Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Diplom-Mathematiker Michael Bundschuh
aus Freiburg i. Br.

Heidelberg 2001

Über die Endlichkeit der Klassenzahl gerader Gitter der Signatur $(2, n)$ mit einfachem Kontrollraum

Gutachter:	Prof. Dr. Eberhard Freitag,	Universität Heidelberg
	Prof. Dr. Winfried Kohnen,	Universität Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung: 13.2.2002

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Den bezüglich eines quadratischen Raumes (V,q) der Signatur $(2,n)$ definierten orthogonalen Gruppen $O(2,n)$ sind die hermiteschen symmetrischen Bereiche des Typs IV_n zugeordnet. Diese besitzen eine konkrete Realisierung als Tubengebiet, das wir die orthogonale Halbebene $\mathcal{H}_n$ nennen. Analog zum Fall gewöhnlicher elliptischer Modulformen, der als Spezialfall $n=1$ in dieser Serie enthalten ist, kann man die Quotienten $\mathcal{H}_n/\Gamma$ nach gewissen arithmetischen Untergruppen $\Gamma \subset O(2,n)$ betrachten. Solche Untergruppen erhält man im wesentlichen in Form der Automorphismengruppen von in V eingebetteten Gittern L. Nach der Kompaktifizierungstheorie von Baily und Borel sind die Quotienten $\mathcal{H}_n/\Gamma$ quasiprojektive algebraische Varietäten.

Die orthogonale Halbebene $\mathcal{H}_n$ kann als offene Teilmenge der Nullquadrik im der Komplexifizierung von V zugeordneten projektiven Raum aufgefaßt werden: Ist (V,q) ein quadratischer Raum der Signatur $(2,n)$, so können wir die q zugeordnete Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ $\mathbb{C}$-bilinear auf die Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ fortsetzen. Die Nullquadrik $\mathcal{N}$ ist dann gegeben als die Menge aller $[\mathfrak{z}] \in P(V_{\mathbb{C}})$ mit $\langle\mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle = 0$. Die Bedingung $\langle\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}\rangle > 0$ zeichnet einen offenen, aus zwei Zusammenhangskomponenten bestehenden Teil der Nullquadrik aus. Wir wählen eine dieser Komponenten aus und bezeichnen sie mit $\mathcal{H}_n$.

Betrachtet man nun im projektiven Raum $P(V_{\mathbb{C}})$ orthogonale Komplemente von Vektoren $\mathfrak{v} \in V$ mit negativer Norm $q(\mathfrak{v})$, so sind die Schnitte $\mathcal{H}_n \cap \mathfrak{v}^{\perp}$ nicht leer; sie sind sogar biholomorph äquivalent zu orthogonalen Halbebenen $\mathcal{H}_{n-1}$ und damit irreduzible abgeschlossene analytische Teilmengen von $\mathcal{H}_n$ der Kodimension 1. Indem wir diese mit der Multiplizität 1 versehen, erhalten wir Divisoren auf der Halbebene $\mathcal{H}_n$, die durch Einbettung $(n-1)$-dimensionaler Halbebenen entstehen. Wir nennen diese speziellen Divisoren sowie deren Linearkombinationen Heegnerdivisoren. Ist der Vektor $\mathfrak{v}$ rational bezüglich des Gitters L, so liefert die beschriebene Konstruktion (algebraische) Divisoren im Quotienten $\mathcal{H}_n/\Gamma$ und in dessen Kompaktifizierung.

Will man die Frage untersuchen, welche Heegnerdivisoren als Null- und Polstellendivisoren meromorpher Modulformen auf $\mathcal{H}_n$ vorkommen, so liefert die von Borcherds 1998/1999 entwickelte Theorie eine Teilantwort. Diese Theorie besteht aus zwei Komponenten. Der multiplikative Bocherdslift ordnet einem Input F eine Modulform $B(F)$ zur orthogonalen Gruppe zu. Dabei ist ein solcher Input eine vektorwertige Modulform vom meist negativen Gewicht $1-\frac{n}{2}$, die auf der gewöhnlichen oberen Halbebene $\mathbb{H}$ holomorph ist, in der Spitze $i\infty$ jedoch einen Pol haben kann. An die Fourierkoeffizienten eines Inputs werden zusätzlich noch Ganzheitsbedingungen gestellt. Der Null- und Polstellendivisor des Lifts $B(F)$ ist ein Heegnerdivisor, dessen genaue Gestalt durch die Fourierkoeffizienten des zu liftenden Inputs F bestimmt ist. Wir erhalten also als Bilder dieser Liftungsabbildung, die wir Borcherdsprodukte nennen wollen, die gesuchten Objekte.

Den zweiten Teil der Theorie bildet der Dualitätssatz. Er gibt genaue Auskunft über die beim multiplikativen Bocherdslift möglichen Inputs. Damit erhalten wir insbesondere

Informationen über die Fourierkoeffizienten solcher Inputs und damit über Heegnerdivisoren, die durch Borcherdsprodukte realisierbar sind. Nach einem Resultat von Bruinier ist unter zusätzlichen Voraussetzungen jede Modulform, deren Divisor Heegnerdivisor ist, bereits ein Borcherdsprodukt. In diesem Fall ist die Frage, welche Heegnerdivisoren von Modulformen herkommen, mit der Bestimmung der möglichen Inputs äquivalent.

Die entscheidende Größe bei der Formulierung des Dualitätssatzes ist der sogenannte Kontrollraum $\mathscr{K}_L$, der dem Gitter L, bezüglich dem die Modulgruppe Γ definiert ist, zugeordnet werden kann. Dabei handelt es sich um den Vektorraum vektorwertiger holomorpher Modulformen des (positiven) Gewichts $1 + \frac{n}{2}$, die sich bezüglich der metaplektischen Gruppe $Mp_2(\mathbb{Z})$ mit der zur Weildarstellung des Gitters L dualen Darstellung transformieren. Unter der metaplektischen Gruppe verstehen wir eine zweiblättrige Überlagerung der gewöhnlichen Modulgruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$, die es erlaubt, auch Modulformen halbganzer Gewichte zu betrachten. Spitzenformen in diesem Kontrollraum sorgen für Heegnerdivisoren, die nicht von Borcherdsprodukten realisiert werden; gibt es keine nichttriviale Spitzenform im Kontrollraum $\mathscr{K}_L$, so ist jeder Heegnerdivisor der Divisor eines Borcherdsproduktes, insbesondere also der einer orthogonalen Modulform.

Die Frage nach der Existenz von Spitzenformen im Kontrollraum eines geraden Gitters ist also entscheidend für die Realisierbarkeit von Heegnerdivisoren durch Modulformen. Gitter, die nur die triviale Spitzenform in ihrem Kontrollraum besitzen, sowie deren Kontrollräume selbst, nennen wir daher einfach. Ziel der vorliegenden Arbeit und gleichzeitig deren Hauptresultat ist der Nachweis, daß es bis auf Isomorphie unter milden zusätzlichen Voraussetzungen nur endlich viele einfache Gitter gibt. Um zu diesem Ziel zu gelangen, werden drei grundsätzlich voneinander verschiedene Methoden angewendet.

Zunächst kann man durch Abschätzung einer Dimensionsformel für den Kontrollraum, die auf dem Satz von Riemann-Roch basiert, die Dimension von einfachen Gittern beschränken. Man findet in der Tat eine scharfe Schranke: Einfache gerade Gitter der Signatur $(2, n)$ haben höchstens Dimension 28, und das 28-dimensionale Gitter $H \oplus H \oplus \Lambda_{24}$ hat einen einfachen Kontrollraum. Mit der gleichen Methode wird bewiesen, daß Gitter vorgegebener Dimension, die größer oder gleich 15 ist, stets nichttriviale Spitzenformen in ihrem Kontrollraum zulassen, wenn ihre Determinante hinreichend groß ist.

Die zweite eingesetzte Methode kommt unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß das Gitter über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen abspaltet, zur Anwendung und zeigt für jede Dimension größer als vier, daß Gitter mit dieser Eigenschaft und großer Determinante nicht einfach sind. Dabei wird die Behauptung durch einen indirekten Schluß gezeigt, der direkt aus dem Dualitätssatz von Borcherds erwächst. Eine Konsequenz aus letzterem ist nämlich, daß die Fourierkoeffizienten einer bestimmten Eisensteinreihe $E_0 \in \mathscr{K}_L$ bis auf einen konstanten Faktor gerade die Gewichte ausgezeichneter holomorpher Borcherdsprodukte sind, falls Inputs mit den korrespondierenden Eingangsdaten existieren. Nehmen wir an, daß der Kontrollraum außer der Null keine Spitzenform besitzt, so existieren nach dem Dualitätssatz Inputs zu allen Eingangsdaten, die Fourierkoeffizienten von E_0 sind also tatsächlich konstante Vielfache von Gewichten holomorpher Modulformen zu orthogonalen Gruppen. Der Satz über singuläre Gewichte, der wegen der vorausgesetzten $\mathbb{Q}$-Struktur des Gitters gilt, beschränkt solche Gewichte aber nach unten: Eine holomorphe Modulform auf $\mathcal{H}_n$ mit einem Gewicht, das kleiner als $n/2-1$ ist, muß bereits identisch verschwinden. Wir erhalten nun den gewünschten Widerspruch zu unserer Annahme, indem wir zeigen, daß es zu jedem Gitter mit hinreichend großer Determinante einen geeigneten Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe E_0 gibt, so daß das dadurch codierte Gewicht unter diese Schranke fällt.

Diese Argumentation verwendet nur das Gewicht der in Rede stehenden Modulform, nicht aber die Tatsache, daß es sich um ein Borcherdsprodukt handelt. Unter der ohnehin als gültig vorausgesetzten Bedingung an die $\mathbb{Q}$-Struktur des Gitters besagen die bereits erwähnten Resultate von Bruinier weiter, daß eine beliebige Modulform, deren Divisor ein Heegnerdivisor ist, ebenfalls das durch die Koeffizienten von E_0 bestimmte Gewicht hat, auch wenn sie kein Borcherdsprodukt sein sollte. Wir erhalten daher die konkreten Daten eines Divisors, der nicht durch irgendwelche Modulformen realisiert werden kann. Da die ermittelte Schranke für die Determinante eines Gitters, oberhalb derer der angegebene Schluß durchführbar ist, schließlich mit der Dimension fällt, liefert dies für fast alle Isomorphieklassen von Gittern, die den Voraussetzungen genügen, die Daten eines nicht durch Modulformen realisierbaren Heegnerdivisors.

Der indirekte Schluß über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe E_0 hat zwei Nachteile: Zum einen liefert er kaum brauchbare numerische Ergebnisse, zum anderen bleiben in Dimensionen bis 6 einige Fälle unberücksichtigt. Daher wird als dritte eingesetzte Methode eine explizite Konstruktion nichttrivialer Spitzenformen im Kontrollraum angegeben, die für gerade Gitter mit quadratfreier Stufe durchführbar ist. Dies bedeutet eine starke Einschränkung; insbesondere sind die Dimensionen solcher Gitter stets gerade. Immerhin werden aber beispielsweise die Fälle aller Gitter erfaßt, deren Diskriminantengruppen Vektorräume über endlichen Körpern $\mathbb{F}_p$ mit ungeraden Primzahlen p sind.

Die Konstruktion, die diese dritte Methode darstellt, basiert auf der Beobachtung, daß die Einschränkung der Weildarstellung des Gitters L auf die Hecke-Gruppe $\Gamma_0(N)$ bzw. deren Urbild in $Mp_2(\mathbb{Z})$, wobei N die Stufe des Gitters ist, einen kanonischen simultanen Eigenvektor $\mathfrak{e}_0$ besitzt. Das Produkt einer elliptischen Modulform auf $\Gamma_0(N)$ zu geeignetem Charakter mit diesem Eigenvektor $\mathfrak{e}_0$ ist daher eine vektorwertige Modulform bezüglich $\Gamma_0(N)$, die durch Symmetrisierung zu einer vollinvarianten Modulform gemacht werden kann. Spitzenformen gehen dabei in Spitzenformen über.

Die Untersuchung der Abbildungseigenschaften des beschriebenen Symmetrisierungsoperators unter Benutzung der Theorie der Alt- und Neuformen auf der Gruppe $\Gamma_0(N)$ zeigt die Injektivität auf einem gewissen, dem Gitter zugeordneten Raum $S_k^{\epsilon_1\cdots\epsilon_r}(N,\chi_L)$, der die klassischen Räume $S_k^+(p,(\frac{\cdot}{p}))$ und $S_k^-(p,(\frac{\cdot}{p}))$ verallgemeinert. Mit Hilfe des Begriffes der CM-Form kann man schließlich zeigen, daß bereits bei relativ kleinen (quadratfreien) Stufen und damit auch kleinen Determinanten der beteiligten Gitter stets Modulformen existieren, die durch Symmetrisierung zu nichttrivialen Spitzenformen im Kontrollraum führen. Diejenigen Stufen, bei denen dies nicht möglich ist, lassen sich konkret berechnen und sind in Form von Tabellen im Anhang angegeben. Im Spezialfall gerader Gitter, deren Determinante eine ungerade Primzahl ist, liefert die Symmetrisierung einen Isomorphismus zwischen dem Raum der Spitzenformen im Kontrollraum und dem klassischen Raum $S_k^+(p,(\frac{\cdot}{p}))$ oder $S_k^-(p,(\frac{\cdot}{p}))$, je nach der Gestalt des Gitters. Die angegebene Symmetrisierungsabbildung verallgemeinert somit den in [Br-Bu] angegebenen Isomorphismus.

Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit stellt die benötigten Grundtatsachen über Gitter, vektorwertige Modulformen sowie über Modulformen zu orthogonalen Gruppen zusammen. Es dient gewissermaßen als Wörterbuch und kann von Lesern, die mit der Thematik vertraut sind, übersprungen werden. Im zweiten Kapitel wird die Theorie von Borcherds, genauer der multiplikative Lift und der Dualitätssatz, dargestellt. Die Zusammenhänge werden anhand eines Beispielgitters illustriert. Daran schließen sich die Konsequenzen, die sich aus der Auswertung der auf dem Satz von Riemann-Roch basierenden Dimensionsformel ergeben, an; sie bilden den zweiten Teil dieses Kapitels und gleichzeitig die ersten eigenen Resultate.

Das dritte Kapitel ist der Durchführung des oben beschriebenen indirekten Schlusses über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe E_0 gewidmet. Zunächst wird der Satz über die singulären Gewichte formuliert. Dieser ist zwar wohlbekannt, in der benötigten Allgemeinheit jedoch nicht in der Literatur aufgeführt, weswegen ein vollständiger Beweis angegeben ist. Anschließend wird das zu untersuchende Gitter in geeigneter Weise koordinatisiert und ein Testvektor ausgewählt. Da als bestimmende Größe in die Fourierkoeffizienten von E_0 gewisse Kongruenzlösungsanzahlen der quadratischen Form modulo Primzahlpotenzen eingehen, werden Abschätzungen für solche Anzahlen in allgemeiner Form hergeleitet. Bei deren Anwendung auf die konkrete Situation spielen schlechte Primstellen die entscheidende Rolle; für diese reichen die allgemein bekannten Abschätzungen nicht aus, die daher unter Ausnutzung der speziellen Koordinatisierung verbessert werden müssen. Dies ergibt schließlich den Beweis von Theorem 3.4.2, das das Hauptresultat der vorliegenden Arbeit ist.

Die explizite Konstruktion von Spitzenformen im Kontrollraum durch Symmetrisierung wird im vierten Kapitel durchgeführt. Zunächst wird für Gitter mit quadratfreier Stufe der Symmetrisierungsoperator definiert und so weit wie möglich evaluiert. Daran schließt sich der Nachweis der Injektivität auf dem dem Gitter zugeordneten Raum $S_k^{\epsilon_1 \cdots \epsilon_r}(N, \chi_L)$ an. Dieser besteht aus Neuformen, deren Fourierkoeffizienten a_n für n aus bestimmten arithmetischen Progressionen verschwinden. Ferner wird das Bild des Symmetrisierungsoperators im Kontrollraum so weit wie möglich beschrieben. Das abschließende fünfte Kapitel behandelt die Frage nach der Trivialität der Vorzeichenräume $S_k^{\epsilon_1 \cdots \epsilon_r}(N, \chi_L)$. Es stellt sich heraus, daß sie für hinreichend große Stufe N stets nichttriviale Elemente enthalten. Wendet man den Symmetrisierungsoperator auf diese an, so erhält man insbesondere nichttriviale Spitzenformen im Kontrollraum, die entsprechenden Gitter sind also nicht einfach. Im Gegensatz zur indirekten Schlußweise eignen sich die erreichten Dimensionsformeln für numerische Berechnungen, deren Ergebnisse im Anhang A aufgeführt sind.

Mein Dank gilt in erster Linie meinem Betreuer, Herrn Prof. Dr. E. Freitag. Ohne seinen stets kompetenten Rat und die erhellenden Diskussionen wäre diese Arbeit nicht zustande gekommen. Dankbar bin ich auch für fruchtbare Impulse, die aus Diskussionen mit Herrn Dr. J.-H. Bruinier hervorgegangen sind. Ferner danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die finanzielle Unterstützung im Rahmen der Forschergruppe Arithmetik sowie den zahlreichen Korrekturlesern des Skriptums.

Heidelberg, im Oktober 2001

Kapitel 1

Grundlagen

Das vorliegende einleitende Kapitel stellt die für die Formulierung und die Bearbeitung der zugrundeliegenden Fragestellung benötigten Begriffe und Sätze zur Verfügung. Es gliedert sich in Abschnitte über Gitter, vektorwertige Modulformen sowie Modulformen zu orthogonalen Gruppen. Zwischen diesen wird dann im zweiten Kapitel die Verbindung hergestellt. Da die meisten hier dargestellten Tatsachen bekannt sind, wird auf Beweise häufig verzichtet. Der Leser findet dann geeignete Referenzen.

1.1 Gitter und quadratische Formen

1.1.1 Quadratische Räume und Gitter

Wir beginnen mit der Definition von Gittern. Dabei stehen mehrere äquivalente Konzepte zur Wahl, die jeweils einen Aspekt in den Vordergrund stellen. Wir führen zunächst den Begriff des quadratischen Raumes ein. Als Referenzen beziehen wir uns auf die Monographien [Co-Sl], [Kne] und [Mart].

1.1.1 Definition. *Sei M ein endlich erzeugter freier Modul über dem Integritätsbereich R, und sei K der Quotientenkörper von R. Eine* ***quadratische Form*** *auf M ist eine Abbildung $q : M \to K$, die den folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$q(\alpha\mathfrak{v}) = \alpha^2 q(\mathfrak{v})$ für alle $\alpha \in R$ und $\mathfrak{v} \in M$.*
2. *Die Abbildung $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \mapsto \langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle := q(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) - q(\mathfrak{v}) - q(\mathfrak{w})$ ist R-bilinear.*

Die Abbildung $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \mapsto \langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle$ heißt die der quadratischen Form q zugeordnete ***Bilinearform****. Die quadratische Form heißt* ***nicht ausgeartet****, falls es zu jedem $\mathfrak{v} \neq 0$ ein $\mathfrak{w} \in M$ gibt mit $\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle \neq 0$.*

Es gilt stets $\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{v} \rangle = 2q(\mathfrak{v})$. Ist die Charakteristik von K ungleich 2, so ist eine quadratische Form bereits durch die ihr zugeordnete Bilinearform bestimmt.

1.1.2 Definition. *Ein endlich erzeugter freier Modul M über einem Integritätsbereich R mit einer nicht ausgearteten quadratischen Form q darauf heißt* ***quadratischer Raum über*** *R. Ist speziell $(K =)R = \mathbb{R}$ und M ein endlichdimensionaler Vektorraum, so sagen wir einfach* ***quadratischer Raum*** *oder auch* ***pseudoeuklidischer Vektorraum****. Ein* ***Gitter*** *ist ein quadratischer Raum über dem Grundring $\mathbb{Z}$ mit Werten in $\mathbb{Q}$.*

Eine bijektive lineare Abbildung quadratischer Räume heißt ***Isometrie****, falls sie die quadratischen Formen ineinander überführt. Eine Isometrie des quadratischen Raumes (M, q)*

in sich heißt eine ***orthogonale Abbildung****. Mit $O(M,q)$ wird die Gruppe aller orthogonalen Abbildungen des quadratischen Raumes (M,q) bezeichnet. Existiert eine Isometrie $(M,q) \to (N,\tilde{q})$, so heißen M und N isomorph.*

1.1.3 Definition. *Ein Gitter (L,q) heißt* **ganz***, falls die q zugeordnete Bilinearform auf L nur Werte in $\mathbb{Z}$ annimmt. Darüberhinaus heißt es* **gerade***, falls q selbst auf L nur ganzzahlige Werte hat.*

Aufgrund der Polarisationsformel $\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle = q(\mathfrak{v}+\mathfrak{w}) - q(\mathfrak{v}) - q(\mathfrak{w})$ sind gerade Gitter stets ganz; die Umkehrung hiervon gilt nicht. In dieser Arbeit auftretende Gitter sind fast immer gerade.

Nach einem bekannten Satz ist eine diskrete Untergruppe eines $\mathbb{R}$-Vektorraumes stets frei. Eine diskrete Untergruppe L eines quadratischen Raumes über $\mathbb{R}$ von maximalem Rang ist daher ein Gitter, wenn die quadratische Form auf L nur rationale Werte annimmt. Hiervon gilt auch die Umkehrung: Ist L ein freier, endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, so entsteht daraus durch Grundringerweiterung auf natürliche Weise der Vektorraum $V := L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Eine quadratische Form q auf L läßt sich eindeutig zu einer quadratischen Form auf V fortsetzen. Ist q nicht ausgeartet, so ist (V,q) ein quadratischer Raum und L eine diskrete Untergruppe maximalen Ranges von V. Man kann sich Gitter also stets eingebettet in einen bis auf Isomorphie eindeutig bestimmten quadratischen Raum vorstellen. Sie liefern dann den Begriff des rationalen Vektors.

1.1.4 Definition. *Sei $L \subset (V,q)$ ein Gitter. Den Raum $V_{\mathbb{Q}} := \mathbb{Q}L$ nennen wir den* ***von L erzeugten $\mathbb{Q}$-Vektorraum****. Zusammen mit der Einschränkung der quadratischen Form ist er ein quadratischer Raum über $\mathbb{Q}$. Elemente $\mathfrak{v} \in V_{\mathbb{Q}}$ heißen* ***rationale Vektoren****.*

Ist L ein Gitter im quadratischen Raum (V,q), so gibt es eine Basis $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_r\}$ von V mit $L = \sum_{i=1}^{r} \mathbb{Z}e_i$. Wir nennen dann $\mathcal{B}$ eine **Gitterbasis** von L und r die **Dimension** des Gitters. Unter der **Signatur** von L verstehen wir die Signatur des umgebenden quadratischen Raumes (V,q).

1.1.2 Gram-Matrizen quadratischer Formen

1.1.5 Definition. *Sei $L \subset (V,q)$ ein Gitter und $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_r\}$ eine Gitterbasis von L. Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die q zugeordnete Bilinearform. Die Matrix $A := A(L,\mathcal{B}) := (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j=1,\ldots,r}$ heißt* ***Gram-Matrix*** *von L bezüglich der Basis $\mathcal{B}$.*

Mit Hilfe der bezüglich einer Gitterbasis $\mathcal{B}$ gebildeten Gram-Matrix $A = A(L,\mathcal{B})$ eines Gitters $L \subset V$ können wir auf $\mathbb{R}^r$ eine quadratische Form definieren durch

$$q_A(x_1, \ldots, x_r)^t := \frac{1}{2}(x_1, \ldots, x_r)A(x_1, \ldots, x_r)^t.$$

Die von der Basis induzierte Koordinatenabbildung ist dann eine Isometrie $\varphi_{\mathcal{B}} : (V,q) \to (\mathbb{R}^r, q_A)$, die L in die Menge $\mathbb{Z}^r \subset \mathbb{R}^r$ der Punkte mit ganzzahligen Koeffizienten überführt. Wir erhalten also jedes Gitter, indem wir die Menge $\mathbb{Z}^r$ im Raum $(\mathbb{R}^r, q)$ mit variierenden quadratischen Formen q betrachten.

1.1.6 Lemma. *Zwei Gitter L und M der Dimension r sind genau dann isomorph, wenn es zu je zwei Gitterbasen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ von L und M ein $T \in Gl_r(\mathbb{Z})$ gibt mit*

$$A(M,\mathcal{C}) = T^t A(L,\mathcal{B}) T. \tag{1.1}$$

Insbesondere gilt die Relation (1.1) für bezüglich verschiedener Basen gebildete Gramsche Matrizen desselben Gitters. Die Determinante der Gram-Matrix hängt also nicht von der Auswahl der Basis ab.

1.1.7 Definition. *Sei L ein Gitter. Als* ***Determinante*** *von L bezeichnen wir die Determinante der Gram-Matrix von L bezüglich irgendeiner Basis und schreiben dafür $\det(L)$. Ist $|\det(L)| = 1$, so heißt das Gitter L* ***unimodular****.*

Eine quadratische Form auf einem Gitter L ist genau dann nicht ausgeartet, wenn seine Determinante nicht verschwindet. Somit definiert jede symmetrische invertierbare Matrix $A \in Gl_r(\mathbb{Q})$ ein Gitter $L = \mathbb{Z}^r \subset (\mathbb{R}^r, q_A)$. Die Isomorphieklassen von Gittern entsprechen umkehrbar eindeutig den symmetrischen invertierbaren Matrizen $A \in Gl_r(\mathbb{Q})$ modulo der Operation $A \mapsto T^tAT$ von $Gl_r(\mathbb{Z})$ darauf.

Ist L ein Gitter und A seine bezüglich irgendeiner Basis gebildete Gram-Matrix, dann ist L genau dann ganz, wenn $A = (a_{ij})_{i,j}$ nur ganze Einträge a_{ij} hat, und gerade, wenn zusätzlich die Diagonalelemente a_{ii} gerade sind. Diese Eigenschaften hängen nicht von der Auswahl der Basis ab. Wir können also fortan Gitter auf bequeme Weise durch Angabe der Gram-Matrix beschreiben. Dabei kontrollieren wir die elementarsten Eigenschaften durch die Beschaffenheit der Einträge. Wir werden dies vor allem nutzen, um konkrete Beispiele wie das folgende anzugeben.

1.1.8 Beispiel: *Ein Gitter mit der Gram-Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nennen wir die ***hyperbolische Ebene*** *und bezeichnen es kurz mit H. Es gilt $\det(A) = -1$, die hyperbolische Ebene ist folglich unimodular. Sie ist gerade und hat die Signatur $(1,1)$. Die zugeordnete Bilinearform auf $\mathbb{Z}^2$ ist gegeben durch $\langle (x_1, x_2)^t, (y_1, y_2)^t \rangle = x_1y_2 + x_2y_1$.*

1.1.3 Dualität, Determinante und Stufe

Dieser Abschnitt orientiert sich an der Monographie [Mart], in der diese Zusammenhänge in den §§ 1-3 ausführlich behandelt werden.

