Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Klaus Merz

aus Karlsruhe

Tag der mündlichen Prüfung: 20.12.2001

Theta-Reihen zum Gaußschen Zahlkörper
und
Borcherds-Lifts

Gutachter: Prof. Dr. Eberhard Freitag
Prof. Dr. Winfried Kohnen

Inhaltsverzeichnis

Einleitung **3**

1 Orthogonale Halbräume und Gitter **10**
1.1 Quadratische Räume und orthogonale Halbebenen 10
1.2 Gitter 14
1.3 Spezielle Gitter und Gruppen 16
1.4 Hermitesch-Symplektische Matrizen und orthogonale Transformationen . 24
1.5 Hermitesch-Symplektische Halbebene 36

2 Modulformen **42**
2.1 Orthogonale Modulformen 42
2.2 Vektorwertige elliptische Modulformen 45
2.3 Borcherds Lifts 48
2.4 Hermitesch-Symplektische Modulformen 57

3 Spezielle Lifts und Theta-Reihen **62**
3.1 Additive Lifts 62
3.2 Multiplikative Lifts 68
3.3 Theta-Reihen 73

4 Das Theta-Ideal **81**
4.1 Geometrie 83
4.2 Ringe 84
4.3 Quadrate 88

A Computerberechnungen **98**
A.1 Zum Abschnitt 3.1 Additive Lifts 98
A.2 Zum Abschnitt 3.2 Multiplikative Lifts 107
A.3 Zum Abschnitt 3.3 Theta-Reihen 112
A.4 Zum Abschnitt 4.3 Quadrate 112

Literaturverzeichnis **117**

Einleitung

In dieser Arbeit werden spezielle orthogonale Modulformen als additive Lifts nach Borcherds [Bo1] im Fall der Signatur $(2,4)$ konstruiert. Dieser Fall entspricht dem hermitesch-symplektischen vom Grad zwei. Hier spielen die von Freitag [Fr1] eingeführten Theta-Reihen

$$\Theta(Z;a,b) := \Theta(Z;(a,b)) := \sum_{g\in\mathbb{Z}[i]^2} e^{\pi i(Z\{g+\frac{1+i}{2}a\}+2\,\mathrm{Re}(\frac{1+i}{2}b'g))}$$

für $a,b \in \{0,1\}^2$ eine wichtige Rolle (a,b,g Spalten). Ihre Quadrate sind symmetrische Modulformen vom Gewicht 2 zur Hauptkongruenzgruppe der Stufe $1+i$ zum Determinantencharakter und sie erzeugen die Algebra der symmetrischen Modulformen zu dieser Gruppe. Ziel dieser Arbeit ist es, diese Theta-Reihen auf der orthogonalen Seite als additive Lifts zu konstruieren. Wir erhalten damit neue Aussagen über die Theta-Reihen und neue Beweise für bekannte Tatsachen. Wir geben einige nähere Erläuterungen.

Es sei (V,q) ein reeller quadratischer Raum der Signatur $(2,n), n \geq 2$. Die zugeordnete Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ sei nicht ausgeartet. Wir dehnen die Bilinearform $\mathbb{C}$-bilinear auf $\mathrm{V}(\mathbb{C}) := \mathrm{V}\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ aus und betrachten im projektiven Raum $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$ die Nullquadrik $\mathcal{N}_n$, definiert durch $\langle z,z\rangle = 0$. Durch $\langle z,\overline{z}\rangle > 0$ ist darin eine offene Menge mit zwei Zusammenhangskomponenten gegeben. Wir wählen eine aus und bezeichnen sie mit $\mathcal{H}_n$. Dies ist eine Realisierung des symmetrischen Raums $\mathrm{O}(\mathrm{V})/K$, wobei K eine maximal kompakte Untergruppe der Gruppe $\mathrm{O}(\mathrm{V}) := \{\gamma\in\mathrm{GL}(\mathrm{V});\ \mathrm{q}(\gamma(x))=\mathrm{q}(x)\ \forall x\in\mathrm{V}\}$ ist. Wir bezeichnen mit $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ die Untergruppe vom Index 2 von $\mathrm{O}(\mathrm{V})$, die $\mathcal{H}_n$ in sich überführt.

Weiter sei ein gerades Gitter M in V gegeben und Γ eine zur ganzzahligen Gruppe $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) := \mathrm{O}^+(\mathrm{V})\cap\mathrm{O}(\mathsf{M})$ kommensurable Untergruppe von $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$, wobei $\mathrm{O}(\mathsf{M}) := \{\gamma\in\mathrm{O}(\mathrm{V});\ \gamma(\mathsf{M})=\mathsf{M}\}$. Eine (orthogonale) Modulform zur Gruppe Γ vom Gewicht $k\in\mathbb{Z}$ und zum Charakter $v:\Gamma\longrightarrow S^1=\{z\in\mathbb{C};|z|=1\}$ ist eine holomorphe Funktion auf dem affinen Kegel $\widetilde{\mathcal{H}}_n$ über $\mathcal{H}_n$, die bis auf den Charakter invariant unter Γ und homogen vom Grad $-k$ ist:

$$\begin{aligned} f(tz) &= t^{-k}f(z) && \forall t\in\mathbb{C}^*,\ \forall z\in\widetilde{\mathcal{H}}_n \\ f(\gamma z) &= v(\gamma)f(z) && \forall\gamma\in\Gamma,\ \forall z\in\widetilde{\mathcal{H}}_n \end{aligned}$$

Borcherds gibt in [Bo1] eine Konstruktionsmethode für Modulformen zu Gruppen vom Typ $\Gamma = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M})\longrightarrow\mathrm{Aut}\left(\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right)\right)$ für gerade Gitter M an, den additiven Lift (M' ist das zu M duale Gitter, und Γ ist der sogenannte Diskriminantenkern des Gitters M). Dieser Lift, ein Theta-Lift, verallgemeinert Konstruktionen von Shimura, Doi, Naganuma, Maaß, Oda, Gritsenko, Kurokawa und anderen. Input der Borcherdsschen

Theorie sind vektorwertige elliptische Modulformen. Die Werte liegen im Gruppenring $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]$, auf dem $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ durch die Weil-Darstellung operiert und auf dem auch $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ bzw. $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})/\Gamma$ via $(\gamma,(c_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}})\longmapsto(c_{\gamma(\alpha)})_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ operiert. Da diese Darstellungen kommutieren, ist dadurch auch eine $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$-Operation auf den $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]$-wertigen elliptischen Modulformen definiert. Die Lift-Konstruktion ist linear und verträglich mit den Operationen der orthogonalen Gruppe $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$, d. h. es gilt

$$\mathrm{Lift}((f_{\gamma(\alpha)})_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}})=\mathrm{Lift}((f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}})\circ\gamma$$

für elliptische Modulformen $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ und $\gamma\in\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$.

Ist insbesondere $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ ein Input mit $f_{\sigma(\alpha)}=-f_\alpha\ \forall\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}$ für eine Spiegelung $\sigma=\sigma_\lambda\in\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ längs $\lambda\in\mathsf{M}'$, so verschwindet der additive Lift zwangsweise auf der (komplex erweiterten) Spiegelungshyperebene $\lambda^\perp\cap\widetilde{\mathcal{H}}_n$ und damit auch auf $\mu^\perp\cap\widetilde{\mathcal{H}}_n$ für $\mu=\gamma(\lambda),\gamma\in\Gamma$. Wegen der Homogenitätseigenschaft von Modulformen ist es sinnvoll, von Nullstellen im Projektiven, d. h. in $\mathcal{H}_n$, zu sprechen. Der Träger des Nullstellendivisors dieses speziellen Lifts ist also mindestens $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\gamma(\lambda)^\perp\cap\mathcal{H}_n$.

Borcherds gibt eine weitere Konstruktion an, den multiplikativen Lift, die genaue Aussagen über den Divisor des Lifts macht. Damit kann unter Umständen der genaue Nullstellendivisor eines additiven Lifts (oder allgemeiner einer orthogonalen Modulform) bestimmt werden: Gibt es einen multiplikativen Lift (Borcherdsprodukt) gleichen Gewichts, dessen Divisor höchstens der Divisor des additiven Lifts ist, so ist der Quotient aus additivem und multiplikativem Lift eine holomorphe Modulform vom Gewicht 0, also konstant. Damit ist insbesondere der Divisor des additiven Lifts genau der (bekannte) Divisor des Borcherdsprodukts.

Wir werden in dieser Arbeit im Fall $n=4$ die „orthogonalen Theta-Reihen“ als additive Lifts von konstanten Inputs[1] zu einem geeigneten Gitter M konstruieren und ihren genauen Nullstellendivisor mit Hilfe von Borcherdsprodukten bestimmen. Inputs sind also Elemente von $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]$, die unter der Weil-Darstellung fix sind. Es gibt modulo M zehn verschiedene Spiegelungsvektoren $\lambda_i\in\mathsf{M}',\mathrm{q}(\lambda_i)=-\frac{1}{2}$, mit $\sigma_{\lambda_i}\in\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$, und der 20-dimensionale Inputraum zerfällt in zehn zweidimensionale Räume, die jeweils unter neun der zehn Spiegelungen fix sind und unter der zehnten Spiegelung (elementweise) in ihr Negatives überführt werden. Der additive Lift der zehn Räume ist jeweils eindimensional (der Lift also insbesondere nicht injektiv), und jeder Lift zu einem Input in einem der Räume verschwindet auf $H(\lambda_i+\mathsf{M},-\frac{1}{2})$ für ein i, wobei für $\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}$ und $0>m\in\{\mathrm{q}(\lambda);\,\lambda\in\alpha\}$ der Divisor $H(\alpha,m)$ definiert ist als die Summe jeder irreduziblen Komponente der Menge $\bigcup_{\lambda\in\alpha,\mathrm{q}(\lambda)=m}\mathcal{H}_{n-1}(\lambda)$ mit Vielfachheit 1. Wir wählen je einen nichtverschwindenden Lift aus, dies sind unsere zehn „orthogonalen Theta-Reihen“ θ_i. Das Produkt der zehn Theta-Reihen hat also mindestens den Divisor $\sum_i H(\lambda_i+\mathsf{M},-\frac{1}{2})$. Wir konstruieren ein Borcherdsprodukt gleichen Gewichts (nämlich 10) mit genau diesem Divisor und erhalten damit, daß (bei geeigneter Numerierung) die i-te Theta-Reihe genau den Divisor $H(\lambda_i+\mathsf{M},-\frac{1}{2})$ hat.

Wir können damit zeigen, daß die Quadrate der zehn Theta-Reihen Modulformen zu $\Gamma_\mathsf{N}:=\mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M})\longrightarrow\mathrm{Aut}\left(\mathsf{M}'/\mathsf{N}\right)\right)$ für ein Zwischengitter $\mathsf{M}\subseteq\mathsf{N}\subseteq\mathsf{M}'$ sind und die Abbildung

$$\theta:\mathcal{H}_4\longrightarrow\mathbb{P}^9;\quad[z]\longmapsto[\theta_0^2:\cdots:\theta_9^2]$$

[1] Lifts von konstanten Inputs sind singulär.

(wohldefiniert ist und) eine einblättrige Überlagerung $X_{\Gamma_N} = \overline{\mathcal{H}_4/\Gamma_N} \longrightarrow \overline{\mathrm{Bild}(\mathcal{H}_4)}$ induziert. Setzen wir die Existenz einer linearen Relation der Quadrate der Theta-Reihen voraus (dies ist, wie alle Ergebnisse über die Quadrate, auf der hermitesch-symplektischen Seite bekannt, vgl. [Her], [Mat]), so können wir zeigen, daß es vier weitere unabhängige lineare Relationen gibt und damit $\overline{\mathrm{Bild}(\mathcal{H}_4)}$ ein $\mathbb{P}^4 \subseteq \mathbb{P}^9$ ist. Insbesondere ist $\overline{\mathrm{Bild}(\mathcal{H}_4)}$ normal und daher die Abbildung $X_{\Gamma_N} \longrightarrow \overline{\mathrm{Bild}(\mathcal{H}_4)} \cong \mathbb{P}^4$ eine biholomorphe Äquivalenz der Satake-Kompaktifizierung. Damit ist die Algebra der Modulformen (geraden Gewichts) zu Γ_N erzeugt von den Quadraten der Theta-Reihen.

Die Abbildung

$$\vartheta : \mathcal{H}_4 \longrightarrow \mathbb{P}^9; \quad [z] \longmapsto [\theta_0 : \cdots : \theta_9]$$

induziert eine Abbildung der Satake-Kompaktifizierung $X_\Gamma = \overline{\mathcal{H}_4/\Gamma} \xrightarrow{\vartheta} \mathbb{P}^9$. Weiter zeigen wir: Diese Abbildung ist Normalisierung des Bildes und dieses ist 2^9-fache Überlagerung von $\mathbb{P}^4 \subseteq \mathbb{P}^9$, die genau auf den Koordinatenhyperflächen verzweigt. Wir können folgern, daß jede Modulform zur Gruppe Γ eine rationale Funktion in den θ_i ist und daß es außer den quadratischen Relationen (und den davon erzeugten) keine weiteren Relationen zwischen den Theta-Reihen gibt.

Die orthogonale Theorie und die Beschreibung der betrachteten Gitter, der diskreten orthogonalen Gruppen und der Lifts für diese Daten bilden einen in sich geschlossenen Teil dieser Arbeit, den man erhält indem man die Abschnitte 1.4, 1.5, 2.4 und 3.3 wegläßt. In diesen Abschnitten werden für den Fall $n = 4$ die Beziehungen zum hermitesch-symplektischen Fall vom Grad zwei hergestellt. Durch diese Übersetzungen, die ausführlich beschrieben sind, wird die Wahl der Gitter und Gruppen der orthogonalen Theorie motiviert. Diese sind gerade so gewählt, daß die additiven Lifts unter diesen Übersetzungen in die Theta-Reihen und die diskreten orthogonalen Gruppen Γ und Γ_N in die Kongruenzgruppen der Theta-Reihen bzw. ihrer Quadrate übergehen. Wir beschreiben kurz diese Übersetzungen.

Wir wählen eine Basis $e_1, \ldots, e_6$ von V derart, daß $\langle e_1,e_2\rangle = \langle e_3,e_4\rangle = 1$, $\langle e_5,e_5\rangle = \langle e_6,e_6\rangle = -2$ und $\langle e_i,e_j\rangle = 0$ sonst gilt, d. h. $\mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$ und $\mathbb{R}e_3 + \mathbb{R}e_4$ bilden zueinander orthogonale hyperbolische Ebenen mit orthogonalem (negativ definitem) Komplement $\mathbb{R}e_5 + \mathbb{R}e_6$. Vektoren aus V sind damit 6-Tupel. Schreiben wir diese geeignet als 4×4-Matrizen

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_0 & -x_3 & 0 & -x_1 \\ x_4 & -\overline{x_0} & x_1 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_0 & x_4 \\ x_2 & 0 & -x_3 & -\overline{x_0} \end{pmatrix},$$

wobei $x_0 := x_5 - ix_6$, so geht die quadratische Form in eine Wurzel der Determinante über, und hermitesch-symplektische Matrizen $M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ der Determinante eins operieren auf der Menge dieser Matrizen via

$$(M, \mathcal{X}) \longmapsto M(\mathcal{X}) := M\mathcal{X}\overline{M}^{-1}$$

als orthogonale Transformationen. Wir erhalten also eine Abbildung (Homomorphismus) $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{O(V)}$. Diese hat Kern $\{\pm E_4\}$ und Bild $\mathrm{SO}^+(\mathrm{V}) = \{\gamma \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V});\ \det(\gamma) = 1\}$.

Wir können Urbilder $\widetilde{G}$ von orthogonalen Gruppen $G \subseteq \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ unter dieser Abbildung betrachten. Wählen wir etwa Gitter

$$\mathsf{L} = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{Z} e_i, \ \mathsf{M} = 2\mathsf{L}' \text{ und } \mathsf{N} = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{Z} e_i + \mathbb{Z}\tfrac{1}{2}(e_5 + e_6) + \mathbb{Z}\tfrac{1}{2}(e_5 - e_6)$$

und betrachten die Gruppen $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{L}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{N})$[2] sowie

$$\Gamma_{\mathsf{G}} := \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{M}'}/_{\mathsf{G}}\right)\right)$$

für $\mathsf{G} = \mathsf{L}, \mathsf{M}, \mathsf{N}$, so ist mit dem Diskriminantenkern $\Gamma := \Gamma_{\mathsf{M}}$ von M

- $\widetilde{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})} = \langle \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1, H_1 \rangle = \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 \cup H_1 \,\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1$
- $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1 \rangle = \mathrm{S}\Gamma(1+i) \cup H_1 \,\mathrm{S}\Gamma(1+i)$
- $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}} = \langle \Gamma(2), iE_4 \rangle = \Gamma(2) \cup i\Gamma(2)$
- $\widetilde{\Gamma} = \big\{ M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1; A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right), B, C, D \text{ entsprechend,}$
  $\text{mit } M \equiv E_4 \text{ oder } iE_4 \bmod 2$
  $\text{und } A \equiv D', a_1 \equiv \overline{a_4}, B \equiv b_2 J \text{ und } C \equiv c_2 J \bmod 4\},$

wobei $\Gamma(l)$ die Hauptkongruenzgruppe der Stufe $l \in \mathbb{Z}[i]$ und $\mathrm{S}\Gamma(l)$ die Untergruppe der Matrizen mit Determinante eins bezeichnet. Weiter ist $H_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} i & & 0 & \\ & 1 & & \\ & & i & \\ 0 & & & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Die Bilder sind die jeweiligen speziellen Gruppen in $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$. Es gilt $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})/\Gamma_{\mathsf{N}} \cong S_6$ und $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{10}$ und genauso für die Urbilder $\widetilde{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})}$, $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ und $\widetilde{\Gamma}$.

Wir haben auch eine Übersetzung (d. h. biholomorphe Abbildung) zwischen dem orthogonalen und hermitesch-symplektischen Halbraum:

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} \longmapsto [-\det Z, 1, z_0, z_2, \tfrac{1}{2}(z_1 + z_3), \tfrac{i}{2}(z_1 - z_3)]$$

mit Umkehrung

$$[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6] \longmapsto \frac{1}{z_2} \begin{pmatrix} z_3 & z_5 - iz_6 \\ z_5 + iz_6 & z_4 \end{pmatrix}$$

(beachte, daß bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_6$ für $[z] \in \mathcal{H}_n$ die ersten vier Koordinaten, insbesondere die zweite, ungleich Null sind). Diese Übersetzung ist verträglich mit der Übersetzung der Gruppen, d. h.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})_1 \times \boldsymbol{H} & \longrightarrow & \boldsymbol{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

[2] Wegen $\mathsf{M} = 2\mathsf{L}'$ ist $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{L})$ trivial. Dagegen gilt $\mathrm{O}^+(\mathsf{L}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{N})$, obwohl man L nicht durch Reskalieren und Dualisieren in ein zu N isomorphes Gitter überführen kann. Zum Beweis von $\mathrm{O}^+(\mathsf{L}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{N})$ siehe Proposition 1.16, Seite 19.

kommutiert (mit den angegebenen Abbildungen). Dabei ist $\mathcal{H} = \mathcal{H}_4$ und $\boldsymbol{H}$ der hermitesch-symplektische Halbraum vom Grad 2 (d. h. die Menge der komplexen 2×2-Matrizen mit positiv definitem hermiteschem Imaginärteil).

Die Übersetzung der Halbräume liefert auch eine Übersetzung der Funktionen auf diesen Halbräumen. Starten wir insbesondere mit einer hermitesch-symplektischen Modulform f vom Gewicht k zu einer Gruppe in $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$, verketten diese mit der Übersetzungsabbildung der Halbräume und dehnen sie homogen vom Grad $-k$ auf den affinen Kegel aus,

$$f \longmapsto F \quad \text{mit} \quad F(z_1,\ldots,z_6) := z_2^{-k} f\Big(\frac{1}{z_2}\begin{pmatrix} z_3 & z_5 - iz_6 \\ z_5 + iz_6 & z_4 \end{pmatrix}\Big),$$

so erhalten wir eine orthogonale Modulform F vom Gewicht k zur übersetzten Gruppe. Dies gilt auch umgekehrt.

Auf dem hermitesch-symplektischen Halbraum haben wir auch die Transpositionsoperation $\tau : \boldsymbol{H} \longrightarrow \boldsymbol{H};\ Z \longmapsto Z'$. Dieser entspricht auf der orthogonalen Seite die Transformation $\sigma_{e_6} = \left(\begin{smallmatrix} E_5 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$. Damit ist die Abbildung $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rtimes \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ surjektiv, das erweiterte Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rtimes \langle\tau\rangle \times \boldsymbol{H} & \longrightarrow & \boldsymbol{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

kommutiert ebenfalls, und symmetrische (d. h. unter τ invariante) hermitesch-symplektische Modulformen gehen über in orthogonale Modulformen zur um σ_{e_6} erweiterten übersetzten Gruppe. Dieser Übersetzungsmechanismus wird in den Abschnitten 1.4, 1.5 und 2.4 entwickelt.

Übersetzt man damit die Theta-Reihen ins Orthogonale[3], so erhält man die als additive Lifts konstruierten orthogonalen Theta-Reihen (bzw. skalare Vielfache davon). Dazu zeigen wir, daß die Übersetzungen der bekannten (siehe [Fr1]) Nullstellendivisoren der Theta-Reihen gerade die $H(\lambda_i + \mathsf{M}, -\frac{1}{2})$ sind. Wir erhalten damit zwei Darstellungen der orthogonalen Theta-Reihen: als additiver Lift und als Übersetzung der hermitesch-symplektischen Theta-Reihen. Durch Vergleich der Fourierentwicklung des additiven Lifts (diese liefert die Borcherdssche Theorie) mit der Übersetzung der Reihenentwicklung auf der hermitesch-symplektischen Seite erhalten wir zahlentheoretische Beziehungen, beispielsweise das Zerlegungsgesetz in $\mathbb{Z}[i]$ bzw. die Darstellungszahl von natürlichen Zahlen als Summe von zwei Quadraten. Dies ist in Abschnitt 3.3 ausgeführt.

Die Theta-Reihen stehen in engem Zusammenhang mit dem klassischen Problem der Klassifizierung von sechs Punkten (bzw. Geraden) in allgemeiner Lage in der Projektiven Ebene $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ bis auf (projektiv) lineare Transformationen. Obwohl dieser Aspekt in dieser Arbeit keine Rolle spielt, stellen wir diesen Zusammenhang kurz vor. Diese Theorie ist in [Yos] ausgeführt, wo auch weitere Originalliteratur (z. B. [Mat]) angegeben ist.

[3] Tatsächlich operieren H_1 und $\frac{1+i}{2}H_1$ auf $\boldsymbol{H}$ gleich, s. d. Modulformen zu $\Gamma(1+i)$ und zum Determinantencharakter auch Modulformen zu $\widetilde{\Gamma}_{\mathsf{N}}$ zum trivialen Charakter sind (und umgekehrt). Damit passen auch die Quadrate der Theta-Reihen in den Übersetzungsmechanismus.

Es sei also $X = X(3,6)$ der Konfigurationsraum der geordneten 6-Tupel von Punkten in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ in allgemeiner Lage. Dabei werden zwei 6-Tupel als äquivalent angesehen, wenn es eine lineare Transformation gibt, die das eine Tupel in das andere überführt. Wir können X realisieren als

$$X \cong \mathrm{GL}(\mathbb{C}^3)\backslash M^*(3,6)/(\mathbb{C}^*)^6$$

wobei $M^*(3,6)$ aus den (komplexen) 3×6-Matrizen besteht, deren sämtliche 3×3-Minoren nicht verschwinden. Die Spalten können wir als homogene Koordinaten von sechs Punkten (bzw. als Koeffizienten von sechs Geradengleichungen) ansehen. Diese Koordinaten können mit Skalaren ungleich Null multipliziert werden, ohne die Punkte bzw. Geraden zu ändern (dies entspricht der $(\mathbb{C}^*)^6$-Operation).

Es gibt eine Abbildung $X \longrightarrow \mathbb{P}^9_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}^9$, sodaß das Bild in einem $\mathbb{P}^4 \subseteq \mathbb{P}^9$ dicht ist: Ordne einem Repräsentanten $M \in M^*(3,6)$ den Punkt $[\cdots : D_{ijk}(M)D_{lmn}(M) : \cdots]$ zu, wobei $D_{ijk}(M)$ die 3×3-Minore von M, gebildet aus den Spalten i,j und k, ist. (Für jede Zerlegung $\{i,j,k\} \cup \{l,m,n\} = \{1,\ldots,6\}$ gibt es eine homogene Koordinate, beachte $10 = \binom{6}{3}/2$.) Das Bild liegt in dem durch die Plücker-Relationen definierten linearen Teilraum $\mathbb{P}^4 \cong Y \subseteq \mathbb{P}^9$. Diese Abbildung ist eine (wohldefinierte) zweiblättrige Überlagerung und es gibt eine Involution $*$ auf X, sodaß dadurch eine (wohldefinierte) Einbettung $Pl : X/* \longrightarrow \mathbb{P}^9$ induziert wird. Durch Konfigurationen in nicht-allgemeiner Lage kann X zu $\overline{X}$ kompaktifiziert werden, sodaß sich die Involution und die Abbildung Pl auf $\overline{X}$ fortsetzen und das Bild der volle $\mathbb{P}^4 \cong Y$ ist: $\overline{X}/*$ ist isomorph zu Y via Pl.

Für $x = (x_{ij}) \in M^*(3,6)$ betrachte die sechs linearen Formen

$$L_j(t) = x_{1j}t_1 + x_{2j}t_2 + x_{3j}t_3$$

auf $\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (mit homogenen Koordinaten $[t_1 : t_2 : t_3]$). Das hypergeometrische (formale) Integral

$$\int \prod_{j=1}^{6} L_j(t)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}t = t_1\,\mathrm{d}t_2 \wedge \mathrm{d}t_3 + t_3\,\mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 + t_2\,\mathrm{d}t_3 \wedge \mathrm{d}t_1$$

erfüllt ein Differentialgleichungssystem, das sogenannte hypergeometrische System vom Typ $(3,6)$ (in den Variablen x_{ij}). Der Lösungsraum ist sechsdimensional. Durch geeignete Wahl der Integrationsbereiche erhält man Basislösungen und damit eine Abbildung $M^*(3,6) \longrightarrow \mathbb{P}^5$, die eine Abbildung $Per : X/* \longrightarrow \mathbb{P}^5$ induziert. Die Abbildung hängt stetig von den sechs Punkten ab, ist aber mehrwertig: Es gibt geschlossene Pfade in X, entlang derer sich bei einem vollen Umlauf die Werte der Integrale ändern (dies liegt an der Mehrdeutigkeit der Wurzel). Die Abbildung wird eindeutig, wenn wir Punkte, die sich um Perioden (d. h. um Integrale über geschlossene Pfade) unterscheiden, identifizieren: Wir bilden in den Quotientenraum von $\mathbb{P}^5$ nach der (um die $*$ entsprechende Transformation erweiterte) Monodromiegruppe G ab: $Per : X/* \longrightarrow \mathbb{P}^5/G$. Das Bild dieser Periodenabbildung ist enthalten in $\mathcal{K}_4$ bzw. $\mathcal{K}_4/G$, wie die Riemannschen Periodenrelationen und -ungleichungen zeigen (bezüglich der durch die Relationen gegebenen quadratischen Form). Tatsächlich liegt das Bild in der orthogonalen Halbebene $\mathcal{H} := \mathcal{H}_4$. Diese Abbildung setzt sich auf die Kompaktifizierungen fort.

Es gibt auch einen Zusammenhang zwischen dem Raum X der 6-Punkte-Konfigurationen und K3-Flächen: Zu sechs Punkten in allgemeiner Lage betrachte die sechs Nullstellengeraden der L_j und die zweiblättrige Überlagerung des $\mathbb{P}^2$, die genau längs dieser Geraden verzweigt. Sei $S(L)$ die K3-Fläche, die man erhält, indem man die $\binom{6}{2} = 15$ singuläre Punkte durch 15 rationale Kurven ersetzt. Die Periodenabbildung läßt sich auch auf den K3-Flächen deuten als Integrale über sechs Zykel der holomorphen Zweiform

$$\eta(L) := \prod_{j=1}^{6} (x_{1j}t_1 + x_{2j}t_2 + x_{3j}t_3)^{-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t$$

mit

$$\mathrm{d}t = t_1\, \mathrm{d}t_2 \wedge \mathrm{d}t_3 + t_3\, \mathrm{d}t_1 \wedge \mathrm{d}t_2 + t_2\, \mathrm{d}t_3 \wedge \mathrm{d}t_1.$$

Diese Integrale erfüllen die Riemannschen Periodenrelationen.

Weiter sind $\mathcal{H}_4$ und $\boldsymbol{H}_2$ isomorph und die Operation der Monodromiegruppe G entspricht der Operation der Kongruenzgrupe $\Gamma(1+i) \rtimes \langle\tau\rangle \subseteq \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i]) \rtimes \langle\tau\rangle$. Schließlich haben wir mittels der zehn Quadrate der Theta-Reihen eine mit der übersetzten Monodromiegruppe verträgliche Abbildung $\Theta : \overline{\boldsymbol{H}_2} \longrightarrow \mathbb{P}^9$. Die Relationen dieser Quadrate entsprechen den Plücker-Relationen, d. h.

$$\begin{array}{ccccc} \overline{X}/_* & \xrightarrow{Per} & \overline{\mathcal{H}_4}/_G = X_G & \xrightarrow{\sim} & \overline{\boldsymbol{H}_2}/\Gamma(1+i) \rtimes \langle\tau\rangle \\ & \searrow^{Pl} & & \swarrow_{\Theta} & \\ & & \mathbb{P}^4 \cong Y \subseteq \mathbb{P}^9 & & \end{array}$$

kommutiert. Dabei sind Pl und Θ Isomorphismen auf den durch die Plücker-Relationen definierten $\mathbb{P}^4 \subseteq \mathbb{P}^9$.

Die in dieser Arbeit konstruierten Lifts (genauer deren Quadrate) geben also eine „Abkürzung“ dieses Diagramms. Da die Darstellung in dieser Arbeit sich an den Lifts bzw. Theta-Reihen und nicht an deren Quadrate orientiert, wie dies bei z.B. Yoshida und Matsumoto der Fall ist, ist dazu zunächst noch eine geeignete lineare Transformation $\mathbb{R}^6 \longrightarrow \mathbb{R}^6$ anzuwenden, die die quadratischen Formen ineinander überführt. Man erhält eine biholomorphe Transformation der orthogonalen Halbräume und entsprechende Transformationen der orthogonalen Gruppen (Konjugationen in $\mathrm{GL}(\mathbb{R}^6)$). Tatsächlich geht die Gruppe der ganzzahligen orthogonalen Transformationen in $\mathrm{O}(\mathsf{M})$ und die Monodromiegruppe G in Γ_{N} über.

Sehr herzlich danke ich Herrn Prof. Dr. E. Freitag für die Anregung dieser Arbeit und seine freundliche Betreuung bei ihrer Erstellung.

Mein Dank gilt auch der DFG, ohne deren finanzielle Unterstützung im Rahmen der „Forschergruppe Arithmetik (Heidelberg/Mannheim)“ diese Arbeit nicht möglich gewesen wäre.

Kapitel 1

Orthogonale Halbräume und Gitter

Wir geben zunächst die orthogonale Theorie wieder. Dabei orientieren wir uns an Freitag [Fr4]. Anschließend führen wir die in dieser Arbeit betrachteten Gitter und Kongruenzgruppen ein und beschreiben eine Einbettung der hermitesch-symplektischen Theorie in die orthogonale für diese Gitter.

1.1 Quadratische Räume und orthogonale Halbebenen

Quadratische Räume

Sei V ein reeller endlich-dimensionaler Vektorraum und $\mathrm{q}: \mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine nichtausgeartete quadratische Form auf V. Durch Polarisation definiert q eine Bilinearform auf V:

$$\langle x,y\rangle := \mathrm{q}(x+y) - \mathrm{q}(x) - \mathrm{q}(y) \quad \forall x, y \in \mathrm{V}$$

mit $\langle x,x\rangle = 2\,\mathrm{q}(x)\ \forall x \in \mathrm{V}$. Der Raum (V, q) ist durch die Dimension und die Signatur bis auf Isomorphie quadratischer Räume eindeutig bestimmt. Wir sagen, der Vektor $x \in \mathrm{V}$ hat die Norm $r \in \mathbb{R}$, wenn $\mathrm{q}(x) = r$ gilt. Ein Vektor $x \in \mathrm{V}$ heißt positiv bzw. negativ, wenn er (echt) positive bzw. negative Norm hat. Er heißt isotrop, falls $\mathrm{q}(x) = 0$ gilt.

Mit

$$\mathrm{O}(\mathrm{V}) := \mathrm{O}(\mathrm{V}, \mathrm{q}) := \{g \in \mathrm{GL}(\mathrm{V});\ \mathrm{q}(g(v)) = \mathrm{q}(v)\ \forall v \in \mathrm{V}\}$$

sei die Gruppe der orthogonalen linearen Transformationen bezeichnet. Spezielle orthogonale Transformationen sind Spiegelungen: Sei $a \in \mathrm{V}$ nicht isotrop, d. h. $\mathrm{V} = \mathbb{R}a + a^{\perp}$. Die Spiegelung σ_a längs a ist gegeben durch $a \longmapsto -a$ und $\sigma_a|_{a^{\perp}} = \mathrm{id}_{a^{\perp}}$, in Formeln:

$$\sigma_a : x \longmapsto x - \tfrac{\langle x,a\rangle}{\mathrm{q}(a)} a \quad \forall x \in \mathrm{V}$$

Falls a positiv bzw. negativ ist, heißt σ_a positiv bzw. negativ. Dies ist wohldefiniert, denn a ist durch σ_a bis auf skalare Vielfache und damit $\mathrm{q}(a)$ bis auf Quadrate in $\mathbb{R}$ also $\mathbb{R}_{>0}$ eindeutig bestimmt. Es gilt: $\mathrm{O}(\mathrm{V}, \mathrm{q})$ ist erzeugt von Spiegelungen. Weiter

sei SO(V) die Untergruppe der orthogonalen Transformationen mit Determinante eins: $\mathrm{SO(V)} := \{g \in \mathrm{O(V)}; \det(g) = 1\}$. Spiegelungen haben Determinante -1, liegen also nicht in SO(V). Damit besteht SO(V) aus allen Transformationen, die sich als Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen schreiben lassen.

Orthogonale Halbebenen

Die Signatur von V sei ab jetzt $(2, n), n \geq 2$. Sei $\mathrm{V}(\mathbb{C}) := \mathrm{V} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ und $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$ der projektive Raum über $\mathrm{V}(\mathbb{C})$. Dehne $\langle\ ,\ \rangle$ bilinear auf $\mathrm{V}(\mathbb{C})$ aus. Dann ist

$$\mathcal{N}_n := \mathcal{N} := \{[z] \in \mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C})); \langle z,z\rangle = 0\}$$

eine glatte Quadrik, also insbesondere eine analytische Mannigfaltigkeit, und

$$\mathcal{K}_n := \mathcal{K} := \{[z] \in \mathcal{N}; \langle z,\overline{z}\rangle > 0\}$$

offen in $\mathcal{N}$, also ebenfalls analytische Mannigfaltigkeit. Die Bedingungen $\langle z,z\rangle = 0$ und $\langle z,\overline{z}\rangle > 0$ lassen sich durch den Real- und Imaginärteil x und y von z ausdrücken:

$$\langle z,z\rangle = 0,\ \langle z,\overline{z}\rangle > 0 \iff \langle x,x\rangle = \langle y,y\rangle > 0,\ \langle x,y\rangle = 0$$

Bekanntlich hat $\mathcal{K}$ zwei Zusammenhangskomponenten $\mathcal{K}^+$ und $\mathcal{K}^-$ (siehe auch unten). Eine davon, etwa $\mathcal{K}^+$, sei mit $\mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{H}_n$ bezeichnet, $\mathcal{H}$ heißt orthogonale Halbebene oder Halbraum.

Auf $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$, $\mathcal{N}$ und $\mathcal{K}$ operiert $\mathrm{O(V,q)}$ durch $\mathbb{C}$-lineare Ausdehnung der Operation von V auf $\mathrm{V}(\mathbb{C})$. Dabei operiert genau $\{\pm \mathrm{id_V}\} \subseteq \mathrm{O(V)}$ trivial auf $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$. Auf $\mathcal{K}^+$ operiert nur eine offene Untergruppe $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ vom Index 2 in O(V). (Die Elemente aus $\mathrm{O(V)} - \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ vertauschen die Komponenten $\mathcal{K}^+$ und $\mathcal{K}^-$ von $\mathcal{K}$.) Eine Spiegelung $\sigma_a, a \in \mathrm{V}$ liegt genau dann in $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$, wenn $\mathrm{q}(a) < 0$ gilt, d. h. jede Transfromation von $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ läßt sich als Produkt von Spiegelungen schreiben, wobei eine gerade Anzahl der Spiegelungen positiv ist. Wir setzen $\mathrm{SO}^+(\mathrm{V}) := \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \cap \mathrm{SO(V)}$, d. h. jede Darstellung einer Transformation von $\mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ als Produkt von Spiegelungen besteht aus einer geraden Anzahl sowohl von positiven und als auch negativen Spiegelungen. $\mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ ist die Zusammenhangskomponente der Eins und hat Index 2 in $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ und damit Index 4 in O(V).

Koordinatisierungen und Tubengebietmodell

Der Raum V enthält eine hyperbolische Ebene H_1, d. h. $\mathrm{V} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{V}_1$ mit $\mathrm{V}_1 = \mathrm{H}_1^{\perp}$ und H_1 hat Basis e_1, e_2 mit $\langle e_1,e_2\rangle = 1, \mathrm{q}(e_i) = 0$.

Wir erhalten eine Teilkoordinatisierung von V:

$$\mathrm{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathrm{V}_1; \quad x = x_1e_1 + x_2e_2 + X \longmapsto (x_1, x_2, X)$$

mit $x_i \in \mathbb{R}, X \in \mathrm{V}_1$. Dabei überträgt sich die Bilinearform

$$\langle (x_1, x_2, X),(y_1, y_2, Y)\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + \langle X,Y\rangle$$

bzw. die quadratische Form

$$\mathrm{q}((x_1, x_2, X)) = x_1x_2 + \mathrm{q}(X).$$

Die Koordinatisierung setzt sich fort auf $\mathrm{V}(\mathbb{C})$ und $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$. Wir unterdrücken die Koordinatenabbildung in der Notation und schreiben daher auch $x = (x_1, x_2, X)$ bzw. $[z] = [z_1, z_2, Z]$.

Die Bedingungen an $\mathcal{N}$ und $\mathcal{K}$ lauten damit

$$\langle z,z\rangle = z_1 z_2 + \mathrm{q}(Z)) = 0 \quad \text{und} \quad \langle z,\overline{z}\rangle = z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + \langle Z,\overline{Z}\rangle > 0$$

bzw. in Real- und Imaginärteil $(z_1, z_2, Z) = (x_1, x_2, X) + i(y_1, y_2, Y)$:

$$x_1 y_2 + x_2 y_1 + \langle X,Y\rangle = 0 \quad \text{und} \quad x_1 x_2 + \mathrm{q}(X) = y_1 y_2 + \mathrm{q}(Y) > 0$$

Wir können daran $z_1 \neq 0$ und $z_2 \neq 0$ für $[z] = [z_1, z_2, Z] \in \mathcal{K}$ ablesen: Wäre nämlich z_1 oder $z_2 = 0$, so hätte man die einfacheren Bedingungen $\mathrm{q}(X) = \mathrm{q}(Y) > 0$ und $\langle X,Y\rangle = 0$. Damit wäre aber $\mathbb{R}X + \mathbb{R}Y$ ein zweidimensionaler positiv definiter Unterraum von V_1, V_1 hat aber Signatur $(1, n-1)$. Also ist tatsächlich z_1 und $z_2 \neq 0$, und in $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$ kann o. E. $z_2 = 1$ und $z_1 = -\mathrm{q}(Z)$ angenommen werden. Wir erhalten daher eine wohldefinierte Einbettung

$$\mathcal{K} \hookrightarrow \mathrm{V}_1(\mathbb{C}) = \mathrm{V}_1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}; \quad [z] = [-\mathrm{q}(Z), 1, Z] \longmapsto Z.$$

Das Bild ist $\mathcal{K}' := \mathrm{V}_1 + i\mathcal{C}$ mit $\mathcal{C} := \{Y \in \mathrm{V}_1; \mathrm{q}(Y) > 0\}$, d. h. $\mathcal{K}' = \{Z = X + iY; \mathrm{q}(Y) > 0\}$: In obigen Bedingungen ist $x_2 = 1$ und $y_2 = 0$ zu setzen. Diese lauten damit

$$y_1 + \langle X,Y\rangle = 0 \quad \text{und} \quad x_1 + \mathrm{q}(X) = \mathrm{q}(Y) > 0.$$

Im Bild muß also $\mathrm{q}(Y) > 0$ gelten. Umgekehrt ist für alle $X, Y \in \mathrm{V}_1$ mit $\mathrm{q}(Y) > 0$ durch $x_1 := -\mathrm{q}(X) + \mathrm{q}(Y)$ und $y_1 := -\langle X,Y\rangle$ ein Urbild $[x_1 + iy_1, 1, Z] \in \mathcal{K}$ von $Z = X + iY \in \mathcal{K}' = \mathrm{V}_1 + i\mathcal{C}$ gegeben.

Wir haben also $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}' = \mathrm{V}_1 + i\mathcal{C}$. Die Abbildung ist biholomorph, $\mathcal{K}'$ ist das Tubengebietmodell von $\mathcal{K}$. Das Bild $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$ unter $\mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K}'$ ist das Tubengebietmodell von $\mathcal{H}$. Es gilt $\mathcal{H}' = \mathrm{V}_1 + i\mathcal{P}$, wobei $\mathcal{P} := \{\mathrm{Im}(Z); Z \in \mathcal{H}'\} \subseteq \mathcal{C}$ eine der beiden Komponenten von $\mathcal{C}$, der sogenannte Positive Kegel, ist.

Auf $\mathcal{K}'$ operiert $\mathrm{O}(\mathrm{V})$, indem die Operation auf $\mathcal{K}$ mit dieser Abbildung übertragen wird. Dabei operiert $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ auf $\mathcal{H}'$.

Es sei $\widetilde{\mathcal{K}}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{H}}$ der affine Kegel über $\mathcal{K}$ bzw. $\mathcal{H}$, d. h. das jeweilige Urbild unter der natürlichen Projektion $\mathrm{V}(\mathbb{C}) - \{0\} \longrightarrow \mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$. Wir erhalten einen Schnitt $\mathcal{K}' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{K}}$ bzw. $\mathcal{H}' \longrightarrow \widetilde{\mathcal{H}}$, d. h.

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{K}} & \longrightarrow & \mathcal{K} \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{K}' & \end{array} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{H}} & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ & \nwarrow \quad \swarrow & \\ & \mathcal{H}' & \end{array}$$

kommutieren. Die Schnitte sind gegeben durch $Z \longmapsto -\mathrm{q}(Z)e_1 + e_2 + Z$.

Der Raum V_1 hat Signatur $(1, n-1)$, enthält also eine weitere hyperbolische Ebene H_0, d. h. H_0 hat Basis e_3, e_4 mit $\langle e_3,e_4\rangle = 1$, $\mathrm{q}(e_i) = 0$ und es gilt $\mathrm{V}_1 = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{V}_0$, mit einem negativ definiten, zu H_0 orthogonalen Teilraum V_0 von V_1 bzw. V. Wie oben erhalten wir eine Teilkoordinatisierung von V_1 (und damit auch V):

$$\mathrm{V}_1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathrm{V}_0; \quad X = x_3 e_3 + x_4 e_4 + \mathfrak{x} \longmapsto (x_3, x_4, \mathfrak{x})$$

für $X \in \mathrm{V}_1, x_i \in \mathbb{R}, \mathfrak{x} \in \mathrm{V}_0$. Die quadratische Form überträgt sich auf $\mathbb{R}^2 \times \mathrm{V}_0$ wie oben: $\mathrm{q}((x_3, x_4, \mathfrak{x})) = x_3 x_4 + \mathrm{q}(\mathfrak{x})$.

Diese Koordinatisierung setzt sich auf $\mathrm{V}_1(\mathbb{C}) \subseteq \mathrm{V}(\mathbb{C})$ und $\mathrm{P}(\mathrm{V}_1(\mathbb{C})) \subseteq \mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$ fort. Wieder unterdrücken wir die Koordinatenabbildung und schreiben $X = (x_3, x_4, \mathfrak{x})$ bzw. $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{x})$ (entsprechend projektiv). Wie oben gilt für $[z] \in \mathcal{K}$: $z_3, z_4 \neq 0$.

Die Bedingung an $\mathcal{C}$ lautet damit $y_3 y_4 + \mathrm{q}(\mathfrak{y}) > 0$. Wegen $\mathrm{q}(\mathfrak{y}) \leq 0$ muß also $y_3 y_4 > 0$ gelten. Daher hat $\mathcal{C}$ zwei Zusammenhangskomponenten, die durch die Bedingungen $y_3 > 0$ bzw. $y_3 < 0$ gegeben sind. Damit hat auch $\mathcal{K}' = \mathrm{V}_1 + i\mathcal{C}$ bzw. $\mathcal{K}$ zwei Komponenten wie oben behauptet. Ohne Einschränkung sei $\mathcal{H}$ so gewählt, daß das Bild $\mathcal{H}'$ die Komponente zu $y_3 > 0$ ist.

Damit ist $\mathcal{H}$ gegeben als

$$\mathcal{H} = \{[z] = [*, 1, z_3, z_4, \mathfrak{z}]; z_i \in \mathbb{C}, \mathfrak{z} \in \mathrm{V}_0(\mathbb{C}), y_3 y_4 + \mathrm{q}(\mathfrak{y}) > 0, y_3 > 0\},$$

wobei $y_i = \operatorname{Im} z_i, \mathfrak{y} = \operatorname{Im} \mathfrak{z}$ und $* = -\mathrm{q}(z_3 e_3 + z_4 e_4 + \mathfrak{z})$ durch $z_3, z_4, \mathfrak{z}$ und $\mathrm{q}(z) = 0$ bestimmt ist. Wegen $y_3 y_4 > 0$ kann man auch $y_4 > 0$ statt $y_3 > 0$ fordern.

Mit dieser Koordinatisierung kann man auch zeigen, daß eine Spiegelung genau dann in $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ liegt, wenn sie negativ ist, wie oben behauptet: Sei $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, \mathfrak{a})$ die Koordinatisierung des Spiegelungsvektors. Es gilt

$$\sigma_a \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\left(\frac{\sigma_a(z)_3}{\sigma_a(z)_2}\right) > 0 \ \forall z \in \mathrm{V}(\mathbb{C}) \text{ mit } [z] \in \mathcal{H}.$$

Setzt man die explizite Formel für σ_a ein, erweitert mit $\mathrm{q}(a)$ und dem komplex-konjugierten Nenner, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&\sigma_a \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \Longleftrightarrow \\
&\qquad \operatorname{Im}\big(\mathrm{q}(a)^2 z_3 \overline{z_2} - \mathrm{q}(a)\langle a,z\rangle a_3 \overline{z_2} - \mathrm{q}(a)\langle a,\overline{z}\rangle z_3 a_2 + \langle a,z\rangle\langle a,\overline{z}\rangle a_3 a_2\big) \\
&\qquad\qquad = \mathrm{q}(a)\operatorname{Im}\big(\mathrm{q}(a) z_3 \overline{z_2} - \langle a,z\rangle a_3 \overline{z_2} - \langle a,\overline{z}\rangle z_3 a_2\big) > 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \forall z \in \mathrm{V}(\mathbb{C}) \text{ mit } [z] \in \mathcal{H}.
\end{aligned}$$

Es genügt, dies für ein solches z, etwa $(1, 1, i, i, \mathfrak{o})$, zu betrachten:

$$\begin{aligned}
&\sigma_a \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \Longleftrightarrow \\
&\qquad \mathrm{q}(a)\operatorname{Im}\big(\mathrm{q}(a) i - (a_1 + a_2 + i a_3 + i a_4) a_3 - (a_1 + a_2 - i a_3 - i a_4) i a_2\big) \\
&\qquad\qquad = \mathrm{q}(a)\big(\mathrm{q}(a) - (a_3 + a_4) a_3 - (a_1 + a_2) a_2\big) = \mathrm{q}(a)\left(\mathrm{q}(\mathfrak{a}) - a_3^2 - a_2^2\right) > 0
\end{aligned}$$

Da V_0 negativ definit ist, ist die Klammer negativ und damit

$$\sigma_a \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \Longleftrightarrow \mathrm{q}(a) < 0.$$

Die Gruppe $\mathrm{O}(\mathrm{V}_1) := \mathrm{O}(\mathrm{V}_1, \mathrm{q}\,|_{\mathrm{V}_1})$ ist in $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ eingebettet:

$$\mathrm{O}(\mathrm{V}_1) \hookrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V}); \quad g \longmapsto ((x_1, x_2, \mathfrak{x}) \longmapsto (x_1, x_2, g(\mathfrak{x}))),$$

d. h. g wirkt als Identität auf dem orthogonalen Komplement H_1 von V_1 in V. Analog ist $\mathrm{O}(\mathrm{V}_0)$ in $\mathrm{O}(\mathrm{V}_1)$ und $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ eingebettet.

Normiert man die erste statt die zweite Koordinate, so erhält man analog die beiden Komponenten aus den Bedingungen $y_3 > 0$ (bzw. $y_4 > 0$) und $y_3 < 0$ (bzw. $y_4 < 0$). Dabei sind für eine feste Komponente bei beiden Normierungen das gleiche Ungleichheitszeichen zu nehmen, wie man an $[1, 1, i, i, \mathfrak{o}]$ sieht. Also nach unserer Wahl: $\mathcal{H} = \{[z] = [1, -\mathrm{q}(z_3e_3 + z_4e_4 + \mathfrak{z}), z_3, z_4, \mathfrak{z}]; z_i \in \mathbb{C}, \mathfrak{z} \in \mathrm{V}_0(\mathbb{C}), y_3y_4 + \mathrm{q}(\mathfrak{y}) > 0, y_3 > 0\}$. Schließlich kann man auch die dritte oder vierte Koordinate normieren und erhält $y_1y_2 + \mathrm{q}(\mathfrak{y}) > 0$ als Bedingung für $\mathcal{K}$ und $y_1 > 0$ bzw. $y_1 < 0$ als Bedingung für die beiden Komponenten (oder $y_2 \lessgtr 0$). Hierbei ist aber für eine feste Komponente, etwa $\mathcal{H}$, das Ungleichheitszeichen gegenüber der Normierung der ersten oder zweiten Koordinate zu vertauschen, denn $[1, 1, i, i, \mathfrak{o}] = [-i, -i, 1, 1, \mathfrak{o}]$.

Schließlich können wir auch noch V_0 koordinatisieren (falls $\mathrm{V}_0 \neq 0$, d. h. $n > 2$): V_0 hat eine Basis $e_5, \ldots, e_{n+2}$ mit $\langle e_i,e_j\rangle = -2\delta_{ij}$ (also $\mathrm{q}(e_i) = -1$). Entsprechend haben wir eine Abbildung

$$\mathrm{V}_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n-2}; \quad \mathfrak{x} = \sum_{i=5}^{n+2} x_ie_i \longmapsto (x_5, \ldots, x_{n+2}).$$

Auch diese Koordinatisierung setzt sich komplex und projektiv fort. Bei Bedarf können wir also

$$[-\mathrm{q}(Z), 1, z_3, z_4, z_5, \ldots, z_{n+2}] := [-\mathrm{q}(Z)e_1 + e_2 + z_3e_3 + z_4e_4 + \sum_{i=5}^{n+2} z_ie_i]$$

usw. schreiben.

1.2 Gitter

Sei $\mathsf{M} \subseteq \mathrm{V}$ ein Gitter, d. h. eine diskrete Untergruppe vollen Rangs. Durch Einschränkung von V auf M ist auf M eine nicht ausgeartete quadratische Form bzw. Bilinearform definiert (ebenfalls mit q bzw. $\langle\ ,\ \rangle$ bezeichnet). Das Gitter M heißt ganz, wenn $\langle m,n\rangle \in \mathbb{Z}$ $\forall m, n \in \mathsf{M}$ gilt, es heißt gerade, wenn $\mathrm{q}(m) \in \mathbb{Z}$, d. h. $\langle m,m\rangle \in 2\mathbb{Z}$, $\forall m \in \mathsf{M}$ gilt. Jedes gerade Gitter ist ganz, denn $\langle m,n\rangle = \mathrm{q}(m + n) - \mathrm{q}(m) - \mathrm{q}(n) \in \mathbb{Z}$ $\forall m, n \in \mathsf{M}$.

Das zu M duale Gitter M' ist definiert als

$$\mathsf{M}' := \{n \in \mathrm{V}; \langle n,m\rangle \in \mathbb{Z} \ \ \forall m \in \mathsf{M}\}.$$

Es gilt $\mathsf{M}'' := (\mathsf{M}')' = \mathsf{M}$. Ist M ein ganzes Gitter, dann ist $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{M}'$. Damit ist die Diskriminatengruppe M'/M eines ganzen Gitters wohldefiniert und endlich.

Mit $\mathrm{O}(\mathsf{M}) := \{g \in \mathrm{O}(\mathrm{V}); g(\mathsf{M}) \subseteq \mathsf{M}\}$ sei die Gruppe derjenigen Transformationen von $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ bezeichnet, die M in sich überführen. Es gilt $\mathrm{O}(\mathsf{M}) \subseteq \mathrm{O}(\mathsf{M}')$ und daher $\mathrm{O}(\mathsf{M}') \subseteq \mathrm{O}(\mathsf{M}'')$ also $\mathrm{O}(\mathsf{M}') = \mathrm{O}(\mathsf{M})$. Schließlich sei $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) := \mathrm{O}(\mathsf{M}) \cap \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ und $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M}) := \mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \cap \mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$.

Eine Transformation $g \in \mathrm{O}(\mathsf{M})$ führt also sowohl M als auch M' in sich über und induziert daher einen natürlichen Homomorphismus von M'/M in sich, falls M ganz ist.

Definition 1.1. *Seien* M, N *unter einer Untergruppe* $G \subseteq \mathrm{O}(\mathrm{V})$ *invariante Gitter mit* $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{N}$.

$$G(\mathsf{M}, \mathsf{N}) := \mathrm{Kern}\left(G \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{N}}/_{\mathsf{M}}\right)\right)$$

Ist speziell M *ganz, also* $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{M}'$*, dann ist*

$$\Gamma(\mathsf{M}) := \mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{M},\mathsf{M}') = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{M}'}/_{\mathsf{M}}\right)\right)$$

der Diskriminantenkern des Gitters M*.*

Die Gruppen $G(\mathsf{M},\mathsf{N})$ sind Untergruppen endlichen Index in G, insbesondere ist also $\Gamma(\mathsf{M})$ Untergruppe endlichen Index von $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$.

Lemma 1.2. *Seien* $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{N}$ *und* G *wie in Definition* 1.1*. Dann gilt*

$$G(\mathsf{M},\mathsf{N}) = G(\mathsf{N}',\mathsf{M}')$$

d. h.

$$\mathrm{Kern}\left(G \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{N}}/_{\mathsf{M}}\right)\right) = \mathrm{Kern}\left(G \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{M}'}/_{\mathsf{N}'}\right)\right).$$

Beweis. Wegen $\mathsf{M} \subseteq \mathsf{N}$ gilt $\mathsf{N}' \subseteq \mathsf{M}'$ und mit M und N werden auch M' und N' von G in sich überführt, sodaß $G(\mathsf{N}',\mathsf{M}')$ wohldefiniert ist.

