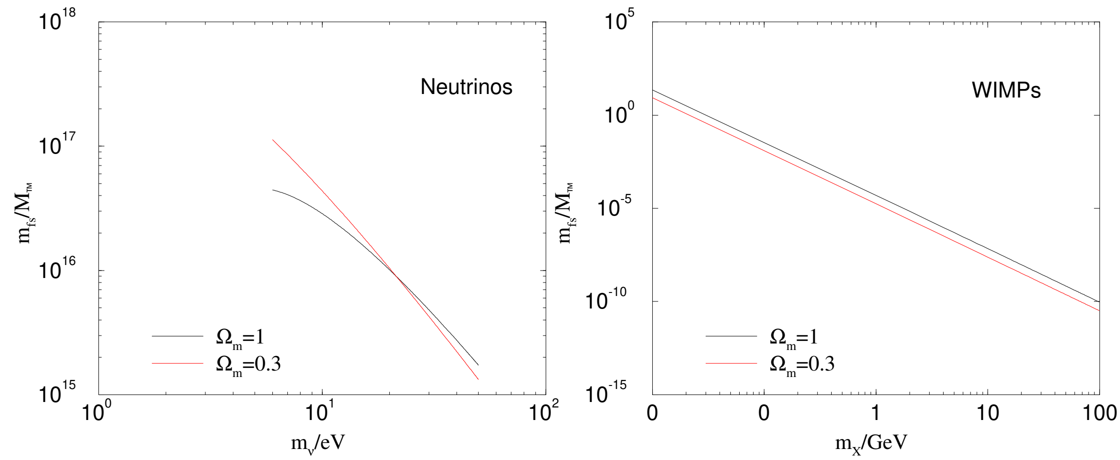


Abbildung A.1: Free-Streaming Massen (d.h. die Massen innerhalb der entsprechenden Fs-Skalen) von Neutrinos mit hypothetischen Massen im Bereich von $m_\nu = (6 \ldots 50)$ eV sowie Wimps im Massenbereich $m_X = 10$ Mev... 100 GeV.

Eine Teilchensorte $X$ wird nichtrelativistisch, sobald seine Temperatur $T_X$ kleiner wird als $m_X c^2/3k_B$, wobei eine schwach wechselwirkende Teilchensorte eine geringere Temperatur als ein Photonengas hat ($T_X < T$). Mit Hilfe von $T \propto R^{-1} \propto t^{-1/2}$ erhält man dann Ausdrücke für $t_{nr}$ und $R_{nr}$:

$$t_{nr} \approx 1.2 \times 10^7 \left(\frac{\text{keV}}{m_X}\right)^2 \left(\frac{T_X}{T}\right)^2 \tag{A.7}$$

$$R_{nr} \approx 7.1 \times 10^{-7} \left(\frac{\text{keV}}{m_X}\right) \left(\frac{T_X}{T}\right) \tag{A.8}$$

Weiter seien ohne Herleitung die Beziehungen

$$\frac{t_{eq}}{t_{nr}} = \left(\frac{m_X}{17(\Omega_0 h^2)(T_X/T)\text{eV}}\right)^2, \tag{A.9}$$

sowie $T_\nu/T = (4/11)^{1/3}$ (für Neutrinos) angegeben.

Für Neutrinos mit der Masse $m_\nu = 10$eV erhält man damit eine Fs-Skala von $\lambda_{FS} \approx 40$ Mpc und entsprechend eine Masse von $M_{FS} \approx 3 \times 10^{16} \mathrm{M}_\odot$. Zu einem schwach wechselwirkenden Fermion - für diese Teilchen ist die Herleitung gültig[1] - mit einer Masse von 1 Gev dagegen gehört eine Fs-Skala von nur $\lambda_{FS} \approx 5$ pc und damit eine Masse von $M_{FS} \approx 10^{-5}$ $\mathrm{M}_\odot$ (siehe

[1] lediglich $T_X/T$ bedarf einer geringen Korrektur

Abb. A). Dies erklärt, warum Kalte Dunkle Materie (mit WIMPs als Masseträgern) keinen merklichen free-streaming Effekt verursachen.

# Literaturverzeichnis


Adams, F. C., Bond, J. R., Freese, K., Frieman, J. A., Olinto, A. V.: 1993. Natural inflation: Particle physics models, power-law spectra for large-scale structure, and constraints from the cosmic background explorer. *Physical Review D*, **47**, 426–455.

Albrecht, A. Steinhardt, P. J.: 1982. Cosmology for grand unified theories with radiatively induced symmetry breaking. *Physical Review Letters*, **48**, 1220–1223.

Alcock, C., Allsman, R. A., Alves, D. R., Axelrod, T. S., Becker, A. C., Bennett, D. P., Cook, K. H., Dalal, N., Drake, A. J., Freeman, K. C., Geha, M., Griest, K., Lehner, M. J., Marshall, S. L., Minniti, D., Nelson, C. A., Peterson, B. A., Popowski, P., Pratt, M. R., Quinn, P. J., Stubbs, C. W., Sutherland, W., Tomaney, A. B., Vandehei, T., Welch, D.: 2000. The macho project: Microlensing results from 5.7 years of large magellanic cloud observations. *Astrophysical Journal*, **542**, 281–307.

Alcock, C., Allsman, R. A., Axelrod, T. S., Bennett, D. P., Cook, K. H., Freeman, K. C., Griest, K., Guern, J. A., Lehner, M. J., Marshall, S. L., Park, H. ., Perlmutter, S., Peterson, B. A., Pratt, M. R., Quinn, P. J., Rodgers, A. W., Stubbes, C. W., Sutherland, W.: 1996. The macho project first-year large magellanic cloud results: The microlensing rate and the nature of the galactic dark halo. *Astrophysical Journal*, **461**, 84+.