1.1.9 Definition. *Sei $L \subset (V, q)$ ein ganzes Gitter. Der Modul*

$$L' := \{\mathfrak{v} \in V_{\mathbb{Q}} \mid \langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle \in \mathbb{Z} \text{ für alle } \mathfrak{w} \in L\},$$

versehen mit der quadratischen Form q, heißt das zu L ***duale Gitter*** *L'.*

1.1.10 Lemma. *Ist $L \subset (V, q)$ ein ganzes Gitter, so ist L' ein Gitter von gleicher Dimension, welches L umfaßt. Nach Wahl einer Gitterbasis $\mathcal{B}$ wirkt die Gram-Matrix $A := A(L, \mathcal{B})$ in natürlicher Weise auf dem Vektorraum V. Dann ist $L' = A^{-1}(L)$, und A^{-1} ist eine Gram-Matrix für das duale Gitter L'.*

1.1.11 Definition. *Sei L ein ganzes Gitter. Die Faktorgruppe L'/L heißt* ***Diskriminantengruppe*** *von L. Wegen der Relation $L' = A^{-1}L$ aus Lemma 1.1.10 ist sie endlich und von der Ordnung $|\det(L)|$.*

Wendet man den Elementarteilersatz auf die beiden Gruppen L und L' an, so erhält man weitere Information über die Struktur dieser beiden Gitter:

1.1.12 Satz. *Es gibt eine angepaßte Basis von L', d.h. es gibt eine Basis $\{f_1, \ldots, f_r\}$ von L' und natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_r$ mit $d_i | d_{i+1}$ für $i = 1, \ldots, r-1$ und $d_1 \cdot \ldots \cdot d_r = |\det(L)|$, so daß $\{d_1 f_1, \ldots, d_r f_r\}$ eine Basis von L ist. Ein Repräsentantensystem der Diskriminantengruppe ist dann gegeben durch die $\mathbb{Z}$-Linearkombinationen $\sum_{i=1}^{r} t_i f_i$ mit $0 \leq t_i < d_i$ für alle i.*

1.1.13 Lemma. *Ist L ein ganzes Gitter, so ist die von der Bilinearform $\langle \cdot, \cdot \rangle$ induzierte Abbildung $L'/L \times L'/L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wohldefiniert. Ist L sogar gerade, so ist auch die von q induzierte Abbildung[1] $L'/L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wohldefiniert.*

1.1.14 Definition. *Sei L ein gerades Gitter. Die von der quadratischen Form induzierte Abbildung $L'/L \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ heißt **Diskriminantenform** von L.*

1.1.15 Definition. *Seien L ein gerades Gitter und L' sein Dual. Die kleinste natürliche Zahl N, für die $Nq(\gamma)$ ganz ist für alle $\gamma \in L'$, heißt **Stufe** des Gitters L.*

Bemerkung: Wegen Lemma 1.1.10 ist die Stufe die kleinste natürliche Zahl N, so daß die Matrix $N \cdot A^{-1}$ ganze und auf der Hauptdiagonalen sogar gerade Einträge hat. Da dann stets $\langle N\gamma, \delta \rangle$ ganz ist, ist NL' im Gitter L enthalten.

1.1.16 Lemma. *Seien N die Stufe und D die Determinante eines geraden Gitters L. Dann gilt $N \leq 2|D| \leq 2N^{\dim(L)}$. Ist D gerade, so ist N ein Teiler von $2D$, ansonsten sogar von D selbst. Ferner tritt jeder Primfaktor von D bereits in N auf.*

Beweis: Wegen $DL' \subset L$ ist für jedes $\gamma \in L'$ bereits $2Dq(\gamma) = \langle D\gamma, \gamma \rangle \in \mathbb{Z}$ und somit N ein Teiler von $2D$. Andererseits ist auch $D^2 q(\gamma) = q(D\gamma) \in \mathbb{Z}$ und daher N auch ein Teiler von D^2. Daraus folgt die Teilbarkeitsaussage sowie die erste Abschätzung $N \leq 2|D|$.
Aufgrund der vorigen Bemerkung ist $L' \subset \frac{1}{N}L$, also $L'/L \subset (\frac{1}{N}L)/L$ und somit

$$|L'/L| = |D| \leq N^{\dim(L)}.$$

Ist A die Gram-Matrix von L, so ist NA^{-1} ganz, und es gilt $ANA^{-1} = NE_{\dim(L)}$ und daher $D \det(NA^{-1}) = N^{\dim(L)}$. □

1.1.4 Konstruktionen für Gitter und Beispiele

Wie bereits gesehen, kann man Gitter durch Angabe einer Gram-Matrix der quadratischen Form beschreiben. Bei großen Dimensionen ist dies aber zu aufwendig und verdeckt unter Umständen weitere vorhandene Struktur. Deshalb geben wir einen Mechanismus an, um aus mehreren gegebenen Gittern neue zusammenzusetzen.

1.1.17 Definition. *Seien $L_1 \subset (V_1, q_1)$ und $L_2 \subset (V_2, q_2)$ Gitter. Als **orthogonale Summe** von L_1 und L_2 bezeichnen wir das Gitter $L_1 \oplus L_2 := L_1 + L_2$ im Raum $(V_1 \oplus V_2, q)$ mit der Form $q(\mathfrak{v}_1, \mathfrak{v}_2) = q_1(\mathfrak{v}_1) + q_2(\mathfrak{v}_2)$. Für $a \in \mathbb{Q}$ bezeichne $L_1(a)$ das Gitter $L_1(a) := L_1 \subset (V_1, aq_1)$.*

Es ist offensichtlich, daß $L_1 \oplus L_2$ wieder ein Gitter und die Konstruktion assoziativ ist. Somit sind auch allgemeine endliche orthogonale Summen von Gittern erklärt. Bis auf einen kanonischen Isomorphismus ist die Summenbildung kommutativ. Die umgebenden Vektorräume

[1] Für gerade Gitter ist diese Abbildung eine endliche quadratische Form in folgendem Sinne: L'/L ist endliche abelsche Gruppe, und q ist eine Abbildung mit Werten im $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, die $q(\alpha\mathfrak{v}) = \alpha^2 q(\mathfrak{v})$ erfüllt und so, daß die Funktion $(\mathfrak{v}, \mathfrak{w}) \mapsto q(\mathfrak{v} + \mathfrak{w}) - q(\mathfrak{v}) - q(\mathfrak{w})$ $\mathbb{Z}$-bilinear ist.

V_1 und V_2 sind orthogonal im üblichen Sinne. Ist L ganz oder gerade und a ganz, so gilt selbiges auch für das Gitter $L(a)$. Für positives a ist ferner $L(a)$ isomorph zu $\sqrt{a}L \subset (V, q)$.

Falls sich ein Gitter als orthogonale Summe $L = L_1 \oplus L_2$ mit Gittern L_1 und L_2 kleinerer Dimension schreiben läßt, so sagen wir, L spalte (über $\mathbb{Z}$) das Gitter L_1 (und ebenso L_2) ab. Um in Zukunft auf einfache Weise Beispiele angeben zu können, vereinbaren wir noch einige Bezeichnungen für Standardgitter, aus denen dann kompliziertere zusammengesetzt werden können. In Beispiel 1.1.8 haben wir bereits die hyperbolische Ebene H kennengelernt.

1.1.18 Beispiele: *1. Für $r > 0$ bezeichnen wir mit $\mathbb{Z}^r$ das Gitter $\mathbb{Z}^r \subset (\mathbb{R}^r, q_{E_r})$, dessen quadratische Form durch $q((x_1, \ldots, x_r)^t) = \frac{1}{2}\sum_i x_i^2$ gegeben ist. Dieses ist ganz, aber nicht gerade. (Aufgrund der Natürlichkeit dieser Konstruktion erlauben wir uns die Verwendung der Bezeichnung $\mathbb{Z}^r$ sowohl für das Gitter als auch für den zugrundeliegenden Modul.)*

2. Das Gitter E_8 sei gegeben durch $\mathbb{Z}^8 \subset (\mathbb{R}^8, q_A)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Es ist gerade und unimodular.

3. Mit A_n bezeichnen wir schließlich das Gitter $\mathbb{Z}^n \subset (\mathbb{R}^n, q_{A_{(n)}})$ mit der n-reihigen Matrix

$$A_{(n)} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \ldots & 1 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 2 \end{pmatrix}.$$

Auch dieses ist gerade und hat Determinante $n + 1$.

1.1.5 Isotropie

In pseudoeuklidischen Vektorräumen kann im Gegensatz zum euklidischen Fall die Norm eines nichttrivialen Elementes verschwinden. Diesen Effekt nennen wir Isotropie. Im Zusammenhang mit orthogonalen Modulformen spielt dies insofern eine gewichtige Rolle, als daß Randkomponenten der noch zu definierenden orthogonalen Halbebene durch isotrope Vektoren beschrieben werden können. Auch in die Untersuchung von Gittern geht der Begriff der Isotropie ein. Da es sich ausschließlich um bekannte Sätze handelt, lassen wir die Beweise aus. Diese finden sich unter anderem in [Kne].

1.1.19 Definition. *Sei (V, q) ein quadratischer Raum über $\mathbb{R}$. Dann heißt V* ***positiv definit****, falls $q(\mathfrak{v})$ positiv ist für alle $0 \neq \mathfrak{v} \in V$, und* ***negativ definit****, falls $q(\mathfrak{v})$ negativ ist für alle diese $\mathfrak{v}$. Ansonsten heißt V* ***indefinit****.*

Bemerkung: Hat V die Signatur (b^+, b^-), so ist V genau dann positiv definit, falls $b^- = 0$, und negativ definit, falls $b^+ = 0$.

1.1.20 Definition. *Sei (V, q) ein quadratischer Raum über dem Ring R. Ein Element $\mathfrak{v} \in V$ heißt* ***isotrop****, falls $q(\mathfrak{v}) = 0$ ist. Ein Unterraum $U \subset V$ heißt isotrop, falls $q|_U \equiv 0$. Der quadratische Raum V heißt isotrop, falls er ein nichttriviales isotropes Element besitzt, also falls es ein $\mathfrak{v} \in V - \{0\}$ mit $q(\mathfrak{v}) = 0$ gibt. Ist dies nicht der Fall, so heißt er* ***anisotrop****. Diese Begriffe finden insbesondere auf Gitter Anwendung.*

1.1.21 Beispiel: *Die hyperbolische Ebene H ist ein isotropes Gitter, denn beide Standardbasisvektoren e_1 und e_2 sind isotrop.*

1.1.22 Beispiel: *Sei $L = \mathbb{Z}^2 \subset (\mathbb{R}^2, q)$ mit der quadratischen Form $q((x_1, x_2)) = x_1^2 - 2x_2^2$. Dann ist $U = \{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = \sqrt{2}x_2\}$ ein eindimensionaler isotroper Unterraum von V, aber die Gleichung $x_1^2 - 2x_2^2 = 0$ hat in $\mathbb{Z}^2$ nur die triviale Lösung, das Gitter L ist also anisotrop.*

Ein Gitter L in einem indefiniten quadratischen Raum (V, q) ist also nicht unbedingt isotrop, obwohl der umgebende quadratische Raum V wegen der Stetigkeit der Norm stets nichttriviale isotrope Vektoren besitzt. Dies ist jedoch ein Effekt, der nur in kleinen Dimensionen auftritt, wie der folgende bekannte Satz besagt.

1.1.23 Satz. *(Hasse-Minkowski) Sei $L \subset (V, q)$ ein Gitter in einem indefiniten quadratischen Raum der Dimension $r \geq 5$. Dann ist L isotrop.*

Eine wichtige Konsequenz aus der Tatsache, daß ein Gitter isotrop ist, ist im folgenden Lemma dargestellt.

1.1.24 Lemma. *Sei $L \subset (V, q)$ ein isotropes Gitter. Dann spaltet es über $\mathbb{Q}$ eine hyperbolische Ebene ab, d.h. der von L erzeugte quadratische $\mathbb{Q}$-Raum $V_\mathbb{Q}$ ist isomorph zu dem von $H \oplus L_0$ erzeugten quadratischen Raum $V'_\mathbb{Q}$ über $\mathbb{Q}$ für ein Gitter L_0.*

Durch zweimalige Anwendung des Satzes von Hasse-Minkowski erhält man sofort das folgende

1.1.25 Korollar. *Ist L ein Gitter der Signatur $(2, b^-)$ mit $b^- \geq 5$, so spaltet es über $\mathbb{Q}$ sogar zwei hyperbolische Ebenen (im Sinne von Lemma 1.1.24) ab.*

1.1.6 Normalformen quadratischer Formen

Wir haben nun gesehen, daß indefinite Gitter hinreichend großer Dimension über $\mathbb{Q}$ stets hyperbolische Ebenen abspalten. Für das Gitter selbst gilt dies nicht, denn das durch die Gram-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

gegebene Gitter ist isotrop, hat Signatur $(2, 2)$, spaltet aber keine hyperbolische Ebene ab. Es stellt sich daher die Frage nach Normalformen für Gitter.

Wir wollen uns von vornherein auf indefinite Gitter beschränken. In diesem Falle stellt die Hermitesche Reduktionstheorie das geeignete Hilfsmittel dar, die wir aber nicht darstellen wollen. Die angeführten Sätze sind in den Monographien [Kne] und [Wa] beschrieben, wo sich auch die Beweise finden. Lediglich zur Tridiagonalisierung der Gram-Matrizen (Satz 1.1.28) führen wir einen Beweis an, da dies im 3. Kapitel eine zentrale Rolle spielen wird. Wir stellen Gitter in diesem Abschnitt stets durch ihre Gram-Matrizen dar.

1.1.26 Definition. *Sei $L \subset (V, q)$ ein Gitter. Ein Vektor $\mathfrak{v} \in L$ heißt* **primitiv**, *falls $\mathfrak{v} \neq 0$ ist und falls $\mathbb{Q}\mathfrak{v} \cap L = \mathbb{Z}\mathfrak{v}$ gilt.*

1.1.27 Satz. *(cf. [Wa], Thm. 1.) Sei L ein Gitter und $\mathfrak{v} \in L$ primitiv. Dann kann man $\mathfrak{v}$ zu einer Gitterbasis $\{\mathfrak{v}, e_2, \ldots, e_r\}$ von L ergänzen.*

1.1.28 Satz. *(cf. [Wa], Thm. 12.) Sei L ein ganzes Gitter. Dann kann man jedes primitive $\mathfrak{v} \in L$ so zu einer Gitterbasis ergänzen, daß die zugehörige Gram-Matrix tridiagonal ist, d.h. für die Gram-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ bezüglich einer solchen Basis gilt $a_{ij} = 0$ falls $|i - j| > 1$.*

Beweis: Sei r die Dimension des Gitters. Für $r = 1$ oder 2 ist nichts zu zeigen. Sei $r \geq 3$ und die Behauptung für $r - 1$ bereits gezeigt. Sei $\{\mathfrak{v}, e_2, \ldots, e_r\}$ eine Basis von L mit $\mathfrak{v}$ als erstem Basisvektor; eine solche existiert nach Satz 1.1.27. Sei ferner $A = (a_{ij})_{i,j}$ die bezüglich dieser Basis gebildete Gram-Matrix des Gitters L und $g := \mathrm{ggT}(a_{21}, \ldots, a_{r1})$. Dann existiert wiederum nach Satz 1.1.27 eine unimodulare $(r-1) \times (r-1)$-Matrix T_1 mit $(\frac{a_{21}}{g}, \ldots, \frac{a_{r1}}{g})^t$ als erster Spalte. Nun gilt

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & (T_1^{-1})^t & \\ 0 & & & \end{array}\right)^t A \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & (T_1^{-1})^t & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cccc} a_{11} & g & 0 & \ldots & 0 \\ \hline g & & & & \\ 0 & & & & \\ \vdots & & & A_1 & \\ 0 & & & & \end{array}\right) = \tilde{A}$$

mit einer ganzzahligen symmetrischen Matrix $(r-1) \times (r-1)$-Matrix A_1. Wir wenden auf diese nun die Induktionsvoraussetzung an und finden eine ebenfalls ganzzahlige unimodulare $(r-1) \times (r-1)$-Matrix T_2, die A_1 tridiagonalisiert. Da der erste Basisvektor bei der durch T_2 vermittelten Transformation erhalten bleibt, gibt es eine unimodulare $(r-2) \times (r-2)$-Matrix T_3 und ganze Zahlen $d_3, \ldots, d_r$, so daß

$$T_2 = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & d_3 & \ldots & d_r \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & T_3 & \\ 0 & & & \end{array}\right) \text{ gilt und so daß } T_4 := \left(\begin{array}{cc|ccc} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & d_3 & \ldots & d_r \\ \hline 0 & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & & T_3 & \\ 0 & 0 & & & \end{array}\right)$$

wiederum unimodular ist und die obige Matrix $\tilde{A}$ in eine Tridiagonalmatrix überführt. □

1.1.29 Bemerkung. *Ist L ein ganzes isotropes Gitter, so läßt es sich durch eine Gram-Matrix $A = (a_{ij})_{i,j}$ mit $a_{ij} = 0$, falls $|i - j| > 1$ oder $i = j = 1$, darstellen. Wir bekommen also noch eine Null mehr als im allgemeinen Fall.*

1.1.30 Korollar. *Ist L ein ganzes isotropes Gitter mit quadratfreier Determinante, so spaltet es bereits über $\mathbb{Z}$ eine hyperbolische Ebene ab.*

Beweis: Bringen wir L auf die Normalform aus Bemerkung 1.1.29, so folgt wegen $a_{12}^2 \mid \det(L)$ jedenfalls $a_{12} = 1$ oder -1. Ein offensichtlicher Basiswechsel bewirkt nun $a_{22} = a_{23} = 0$, also $L = H \oplus L_0$ mit einem ganzen Gitter L_0. □

Auf diese "Normalform" werden wir uns im dritten Kapitel stützen. Eine zweite Normalform, die Darstellung durch Hermite-reduzierte Gram-Matrizen, wollen wir nicht explizit angeben. Wir benötigen sie lediglich, um einzusehen, daß es bei beschränkter Dimension und Determinante nur endlich viele Isomorphieklassen von Gittern gibt. Wir formulieren dieses bekannte Ergebnis direkt in einem

1.1.31 Satz. *(cf. [Wa], Thm. 11.) Zu gegebener Dimension r und Determinante D gibt es nur endlich viele Isomorphieklassen von Gittern L mit dieser vorgegebenen Dimension und Determinante.*

1.1.7 Aus der Klassifikation quadratischer Formen

Für eine Anwendung im Abschnitt 4.3.3 benötigen wir einige Fakten aus der Klassifikation ganzer quadratischer Formen. Dabei geht es hauptsächlich um die Vereinbarung von Notationen, die wir an die Monographie [Co-Sl] anlehnen. Wir bezeichnen für p eine Primzahl oder ∞ mit $\mathbb{Q}_p$ beziehungsweise $\mathbb{Z}_p$ den Körper der p-adischen beziehungsweise den Ring der ganzen p-adischen Zahlen. Für $p = \infty$ seien damit vereinbarungsgemäß in beiden Fällen die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ gemeint.

1.1.32 Definition. *Sei p eine Primzahl oder ∞ und seien L, M zwei ganze Gitter, aufgefaßt als quadratische Räume über $\mathbb{Z}$. Sie heißen* ***p*-adisch äquivalent**, *falls die durch Grundringerweiterung entstehenden quadratischen $\mathbb{Z}_p$-Räume $L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ und $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p$ isomorph sind. Wir schreiben dann $L \sim_p M$.*

1.1.33 Satz. *(cf. [Co-Sl], Thm. 2 (S. 369)) Für $p \neq 2$ ist jedes ganze Gitter L p-adisch äquivalent zu einem Gitter mit diagonaler Gram-Matrix. Für $p = 2$ ist es 2-adisch äquivalent zu einem Gitter, dessen Gram-Matrix aus Vielfachen von 1×1-Blöcken (b) und 2×2-Blöcken $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ besteht, wobei a und c durch 2 teilbar sind, b aber nicht. Nach Herausziehen geeigneter Potenzen von p gilt also*

$$L \sim_p L_{p^0} \oplus L_{p^1}(p) \oplus L_{p^2}(p^2) \oplus \dots \tag{1.3}$$

mit endlich vielen Summanden L_{p^k}, deren Determinanten nicht durch p teilbar sind.

1.1.34 Korollar. *Ist L sogar ein gerades Gitter, so treten in der 2-adischen Zerlegung (1.3) im Term L_{2^0} nur 2×2-Blöcke $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ auf, bei denen a und c durch 2 teilbar sind, b jedoch nicht. Ist $\det(L)$ ungerade, so ist also die Dimension von L gerade. Ist die Dimension dagegen ungerade, so ist die Stufe von L sogar durch 4 teilbar.*

Die Determinanten zweier p-adisch äquivalenter Gitter haben den gleichen p-Anteil. Bekanntlich kann man in jedem quadratischen Raum über $\mathbb{Q}$ eine Orthogonalbasis finden, die quadratische Form also durch eine Gram-Matrix in Diagonalgestalt darstellen.

1.1.35 Definition. *Sei p eine Primzahl und sei L ein Gitter der Dimension n, so daß der von ihm erzeugte $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V_{\mathbb{Q}}$ isomorph ist zum quadratischen Raum $(\mathbb{Q}^n, q_A)$ mit einer Diagonalmatrix $A = \operatorname{diag}(p^{\alpha_1} a_1, \dots, p^{\alpha_n} a_n)$, wobei $p \nmid a_i$. Sei m_p die Zahl der Antiquadrate unter diesen Diagonalelementen, also derjenigen $p^{\alpha_i} a_i$ mit ungeradem α_i, für die a_i kein Quadrat modulo p ist. Der* ***p*-Exzess** *von L sei definiert als*

$$\begin{aligned} E(L,p) &:= p^{\alpha_1} + \dots + p^{\alpha_n} + 4m_p - n \text{ falls } p \geq 3, \\ E(L,2) &:= n - (a_1 + \dots + a_n + 4m_2) \text{ für } p = 2, \text{ und} \\ E(L,\infty) &:= -2s \text{ für } p = \infty, \text{ falls die Signatur } (r,s) \text{ ist.} \end{aligned}$$

1.1.36 Satz. *(cf. [Co-Sl], S. 371) Sei L ein ganzes Gitter. Die zugehörigen p-Exzesse sind invariant unter rationaler Äquivalenz, und sie erfüllen die Relation*

$$\sum_{p \text{ prim}} E(L,p) + E(L,\infty) \equiv 0 \mod 8.$$

Es ist nun entscheidend, daß man die p-Exzesse modulo 8 für die endlichen Primzahlen aus der p-adischen Zerlegung (1.3) leicht berechnen kann.

1.1.37 Lemma. *(cf. [Co-Sl], S. 383) Sei $L \sim_p L_{p^0} \oplus L_{p^1}(p) \oplus L_{p^2}(p^2) \oplus \ldots$ die Zerlegung (1.3) für eine ungerade Primzahl p. Zu $q = p^i$ sei $n_q = \dim(L_q)$ und $\varepsilon_q = \left(\frac{\det(L_q)}{p}\right)$. Sei k_p die Zahl der Antiquadrate, also der Terme $L_q(q)$ mit q kein Quadrat und $\varepsilon_q = -1$. Dann gilt*

$$E(L,p) \equiv \sum_{q=p^i} n_q(q-1) + 4k_p \mod 8.$$

Für $p = 2$ sei $L \sim_2 L_1 \oplus L_2(2) \oplus L_4(4) \oplus \ldots$, wobei jedes L_{2^i} orthogonale Summe von Summanden $\mathbb{Z}(a_j)$ mit ungeraden a_j sowie den oben beschriebenen 2-dimensionalen Bestandteilen ist. Zusätzlich zu den Größen n_{2^i}, ε_{2^i} und k_2 sei noch t_{2^i} folgendermaßen erklärt: Wenn in L_{2^i} nur 2×2-Blöcke auftreten, so sei $t_{2^i} = 0$, ansonsten die Spur einer Diagonalisierung von L_{2^i} über $\mathbb{Q}$. Dann gilt

$$E(L,2) \equiv \sum_{q=2^i} (n_q - t_q) + 4k_2 \mod 8.$$

1.1.38 Bemerkung. *Aus trivialen Gründen gilt für jedes p die Gleichung $\prod_i \varepsilon_{p^i} = \left(\frac{a}{p}\right)$, wobei $\det(L) = p^\alpha a$ mit $p \nmid a$. Dabei bedeute $(\frac{a}{p})$ das gewöhnliche Legendre-Symbol.*

Wir fassen das erreichte in folgendem Satz zusammen:

1.1.39 Satz. *(cf. [Co-Sl], S. 383) Für eine ganzes Gitter L der Signatur (r,s) gilt mit den vereinbarten Bezeichnungen die Relation*

$$r - s + \sum_{p \geq 3} \sum_{q=p^i} n_q(q-1) + 4k_p \equiv \sum_{q=2^i} t_q + 4k_2 \mod 8.$$

Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß alle Daten bezüglich der Gram-Matrix eines Gitters L berechnet wurden. Wir wollen später Satz 1.1.39 anwenden, um das Abbildungsverhalten der Diskriminantenform $Nq : L'/L \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ zu untersuchen. Dieses wird von den Daten n_{p^i} und ε_{p^i} gesteuert, wobei der im Gegensatz zu unserer Referenz [Co-Sl] vorhandene Vorfaktor $\frac{1}{2}$ in der Darstellung der Form durch $q(x) = \frac{1}{2}x^t Ax$ beachtet werden muß.

1.2 Vektorwertige Modulformen

1.2.1 Metaplektische Gruppe

Bei der Definition von Modulformen halbganzen Gewichts treten Schwierigkeiten auf, die von der Zweideutigkeit der Quadratwurzel herrühren. Um diese zu umgehen, kann man die Auswahl einer geeigneten Wurzel in die Definition der Modulgruppe mit aufnehmen. Dies führt auf den Begriff der metaplektischen Gruppe.

1.2.1 Definition. *Seien $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sl_2(\mathbb{Z}), z \in \mathbb{H}$. Dann setzen wir $j(M,z) := cz+d$. Die dadurch definierte Abbildung $j : Sl_2(\mathbb{Z}) \times \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ heißt* ***kanonischer Automorphiefaktor****. Weiterhin setzen wir $Mz := \frac{az+b}{cz+d}$. Dies definiert eine Operation der Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ auf der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.*

Bekanntlich gilt für $M, N \in Sl_2(\mathbb{Z})$ die sogenannte Kozykelrelation

$$j(M, Nz)j(N,z) = j(MN,z).$$

Für festes M ist das Bild der Halbebene $\mathbb{H}$ unter der Abbildung $z \mapsto j(M,z)$ einfach zusammenhängend und enthält die Null nicht. Es gibt daher genau zwei holomorphe Funktionen $\varphi_i : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi_i^2 = j(M,\cdot)$ $(i = 1,2)$.

Um Modulformen halbganzen Gewichts zu definieren, können wir nun nicht durch einmalige Auswahl einer Wurzel einen neuen Automorphiefaktor definieren. Denn ist φ eine beliebige, aber feste, auf $\mathbb{C}$ definierte und auf $\mathbb{C} - \mathbb{R}^{\leq 0}$ holomorphe Wurzelfunktion, so gibt es im allgemeinen Matrizen $M, N \in Sl_2(\mathbb{Z})$, so daß die Gleichung $\varphi(j(M,Nz))\varphi(j(N,z)) = \varphi(j(MN,z))$ nicht gilt.

1.2.2 Beispiel: *Sei beispielsweise $\sqrt{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die Standardwurzel, die durch die Definition $\sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}(\log(|z|)+i\arg(z))}$ mit $\arg(z) \in (-\pi, \pi]$ gegeben ist. Dann gilt für $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ die Gleichung $\sqrt{j(-S,-Sz)}\sqrt{j(-S,z)} = -\sqrt{j(-E_2,z)}$, wie man leicht durch Einsetzen von $z = i$ nachprüfen kann.*

Dies motiviert die folgende Definition.