Sei $g \in G(\mathsf{M},\mathsf{N})$, d. h. $g \in G$ und $g(n) - n \in \mathsf{M}\ \forall n \in \mathsf{N}$. Sei $m \in \mathsf{M}'$ und damit auch $g(m) \in \mathsf{M}'$. Zu zeigen ist $g(m) - m \in \mathsf{N}'$ also $\langle g(m) - m,n\rangle \in \mathbb{Z}\ \forall n \in \mathsf{N}$. Sei also $n \in \mathsf{N}$.

$$\begin{aligned}\langle g(m) - m,n\rangle &= \langle g(m),n\rangle - \langle m,n\rangle \\ &= \langle g(m),n\rangle - \langle g(m),g(n)\rangle = \langle g(m),n - g(n)\rangle \in \mathbb{Z} \quad \forall n \in \mathsf{N},\end{aligned}$$

denn $g(m) \in \mathsf{M}'$ und $n - g(n) \in \mathsf{M}$. Damit ist $G(\mathsf{M},\mathsf{N}) \subseteq G(\mathsf{N}',\mathsf{M}')$ gezeigt. Die andere Inklusion folgt aus dieser mit M' statt N und N' statt M wegen $\mathsf{N} = \mathsf{N}''$ und $\mathsf{M} = \mathsf{M}''$ also $\mathsf{N}/\mathsf{M} = \mathsf{N}''/\mathsf{M}''$. □

Definition 1.3. *Sei* $\mathsf{M} \subseteq \mathrm{V}$ *ein Gitter und* $v \in \mathrm{V}$*. Der Vektor* v *heißt primitiv bezüglich* M*, wenn* $\mathbb{Q}v \cap \mathsf{M} = \mathbb{Z}v$ *gilt. (Insbesondere muß dann* $v \in \mathsf{M}$ *sein.)*

Eichlertransformationen

Definition 1.4. *Sei* $u \in \mathrm{V}$ *isotrop und* $v \in \mathrm{V}$ *orthogonal zu* u*:* $\langle u,v\rangle = 0$*. Die Eichlertransformation* $\mathrm{E}(u,v)$ *zu* u *und* v *auf* V *ist definiert als*

$$x \longmapsto \mathrm{E}(u,v)(x) = x - \langle x,u\rangle v + \langle x,v\rangle u - \mathrm{q}(v)\langle x,u\rangle u \quad \forall x \in \mathrm{V}.$$

Eichlertransformationen haben die folgenden einfachen Eigenschaften:

Lemma 1.5. *Es seien* $u, v, w \in \mathrm{V}$*,* u *isotrop und* v *und* w *orthogonal zu* u*. Dann gilt:*

- $\mathrm{E}(u,u) = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$
- $\mathrm{E}(u,v) = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$*, falls* u *oder* $v = 0$
- $\mathrm{E}(u,\alpha v) = \mathrm{E}(\alpha u,v)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$*, insbesondere* $\mathrm{E}(u,v) = \mathrm{E}(-u,-v)$
- $\mathrm{E}(u,v)\,\mathrm{E}(u,w) = \mathrm{E}(u,v+w)$*, insbesondere*
- $\mathrm{E}(u,v)^{-1} = \mathrm{E}(u,-v) = \mathrm{E}(-u,v)$ *und*

- $\mathrm{E}(u,v)^m = \mathrm{E}(u,mv) = \mathrm{E}(mu,v)\ \forall m \in \mathbb{Z}$
- $\mathrm{E}(u,v)\,\mathrm{E}(v,u) = \mathrm{id}_\mathrm{V}$ *bzw.* $\mathrm{E}(u,v) = \mathrm{E}(v,-u) = \mathrm{E}(-v,u)$, *falls zusätzlich* v *isotrop*
- $g\,\mathrm{E}(u,v)g^{-1} = \mathrm{E}(g(u),g(v))$ *für alle* $g \in \mathrm{O}(\mathrm{V})$
- $\mathrm{E}(u,v)(x) = x$ *für alle* $x \in \mathrm{V}$ *orthogonal zu* u *und* v

Lemma 1.6. *Es gilt* $\mathrm{E}(u,v) \in \mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$, *also insbesondere* $\det \mathrm{E}(u,v) = 1$. *Für ein gerades Gitter* M *und* $u,v \in \mathsf{M}$ *liegt* $\mathrm{E}(u,v)$ *im Diskriminantenkern* $\Gamma(\mathsf{M})$.

Beweis. Zunächst ist $\mathrm{E}(u,v) \in \mathrm{O}(\mathrm{V})$: Die Abbildung ist offensichtlich linear und man rechnet leicht $\mathrm{q}(\mathrm{E}(u,v)(x)) = \mathrm{q}(x)\ \forall x \in \mathrm{V}$ nach.

Durch $\mathrm{E}(t) := \mathrm{E}(u,tv), t \in [0,1]$ ist ein Weg von $\mathrm{id}_\mathrm{V} = \mathrm{E}(u,0)$ nach $\mathrm{E}(u,v)$ in $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ gegeben, also liegt $\mathrm{E}(u,v)$ in der (Weg-)Zusammenhangskomponente der Eins von $\mathrm{O}(\mathrm{V})$, also in $\mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$.

Ist M ein gerades Gitter, $u,v \in \mathsf{M}$ und $x \in \mathsf{M}'$, so sind $\langle x,u\rangle$, $\langle x,v\rangle$ und $\mathrm{q}(v)\langle x,u\rangle \in \mathbb{Z}$ und damit $\mathrm{E}(u,v)(x) - x \in \mathbb{Z}u + \mathbb{Z}v \subseteq \mathsf{M}$. □

Es sei jetzt $\mathrm{V} = \mathbb{R}e_1 \oplus \mathbb{R}e_2 \oplus \mathbb{R}e_3 \oplus \mathbb{R}e_4 \oplus \mathrm{V}_0$ koordinatisiert wie im vorigen Abschnitt.

Definition 1.7. *Sei* M *ein ganzes Gitter,* $\mathsf{M}_0 := \mathsf{M} \cap \mathrm{V}_0$. *Mit* $\mathrm{O}(\mathsf{M}_0)$ *sei die Gruppe* $\mathrm{O}(\mathrm{V}_0) \cap \mathrm{O}(\mathsf{M})$ *bezeichnet, mit* $\mathrm{SO}(\mathsf{M}_0)$ *der Durchschnitt mit* $\mathrm{SO}(\mathrm{V}_0)$.

Ist M *von der Form* $\mathsf{M} = \sum_{i=1}^4 \mathbb{Z}e_i + \mathsf{M}_0, \mathsf{M}_0 \subseteq \mathrm{V}_0$, *so bezeichne* $\mathrm{EO}(\mathsf{M}) \subseteq \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *die von den Eichlertransformationen der Form* $\mathrm{E}(e_i,v), 1 \le i \le 4, v \in \mathsf{M}$ *orthogonal zu* e_i, *erzeugte Gruppe:*

$$\mathrm{EO}(\mathsf{M}) = \langle \bigcup_{i=1}^4 \{\mathrm{E}(e_i,v); v \in \mathsf{M}, v \perp e_i\}\rangle \subseteq \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$$

Für gerade Gitter M ist nach obigem Lemma $\mathrm{EO}(\mathsf{M})$ im Diskriminantenkern $\Gamma(\mathsf{M})$ enthalten.

Bemerkung 1.8. *Wegen Lemma* 1.5 *genügen* $\mathrm{E}(e_i,v)$ *mit primitiven* v *zum Erzeugen von* $\mathrm{EO}(\mathsf{M})$. *Tatsächlich genügen* v *aus einer Basis von* $\mathsf{M} \cap e_i^\perp$:

$$\mathrm{EO}(\mathsf{M}) = \langle \bigcup_{i=1}^4 \{\mathrm{E}(e_i,v); v \text{ aus Basis von } \mathsf{M} \cap e_i^\perp\}\rangle$$

1.3 Spezielle Gitter und Gruppen

Wir betrachten in dieser Arbeit spezielle Gitter im $\mathbb{R}^6$. Sei also $\mathrm{V} = \mathbb{R}^6$ und

$$\mathrm{q}((x_1,\ldots,x_6)) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - x_6^2.$$

Die induzierte Bilinearform ist gegeben durch

$$\langle (x_1,\ldots,x_6),(y_1,\ldots,y_6)\rangle = x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 + x_4y_3 - 2x_5y_5 - 2x_6y_6.$$

Die Vektoren $e_1,\ldots,e_{n+2}$ aus der Koordinatisierung von V seien die kanonischen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^6$, also $\mathrm{H}_1 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2$, $\mathrm{H}_0 = \mathbb{R}e_3 + \mathbb{R}e_4$, $\mathrm{V}_0 = \mathbb{R}e_5 + \mathbb{R}e_6$, $\mathrm{V}_1 = \mathrm{H}_0 \oplus \mathrm{V}_0$ und $\mathrm{V} = \mathrm{H}_1 \oplus \mathrm{V}_1$. Wir benutzen die

Notation 1.9. *Mit σ sei die Permutation* $(12)(34) \in S_6$ *bezeichnet.*

Damit gilt $\langle e_i, v\rangle = v_{\sigma(i)}$ für $i = 1, \ldots, 4, v = (v_1, \ldots, v_6) \in \mathrm{V}$.

Wir identifizieren lineare Abbildungen von V mit den zugehörigen 6×6-Matrizen bezüglich dieser Basis (und schreiben Vektoren in diesem Zusammenhang als Spalten).

Die betrachteten Gitter sind:

Definition 1.10. *Es seien* $\mathsf{L} := \sum_{i=1}^{6} \mathbb{Z}e_i$, $\mathsf{M} := 2\mathsf{L}'$ *und* $\mathsf{N} := \sum_{i=1}^{4} \mathbb{Z}e_i + \mathbb{Z}\frac{1}{2}(e_5+e_6) + \mathbb{Z}\frac{1}{2}(e_5 - e_6)$. *Wir fassen* $\mathbb{Z}^6$ *als Teilmenge von* $\mathbb{R}^6$ *auf und schreiben salopp:*

$$\mathsf{L} = \mathbb{Z}^6 = \mathsf{H} \times \mathsf{H} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\mathsf{M} = 2\mathsf{L}' = 2\mathsf{H} \times 2\mathsf{H} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

$$\mathsf{N} = \mathsf{H} \times \mathsf{H} \times \mathsf{N}_0$$

Hierbei sei H *eine ganzzahlige hyperbolische Ebene, genauer*

$$\mathsf{H} = \mathrm{H}_1 \cap \mathbb{Z}^6 = \mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2 \text{ bzw. } \mathsf{H} = \mathrm{H}_0 \cap \mathbb{Z}^6 = \mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$$

und

$$\begin{aligned}\mathsf{N}_0 = \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \cup (\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) + \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} &= \mathbb{Z}(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) + \mathbb{Z}(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) \\ &= \{(a,b) \in \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}\times\tfrac{1}{2}\mathbb{Z}, a-b \in \mathbb{Z}\} \cong \mathbb{Z}\tfrac{1}{2}(e_5+e_6) + \mathbb{Z}\tfrac{1}{2}(e_5-e_6).\end{aligned}$$

Die Gitter L, M und N sind ganz, L und M auch gerade. Es gilt $\mathsf{M}_0 = \mathsf{L}_0 = \mathbb{Z}e_5 + \mathbb{Z}e_6$ und $\mathsf{L}' = \frac{1}{2}\mathsf{M}$ bzw. $\mathsf{M}' = \frac{1}{2}\mathsf{L}$ sowie $\mathsf{N}' = \mathsf{N}$, d. h. N ist selbstdual (aber nicht gerade). Für die Diskriminantengruppe von M gilt

$$\mathsf{M}'/\mathsf{M} \cong \left(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\right)^4 \times \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^2.$$

Wichtig werden auch die Untergruppen

$$\mathsf{L}'/\mathsf{M} \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^6 \quad \text{und} \quad \mathsf{N}/\mathsf{M} \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^5$$

der Elemente der Ordnung zwei und der Elemente halbganzer Norm darin bezüglich der induzierten Form

$$\mathsf{M}'/\mathsf{M} \longrightarrow \tfrac{1}{4}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}; \quad m + \mathsf{M} \longmapsto \mathrm{q}(m) + \mathbb{Z}$$

sein (es ist $\mathsf{N}_0/\mathsf{M}_0 \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$).

Von $\mathrm{O}^+(\mathsf{L}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{M}') = \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ sind die Erzeuger bekannt [F-H]:

Satz 1.11. *Die Gruppe* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *wird erzeugt von* $\mathrm{O}(\mathsf{L}_0)$ *und* $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$.

Folgerung 1.12. *Die Gruppe* $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$ *wird erzeugt von* $\mathrm{SO}(\mathsf{L}_0)$ *und* $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$.

Die Gruppe $\mathrm{O}(\mathsf{M}_0) = \mathrm{O}(\mathsf{L}_0)$ besteht aus Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} E_4 & 0 \\ 0 & G \end{smallmatrix}\right)$ mit $G'(-2E_2)G = -2E_2$, d. h. $G'G = E_2$, und $G(\mathbb{Z}^2) \subseteq \mathbb{Z}^2$. Dabei sei E_n die $n \times n$-Einheitsmatrix. Also

$$G \in \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \right\}$$

bzw. $\mathrm{O}(\mathsf{M}_0) = \langle h_1, h_2 \rangle$ wobei

$$h_1 := \begin{pmatrix} E_4 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_2 := \begin{pmatrix} E_4 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Die Transformation h_1 erzeugt die Untergruppe $\mathrm{SO}(\mathsf{M}_0)$, h_2 ist die Spiegelung an e_6: $h_2 = \sigma_{e_6}$. Es gilt $h_1 = \sigma_{e_5+e_6} h_2 = \sigma_{e_5+e_6}\sigma_{e_6}$.

Weiter wird $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$ erzeugt von den $\mathrm{E}(e_i, e_j), i \in \{1, \ldots, 4\}, j \in \{1, \ldots, 6\}$ mit $\langle e_i, e_j \rangle = 0$. Wegen Lemma 1.5 können die $\mathrm{E}(e_i, e_i), i \in \{1, \ldots, 4\}$ zum Erzeugen von $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$ weggelassen werden. Dies gilt auch für die $\mathrm{E}(e_i, e_j), i \in \{3, 4\}, j \in \{1, 2\}$, denn diese entstehen aus denen mit $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4\}$ durch Inversion: $\mathrm{E}(e_i, e_j) = \mathrm{E}(-e_j, e_i) = \mathrm{E}(e_j, e_i)^{-1}$. Von den übrigen sind noch $\mathrm{E}(e_2, e_5)$ und $\mathrm{E}(e_2, e_6)$ überflüssig, denn es gilt für $j = 5, 6$:

$$\mathrm{E}(e_2, e_j) = l\,\mathrm{E}(e_1, e_j)^{-1} l^{-1} \quad \text{mit} \quad l := \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$$

Wegen

$$l = \mathrm{E}(e_1, e_3)\,\mathrm{E}(e_2, e_3)\,\mathrm{E}(e_1, e_4)\,\mathrm{E}(e_2, e_4)\,\mathrm{E}(e_1, e_3)\,\mathrm{E}(e_2, e_3)$$

liegt nämlich l im Erzeugnis der verbliebenen Eichlertransformationen.

Für $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$ und $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ sind die Eichlertransformationen mit $j = 6$ überflüssig, denn sie sind konjugiert zu denen mit $j = 5$: $\mathrm{E}(e_i, e_6) = h_1\,\mathrm{E}(e_i, e_5)^{-1} h_1^{-1}$. Wir erhalten

Folgerung 1.13.

- *Die Transformationen* $\mathrm{E}(e_i, e_j)$ *mit* $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4, 5, 6\}$ *aber* $(i,j) \neq (2,5), (2,6)$ *erzeugen* $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$.
- *Die Transformationen* h_1 *und* $\mathrm{E}(e_i, e_j)$ *mit* $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4, 5\}$ *aber* $(i,j) \neq (2,5)$ *erzeugen* $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$.
- *Die Transformationen* h_1, h_2 *und* $\mathrm{E}(e_i, e_j)$ *mit* $i \in \{1, 2\}, j \in \{3, 4, 5\}$ *aber* $(i,j) \neq (2,5)$ *erzeugen* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$.

Nehmen wir l zu den Erzeugern dazu, so entstehen die $\mathrm{E}(e_2, e_j)$ aus den $\mathrm{E}(e_1, e_k)$ durch Konjugation mit l und umgekehrt, also

Folgerung 1.14. *Sei* $i = 1$ *oder* $i = 2$. *Dann gilt:*

- *Die Transformationen* l *und* $\mathrm{E}(e_i, e_j), j \in \{3, 4, 5, 6\}$ *erzeugen* $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$.
- *Die Transformationen* l, h_1 *und* $\mathrm{E}(e_i, e_j), j \in \{3, 4, 5\}$ *erzeugen* $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$.
- *Die Transformationen* l, h_1, h_2 *und* $\mathrm{E}(e_i, e_j), j \in \{3, 4, 5\}$ *erzeugen* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$.

Läßt man am Anfang dieser Überlegungen nicht die $\mathrm{E}(e_i, e_j)$ mit $i \in \{3,4\}, j \in \{1,2\}$ sondern umgekehrt $i \in \{1,2\}, j \in \{3,4\}$ weg, erhält man analoge Aussagen für $i = 3,4$ (beachte, daß l auch im Erzeugnis der verbleibenden Transformationen vom Typ $\mathrm{E}(e_3, e_j)$ und $\mathrm{E}(e_4, e_j)$ liegt, wie man durch Inversion der expliziten Formel für l mit Lemma 1.5 sieht), d. h. es gilt der

Satz 1.15. *Für jedes $i \in \{1,2,3,4\}$ gilt:*

- *Die Transformationen l und $\mathrm{E}(e_i, e_j), j \in \{1,\dots,6\} - \{i, \sigma(i)\}$ erzeugen $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$.*
- *Die Transformationen l, h_1 und $\mathrm{E}(e_i, e_j), j \in \{1,\dots,5\} - \{i, \sigma(i)\}$ erzeugen $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$.*
- *Die Transformationen l, h_1, h_2 und $\mathrm{E}(e_i, e_j)$, $j \in \{1,\dots,5\} - \{i, \sigma(i)\}$ erzeugen $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$.*

Wir geben hier die Eichlertransformationen vom Typ $\mathrm{E}(e_i, v), i = 1,\dots,4, v \perp e_i$, d. h. $v_{\sigma(i)} = 0$, in Matrizenform an:

$$\mathrm{E}(e_i, v)(x) = x - x_{\sigma(i)} v + \langle x, v \rangle e_i - \mathrm{q}(v) x_{\sigma(i)} e_i,$$

also mit der Matrix $G = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -2E_2 \end{pmatrix}$ und $x_{\sigma(i)} = e'_{\sigma(i)} x$

$$\mathrm{E}(e_i, v)(x) = \left(E_6 - v e'_{\sigma(i)} + e_i v' G - \mathrm{q}(v) e_i e'_{\sigma(i)} \right) x,$$

d. h. $\mathrm{E}(e_i, v)$ ist die Einheitsmatrix, von der in der $\sigma(i)$-ten Spalte v abgezogen und in der i-ten Zeile $v'G$ addiert und schließlich vom $(i, \sigma(i))$-Eintrag $\mathrm{q}(v)$ subtrahiert wird, z. B.

$$\mathrm{E}(e_1, v) = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{q}(v) & v_4 & v_3 & -2v_5 & -2v_6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -v_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -v_5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -v_6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Beachte, daß sich im Eintrag $(1,2)$ bzw. allgemein $(i, \sigma(i))$ die Beiträge von $-v$ und $v'G$ (nämlich $\mp v_1$ bzw. $\mp v_i$) wegheben, sodaß allgemein hier immer $-\mathrm{q}(v)$ steht.

Proposition 1.16. *Es gilt $\mathrm{O}(\mathsf{M}) = \mathrm{O}(\mathsf{N})$, also auch $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{N})$. Insbesondere führt $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ das Gitter N in sich über. Weiter gilt:*

$$\mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{N}, \mathsf{M}') = \mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{M}, \mathsf{N})$$

d. h.

$$\mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\mathsf{M}'/\mathsf{N} \right) \right) = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\mathsf{N}/\mathsf{M} \right) \right).$$

Beweis. Wegen $\mathsf{N} = \{m \in \mathsf{L}';\, \mathrm{q}(m) \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}\}$ gilt $\mathrm{O}(\mathsf{L}) = \mathrm{O}(\mathsf{L}') \subseteq \mathrm{O}(\mathsf{N})$ und wegen $\mathsf{L} = \{m \in \mathsf{N};\, \mathrm{q}(m) \in \mathbb{Z}\}$ gilt $\mathrm{O}(\mathsf{N}) \subseteq \mathrm{O}(\mathsf{L})$, also insgesamt $\mathrm{O}(\mathsf{N}) = \mathrm{O}(\mathsf{L}) = \mathrm{O}(\mathsf{M})$.

Die Gleichheit der beiden Kerne folgt aus der Selbstdualität von N und aus Lemma 1.2 mit $G = \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$. □

Definition 1.17. *Wir definieren für Gitter* $\mathsf{G} \subseteq \mathsf{M}' = (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^6$*, die unter* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *invariant sind:*

$$\Gamma_{\mathsf{G}} := \mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{G}, \mathsf{M}') = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{M}'}/_{\mathsf{G}}\right)\right)$$

Und speziell:

$$\Gamma := \Gamma_{\mathsf{M}} = \Gamma(\mathsf{M}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{M}, \mathsf{M}') = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{M}'}/_{\mathsf{M}}\right)\right)$$

Mit $\mathrm{S}\Gamma$ *und* $\mathrm{S}\Gamma_{\mathsf{G}}$ *seien die jeweiligen Druchschnitte mit* $\mathrm{SO}(\mathrm{V})$ *bezeichnet.*

Wegen Proposition 1.16 gilt

$$\Gamma_{\mathsf{N}} = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left({}^{\mathsf{N}}/_{\mathsf{M}}\right)\right).$$

Satz 1.18. *Es gilt*

$${}^{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})}/_{\Gamma_{\mathsf{N}}} \cong S_6.$$

Ein Isomorphismus $S_6 \longrightarrow {}^{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})}/_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ *ist definiert durch*

$$(i, i+1) \longmapsto g_i\Gamma_{\mathsf{N}} \ \forall i = 1, \ldots, 5.$$

Dabei sind die $g_i, i = 1, \ldots, 5$ *definiert als*

$$g_1 := \mathrm{E}(e_1, e_3) \qquad g_2 := \mathrm{E}(e_2, e_4)$$
$$g_3 := \mathrm{E}(e_1, e_3 + e_4 + e_5) \qquad g_4 := \mathrm{E}(e_2, e_3)$$
$$g_5 := \mathrm{E}(e_1, e_4).$$

Beweis. Die angegebene Abbildung $S_6 \longrightarrow \mathrm{O}^+(\mathsf{M})/\Gamma_{\mathsf{N}}$ ist wohldefiniert, denn die g_i erfüllen modulo Γ_{N} die Relationen der erzeugenden Transpositionen $(i, i+1) \in S_6$, d. h. $g_i^2 \in \Gamma_{\mathsf{N}}; (g_i g_j)^3 \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ für $|i-j| = 1$ und $(g_i g_j)^2 \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ für $|i-j| > 1$. Sie ist surjektiv, denn die g_i, h_j erzeugen $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ wegen $g_3 = g_1 g_5\,\mathrm{E}(e_1, e_5)$ und die h_j liegen in Γ_{N}. Sie ist injektiv, denn sonst wäre $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})/\Gamma_{\mathsf{N}} \cong S_6/A_6$ oder S_6/S_6, hätte also neben Γ_{N} höchstens ein weiteres Element. □

Für die speziellen Gruppen gilt

$${}^{\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})}/_{\mathrm{S}\Gamma_{\mathsf{N}}} \cong {}^{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})}/_{\langle h_2\rangle}\Big/{}^{\Gamma_{\mathsf{N}}}/_{\langle h_2\rangle} \cong {}^{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})}/_{\Gamma_{\mathsf{N}}} \cong S_6.$$

Bemerkung 1.19. *Unter dem angegebenen Isomorphismus gilt:*

$$(12)(34)(56) \longmapsto \mathrm{E}(e_1, e_5)\Gamma_{\mathsf{N}}$$
$$(13)(46) \longmapsto l\Gamma_{\mathsf{N}}$$

Satz. *Es gilt* $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{10}$.

Folgerung 1.20. *Der Index von* Γ *in* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *ist* $6!\,2^{10} = 737280$.

Dazu zeigen wir zunächst

Lemma 1.21. *Die Gruppe* $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$ *ist* $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$*-Vektorraum.*

Beweis. Zu zeigen ist: Die Gruppe $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$ ist abelsch (also $\mathbb{Z}$-Modul bez. Potenzbildung) und $(g\Gamma)^2 = \Gamma$, d. h. $g^2 \in \Gamma,\ \forall g \in \Gamma_{\mathsf{N}}$.

Seien also $g, h \in \Gamma_{\mathsf{N}}$. Zu zeigen ist $g^{-1}h^{-1}gh \in \Gamma$, d. h. $g^{-1}h^{-1}gh(m) - m \in \mathsf{M}\ \forall m \in \mathsf{M}'$. Sei also $m \in \mathsf{M}'$. Es sei $m_l := l(m) - m\ \forall l \in \Gamma_{\mathsf{N}}$. Es gilt $m_l \in \mathsf{N}$ und falls $m \in \mathsf{N}$ gilt $m_l \in \mathsf{M}$. Damit

$$\begin{aligned} g^{-1}h^{-1}gh(m) &= g^{-1}h^{-1}g(m + m_h) \\ &= g^{-1}h^{-1}(m + m_g + m_h + m_{h,g}) \\ &= g^{-1}\big(\underbrace{h^{-1}(m + m_h)}_{=m} + \underbrace{h^{-1}(m_g + m_{g,h})}_{=m_g} + \underbrace{h^{-1}(m_{h,g} - m_{g,h})}_{=:\tilde{m}\in\mathsf{M}}\big) \\ &= g^{-1}(m + m_g + \tilde{m}) \\ &= m + \underbrace{g^{-1}(\tilde{m})}_{\in\mathsf{M}}. \end{aligned}$$

Also $g^{-1}h^{-1}gh(m) - m \in \mathsf{M}$.

Sei jetzt $g \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ und $m \in \mathsf{M}'$, zu zeigen ist $g^2(m) - m \in \mathsf{M}$.

$$g^2(m) = g(m + m_g) = m + m_g + m_g + m_{g,g} = m + 2m_g + m_{g,g}$$

(Bezeichnung wie oben). Es gilt $m_g \in \mathsf{N}$ also $2m_g \in 2\mathsf{N} \subseteq \mathsf{M}$ und $m_{g,g} \in \mathsf{M}$, denn g läßt zunächst m modulo N fest und dann $m_g \in \mathsf{N}$ modulo M. □

Wir wollen die Dimension von $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$ bestimmen und einen Isomorphismus nach $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{dim}$ angeben. Dazu geben wir linear unabhängige Erzeuger an. Dabei ist es einfacher, sich nicht um die Zusammenhangskomponente zu kümmern. Wir betrachten daher zunächst

$$\widehat{\Gamma_{\mathsf{N}}} := \mathrm{O}(\mathsf{M})(\mathsf{M}, \mathsf{N}) = \langle \Gamma_{\mathsf{N}}, h \rangle \quad \text{mit} \quad h := \begin{pmatrix} E_2 & 0 & 0 \\ 0 & -E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}(\mathsf{M}) - \mathrm{O}^+(\mathsf{M}).$$

Auch $\widehat{\Gamma_{\mathsf{N}}}/\Gamma$ ist ein $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraum, was man genau wie Lemma 1.21 beweist.

Lemma 1.22. *Die elf Transformationen*

$$\mathrm{E}(e_i, 2e_j), i \in \{1,2\}, j \in \{3,4\}, \mathrm{E}(e_i, e_5 + e_6), i \in \{1,\ldots,4\}, h_1, -h_1^2, h$$

erzeugen zusammen mit Γ *die Gruppe* $\widehat{\Gamma_{\mathsf{N}}}$.

Beweis. Die Transformationen liegen in $\widehat{\Gamma_{\mathsf{N}}}$: Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(e_i, 2e_j)(l) - l &= -2\langle l,e_i\rangle e_j + 2\langle l,e_j\rangle e_i,\\ \mathrm{E}(e_i, e_5+e_6)(l) - l &= -\langle l,e_i\rangle(e_5+e_6) + \langle l,e_5+e_6\rangle e_i - \mathrm{q}(e_5+e_6)\langle l,e_i\rangle e_i.\end{aligned}$$

Dies liegt in $2\mathsf{N}$ für alle $l \in \mathsf{L}$. Für h_1, $-h_1^2$ und h ist dies klar. (Dabei haben wir die „ganzzahlige" Definition von $\Gamma_{\mathsf{G}} = \mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{G},\mathsf{M}') = \mathrm{O}^+(\mathsf{M})(2\mathsf{G},\mathsf{L})$ benutzt.)

Die Eichlertransformationen $\mathrm{E}(e_j, 2e_i)$, $i \in \{1,2\}$, $j \in \{3,4\}$ liegen in diesem Erzeugnis, denn sie sind invers zu $\mathrm{E}(e_i, 2e_j)$: $\mathrm{E}(e_j, 2e_i) = \mathrm{E}(-2e_i, e_j) = \mathrm{E}(e_i, 2e_j)^{-1}$ (Lemma 1.5).

Sei nun $g \in \widehat{\Gamma_{\mathsf{N}}}$. Es gilt

$$\begin{aligned}g(e_1) &\equiv e_1 \bmod 2\mathsf{N}\\ &\equiv \pm e_1 + 2\varepsilon_2 e_2 + 2\varepsilon_3 e_3 + 2\varepsilon_4 e_4 + \varepsilon_5(e_5+e_6) \bmod 2\mathsf{M}\end{aligned}$$

mit gewissen $\varepsilon_i \in \{0,1\}$. Durch eventuelle Multiplikation mit $-h_1^2$ kann o. E. $g(e_1) \equiv +e_1 + \ldots$ angenommen werden. Die quadratische Form ist auf L modulo 4 eindeutig, wenn man Änderungen modulo $2\mathsf{M}$ zuläßt, d. h. q induziert $\mathsf{L}/2\mathsf{M} \longrightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$. Also $0 = \mathrm{q}(e_1) = \mathrm{q}(g(e_1)) \equiv \mathrm{q}(e_1 + 2\varepsilon_2 e_2 + 2\varepsilon_3 e_3 + 2\varepsilon_4 e_4 + \varepsilon_5(e_5+e_6)) \equiv 2\varepsilon_2 - 2\varepsilon_5 \bmod 4\mathbb{Z}$, also $\varepsilon_2 = \varepsilon_5$. Damit ist aber $2\varepsilon_2 e_2 = 2\varepsilon_5^2 e_2$ und daher

$$\begin{aligned}g(e_1) &\equiv e_1 + 2\varepsilon_3 e_3 + 2\varepsilon_4 e_4 + \varepsilon_5(e_5+e_6) + 2\varepsilon_5^2 e_2 \bmod 2\mathsf{M}\\ &\equiv \mathrm{E}(e_2, 2\varepsilon_3 e_3 + 2\varepsilon_4 e_4 + \varepsilon_5(e_5+e_6))(e_1) \bmod 2\mathsf{M}\\ &= \mathrm{E}(e_2, 2e_3)^{\varepsilon_3}\,\mathrm{E}(e_2, 2e_4)^{\varepsilon_4}\,\mathrm{E}(e_2, e_5+e_6)^{\varepsilon_5}(e_1).\end{aligned}$$

Wir können also o. E. $g(e_1) \equiv e_1 \bmod 2\mathsf{M}$ annehmen. Entsprechend kann man bei $g(e_2)$ verfahren. Dabei darf jedoch an $g(e_1) \bmod 2\mathsf{M}$ nichts geändert werden. Die benötigte Eichlertransformation $\mathrm{E}(e_1, *)$ ist unproblematisch und es gilt sowieso $g(e_2) \equiv +e_2 + \ldots$ denn $g(e_2)_2 = \langle e_1, g(e_2)\rangle \equiv \langle g(e_1), g(e_2)\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = 1 \bmod 4\mathbb{Z}$. Entsprechend gilt o. E. $g(e_3) \equiv e_3 \bmod 2\mathsf{M}$. Hierzu kann das Vorzeichen von e_3 mit h gewechselt werden, ohne $g(e_1)$ und $g(e_2)$ zu verändern, und dann wie oben eine Eichlertransformation $\mathrm{E}(e_4, *)$ angewandt werden. Für $i = 1{,}2$ ist $0 \equiv \langle e_i, g(e_3)\rangle = 2\varepsilon_i \bmod 4$, also $\varepsilon_i = 0$ für $i = 1{,}2$ und daher $* = \varepsilon_5(e_5+e_5)$, also ändert $\mathrm{E}(e_4, *)$ nichts an $g(e_1)$ und $g(e_2)$ modulo $2\mathsf{M}$.

Schließlich gilt o. E. $g(e_4) \equiv e_4 \bmod 2\mathsf{M}$ wie oben. Weiter gilt $g(e_5) \equiv e_5 \bmod 2\mathsf{N}$. Tatsächlich gilt dies nicht nur modulo $2\mathsf{N} = 2\mathsf{H} \times 2\mathsf{H} \times 2\mathsf{N}_0$, sondern sogar modulo $4\mathsf{H} \times 4\mathsf{H} \times 2\mathsf{N}_0$: Es sei $g(e_i) = e_i + m_i$, d. h. $m_1, \ldots, m_4 \in 2\mathsf{M}$ und $m_5 \in 2\mathsf{N}$. Damit gilt für $i = 1, \ldots, 4$ (m_{kl} sei die l-te Koordinate von m_k):

$$\begin{aligned}0 = \langle e_i, e_5\rangle &= \langle g(e_i), g(e_5)\rangle = \langle e_i + m_i, e_5 + m_5\rangle\\ &= \underbrace{\langle e_i, e_5\rangle}_{=0} + \langle e_i, m_5\rangle + \underbrace{\langle m_i, e_5\rangle}_{\in 4\mathbb{Z}} + \underbrace{\langle m_i, m_5\rangle}_{\in 4\mathbb{Z}}\\ &\equiv m_{5\sigma(i)} \bmod 4\mathbb{Z}\end{aligned}$$

d. h. $m_{5i} \in 4\mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, 4$. Entsprechend gilt dies für e_6. Damit gilt also $g(e_5) \equiv e_5$ oder $e_6 \bmod 2\mathsf{M}$. Nach eventueller Multiplikation von g mit h_1 also o. E. $g(e_5) \equiv e_5$.

Auch $g(e_6)$ ist kongruent e_5 oder e_6 mod 2M und zwar kongruent e_6, denn

$$0 = \langle e_5,e_6\rangle = \langle g(e_5),g(e_6)\rangle \equiv \langle e_5,g(e_6)\rangle \equiv \begin{cases} \langle e_5,e_5\rangle = -2 & \lightning \\ \langle e_5,e_6\rangle = 0 & \checkmark \end{cases} \mod 4\mathbb{Z}.$$

Damit ist g durch Multiplikation mit den elf Transformationen nach Γ überführt. □

Lemma 1.23. *Die Γ-Klassen der elf Transformationen aus Lemma 1.22 sind $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-linear unabhängig in $\widehat{\Gamma_N}/\Gamma$.*

Beweis. Gegeben sei eine $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Linearkombination der elf Γ-Klassen. Diese ist repräsentiert durch ein Produkt P der elf Transformationen, wobei jede höchstens einmal vorkommt. Zu zeigen ist, daß das Produkt leer ist, falls $P \in \Gamma$.

Für $i \in \{1,\dots,4\}$ sei P_i das Produkt der Faktoren vom Typ $\mathrm{E}(e_i,*)$, die in P vorkommen und Q das Produkt der übrigen Faktoren von P, d. h. $P \equiv QP_1P_2P_3P_4$ mod Γ. Es gilt $P_j(e_i) = e_i$ für $i,j \in \{1,\dots,4\}$ mit $j \neq \sigma(i)$ und $P_{\sigma(i)}(e_i) = \mathrm{E}(e_{\sigma(i)},v_i)(e_i) = e_i - v_i - \mathrm{q}(v_i)e_{\sigma(i)}$, wobei v_i Summe von $2e_j, j \in \{1,2,3,4\}-\{i,\sigma(i)\}$ und e_5+e_6 ist, in der jeder Summand höchstens einmal vorkommt. Dieses v_i ist Element von 2M genau dann, wenn $v_i = 0$ also $P_{\sigma(i)} = \mathrm{id_V}$ gilt. Damit ist für $i = 1,\dots,4$

$$\begin{aligned} P(e_i) &\equiv QP_1P_2P_3P_4(e_i) \equiv Q(P_{\sigma(i)}(e_i)) \mod 2\mathsf{M} \\ &= Q(e_i - v_i - \mathrm{q}(v_i)e_{\sigma(i)}) = \pm e_i - Q(v_i) \mp \mathrm{q}(v_i)e_{\sigma(i)}. \end{aligned}$$

Dies muß

$$\equiv e_i \mod 2\mathsf{M}$$

sein, falls $P \in \Gamma$ gilt. Der Vektor $Q(v_i)$ ist Summe von $\pm 2e_j, j \in \{1,2,3,4\}-\{i,\sigma(i)\}$ und $e_5 \pm e_6$, insbesondere also $\in 2\mathsf{M}$ genau wenn $Q(v_i) = 0$.

Damit muß $Q(e_i) = +e_i$ und $Q(v_i) = 0$ also $v_i = 0$ für $i = 1,\dots,4$ sein, d. h. aber $P_i = \mathrm{id_V}$ für $i = 1,\dots,4$ und $Q = h_1$ oder $\mathrm{id_V}$. Aber Q kann nicht h_1 sein, denn dann wäre $P = Q = h_1 \notin \Gamma$. □

Folgerung 1.24. *Die Γ-Klassen der Transformationen aus Lemma 1.22 ohne h bilden $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Basis von Γ_N/Γ.*

Beweis. Die zehn Transformationen liegen in Γ_N und ihre Γ-Klassen erzeugen eine Untergruppe von $\widehat{\Gamma_N}/\Gamma$ vom Index 2. □

Damit ist bewiesen:

Satz 1.25. *Es gilt*

$$\Gamma_N/\Gamma \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{10}.$$

Ein Isomorphismus $\left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{10} \longrightarrow \Gamma_N/\Gamma$ *ist gegeben durch*

$$\begin{aligned} (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{10}) \longmapsto\ & \mathrm{E}(e_1,2e_3)^{\varepsilon_1}\,\mathrm{E}(e_1,2e_4)^{\varepsilon_2}\,\mathrm{E}(e_2,2e_3)^{\varepsilon_3}\,\mathrm{E}(e_2,2e_4)^{\varepsilon_4} \\ & \mathrm{E}(e_1,e_5+e_6)^{\varepsilon_5}\,\mathrm{E}(e_2,e_5+e_6)^{\varepsilon_6}\,\mathrm{E}(e_3,e_5+e_6)^{\varepsilon_7} \\ & \mathrm{E}(e_4,e_5+e_6)^{\varepsilon_8}\,h_1^{\varepsilon_9}(-h_1^2)^{\varepsilon_{10}}\Gamma. \end{aligned}$$

Folgerung 1.26. *Es gilt auch* $\mathrm{S}\Gamma_{\mathsf{N}}/\mathrm{S}\Gamma \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{10}$. *Einen Isomorphismus erhält man aus obigem, indem man* Γ *durch* $\mathrm{S}\Gamma$ *ersetzt.*

Folgerung 1.27. *Es gilt*

$$\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma_{\mathsf{L}} \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^5 \qquad \textit{und} \qquad \Gamma_{\mathsf{L}}/\Gamma \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^5.$$

Basen bilden die Γ_{L}*-Klassen von* $\mathrm{E}(e_i, e_5+e_6), i = 1,\ldots,4$ *und* h_1 *einerseits und die* Γ*-Klassen von* $\mathrm{E}(e_i, 2e_j), i \in \{1,2\}, j \in \{3,4\}$ *und* $-h_1^2$ *andererseits.*

Beweis. Wegen $\Gamma = \Gamma_{\mathsf{M}} \subseteq \Gamma_{\mathsf{L}} \subseteq \Gamma_{\mathsf{N}}$ ist die $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-Vektorraumstruktur der beiden Gruppen klar. Es gilt $\mathrm{E}(e_i, 2e_j) \in \Gamma_{\mathsf{L}}$ und $-h_1^2 = \left(\begin{smallmatrix} -E_4 & 0 \\ 0 & E_2 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_{\mathsf{L}}$. Daher wird $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma_{\mathsf{L}}$ von den Γ_{L}-Klassen von $\mathrm{E}(e_i, e_5+e_6), i = 1,\ldots,4$ und h_1 erzeugt. Wegen $\mathrm{E}(e_i, e_5+e_6)(x) \equiv x - x_{\sigma(i)}(e_5+e_6) \bmod 2\mathsf{L}$ für $x \in \mathsf{L}, i = 1,\ldots,4$ und $h_1(x) = x-(x_5-x_6)e_5-(x_6-x_5)e_6$ ist keines der nichtleeren Produkte der fünf Erzeuger (in dem jeder Faktor höchstens einmal auftritt) in Γ_{L}: Ein Produkt P ist modulo Γ_{L} kongruent zu $\mathrm{E}(e_1, e_5+e_5)^{\delta_1} \ldots \mathrm{E}(e_1, e_5+e_5)^{\delta_4} h_1^{\delta_5}$ mit $\delta_i \in \{0,1\}, i = 1,\ldots,5$. Damit ist $P(e_i) \equiv e_i - \delta_{\sigma(i)}(e_5+e_6) \bmod 2\mathsf{L}$ also $\delta_i = 0$ für $i = 1,\ldots,4$ falls $P \in \Gamma_{\mathsf{L}}$. Also $P = h_1$ oder id_{V} und damit $P = \mathrm{id}_{\mathrm{V}}$ wegen $h_1 \notin \Gamma_{\mathsf{L}}$. Damit sind die fünf Γ_{L}-Klassen linear unabhängig.

Aus Dimensionsgründen muß auch $\Gamma_{\mathsf{L}}/\Gamma \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^5$ sein. Da die Γ-Klassen der vier Transformationen vom Typ $\mathrm{E}(e_i, 2e_j)$ und von $-h_1^2$ linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis. □

1.4 Hermitesch-Symplektische Matrizen und orthogonale Transformationen

Sei weiterhin $\mathrm{V} = \mathbb{R}^6$ mit quadratischer Form $\mathrm{q}(x) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - x_6^2$ bezüglich der Standardbasis $e_1,\ldots,e_6$. Wir ordnen jedem Vektor $x \in \mathrm{V}$ wie folgt eine (komplexe) Matrix zu:

$$x = (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) \longmapsto \mathcal{X} = \begin{pmatrix} x_0 & -x_3 & 0 & -x_1 \\ x_4 & -\overline{x_0} & x_1 & 0 \\ 0 & -x_2 & x_0 & x_4 \\ x_2 & 0 & -x_3 & -\overline{x_0} \end{pmatrix}$$

wobei $x_0 := x_5 - ix_6$.

Sei $\mathcal{V} \subseteq \mathrm{M}^{4\times4}(\mathbb{C})$ die Menge dieser Matrizen. Die Zuordnung $\mathrm{V} \longrightarrow \mathcal{V}; x \longmapsto \mathcal{X}$ ist $\mathbb{R}$-linear (Isomorphismus). Damit überträgt sich die $\mathrm{O}(\mathrm{V})$-Operation auf $\mathcal{V}$, insbesondere gilt $h_2(\mathcal{X}) = \overline{\mathcal{X}}$.
Dabei transformiert sich die quadratische Form:

$$-\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} = \mathrm{q}(x)E_4, \text{ d. h. } \mathrm{q}(\mathcal{X}) := \mathrm{q}(x) = -\tfrac{1}{4}\,\mathrm{spur}(\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}}) = -(\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}})_{11}$$

(oder jedes andere Diagonalelement). Damit gilt $\mathrm{q}(x)^4 = \det(-\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}}) = |\det(\mathcal{X})|^2$ also $|\det(\mathcal{X})| = \mathrm{q}(x)^2$. Tatsächlich ist $\det(\mathcal{X}) = \mathrm{q}(x)^2$.

Für die Bilinearform gilt:

$$\langle \mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle := \langle x,y\rangle = -(\mathcal{X}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{X}})_{11} \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{X}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{X}} = -\langle x,y\rangle E_4$$

wenn $x \longmapsto \mathcal{X}$ und $y \longmapsto \mathcal{Y}$, denn

$$\begin{aligned}\langle x,y\rangle E_4 = \mathrm{q}(x+y)E_4 - \mathrm{q}(x)E_4 - \mathrm{q}(y)E_4 &= -(\mathcal{X}+\mathcal{Y})\overline{(\mathcal{X}+\mathcal{Y})} + \mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}} \\ &= -\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} - \mathcal{Y}\overline{\mathcal{X}} - \mathcal{X}\overline{\mathcal{Y}} - \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{Y}} = -(\mathcal{X}\overline{\mathcal{Y}} + \mathcal{Y}\overline{\mathcal{X}})\end{aligned}$$

Notation 1.28. *Wir schreiben* $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} G_{x_3,x_4,x_5,x_6} & x_1 J \\ x_2 J & G'_{x_3,x_4,x_5,x_6} \end{pmatrix}$ *mit* $J := \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ *und* $G_{a,b,c,d} := \left(\begin{smallmatrix} c-id & -a \\ b & -c-id \end{smallmatrix}\right)$.

Definition 1.29. *Eine Matrix* $M \in \mathrm{M}^{2n\times 2n}(\mathbb{C})$ *heißt hermitesch-symplektisch, wenn* $\overline{M}' I_n M = I_n$ *gilt, wobei* $I_n := \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{smallmatrix}\right)$. *Die Gruppe dieser Matrizen wird mit* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$, *die Untergruppe der Matrizen mit Determinante* 1 *mit* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})_1$ *bezeichnet. Die Untergruppen der Matrizen mit Einträgen in* $\mathbb{Z}[i]$ *werden mit* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}[i])$ *und* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}[i])_1$ *bezeichnet.*

Wie im reellen Fall zeigt man (vgl. [Fr2]):

Bemerkung 1.30. *Die Matrizen* I_n *und* $\left(\begin{smallmatrix} E_n & S \\ 0 & E_n \end{smallmatrix}\right)$ *mit* $\overline{S}' = S$ *erzeugen* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})_1$. *Zusammen mit den Matrizen* $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}'^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ *mit* $A \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^n)$ *erzeugen sie* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$. *Das gleiche gilt für* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}[i])_1$ *und* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}[i])$, *wenn man verlangt, daß die Matrizen* S *und* A *Einträge in* $\mathbb{Z}[i]$ *haben und* A *unimodular ist.*

Die Determinante einer hermitesch-symplektischen Matrix hat Betrag 1. *Für Matrizen in* $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}[i])$ *ist die Determinante* ± 1.

Satz 1.31. *Auf* $\mathcal{V}$ *(und damit* V*) operieren die hermitesch-symplektischen* 4×4*-Matrizen mit Determinante* 1 $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ *als orthogonale Transformationen:*

$$(M,\mathcal{X}) \longmapsto M(\mathcal{X}) := M\mathcal{X}\overline{M}^{-1},$$

d. h. es gilt:

1. $M(\mathcal{X}) \in \mathcal{V}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V},\ \forall M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$, *und für festes* M *ist* $\mathcal{X} \longmapsto M(\mathcal{X})$ *ein Endomorphismus des* $\mathbb{R}$*-Vektorraums* $\mathcal{V}$.
2. $M(N(\mathcal{X})) = (MN)(\mathcal{X})\ \forall M,N \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1,\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}$
3. q *bleibt erhalten:* $\mathrm{q}(\mathcal{X}) = \mathrm{q}(M(\mathcal{X}))\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V},\ \forall M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$.

Wir setzen $I := I_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Zum Beweis beachte: Für $M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ gilt $\overline{M}^{-1} = -I_n M' I_n$. Weiter gilt $AJA' = \det(A)J$ für beliebige Matrizen $A \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{C})$ und jede antisymmetrische 2×2-Matrix ist von der Form αJ.

Beweis. *2.* ist klar und daher genügt es *1.* für die Erzeuger I und $T_S := \left(\begin{smallmatrix} E_2 & S \\ 0 & E_2 \end{smallmatrix}\right)$, $S = \overline{S}'$, von $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ zu zeigen. *3.* ist einfach (von vornherein ist klar, daß $\mathrm{q}(\mathcal{X})^2 = |\det(\mathcal{X})|$, also $\mathrm{q}(\mathcal{X})$ bis aufs Vorzeichen, erhalten ist):

$$-M(\mathcal{X})\overline{M(\mathcal{X})} = -M\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}}M^{-1} = -\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} \quad (\text{beachte } \mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} \in \mathbb{C}E_4)$$

Für den Erzeuger I gilt

$$I(\mathcal{X}) = I\mathcal{X}\overline{I}^{-1} = -I\mathcal{X}I = \begin{pmatrix} G' & -x_2 J \\ -x_1 J & G \end{pmatrix} = \mathcal{X}'$$

also $I(\mathcal{X}) \in \mathcal{V}$. Dabei haben wir abgekürzt: $G := G_{x_1,x_2,x_5,x_6}$.

Betrachte jetzt T_S mit $S = \overline{S}' = \left(\begin{smallmatrix} s_0 & s_1 \\ \overline{s_1} & s_2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$T_S(\mathcal{X}) = -T_S \mathcal{X} I T_S' I = \begin{pmatrix} G + x_2 SJ & x_1 J - x_2 SJS' - GS' + SG' \\ x_2 J & G' - x_2 JS' \end{pmatrix}$$

Der 1,1- und 2,2-Block sind transponiert zueinander, der 1,2-Block ist antisymmetrisch also von der Form αJ, und der 2,1-Block hat sowieso die verlangte Form. Wegen $SJ = G_{s_0,s_2,\operatorname{Re} s_1,-\operatorname{Im} s_1}$ haben die Diagonalblöcke die gesuchte Form (beachte $s_0, s_2 \in \mathbb{R}$). Es bleibt die Frage, ob der 1,2-Block reell ist. Die Matrizen $x_1 J$ und $-x_2 SJS' = -x_2 \det(S) J$ sind reell. Es gilt $-GS' + SG' = (-x_3 s_2 - x_4 s_0 + 2x_5 \operatorname{Re} s_1 - 2x_6 \operatorname{Im} s_1) J$, also ist der 1,2-Block reell und damit $T_S(\mathcal{X}) \in \mathcal{V}$.

Damit ist $M(\mathcal{X}) \in \mathcal{V}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V},\ \forall M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ gezeigt. Die Abbildung $\mathcal{X} \longmapsto M(\mathcal{X})$ ist offensichtlich $\mathbb{R}$-linear, d. h. *1.* und damit der Satz ist bewiesen. □

Wir erhalten also einen Homomorphismus von $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ nach $\mathrm{O}(\mathcal{V})$ bzw. $\mathrm{O(V)}$. Es gilt:

Satz 1.32. *Der Kern des Homomorphismus* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{O(V)}$ *ist* $\{\pm E_4\}$. *Das Bild ist die Untergruppe* $\mathrm{SO^+(V)}$. *Es gilt also*

$$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 / \{\pm E_4\} \cong \mathrm{SO^+(V)}.$$

Folgerung 1.33. *Die Gruppe* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ *operiert auf* $\mathcal{H}$. *Genau die Matrizen aus* $\langle iE_4 \rangle$ *wirken als Identität.*

Beweis. Die Gruppe $\mathrm{O^+(V)}$ operiert auf $\mathcal{H}$, es gilt $iE_4 \longmapsto -\mathrm{id_V}$, und $\pm\mathrm{id_V} \in \mathrm{O(V)}$ sind die einzigen auf $\mathcal{H}$ trivialen Transformationen von $\mathrm{O^+(V)}$. □

Zum Beweis des Satzes: Die Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ liegt genau dann im Kern, wenn $M\mathcal{X}\overline{M}^{-1} = \mathcal{X}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}$, d. h. $M\mathcal{X} = \mathcal{X}\overline{M}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}$, gilt. Aus $x = e_1$ und $x = e_2$ folgt $B = C = 0$, also $D = \overline{A}'^{-1}$, und $\det A = 1$. Aus $x = e_3$ und e_4 folgt dann A diagonal und schließlich aus $x = e_5$ A skalar, und damit $A = \pm E_2$ also $M = \pm E_4$.

Das Bild ist enthalten in $\mathrm{SO^+(V)}$, denn $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ ist zusammenhängend und die Abbildung ist stetig, das Bild also in der Zusammenhangskomponente der Eins, d. h. $\mathrm{SO^+(V)}$, enthalten. Alternativ liegen die Bilder von I und T_S in $\mathrm{SO^+(V)}$ (siehe unten).

Zum Beweis der Surjektivität dehnen wir die Operation aus:

Satz 1.34. *Auf* $\mathcal{V}$ *operiert die Gruppe*

$$\mathrm{S} := \left\{ M \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{C});\ \overline{M}' I M = rI, r \in \mathbb{R}^*, \det M > 0 \right\}$$

via

$$(M, \mathcal{X}) \longmapsto M(\mathcal{X}) := M\mathcal{X}\overline{M}^{-1}$$

als Gruppe orthogonaler Transformationen, d. h. wir erhalten einen Homomorphismus $\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{O(V)}$.

Beweis. Zu beweisen sind die entsprechenden drei Punkte aus Satz 1.31. Die Punkte *2.* und *3.* sind klar, der erste folgt aus Satz 1.31 und dem folgenden Lemma.

Lemma 1.35. *Die Gruppe* S *wird erzeugt von* $\widehat{J} := \left(\begin{smallmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{smallmatrix}\right)$, *den* αE_4 *mit* $\alpha > 0$ *und* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$*:*

$$\mathrm{S} = \langle \widehat{J}, \alpha E_4, \alpha > 0, \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rangle$$

Beweis. Es gilt $\alpha E_4 \in \mathrm{S}$ (mit $r = \alpha^2$ und $\det = \alpha^4 > 0$) und $\widehat{J} \in \mathrm{S}$ (mit $r = -1$ und $\det \widehat{J} = 1$).
Sei $M \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{C})$ mit $\overline{M}' I M = rI$ und $\det M > 0$. Ist $r > 0$, so liegt $\frac{1}{\sqrt{r}} M = (\frac{1}{\sqrt{r}} E_4) M$ in $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$:

$$\overline{\tfrac{1}{\sqrt{r}} M}' I \tfrac{1}{\sqrt{r}} M = \tfrac{1}{r} \overline{M}' I M = \tfrac{1}{r} r I = I$$

und

$$\det(\tfrac{1}{\sqrt{r}} M) = \tfrac{1}{r^2} \det M \in \mathbb{R}_{>0} \cap S^1 = \{1\},$$

wobei $S^1 = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{\det M; M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})\}$.
Ist $r < 0$, so können wir o. E. $r = -1$ annehmen, indem wir notfalls zu $\frac{1}{\sqrt{-r}} M$ übergehen. Dann ist aber $\widehat{J} M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$:

$$\overline{\widehat{J} M}' I \widehat{J} M = \overline{M}' \overline{\widehat{J}}' I \widehat{J} M = -\overline{M}' I M = -(-I) = I$$

und $\det(\widehat{J} M) = \det M \in S^1 \cap \mathbb{R}_{>0} = \{1\}$. □

Die $\alpha E_4, \alpha > 0$ operieren trivial und $\widehat{J}$ als die orthogonale Transformation

$$\begin{pmatrix} -E_2 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \in \mathrm{SO(V)} - \mathrm{SO}^+\mathrm{(V)}.$$

Damit ist Satz 1.34 bewiesen. □

Das Lemma zeigt weiter

$$\mathrm{S} = \mathrm{S}_{>0} \cup \widehat{J}\,\mathrm{S}_{>0} = \mathrm{S}_{>0} \cup \mathrm{S}_{>0}\,\widehat{J}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_{>0} &:= \left\{ M \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{C}); \overline{M}' I M = rI, r > 0, \det M > 0 \right\} \\ &= \langle \alpha E_4, \alpha > 0, \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rangle \end{aligned}$$

und daß das Bild enthalten in SO(V) und der Kern $\mathbb{R}E_4$ ist. Wir zeigen, daß das Bild ganz SO(V) ist.

Proposition 1.36. *Es gilt* $\mathcal{V}^* \subseteq \mathrm{S}$, *wobei* $\mathcal{V}^* := \{\mathcal{X} \in \mathcal{V}; \mathrm{q}(\mathcal{X}) \neq 0\}$. *Genauer gilt* $\overline{\mathcal{X}}' I \mathcal{X} = -\mathrm{q}(\mathcal{X}) I \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}$.

Beweis. Eine Matrix $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt $\overline{M}' I M = rI$ genau wenn $\overline{A}' C = \overline{C}' A$, $\overline{D}' B = \overline{B}' D$ und $\overline{A}' D - \overline{C}' B = r E_2$ gilt. Für $M \in \mathcal{V}$ ist $A = G$, $D = G'$, $B = x_1 J$ und $C = x_2 J$. Damit ist $\overline{A}' C = \overline{G}' x_2 J$ und $\overline{C}' A = -x_2 J G$ also $\overline{A}' C = \overline{C}' A$ wegen $\overline{G}' J = \left(\begin{smallmatrix} x_4 & -\overline{x_0} \\ -x_0 & x_3 \end{smallmatrix}\right) = -JG$ und analog $\overline{D}' B = \overline{B}' D$. Weiter gilt $\overline{A}' D - \overline{C}' B = \overline{G}' G' - (-x_2 J) x_1 J = (G\overline{G})' + x_2 x_1 J^2$ und $G\overline{G} = (|x_0|^2 - x_3 x_4) E_2$ also $\overline{A}' D - \overline{C}' B = -\mathrm{q}(x) E_2$ und damit $\overline{\mathcal{X}}' I \mathcal{X} = -\mathrm{q}(x) I$. Sowieso gilt $\det \mathcal{X} = \mathrm{q}(x)^2 \geq 0$. □

Folgerung 1.37. *Es gilt*

$$\{\mathcal{X} \in \mathcal{V};\, \mathrm{q}(x) = -1\} \subseteq \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$$

und

$$\begin{aligned}\{\mathcal{X} \in \mathcal{V};\, \mathrm{q}(x) = \pm 1\} \subseteq \mathrm{S}_\pm &:= \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1, \widehat{J}\,\rangle \\ &= \big\{M \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{C});\, \overline{M}' I M = \pm I, \det M = 1\big\}.\end{aligned}$$

Es ist also $\mathcal{X}\mathcal{Y}\overline{\mathcal{X}}^{-1} \in \mathcal{V}\ \forall \mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathcal{V}$. Wegen $\mathcal{X}\overline{\mathcal{X}} = -\,\mathrm{q}(x)E_4$ gilt $\overline{\mathcal{X}}^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{q}(x)}\mathcal{X}$ für nichtisotrope x. Damit gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{X}\mathcal{Y}\overline{\mathcal{X}}^{-1} &= \mathcal{X}\overline{h_2(\mathcal{Y})\mathcal{X}}^{-1} = -h_2(\mathcal{Y})\overline{\mathcal{X}}\,\overline{\mathcal{X}}^{-1} - \langle x, h_2(y)\rangle\overline{\mathcal{X}}^{-1} \\ &= -h_2(\mathcal{Y}) + \tfrac{\langle x,h_2(y)\rangle}{\mathrm{q}(x)}\mathcal{X} = -\sigma_x(h_2(\mathcal{Y})) \\ &= -h_2\left(\mathcal{Y} + \tfrac{\langle h_2(x),y\rangle}{\mathrm{q}(h_2(x))}h_2(\mathcal{X})\right) = -h_2(\sigma_{h_2(x)}(\mathcal{Y})),\end{aligned}$$

wobei wieder mit σ_a die Spiegelung mit Spiegelungsvektor $a \in \mathrm{V}$ bezeichnet sei (allgemein gilt $\sigma_a g = g\sigma_{g^{-1}(a)}$, beachte $h_2 = h_2^{-1}$). Wir haben also bewiesen, daß $\mathcal{X} \in \mathcal{V}^*$ im wesentlichen wie die Spiegelung längs x wirkt:

Lemma 1.38. *Für* $x \longmapsto \mathcal{X}$ *unter* $\mathrm{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ *mit* $\mathrm{q}(x) \neq 0$ *wirkt* $\mathcal{X} \in \mathcal{V}^* \subseteq \mathrm{S}$ *auf* V *als* $-h_2\sigma_{h_2(x)} = -\sigma_x h_2$.