Athanassoula, E., Bosma, A., Lambert, J. ., Makino, J.: 1998. Performance and accuracy of a grape-3 system for collisionless n-body simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **293**, 369–380.

Avila-Reese, V., Firmani, C., Klypin, A., Kravtsov, A. V.: 1999. Density profiles of dark matter haloes: diversity and dependence on environment. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **310**, 527–539.

Bahcall, N. A.: 1998. Determining $\Omega$ and $\sigma_8$ with clusters of galaxies. In *Wide Field Surveys in Cosmology, 14th IAP meeting held May 26-30, 1998, Paris. Publisher: Editions Frontieres. ISBN: 2-8 6332-241-9, p. 231.*, pages 231+.

Banday, A. J., Zaroubi, S., Górski, K. M.: 2000. On the non-gaussianity observed in the cobe differential microwave radiometer sky maps. *Astrophysical Journal*, **533**, 575–587.

Bardeen, J. M., Bond, J. R., Kaiser, N., Szalay, A. S.: 1986. The statistics of peaks of gaussian random fields. *Astrophysical Journal*, **304**, 15–61.

BARNES, J.: 1990. *J. Comp. Phys.*, **87**, 161.

BARNES, J.: 1991. Colliding galaxies. *Scientific American*, **265**, 26+.

BARNES, J. EFSTATHIOU, G.: 1987. Angular momentum from tidal torques. *Astrophysical Journal*, **319**, 575–600.

BARNES, J. HUT, P.: 1986. A hierarchical $\mathcal{O}(N \log N)$ force-calculation algorithm. *Nature*, **324**, 446–449.

BARNES, J. HUT, P.: 1989. Error analysis of a tree code. *Astrophysical Journal*, **70**, 389–417.

BARNES, J. E. HERNQUIST, L.: 1992. Dynamics of interacting galaxies. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **30**, 705–742.

BEGEMAN, K. G., BROEILS, A. H., SANDERS, R. H.: 1991. Extended rotation curves of spiral galaxies - dark haloes and modified dynamics. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **249**, 523–537.

BENDER, R.: 1990. In Wielen, R., editor, Dynamics and interactions of Galaxies, Berlin, Springer-Verlag, 1990, page 212.

BENNETT, C. L., BANDAY, A. J., GORSKI, K. M., HINSHAW, G., JACKSON, P., KEEGSTRA, P., KOGUT, A., SMOOT, G. F., WILKINSON, D. T., WRIGHT, E. L.: 1996. Four-year COBE DMR cosmic microwave background observations: Maps and basic results. *Astrophysical Journal Letters*, **464**, L1–+.

Binney, J., Kormendy, J., White, S. D. M., editors: 1982. *Morphology an dynamics of galaxies.*

BINNEY, J. TREMAINE, S.: 1987. *Galactic dynamics.* Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p.

BOND, J. R., COLE, S., EFSTATHIOU, G., KAISER, N.: 1991. Excursion set mass functions for hierarchical gaussian fluctuations. *Astrophysical Journal*, **379**, 440–460.

BOWER, R. G.: 1991. The evolution of groups of galaxies in the press-schechter formalism. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **248**, 332–352.

BURKERT, A.: 1995. The structure of dark matter halos in dwarf galaxies. *Astrophysical Journal Letters*, **447**, L25–+.

BURKERT, A.: 1997. The structure of dark matter halos. observation versus theory. In *Dark matter in astro- and particle physics : (DARK '96) : Heidelberg, Germany, 16-20 September 1996 / editors, H.V. Klapdor-Kleingrothaus, Y. Ramachers. Singapore ; River Edge, NJ : World Scientific, c1997, p. 35.*, pages 35+.

BURKERT, A.: 2000a. The cosmological angular momentum problem of low-mass disk galaxies. *(preprint), astro-ph/0007047.*

BURKERT, A.: 2000b. The structure and evolution of weakly self-interacting cold dark matter halos. *Astrophysical Journal Letters*, **534**, L143–L146.

BURKERT, A. NAAB, T.: 2000. The formation of elliptical galaxies. In *American Astronomical Society Meeting*, volume 197, pages 5605+.

BURKERT, A. SILK, J.: 1997. Dark baryons and rotation curves. *Astrophysical Journal Letters*, **488**, L55–+.

BURKERT, A. SILK, J.: 1999. On the structure and nature of dark matter halos. In *Dark matter in Astrophysics and Particle Physics*, pages 375+.

CARR, B.: 1994. Baryonic dark matter. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **32**, 531–590.

CARROLL, S. M., PRESS, W. H., TURNER, E. L.: 1992. The cosmological constant. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **30**, 499–542.

CEN, R.: 1992. A hydrodynamic approach to cosmology - methodology. *Astrophysical Journal Supplement Series*, **78**, 341–364.

COLBERG, J. M.: 1998. *private Mitteilung.*

COLE, S. LACEY, C.: 1996. The structure of dark matter haloes in hierarchical clustering models. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **281**, 716+.

COLE, S., LACEY, C. G., BAUGH, C. M., FRENK, C. S.: 2000. Hierarchical galaxy formation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **319**, 168–204.

COLES, P. LUCCHIN, F.: 1995. *Cosmology. The origin and evolution of cosmic structure.* Chichester: Wiley, —c1995.