1.2.3 Definition. *Wir versehen die Menge aller Paare (M,φ), wobei M eine Matrix aus $Sl_2(\mathbb{Z})$ und $\varphi : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit $\varphi^2 = j(M,\cdot)$ ist, mit folgender Multiplikation: Für (M,φ) und (N,ψ) sei $(M,\varphi)(N,\psi) := (MN, (\varphi \circ N) \cdot \psi)$. Die Menge aller dieser Paare zusammen mit der angegebenen Verknüpfung heißt* ***metaplektische Gruppe****. Wir bezeichnen sie mit $Mp_2(\mathbb{Z})$.*

1.2.4 Satz. *Die metaplektische Gruppe wird von den Elementen*

$$S := \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\cdot} \right) \text{ und } T := \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, 1 \right)$$

(mit der in Beispiel 1.2.2 angegebenen Standardwurzel) erzeugt. Die Relationen sind gegeben durch $S^2 = (ST)^3 = Z, Z^4 = 1$.

Beweis: Wegen $S^4 = (E_2, -1)$ liegt mit (M,φ) auch $(M,-\varphi)$ in der von S und T erzeugten Untergruppe. Damit folgt der Satz aus dem entsprechenden Resultat über die Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$. □

Bemerkung: Die Bezeichnungen S, T und Z werden im Zusammenhang mit der metaplektischen Gruppe stets in dieser Bedeutung beibehalten.

1.2.2 Weildarstellung

Im Unterschied zu gewöhnlichen elliptischen Modulformen operiert bei vektorwertigen Modulformen die Modulgruppe $Mp_2(\mathbb{Z})$ unitär auf einem geeigneten endlichdimensionalen Darstellungsraum, in dem die Werte der Modulform liegen. Dies ist eine natürliche Verallgemeinerung eines auf $\mathbb{C}$ wirkenden Charakters der Gruppe. In unseren Betrachtungen spielen lediglich die einem Gitter zugehörige Weildarstellung sowie die dazu duale Darstellung eine Rolle. Deren wichtigste Eigenschaften werden kurz ohne Beweise zusammengestellt.

1.2.5 Definition. *Sei L'/L die Diskriminantengruppe eines Gitters L. Auf der Menge der formalen Linearkombinationen $\sum_{\gamma\in L'/L} x_\gamma \mathfrak{e}_\gamma$ mit $x_\gamma \in \mathbb{C}$ definieren wir eine Multiplikation durch bilineare Ausdehnung der Vorschrift $\mathfrak{e}_\gamma \cdot \mathfrak{e}_\delta := \mathfrak{e}_{\gamma+\delta}$. Die so erhaltene $\mathbb{C}$-Algebra heißt* ***Gruppenring*** *von L'/L. Er wird mit $\mathbb{C}[L'/L]$ bezeichnet und trägt eine hermitesche Bilinearform $\langle \sum_\gamma x_\gamma \mathfrak{e}_\gamma, \sum_\delta y_\delta \mathfrak{e}_\delta \rangle := \sum_\gamma \bar{x}_\gamma y_\gamma$. Wir nennen die Symbole $\mathfrak{e}_\gamma$ die Standardbasisvektoren des Gruppenringes.*

Uns interessiert im folgenden meist $\mathbb{C}[L'/L]$ als endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum mit hermitescher Form.

1.2.6 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur (b^+, b^-). Für die in Satz 1.2.4 genannten Erzeuger S und T der metaplektischen Gruppe definieren wir unter Benutzung der Bezeichnung $\mathbf{e}(z) := e^{2\pi i z}$ lineare Abbildungen $\rho_L(S)$ und $\rho_L(T)$ aus $U(\mathbb{C}[L'/L])$ durch*

$$\rho_L(S)\mathfrak{e}_\gamma := \frac{\sqrt{i}^{b^- - b^+}}{\sqrt{|L'/L|}} \sum_{\delta\in L'/L} \mathbf{e}(-\langle\gamma,\delta\rangle)\mathfrak{e}_\delta \quad \text{und} \quad \rho_L(T)\mathfrak{e}_\gamma := \mathbf{e}(q(\gamma))\mathfrak{e}_\gamma.$$

Diese Definition ist mit den Relationen in $Mp_2(\mathbb{Z})$ verträglich und liefert durch Fortsetzung auf Produkte einen Gruppenhomomorphismus von $Mp_2(\mathbb{Z})$ in die unitäre Gruppe $U(\mathbb{C}[L'/L])$. Dabei wirkt das Element Z auf die Standardbasis durch $\rho_L(Z)\mathfrak{e}_\gamma = i^{b^- - b^+}\mathfrak{e}_{-\gamma}$.

1.2.7 Definition. *Der im vorigen Satz 1.2.6 angegebene Gruppenhomomorphismus $\rho_L : Mp_2(\mathbb{Z}) \to U(\mathbb{C}[L'/L])$ heißt* ***Weildarstellung*** *bezüglich des Gitters L. Die dazu duale Darstellung wird mit ρ_L^* bezeichnet.*

1.2.8 Bemerkung. *Bezüglich der Standardbasis $\{\mathfrak{e}_{\gamma_1}, \dots, \mathfrak{e}_{\gamma_{|D|}}\}$ des Vektorraumes $\mathbb{C}[L'/L]$ besitzt die Weildarstellung eine Repräsentation durch Matrizen. Die zu den Erzeugern S und T gehörigen Darstellungsmatrizen sind dann*

$$\mathcal{M}(\rho_L(S)) = \frac{\sqrt{i}^{b^- - b^+}}{\sqrt{|L'/L|}} \begin{pmatrix} \mathbf{e}(-\langle\gamma_1,\gamma_1\rangle) & \dots & \mathbf{e}(-\langle\gamma_{|D|},\gamma_1\rangle) \\ \vdots & & \vdots \\ \mathbf{e}(-\langle\gamma_1,\gamma_{|D|}\rangle) & \dots & \mathbf{e}(-\langle\gamma_{|D|},\gamma_{|D|}\rangle) \end{pmatrix}$$

und

$$\mathcal{M}(\rho_L(T)) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}(q(\gamma_1)) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{e}(q(\gamma_{|D|})) \end{pmatrix}.$$

Offensichtlich sind diese beiden Matrizen unitär und symmetrisch. Produkte hiervon sind i. a. nur noch unitär. Die Darstellungsmatrizen $\mathcal{M}(\rho_L^*(M,\varphi))$ sind jeweils die komplex konjugierten von $\mathcal{M}(\rho_L(M,\varphi))$.

1.2.9 Bemerkung. *Für jedes Element $(M,\varphi) \in Mp_2(\mathbb{Z})$ gilt die durch die Wirkung von Z^2 induzierte Beziehung $\rho_L(M,\varphi) = (-1)^{b^- - b^+}\rho_L(M,-\varphi)$. Ist die Dimension des zugrundeliegenden Gitters L gerade, so hängt $\rho_L(M,\varphi)$ also nicht von der Auswahl der Wurzelfunktion φ ab. Die Weildarstellung faktorisiert in diesem Falle durch $Sl_2(\mathbb{Z})$.*

1.2.10 Satz. *(cf. [Sh], Satz 1.6) Sei L ein gerades Gitter der Signatur (b^+, b^-), und sei $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sl_2(\mathbb{Z})$. Dann gilt $\rho_L(M, \sqrt{c\tau + d})\mathfrak{e}_\gamma = \sum_\beta a_{\beta\gamma}\mathfrak{e}_\beta$ mit*

$$a_{\beta\gamma} = \sqrt{i}^{(b^- - b^+)(1-\operatorname{sgn}(d))}\delta_{\beta,a\gamma}\mathbf{e}(abq(\beta)) \quad (\delta_{*,*} \text{ das Kronecker-Delta}),$$

falls $c = 0$, und

$$a_{\beta\gamma} = \frac{\sqrt{i}^{(b^- - b^+)\operatorname{sgn}(c)}}{|c|^{(b^+ + b^-)/2}\sqrt{|L'/L|}} \sum_{r \in L/cL} \mathbf{e}\left(\frac{aq(\beta + r) - \langle\gamma, \beta + r\rangle + dq(\gamma)}{c}\right)$$

sonst.

1.2.11 Satz. *Seien L ein gerades Gitter der Stufe N und ρ_L die zugehörige Weildarstellung. Ist die Dimension des Gitters gerade, so faktorisiert ρ_L über die Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$, ansonsten über eine durch das Thetamultiplikatorsystem definierte zweiblättrige Überlagerung davon.*

Beweis: Aus den Korollaren $\mathrm{A}'_{\mathrm{even}}$ und $\mathrm{A}'_{\mathrm{odd}}$ in [Od] oder aus Proposition 10.6.(iii) in [Iwa] folgt, daß die Weildarstellung im Falle gerader Dimension auf dem Urbild der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma[N]$ in $Mp_2(\mathbb{Z})$, im Falle ungerader Dimension auf dem Bild eines mittels des Thetamultiplikatorsystems definierten Schnittes $\Gamma[N] \to Mp_2(\mathbb{Z})$ (cf. dazu auch Korollar 1.1.34) trivial ist. Daraus ergibt sich die Behauptung in üblicher Weise. □

1.2.3 Modulformen zur Weildarstellung sowie zu deren Dual

1.2.12 Definition. *Seien L ein gerades Gitter und ρ_L die zugehörige Weildarstellung auf dem Gruppenring $\mathbb{C}[L'/L]$. Für $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ und $(M,\varphi) \in Mp_2(\mathbb{Z})$ sei der* $|'_k$***-Operator** auf Funktionen $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ definiert durch*

$$f|'_k(M,\varphi)(z) := \varphi(z)^{-2k}\rho_L(M,\varphi)^{-1}f(Mz).$$

Analog dazu sei der $|^*_k$***-Operator** durch*

$$f|^*_k(M,\varphi)(z) := \varphi(z)^{-2k}\rho^*_L(M,\varphi)^{-1}f(Mz)$$

gegeben.

Wir benutzen die Bezeichnung $|'$ bzw. $|^*$, um diese Operatoren vom $|$-Operator auf gewöhnlichen Modulformen zu unterscheiden, da alle drei insbesondere im vierten Kapitel im gleichen Zusammenhang auftreten.

1.2.13 Lemma. *Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ holomorph und unter der $|'_k$-Operation von $Mp_2(\mathbb{Z})$ invariant. Schreibt man $f(z) = \sum_\gamma f_\gamma(z)\mathfrak{e}_\gamma$ mit Komponentenfunktionen $f_\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, so besitzen die f_γ eine Fourierentwicklung der Form*

$$f_\gamma(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} + q(\gamma)} a(\gamma, n)\mathbf{e}(nz).$$

Für $|_k^*$-invariante Funktionen g gilt entsprechend

$$g_\gamma(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} - q(\gamma)} a(\gamma, n)\mathbf{e}(nz).$$

Beweis: Wegen der Diagonalgestalt der Darstellungsmatrix des Elementes T gelten die Beziehungen $f_\gamma(z+1) = \mathbf{e}(q(\gamma))f_\gamma(z)$ und $g_\gamma(z+1) = \mathbf{e}(-q(\gamma))g_\gamma(z)$, woraus sich die Behauptung wie im Falle gewöhnlicher Modulformen ergibt. □

1.2.14 Definition. *Sei L ein gerades Gitter, ρ_L (bzw. ρ_L^*) die zugehörige Weildarstellung (bzw. deren Dual) und $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$. Eine **fast holomorphe Modulform** zur Gruppe $Mp_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht k zur Darstellung ρ_L (bzw. ρ_L^*) ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ mit den Eigenschaften*

1. *$f|_k'(M, \varphi) = f$ (bzw. $f|_k^*(M, \varphi) = f$) für alle $(M, \varphi) \in Mp_2(\mathbb{Z})$.*
2. *Die Komponentenfunktionen f_γ besitzen eine Fourierentwicklung der Form $f_\gamma(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z} \pm q(\gamma)} a(\gamma, n)\mathbf{e}(nz)$, wobei nur endlich viele der Koeffizienten $a(\gamma, n)$ mit negativem n von Null verschieden sind.*

*Verschwinden darüberhinaus alle $a(\gamma, n)$ mit negativem n, so heißt die Modulform f holomorph; gilt dies sogar für alle $a(\gamma, n)$ mit $n \leq 0$, so spricht man von einer **Spitzenform**.*

Der Vektorraum der fast holomorphen Modulformen zur Darstellung ρ_L vom Gewicht k wird mit $\{Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L\}$ bezeichnet, der Teilraum der holomorphen Modulformen mit $[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L]$ und der Raum der Spitzenformen darin mit $[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L]_0$. Für die duale Darstellung gelten die Bezeichnungen analog.

Mit vektorwertigen Modulformen meinen wir hinfort stets solche zur Weildarstellung oder zu deren Dual; andere Darstellungen spielen für unsere Überlegungen keine Rolle. Man sieht unmittelbar ein, daß es nichttriviale Modulformen bezüglich der Darstellung eines Gitters der Signatur (b^+, b^-) nur dann gibt, wenn das Gewicht die Relation $2k \equiv b^+ - b^- \mod 2$ erfüllt. In diesem Falle bewirkt das Transformationsverhalten unter Z zwischen den Komponentenfunktionen die Gleichung $f_\gamma = (-1)^{\frac{2k - b^+ + b^-}{2}} f_{-\gamma}$ bzw. $g_\gamma = (-1)^{\frac{2k + b^+ - b^-}{2}} g_{-\gamma}$. Hat das zugrundeliegende Gitter gerade Dimension, gibt es also nur Modulformen ganzen Gewichts. In diesem Falle genügt es, die gewöhnliche Modulgruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ zu betrachten. Dies wird im vierten Kapitel wieder aufgegriffen werden.

Bemerkung: Seien L ein gerades Gitter der Stufe N und ρ_L die Weildarstellung. Sei $f = (f_\gamma)_\gamma$ eine holomorphe vektorwertige Modulform vom Gewicht k zu ρ_L oder ρ_L^*. Wegen Satz 1.2.11 sind dann die Komponentenfunktionen gewöhnliche elliptische Modulformen zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(N)$ vom Gewicht k mit trivialem Charakter, falls die Dimension des Gitters gerade ist. Bei ungerader Dimension und daher halbganzem Gewicht transformieren sie sich mit dem Thetamultiplikatorsystem v_θ.

1.2.4 Beispiele

Bevor wir uns mit einem allgemeinen Konstruktionsprinzip für vektorwertige Modulformen und damit mit deren Existenz befassen, geben wir kurz zwei Beispiele an.

1.2.15 Beispiel: *Sei zunächst L ein unimodulares gerades Gitter. Ein solches hat die triviale Diskriminantengruppe $L'/L = \{0\}$. Für gerade k ist die Weildarstellung dann ebenfalls trivial.*

Damit ist $[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L] = [Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L^*]$ *für gerade* k *nichts anderes als der Raum der gewöhnlichen elliptischen Modulformen vom Gewicht* k *zur vollen Modulgruppe* $Sl_2(\mathbb{Z})$*. Das Gitter* $L = H \oplus H \oplus E_8(-1)$ *liefert ein Beispiel mit Signatur* $(2, 10)$*.*

1.2.16 Beispiel: *Nun betrachten wir das Gitter* $L = H \oplus H \oplus \mathbb{Z}^2(-2)$*. Es hat Signatur* $(2, 4)$*, die Diskriminantengruppe ist isomorph zu* $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$*. Die Darstellungsmatrizen der beiden Erzeuger der metaplektischen Gruppe sind gegeben durch*

$$M(\rho_L^*(S)) = -\frac{i}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } M(\rho_L^*(T)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Diese haben offensichtlich $\mathfrak{v} = (0, 1, -1, 0)^t$ *als gemeinsamen Eigenvektor. Auf diesen wirkt die Darstellung durch einen Charakter, der gerade dem Transformationsverhalten der elliptischen Modulform* $(\vartheta\tilde{\vartheta}\tilde{\tilde{\vartheta}})^2$ *entspricht. Die Abbildung* $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$*,* $f(z) = \vartheta^2(z)\tilde{\vartheta}^2(z)\tilde{\tilde{\vartheta}}^2(z)\mathfrak{v}$ *ist somit ein Element von* $[Mp_2(\mathbb{Z}), 3, \rho_L^*]_0$*. Dabei sind mit* $\vartheta, \tilde{\vartheta}$ *und* $\tilde{\tilde{\vartheta}}$ *die drei in [Fr-Bu], S. 376, definierten Thetareihen*

$$\vartheta(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 z}, \quad \tilde{\vartheta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n e^{\pi i n^2 z} \quad \text{und} \quad \tilde{\tilde{\vartheta}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i (n+\frac{1}{2})^2 z}$$

gemeint.

1.2.5 Eisensteinreihen

Wir wollen uns nun der Frage nach der Existenz vektorwertiger Modulformen zuwenden. Es lassen sich die üblichen Konstruktionsprinzipien anwenden, wie etwa Eisenstein-, Poincaré- und Thetareihen. Weitere Ansätze werden im vierten Kapitel behandelt. Für uns spielen lediglich die Eisensteinreihen zur dualen Darstellung ρ_L^* eine Rolle. Die folgende Zusammenfassung orientiert sich in der Notation an den Arbeiten [Br1] und [Br-Ku].

1.2.17 Satz. *Sei* L *ein gerades Gitter der Signatur* (b^+, b^-)*, sei* $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ *mit* $k > 2$ *und* $2k + b^+ - b^- \equiv 0 \mod 4$*. Sei* $\beta \in L'$ *mit* $q(\beta) \in \mathbb{Z}$*. Dann ist der Vektor* $\mathfrak{e}_\beta \in \mathbb{C}[L'/L]$ *unter der* $|_k^*$*-Operation von* T *und* Z^2 *invariant. Die Eisensteinreihe*

$$E_\beta(z) := \frac{1}{2} \sum_{(M,\varphi) \in \tilde{\Gamma}_\infty \backslash Mp_2(\mathbb{Z})} \mathfrak{e}_\beta |_k^* (M, \varphi)$$

konvergiert auf $\mathbb{H}$ *normal und stellt daher eine* $Mp_2(\mathbb{Z})$*-invariante holomorphe Funktion mit Werten in* $\mathbb{C}[L'/L]$ *dar. Dabei bedeutet* $\tilde{\Gamma}_\infty$ *die von* T *erzeugte Untergruppe von* $Mp_2(\mathbb{Z})$*.*

Beweis: Aufgrund der Unitarität der Weildarstellung hat jeder der auftretenden Vektoren $\rho_L(M, \varphi)^{-1}\mathfrak{e}_\beta$ Norm 1, gemessen im Skalarprodukt auf dem Gruppenring. Der Satz folgt dann mit den gleichen Argumenten wie für Eisensteinreihen mit Werten in $\mathbb{C}$. □

1.2.18 Bemerkung. *Die Elemente* β *und* $-\beta$ *führen auf die gleiche Eisensteinreihe* $E_\beta = E_{-\beta}$*, denn es gilt* $\mathfrak{e}_\beta|_k^* Z = i^{-2k-b^++b^-}\mathfrak{e}_{-\beta} = \mathfrak{e}_{-\beta}$*. Die Invarianz von* E_β *unter der vollen Modulgruppe liefert dann die Aussage.*

1.2.19 Satz. *Mit den Bezeichnungen aus Satz 1.2.17 besitzt die Eisensteinreihe E_β die Fourierentwicklung*

$$E_\beta(z) = \sum_{\gamma \in L'/L} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} - q(\gamma) \\ n \geq 0}} q_\beta(\gamma, n) \mathbf{e}(nz) \mathfrak{e}_\gamma$$

mit den Koeffizienten

$$q_\beta(\gamma, 0) = \delta_{\beta,\gamma} + \delta_{-\beta,\gamma} \qquad (\delta_{*,*} \text{ das Kronecker-Delta})$$

und

$$q_\beta(\gamma, n) = \frac{(2\pi)^k n^{k-1}}{\Gamma(k)} \sum_{c \in \mathbb{Z} - \{0\}} \frac{\mathbf{e}(-\pi i \operatorname{sgn}(c) k/4)}{|c|^{-k}} \sum_{\substack{d(c)^* \\ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_\infty \backslash Sl_2(\mathbb{Z}) / \Gamma_\infty}} a_{\beta\gamma}(a, b, c, d) \mathbf{e}\left(\frac{nd}{c}\right)$$

für $n > 0$. Dabei ist $a_{\beta\gamma}(a, b, c, d)$ der durch

$$\rho_L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \sqrt{c\tau + d}\right) \mathfrak{e}_\gamma = \sum_\beta a_{\beta\gamma}(a, b, c, d) \mathfrak{e}_\beta$$

bestimmte "Koeffizient" der Darstellungsmatrix von $\rho_L(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right), \sqrt{c\tau + d})$. Insbesondere ist E_β ein nichttriviales Element von $[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L^*]$.

1.2.20 Korollar. *In der von gewöhnlichen elliptischen Modulformen übernommenen Nomenklatur hat E_β in der Spitze $i\infty$ den Wert $\mathfrak{e}_\beta + \mathfrak{e}_{-\beta} \in \mathbb{C}[L'/L]$. Es handelt sich also nicht um eine Spitzenform.*

1.2.21 Korollar. *Sind $\beta_1, \ldots, \beta_r \in L'$ Repräsentanten aller in $(L'/L)/\{\pm 1\}$ verschiedenen Klassen mit $q(\beta_i) \in \mathbb{Z}$, so sind die zu gleichem Gewicht k gebildeten Eisensteinreihen $E_{\beta_1}, \ldots, E_{\beta_r}$ linear unabhängig. Jede holomorphe Modulform in $[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L^*]$ ist Linearkombination dieser Eisensteinreihen und einer Spitzenform.*

Im Sonderfall $k = 2$ gibt es holomorphe Eisensteinreihen nur zu solchen $\mathfrak{e}_\beta$, die keinen Anteil in einem zu einem trivialen Summanden gehörenden irreduziblen Darstellungsraum haben (cf. [Fr2], S. 3).

Für das durch die Gram-Matrix (1.2) gegebene Gitter gilt beispielsweise: Es gibt in L'/L drei Vektoren mit ganzer Norm. Die Weildarstellung zerfällt in eine irreduzible zweidimensionale und zwei triviale Darstellungen. Zwei der drei Repräsentanten von L'/L mit ganzer Norm haben Anteile in den zu den trivialen Darstellungen gehörigen Unterräumen. Es gibt daher nur eine einzige Eisensteinreihe, sogar der ganze Kontrollraum ist eindimensional. Eine Basis ist die Modulform $(\vartheta^4 + \tilde{\vartheta}^4)(\mathfrak{e}_{(0,0,0,0)} - \mathfrak{e}_{(\frac{1}{2},0,0,0)} - \mathfrak{e}_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})}) + 3(\tilde{\vartheta}^4 - \vartheta^4)\mathfrak{e}_{(0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2})}$ mit den Thetareihen aus Beispiel 1.2.16.

Die Arbeit [Br-Ku] beschäftigt sich mit der Berechnung der Fourierkoeffizienten $q_0(\gamma, n)$ der speziellen Eisensteinreihe E_0. Der folgende Satz wurde dieser Arbeit entnommen und stellt deren Hauptresultat dar.

1.2.22 Satz. *(cf. [Br-Ku], Thm. 4.6 und Cor. 4.7) Seien L ein gerades Gitter der Signatur (b^+, b^-) und ρ_L^* die zur zu L gehörigen Weildarstellung duale Darstellung. Sei $k = \frac{b^+ + b^-}{2} > 2$, b^+ gerade, $\gamma \in L'$ und $n \in \mathbb{Z} - q(\gamma)$, $n > 0$. Dann gilt für den Fourierkoeffizienten $q_0(\gamma, n)$ der Eisensteinreihe E_0 die Formel*

$$q_0(\gamma, n) = \frac{2^{k+1}\pi^k n^{k-1}(-1)^{b^+/2}}{\sqrt{|L'/L|}\Gamma(k)} \cdot \frac{\sigma_{1-k}(\tilde{n}, \chi_{4D})}{L(k, \chi_{4D})} \prod_{p|2\det(L)} p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,n}(p^{w_p}),$$

falls $b^+ + b^-$ gerade ist, und

$$q_0(\gamma, n) = \frac{2^{k+1}\pi^k n^{k-1}(-1)^{b^+/2}}{\sqrt{|L'/L|}\Gamma(k)} \cdot \frac{L(k - \frac{1}{2}, \chi_{\mathfrak{D}})}{\zeta(2k-1)} \cdot$$
$$\cdot \sum_{d|f} \mu(d)\chi_{\mathfrak{D}}(d) d^{1/2-k} \sigma_{2-2k}\left(\frac{f}{d}\right) \prod_{p|2\det(L)} \frac{p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,n}(p^{w_p})}{1 - p^{1-2k}}$$

sonst. Diese Koeffizienten sind rational. Dabei bedeuten

$$\begin{array}{rcl}
d_\gamma & = & \min\{b \in \mathbb{N} \mid b\gamma \in L\} \\
\tilde{n} & = & d_\gamma^2 n \quad (\in \mathbb{Z}) \\
\tilde{n}_0 & = & n_0 d_\gamma^2 \textit{ mit } n_0 \textit{ definiert durch } n = n_0 f^2 \textit{ mit } ggT(f, 2\det(L)) = 1 \\
 & & \textit{und } \nu_l(n_0) \in \{0,1\} \textit{ für alle } l \textit{ prim und teilerfremd zu } 2\det(L) \\
f & & \textit{siehe Definition von } \tilde{n}_0 \\
\nu_p & & \textit{die } p\textit{-adische Bewertung auf } \mathbb{Q} \\
w_p & = & 1 + 2\nu_p(2nd_\gamma) \quad (\textit{beachte: } 2nd_\gamma \in \mathbb{Z}) \\
D & = & (-1)^k \det(L) \\
\mathfrak{D} & = & 2(-1)^{k+\frac{1}{2}} \tilde{n}_0 \det(L) \\
\chi_r(m) & = & \left(\frac{r}{m}\right) \\
\mu, \zeta, \Gamma & & \textit{die Möbius-, die Riemannsche Zeta- und die Gammafunktion} \\
\sigma_\kappa(m, \chi) & = & \sum_{d|m} \chi(d) d^\kappa \\
L(s, \chi) & = & \prod_{p \ prim} (1 - \chi(p)p^{-s})^{-1} \\
N_{\gamma,n}(p^m) & = & |\{\mathfrak{x} \in L/p^m L \mid q(\mathfrak{x} - \gamma) + n \equiv 0 \mod p^m\}|
\end{array}$$

Die Formel und die zahlreichen in diesem Zusammenhang auftretenden Größen werden im dritten Kapitel wieder aufgegriffen und erläutert.

1.2.6 Dimensionsformel

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir aus bekannten Resultaten Dimensionsformeln für den Raum der holomorphen Modulformen sowie für den Unterraum der Spitzenformen zur Darstellung ρ_L^* herleiten.