Sei nun ein beliebiges $g \in \mathrm{SO(V)}$ gegeben, d. h. g ist Produkt einer geraden Anzahl von Spiegelungen, etwa $g = g_1 \ldots g_{2n}$ mit $g_i = \sigma_{a_i}, \mathrm{q}(a_i) \neq 0$. Wegen $h_2^2 = \mathrm{id_V}$ gilt

$$\begin{aligned}g &= g_1 g_2 h_2^2 g_3 g_4 h_2^2 \ldots g_{2n-1} g_{2n} h_2^2 \\ &= \sigma_{a_1}\sigma_{a_2} h_2^2 \sigma_{a_3}\sigma_{a_4} h_2^2 \ldots \sigma_{a_{2n-1}}\sigma_{a_{2n}} h_2^2 \\ &= \sigma_{a_1} h_2 \sigma_{h_2(a_2)} h_2 \sigma_{a_3} h_2 \sigma_{h_2(a_4)} h_2 \ldots \sigma_{a_{2n-1}} h_2 \sigma_{h_2(a_{2n})} h_2 \\ &= (-\sigma_{a_1}h_2)(-\sigma_{h_2(a_2)}h_2)(-\sigma_{a_3}h_2)(-\sigma_{h_2(a_4)}h_2)\ldots(-\sigma_{a_{2n-1}}h_2)(-\sigma_{h_2(a_{2n})}h_2),\end{aligned}$$

d. h. g ist Bild von $\mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_2}\ldots\mathcal{A}_{2n-1}\overline{\mathcal{A}_{2n}} \in \langle\mathcal{V}^*\rangle \subseteq \mathrm{S}$. Daher ist $\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{SO(V)}$ aus Satz 1.34 surjektiv.

Da $\alpha E_4, \alpha > 0$ trivial operiert, gilt dies auch für $\mathrm{S}_\pm$. Explizit sieht man dies genauso wegen $\sigma_{a_i} = \sigma_{|a_i|^{-1/2}a_i}$ und $\{\mathcal{X} \in \mathcal{V}; \mathrm{q}(x) = \pm 1\} \subseteq \mathrm{S}_\pm$.

Ist $g \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$, so ist eine gerade Anzahl der a_i, etwa $2m$, positiv. Nach Normierung gilt o. E. $\mathrm{q}(a_i) = \pm 1$, d. h. $\mathcal{A}_i$ und $\overline{\mathcal{A}_i} \in \mathrm{S}_\pm$. Damit ist $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1\overline{\mathcal{A}_2}\ldots\mathcal{A}_{2n-1}\overline{\mathcal{A}_{2n}} \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$, denn $\overline{\mathcal{A}}' I \mathcal{A} = (-1)^{2m} I = I$ und $\det(\mathcal{A}) = 1$ wegen $\det(\mathcal{A}_i) = \mathrm{q}(a_i)^2 = 1$. Also ist $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ surjektiv, d. h. Satz 1.32 bewiesen. Insgesamt haben wir gezeigt:

Satz 1.39. *Die Abbildung* $\mathrm{S} \longrightarrow \mathrm{SO(V)}$ *ist surjektiver Homomorphismus mit Kern* $\mathbb{R}E_4$. *Durch Einschränken werden surjektive Homomorphismen induziert:*

- $\mathrm{S}_\pm \twoheadrightarrow \mathrm{SO(V)}$ *mit Kern* $\{\pm E_4\}$
- $\mathrm{S}_{>0} \twoheadrightarrow \mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ *mit Kern* $\mathbb{R}E_4$
- $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ *mit Kern* $\{\pm E_4\}$

Spezielle Bilder und Urbilder unter $\mathbf{Sp(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow O(V)}$

Wir können die Operation von I auf V am Beweis zu Satz 1.31 ablesen:

$$I : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (-x_2, -x_1, -x_4, -x_3, x_5, x_6),$$

d. h.

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E_2 \\ -E_2 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto l = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend $T_S, S = \overline{S}' = \left(\begin{smallmatrix} s_0 & s_1 \\ \overline{s_1} & s_2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto (&x_1 - x_2 \det(S) - x_3 s_2 - x_4 s_0 + 2x_5 \operatorname{Re} s_1 - 2x_6 \operatorname{Im} s_1, \\ &x_2, x_3 + x_2 s_0, x_4 + x_2 s_2, x_5 + x_2 \operatorname{Re} s_1, x_6 - x_2 \operatorname{Im} s_1),\end{aligned}$$

d. h.

$$T_S = \begin{pmatrix} E_2 & S \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & -\det(S) & -s_2 & -s_0 & 2\operatorname{Re} s_1 & -2\operatorname{Im} s_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re} s_1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\operatorname{Im} s_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite ist die Eichlertransformation $\mathrm{E}(e_1, (0, 0, -s_0, -s_2, -\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Im} s_1))$ (siehe Seite 19), d. h.

$$T_S \longmapsto \mathrm{E}(e_1, s) \quad \text{mit } s = (0, 0, -s_0, -s_2, -\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Im} s_1)$$

bzw.

$$T_R \longmapsto \mathrm{E}(e_1, r) \quad \text{mit } r = (0, 0, r_3, r_4, r_5, r_6) \text{ und } R = \left(\begin{smallmatrix} -r_3 & -r_5 + ir_6 \\ -r_5 - ir_6 & -r_4 \end{smallmatrix}\right).$$

Folgerung 1.40. *Die Gruppe* $\mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ *ist von den Eichlertransformationen vom Typ* $\mathrm{E}(e_i, v), v \in \mathrm{V}, v \perp e_i, i \in \{1, 2\}$ *erzeugt.*

Beweis. Die Abbildung $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ ist surjektiv, die Matrizen I und T_S, $S = \overline{S}'$, erzeugen $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})_1$ und l ist Produkt von solchen Eichlertransformationen (vgl. Seite 18). □

Weiter gilt für $S = \overline{S}' = \left(\begin{smallmatrix} s_0 & s_1 \\ \overline{s_1} & s_2 \end{smallmatrix}\right)$:

$$\widetilde{T}_S := \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ S & E_2 \end{pmatrix} \longmapsto \mathrm{E}(e_2, \tilde{s}) \quad \text{mit } \tilde{s} = (0, 0, s_2, s_0, -\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Im} s_1)$$

bzw.

$$\widetilde{T}_R \longmapsto \mathrm{E}(e_2, \tilde{r}) \quad \text{mit } \tilde{r} = (0, 0, r_3, r_4, r_5, r_6) \text{ und } R = \left(\begin{smallmatrix} r_4 & -r_5 + ir_6 \\ -r_5 - ir_6 & r_3 \end{smallmatrix}\right),$$

denn $\widetilde{T}_S = -IT_{-S}I \longmapsto l\,\mathrm{E}(e_1, -s)l^{-1} = \mathrm{E}(-e_2, -l(s)) = \mathrm{E}(e_2, l(s))$ mit s wie oben und $l(s) = \tilde{s}$.

Offensichtlich gilt

$$\pm iE_4 \longmapsto -E_6 = -\operatorname{id}_{\mathrm{V}}.$$

Allgemeiner gilt für $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$:

$$D_A := \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}'^{-1} \end{pmatrix} \longmapsto$$

$$\det(A)^{-1} \begin{pmatrix} \det(A)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |a_1|^2 & |a_2|^2 & 2\operatorname{Re}(a_1\overline{a}_2) & 2\operatorname{Im}(a_1\overline{a}_2) \\ 0 & 0 & |a_3|^2 & |a_4|^2 & 2\operatorname{Re}(a_3\overline{a}_4) & 2\operatorname{Im}(a_3\overline{a}_4) \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}(a_1\overline{a}_3) & \operatorname{Re}(a_2\overline{a}_4) & \operatorname{Re}(a_1\overline{a_4}+a_2\overline{a_3}) & \operatorname{Im}(a_1\overline{a_4}-a_2\overline{a_3}) \\ 0 & 0 & -\operatorname{Im}(a_1\overline{a}_3) & -\operatorname{Im}(a_2\overline{a}_4) & -\operatorname{Im}(a_1\overline{a_4}+a_2\overline{a_3}) & \operatorname{Re}(a_1\overline{a_4}-a_2\overline{a_3}) \end{pmatrix}$$

wie man an $\mathcal{X} \longmapsto D_A \mathcal{X} \overline{D_A}^{-1}$ abliest. Insbesondere also

$$D_A \longmapsto (ab)^{-1} \begin{pmatrix} (ab)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |a|^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & |b|^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \operatorname{Re}(a\overline{b}) & \operatorname{Im}(a\overline{b}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\operatorname{Im}(a\overline{b}) & \operatorname{Re}(a\overline{b}) \end{pmatrix} \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

und

$$D_A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & |a|^2 & 2\operatorname{Re}(a) & -2\operatorname{Im}(a) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \operatorname{Re}(a) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{Im}(a) & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\left(e_3, -\operatorname{Re}(a)e_5 + \operatorname{Im}(a)e_6\right) \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$D_A \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & |a|^2 & 1 & 2\operatorname{Re}(a) & 2\operatorname{Im}(a) \\ 0 & 0 & \operatorname{Re}(a) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Im}(a) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}\left(e_4, \operatorname{Re}(a)e_5 + \operatorname{Im}(a)e_6\right) \quad \text{für } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Speziell

$$\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -E_4 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} = -h_1^2,$$

$$\pm \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} E_4 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{pmatrix} = h_1^2,$$

$$\pm \frac{1-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} E_4 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} = h_1.$$

Urbilder unter $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V})$ von Untergruppen

Zunächst interessiert die Untergruppe $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$. Wegen $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \cap \mathrm{Bild}(\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1) = \mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$ untersuchen wir $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$. Nach Folgerung 1.14 (Seite 18) wird $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$ erzeugt von h_1 und $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$, und $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$ wird erzeugt von l und $\mathrm{E}(e_1, e_j)$, $j \in \{3,4,5,6\}$. Das Urbild von $\mathrm{EO}(\mathsf{L})$ wird also erzeugt von $\pm I$ und $\pm T_{S_j}$, $j \in \{3,4,5,6\}$ mit $S_3 = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $S_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $S_5 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $S_6 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrizen erzeugen gerade $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$. Somit wird das Urbild von $\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})$ bzw. $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ erzeugt von $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$ und vom Urbild von h_1: $\pm H_1$, wobei $H_1 := \frac{1-i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} i & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & & i & \\ & 0 & & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Es gilt also

Satz 1.41. *Der Homomorphismus* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V})$ *induziert durch Einschränken surjektive Homomorphismen*

$$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1 \twoheadrightarrow \mathrm{EO}(\mathsf{L})$$

und

$$\widetilde{\mathrm{G}} := \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1 \rangle \twoheadrightarrow \mathrm{SO}^+(\mathsf{M}).$$

Es gilt: Das Urbild von $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *ist* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *und* $\widetilde{\mathrm{G}}$ *ist Erweiterung von* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$ *vom Index 2. Jedes* $M \in \widetilde{\mathrm{G}}$ *hat also insbesondere eindeutige Darstellungen* $M = H_1 M_1$ *bzw.* $M = M_2 H_1$ *mit* $M_i \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$.

Beweis. $H_1^2 = i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & 0 & \\ & -1 & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ & 0 & & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$. Der Rest ist bereits gezeigt. □

Folgerung 1.42. *Es gilt* $h_1^2 \in \mathrm{EO}(\mathsf{L})$, *also* $[\mathrm{SO}^+(\mathsf{M}) : \mathrm{EO}(\mathsf{L})] = 2$.

Notation 1.43. *Für Urbilder von Untergruppen* $H \leq \mathrm{O}(\mathrm{V})$ *schreiben wir* $\widetilde{H}$.

Definition 1.44. *Es sei* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) = \mathrm{O}^+(\mathsf{L})$ *mit* G *bezeichnet.*

Damit ist $\widetilde{\mathrm{G}}$ das Urbild von G und daher die Notation konsistent.

Wir sind an den Gruppen Γ und Γ_{N} bzw. deren Urbilder $\widetilde{\Gamma}$ und $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ interessiert. Dabei werden Kongruenzgruppen auftreten.

Definition 1.45. *Die (hermitesch-symplektische) Hauptkongruenzgruppe* $\Gamma_n(l)$ *der Stufe* $l \in \mathbb{Z}[i]$ *ist der Kern des natürlichen Homomorphismus*

$$\mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}[i]) \longrightarrow \mathrm{Sp}\Big(n, {}^{\mathbb{Z}[i]}\!/_{l\mathbb{Z}[i]}\Big)$$

d. h.

$$\Gamma_n(l) = \{M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{Z}[i]);\ M \equiv E_{2n} \bmod l\mathbb{Z}[i] \text{ (komponentenweise)}\}.$$

Mit $\mathrm{S}\Gamma_n(l)$ *sei* $\Gamma_n(l) \cap \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})_1$ *bezeichnet. Im Fall* $n = 2$ *schreiben wir auch* $\Gamma(l)$ *und* $\mathrm{S}\Gamma(l)$ *statt* $\Gamma_2(l)$ *und* $\mathrm{S}\Gamma_2(l)$.

In dieser Arbeit wird $l \in \{1+i, 2, 4\}$ auftreten; es gilt $\Gamma(l) = \mathrm{S}\Gamma(l)$ für $l \in 2\mathbb{Z}[i]$.

Definition 1.46. *Sei* $\mathsf{G} \subseteq \mathrm{V}$ *ein Gitter. Mit* $\mathcal{V}_\mathsf{G}$ *sei das Bild von* G *unter* $\mathrm{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ *von oben bezeichnet.*

Proposition 1.47. *Es gilt*

i) $\mathcal{V}_\mathsf{L} = \mathcal{V} \cap \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$

ii) $\mathcal{V}_\mathsf{M} = \{\mathcal{X} \in \mathcal{V}_\mathsf{L}; \mathcal{X}_{ij} \in 2\mathbb{Z} \text{ für } i \neq j\}$
$\supseteq \mathcal{V} \cap 2\,\mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$,
d. h. $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_\mathsf{M}$ *läßt sich schreiben als* $\mathcal{X} = x_0 E_4 + 2N$ *mit* $N \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$ *(*$x_0 \in \mathbb{Z}[i]$ *kann noch* $\bmod 2$ *reduziert werden).*

iii) $\mathcal{V}_\mathsf{N} = \frac{1}{2}\mathcal{V}_{2\mathsf{N}}$ *und*
$\mathcal{V}_{2\mathsf{N}} = \{\mathcal{X} \in \mathcal{V}_\mathsf{L}; \mathcal{X}_{ij} \in 2\mathbb{Z} \text{ für } i \neq j, \mathcal{X}_{ii} \in (1+i)\mathbb{Z}[i]\ \forall i\}$
$= \{\mathcal{X} \in \mathcal{V}_\mathsf{L}; \mathcal{X}_{ij} \in (1+i)\mathbb{Z}[i]\ \forall i,j\}$
$= \mathcal{V} \cap (1+i)\,\mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$
d. h. $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_\mathsf{N}$ *läßt sich schreiben als* $\mathcal{X} = x_0 E_4 + N$ *mit* $N \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$ *(*$x_0 \in \frac{1+i}{2}\mathbb{Z}[i]$ *kann noch* $\bmod 1$ *reduziert werden).*

Beweis. *ii)* : $-\overline{x_0} \equiv x_0 \bmod 2$ für $x_0 \in \mathbb{Z}[i]$.

iii) : $(1+i)\mathbb{Z}[i] = \{z = x + iy;\ x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \bmod 2\}$ sowie $(1+i)\mathbb{Z}[i] \cap \mathbb{R} = 2\mathbb{Z}$. □

Zur Bestimmung von $\widetilde{\Gamma}$ untersuche zunächst die Gruppe, welche auf den Elementen der Ordnung 2 von M'/M, d. h. auf $(\frac{1}{2}\mathsf{M})/\mathsf{M} = \mathsf{L}'/\mathsf{M} \subseteq \mathsf{M}'/\mathsf{M}$ trivial operiert. Dies ist genau die Gruppe, die auf $\mathsf{M}'/\mathsf{L} = (\frac{1}{2}\mathsf{L})/\mathsf{L}$ trivial operiert (Lemma 1.2), also Γ_L bzw. $\widetilde{\Gamma_\mathsf{L}}$. Es gilt $\Gamma \subseteq \Gamma_\mathsf{L} \subseteq \Gamma_\mathsf{N}$.

Sei nun $M \in \mathrm{S}\Gamma(\alpha)$, d. h. von der Form $E_4 + \alpha N$ mit $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ und $N \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$. Damit gilt

$$\begin{aligned} M\mathcal{X}\overline{M}^{-1} &= -M\mathcal{X}IM'I \\ &= -\mathcal{X}I^2 - \alpha N\mathcal{X}I^2 - \alpha\mathcal{X}IN'I - \alpha^2 N\mathcal{X}IN'I \\ &\equiv \mathcal{X} \bmod \alpha\,\mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_\mathsf{L} \end{aligned}$$

d. h.

$$M\mathcal{X}\overline{M}^{-1} - \mathcal{X} \in \alpha\,\mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i]) \cap \mathcal{V}\ \ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_\mathsf{L} \text{ für } M \in \mathrm{S}\Gamma(\alpha).$$

Somit ist $\mathrm{S}\Gamma(1+i) \subseteq \widetilde{\Gamma_\mathsf{N}}, \Gamma(2) \subseteq \widetilde{\Gamma_\mathsf{L}}$ und $\Gamma(4) \subseteq \widetilde{\Gamma_\mathsf{M}} = \widetilde{\Gamma}$. Weiter gilt $iE_4 \longmapsto -\mathrm{id}_\mathcal{V}$ also $iE_4 \in \widetilde{\Gamma_\mathsf{L}}$.

Lemma 1.48. *Für* $\widetilde{\Gamma}$, $\widetilde{\Gamma_\mathsf{L}}$ *und* $\widetilde{\Gamma_\mathsf{N}}$ *gelten die folgenden hinreichenden Bedingungen für* $M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1$*:*

- $M \in \mathrm{S}\Gamma(1+i) \Longrightarrow M \in \widetilde{\Gamma_\mathsf{N}}$
- $M \in \langle \Gamma(2), iE_4 \rangle \Longrightarrow M \in \widetilde{\Gamma_\mathsf{L}}$
- *Es sei* $\mathfrak{M}$ *die Menge aller Matrizen* $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1, A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right), B, C, D$ *entsprechend, mit* $M \equiv E_4$ *oder* $iE_4 \bmod 2$ *sowie* $A \equiv D', a_1 \equiv \overline{a_4}, B \equiv b_2 J$ *und* $C \equiv c_2 J \bmod 4$. *Damit gilt:*
  $M \in \mathfrak{M} \Longrightarrow M \in \widetilde{\Gamma}$

Beweis. Nur die Behauptung für $\widetilde{\Gamma}$ ist noch zu beweisen. Es gilt $H_1^2 \in \widetilde{\Gamma}$, denn $H_1^2 \longmapsto h_1^2$ und $h_1^2 = \left(\begin{smallmatrix} E_4 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$. Aber auch $H_1^2 = i \left(\begin{smallmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & 0 \\ & & 1 & \\ & 0 & & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \mathfrak{M}$. Es sei $\mathfrak{M}_0 := \mathfrak{M} \cap \Gamma(2)$. Die Transformation $M \longmapsto H_1^2 M$ führt $\mathfrak{M}_0$ in $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_0$ über und umgekehrt. Es genügt also, $M \in \mathfrak{M}_0 \Longrightarrow M \in \widetilde{\Gamma}$ zu zeigen.

Dazu schreibe $M = E_4 + 2N$ mit $N = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i]), A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right), B, C, D$ entsprechend (statt M). Die Matrix N erfüllt also $A \equiv D', a_1 \equiv a_4, B \equiv b_2 J$ und $C \equiv c_2 J \bmod 2$. Zu zeigen ist $M\mathcal{X}\overline{M}^{-1} - \mathcal{X} = 2[N\mathcal{X} - \mathcal{X}IN'I - 2N\mathcal{X}IN'I] \overset{!}{\in} \mathcal{V}_{2\mathsf{M}}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{L}}$, d. h. $\widehat{N} := N\mathcal{X} - \mathcal{X}IN'I - 2N\mathcal{X}IN'I \overset{!}{\in} \mathcal{V}_{\mathsf{M}}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{L}}$, also $\widehat{N} \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$ (das ist klar) diagonal modulo 2. Wegen $-IN'I = \left(\begin{smallmatrix} D' & -B' \\ -C' & A' \end{smallmatrix}\right) \equiv \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) = N \bmod 2$ gilt $\widehat{N} \equiv N\mathcal{X} + \mathcal{X}N \bmod 2$ also $\widehat{N} \equiv \left(\begin{smallmatrix} AG+GA+x_2BJ+x_1JC & BG'+GB+x_1(AJ+JD) \\ CG+G'C+x_2(DJ+JA) & DG'+G'D+x_1CJ+x_2JB \end{smallmatrix}\right) \bmod 2$ (dabei sei $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} G & x_1 J \\ x_2 J & G' \end{smallmatrix}\right)$ und $G = G_{x_3,x_4,x_5,x_6}$). Die Matrizen BJ, CJ, JB und JC sind diagonal modulo 2, $AG+GA$ auch (betrachte dazu die vier Basisfälle $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{smallmatrix}\right)$ für G). Schließlich ist $BG' + GB$ und entsprechend $CG + G'C$ ebenso wie $AJ + JD$ und $DJ + JA$ kongruent Null und damit $\widehat{N}$ diagonal modulo 2. □

Zur Herleitung notwendiger Bedingungen benutzen wir das folgende

Lemma 1.49. *Seien* $\mathsf{G} \subseteq \mathsf{H} \subseteq \mathrm{V}$ *unter* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *invariante Gitter und* $M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1$. *Dann liegt das Bild in* $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ *von* M *genau dann in* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{G}, \mathsf{H})$, *wenn*

$$M\mathcal{X} - \mathcal{X}\overline{M} \in \mathcal{V}_{\mathsf{G}}\overline{M} \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{H}}$$

gilt.

Beweis.

$$\begin{aligned} M \in \widetilde{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})(\mathsf{G}, \mathsf{H})} &\Longleftrightarrow M\mathcal{X}\overline{M}^{-1} - \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{G}} \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{H}} \\ &\Longleftrightarrow M\mathcal{X} - \mathcal{X}\overline{M} \in \mathcal{V}_{\mathsf{G}}\overline{M} \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{H}} \end{aligned}$$

□

Lemma 1.50. *Für* $M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1$ *sind die hinreichenden Bedingungen aus Lemma* 1.48 *notwendig, d. h.*

- $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} \cap \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 = \mathrm{S}\Gamma(1+i)$
- $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}} \cap \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 = \langle \Gamma(2), iE_4 \rangle$
- $\widetilde{\Gamma} \cap \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 = \mathfrak{M}$

Beweis. Es sei $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1$ mit $A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{smallmatrix}\right), B, C, D$ analog, und $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} G & x_1 J \\ x_2 J & G' \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{V}$ mit $G = G_{x_3,x_4,x_5,x_6}$. Es gilt

$$M\mathcal{X} - \mathcal{X}\overline{M} = \begin{pmatrix} AG - G\overline{A} + x_2BJ - x_1J\overline{C} & BG' - G\overline{B} + x_1(AJ - J\overline{D}) \\ CG - G'\overline{C} + x_2(DJ - J\overline{A}) & DG' - G'\overline{D} + x_1CJ - x_2J\overline{B} \end{pmatrix}.$$

Dies soll für alle $\mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{L}}$, d. h. $\mathcal{X}$ ganzzahlig, in $\mathcal{V}_{2\mathsf{N}}$ bzw. $\mathcal{V}_{2\mathsf{L}}$ bzw. $\mathcal{V}_{2\mathsf{M}}$ liegen, also insbesondere $\equiv 0 \bmod 1+i$ im Fall 2N bzw. $\equiv 0 \bmod 2$ in den Fällen 2L und 2M sein.

Betrachte jetzt spezielle $\mathcal{X}$: z. B. $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{smallmatrix}\right)$, d. h. $x_2 = 1, x_i = 0$ sonst. Es bleibt $\left(\begin{smallmatrix} BJ & 0 \\ DJ - J\overline{A} & -J\overline{B} \end{smallmatrix}\right) \overset{!}{\equiv} 0 \bmod 1+i$ bzw. 2. Somit muß $B \equiv 0 \bmod 1+i$ bzw. 2 sein. Wegen $DJ - J\overline{A} = \left(\begin{smallmatrix} d_2+\overline{a_3} & -d_1+\overline{a_4} \\ d_4-\overline{a_1} & -d_3-\overline{a_2} \end{smallmatrix}\right)$ muß $d_1 \equiv \overline{a_4} \bmod 1+i$ bzw. 2 sein. Entsprechend mit $x_1 = 1, x_i = 0$ sonst, muß $C \equiv 0 \bmod 1+i$ bzw. 2 sein. Für $\mathcal{X}$ mit $x_1 = x_2 = 0$ bleibt $\left(\begin{smallmatrix} AG - G\overline{A} & BG' - G\overline{B} \\ CG - G'\overline{C} & DG' - G'\overline{D} \end{smallmatrix}\right) \overset{!}{\equiv} 0 \bmod 1+i$ bzw. 2 übrig (dies ist für die Nebendiagonalblöcke bereits erfüllt). Betrachte jetzt spezielle G: z. B. $G = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, d. h. $x_3 = -1, x_i = 0$ sonst, bzw. $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Damit ist $AG - G\overline{A} = \left(\begin{smallmatrix} -\overline{a_3} & a_1 - \overline{a_4} \\ 0 & a_3 \end{smallmatrix}\right)$ bzw. $\left(\begin{smallmatrix} a_2 & 0 \\ a_4 - \overline{a_1} & -\overline{a_2} \end{smallmatrix}\right)$, also muß $a_2 \equiv a_3 \equiv 0$ und $a_1 \equiv \overline{a_4} \bmod 1+i$ bzw. 2 sein. Entsprechend folgt aus $DG' - G'\overline{D}$ auch $d_2 \equiv d_3 \equiv 0$ und $d_1 \equiv \overline{d_4} \bmod 1+i$ bzw. 2. Wegen $z \equiv \overline{z} \bmod (1+i)\mathbb{Z}[i]$ bzw. $2\mathbb{Z}[i]$ für $z \in \mathbb{Z}[i]$ muß also insgesamt $A \equiv D \equiv a_1 E_2$ und damit $M \equiv a_1 E_4$ sein. Wegen $1 = \det M \equiv a_1^4 \bmod (1+i)\mathbb{Z}[i]$ bzw. $2\mathbb{Z}[i]$ muß $a_1 \equiv 1 \bmod (1+i)\mathbb{Z}[i]$ bzw. $a_1 \equiv 1$ oder $i \bmod 2\mathbb{Z}[i]$ sein. Damit sind die ersten beiden Behauptungen bewiesen.

Für die dritte Behauptung betrachten wir noch Kongruenzen modulo $4\mathbb{Z}[i]$: $M\mathcal{X} - \mathcal{X}\overline{M}$ muß modulo 4 Skalarmatrix sein, denn $\mathcal{Y} \in \mathcal{V}_{2\mathsf{M}}\overline{M}$ ist von der Form $(2y_0E_4 + 4N)(\overline{a_1}E_4 + 2\tilde{N}) \equiv 2y_0a_1E_4 \bmod 4$, d. h. die Diagonalelemente müssen kongruent mod 4 zueinander und die Nebendiagonalelemente kongruent 0 mod 4 sein. Wir betrachten wieder die speziellen $\mathcal{X}$ wie oben und erhalten die notwendigen Bedingungen $b_1 \equiv b_4 \equiv 0$, $b_2 \equiv b_3$, $d_1 \equiv \overline{a_4}$, $d_4 \equiv \overline{a_1}$, $d_2 \equiv -\overline{a_3} \equiv a_3$ und $d_3 \equiv a_2$ aus $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ J & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $c_1 \equiv c_4 \equiv 0$, $c_2 \equiv c_3$ aus $\mathcal{X} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und schließlich $a_1 \equiv \overline{a_4}$ aus $G = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $x_3 = x_4 = 0$. Insgesamt also $d_1 \equiv a_1$ und $d_4 \equiv a_4$ und damit $A \equiv D'$, $a_1 \equiv \overline{a_4}$, $B \equiv \left(\begin{smallmatrix} 0 & b_2 \\ b_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \equiv b_2 J$ und $C \equiv \left(\begin{smallmatrix} 0 & c_2 \\ c_2 & 0 \end{smallmatrix}\right) \equiv c_2 J \bmod 4$ wie behauptet. □

Es bleiben die nicht-ganzzahligen Urbilder, d. h. $H_1\,\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$, von $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ zu untersuchen. Es gilt $h_1 \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ und damit

$$\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1 \rangle = \mathrm{S}\Gamma(1+i) \cup H_1\,\mathrm{S}\Gamma(1+i),$$

denn $-H_1 \in H_1\,\mathrm{S}\Gamma(1+i)$. Aber $h_1 \notin \Gamma_{\mathsf{L}}$ (also erst recht $h_1 \notin \Gamma$). Tatsächlich gilt

Lemma 1.51. *Es gilt* $H_1\,\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1 \cap \widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}} = \phi$.

Beweis. Wir nehmen an, es gibt ein $M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$ mit $H_1M \in \widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}}$, also $H_1M\mathcal{X} - \mathcal{X}\overline{H_1M} \in \mathcal{V}_{2\mathsf{L}}\overline{H_1M}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{L}}$. Multiplizieren wir diese Bedingung mit $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$, so erhalten wir mit $N := \frac{\sqrt{2}}{1+i}H_1M \in \mathrm{M}^{4\times 4}(\mathbb{Z}[i])$, also $\overline{H_1M} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\overline{N}$, wegen $\frac{1-i}{1+i} = -i$ die ganzzahlige Bedingung $N\mathcal{X} + i\mathcal{X}\overline{N} \in \mathcal{V}_{2\mathsf{L}}i\overline{N}\ \forall \mathcal{X} \in \mathcal{V}_{\mathsf{L}}$, also insbesondere $N\mathcal{X} + i\mathcal{X}\overline{N} \equiv 0 \bmod 2$. Schreiben wir $N = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$, so gilt $N\mathcal{X} + i\mathcal{X}\overline{N} = \left(\begin{smallmatrix} AG + iG\overline{A} + x_2BJ + ix_1J\overline{C} & BG' + iG\overline{B} + x_1(AJ + iJ\overline{D}) \\ CG + iG'\overline{C} + x_2(DJ + iJ\overline{A}) & DG' + iG'\overline{D} + x_1CJ + ix_2J\overline{B} \end{smallmatrix}\right)$. Wir erhalten $B \equiv C \equiv 0$ aus x_1 oder $x_2 = 1$ und $x_i = 0$ sonst, und $a_2 \equiv a_3 \equiv 0$ und $a_1 + i\overline{a_4} \equiv 0$ und entsprechend für die d_i aus x_3 oder $x_4 = 1$ und $x_i = 0$ sonst, und schließlich $a_1 + i\overline{d_4} \equiv 0 \equiv a_4 + i\overline{d_1} \bmod 2$ erneut aus x_1 oder $x_2 = 1$ und $x_i = 0$ sonst. Schreiben wir jetzt $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$ für M statt $N = \frac{\sqrt{2}}{1+i}H_1M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & \\ & -i & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & -i \end{pmatrix} M$, so müssen die Kongruenzen $B \equiv C \equiv 0$, $a_2 \equiv a_3 \equiv d_2 \equiv d_3 \equiv 0$ und $0 \equiv a_1 + i\overline{(-ia_4)} = a_1 - \overline{a_4}$, also $a_1 \equiv \overline{a_4}$, und $a_1 \equiv \overline{d_4}$ und $a_4 \equiv \overline{d_1}$ also insgesamt $a_1 \equiv \overline{a_4} \equiv d_1 \equiv \overline{d_4}$ und damit $a_1 \equiv a_4 \equiv d_1 \equiv d_4$ erfüllt sein. Daraus folgt $M \equiv a_1E_4 \bmod 2$ und damit wegen der Determinante $M \equiv E_4$ oder $iE_4 \bmod 2$ also $M \in \widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}}$. Dann ist aber $H_1 \in \widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}}$. Widerspruch. □

Damit ist bewiesen:

Satz 1.52. *Es gilt:*

- $\widetilde{\mathrm{G}} = \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1 \cup H_1\,\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$
- $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1\rangle = \mathrm{S}\Gamma(1+i) \cup H_1\,\mathrm{S}\Gamma(1+i)$
- $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}} = \langle \Gamma(2), iE_4\rangle = \Gamma(2) \cup i\Gamma(2)$
- $\widetilde{\Gamma} = \mathfrak{M} = \big\{M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1;\ A = \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4\end{smallmatrix}\right), B, C, D$ *entsprechend,*
  mit $M \equiv E_4$ *oder* $iE_4 \bmod 2$
  und $A \equiv D', a_1 \equiv \overline{a_4}, B \equiv b_2 J$ *und* $C \equiv c_2 J \bmod 4\big\}$

Die Bilder sind die jeweiligen speziellen Gruppen in $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$.

Zur Struktur von $\widetilde{\Gamma} \subseteq \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} \subseteq \widetilde{\mathrm{G}}$

Natürlich muß

$$\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} \cong S_6 \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}/\widetilde{\Gamma} \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^{10}$$

gelten, denn dies gilt für die Bilder in $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ und die Gruppen enthalten den Kern $\langle -E_4\rangle$, z. B.

$$\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} \cong \widetilde{\mathrm{G}}/\langle -E_4\rangle \Big/ \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}/\langle -E_4\rangle \cong \mathrm{SG}/\mathrm{S}\Gamma_{\mathsf{N}} \cong \mathrm{G}/\Gamma_{\mathsf{N}} \cong S_6.$$

Dies läßt sich aber auch rein symplektisch zeigen:

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} \cong \widetilde{\mathrm{G}}/\langle iE_4\rangle \Big/ \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}/\langle iE_4\rangle &\cong \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])/\langle iE_4\rangle \Big/ \Gamma(1+i)/\langle iE_4\rangle \\ &\cong \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])/\Gamma(1+i) \cong \mathrm{Sp}\left(2, \mathbb{Z}[i]/(1+i)\mathbb{Z}[i]\right) \cong S_6\end{aligned}$$

Der zweite Isomorphismus ist induziert von

$$\widetilde{\mathrm{G}}/\langle iE_4\rangle \longrightarrow \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])/\langle iE_4\rangle$$

mit

$$M\langle iE_4\rangle \longmapsto M\langle iE_4\rangle \quad \text{für} \quad M \in \widetilde{\mathrm{G}} \cap \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i]) = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$$

und

$$H_1 M\langle iE_4\rangle = \tfrac{1-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M\langle iE_4\rangle \longmapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M\langle iE_4\rangle \quad \text{für } M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1.$$

Dies ist Gruppenhomomorphismus, denn

$$H_1^2\langle iE_4\rangle = -i \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \langle iE_4\rangle = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \langle iE_4\rangle$$

und

$$H_1^{-1} M H_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} M \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 \ \forall M \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1.$$

Ein expliziter, mit den orthogonalen Gruppen verträglicher Isomorphismus $S_6 \longrightarrow \widetilde{\mathrm{G}}/\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ ist gegeben durch

$$(12) \longmapsto \begin{pmatrix} E_2 & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}, (23) \longmapsto \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}, (34) \longmapsto \begin{pmatrix} E_2 & \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}},$$

$$(45) \longmapsto \begin{pmatrix} E_2 & 0 \\ \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}, (56) \longmapsto \begin{pmatrix} E_2 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}$$

(vergleiche dazu Satz 1.18 und die Seiten 29f).

Für $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}/\widetilde{\Gamma}$ gilt: $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1 \rangle$ und $\mathrm{S}\Gamma(1+i)$ wird erzeugt von Matrizen des Typs $\left(\begin{smallmatrix} E & S \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} E & 0 \\ T & E \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}'^{-1} \end{smallmatrix}\right)$. Dies zeigt man analog zur Gruppe $\Gamma(2) \subseteq \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z})$ im reellen Fall (siehe [Ig1]). Modulo $\widetilde{\Gamma}$ genügen $S, T \in \left\{\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ und $A \in \left\{\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1+i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Die Quadrate und Kommutatoren der Erzeuger liegen in $\widetilde{\Gamma}$ wie man leicht nachrechnet. Damit ist $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}/\widetilde{\Gamma} \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^{10}$, denn die zehn $\widetilde{\Gamma}$-Klassen der Erzeuger sind $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-linear unabhängig, d. h. keines der möglichen Produkte liegt bereits in $\widetilde{\Gamma}$. Die Bilder der Erzeuger in $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ sind (bis auf modulo Γ unwichtige Vorzeichen) genau die zehn Transformationen aus Satz 1.25 bzw. Lemma 1.22 (ohne h), sodaß man auch hier einen mit den orthogonalen Gruppen verträglichen Isomorphismus erhält.

Es gilt auch

$$\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}}/\widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}} \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^5 \qquad \text{und} \qquad \widetilde{\Gamma_{\mathsf{L}}}/\widetilde{\Gamma} \cong \left(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\right)^5$$

via Übersetzung ins Orthogonale oder direkt mit den Erzeugern analog zu oben.

1.5 Hermitesch-Symplektische Halbebene

Definition 1.53. *Der hermitesch-symplektische Halbraum $\boldsymbol{H}_n$ sei die Menge der komplexen $n \times n$-Matrizen mit positiv definitem hermiteschen Imaginärteil:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}_n &:= \{Z \in \mathrm{M}^{n\times n}(\mathbb{C});\ \tfrac{1}{i}(Z - \overline{Z}')\ \textit{positiv definit}\} \\ &= \{X + iY \in \mathrm{M}^{n\times n}(\mathbb{C});\ X, Y \in \mathrm{M}^{n\times n}(\mathbb{C})\ \textit{hermitesch, } Y\ \textit{positiv definit}\} \end{aligned}$$

Auf $\boldsymbol{H}_n$ operiert $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$:

$$(M, Z) \longmapsto M\langle Z\rangle := (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \quad \text{wobei } M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right)$$

Also operiert $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})_1$ sowohl auf dem hermiteschen Halbraum $\boldsymbol{H} := \boldsymbol{H}_2$ als auch dem orthogonalen $\mathcal{K}_4^+ = \mathcal{H}$. Tatsächlich sind die Halbräume biholomorph:

Satz 1.54. *Es gilt* $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_2 \cong \mathcal{K}_4^+ = \mathcal{H}$. *Eine Abbildung* $\boldsymbol{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ *ist gegeben durch:*

$$Z := \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} \longmapsto [z] := [-\det Z, 1, z_0, z_2, \tfrac{1}{2}(z_1 + z_3), \tfrac{i}{2}(z_1 - z_3)]$$

Insbesondere für diagonalen hermiteschen Imaginärteil, d. h. für $z_3 = \overline{z_1}$*:*

$$Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ \overline{z_1} & z_2 \end{pmatrix} \longmapsto [-\det Z, 1, z_0, z_2, \mathrm{Re}(z_1), -\mathrm{Im}(z_1)]$$

Die Umkehrung ist gegeben durch ($z_1 = -z_3 z_4 + z_5^2 + z_6^2$)*:*

$$[z_1, 1, z_3, z_4, z_5, z_6] \longmapsto \begin{pmatrix} z_3 & z_5 - iz_6 \\ z_5 + iz_6 & z_4 \end{pmatrix}$$

bzw. ($z_1 z_2 = -z_3 z_4 + z_5^2 + z_6^2$)

$$[z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6] \longmapsto \frac{1}{z_2} \begin{pmatrix} z_3 & z_5 - iz_6 \\ z_5 + iz_6 & z_4 \end{pmatrix}.$$

Beweis. Es sei $Z = \left(\begin{smallmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{H}_2$ gegeben und $Y := \left(\begin{smallmatrix} \mathrm{Im}\, z_0 & (z_1 - \overline{z_3})/2i \\ (z_3 - \overline{z_1})/2i & \mathrm{Im}\, z_2 \end{smallmatrix}\right) = \frac{1}{2i}(Z - \overline{Z}')$ der hermitesche Imaginärteil von Z. Es sei $z := \big(-\det Z, 1, z_0, z_2, \frac{1}{2}(z_1 + z_3), \frac{i}{2}(z_1 - z_3)\big)$. Damit gilt $\mathrm{q}(z) = 0$ und $\langle z, \overline{z}\rangle = 4 \det Y > 0$ sowie $\mathrm{Im}\, z_0 > 0$, denn Y ist positiv definit, d. h. die angegebene Abbildung $Z \longmapsto [z]$ führt $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_2$ in $\mathcal{K}_4^+ = \mathcal{H}$ über.

Für die Umkehrabbildung beachte

$$\tilde{Z} := \begin{pmatrix} z_3 & z_5 - iz_6 \\ z_5 + iz_6 & z_4 \end{pmatrix} \longmapsto$$
$$[-\det \tilde{Z}, 1, z_3, z_4, \tfrac{1}{2}(z_5 - iz_6 + z_5 + iz_6), \tfrac{i}{2}(z_5 - iz_6 - z_5 - iz_6)]$$
$$= [-z_3 z_4 + z_5^2 - i^2 z_6^2, 1, z_3, z_4, z_5, -i^2 z_6] = [z_1, 1z_2, z_3, z_4, z_5, z_6]$$

und

$$[-\det Z, 1, z_0, z_2, \tfrac{1}{2}(z_1 + z_3), \tfrac{i}{2}(z_1 - z_3)] \longmapsto$$
$$\begin{pmatrix} z_0 & \frac{1}{2}(z_1 + z_3) - i\frac{i}{2}(z_1 - z_3) \\ \frac{1}{2}(z_1 + z_3) + i\frac{i}{2}(z_1 - z_3) & z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} = Z.$$

□

Wir erhalten also zwei Operationen von $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})_1$ auf $\mathcal{H}$. Diese sind in Wahrheit gleich, denn

Bemerkung 1.55. *Das folgende Diagramm ist kommutativ:*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})_1 \times \boldsymbol{H} & \longrightarrow & \boldsymbol{H} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{O}^+(\mathrm{V}) \times \mathcal{H} & \longrightarrow & \mathcal{H} \end{array}$$

Beweis. Es genügt, dies für die Erzeuger $I = \left(\begin{smallmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $T_S = \left(\begin{smallmatrix} E & S \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)$, $S = \overline{S}'$, zu zeigen. Sei $Z = \left(\begin{smallmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{H}$.

Betrachte zunächst I: Einerseits

$$(I,Z) \longmapsto I\langle Z\rangle = -Z^{-1} = \frac{-1}{\det Z}\begin{pmatrix} z_2 & -z_1 \\ -z_3 & z_0 \end{pmatrix} \longmapsto$$
$$\left[-\frac{1}{\det Z}, 1, \frac{-z_2}{\det Z}, \frac{-z_0}{\det Z}, \frac{1}{2\det Z}(z_1+z_3), \frac{-i}{2\det Z}(-z_1+z_3)\right]$$
$$= \left[-1, \det Z, -z_2, -z_0, \tfrac{1}{2}(z_1+z_3), \tfrac{i}{2}(z_1-z_3)\right],$$

andererseits

$$(I,Z) \longmapsto (l,[z]) \longmapsto [lz] = [-1, \det Z, -z_2, -z_0, \tfrac{1}{2}(z_1+z_3), \tfrac{i}{2}(z_1-z_3)].$$

Für $T_S = \left(\begin{smallmatrix} E & S \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)$, $S = \overline{S}' = \left(\begin{smallmatrix} s_0 & s_1 \\ \overline{s_1} & s_2 \end{smallmatrix}\right)$, gilt:

$$(T_S,Z) \longmapsto T_S\langle Z\rangle = Z + S \longmapsto$$
$$[-\det(Z+S), 1, z_0+s_0, z_2+s_2, \tfrac{1}{2}(z_1+z_3+s_1+\overline{s_1}), \tfrac{i}{2}(z_1-z_3+s_1-\overline{s_1})]$$
$$= [z - s + (\det Z - \det(Z+S))e_1]$$

mit $s := (0,0,-s_0,-s_2,-\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Im} s_1)$ (vgl. Seite 29). Es ist

$$\det Z - \det(Z+S) = -\det S - z_0 s_2 - z_2 s_0 + z_3 s_1 + z_1\overline{s_1}.$$

Andersherum gilt

$$(T_S,Z) \longmapsto (\mathrm{E}(e_1,s),[z]) \longmapsto [\mathrm{E}(e_1,s)(z)] =$$
$$[z - \langle z,e_1\rangle s + \langle z,s\rangle e_1 - \mathrm{q}(s)\langle z,e_1\rangle e_1] = [z - s + (\langle z,s\rangle - \mathrm{q}(s))e_1]$$

wegen $\langle z,e_1\rangle = 1$. Es gilt

$$\langle z,s\rangle = -z_0 s_2 - z_2 s_0 + (z_1+z_3)\operatorname{Re} s_1 - i(z_1-z_3)\operatorname{Im} s_1 = -z_0 s_2 - z_2 s_0 + z_3 s_1 + z_1\overline{s_1}$$

und $\mathrm{q}(s) = \det S$. □

Matrizen mit von Eins verschiedener Determinante

Auf $\boldsymbol{H}$ und damit $\mathcal{H}$ operieren auch die hermitesch-symplektischen Matrizen mit beliebiger Determinante (d.h. det $\in S^1$). Wir erhalten daher eine Erweiterung der von $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{SO}^+(\mathrm{V})$ auf $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$ bzw. $\mathcal{H}$ induzierten Operation (nicht aber der Operation auf V selbst). Diese Erweiterung läßt sich auch orthogonal beschreiben: Wir geben einen Homomorphismus $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V})/\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{V}\}$ an (die Gruppe $\mathrm{O}(\mathrm{V})/\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{V}\}$ ist in $\mathrm{Aut}(\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C})))$ eingebettet), der $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V}) \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V})/\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{V}\}$ fortsetzt.

Die Gruppen $\mathrm{O}(\mathrm{V})$ und $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ operieren insbesondere auf $\mathrm{V}/\pm$, wobei mit $\pm$ die Äquivalenzrelation $x \sim_\pm y \iff y = \pm x$ bezeichnet sei. Die Klassen seien mit $x_\pm$ bezeichnet. Entsprechend besteht $\mathcal{V}/\pm$ aus den Klassen $\mathcal{X}_\pm$.

Die Matrizen $uE_4, u = e^{i\varphi}, \varphi \in \mathbb{R}$ (es genügt $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$) und $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ erzeugen $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$, genauer gilt: Für $M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$ ist $uM \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$ mit $u^4 = (\det M)^{-1}$. (Dies

gilt für jede Wahl u der vierten Wurzel, sodaß wir hier keine auszeichnen müssen.) Die Skalarmatrizen uE_4 operieren trivial auf $\mathcal{H}$, d. h. wie die positive und negative Identität auf $\mathrm{V}/\pm$.

Für beliebige $M = uN \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$ mit $N \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1$, d. h. einer vierten Wurzel u von $\det M \in S^1$, gilt damit:

$$M(\mathcal{X}_\pm) = u(N(\mathcal{X}_\pm)) = N(\mathcal{X}_\pm)$$
$$= (N\mathcal{X}\overline{N}^{-1})_\pm = (u^{-1}M\mathcal{X}\overline{u^{-1}M}^{-1})_\pm = (u^{-2}M\mathcal{X}\overline{M}^{-1})_\pm,$$

d. h. $M(\mathcal{X}_\pm) = (\frac{1}{\sqrt{\det M}}M\mathcal{X}\overline{M}^{-1})_\pm$ (egal für welche Quadratwurzel). Es gilt also:

Satz 1.56. *Die Gruppe aller hermitesch-symplektischen Matrizen* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$ *operiert auf* $\mathrm{V}/\pm$ *bzw.* $\mathcal{V}/\pm$ *und damit* $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$ *und* $\mathcal{H}$ *als* $\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{V}\}$*-Klassen orthogonaler Transformationen, genauer definiert*

$$(M, \mathcal{X}_\pm) \longmapsto M(\mathcal{X}_\pm) := (m^{-1}M\mathcal{X}\overline{M}^{-1})_\pm$$

für $M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}), m \in \mathbb{C}$ *mit* $m^2 = \det M$ *und* $\mathcal{X} \in \mathcal{V}$ *einen Homomorphismus*

$$\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V})/\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{V}\}$$

mit Bild $\mathrm{SO}^+(\mathrm{V})/\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{V}\}$ *und Kern* $S^1E_4 = \{zE_4; z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$.

Hierbei gilt insbesondere: Die Matrix $H_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ & & i \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \widetilde{\mathrm{G}}$ operiert wie $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ & & i \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ $\in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])$ (denn $\frac{1-i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4} \in S^1$), d. h. $\widetilde{\mathrm{G}} = \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle$ und $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i]) = \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ & & i \\ & & & 1 \end{pmatrix}\rangle$ sind als Operationsgruppen isomorph, d. h. ihre Bilder in $\mathrm{O}(\mathrm{V})/\{\pm\mathrm{id}_\mathrm{V}\}$ sind gleich. (Die Gruppen selbst sind nicht isomorph; erst nach Division der Kerne (beide $\langle iE_4\rangle$) wird dies richtig.) Das gleiche gilt für $\widetilde{\Gamma_\mathsf{N}} = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1\rangle$ und $\Gamma(1+i) = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \\ & & i \\ & & & 1 \end{pmatrix}\rangle$. In dieser Form ist die $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])$-Operation bei [Her] beschrieben (beachte $\sqrt{\det M}^{-1} = \pm i^{\frac{1}{2}(1-\det M)}$ für $\det M \in \{\pm 1\}$). Wir beschränken uns auf Determinante-Eins-Matrizen und betrachten $\widetilde{\mathrm{G}}$.

Transpositionsoperation

Auf $\boldsymbol{H}_n$ gibt es auch die Transpositionsoperation τ_n:

$$\tau_n : \boldsymbol{H}_n \longrightarrow \boldsymbol{H}_n,\ Z \longmapsto \tau_n\langle Z\rangle := Z'$$

Es gibt kein $M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ mit $M\langle Z\rangle = Z'\ \forall Z \in \boldsymbol{H}_n$ und es gilt $\tau_n M\tau_n(Z) = \overline{M}(Z)$ für $M \in \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})$ und $Z \in \boldsymbol{H}_n$ (z. B. [Mat]). Wir können also das semidirekte Produkt $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \rtimes \langle\tau_n\rangle$ bilden. Darin gilt also $\tau_n M = \overline{M}\tau_n$ und jedes Element kann in der Form $M\tau_n^\varepsilon$ mit $M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C}), \varepsilon \in \{0,1\}$ geschrieben werden, d. h. $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \rtimes \langle\tau_n\rangle = \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \cup \mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})\tau_n$. Per Konstruktion operiert $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C}) \rtimes \langle\tau_n\rangle$ auf $\boldsymbol{H}_n$:

$$(M\tau_n^\varepsilon, Z) \longmapsto M\tau_n^\varepsilon\langle Z\rangle := M\langle\tau_n^\varepsilon(Z)\rangle$$

Tatsächlich ist $\big(\mathrm{Sp}(n,\mathbb{C})/S^1E_{2n}\big) \rtimes \langle\tau_n\rangle$ die Gruppe der biholomorphen Transformationen von $\boldsymbol{H}_n$.

Die Operation τ_n übersetzt sich für $n=2$ in eine Operation auf $\mathcal{K}_4^+ = \mathcal{H}$:

$$[z] = [z_1,\ldots,z_5,z_6] \longmapsto [z_1,\ldots,z_5,-z_6] = [h_2(z)] = h_2([z]),$$

denn

$$[z] \longmapsto \tfrac{1}{z_2}\left(\begin{smallmatrix} z_3 & z_5-iz_6 \\ z_5+iz_6 & z_4 \end{smallmatrix}\right) \overset{\tau_2}{\longmapsto} \tfrac{1}{z_2}\left(\begin{smallmatrix} z_3 & z_5+iz_6 \\ z_5-iz_6 & z_4 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto$$
$$\left[-\tfrac{1}{z_2^2}\det\left(\begin{smallmatrix} z_3 & z_5+iz_6 \\ z_5-iz_6 & z_4 \end{smallmatrix}\right), 1, \tfrac{z_3}{z_2}, \tfrac{z_4}{z_2}, \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{z_5+iz_6}{z_2} + \tfrac{z_5-iz_6}{z_2}\big), \tfrac{i}{2}\big(\tfrac{z_5+iz_6}{z_2} - \tfrac{z_5-iz_6}{z_2}\big)\right]$$
$$= [z_1,\ldots,z_5,-z_6],$$

d. h. τ_2 wirkt auf $\mathcal{H}$ wie die orthogonale Transformation $\left(\begin{smallmatrix} E_5 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) = h_2 = \sigma_{e_6}$. Wir können damit die Abbildung $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \longrightarrow \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ auf $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rtimes \langle\tau\rangle$ fortsetzen (wobei $\tau := \tau_2$ sei) und erhalten

Satz 1.57. *Die Abbildung* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rtimes \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ *ist surjektiver Homomorphismus mit Kern* $\{\pm E_4\}$.

Bemerkung 1.58. *Auf* $\mathcal{H}$ *wirkt* τ *auch wie* $-h_2$*; wir können hier aber im Gegensatz zur Erweiterung auf* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})$ *ein Vorzeichen auswählen, ohne die Operationsaxiome zu verletzen, sodaß* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rtimes \langle\tau\rangle$ *tatsächlich auf* V *und nicht nur auf* $\mathrm{V}/_{\pm}$ *bzw.* $\mathcal{H}$ *operiert.*

Notation 1.59. *Für Urbilder von Untergruppen* $H \leq \mathrm{O}(\mathrm{V})$ *schreiben wir* H^*.

Es gilt also $\widetilde{H} = H^*$ für $H \subseteq \mathrm{SO}(\mathrm{V})$ und H^* hat Index 2 über $\widetilde{H}$, falls H eine Transformation mit Determinante -1 enthält. Genauer gilt $H^* = \widetilde{H} \cup h\widetilde{H}$ für jedes h mit $\mathrm{Bild}(h) \in H - \mathrm{SO}(\mathrm{V})$. Damit:

Satz 1.60. *Es gilt:*

- $\mathrm{G}^* = \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$
- $\Gamma_{\mathsf{N}}{}^* = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$
- $\Gamma_{\mathsf{L}}{}^* = \langle \Gamma(2), iE_4\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$
- $\Gamma^* = \mathfrak{M} \rtimes \langle\tau\rangle$

Beweis. Satz 1.52 und $\tau \longmapsto h_2$ und h_2 liegt in jeder der Gruppen Γ, Γ_{L}, Γ_{N} und G. □

Folgerung 1.61. *Es gilt* $\mathrm{G}^*/\Gamma_{\mathsf{N}}{}^* \cong S_6$ *und* $\Gamma_{\mathsf{N}}{}^*/\Gamma^* \cong \big(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\big)^{10}$.