DE BERNARDIS, P., ADE, P. A. R., BOCK, J. J., BOND, J. R., BORRILL, J., BOSCALERI, A., COBLE, K., CRILL, B. P., DE GASPERIS, G., FARESE, P. C., FERREIRA, P. G., GANGA, K., GIACOMETTI, M., HIVON, E., HRISTOV, V. V., IACOANGELI, A., JAFFE, A. H., LANGE, A. E., MARTINIS, L., MASI, S., MASON, P. V., MAUSKOPF, P. D., MELCHIORRI, A., MIGLIO, L., MONTROY, T., NETTERFIELD, C. B., PASCALE, E., PIACENTINI, F., POGOSYAN, D., PRUNET, S., RAO, S., ROMEO, G., RUHL, J. E., SCARAMUZZI, F., SFORNA, D., VITTORIO, N.: 2000. A flat universe from high-resolution maps of the cosmic microwave background radiation. *Nature*, **404**, 955–959.

DE BLOCK, W. J. G., MCGAUGH, S. S., BOSMA, A., RUBIN, V. C.: 2001. Mass density profiles of LSB galaxies. *(preprint), astro-ph/0103102.*

DE BLOK, W. J. G., MCGAUGH, S. S., VAN DER HULST, J. M.: 1996. HI observations of low surface brightness galaxies: probing low-density galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **283**, 18–54.

DE VAUCOULEURS, G.: 1948. Recherches sur les nebuleuses extragalactiques. *Annales d'Astrophysique*, **11**, 247.

DRELL, P. S., LOREDO, T. J., WASSERMAN, I.: 2000. Type ia supernovae, evolution, and the cosmological constant. *Astrophysical Journal*, **530**, 593–617.

DRESSLER, A. GUNN, J. E.: 1992. Spectroscopy of galaxies in distant clusters. iv - a catalog of photometry and spectroscopy for galaxies in seven clusters with z in the range of 0.35 to 0.55. *Astrophysical Journal Supplement Series*, **78**, 1–60.

DUBINSKI, J. CARLBERG, R. G.: 1991. The structure of cold dark matter halos. *Astrophysical Journal*, **378**, 496–503.

EBISUZAKI, T., MAKINO, J., FUKUSHIGE, T., TAIJI, M., SUGIMOTO, D., ITO, T., OKUMURA, S. K.: 1993. Grape project: an overview. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **45**, 269–278.

EFSTATHIOU, G., BOND, J. R., WHITE, S. D. M.: 1992. COBE background radiation anisotropies and large-scale structure in the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **258**, 1P–6P.

EFSTATHIOU, G., DAVIS, M., WHITE, S. D. M., FRENK, C. S.: 1985. Numerical techniques for large cosmological n-body simulations. *Astrophysical Journal Supplement Series*, **57**, 241–260.

EFSTATHIOU, G., FRENK, C. S., WHITE, S. D. M., DAVIS, M.: 1988. Gravitational clustering from scale-free initial conditions. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **235**, 715–748.

EWALD, P. P.: 1921. Die Berechnung optischer und elektrostatischer Gitterpotentiale. *Ann. Physik*, **64**, 253–287.

FABER, S. M., TREMAINE, S., AJHAR, E. A., BYUN, Y., DRESSLER, A., GEBHARDT, K., GRILLMAIR, C., KORMENDY, J., LAUER, T. R., RICHSTONE, D.: 1997. The centers of early-type galaxies with hst. iv. central parameter relations. *Astronomical Journal*, **114**, 1771+.

FERREIRA, P. G., GÓRSKI, K. M., MAGUEIJO, J.: 1999. The four year cobe-dmr data is non-gaussian. In *AIP Conf. Proc. 476: 3K cosmology*, pages 293+.

FLIESSBACH, T.: 1998. *Allgemeine Relativitatstheorie*. Heidelberg, Berlin: Spektrum Akademischer Verlag.

FLORES, R. A. PRIMACK, J. R.: 1994. Observational and theoretical constraints on singular dark matter halos. *Astrophysical Journal Letters*, **427**, L1–L4.

FRENK, C. S., WHITE, S. D. M., DAVIS, M., EFSTATHIOU, G.: 1988. The formation of dark halos in a universe dominated by cold dark matter. *Astrophysical Journal*, **327**, 507–525.

FUCHS, B.: 1998. *private Mitteilung*.

GEBHARDT, K., RICHSTONE, D., AJHAR, E. A., LAUER, T. R., BYUN, Y., KORMENDY, J., DRESSLER, A., FABER, S. M., GRILLMAIR, C., TREMAINE, S.: 1996. The centers of early-type galaxies with hst. iii. non-parametric recovery of stellar luminosity distribution. *Astronomical Journal*, **112**, 105+.

Gelb, J. M. Bertschinger, E.: 1994. Cold dark matter. 1: The formation of dark halos. *Astrophysical Journal*, **436**, 467–490.

Ghigna, S., Moore, B., Governato, F., Lake, G., Quinn, T., Stadel, J.: 2000. Density profiles and substructure of dark matter halos: Converging results at ultra-high numerical resolution. *Astrophysical Journal*, **544**, 616–628.

Gladders, M. D. et al.: 2000. The toronto red-sequence cluster survey: Clusters at $z \sim 1$ and the values of $\Omega_m$ and $\sigma_8$. In *IAU Symposium*, volume 201, pages E58–+.

Goldstein, H.: 1950. *Classical mechanics*. Addison-Wesley World Student Series, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1950.