1.2.23 Definition. *Sei V ein endlichdimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum und $M \in U(V)$ ein unitärer Automorphismus von V. Dann kann man die Eigenwerte w_i von M auf eindeutige Weise in der Form $w_i = \mathbf{e}(\beta_i)$ mit $0 \leq \beta_i < 1$ schreiben. Die Zahl $\alpha(M)$ sei dann definiert als*

$$\alpha(M) = \sum_{i=1}^{\dim(V)} \beta_i.$$

1.2.24 Satz. *(cf. [Bo2], Bemerkung 3.7 oder [Fi], Korollar 2.5.5) Sei $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}, k \geq 2$. Sei V ein d-dimensionaler $\mathbb{C}$-Vektorraum, auf dem die Gruppe $Mp_2(\mathbb{Z})$ durch eine Darstellung ρ operiert. Dabei wirke das Element Z durch Multiplikation mit $e^{-\pi i k}$. Dann hat der Vektorraum der holomorphen Modulformen vom Gewicht k zur Darstellung ρ die Dimension*

$$\dim[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho] = d + \frac{dk}{12} - \alpha(e^{\frac{\pi i k}{2}}\rho(S)) - \alpha((e^{\frac{\pi i k}{3}}\rho(ST))^{-1}) - \alpha(\rho(T)).$$

Wegen der Bedingung an die Operation des Elementes Z läßt sich dieser Satz nicht direkt auf unsere Modulformen anwenden, denn es gilt unter der Voraussetzung $2k + b^+ - b^- \equiv 0 \mod 4$ lediglich $\rho_L^*(Z)\mathfrak{e}_\gamma = e^{-\pi i k}\mathfrak{e}_{-\gamma}$. Setzen wir $V_0 = \operatorname{span}(\{\mathfrak{e}_\gamma + \mathfrak{e}_{-\gamma} \,|\, \gamma \in L'/L\})$, so wirkt auf diesem Teilraum Z durch die duale Weildarstellung ρ_L^* in geforderter Weise.

1.2.25 Lemma. *Der Unterraum $V_0 = \operatorname{span}(\{\mathfrak{e}_\gamma + \mathfrak{e}_{-\gamma} \,|\, \gamma \in L'/L\})$ ist unter der Weildarstellung (und damit auch unter deren Dual) invariant.*

Beweis: Die Invarianz unter $\rho_L(T)$ ist offensichtlich. Für $\rho_L(S)$ gilt

$$\begin{aligned}
\rho_L(S)(\mathfrak{e}_\gamma + \mathfrak{e}_{-\gamma}) &= \frac{\sqrt{i}^{b^- - b^+}}{\sqrt{|L'/L|}} \sum_\delta \left(\mathbf{e}(-\langle \gamma, \delta\rangle) + \mathbf{e}(-\langle -\gamma, \delta\rangle)\right) \mathfrak{e}_\delta \\
&= \frac{\sqrt{i}^{b^- - b^+}}{\sqrt{|L'/L|}} \sum_\delta \left(\mathbf{e}(-\langle \gamma, \delta\rangle) + \mathbf{e}(-\langle \gamma, -\delta\rangle)\right) \mathfrak{e}_\delta \\
&= \frac{\sqrt{i}^{b^- - b^+}}{\sqrt{|L'/L|}} \sum_\delta \mathbf{e}(-\langle \gamma, \delta\rangle)(\mathfrak{e}_\delta + \mathfrak{e}_{-\delta}) \in V_0.
\end{aligned}$$

□

Mit V_0 ist auch das bezüglich des Skalarproduktes auf $\mathbb{C}[L'/L]$ gebildete Komplement ρ_L- und ρ_L^*-invariant. Sei $\rho_L^*|_{V_0}$ die auf V_0 eingeschränkte Darstellung. Nehmen wir $2k+b^+-b^- \equiv 0 \mod 4$ an, so erfüllen die Komponentenfunktionen einer vektorwertigen Modulform in unserem Sinne wegen des Transformationsverhaltens unter Z stets $f_\gamma = f_{-\gamma}$, die Werte von f liegen also in V_0. Fassen wir Modulformen als Abbildungen $f : \mathbb{H} \to V_0$ auf, so können wir den zitierten Satz anwenden und erhalten unmittelbar das folgende Ergebnis.

1.2.26 Satz. *Sei L ein gerades Gitter, ρ_L^* die zur Weildarstellung duale Darstellung, $k \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ mit $k \geq 2$ und $2k + b^+ - b^- \equiv 0 \mod 4$ sowie $d = |(L'/L)/\{\pm 1\}|$. Sei ρ die Einschränkung $\rho := \rho_L^*|_{V_0}$ der dualen Weildarstellung auf den von den Vektoren $\mathfrak{e}_\gamma + \mathfrak{e}_{-\gamma}$ aufgespannten Unterraum V_0. Dann gilt die Dimensionsformel*

$$\dim[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L^*] = d + \frac{dk}{12} - \alpha(e^{\frac{\pi i k}{2}}\rho(S)) - \alpha((e^{\frac{\pi i k}{3}}\rho(ST))^{-1}) - \alpha(\rho(T)).$$

Für den Raum der Spitzenformen gilt im Falle $k > 2$

$$\begin{aligned}
\dim[Mp_2(\mathbb{Z}), k, \rho_L^*]_0 =& d + \frac{dk}{12} - \alpha(e^{\frac{\pi i k}{2}}\rho(S)) - \alpha((e^{\frac{\pi i k}{3}}\rho(ST))^{-1}) - \alpha(\rho(T)) \\
& - |\{\gamma \in (L'/L)/\{\pm 1\} \,|\, q(\gamma) \in \mathbb{Z}\}|.
\end{aligned}$$

1.3 Orthogonale Modulformen

1.3.1 Die orthogonale Halbebene

Wir wollen Modulformen zu orthogonalen Gruppen erklären. Dies ist eine der möglichen Verallgemeinerungen des Begriffes der gewöhnlichen elliptischen Modulform. Bevor wir zur Definition der Modulformen selbst sowie zu deren Eigenschaften kommen, beschreiben wir zunächst die zugehörigen Definitionsbereiche und im nächsten Abschnitt die Operation diskreter Untergruppen der orthogonalen Gruppe darauf.

Sei (V, q) ein indefiniter quadratischer Raum der Signatur $(2, n)$ und der Dimension $2+n$. Die zugehörige Bilinearform sei wie üblich mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet. Nach geeigneter Wahl einer Basis nimmt die quadratische Form q die Gestalt

$$q(\mathfrak{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - \ldots - x_{n+2}^2 \qquad (\text{bzw. } q(\mathfrak{x}) = x_1x_2 + x_3^2 \text{ für } n = 1)$$

an, wobei $(x_1, \ldots, x_{n+2})$ die Koordinatendarstellung eines Vektors $\mathfrak{x}$ bezüglich dieser Basis sei; eine solche Basis wird nun festgehalten.

Wir dehnen die Form $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bilinear auf $V_\mathbb{C} := V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ aus, so daß wir eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform auf $V_\mathbb{C}$ erhalten, die wieder mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ bezeichnet wird. Wir betrachten weiterhin den $V_\mathbb{C}$ zugeordneten projektiven Raum $P(V_\mathbb{C})$ zusammen mit der kanonischen Projektion $\pi : V_\mathbb{C} - \{0\} \to P(V_\mathbb{C})$. Mit $[\mathfrak{z}]$ sei das Bild von $\mathfrak{z}$ unter π bezeichnet. Da der Vektorraum $V_\mathbb{C}$ durch Grundkörpererweiterung aus einem reellen Vektorraum entsteht, sind Real- und Imaginärteil auf kanonische Weise für Vektoren aus $V_\mathbb{C}$ erklärt, ebenso wie der durch die komplexe Konjugation induzierte Antiautomorphismus $\mathfrak{z} \mapsto \bar{\mathfrak{z}}$.

1.3.1 Definition. *Es seien $V_\mathbb{C}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wie oben. Die Menge*

$$\mathcal{N} := \{[\mathfrak{z}] \in P(V_\mathbb{C}) \,|\, \langle\mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle = 0\}$$

heißt ***Nullquadrik****. Ferner bezeichnen wir mit $\mathcal{K}$ die Teilmenge*

$$\mathcal{K} := \{[\mathfrak{z}] \in \mathcal{N} \,|\, \langle\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}\rangle > 0\}.$$

1.3.2 Satz. *Die Menge $\mathcal{K}$ ist homöomorph zu einer aus zwei Zusammenhangskomponenten bestehenden offenen Teilmenge des $\mathbb{C}^n$.*

Beweis: Wir konstruieren explizit die offene Teilmenge $U \subset \mathbb{C}^n$ und eine topologische Abbildung $\iota : \mathcal{K} \to U$.

Für Repräsentanten $\mathfrak{z}$ von $[\mathfrak{z}]$ schreibe man $(z_1, \ldots, z_{n+2})$ für die Koordinatendarstellung bezüglich der soeben gewählten Basis. Sei $\mathfrak{z} = \mathfrak{x} + i\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in V$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann ist $[\mathfrak{z}] \in \mathcal{K}$ äquivalent mit

$$\langle\mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle = \langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle - \langle\mathfrak{y},\mathfrak{y}\rangle + 2i\langle\mathfrak{x},\mathfrak{y}\rangle = 0$$

und der Positivität von

$$\langle\mathfrak{z},\bar{\mathfrak{z}}\rangle = \langle\mathfrak{x},\mathfrak{x}\rangle + \langle\mathfrak{y},\mathfrak{y}\rangle.$$

Es haben also $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gleiche positive Norm und stehen senkrecht zueinander. Daher spannen sie einen reell zweidimensionalen Untervektorraum W von V auf mit der Eigenschaft, daß die

Einschränkung $\langle\cdot,\cdot\rangle|_W$ positiv definit ist. Wegen $q(\mathfrak{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - \cdots - x_{n+2}^2$ (bzw. $q(\mathfrak{x}) = x_1x_2 + x_3^2$) gilt

$$W = \operatorname{span}(\{\mathfrak{x},\mathfrak{y}\}) \not\subseteq \{\mathfrak{v} \in V | v_j = 0\} \text{ für } j = 1,2,3,4 \text{ (bzw. } j = 1,2).$$

Keine der Komponenten $z_j = x_j + iy_j$ mit $j \in \{1,2,3,4\}$ (bzw. $\{1,2\}$) verschwindet folglich. Man kann daher z_2 normieren; z_1 ist dann durch die Bedingung $\frac{1}{2}\langle\mathfrak{z},\mathfrak{z}\rangle = q(\mathfrak{z}) = 0$ festgelegt. Ein solcher Repräsentant ist durch die Klasse $[\mathfrak{z}]$ eindeutig bestimmt.

Sei im weiteren zunächst $n \geq 2$, und sei $[\mathfrak{z}]$ repräsentiert durch den Vektor $(-z_3z_4 + z_5^2 + \ldots + z_{n+2}^2, 1, z_3, z_4, z_5, \ldots, z_{n+2})$. Dann gilt

$$\mathfrak{y} = \Im(-z_3z_4 + z_5^2 + \ldots + z_{n+2}^2, 1, z_3, \ldots, z_{n+2}) = (\Im(-z_3z_4 + z_5^2 + \ldots + z_{n+2}^2), 0, y_3, \ldots, y_{n+2})$$

und somit

$$q(\mathfrak{y}) = y_3y_4 - y_5^2 - \cdots - y_{n+2}^2 > 0,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$y_3y_4 > y_5^2 + \cdots + y_{n+2}^2.$$

Für

$$U := \{(z_3, \ldots, z_{n+2}) \in \mathbb{C}^n \,|\, z_j = x_j + iy_j, \quad y_3y_4 > y_5^2 + \cdots + y_{n+2}^2\}$$

ist die Abbildung $\iota : \mathcal{K} \to U$, $[*, 1, z_3, \ldots, z_{n+2}] \mapsto (z_3, \ldots, z_{n+2})$ wohldefiniert, nach Konstruktion bijektiv und in beiden Richtungen stetig.

Im Falle $n = 1$ erhalten wir mit dem gleichen Vorgehen für den Imaginärteil die Bedingung $y_3^2 > 0$, was auf die Definition $U := \mathbb{C} - \mathbb{R}$ führt.

Offensichtlich besteht U in beiden Fällen aus zwei Zusammenhangskomponenten. □

Bemerkung: Aus dem Beweis geht hervor, daß die Elemente aus $\mathcal{K}$ eindeutig den orientierten Orthonormalbasen reell zweidimensionaler Unterräume U von V mit der Eigenschaft, daß $q|_U$ positiv definit ist, entsprechen.

1.3.3 Definition. *Sei $n \geq 1$. Mit $\mathcal{H}_n$ bezeichnen wir im Falle $n = 1$ die obere Halbebene $\mathbb{H}$ und im Falle $n \geq 2$ die verallgemeinerte* ***obere Halbebene n-ten Grades***

$$\mathcal{H}_n := \{(z_3, \ldots, z_{n+2}) \in \mathbb{C}^n \,|\, y_3 > 0,\ y_3y_4 > y_5^2 + \ldots, y_{n+2}^2\}.$$

Ihr Urbild $\iota^{-1}(\mathcal{H}_n)$, also eine Zusammenhangskomponente von $\mathcal{K}$, versehen mit der von der Einschränkung von ι induzierten Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit, wird mit $\hat{\mathcal{H}}_n$ bezeichnet.

Bemerkung: Die Halbebene $\mathcal{H}_n$ ist ein Tubengebiet, also von der Form $\mathbb{R}^n + i\mathcal{D}$ mit einer offenen Menge $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$.

1.3.4 Definition. *Wir bezeichnen das Urbild $\pi^{-1}(\hat{\mathcal{H}}_n)$ von $\hat{\mathcal{H}}_n$ in $V_\mathbb{C} - \{0\}$ mit $\tilde{\mathcal{H}}_n$. Es ist lokal topologisch abbildbar auf $\mathbb{C}^* \times \mathcal{H}_n$ und trägt daher ebenfalls eine natürliche Struktur als komplexe Mannigfaltigkeit.*

1.3.5 Satz. *Die Einschränkung der kanonischen Projektion $\pi : \tilde{\mathcal{H}}_n \to \hat{\mathcal{H}}_n$ läßt einen Schnitt σ zu, d.h. es gibt eine Abbildung $\sigma : \mathcal{H}_n \to \tilde{\mathcal{H}}_n$ mit $\iota \circ \pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{\mathcal{H}_n}$.*

Beweis: Sei $(z_3, \ldots, z_{n+2}) \in \mathcal{H}_n$. Dann liegt der durch die Koordinatendarstellung bezüglich der fest gewählten Basis von $V_\mathbb{C}$ gegebene Vektor $(-z_3z_4 + z_5^2 + \cdots + z_{n+2}^2, 1, z_3, \ldots, z_{n+2})$ bzw. $(-z_3^2, 1, z_3)$ in $\tilde{\mathcal{H}}_n$. Die Abbildung $\sigma : (z_3, \ldots, z_{n+2}) \mapsto (-z_3z_4 + z_5^2 + \cdots + z_{n+2}^2, 1, z_3, \ldots, z_{n+2})$ bzw. $\sigma : (z_3) \mapsto (-z_3^2, 1, z_3)$ leistet das Gewünschte. □

1.3.2 Operation orthogonaler Gruppen

Wie vorher seien (V, q) ein quadratischer Raum und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ die zugehörige Bilinearform. Es sei eine orthogonale Halbebene $\hat{\mathcal{H}}_n$ wie in Definition 1.3.3 gewählt. Mit $O(V) := O(V, q)$ sei wie üblich die orthogonale Gruppe des Vektorraumes V in Bezug auf q bezeichnet, also

$$O(V) = \{g \in Gl(V) \,|\, q(g\mathfrak{x}) = q(\mathfrak{x}) \text{ für alle } \mathfrak{x} \in V\}.$$

Da diese Gruppe bis auf Isomorphie nur von der Signatur von V abhängt, können wir $O(2, n) := O(V)$ schreiben. Die orthogonale Gruppe $O(V)$ operiert auf V in natürlicher Weise. Diese Operation wird $\mathbb{C}$-linear auf $V_{\mathbb{C}}$ fortgesetzt und induziert so eine Operation auf $P(V_{\mathbb{C}})$, $\mathcal{N}$ und $\mathcal{K}$. Die Untergruppe von $O(V)$, die die gewählte Halbebene $\hat{\mathcal{H}}_n$ in sich überführt, hat in $O(V)$ den Index 2 und wird mit $O^+(V)$ bezeichnet. Sie operiert via ι auch auf $\mathcal{H}_n$ durch gebrochen lineare Transformationen.

1.3.6 Definition. *Seien $\mathfrak{z} = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_{n+2}) \in \tilde{\mathcal{H}}_n$ und $g \in O^+(V)$. Wir definieren den **Automorphiefaktor** $J : O^+(V) \times \tilde{\mathcal{H}}_n \to \mathbb{C}^*$ unter Beachtung der Ungleichung $z_2 \neq 0$ durch die Gleichung $g\mathfrak{z} = (w_1, J(g, \mathfrak{z})z_2, w_3, \ldots, w_{n+2})$.*

1.3.7 Bemerkung. *Aufgrund der Definition ist unmittelbar klar, daß mit den bisherigen Bezeichnungen folgendes gilt:*

1. *Sind $g, h \in O^+(V)$ und $\mathfrak{z} \in \tilde{\mathcal{H}}_n$, so erfüllt J die Kozykelrelation $J(gh, \mathfrak{z}) = J(g, h\mathfrak{z})J(h, \mathfrak{z})$.*

2. *Ist $Z \in \mathcal{H}_n$, so besteht die Relation $g\sigma(Z) = J(g, \sigma(Z)) \cdot \sigma(gZ)$ mit den jeweiligen Verknüpfungen.*

Abkürzend schreiben wir für $Z \in \mathcal{H}_n$ anstelle von $J(g, \sigma(Z))$ auch $J(g, Z)$, wenn keine Verwechslungen zu befürchten sind. Es ist $J(g, \sigma(Z))$ der Nenner der gebrochen linearen Transformation, mit der g auf Z wirkt.

Sei $L \subset (V, q)$ ein gerades Gitter. Dann sei

$$O(L) := \{g \in O(V) \,|\, g(L) \subset L\}$$

und

$$O^+(L) := O(L) \cap O^+(V)$$

vereinbart. $O^+(L)$ ist eine diskrete Untergruppe von $O^+(V)$. Dies ist die im folgenden von uns betrachtete, auf $\mathcal{H}_n$ vermöge biholomorpher Selbstabbildungen operierende Modulgruppe. Sie operiert eigentlich diskontinuierlich auf der orthogonalen Halbebene.

Fernerhin benötigen wir die Gruppe der rationalen Transformationen in $O^+(V)$. Diese seien gegeben durch die Definition

$$O^+(V_{\mathbb{Q}}) := \{g \in O^+(V) \,|\, g(V_{\mathbb{Q}}) \subset V_{\mathbb{Q}}\}$$

mit dem vom Gitter L erzeugten $\mathbb{Q}$-Vektorraum $V_{\mathbb{Q}}$ gemäß Definition 1.1.4.

1.3.3 Spitzen der orthogonalen Halbebene

Wie im Falle gewöhnlicher elliptischer Modulformen betrachtet man für Untergruppen $\Gamma \subset O^+(L)$ von endlichem Index auch den Quotienten $\Gamma\backslash\mathcal{H}_n$ und seine Kompaktifizierung X_Γ. Alle von uns benötigten Informationen darüber sind bei [Fr3] und [Me] ausführlich dargestellt. Darum wollen wir die nun folgende Beschreibung möglichst knapp halten. Wir beginnen mit der grundlegenden Definition.

1.3.8 Definition. *Unter einer **Spitze** verstehen wir einen nichttrivialen isotropen rationalen Vektor $\mathfrak{v} \in V_\mathbb{Q}$.*

Gehen wir noch einmal in den Beweis von Satz 1.3.2 zurück, so erkennen wir, daß die dort konstruierte biholomorphe Abbildung ι von der Wahl einer Basis des Vektorraumes V abhängt. Von dieser Basis wurde gefordert, daß die Form q die Koordinatendarstellung $q(\mathfrak{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - \cdots - x_{n+2}^2$ besitzt. Eine solche Basis läßt sich im reellen Vektorraum V stets finden.

Nun sollen die ersten beiden Basisvektoren jedoch selbst rational sein, also in $V_\mathbb{Q}$ liegen. Sei dazu das Gitter L, gleichbedeutend also der Vektorraum $V_\mathbb{Q}$, isotrop, und sei $\mathfrak{v}$ eine Spitze. Nach Lemma 1.1.24 kann man eine Basis $\{\mathfrak{v}, e_2, \ldots, e_{n+2}\}$ von V mit $\mathfrak{v}, e_2 \in V_\mathbb{Q}$ finden, so daß die quadratische Form die verlangte Koordinatendarstellung hat. Diese Basis ist auch eine Basis von V, und die Abbildung $\iota = \iota_\mathfrak{v}$ führt nach eventuellem Ersetzen von e_2 durch $-e_2$ stets die gleiche Zusammenhangskomponente von $\mathcal{K}$ in $\mathcal{H}_n$ über.

Jeder Spitze $\mathfrak{v}$, genauer jeder Basis $\{\mathfrak{v}, e_2, \ldots, e_{n+2}\}$ wie oben, ist also eine biholomorphe Abbildung $\iota_\mathfrak{v} : \mathcal{H}_n \to \hat{\mathcal{H}}_n$ zugeordnet, ebenso ein Schnitt $\sigma_\mathfrak{v} : \mathcal{H}_n \to \tilde{\mathcal{H}}_n$. Ist $\mathfrak{w}$ eine weitere Spitze, so gibt es nach einem Satz von Witt eine rationale orthogonale Transformation $\gamma \in O^+(V_\mathbb{Q})$ mit $\mathfrak{w} = \gamma\mathfrak{v}$. Offenbar gilt dann $\iota_\mathfrak{v} = \iota_\mathfrak{w} \circ \gamma$ für die bezüglich der Basis $\{\mathfrak{w}, \gamma e_2, \ldots, \gamma e_{n+2}\}$ definierte Abbildung $\iota_\mathfrak{w}$. Wir betrachten im weiteren nur solche Basen, die aus der eingangs gewählten durch eine solche rationale Transformation hervorgehen.

Die vermöge $\iota_\mathfrak{v}$ übertragene Operation von $O^+(V)$ auf $\mathcal{H}_n$ hängt von der gewählten Spitze $\mathfrak{v}$, genauer von der Basis $\{\mathfrak{v}, e_2, \ldots, e_{n+2}\}$ ab. Ist $\{\mathfrak{w}, f_2, \ldots, f_{n+2}\}$ eine zweite Basis mit einer Spitze $\mathfrak{w}$ und ist $\gamma \in O^+(V_\mathbb{Q})$ mit $\gamma\mathfrak{v} = \mathfrak{w}$ sowie $\gamma e_i = f_i$ für alle i, so operiert $g \in O^+(V)$ via $\iota_\mathfrak{w}$ auf $\mathcal{H}_n$ wie $\gamma^{-1}g\gamma$ via $\iota_\mathfrak{v}$. Wir finden also eine Situation vor, die vollkommen analog zu derjenigen der gewöhnlichen Modulgruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ ist.

Spitzen sind nulldimensionale Randkomponenten. Es treten jedoch auch zur eindimensionalen Halbebene $\mathcal{H}_1$ biholomorph äquivalente Anteile als Randkomponenten auf. Diese stehen in enger Beziehung zu zweidimensionalen isotropen Unterräumen des rationalen Vektorraumes $V_\mathbb{Q}$ und sind in [Fr3] näher beschrieben.

1.3.4 Modulformen zu $O(2, n)$

Wir wollen Modulformen zu orthogonalen Gruppen $O(2, n)$ bezüglich der in Abschnitt 1.3.2 dargestellten Operation betrachten. Diese werden allerdings nicht im projektiven Modell $\hat{\mathcal{H}}_n$ definiert, sondern auf dessen Urbild $\tilde{\mathcal{H}}_n$. Sei nun stets ein Gitter $L \subset V$ fest gewählt.

1.3.9 Definition. *Seien $\Gamma \subset O^+(L)$ eine Untergruppe von endlichem Index, $k \in \mathbb{Z}$ und $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ ein unitärer Charakter. Eine **holomorphe automorphe Form** bezüglich Γ zum Charakter χ vom Gewicht k ist eine holomorphe Funktion $f : \tilde{\mathcal{H}}_n \longrightarrow \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften*

1. *$f(t\mathfrak{z}) = t^{-k} f(\mathfrak{z})$ für alle $t \in \mathbb{C}^*$,*
2. *$f(g\mathfrak{z}) = \chi(g) f(\mathfrak{z})$ für alle $g \in \Gamma$.*

Dabei bezeichne $g\mathfrak{z}$ die natürliche Operation von Γ auf $\tilde{\mathcal{H}}_n \subset V_{\mathbb{C}} - \{0\}$. Allgemeiner ist eine ***automorphe Form*** *eine meromorphe Funktion f mit dem eben beschriebenen Transformationsverhalten.*

1.3.10 Bemerkung. *(cf. [Marg] Prop. 5.3, S. 324) Jeder Charakter χ einer Untergruppe von $O^+(L)$ von endlichem Index hat endliche Ordnung, falls $n \geq 3$, d.h. es gibt $e \in \mathbb{N}$ mit $\chi^e \equiv 1$. Für $n = 1$ oder $n = 2$ gilt diese Aussage für alle Charaktere, die im Zusammenhang mit Borcherdsprodukten auftreten. Dies vereinfacht die Fourierentwicklung von Modulformen.*

Sei $\sigma_{\mathfrak{v}}$ ein Schnitt wie in Satz 1.3.5. Sein Bild enthält aus jeder Faser des Bündels $\tilde{\mathcal{H}}_n$ genau einen Punkt $\sigma_{\mathfrak{v}}(Z)$. Wegen der Homogenität ist eine Modulform durch ihre Werte auf dem Bild des Schnittes daher bereits festgelegt. Wir können diesen Sachverhalt auch so ausdrücken:

1.3.11 Lemma. *Sei $\sigma_{\mathfrak{v}}$ ein zu $\iota_{\mathfrak{v}}$ gehörender Schnitt wie in Satz 1.3.5. Die Zuordnung $f \mapsto f \circ \sigma_{\mathfrak{v}}$ ist ein Isomorphismus zwischen dem Vektorraum der automorphen Formen $f : \tilde{\mathcal{H}}_n \to \mathbb{C}$ vom Gewicht k zur Gruppe Γ und Charakter χ und dem Raum der meromorphen Funktionen $F : \mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ mit dem Transformationsverhalten*

$$F(gZ) = \chi(g)J(g,Z)^k F(Z)$$

für alle $Z \in \mathcal{H}_n$ und $g \in \Gamma$.