Bemerkung 1.62. *Auf* $\mathcal{V}$ *operiert* τ *als komplexe Konjugation (vgl. Seite 24).*

Bemerkung 1.63. *Wir können den Homomorphismus* $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1 \rtimes \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ *fortsetzen zu surjektiven Homomorphismen* $\mathrm{S}_{\pm} \rtimes \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V})$ *bzw.* $\mathrm{S} \rtimes \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathrm{O}(\mathrm{V})$ *(vgl. Satz 1.39), die jedoch im folgenden keine Rolle spielen.*

Hyperebenen

Es sei $a = (a_1, \ldots, a_6) \in \mathrm{V}$. Wir betrachten den Durchschnitt $\mathcal{H}_a$ der komplexen orthogonalen Hyperebene $a^\perp$ mit $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{H}_a := \{[z] \in \mathcal{H};\, \langle z,a\rangle = 0\}$$

Wir sind an der Entsprechung von $\mathcal{H}_a$ in $\boldsymbol{H}$ interessiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}\{Z = \left(\begin{smallmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{H};\ & \\ (z_1z_3 - z_0z_2)a_2 + a_1 + z_0a_4 + z_2a_3 - z_1(a_5 + ia_6) - z_3(a_5 - ia_6) = 0\} & \\ = \left\{Z \in \boldsymbol{H}; (-E_2, Z)\mathcal{A}\begin{pmatrix} Z' \\ E_2 \end{pmatrix} = 0 \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{C})\right\} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_a &\end{aligned}$$

Dabei ist $\mathcal{A}$ die $a \in \mathrm{V}$ zugeordnete Matrix in $\mathcal{V}$. Die Bedingung in der ersten Klammer liest man direkt ab. Die linke Matrix in der zweiten Klammer ist $-\langle a,z\rangle J$.

Kapitel 2

Modulformen

In diesem Kapitel werden die verschiedenen Typen von Modulformen eingeführt und ihre Fourierentwicklungen erläutert. Desweiteren wird die Borcherdssche Liftungstheorie in der in dieser Arbeit benötigten Form vorgestellt. Es wird sowohl der additive als auch der multiplikative Lift behandelt.

2.1 Orthogonale Modulformen

Sei jetzt wieder allgemein (V, q) ein reeller quadratischer Raum der Signatur $(2, n)$, $n \geq 2$, und $\mathcal{H}$ bzw. $\widetilde{\mathcal{H}}$ der orthogonale Halbraum bzw. affine Kegel darüber.

Definition 2.1. *Sei* M *ein ganzes Gitter in* V *und* Γ *eine Untergruppe von* $O^+(\mathsf{M})$ *endlichen Index. Eine holomorphe bzw. meromorphe (orthogonale) Modulform vom Gewicht* $r \in \mathbb{Z}$ *zur Gruppe* Γ *und zum Charakter* $v : \Gamma \longrightarrow \mathbb{C}^*$ *ist eine holomorphe bzw. meromorphe Funktion* $f : \widetilde{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathbb{C}$ *mit*

- $f(tz) = t^{-r} f(z) \quad \forall t \in \mathbb{C}^*, \ \forall z \in \widetilde{\mathcal{H}}$
- $f(\gamma z) = v(\gamma) f(z) \quad \forall \gamma \in \Gamma, \ \forall z \in \widetilde{\mathcal{H}}$

Bemerkung 2.2. *Allgemeiner werden Gruppen* Γ *betrachtet, die kommensurabel zu* $O^+(\mathsf{M})$ *in* $O^+(V_{\mathbb{Q}})$ *sind, wobei*

$$V_{\mathbb{Q}} := \mathsf{M}(\mathbb{Q}) := \mathsf{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \subseteq \mathsf{M} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = V$$

ist. Wir betrachten jedoch nur Zwischengruppen $\Gamma(\mathsf{M}) \subseteq \Gamma \subseteq O^+(\mathsf{M})$ *(mit dem Diskriminantenkern* $\Gamma(\mathsf{M})$*).*

Wegen der Homogenitätseigenschaft von Modulformen macht es Sinn von Nullstellen in $\mathcal{H}$ zu sprechen: Ein Punkt $[z] \in \mathcal{H}$ heißt Nullstelle der Modulform f wenn $f(z) = 0$ gilt.

Transformationsverhalten im Tubengebietmodell

Durch Abspalten einer hyperbolischen Ebene erhalten wir das Tubengebietmodell $\mathcal{H}'$ (bzgl. dieser Ebene) von $\mathcal{H}$: Es ist $V = H_1 + V_1 \cong \mathbb{R}^2 \times V_1$ mit $H_1 = \mathbb{R}e_1 + \mathbb{R}e_2 \cong \mathbb{R}^2$ via

$x \longmapsto (x_1, x_2, X)$, $\mathcal{H} \cong \mathcal{H}' = \mathrm{V}_1 + i\mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ eine Komponente von $\mathcal{C} = \{Y \in \mathrm{V}_1;\, \mathrm{q}(Y) > 0\}$ und $\mathcal{H} = \{[z_1, 1, Z];\, Z \in \mathcal{H}', z_1 = -\mathrm{q}(Z)\}$ (vergleiche Abschnitt 1.1). Eine orthogonale Modulform f ist durch die Werte auf $\{(z_1, 1, Z)\} \subseteq \widetilde{\mathcal{H}}$ eindeutig bestimmt: $f(z_1, z_2, Z) = z_2^{-r} f(\frac{z_1}{z_2}, 1, \frac{Z}{z_2})$. Sie definiert also eine Funktion F auf dem Tubengebietmodell $\mathcal{H}'$

$$F(Z) := f(z_1, 1, Z),$$

aus der sie wieder rekonstruiert werden kann:

$$f(z_1, z_2, Z) = z_2^{-r} F(\tfrac{1}{z_2} Z)$$

Das Transformationsverhalten von f übersetzt sich in ein entsprechendes Verhalten von F: Sei $(-\mathrm{q}(Z), 1, Z) \in \widetilde{\mathcal{K}}, \gamma \in \Gamma$ und $\gamma((-\mathrm{q}(Z), 1, Z)) = (w_1, w_2, W)$, d. h. $\gamma(Z) = \frac{1}{w_2} W$, denn die Operation von $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ auf dem Tubengebiet war gerade so definiert. Damit gilt

$$\begin{aligned} F(Z) = f((-\mathrm{q}(Z), 1, Z)) &= v(\gamma)^{-1} f(\gamma(-\mathrm{q}(Z), 1, Z)) = v(\gamma)^{-1} f((w_1, w_2, W)) \\ &= v(\gamma)^{-1} w_2^{-r} f((\tfrac{w_1}{w_2}, 1, \tfrac{1}{w_2} W)) = v(\gamma)^{-1} w_2^{-r} F(\gamma(Z)). \end{aligned}$$

Wir setzen allgemein $J(\gamma, Z) := w_2$. Es gilt somit

Satz 2.3. *Die holomorphen (meromorphen) orthogonalen Modulformen f vom Gewicht r entsprechen umkehrbar eindeutig den holomorphen (meromorphen) Funktionen F auf dem Tubengebietmodell $\mathcal{H}' = \mathrm{V}_1 + i\mathcal{P}$ mit der Transformationseigenschaft*

$$F(\gamma Z) = J(\gamma, Z)^r v(\gamma) F(Z) \;\forall \gamma \in \Gamma, Z \in \mathcal{H}'.$$

Es gilt $J(\gamma\delta, Z) = J(\gamma, \delta Z) J(\delta, Z)$.

Bemerkung 2.4. *Die Abbildung $J : (\gamma, Z) \longmapsto J(\gamma, Z)$ ist der sogenannte kanonische Automorphiefaktor. Die Funktionaldeterminante von γ als Abbildung im Tubengebietmodell bei Z ist $J(\gamma, Z)^n \det(\gamma)$.*

Fourierentwicklung

Für $\gamma = \mathrm{E}(e_1, X), X \in \mathrm{V}_1$ gilt $J(\gamma, Z) = 1\ \forall Z$, denn $\mathrm{E}(e_1, X)(y) = y - y_2 X + \langle y, X\rangle e_1 - \mathrm{q}(X) y_2 e_1$ also

$$\mathrm{E}(e_1, X)(-\mathrm{q}(Z), 1, Z) = (-\mathrm{q}(Z) + \langle Z, X\rangle - \mathrm{q}(X), 1, Z - X).$$

Damit gilt

$$F(Z + X) = F(Z)\ \forall X \text{ mit } \mathrm{E}(e_1, -X) \in \Gamma,$$

falls f Modulform zum trivialen Charakter ist. Diese X bilden ein Gitter T in V_1, falls $e_1, e_2 \in \mathrm{V}_{\mathbb{Q}}$. Damit ist F periodisch, besitzt also eine Fourierentwicklung

$$F(Z) = \sum_{T \in \mathsf{T}'} A(T) e^{2\pi i \langle T, Z\rangle} \qquad (\mathsf{T}' \subseteq \mathrm{V}_1 \text{ dual zu } \mathsf{T} \text{ bzgl. } \mathrm{q}\,|\,\mathrm{V}_1).$$

Tatsächlich ist dies die Fourierentwicklung in einer rationalen Spitze, d. h. einer nulldimensionalen rationalen Randkomponente (beachte aber Bemerkung 2.6, S. 45). Dies ist ein Punkt der Form $[a] \in \mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$ mit $a \in \mathrm{V}_{\mathbb{Q}}$ isotrop (hier $a = e_1$) und wir erhalten allgemeiner ein Tubengebietmodell und eine Fourierentwicklung für jede rationale

Spitze $[a]$: In $\mathsf{M}(\mathbb{Q})$ betrachten wir $\mathsf{L}(\mathbb{Q}) := \mathsf{L}_a(\mathbb{Q}) := \mathsf{L}_{[a]}(\mathbb{Q}) := \mathsf{M}(\mathbb{Q}) \cap a^\perp$. Die auf $\mathsf{L}(\mathbb{Q})$ eingeschränkte quadratischen Form q ist ausgeartet: $\langle a,\mathsf{L}(\mathbb{Q})\rangle = 0$. Auf

$$\mathsf{K}(\mathbb{Q}) := \mathsf{K}_a(\mathbb{Q}) := \mathsf{L}(\mathbb{Q})/\mathbb{Q}a$$

ist $\mathrm{q}(l + \mathbb{Q}a) := \mathrm{q}(l)$ wohldefinierte quadratische Form und $\mathsf{K}(\mathbb{Q})$ ist nicht ausgeartet bezüglich q. Genauer ist $\mathsf{K}(\mathbb{R}) := \mathsf{K}(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ hyperbolischer Raum, hat also die Signatur $(1, n-1)$. Es sei $a' \in \mathsf{M}(\mathbb{Q})$ mit $\langle a,a'\rangle \neq 0$. Dann ist die natürliche Projektion

$$\mathsf{M}(\mathbb{Q}) \cap a^\perp \cap a'^\perp \longrightarrow \mathsf{K}(\mathbb{Q})$$

ein Isomorphismus quadratischer Räume. Wir identifizieren die beiden Räume, d. h. wir wählen für $l + \mathbb{Q}a \in \mathsf{K}(\mathbb{Q})$ einen Repräsentanten l mit $\langle l,a'\rangle = 0$ und schreiben dann l statt $l + \mathbb{Q}a$. Wir erhalten einen Isomorphismus

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathsf{K}(\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathsf{M}(\mathbb{Q})$$

gegeben durch

$$(m, n, X) \longmapsto ma + na' + X.$$

Die Umkehrung $x \longmapsto (m, n, X)$ ist gegeben durch

$$m = \frac{-2\langle x,a\rangle\, \mathrm{q}(a')}{\langle a,a'\rangle^2} + \frac{\langle x,a'\rangle}{\langle a,a'\rangle},\ n = \frac{\langle x,a\rangle}{\langle a,a'\rangle} \quad \text{und} \quad X = x - ma - na'.$$

Die quadratische Form in diesem Modell von $\mathsf{M}(\mathbb{Q})$ lautet

$$\mathrm{q}(m, n, X) = n^2\, \mathrm{q}(a') + mn\langle a,a'\rangle + \mathrm{q}(X).$$

Dieser Isomorphismus setzt sich fort auf die Komplexifizierungen: $\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathsf{K}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathsf{M}(\mathbb{C})$, wobei $\mathsf{K}(\mathbb{C}) := \mathsf{K}(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \cong \mathsf{L}(\mathbb{C})/\mathbb{C}a, \mathsf{L}(\mathbb{C}) = \mathsf{L}(\mathbb{Q}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$. Wir schreiben $z = (m, n, Z)$ für $z \in \mathrm{V}(\mathbb{C})$. Sei nun $z = (m, n, Z)$ Repräsentant von $[z] \in \mathcal{K}$. Dann ist $n \neq 0$ und wir können zu $n = 1$ normalisieren, wegen $\mathrm{q}(z) = 0$ also o. E. $z = \big(\frac{1}{\langle a,a'\rangle}(-\mathrm{q}(Z)\mathrm{q}(a')), 1, Z\big)$. Damit erhalten wir eine Einbettung $\mathcal{K} \longrightarrow \mathsf{K}(\mathbb{C})$ via $[z] \longmapsto Z$. Das Bild von $\mathcal{H}$ ist das Tubengebietmodell $\mathcal{H}' = \mathcal{H}_a$ von $\mathcal{H}$ bezüglich der Spitze $[a]$. Es ist die Menge aller $Z = X + iY$, wobei Y in einer Komponente der Menge aller Punkte positiver quadratischer Form in $\mathsf{K}(\mathbb{R})$ liegt: Es gilt $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_a = \mathsf{K}(\mathbb{R}) + i\mathcal{P}_a$, $\mathcal{P}_a$ eine Komponente von $\mathcal{C}_a := \{Y \in \mathsf{K}(\mathbb{R}); \mathrm{q}(Y) > 0\}$. Das Bild von $\mathcal{K}$ ist $\mathcal{K}_a := \mathsf{K}(\mathbb{R}) + i\mathcal{C}_a$.

Bemerkung 2.5. *Die Konstruktionen von* $\mathsf{K}(\mathbb{Q})$ *und* $\mathcal{H}_a$ *hängen nur von* $\mathbb{Q}a$ *ab, aber die konkreten Realisierungen als* $\mathsf{M}(\mathbb{Q}) \cap a^\perp \cap a'^\perp$ *und* $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_a$; $[ma+na'+Z] \longmapsto \frac{1}{n}Z$ *hängen auch von* a' *ab.*

Die $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$-Operation auf $\mathcal{H}$ wird (abhängig von a') via $\mathcal{H} \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_a$ auf $\mathcal{H}_a$ übertragen und Modulformen sind wie oben durch ihre Werte auf $\mathcal{H}_a$ bestimmt:

$$f(m, n, Z) = n^{-r}F(Z) \qquad \text{wobei} \qquad F(Z) = f(*, 1, Z)$$

Wir schreiben auch $f_{a,a'}$ statt F.

Die orthogonale Abbildung $\mathrm{E}(a, \frac{-1}{\langle a,a'\rangle}T), T \in \mathrm{V} \cap a^\perp \cap a'^\perp$ wirkt im Tubengebietmodell als die Translation $Z \longmapsto Z+T$. Eine Modulform f zum trivialen Charakter zur Gruppe Γ ist also als Funktion $f_{a,a'}$ auf dem Tubengebietmodell periodisch zum Gitter $\mathsf{T}_{a,a'} \subseteq \mathsf{K}(\mathbb{Q})$ aller T mit $\mathrm{E}(a, \frac{-1}{\langle a,a'\rangle}T) \in \Gamma$, besitzt also eine Fourierentwicklung

$$f_{a,a'}(Z) = \textstyle\sum_{T \in \mathsf{T}'_{a,a'}} A(T) e^{2\pi i \langle T, Z\rangle}$$

(genauer $A(T) = A_{a,a'}(T)$).

Bemerkung 2.6. *Die Fourierentwicklung hängt nicht von der Skalierung von a ab, aber von a'. Allerdings können die Beziehungen zwischen den Fourierkoeffizienten bezüglich verschiedener a' leicht angegeben werden. Die Fourierentwicklung hängt damit im wesentlichen nur von der rationalen Spitze $[a], a \in \mathrm{V}_\mathbb{Q}$ isotrop, ab.*

Man kann $a \in \mathsf{M}$ primitiv annehmen und dann $a' \in \mathsf{M}'$ mit $\langle a,a'\rangle = 1$ wählen. Dann ist das orthogonale Komplement L von a in M ein Gitter in $\mathsf{L}(\mathbb{Q})$ und $\mathsf{K} := \mathsf{L}/\mathbb{Z}a$ ein Gitter in $\mathsf{K}(\mathbb{Q})$. Wir können K via $\mathsf{M}(\mathbb{Q}) \cap a^\perp \cap a'^\perp \xrightarrow{\sim} \mathsf{K}(\mathbb{Q})$ in $\mathsf{M}(\mathbb{Q})$ einbetten. Dann ist K in M enthalten, die Eichlertransformation $\mathrm{E}(a, -T)$ also im Diskriminantenkern $\Gamma(\mathsf{M})$ zu M enthalten für $T \in \mathsf{K}$. Die Elemente von K sind also Perioden von $f_{a,a'}$ falls f Modulform zum trivialen Charakter und zum Diskriminantenkern ist. Tatsächlich ist dann $\mathsf{K} = \mathsf{T}_{a,a'}$ und $f_{a,a'}(Z) = \sum_{T \in \mathsf{K}'} A(T) e^{2\pi i \langle T, Z\rangle}$.

Bemerkung 2.7. *Im allgemeinen fordert man für Modulformen eine „Regularität in den Spitzen". Im orthogonalen Fall ist dies $A(T) \neq 0 \Longrightarrow T \in \overline{\mathcal{P}_a}$ für holomorphe (bzw. bis auf endlich viele Ausnahmen für meromorphe) Modulformen. Dies folgt aber für $n \geq 3$ mit dem Koecherprinzip bereits aus dem Transformationsverhalten. Da wir uns für den Fall $n = 4$ interessieren, verzichten wir in der Definition auf diese Bedingung.*

2.2 Vektorwertige elliptische Modulformen

Gegeben sei ein endlich-dimensionaler Vektorraum V und eine Darstellung ρ von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ auf V: $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$.

Definition 2.8. *Eine fast-holomorphe elliptische Modulform vom Gewicht $k \in \mathbb{Z}$ zur Darstellung ρ ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \longrightarrow V$ auf der oberen Halbebene*

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im} z > 0\}$$

mit Werten in V mit

$$f(M\tau) = \rho(M)(c\tau + d)^k f(\tau) \quad \forall M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), \text{ wobei } M\tau = \tfrac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

und sodaß für jede Komponente f_α von $f = \sum_\alpha f_\alpha e_\alpha$ (bezüglich einer beliebigen Basis $\{e_\alpha\}$ von V) eine Entwicklung

$$f_\alpha(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Q}} c_\alpha(m) e^{2\pi i m \tau}$$

existiert mit $c_\alpha(m) \neq 0$ für nur endlich viele $m < 0$.
Ist $c_\alpha(m) = 0$ für alle $m < 0$ und alle α, so heißt f holomorphe elliptische Modulform.

Bemerkung 2.9. *Falls die Darstellung ρ über $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})$ faktorisiert für ein $q \in \mathbb{Z}$, d. h. eine Darstellung $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ induziert, so gilt insbesondere $\left(\begin{smallmatrix}1 & q\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \longmapsto \mathrm{id}_V$ und damit $f_\alpha(\tau+q) = f_\alpha(\tau)\ \forall \alpha$ für jede Funktion $f = (f_\alpha)_\alpha$ mit diesem Transformationsverhalten. Jede Komponente ist also periodisch und hat daher eine Fourierentwicklung $f_\alpha(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Q}} c_\alpha(m) e^{2\pi i m\tau}$. Die letzte Bedingung ist damit äquivalent zu:*

„Die Komponenten von f haben höchstens einen Pol bzw. sind beschränkt für $\tau \longrightarrow i\infty$."

Es sei $V_0 := V_0^{\rho,k} \subseteq V$ definiert als der Unterraum auf dem $\rho(-E)$ als $(-1)^k \mathrm{id}_V$ operiert (wobei $E = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$). Dieser Raum ist $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-invariant:

$$\rho(M)(v) \in V_0 \quad \forall M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), v \in \mathrm{V}_0,$$

denn

$$\rho(-E)\rho(M)(v) = \rho(M)\rho(-E)(v) = \rho(M)((-1)^k v) = (-1)^k \rho(M)(v),$$

und die Werte einer V-wertigen elliptischen Modulform f vom Gewicht k liegen in V_0:

$$f(\tau) = f(-E\tau) = \rho(-E)(-1)^k f(\tau) \Longrightarrow \rho(-E)f(\tau) = (-1)^k f(\tau)$$

Insbesondere ist dann f auch V_0-wertige elliptische Modulform zur Darstellung $\rho|_{V_0}$. Mit $d = d_{\rho,k}$ sei die Dimension von V_0 bezeichnet. Für eine komplexe Matrix A endlicher Ordnung sind die Eigenwerte Einheitswurzeln, die in der Form $\lambda = e^{2\pi i\alpha}, 0 \le \alpha < 1$ geschrieben werden können. Wir setzen $\alpha(A) := \sum_\lambda \alpha$, wobei über alle Eigenwerte von A mit Vielfachheit summiert wird. Borcherds [Bo2] gibt die folgende Formel an, die mit Hilfe des Riemann-Rochschen Satzes gezeigt werden kann:

Proposition 2.10. *Sei $k > 2$ und $S = \left(\begin{smallmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{smallmatrix}\right), T = \left(\begin{smallmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ die Standarderzeuger von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Dann ist die Dimension des Raums aller holomorphen elliptischen Modulformen vom Gewicht k zur Darstellung ρ gleich*

$$d + \frac{dk}{12} - \alpha\left(e^{\pi i\frac{k}{2}}\rho(S)\right) - \alpha\left(\left(e^{\pi i\frac{k}{3}}\rho(ST)\right)^{-1}\right) - \alpha(\rho(T)).$$

Beispiele für holomorphe elliptische Modulformen sind Eisensteinreihen: Gegeben sei $v \in V_0$ mit $\rho(T)v = v$. Dann ist $(c\tau+d)^{-k}\rho(M)^{-1}v$ invariant unter $M \longmapsto PM$ für $P \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_\infty := \{M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}); M\infty = \infty\}$ und

$$E_v^{\rho,k}(\tau) := E_v(\tau) := \sum_{M\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_\infty \backslash\, \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} (c\tau+d)^{-k}\rho(M)^{-1}v$$

wohldefiniert und eine holomorphe elliptische Modulform zur Darstellung ρ vom Gewicht k für $k > 2$ mit $\lim\limits_{\tau\to i\infty} E_v(\tau) = v$. Wir erhalten

Bemerkung 2.11. *Für $k > 2$ ist der Raum der Eisensteinreihen vom Gewicht k zur Darstellung ρ isomorph zum Raum aller $v \in V$ mit $\rho(T)v = v$ und $\rho(-E)v = (-1)^k v$.*

Weil-Darstellung

Gegeben sei ein reeller quadratischer Raum $V = (V, q)$ der Signatur (m, n) und $M \subseteq V$ ein gerades Gitter. Wir betrachten den Gruppenring $\mathbb{C}[M'/M]$, d. h. den Vektorraum aller Abbildungen $f : M'/M \longrightarrow \mathbb{C}$ mit kanonischer Basis $e_\alpha, \alpha \in M'/M$, wobei $e_\alpha(\beta) = 1$ falls $\alpha = \beta$ und 0 sonst. Durch $e_\alpha e_\beta := e_{\alpha+\beta}$ wird eine Ring- bzw. eine $\mathbb{C}$-Algebrenstruktur definiert; wir werden jedoch nur die $\mathbb{C}$-Vektorraumstruktur betrachten. Wir schreiben Elemente $f = \sum_{\alpha \in M'/M} f_\alpha e_\alpha$ auch als Tupel $f = (f_\alpha)_{\alpha \in M'/M}$.

Auf $\mathbb{C}[M'/M]$ operiert $O(M)$:

$$(g, f) = (g, (f_\alpha)_{\alpha \in M'/M}) \longmapsto g(f) := g((f_\alpha)_{\alpha \in M'/M}) := (f_{g(\alpha)})_{\alpha \in M'/M}$$

für alle $g \in O(M)$ und $f = (f_\alpha)_{\alpha \in M'/M} \in \mathbb{C}[M'/M]$. Dies ist eine Operation von rechts: Es gilt

$$gh(f) = h(g(f)) \quad \forall g, h \in O(M), f = (f_\alpha)_{\alpha \in M'/M} \in \mathbb{C}\left[M'/M\right].$$

Auch $SL(2, \mathbb{Z})$ operiert:

Definition 2.12. *Es sei $n - m$ gerade. Durch*

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \rho(S) := \left(e_\alpha \longmapsto \frac{i^{(n-m)/2}}{\sqrt{\left|M'/M\right|}} \sum_{\beta \in M'/M} e^{-2\pi i \langle \alpha, \beta \rangle} e_\beta \right)$$

und

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longmapsto \rho(T) := \left(e_\alpha \longmapsto e^{2\pi i\, q(\alpha)} e_\alpha \right)$$

und multiplikative Fortsetzung ist die Weil-Darstellung

$$\rho : SL(2, \mathbb{Z}) \longrightarrow GL\left(\mathbb{C}\left[M'/M\right]\right)$$

zum Gitter M definiert (wir schreiben ρ_M statt ρ falls nötig).

Bemerkung 2.13.

- *Für ungerade $n - m$ hat man die Weil-Darstellung der metaplektischen Überlagerung der $SL(2, \mathbb{Z})$.*
- *Die quadratische Form q bzw. Bilinearform $\langle\ ,\ \rangle$ auf M' induziert eine wohldefinierte Abbildung $q : M'/M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ bzw. $\langle\ ,\ \rangle : M'/M \times M'/M \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ für gerade Gitter M, s. d. Ausdrücke der Form $e^{2\pi i\, q(\alpha)}$ bzw. $e^{-2\pi i \langle \alpha, \beta \rangle}$ für $\alpha, \beta \in M'/M$ wohldefiniert sind.*
- *Relationen: Es gilt $\rho(S)^2 = (\rho(S)\rho(T))^3$ und $\rho(S)^4 = \mathrm{id}$, s. d. ρ tatsächlich wohldefinierter Homomorphismus ist. Genauer gilt $\rho(S)^2 e_\alpha = i^{n-m} e_{-\alpha}$.*
- *Die Darstellung ist unitär bezüglich der kanonischen hermiteschen Form bezüglich der Standardbasis, d. h. die Darstellungsmatrizen bezüglich der $e_\alpha, \alpha \in M'/M$ sind unitär.*

- *Die Weil-Darstellung kommutiert mit der Operation der orthogonalen Gruppe:*

$$\rho(M)(g(f)) = g(\rho(M)(f)) \quad \forall M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}), g \in \mathrm{O}(\mathsf{M}), f \in \mathbb{C}\left[\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right]$$

- *Sei $q \in \mathbb{Z}$ mit $q\,\mathrm{q}(m) \in \mathbb{Z}\ \forall m \in \mathsf{M}'$. Dann faktorisiert die Weil-Darstellung ρ über $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, d. h. ρ induziert eine Darstellung* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]\right)$.

In diesem Fall gilt also: Eine $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]$-wertige fast-holomorphe elliptische Modulform vom Gewicht k zur Weil-Darstellung ρ ist ein Tupel $(f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ von holomorphen Funktionen auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ mit:

- $f_\alpha(-\frac{1}{\tau}) = \dfrac{i^{(n-m)/2}}{\sqrt{\left|\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right|}}\,\tau^k \displaystyle\sum_{\beta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} e^{-2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle} f_\beta(\tau)$
- $f_\alpha(\tau+1) = e^{2\pi i\,\mathrm{q}(\alpha)} f_\alpha(\tau)$
- $f_\alpha(\tau)$ hat maximal einen Pol für $\tau \longrightarrow i\infty$

Die f_α besitzen also eine Fourierentwicklung $f_\alpha(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Q}} c_\alpha(m) e^{2\pi i m\tau}$. Genauer gilt $c_\alpha(m) \neq 0 \Longrightarrow m \equiv \mathrm{q}(\alpha) \bmod 1$: $f_\alpha(\tau) = \sum_{m\equiv \mathrm{q}(\alpha) \bmod 1} c_\alpha(m) e^{2\pi i m\tau}$.

2.3 Borcherds Lifts

Es sei jetzt wieder V quadratischer Raum der Signatur $(2,n), n \geq 2$ gerade, und $\mathsf{M} \subseteq \mathrm{V}$ ein gerades Gitter.

Additive Lifts

In [Bo1] konstruiert Borcherds einen additiven Lift, der Lifts von Shimura, Doi, Naganuma, Maaß, Oda, Gritsenko, Kurokawa und anderen verallgemeinert. Inputs sind elliptische Modulformen (evtl. mit Polen in den Spitzen) zur Weil-Darstellung, der Lift ist eine orthogonale Modulform zum Diskriminantenkern und trivialem Charakter mit $\frac{n}{2}-1$ größerem Gewicht. Borcherds gibt die Fourierentwicklung des Lifts in den rationalen Spitzen in Abhängikeit der Fourierentwicklung des Inputs an. Die Liftkonstruktion ist linear und verträglich mit der $\mathrm{O}^+(\mathrm{V})$-Operation. Wir benötigen den holomorphen Spezialfall für gerade n:

Satz 2.14. *Sei* V *reeller quadratischer Raum der Signatur $(2,n), n \geq 2$ gerade, und $\mathsf{M} \subseteq \mathrm{V}$ ein gerades Gitter. Sei $f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ holomorphe elliptische Modulform vom Gewicht k zur Weil-Darstellung $\rho : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}\left(\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]\right)$.*

Dann gibt es für $k + \frac{n}{2} - 1 =: r \geq 1$ eine holomorphe orthogonale Modulform F vom Gewicht r zum Diskriminantenkern $\Gamma(\mathsf{M})$ und trivialen Charakter, sodaß die Liftabbildung $f \longmapsto F$ linear und äquivariant ist, d. h. für $g \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ gilt $g(f) \longmapsto g(F) = F \circ g$.

Sei $f_\alpha(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Q}} c_\alpha(m)e^{2\pi im\tau}$ *die Fourierentwicklung von* f_α *und sei* $[a], a \in \mathsf{M}$ *primitiv, eine rationale Spitze,* $a' \in \mathsf{M}'$ *mit* $\langle a,a'\rangle = 1$ *und* $\mathsf{K} := \mathsf{M} \cap a^\perp \cap a'^\perp$ *sowie* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $\langle a,\mathsf{M}\rangle = N\mathbb{Z}$, *d. h.* $\frac{a}{N} \in \mathsf{M}'$ *und* N *maximal damit.*

Dann gilt für die Fourierentwicklung $F_{a,a'}(Z) = \sum_{T\in\mathsf{K}'\cap\overline{\mathcal{P}_a}} A(T)e^{2\pi i\langle T,Z\rangle}$ *von* F *als Funktion* $F_{a,a'}$ *auf dem Tubengebietmodell* $\mathcal{H}_a = \mathsf{K}(\mathbb{R}) + i\mathcal{P}_a$ *zur Spitze* $[a]$*:*

$$A(T) = \sum_{\substack{H\in\mathsf{K}',n\in\mathbb{N}\\ mit\ nH=T}} n^{r-1} \sum_{\substack{\delta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}\\ \delta\ über\ H}} e^{2\pi in\langle\delta,a'\rangle} c_\delta(\mathrm{q}(H)) \qquad \forall\, 0 \neq T \in \mathsf{K}' \cap \overline{\mathcal{P}_a}$$

Dabei bedeutet „δ *über* H*“, daß eine Zahl* $m \in \mathbb{Z}$ *mit* $\delta = (H + \frac{m}{N}a) + \mathsf{M}$ *existiert.*

Bemerkung 2.15.

- *Es ist* $\langle\delta,a'\rangle$ *definiert als* $\langle d,a'\rangle$ *für* $d \in \delta$ *oder auch als* $\langle\delta,a'\rangle := \langle\delta,a' + \mathsf{M}\rangle$*. Dies ist modulo* $\mathbb{Z}$ *wohldefiniert (vgl. vorangegangene Bemerkung).*
- *Borcherds gibt auch den* 0*-ten Fourierkoeffizienten an.*
- *Die Formel für* $A(T)$ *vereinfacht sich, wenn* $T \in \mathsf{K}'$ *primitiv ist:*

$$A(T) = \sum_{\substack{\delta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}\\ \delta\ über\ T}} e^{2\pi i\langle\delta,a'\rangle} c_\delta(\mathrm{q}(T))$$

Dies ist explizit (wir schreiben $c_d(n) := c_\delta(n)$ *für* $d \in \delta$*):*

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i\langle T+\frac{m}{N}a,a'\rangle} c_{T+\frac{m}{N}a}(\mathrm{q}(T)) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i\frac{m}{N}} c_{T+\frac{m}{N}a}(\mathrm{q}(T)) \end{aligned}$$

Ist $g \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ und ein additiver Lift $f \longmapsto F$ mit $g(f) = -f$ gegeben, so ist $F(z) = 0$ für alle $z \in \widetilde{\mathcal{H}}$ mit $g(z) = z$: Wegen der Linearität und Äquivarianz des Lifts gilt $-F(z) = F(g(z))\ \forall z \in \widetilde{\mathcal{H}}$ und insbesondere $-F(z) = F(z)$ also $F(z) = 0$ für $z = g(z)$. Ist insbesondere g eine Spiegelung σ_λ längs $\lambda \in \mathrm{V}, \mathrm{q}(\lambda) < 0$, so verschwindet F auf der (komplex erweiterten) Spiegelungshyperebene $\lambda^\perp \cap \widetilde{\mathcal{H}} \subseteq \mathrm{V}(\mathbb{C})$.

Das Bild $\mathcal{H}(\lambda)$ einer solchen Menge in $\mathcal{H}$ heißt Heegner-Primdivisor und ist selbst orthogonaler Halbraum (konstruiert beginnend mit $\mathrm{W} = \lambda^\perp \subseteq \mathrm{V}$ als quadratischem Raum der Signatur $(2, n-1)$ bezüglich $\mathrm{q}|_\mathrm{W}$) der Dimension eins niedriger. Wir schreiben auch korrekter $\mathcal{H}_{n-1}(\lambda) \subseteq \mathcal{H}_n$. Genauer ist das Bild der Träger des Divisors und dieser hat per Definition die Multiplizität 1. Ein Heegner-Divisor ist lokal-endliche formale $\mathbb{Z}$-Linearkombination von Heegner-Primdivisoren. Mengentheoretische Aussagen über Divisoren sind immer als Aussagen über die zugehörigen Träger zu verstehen.

Wegen $g(\mathcal{H}_{n-1}(\lambda)) = \mathcal{H}_{n-1}(g(\lambda))$ für $g \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V}), \lambda \in \mathrm{V}, \mathrm{q}(\lambda) < 0$ und $F = F \circ g$ für $g \in \Gamma$ und Modulformen F zum trivialen Charakter und Gruppe Γ muß notwendigerweise F auf $\bigcup_{g\in\Gamma} \mathcal{H}_{n-1}(g(\lambda))$ verschwinden, wenn F auf $\mathcal{H}_{n-1}(\lambda)$ Null ist.

Multiplikative Lifts

Es stellt sich die Frage nach Modulformen mit Nullstellen genau auf gegebenen Heegner-Divisoren (d. h. dem Urbild in $\widetilde{\mathcal{H}}$), wobei die Koeffizienten genau die Vielfachheiten angeben sollen. Eine Antwort liefert der multiplikative Lift, den Borcherds ebenfalls in [Bo1] konstruiert:

Satz 2.16. *Zu einem geraden Gitter* M *der Signatur* $(2,n), n \geq 2$ *gerade, und einer fast-holomorphen elliptischen Modulform* $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ *vom Gewicht* $1 - \frac{n}{2}$ *zur Weil-Darstellung* ρ*, deren Fourierkoeffizienten* $c_\alpha(m)$ *ganz sind für* $m \leq 0$*, gibt es eine meromorphe orthogonale Modulform vom Gewicht* $\frac{c_0(0)}{2}$ *zur Gruppe* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}, f) := \{g \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M}); f = g(f)\} \supseteq \Gamma(\mathsf{M})$ *und zu einem unitären Charakter, deren Null- und Polstellen genau auf Heegner-Primdivisoren zu negativen* $\lambda \in \mathsf{M}$ *liegen. Genauer trägt der Divisor* $\mathcal{H}_{n-1}(\lambda), \lambda \in \mathsf{M}$*, mit der Vielfachheit* $\sum_{0<x\in\mathbb{R}, x\lambda\in\mathsf{M}'} c_{x\lambda}(x^2\,\mathrm{q}(\lambda))$ *zum Divisor des Lifts bei, wobei* $c_\mu(m) := c_\alpha(m)$ *für* $\mu \in \alpha, m \in \mathbb{Q}$ *gesetzt ist.*

Tatsächlich ist diese Vielfachheit unabhängig von der Skalierung von $\lambda \in \mathsf{M}$: Für $\lambda' = r\lambda, r > 0$ sind die beiden Vielfachheiten bzgl. λ und λ' offensichtlich gleich. Für $\lambda' = -\lambda$ gilt dies wegen $c_\alpha(m) = c_{-\alpha}(m)$, d. h. $f_\alpha = f_{-\alpha}$, und dies wiederum folgt aus dem Transformationsverhalten von f unter $\rho(S^2)$. Summation über ein maximales System $\Lambda \subseteq \mathsf{M}$ von paarweise linear unabhängigen $\lambda \in \mathsf{M}$ (d. h. $\mathbb{R}\lambda \cap \mathbb{R}\mu = \{0\}$ für $\lambda \neq \mu \in \Lambda$ und $(\cup_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{R}\lambda) \cap \mathsf{M} = \mathsf{M}$) ergibt den Null-/Polstellendivisor des Lifts (Λ enthalte zum Beispiel nur primitive $\lambda \in \mathsf{M}$ und für $\lambda \in \mathsf{M}$ primitiv entweder λ oder $-\lambda$):

$$\sum_{\substack{\lambda\in\Lambda\\ \mathrm{q}(\lambda)<0}} \sum_{\substack{0<x\in\mathbb{R}\\ x\lambda\in\mathsf{M}'}} c_{x\lambda}(x^2\,\mathrm{q}(\lambda))\mathcal{H}_{n-1}(\lambda) = \sum_{\substack{\lambda\in\mathsf{M}'/\pm1\\ \mathrm{q}(\lambda)<0}} c_\lambda(\mathrm{q}(\lambda))\mathcal{H}_{n-1}(\lambda)$$

wobei $c_{\pm\lambda}(m) := c_\lambda(m)\ \forall \lambda \in \mathsf{M}', m \in \mathbb{Q}$.

Definition 2.17. *Sei* $\alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}$ *und* $0 > m \in \mathbb{Q}$*. Für* $m \in \{\mathrm{q}(\lambda); \lambda \in \alpha\}$ *ist der Heegner-Divisor* $H(\alpha, m)$ *definiert als die Summe jeder irreduziblen Komponente der Menge* $\bigcup_{\lambda\in\alpha, \mathrm{q}(\lambda)=m} \mathcal{H}_{n-1}(\lambda)$ *mit Vielfachheit* 1*, sonst als der Null-Divisor.*

Bemerkung 2.18. *Wegen* $\mathcal{H}_{n-1}(\lambda) = \mathcal{H}_{n-1}(-\lambda)$ *und* $\mathcal{H}_{n-1}(\lambda)$ *irreduzibel ist* $H(\alpha, m)$ *als Divisor die Summe aller Heegner-Primdivisoren* $\mathcal{H}_{n-1}(\lambda)$*, wobei* λ *ein* $\{\pm1\}$*-Repräsentantensystem der* $\lambda \in \alpha$ *mit* $\mathrm{q}(\lambda) = m$ *durchläuft. Es gilt auch* $H(\alpha, m) = H(-\alpha, m)$*, d. h.* $H(\alpha, m)$ *hängt nur von der* ±1*-Klasse von* α *ab. Wir können daher auch* $H(\alpha, m)$ *für* $\alpha \in (\mathsf{M}'/\mathsf{M})/\pm1$ *definieren.*

Damit ist der Divisor des multiplikativen Lifts

$$\sum_{\alpha\in(\mathsf{M}'/\mathsf{M})/\pm1} \sum_{m<0} c_\alpha(m)H(\alpha, m).$$

Wir betrachten nur Modulformen ganzen Gewichts, fordern also $c_0(0) \in 2\mathbb{Z}$ (und n gerade). Der Lift ist holomorphe Modulform, wenn alle $c_\alpha(m)$ nichtnegativ sind (für $0 > m \in \{\mathrm{q}(\lambda); \lambda \in \alpha\}$). Die Liftabbildung ist multiplikativ, d. h. es gilt $f_1 + f_2 \longmapsto F_1F_2$ für Lifts $f_1 \longmapsto F_1$ und $f_2 \longmapsto F_2$. Borcherds gibt auch eine Produktentwicklung des Lifts in jeder Spitze an.

Welche Divisoren sind nun von der angegebenen Form, d. h. Divisor eines multiplikativen Lifts? Dies gibt Borcherds in [Bo2] an: Er betrachtet den Hindernisraum, das ist der Faktorraum aller formalen Hauptteile (mit Konstanten)

$$\left(\sum_{m\equiv \mathrm{q}(\alpha) \bmod 1, m\leq 0} c_\alpha(m) q^m\right)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} \qquad \begin{array}{l}\text{mit } c_\alpha(m) = c_{-\alpha}(m) \in \mathbb{C} \text{ und}\\ \text{nur endlich viele } c_\alpha(m) \neq 0\end{array}$$

modulo der „echten“ Hauptteile von fast-holomorphen elliptischen Modulformen vom Gewicht $1-\frac{n}{2}$ zur Weil-Darstellung ρ (ordne $e^{2\pi i}$ der formalen Unbestimmten q zu). Es gibt also genau zu ganzzahligen formalen Hauptteilen in der Nullklasse einen Borcherdsinput mit diesem Hauptteil und damit eine orthogonale Modulform mit dem zugehörigen Divisor. Der Kontrollraum ist der Vektorraum aller holomorphen elliptischen Modulformen zur dualen Darstellung ρ^* vom Gewicht $1+\frac{n}{2}$. Es gibt eine Paarung des Hindernis- und Kontrollraums, sodaß mit Hilfe des Serreschen Dualitätssatzes gezeigt werden kann (siehe [Bo2]), daß die beiden Räume dual bezüglich dieser Paarung sind, d. h. genau die Inputklasse wird vom ganzen Kontrollraum annulliert. Die Paarung ist $\langle [f], g\rangle := \sum_{\substack{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}\\ m\leq 0}} c_\alpha(m) a_{-\alpha}(-m)$ für einen Repräsentanten $f = \left(\sum_{m\leq 0, m\equiv \mathrm{q}(\alpha) \bmod 1} c_\alpha(m) q^m\right)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ von $[f]$ aus dem Hindernisraum und $g = (g_\alpha)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}, g_\alpha(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Q}} a_\alpha(m) e^{2\pi i m\tau}$ aus dem Kontrollraum. Tatsächlich ist diese Paarung für (den Hauptteil von) fast-holomorphe(n) elliptische(n) Modulformen $f = (f_\alpha)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ vom Gewicht $1-\frac{n}{2}$ zur Weil-Darstellung ρ der 0-te Fourierkoeffizient der $\mathbb{C}$-wertigen fast-holomorphen elliptischen Modulform $f\cdot g := \sum_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} f_\alpha g_{-\alpha}$ vom Gewicht 2 zur trivialen Darstellung, also $= 0$ (dazu beachte, daß $\rho\rho^*$, definiert durch $M \longmapsto \rho(M)\circ\rho^*(M)$ für $M \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, trivial ist). Die Paarung ist also wohldefiniert.

Damit gilt

Satz 2.19. *Seien $c_\alpha(m) \in \mathbb{Z}$ $\forall \alpha \in (\mathsf{M}'/\mathsf{M})/\pm 1$, $0 > m \in \mathbb{Q}$ gegeben mit $c_\alpha(m) = 0$ für $m \not\equiv \mathrm{q}(\alpha) \bmod 1$ und nur endlich viele $c_\alpha(m) \neq 0$. Dann gilt:*

$$\sum_{\alpha\in(\mathsf{M}'/\mathsf{M})/\pm 1} \sum_{m<0} c_\alpha(m) H(\alpha, m)$$

ist Divisor einer meromorphen orthogonalen Modulform vom Gewicht k zum Diskriminantenkern $\Gamma(\mathsf{M})$ und zu einem unitären Charakter, wenn es Zahlen $(D_\alpha)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ gibt mit $D_0 = 2k$ und sodaß für jedes $f = (f_\alpha)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}, f_\alpha(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Q}} a_\alpha(m) e^{2\pi i m\tau}$ aus dem Kontrollraum die Relation

$$\sum_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} D_\alpha a_\alpha(0) + \sum_{m<0, \alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} a_\alpha(-m) c_\alpha(m) = 0$$

besteht (wobei $c_\alpha(m) := c_{\pm\alpha}(m)$).

Gibt es nämlich solche D_α, so auch solche mit $D_\alpha = D_{-\alpha}$ und $D_\alpha = 0$ für $\mathrm{q}(\alpha) \not\equiv 0 \bmod 1$ (wegen $a_\alpha(m) = a_{-\alpha}(m)$ $\forall \alpha, m$ und $a_\alpha(0) = 0$ für $\mathrm{q}(\alpha) \not\equiv 0 \bmod 1$ für alle Elemente des Kontrollraums). Damit ist $\left(D_\alpha + \sum_{m<0} c_\alpha(m) q^m\right)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ aus der Nullklasse des Hindernisraums, d. h. Hauptteil eines multiplikativen Inputs.

Bemerkung 2.20. *Das Transformationsverhalten für Funktionen aus dem Kontrollraum, d. h. für holomorphe elliptische Modulformen $f = (f_\alpha)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ vom Gewicht $1+\frac{n}{2}$ zur dualen Weil-Darstellung lautet explizit:*

- $f_\alpha(-\frac{1}{\tau}) = \dfrac{i^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left|\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right|}}\,\tau^{1+\frac{n}{2}} \displaystyle\sum_{\beta\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} e^{2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle} f_\beta(\tau)$
- $f_\alpha(\tau+1) = e^{-2\pi i\,\mathrm{q}(\alpha)} f_\alpha(\tau)$
- $f_\alpha(\tau)$ *ist beschränkt für* $\tau \longrightarrow i\infty$

Bemerkung 2.21. *Den additiven und multiplikativen Lift (Satz* 2.14 *und* 2.16*) gibt es auch für ungerade n. Man hat dazu Modulformen halbganzen Gewichts und die Weil-Darstellung der metaplektischen Überlagerung der* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ *zu betrachten.*

Eisensteinreihen

Bemerkung 2.22. *Die Relation aus Satz* 2.19 *ist lösbar, wenn man sie nur für die Eisensteinreihen im Kontrollraum fordert. Durch die Eistensteinreihen ist D_0 und damit das Gewicht k des Lifts bereits festgelegt. Genauer gilt*

$$k = \sum_{m<0,\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} a_\alpha(-m)c_\alpha(m),$$

wenn $\left(\sum_{m\in\mathbb{Q}} a_\alpha(m)e^{2\pi i m\tau}\right)_{\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ *die Eisensteinreihe E_v mit $v = -\frac{1}{2}e_0$ vom Gewicht $1+\frac{n}{2}$ zur dualen Weil-Darstellung ist. (Hier ist $0 = \mathsf{M} \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}$.)*

Beweis. Die Lösbarkeit folgt aus Bemerkung 2.11 und $v_\alpha = a_\alpha(0)$: Der Raum $V_0 = V_0^{\rho,k}$ hat Basis $e_\alpha + e_{-\alpha}$, wobei α ein ±1-Repräsentantensystem von M'/M durchläuft. Der $\rho(T)$-invariante Unterraum hat Basis $e_\alpha + e_{-\alpha}, \mathrm{q}(\alpha) \in \mathbb{Z}$. Damit löst

$$D_\beta := \begin{cases} -\frac{1}{2} \displaystyle\sum_{m<0,\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} a_\alpha^{(\beta)}(-m)c_\alpha(m) & \text{für } \mathrm{q}(\beta)\in\mathbb{Z} \text{ und } \beta \neq -\beta \\ - \displaystyle\sum_{m<0,\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} a_\alpha^{(\beta)}(-m)c_\alpha(m) & \text{für } \mathrm{q}(\beta)\in\mathbb{Z} \text{ und } \beta = -\beta \\ \text{beliebig} & \text{für } \mathrm{q}(\beta)\notin\mathbb{Z} \end{cases}$$

das Gleichungssystem, wobei $a_\alpha^{(\beta)}(m)$ der (α,m)-Fourierkoeffizient der Eisensteinreihe zu $v = e_\beta + e_{-\beta}$ für $\mathrm{q}(\beta)\in\mathbb{Z}$ ist. Insbesondere mit $\beta = 0$:

$$k = \tfrac{1}{2}D_0 = -\tfrac{1}{2} \sum_{m<0,\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} a_\alpha^{(0)}(-m)c_\alpha(m) = \sum_{m<0,\alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} a_\alpha(-m)c_\alpha(m)$$

wobei $a_\alpha(m) = -\frac{1}{2}a_\alpha^{(0)}(m)$ $\forall m,\alpha$ die Fourierkoeffizienten von $E_{-\frac{1}{2}e_0}$ sind. □

Um das Gewicht des Lifts zu bestimmen (falls er denn existiert), muß man also die Fourierentwicklung der Eisensteinreihe $E_{-\frac{1}{2}e_0}$ bestimmen. Die $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_\infty$-Klassen von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ sind durch die Koeffizienten c,d eines Vertreters $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ eindeutig bestimmt: Zu

jedem Paar (c,d) mit $\gcd(c,d)=1$ gibt es genau eine Klasse. Umgekehrt ist durch die Klasse das Paar (c,d) bis aufs Vorzeichen bestimmt: Die Klassen stehen in Bijektion zu den Paaren $(c,d)\in\mathbb{Z}^2$ mit $\gcd(c,d)=1, c\geq 0$ und $d=1$ falls $c=0$. Damit gilt

$$\begin{aligned} E_v(\tau) &= \sum_{M\in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})_\infty\backslash \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})} (c\tau+d)^{-k}\rho^*(M)^{-1}v \\ &= \sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z},\gcd(c,d)=1\\ c\geq 0, d=1 \text{ falls } c=0}} (c\tau+d)^{-k}\rho^*\begin{pmatrix} a(c,d) & b(c,d)\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} v \\ &= \frac{1}{2}\sum_{\substack{c,d\in\mathbb{Z}\\ \gcd(c,d)=1}} (c\tau+d)^{-k}\rho^*\begin{pmatrix} a(c,d) & b(c,d)\\ c & d\end{pmatrix}^{-1} v, \end{aligned}$$

dabei seien $a(c,d)$ und $b(c,d)$ beliebige ganze Zahlen, die $(c\ d)$ zu einer Matrix in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ ergänzen. Sei $N\in\mathbb{N}$ minimal mit $N\,\mathrm{q}(m)\in\mathbb{Z}\ \forall m\in\mathsf{M}'$, d. h. ρ^* faktorisiert über $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Wir zerlegen die Summe:

$$= \frac{1}{2}\sum_{\substack{0\leq c<N\\ 0\leq d<N}}\sum_{\substack{m\equiv c \bmod N\\ n\equiv d\bmod N\\ \gcd(m,n)=1}} (m\tau+n)^{-k}\rho^*\begin{pmatrix} a(m,n) & b(m,n)\\ m & n\end{pmatrix}^{-1} v$$

In jeder (nichtleeren) Teilsumme können die Matrizen kongruent zueinander gewählt werden (modulo N): Zu c,d gibt es $m_{c,d}\equiv c$ und $n_{c,d}\equiv d$ mit $\gcd(m_{c,d},n_{c,d})=1$ und $a(m,n), b(m,n)$ für alle m,n kongruent c,d modulo N mit $\gcd(m,n)=1$ sodaß

$$\begin{pmatrix} a(m,n) & b(m,n)\\ m & n\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a(m_{c,d},n_{c,d}) & b(m_{c,d},n_{c,d})\\ m_{c,d} & n_{c,d}\end{pmatrix} \bmod N.$$

Damit sind die zugehörigen Transformationen auf $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]$ gleich und es gilt

$$E_v(\tau) = \frac{1}{2}\sum_{\substack{0\leq c<N\\ 0\leq d<N}} \underbrace{\Big(\sum_{\substack{m\equiv c\bmod N\\ n\equiv d\bmod N\\ \gcd(m,n)=1}} (m\tau+n)^{-k}\Big)}_{=:\,G_k^*(\tau;c,d,N)} \rho^*\begin{pmatrix} a(m_{c,d},n_{c,d}) & b(m_{c,d},n_{c,d})\\ m_{c,d} & n_{c,d}\end{pmatrix}^{-1} v.$$

Die Komponenten von E_v sind also Linearkombinationen der $G_k^*(\,.\,;c,d,N)$. Offenbar ist $G_k^*(\,.\,;c,d,N)\equiv 0$ für $\gcd(c,d,N)\neq 1$. Von der Bedingung der Teilerfreiheit in der Summe kann man sich befreien. Es sei

$$G_k(\tau;c,d,N) := \sum_{\substack{m\equiv c\bmod N\\ n\equiv d\bmod N}}{}' (m\tau+n)^{-k} \qquad \forall\tau\in\mathbb{H},$$

wobei $'$ bedeutet, daß nicht über das Paar $(0,0)$ summiert wird. Für $\gcd(c,d,N)=1$ heißt $G_k(\,.\,;c,d,N)$ primitiv. Hecke zeigt [Hec]:

Satz 2.23. *Die $G_k^*(\,.\,;c,d,N)$ sind Linearkombinationen von primitiven $G_k(\,.\,;\tilde{c},\tilde{d},N)$ und die G_k haben das Transformationsverhalten*

$$G_k(M\tau;c,d,N) = (\gamma\tau+\delta)^k G_k(\tau;\alpha c+\gamma d,\beta c+\delta d,N)$$

für $M = \left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$. Insbesondere gilt $G_k(\tau+N;c,d,N) = G_k(\tau;c,d,N)$ (mit $M = T^N$), d. h. die G_k haben eine Fourierentwicklung. Diese ist

$$G_k(\tau;c,d,N) = \delta\left(\tfrac{c}{N}\right)\sum_{n\equiv d \bmod N}{}' \frac{1}{n^k} + \frac{(-2\pi i)^k}{N^k(k-1)!}\sum_{\substack{m\equiv c \bmod N\\ nm>0}} n^{k-1}\operatorname{sgn}(n) e^{2\pi i\frac{dn}{N}} e^{2\pi i\frac{nm\tau}{N}}.$$

Dabei ist $\delta(x) = \begin{cases}1 & \text{wenn } x\in\mathbb{Z}\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ *und* $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases}\frac{x}{|x|} & \text{wenn } x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

Für den 0-ten Fourierkoeffizienten zeigt Freitag [Fr3]:

$$\sum_{n\equiv d \bmod N}{}' \frac{1}{n^k} = \begin{cases}0 & \text{für } N\mid d \text{ und } 2\not| k\\ 2N^{-k}\zeta(k) & \text{für } N\mid d \text{ und } 2\mid k\\ -\frac{(2\pi)^k}{k!N}\sum\limits_{n=1}^{N} B_k\left(\frac{n}{N}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}k - 2\pi\frac{dn}{N}\right) & \text{sonst}\end{cases}$$

Dabei ist B_k das k-te Bernoulli-Polynom, definiert durch $\sum_{k=0}^{\infty} B_k(x)\frac{t^k}{k!} = \frac{te^{xt}}{e^t-1}$ und $\zeta(k) = \frac{(-1)^{k/2-1}2^{k-1}B_k}{k!}\pi^k$ (k gerade) mit der k-ten Bernoulli-Zahl $B_k = B_k(0)$.

Reduzierter Kontrollraum

Das Problem vereinfacht sich, wenn die $c_\alpha(m)$ nur von den $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$-Bahnen abhängen, d. h.

$$c_\alpha(m) = c_{g(\alpha)}(m) \quad \forall g\in \mathrm{O}^+(\mathsf{M}), \alpha\in \mathsf{M}'/\mathsf{M}$$

bzw. entsprechend für $\pm\alpha \in (\mathsf{M}'/\mathsf{M})/\pm 1$:

$$c_{\pm\alpha}(m) = c_{g(\pm\alpha)}(m)\ \forall g\in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$$

(das eine ist genau dann der Fall, wenn das andere der Fall ist, denn $-\mathrm{id}\in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ operiert auch auf M'/M als Multiplikation mit -1). Wir nennen die Orbits auch Typen. Es sei $\mathfrak{T}$ die Menge dieser Typen und $\mathbb{C}[\mathfrak{T}]$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller Abbildungen $\mathfrak{T}\longrightarrow\mathbb{C}$ mit Basis $e_\mathfrak{t}, \mathfrak{t}\in\mathfrak{T}$, wobei $e_\mathfrak{t}(\mathfrak{s}) = 1$ falls $\mathfrak{s}=\mathfrak{t}$ und 0 sonst. Es gilt

Lemma 2.24. *Der Raum $\mathbb{C}[\mathfrak{T}]$ ist isomorph zum Unterraum*

$$W := \{f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}};\ f_\alpha = f_{g(\alpha)}\ \forall\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}, g\in\mathrm{O}^+(\mathsf{M})\}$$

von $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]$ mit Basis $\{\sum_{\alpha\in\mathfrak{t}};\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}\}$, und W ist invariant unter der dualen Weil-Darstellung ρ^*. Wir erhalten also eine $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-Darstellung $\rho_\mathfrak{T}^*$ auf $\mathbb{C}[\mathfrak{T}]$.