Goobar, A., Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Groom, D. E., Hook, I. M., Kim, A. G., Kim, M. Y., Lee, J. C., Nunes, N. J., Pain, R., Pennypacker, C. R., Quimby, R., Lidman, C., Ellis, R. S., Irwin, M., McMahon, R. G., Ruiz-Lapuente, P., Walton, N., Schaefer, B., Boyle, B. J., Filippenko, A. V., Matheson, T., Fruchter, A. S., Panagia, N., Newberg, H. J. M., Couch, W. J.: 2000. The acceleration of the universe : measurements of cosmological parameters from type ia supernovae. *Physica Scripta Volume T*, **85**, 47–58.

Gott, J. R.: 1997. Open, CDM, inflationary universes. In *Critical Dialogues in Cosmology*, pages 519+.

Götz, M., Huchra, J. P., Brandenberger, R. H.: 1998. Group identification in $n$-body simulations: SKID and DENMAX versus Friends-of-Friends. *(preprint), astro-ph/9811393*.

Guth, A. H.: 1981. Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems. *Physical Review D*, **23**, 347–356.

Guth, A. H. Pi, S. .: 1982. Fluctuations in the new inflationary universe. *Physical Review Letters*, **49**, 1110–1113.

Harrison, E. R.: 1970. Galaxy formation in the early universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **148**, 119+.

Hernquist, L.: 1987. Performance characteristics of tree codes. *Astrophysical Journal Supplement Series*, **64**, 715–734.

Hernquist, L.: 1990. An analytical model for spherical galaxies and bulges. *Astrophysical Journal*, **356**, 359–364.

Hernquist, L.: 1992. Structure of merger remnants. I - Bulgeless progenitors. *Astrophysical Journal*, **400**, 460–475.

Hernquist, L.: 1993. Structure of merger remnants. II - Progenitors with rotating bulges. *Astrophysical Journal*, **409**, 548–562.

Hernquist, L., Bouchet, F. R., Suto, Y.: 1991. Application of the ewald method to cosmological n-body simulations. *Astrophysical Journal Supplement Series*, **75**, 231–240.

Hockney, R. W. Eastwood, J. W.: 1988. *Computer simulation using particles.* Bristol: Hilger, 1988.

Huang, S., Dubinski, J., Carlberg, R. G.: 1993. Orbital deflections in n-body systems. *Astrophysical Journal*, **404**, 73–80.

Hubble, E. Humason, M. L.: 1931. The velocity-distance relation among extra-galactic nebulae. *Astrophysical Journal*, **74**, 43+.

Huss, A., Jain, B., Steinmetz, M.: 1999a. The formation and evolution of clusters of galaxies in different cosmogonies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **308**, 1011–1031.

Huss, A., Jain, B., Steinmetz, M.: 1999b. How universal are the density profiles of dark halos? *Astrophysical Journal*, **517**, 64–69.

Hut, P. White, S. D. M.: 1984. Can a neutrino-dominated universe be rejected? *Nature*, **310**, 637–640.

Islam, J. N.: 1992. *An introduction to mathematical cosmology.* New York: Cambridge University Press.

Ito, T., Ebisuzaki, T., Makino, J., Sugimoto, D.: 1991. A special-purpose computer for gravitational many-body systems: Grape-2. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **43**, 547–555.

Jenkins, A., Frenk, C. S., White, S. D. M., Colberg, J. M., Cole, S., Evrard, A. E., Couchman, H. M. P., Yoshida, N.: 2001. The mass function of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **321**, 372–384.

Jing, Y. P.: 2000. The density profile of equilibrium and nonequilibrium dark matter halos. *Astrophysical Journal*, **535**, 30–36.

Kawai, A., Fukushige, T., Makino, J., Taiji, M.: 2000. Grape-5: A special-purpose computer for n-body simulations. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **52**, 659–676.

Khochfar, S.: 2000. Entstehung Dunkler Halos in verschiedenen Kosmologien. *Diplomarbeit, Heidelberg, 2000.*

Klapp, J. Cervantes-Cota, J. L.: 1998. Tidal interactions of protogalaxies and the angular momentum problem. In *IX Latin American Regional IAU Meeting, Focal Points in Latin American Astronomy", held in Tonantzintla, Mexico, Nov 9-13, 1998, Eds: Aguilar, A.; Carraminana, A.; to be printed in Revista Mexicana de Astronomia y Astrofisica Serie de Conferencias.*, pages E131–+.

Klessen, R.: 1997. Grapesph with fully periodic boundary conditions - fragmentation of molecular clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **292**, 11+.

Klessen, R.: 1998. Fragmentation in a molecular cloud. *Dissertation, Heidelberg.*

Klypin, A., Kravtsov, A. V., Bullock, J. S., Primack, J. R.: 2000. Resolving the structure of cold dark matter halos. *(preprint), astro-ph/0006343.*

Klypin, A., Kravtsov, A. V., Valenzuela, O., Prada, F.: 1999. Where are the missing galactic satellites? *Astrophysical Journal*, **522**, 82–92.

Knebe, A. Müller, V.: 1999. Formation of groups and clusters of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, **341**, 1–7.

Kochanek, C. S. White, M.: 2000. A quantitative study of interacting dark matter in halos. *Astrophysical Journal*, **543**, 514–520.

Kolb, E. W. Turner, M. S.: 1990. *The early universe.* Frontiers in Physics, Reading, MA: Addison-Wesley, 1988, 1990.

Kravtsov, A. V., Klypin, A. A., Bullock, J. S., Primack, J. R.: 1998. The cores of dark matter-dominated galaxies: Theory versus observations. *Astrophysical Journal*, **502**, 48+.