Beweis: Für $F(Z) := f(\sigma(Z))$ mit $\sigma = \sigma_{\mathfrak{v}}$ und $g \in \Gamma$ gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} F(gZ) &= f(\sigma(gZ)) \\ &= f(J(g,Z)^{-1} g\sigma(Z)) && \text{(cf. Bemerkung 1.3.7, Nr. 2)} \\ &= J(g,Z)^k f(g\sigma(Z)) \\ &= \chi(g)J(g,Z)^k f(\sigma(Z)) \\ &= \chi(g)J(g,Z)^k F(Z). \end{aligned}$$

□

Wie im vorigen Abschnitt erläutert, hängt der Schnitt $\sigma_{\mathfrak{v}}$ und damit auch die Zuordnung $f \leftrightarrow F = F_{\mathfrak{v}}$ von der Auswahl einer Spitze ab. Wir ordnen nun einer Funktion $F_{\mathfrak{v}}$ auf $\mathcal{H}_n$ eine Fourierentwicklung zu, die dann ebenfalls von der Spitze abhängt. Dies ist analog zu gewöhnlichen Modulformen zu sehen, die genauso in jeder rationalen Spitze eine Fourierentwicklung besitzen. Mit Hilfe der sogenannten Eichlertransformationen (cf. Abschnitt 3.1) beweist man zunächst das Folgende:

1.3.12 Satz. *Sei $\mathfrak{v}$ eine Spitze und sei $\mathfrak{v}, e_2, \ldots, e_{n+2}$ eine Basis von V mit rationalem $\mathfrak{v}$ und e_2, bezüglich der q die Standardform $q(\mathfrak{x}) = x_1x_2 + x_3x_4 - x_5^2 - \ldots - x_{n+2}^2$ annimmt. Sei f eine automorphe Form vom Gewicht k zu einer Untergruppe $\Gamma \subset O^+(L)$ von endlichem Index und zu einem Charakter endlicher Ordnung. Sei weiterhin $F_{\mathfrak{v}}$ die via dem Schnitt $\sigma_{\mathfrak{v}}$ der Modulform f zugeordnete Funktion auf $\mathcal{H}_n$. Dann gibt es ein Gitter $L_1 \subset \mathbb{C}^n$ mit $\sigma_{\mathfrak{v}}(L_1) \subset V_{\mathbb{Q}}$, so daß*

$$F_{\mathfrak{v}}(Z + l) = F_{\mathfrak{v}}(Z)$$

für alle $l \in L_1$ und $Z \in \mathcal{H}_n$ gilt. Insbesondere besitzt $F_\mathfrak{v}$ eine Fourierentwicklung der Form

$$F_\mathfrak{v}(Z) = \sum_{m \in L_1'} a(m)\mathbf{e}(\langle m, Z\rangle),$$

wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die der quadratischen Form $q(Z) = z_3z_4 - z_5^2 - \ldots - z_{n+2}^2$ auf $\mathbb{C}^n$ zugeordnete Bilinearform bezeichne.

1.3.13 Definition. *Mit den obigen Bezeichnungen sei*

$$\mathcal{P} := \{X = (x_3, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{Q}L_1 \mid x_3x_4 - x_5^2 - \ldots - x_{n+2}^2 > 0,\, x_3 > 0\} \subset \mathbb{C}^n$$

der ***positive Kegel*** *genannt.*

1.3.14 Definition. *Sei $\Gamma \subset O^+(L)$ eine Untergruppe von endlichem Index, $k \in \mathbb{Z}$ und $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ ein unitärer Charakter endlicher Ordnung. Eine* ***holomorphe Modulform*** *bezüglich Γ zum Charakter χ vom Gewicht k ist eine holomorphe automorphe Form zu ebendiesen Daten, so daß für jede Spitze $\mathfrak{v}$ die Fourierentwicklung die Form*

$$F_\mathfrak{v}(Z) = \sum_{m \in L_1' \cap \overline{\mathcal{P}}} a(m)\mathbf{e}(\langle m, Z\rangle).$$

hat.

Ist der Raum $V_\mathbb{Q}$ anisotrop, so gibt es keine rationalen Spitzen. Insbesondere hat f dann keine lokalen Fourierentwicklungen. In diesem Falle ist jede holomorphe automorphe Form bereits eine Modulform. Dies ist jedoch auch in fast allen anderen Fällen so, wie der folgende Satz besagt, der kein eindimensionales Analogon besitzt.

1.3.15 Satz. *Sei f eine holomorphe automorphe Form wie in Satz 1.3.12. Ist $\mathfrak{v}$ eine rationale Spitze und ist die zugehörige Fourierentwicklung von f gegeben durch*

$$F_\mathfrak{v}(Z) = \sum_{m \in L_1'} a(m)\mathbf{e}(\langle m, Z\rangle),$$

so folgt aus $a(m) \neq 0$ bereits $m \in \overline{\mathcal{P}}$, es sei denn, einer der beiden folgenden Fälle tritt ein: V hat Signatur $(2,1)$ und $V_\mathbb{Q}$ ist isotrop, oder V hat Signatur $(2,2)$ und $V_\mathbb{Q}$ besitzt sogar einen zweidimensionalen isotropen Unterraum. In allen anderen Fällen sind holomorphe automorphe Formen also per se bereits holomorphe Modulformen.

Bemerkung: Der Fall der gewöhnlichen Modulformen läßt sich auch im Rahmen orthogonaler Gruppen beschreiben. Er trifft dann aber gerade den Ausnahmefall mit Signatur $(2,1)$ und isotropem $V_\mathbb{Q}$.

1.3.5 Modulformen rationalen Gewichts

Um eine Umformulierung des Dualitätssatzes von Borcherds (2.1.7) in geeigneter Weise angeben zu können, müssen wir Modulformen rationalen Gewichts erklären. Aus Gründen der Praktikabilität definieren wir sie unter Verwendung von Multiplikatorsystemen auf dem Halbebenenmodell $\mathcal{H}_n$.

Da die orthogonale Halbebene $\mathcal{H}_n$ einfach zusammenhängend und der Automorphiefaktor J stetig und stets ungleich Null ist, besitzt für jedes $q \in \mathbb{N}$ und $g \in O^+(V)$ die Funktion

$Z \mapsto J(g, Z)$ eine holomorphe q-te Wurzel. Es sei nun für jedes g eine q-te Wurzel gewählt, die mit dem Symbol $\sqrt[q]{J(g,Z)}$ bezeichnet wird. Ist der Automorphiefaktor identisch 1, so gelte dies auch für die gewählte Wurzel. Die so ausgewählten Wurzeln werden ein für allemal festgehalten. Es sei angemerkt, daß man sie im allgemeinen nicht durch Wahl einer festen Wurzel auf einem geeigneten Teilgebiet von $\mathbb{C}$ erhalten kann.

1.3.16 Definition. *Sei Γ eine Untergruppe von $O^+(L)$ und sei $k \in \mathbb{Q}$, $k = \frac{p}{q}$ mit teilerfremden p und q. Es seien q-te Wurzeln von $J(g, Z)$ wie oben gewählt. Ein Multiplikatorsystem auf Γ vom Gewicht k ist eine Abbildung $\chi : \Gamma \to S^1$, so daß das Produkt $\chi(g)J(g,Z)^k := \chi(g)\sqrt[q]{J(g,Z)}^p$ die Kozykelrelation*

$$\chi(gh)J(gh,Z)^k = \chi(g)\chi(h)J(g,hZ)^k J(h,Z)^k \qquad \text{für alle } g,h \in \Gamma \text{ und } Z \in \mathcal{H}_n$$

erfüllt.

Ist χ ein Multiplikatorsystem auf Γ und v ein Charakter dieser Gruppe, so ist $v\chi$ wiederum ein Multiplikatorsystem gleichen Gewichts auf Γ. Der Quotient zweier Multiplikatorsysteme gleichen Gewichts ist stets ein Charakter. Hat χ das Gewicht $k = \frac{p}{q}$, so ist die q-te Potenz von χ wegen der Kozykelrelation (cf. Bemerkung 1.3.7 Nr. 1) selbst ein Charakter, hat also nach Bemerkung 1.3.10 endliche Ordnung. Es gibt daher eine kleinste Zahl $e \in \mathbb{N}$ mit $\chi^e \equiv 1$. Diese nennen wir die Ordnung des Multiplikatorsystems.

1.3.17 Definition. *Sei $\Gamma \subset O^+(L)$ eine Untergruppe von endlichem Index, $k = p/q \in \mathbb{Q}$. Es seien q-te Wurzeln $\sqrt[q]{J(g,Z)}$ wie oben gewählt, und sei χ ein Multiplikatorsystem vom Gewicht k auf Γ. Eine* **automorphe Form** *bezüglich Γ* **vom rationalen Gewicht** *k ist eine meromorphe Funktion F auf $\mathcal{H}_n$ mit dem Transformationsverhalten*

$$F(gZ) = \chi(g)J(g,Z)^k = \chi(g)\sqrt[q]{J(g,Z)}^p F(Z).$$

Im Gegensatz zum Fall ganzzahliger Gewichte entsprechen automorphe Formen mit rationalem Gewicht keinen Funktionen auf dem Urbild $\tilde{\mathcal{H}_n}$. Man könnte ihnen stattdessen Funktionen auf der universellen Überlagerung von $\tilde{\mathcal{H}_n}$ zuordnen. Wir gehen darauf nicht weiter ein. Wichtig für unsere Zwecke ist vor allem, daß auch automorphe Formen rationalen Gewichtes eine Fourierentwicklung besitzen:

1.3.18 Satz. *(Fourier-Entwicklung) Sei F eine Modulform (in Koordinaten des Tubengebietes) vom Gewicht $k = \frac{p}{q}$ zu einer Untergruppe Γ von $O^+(L)$ und zum Multiplikatorsystem χ. Es gelte $\chi^e \equiv 1$. Dann besitzt F eine Fourierentwicklung der Form*

$$F(Z) = \sum_{m \in \frac{1}{e}L_1'} a(m)\mathbf{e}(\langle m, Z\rangle).$$

Beweis: Wie im Falle ganzen Gewichtes findet man ein Gitter L_1, bezüglich dem sich F in der Form $F(Z + l) = \chi(M_l)F(Z)$ transformiert, wobei $M_l \in \Gamma$ die Translation $Z \mapsto Z + l$ realisiere. Durch wiederholte Anwendung zeigt man, daß die Zuordnung $l \mapsto \chi(M_l)$ ein Homomorphismus ist. Daher ist für jedes $l \in L_1$ stets $\chi(M_{el}) = 1$, die Modulform also unter dem Gitter eL_1 invariant. □

Wie im Falle ganzzahligen Gewichtes können wir nun Modulformen als automorphe Formen mit zusätzlichen Forderungen an die Fourierentwicklung definieren. An Stelle einer Entwicklung in jeder Spitze tritt nun eine Entwicklung jeder Transformierten $J(g,Z)^{-k}F(gZ)$, die selbst wieder eine Modulform ist. Diese ist zwar zu einer anderen Gruppe und Multiplikatorsystem definiert, besitzt aber wieder eine Fourierentwicklung.

1.3.19 Definition. *Sei $\Gamma \subset O^+(L)$ eine Untergruppe von endlichem Index, $k = p/q \in \mathbb{Q}$. Sei χ ein Multiplikatorsystem vom Gewicht k auf Γ mit $\chi^e \equiv 1$. Eine* ***holomorphe Modulform*** *bezüglich Γ* ***vom rationalen Gewicht*** *k ist eine holomorphe automorphe Form F, so daß für jedes $g \in O^+(L)$ die Transformierte $J(g,Z)^{-k}F(gZ)$ eine Fourierentwicklung der Form*

$$J(g,Z)^{-k}F(gZ) = \sum_{m \in \frac{1}{e}L_1' \cap \overline{\mathcal{P}}} a(m)\mathbf{e}(\langle m, Z\rangle)$$

besitzt.

1.3.6 Divisoren und Hauptdivisoren

Wie üblich sollen Null- und Polstellengebilde von Modulformen betrachtet werden. Dies führt auf den Begriff des Hauptdivisors oder allgemeiner des Divisors. Alle hier und im nächsten Abschnitt über die spezielleren Heegnerdivisoren verwendeten Fakten sind in der Arbeit [Bu] dargestellt, auf die wir für Details verweisen. Da die Theorie keine zentrale Rolle für unsere Fragestellung spielt, sei eine gewisse Knappheit erlaubt.

Sei $\mathcal{X}$ eine analytische Mannigfaltigkeit, und sei A eine abgeschlossene analytische Teilmenge von $\mathcal{X}$. Dann ist A eine höchstens abzählbare, lokal-endliche Vereinigung irreduzibler analytischer Teilmengen $A_i \subset \mathcal{X}$, die Primkomponenten von A heißen. Dabei bedeute lokal-endlich, daß jedes Kompaktum $K \subset \mathcal{X}$ nur endlich viele der A_i trifft.

Ist $A \subset \mathcal{X}$ eine irreduzible analytische Menge, so ist die Teilmenge A_{reg} der regulären Punkte von A zusammenhängend und nicht leer. Daher kann man A eine Dimension $\dim A$ als die Dimension in einem regulären Punkt zuordnen. Damit steht insbesondere auch der Begriff der Kodimension für irreduzible analytische Mengen zur Verfügung. Ein Divisor auf $\mathcal{X}$ ist nun eine abgeschlossene analytische Menge A, so daß jede ihrer Primkomponenten A_i Kodimension 1 hat, versehen mit einer Abbildung, die jeder dieser Primkomponenten eine ganze Zahl n_{A_i} zuordnet. Wir schreiben für einen Divisor suggestiv $\mathcal{D} = \sum n_{A_i} A_i$, wobei die Summe über alle Primkomponenten von A zu erstrecken ist. Die Grundmenge $A = \cup_{n_{A_i} \neq 0} A_i$ heißt Träger des Divisors $\mathcal{D}$. Die Divisoren auf einem festem Grundraum $\mathcal{X}$ bilden eine abelsche Gruppe bezüglich der offensichtlichen Addition.

Nun soll einer meromorphen Funktion $f \not\equiv 0$ auf der analytischen Mannigfaltigkeit $\mathcal{H}_n$ ein Divisor (f) zugeordnet werden, den wir den durch f bestimmten Hauptdivisor nennen wollen. Sei dazu A eine beliebige irreduzible analytische Teilmenge von $\mathcal{H}_n$ der Kodimension 1. Wir wollen ihr eine Multiplizität $n_A(f)$ zuordnen.

Sei p ein regulärer Punkt aus A. Dann gibt es eine Umgebung U_φ von p in $\mathcal{H}_n$ und eine Karte $\varphi : U_\varphi \to V_\varphi$ mit $V_\varphi \subset \mathbb{C}^n$, so daß gilt

$$\varphi(A \cap U_\varphi) = \{z \in V_\varphi \mid z_n = 0\}.$$

Wir können annehmen, daß φ den Punkt p in den Nullpunkt abbildet, und entwickeln f_φ in einer geeigneten Umgebung des Nullpunktes nach z_n in eine Laurentreihe

$$f_\varphi(z_1, \ldots, z_n) = \sum_{j=n_0(p)}^{\infty} a_j(z_1, \ldots, z_{n-1}) z_n^j$$

mit $a_{n_0(p)}(z_1, \ldots, z_{n-1}) \not\equiv 0$.

Die Zahl $n_0(p)$ ist eindeutig durch f bestimmt und hängt nicht von der Auswahl der Koordinatenabbildung φ ab. Da die Laurententwicklung von f_φ in einer vollen Umgebung des Nullpunktes gültig ist, ist die auf A_{reg} erklärte Abbildung $p \mapsto n_0(p)$ lokal konstant und damit konstant, da A irreduzibel und daher A_{reg} zusammenhängend ist. Wir können daher $n_A(f) := n_0(p)$ für ein beliebiges $p \in A_{\text{reg}}$ setzen.

Es bleibt nachzuprüfen, ob die Vereinigung $\cup_{n_A \neq 0} A$ lokal-endlich ist, ob also die Multiplizitäten n_A einen Divisor bestimmen. Dies liegt daran, daß sich f lokal als Quotient zweier holomorpher Funktionen schreiben läßt. Wir halten die Ergebnisse unserer Überlegungen in einer Definition fest.

1.3.20 Definition. *Sei f eine meromorphe Funktion auf der komplexen Mannigfaltigkeit $\mathcal{H}_n$. Der durch f bestimmte* ***Hauptdivisor*** *(f) ist der Divisor, der durch die Multiplizitäten $n_A(f)$ bestimmt ist.*

Sei $f \not\equiv 0$ eine meromorphe Modulform ganzen Gewichts, so ist sie a priori auf $\tilde{\mathcal{H}}_n$ definiert. Die ihr zugeordneten Funktionen $F_{\mathfrak{v}} = f \circ \sigma_{\mathfrak{v}}$ auf $\mathcal{H}_n$ induzieren aufgrund des Transformationsverhaltens unter $\mathbb{C}^*$ alle den gleichen Divisor, den wir den Divisor (f) von f in $\mathcal{H}_n$ nennen. Modulformen rationalen Gewichts sind direkt auf der Halbebene $\mathcal{H}_n$ definiert und liefern dort einen Divisor; im Falle ganzen Gewichts stimmen beide Begriffe überein. Die Hauptdivisoren bilden eine Untergruppe der Gruppe aller Divisoren.

1.3.7 Heegnerdivisoren

Heegnerdivisoren sind spezielle Divisoren, die durch Einbettung von $(n-1)$-dimensionalen Halbebenen $\mathcal{H}_{n-1}$ in $\mathcal{H}_n$ gewonnen werden. Sie entstehen aus dem orthogonalen Komplement rationaler Vektoren negativer Norm. Seien $n \geq 2$ und $\mathfrak{v} \in V_{\mathbb{Q}}$ ein solcher Vektor. Sein orthogonales Komplement $\mathfrak{v}^{\perp}$ in V trägt die quadratische Form $q|_{\mathfrak{v}^{\perp}}$ der Signatur $(2, n-1)$. Die Menge $\mathfrak{v}^{\perp}$ läßt sich auch als Teilmenge von $V_{\mathbb{C}}$ sowie im projektiven Raum $P(V_{\mathbb{C}})$ lesen. Damit ist $\hat{\mathcal{H}}_{n-1}(\mathfrak{v}) := \mathfrak{v}^{\perp} \cap \hat{\mathcal{H}}_n$ wohldefiniert. Das Bild dieser Menge in $\mathcal{H}_n$ unter der Koordinatisierung ι wird mit $\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$ bezeichnet. Es ist biholomorph äquivalent zur Halbebene $\mathcal{H}_{n-1}$ und durch eine reguläre quadratische Gleichung beschrieben. Insbesondere handelt es sich um eine irreduzible analytische Teilmenge von $\mathcal{H}_n$ der Kodimension 1. Wir fassen $\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$, versehen mit der Multiplizität 1, als Divisor auf.

1.3.21 Definition. *Sei $\mathfrak{v} \in V_{\mathbb{Q}}$ ein Vektor mit negativer Norm. Der $\mathfrak{v}$ zugeordnete Divisor $\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$ auf $\mathcal{H}_n$ heißt* ***Heegnerprimdivisor****. Ein* ***Heegnerdivisor*** *ist eine lokal-endliche ganzzahlige formale Linearkombination*

$$\sum_{\mathfrak{v} \in V_{\mathbb{Q}}} n_{\mathfrak{v}} \mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$$

von Heegnerprimdivisoren, d.h. zu jedem Kompaktum K in $\mathcal{H}_n$ gebe es nur endlich viele $n_{\mathfrak{v}}$ mit $n_{\mathfrak{v}} \neq 0$ und $\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v}) \cap K \neq \emptyset$.

Aufgrund der Konstruktion gilt $\mathcal{H}_{n-1}(\lambda\mathfrak{v}) = \mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$ für $\lambda \in \mathbb{Q}^*$ sowie $g\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v}) = \mathcal{H}_{n-1}(g\mathfrak{v})$ für $g \in O^+(V_{\mathbb{Q}})$. Um eine Normierung zu erreichen, wählen wir einen im dualen Gitter L' primitiven Repräsentanten $\mathfrak{w}$ der Geraden $\mathbb{Q}\mathfrak{v}$; dieser ist dann bis auf das Vorzeichen durch den Primdivisor bestimmt. Ist N die Stufe des Gitters L, so ist die Zahl $-Nq(\mathfrak{w}) \in \mathbb{N}$ durch $\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$ bestimmt. Wir nennen sie die Diskriminante des Heegnerprimdivisors $\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$.

Um später die Null- und Polstellengebilde sogenannter Borcherdsprodukte auf einfache Weise beschreiben zu können, vereinbaren wir noch eine nützliche Bezeichnung.

1.3.22 Definition. *Seien $\gamma \in L'/L$ und m eine negative rationale Zahl. Dann sei der* ***Divisor*** *$H(\gamma, m)$ definiert als die Summe aller Heegnerprimdivisoren $\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$, wobei $\mathfrak{v}$ ein Repräsentantensystem modulo $\{\pm 1\}$ der Menge aller Vektoren $\mathfrak{w} \in L'$ mit den Eigenschaften $\mathfrak{w} \in \gamma$ und $q(\mathfrak{w}) = m$ durchläuft.*

Mittels Reduktionstheorie kann man zeigen, daß die angegebenen Summen lokal-endlich sind. In der Arbeit [Bu] wurden unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen einige Anmerkungen dazu gemacht. Da diese Objekte jedoch lediglich als Summanden in Hauptdivisoren (f) auftreten werden, ist ohnehin klar, daß es sich um Divisoren handeln muß, daß also diese Eigenschaft in unseren Spezialfällen stets erfüllt ist.

Es bleibt anzumerken, daß man Heegnerdivisoren auch auf dem Quotienten $\mathcal{H}_n/\Gamma$ sowie auf dessen Kompaktifizierung X_Γ betrachten kann, wenn Γ eine Untergruppe von $O^+(L)$ von endlichem Index ist. Wir machen hiervon jedoch keinen Gebrauch.

Kapitel 2

Borcherdsprodukte und Dualitätstheorie

Aufbauend auf die im ersten Kapitel gelegten Grundlagen beginnen wir, den zentralen Begriff des einfachen Kontrollraumes zu erklären und die in dieser Arbeit zu behandelnde Fragestellung anzuführen. Den Ansatzpunkt hierzu bildet die Theorie von Borcherds, bestehend aus dem multiplikativen Lift und dem Dualitätssatz. Diese werden zunächst dargestellt, bevor der Begriff des einfachen Kontrollraumes geprägt wird. Anschließend können aus der Dimensionsformel für Räume vektorwertiger Modulformen bereits erste naheliegende Konsequenzen gezogen werden, die in vielen Fällen auf Einfachheit schließen lassen.

2.1 Die Theorie von Borcherds

2.1.1 Multiplikativer Lift und Borcherdsprodukte

Wir haben, ausgehend von einem geraden Gitter L, Modulformen zu orthogonalen Gruppen $O^+(L)$ und vektorwertige Modulformen zur Weildarstellung ρ_L eingeführt. Der multiplikative Lift verbindet nun beide Typen von Modulformen. Es handelt sich dabei um eine Abbildung, die fast holomorphen Modulformen zu ρ_L meromorphe Modulformen zu einer Untergruppe von $O^+(L)$ zuordnet, deren Null- und Polstellen man genau kennt. Sie liegen auf Heegnerdivisoren und werden durch die ganzzahligen Fourierkoeffizienten der Ausgangsform reguliert.

2.1.1 Definition. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$. Mit I_L sei der $\mathbb{Z}$-Modul aller fast holomorphen Modulformen zur Darstellung ρ_L vom Gewicht $1-\frac{n}{2}$ bezeichnet, deren Fourierkoeffizienten $a(\gamma,m)$ für negatives m ganz sind und deren Koeffizient $a(0,0)$ rational ist. Die Elemente von I_L nennen wir* ***Borcherdsinputs****.*

Bemerkung: Aufgrund der Wahl des Gewichtes gilt wegen des Transformationsverhaltens eines Borcherdsinputs F unter Z stets $a(\gamma,m)=a(-\gamma,m)$.

Bemerkung: Ist F ein Borcherdsinput, so umfaßt die Gruppe

$$O^+(L)^F := \{g \in O^+(L) \,|\, F_\gamma = F_{g\gamma} \text{ für alle } \gamma \in L'/L\}$$

die auch Diskriminantenkern genannte Hauptkongruenzgruppe

$$\Gamma_L := \{g \in O^+(L) \,|\, g\gamma = \gamma \text{ für alle } \gamma \in L'/L\}$$

und hat daher endlichen Index in der vollen Modulgruppe $O^+(L)$.

2.1.2 Theorem. *(Borcherdslift) Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$. Sei $F \in I_L$ ein Borcherdsinput mit den Fourierkoeffizienten $a(\gamma, m)$. Dann gibt es eine automorphe Form $B(F)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *$B(F)$ ist eine automorphe Form vom Gewicht $a(0,0)/2$ zur Gruppe $O^+(L)^F$ bezüglich eines Multiplikatorsystems χ.*

2. *Die Null- und Polstellen von $B(F)$ liegen auf Heegnerdivisoren. Der Divisor von $B(F)$ ist gegeben durch*
$$(B(F)) = \sum_{\gamma \in (L'/L)/\{\pm 1\}} \sum_{m<0} a(\gamma, m) H(\gamma, m).$$

3. *Unter den Voraussetzungen des Koecherprinzips (Satz 1.3.15) ist $B(F)$ eine holomorphe Modulform, falls alle im Divisor auftretenden Multiplizitäten $a(\gamma, m)$ nicht negativ sind.*

4. *Die Zuordnung $F \mapsto B(F)$ ist multiplikativ, d.h. sind $F_1, F_2 \in I_L$, so gilt $B(F_1 + F_2) = B(F_1) \cdot B(F_2)$.*

5. *Die $B(F)$ zugeordnete Funktion $B(F)_{\mathfrak{v}}$ auf der Halbebene $\mathcal{H}_n$ besitzt eine lokal gültige Produktentwicklung.*

Dieser Satz entstammt der Arbeit [Bo1] und ist dort als Theorem 13.3 numeriert. Wir geben die Beweisidee wieder. Diese besteht zunächst darin, in einem ersten Schritt dem im allgemeinen divergenten Integral
$$\Phi_L(\mathfrak{z}, F) := \int_{Sl_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} \langle \overline{\Theta}_L(\tau, \mathfrak{z}), F(\tau) \rangle \frac{dxdy}{y^2}$$
einen Wert zuzuordnen, wobei Θ_L eine Siegelsche Thetafunktion (cf. Lemma 3.1.15) ist und das Produkt gemäß Definition 1.2.5 genommen wird. Dies geschieht durch Integration von $\langle \overline{\Theta}_L(\tau, \mathfrak{z}), F(\tau) \rangle y^{-s} \frac{dxdy}{y^2}$ über einen abgeschnittenen Fundamentalbereich $\mathscr{F}_w$. Unter geeigneten Voraussetzungen existiert der Limes für $w \to \infty$ dieses Integrals für hinreichend großen Realteil $\Re(s)$ und läßt sich als Funktion von s zu einer auf $\mathbb{C}$ meromorphen Funktion fortsetzen. Der konstante Term der Laurentreihe dieser Funktion bei 0 wird als Wert des renormalisierten Integrals angesehen.

Als Funktion von $\mathfrak{z}$ ist Φ_L invariant unter $O^+(L)^F$ und hat logarithmische Singularitäten entlang von Heegnerdivisoren, die nach einer Methode von Harvey und Moore abgelesen werden. Es stellt sich nun heraus, daß sich Φ_L als $\Phi_L = \log|\Psi_L|$ darstellen läßt mit einer meromorphen Funktion Ψ_L, die damit eine automorphe Form und gegebenenfalls via Koecherprinzip eine Modulform zur Gruppe $O^+(L)^F$ bezüglich eines Charakters und mit bekannten Null- und Polstellen ist.

Die Eigenschaft 5. rechtfertigt, daß wir automorphe Formen, die via dem angegebenen Thetalift entstehen, **Borcherdsprodukte** nennen.

2.1.2 Kontrollräume und Dualitätssatz

Der multiplikative Lift ordnet fast holomorphen vektorwertigen Modulformen automorphe Formen zu, deren Null- und Polstellen man genau kennt. Gelingt es, die Frage nach der Existenz geeigneter Inputs zu beantworten, erhalten wir ein hinreichendes Kriterium dafür, daß ein vorgegebener Heegnerdivisor ein Hauptdivisor ist. Diese Frage zu beantworten, ist Ziel des vorliegenden Abschnittes. Wir beginnen mit der Definition von Kontroll- und Hindernisraum, die beide die Information über die Existenz geeigneter Inputs codieren.