Beweis. Die Isomorphie ist klar. Für die Invarianz genügt es, die Erzeuger S und T sowie Basisvektoren in W zu betrachten:

$$\begin{aligned}\rho^*(S)\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e_\alpha\right) &= \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} \frac{i^{(2-n)/2}}{\sqrt{\left|\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right|}} \sum_{\beta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} e^{2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle} e_\beta \\ &= \frac{i^{(2-n)/2}}{\sqrt{\left|\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right|}} \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} \sum_{\beta\in\mathfrak{s}} e^{2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle} e_\beta\end{aligned}$$

Wir setzen $E(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) := \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e^{2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle}$. Dies hängt nur vom Typ $\mathfrak{s}$ von β ab: Für $g\in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ gilt $\sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e^{2\pi i\langle\alpha,g(\beta)\rangle} = \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e^{2\pi i\langle g(\alpha),\beta\rangle}$ und mit α läuft auch $g(\alpha)$ durch $\mathfrak{t}$.

$$= \frac{i^{(2-n)/2}}{\sqrt{\left|\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right|}} \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} E(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) \sum_{\beta\in\mathfrak{s}} e_\beta \quad \in W$$

$$\rho^*(T)\left(\sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e_\alpha\right) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e^{-2\pi i\,\mathrm{q}(\alpha)} e_\alpha = e^{-2\pi i\,\mathrm{q}(\mathfrak{t})} \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e_\alpha \quad \in W$$

Dabei sei $\mathrm{q}(\mathfrak{t}) := \mathrm{q}(\alpha) \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (wohldefiniert). □

Der Beweis zeigt: Die Darstellung $\rho^*_{\mathfrak{T}}$ lautet auf den Erzeugern S und T in Formeln:

$$\begin{aligned}\rho^*_{\mathfrak{T}}(S)\,(e_\mathfrak{t}) &= \frac{i^{(2-n)/2}}{\sqrt{\left|\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right|}} \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} E(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) e_\mathfrak{s} \\ \rho^*_{\mathfrak{T}}(T)\,(e_\mathfrak{t}) &= e^{-2\pi i\,\mathrm{q}(\mathfrak{t})} e_\mathfrak{t}\end{aligned}$$

Wir können damit $\mathbb{C}[\mathfrak{T}]$-wertige elliptische Modulformen zur Darstellung $\rho^*_{\mathfrak{T}}$ betrachten. Die Komponenten $f^{\mathfrak{T}}_\mathfrak{t}$ einer Modulform $f^{\mathfrak{T}}$ haben eine Fourierentwicklung der Form

$$f^{\mathfrak{T}}_\mathfrak{t}(\tau) = \sum_{m\equiv \mathrm{q}(\mathfrak{t}) \bmod 1} a^{\mathfrak{T}}_\mathfrak{t}(m) e^{2\pi i m\tau}.$$

Es gilt

Lemma 2.25. *Sei $f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ eine holomorphe elliptische Modulform zur dualen Weil-Darstellung. Dann ist*

$$f^{\mathfrak{T}} = (f^{\mathfrak{T}}_\mathfrak{t})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} \quad \textit{mit} \quad f^{\mathfrak{T}}_\mathfrak{t} := \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} f_\alpha$$

eine holomorphe elliptische Modulform zur Darstellung $\rho^*_{\mathfrak{T}}$ gleichen Gewichts. Für die Fourierkoeffizienten gilt

$$a^{\mathfrak{T}}_\mathfrak{t}(m) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} a_\alpha(m),$$

wenn die $a_\alpha(m)$ die Fourierkoeffizienten von f_α sind.

Beweis. Das Transformationsverhalten von $f^{\mathfrak{T}}$ folgt wie im vorherigen Lemma mit f_α statt e_α (die zusätzlichen τ-Potenzen stellen kein Problem dar). Die Existenz und Form der Fourierentwicklungen folgt aus den Entwicklungen der f_α. □

Definition 2.26. *Der reduzierte Kontrollraum ist der Raum aller $\mathbb{C}[\mathfrak{T}]$-wertigen holomorphen elliptischen Modulformen vom Gewicht $1+\frac{n}{2}$ zur Darstellung $\rho^*_{\mathfrak{T}}$.*

Damit gilt der

Satz 2.27. *Seien $c_\alpha(m)$ wie in Satz 2.19 gegeben. Gilt zusätzlich*

$$c_\alpha(m) = c_{g(\alpha)}(m) \quad \forall g \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M}), \alpha \in (\mathsf{M}'/\mathsf{M})/\pm 1,$$

so ist

$$\sum_{\alpha \in (\mathsf{M}'/\mathsf{M})/\pm 1} \sum_{m<0} c_\alpha(m) H(\alpha, m)$$

Divisor einer meromorphen orthogonalen Modulform vom Gewicht k zum Diskriminantenkern $\Gamma(\mathsf{M})$, wenn es Zahlen $(D_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ gibt mit $D_{\mathfrak{o}} = 2k$ und sodaß für alle $f^{\mathfrak{T}} = (f^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ aus dem reduzierten Kontrollraum mit Fourierentwicklung $f^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{t}}(\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Q}} a^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{t}}(m) e^{2\pi i m\tau}$ die Relation

$$\sum_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} D_{\mathfrak{t}} a_{\mathfrak{t}}(0) + \sum_{m<0, \mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} a^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{t}}(-m) c_{\mathfrak{t}}(m) = 0$$

besteht (dabei sei $\mathfrak{o} = \{0\} = \{\mathsf{M}\}$ der 0-Typ und $c_{\mathfrak{t}}(m) := c_{\pm\alpha}(m)$ für $\alpha \in \mathfrak{t}$).
Die Bemerkung 2.22 gilt entsprechend.

Beweis. Seien solche $(D_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ gegeben. Wir setzten $D_\alpha := D_{\mathfrak{t}}$ für $\alpha \in \mathfrak{t}$ und behaupten, daß für diese D_α die Relation aus Satz 2.19 besteht. Sei also $f = (f_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ aus dem Kontrollraum. Dann ist $f^{\mathfrak{T}} = (f^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ mit $f^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{t}} := \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} f_\alpha$ aus dem reduzierten Kontrollraum und erfüllt damit die angegebene Relation. Es gilt daher für f:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} D_\alpha a_\alpha(0) + \sum_{m<0, \alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} a_\alpha(-m) c_{\pm\alpha}(m) \\
=&\sum_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} D_\alpha a_\alpha(0) + \sum_{m<0, \mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} a_\alpha(-m) c_{\pm\alpha}(m) \\
=&\sum_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} D_{\mathfrak{t}} a_{\mathfrak{t}}(0) + \sum_{m<0, \mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} a^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{t}}(-m) c_{\mathfrak{t}}(m) \\
=&0
\end{aligned}$$

□

2.4 Hermitesch-Symplektische Modulformen

Wir betrachten auch Modulformen zum hermitesch-symplektischen Halbraum $\boldsymbol{H}_n$.

Definition 2.28. *Sei $G \subseteq \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}[i])$ eine Untergruppe endlichen Index und $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Charakter auf G.*

Eine holomorphe (meromorphe) hermitesch-symplektische Modulform zur Gruppe G und zum Charakter χ vom Gewicht k ist eine holomorphe (meromorphe) Funktion f auf $\boldsymbol{H}_n$ mit

$$f(M\langle Z\rangle) = \chi(M)\det(CZ+D)^k f(Z) \quad \forall M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in G, Z \in \boldsymbol{H}_n.$$

Allgemeiner werden Modulformen zu Untergruppen von $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{C})$ betrachtet, die kommensurabel zu $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}[i])$ sind. Wir wollen symmetrische Modulformen betrachten, das sind solche für die $f(Z') = f(Z)\ \forall Z \in \boldsymbol{H}_n$ gilt, d. h.

Definition 2.29. *Sei $G \subseteq \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}[i]) \rtimes \langle \tau_n \rangle$ Untergruppe endlichen Index und $\chi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Charakter auf G. Eine holomorphe (meromorphe) hermitesch-symplektische Modulform zur Gruppe G und zum Charakter χ vom Gewicht k ist eine holomorphe (meromorphe) Funktion f auf $\boldsymbol{H}_n$ mit*

$$f(M\tau_n^\varepsilon\langle Z\rangle) = \chi(M\tau_n^\varepsilon)\det(CZ+D)^k f(Z) \quad \forall M\tau_n^\varepsilon \in G, Z \in \boldsymbol{H}_n$$

Die Modulform heißt (anti-)symmetrisch, falls $\tau_n \in G$ und $\chi(\tau_n) = 1$ (bzw. -1).

Wegen $M\tau_n^\varepsilon\langle Z\rangle = (-M\tau_n^\varepsilon)\langle Z\rangle$ und $\det(CZ+D) = (-1)^n \det(-CZ-D)$ muß $\chi(M\tau_n^\varepsilon) = (-1)^{nk}\chi(-M\tau_n^\varepsilon)$ sein, falls $f \not\equiv 0$. Insbesondere muß also $\chi(M\tau_n^\varepsilon) = \chi(-M\tau_n^\varepsilon)$, d. h. $\chi(-E_4) = 1$, für gerade n gelten (falls $-E_4 \in G$).

Rückzug zu orthogonalen Modulformen

Wir betrachten speziell den Fall $n = 2$. Hier haben wir eine biholomorphe Äquivalenz $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{H} = \mathcal{K}_4^+$ (vgl. Abschnitt 1.5). Wir können also Funktionen auf $\boldsymbol{H}$ zu Funktionen auf $\mathcal{H}$ zurückziehen (und umgekehrt). Wir erinnern kurz an die Notation aus Kapitel 1. Dort war $\mathrm{V} = \mathbb{R}^6$ mit quadratischer Form $\mathrm{q}(x) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - x_6^2$ und $\mathsf{L} = \mathbb{Z}^6 \subseteq \mathbb{R}^6$ sowie $\mathsf{M} = 2\mathsf{L}'$. Wir haben den Homomorphismus $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{C})_1 \rtimes \langle\tau\rangle \twoheadrightarrow \mathrm{O}^+(\mathrm{V})$ betrachtet, dessen Einschränkung auf $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})^* = \langle \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$ wir hier mit Φ bezeichnen. Es gilt:

- $\Phi(T_S) = \mathrm{E}(e_1, s)$, wobei $T_S = \left(\begin{smallmatrix} E_2 & S \\ 0 & E_2 \end{smallmatrix}\right)$, $S = \overline{S}' = \left(\begin{smallmatrix} s_0 & s_1 \\ \overline{s_1} & s_2 \end{smallmatrix}\right)$, und
$$s = (0, 0, -s_0, -s_2, -\operatorname{Re} s_1, \operatorname{Im} s_1)$$
- $\Phi(I) = l = \begin{pmatrix} \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix}$
- $\Phi(H_1) = h_1 = \begin{pmatrix} E_4 & 0 \\ 0 & \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix}$, wobei $H_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{smallmatrix}\right)$
- $\Phi(\tau) = h_2 = \begin{pmatrix} E_5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, wobei $\tau = \tau_2$

Für Gruppen $\Gamma \subseteq \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ wird mit $\widetilde{\Gamma}$ das Urbild in $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1$ und mit Γ^* das Urbild in $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1 \rtimes \langle\tau\rangle$ unter Φ bezeichnet. Es gilt

$$\widetilde{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})} = \widetilde{\mathrm{SO}^+(\mathsf{M})} = \mathrm{SO}^+(\mathsf{M})^* = \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle$$

und

$$\mathrm{O}^+(\mathsf{M})^* = \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle.$$

Mit ϕ bezeichnen wir die biholomorphe Abbildung $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{K}_4^+$ aus Abschnitt 1.5. Wir haben

$$\phi(M\tau^\varepsilon\langle Z\rangle) = \Phi(M\tau^\varepsilon)(\phi(Z)) \qquad \forall M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, \varepsilon \in \{0,1\}, Z \in \boldsymbol{H}$$

und umgekehrt

$$\phi^{-1}(\gamma([z])) = G\langle\phi^{-1}([z])\rangle \qquad \forall \gamma \in \Gamma, G \text{ mit } \Phi(G) = \gamma, [z] \in \mathcal{H}$$

gezeigt.

Funktionen f auf $\boldsymbol{H}$ können via $F := f \circ \phi^{-1}$ zu Funktionen auf $\mathcal{H}$ zurückgezogen werden (und umgekehrt). Dabei überträgt sich das Transformationsverhalten von hermitesch-symplektischen Modulformen: Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ und f hermitesch-symplektische Modulform zu Γ^* zum Charakter $\chi : \Gamma^* \longrightarrow \mathbb{C}$ vom Gewicht k, und sei $F := f \circ \phi^{-1}$ der Rückzug von f auf $\mathcal{H}$. Dann gilt für $\gamma \in \Gamma, G \in \Phi^{-1}(\gamma), [z] \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} F(\gamma([z])) &= f \circ \phi^{-1}(\gamma([z])) \\ &= f(G\langle\phi^{-1}([z])\rangle) \\ &= \chi(G)\det\left(C_G\phi^{-1}([z]) + D_G\right)^k f(\phi^{-1}([z])) \end{aligned}$$

Dabei sei $G = \left(\begin{smallmatrix} A_G & B_G \\ C_G & D_G \end{smallmatrix}\right)\tau^\varepsilon$. Wegen $n = 2$ ist $\chi(G) = \chi(-G)$ also $\chi(\Phi^{-1}(\gamma)) := \chi(G)$ wohldefiniert. Ebenso ist $\det\left(C_{\Phi^{-1}(\gamma)}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(\gamma)}\right)$ wohldefiniert. Somit:

$$= \chi(\Phi^{-1}(\gamma))\det\left(C_{\Phi^{-1}(\gamma)}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(\gamma)}\right)^k F([z])$$

Lemma 2.30. *Es gilt*

$$\det\left(C_{\Phi^{-1}(\gamma)}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(\gamma)}\right) = \frac{(\gamma(z))_2}{z_2} \qquad \forall \gamma \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M}), z \in \widetilde{\mathcal{H}}.$$

Beweis. Es genügt, dies für Erzeuger von $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ zu zeigen, also für l, h_1, h_2 und $\mathrm{E}(e_1, s)$, $s \perp e_1$. Für l gilt $\Phi^{-1}(l) = \{\pm I\}$ und damit

$$\begin{aligned} &\det\left(C_{\Phi^{-1}(l)}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(l)}\right) = \det(\phi^{-1}([z])) \\ &= \det\left(z_2^{-1}\begin{pmatrix} z_3 & z_5 - iz_6 \\ z_5 + iz_6 & z_4 \end{pmatrix}\right) = z_2^{-2}(z_3z_4 - z_5^2 - z_6^2) = \frac{-z_1z_2}{z_2^2} = \frac{-z_1}{z_2} = \frac{(lz)_2}{z_2}. \end{aligned}$$

Für h_1 gilt $\Phi^{-1}(h_1) = \{\pm H_1\}$ also

$$\det\left(C_{\Phi^{-1}(h_1)}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(h_1)}\right) = \det\left(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}\left(\begin{smallmatrix} i & \\ & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) = 1 = \frac{z_2}{z_2} = \frac{(h_1 z)_2}{z_2}.$$

Für h_2 gilt $\Phi^{-1}(h_2) = \{\pm E_4\tau\}$ also

$$\det\left(C_{\Phi^{-1}(h_2)}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(h_2)}\right) = \det(E_2) = 1 = \frac{z_2}{z_2} = \frac{(h_2 z)_2}{z_2}.$$

Schließlich gilt $\Phi^{-1}(\mathrm{E}(e_1, s)) = \{\pm T_S\}$ also

$$\det\left(C_{\Phi^{-1}(\mathrm{E}(e_1,s))}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(\mathrm{E}(e_1,s))}\right) = \det(E_2) = 1 = \frac{z_2}{z_2} = \frac{(\mathrm{E}(e_1,s)(z))_2}{z_2}$$

(wobei sich s und S wie oben bzw. in Abschnitt 1.4 entsprechen). □

Definieren wir $v(\gamma) := \chi(\Phi^{-1}(\gamma))$, so ist dies ein wohldefinierter Charakter auf Γ und es gilt für die zurückgezogene Modulform

$$\begin{aligned} F(\gamma([z])) &= \chi(\Phi^{-1}(\gamma)) \det\left(C_{\Phi^{-1}(\gamma)}\phi^{-1}([z]) + D_{\Phi^{-1}(\gamma)}\right)^k F([z]) \\ &= v(\gamma)\frac{(\gamma(z))_2^k}{z_2^k} F([z]) \end{aligned}$$

für jeden Repräsentanten z von $[z]$.

Definieren wir nun eine Funktion $\widetilde{F}$ auf $\widetilde{\mathcal{H}}$ durch

$$\widetilde{F}(z) := z_2^{-k} F([z]),$$

so gilt

$$\widetilde{F}(tz) = (tz)_2^{-k} F([tz]) = t^{-k} z_2^{-k} F([z]) = t^{-k}\widetilde{F}(z) \qquad \forall t \in \mathbb{C}$$

und

$$\begin{aligned} \widetilde{F}(\gamma(z)) = (\gamma(z))_2^{-k} F(\gamma([z])) &= (\gamma(z))_2^{-k} v(\gamma)\frac{(\gamma(z))_2^k}{z_2^k} F([z]) \\ &= v(\gamma) z_2^{-k} F([z]) = v(\gamma)\widetilde{F}(z) \end{aligned} \qquad \forall \gamma \in \Gamma,$$

d. h. $\widetilde{F}$ ist eine orthogonale Modulform zur Gruppe Γ zum Charakter v vom Gewicht k.

Entsprechend kann man umgekehrt zu orthogonalen Modulformen F zur Gruppe Γ hermitesch-symplektische Modulformen f zur Gruppe Γ^* konstruieren:

$$f(Z) := z_2^k F(z) \text{ für jeden Repräsentanten } z \text{ von } \phi(Z) \in \mathcal{H}$$

ist Modulform zum Charakter $\chi(M\tau^\varepsilon) := v(\Phi(M\tau^\varepsilon))$ gleichen Gewichts. Denn ist z Repräsentant von $\phi(Z)$, so ist $\Phi(M)z$ Repräsentant von $\phi(M\langle Z\rangle)$ und es gilt

$$\begin{aligned} f(M\langle Z\rangle) &= (\Phi(M)z)_2^k F(\Phi(M)z) \\ &= (\Phi(M)z)_2^k v(\Phi(M)) F(z) \\ &= (\Phi(M)z)_2^k \chi(M) z_2^{-k} f(Z) \\ &= \chi(M)\det(C_M Z + D_M)^k f(Z). \end{aligned}$$

Diese Konstruktionen sind offenbar invers zueinander, insgesamt gilt also:

Satz 2.31. *Sei $\Gamma \subseteq \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$. Dann entsprechen die Charaktere auf Γ umkehrbar eindeutig den Charakteren χ auf Γ^* mit $\chi(-E_4) = 1$ und es gilt:*

Die holomorphen (meromorphen) hermitesch-symplektischen Modulformen vom Gewicht k zur Gruppe Γ^* und zum Charakter χ mit $\chi(-E_4) = 1$ entsprechen umkehrbar eindeutig den holomorphen (meromorphen) orthogonalen Modulformen gleichen Gewichts zur Gruppe Γ zum entsprechenden Charakter.

Theta-Reihen

Beispiele für Modulformen sind die von Freitag [Fr1] eingeführten Theta-Reihen:

Definition 2.32. *Eine Theta-Charakteristik ist ein Paar (a, b) von n-Tupeln $a, b \in \{0,1\}^n$ (geschrieben als Spalten). Eine Theta-Charakteristik heißt gerade, wenn $a'b \in 2\mathbb{Z}$ gilt, sonst ungerade.*

Man zeigt durch Induktion, daß die Anzahl der geraden Charakteristiken $(2^n+1)2^{n-1}$ ist. Im Fall $n = 2$ gibt es also 10 gerade Theta-Charakteristiken, nämlich:

$$\binom{a}{b} \in \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Definition 2.33. *Sei (a, b) eine Theta-Charakteristik. Wir definieren die Theta-Reihe $\Theta(\,.\,; a, b)$ durch*

$$\Theta(Z; a, b) := \Theta(Z; (a, b)) := \sum_{g \in \mathbb{Z}[i]^n} e^{\pi i (Z\{g+\tilde{a}\} + 2\,\mathrm{Re}(\tilde{b}'g))} \quad \forall Z \in \boldsymbol{H}_n,$$

wobei $\tilde{a} = \frac{1+i}{2}a$ und $\tilde{b} = \frac{1+i}{2}b$ und $A\{B\} = \overline{A}'BA$ für beliebige komplexe Matrizen (passender Dimension) sei.

Es gilt [Fr1]:

Satz 2.34. *Die Theta-Reihen $\Theta(\,.\,; a, b)$ sind identisch Null für ungerade Charakteristiken (a, b). Für gerade Charakteristiken sind die Quadrate $\Theta^2(\,.\,; a, b)$ symmetrische hermitesch-symplektische Modulformen vom Gewicht 2 zur Gruppe $\Gamma_n(1+i)$ zum Determinantencharakter $\chi(M) = \det(M)$.*

Bemerkung 2.35. *Im Fall $n = 2$ ist damit $\Theta^2(\,.\,; a, b)$ symmetrische hermitesch-symplektische Modulform vom Gewicht 2 zur Gruppe $\widetilde{\Gamma}_{\mathsf{N}} = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1 \rangle$ zum trivialen Charakter, denn $\begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ operiert auf $\boldsymbol{H}$ wie H_1.*

Lassen wir allgemeiner Charakteristiken $(a, b) \in (\mathbb{Z}[i]^n)^2$ zu, so gilt

$$\Theta(Z; a + r, b + s) = e^{\pi i\,\mathrm{Re}(\overline{b}'r)}\Theta(Z; a, b) \quad \text{für } r, s \in ((1+i)\mathbb{Z}[i])^n,$$

also insbesondere

$$\Theta(Z; a + r, b + s) = \Theta(Z; a, b) \quad \text{für } r \in (2\mathbb{Z}[i])^n, s \in ((1+i)\mathbb{Z}[i])^n,$$

und weiter

$$\Theta(\left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}'^{-1} \end{smallmatrix}\right)\langle Z\rangle; a, b) = \Theta(Z; \overline{A}'a, A^{-1}b) \quad \text{für } A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[i])$$

sowie

$$\Theta(\left(\begin{smallmatrix} E & S \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right)\langle Z\rangle; a, b) = e^{\frac{1}{2}\pi i \overline{a}' S a}\Theta(Z; a, b + Sa - is) \quad \text{für } S = \overline{S}' \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{Z}[i]),$$

wobei s der Vektor der Diagonalelemente von S ist. Schließlich gilt

$$\Theta(I\langle Z\rangle; a, b) = -\det(Z)\Theta(Z; b, a).$$

Hieraus folgt das Transformationsverhalten aus dem Satz.

Wir erhalten eine Operation

$$(M, (a, b)) \longmapsto M \circ (a, b)$$

von $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}[i])$ auf den „echten“ Theta-Charakteristiken $(a, b) \in \{0, 1\}^n$, die auf den Erzeugern gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & \overline{A}'^{-1} \end{smallmatrix}\right) \circ (a, b) &= (\overline{A}'a, A^{-1}b) \bmod 1 + i, \\ \left(\begin{smallmatrix} E & S \\ 0 & E \end{smallmatrix}\right) \circ (a, b) &= (a, b + Sa - is) \bmod 1 + i, \\ I \circ (a, b) &= (b, a), \end{aligned}$$

sodaß gerade Charakteristiken in gerade überführt werden und

$$\Theta(M\langle Z\rangle; a, b) = \zeta(M, a, b)\det(CZ + D)\Theta(Z; M \circ (a, b)) \qquad \forall Z \in \boldsymbol{H}_n$$

für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ C & D \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{Sp}(n, \mathbb{Z}[i])$ und alle geraden Charakteristiken (a, b) gilt mit einer vierten Einheitswurzel $\zeta(M, a, b)$. Diese Operation setzt sich via

$$\tau \circ (a, b) = (a, b)$$

auf $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 \rtimes \langle\tau\rangle$ fort.

Kapitel 3

Spezielle Lifts und Theta-Reihen

Wir betrachten wieder unsere spezielle Situation: Es ist $V = \mathbb{R}^6$, $q(x) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - x_6^2$ und $\mathsf{L} = \mathbb{Z}^6$, $\mathsf{M} = 2\mathsf{L}'$, $\mathsf{N} = \mathbb{Z}^4 \times \mathsf{N}_0$ sowie Γ der Diskriminantenkern von M wie im ersten Kapitel. Wir suchen orthogonale Modulformen. Der einfachste Fall ist der additive Lift von Konstanten. Der Inputraum ist in diesem Fall 20-dimensional, der geliftete Raum nur zehndimensional. Er wird erzeugt von den (ins Orthogonale übersetzten) Theta-Reihen; diese sind also insbesondere Modulformen vom Gewicht eins zur Gruppe Γ^*.

Im ersten Abschnitt wird der additive Lift betrachtet, im zweiten wird ein multiplikativer Lift konstruiert, der die linearen Abhängigkeiten der additiven Lifts etabliert und schließlich wird im letzten Abschnitt die Identifikation mit den Theta-Reihen hergestellt.

3.1 Additive Lifts

Der Inputraum für den additiven Lift besteht aus allen holomorphen elliptischen Modulformen $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]$ zur Weil-Darstellung vom Gewicht Null, d. h. aus den Konstanten, die invariant unter der $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$-Operation sind: $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$. Es gilt

Proposition 3.1. *Der Raum* $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ *ist* 20*-dimensional.*

Beweis. Die Bestimmung des Raums $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ geschieht durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$c = \rho(S)c$$
$$c = \rho(T)c$$

wobei

$$c = (c_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} \in \mathbb{C}\left[\mathsf{M}'/\mathsf{M}\right], S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese und weitere Rechnungen wurden mit Maple durchgeführt. Sie sind im Anhang genauer dargestellt (die Rechnung für dieses Lemma ab Seite 98). □

Wir suchen Inputs, deren Lifts Nullstellen auf gewissen Spiegelungshyperebenen bzw. Heegner-Primdivisoren $\mathcal{H}(\lambda), \lambda \in V$ und damit auf $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{H}(g(\lambda))$ haben.

Für diese Inputs $c = (c_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ muß also $\sigma_\lambda(c) = -c$ und $\sigma_\lambda \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ gelten. Zunächst muß $\mathbb{R}\lambda \cap V_{\mathbb{Q}} \neq \{0\}$ sein, d. h. o. E. $\lambda \in V_{\mathbb{Q}}$ und damit o. E. $\lambda \in \mathsf{M}'$ primitiv. Es gilt

Lemma 3.2. *Sei $\lambda \in \mathsf{M}'$ primitiv mit $\mathrm{q}(\lambda) \neq 0$, dann gilt*

$$\sigma_\lambda \in \mathrm{O}(\mathsf{M}) \Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{q}(\lambda)\mathsf{M}.$$

Beweis. Es gilt

$$\sigma_\lambda \in \mathrm{O}(\mathsf{M}) \Longleftrightarrow \tfrac{\langle m,\lambda\rangle}{\mathrm{q}(\lambda)}\lambda \in \mathsf{M} \ \ \forall m \in \mathsf{M} \Longleftrightarrow \lambda \in \tfrac{\mathrm{q}(\lambda)}{\langle m,\lambda\rangle}\mathsf{M} \ \ \forall m \in \mathsf{M}.$$

Wegen $\{\langle m,\lambda\rangle; m \in \mathsf{M}\} = \mathbb{Z}$ ist $\bigcap_{m\in\mathsf{M}} \frac{\mathrm{q}(\lambda)}{\langle m,\lambda\rangle}\mathsf{M} = \mathrm{q}(\lambda)\mathsf{M}$. □

Folgerung 3.3. *Sei λ wie im Lemma, dann gilt*

$$\sigma_\lambda \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \Longleftrightarrow \lambda \in \mathrm{q}(\lambda)\mathsf{M} \text{ und } \mathrm{q}(\lambda) < 0.$$

Beweis. Spiegelungen erhalten die Komponente $\mathcal{H} = \mathcal{K}^+$ genau dann, wenn sie negativ sind (vgl. Abschnitt 1.1). □

Folgerung 3.4. *Sei λ wie im Lemma, dann gilt*

$$\sigma_\lambda \in \mathrm{O}(\mathsf{M}) \Longrightarrow \tfrac{1}{\mathrm{q}(\lambda)} \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad \sigma_\lambda \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \Longrightarrow \tfrac{1}{\mathrm{q}(\lambda)} \in -\mathbb{N}.$$

Beweis. Nach dem Lemma gilt $\sigma_\lambda \in \mathrm{O}(\mathsf{M}) \Longrightarrow \lambda \in \mathrm{q}(\lambda)\mathsf{M}$, d. h. $\frac{1}{\mathrm{q}(\lambda)}\lambda \in \mathsf{M}$, also $\mathrm{q}\big(\frac{1}{\mathrm{q}(\lambda)}\lambda\big) = \frac{1}{\mathrm{q}(\lambda)} \in \mathbb{Z}$. □

In unserem Fall also $\mathrm{q}(\lambda) \in \{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\}$. Für $\mathrm{q}(\lambda) = -1$ müßte $\lambda \in \mathsf{M}$ gelten. Wegen $\frac{1}{2}\mathsf{M} \subseteq \mathsf{M}'$ ist dann aber λ nicht primitiv in M', d. h. nur $\mathrm{q}(\lambda) \in \big\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\big\}$ kommt in Frage. Wegen $\frac{1}{4}\mathsf{M} \supseteq \mathsf{M}'$ liegen Spiegelungen längs in M' primitiver Vektoren der Norm $-\frac{1}{4}$ in $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$. Wir werden im folgenden Vektoren der Norm $-\frac{1}{2}$ betrachten. Diese müssen also in $\frac{1}{2}\mathsf{M} = \mathsf{L}'$ liegen.

Bemerkung 3.5. *Die Implikation „$\Longleftarrow$“ aus Lemma 3.2 (und aus Folgerung 3.3) gilt auch für beliebige $\lambda \in \mathsf{M}'$.*

Beweis. Für $\lambda \in \mathsf{M}'$ ist $\{\langle m,\lambda\rangle; m \in \mathsf{M}\} \subseteq \mathbb{Z}$ und damit $\mathrm{q}(\lambda)\mathsf{M} \subseteq \bigcap_{m\in\mathsf{M}} \frac{\mathrm{q}(\lambda)}{\langle m,\lambda\rangle}\mathsf{M}$. □

Ist nun ein Input c mit $\sigma_\lambda(c) = -c$ gegeben, so gilt auch $\gamma \circ \sigma_\lambda(c) = -c \ \forall \gamma \in \Gamma$, d. h. der Lift verschwindet mit $\mathcal{H}(\lambda)$ auch auf $\{[z] \in \mathcal{H}; \gamma \circ \sigma_\lambda(z) = z\}$. Ist insbesondere $\gamma = \sigma_\mu \circ \sigma_\lambda$, so verschwindet der Lift also auch auf $\mathcal{H}(\mu)$.

Lemma 3.6. *Sei M ein gerades Gitter und $\lambda, \mu \in \mathsf{M}'$ mit λ primitiv in M' und $\sigma_\lambda \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$. Ist $\mu \equiv \lambda \bmod \mathsf{M}$ und $\mathrm{q}(\mu) = \mathrm{q}(\lambda)$, so ist $\sigma_\mu \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ und $\sigma_\mu \circ \sigma_\lambda \in \Gamma(\mathsf{M})$.*

Beweis. Sei $\mu = \lambda + m$ mit $m \in \mathsf{M}$. Es gilt $\mathsf{M} \subseteq \mathrm{q}(\lambda)\mathsf{M}$ wegen $\mathrm{q}(\lambda)^{-1} \in \mathbb{Z}$ und damit $\mu = \lambda + m \in \mathrm{q}(\lambda)\mathsf{M} = \mathrm{q}(\mu)\mathsf{M}$ also $\sigma_\mu \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$. Sei nun $n \in \mathsf{M}'$.

$$\begin{aligned}(\sigma_\lambda - \sigma_\mu)(n) &= -\frac{\langle \lambda,n\rangle}{\mathrm{q}(\lambda)}\lambda + \frac{\langle \mu,n\rangle}{\mathrm{q}(\mu)}\mu \\ &= \frac{\langle \lambda,n\rangle}{\mathrm{q}(\lambda)}m + \frac{\langle m,n\rangle}{\mathrm{q}(\lambda)}\lambda + \frac{\langle m,n\rangle}{\mathrm{q}(\lambda)}m \\ &= \langle \tfrac{\lambda}{\mathrm{q}(\lambda)},n\rangle m + \langle m,n\rangle \tfrac{\lambda}{\mathrm{q}(\lambda)} + \tfrac{1}{\mathrm{q}(\lambda)}\langle m,n\rangle m\end{aligned}$$

Wegen $\frac{\lambda}{\mathrm{q}(\lambda)} \in \mathsf{M}$ und $\frac{1}{\mathrm{q}(\lambda)} \in \mathbb{Z}$ ist also $\sigma_\lambda(n) \equiv \sigma_\mu(n) \bmod \mathsf{M}\ \forall n \in \mathsf{M}'$, d. h. $\sigma_\mu \circ \sigma_\lambda = \sigma_\mu^{-1} \circ \sigma_\lambda \in \Gamma$. □

Bemerkung 3.7. *Für unser Gitter* M *und* $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$ *gilt für primitive* μ *auch die Umkehrung.*

Beweis. Sei $\mu \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ und $\sigma_\mu^{-1} \circ \sigma_\lambda \in \Gamma$, d. h. $\sigma_\lambda - \sigma_\mu$ bilde M' nach M ab. Es gilt also

$$\sigma_\lambda(n) - \sigma_\mu(n) = -\frac{\langle \lambda,n\rangle}{\mathrm{q}(\lambda)}\lambda + \frac{\langle \mu,n\rangle}{\mathrm{q}(\mu)}\mu \in \mathsf{M} \quad \forall n \in \mathsf{M}'.$$

Wir schreiben $\lambda = \mathrm{q}(\lambda)m_\lambda$ und $\mu = \mathrm{q}(\mu)m_\mu$ mit $m_\lambda, m_\mu \in \mathsf{M}$, also

$$-\underbrace{\langle m_\lambda,n\rangle}_{\in\mathbb{Z}}\lambda + \underbrace{\langle m_\mu,n\rangle}_{\in\mathbb{Z}}\mu \in \mathsf{M} \quad \forall n \in \mathsf{M}'.$$

Ist $\frac{1}{\mathrm{q}(\lambda)}$ quadratfrei, so ist m_λ primitiv in M, also existiert $n_0 \in \mathsf{M}'$ mit $\langle m_\lambda,n_0\rangle = 1$, d. h.

$$\lambda \equiv \langle m_\mu,n_0\rangle\mu \bmod \mathsf{M}$$

und damit

$$\mathrm{q}(\lambda) \equiv \langle m_\mu,n_0\rangle^2\mathrm{q}(\mu) \bmod \mathbb{Z}.$$

In unserem Fall ist $\frac{1}{\mathrm{q}(\lambda)} = -2$ quadratfrei und wegen $\langle m_\mu,n_0\rangle^2 \equiv 0$ oder $1 \bmod 4\mathbb{Z}$ und $\mathrm{q}(\mu) \in \frac{1}{4}\mathbb{Z}$ gilt also $\mathrm{q}(\lambda) \equiv 0$ oder $\mathrm{q}(\mu) \bmod \mathbb{Z}$. Wegen $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathrm{q}(\mu) \in \tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}.$$

Aus $\mu \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ folgt $\frac{1}{\mathrm{q}(\mu)} \in -\mathbb{N}$ und damit

$$\mathrm{q}(\mu) = -\frac{1}{2} = \mathrm{q}(\lambda).$$

Weiter gilt $\langle m_\mu,n_0\rangle \equiv 1 \bmod 2\mathbb{Z}$ und damit wegen $2\mu = -\frac{1}{\mathrm{q}(\mu)}\mu \in \mathsf{M}$

$$\lambda \equiv \mu \bmod \mathsf{M}.$$ □

Aus Lemma 3.6 folgt also

Proposition 3.8. *Ist* $\lambda \in \frac{1}{2}\mathsf{M} = \mathsf{L}'$ *primitiv in* M' *mit* $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$ *sowie* $c \in \mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ *ein additiver Input mit* $\sigma_\lambda(c) = -c$*, so verschwindet der additive Lift von* c *auf allen Spiegelungshyperebenen* $\mathcal{H}(\mu)$ *zu* $\mu \in \mathsf{L}'$ *mit* $\mu \equiv \lambda \bmod \mathsf{M}$ *und* $\mathrm{q}(\mu) = -\frac{1}{2}$*, d. h. auf dem (Träger des) Heegner-Divisor(s)* $H(\alpha, -\frac{1}{2})$*, wobei* $\alpha := \lambda + \mathsf{M}$ *die Klasse von* λ *in der Diskriminantengruppe* M'/M *ist.*

Bemerkung 3.9. *Ein* $\lambda \in \mathsf{M}'$ *mit* $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$ *ist automatisch primitiv in* M'*.*

Beweis. Sei $\lambda = N\mu$ mit $N \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathsf{M}'$. Dann gilt also $-\frac{1}{2} = \mathrm{q}(\lambda) = N^2\,\mathrm{q}(\mu)$, d. h. $-2 = N^2 4\,\mathrm{q}(\mu)$, und damit $N = \pm 1$ wegen $4\,\mathrm{q}(\mu) \in \mathbb{Z}$, d. h. λ ist primitiv in M'. □

Bestimmen wir die möglichen λ:

Proposition 3.10. *Die folgenden zehn Vektoren bilden ein Repräsentantensystem bezüglich Kongruenz modulo* M *aller* $\lambda \in \mathsf{L}'$ *mit* $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$*:*

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= (0,0,0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) & \lambda_5 &= (1,0,1,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\\
\lambda_1 &= (1,0,0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) & \lambda_6 &= (1,0,0,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\\
\lambda_2 &= (0,1,0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) & \lambda_7 &= (0,1,1,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\\
\lambda_3 &= (0,0,1,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) & \lambda_8 &= (0,1,0,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\\
\lambda_4 &= (0,0,0,1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) & \lambda_9 &= (1,1,1,-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2})\\
& & \textit{oder auch } \lambda_9' &= (1,1,1,1,\tfrac{3}{2},\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6) \in \mathsf{L}'$ mit $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$, also

$$-\tfrac{1}{2} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 - \lambda_5^2 - \lambda_6^2 \equiv -\lambda_5^2 - \lambda_6^2 \bmod \mathbb{Z},$$

denn $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4 \in \mathbb{Z}$. Daher muß

$$\lambda_5 \equiv \lambda_6 \equiv \tfrac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}$$

sein (also insbesondere $\lambda \in \mathsf{N}$). Nehmen wir $\mathfrak{R} := \{0,1\}^4 \times \{0,\frac{1}{2}\}^2$ als Repräsentantensystem für L'/M und ist $r \in \mathfrak{R}$ Repräsentant von λ, d. h. $\lambda = r + m$ mit $m \in \mathsf{M}$, so gilt also $r_5 = r_6 = \frac{1}{2}$.

Betrachten wir zunächst $\lambda = r \in \mathfrak{R}$, so muß $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_3\lambda_4 = 0$ sein. Dies liefert die ersten neun λ_i. Allgemein muß

$$\begin{aligned}
-\tfrac{1}{2} = \mathrm{q}(\lambda) = \mathrm{q}(r+m) &= \langle r,m\rangle + \mathrm{q}(r) + \mathrm{q}(m)\\
&\equiv -m_5 - m_6 + \mathrm{q}(r) - m_5^2 - m_6^2 \equiv \mathrm{q}(r) \bmod 2\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

also $r_1r_2 + r_3r_4 = 0$ oder 2 sein. Der erste Fall ist oben schon behandelt (es genügt $m = 0$), im zweiten ist notwendig $r = (1,1,1,1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Auch dazu gibt es ein passendes $m \in \mathsf{M}$, etwa $m = -2e_i, i = 1,\ldots,4$ oder $e_i, i = 5,6$, also etwa $\lambda = (1,1,1,-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ oder $\lambda = (1,1,1,1,\frac{3}{2},\frac{1}{2})$. □

Bemerkung 3.11. *Die ersten vier Koordinaten der λ_i entsprechen den geraden Theta-Charakteristiken (siehe Seite 60), genauer wird durch*

$$\lambda + \mathsf{M} \longmapsto (a_\lambda, b_\lambda)$$

mit $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6) \in \mathsf{L}'$, $a_\lambda, b_\lambda \in \{0,1\}^2$ und

$$a_\lambda \equiv \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_3\end{pmatrix}, b_\lambda \equiv \begin{pmatrix}\lambda_2\\ \lambda_4\end{pmatrix} \bmod 2\mathbb{Z}$$

eine Bijektion zwischen den zehn M-Klassen aller $\lambda \in \mathsf{L}'$ mit $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$ und den geraden Theta-Charakteristiken induziert.

Damit können wir den 20-dimensionalen Inputraum auf Inputs, deren Lift zwangsweise auf $H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$ verschwinden, untersuchen. Dabei sei $\alpha_i := \lambda_i + \mathsf{M}$ das Bild von λ_i in der Diskriminatengruppe M'/M. Wir erhalten:

Proposition 3.12. *Der Inputraum $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ ist direkte Summe von zehn zweidimensionalen Räumen $V_0, \ldots, V_9$, wobei die Lifts der $c \in V_i$ zwangsweise auf $H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$ verschwinden. Genauer sind die Lösungsräume von $\sigma_{\lambda_i}(c) = -c$ in $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ alle zweidimensional und ihre Summe hat Dimension 20.*

Beweis. Maple-Berechnungen (siehe Seite 101ff). □

Es gilt damit:

Satz 3.13. *Gibt es eine holomorphe orthogonale Modulform vom Gewicht 10 zur Gruppe Γ mit Nusllstellendivisor $\sum_{i=0}^{9} H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$, so ist der geliftete Raum zehndimensional. Der Kern des Lifts ist also zehndimensional, insbesondere ist der Lift nicht injektiv.*

Genauer ist der Lift jedes Raums V_i eindimensional und jeder nichttriviale Lift mit Input in V_i hat genau den Nullstellendivisor $H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$.

Beweis. Sei $\{c_i^1, c_i^2\}$ eine Basis von $V_i, i = 0, \ldots, 9$ und f_i^j der additive Lift von c_i^j $\forall i, j$. Dann ist für jedes $J \in \{1,2\}^{10}, J = (j_0, \ldots, j_9)$ das Produkt $f^J := \prod_{i=0}^{9} f_i^{j_i}$ eine orthogonale Modulform vom Gewicht zehn zur Gruppe Γ und Divisor $\geq \sum_{i=0}^{9} H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$. Ist nun f die Modulform, deren Existenz vorausgesetzt wird, dann ist $\frac{f^J}{f}$ holomorphe orthogonale Modulform vom Gewicht Null zur Gruppe Γ, also konstant: Es gibt $w_J \in \mathbb{C}$ mit $\frac{f^J}{f} \equiv w_J$. Damit ist $f^J \equiv 0$ oder jedes $f_i^{j_i}$ hat den genauen Nullstellendivisor $H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$. Explizite Berechnungen von Fourierkoeffizienten (siehe ab Seite 104) zeigen, daß es Basen c_i^j gibt, sodaß kein f_i^j trivial ist (dazu genügt es einen nichtverschwindenden Fourierkoeffizienten zu finden). Damit ist $w_J \neq 0$ $\forall J$ (und insbesondere die Dimension des Lifts der V_i mindestens eins) und $\frac{f^{J_1}}{f^{J_2}} = \frac{w_{J_1}}{w_{J_2}}$ $\forall J_1, J_2$. Wählt man J_1 und J_2, sodaß sie sich nur an der i-ten Stelle unterscheiden, erhält man $\frac{f_i^1}{f_i^2} =: w_i \in \mathbb{C}$ und damit die lineare Relation $f_i^1 - w_i f_i^2 = 0$. Der geliftete Raum wird also zum Beispiel von den $f_i^1, i = 0, \ldots, 9$ erzeugt. Diese sind linear unabhängig, was wieder anhand von Fourierkoeffizienten gezeigt werden kann, also ist die Dimension des Lifts 10. □

Bemerkung 3.14.

- *Die Existenz der geforderten Modulform kann innerhalb der orthogonalen Theorie mit Hilfe von Borcherdsprodukten bewiesen werden (siehe nächsten Abschnitt). Man kann aber auch bekannte hermitesch-symplektische Theorie benutzen: Das Produkt der zehn Theta-Reihen ist hermitesch-symplektische Modulform vom Gewicht* 10 *mit bekannten Nullstellen (inklusive Ordnungen)* [Fr1]*, dessen Übersetzung ins Orthogonale gemäß Abschnitt* 2.4 *das Gewünschte leistet (siehe auch Abschnitt* 3.3*).*

- *Eine Basis des Kerns kann bestimmt werden, indem man aus jedem V_i einen Vektor mit trivialem Lift bestimmt: Berechne einen Fourierkoeffizienten (nach Satz* 2.14*) zu zwei Basisinputs, sodaß nicht beide Koeffizienten verschwinden. Bestimme eine Linearkombination der beiden Koeffizienten zu Null. Die gleiche Linearkombination der beiden Basisinputs ist Input mit trivialem Lift (siehe Anhang ab Seite* 104*).*

- *Für jeden (nichttrivialen) Lift zu einem Input in V_i gilt: Das Quadrat ist Modulform vom Gewicht* 2 *zur Gruppe Γ_{N} und zum trivialen Charakter (Beweis unten). Die Übersetzung des Lifts ins Hermitesch-Symplektische ist symmetrisch, denn $h_2 = \left(\begin{smallmatrix} E_5 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ (vgl. Abschnitt* 1.5 *und* 2.4*), und das Quadrat der Übersetzung ist symmetrische Modulform vom Gewicht* 2 *zur Gruppe $\widetilde{\Gamma_{\mathsf{N}}} = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1 \rangle$ zum trivialen Charakter bzw. zu $\Gamma(1+i)$ zum Determinanten-Charakter. Damit sind zumindest diese notwendigen Bedingungen für die Identifikation mit dem Raum der Theta-Reihen erfüllt.*

Beweis des letzten Punktes. Jedes $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ führt jeden Divisor $H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$ in sich über, denn die λ_i liegen in N und γ läßt N modulo M fest. Also haben f_i und $f_i \circ \gamma$ für jeden nichttrivialen Lift f_i zu einem Input in V_i den gleichen Nullstellendivisor $H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$ und sind Modulformen gleichen Gewichts, ihr Quotient ist also konstant. Dies definiert

$$v_i : \Gamma_{\mathsf{N}} \longrightarrow \mathbb{C};\ \gamma \longmapsto \frac{f_i \circ \gamma}{f_i} \quad \text{wobei } 0 \neq f_i \in \mathrm{Lift}(V_i).$$

Die Abbildung v_i ist wohldefiniert (d. h. unabhängig von $f_i \in \mathrm{Lift}(V_i)$) und Charakter für jedes i:

$$v_i(\gamma\delta) = \frac{f_i \circ \gamma\delta}{f_i} = \frac{(f_i \circ \gamma) \circ \delta}{f_i \circ \gamma} \frac{f_i \circ \gamma}{f_i} = v_i(\delta) v_i(\gamma),$$

denn mit f_i ist auch $f_i \circ \gamma$ Lift von einem Input in V_i. Ist nämlich c_i Input von f_i, so ist $f_i \circ \gamma$ Lift von $\gamma(c_i)$ und $\gamma(c_i) \in \mathrm{V}_i$, denn

$$\sigma_{\lambda_i}(\gamma(c_i)) = \gamma(\sigma_{\gamma^{-1}(\lambda_i)}(c_i)) \overset{(*)}{=} \gamma(\sigma_{\lambda_i}(c_i)) = \gamma(-c_i) = -\gamma(c_i)$$

wobei $(*)$ aus Lemma 3.6 folgt. Es gilt insbesondere $v_i(\gamma)^2 = v_i(\gamma^2) = \frac{f_i \circ \gamma^2}{f_i} = 1$, denn $\gamma^2 \in \Gamma$, also ist $(f_i)^2$ Modulform vom Gewicht 2 zum trivialen Charakter zur Gruppe Γ_{N}. □

Genauer ist damit zusätzlich bewiesen:

- *Die Lifts von V_i sind orthogonale Modulformen vom Gewicht 1 zur Gruppe Γ_{N} zu einem quadratischen Charakter v_i.*

Die v_i können dabei auf Γ_{N} verschieden sein und sind es auch, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 3.15. *Für $\lambda \in \mathsf{N}$ mit $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$ ist sogar $\sigma_\lambda \in \Gamma_{\mathsf{N}}$, und die Γ-Klassen der $\sigma_{\lambda_0}, \ldots, \sigma_{\lambda_9}$ bilden eine Basis von ${}^{\Gamma_{\mathsf{N}}}\!/_{\Gamma}$. Für die Charaktere v_i gilt $v_i(\sigma_{\lambda_i}) = -1$ $\forall i$ und $v_i(\sigma_{\lambda_j}) = 1$ für $j \neq i$.*

Beweis. Es ist

$$\sigma_\lambda : x \longmapsto x - \tfrac{\langle x,\lambda\rangle}{\mathrm{q}(\lambda)}\lambda = x + 2\langle x,\lambda\rangle\lambda.$$

Wegen $\langle x,\lambda\rangle \in \mathbb{Z}$ für $x \in \mathsf{N}$ gilt also $\sigma_\lambda(x) - x \in 2\mathsf{N} \subseteq \mathsf{M}$ für $x \in \mathsf{N}$. Für die Charaktere v_i gilt $v_i(\sigma_{\lambda_i}) = -1$ nach Definition der V_i. Für $j \neq i$ kann nicht $v_i(\sigma_{\lambda_j}) = -1$ gelten, denn sonst wäre jeder Lift von V_i auch auf $H(\alpha_j, -\frac{1}{2})$ Null. Also ist $v_i(\sigma_{\lambda_j}) = 1$ für $j \neq i$. Damit sind die σ_{λ_i} auch $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-linear unabhängig über Γ, bilden also eine Basis von $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$. □

Wegen $-h_1^2 \equiv \sigma_{\lambda_0} \ldots \sigma_{\lambda_9} \bmod \Gamma$ gilt mit $\widehat{\Gamma} := \langle \Gamma, -h_1^2\rangle$ und $\widehat{\Gamma}^* = \Phi^{-1}(\widehat{\Gamma}) = \langle \Gamma^*, iH_1^2\rangle$ insbesondere

Satz 3.16. *Die additiven Lifts sind orthogonale Modulformen zur Gruppe $\widehat{\Gamma}$ vom Gewicht 1 zum Charakter $\hat{v}$ mit $\hat{v}|_\Gamma \equiv 1$ und $\hat{v}(-h_1^2) = -1$.*

Bemerkung 3.17. *Tatsächlich gilt sogar $\sigma_{\lambda_j}(c) = c$ $\forall c \in V_i$ für $j \neq i$.*

Beweis. Es ist $\sigma_{\lambda_j}(c) \in V_i$ (siehe oben) und damit auch $\sigma_{\lambda_j}(c) - c \in V_i$. Andererseits ist $\sigma_{\lambda_j}(\sigma_{\lambda_j}(c) - c) = -(\sigma_{\lambda_j}(c) - c)$, d. h. $\sigma_{\lambda_j}(c) - c \in V_j$ und damit $\sigma_{\lambda_j}(c) - c \in V_i \cap V_j = \{0\}$, d. h. $\sigma_{\lambda_j}(c) = c$. □

Damit lassen sich auch ohne die Kenntnis der genauen Nullstellen der Lifts zu Inputs in V_i, d. h. ohne die Existenz der in Satz 3.13 geforderten Modulform vorauszusetzen, die Charaktere v_i definieren (durch $\sigma_{\lambda_j}(c) = v_i(\sigma_{\lambda_j})c$ für $c \in V_i$) und Bemerkung 3.15 und der dritte Punkt von Bemerkung 3.14 beweisen.

3.2 Multiplikative Lifts

Wir konstruieren in diesem Abschnitt die in Satz 3.13 vorausgesetzte Modulform als multiplikativen Lift. Gesucht ist also eine holomorphe orthogonale Modulform vom Gewicht 10 zum Diskriminantenkern Γ mit Nullstellendivisor $\sum_{i=0}^{9} H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$.

Typen

Die Koeffizienten $c_\alpha(m)$ vor den $H(\alpha, m)$ in diesem Divisor, d. h. $c_{\alpha_i}(-\frac{1}{2}) = 1$ und sonst 0, hängen nur vom $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$-Orbit von α ab, sodaß wir uns auf den reduzierten Kontrollraum beschränken können (vergleiche Definition 2.26 und Satz 2.27). Wir brauchen also die Typen, d. h. Orbits von M'/M unter $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$. Wir rechnen ganzzahlig, d. h.

in $\mathsf{L}/2\mathsf{M} = 2\mathsf{M}'/2\mathsf{M}$ statt in M'/M. Ein $g \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ erhält einerseits die Ordnung von $\alpha \in \mathsf{L}/2\mathsf{M}$ und andererseits die Norm modulo $4\mathbb{Z}$. Wir betrachten daher die Mengen (10), (20), (22), (23), (40), (41), (42) und (43) mit

$$(ab) := \{\alpha \in \mathsf{L}/2\mathsf{M};\, \mathrm{ord}_{\mathsf{L}/2\mathsf{M}}(\alpha) = a, \mathrm{q}(\alpha) \equiv b \bmod 4\mathbb{Z}\}$$

(andere (ab) treten nicht auf). Die Menge (22) zerfällt in zwei Teile: Für $\alpha \in (22)$ ist q modulo $8\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt: Sind a und $a + 2m, m \in \mathsf{M}$ zwei Repräsentanten von α, so ist

$$\mathrm{q}(a + 2m) = \langle a,2m\rangle + \mathrm{q}(a) + \mathrm{q}(2m) = 2\langle a,m\rangle + \mathrm{q}(a) + 4\,\mathrm{q}(m).$$

Wegen $\mathrm{q}(a) \equiv 2 \bmod 4\mathbb{Z}$ und $\mathrm{ord}_{\mathsf{L}/2\mathsf{M}}(a) = 2$ ist $a_1, \ldots, a_4 \in 2\mathbb{Z}$ und $a_5 \equiv a_6 \equiv 1 \bmod 2\mathbb{Z}$ und damit

$$\begin{aligned} &\equiv -4m_5 - 4m_6 + \mathrm{q}(a) - 4m_5^2 - 4m_6^2 \bmod 8\mathbb{Z} \\ &\equiv \mathrm{q}(a) \bmod 8\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Wir definieren daher (222) und (226) durch

$$(22a) := \{\alpha \in (22);\, \mathrm{q}(\alpha) \equiv a \bmod 8\mathbb{Z}\}$$

Es gilt

Proposition 3.18. *Die Mengen* (10), (20), (222), (226), (23), (40), (41), (42) *und* (43) *sind die* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$*-Orbits von* $\mathsf{L}/2\mathsf{M}$.

Beweis. Man kann dies leicht explizit zeigen, erhält es aber auch als Korollar von

Satz 3.19. *Die Gruppe* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *operiert transitiv auf den primitiven Elementen von* L' *gleicher Norm.*

Beweis. Siehe [F-H]. Tatsächlich ist dies der wesentliche Teil des Beweises von Satz 1.11 Seite 17. □

Damit operiert $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ auch transitiv auf den primitiven Elementen von $\mathsf{M} = 2\mathsf{L}'$ gleicher Norm.Wir müssen also zeigen, daß es zu je zwei Elementen $\alpha, \beta \in \mathsf{L}/2\mathsf{M}$ gleichen Typs zwei in L' bzw. M primitive Repräsentanten $a, b \in \mathsf{L}$ gleicher Norm gibt.

Für die Mengen der Form $(4*)$ nehmen wir zunächst die Repräsentanten $\tilde{a}, \tilde{b}$ in $\{-1, 0, 1, 2\}^4 \times \{0, 1\}^2$. Da die Ordnung in $\mathsf{L}/2\mathsf{M}$ gleich 4 ist, ist mindestens eine der ersten 4 Koordinaten ± 1, insbesondere sind $\tilde{a}$ und $\tilde{b}$ primitiv in L'. Ist etwa $\tilde{a}_{i_0} = \pm 1$, so ist $a_k := \tilde{a} + 4ke_{\sigma(i_0)}, k \in \mathbb{Z}$ ebenfalls primitiv in L' und $\mathrm{q}(a_k) = \mathrm{q}(\tilde{a}) \pm 4k$, d. h. es gibt $k_0 \in \mathbb{Z}$ mit $\mathrm{q}(a_{k_0}) = \mathrm{q}(\tilde{b})$. Also leisten $a := a_{k_0}$ und $b := \tilde{b}$ das Gewünschte.

Für die Mengen der Form $(2*)$ nehmen wir die Repräsentanten in $\{0, 2\}^4 \times \{0, 1\}^2$. Diese sind primitiv in M. Sind die ersten vier Koordinaten jeweils 0 so ist $\mathrm{q}(\tilde{a}) = \mathrm{q}(\tilde{b})$. Ohne Einschränkung ist also ein $\tilde{a}_{i_0} = 2$. Durch $a_k := \tilde{a} + 4ke_{\sigma(i_0)}, k \in \mathbb{Z}$ kann q um beliebige Vielfache von 8 abgeändert werden. Damit sind (222) und (226) Orbits. Sonst ist eine der letzten beiden Koordinaten 0. Durch Addition von $2e_5$ bzw. $2e_6$ wird daher q um 4 vermindert, d. h. man kann q um beliebige Vielfache von 4 abändern. Also sind auch (20) und (23) Orbits.