Lacey, C. Cole, S.: 1994. Merger rates in hierarchical models of galaxy formation - part two - comparison with n-body simulations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **271**, 676+.

Lachize-Rey, M. Gunzig, E.: 1999. *The Cosmological Background Radiation.* Cambridge [England] ; New York, USA : Cambridge University Press.

Lemson, G. Kauffmann, G.: 1999. Environmental influences on dark matter haloes and consequences for the galaxies within them. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **302**, 111–117.

Liddle, A. R. Lyth, D. H., editors: 2000. *Cosmological inflation and large-scale structure.*

Linde, A. D.: 1983. The new inflationary universe scenario. In *Very Early Universe*, pages 205–249.

Longair, M. S.: 1998. *Galaxy Formation.* Springer, Heidelberg, Berlin, New York, ISBN 3540637850.

Lynden-Bell, D.: 1967. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **136**, 101+.

Ma, C. Bertschinger, E.: 1994. Do galactic systems form too late in cold + hot dark matter models? *Astrophysical Journal Letters*, **434**, L5–L9.

Ma, C. Bertschinger, E.: 1995. Cosmological perturbation theory in the synchronous and conformal newtonian gauges. *Astrophysical Journal*, **455**, 7+.

Magueijo, J. .: 2000. New non-gaussian feature in cobe-dmr 4 year maps. *Astrophysical Journal Letters*, **528**, L57–L60.

Makino, J.: 1991. Treecode with a special purpose prozessor. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **43**, 621–638.

Makino, J., Ito, T., Ebisuzaki, T.: 1990. Error analysis of the grape-1 special-purpose n-body machine. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **42**, 717–736.

MAKINO, J., TAIJI, M., EBISUZAKI, T., SUGIMOTO, D.: 1997. Grape-4: A massively parallel special-purpose computer for collisional n-body simulations. *Astrophysical Journal*, **480**, 432+.

MASON, B. S., MYERS, S. T., READHEAD, A. C.: 2001. A measurement of $H_0$ from the Sunyaev-Zeldovich-effekt. *(preprint), astro-ph/0101169.*

MATEO, M. L.: 1998. Dwarf galaxies of the local group. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **36**, 435–506.

MAUSKOPF, P. D., ADE, P. A. R., DE BERNARDIS, P., BOCK, J. J., BORRILL, J., BOSCALERI, A., CRILL, B. P., DEGASPERIS, G., DE TROIA, G., FARESE, P., FERREIRA, P. G., GANGA, K., GIACOMETTI, M., HANANY, S., HRISTOV, V. V., IACOANGELI, A., JAFFE, A. H., LANGE, A. E., LEE, A. T., MASI, S., MELCHIORRI, A., MELCHIORRI, F., MIGLIO, L., MONTROY, T., NETTERFIELD, C. B., PASCALE, E., PIACENTINI, F., RICHARDS, P. L., ROMEO, G., RUHL, J. E., SCANNAPIECO, E., SCARAMUZZI, F., STOMPOR, R., VITTORIO, N.: 2000. Measurement of a peak in the cosmic microwave background power spectrum from the north american test flight of Boomerang. *Astrophysical Journal Letters*, **536**, L59–L62.

MCGAUGH, S. S. DE BLOK, W. J. G.: 1998. Testing the dark matter hypothesis with low surface brightness galaxies and other evidence. *Astrophysical Journal*, **499**, 41+.

MELCHIORRI, A., ADE, P. A. R., DE BERNARDIS, P., BOCK, J. J., BORRILL, J., BOSCALERI, A., CRILL, B. P., DE TROIA, G., FARESE, P., FERREIRA, P. G., GANGA, K., DE GASPERIS, G., GIACOMETTI, M., HRISTOV, V. V., JAFFE, A. H., LANGE, A. E., MASI, S., MAUSKOPF, P. D., MIGLIO, L., NETTERFIELD, C. B., PASCALE, E., PIACENTINI, F., ROMEO, G., RUHL, J. E., VITTORIO, N.: 2000. A measurement of $\Omega$; from the north american test flight of Boomerang. *Astrophysical Journal Letters*, **536**, L63–L66.

MERRITT, D.: 1996. Optimal smoothing for n-body codes. *Astronomical Journal*, **111**, 2462+.

MESZAROS, P.: 1974. The behaviour of point masses in an expanding cosmological substratum. *Astronomy and Astrophysics*, **37**, 225–228.

MILGROM, M.: 1989. Alternatives to dark matter. *Comments on Astrophysics*, **13**, 215+.

MILGROM, M.: 1999. The modified dynamics-a status review. In *Dark matter in Astrophysics and Particle Physics*, pages 443+.

MILLER, R. H.: 1978. Numerical experiments on the stability of disklike galaxies. *Astrophysical Journal*, **223**, 811–823.

MOHR, J. J., EVRARD, A. E., FABRICANT, D. G., GELLER, M. J.: 1995. Cosmological constraints from observed cluster x-ray morphologies. *Astrophysical Journal*, **447**, 8+.

MONACO, P.: 1997. On the cosmological mass function. In *Generation of Cosmological Large-Scale Structure.*, pages 231+.

MOORE, B.: 1994. Evidence against dissipationless dark matter from observations of galaxy haloes. *Nature*, **370**, 629+.

MOORE, B., GELATO, S., JENKINS, A., PEARCE, F. R., QUILIS, V.: 2000. Collisional versus collisionless dark matter. *Astrophysical Journal Letters*, **535**, L21–L24.

MOORE, B., GHIGNA, S., GOVERNATO, F., LAKE, G., QUINN, T., STADEL, J., TOZZI, P.: 1999a. Dark matter substructure within galactic halos. *Astrophysical Journal Letters*, **524**, L19–L22.