2.1.3 Definition. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$.*

1. *Der* ***Hindernisraum*** *des Gitters L sei der Vektorraum der $|L'/L|$-Tupel endlicher formaler Summen*

$$\left(\sum_{\substack{m\leq 0\\ m\equiv q(\gamma) \bmod 1}} a(\gamma,m)\mathbf{e}(mz)\right)_{\gamma\in L'/L}$$

mit $a(\gamma,m)=a(-\gamma,m)$ modulo der entsprechenden Abschnitte der Fourierentwicklungen der Komponentenfunktionen F_γ von Modulformen $F\in\{Mp_2(\mathbb{Z}),1-\frac{n}{2},\rho_L\}$. Wir bezeichnen ihn mit $\mathscr{R}_L$.

2. *Mit $\mathscr{K}_L$ bezeichnen wir den Vektorraum aller holomorphen Modulformen zur dualen Darstellung ρ_L^* vom Gewicht $1+\frac{n}{2}$ und nennen ihn den* ***Kontrollraum*** *zum Gitter L.*

3. *Für den Unterraum der Spitzenformen in $\mathscr{K}_L$ schreiben wir $\mathscr{S}_L$.*

Entscheidend ist nun die Konstruktion einer bilinearen Paarung zwischen diesen beiden Räumen, zu deren Vorbereitung das folgende Lemma dient.

2.1.4 Lemma. *Seien $F\in\{Mp_2(\mathbb{Z}),1-\frac{n}{2},\rho_L\}$ und $G\in\mathscr{K}_L=[Mp_2(\mathbb{Z}),1+\frac{n}{2},\rho_L^*]$. Seien $a(\gamma,m)$ die Fourierkoeffizienten von F und $c(\gamma,m)$ diejenigen von G. Dann gilt*

$$\sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{m\leq 0} a(\gamma,m)c(-\gamma,-m)=0.$$

Beweis: Die Funktion $F\cdot G:\mathbb{H}\to\mathbb{C}$, die durch

$$F\cdot G(z)=\left\langle\overline{F(z)},G(z)\right\rangle=\sum_{\gamma\in L'/L}F_\gamma(z)G_{-\gamma}(z)$$

gegeben ist, ist eine elliptische fast holomorphe Modulform zur Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ vom Gewicht 2. Die 1-Form $F(z)G(z)dz$ auf der kompakten Riemannschen Fläche $X_{Sl_2(\mathbb{Z})}=\mathbb{H}^*/Sl_2(\mathbb{Z})$ ist somit meromorph mit einem einzigen Pol in der Spitze $[i\infty]$. Damit verschwindet der konstante Term der Fourierentwicklung von $F\cdot G$ nach dem Residuensatz. Dieser ist aber gleich der in der Behauptung angegebenen Summe. $\square$

2.1.5 Korollar. *Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle:\mathscr{R}_L\times\mathscr{K}_L\to\mathbb{C}$, die einem Paar $([F],G)$ die Zahl*

$$\sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{m\leq 0} a(\gamma,m)c(-\gamma,-m)$$

zuordnet, wobei

$$\left(\sum_{\substack{m\leq 0\\ m\equiv q(\gamma) \bmod 1}} a(\gamma,m)\mathbf{e}(mz)\right)_{\gamma\in L'/L}$$

ein Repräsentant von $[F]$ und $c(\gamma,m)$ die Fourierkoeffizienten von G seien, ist wohldefiniert und bilinear.

2.1.6 Theorem. *(Dualitätssatz) Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$. Dann ist der Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ dual zum Hindernisraum $\mathscr{R}_L$ bezüglich der in Korollar 2.1.5 angegeben bilinearen Paarung.*

Der Satz wurde der Arbeit [Bo2] entnommen, in der Borcherds ihn als Theorem 3.1 formuliert und als Anwendung des Dualitätssatzes von Serre beweist.

Der Hindernisraum gibt an, welche vorgegebenen Hauptteile durch Inputs realisiert werden, welche Linearkombinationen der speziellen Heegnerdivisoren $H(\gamma, m)$ also als Hauptdivisoren auftreten. Solche Hauptteile repräsentieren nämlich die Klasse der Null im Hindernisraum $\mathscr{R}_L$. Der Dualitätssatz liefert nun ein einfaches Verfahren, wie man einen Hauptteil darauf überprüfen kann. Sind Koeffizienten $a(\gamma, m)$ vorgegeben, so werte man für eine Basis des Kontrollraumes die Bilinearform aus. Ergibt sich stets der Wert Null, so ist aufgrund des Dualitätssatzes der formale Hauptteil ein Repräsentant der Nullklasse im Faktorraum $\mathscr{R}_L$, läßt sich also durch einen geeigneten Input realisieren. Der durch die $a(\gamma, m)$ beschriebene Heegnerdivisor ist ein Hauptdivisor. Da der Kontrollraum endlichdimensional ist, genügt es daher, daß die vorgegebenen Koeffizienten ein endliches lineares Gleichungssystem lösen.

Wichtig ist nun die folgende Beobachtung: In die Paarung aus Korollar 2.1.5 gehen alle Bestandteile der formalen Summen $(\sum_{m\leq 0} a(\gamma, m)\mathbf{e}(mz))_\gamma$ ein. Die speziellen Heegnerdivisoren $H(\gamma, m)$ sind jedoch nur für $m < 0$ definiert, für $m = 0$ sind sie leer. Wir gewinnen also eine gewisse Freiheit in der Wahl der Koeffizienten $a(\gamma, 0)$. Dies ist Grundlage für die folgende Umformulierung.

2.1.7 Satz. *Ein Heegnerdivisor der Form $\sum_\gamma \sum_{m<0} a(\gamma, m)H(\gamma, m)$ ist genau dann der Divisor eines Borcherdsproduktes, wenn die Paarung der formalen Summe*

$$\left(\sum_{m<0} a(\gamma, m)\mathbf{e}(mz)\right)_\gamma$$

mit jeder Spitzenform aus dem Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ Null ergibt. Ist die Dimension des Gitters mindestens 5, so ist das Gewicht des Borcherdsproduktes gegeben durch

$$k = -\frac{1}{4}\sum_{m<0} a(\gamma, m)q_0(\gamma, -m), \tag{2.1}$$

wobei die $q_0(\gamma, m)$ die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe E_0 aus Satz 1.2.17 sind.

Beweis: Sei e die Anzahl der modulo $\{\pm 1\}$ verschiedenen $\gamma \in L'/L$ mit ganzzahliger Norm $q(\gamma)$. Dann ist e nach Korollar 1.2.21 eine obere Schranke für die Kodimension des Raumes der Spitzenformen im Kontrollraum $\mathscr{K}_L$. Jedoch ist dies auch die Zahl der durch den Divisor noch nicht bestimmten Koeffizienten $a(\gamma, 0)$. Daher kann man diese stets so wählen, daß die Paarung mit allen Nichtspitzenformen trivial ist. Die Behauptung ergibt sich nun direkt aus dem Dualitätssatz. Ist $\dim(L) \geq 5$, so ist der das Gewicht bestimmende Term $a(0, 0)$ durch die Paarung mit der Eisensteinreihe E_0 festgelegt und als $\mathbb{Z}$-Linearkombination der Koeffizienten $q_0(\gamma, -m)$ aus Satz 1.2.22 rational. □

2.1.8 Bemerkung. *Die Formel (2.1) bleibt richtig, wenn man statt der speziellen Koeffizienten $q_0(\gamma, m)$ der Eisensteinreihe E_0 diejenigen irgendeiner Modulform aus dem Kontrollraum verwendet, die in $i\infty$ den Wert $2\mathfrak{e}_0$ hat. Zwei solche Modulformen unterscheiden sich offenbar nur um eine Spitzenform, und die Paarung eines Inputs mit einer ebensolchen ergibt stets Null.*

2.1.3 Einfache Kontrollräume

2.1.9 Definition. *Ein Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ eines Gitters L heißt* **einfach**, *wenn er keine nichttriviale Spitzenform enthält. Wir nennen dann auch das Gitter L einfach.*

Einfache Gitter sind also solche, bei denen sich jeder Heegnerdivisor $\sum a(\gamma,m)H(\gamma,m)$ als Hauptdivisor eines Borcherdsproduktes zur Gruppe Γ_L darstellen läßt. In [Bu], Satz 2.30, wurde gezeigt, daß dann zumindest unter zusätzlichen Bedingungen an die Struktur des Gitters L die sogenannte modifizierte Heegnerdivisorenklassengruppe auf X_{Γ_L} trivial ist. Es handelt sich daher um Gitter mit einer besonders reichen Modulformenwelt.

Ziel ist es zu zeigen, daß bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache Gitter existieren, daß es also für fast alle Gitter Spitzenformen im Kontrollraum gibt. Diese These erscheint zunächst plausibel, da mit zunehmender "Größe" eines Gitters, also mit zunehmender Dimension oder Determinante, auch die Kontrollräume in ihrer Dimension wachsen.

In der vorliegenden Arbeit werden dazu über drei verschiedene Ansätze Kriterien entwickelt, unter denen ein Gitter nicht einfach sein kann. Dennoch bleiben unendliche Serien von Gittern übrig, die sich dem Zugriff über diese Kriterien entziehen. Dies werden wir am Ende der Arbeit diskutieren.

Wir beginnen die Untersuchungen mit einfachen Konsequenzen aus der Dimensionsformel für den Kontrollraum (Satz 1.2.26), die es bereits ermöglichen, eine scharfe Schranke für die Dimension eines einfachen Gitters anzugeben. Zuvor wollen wir jedoch die Zusammenhänge anhand eines Beispiels durchdiskutieren.

2.1.4 Ein exemplarischer Kontrollraum

Wir betrachten das Gitter $L := H \oplus H \oplus D_4(-1) \oplus D_4(-1)$, wobei D_4 wie üblich das Gitter mit der Gram-Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bezeichnet. Aus den wohlbekannten Daten des "Schachbrettgitters" D_4 (cf. [Co-Sl], S. 117ff.) lassen sich diejenigen von L leicht bestimmen: Es hat Determinante 16 und Stufe 2, die Diskriminantengruppe ist das direkte Produkt zweier Kleinscher Vierergruppen. Unter ihren 16 Elementen haben 10 eine ganzzahlige Norm, die übrigen Normen sind aus $\mathbb{Z} + \frac{1}{2}$. Da die Multiplikation mit -1 auf der Diskriminantengruppe trivial wirkt, hat der Unterraum der Eisensteinreihen im Kontrollraum die Dimension 10. Berechnet man die Dimension des Kontrollraumes unter Benutzung der Formel aus Satz 1.2.26, so erhalten wie den Wert 11. Es gibt also bis auf Normierung genau eine Spitzenform im Kontrollraum; das Gitter ist folglich nicht einfach.

Um geometrische Fragestellungen mit Hilfe der Theorie von Borcherds zu erörtern, müssen wir die Fourierentwicklungen zweier ausgezeichneter Elemente des Kontrollraumes kennen: Diejenige der einzigen Spitzenform und die irgendeiner Modulform mit dem Wert $2\mathfrak{e}_0$ in $i\infty$. Wir berechnen diese mit dem gleichen Vorgehen wie in [Bu]. Da die Stufe des Gitters 2 und die Dimension gerade sind, faktorisiert die Weildarstellung ρ_L^* durch die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(2)$. Daher liegen die Komponentenfunktionen im Vektorraum der gewöhnlichen elliptischen Modulformen zu $\Gamma(2)$ vom Gewicht 6. Dieser hat eine Basis aus Produkten der in Beispiel 1.2.16 angegebenen Thetareihen. Die Transformationsgleichungen unter den Erzeugern S und

T liefern ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten bezüglich dieser Basis. Dies ergibt eine Darstellung der beiden gesuchten Modulformen durch Thetareihen, aus denen sich die Fourierentwicklungen berechnen lassen.

Zur Abkürzung numerieren wir die Elemente der Diskriminantengruppe wie folgt:

$$\begin{array}{lll}
0 \hat{=} (0,0,0,0,0,0,0,0) & 1 \hat{=} (0,0,0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0) & 2 \hat{=} (0,0,0,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) \\
3 \hat{=} (0,0,0,0,\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}) & 4 \hat{=} (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,0,0,0,0) & 5 \hat{=} (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0) \\
6 \hat{=} (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) & 7 \hat{=} (\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}) & 8 \hat{=} (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,0,0,0,0) \\
9 \hat{=} (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0) & 10 \hat{=} (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) & 11 \hat{=} (\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}) \\
12 \hat{=} (\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},0,0,0,0) & 13 \hat{=} (\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0) & 14 \hat{=} (\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},0) \\
15 \hat{=} (\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,0,\frac{1}{2}) & &
\end{array}$$

Die bis auf skalare Vielfache eindeutige Spitzenform in $\mathscr{K}_L$ hat dann die Darstellung

$$\frac{1}{48}\left(\vartheta^{12} - \tilde{\vartheta}^{12} - \tilde{\tilde{\vartheta}}^{12}\right)(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 - \mathfrak{e}_4 - \mathfrak{e}_8 - \mathfrak{e}_{12})$$

mit der Fourierentwicklung

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{48}\left(\vartheta^{12} - \tilde{\vartheta}^{12} - \tilde{\tilde{\vartheta}}^{12}\right) \\
&\quad = \mathbf{e}\left(\tfrac{1}{2}z\right) - 12\mathbf{e}\left(\tfrac{3}{2}z\right) + 54\mathbf{e}\left(\tfrac{5}{2}z\right) - 88\mathbf{e}\left(\tfrac{7}{2}z\right) - 99\mathbf{e}\left(\tfrac{9}{2}z\right) + 540\mathbf{e}\left(\tfrac{11}{2}z\right) + \dots
\end{aligned}$$

Eine Nichtspitzenform mit dem Wert $2\mathfrak{e}_0$ in der Spitze $i\infty$ ist gegeben durch die Form

$$\begin{aligned}
\Phi := &\left(-\vartheta^{12} + \frac{1}{2}\tilde{\tilde{\vartheta}}^{12} + 3\vartheta^8\tilde{\vartheta}^4\right)\mathfrak{e}_0 + \left(-\frac{1}{6}\vartheta^{12} + \frac{1}{6}\tilde{\vartheta}^{12} - \frac{1}{3}\tilde{\tilde{\vartheta}}^{12}\right)(\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 + \mathfrak{e}_8 + \mathfrak{e}_{12}) \\
&+ \left(-\frac{1}{3}\vartheta^{12} + \frac{1}{3}\tilde{\vartheta}^{12} - \frac{1}{3}\tilde{\tilde{\vartheta}}^{12}\right)\mathfrak{e}_4 \\
&+ \left(-\frac{2}{3}\vartheta^{12} - \frac{1}{3}\tilde{\vartheta}^{12} + \frac{1}{6}\tilde{\tilde{\vartheta}}^{12} + \vartheta^8\tilde{\vartheta}^4\right)(\mathfrak{e}_5 + \mathfrak{e}_6 + \mathfrak{e}_7 + \mathfrak{e}_9 + \mathfrak{e}_{10} + \mathfrak{e}_{11} + \mathfrak{e}_{13} + \mathfrak{e}_{14} + \mathfrak{e}_{15})
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix}
2 - 240\mathbf{e}(z) - 8688\mathbf{e}(2z) - 58560\mathbf{e}(3z) - 279024\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-8\mathbf{e}(\frac{1}{2}z) - 1952\mathbf{e}(\frac{3}{2}z) - 25008\mathbf{e}(\frac{5}{2}z) - 134464\mathbf{e}(\frac{7}{2}z) - 474344\mathbf{e}(\frac{9}{2}z) + \dots \\
-8\mathbf{e}(\frac{1}{2}z) - 1952\mathbf{e}(\frac{3}{2}z) - 25008\mathbf{e}(\frac{5}{2}z) - 134464\mathbf{e}(\frac{7}{2}z) - 474344\mathbf{e}(\frac{9}{2}z) + \dots \\
-8\mathbf{e}(\frac{1}{2}z) - 1952\mathbf{e}(\frac{3}{2}z) - 25008\mathbf{e}(\frac{5}{2}z) - 134464\mathbf{e}(\frac{7}{2}z) - 474344\mathbf{e}(\frac{9}{2}z) + \dots \\
-16\mathbf{e}(\frac{1}{2}z) - \frac{7616}{3}\mathbf{e}(\frac{3}{2}z) - 33632\mathbf{e}(\frac{5}{2}z) - 178816\mathbf{e}(\frac{7}{2}z) - \frac{1895792}{3}\mathbf{e}(\frac{9}{2}z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-8\mathbf{e}(\frac{1}{2}z) - 1952\mathbf{e}(\frac{3}{2}z) - 25008\mathbf{e}(\frac{5}{2}z) - 134464\mathbf{e}(\frac{7}{2}z) - 474344\mathbf{e}(\frac{9}{2}z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-8\mathbf{e}(\frac{1}{2}z) - 1952\mathbf{e}(\frac{3}{2}z) - 25008\mathbf{e}(\frac{5}{2}z) - 134464\mathbf{e}(\frac{7}{2}z) - 474344\mathbf{e}(\frac{9}{2}z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots \\
-256\mathbf{e}(z) - 8192\mathbf{e}(2z) - 62464\mathbf{e}(3z) - 262144\mathbf{e}(4z) + \dots
\end{pmatrix}.$$

Haben wir einen Input F mit dem Hauptteil

$$\left(\sum_{\substack{m<0 \\ m\equiv q(\gamma) \bmod 1}} a(\gamma,m)\mathbf{e}(mz) \right)_{\gamma\in L'/L},$$

so gibt es ein Borcherdsprodukt $B(F)$ mit Divisor

$$(B(F)) = \sum_{\substack{\gamma\in L'/L \\ m<0}} a(\gamma,m)H(\gamma,m)$$

und Gewicht

$$k = -\frac{1}{4} \sum_{\substack{\gamma\in L'/L \\ m<0}} a(\gamma,m)c(\gamma,-m),$$

wobei $c(\gamma,-m)$ die Fourierkoeffizienten obiger Modulform Φ seien. Insbesondere sind die Zahlen $-\frac{1}{4}c(\gamma,-m)$ die Gewichte spezieller Modulformen, falls nicht Hindernisse der Existenz eines geeigneten Inputs entgegenstehen.

Wir wollen das Augenmerk auf zwei Besonderheiten lenken. Zum einen hat der betragsmäßig kleinste Fourierkoeffizient von Φ den Wert -8, also multipliziert mit $-\frac{1}{4}$ den Wert 2. Ein Borcherdsinput, der als einzigen nichttrivialen Fourierkoeffizienten im Hauptteil den Koeffizienten $a(1,-\frac{1}{2}) = 1$ hätte, würde somit zu einer holomorphen Modulform vom Gewicht 2 führen. Eine solche kann nach dem noch zu beweisenden Satz 3.1.19 nicht existieren, da sein Gewicht zu klein wäre. In der Tat scheitert die Existenz eines solchen Inputs an der durch die Spitzenform gelieferten Relation. Diese Idee bildet die Grundlage für unser drittes Kapitel.

Dagegen ist es offenbar möglich, den Hauptteil mit $a(1,-\frac{1}{2}) = a(8,-\frac{1}{2}) = 1$, bei dem alle anderen Koeffizienten im Hauptteil verschwinden, zu realisieren, denn er erfüllt die Relation, die durch die einzige Spitzenform gegeben ist. Das entsprechende Borcherdsprodukt hat das sogenannte singuläre Gewicht 4. Modulformen singulären Gewichts sind besonders interessant, da man sie unter Umständen auch durch eine andere, additive Konstruktion erhalten kann, die auch die Gestalt der Fourierentwicklung explizit beschreibt (cf. [Bo1], Thm. 14.3). Durch Vergleich der Fourierreihe mit der Produktdarstellung kann man Relationen ablesen, die in der Theorie der Kac-Moody-Algebren eine Rolle spielen.

2.2 Konsequenzen aus der Dimensionsformel

2.2.1 Auswertung der Dimensionsformel

Zunächst einmal rufen wir uns die Dimensionsformel für den Kontrollraum (Satz 1.2.26) ins Gedächtnis zurück. Sei V_0 der von den Vektoren $\mathfrak{e}_\gamma + \mathfrak{e}_{-\gamma}$ aufgespannte Unterraum von $\mathbb{C}[L'/L]$. Dieser ist ρ_L^*-invariant, und das Element Z wirkt darauf durch Multiplikation mit $e^{-\pi i(1+\frac{n}{2})}$. Es bezeichne $\rho = \rho_L^*|_{V_0}$ die auf V_0 eingeschränkte Darstellung. Sei M eine unitäre Matrix. Ihre Eigenwerte seien als $\mathbf{e}(\beta_r)$ mit $0 \leq \beta_r < 1$ dargestellt. Dann ist die Zahl $\alpha(M)$ definiert als $\alpha(M) := \sum \beta_r$.

Ist L von der Signatur $(2, n)$ mit $n \geq 2$ und $d := |(L'/L)/\{\pm 1\}| = \dim V_0$, so gilt für den Kontrollraum die Dimensionsformel

$$\dim(\mathscr{K}_L) = \frac{13}{12}d + \frac{dn}{24} - \alpha\left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{2}}\rho(S)\right) - \alpha\left((e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{3}}\rho(ST))^{-1}\right) - \alpha(\rho(T)).$$

Zur Abkürzung der Schreibweise setzen wir im folgenden

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &:= \alpha\left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{2}}\rho(S)\right),\\
\alpha_2 &:= \alpha\left((e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{3}}\rho(ST))^{-1}\right),\\
\alpha_3 &:= \alpha\left(\rho(T)\right).
\end{aligned}$$

Für diese drei Größen geeignete Abschätzungen zu gewinnen, ist notwendig, um aus der Dimensionsformel Aussagen ableiten zu können. Dabei konzentrieren wir uns zunächst auf die Werte von α_1 und α_2. Um diese zu berechnen, genügt es nämlich, die Spuren der jeweiligen Matrizen zu kennen. Diese Idee geht auf Borcherds zurück und basiert auf der Tatsache, daß $S^2 = (ST)^3 = Z$ auf V_0 durch Multiplikation mit $e^{-\pi i(1+\frac{n}{2})}$ wirkt. Daraus folgt

$$\left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{2}}\rho(S)\right)^2 = \left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{3}}\rho(ST)\right)^3 = e^{\pi i(1+\frac{n}{2})}\rho(Z) = id_{V_0},$$

woraus sich sofort die folgende Konsequenz ergibt:

2.2.1 Bemerkung. *Die Matrizen $e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{2}}\rho(S)$ und $(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{3}}\rho(ST))^{-1}$ sind von zweiter bzw. dritter Ordnung. Insbesondere gelten die Abschätzungen $\alpha_1 \leq \frac{1}{2}d$ und $\alpha_2 \leq \frac{2}{3}d$.*

Letzteres ist klar, da jeder Eigenwert eine zweite respektive dritte Einheitswurzel ist. Aber die Multiplizitäten der in Frage kommenden Eigenwerte und damit die Werte der α_i selbst lassen sich aus der Dimension und der Spur gewinnen, wenn man beachtet, daß im zweiten Falle die Spurgleichung über $\mathbb{Q}$ zwei lineare Gleichungen für die Multiplizitäten liefert. Löst man die sich ergebenden linearen Gleichungssysteme und beachtet, daß die Multiplizitäten der Eigenwerte ζ_3 und ζ_3^2 bei der Invertierung der Matrix $e^{\pi i(1+\frac{n}{2})/3}\rho(ST)$ gerade vertauscht werden, so erhält man das folgende

2.2.2 Lemma. *Für obige Größen α_1 und α_2 gelten die Formeln*

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{4}\left(\dim(V_0) - tr\left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{2}}\rho(S)\right)\right)\\
\alpha_2 &= \frac{1}{3}\left(\dim(V_0) - \Re\left(tr(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{3}}\rho(ST))\right) + \frac{1}{3}\sqrt{3}\,\Im\left(tr(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{3}}\rho(ST))\right)\right).
\end{aligned}$$

2.2.3 Lemma. *Sei $X : \mathbb{C}[L'/L] \to \mathbb{C}[L'/L]$ die lineare Fortsetzung der auf der kanonischen Basis definierten Abbildung $\mathfrak{e}_\gamma \mapsto \mathfrak{e}_{-\gamma}$, und sei $M \in Gl(\mathbb{C}[L'/L])$. Dann ist $tr(M|_{V_0}) = tr(\frac{1}{2}(M + M \circ X))$. Insbesondere gelten die Formeln*

$$tr\left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{2}}\rho(S)\right) = -\frac{1}{2\sqrt{|L'/L|}} \sum_{\gamma\in L'/L} e^{4\pi iq(\gamma)} + e^{-4\pi iq(\gamma)}$$

und

$$tr\left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{3}}\rho(ST)\right) = e^{\frac{\pi i}{12}(10-n)}\frac{1}{2\sqrt{|L'/L|}} \sum_{\gamma\in L'/L} e^{2\pi iq(\gamma)} + e^{-6\pi iq(\gamma)}.$$

Beweis: Für $\tilde{M} := \frac{1}{2}(M+M\circ X)$ haben wir $\tilde{M}(\mathfrak{e}_\gamma+\mathfrak{e}_{-\gamma}) = M(\mathfrak{e}_\gamma+\mathfrak{e}_{-\gamma})$ und $\tilde{M}(\mathfrak{e}_\gamma-\mathfrak{e}_{-\gamma}) = 0$. Der Operator $\tilde{M}$ wirkt also auf V_0 wie M und annulliert das orthogonale Komplement von V_0. Die Spur der Einschränkung von M auf V_0 ist daher die Spur dieses Operators. Die Formeln ergeben sich nun durch Einsetzen der Matrixdarstellungen der jeweiligen Operatoren. □

Wir haben jetzt mit den Lemmata 2.2.2 und 2.2.3 eine Formel erhalten, mit deren Hilfe man für konkrete Gitter die Werte von α_1 und α_2 berechnen kann. Wichtiger für die theoretische Betrachtung sind jedoch allgemeingültige Abschätzungen, die man unter Nutzung der Charakterrelationen beweisen kann.