Schließlich ist die Menge (10) trivialerweise ein Orbit. □

Einfaches kombinatorisches Abzählen liefert die Mächtigkeiten der Typen (siehe auch Seite 108). Wir geben noch für jeden Typ einen Repräsentanten eines Elements des Typs an.

Typ	Mächtigkeit	Repräsentant
(10)	1	(0,0,0,0,0,0)
(20)	15	(2,0,0,0,0,0)
(222)	6	(2,2,0,0,1,1)
(226)	10	(0,0,0,0,1,1)
(23)	32	(0,0,0,0,0,1)
(40)	240	(1,0,0,0,0,0)
(41)	240	(1,1,0,0,0,0)
(42)	240	(1,1,1,1,0,0)
(43)	240	(1,0,0,0,0,1)

Tatsächlich sind $\alpha_0, \ldots, \alpha_9$ (bzw. das Doppelte davon) vom Typ (226) und bilden diesen Orbit, d. h. in Satz 2.27 ist $c_{(226)}(-\frac{1}{2}) = 1$ und $c_{\mathfrak{t}}(m) = 0$ sonst.

Eisensteinreihen

Gemäß Bemerkung 2.22 ist die Relation in Satz 2.27 für die Eisensteinreihen im reduzierten Kontrollraum lösbar. Es gilt:

Lemma 3.20. *Der reduzierte Kontrollraum besteht genau aus den Eisensteinreihen.*

Beweis. Wir berechnen gemäß Bemerkung 2.11 und Proposition 2.10 die Dimension des Raums der Eisensteinreihen und des Kontrollraums.

Wir numerieren die Typen von 1 bis 9 entsprechend der Tabelle. Bezüglich der Basis $e_1, \ldots, e_9$ von $\mathbb{C}[\mathfrak{T}]$ haben wir die Darstellungsmatrizen

$$\begin{aligned}\rho^*_{\mathfrak{T}}(-E_2) &= -E_9\\ \rho^*_{\mathfrak{T}}(T) &= \operatorname{diag}(e^{-2\pi i\,\mathrm{q}(\mathfrak{t})}, \mathfrak{t} \in \mathfrak{T}) = \operatorname{diag}((-i)^{\mathrm{q}(t_j)}, j = 1, \ldots, 9)\\ &= \operatorname{diag}(1, 1, -1, -1, i, 1, -i, -1, -i)\end{aligned}$$

mit der 9×9-Einheitsmatrix E_9 und den Repräsentanten t_j des j-ten Typs in obiger Tabelle. Man sieht: Mit dem Gewicht $k = 1+\frac{n}{2} = 3$ der Eisensteinreihen des Kontrollraums gilt $V = V_0 = \operatorname{Eig}(\rho^*_{\mathfrak{T}}(-E_2), (-1)^k)$ also $d = \dim V_0 = 9$ und $\operatorname{Eig}(\rho^*_{\mathfrak{T}}(T), 1) = \langle e_1, e_2, e_6\rangle = \langle e_{(10)}, e_{(20)}, e_{(40)}\rangle$. Damit ist die Dimension des Raums der Eisensteinreihen gleich $\dim(V_0 \cap \operatorname{Eig}(\rho^*_{\mathfrak{T}}(T), 1)) = 3$. Die Dimension des Kontrollraums ist gemäß der Formel aus Proposition 2.10 ebenfalls 3 (siehe Anhang ab Seite 107) und damit sind die beiden Räume gleich. □

Es gibt also einen multiplikativen Lift mit dem geforderten Nullstellendivisor. Sein Gewicht ist gegeben durch die Fourierentwicklung der Eisensteinreihe zu $-\frac{1}{2}e_{(10)}$. Genauer ist das Gewicht gleich

$$\sum_{m<0,\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}} a_{\mathfrak{t}}(-m)c_{\mathfrak{t}}(m) = a_{(226)}(\tfrac{1}{2}),$$

wobei $\sum_{m\in\mathbb{Q}} a_{\mathfrak{t}}(m)e^{2\pi i m\tau}$ die Fourierentwicklung der $\mathfrak{t}$-Komponente der Eisensteinreihe E_v mit $v=-\frac{1}{2}e_{(10)}$ ist.

Die neun Komponenten von $E_{-\frac{1}{2}e_{(10)}}$ sind Linearkombinationen der primitiven Heckeschen $G_k(\,.\,;c,d,N)$, deren Fourierentwicklung in Satz 2.23 angegeben ist. Bei uns ist $N=4$ und $k=3$, wir setzen daher $G(\,.\,;c,d):=G_3(\,.\,;c,d,4)$. Gesucht sind also neun Linearkombinationen

$$f_{\mathfrak{t}}=\sum_{\substack{c,d\in\{0,\dots,3\}\\ \gcd(c,d,4)=1}} f_{\mathfrak{t},c,d}G(\,.\,;c,d),\qquad f_{\mathfrak{t},c,d}\in\mathbb{C}$$

der primitiven $G(\,.\,;c,d)$, sodaß das 9-Tupel $(f_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ eine holomorphe elliptische Modulform zur reduzierten Weil-Darstellung $\rho_{\mathfrak{T}}^*$ ist mit 0-tem Koeffientenvektor $-\frac{1}{2}e_{(10)}$.

Eine Reihe $G(\,.\,;c,d)$ ist primitiv genau wenn nicht $c\equiv d\equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z}$ gilt. Wegen $G(\,.\,;c,d)=G(\,.\,;c',d')$ für $c\equiv c'$, $d\equiv d' \bmod 4\mathbb{Z}$ gibt es 4^2 Reihen $G(\,.\,;c,d)$, wovon 2^2 nicht primitiv sind, d. h. es gibt 12 primitive. Die $G(\,.\,;c,d)$ haben das Transformationsverhalten (siehe Seite 54 mit $k=3$ und $N=4$)

$$G(M\tau;c,d)=(\gamma\tau+\delta)^3G(\tau;\alpha c+\gamma d,\beta c+\delta d).$$

Insbesondere gilt $(M=-E)$

$$G(\tau;c,d)=-G(\tau;-c,-d),$$

sodaß die primitiven $G(\,.\,;c,d)$ paarweise linear abhängig sind. Wir suchen daher die $f_{\mathfrak{t}}$ als Linearkombinationen von sechs primitiven $G(\,.\,;c,d)$, etwa zu $(c,d)\in\mathcal{E}$, wobei

$$\mathcal{E}:=\{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)\}$$

sei. (Die zugehörigen $G(\,.\,;c,d)$ sind linear unabhängig [Hec].)

Der 0-te Fourierkoeffizient (siehe Seite 54) von $G(\,.\,;c,d)$ ist mit $k=3$ und $N=4$:

$$\begin{cases} 0 & \text{für } c\not\equiv 0 \text{ oder } d\equiv 0 \bmod 4\\ -\dfrac{\pi^3}{3}\displaystyle\sum_{n=1}^{4} B_3(\tfrac{n}{4})\cos\left(3\tfrac{\pi}{2}-\pi\tfrac{dn}{2}\right) & \text{sonst}\end{cases}$$

Mit $\cos\left(3\frac{\pi}{2}-\pi\frac{dn}{2}\right)=-\sin(\frac{\pi}{2}dn)$ und $B_3(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$, also $B_3(\frac{1}{2})=B_3(1)=0$ und $B_3(\frac{1}{4})=-B_3(\frac{3}{4})=\frac{3}{64}$, ist letzteres gleich

$$\begin{cases} 0 & \text{für } d\equiv 0 \bmod 2\\ \pm\dfrac{\pi^3}{32} & \text{für } d\equiv \pm 1 \bmod 4\end{cases}$$

Insgesamt also für $\mathcal{E}$:

(c,d)	$(0,1)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(1,3)$	$(2,1)$
0-ter Koeffizient von $G(\,.\,;c,d)$	$\dfrac{\pi^3}{32}$	0	0	0	0	0

Damit ist $\lim_{\tau\to i\infty} f_{\mathfrak{t}}(\tau) = \frac{\pi^3}{32} f_{\mathfrak{t},0,1}$ $\forall \mathfrak{t}$, d. h. $f = (f_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ erfüllt die Bedingung $\lim_{\tau\to i\infty} f(\tau) = -\frac{1}{2} e_{(10)}$ genau wenn

$$f_{(10),0,1} = -\frac{16}{\pi^3} \quad \text{und} \quad f_{\mathfrak{t},0,1} = 0 \text{ für } \mathfrak{t} \neq (10)$$

gilt.

Weiter soll f elliptische Modulform sein, d. h. wir erhalten Bedingungen an die $f_{\mathfrak{t},c,d}$ aus dem Transformationsverhalten unter S und T.

Es muß $f_{\mathfrak{t}}(\tau+1) = e^{2\pi i\, \mathrm{q}(\mathfrak{t})} f_{\mathfrak{t}}(\tau)$ für die neun Typen gelten. Wegen $G(\tau+1; c, d) = G(\tau; c, c+d)$ erhalten wir die Bedingungen an die $f_{\mathfrak{t},c,d}$:

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{t},c,d-c} &= e^{2\pi i\, \mathrm{q}(\mathfrak{t})} f_{\mathfrak{t},c,d} && \text{falls } (c, d-c) \in \mathcal{E} \\ -f_{\mathfrak{t},-c,-d+c} &= e^{2\pi i\, \mathrm{q}(\mathfrak{t})} f_{\mathfrak{t},c,d} && \text{falls } (c, d-c) \notin \mathcal{E} \end{aligned}$$

(dabei ist $d-c$ etc. modulo 4 zu reduzieren).

Schließlich muß $f_{\mathfrak{t}}(-\frac{1}{\tau}) = \tau^3 \frac{-i}{32} \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} E(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) f_{\mathfrak{s}}(\tau)$ $\forall \mathfrak{t}$ gelten mit $E(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) = \sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e^{2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle}$ (siehe Seite 55). Wegen $G(-\frac{1}{\tau}; c, d) = \tau^3 G(\tau; d, -c)$ also

$$\begin{aligned} f_{\mathfrak{t},-d,c} &= \tfrac{-i}{32} \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} E(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) f_{\mathfrak{s},c,d} && \text{falls } (-d, c) \in \mathcal{E} \\ -f_{\mathfrak{t},d,-c} &= \tfrac{-i}{32} \sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} E(\mathfrak{s},\mathfrak{t}) f_{\mathfrak{s},c,d} && \text{falls } (-d, c) \notin \mathcal{E} \end{aligned}$$

Wir erhalten also ein lineares Gleichungssystem für die $f_{\mathfrak{t},c,d}$, welches wir mit Maple lösen. Die Lösung ist (siehe Anhang ab Seite 110):

$$2\pi^3 \begin{pmatrix} f_{(10)}(\tau) \\ f_{(20)}(\tau) \\ f_{(222)}(\tau) \\ f_{(226)}(\tau) \\ f_{(23)}(\tau) \\ f_{(40)}(\tau) \\ f_{(41)}(\tau) \\ f_{(42)}(\tau) \\ f_{(43)}(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & -i & -i & -i & -i & 0 \\ 0 & -15\,i & -15\,i & -15\,i & -15\,i & 0 \\ 0 & -6\,i & 6\,i & -6\,i & 6\,i & 48 \\ 0 & -10\,i & 10\,i & -10\,i & 10\,i & -80 \\ 0 & -32\,i & -32 & 32\,i & 32 & 0 \\ 0 & -240\,i & -240\,i & -240\,i & -240\,i & 0 \\ 0 & -240\,i & 240 & 240\,i & -240 & 0 \\ 0 & -240\,i & 240\,i & -240\,i & 240\,i & 0 \\ 0 & -240\,i & -240 & 240\,i & 240 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(\tau;0,1) \\ G(\tau;1,0) \\ G(\tau;1,1) \\ G(\tau;1,2) \\ G(\tau;1,3) \\ G(\tau;2,1) \end{pmatrix}$$

Zur Bestimmung des Gewichts des Borcherdsprodukts berechnen wir den $\frac{1}{2}$-ten Fourierkoeffizienten der (226)-Komponente. Der $\frac{1}{2}$-te Fourierkoeffizient der $G(\,.\,; c, d)$ ist (vgl. Satz 2.23 Seite 54):

$$\begin{aligned} \frac{(-2\pi i)^3}{4^3(3-1)!} \sum_{\substack{m \equiv c \bmod 4 \\ nm=2}} n^{3-1} \operatorname{sgn}(n) e^{2\pi i \frac{dn}{4}} &= \frac{i\pi^3}{16} \sum_{\substack{m \equiv c \bmod 4 \\ nm=2}} n^2 \operatorname{sgn}(n) i^{dn} \\ &= \frac{i\pi^3}{16} \begin{cases} 0 & c \equiv 0 \bmod 4 \\ 4(-1)^d & c \equiv 1 \bmod 4 \\ 2i \operatorname{Im} i^d & c \equiv 2 \bmod 4 \\ 4(-1)^{d+1} & c \equiv 3 \bmod 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Wir erhalten

$$a_{(226)}(\tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2\pi^3}\frac{i\pi^3}{16}10\big(-i4 + i(-4) - i4 + i(-4) - 8(2i)\big) = \frac{5i}{16}(-32i) = 10$$

und damit:

Satz 3.21. *Es gibt eine holomorphe orthogonale Modulform zur Gruppe* Γ *vom Gewicht* 10 *mit Nullstellendivisor*

$$\sum_{i=0}^{9} H(\alpha_i, -\tfrac{1}{2}),$$

d. h. die Voraussetzung des Satzes 3.13 *ist erfüllt.*

3.3 Theta-Reihen

Wir zeigen hier, daß obiger Satz auch aus der Theorie der Theta-Reihen folgt. Wir setzen

$$\Theta(Z) := \prod_{(a,b)} \Theta(Z; a, b) \qquad \forall Z \in \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_2,$$

wobei sich das Produkt über alle geraden Theta-Charakteristiken erstreckt. Es gilt ([Fr1]):

Satz 3.22.

(1) *Die Funktion* Θ *ist symmetrische Modulform vom Gewicht* 10 *zur Gruppe* $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])$ *zum trivialen Charakter.*

(2) *Die Funktion* Θ *verschwindet auf der Mannigfaltigkeit*

$$\boldsymbol{N} := \left\{ Z = \begin{pmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{H};\, z_1 = iz_3 \right\}$$

in erster Ordnung und jede Nullstelle von $\Theta(Z)$ *ist zu einem Punkt in* $\boldsymbol{N}$ *bezüglich* $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i]) \rtimes \langle \tau \rangle$ *äquivalent.*

Wir zeigen damit:

Satz 3.23. *Die Übersetzung* θ *von* Θ *ins Orthogonale gemäß Satz* 2.31 *ist holomorphe orthogonale Modulform vom Gewicht* 10 *zur Gruppe* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *mit Nullstellendivisor*

$$\sum_{i=0}^{9} H(\alpha_i, -\tfrac{1}{2}).$$

Der Charakter ist trivial auf $\langle \mathrm{EO}(\mathsf{L}), h_2 \rangle$ *und* -1 *auf* h_1.

Folgerung 3.24.

- *Satz* 3.21 *gilt, d. h. die Voraussetzung des Satzes* 3.13 *ist erfüllt.*
- *Der oben konstruierte multiplikative Lift, bzw. das Produkt von zehn (nichttrivialen) additiven Lifts (je ein Input in V_i) ist Vielfaches von θ, insbesondere ist der multiplikative Lift Modulform nicht nur zu Γ (bzw. Γ_{N} wie aus Bemerkung* 3.15 *folgt), sondern sogar zu $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ zum angegebenen Charakter.*

Das Transformationsverhalten von θ ergibt sich wie folgt: Nach Freitags Satz 3.22 Teil (1) ist Θ auch Modulform zu $\langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$, denn $H_1 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} i & & 0 & \\ & 1 & & \\ 0 & & i & \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right)$ operiert auf $\boldsymbol{H}$ wie $\left(\begin{smallmatrix} i & & 0 & \\ & 1 & & \\ 0 & & i & \\ & & & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und es gilt

$$\det \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = i\left(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2 \det \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = i \det \left(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)$$

also

$$\Theta(H_1\langle Z\rangle) = \underbrace{i^{10}}_{-1} \det \left(\tfrac{1-i}{\sqrt{2}} \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)^{10} \Theta(H_1\langle Z\rangle),$$

d. h. der zugehörige Charakter ist auf $\mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1 \rtimes \langle\tau\rangle$ trivial und auf H_1 negativ. Wegen $\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) = \langle \mathrm{EO}(\mathsf{L}), h_1, h_2\rangle$ und $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})^* = \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$ sowie $\langle \mathrm{EO}(\mathsf{L}), h_2\rangle^* = \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1 \rtimes \langle\tau\rangle$ folgt das Transformationsverhalten aus dem Übersetzungssatz 2.31.

Es bleibt, die Nullstellen zu untersuchen. Unter dem Isomorphismus $\phi : \boldsymbol{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ aus Satz 1.54 hat der Heegner-Primdivisor $\mathcal{H}(\lambda)$ das Urbild (dabei sei $\Lambda \in \mathcal{V}$ das Bild von λ unter $\mathrm{V} \longrightarrow \mathcal{V}$)

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H}(\lambda) := \boldsymbol{H}_2(\lambda) &:= \{Z = \left(\begin{smallmatrix} z_0 & z_1 \\ z_3 & z_2 \end{smallmatrix}\right) \in \boldsymbol{H}; \langle \phi(Z), \lambda\rangle = 0\} \\ &= \left\{ Z \in \boldsymbol{H}; (-E_2, Z)\Lambda \begin{pmatrix} Z' \\ E_2 \end{pmatrix} = 0 \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{C}) \right\} \end{aligned}$$

(siehe Seite 41). Für λ mit $\mathrm{q}(\lambda) \neq 0$ ist dies

$$= \{ Z \in \boldsymbol{H}; \sigma_\lambda(\phi(Z)) = \phi(Z)\}\,.$$

Wegen

$$\langle \phi(Z), \lambda\rangle = (z_1 z_3 - z_0 z_2)\lambda_2 + \lambda_1 + z_0\lambda_4 + z_2\lambda_3 - z_1(\lambda_5 + i\lambda_6) - z_3(\lambda_5 - i\lambda_6)$$

gilt

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{H}(\lambda_0).$$

Lemma 3.25. *Es gilt*

$$M\langle \boldsymbol{H}(\lambda)\rangle = \boldsymbol{H}(M(\lambda)) \quad \forall M \in \mathrm{Sp}(2,\mathbb{C})_1, \lambda \in \mathrm{V}$$

und

$$\tau(\boldsymbol{H}(\lambda)) = \boldsymbol{H}(\tau(\lambda)) \qquad \forall \lambda \in \mathrm{V}\,.$$

Dabei sei $M(\lambda)$ das Bild von λ unter der M entsprechenden orthogonalen Transformation. Analog für τ.

Beweis. Dies folgt aus

$$g(\mathcal{H}(\lambda)) = \mathcal{H}(g(\lambda)) \qquad \forall g \in \mathrm{O}^+(\mathrm{V}), \lambda \in \mathrm{V}$$

via Übersetzung ins Orthogonale oder durch direkte Rechnung:

$$M\langle \boldsymbol{H}(\lambda)\rangle = \left\{ M\langle Z\rangle; Z \in \boldsymbol{H}, (-E_2, Z)\Lambda \begin{pmatrix} Z' \\ E_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Ersetzt man Λ durch $M^{-1}M\Lambda\overline{M}^{-1}\overline{M} = -I\overline{M}'IM(\lambda)\overline{M}$, so erhält man

$$= \left\{ M\langle Z\rangle; Z \in \boldsymbol{H}, (-E_2, \overline{M}\langle Z'\rangle')M(\lambda) \begin{pmatrix} \overline{M}\langle Z'\rangle \\ E_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

Mit $\overline{M}\langle Z'\rangle' = M\langle Z\rangle$ (dies ist klar auf Erzeugern) also

$$\begin{aligned} &= \left\{ M\langle Z\rangle; Z \in \boldsymbol{H}, (-E_2, M\langle Z\rangle)M(\lambda) \begin{pmatrix} M\langle Z\rangle' \\ E_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ Z \in \boldsymbol{H}; (-E_2, Z)M(\lambda) \begin{pmatrix} Z' \\ E_2 \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \boldsymbol{H}(M(\lambda)) \ . \end{aligned}$$

Für τ gilt: In $\langle \phi(Z), \lambda\rangle$ wird das Vertauschen von z_1 und z_3 durch das Ändern des Vorzeichens von λ_6 kompensiert und dies ist die Operation von τ auf V. □

Gemäß Satz 3.22(2) hat also Θ einfache Nullstellen genau auf

$$\bigcup_{M \in \langle \mathrm{Sp}(2,\mathbb{Z}[i])_1, H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle} M(\boldsymbol{H}(\lambda_0)) = \bigcup_{M \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})^*} \boldsymbol{H}(M(\lambda_0))$$

und damit θ auf

$$\bigcup_{M \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})^*} \mathcal{H}(M(\lambda_0)) = \bigcup_{g \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})} \mathcal{H}(g(\lambda_0)).$$

Da $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ transitiv auf den $\lambda \in \mathsf{L}'$ mit $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$ operiert (Satz 3.19), ist also der Nullstellendivisor von θ gleich

$$\sum_{\substack{\lambda \in \mathsf{L}'/\pm 1 \\ \mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}}} \mathcal{H}(\lambda) = \sum_{i=0}^{9} H(\alpha_i, -\tfrac{1}{2})$$

wie behauptet. Damit ist der Satz bewiesen. Es gilt sogar

Satz 3.26. *Es gibt eine Bijektion der zehn λ_i (bzw. α_i und V_i) und der zehn Theta-Charakteristiken, sodaß jeder (nichttriviale) Lift zu einem Input in V_i Vielfaches der entsprechenden, ins Orthogonale übersetzten, Theta-Reihe ist.*

Folgerung 3.27. *Die zehn Theta-Reihen sind Modulformen vom Gewicht* 1 *zur Gruppe* Γ^* *zum trivialen Charakter bzw. zu* $\widehat{\Gamma}^*$ *zum Charakter* $\hat{\chi}$ *mit* $\hat{\chi}|_{\Gamma^*} \equiv 1$ *und* $\hat{\chi}(iH_1^2) = -1$ *(vgl. Satz* 3.16*).*

Der Beweis des Satzes folgt aus dem Transformationsverhalten der Quadrate der Theta-Reihen (sie sind Modulformen zu $\Gamma_{\mathsf{N}}{}^*$ nach Bemerkung 2.35) und aus (siehe [F-H]):

Satz 3.28. *Zwei primitive Vektoren von* L' *gleicher Norm und gleichen Bildes in* $\mathsf{L}'/2\mathsf{N}$ *sind modulo* Γ_{N} *äquivalent.*

Folgerung 3.29. *Die Gruppe* Γ_{N} *operiert transitiv auf den primitiven Vektoren von* L' *der Norm* $-\frac{1}{2}$ *und gleichen Bildes in* L'/M.

Beweis. Für $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ und $\lambda \in \mathsf{L}'$ mit $\mathrm{q}(\lambda) = -\frac{1}{2}$ gilt $\gamma(\lambda) - \lambda \in \mathsf{M}$ wegen $\lambda \in \mathsf{N}$ und $\Gamma_{\mathsf{N}} = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{M}'/\mathsf{N})\right) = \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathsf{N}/\mathsf{M})\right)$, d. h. Γ_{N} operiert auf den primitiven Vektoren von L' der Norm $-\frac{1}{2}$ und gleichen Bildes in L'/M.

Seien $\lambda, \mu \in \mathsf{L}'$ mit $\mathrm{q}(\lambda) = \mathrm{q}(\mu) = -\frac{1}{2}$ und $\lambda - \mu \in \mathsf{M}$. Wegen Satz 3.19 können wir $\lambda = \lambda_0 = \frac{1}{2}(e_5 + e_6)$ annehmen. Wegen $\lambda_0 + \mathsf{M} = \lambda_0 + 2\mathsf{N} \cup \frac{1}{2}(e_5 - e_6) + 2\mathsf{N}$ ist nach obigem Satz ohne Einschränkung $\mu = \frac{1}{2}(e_5 - e_6)$. Damit gilt $\lambda \longmapsto \mu$ unter $h_2 = \sigma_{e_6} \in \Gamma_{\mathsf{N}}$, d. h. die Operation ist transitiv. □

Zum Beweis von Satz 3.26: Es ist eine der zehn Theta-Reihen Null auf $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{H}(\lambda_0)$ und damit auf $\bigcup_{M \in \Gamma_{\mathsf{N}}{}^*} \boldsymbol{H}(M(\lambda_0))$, die Übersetzung ins Orthogonale also auf $\bigcup_{g \in \Gamma_{\mathsf{N}}} \mathcal{H}(g(\lambda_0)) = H(\alpha_0, -\frac{1}{2})$. Damit ist der Quotient aus der übersetzten Theta-Reihe und einem nichttrivialen Lift konstant, insbesondere hat die Theta-Reihe genau diese Nullstellen. Die Bijektion ordne λ_0 die Theta-Charakteristik dieser Reihe zu. Aus dieser Zuordnung entsteht die Bijektion durch orthogonale bzw. hermitesch-symplektische Transformationen: Es gibt $g_i \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M}), i = 1, \ldots, 9$ mit $g_i(\lambda_0) = \lambda_i$. Diese g_i führen V_0 in V_i über und ihre Urbilder in $\mathrm{G}^* = \langle \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i]), H_1 \rangle \rtimes \langle \tau \rangle$ führen die Theta-Reihe zu λ_0 in die anderen Theta-Reihen über.

Wir können die Bijektion explizit angeben: Die Spiegelung an λ_0 ist gerade die orthogonale Transformation $h_1 h_2 \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ mit Urbild $\pm H_1 \tau \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})^*$. Die Theta-Reihe $\Theta(Z; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))$ erfüllt (siehe Abschnitt 2.4)

$$\begin{aligned}\Theta((\pm H_1\tau)\langle Z\rangle; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) &= \Theta(H_1\langle Z\rangle; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = \Theta(\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\langle Z\rangle; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) \\ &= \Theta(Z; \overline{\left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)}' \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)^{-1} \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = \Theta(Z; \left(\begin{smallmatrix}-i\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}-i\\1\end{smallmatrix}\right)) \\ &= e^{\pi i \,\mathrm{Re}(1,1)\left(\begin{smallmatrix}-1-i\\0\end{smallmatrix}\right)} \Theta(Z; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = -\Theta(Z; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))\end{aligned}$$

also

$$\Theta((\pm H_1\tau)\langle Z\rangle; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = -\Theta(Z; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))$$

und damit

$$\Theta(Z; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = 0 \quad \text{für } Z \text{ mit } (\pm H_1\tau)\langle Z\rangle = Z$$

d. h. für Z in $\{Z \in \boldsymbol{H}; \sigma_{\lambda_0}(\phi(Z)) = \phi(Z)\} = \boldsymbol{H}(\lambda_0)$. Also

$$\lambda_0 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)).$$

Wir schreiben daher auch $\Theta_0(Z) := \Theta(Z; \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))$.

Es gilt

$$\mathrm{E}(e_i, -e_5)(\lambda_0) = \lambda_0 + e_i = \lambda_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, 4$$

und weiter $\mathrm{E}(e_i, e_{\sigma(k)})(\lambda_0 + e_k) = \lambda_0 + e_k + e_i$ für $i \in \{1, \ldots, 4\}$, $k \in \{1, \ldots, 4\} - \{i, \sigma(i)\}$ d. h.

$$\mathrm{E}(e_i, e_{\sigma(k)})(\lambda_k) = \lambda_{k+2i} \quad \text{für } i \in \{1, 2\},\ k \in \{3, 4\}$$

sowie mit $\lambda_7 = \lambda_3 + e_2$

$$\mathrm{E}(e_1, e_4)(\lambda_7) = \lambda_{3+2} + \mathrm{E}(e_1, e_4)(e_2) = \lambda_5 + e_2 - e_4 = \lambda_9.$$

Damit können wir die den λ_i zugeordneten Charakteristiken aus $\lambda_0 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right))$ gewinnen, z. B. mit $S = \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$:

$$\lambda_1 \longmapsto \left(\begin{smallmatrix}E&S\\0&E\end{smallmatrix}\right) \circ (\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) = (\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right) - i\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)) = (\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right))$$

usw. Insgesamt erhalten wir

Bemerkung 3.30. *Die Bijektion aus Satz* 3.26 *lautet explizit:*

$$\begin{array}{ll}
\lambda_0 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) & \lambda_5 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)) \\
\lambda_1 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)) & \lambda_6 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right)) \\
\lambda_2 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right)) & \lambda_7 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)) \\
\lambda_3 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)) & \lambda_8 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)) \\
\lambda_4 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)) & \lambda_9 \longmapsto (\left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right))
\end{array}$$

Wir schreiben auch $\Theta_i(Z) := \Theta(Z; a, b)$, falls $\lambda_i \longmapsto (a, b)$ unter dieser Bijektion. Das heißt also Θ_i ist Null auf $\boldsymbol{H}(\lambda_i)$. Bezeichnen wir mit θ_i die ins Orthogonale übersetzte Theta-Reihe Θ_i, so bedeutet Satz 3.26 also

$$\mathrm{Lift}(V_i) = \mathbb{C}\theta_i \quad \forall i = 0, \ldots, 9,$$

d. h. θ_i erzeugt den Lift von V_i.

Bemerkung 3.31.

- *Per Konstruktion ist die Bijektion verträglich mit den* $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 \rtimes \langle\tau\rangle$*-Operationen auf den* M*-Klassen der* λ_i *via* $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 \rtimes \langle\tau\rangle \longrightarrow \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *und auf den geraden Theta-Charakteristiken via* $\circ$*. Das heißt, unter der Bijektion geht für* $M\tau^\varepsilon \in \mathrm{Sp}(2, \mathbb{Z}[i])_1 \rtimes \langle\tau\rangle$ *(der Repräsentant in* $\{\lambda_0, \ldots, \lambda_9\}$ *von)* $\Phi(M\tau^\varepsilon)(\lambda) + \mathsf{M}$ *über in* $M\tau^\varepsilon \circ (a, b)$*, wenn* $\lambda + \mathsf{M}$ *nach* (a, b) *abgebildet wird.*

- *Der Beweis zeigt, daß die Operation* $\circ$ *auf den geraden Theta-Charakteristiken transitiv ist.*

Fourierkoeffizienten, Summe von zwei Quadraten und Zerlegungsgesetz in $\mathbb{Z}[i]$

Wir haben damit zwei Darstellungen der θ_i. Durch Vergleich der jeweiligen Reihenentwicklungen ergeben sich zahlentheoretische Beziehungen. Betrachten wir etwa θ_9 als Übersetzung von $\Theta_9 = \Theta(\,.\,;\binom{0}{0},\binom{0}{0})$, so gilt für $z = *e_1 + e_2 + z_3e_3 + z_4e_4 + z_5e_5 + z_6e_6$ mit $[z] \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}
\theta_9(z) &= \Theta(\begin{pmatrix} z_3 & z_5 - iz_6 \\ z_5 + iz_6 & z_4 \end{pmatrix}; \binom{0}{0}, \binom{0}{0}) \\
&= \sum_{g_1, g_2 \in \mathbb{Z}[i]} e^{\pi i(\overline{g_1} z_3 g_1 + \overline{g_2}(z_5 + iz_6) g_1 + \overline{g_1}(z_5 - iz_6) g_2 + \overline{g_2} z_4 g_2)} \\
&= \sum_{\substack{g_{ij} \in \mathbb{Z} \\ i,j \in \{1,2\}}} e^{\pi i(\underbrace{(g_{11}^2 + g_{12}^2)}_{=:r} z_3 + \underbrace{(g_{21}^2 + g_{22}^2)}_{=:s} z_4 + 2\underbrace{(g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22})}_{=:-t} z_5 - 2\underbrace{(g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22})}_{=:u} z_6)} \\
&= \sum_{\substack{r,s,t,u \in \mathbb{Z} \\ r,s \geq 0, rs = t^2 + u^2}} \# \left\{ \begin{array}{c} (g_{ij})_{i,j \in \{1,2\}} \in \mathbb{Z}^4; \\ g_{11}^2 + g_{12}^2 = r, g_{21}^2 + g_{22}^2 = s, \\ g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} = -t, \\ g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22} = u \end{array} \right\} e^{\pi i(rz_3 + sz_4 - 2tz_5 - 2uz_6)}
\end{aligned}$$

Andererseits ist θ_9 additiver Lift eines geeigneten Inputs $(c_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}} \in V_9$. Die Fourierentwicklung im Tubengebietmodell zur Spitze $[a], a = 2e_1 \in \mathsf{M}$ isotrop, mit $a' = \frac{1}{2}e_2 \in \mathsf{M}'$ und $\mathsf{K} = \{(0,0)\} \times 2\mathsf{H} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ liefert für $z = (*, 1, z_3, \ldots, z_6)$ wie oben mit $Z = \frac{1}{2}(z_3, \ldots, z_6)$:

$$\begin{aligned}
\theta_9(z) = \tfrac{1}{2}\theta_9(\tfrac{1}{2}z) &= \tfrac{1}{2}\theta_{9\,a,a'}(Z) \\
&= \tfrac{1}{2}A(0) + \sum_{0 \neq T \in \mathsf{K}' \cap \overline{\mathcal{P}_a}} \tfrac{1}{2}A(T) e^{2\pi i \langle T, Z \rangle} \\
&= \tfrac{1}{2}A(0) + \sum_{\substack{0 \neq T \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^4 \\ T = (s,r,t,u) \\ r,s \geq 0, rs \geq t^2 + u^2}} \tfrac{1}{2}A(s,r,t,u) e^{\pi i(z_3 r + z_4 s - 2z_5 t - 2z_6 u)}
\end{aligned}$$

Wir können die Koeffizienten vergleichen und erhalten für $0 \neq T = (s,r,t,u) \in \mathsf{K}' \cap \overline{\mathcal{P}_a}$, d. h. $r, s, t, u \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^4, r, s \geq 0, rs \geq t^2 + u^2$:

$$\tfrac{1}{2}A(T) = \begin{cases} \# \left\{ \begin{array}{c} (g_{ij})_{i,j \in \{1,2\}} \in \mathbb{Z}^4; \\ g_{11}^2 + g_{12}^2 = r, g_{21}^2 + g_{22}^2 = s, \\ g_{11}g_{21} + g_{12}g_{22} = -t, \\ g_{12}g_{21} - g_{11}g_{22} = u \end{array} \right\} & \text{für } 0 \neq T \in \mathbb{Z}^4 \text{ isotrop} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Für den Fourierkoeffizienten $A(T)$ gilt nach Borcherds (Satz 2.14 mit $r = 1$):

$$A(T) = \sum_{\substack{H \in \mathsf{K}', n \in \mathbb{N} \\ \text{mit } nH = T}} \sum_{\substack{\delta \in \mathsf{M}'/\mathsf{M} \\ \delta \text{ über } H}} e^{2\pi i n \langle \delta, a' \rangle} c_\delta(\mathrm{q}(H))$$

also $A(T) = 0$ für $\mathrm{q}(T) \neq 0$, d. h. für $T \notin \partial\mathcal{P}_a$ (wie das ja auch der Koeffizientenvergleich zeigt): Der Lift von Konstanten ist singulär. Im folgenden sei also T isotrop und $c_\delta = c_\delta(0)$. Wir schreiben $c_d := c_\delta$ für $d \in \delta$.

$$= \sum_{\substack{H \in \mathsf{K}', n \in \mathbb{N} \\ \text{mit } nH = T}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i n \langle \frac{m}{N} 2e_1 + H, \frac{1}{2} e_2 \rangle} c_{\frac{m}{N} 2e_1 + H}$$

Mit $N = 4$ (siehe Seite 104) und $T = (t_3, t_4, t_5, t_6) \in (\frac{1}{2}\mathbb{Z})^4$ ist dies

$$= \sum_{n \mid \gcd(2t_i)} \sum_{m=0}^{3} i^{nm} c_{\frac{m}{2} e_1 + \frac{1}{n} T}$$

Allgemein gilt für beliebige Spitzen $[a], a \in \mathsf{M}$ primitiv, isotrop mit $a' \in \mathsf{M}'$ mit $\langle a, a' \rangle = 1$ und $\mathsf{K} = \mathsf{M} \cap a^\perp \cap a'^\perp$: Die Fourierkoeffizienten $A(T) = A_{a,a'}(T)$ zu isotropen $T \in \mathsf{K}'$ von additiven Lifts zu reellen Inputs erfüllen die rekursiven Formeln

$$\begin{aligned}
A(pT) &= A(T) + A(\tfrac{1}{p^{d_p}} T) && \text{für } p \equiv 1 \bmod 4 \\
A(pT) &= \overline{A(T)} + A(\tfrac{1}{p^{d_p}} T) && \text{für } p \equiv 3 \bmod 4 \text{ und } d_p \equiv 1 \bmod 2 \\
A(pT) &= \overline{A(T)} - \overline{A(\tfrac{1}{p^{d_p}} T)} && \text{für } p \equiv 3 \bmod 4 \text{ und } d_p \equiv 0 \bmod 2.
\end{aligned}$$

Dabei sei $d = \prod_{p \text{ prim}} p^{d_p}$ mit $\frac{1}{d} T =: \tilde{T} \in \mathsf{M}'$ primitiv.

Beweis. Zerlege die Summe über alle Teiler n von d in eine, in der nur Vielfache von p auftreten, und eine, in der alle Teiler fremd zu p sind. Man erhält jeweils den ersten bzw. zweiten Summand der angegebenen Formeln. □

Wir erhalten daraus durch Induktion über die d_p explizit:

$$A(T) = \begin{cases} 0 & \text{falls } d_p \equiv 1(2) \text{ für ein } p \equiv 3(4) \\ A(2^{d_2}\tilde{T}) \prod\limits_{p \equiv 1(4)} (1 + d_p) & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese Formel gilt auch für Lifts zu nicht-reellen Inputs, denn der Inputraum hat eine reelle Basis, da die Weil-Darstellung unitär und symmetrisch ist. Für beliebige Inputs gilt

$$A(2^{d_2}\tilde{T}) = \begin{cases} \sum\limits_{m=0}^{3} i^m c_{\frac{m}{4} a + \tilde{T}} & \text{für } d_2 = 0 \\ \sum\limits_{m=0}^{3} (-1)^m c_{\frac{m}{4} a + \tilde{T}} + 2i c_{\frac{1}{4} a + 2\tilde{T}} & \text{für } d_2 = 1 \\ \sum\limits_{m=0}^{3} c_{\frac{m}{4} a + \tilde{T}} + 2i c_{\frac{1}{4} a} & \text{für } d_2 \geq 2 \end{cases}$$

wie man leicht nachrechnet.

Es gilt also für den T-Koeffizienten von θ_9 für $a = 2e_1$ und $a' = \frac{1}{2}e_2$

$$A(2^{d_2}\tilde{T}) \prod_{p\equiv 1(4)} (1+d_p) = A(T) = 2 \cdot \# \left\{ \begin{array}{c} (g_{ij})_{i,j\in\{1,2\}}\in\mathbb{Z}^4; \\ g_{11}^2+g_{12}^2=r, g_{21}^2+g_{22}^2=s, \\ g_{11}g_{21}+g_{12}g_{22}=-t, \\ g_{12}g_{21}-g_{11}g_{22}=u \end{array} \right\}$$

für isotrope $T = (s, r, t, u) \in \mathsf{L}$ d. h. für ganze r, s, t, u bzw. $d_2 \geq 1$. (Für echt halbganze r, s, t, u kann man das Verschwinden des zughörigen Koeffizienten mit obigen Formeln auf primitive zurückführen und für diese auch explizit (d. h. ohne die hermitesch-symplektische Theta-Reihe) beweisen.)

Betrachten wir zum Beispiel $s = 0$ und damit $t = u = 0$, d. h. $\tilde{T} = \frac{1}{2}e_4$ und $r = \frac{1}{2}d$, so gilt also für ganze r

$$A(re_4) = A(2^{d_2-1}e_4) \prod_{p\equiv 1(4)} (1+d_p) = 2 \cdot \#\left\{(g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2; g_1^2 + g_2^2 = r\right\}$$

Tatsächlich gilt nach obiger Formel $A(2^{d_2-1}e_4) = 8$ für $d_2 \neq 0$ für den Input zu θ_9 (siehe Anhang A.3), d. h. wir haben die bekannte Formel

$$4 \cdot \prod_{p\equiv 1(4)} (1+r_p) = \#\left\{(g, h) \in \mathbb{Z}^2; g^2 + h^2 = r\right\}$$

über die Darstellung von natürlichen Zahlen $r = \prod_{p \text{ prim}} p^{r_p}, r_p \in \mathbb{N}$ (es gilt $r_p = d_p$ für $p \neq 2$ und $r_2 = d_2 - 1$) als Summe von zwei Quadraten wiedergefunden. Ist speziell r eine Primzahl p, so erhalten wir das Zerlegungsgesetz in $\mathbb{Z}[i]$.

Kapitel 4

Das Theta-Ideal

Nach Matsumoto [Mat] bzw. Hermann [Her] gilt:

Satz 4.1. *Die Satake-Kompaktifizierung $X_{\Gamma(1+i)\rtimes\langle\tau\rangle}$ von ${\boldsymbol{H}}_2/\Gamma(1+i)\rtimes\langle\tau\rangle$ ist isomorph zu $\mathbb{P}^4$*

$$X_{\Gamma(1+i)\rtimes\langle\tau\rangle} \cong \mathbb{P}^4$$

und die von den hermitesch-symplektischen symmetrischen Modulformen geraden Gewichts zur Gruppe $\Gamma(1+i)$ zum Determinantencharakter $\chi(M\tau^\varepsilon) = \det(M)$ erzeugte Algebra ist erzeugt von den Quadraten der Theta-Reihen:

$$\bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}} [\Gamma(1+i)\rtimes\langle\tau\rangle, k, \chi^{k/2}] = \mathbb{C}[\Theta_0^2, \ldots, \Theta_9^2]$$

Genauer gibt es fünf unabhängige lineare Relationen der Quadrate der Theta-Reihen, sodaß

$$\Theta : X_{\Gamma(1+i)\rtimes\langle\tau\rangle} \longrightarrow \mathbb{P}^9,$$

definiert durch

$$Z\Gamma(1+i)\rtimes\langle\tau\rangle \longmapsto [\Theta_0^2(Z) : \cdots : \Theta_9^2(Z)] \text{ für } Z \in \boldsymbol{H}_2$$

und stetige Fortsetzung auf den Rand, ein Isomorphismus auf den durch die fünf Relationen definierten Teilraum in $\mathbb{P}^9$ ist.

Dabei sei mit $[G, k, \chi]$ der Vektorraum der hermitesch-symplektischen Modulformen zur Gruppe G vom Gewicht k zum Charakter χ bezeichnet. Die von den hermitesch-symplektischen Modulformen zur Gruppe G zum Charakter χ erzeugte Algebra sei

$$A(G,\chi) := A(G) := \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} [G, k, \chi^k].$$

Der Ring $A(G)$ ist nullteilerfrei und ganzabgeschlossen im Quotientenkörper, d. h. normal. Der homogene Teil vom Grad 0 des Quotientenkörpers $\mathrm{Quot}(A(G))$ (d. h. der Körper der Modulfunktionen) sei mit $K(A(G))$ bezeichnet.

Weil es keine (nichttrivialen) Modulformen ungeraden Gewichts zu $\Gamma(1+i)$ und zu auf iE_4 trivialem Charakter gibt, gilt in unserem Fall (χ der Determinantencharakter) für $\tilde{\chi}$ mit $\tilde{\chi}^2 = \chi$ und $\tilde{\chi}(iE_4) = 1$

$$\bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}} [\Gamma(1+i) \rtimes \langle\tau\rangle, k, \chi^{k/2}] = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} [\Gamma(1+i) \rtimes \langle\tau\rangle, k, \tilde{\chi}^k]$$

d. h.

$$A(\Gamma(1+i) \rtimes \langle\tau\rangle) = A(\Gamma(1+i) \rtimes \langle\tau\rangle, \tilde{\chi}) = \mathbb{C}[\Theta_0^2, \ldots, \Theta_9^2].$$

Insbesondere ist $\mathbb{C}[\Theta_0^2, \ldots, \Theta_9^2]$ normal.

Beispielsweise sei $\tilde{\chi}(\begin{pmatrix} i & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & i \end{pmatrix}) = i$, $\tilde{\chi}(\pm H_1^2) = \tilde{\chi}(\pm iH_1^2) = -1$ und $\tilde{\chi}$ trivial auf τ, $\widetilde{\Gamma}$ und den Urbildern der acht Eichlertransformationen, die zusammen mit h_1 und $-h_1^2$ die Gruppe Γ_N über Γ erzeugen. Dieser Charakter setzt $\hat{\chi}$ aus Folgerung 3.27 fort.

Betrachten wir $\Gamma_\mathsf{N}{}^* = \langle \mathrm{S}\Gamma(1+i), H_1\rangle \rtimes \langle\tau\rangle$ statt $\Gamma(1+i) \rtimes \langle\tau\rangle$, so ist der Charakter gegeben durch $\tilde{\chi}(H_1) = -1$ und auf $\mathrm{S}\Gamma(1+i)$ wie gehabt. Damit gilt $[\Gamma_\mathsf{N}{}^*, k] := [\Gamma_\mathsf{N}{}^*, k, 1] = [\Gamma_\mathsf{N}{}^*, k, \tilde{\chi}^k]$, denn für ungerade k ist beides $\{0\}$ und $\tilde{\chi}^2 \equiv 1$. Es gilt also

$$X_{\Gamma_\mathsf{N}{}^*} \cong \mathbb{P}^4$$

und

$$A(\Gamma_\mathsf{N}{}^*) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} [\Gamma_\mathsf{N}{}^*, k, \tilde{\chi}^k] = \bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}} [\Gamma_\mathsf{N}{}^*, k] = \mathbb{C}[\Theta_0^2, \ldots, \Theta_9^2].$$

Wir bezeichnen, analog zum Hermitesch-Symplektischen, mit $[G, k, v]$ den Raum der holomorphen orthogonalen Modulformen zur Gruppe G vom Gewicht k zum Charakter v. Entsprechend verwenden wir die Bezeichnungen $A(G, v)$ bzw. $A(G)$ und $K(A(G))$ auch für orthogonale Gruppen. Damit lautet der Satz ins Orthogonale übersetzt:

Satz 4.2. *Die Satake-Kompaktifizierung X_{Γ_N} von $\mathcal{H}/\Gamma_\mathsf{N}$ ist isomorph zu $\mathbb{P}^4$*

$$X_{\Gamma_\mathsf{N}} \cong \mathbb{P}^4$$

und die von den orthogonalen Modulformen geraden Gewichts zur Gruppe Γ_N zum trivialen Charakter erzeugte Algebra ist erzeugt von den Quadraten der übersetzten Theta-Reihen:

$$A(\Gamma_\mathsf{N}) = \bigoplus_{k\in 2\mathbb{Z}} [\Gamma_\mathsf{N}, k] = \mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2]$$

Genauer gibt es fünf unabhängige lineare Relationen der θ_i^2, sodaß

$$\theta : X_{\Gamma_\mathsf{N}} \longrightarrow \mathbb{P}^9,$$

definiert durch

$$[z]\Gamma_\mathsf{N} \longmapsto [\theta_0^2(z) : \cdots : \theta_9^2(z)] \quad \text{für } [z] \in \mathcal{H}$$

und stetige Fortsetzung auf den Rand, ein Isomorphismus auf den durch die fünf Relationen definierten Teilraum in $\mathbb{P}^9$ ist.

Wir untersuchen damit die entsprechenden Fragen für die Theta-Reihen θ_i selbst bzw. für die Gruppe Γ (Abschnitt 4.1) und bestimmen das Relationen-Ideal der Theta-Reihen (Abschnitt 4.2). Schließlich beweisen wir diesen Satz in Teilen neu mit Hilfe der orthogonalen Theorie (Abschnitt 4.3).

4.1 Geometrie

Die Reihen θ_i haben die Gruppe $\widehat{\Gamma}$ als gemeinsame Transformationsgruppe und $\hat{v}$ als gemeinsamen Charakter (vgl. Satz 3.16). Wir betrachten daher das kommutative Diagramm ($\mathcal{H} = \mathcal{K}_4^+$)

$$\begin{array}{ccc} X_{\widehat{\Gamma}} = \overline{\mathcal{H}/\widehat{\Gamma}} & \xrightarrow{\vartheta} & \mathbb{P}^9 \\ \Big\downarrow{\scriptstyle p} & & \Big\downarrow{\scriptstyle q} \\ X_{\Gamma_{\mathsf{N}}} = \overline{\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}} & \xrightarrow{\theta} & \mathbb{P}^9 \end{array}$$

definiert durch

$$\begin{aligned} [z]\widehat{\Gamma} &\overset{\vartheta}{\longmapsto} [\theta_0(z) : \ldots : \theta_9(z)] && \text{für } [z] \in \mathcal{H} \\ [z]\Gamma_{\mathsf{N}} &\overset{\theta}{\longmapsto} [\theta_0(z)^2 : \ldots : \theta_9(z)^2] && \text{für } [z] \in \mathcal{H} \\ [z]\widehat{\Gamma} &\overset{p}{\longmapsto} [z]\Gamma_{\mathsf{N}} && \text{für } [z] \in \mathcal{H} \\ [z_0 : \ldots : z_9] &\overset{q}{\longmapsto} [z_0^2 : \ldots : z_9^2] && \text{für } [z] \in \mathbb{P}^9 \end{aligned}$$

und stetige Fortsetzungen.

Die Abbildung q ist offenbar 2^9-fache Überlagerung, die genau auf den Koordinaten-Hyperflächen verzweigt. Genauer ist das Urbild von $[z_0 : \ldots : z_9] \in \mathbb{P}^9$ genau die Menge $\{I(w); I \in \{\pm 1\}^{10}\}$ für ein festes $w = [w_0 : \ldots : w_9] \in \mathbb{P}^9$ mit $w_i^2 = z_i \ \forall i$, wobei $I(z) := [i_0 z_0 : \ldots : i_9 z_9]$ für $I = (i_0, \ldots, i_9) \in \{\pm 1\}^{10}$. Es gilt $I(z) = (\mathbb{1} - I)(z) \ \forall I$ mit $\mathbb{1} := (1, \ldots, 1)$.

Proposition 4.3. *Für $[z] \in \mathrm{Bild}(\theta)$ ist*

$$q^{-1}([z]) \subseteq \mathrm{Bild}(\vartheta).$$

Beweis. Wir betrachten das Transformationsverhalten der Lifts θ_i unter der Gruppe Γ_{N}, d. h. die Charaktere v_i (vgl. Seite 67f). Es gilt also

$$f_i(\gamma z) = v_i(\gamma) f_i(z) \quad \text{für } f_i \in \mathrm{Lift}(V_i).$$

Damit folgt die Proposition, wenn man jedes $I \in \{\pm 1\}^{10}$ in der Form

$$I = (v_0(\gamma), \ldots, v_9(\gamma))$$

für ein geeignetes $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ darstellen kann. Dazu genügt es offenbar die I mit genau einer -1-Koordinate darzustellen und dies leisten die σ_{λ_i} (vgl. Bemerkung 3.15). □

Damit folgt

Satz 4.4. *Die Abbildung ϑ ist generisch injektiv, d. h. $X_{\widehat{\Gamma}}$ ist Normalisierung des Bildes (und dies ist $q^{-1}(\mathbb{P}^4)$).*

Beweis. Sei $[w] = [\theta_0(z) : \ldots : \theta_9(z)], [z] \in \mathcal{H}$ mit $\theta_i(z) \neq 0, i = 0, \ldots, 9$ aus dem Bild. Dann ist

$$p^{-1}(\theta^{-1}(q([w]))) = \vartheta^{-1}(q^{-1}(q([w]))) \overset{\vartheta}{\twoheadrightarrow} q^{-1}(q([w])) \cap \mathrm{Bild}(\vartheta) = q^{-1}(q([w]))$$

surjektiv also bijektiv (beide Mengen haben 2^9 Elemente). Damit hat jedes Element von $q^{-1}(q([w]))$, insbesondere also $[w]$, genau ein Urbild unter ϑ, d. h. ϑ ist generisch injektiv. □

4.2 Ringe

Definition 4.5. *Es sei $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]$ der Polynomring in den unabhängigen Transzendenten X_i. Mit $\mathfrak{t}$ bezeichnen wir das Ideal*

$$\mathfrak{t} \trianglelefteq \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]$$

der Relationen der Quadrate der Theta-Reihen, d. h. $\mathfrak{t}$ ist in $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]$ von den entsprechenden fünf Relationen der X_i^2 erzeugt.

Es gilt also per Definition:

$$\mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2] \cong \mathbb{C}[X_0^2, \ldots, X_9^2]/(\mathfrak{t} \cap \mathbb{C}[X_0^2, \ldots, X_9^2])$$

Wir wollen zeigen:

$$\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]/\mathfrak{t} \cong \mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9] \quad \text{via} \quad X_i + \mathfrak{t} \longmapsto \theta_i$$

Mit anderen Worten: Außer den (von den) Relationen zwischen den Quadraten (erzeugten Relationen) gibt es keine weiteren Relationen zwischen den Theta-Reihen.

Lemma 4.6. *Sei $S = \sum_{i=1}^{N} a_i R \supseteq R$ endliche Erweiterung von Integritätsbereichen und es gebe eine Gruppe G von Automorphismen von S, sodaß in S genau R fix unter allen $\sigma \in G$ ist. Dann ist die Erweiterung der Quotientenkörper galoissch mit Galoisgruppe G und es gilt*

$$\mathrm{Quot}(S) = \sum_{i=1}^{N} a_i \,\mathrm{Quot}(R),$$

insbesondere läßt sich jedes Element von $\mathrm{Quot}(S)$ in der Form $\frac{s}{r}$ mit $r \in R$ schreiben.

Beweis. Eine endliche Erweiterung $S \supseteq R$ ist insbesondere ganz und damit die Erweiterung der Quotientenkörper algebraisch.

Für $s = \frac{s_1}{s_2} \in \mathrm{Quot}(S)$ gilt:

$$s = \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_1 \prod\limits_{\mathrm{id} \neq \sigma \in G} \sigma(s_2)}{\prod\limits_{\sigma \in G} \sigma(s_2)}$$

Der Nenner ist unter G invariantes Element von S, liegt also in R, d. h. jedes Element von $\mathrm{Quot}(S)$ läßt sich in der Form $\frac{s}{r}$ mit $r \in R$ und $s \in S$ schreiben. Schreiben wir s als R-Linearkombination der a_i, so erhalten wir die Behauptung $\mathrm{Quot}(S) = \sum_{i=1}^{N} a_i \,\mathrm{Quot}(R)$.

Ist $\frac{s}{r}$ fix unter allen $\sigma \in G$, so auch s:

$$\frac{s}{r} = \sigma(\frac{s}{r}) = \frac{\sigma(s)}{\sigma(r)} = \frac{\sigma(s)}{r} \Longrightarrow s = \sigma(s) \qquad \forall \sigma \in G$$

Also liegt s in R und damit $\frac{s}{r}$ in $\mathrm{Quot}(R)$. Umgekehrt ist $\mathrm{Quot}(R)$ fix unter allen $\sigma \in G$, d. h. $\mathrm{Quot}(R)$ ist der genaue Fixkörper von $\mathrm{Quot}(S)$ unter G. Damit ist die Erweiterung galoissch mit Gruppe G. □

Wir wollen dieses Lemma anwenden auf die Integritätsbereiche $S = \mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9]$ und $R = \mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2]$. Offenbar erzeugen die $\theta^I := \theta_0^{i_0} \cdots \theta_9^{i_9}, I = (i_0, \ldots, i_9) \in \{0,1\}^{10}$ die Ringerweiterung:

$$\mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9] = \sum_{I \in \{0,1\}^{10}} \theta^I \mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2]$$

Die Gruppe $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$ operiert auf S durch $(\gamma\Gamma, f) \longmapsto f \circ \gamma$ als Gruppe von Ringautomorphismen: Wegen $\theta_i \circ \gamma = \pm\theta_i$ führt die Gruppe S in sich über, die Zuordnung ist Ringhomomorphismus für festes $\gamma\Gamma$, und ein Inverses ist durch $\gamma^{-1}\Gamma(= \gamma\Gamma)$ gegeben. Offenbar ist R fix unter $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$. Für $s \in S_k := S \cap [\widehat{\Gamma}, k, \hat{v}^k] = \sum_{I \in \mathbb{N}^{10}, |I| = k} \mathbb{C}\theta^I$ (wobei $|I| := \sum_{j=0}^{9} i_j$) bedeutet fix zu sein, gerade Modulform zu Γ_{N} zum trivialen Charakter zu sein, also in $[\Gamma_{\mathsf{N}}, k] = [\Gamma_{\mathsf{N}}, k, \tilde{v}^k] =: R_k$ zu liegen ($\tilde{v}$ sei der ins Orthogonale übersetzte Charakter $\tilde{\chi}$ von Seite 82). Damit ist in S genau R fix, denn die Gruppe respektiert die Graduierung. Kein $\Gamma \neq \gamma\Gamma \in \Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$ operiert trivial auf S (schon auf S_1 nicht, wie im Beweis zu Proposition 4.3 bzw. Bemerkung 3.15 gezeigt). Daher ist die Gruppe $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$ isomorph zu ihrem Bild in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9])$ und nach dem Lemma gilt:

$$\mathrm{Quot}(\mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9]) = \sum_{I \in \{0,1\}^{10}} \theta^I \,\mathrm{Quot}(\mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2]),$$

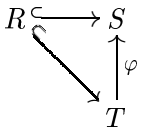
und die Körpererweiterung ist galoissch mit Galoisgruppe (isomorph zu) $\Gamma_{\mathsf{N}}/\Gamma$. Da die Gruppe Ordnung 2^{10} hat, sind diese Erzeuger linear unabhängig, d. h. sie bilden eine Basis. Damit gilt auch

Satz 4.7. *Die Erweiterung $\mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9] \supseteq \mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2]$ ist frei mit Basis $\theta^I, I \in \{0,1\}^{10}$.*

Beweis. Eine Relation der θ^I über $\mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2]$ ist auch eine über $\mathrm{Quot}(\mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2])$. □

Wir können nun das Theta-Ideal $\mathfrak{t}$ mit Hilfe des folgenden trivialen Lemmas bestimmen:

Lemma 4.8. *Seien $R \hookrightarrow S$ und $R \hookrightarrow T$ Ringerweiterungen und $\varphi : T \longrightarrow S$ ein R-Algebrenhomomorphismus:*



Dann gilt: Ist T erzeugt von $t_1, \ldots, t_n$ über R

$$T = \sum_{i=1}^{n} t_i R$$

und S frei erzeugt von $\varphi(t_1), \ldots \varphi(t_n)$

$$S = \bigoplus_{i=1}^{n} \varphi(t_i) R,$$

so ist T frei über R mit Basis $t_1, \ldots, t_n$, d. h. φ ist Isomorphismus.