MOORE, B., GOVERNATO, F., QUINN, T., STADEL, J., LAKE, G.: 1998. Resolving the structure of cold dark matter halos. *Astrophysical Journal Letters*, **499**, L5–+.

MOORE, B., QUINN, T., GOVERNATO, F., STADEL, J., LAKE, G.: 1999b. Cold collapse and the core catastrophe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **310**, 1147–1152.

NAAB, T.: 2000. Structure and dynamics of interacting galaxies. *Dissertation, Heidelberg, 2000.*

NARLIKAR, J. V.: 1993. *Introduction to cosmology.* Cambridge [England] ; New York, USA : Cambridge University Press, 1993. 2nd ed.

NARLIKAR, J. V. PADMANABHAN, T.: 1991. Inflation for astronomers. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, **29**, 325–362.

NAVARRO, J. F., EKE, V. R., FRENK, C. S.: 1996a. The cores of dwarf galaxy haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **283**, L72–L78.

NAVARRO, J. F., FRENK, C. S., WHITE, S. D. M., (NFW95): 1995. Simulations of X-ray clusters. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **275**, 720–740.

NAVARRO, J. F., FRENK, C. S., WHITE, S. D. M., (NFW96): 1996b. The structure of cold dark matter halos. *Astrophysical Journal*, **462**, 563+.

NAVARRO, J. F., FRENK, C. S., WHITE, S. D. M., (NFW97): 1997. A universal density profile from hierarchical clustering. *Astrophysical Journal*, **490**, 493+.

NAVARRO, J. F. STEINMETZ, M.: 1997. The effects of a photoionizing ultraviolet background on the formation of disk galaxies. *Astrophysical Journal*, **478**, 13+.

OKUMURA, S. K., MAKINO, J., EBISUZAKI, T., FUKUSHIGE, T., ITO, T., SUGIMOTO, D., HASHIMOTO, E., TOMIDA, K., MIYAKAWA, N.: 1993. Highly parallelized special-purpose computer, grape-3. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, **45**, 329–338.

PADMANABHAN, T.: 1993. *Structure formation in the universe.* Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1993.

PEACOCK, J. A.: 1999. *Cosmological Physics.* Publisher: Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. ISBN: 0521422701.

Peacock, J. A., Heavens, A. F., Davies, A. T., editors: 1990. *Physics of the early universe.*

PEEBLES, P. J. E.: 1980. *The large-scale structure of the universe.* Research supported by the National Science Foundation. Princeton, N.J., Princeton University Press, 1980. 435 p.

PEEBLES, P. J. E.: 1993. *Principles Of Physical Cosmology.* Publisher: New Jersey, US: Princeton University Press, 1993. ISBN: 0691019339.

PERLMUTTER, S., DEUSTA, S., GABI, S., GOLDHABER, G., GROOM, D., HOOK, I., KIM, A., KIM, M., LEE, J., PAIN, R.: 1995. Four papers by the supernova cosmology project. *Conference Paper, Nato Advanced Study Institute Conference on Thermonuclear Supernovae Physics Div.*, **96**, 29501+.

PERLMUTTER, S., GABI, S., GOLDHABER, G., GOOBAR, A., GROOM, D. E., HOOK, I. M., KIM, A. G., KIM, M. Y., LEE, J. C., PAIN, R., PENNYPACKER, C. R., SMALL, I. A., ELLIS, R. S., MCMAHON, R. G., BOYLE, B. J., BUNCLARK, P. S., CARTER, D., IRWIN, M. J., GLAZEBROOK, K., NEWBERG, H. J. M., FILIPPENKO, A. V., MATHESON, T., DOPITA, M., COUCH, W. J., THE SUPERNOVA COSMOLOGY PROJECT: 1997. Measurements of the cosmological parameters $\Omega$ and $\Lambda$ from the first seven supernovae at $z >=$ 0.35. *Astrophysical Journal*, **483**, 565+.

PERLMUTTER, S., PENNYPACKER, C., GOLDHABER, G., GABI, S., GOOBAR, A., GROSSAN, B., KIM, A., KIM, M., PAIN, R., SMALL, I., MCMAHON, R., BUNCLARK, P., IRWIN, M., POSTMAN, M., OEGERLE, W., LAUER, T., HOESSEL, J.: 1994. Batch discovery of six high-redshift supernovae: Developing a new tool for cosmology. In *American Astronomical Society Meeting*, volume 184, pages 6303+.

PERSIC, M. SALUCCI, P.: 1988. Dark and visible matter in spiral galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **234**, 131–154.

PFALZNER, S. GIBBON, P.: 1997. *Many-Body Tree Methods in Physics.* Many-Body Tree Methods in Physics, ISBN 0521495644, Cambridge University Press, 1997.

PRESS, W.: 1986. Techniques and tricks for N-body computation. In Hut, P. McMillan, S., editors, *The Use of Supercomputers in Stellar Dynamics*, volume 267 of *Lecture Notes in Physics*, pages 184–192. Institute for Advanced Study, Princeton, USA, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

PRESS, W. H. SCHECHTER, P.: 1974. Formation of galaxies and clusters of galaxies by self-similar gravitational condensation. *Astrophysical Journal*, **187**, 425–438.

PRIMACK, J. R.: 2000. Cosmological parameters. *(preprint), astro-ph/0007187.*

PRIMACK, J. R. GROSS, M. A. K.: 1998. Cold + hot dark matter after super-kamiokande. *(preprint), astro-ph/9810204.*

RIX, H. LAKE, G.: 1993. Can the dark matter be $10^6$ solar mass objects? *Astrophysical Journal Letters*, **417**, L1–+.