2.2.4 Korollar. *Ist N die Stufe des betrachteten Gitters, so gelten die folgenden Abschätzungen:*

$$\left|\alpha_1 - \frac{1}{4}d\right| \le \frac{1}{4} \qquad \text{falls } N \notin \{1,2\}, \tag{2.2}$$

$$\left|\alpha_1 - \frac{1}{4}d\right| \le \frac{1}{4}\sqrt{|\det(L)|} \qquad \text{falls } N \in \{1,2\}, \tag{2.3}$$

$$\left|\alpha_2 - \frac{1}{3}d\right| \le \frac{1}{3} \qquad \text{falls } N \notin \{1,3\}, \tag{2.4}$$

$$\left|\alpha_2 - \frac{1}{3}d\right| \le \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9}\sqrt{3}\right)\sqrt{|\det(L)|} \qquad \text{falls } N = 1, \tag{2.5}$$

$$\left|\alpha_2 - \frac{1}{3}d\right| \le \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{18}\sqrt{3}\right)(1 + \sqrt{|\det(L)|}) \qquad \text{falls } N = 3. \tag{2.6}$$

Beweis: Wir betrachten die Ausdrücke für die Spur der zu diskutierenden Operatoren aus Lemma 2.2.3. Trivialerweise ist

$$\left|tr\left(e^{\frac{\pi i(1+\frac{n}{2})}{2}}\rho(S)\right)\right| = \frac{1}{2\sqrt{|L'/L|}}\left|\sum_{\gamma\in L'/L} e^{4\pi iq(\gamma)} + e^{-4\pi iq(\gamma)}\right| \le \sqrt{|L'/L|},$$

was mit Behauptung (2.3) gleichbedeutend ist. Weiterhin stellt man fest, daß

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\gamma\in L'/L} e^{4\pi iq(\gamma)}\right|^2 &= \sum_{\gamma,\delta\in L'/L} e^{4\pi i(q(\gamma)-q(\delta))} \\ &= \sum_{\gamma,\delta\in L'/L} e^{4\pi i(q(\gamma-\delta)+\langle\gamma-\delta,\delta\rangle)} \\ &= |L'/L| + \sum_{\beta\neq 0} e^{4\pi iq(\beta)} \sum_{\delta\in L'/L} e^{4\pi i\langle\beta,\delta\rangle}.\end{aligned}$$

Falls die Stufe N des Gitters nicht 1 oder 2 ist, verschwindet die Summe $\sum_\delta e^{4\pi i\langle\beta,\delta\rangle}$, und die bessere Abschätzung (2.2) ist bewiesen. Genauso verfährt man mit den verbliebenen Ungleichungen, wobei beachtet werden muß, daß sich für $N = 3$ die beiden Summen $\sum_\delta e^{2\pi i\langle\beta,\delta\rangle}$ und $\sum_\delta e^{6\pi i\langle\beta,\delta\rangle}$ verschieden verhalten. Ist N nicht 1 oder 3, so beachte man weiter, daß die Spur $tr(e^{(\pi i(1+\frac{n}{2}))/3}\rho(ST))$ im Ring $\mathbb{Z}[\zeta_3]$ liegt, da sie Summe von dritten Einheitswurzeln ist. Sie ist daher eine sechste Einheitswurzel, was die Behauptung (2.4) beweist. □

2.2.2 Beschränkung der Dimension einfacher Gitter

Wenn wir den Wert der Größe α_3 gut genug abschätzen können, so haben wir mit den Näherungen für α_1 und α_2 aus dem vorigen Abschnitt bereits alle Mittel, um eine Schranke für die Dimension eines einfachen Gitters angeben zu können. Diese folgt praktisch direkt aus der Dimensionsformel 1.2.26.

2.2.5 Bemerkung. *Sei $d = |(L'/L)/\{\pm 1\}|$. Dann gilt*

$$\alpha_3 + |\{\gamma \in (L'/L)/\{\pm 1\} \,|\, q(\gamma) \in \mathbb{Z}\}| \leq d.$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\alpha_3 = \alpha(\rho_L^*|_{V_0}(T)) = \sum_{r=1}^{d} \beta_r,$$

wobei $0 \leq \beta_r < 1$ und $\beta_r \equiv q(\gamma) \mod \mathbb{Z}$, $\gamma \in (L'/L)/\{\pm 1\}$. Wählen wir aber die Repräsentanten $\tilde{\beta}_r$ im Intervall $0 < \tilde{\beta}_r \leq 1$, so folgt

$$\alpha_3 + |\{\gamma \in (L'/L)/\{\pm 1\} \,|\, q(\gamma) \in \mathbb{Z}\}| = \sum_{r=1}^{d} \tilde{\beta}_r \leq d.$$

□

2.2.6 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$, $n \geq 2$, mit der Determinante D und Stufe N. Sei d die Ordnung der Gruppe $(L'/L)/\{\pm 1\}$. Für den Raum $\mathscr{S}_L$ der Spitzenformen im Kontrollraum gelten die folgenden Abschätzungen:*

$$\dim(\mathscr{S}_L) \geq d\left(\frac{n-26}{24}\right)$$

und

$$\dim(\mathscr{S}_L) \geq d\left(\frac{n-12}{24}\right) - K(N, \sqrt{|D|})$$

mit dem Kern

$$K(N, \sqrt{|D|}) = \begin{cases} \frac{7}{12} & \text{falls } N \notin \{1,2,3\}, \\ \frac{21+4\sqrt{3}}{36}\sqrt{|D|} & \text{falls } N = 1, \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\sqrt{|D|} & \text{falls } N = 2, \\ \frac{15+2\sqrt{3}}{36} + \frac{3+\sqrt{3}}{18}\sqrt{|D|} & \text{falls } N = 3. \end{cases}$$

Beweis: Die erste Ungleichung ergibt sich unter Verwendung der Abschätzungen aus Bemerkung 2.2.1, die zweite mit Hilfe der in Korollar 2.2.4 angegebenen. Man beachte, daß auch im Falle $n = 2$ die Zahl $|\{\gamma \in (L'/L)/\{\pm 1\} \,|\, q(\gamma) \in \mathbb{Z}\}|$ eine obere Schranke für die Dimension des Raumes der Nichtspitzenformen im Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ ist. □

2.2.7 Korollar. *Gerade Gitter der Signatur* $(2, n)$ *mit einer Dimension größer als* 28 *sind nicht einfach. Ist die Dimension zwischen* 15 *und* 28, *so kann das Gitter nur einfach sein, wenn seine Determinante unterhalb einer gewissen Schranke liegt.*

Beweis: Die erste Aussage ist offensichtlich. Für die zweite beachte man $K(N, \sqrt{|D|}) \in O(\sqrt{|D|})$ und $d \geq |D|/2$, falls das Gitter nicht unimodular ist. □

2.2.8 Beispiel: *Sei* E_8 *das Gitter aus Beispiel 1.1.18. Wir betrachten das Gitter* $L := H \oplus H \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1) \oplus E_8(-1)$. *Es hat Signatur* $(2, 26)$, *Dimension* 28, *ist gerade und unimodular. Sein Kontrollraum* $\mathscr{K}_L$ *ist daher der Raum der gewöhnlichen elliptischen Modulformen vom Gewicht* 14, *enthält damit keine Spitzenformen. Wir haben also ein einfaches Gitter der Dimension* 28 *gefunden, die obige Schranke ist somit bestmöglich.*

Dieses Gitter ist übrigens isomorph zu $H \oplus H \oplus \Lambda_{24}$ *mit dem Leechgitter* Λ_{24}, *da es nur eine Isomorphieklasse gerader unimodularer Gitter der Signatur* $(2, 26)$ *gibt.*

Allein durch Betrachtung der Dimensionsformel für den Kontrollraum eines Gitters läßt sich also eine scharfe Schranke für die Dimension einfacher Gitter angeben. In den Dimensionen zwischen 15 und 28 kommen einfache Kontrollräume nur bei kleinen Determinanten vor, es gibt daher in diesen Dimensionen bis auf Isomorphie nur endlich viele einfache Gitter. Wir wollen das Kapitel mit der Angabe der hierbei möglichen Determinanten abschließen. Dazu sei vorab bemerkt, daß die Stufe eines Gitters genau dann 1 ist, wenn das Gitter unimodular ist. Aber unimodulare gerade Gitter der Signatur $(2, n)$ gibt es nur in den Dimensionen $\equiv 4 \mod 8$, und diese sind genau in den Fällen 4, 12, 20 und 28 einfach. Somit muß die Abschätzung aus Satz 2.2.6 für $N = 1$ nicht weiter betrachtet werden. Die sich für die übrigen Stufen ergebenden Werte sind im folgenden Satz zusammengefaßt.

2.2.9 Satz. *Sei* L *ein gerades Gitter der Stufe* $N > 1$ *und Signatur* $(2, n)$, *und sei* D *seine Determinante. Ist* $|D| \geq s(N, \dim(L))$, *so ist der Kontrollraum nicht einfach. Dabei ist* $s(N, \dim(L))$ *durch die nachfolgende Tabelle gegeben.*

$\dim(L)$	$s(2, \dim(L))$	$s(3, \dim(L))$	$s(N, \dim(L))$ *mit* $N > 3$
15	175	206	28
16	51	62	14
17	26	33	10
18	16	21	7
19	12	15	6
20	9	12	5
21	7	9	4
22	6	8	4
23	5	7	4
24	4	6	3
25	4	5	3
26	4	5	3
27	3	4	3
28	3	4	2

Kapitel 3

Singuläre Gewichte und quadratische Kongruenzen

Spitzenformen im Kontrollraum eines Gitters verhindern, daß jeder Heegnerdivisor ein Hauptdivisor ist. Dies liegt daran, daß in die bilineare Paarung mit Eisensteinreihen auch die frei wählbaren Koeffizienten $a(\gamma, 0)$ eingehen, wobei $a(0,0)/2$ das Gewicht des den vorgegebenen Heegnerdivisor realisierenden Borcherdsproduktes ist. Die Fourierkoeffizienten $q_0(\gamma, m)$ der speziellen Eisensteinreihe $-\frac{1}{4}E_0$ sind nach (2.1) gerade die Gewichte derjenigen Modulformen zu Γ_L mit dem Divisor $H(\gamma, m)$.

Modulformen zu orthogonalen Gruppen können im allgemeinen aber nicht ein beliebig kleines Gewicht haben. Die Grenze stellen die sogenannten singulären Gewichte dar; es gibt keine nichttriviale holomorphe Modulform mit einem Gewicht unterhalb dem singulären. Ist nun für ein gegebenes Gitter der Divisor $H(\gamma, m)$ für geeignete γ und m nicht leer, aber der korrespondierende Koeffizient $q_0(\gamma, m)$ und damit das Gewicht einer Modulform, die $H(\gamma, m)$ als Hauptdivisor realisieren würde, zu klein, kann dieser Divisor kein Hauptdivisor sein. Es muß also Spitzenformen im Kontrollraum geben!

Um diese Grundidee in einen Satz umsetzen zu können, müssen zunächst einige Vorbereitungen getroffen werden. Im ersten Abschnitt des vorliegenden Kapitels wird die Theorie singulärer Gewichte entwickelt. Anschließend wird die Wahl optimaler Daten γ und m behandelt. Im dritten Abschnitt geht es um Lösungsanzahlen quadratischer Kongruenzen modulo Primzahlpotenzen, und zum Abschluß wird der angedeutete Satz formuliert und bewiesen sowie auf quantitative Aussagen eingegangen.

3.1 Singuläre Gewichte

Die Theorie singulärer Gewichte ergibt sich durch genauere Beschreibung der Fourierentwicklung holomorpher Modulformen. Es stellt sich heraus, daß die sogenannte Fourier-Jacobi-Entwicklung eine Modulform als Reihe darstellt, deren Koeffizienten Jacobiformen sind. Diese lassen sich wiederum als Produkt holomorpher vektorwertiger Modulformen mit bestimmten Thetareihen darstellen, was das Gewicht nach unten begrenzt.

Die Notation dieses Abschnittes orientiert sich an der Monographie [Ei-Za]. Die Definition der Jacobigruppe kann im Falle orthogonaler Gruppen bei Freitag ([Fr3]) gefunden werden. Weiterhin wird die Theorie der Fourier-Jacobi-Entwicklung im Spezialfalle eines bereits über $\mathbb{Z}$ zwei hyperbolische Ebenen abspaltenden Gitters und vollinvarianter Modulformen bei Gritsenko ([Gr]) beschrieben.

3.1.1 Eichlertransformationen

Eine wichtige Rolle bei der konkreten Beschreibung eines Translationsgitters, unter dem eine vorgegebene Modulform invariant ist, spielen die sogenannten Eichlertransformationen. Dabei handelt es sich um bestimmte Elemente der orthogonalen Gruppe $O^+(V)$ beziehungsweise der Hauptkongruenzgruppe Γ_L.

3.1.1 Definition. *Sei V ein indefiniter quadratischer Raum. Seien $u \in V$ isotrop und $v \in V$ senkrecht zu u. Dann ist die **Eichlertransformation** $E(u,v)$ definiert durch*

$$E(u,v)(x) := x - \langle x,u\rangle v + \langle x,v\rangle u - q(v)\langle x,u\rangle u \qquad \text{für alle } x \in V.$$

Es handelt sich um eine orthogonale Abbildung.

3.1.2 Lemma. *Sei V ein indefiniter quadratischer Raum und L darin ein gerades Gitter. Sind $u, v, v_1, v_2 \in L$ mit $q(u) = 0$ und $v, v_1, v_2 \perp u$ gewählt, so gelten*

1. *$E(u,v) \in \Gamma_L$,*
2. *$E(u, v_1 + v_2) = E(u,v_1) \circ E(u,v_2)$.*

Beweis: Sind u und v im Gitter enthalten, so werden zu einem Element von L' nur ganzzahlige Vielfache der Gittervektoren u und v addiert, die Transformation $E(u,v)$ wirkt also auf der Diskriminantengruppe trivial. Ferner liegt $E(u,v)$ in der Zusammenhangskomponente der 1 via

$$[0,1] \to O(V), \quad t \mapsto E(u,tv).$$

Die zweite Identität kann mit Hilfe der definierenden Gleichung nachgerechnet werden. □

Die Eichlertransformationen liegen also stets in der Untergruppe $O^+(V)$. Sie liefern hinreichend viele Elemente dieser Gruppe und erfüllen zudem zahlreiche Relationen, von denen die folgenden für unsere Zwecke wichtig sind und ebenfalls einfach nachgerechnet werden können.

3.1.3 Lemma. *Seien $u, v \in V$ zueinander orthogonal und beide isotrop sowie λ, μ orthogonal zu u und v. Dann gelten*

$$E(v,u) = E(u,v)^{-1}$$

und

$$E(u,\lambda) \circ E(v,\mu) = E(v, \mu + \langle \lambda,\mu\rangle u) \circ E(u,\lambda).$$

3.1.2 Spezielle Koordinaten für V

In den folgenden Unterabschnitten bis einschließlich 3.1.6 sei stets $L \subset (V,q)$ ein gerades Gitter der speziellen Form $L = H \oplus H \oplus L_0$. Es seien $e_1, e_2, e_3, e_4 \in L$ Basisvektoren der beiden hyperbolischen Ebenen, also $\langle e_i, e_j\rangle = 1$, falls $(i,j) \in \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$, sonst Null, sowie $L = (\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2) \oplus (\mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4) \oplus L_0$. Ferner sei V_0 das Erzeugnis der Teilmenge $L_0 \subset V$. Äquivalent dazu ist die Darstellung $V_0 = e_1^\perp \cap e_2^\perp \cap e_3^\perp \cap e_4^\perp$.

Der Vektorraum V und damit auch das Gitter L sind in natürlicher Weise in der Komplexifizierung $V_\mathbb{C} = V \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ enthalten. Analog zu V_0 wollen wir mit $V_{0,\mathbb{C}}$ das Erzeugnis von L_0 in $V_{\mathbb{C}}$ bezeichnen. Vektoren $\mathfrak{x} \in V$ können wir in eindeutiger Weise in der Form $\mathfrak{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4 + \mathfrak{X}$ mit $x_i \in \mathbb{R}$ und $\mathfrak{X} \in V_0$ schreiben; wir verwenden dafür die Bezeichnung $(x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{X})$. Es gilt insbesondere $q(\mathfrak{x}) = x_1 x_2 + x_3 x_4 + q(\mathfrak{X})$. Weiterhin läßt sich jedes $Z = (z_3, \ldots, z_{n+2}) \in \mathcal{H}_n$ nach einer geeigneten Identifikation $V_{0,\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^{n-2}$ in der Form $(z_3, z_4, \mathfrak{Z})$ mit $z_i \in \mathbb{C}$ und $\mathfrak{Z} \in V_{0,\mathbb{C}}$ ausdrücken.

3.1.3 Heisenberggruppen

3.1.4 Definition. *Die Menge aller Tripel $[\lambda, \mu, \kappa]$ mit $\lambda, \mu \in V_0$ und $\kappa \in \mathbb{R}$, versehen mit der Multiplikation*

$$[\lambda_1, \mu_1, \kappa_1][\lambda_2, \mu_2, \kappa_2] := [\lambda_1 + \lambda_2, \mu_1 + \mu_2, \kappa_1 + \kappa_2 + \langle \mu_1, \lambda_2 \rangle],$$

heißt ***reelle Heisenberggruppe*** *des Raumes V_0. Wir bezeichnen sie mit $H(V_0)$. Die Untergruppe derjenigen Tripel mit $\lambda, \mu \in L_0$ und $\kappa \in \mathbb{Z}$ heißt* ***ganzzahlige Heisenberggruppe*** *des Gitters L_0, bezeichnet mit $H(L_0)$.*

3.1.5 Lemma. *Die Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & H(V_0) & \longrightarrow & V_0 \times V_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \kappa & \mapsto & [0,0,\kappa] & & & & \\ & & & & [\lambda, \mu, \kappa] & \mapsto & (\lambda, \mu) & & \end{array}$$

der angegebenen Gruppen ist exakt. Das Zentrum von $H(V_0)$ ist $\mathbb{R}$.

Beweis: Exaktheit der Sequenz ist offensichtlich. Wenn für $[\lambda_0, \mu_0, \kappa_0] \in H(V_0)$ stets

$$[\lambda_0, \mu_0, \kappa_0][\lambda, \mu, \kappa] = [\lambda, \mu, \kappa][\lambda_0, \mu_0, \kappa_0]$$

gilt, so muß für alle λ und μ aus V_0 stets $\langle \lambda_0, \mu \rangle = \langle \lambda, \mu_0 \rangle$ sein. Das geht nur, wenn $\lambda_0 = \mu_0 = 0$ ist. □

Die Bedeutung der Heisenberggruppe eines Gitters L der angegebenen Form ergibt sich daraus, daß man mit Hilfe von Eichlertransformationen einen Homomorphismus in die orthogonale Gruppe $O^+(V)$ konstruieren kann.

3.1.6 Lemma. *Die Heisenberggruppe operiert auf V durch orthogonale Transformationen. Genauer gesagt gibt es einen injektiven Homomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} H(V_0) & \longrightarrow & O^+(V) \\ [\lambda, \mu, \kappa] & \mapsto & E(e_1, \kappa e_3 + \lambda) E(e_3, \mu), \end{array}$$

unter dem die ganzzahlige Gruppe $H(L_0)$ sogar in den Diskriminantenkern Γ_L übergeführt wird.

Beweis: Unter Benutzung der in Lemma 3.1.3 angegebenen Relationen berechnet man

$$\begin{aligned} &E(e_1, \kappa_1 e_3 + \lambda_1) E(e_3, \mu_1) E(e_1, \kappa_2 e_3 + \lambda_2) E(e_3, \mu_2) \\ &\qquad = E(e_1, \kappa_1 e_3 + \lambda_1) E(e_1, \kappa_2 e_3 + \lambda_2) E(e_1, \langle \lambda_2, \mu_1 \rangle e_3) E(e_3, \mu_1) E(e_3, \mu_2) \\ &\qquad = E(e_1, (\kappa_1 + \kappa_2 + \langle \mu_1, \lambda_2 \rangle) e_3 + \lambda_1 + \lambda_2) E(e_3, \mu_1 + \mu_2). \end{aligned}$$

Damit ist die angegebene Abbildung ein Homomorphismus. Die Injektivität folgt aus der Definition der Eichlertransformationen $E(u, v)$. Aufgrund von Lemma 3.1.2 liegt das Bild von $H(L_0)$ in Γ_L. □

Wir wollen unter gewissem Mißbrauch der Bezeichnung unter dem Symbol $[\lambda, \mu, \kappa]$ auch das korrespondierende Element in der orthogonalen Gruppe verstehen.

3.1.4 Einbettung der $Sl_2(\mathbb{R})$ und Jacobigruppen

Es seien L, V, V_0 und e_i wie im Abschnitt 3.1.2. Wir konstruieren einen Homomorphismus von $Sl_2(\mathbb{Z}) \times Sl_2(\mathbb{Z})$ nach $O^+(L)$. Dafür identifizieren wir $\mathfrak{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{X}) \in V$, wobei x_i in $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{X}$ in V_0 enthalten sind, mit dem Paar

$$\left(\begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ -x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \mathfrak{X} \right) \in M_2(\mathbb{R}) \times V_0.$$

Die quadratische Form hat dann die Gestalt

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{X}) = \det \begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ -x_1 & x_3 \end{pmatrix} + q(\mathfrak{X}).$$

Da die Gruppe $Sl_2(\mathbb{R})$ die Determinante erhält, definiert die Vorschrift

$$\begin{array}{ccccc} Sl_2(\mathbb{R}) \times Sl_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O^+(V) & & \\ (A, B) & \mapsto & \left(\left(\begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ -x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \mathfrak{X} \right) \right. & \mapsto & \left. \left(A \begin{pmatrix} x_4 & x_2 \\ -x_1 & x_3 \end{pmatrix} B^t, \mathfrak{X} \right) \right) \end{array}$$

einen Homomorphismus. Unter diesem Homomorphismus geht die Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z}) \times Sl_2(\mathbb{Z})$ klarerweise in die ganzzahlige orthogonale Gruppe $O^+(L)$ über. Da der hyperbolische Anteil des Gitters unimodular ist, liegt das Bild der ganzzahligen Gruppen sogar in der Hauptkongruenzgruppe Γ_L.

Wir benötigen nicht die volle Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z}) \times Sl_2(\mathbb{Z}) \subset \Gamma_L$, sondern lediglich den Teil davon, der die e_1-e_3-Ebene in sich überführt. Dies hängt mit unserer Realisierung der Halbebene durch Normierung der zweiten Koordinate zusammen. Die e_1-e_3-Ebene entspricht in unseren Koordinaten den Punkten

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, \mathfrak{X} \right).$$

Auf diesen operiert die Gruppe $E_2 \times Sl_2(\mathbb{R})$. Für $M \in Sl_2(\mathbb{R})$ bezeichnen wir das Bild von (E_2, M) in $O^+(V)$ unter dem obigen Homomorphismus mit $[M]$. Somit ist $M \mapsto [M]$ die von uns gesuchte Einbettung der $Sl_2(\mathbb{R})$, mit deren Hilfe nun die Jacobigruppe definiert werden kann.

3.1.7 Lemma. *Zu $[\lambda, \mu, \kappa] \in H(V_0)$ und $M \in Sl_2(\mathbb{R})$ gibt es $[\lambda', \mu', \kappa'] \in H(V_0)$ mit*

$$[\lambda, \mu, \kappa][M] = [M][\lambda', \mu', \kappa'].$$

Sind $[\lambda, \mu, \kappa] \in H(L_0)$ und $M \in Sl_2(\mathbb{Z})$, so kann $[\lambda', \mu', \kappa']$ ebenfalls in $H(L_0)$ gewählt werden. Die Menge aller Produkte $[M][\lambda, \mu, \kappa]$ bildet also eine Gruppe.

3.1.8 Definition. *Die Untergruppe von $O^+(V)$, bestehend aus allen Produkten $[M][\lambda, \mu, \kappa]$ mit $M \in Sl_2(\mathbb{R})$ und $[\lambda, \mu, \kappa] \in H(V_0)$, heißt* ***reelle Jacobigruppe*** *$J(V_0)$. Das semidirekte Produkt $Sl_2(\mathbb{Z}) \ltimes H(L_0) \subset \Gamma_L$ ist die* ***Jacobigruppe*** *$J(L_0)$.*

Um die Fourier-Jacobi-Entwicklung von Modulformen detailliert beschreiben zu können, ist es nützlich zu wissen, wie typische Elemente der Jacobigruppe auf die bezüglich der gewählten Koordinatisierung konstruierte orthogonale Halbebene wirken. Dies besagt das folgende Lemma, das man leicht durch Nachrechnen beweist.

3.1.9 Lemma. *Seien L und die e_1, e_2, e_3, e_4 wie bisher. Sei in diesen Koordinaten ein Vektor $(x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{X}) \in V$ gewählt, und seien $[\lambda, \mu, \kappa] \in H(V_0)$, $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ aus der Gruppe $Sl_2(\mathbb{R})$ sowie $(z_3, z_4, \mathfrak{Z}) \in \mathcal{H}_n$. Für die bezüglich der gewählten Basis übertragene Operation auf $\mathcal{H}_n$ gelten dann*

$$\begin{aligned}
[\lambda, \mu, \kappa](x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{X}) &= \begin{pmatrix} x_1 - q(\lambda)x_2 + (\kappa - \langle \lambda, \mu \rangle)x_4 + \langle \mathfrak{X}, \lambda \rangle \\ x_2 \\ x_3 - \kappa x_2 - q(\mu)x_4 + \langle \mathfrak{X}, \mu \rangle \\ x_4 \\ \mathfrak{X} - x_2\lambda - x_4\mu \end{pmatrix}^t \\
[\lambda, \mu, \kappa](z_3, z_4, \mathfrak{Z}) &= \begin{pmatrix} z_3 - \kappa - q(\mu)z_4 + \langle \mathfrak{Z}, \mu \rangle \\ z_4 \\ \mathfrak{Z} - \lambda - z_4\mu \end{pmatrix}^t \\
J([\lambda, \mu, \kappa], (z_3, z_4, \mathfrak{Z})) &= 1
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
[M](x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{X}) &= (ax_1 - bx_3,\ dx_2 + cx_4,\ -cx_1 + dx_3,\ bx_2 + ax_4,\ \mathfrak{X}) \\
[M](z_3, z_4, \mathfrak{Z}) &= \left(z_3 + \frac{cq(\mathfrak{Z})}{cz_4 + d}, \frac{az_4 + b}{cz_4 + d}, \frac{\mathfrak{Z}}{cz_4 + d} \right) \\
J([M], (z_3, z_4, \mathfrak{Z})) &= cz_4 + d.
\end{aligned}$$

3.1.5 Jacobiformen

Eine Jacobiform soll eine Funktion auf $\mathbb{H} \times V_{0,\mathbb{C}}$ mit einem gewissen Transformationsverhalten unter der Operation der Jacobigruppe sein. Wir lassen im Hinblick auf die Anwendung auch Untergruppen von $J(L_0)$ von endlichem Index sowie Multiplikatorsysteme und rationale Gewichte zu.

3.1.10 Definition. *Sei $L = H \oplus H \oplus L_0 \subset (V, q)$ ein gerades Gitter. Seien G eine Untergruppe der ganzzahligen Jacobigruppe $J(L_0)$ von endlichem Index, $k \in \mathbb{Q}$, χ ein Multiplikatorsystem auf G vom Gewicht k und von der Ordnung e im Sinne von Definition 1.3.16, und $m \in \frac{1}{e}\mathbb{Z}$. Eine* ***Jacobiform*** *auf der Gruppe G zum Multiplikator χ vom Gewicht k und Index m ist eine holomorphe Funktion $\Phi : \mathbb{H} \times V_{0,\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$, die folgenden Transformationsgleichungen[1] genügt:*

1. $\Phi(z, \mathfrak{Z} + \lambda + z\mu) = \chi([-\lambda, -\mu, \kappa])e^{2\pi i m(\langle \mathfrak{Z}, \mu \rangle + q(\mu)z + \kappa)}\Phi(z, \mathfrak{Z})$ *für alle* $[-\lambda, -\mu, \kappa] \in G$,
2. $\Phi(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\mathfrak{Z}}{cz+d}) = \chi([\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}])(cz + d)^k e^{-2\pi i m \frac{cq(\mathfrak{Z})}{cz+d}}\Phi(z, \mathfrak{Z})$ *für alle* $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \in G$.

Die entscheidende Rolle spielt das folgende Lemma als Brücke von orthogonalen Modulformen zu Jacobiformen.

[1] Aus der ersten Gleichung folgt, daß es nichttriviale Jacobireihen nur für solche Indizes m gibt, die mit dem Verhalten des Multiplikators auf $[0, 0, \kappa]$ konform sind.