Beweis. Sei $\sum_i t_i r_i = 0$ eine Relation der Erzeuger von T über R. Dann ist $\varphi(\sum_i t_i r_i) = \sum_i \varphi(t_i) r_i = 0$ eine Relation in S, also sind die $r_i = 0\ \forall i$. □

Wir wenden dieses Lemma auf

$$R = \mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2] \cong \mathbb{C}[X_0^2, \ldots, X_9^2]/(\mathfrak{t} \cap \mathbb{C}[X_0^2, \ldots, X_9^2]),$$
$$S = \mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9] \quad \text{und} \quad T = \mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]/\mathfrak{t} \quad \text{sowie} \quad \varphi : X_i + \mathfrak{t} \longmapsto \theta_i$$

an, wobei $\mathfrak{t}$ das von den Relationen der θ_i^2 erzeugte Ideal in $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]$ ist (vgl. Definition 4.5):

Satz 4.9. *Es gilt*

$$\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]/\mathfrak{t} \cong \mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9],$$

d. h. außer den Relationen zwischen den Quadraten (und den davon erzeugten) gibt es keine weiteren Relationen zwischen den Theta-Reihen.

Notation 4.10. *Sei $R = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} R_k$ ein graduierter Integritätsbereich. Mit $\mathrm{Quot}_k(R)$ sei die homogene Komponente vom Grad k des Quotientenkörpers bezeichnet:*

$$\mathrm{Quot}_k(R) := \left\{ \tfrac{r}{s} \in \mathrm{Quot}(R);\ r, s \text{ homogen}, \mathrm{grad}(r) - \mathrm{grad}(s) = k \right\}$$

Damit gilt weiter:

Satz 4.11. *Der Körper der Modulfunktionen zu $\widehat{\Gamma}$ ist der homogene Bestandteil des Quotientenkörpers von $\mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9]$ vom Grad Null:*

$$K(A(\widehat{\Gamma})) = \mathrm{Quot}_0(\mathbb{C}[\theta_0, \ldots, \theta_9]) =: \mathbb{C}_0(\theta_0, \ldots, \theta_9)$$

Insbesondere ist jede Modulform zu $\widehat{\Gamma}$ und zum Charakter $\hat{v}$ eine rationale Funktion in den zehn Theta-Reihen θ_i.

Beweis. Aus dem nächsten Lemma folgt, daß

$$\mathbb{C}_0(\theta_0, \ldots, \theta_9) = \bigoplus_{\substack{I \in \{0,1\}^{10} \\ |I| \in 2\mathbb{Z}}} \frac{\theta^I}{\theta_0^{|I|}} \mathbb{C}_0(\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2)$$

gilt (mit $\mathbb{C}_0(\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2) := \mathrm{Quot}_0(\mathbb{C}[\theta_0^2, \ldots, \theta_9^2])$), d. h. dies ist Körpererweiterung vom Grad 2^9. Die Erweiterung $K(A(\widehat{\Gamma})) \supseteq K(A(\Gamma_\mathsf{N})) = \mathbb{C}_0(\Theta_0^2, \ldots, \Theta_9^2)$ hat ebenfalls den Grad $2^9 = (\Gamma_\mathsf{N} : \widehat{\Gamma})$, also sind die beiden Körper gleich. □

Lemma 4.12. *Es sei*

$$S = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} S_k = \sum_{i=1}^{N} a_i R \supseteq R = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} R_k$$

eine endliche Erweiterung graduierter Integritätsbereiche mit $R_k \subseteq S_k$ $\forall k$ und homogenen Erzeugern $a_i \in S_{k_i}$. Es gebe eine Gruppe G von Automorphismen von S wie in Lemma 4.6, welche die Graduierung respektiert. Dann gilt:

$$\mathrm{Quot}_k(S) = \sum_{i=1}^{N} a_i \,\mathrm{Quot}_{k-k_i}(R)$$

bzw.

$$\mathrm{Quot}_k(S) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mathrm{Quot}_{k-k_i}(R)\neq\{0\}}}^{N} a_i r_i \,\mathrm{Quot}_0(R)$$

für alle $0 \neq r_i \in \mathrm{Quot}_{k-k_i}(R)$, also insbesondere

$$\mathrm{Quot}_0(S) = \sum_{\substack{i=1 \\ \mathrm{Quot}_{-k_i}(R)\neq\{0\}}}^{N} a_i r_i \,\mathrm{Quot}_0(R)$$

für alle $0 \neq r_i \in \mathrm{Quot}_{-k_i}(R)$.

Ist die Erweiterung $S \supseteq R$ frei mit Basis $\{a_i; i = 1, \ldots, N\}$, so sind die Summen direkt.

Beweis. Sei $s = \frac{s_1}{s_2} \in \mathrm{Quot}_k(S)$ mit $s_1, s_2 \in S$ homogen. Wegen

$$s = \frac{s_1 \prod\limits_{\mathrm{id}\neq\sigma\in G} \sigma(s_2)}{\prod\limits_{\sigma\in G} \sigma(s_2)}$$

und $\sigma(s_2)$ homogen, können wir o. E. $s_2 \in R$ annehmen. Es gibt $r_i \in R$ mit $s_1 = \sum_{i=1}^{N} a_i r_i$. Ohne Einschränkung sind die r_i homogen vom Grad $\mathrm{grad}(s_1) - k_i$. Damit ist

$$s = \tfrac{s_1}{s_2} = \sum_{i=1}^{N} a_i \tfrac{r_i}{s_2} \in \sum_{i=1}^{N} a_i \,\mathrm{Quot}_{k-k_i}(R).$$

Bilden die a_i eine Basis der Ringerweiterung, so sind die r_i durch s_1 und damit die $\frac{r_i}{s_2}$ durch s eindeutig bestimmt. Ist $\mathrm{Quot}_{k-k_i}(R) = \{0\}$, so kann der i-te Summand weggelassen werden. Andernfalls gibt es $0 \neq r_i \in \mathrm{Quot}_{k-k_i}(R)$ und es gilt für jedes solche r_i

$$\mathrm{Quot}_{k-k_i}(R) = r_i \,\mathrm{Quot}_0(R). \qquad \square$$

Bemerkung 4.13. *Die Sätze* 4.4, 4.9 *und* 4.11 *gelten entsprechend auch im Hermitesch-Symplektischen:*

- *Die durch* $Z\widehat{\Gamma}^* \longmapsto [\Theta_0(Z), \ldots, \Theta_9(Z)]$ *definierte Abblildung* $X_{\widehat{\Gamma}^*} \longrightarrow \mathbb{P}^9$ *ist generisch injektiv und Normalisierung des Bildes.*
- *Es gilt* $\mathbb{C}[X_0, \ldots, X_9]/_{\mathfrak{t}} \cong \mathbb{C}[\Theta_0, \ldots, \Theta_9]$ *via* $X_i + \mathfrak{t} \longmapsto \Theta_i$.
- *Jede Modulform zu* $\widehat{\Gamma}^*$ *und zum Charakter* $\hat{\chi}$ *ist eine rationale Funktion in den zehn Theta-Reihen* Θ_i.

4.3 Quadrate

Wir wollen hier Satz 4.1 bzw. 4.2 mit orthogonalen Methoden untersuchen. Zunächst ist die Abbildung θ im „Inneren“ $\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$ wohldefiniert. Dazu:

Lemma 4.14. *Sei* $[z] \in \mathcal{H}(\lambda) \cap \mathcal{H}(\mu)$ *mit* $\lambda, \mu \in \mathsf{L}'$, $\mathrm{q}(\lambda) = \mathrm{q}(\mu) = -\frac{1}{2}$. *Dann ist* $\langle \lambda, \mu \rangle = 0$ *oder* $\lambda = \pm\mu$, *also insbesondere* $\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}(\mu)$.

Beweis. Es gilt $z \perp \lambda$ und $z \perp \mu$ in $\mathrm{V}(\mathbb{C})$, also $\lambda \perp \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ und $\mu \perp \mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ in V, wenn $z = x + iy$ die Zerlegung von z in Real- und Imaginärteil ist. Da V die Signatur (2,4) hat und $\mathbb{R}x + \mathbb{R}y$ zweidimensional positiv definit ist, muß $\mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu$ negativ definit sein. Ist $\mathbb{R}\lambda + \mathbb{R}\mu$ eindimensional, so ist $\lambda = \pm\mu$ und damit $\mathcal{H}(\lambda) = \mathcal{H}(\mu)$. Sonst ist

$$0 < \det \begin{pmatrix} \langle \lambda, \lambda \rangle & \langle \lambda, \mu \rangle \\ \langle \mu, \lambda \rangle & \langle \mu, \mu \rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\langle \lambda, \lambda \rangle \langle \mu, \mu \rangle}_{=1} - \underbrace{\langle \lambda, \mu \rangle^2}_{\geq 0}$$

also

$$0 \leq \langle \lambda, \mu \rangle^2 < 1.$$

Wegen $\lambda, \mu \in \mathsf{N}$ und N ganz ist also $\langle \lambda, \mu \rangle = 0$. □

Bemerkung 4.15. *Sei* $\theta_i(z) = 0$. *Dann gibt es* $\mu_i \in \mathsf{L}'$ *mit* $\mathrm{q}(\mu_i) = -\frac{1}{2}$ *und* $\mu_i \equiv \lambda_i \bmod \mathsf{M}$ *mit* $[z] \in \mathcal{H}(\mu_i)$ *(mit den* λ_i *aus Proposition* 3.10*).*

Folgerung 4.16. *Sei* $[z] \in \mathcal{H}$. *Dann verschwinden höchstens vier der zehn* θ_i *auf* $[z]$, *insbesondere ist* θ *auf* $\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$ *wohldefiniert.*

Beweis. Verschwinden n der θ_i auf $[z]$, so bilden die zugehörigen μ_i eine (orthogonale) Basis eines n-dimensionalen negativ definiten Unterraums von V. Wegen der Signatur von V muß $n \leq 4$ sein. □

Definition 4.17. *Sei* $[z] \in \mathcal{H}$ *mit* $\theta_i([z]) = 0$ *für vier* i. *Dann heißt* $[z]$ *spezieller Punkt in* $\mathcal{H}$ *und* $[z]\Gamma_{\mathsf{N}}$ *spezieller Punkt in* $\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$ *bzw.* $X_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$.

Bemerkung 4.18. *Solche Punkte existieren: Zum Beispiel verschwinden* $\theta_i, i = 1, \ldots, 4$ *auf* $[z] = [x + iy]$ *mit* $x = e_1 + e_2 + \frac{1}{2}e_5 + \frac{1}{2}e_6$ *und* $y = e_3 + e_4 + \frac{1}{2}e_5 - \frac{1}{2}e_6$. *Genauer liegt* $[z]$ *in* $\mathcal{H}(\mu_i), i = 1, \ldots, 4$ *mit* $\mu_1 = \lambda_1$, $\mu_2 = \lambda_2$, $\mu_3 = \lambda_3 - e_6$ *und* $\mu_4 = \lambda_4 - e_6$.

Auch auf dem Satake-Rand $X_{\Gamma_\mathsf{N}} - \mathcal{H}/\Gamma_\mathsf{N}$ ist die Abbildung wohldefiniert: Dort verschwinden zwar mindestens vier aber nie alle θ_i gleichzeitig (siehe unten S.95f).

Wir zeigen nun:

Lemma 4.19. *Der Raum $\sum_{i=0}^{9} \mathbb{C}\theta_i^2$ ist fünf- oder zehndimensional.*

Dies folgt darstellungstheoretisch: Auf $\sum \mathbb{C}\theta_i$ operiert $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ via $(\gamma, \theta_i) \longmapsto \theta_i \circ \gamma$ von rechts, denn es gilt $\theta_i \circ \gamma \in \mathbb{C}\theta_j$ für ein j. Für jeden Input $c \in V_i$ zu θ_i gilt nämlich

$$\sigma_{\gamma^{-1}(\lambda_i)}(\gamma(c)) = \gamma\sigma_{\gamma^{-1}(\lambda_i)}(c) = \sigma_{\lambda_i}\gamma(c) = \gamma(\sigma_{\lambda_i}(c)) = -\gamma(c),$$

d. h. $\gamma(c) \in V_j$ und damit $\theta_i \circ \gamma \in \mathbb{C}\theta_j$ für j mit $\lambda_j \equiv \gamma^{-1}(\lambda_i) \bmod \mathsf{M}$. Damit operiert $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ auf $\sum_i \mathbb{C}\theta_i^2$ von links via $(\gamma, \theta_i^2) \longmapsto \theta_i^2 \circ \gamma^{-1} = (\theta_i \circ \gamma^{-1})^2$ und lineare Ausdehnung. Dabei operiert Γ_N trivial (Bemerkung 3.14). Wir erhalten also eine lineare Darstellung

$$\rho : {}^{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})}\!/_{\Gamma_\mathsf{N}} \cong S_6 \longrightarrow \mathrm{GL}(\textstyle\sum \mathbb{C}\theta_i^2).$$

Da $\sum_i \mathbb{C}\theta_i^2$ nicht nulldimensional ist, folgt obiges Lemma aus

Lemma 4.20. *Es gibt eine zehndimensionale Darstellung der S_6*

$$\sigma : S_6 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{10})$$

sodaß

$$\begin{array}{ccc} S_6 & \xrightarrow{\sigma} & \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{10}) \\ & \searrow^{\rho} & \downarrow \tau \\ & & \mathrm{GL}(\textstyle\sum \mathbb{C}\theta_i^2) \end{array}$$

kommutiert, wobei τ von

$$\tau' : \mathbb{C}^{10} \longrightarrow \textstyle\sum_i \mathbb{C}\theta_i^2;\ e_i \longmapsto \theta_i^2$$

induziert ist, d. h. $\tau(g)(\theta_i^2) = \tau'(g(e_i))$ für $g \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{10})$. (Dabei sei $\{e_0, \ldots, e_9\}$ Standardbasis des $\mathbb{C}^{10}$.)

Die Darstellung σ besitzt zwei fünfdimensionale invariante Teilräume auf denen σ irreduzibel ist.

Beweis. Zur Existenz: Wir definieren $\gamma(i) \in \{0, \ldots, 9\}$ und $0 \neq c_{i,\gamma} \in \mathbb{C}$ für $i = 0, \ldots, 9$ und $\gamma \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ durch $\theta_i \circ \gamma^{-1} = c_{i,\gamma}\theta_{\gamma(i)}$, d. h. $\lambda_{\gamma(i)} \equiv \gamma(\lambda_i) \bmod \mathsf{M}$. Wegen der linearen Unabhängigkeit der θ_i ist dies wohldefiniert. Definieren wir $\sigma'(\gamma) \in \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{10})$ durch $\sigma'(\gamma)(e_i) := c_{i,\gamma}^2 e_{\gamma(i)}$ $\forall i, \gamma$ und lineare Fortsetzung, so ist dadurch wegen

$$\gamma\delta(i) = \gamma(\delta(i)) \quad \text{und} \quad c_{i,\gamma\delta} = c_{i,\delta}c_{\delta(i),\gamma}$$

offensichtlich eine lineare Darstellung $\sigma' : \mathrm{O}^+(\mathsf{M}) \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{10})$ definiert. Wegen $c_{i,\gamma} = \pm 1$ $\forall i$ und $\gamma(i) = i$ für $\gamma \in \Gamma_\mathsf{N}$ erhalten wir eine Darstellung $\sigma : \mathrm{O}^+(\mathsf{M})/\Gamma_\mathsf{N} \cong S_6 \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathbb{C}^{10})$.

Nach Konstruktion gilt $\rho = \tau \circ \sigma$: Sei $\varphi \in S_6 \cong \mathrm{O}^+(\mathsf{M})/\Gamma_{\mathsf{N}}$ mit Repräsentant $\gamma \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$, dann gilt

$$\begin{aligned}\tau(\sigma(\varphi))(\theta_i^2) &= \tau'(\sigma(\varphi)(e_i)) = \tau'(\sigma'(\gamma)(e_i)) \\ &= \tau'(c_{i,\gamma}^2 e_{\gamma(i)}) = c_{i,\gamma}^2 \theta_{\gamma(i)}^2 \\ &= (\theta_i \circ \gamma^{-1})^2 = \theta_i^2 \circ \gamma^{-1} \\ &= \rho(\varphi)(\theta_i^2).\end{aligned}$$

Die Berechnung des Charakters von σ (siehe Anhang ab S.112) zeigt die Behauptung über die invarianten Teilräume. □

Verwenden wir die Existenz einer linearen Relation der θ_i^2, so ist also $\sum_{i=0}^{9} \mathbb{C}\theta_i^2$ fünfdimensional.

Das Bild der angegebenen Abbildung $\theta : X_{\Gamma_{\mathsf{N}}} \longrightarrow \mathbb{P}^9$ ist also in einem durch fünf Relationen in $\mathbb{P}^9$ definierten $\mathbb{P}^4$ enthalten. Da die Abbildung eigentlich ist, ist das Bild abgeschlossen analytisch und damit auch abgeschlossen algebraisch. Gibt es einen Punkt im Bild, dessen Urbild endlich ist, so ist das Bild vierdimensional und damit gleich $\mathbb{P}^4$. Es genügt dabei, das Urbild in $\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$ zu betrachten.

Lemma 4.21. *Sei $[z] \in \mathcal{H}$ ein spezieller Punkt. Dann ist $\theta^{-1}(\theta([z]\Gamma_{\mathsf{N}})) \cap {}^{\mathcal{H}}/_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ endlich.*

(Tatsächlich ist $\theta^{-1}(\theta([z]\Gamma_{\mathsf{N}}))$ enthalten in $\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$.) Dies folgt aus

Lemma 4.22. *Die Gruppe ${}^{\mathrm{O}^+(\mathsf{M})}/_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ operiert transitiv auf den speziellen Punkten in ${}^{\mathcal{H}}/_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$.*

Denn die Menge der speziellen Punkte in $\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$ ist damit bijektiv zu einer Menge von Nebenklassen der endlichen Gruppe $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})/\Gamma_{\mathsf{N}} \cong S_6$. Es gibt also nur endlich viele spezielle Punkte in $\mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$ und die Menge $\theta^{-1}(\theta([z]\Gamma_{\mathsf{N}})) \cap \mathcal{H}/\Gamma_{\mathsf{N}}$ besteht aus solchen, ist also ebenfalls endlich. Dieses Lemma wiederum folgt aus

Lemma 4.23. *Die Gruppe $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ operiert transitiv auf den speziellen Punkten in $\mathcal{H}$.*

Beweis. Siehe unten, S. 92f. □

Damit ist die Abbildung $X_{\Gamma_{\mathsf{N}}} \longrightarrow \mathbb{P}^4$ endlich und surjektiv, besitzt also eine Blätterzahl. Wir zeigen, daß diese Blätterzahl gleich 1 ist. Damit ist die Abbildung einblättrige Überlagerung normaler Räume, diese sind also biholomorph, und der Satz ist bewiesen. Die Blätterzahl folgt aus

Lemma 4.24. *Sei $[z] \in \mathcal{H}$ ein spezieller Punkt. Dann gilt*

1. *Die Menge $\theta^{-1}(\theta([z]\Gamma_{\mathsf{N}})) \cap {}^{\mathcal{H}}/_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ besteht aus einem Element.*
2. *Die Abbildung θ ist bei $[z]\Gamma_{\mathsf{N}}$ lokal biholomorph.*

Beweis. Zum ersten Teil siehe unten. Für *2.* gehe zu einem Tubengebietmodell $\mathcal{H}'$ von $\mathcal{H}$ über. Sei $Z \in \mathcal{H}'$ speziell mit $\theta_{i_0}(Z) = \theta_{i_1}(Z) = \theta_{i_2}(Z) = \theta_{i_3}(Z) = 0$, d. h. $[z] \in \cap_{j=0}^{3} \mathcal{H}(\mu_{i_j})$ für gewisse $\mu_{i_j} \in \mathsf{N}$ der Norm $-\frac{1}{2}$ mit $\mu_{i_j} \equiv \lambda_{i_j} \bmod \mathsf{M}$. Die Nullstellendivisoren der θ_{i_j} schneiden sich transversal in Z und haben Vielfachheit eins.

Die θ_{i_j} sind also lokale Parameter für $\mathcal{H}'$ bei Z. Dies gilt auch für $\frac{\theta_{i_0}}{\theta_{i_4}}, \frac{\theta_{i_1}}{\theta_{i_4}}, \frac{\theta_{i_2}}{\theta_{i_4}}, \frac{\theta_{i_3}}{\theta_{i_4}}$ für $i_4 \notin \{i_0, \ldots, i_3\}$. Wir numerieren die θ_i so um, daß dies für $\theta_0, \ldots, \theta_4$ gilt. Der Halm $\mathcal{O}_{\mathcal{H}',Z}$ der Garbe der holomorphen Funktionen auf $\mathcal{H}'$ bei Z besteht also aus den konvergenten Potenzreihen in $\theta_0, \ldots, \theta_3$ bzw. $\frac{\theta_0}{\theta_4}, \ldots, \frac{\theta_3}{\theta_4}$ (θ_4 ist Einheit)

$$\mathcal{O}_{\mathcal{H}',Z} = \mathbb{C}\{\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3\} = \mathbb{C}\left\{\tfrac{\theta_0}{\theta_4}, \tfrac{\theta_1}{\theta_4}, \tfrac{\theta_2}{\theta_4}, \tfrac{\theta_3}{\theta_4}\right\}$$

und diese (bzw. ihre m_Z^2-Klassen) bilden eine Basis des dualen Tangentialraums ($\cong \mathbb{C}^4$) m_Z/m_Z^2, wobei $m_Z \subseteq \mathcal{O}_{\mathcal{H}',Z}$ das maximale Ideal im Halm ist.

Es gilt also für genügend kleine Umgebungen $Z \in U \subseteq \mathcal{H}'$:

$$U \cong \{(\theta_0(W), \theta_1(W), \theta_2(W), \theta_3(W)); W \in U\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

bzw.

$$U \cong \left\{\left(\tfrac{\theta_0}{\theta_4}(W), \tfrac{\theta_1}{\theta_4}(W), \tfrac{\theta_2}{\theta_4}(W), \tfrac{\theta_3}{\theta_4}(W)\right); W \in U\right\} \subseteq \mathbb{C}^4$$

(biholomorph).

Sei U so klein, daß $U \cap \gamma(U) = \emptyset$ für $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{N}} - \Gamma_{\mathsf{N},Z}$ gilt, wobei $\Gamma_{\mathsf{N},Z} := \mathrm{Stab}(Z) \cap \Gamma_{\mathsf{N}}$. Dann ist $\cup_{\gamma \in \Gamma_{\mathsf{N},Z}} U$ unter $\Gamma_{\mathsf{N},Z}$ invariante Umgebung von Z, für die dies ebenfalls gilt. Wir können also o. E. annehmen, daß $\Gamma_{\mathsf{N},Z}$ auf U operiert aber $U \cap \gamma(U) = \emptyset$ für $\gamma \notin \Gamma_{\mathsf{N},Z}$ gilt. Sei $p : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}'/\Gamma_{\mathsf{N}} \subseteq X_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ die natürliche Projektion. Dann ist $p(U) \cong U/\Gamma_{\mathsf{N},Z}$ Umgebung von $Z\Gamma_{\mathsf{N}} \in X_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$. Es ist

$$\Gamma_{\mathsf{N},Z} = \langle \sigma_{\mu_0}, \sigma_{\mu_1}, \sigma_{\mu_2}, \sigma_{\mu_3}, -\mathrm{id}_{\mathrm{V}} \rangle$$

(die μ_i und λ_i seien genau wie die θ_i umnumeriert). Der Halm $\mathcal{O}_{X_{\Gamma_{\mathsf{N}}},Z}$ der holomorphen Funktionen auf $X_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ bei $Z\Gamma_{\mathsf{N}}$ besteht aus den Keimen von Funktionen auf $\mathcal{H}'$ bei Z, die unter $\Gamma_{\mathsf{N},Z}$ invariant sind. Die $\frac{\theta_i}{\theta_4}$ gehen unter $\gamma \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ über in $\frac{v_i(\gamma)\theta_i}{v_4(\gamma)\theta_4}$, d. h. $\sigma_{\lambda_i}(\frac{\theta_i}{\theta_4}) = -\frac{\theta_i}{\theta_4}$ und $\sigma_{\lambda_i}(\frac{\theta_j}{\theta_4}) = \frac{\theta_j}{\theta_4}$ für $j \neq i$. Da $-\mathrm{id}_{\mathrm{V}}$ trivial auf $\mathcal{H}'$ operiert, sind genau die Potenzreihen in den $\frac{\theta_i^2}{\theta_4^2}$ invariant unter $\Gamma_{\mathsf{N},Z}$:

$$\mathcal{O}_{X_{\Gamma_{\mathsf{N}}},Z} = \mathbb{C}\left\{\tfrac{\theta_0^2}{\theta_4^2}, \tfrac{\theta_1^2}{\theta_4^2}, \tfrac{\theta_2^2}{\theta_4^2}, \tfrac{\theta_3^2}{\theta_4^2}\right\}$$

Damit ist das maximale Ideal $m_{\Gamma_{\mathsf{N}},Z}$ erzeugt von den $\frac{\theta_i^2}{\theta_4^2}$ und diese bilden eine Basis des dualen Tangentialraums $m_{\Gamma_{\mathsf{N}},Z}/m_{\Gamma_{\mathsf{N}},Z}^2$. Insbesondere ist dieser vierdimensional, d. h. $X_{\Gamma_{\mathsf{N}}}$ ist regulär bei $Z\Gamma_{\mathsf{N}}$, und

$$\theta^{(1)} : p(U) \longrightarrow \mathbb{C}^4;\ W\Gamma_{\mathsf{N}} \longmapsto \left(\tfrac{\theta_0^2}{\theta_4^2}(W), \tfrac{\theta_1^2}{\theta_4^2}(W), \tfrac{\theta_2^2}{\theta_4^2}(W), \tfrac{\theta_3^2}{\theta_4^2}(W)\right)$$

ist biholomorph auf das Bild. Damit ist die Abbildung θ bei $Z\Gamma_{\mathsf{N}}$ biholomorph als Zusammensetzung

$$\theta : U/\Gamma_{\mathsf{N},Z} \xrightarrow{\theta^{(1)}} \mathbb{C}^4 \xrightarrow{\theta^{(2)}} \mathbb{P}^9 \xrightarrow{\theta^{(3)}} \mathbb{P}^9$$

(jeweils auf die Bilder eingeschränkt) von biholomorphen Abbildungen. Dabei sei $\theta^{(2)} : (z_0, \ldots, z_3) \longmapsto [z_0 : \cdots : z_3 : 1 : z_5 : \cdots : z_9]$, wobei $z_5, \ldots, z_9$ gegeben sind durch die linearen Relationen der θ_i^2. (Die $\theta_0^2, \ldots, \theta_4^2$ sind linear unabhängig, also Basis von $\sum_{i=0}^9 \mathbb{C}\theta_i^2$.) Schließlich macht $\theta^{(3)}$ die Index-Umnumerierung rückgängig. □

Beweis von Lemma 4.23 und 4.24.*1*.

Seien $[z]$ und $[w] \in \mathcal{H}$ spezielle Punkte. Es gibt $\mu_1, \ldots, \mu_4$ und $\tau_1, \ldots, \tau_4 \in \mathsf{L}'$ mit $\mathrm{q}(\mu_i) = \mathrm{q}(\tau_i) = -\frac{1}{2}\ \forall i$ und μ_i und τ_i jeweils untereinander paarweise orthogonal und orthogonal zu z bzw. w.

Wir können o. E. ein festes z wählen, sodaß für die Zerlegung $z = x + iy, x, y \in \mathrm{V}$ in Real- und Imaginärteil $x, y \in \mathsf{N}, \mathrm{q}(x) = \mathrm{q}(y) = \frac{1}{2}$ gilt und $\mu_1, \ldots, \mu_4, x, y$ $\mathbb{Z}$-Basis von N ist. Beispielsweise sei

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (1,0,0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), & \mu_2 &= (0,1,0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}),\\ \mu_3 &= (0,0,1,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}), & \mu_4 &= (0,0,0,1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}),\\ x &= (1,1,0,0,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}), & y &= (0,0,1,1,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}). \end{aligned}$$

Lemma 4.23 folgt nun, wenn es $\gamma \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ gibt mit $\gamma(\mu_i) = \tau_i$ für $i = 1, \ldots, 4$, denn ein solches γ führt auch den zu den μ_i orthogonalen Raum in den zu den τ_i orthogonalen Raum also $[z]$ in $[w]$ über. Tatsächlich genügt $\gamma \in \mathrm{O}(\mathsf{M})$, denn $\gamma \in \mathrm{O}(\mathsf{M}) - \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ kann durch $\gamma \circ \tau$ mit $\tau(\mu_i) = \mu_i, \tau(x) = y$ und $\tau(y) = x$, also $\tau \in \mathrm{O}(\mathsf{N}) = \mathrm{O}(\mathsf{M})$, in $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ überführt werden.

Annulieren $[z]$ und $[w]$ die gleichen vier Theta-Reihen, so gilt o. E. $\mu_i \equiv \tau_i \bmod \mathsf{M}\ \forall i$ und wir suchen $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ mit $\gamma(\mu_i) = \tau_i\ \forall i$ zum Beweis von Lemma 4.24.*1*.

Nach Satz 3.19 gibt es $\gamma \in \mathrm{O}(\mathsf{M})$ mit $\gamma(\mu_1) = \tau_1$. Ist $\mu_1 \equiv \tau_1 \bmod \mathsf{M}$, so kann nach Folgerung 3.29 $\gamma \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ gewählt werden.

Wir suchen nun $\gamma_1 \in \mathrm{O}(\mathsf{M})$ mit $\gamma_1(\tau_1) = \tau_1$ und $\gamma_1(\gamma(\mu_2)) = \tau_2$. Wir betrachten dazu das Gitter

$$\mathsf{N}_1 := \mathsf{N} \cap \tau_1^{\perp} = \textstyle\sum_{i=2}^{4} \mathbb{Z}\gamma(\mu_i) + \mathbb{Z}\gamma(x) + \mathbb{Z}\gamma(y)$$

und suchen ein $\tilde{\gamma} \in \mathrm{O}(\mathsf{N}_1)$, welches $\gamma(\mu_2)$ in $\tau_2 \in \mathsf{N}_1$ überführt. Die Fortsetzung von $\tilde{\gamma}$ via $\tau_1 \longmapsto \tau_1$ auf N ist dann das gesuchte γ_1.

Das Gitter N_1 ist isomorph zu

$$\widetilde{\mathsf{N}_1} := \mathsf{N} \cap \{x_5 = x_6\} = \langle e_1, \ldots, e_4, \tfrac{1}{2}(e_5 + e_6)\rangle \subseteq \widetilde{\mathrm{V}} := \mathrm{V} \cap \{x_5 = x_6\}$$

via

$$\begin{aligned} e_1 &\longmapsto \gamma(x) - \gamma(\mu_3)\\ e_2 &\longmapsto \gamma(x) - \gamma(\mu_4)\\ e_3 &\longmapsto \gamma(y) - \gamma(\mu_2)\\ e_4 &\longmapsto \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(\mu_3) - \gamma(\mu_4)\\ \tfrac{1}{2}(e_5 + e_6) &\longmapsto \gamma(x) + \gamma(y) - \gamma(\mu_2) - \gamma(\mu_3) - \gamma(\mu_4), \end{aligned}$$

und dieser Isomorphismus erhält die quadratische Form (er läßt sich durch $\frac{1}{2}(e_5 - e_6) \longmapsto \tau_1 = \gamma(\mu_1)$ zu einer orthogonalen Transformation aus $\mathrm{O}(\mathsf{N})$ fortsetzen). Das Gitter $\widetilde{\mathsf{N}_1}$ enthält $\widetilde{\mathsf{L}_1} := \mathsf{L} \cap \widetilde{\mathrm{V}}$. Ein $l \in \widetilde{\mathsf{L}_1}'$ mit $\mathrm{q}(l) = -\frac{1}{2}$ liegt bereits in $\widetilde{\mathsf{N}_1}$ (und ist darin primitiv) und $\mathrm{O}(\widetilde{\mathsf{L}_1})$ operiert transitiv auf den primitiven Punkten von $\widetilde{\mathsf{L}_1}'$ gleicher Norm ([F-H]) (Dies entspricht Satz 3.19). Wegen $\mathrm{O}(\mathsf{N}) = \mathrm{O}(\mathsf{M}) = \mathrm{O}(\mathsf{L})$ und

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(\widetilde{\mathsf{L}_1}) &= \mathrm{O}(\mathsf{L}) \cap \{\gamma \in \mathrm{O}(\mathrm{V});\ \gamma(\tfrac{1}{2}(e_5 - e_6)) = \tfrac{1}{2}(e_5 - e_6)\}\\ &= \mathrm{O}(\mathsf{N}) \cap \{\gamma \in \mathrm{O}(\mathrm{V});\ \gamma(\tfrac{1}{2}(e_5 - e_6)) = \tfrac{1}{2}(e_5 - e_6)\} = \mathrm{O}(\widetilde{\mathsf{N}_1}) \end{aligned}$$

(man sieht dies auch direkt wie in Proposition 1.16) gibt es also das gesuchte $\tilde{\gamma} \in \mathrm{O}(\mathsf{N}_1)$ mit $\tilde{\gamma}(\gamma(\mu_2)) = \tau_2$ und damit das entsprechende $\gamma_1 \in \mathrm{O}(\mathsf{N}) = \mathrm{O}(\mathsf{M})$.

Ist $\gamma(\mu_2) \equiv \tau_2 \bmod \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_1$, so sind die Bilder in $\widetilde{\mathsf{N}_1}$ kongurent modulo $\mathsf{M} \cap \widetilde{\mathsf{N}_1} = 2\widetilde{\mathsf{N}_1}$ und nach [F-H] gibt es eine Transformation

$$\tilde{\tilde{\gamma}} \in \mathrm{Kern}\left(\mathrm{O}(\widetilde{\mathsf{N}_1}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\left(\widetilde{\mathsf{L}_1}/2\widetilde{\mathsf{N}_1}\right)\right) = \Gamma_{\mathsf{N}} \cap \mathrm{O}(\widetilde{\mathsf{N}_1}),$$

welche die Bilder in $\widetilde{\mathsf{N}_1}$ ineinander überführt. Die Übersetzung $\tilde{\gamma} \in \Gamma_{\mathsf{N}} \cap \mathrm{O}(\mathsf{N}_1)$ nach N_1 führt dann $\gamma(\mu_2)$ in τ_2 über und kann zu dem gesuchten $\gamma_1 \in \Gamma_{\mathsf{N}}$ fortgesetzt werden.

Wir betrachten nun

$$\mathsf{N}_2 := \mathsf{N}_1 \cap \tau_2^{\perp} = \mathbb{Z}\gamma_1(\gamma(\mu_3)) + \mathbb{Z}\gamma_1(\gamma(\mu_4)) + \mathbb{Z}\gamma_1(\gamma(x)) + \mathbb{Z}\gamma_1(\gamma(y))$$

und suchen ein $\tilde{\gamma} \in \mathrm{O}(\mathsf{N}_2)$ mit $\tilde{\gamma}(\gamma_1(\gamma(\mu_3))) = \tau_3$. Für die triviale Fortsetzung γ_2 von $\tilde{\gamma}$ auf N gilt dann $\gamma_2 \circ \gamma_1 \circ \gamma(\mu_i) = \tau_i, i = 1, 2, 3$.

Dieses Gitter ist isomorph zu $\widetilde{\mathsf{N}_2} := \mathbb{Z}^4 = \sum_{i=1}^4 \mathbb{Z}f_i$ mit quadratischer Form $q(x) := x_1x_2 + x_3x_4 + \frac{1}{2}x_4^2$ auf einer $\mathbb{Z}$-Basis $f_1, \ldots, f_4$ via

$$\begin{aligned}
f_1 &\longmapsto \gamma_1(\gamma(x)) - \gamma_1(\gamma(\mu_3)) \\
f_2 &\longmapsto \gamma_1(\gamma(x)) - \gamma_1(\gamma(\mu_4)) \\
f_3 &\longmapsto \gamma_1(\gamma(x)) + \gamma_1(\gamma(y)) - \gamma_1(\gamma(\mu_3)) - \gamma_1(\gamma(\mu_4)) \\
f_4 &\longmapsto \gamma_1(\gamma(y)).
\end{aligned}$$

Dieses Gitter ist nicht in [F-H] behandelt, kann aber ähnlich untersucht werden: Wir schreiben Gitterpunkte $x = \sum_{i=1}^4 x_i f_i, x_i \in \mathbb{Z}$ als Matrizen:

$$x \longmapsto X := \begin{pmatrix} x_4 + 2x_3 & 2x_1 \\ -2x_2 & 2x_4 \end{pmatrix}$$

Dabei gilt $q(x) = \frac{1}{4}\det(X)$. Damit ist für $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ die Abbildung $X \longmapsto AXB$ orthogonale Transformation von

$$\widehat{\mathsf{N}_2} := \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{Z});\, b, c, d \in 2\mathbb{Z}, 2a \equiv d \bmod 4\mathbb{Z} \right\},$$

falls AXB wieder diese Gestalt hat für alle X. Dies ist etwa für $A, B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})[2] := \{M \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z});\, M \equiv E_2 \bmod 2\}$ der Fall. Es gilt ([F-H]):

Lemma 4.25. *Sei* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{M}^{2\times 2}(\mathbb{Z})$ *mit teilerfremden Einträgen und* $M \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right) \bmod 2\mathbb{Z}$. *Dann liegt die Matrix* $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det M \end{smallmatrix}\right)$ *in der* $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})[2]$*-Doppelnebenklasse von* M.

Ist nun $x = \sum_{i=1}^4 x_i f_i \in \widetilde{\mathsf{N}_2}$ mit $q(x) = -\frac{1}{2}$, so ist x primitiv in $\widetilde{\mathsf{N}_2}$ und es gilt $-\frac{1}{2} = q(x) \equiv \frac{1}{2}x_4^2 \bmod \mathbb{Z}$ also $x_4 \equiv 1 \bmod 2\mathbb{Z}$ und damit

$$\begin{aligned}
\gcd(x_4 + 2x_3, 2x_1, -2x_2, 2x_4) &= \gcd(x_4 + 2x_3, x_1, x_2, x_4) \\
&= \gcd(2x_3, x_1, x_2, x_4) = \gcd(x_3, x_1, x_2, x_4) = 1,
\end{aligned}$$

d. h. die zugeordnete Matrix $X \in \widehat{\mathsf{N}_2}$ erfüllt die Voraussetzungen des Lemmas. Damit kann jeder Punkt in $\widetilde{\mathsf{N}_2}$ mit $q(x) = -\frac{1}{2}$ in $(0, 0, 1, -1)$, d. h. $f_3 - f_4$, überführt werden, man kann also $\tilde{\gamma}$ wie gesucht finden.

Ist $A', B \in G := \langle \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})[4], -E_2, \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle$, so läßt die zugehörige Transformation $\widetilde{\mathsf{N}_2}$ modulo $2\widetilde{\mathsf{N}_2}$ fix. Es gilt

Lemma 4.26. *Sei* $M \in \widehat{\mathsf{N}_2}$ *mit* $M \equiv \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det M \end{smallmatrix}\right) \bmod 2\widehat{\mathsf{N}_2}$. *Dann liegt die Matrix* $D := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \det M \end{smallmatrix}\right)$ *in* $G'MG$, *wobei* $G' = \{M; M' \in G\}$.

Beweis. Die Matrix D liegt in $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})[2]M\,\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})[2]$, und $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})[2]$ wird modulo G repräsentiert von E_2 und $M_1 := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Also liegt eine der vier Matrizen $M, MM_1, M_1'M$ und $M_1'MM_1$ in $G'DG$. Von diesen ist aber nur M kongruent D modulo $2\widehat{\mathsf{N}_2}$, also können die anderen nicht in $G'DG$ liegen. Damit ist D in $G'MG$ enthalten. □

Damit kann also γ_2 in Γ_{N} gewählt werden wenn $\mu_3 \equiv \tau_3 \bmod \mathsf{M}$ gilt.

Wir betrachten schließlich

$$\mathsf{N}_3 = \mathsf{N}_2 \cap \mu_3^{\perp} = \mathbb{Z}\mu_4 + \mathbb{Z}x + \mathbb{Z}y$$

wobei wir μ_i statt $\gamma_2(\gamma_1(\gamma(\mu_i)))$ und entsprechend x und y schreiben. Es sei

$$m := \tau_4 - \mu_4 = -\langle m,\mu_4\rangle\mu_4 + \langle m,x\rangle x + \langle m,y\rangle y.$$

Ist $\mu_4 \equiv \tau_4 \bmod \mathsf{M}$ d. h. $m \in 2\mathsf{N}_3 = \mathsf{M} \cap \mathsf{N}_3$, so ist also $\langle m,y\rangle y \in 2\mathsf{N}_3$ und daher $\mathrm{E}(\mu_4 + x, \langle m,y\rangle y) \in \Gamma_{\mathsf{N}} \cap \mathrm{O}(\mathsf{N}_3)$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(\mu_4 + x, \langle m,y\rangle y)(\mu_4) &= \mu_4 \underbrace{-\langle \mu_4,\mu_4 + x\rangle}_{=1}\langle m,y\rangle y + (\dots)(\mu_4 + x) \\ &= \mu_4 + m + m' \qquad \text{mit } m' \perp y \text{ und } m' \in \mathsf{N}_3 \\ &= \tau_4 + m'. \end{aligned}$$

Wir können also ohne Einschränkung $y \perp m = \tau_4 - \mu_4$ annehmen. Dann ist aber bereits $\tau_4 = \mu_4$, d. h. $m = 0$: Sei $m = m_4\mu_4 + m_x x$. Damit ist

$$-1 = 2\,\mathrm{q}(\tau_4) = 2\,\mathrm{q}((m_4+1)\mu_4 + m_x x) = -(m_4+1)^2 + m_x^2$$

d. h. $(m_4+1)^2 - m_x^2 = 1$. Somit ist aber $m_4 = m_x = 0$, d. h. $\tau_4 = \mu_4$, d. h. Lemma 4.24.*1.* ist bewiesen. Lemma 4.23 folgt dann aus

Lemma 4.27. *Seien vier paarweise orthogonale Gitterpunkte in* N *mit Norm* $-\frac{1}{2}$ *gegeben. Dann ist jeder Punkt durch die drei anderen (bzw. deren* M*-Klassen) modulo* M *eindeutig bestimmt.*

Beweis. Für je drei der vier Vektoren gilt: Ihre Summe $s = (s_1, \dots, s_6)$ erfüllt $\mathrm{q}(s) = -\frac{3}{2}$ und $s_5 \equiv s_6 \equiv \frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}$. Damit ist $s_1s_2 + s_3s_4 = -\frac{3}{2} + s_5^2 + s_6^2 \equiv 1 \bmod 2\mathbb{Z}$, d. h. die aus den ersten vier Koordinaten von s gebildete Theta-Charakteristik (gemäß Bemerkung 3.11) ist ungerade.

Ein solches Tripel von Vektoren (genauer das Tripel der M-Klassen) bzw. das Tripel der aus den ersten vier Koordinaten gebildeten Punkte in $\mathbb{Z}^4 = \mathsf{H} \times \mathsf{H}$ (genauer in $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$) heißt asyzygisch. Von den $\binom{10}{3} = 120$ Tripeln sind 60 asyzygisch.

Je drei der vier paarweise orthogonalen Vektoren in N mit Norm $-\frac{1}{2}$ bilden also ein asyzygisches Tripel. Man nennt ein solches Quadrupel asyzygisch. Es gibt 15 asyzygische Quadrupel, und ein asyzygisches Tripel kommt in höchstens einem asyzygischen Quadrupel vor, wie man leicht nachrechnet. Diese Tripel und Quadrupel sind auch in [Ig2] explizit angegeben. □

Randbetrachtungen

Der Satake-Rand von X_{Γ_N} besteht aus den Γ_N-Klassen der null- und eindimensionalen rationalen Randkomponenten von $\mathcal{H}$. Die nulldimensionalen rationalen Randkomponenten (Spitzen) von $\mathcal{H}$ sind diejenigen Punkte in der Nullquadrik $\mathcal{N}$, die einen rationalen (isotropen) Repräsentanten haben (d. h. in $\mathrm{V}_\mathbb{Q} = \mathsf{N} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Q}$). Die eindimensionalen Randkomponenten stehen in Bijektion zu den zweidimensionalen isotropen Unterräumen von V. Für einen festen zweidimensionalen isotropen Unterraum F von V besteht die zugehörige Randkomponente aus den Punkten mit Repräsentanten in $F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$, die im Rand von $\mathcal{H}$ in $\mathcal{N}$ (bzgl. der gewöhnlichen Topologie) liegen und nicht durch (reelle) Elemente von F repräsentiert werden können. Die Komponente ist rational, wenn F über $\mathbb{Q}$ definiert, d. h. $F \cap \mathrm{V}_\mathbb{Q}$ zweidimensionaler Unterraum von $\mathrm{V}_\mathbb{Q}$, ist.

Proposition 4.28. *Eine eindimensionale Randkomponente ist biholomorph zur gewöhnlichen oberen Halbebene* $\mathbb{H}$.

Beweis. Sei F der zu der Komponente gehörende isotrope Unterraum von V. Es gibt einen weiteren F', sodaß $F + F'$ orthogonale Summe von zwei hyperbolischen Ebenen ist. Ist dabei F rational, so kann F' rational gewählt werden und $F + F' \subseteq \mathrm{V}_\mathbb{Q}$ ist orthogonale Summe von zwei rationalen hyperbolischen Ebenen. Es gibt Basen e_1, e_4 und e_2, e_3 von F und F' mit $\langle e_1,e_2\rangle = \langle e_3,e_4\rangle = 1$ und alle anderen $\langle e_i,e_j\rangle = 0$. Wir schreiben auch $z = (z_1, z_2, z_3, z_4, \mathfrak{z})$ für $z = \sum_{i=1}^4 z_i e_i + \mathfrak{z} \in \mathrm{V}(\mathbb{C}), \mathfrak{z} \in (F + F')^\perp \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$ und entsprechend für $[z] \in \mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$. Es ist damit $\mathcal{H} = \{[z] = [z_1, 1, z_3, z_4, \mathfrak{z}]; \mathrm{q}(z) = 0, y_3 > 0, y_3 y_4 + \mathrm{q}(\mathfrak{y}) > 0\}$. (Sollte dies zunächst die falsche Komponente sein, so gehe zu $-e_1$ und $-e_2$ über.)

Elemente von $F \otimes_\mathbb{Q} \mathbb{C}$ sind von der Form $z = (z_1, 0, 0, z_4, \mathfrak{o})$. Liegt $[z]$ in der eindimensionalen Komponente, so sind z_1 und $z_4 \neq 0$ (sonst hat $[z]$ einen reellen Repräsentanten, ist also Spitze) und daher o. E. $z = (-\tau, 0, 0, 1, \mathfrak{o})$ mit $\tau \in \mathbb{C}$. Es ist $\operatorname{Im}\tau \neq 0$, denn sonst ist $z \in \mathrm{V}$. Es ist auch $\mathcal{H} = \{[z] = [z_1, z_2, z_3, 1, \mathfrak{z}]; \mathrm{q}(z) = 0, y_1 < 0, y_1 y_2 + \mathrm{q}(\mathfrak{y}) > 0\}$. Damit muß notwendig $\operatorname{Im}\tau \geq 0$ also > 0 sein. Dies ist aber auch hinreichend, denn für $\tau \in \mathbb{H}$ und $t \in \mathbb{R}$ genügend groß gilt $[-\tau it - \mathrm{q}(\mathfrak{z}), 1, \tau, it, \mathfrak{z}] \in \mathcal{H}$ und

$$[-\tau it - \mathrm{q}(\mathfrak{z}), 1, \tau, it, \mathfrak{z}] = [-\tau + \tfrac{i}{t}\,\mathrm{q}(\mathfrak{z}), -\tfrac{i}{t}, -\tfrac{i}{t}\tau, 1, -\tfrac{i}{t}\mathfrak{z}] \longrightarrow [-\tau, 0, 0, 1, \mathfrak{o}]$$

für $t \longrightarrow \infty$ (es genügt hier, $\mathfrak{z} = \mathfrak{o}$ zu betrachten). □

Es gilt

Proposition 4.29. *Die Gruppe* $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ *operiert transitiv auf den rationalen Spitzen und auf den eindimensionalen rationalen Randkomponenten.*

Beweis. Die rationalen Spitzen sind Punkte in $\mathrm{P}(\mathrm{V}(\mathbb{C}))$, die durch isotrope Vektoren aus $\mathrm{V}_\mathbb{Q}$ repräsentiert werden können. Dann kann aber auch ein in M' primitiver isotroper Repräsentant gewählt werden und auf diesen operiert $\mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ transitiv (Satz 3.19).

Die eindimensionalen rationalen Randkomponenten entsprechen den zweidimensionalen isotropen Unterräumen von $\mathrm{V}_\mathbb{Q}$. Nach obigem können wir annehmen, daß zwei solche Räume F_1, F_2 einen (primitiven, isotropen) Vektor aus M' gemein haben, etwa $F_1 = \mathbb{Q}e_1 + \mathbb{Q}x, F_2 = \mathbb{Q}e_1 + \mathbb{Q}y$, wobei $e_1, \ldots, e_6$ unsere fest gewählten Basisvektoren

von L seien. Es ist dann $x_2 = y_2 = 0$ und wir können auch $x_1 = y_1 = 0$ annehmen. Wir suchen eine orthogonale Transformation, die x nach y überführt und e_1 festläßt. Es genügt dabei, $y = e_3$ zu betrachten.

Wir schreiben Elemente von $\mathrm{V}_1(\mathbb{Q}) := \{x \in \mathrm{V}_\mathbb{Q};\, x_1 = x_2 = 0\}$ als komplexe 2×2-Matrizen:

$$x = (0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6) \longmapsto X := 2 \begin{pmatrix} x_3 & x_5 + ix_6 \\ x_5 - ix_6 & x_4 \end{pmatrix}$$

Das Bild sind offenbar die hermiteschen Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Q}(i)$. Die quadratische Form q geht dabei über in $\frac{1}{4}\det$. Das Gitter $\mathsf{M}' \cap \mathrm{V}_1(\mathbb{Q})$ geht über in die Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{Z}[i]$. Damit ist für jede 2×2-Matrix M mit Einträgen in $\mathbb{Q}(i)$ und Determinante ± 1 die Transformation $X \longmapsto MX\overline{M}'$ orthogonal. Ganze M führen (das Bild von) $\mathsf{M}' \cap \mathrm{V}_1(\mathbb{Q})$ in sich über. Durch solche ganzen Transformationen können wir ganze X mit $\det(X) = 0$ auf die Gestalt $\left(\begin{smallmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ bringen: Zunächst können wir o. E. $X_{1,1} \neq 0$ annehmen (für $X = 0$ ist nichts zu zeigen und sonst ist $X_{1,1}$ oder $X_{2,2}$ ungleich 0 und $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ vertauscht die beiden Diagonaleinträge). Sei nun M so gewählt, daß $\tilde{X} := MX\overline{M}'$ minimale von 0 verschiedene 1,1-Koordinate hat. Dann gilt entweder $\tilde{X}_{2,2} = 0$ und damit $\tilde{X}_{2,1} = 0$, d. h. $\tilde{X}$ hat die gewünschte Form, oder $|\tilde{X}_{1,1}| \leq |\tilde{X}_{2,2}|$ und wegen der Determinante dann auch $|\tilde{X}_{1,1}| \leq |\tilde{X}_{2,1}|$. Sei nun $\tilde{X}_{2,1} = r\tilde{X}_{1,1} + s$ mit $r, s \in \mathbb{Z}[i], |s| < |\tilde{X}_{1,1}|$. Die Transformation zu $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ -r & 1 \end{smallmatrix}\right)$ läßt $\tilde{X}_{1,1}$ fest und führt $\tilde{X}_{2,1}$ in $\tilde{X}_{2,1} - r\tilde{X}_{1,1} = s$ über. Wegen $|s| < |\tilde{X}_{1,1}|$ muß $s = 0$ und damit X in die gesuchte Form überführt sein. Die triviale Fortsetzung dieser Transformation von $\mathrm{V}_1(\mathbb{Q})$ auf $\mathrm{V}_\mathbb{Q}$ leistet das Gewünschte. □

Diese Proposition folgt natürlich auch durch Übersetzung aus dem Hermitesch-Symplektischen.

Es genügt also, eine feste rationale eindimensionale Randkomponente, etwa zu $F = \mathbb{Q}e_1 + \mathbb{Q}e_4$ in unserer Koordinatisierung, und eine feste rationale Spitze, etwa zu $[2e_1]$ zu betrachten. Die Nullstellen der θ_i liegen genau auf dem Abschluß der $\mathcal{H}(\mu), \mu \in \mathsf{N}, \mathrm{q}(\mu) = -\frac{1}{2}$, θ_i verschwindet also auf $[z]$ mit $z = (-\tau, 0, 0, 1, 0, 0)$, wenn $\langle z, \mu\rangle = 0$ für ein $\mu \equiv \lambda_i \bmod \mathsf{M}$ gilt. Es ist $\langle z, \mu\rangle = -\tau\mu_2 + \mu_3$ und dies ist für $\mu_2 = \mu_3 = 0$ identisch Null und nirgends 0 in $\mathbb{H}$ für alle anderen μ (es müßte $\tau = \frac{\mu_3}{\mu_2} \in \mathbb{R}$ sein). Wir erhalten also

Lemma 4.30. *Auf der Randkomponente zu $F = \mathbb{Q}e_1 + \mathbb{Q}e_4$ verschwinden $\theta_0, \theta_1, \theta_4$ und θ_6 identisch und die anderen θ_i haben keine Nullstelle.*

Folgerung 4.31. *Die Abbildung θ ist auf den Γ_N-Klassen der eindimensionalen rationalen Randkomponenten wohldefiniert.*

Diese Folgerung kann man auch mit Hilfe der Fourierentwicklung ablesen: Für eine Spitze $[a]$ mit $a \in F$ am „Rand" der zu $F \subseteq \mathrm{V}_\mathbb{Q}$ gehörenden rationalen Randkomponente haben wir das Tubengebietmodell $\mathcal{H}_a$, und dort haben Modulformen f eine Fourierentwicklung (vgl. Abschnitt 2.1) $f_{a,a'}(Z) = \sum_T A(T)e^{2\pi i\langle T,Z\rangle}$ mit $T \in \mathsf{K}' \cap \overline{\mathcal{P}_a}$, wobei $\mathsf{K} = \mathsf{M} \cap a \cap a'$ und $\mathcal{P}_a$ der Positive Kegel ist. Ist etwa F und $e_1, \ldots, e_4$ wie im Beweis zu Proposition 4.28 und $a = qe_1 \in \mathsf{M}$ primitiv für $0 < q \in \mathbb{Q}$ sowie $a' = \frac{1}{q}e_2 \in \mathsf{M}'$,

dann gilt für Modulformen vom Gewicht k

$$\begin{aligned} f(*,1,\tau,it,\mathfrak{z}) = q^{-k} f(*,\tfrac{1}{q},\tfrac{\tau}{q},\tfrac{it}{q},\tfrac{1}{q}\mathfrak{z}) = q^{-k} f_{a,a'}(\tfrac{\tau}{q},\tfrac{it}{q},\tfrac{1}{q}\mathfrak{z}) \\ = q^{-k} \sum_{\substack{(t_3,t_4,\mathfrak{t})\in \mathsf{K}' \\ t_3,t_4>0 \\ t_3t_4+\mathrm{q}(\mathfrak{t})\geq 0}} A(t_3,t_4,\mathfrak{t}) e^{2\pi i \frac{1}{q}(t_3 it + t_4\tau + \langle \mathfrak{t},\mathfrak{z}\rangle)} \\ \longrightarrow q^{-k} \sum_{\substack{t_4\geq 0 \\ (0,t_4,\mathfrak{o})\in \mathsf{K}'}} A(0,t_4,\mathfrak{o}) e^{2\pi \frac{1}{q} i t_4 \tau} \quad \text{für } t\longrightarrow\infty, \end{aligned}$$

denn $e^{2\pi i\frac{1}{q}t_3 it} = e^{-2\pi\frac{1}{q}t_3 t} \longrightarrow 0$ für $t_3 \neq 0$, d. h. nur Summanden mit $t_3 = 0$ und damit auch $\mathfrak{t} = 0$ bleiben übrig. Der Limes ist ein orthogonaler Siegelscher Φ-Operator angewandt auf f (hängt ab von der Wahl der e_i).