RIX, H. WHITE, S. D. M.: 1990. Disks in elliptical galaxies. *Astrophysical Journal*, **362**, 52–58.

RIX, H. WHITE, S. D. M.: 1992. Optimal estimates of line-of-sight velocity distributions from absorption line spectra of galaxies - nuclear discs in elliptical galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **254**, 389–403.

SALMON, J. K. WARREN, M. S.: 1990. Skeletons from the treecode closet. *Journal of Computational Physics*, **111**, 136–155.

SALUCCI, P. BORIELLO, A.: 2000. The distribution of dark matter in galaxies; constant-density dark halos envelop the stellar disks:. *(preprint), astro-ph/0011079*.

SALUCCI, P. BURKERT, A.: 2000. Dark matter scaling relations. *Astrophysical Journal Letters*, **537**, L9–L12.

SALVADOR-SOLE, E., SOLANES, J. M., MANRIQUE, A.: 1998. Merger versus accretion and the structure of dark matter halos. *Astrophysical Journal*, **499**, 542+.

SCHNEIDER, P. BARTELMANN, M.: 1995. The power spectrum of density fluctuations in the Zel'dovich approximation. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **273**, 475–483.

SEXL, R. U. URBANTKE, H. K.: 1975. *Gravitation und Kosmologie. Eine Einfuehrung in die allgemeine Relativitaetstheorie.* Mannheim: Bibliographisches Institut.

SMOOT, G. F., BENNETT, C. L., KOGUT, A., WRIGHT, E. L., AYMON, J., BOGGESS, N. W., CHENG, E. S., DE AMICI, G., GULKIS, S., HAUSER, M. G., HINSHAW, G., JACKSON, P. D., JANSSEN, M., KAITA, E., KELSALL, T., KEEGSTRA, P., LINEWEAVER, C., LOEWENSTEIN, K., LUBIN, P., MATHER, J., MEYER, S. S., MOSELEY, S. H., MURDOCK, T., ROKKE, L., SILVERBERG, R. F., TENORIO, L., WEISS, R., WILKINSON, D. T.: 1992. Structure in the COBE differential microwave radiometer first-year maps. *Astrophysical Journal Letters*, **396**, L1–L5.

SOMMER-LARSEN, J. DOLGOV, A.: 2001. Formation of disk galaxies: Warm dark matter and the angular momentum problem. *Astrophysical Journal*, **551**, 608–623.

SOMMER-LARSEN, J., GELATO, S., VEDEL, H.: 1999. Formation of disk galaxies: Feedback and the angular momentum problem. *Astrophysical Journal*, **519**, 501–512.

SPERGEL, D. N. STEINHARDT, P. J.: 2000. Observational evidence for self-interacting cold dark matter. *Physical Review Letters*, **84**, 3760–3763.

SPRINGEL, B.: 1999. *private Mitteilung*.

STAROBINSKY, A. A.: 1979. *JETP*, **30**, 682+.

SUGIMOTO, D., CHIKADA, Y., MAKINO, J., ITO, T., EBISUZAKI, T., UMEMURA, M.: 1990. A special-purpose computer for gravitational many-body problems. *Nature*, **345**, 33+.

SUMMERS, F. J., DAVIS, M., EVRARD, A. E.: 1995. Galaxy tracers and velocity bias. *Astrophysical Journal*, **454**, 1+.

SYER, D. WHITE, S. D. M.: 1998. Dark halo mergers and the formation of a universal profile. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **293**, 337+.

TORMEN, G., BOUCHET, F. R., WHITE, S. D. M.: 1997. The structure and dynamical evolution of dark matter haloes. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **286**, 865–884.

Tremaine, S. Gunn, J. E.: 1979. Dynamical role of light neutral leptons in cosmology. *Physical Review Letters*, **42**, 407–410.

Tyson, J. A., Kochanski, G. P., dell'Antonio, I. P.: 1998. Detailed mass map of cl 0024+1654 from strong lensing. *Astrophysical Journal Letters*, **498**, L107–+.

van Albada, T. S.: 1982. Dissipationless galaxy formation and the $R$ to the 1/4-power law. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **201**, 939–955.

van den Bosch, F. C., Robertson, B. E., Dalcanton, J. J., de Blok, W. J. G.: 2000. Constraints on the structure of dark matter halos from the rotation curves of low surface brightness galaxies. *Astronomical Journal*, **119**, 1579–1591.

van den Bosch, F. C. Swaters, R. A.: 2000. Dwarf galaxy rotation curves and the core problem of dark matter halos. *(preprint), astro-ph/0006048.*

Vilenkin, A. Shellard, E. P. S.: 1994. *Cosmic strings and other topological defects.* Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge: Cambridge University Press, ISBN 0521391539.

Wagoner, R. V., Fowler, W. A., Hoyle, F.: 1967. On the synthesis of elements at very high temperatures. *Astrophysical Journal*, **148**, 3+.

Wandelt, B. D., Davé, R., Farrar, G. R., McGuire, P. C., Spergel, D. N., Steinhardt, P. J.: 2000. Self-interacting cold dark matter. *(preprint), astro-ph/0006344.*

Warren, M. S., Quinn, P. J., Salmon, J. K., Zurek, W. H.: 1992. Dark halos formed via dissipationless collapse. i - shapes and alignment of angular momentum. *Astrophysical Journal*, **399**, 405–425.

Wetzstein, M.: 2000. Wine – a new code for astrophysical simulations. *Diploma Thesis, Heidelberg, 2000.*

White, M.: 2001. The mass of a halo. *Astronomy and Astrophysics*, **367**, 27–32.

White, M., Scott, D., Pierpaoli, E.: 2000. Boomerang returns unexpectedly. *Astrophysical Journal*, **545**, 1–5.

White, S. D. M., Efstathiou, G., Frenk, C. S.: 1993. The amplitude of mass fluctuations in the universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **262**, 1023–1028.

Wright, E. L., Meyer, S. S., Bennett, C. L., Boggess, N. W., Cheng, E. S., Hauser, M. G., Kogut, A., Lineweaver, C., Mather, J. C., Smoot, G. F., Weiss, R., Gulkis, S., Hinshaw, G., Janssen, M., Kelsall, T., Lubin, P. M., Moseley, S. H., Murdock, T. L., Shafer, R. A., Silverberg, R. F., Wilkinson, D. T.: 1992. Interpretation of the cosmic microwave background radiation anisotropy detected by the COBE differential microwave radiometer. *Astrophysical Journal Letters*, **396**, L13–L18.

Yoshida, N., Springel, V., White, S. D. M., Tormen, G.: 2000a. Collisional dark matter and the structure of dark halos. *Astrophysical Journal Letters*, **535**, L103–L106.

YOSHIDA, N., SPRINGEL, V., WHITE, S. D. M., TORMEN, G.: 2000b. Weakly self-interacting dark matter and the structure of dark halos. *Astrophysical Journal Letters*, **544**, L87–L90.

ZEL'DOVICH, I. B.: 1986. Field theory in cosmology for astronomers. *Itogi Nauki i Tekhniki Seriia Astronomiia*, **31**, 3–36.

ZEL'DOVICH, Y. B.: 1970. Gravitational instability: an approximate theory for large density perturbations. *Astronomy and Astrophysics*, **5**, 84–89.

ZEL'DOVICH, Y. B.: 1993. *Selected works of Yakov Borisovich Zel'dovich.* Princeton N.J.: Princeton University Press, 1992 /—c1993, edited by Ostriker, J.P.; Barenblatt, G.I.; Sunyaev, R.A.

ZHAO, H.: 1996. Analytical models for galactic nuclei. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, **278**, 488–496.

ZWICKY, F.: 1933. *Helv. Phys. Acta*, **6**, 110.

# Dank

Mein Dank gilt zu allererst meinem Betreuer Priv.-Doz. Dr. Andreas Burkert. Er hat meine Arbeit hier am MPI ermöglicht und mit schier endloser Geduld begleitet. Vielen Dank vor allem auch für die stete Aufmunterung, die Motivation immer und immer wieder und für ein Arbeitsklima „summa cum gaude"…

Herrn Prof. Dr. Immo Appenzeller danke ich herzlich für die Erstellung des Zweitgutachtens.

Als Büro-Mitinsasse hatte Fabian Heitsch meine Launen am unmittelbarsten zu ertragen. Sehr angenehm war mir stets das gemeinsame Interesse am „schwarzen" Humor, hilfreich seine fundierte Kenntnis der Computerei und der Altphilologie. Ich denke aber, ich habe mich redlich revanchiert, indem ich aufgehört habe, nach Rauch zu riechen!

Dank schulde ich besonders einem weiteren Streiter der Sternkunde, Dr. Thorsten Naab. Seine Einweisung in den *Treecode* und die generelle Starthilfe waren mir ebenso unerläßlich wie die vielen fachlichen und die komplett unsachlichen Gespräche. Auch für die Herberge während meiner ersten 1-2 Wochen in der Fremde sei ihm nochmals gedankt! Ich hoffe, er hat die vergammelte Wollwurst im Küchenpapierkorb nie mit mir in Verbindung gebracht.

Für zahlreiche geschätzte Diskussionen über den Weltraum danke ich Stefanie Phleps und Sadegh Khochfar, letzterem danke ich insbesondere für seinen wissenschaftlichen Input in meine Arbeit in Form der Press-Schechter-Analysen.

Die kulturellen Angebote am Institut waren wie für mich geschaffen. Ich danke allen, die Mittwoch für Mittwoch mit mir die Freude daran teilen, auf einer Wiese einem kleinem Ball hinterherzulaufen. Es ist mir ein Rätsel, wie das bis heute ohne ernsthafte Blessuren abging.

Die Spaz**b**iergänge waren von solch kultureller Einschlagskraft, dass sie gar Anlass für eine Wortneuschöpfung boten. Danke an die Genießer Steffi, Bernd, Markus F., Markus W., Michael, Olaf, Sebastian und Thorsten.

In ähnlicher Besetzung pflegte man mit wachsender Regelmäßigkeit das Poker-Spiel, wo ich trotz meiner bescheidener Spielkunst ein immer gern gesehener Gast war… (?!)

Vielen Dank an Andreas Badior, den ich von einer Mitschuld an meinem Bücherverschleiß nicht freisprechen kann.

Vielen Dank an Andreas Beste, den ich von einer Mitschuld an meinem Nahrungsmittelverschleiß nicht freisprechen kann.

Vielen Dank an den FC Bayern München für gemeinsam durchlebte Stunden voller Glück, Wut, Trauer, Ärger und einer Apokalypse.

Zuletzt, aber doch vor allem — ich bitte die Anwesenden, sich zu erheben —:

Vielen Dank, Steffi, für alles!


Abbildung A.2: Soweit diese Herren feststellen konnten, hat eine Mass Bier noch keinen Einfluss auf die Dichte.