Betrachten wir beispielsweise $f = \theta_9$ und $F = \mathbb{Q}e_1 + \mathbb{Q}e_4$ (bezüglich unserer Basis $e_1,\ldots,e_6$ von L bzw. V) sowie $a = 2e_1$ und $a' = \frac{1}{2}e_2$, d. h. $\mathsf{K} = \{(0,0)\}\times 2\mathsf{H}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, so gilt für $z = (*,1,\tau,it,\mathfrak{z})$, d. h. $Z = (\frac{\tau}{2},\frac{it}{2},\frac{1}{2}\mathfrak{z})$

$$\theta_9(z) = \tfrac{1}{2}\theta_9(\tfrac{1}{2}z) = \tfrac{1}{2}\theta_{9\,a,a'}(Z) \longrightarrow \theta_9|\Phi(\tau) := \tfrac{1}{2}\sum_{0\leq t_4\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}} A(0,t_4,0,0) e^{\pi i t_4\tau}$$

für $t\longrightarrow\infty$. Setzen wir das Zerlegungsgesetz (oder die Übersetzung ins Hermitesch-Symplektische) voraus, so gilt (vgl. Abschnitt 3.3 S.78f)

$$\tfrac{1}{2}A(0,t_4,0,0) = \begin{cases} 0 & t_4\notin\mathbb{Z} \\ \#\{(m,n)\in\mathbb{Z}^2; m^2+n^2 = t_4\} & 0\neq t_4\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

und damit

$$\theta_9|\Phi(\tau) = \tfrac{1}{2}A(0) + \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}^2} e^{\pi i(m^2+n^2)\tau} = \tfrac{1}{2}A(0) + \vartheta^2(\tau) - 1$$

mit dem Theta-Nullwert $\vartheta(\tau) := \vartheta\left[\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}\right](\tau) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau}$. Nun sind $\theta_9|\Phi$ und ϑ^2 beides elliptische Modulformen vom Gewicht 1, also auch ihre Differenz $\frac{1}{2}A(0) - 1$ und daher $A(0) = 2$ d. h. $\theta_9|\Phi = \vartheta^2$ (man kann dafür auch Borcherds Formel für den nullten Koeffizienten verwenden).

Bekanntlich hat aber ϑ keine Nullstelle in der oberen Halbebene. Damit gilt obige Folgerung, aber auch: In der Spitze $[2e_1]$ hat θ_9 keine Nullstelle.

Folgerung 4.32. *Die Abbildung θ ist in den rationalen Spitzenklassen und damit überhaupt wohldefiniert.*

Anhang A

Computerberechnungen

Die Berechnungen wurden mit Maple durchgeführt. Der Code wird hier erläutert.

A.1 Zum Abschnitt 3.1 Additive Lifts

Bestimmung des Inputraums (Proposition 3.1)

Wir wollen zunächst $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ berechnen. Dazu codieren wir die Elemente von M'/M wie folgt: Es ist $\mathsf{M}'/\mathsf{M} \cong 2\mathsf{M}'/2\mathsf{M}$ und $2\mathsf{M}' = \mathsf{L} = \mathbb{Z}^6$ also $\mathsf{M}'/\mathsf{M} \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^4 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ mit Repräsentantensystem $\mathfrak{R} := \{0,1,2,3\}^4 \times \{0,1\}^2$. Wir repräsentieren $\alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}$ durch $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in \mathfrak{R}$ sodaß $\alpha = \frac{1}{2}\widetilde{\alpha} + \mathsf{M}$. Wir erzeugen das Repräsentantensystem $\mathfrak{R}$ als Liste `Rep` von $4^4 \cdot 2^2 = 2^{10} = 1024$ Vektoren:

```
> Rep:=[]:
> for i1 from 0 to 3 do
>  for i2 from 0 to 3 do
>   for i3 from 0 to 3 do
>    for i4 from 0 to 3 do
>     for i5 from 0 to 1 do
>      for i6 from 0 to 1 do
>       Rep:=[op(Rep),[i1,i2,i3,i4,i5,i6]]
> od:od:od:od:od:od:
```

Die Elemente von M'/M sind also 1024-Tupel komplexer Zahlen. Uns interessiert aber $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$, d. h. der unter der Weil-Darstellung invariante Teilraum. Auf M'/M operiert S^2 als $e_\alpha \longmapsto -e_{-\alpha}$. Ist also insbesondere $\alpha = -\alpha$, d. h. $2\alpha = \mathsf{M} \Longleftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ gerade (wobei wieder $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6) \in \mathfrak{R}$ Repräsentant von α ist), so ist der Koeffizient vor e_α Null. Ist $\alpha \neq -\alpha$, so ist immer noch der Koeffizient $c_{-\alpha}$ vor $e_{-\alpha}$ durch den vor e_α bestimmt (und umgekehrt): $c_{-\alpha} = -c_\alpha$.

Ein 1024-Tupel in $c \in \mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ ist also durch die Koeffizienten c_α zu „ungeraden“ α (bzw. e_α), d. h. mit $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ nicht alle gerade, erstes ungerade α_i ist 1 (diese Bedingung wählt eine Klasse der beiden $\pm\alpha$ aus), bestimmt. Wir können daher das Reprästentantensystem $\mathfrak{R}$ bzw. `Rep` zu $\mathfrak{U}$ bzw. `U` verkleinern: Dazu stellen wir zunächst fest, ob überhaupt eine der ersten vier Koordinaten ungerade, und dann, ob die erste solche gleich eins ist:

```
> posu:=proc(v)
>  local p,w: p:=1; w:=1:
>  while p<5 and w=1 do
>   if v[p] mod 2<> 0 then w:=0: else p:=p+1: fi:
>  od:
>  RETURN(p):
> end:
> ung:=proc(v)
>  local p:
>  p:=posu(v):
>  if p<5 and v[p]=1 then RETURN(true) else RETURN(false) fi:
> end:
> U:=select(ung,Rep):
> nU:=nops(U);
                                nU := 480
>
```

Der Erzeuger T operiert als $e_\alpha \longmapsto e^{2\pi i\,\mathrm{q}(\alpha)} e_\alpha$. Ein Koeffizient c_α von $c \in \mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ kann also höchstens für $\mathrm{q}(\alpha) \in \mathbb{Z}$, d. h. $\mathrm{q}(\widetilde{\alpha}) \in 4\mathbb{Z}$ von Null verschieden sein (dabei ist q auf $\mathfrak{R}$ als Einschränkung von q auf $\mathbb{Z}^6$ bzw. $\mathbb{R}^6$ definiert).

Ein $c \in \mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ ist also durch die Koeffizienten c_α zu $\widetilde{\alpha}$ in $\mathfrak{U}$ mit $\mathrm{q}(\widetilde{\alpha}) \in 4\mathbb{Z}$ bestimmt. Wir verkleinern daher das Repräsentantensystem $\mathfrak{U}$ bzw. `U` zu $\mathfrak{S}$ bzw. `S`:

```
> q:=proc(v)
>  RETURN(v[1]*v[2]+v[3]*v[4]-v[5]*v[5]-v[6]*v[6])
> end:
> qinvz:=proc(v)
>  local p:
>  p:=q(v):
>  if p mod 4 <>0 then RETURN(false) else RETURN(true) fi:
> end:
> S:=select(qinvz,U):
> nS:=nops(S);
                                nS := 120
>
```

Zur Bestimmung von $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ muß noch der unter S invariante Teilraum bestimmt werden, d. h. in $\{c \in \mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]\,; c_\alpha = -c_{-\alpha}, c_\alpha = 0 \text{ für } \mathrm{q}(\alpha) \notin \mathbb{Z}\}$ ist

$$\rho(S)c = Ec = c \quad \text{mit} \quad E_{\alpha\beta} = \tfrac{i}{32} e^{-2\pi i \langle \alpha,\beta\rangle}$$

zu lösen. Dies läßt sich auf den „kurzen Vektoren“ lösen, d. h. genauer:

Lemma A.1. *Es sei* $\widetilde{c} = (c_{\widetilde{\alpha}})_{\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{S}}$ *und* $c = (c_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ *mit*

$$c_\alpha = \begin{cases} c_{\widetilde{\alpha}} & \widetilde{\alpha} \in \mathfrak{S} \\ -c_{\widetilde{-\alpha}} & \widetilde{\alpha} \in -\mathfrak{S},\ d.\,h.\ \widetilde{-\alpha} \in \mathfrak{S} \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Dann gilt mit der durch $E^{red}{}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} := \frac{1}{16}\operatorname{Im} i^{\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle}\ \forall\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{U},\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}$ *definierten* $|\mathfrak{U}|\times|\mathfrak{S}|$*-Matrix* E^{red}*:*

$$Ec = c \Longleftrightarrow E^{red}\widetilde{c} = c_{\mathfrak{U}},$$

wobei $c_{\mathfrak{U}} = (c_\alpha)_{\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{U}}$ *gesetzt sei.*

Beweis. Seien $\widetilde{c} = (c_{\widetilde{\alpha}})_{\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{S}}$ und $c = (c_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}$ wie angegeben. Wir setzen $c_{\widetilde{\alpha}} := c_\alpha\ \forall\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{R}-\mathfrak{S}$ und $E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} := E_{\alpha\beta}\ \forall\alpha,\beta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}$. Damit gilt für alle $\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} E_{\alpha\beta}c_\beta &= \sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}c_{\widetilde{\beta}} + \sum_{\widetilde{\beta}\in-\mathfrak{S}} E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}c_{\widetilde{\beta}} + \sum_{\substack{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{R}\\ \widetilde{\beta}\notin\pm\mathfrak{S}}} E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}c_{\widetilde{\beta}} \\
&= \sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}c_{\widetilde{\beta}} + \sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{-\beta}}c_{\widetilde{-\beta}} = \sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} (E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} - E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{-\beta}})c_{\widetilde{\beta}} \\
&= \sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} (E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} + \overline{E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}})c_{\widetilde{\beta}} = \sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} 2\operatorname{Re}\big(E_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}}\big)c_{\widetilde{\beta}} \\
&= \sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} 2\operatorname{Re}\left(\tfrac{i}{32}e^{-2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle}\right)c_{\widetilde{\beta}} = \tfrac{1}{16}\sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} \operatorname{Re}\left(ie^{-\frac{\pi i}{2}\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle}\right)c_{\widetilde{\beta}} \\
&= \tfrac{1}{16}\sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} \operatorname{Im}\big(i^{\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle}\big)c_{\widetilde{\beta}}
\end{aligned}$$

Die Implikation „$\Longrightarrow$“ ist damit klar.

Umgekehrt gilt für alle $\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{U}$ nach Voraussetzung $\frac{1}{16}\sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}}\operatorname{Im}\big(i^{\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle}\big)c_{\widetilde{\beta}} = c_{\widetilde{\alpha}}$, d. h. $\sum_{\beta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} E_{\alpha\beta}c_\beta = c_\alpha$. Für $\widetilde{\alpha}\in-\mathfrak{U}$ gilt damit

$$\begin{aligned}
\sum_{\beta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} E_{\alpha\beta}c_\beta &= \tfrac{1}{16}\sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} \operatorname{Im}\big(i^{\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle}\big)c_{\widetilde{\beta}} = -\tfrac{1}{16}\sum_{\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}} \operatorname{Im}\big(i^{\langle\widetilde{-\alpha},\widetilde{\beta}\rangle}\big)c_{\widetilde{\beta}} \\
&= -c_{\widetilde{-\alpha}} = c_{\widetilde{\alpha}} = c_\alpha.
\end{aligned}$$

Für $\widetilde{\alpha}\notin\pm\mathfrak{U}$ ist $2\alpha = \mathsf{M}$ und damit $\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle\in 2\mathbb{Z}$, d. h. $\operatorname{Im} i^{\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle} = 0\ \forall\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}$, also $\sum_{\beta\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} E_{\alpha\beta}c_\beta = 0 = c_\alpha$. □

Wir lösen also $\widetilde{E}\widetilde{c} = 0$ mit Maple, wobei

$$\begin{aligned}
\widetilde{E}_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} &= -16\delta_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} + \operatorname{Im} i^{\langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle} \\
&= -16\delta_{\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}} + \begin{cases} 0 & \langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle \equiv 0 \bmod 2\mathbb{Z} \\ \pm 1 & \langle\widetilde{\alpha},\widetilde{\beta}\rangle \equiv \pm 1 \bmod 4\mathbb{Z} \end{cases}
\end{aligned}$$

für alle $\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{U},\widetilde{\beta}\in\mathfrak{S}$. Wir berechnen zunächst die Koeffizienten von $\widetilde{E}$ als Feld `E` und berechnen dann den Kern von $\widetilde{E}$ bzw. `E`. Wir erhalten, daß die Dimension dieses Kerns und damit des Inputraums 20 ist wie in Proposition 3.1 behauptet:

```
> bi:=proc(v,w)
>  RETURN(v[1]*w[2]+v[2]*w[1]+v[3]*w[4]+v[4]*w[3]
>                            -2*v[5]*w[5]-2*v[6]*w[6])
> end:
> Eij:=proc(v,w)
>  local b:
>  `mod`:=mods;
>  b:=bi(v,w) mod 4:
>  if b=2 then b:=0:fi:
>  RETURN(b):
> end:
> E:=matrix(nU,nS):
> for i from 1 to nU do
>   for j from 1 to nS do
>     E[i,j]:=Eij(U[i],S[j]):
>   od:
>   if member(U[i],S,'j') then E[i,j]:=-16: fi:
> od:
> e:=kernel(E):
> m:=nops(e);
                              m := 20
>
```

Der Kern einer Matrix ist in Maple eine Menge von Basisvektoren, die wir zur eindeutigen Reproduzierbarkeit in eine Matrix mit den Basisvektoren als Zeilen umwandeln. Auf diese Matrix wenden wir eine LR-Zerlegung an, sodaß wir eine eindeutige Basis des Inputraums erhalten, die wir noch mit 4 multiplizieren, damit alle Koordinaten ganz sind:

```
> ee:=matrix(m,nS):
> for i from 1 to m do
>   for j from 1 to nS do
>     ee[i,j]:=e[i][j];
> od:od:
> LUdecomp(ee, R='r'):
> #evalm(transpose(r));
> for i from 1 to m do
>  for j from 1 to nS do
>   ee[i,j]:=4*r[i,j]:
> od:od:
> #evalm(transpose(ee));
```

Spiegelungen (Proposition 3.12)

Wir bestimmen für die zehn Spiegelungsklassen aus Proposition 3.10 die Inputs, deren Lifts Nullstellen auf dem jeweiligen Heegner-Divisor $H(\alpha_i, -\frac{1}{2})$ haben müssen. Orthogo-

nale Transformationen wirken auf $\mathbb{C}[\mathsf{M}'/\mathsf{M}]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$ als Permutationen der Koordinaten:

$$g(c) = g((c_\alpha)_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}}) = (c_{g(\alpha)})_{\alpha\in\mathsf{M}'/\mathsf{M}} \quad \forall g \in \mathrm{O}(\mathsf{M}), c \in \mathbb{C}\big[\mathsf{M}'/\mathsf{M}\big]^{\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})}$$

Wir erzeugen daher zunächst die zehn Spiegelungen längs der zehn Repräsentanten λ_i bzw. `a.i` aus Proposition 3.10 als Matrizen `G.i`:

```
> Spiegmat:=proc(a)
>  local i,j,x,G:
>  x:=[0,0,0,0,0,0];
>  G:=matrix(6,6);
>  for i from 1 to 6 do
>   x[i]:=1:
>   for j from 1 to 6 do
>    G[j,i]:=-bi(a,x)/q(a)*a[j]
>   od:
>   G[i,i]:=G[i,i]+1:
>   x[i]:=0:
>  od:
>  RETURN(G);
> end:
> a0:=[0,0,0,0,1,1]:
> a1:=[2,0,0,0,1,1]:
> a2:=[0,2,0,0,1,1]:
> a3:=[0,0,2,0,1,1]:
> a4:=[0,0,0,2,1,1]:
> a5:=[2,0,2,0,1,1]:
> a6:=[2,0,0,2,1,1]:
> a7:=[0,2,2,0,1,1]:
> a8:=[0,2,0,2,1,1]:
> a9:=[2,2,2,-2,1,1]:
> for i from 0 to 9 do
>  G.i:=Spiegmat(a.i):
> od:
```

Es genügt wieder, die Gleichungen

$$c_{\sigma_{\lambda_i}(\alpha)} = -c_\alpha \quad \forall \alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}$$

auf $\mathfrak{S}$ bzw. `S` zu lösen, denn $g \in \mathrm{O}(\mathsf{M})$ führt „gerade α“, d. h. α mit $\widetilde{\alpha} \notin \pm\mathfrak{U}$, in gerade über und erhält $\mathrm{q}(\widetilde{\alpha})$ modulo $4\mathbb{Z}$, d. h. für $\widetilde{\alpha} \notin \pm\mathfrak{S}$ gilt automatisch $c_{\sigma_{\lambda_i}(\alpha)} = 0 = -c_\alpha$. Für $\widetilde{\alpha} \in -\mathfrak{S}$ gilt $c_{\sigma_{\lambda_i}(\alpha)} = -c_\alpha$ genau wenn dies für $\widetilde{-\alpha} \in \mathfrak{S}$ gilt. Orthogonale Transformationen führen $\mathfrak{S} \cup -\mathfrak{S}$, aber nicht unbedingt $\mathfrak{S}$, in sich über. Wir müssen daher für $i = 0, \ldots, 9$ lösen:

$$\begin{aligned} c_{\widetilde{\alpha}} + c_{\sigma_{\lambda_i}(\widetilde{\alpha})} &= 0 \quad \text{falls } \sigma_{\lambda_i}(\widetilde{\alpha}) \in \mathfrak{S} \\ c_{\widetilde{\alpha}} - c_{\widetilde{-\sigma_{\lambda_i}(\alpha)}} &= 0 \quad \text{falls } \sigma_{\lambda_i}(\widetilde{\alpha}) \in -\mathfrak{S} \end{aligned} \qquad \forall \widetilde{\alpha} \in \mathfrak{S}$$

Wir brauchen also eine Routine, die $g(\widetilde{\alpha})$ (für $g =$ `G.i` und $\widetilde{\alpha} =$ `S[j]`) berechnet, und eine, die den Repräsentanten von $-\alpha$ in $\mathfrak{S}$ berechnet, falls $\widetilde{\alpha} \in -\mathfrak{S}$:

```
> ga:=proc(G,a)
>  local b,i:
>  b:=multiply(G,a);
>  for i from 1 to 4 do
>   b[i]:=b[i] mod 4
>  od;
>  b[5]:=b[5] mod 2;
>  b[6]:=b[6] mod 2;
>  RETURN(b);
> end:
> minusa:=proc(a)
>  local b:
>  `mod`:=modp;
>  b:=-a mod 4:
>  b[5]:=b[5] mod 2:
>  b[6]:=b[6] mod 2:
> RETURN(b);
> end:
```

Damit können wir die zehn Gleichungssysteme, d. h. die zugehörigen Matrizen `O.i`, erzeugen und die Kerne `k.i`, d. h. die Lösung in $\mathbb{C}[\mathfrak{S}] := \{c = (c_{\widetilde{\alpha}})_{\widetilde{\alpha}\in\mathfrak{S}}; c_{\widetilde{\alpha}} \in \mathbb{C}\}$, bestimmen. Diese müssen wir noch mit dem auf die $\mathfrak{S}$-Komponenten reduzierten Inputraum (mit Basis `e`) schneiden. Wir erhalten zehn Basen `kS.i` der zehn Gleichungssysteme, die alle aus `nkS.i` $= 2$ Elementen bestehen:

```
> for i from 0 to 9 do
>  O.i:=array(sparse,1..nS,1..nS):
>  for k from 1 to nS do
>   O.i[k,k]:=1:
>   g:=convert(ga(G.i,S[k]),list):
>   if member(g,S,'j') then O.i[k,j]:=O.i[k,j]+1:
>   else member(minusa(g),S,'j'):O.i[k,j]:=O.i[k,j]-1:
>   fi:
>  od:
>  k.i:=kernel(O.i);
>  kS.i:=intbasis(k.i,e):
>  nkS.i:=nops(kS.i):
> od:
> print(seq(nkS.i,i=0..9));
                    2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2
>
```

Wir wenden noch eine LR-Zerlegung auf die zehn (Basen der) Lösungsräume an. Dazu definieren wir zuerst je eine Matrix `kkS.i`, deren Zeilen die gefundenen Basis-Vektoren sind.

```
> for i from 0 to 9 do
>  kkS.i:=matrix(nkS.i,nS):
>  for j from 1 to nkS.i do
>   for k from 1 to nS do
>     kkS.i[j,k]:=kS.i[j][k]:
>  od:od:
> od:
> for i from 0 to 9 do
>  LUdecomp(kkS.i, R=o.i):
> od:
```

Wir haben also wie behauptet zehn zweidimensionale Inputräume $V_i, i = 0, \ldots, 9$. Diese erzeugen den ganzen Inputraum: Dazu bestimmen wir den Rang der Matrix `oo`, die aus den 20 Zeilen der zehn (LR-zerlegten) Basen besteht:

```
> oo:=o0:
> for i from 1 to 9 do
>  oo:=stack(oo,o.i):
> od:
> rank(oo);
                                20
>
```

Damit ist Proposition 3.12 bewiesen.

Fourierkoeffizienten (Satz 3.13 und Bemerkung 3.14)

Wir berechnen hier einige Fourierkoeffizienten der 20 Lifts zu den Basisvektoren der V_i von oben gemäß Satz 2.14: Der Koeffizient $A(T) = A_{a,a'}(T)$ des Lifts von $f = (f_\alpha)_{\alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}}$, $f_\alpha(\tau) = \sum_{m \in \mathbb{Q}} c_\alpha(m) e^{2\pi i m \tau}$ zur Spitze $[a], a \in \mathsf{M}$ primitiv und isotrop, zu $0 \neq T \in \overline{\mathcal{P}_a} \cap \mathsf{K}'$ im Tubengebietmodell $\mathcal{H}_a = \mathsf{K}(\mathbb{R}) + i\mathcal{P}_a$ ist gegeben durch

$$A(T) = \sum_{\substack{H \in \mathsf{K}', n \in \mathbb{N} \\ \text{mit } nH = T}} \sum_{\delta \in \mathsf{M}'/\mathsf{M} \text{ über } H} e^{2\pi i n \langle \delta, a' \rangle} c_\delta(\mathrm{q}(H)),$$

wobei $a' \in \mathsf{M}'$ mit $\langle a, a' \rangle = 1$ gewählt sei (beachte $r = 1$ hier). Wir beschränken uns auf Koeffizienten zu primitiven T:

$$A(T) = \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{m}{N}} c_{T + \frac{m}{N} a}(\mathrm{q}(T))$$

Dabei ist $N \in \mathbb{N}$ definiert durch $\langle a, \mathsf{M} \rangle = N\mathbb{Z}$ und $c_d(n) := c_\delta(n)\ \forall d \in \delta$. Bei uns ist $N = 4$ für alle Spitzen $[a]$: Ist $a = (a_1, \ldots, a_6) \in \mathsf{M}$ isotrop, so gilt $-a_5^2 - a_5^2 \equiv 0 \bmod 4$, d. h. $a_5, a_6 \equiv 0 \bmod 2$ und damit $\langle a, \mathsf{M} \rangle \subseteq 4\mathbb{Z}$. Umgekehrt gibt es zu primitiven $a \in \mathsf{M}$ ein $a' \in \mathsf{M}'$ mit $\langle a, a' \rangle = 1$. Es gilt also $\langle a, 4a' \rangle = 4$ und $4a' \in \mathsf{M}$, d. h. $\langle a, \mathsf{M} \rangle \supseteq 4\mathbb{Z}$. Also

$$A(T) = \sum_{m=0}^{3} i^m c_{T + \frac{m}{4} a}(\mathrm{q}(T)).$$

Unsere Inputs sind Konstanten, d. h. $f_\alpha = c_\alpha = c_\alpha(0)\ \forall \alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}$, also $c_\alpha(r) = 0\ \forall \alpha \in \mathsf{M}'/\mathsf{M}, 0 \neq r \in \mathbb{Q}$. Es sind also höchstens Koeffizienten $A(T)$ zu isotropen T, d. h. zu $T \in \partial\mathcal{P}_a$, von Null verschieden (dies gilt auch für nicht-primitive T): Der Lift von Konstanten ist singulär.

Zur konkreten Berechnung starten wir also mit $a \in \mathsf{M}$ primitiv und isotrop, wählen ein $a' \in \mathsf{M}'$ mit $\langle a,a'\rangle = 1$ und bestimmen $\mathsf{K}(\mathbb{R}) = \mathrm{V} \cap a^\perp \cap a'^\perp$. Dann wählen wir in $\mathcal{C}_a = \{X \in \mathsf{K}(\mathbb{R}); \mathrm{q}(X) > 0\}$ die Komponente $\mathcal{P}_a$ aus, indem wir das Bild von $\mathcal{H}$ unter $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_a = \mathsf{K}(\mathbb{R}) + i\mathcal{C}_a \subseteq \mathsf{K}(\mathbb{C})$ bestimmen. Dabei ist $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_a$ gegeben durch $[z] \longmapsto Z$ mit $Z = \frac{1}{n}(z - ma - na')$ und $m = \langle z,a'\rangle - 2\,\mathrm{q}(a')\langle z,a\rangle$ sowie $n = \langle z,a\rangle$ (vgl. Abschnitt 2.1). Es genügt dabei für einen beliebigen Punkt in $\mathcal{H}$, etwa $[1, 1, i, i, 0, 0]$, zu bestimmen, in welcher Komponente von $\mathcal{C}_a$ der Imaginärteil des Bildes liegt. Diese Komponente ist dann $\mathcal{P}_a$.

Betrachten wir nun einige konkrete Spitzen $[a], a \in \mathsf{M}$ primitiv und isotrop, und $T \in \mathsf{K}' \cap \partial\mathcal{P}_a$: Wir starten mit $a = 2e_1$ und wählen $a' = \frac{1}{2}e_2$. Es ist dann $\mathsf{K}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{V}; x_1 = x_2 = 0\}$ und $\mathcal{C}_a = \{(0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6); x_3x_4 - x_5^2 - x_6^2 > 0\}$. Die Komponente ist bestimmt durch $[z]$ mit $z = (1, 1, i, i, 0, 0)$. Es gilt $n = \langle z,a\rangle = 2$ und $m = \langle z,a'\rangle - 2\,\mathrm{q}(a')\langle z,a\rangle = \frac{1}{2}$ also $[z] \longmapsto Z = \frac{1}{2}(z - \frac{1}{2}a - 2a') = \frac{1}{2}(0, 0, i, i, 0, 0)$ mit $Y = \mathrm{Im}(Z) = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$. Die Komponente $\mathcal{P}_a$ ist somit durch $y_3 > 0$ gegeben. Beispiele für primitive, isotrope $T \in \partial\mathcal{P}_a \cap \mathsf{K}'$ sind $(0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$, $(0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$, $(0, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ und $(0, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. (Es ist $\partial\mathcal{P}_a = \{X = (0, 0, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathsf{K}(\mathbb{R}); \mathrm{q}(X) = 0, x_3, x_4 \geq 0\}$.)

Analog erhalten wir für $a = 2e_2$ mit $a' = \frac{1}{2}e_1$ die gleichen Ergebnisse für $\mathsf{K}(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}_a$ und $\mathcal{P}_a$ (aber eine andere Abbildung $\mathcal{K} \xrightarrow{\sim} \mathcal{K}_a$). Wir können auch die gleichen T betrachten.

Eine dritte Spitze ist gegeben durch $a = 2e_2 + 2e_4$. Wir wählen $a' = \frac{1}{2}e_1$ und erhalten $\mathsf{K}(\mathbb{R}) = \{x \in \mathrm{V}; x_1 = -x_3, x_2 = 0\}$ und $\mathcal{C}_a = \{(x_1, 0, -x_1, x_4, x_5, x_6); -x_1x_4 - x_5^2 - x_6^2 > 0\}$ mit den beiden durch $x_1 \lessgtr 0$ definierten Komponenten. Es stellt sich $\mathcal{P}_a = \{x \in \mathcal{C}_a; x_1 < 0\}$ heraus. Mögliche T sind etwa $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ und $(0, 0, 0, \frac{1}{2}, 0, 0)$.

Zur Berechnung der zugehörigen Fourierkoeffizienten definieren wir zunächst eine Liste `a` dieser Spitzen(repräsentanten) a, und eine Liste `T`, in der für jede Spitze `a[i]` die Liste der oben angegebenen T steht (jeweils mit verdoppelten, d. h. ganzzahligen Komponenten):

```
> a:=[[4,0,0,0,0,0],[0,4,0,0,0,0],[0,4,0,4,0,0]]:
> T:=[[[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,0,1,1,1,0],
>                    [0,0,1,1,0,1],[0,0,1,2,1,1],[0,0,2,1,1,1]],
>     [[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,0,1,1,1,0],
>                    [0,0,1,1,0,1],[0,0,1,2,1,1],[0,0,2,1,1,1]],
>     [[-1,0,1,0,0,0],[0,0,0,1,0,0]]  ]:
```

Für die Berechnung der Fourierkoeffizienten brauchen wir eine Routine, die in $\mathfrak{R}$ d. h. `Rep` addiert:

```
> summeR:=proc(a1,a2)
>  local b:
>  b:=a1+a2 mod 4:
>  b[5]:=b[5] mod 2:
```

```
>  b[6]:=b[6] mod 2:
> RETURN(b);
> end:
```

Zur Berechnung des Koeffizienten $A(T) = \sum_{m=0}^{3} i^m c_{T+\frac{m}{N}a}$ für den i-ten Input von oben (d. h. die `i`-te Zeile von `oo`) schreiben wir eine Routine `koeff`, der T als `t`, a als `a` sowie `i` und `oo` übergeben wird. Der Koeffizient `koeff` wird zu 0 initialisiert, sodann wird die Summe als `for`-Schleife ausgeführt: Zunächst wird der Repräsentant `ta` von $T + \frac{m}{N}a$ berechnet, dann $c_{T+\frac{m}{N}a}$ als `k` (mit Fallunterscheidung für $\widetilde{T + \frac{m}{N}a} \in \pm\mathfrak{S}$) und schließlich wird $c_{T+\frac{m}{N}a}$, mit der richtigen i-Potenz multipliziert, zu `koeff` addiert:

```
> koeff:=proc(t,a,i,oo)
>  local koeff,k,m,j,ta:
>  koeff:=0:
>  for m from 0 to 3 do
>   ta:=summeR(t,m/4*a):
>   if member(ta,S,'j') then
>    k:=oo[i,j]:
>   else
>    member(minusa(ta),S,'j'):
>    k:=-oo[i,j]:
>   fi:
>   koeff:=koeff+I^m*k:
>  od:
> RETURN(koeff):
> end:
```

Damit können wir die $A(T)$ berechnen: Wir schreiben die Koeffizienten für festes a und T in eine Spalte einer Matrix `KoMat` (für jeden der 20 Inputs eine Zeile): Wir Schachteln drei Schleifen, die Äußere über die a's, d. h. über die Liste `a`, dann für jedes a über die zugehörigen T's und schließlich über die 20 Inputs. Für jedes a und T erzeugen wir einen Koeffizienten-Vektor `K`, den wir an die Matrix `KoMat` anhängen.

```
> KoMat:=NULL:
> K:=vector(m):
> for aa to 3 do
>  for i to nops(T[aa]) do
>  for j to m do
>   K[j]:=koeff(T[aa][i],a[aa],j,oo):
>  od:

>  KoMat:=augment(KoMat,K):
>  od:
> od:
```

In der Koeffizientenmatrix `KoMat` stehen also in der i-ten Zeile die Fourierkoeffizienten

(zum Input) zur i-ten Zeile von `oo`. Sie lautet:

$$\begin{bmatrix}
0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2\,i & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\,i & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2\,i & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,i & 2\,i & 0 & 0 & 2\,i & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\
0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & -2\,i & 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & -2\,i & 0 & 0 \\
2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2\,i & 0 \\
2\,i & 0 & 0 & 0 & -2\,i & 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & -2\,i & 0 & -2 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,i \\
2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
2\,i & 0 & 0 & 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 2\,i & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 & 2\,i & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\,i
\end{bmatrix}$$

Bezeichnen wir den Input zur $2i{+}j$-ten Zeile von `oo` bzw. `KoMat` mit c_i^j für alle $i \in \{0,\dots,9\}, j \in \{1,2\}$ und den additiven Lift von c_i^j mit f_i^j für alle i,j (vgl. Beweis zu Satz 3.13), so kann man unmittelbar ablesen: Es gilt $f_i^j \not\equiv 0$ für alle i,j und $f_k^2 = if_k^1$ für alle $k = 0,\dots,9$. Durch Berechnen des Rangs von `KoMat` sieht man auch, daß die Dimension des Liftraumes mindestens und damit genau 10 ist:

```
> rank(KoMat);
                                10
>
```

Damit sind z. B. die 10 Lifts f_i^1 linear unabhängig, d. h. Basis des Liftraumes. Eine Basis des Kerns ist also $\{f_i^2 - if_i^1;\ i = 0,\dots,9\}$. Damit ist Satz 3.13 bewiesen.

A.2 Zum Abschnitt 3.2 Multiplikative Lifts

Die Dimension des Kontrollraums (Lemma 3.20)

Wir berechnen die Dimension des Kontrollraums mit Hilfe der Formel

$$d + \frac{dk}{12} - \alpha\left(e^{\pi i\frac{k}{2}}\rho_{\mathfrak{T}}^*(S)\right) - \alpha\left(\left(e^{\pi i\frac{k}{3}}\rho_{\mathfrak{T}}^*(ST)\right)^{-1}\right) - \alpha(\rho_{\mathfrak{T}}^*(T))$$

aus Proposition 2.10. Dabei ist $d = \dim V_0 = 9$ und $k = 3$ also

$$\frac{45}{4} - \alpha\left(-i\rho^*_{\mathfrak{X}}(S)\right) - \alpha\left(\left(-\rho^*_{\mathfrak{X}}(ST)\right)^{-1}\right) - \alpha(\rho^*_{\mathfrak{X}}(T)),$$

und für eine komplexe Matrix A mit Eigenwerten $\lambda = e^{2\pi i\alpha}, 0 \leq \alpha < 1$ ist $\alpha(A) := \sum_\lambda \alpha$ (mit Vielfachheit).

Wir erzeugen zunächst die Matrix $\rho^*_{\mathfrak{X}}(S)$: Die $\mathfrak{s}, \mathfrak{t}$-Komponente ist $\frac{-i}{32}\sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e^{2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle}$ für $\beta \in \mathfrak{s}$. Wir brauchen also für jeden Typ ein Element des Typs, bzw. dessen Repräsentant in $\mathfrak{R}$ bzw. `Rep` (siehe Tabelle Seite 70):

```
> rep1:=[0,0,0,0,0,0]:
> rep2:=[2,0,0,0,0,0]:
> rep3:=[2,2,0,0,1,1]:
> rep4:=[0,0,0,0,1,1]:
> rep5:=[0,0,0,0,0,1]:
> rep6:=[1,0,0,0,0,0]:
> rep7:=[1,1,0,0,0,0]:
> rep8:=[1,1,1,1,0,0]:
> rep9:=[1,0,0,0,0,1]:
```

Weiter brauchen wir eine Liste der (Repräsentanten in `Rep`) der Elemente eines Typs (`t.i`). Dazu benötigen wir eine Prozedur, die für einen gegebenen Repräsentanten den Typ des zugehörigen Elementes in L/2M liefert:

```
> typtab:=table([[1,0]=1,[2,0]=2,[2,2,2]=3,[2,2,6]=4,[2,3]=5,
>               [4,0]=6,[4,1]=7,[4,2]=8,[4,3]=9]):
> ordnung:=proc(v)
>  local o:
>  if posu(v)<5 then o:=4
>  elif (v mod 4) = [0,0,0,0,0,0] then o:=1:
>  else o:=2:
>  fi:
>  RETURN(o):
> end:
> typ:=proc(v)
>  local o,qq,t:
>  o:=ordnung(v):
>  qq:=q(v) mod 8:
>  if (o=2) and (qq mod 4 = 2)
>  then t:=typtab[[2,2,qq]]:
>  else t:=typtab[[o,qq mod 4]]:
>  fi:
>  RETURN(t):
> end:
```

Damit können wir die Listen erzeugen und auch gleich ihre Mächtigkeiten (siehe Tabelle Seite 70) angeben:

```
> for i to 9 do t.i:=[];od:
> for i to 1024 do
>  ty:=typ(Rep[i]):
>  t.ty:=[op(t.ty),Rep[i]]:
> od:
> for i to 9 do anz.i:=nops(t.i);od:
> print(seq(anz.i,i=1..9));

                1, 15, 6, 10, 32, 240, 240, 240, 240

>
```

Wir erzeugen die Matrizen $\rho^*_{\mathfrak{X}}(S)$ als `S` und $-i\rho^*_{\mathfrak{X}}(S)$ als `SS` (da wir mit den doppelten Repräsentanten rechnen ist $e^{2\pi i}$ durch $e^{\frac{\pi i}{2}} = i$ zu ersetzen).

```
> S:=matrix(9,9):
> for i from 1 to 9 do for j from 1 to 9 do
>  s:=0;
>  for k from 1 to anz.i do
>   s:=s+I^bi(t.i[k],rep.j):
>  od:
>  S[i,j]:=-I*s/32:
> od:od:
> SS:=scalarmul(S,-I):
```

Die Matrix $\rho^*_{\mathfrak{X}}(T)$ ist die Diagonalmatrix $\mathrm{diag}(1,1,-1,-1,i,1,-i,-1,-i)$ und $(-\rho^*_{\mathfrak{X}}(ST))^{-1}$ ist $\rho^*_{\mathfrak{X}}(ST)^2$:

```
> T:=diag(1,1,-1,-1,I,1,-I,-1,I):
> STST:=multiply(S,T,S,T):
```

Damit bestimmen wir die α's: Wir berechnen die Eigenwerte `ew.i` der Matrizen `SS`, `T` und `STST` und deren Argumente. Maple liefert das Argument in $(-\pi, \pi]$. Wir teilen noch durch 2π und addieren 1, falls das Argument negativ ist:

```
> for i in [T,SS,STST] do
>  ew.i:=[eigenvalues(i)];
>  al.i:=vector(9):
>  for j to 9 do
>   al.i[j]:=argument(ew.i[j])/(2*Pi):
>   if al.i[j]<0 then al.i[j]:=al.i[j]+1:fi:
>  od:
>  alpha.i:=sum('al.i[j]','j'=1..9):
> od:
> print(seq(alpha.i,i=[T,SS,STST]));

                          11/4, 5/2, 3

>
```

Wir erhalten also

$$\tfrac{45}{4} - \alpha\left(-i\rho^*_{\mathfrak{T}}(S)\right) - \alpha\left(\left(-\rho^*_{\mathfrak{T}}(ST)\right)^{-1}\right) - \alpha(\rho^*_{\mathfrak{T}}(T)) = \tfrac{45}{4} - \tfrac{11}{4} - \tfrac{5}{2} - 3 = 3$$

wie behauptet. Damit ist Proposition 2.10 bewiesen.

Die Eisensteinreihe zu $-\frac{1}{2}e_{(10)}$ (Seite 72)

Wir suchen neun Linearkombinationen

$$f_{\mathfrak{t}} = \sum_{\substack{c,d\in\{0,\ldots,3\}\\ \gcd(c,d,4)=1}} f_{\mathfrak{t},c,d}G(\,.\,;c,d), \quad f_{\mathfrak{t},c,d}\in\mathbb{C}$$

der primitiven $G(\,.\,;c,d)$, sodaß $f=(f_{\mathfrak{t}})_{\mathfrak{t}\in\mathfrak{T}}$ eine holomorphe elliptische Modulform zur reduzierten Weil-Darstellung $\rho^*_{\mathfrak{T}}$ mit

$$\lim_{\tau\to i\infty} f(\tau) = -\tfrac{1}{2}e_{(10)}$$

ist. Dazu müssen wir das folgende lineare Gleichungssystem für die $f_{\mathfrak{t},c,d}$ lösen (siehe Seite 72):

$$\begin{aligned}
f_{(10),0,1} &= -\tfrac{16}{\pi^3} && \\
f_{\mathfrak{t},0,1} &= 0 && \text{für } \mathfrak{t}\neq(10)\\
f_{\mathfrak{t},c,d-c} &= e^{2\pi i\,\mathrm{q}(\mathfrak{t})}f_{\mathfrak{t},c,d} && \text{falls } (c,d-c)\in\mathcal{E}\\
-f_{\mathfrak{t},-c,-d+c} &= e^{2\pi i\,\mathrm{q}(\mathfrak{t})}f_{\mathfrak{t},c,d} && \text{falls } (c,d-c)\notin\mathcal{E}\\
f_{\mathfrak{t},-d,c} &= \tfrac{-i}{32}\sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} E(\mathfrak{s},\mathfrak{t})f_{\mathfrak{s},c,d} && \text{falls } (-d,c)\in\mathcal{E}\\
-f_{\mathfrak{t},d,-c} &= \tfrac{-i}{32}\sum_{\mathfrak{s}\in\mathfrak{T}} E(\mathfrak{s},\mathfrak{t})f_{\mathfrak{s},c,d} && \text{falls } (-d,c)\notin\mathcal{E}
\end{aligned}$$

wobei $\mathcal{E}=\{(0,1),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,1)\}$ und $E(\mathfrak{s},\mathfrak{t})=\sum_{\alpha\in\mathfrak{t}} e^{2\pi i\langle\alpha,\beta\rangle}$ (siehe Seite 55).

Wir indizieren die $(c,d)\in\mathcal{E}$, indem wir eine Tabelle `cdtab` definieren und eine Prozedur schreiben, die zu gegebenem (c,d) den Index liefert falls $(c,d)\in\mathcal{E}$ und sonst den negativen Index von $(-c,-d)$ mod 4:

```
> cdtab:=table(['0,1'=1,'1,0'=2,'1,1'=3,'1,2'=4,'1,3'=5,'2,1'=6]):
> index:=proc(i,c,d)
> local j:
> if assigned(cdtab[c,d]) then
>  j:=6*(i-1)+cdtab[c,d]:
> else
>  j:=-6*(i-1)-cdtab[-c mod 4,-d mod 4]:
> fi:
> RETURN(j);
> end:
```

Damit können wir die Gleichungen in den Variablen `ftcd[i]` definieren:

```
> ftcd:=vector(54):
> gl:=[ftcd[index(1,0,1)]=-16/Pi^3]:
> for i from 2 to 9 do
>  g:=ftcd[index(i,0,1)]=0:
>  gl:=[op(gl),g]:
> od:
> for i to 9 do
>  for j in indices(cdtab) do
>   i0:=index(i,j[1],j[2]):
>   i1:=index(i,j[1],j[2]-j[1] mod 4):
>   i2:=index(i,-j[2] mod 4,j[1]):
>   g1:=sign(i1)*ftcd[abs(i1)]=T[i,i]*ftcd[i0]:
>   g2:=sign(i2)*ftcd[abs(i2)]=
>       sum(S[i,'k']*ftcd[index('k',j[1],j[2])],'k'=1..9):
>   gl:=[op(gl),g1,g2]:
> od:od:
```

Wir wandeln die Gleichungen in ein System der Form $Ax = b$ um, welches wir dann lösen.

```
> A:=genmatrix(gl,convert(ftcd,list),'b'):
> f:=linsolve(A,b):
> #evalm(f);
```

Um Nenner zu vermeiden, multiplizieren wir die Lösung mit $2\pi^3$ und schreiben die Koeffizienten zur besseren Übersicht in eine Matrix `G`, deren i,j-ter Eintrag der Koeffizient zum i-ten Typ und j-ten (c, d)-Paar in $\mathcal{E}$ (indiziert wie in `typtab` bzw. `cdtab`) ist.

```
> g:=scalarmul(f,Pi^3*2):
> G:=matrix(9,6):
> for i from 1 to 9 do
>  for j in indices(cdtab) do
>   i0:=index(i,j[1],j[2]):
>   G[i,cdtab[j[1],j[2]]]:=g[i0];
>  od:
> od:
> evalm(G);
```

```
[-32      -I        -I        -I        -I        0]
[                                                  ]
[ 0    -15 I     -15 I     -15 I     -15 I       0]
[                                                  ]
[ 0     -6 I      6 I       -6 I      6 I       48]
[                                                  ]
[ 0    -10 I      10 I      -10 I      10 I     -80]
[                                                  ]
```

```
[  0    -32 I      -32       32 I       32        0]
[                                                  ]
[  0    -240 I    -240 I    -240 I    -240 I      0]
[                                                  ]
[  0    -240 I     240      240 I      -240       0]
[                                                  ]
[  0    -240 I    240 I     -240 I    240 I       0]
[                                                  ]
[  0    -240 I     -240     240 I      240        0]

>
```

A.3 Zum Abschnitt 3.3 Theta-Reihen

Wir bestimmen hier die Fourierkoeffizienten

$$A(2^{d_2-1}e_4) = \begin{cases} \sum_{m=0}^{3} (-1)^m c_{\frac{m}{2}e_1+\frac{1}{2}e_4} + 2ic_{\frac{1}{2}e_1+e4} & \text{für } d_2 = 1 \\ \sum_{m=0}^{3} c_{\frac{m}{2}e_1+\frac{1}{2}e_4} + 2ic_{\frac{1}{2}e_1} & \text{für } d_2 \geq 2 \end{cases}$$

für die Reihe θ_9 in der Spitze $[a], a = 2e_1$ mit $a' = \frac{1}{2}e_2$. Dazu berechnen wir die entsprechenden Koeffizienten des Lifts zum „Basisinput“ $c_9^1 \in V_9$. Die Koeffizienten von θ_9 sind dann ein festes Vielfaches von diesen. Dieser Faktor wird aus einem festen Koeffizienten der übersetzten Reihe θ_9 bestimmt.

Die benötigten Inputkoordinaten $c_{*e_1+*e_4}$ stehen in der vorletzten Zeile der Matrix `oo` (s. A.1, S.101f). Wir entnehmen

$$c_{\frac{1}{2}e_1+\frac{1}{2}e_4} = c_{\frac{3}{2}e_1+\frac{1}{2}e_4} = c_{\frac{1}{2}e_1+e_4} = c_{\frac{1}{2}e_1} = 0$$

$$c_{\frac{1}{2}e_4} = c_{e_1+\frac{1}{2}e_4} = 1$$

und erhalten

$$A(e_4) = 2 \qquad \text{und} \qquad A(2^{d_2-1}e_4) = 2 \quad \text{für } d_2 \geq 2.$$

Der e_4-Koeffizient von θ_9 ist $2 \cdot \#\left\{(g_1, g_2) \in \mathbb{Z}^2; g_1^2 + g_2^2 = 1\right\} = 8$. Damit ist $\theta_9 = 4f_9^1$, wobei f_9^1 der Lift von c_9^1 ist. Also ist

$$A(2^{d_2-1}e_4) = 8 \quad \text{für } d_2 \geq 1$$

für θ_9.

A.4 Zum Abschnitt 4.3 Quadrate

Wir berechnen den Charakter der Darstellung aus Lemma 4.20. Die Konjugationsklassen (bzw. Repräsentanten davon) und die Charaktertafel von S_6 liefert zum Beispiel `gap` (die Reihenfolge der Spalten der Charaktertafel entspricht dabei der Reihenfolge der (Vertreter der) Konjugationsklassen in `S6.ConjugacyClasses`):

```
gap> S6:=SymmetricGroup(6);;S6.name:="S6";;
gap> S6.ConjugacyClasses:=ConjugacyClasses(S6);
[ ConjugacyClass( S6, () ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2)(3,4) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2)(3,4)(5,6) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2,3) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2,3)(4,5) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2,3)(4,5,6) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2,3,4) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2,3,4)(5,6) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2,3,4,5) ),
  ConjugacyClass( S6, (1,2,3,4,5,6) ) ]
gap> DisplayCharTable(CharTable(S6));
S6

      2  4  4  4  4  1  1  1  3  3  .  1
      3  2  1  .  1  2  1  2  .  .  .  1
      5  1  .  .  .  .  .  .  .  .  1  .

        1a 2a 2b 2c 3a 6a 3b 4a 4b 5a 6b
     2P 1a 1a 1a 1a 3a 3a 3b 2b 2b 5a 3b
     3P 1a 2a 2b 2c 1a 2a 1a 4a 4b 5a 2c
     5P 1a 2a 2b 2c 3a 6a 3b 4a 4b 1a 6b

X.1      1  1  1  1  1  1  1  1  1  1  1
X.2      1 -1  1 -1  1 -1  1 -1  1  1 -1
X.3      5  1  1 -3 -1  1  2 -1 -1  .  .
X.4      5 -1  1  3 -1 -1  2  1 -1  .  .
X.5      5 -3  1  1  2  . -1 -1 -1  .  1
X.6      5  3  1 -1  2  . -1  1 -1  . -1
X.7      9 -3  1 -3  .  .  .  1  1 -1  .
X.8      9  3  1  3  .  .  . -1  1 -1  .
X.9     10 -2 -2  2  1  1  1  .  .  . -1
X.10    10  2 -2 -2  1 -1  1  .  .  .  1
X.11    16  .  .  . -2  . -2  .  .  1  .

gap>
```

Zunächst brauchen wir eine Routine `orthop`, welche die Operation einer orthogonalen Transformation $\gamma \in \mathrm{O}^+(\mathsf{M})$ (bzw. `G`) auf dem Inputraum als 20×20-Matrix bezüglich der Basis, die aus den Zeilen von `oo` besteht, berechnet. Dazu schreiben wir die Basisvektoren als Spalten (`A`) und eine Prozedur `Gc`, die das Bild $\gamma(c)$ eines Inputvektors c bzw. `c` unter der Transformation γ bzw. `G` erzeugt.

```
> A:=transpose(oo):
> Gc:=proc(G,c)
```

```
>  local k,g,d:
>  d:=[]:
>  for k from 1 to nS do
>   g:=convert(ga(G,S[k]),list):
>   if member(g,S,'j') then d:=[op(d),c[j]]:
>   else member(minusa(g),S,'j'):d:=[op(d),-c[j]]:
>   fi:
>  od:
> RETURN(d):
> end:
```

Damit können wir die 20×20-Matrix erzeugen, indem wir für jede Spalte `c` von `A` das Gleichungssystem $\mathtt{A}x = \mathtt{Gc(G,c)}$ lösen.

```
> orthop:=proc(G)
>  local B,i,c,d:
>  B:=NULL:
>  for i from 1 to 20 do
>   c:=col(A,i):
>   d:=Gc(G,c):
>   B:=augment(B,d):
>  od:
>  B:=linsolve(A,B):
>  RETURN(B):
> end:
```

Mit Hilfe der Prozedur `s6op` können wir die 10×10-Darstellungsmatrix `S` der Operation der $\Gamma_{\mathtt{N}}$-Klasse von γ auf $\mathbb{C}^{10}$ aus der 20×20-Matrix `G` berechnen: Das $([\frac{i}{2}]+1, [\frac{j}{2}]+1) = (\mathtt{ii}, \mathtt{jj})$-Element von `S` ist das Quadrat von $\mathtt{G[j,i]+I*G[j+1,i]} = \mathtt{g}$ (d. h. 0 für $\theta_{\mathtt{ii}} \circ \gamma \notin \mathbb{C}\theta_{\mathtt{jj}}$), denn wie oben (am Ende von A.1) gesehen ist der Lift der j+1-ten Spalte von `A` das i-fache des Lifts der j-ten Spalte für ungerade j.

```
> s6op:=proc(G)
>  local S,g,i,ii,j,jj:
>  S:=array(sparse,1..10,1..10):
>  for i from 1 by 2 to 19 do
>   ii:=iquo(i,2)+1:
>   for j from 1 by 2 to 19 do
>    jj:=iquo(j,2)+1;
>    g:=G[j,i]+I*G[j+1,i]:
>    if g<>0 then
>      S[ii,jj]:=g*g:
>    fi:
> od:od:
> RETURN(S):
> end:
```

Repräsentanten der Erzeuger $(i, i+1) \in S_6$ sind in Satz 1.18 gegeben. Diese erzeugen wir als Matrizen `T1` bis `T5`.

```
> eichx:=proc(u,v,x)
>  local w;
>  w:=matadd(x,matadd(scalarmul(v,bi(x,u)),
>                     scalarmul(u,bi(x,v)-q(v)*bi(x,u)),-1,1)):
>  RETURN(w);
> end:
> eich:=proc(u,v)
>  local E,x,i,j;
>  E:=NULL:x:=vector(6):
>  for i from 1 to 6 do
>   for j from 1 to 6 do x[j]:=0: od:
>   x[i]:=1:
>   x:=eichx(u,v,x):
>   E:=augment(E,x):
>  od:
>  RETURN(E);
> end:
>
> for i to 6 do
>  e.i:=array(sparse,1..6):
>  e.i[i]:=1:
> od:
> T1:=eich(e1,e3):
> T2:=eich(e2,e4):
> T4:=eich(e2,e3):
> T5:=eich(e1,e4):
> T3:=multiply(T1,T5,eich(e1,e5)):
> #print(seq(T.i,i=1..5));
```

Damit sind orthogonale Vertreter der (nichttrivialen) Konjugationsklassen

```
> C2:=T1:
> C3:=multiply(T1,T3):
> C4:=multiply(T1,T3,T5):
> C5:=multiply(T1,T2):
> C6:=multiply(T1,T2,T4):
> C7:=multiply(T1,T2,T4,T5):
> C8:=multiply(T1,T2,T3):
> C9:=multiply(T1,T2,T3,T5):
> C10:=multiply(T1,T2,T3,T4):
> C11:=multiply(T1,T2,T3,T4,T5):
> #print(seq(C.i,i=2..11));
```

Jetzt können wir den Charakter der Darstellung berechnen: Wir erzeugen für jede(n Repräsentanten `C.i` der) Konjugationsklasse(n) zunächst die 20×20-Matrix und dann die 10×10-Matrix und berechnen ihre Spur. (Wir müßten dies eigentlich für die Inversen der `C.i` berechnen, in symmetrischen Gruppen sind aber die Elemente konjugiert zu ihren Inversen.)

```
> for i from 2 to 11 do
>  OO.i:=orthop(C.i):
>  #print(i,OO.i);
>  S6.i:=s6op(OO.i):
>  #print(i,S6.i,trace(S6.i));
>  #print(i,trace(S6.i));
> od:
> print(seq(trace(S6.i),i=2..11));

                  -4, 2, 4, 1, -1, 1, 0, -2, 0, 1

>
```

Durch Vergleich mit der Charaktertabelle oben erhalten wir, daß dieser Charakter die Summe von zwei Charakteren zu fünfdimensionalen irreduziblen Darstellungen ist (nämlich Summe des vierten und fünften Charakters aus obiger Charaktertabelle). Damit ist Lemma 4.20 bewiesen.

Literaturverzeichnis

[Bo1] R. E. Borcherds, Automorphic forms with singularities on Grassmannians, Invent. Math. 132, No.3, 491-562 (1998)

[Bo2] R. E. Borcherds, The Gross-Kohnen-Zagier theorem in higher dimensions, Duke Math. J. 97, No.2, 219-233 (1999)

[Fr1] E. Freitag, Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper, Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss., Math.-Naturw. Kl. 1967, 1. Abh. 1-50 (1967)

[Fr2] E. Freitag, Siegelsche Modulfunktionen, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1983

[Fr3] E. Freitag, Some modular forms related to cubic surfaces, Preprint (1999) `http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~t91/`

[Fr4] E. Freitag, Modular forms on the orthogonal group, Vorlesungsskript (2000) `http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~t91/`

[F-H] E. Freitag, C. F. Hermann, Some modular varieties of low dimension, Preprint (1998) erscheint in den Advances of Math., `http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~t91/`

[Hec] E. Hecke, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. Bd. 5, 199-224, (1927)
auch in: Erich Hecke Mathematische Werke, Göttingen Vandenhoeck & Ruprecht (1959)

[Her] C. F. Hermann, Some modular varieties related to $\mathbb{P}^4$, Abelian varieties, ed. by Barth/Hulek/Lange, Walter de Gruyter, Berlin New York 1995

[Ig1] J. Igusa, On the graded ring of theta-constants, Am. J. Math. 86, 219-246 (1964)

[Ig2] J. Igusa, On the ring of modular forms of degree two over $\mathbb{Z}$, Am. J. Math. 101, 149-183 (1979)

[Mat] K. Matsumoto, Theta functions on the bounded symmetric domain of type $I_{2,2}$ and the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces, Math. Ann. 295, 383-409 (1993)

[Yos] M. Yoshida, Hypergeometric Functions, My Love, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1997