3.1.11 Lemma. *Eine holomorphe Funktion Φ auf $\mathbb{H} \times V_{0,\mathbb{C}}$ ist genau dann eine Jacobiform auf der Gruppe G vom Gewicht k, Index m und Multiplikatorsystem χ, wenn sich die Funktion*

$$F(z_3, z_4, \mathcal{Z}) := \Phi(z_4, \mathcal{Z})\mathbf{e}(mz_3)$$

wie eine orthogonale Modulform (in Tubengebietkoordinaten) von gleichem Gewicht und Multiplikator bezüglich der Gruppe G transformiert.

Beweis: Es ist wegen $J([-\lambda, -\mu, \kappa], (z_3, z_4, \mathcal{Z})) = 1$ für jedes $[-\lambda, -\mu, \kappa]$ aus G stets

$$\begin{aligned}
& F([-\lambda,-\mu,\kappa](z_3,z_4,\mathcal{Z})) = \chi([-\lambda,-\mu,\kappa])J([\lambda,\mu,\kappa],(z_3,z_4,\mathcal{Z}))^k F(z_3,z_4,\mathcal{Z}) \\
\Longleftrightarrow\quad & \Phi(z_4, \mathcal{Z} + z_4\mu + \lambda)\mathbf{e}(m(z_3 - \langle \mathcal{Z}, \mu\rangle - z_4 q(\mu) - \kappa)) = \chi([-\lambda,-\mu,\kappa])\Phi(z_4,\mathcal{Z})\mathbf{e}(mz_3) \\
\Longleftrightarrow\quad & \Phi(z_4, \mathcal{Z} + z_4\mu + \lambda) = \chi([-\lambda,-\mu,\kappa])\mathbf{e}(m(\langle \mathcal{Z},\mu\rangle + z_4 q(\mu) + \kappa))\Phi(z_4,\mathcal{Z})
\end{aligned}$$

sowie für $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G$ jeweils

$$\begin{aligned}
& F([M](z_3,z_4,\mathcal{Z})) = \chi([M])J([M],(z_3,z_4,\mathcal{Z}))^k F(z_3,z_4,\mathcal{Z}) \\
\Longleftrightarrow\quad & \Phi\left(\tfrac{az_4+b}{cz_4+d}, \tfrac{\mathcal{Z}}{cz_4+d}\right)\mathbf{e}\left(mz_3 + m\tfrac{cq(\mathcal{Z})}{cz_4+d}\right) = \chi([M])(cz_4+d)^k\Phi(z_4,\mathcal{Z})\mathbf{e}(mz_3) \\
\Longleftrightarrow\quad & \Phi\left(\tfrac{az_4+b}{cz_4+d}, \tfrac{\mathcal{Z}}{cz_4+d}\right) = \chi([M])(cz_4+d)^k\mathbf{e}\left(-m\tfrac{cq(\mathcal{Z})}{cz_4+d}\right)\Phi(z_4,\mathcal{Z}),
\end{aligned}$$

was die Behauptung beweist. □

3.1.12 Satz. *(Fourier-Jacobi-Entwicklung) Sei F eine holomorphe Modulform (in Koordinaten des Tubengebietes) vom Gewicht k zu einer Untergruppe Γ von Γ_L von endlichem Index zum Multiplikatorsystem χ der Ordnung e. Die Gruppe Γ enthalte $H(L_0)$. Dann gibt es zu jedem $m \in \frac{1}{e}\mathbb{N}_0$ eine Jacobiform Φ_m vom Gewicht k und Index m zur Gruppe $\Gamma \cap J(L_0)$ zum gleichen Multiplikatorsystem mit*

$$F(z_3, z_4, \mathcal{Z}) = \sum_{m \in \frac{1}{e}\mathbb{N}_0} \Phi_m(z_4, \mathcal{Z})\mathbf{e}(mz_3). \tag{3.1}$$

Beweis: Die Gruppe Γ enthalte die eingebettete Tranformation $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, auf der der Multiplikator χ oBdA. den Wert 1 hat. Nach Lemma 3.1.9 ist F unter dem Gitter $e\mathbb{Z} \times b\mathbb{Z} \times eL_0$ invariant, und daher ist

$$F(z_3, z_4, \mathcal{Z}) = \sum_{\substack{j \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \\ m \in \frac{1}{e}\mathbb{Z} \\ \mathcal{M} \in \frac{1}{e}L_0' \\ mj + q(\mathcal{M}) \geq 0}} a(j, m, \mathcal{M})\mathbf{e}(mz_3 + jz_4 + \langle \mathcal{M}, \mathcal{Z}\rangle)$$

die Fourierentwicklung von F. Setze

$$\Phi_m(z, \mathcal{Z}) := \sum_{\substack{j \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \\ \mathcal{M} \in \frac{1}{e}L_0' \\ mj + q(\mathcal{M}) \geq 0}} a(j, m, \mathcal{M})\mathbf{e}(jz + \langle \mathcal{M}, \mathcal{Z}\rangle),$$

so gilt die Beziehung (3.1). Ein Koeffizientenvergleich in der Umsetzungsformel von F zeigt, daß sich jeder einzelne Term $\Phi_m(z_4, \mathcal{Z})\mathbf{e}(mz_3)$ unter $\Gamma \cap J(L_0)$ wie eine Modulform transformiert, womit Φ_m nach dem vorigen Lemma eine Jacobiform der geforderten Art ist. □

Eine auf diesem Wege von einer orthogonalen Modulform herkommende Jacobiform ist also als Fourierreihe gegeben. Es ist jedoch allgemein so, daß Jacobiformen eine Darstellung durch Fourierreihen besitzen, denn die Transformationen $[\lambda, 0, 0]$ und $[\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]$ operieren auf $\mathbb{H} \times V_{0,\mathbb{C}}$ durch $(z, \mathcal{Z}) \mapsto (z, \mathcal{Z} + \lambda)$ und $(z, \mathcal{Z}) \mapsto (z + b, \mathcal{Z})$. Da G in $J(L_0)$ endlichen Index hat, gibt es natürliche Zahlen b und e mit $[e\lambda, 0, 0] \in G$ für alle $\lambda \in L_0$ und $[\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)] \in G$ und so, daß das Multiplikatorsystem auf diesen Elementen den Wert 1 hat. Eine Jacobiform ist dann unter $b\mathbb{Z} \times eL_0$ invariant und besitzt daher eine Fourierentwicklung der Form

$$\Phi(z, \mathcal{Z}) = \sum_{\substack{j \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \\ \mathcal{M} \in \frac{1}{e}L_0'}} b(j, \mathcal{M})\mathbf{e}(jz + \langle \mathcal{M}, \mathcal{Z}\rangle).$$

Wir können daher ganz analog zum Fall elliptischer Modulformen den Begriff der Regularität in $i\infty$ definieren.

3.1.13 Definition. *Sei Φ eine Jacobiform von Index m. Sie heißt* ***regulär in*** *$i\infty$, falls die Fourierentwicklung die Form*

$$\Phi(z, \mathcal{Z}) = \sum_{\substack{j \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \\ \mathcal{M} \in \frac{1}{e}L_0' \\ mj + q(\mathcal{M}) \geq 0}} b(j, \mathcal{M})\mathbf{e}(jz + \langle \mathcal{M}, \mathcal{Z}\rangle)$$

hat, falls also nur Koeffizienten $b(j, \mathcal{M})$ mit $mj + q(\mathcal{M}) \geq 0$ auftreten.

Bemerkung: Die von holomorphen orthogonalen Modulformen auf dem Wege der Fourier-Jacobi-Entwicklung herkommenden Jacobiformen sind nach Konstruktion regulär.

3.1.6 Jacobiformen und vektorwertige Modulformen

Entscheidend für die Tatsache, daß es keine holomorphen Modulformen mit einem Gewicht, das kleiner als das singuläre Gewicht ist, gibt, ist die Darstellbarkeit von Jacobiformen als Produkt vektorwertiger Modulformen mit gewissen Thetareihen. Diese beruht auf dem folgenden Lemma, das direkt aus dem Transformationsverhalten folgt. Zur Vereinfachung sei im weiteren stets G von der Form $G' \ltimes H(L_0)$ mit einer Untergruppe $G' \subset Sl_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index. Ferner sei e die Ordnung des Multiplikatorsystems χ, und es sei $\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \in G'$ mit $\chi([\left(\begin{smallmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)]) = 1$.

3.1.14 Lemma. *Sei Φ eine Jacobiform vom Gewicht k, Multiplikatorsystem χ der Ordnung e und Index $m \in \frac{1}{e}\mathbb{N}_0$. Seien für $j \in \frac{1}{b}\mathbb{Z}$ und $\mathcal{M} \in \frac{1}{e}L_0'$ mit $b(j, \mathcal{M})$ die Fourierkoeffizienten bezeichnet. Dann gelten die Beziehungen*

$$b(j, \mathcal{M}) = \chi([\lambda, \mu, \kappa])e^{2\pi i(m\kappa + \langle \mathcal{M}, \lambda\rangle)}b(j - mq(\mu) - \langle \mathcal{M}, \mu\rangle, \mathcal{M} + m\mu)$$

für alle $\lambda, \mu \in L_0$ und $\kappa \in \mathbb{Z}$ sowie

$$b(j, \mathcal{M}) = \chi([-E_2])(-1)^k b(j, -\mathcal{M}),$$

*falls $-E_2 \in G'$. Ist $\mathcal{M}' = \mathcal{M} + em\mu$ mit $\mu \in L_0$ und $mj' + q(\mathcal{M}') = mj + q(\mathcal{M})$, so folgt $b(j', \mathcal{M}') = b(j, \mathcal{M})$. Die Koeffizienten $b(j, \mathcal{M})$ hängen also nur vom Bild von $\mathcal{M}$ in $\frac{1}{e}L_0'/(meL_0)$ und dem Wert von $mj + q(\mathcal{M})$ ab. (**Anmerkung:** me ist ganz, und daher ist die Gruppe $\frac{1}{e}L_0'/(meL_0)$ wohldefiniert.)*

Beweis: Man erhält beide Gleichungen, indem man in den definierenden Transformationsgleichungen auf beiden Seiten die Fourierentwicklung einsetzt und einen Koeffizientenvergleich durchführt. □

3.1.15 Lemma. *(cf. [Bo1], Thm. 4.1 oder [Gr], S. 8-9) Sei (M_0, Q) ein positiv definites gerades Gitter und $(\cdot,\cdot)$ die Q zugeordnete Bilinearform. Für $H \in (M_0, Q)'$ sei*

$$\Theta^H_{(M_0,Q)}(z, \mathfrak{Z}) := \sum_{l \in M_0} \mathbf{e}(Q(l+H)z + (l+H, \mathfrak{Z})).$$

Die Reihe konvergiert auf $\mathbb{H} \times (M_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C})$ absolut und lokal gleichmäßig und stellt eine holomorphe Funktion dar. Die Funktion $\vec{\Theta} : \mathbb{H} \times (M_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}[M_0'/M_0]$, gegeben durch $\vec{\Theta} = \sum_{H \in M_0'/M_0} \Theta^H_{(M_0,Q)} \mathfrak{e}_H$, erfüllt die Transformationsformel

$$\vec{\Theta}\left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\mathfrak{Z}}{cz+d}\right) = \varphi(z)^{\dim(V_0)} e^{2\pi i \frac{cQ(\mathfrak{Z})}{cz+d}} \rho_{(M_0,Q)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varphi\right) \vec{\Theta}(z, \mathfrak{Z})$$

für alle $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varphi\right) \in Mp_2(\mathbb{Z})$.

Wir haben bei der Formulierung des vorigen Lemmas sowohl das Gitter als auch die quadratische Form allgemein gehalten, um nun auf den Fall $(M_0, Q) = (eL_0, -mq)$ spezialisieren zu können. Wegen $m \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ ist dies ein gerades Gitter. Seine Diskriminantengruppe ist $\frac{1}{me}L_0'/eL_0$ mit der quadratischen Form $Q = -mq$ darauf. Für $h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0$ ist $\frac{h}{m} \in \frac{1}{me}L_0'/eL_0$ und umgekehrt, so daß wir die Gruppenringe $\mathbb{C}[\frac{1}{e}L_0'/meL_0]$ und $\mathbb{C}[\frac{1}{me}L_0'/eL_0]$ identifizieren können. Wiederum ist me ganz. Wir erhalten mit diesen Daten nach einer geeigneten Identifizierung von $M_0 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ mit $V_{0,\mathbb{C}}$ den von uns benötigten Spezialfall.

3.1.16 Korollar. *Seien $m \in \frac{1}{e}\mathbb{N}_0$ und L_0 sowie q wie bisher. Für $h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0$ sei*

$$\Theta^h_{e,m,q}(z, \mathfrak{Z}) := \sum_{l \in eL_0} \mathbf{e}\left(-mq(l + \tfrac{h}{m})z - m\langle l + \tfrac{h}{m}, \mathfrak{Z}\rangle\right).$$

Dann erfüllt $\vec{\Theta}_{e,m,q} := \sum_{h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0} \Theta^h_{e,m,q} \mathfrak{e}_h$ die Transformationsgleichung

$$\vec{\Theta}_{e,m,q}\left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\mathfrak{Z}}{cz+d}\right) = \varphi(z)^{\dim(V_0)} e^{-2\pi i m \frac{cq(\mathfrak{Z})}{cz+d}} \rho_{(eL_0,-mq)}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varphi\right) \vec{\Theta}_{e,m,q}(z, \mathfrak{Z}).$$

Um nicht im gleichen Kontext Transformationsformeln in metaplektischer Schreibweise und unter Verwendung von Multiplikatorsystemen simultan verwenden zu müssen, formulieren wir das obige Korollar um. Es sei eine auf $\mathbb{C} - \mathbb{R}^{\leq 0}$ holomorphe Wurzel gewählt. Sei v und somit auch v^{-1} ein Multiplikatorsystem auf der Gruppe G' vom Gewicht $\frac{\dim(V_0)}{2}$. Dann ist die Abbildung

$$M \mapsto \rho'(M) := v(M)\rho_{(eL_0,-mq)}(M, \sqrt{cz+d})$$

ein Homomorphismus, und die Thetareihe transformiert sich unter Verwendung dieser Darstellung auf der Gruppe G' mit dem Multiplikatorsystem v^{-1}, d.h. es gilt

$$\vec{\Theta}_{e,m,q}\left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\mathfrak{Z}}{cz+d}\right) = v(M)^{-1}\sqrt{cz+d}^{\dim(V_0)} e^{-2\pi i m \frac{cq(\mathfrak{Z})}{cz+d}} \rho'(M)\vec{\Theta}_{e,m,q}(z, \mathfrak{Z})$$

für alle $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G'$. Ist $\dim(V_0)$ gerade, so kann man stets $G' = Sl_2(\mathbb{Z})$ und $v \equiv 1$ wählen. Ansonsten muß man eventuell zu Untergruppen, beispielsweise zur Thetagruppe Γ_ϑ, übergehen. Diese Modifikation erlaubt es uns, im folgenden die Multiplikatorsysteme v und χ simultan zu verarbeiten. Das Produkt $v\chi$ ist ein Multiplikatorsystem vom Gewicht $k - \frac{\dim(V_0)}{2}$.

3.1.17 Satz. *Sei $G \subset J(L_0)$ von der Form $G = G' \ltimes H(L_0)$ mit $G' \subset Sl_2(\mathbb{Z})$ von endlichem Index. Seien $k \in \mathbb{Q}$ und χ ein Multiplikatorsystem auf G der Ordnung e vom Gewicht k sowie v ein Multiplikatorsystem auf G' vom Gewicht $\dim(V_0)/2$. Seien $m \in \frac{1}{e}\mathbb{N}$ und Φ eine Jacobiform auf der Gruppe G von Gewicht k, Index m und Multiplikator χ. Dann gilt*

$$\Phi(z, \mathcal{Z}) = \left\langle \overline{\vec{\phi}(z)}, \vec{\Theta}(z, \mathcal{Z}) \right\rangle = \sum_{h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0} \phi^h(z) \Theta^h_{e,m,q}(z, \mathcal{Z})$$

mit einer fast holomorphen vektorwertigen Modulform $(\phi^h)_h$ zum Dual ρ'^* der modifizierten Weildarstellung vom Gewicht $k - \frac{dim(L_0)}{2}$ auf der Gruppe G' mit dem Multiplikatorsystem $v\chi_{|G'}$. Diese ist genau dann holomorph in $i\infty$, wenn die Jacobiform Φ regulär ist.

Beweis: Sei N die Stufe des Gitters L (und damit auch die Stufe von L_0). Wir fassen in der Fourierentwicklung der Jacobiform Φ Terme wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
\Phi(z, \mathcal{Z}) &= \sum_{\substack{j \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \\ \mathcal{M} \in \frac{1}{e}L_0' \\ (mj + q(\mathcal{M}) \geq 0)}} b(j, \mathcal{M}) \mathbf{e}(jz + \langle \mathcal{M}, \mathcal{Z} \rangle) \\
&= \sum_{h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0} \sum_{l \in L_0} \sum_{\substack{j \in \frac{1}{b}\mathbb{Z} \\ (mj + q(h+eml) \geq 0)}} b(j, h + eml) \mathbf{e}(jz + \langle h + eml, \mathcal{Z} \rangle) \\
&= \sum_{h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0} \sum_{l \in L_0} \sum_{\substack{(r \geq 0) \\ \exists j : mj + q(h+eml) = r}} b\left(\tfrac{r - q(h+eml)}{m}, h + eml\right) \mathbf{e}\left(\tfrac{r - q(h+eml)}{m} z + \langle h + eml, \mathcal{Z} \rangle\right) \\
&= \sum_{h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0} \sum_{\substack{(r \geq 0) \\ beNr \equiv beNq(h) \mod emN}} b\left(\tfrac{b - q(h)}{m}, h\right) \mathbf{e}\left(\tfrac{r}{m} z\right) \sum_{l \in L_0} \mathbf{e}\left(-\tfrac{q(h+eml)}{m} z + \langle h + eml, \mathcal{Z} \rangle\right) \\
&=: \sum_{h \in \frac{1}{e}L_0'/meL_0} \phi^{-h}(z) \sum_{l \in L_0} \mathbf{e}\left(-mq(el + \tfrac{h}{m}) z + m\langle el + \tfrac{h}{m}, \mathcal{Z} \rangle\right) \\
&= \left\langle \overline{\vec{\phi}(z)}, \vec{\Theta}_{e,m,q}(z, \mathcal{Z}) \right\rangle \qquad \text{mit } \phi^{-h}(z) = \sum_{\substack{(r \geq 0) \\ beNr \equiv beNq(h) \mod emN}} b\left(\tfrac{b - q(h)}{m}, h\right) \mathbf{e}\left(\tfrac{r}{m} z\right),
\end{aligned}$$

wobei die jeweils eingeklammerten Bedingungen für reguläre Jacobiformen gelten. Ist die Fourierreihe $\vec{\phi}(z) = \sum_h \phi^h(z)\mathfrak{e}_h$ eine vektorwertige Modulform, so ist die Äquivalenz zwischen Regularität von Φ und Holomorphie von $\vec{\phi}$ in $i\infty$ klar. Es muß noch das Transformationsverhalten von $\vec{\phi}$ unter Transformationen aus G' nachgeprüft werden. Sei dazu $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in G'$. Dann gilt nach der modifizierten Fassung von Korollar 3.1.16

$$\begin{aligned}
v(M)^{-1} \sqrt{cz + d}^{\dim(V_0)} e^{-2\pi i m \frac{cq(\mathcal{Z})}{cz+d}} &\left\langle \overline{\vec{\phi}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)}, \rho'(M) \vec{\Theta}_{e,m,q}(z, \mathcal{Z}) \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\vec{\phi}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)}, \vec{\Theta}_{e,m,q}\left(\frac{az + b}{cz + d}, \frac{\mathcal{Z}}{cz + d}\right) \right\rangle
\end{aligned}$$

$$= \Phi\left(\frac{az+b}{cz+d}, \frac{\mathfrak{Z}}{cz+d}\right)$$

$$= \chi([\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}])(cz+d)^k e^{-2\pi i m \frac{cq(\mathfrak{Z})}{cz+d}} \Phi(z, \mathfrak{Z})$$

$$= \chi([\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}])(cz+d)^k e^{-2\pi i m \frac{cq(\mathfrak{Z})}{cz+d}} \left\langle \vec{\phi}(z), \vec{\Theta}_{e,m,q}(z, \mathfrak{Z}) \right\rangle,$$

was mit

$$\vec{\phi}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = v(M)\chi([M])(cz+d)^{k-\frac{\dim(V_0)}{2}} \rho'^*(M)\vec{\phi}(z)$$

gleichbedeutend ist. □

Wir sind nun bereits in der Lage, eine erste Version des angestrebten Satzes zu formulieren und zu beweisen.

3.1.18 Satz. *Nichttriviale holomorphe orthogonale Modulformen vom Gewicht $k \in \mathbb{Q}$ zur vollen Hauptkongruenzgruppe Γ_L haben mindestens Gewicht $n/2 - 1$, sofern das Gitter zwei hyperbolische Ebenen über $\mathbb{Z}$ abspaltet und n gerade ist.*

Beweis: Das Gitter L habe die Form $L = H \oplus H \oplus L_0$. Sei F eine holomorphe Modulform zur vollen Hauptkongruenzgruppe Γ_L. Da n gerade ist, kann das triviale Multiplikatorsystem vom Gewicht $\dim(V_0)/2$ verwendet werden. Dann sind die in der Fourier-Jacobi-Entwicklung auftretenden Koeffizienten reguläre Jacobiformen zur vollen Jacobigruppe $J(L_0)$, die sie darstellenden vektorwertigen Modulformen $\vec{\phi}_m$ daher unter der vollen Modulgruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ invariant und in $i\infty$ holomorph. Da $i\infty$ die einzige Spitze dieser Gruppe ist, sind die $\vec{\phi}_m$ überall holomorph, haben also nichtnegatives Gewicht, falls sie nicht identisch verschwinden. Es muß aber ein $m > 0$ mit $\vec{\phi}_m \not\equiv 0$ geben. Das Gewicht einer nichttrivialen Modulform ist daher mindestens $\dim(V_0)/2 = n/2 - 1$. □

3.1.7 Allgemeinere Gitter und der Satz über singuläre Gewichte

Bisher haben wir stets Gitter der Form $L = H \oplus H \oplus L_0$ betrachtet und bezüglich dieser die Heisenberggruppe $H(L_0)$ sowie die Jacobigruppe $J(L_0)$ definiert. Von dieser starken Einschränkung wollen wir zu einer wesentlich schwächeren Bedingung übergehen. Sei dazu $L \subset V$ ein Gitter der Signatur $(2, n)$, das über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen abspaltet. Das ist jedenfalls dann gegeben, wenn $n \geq 5$ ist (cf. Korollar 1.1.25). Wir wählen dann ein Gitter $\tilde{L}$ wie folgt: Sei e_1 ein isotroper Vektor in L. Ein solcher existiert nach unserer Annahme. Dann kann in $V_\mathbb{Q} = \mathbb{Q}L$ ein e_2 gefunden werden, so daß $\mathbb{Z}e_1 + \mathbb{Z}e_2$ eine hyperbolische Ebene ist. Da e_1 und e_2 rational sind, ist $L \cap e_1^\perp \cap e_2^\perp$ ein isotropes Untergitter von $V \cap e_1^\perp \cap e_2^\perp$. Somit gibt es einen isotropen Vektor $e_3 \in L \cap e_1^\perp \cap e_2^\perp$ und ein $e_4 \in V_\mathbb{Q} \cap e_1^\perp \cap e_2^\perp$, so daß auch $\mathbb{Z}e_3 + \mathbb{Z}e_4$ eine hyperbolische Ebene ist. Wir setzen $L_0 := L \cap e_1^\perp \cap e_2^\perp \cap e_3^\perp \cap e_4^\perp$ und $\tilde{L} := \sum_{i=1}^4 \mathbb{Z}e_i + L_0$. Dieses hat dann die Struktur $\tilde{L} = H \oplus H \oplus L_0$. Man beachte, daß e_1 und e_3 sowie L_0 im ursprünglichen Gitter L liegen. Ferner sind L und $\tilde{L}$ kommensurabel, d.h. ihr Schnitt hat endlichen Index in beiden Gittern. Ist A das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner von e_2 und e_4, so gilt $A\tilde{L} \subset L$.

Bezüglich dieses neuen Gitters $\tilde{L}$, das von nun an festgehalten wird, werden nun die Gruppen $H(L_0)$ und $J(L_0)$ gebildet und in die orthogonale Gruppe $O^+(V)$ eingebettet. Da

$[\lambda, \mu, \kappa]$ auf $E(e_1, \kappa e_3 + \lambda)E(e_3, \mu)$ abgebildet wird und e_1, e_3, λ und μ in L liegen, bildet die Heisenberggruppe $H(L_0)$ in den Schnitt $\Gamma_L \cap \Gamma_{\tilde{L}}$ ab.

Schwieriger ist dagegen das Verhalten der eingebetteten $Sl_2(\mathbb{Z})$, denn diese Transformationen führen im allgemeinen L nicht in sich über. Seien jedoch A wie oben mit $A\tilde{L} \subset L$ und N' mit $N'(L \cap \tilde{L}) \subset L$, also beispielsweise der Index von $L \cap \tilde{L}$ in L. Ist dann

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \mathfrak{X}) = \sum_{i=1}^{4} x_i e_i + \mathfrak{X} \in L,$$

so gilt für

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + AN'\alpha & AN'\beta \\ AN'\gamma & 1 + AN'\delta \end{pmatrix}$$

wiederum

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \mathfrak{X} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} x_1 + A(\alpha N'x_1 + \beta N'x_3) \\ x_2 + A(\delta N'x_2 + \gamma N'x_4) \\ x_3 + A(-\gamma N'x_1 + \delta N'x_3) \\ x_4 + A(\beta N'x_2 + \alpha N'x_4) \\ \mathfrak{X} \end{pmatrix}^t \in L,$$

denn der Vektor

$$(\alpha N'x_1 + \beta N'x_3, \delta N'x_2 + \gamma N'x_4, -\gamma N'x_1 + \delta N'x_3, \beta N'x_2 + \alpha N'x_4, 0)$$

hat ganzzahlige Einträge und liegt somit in $\tilde{L}$, das A-fache davon also in L. Die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(AN')$ überführt L in sich, bildet also unter der bezüglich $\tilde{L}$ definierten Einbettung in die Gruppe $O^+(L)$ ab. Ist ein ganzes K mit $KL' \subset L$ gewählt, so operiert mit der gleichen Argumentation die Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(KAN')$ auf L'/L trivial, wir finden also $\Gamma(KAN') \ltimes H(L_0) \subset \Gamma_L \cap \Gamma_{\tilde{L}}$. Eine sich bezüglich Γ_L mit einem Charakter transformierende orthogonale Modulform besitzt also eine Fourier-Jacobi-Entwicklung mit Jacobiformen zur Gruppe $\Gamma(KAN') \ltimes H(L_0)$.

Es soll nun Satz 3.1.18 auf solche Gitter verallgemeinert werden, die über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen abspalten. Sei F eine orthogonale Modulform zur Gruppe Γ_L. Da nicht die volle Jacobigruppe, sondern nur der Anteil $\Gamma(KAN') \ltimes H(L_0)$ in Γ_L liegt, transformieren sich die in der Fourier-Jacobi-Entwicklung auftretenden Jacobiformen lediglich unter dieser Untergruppe, die sie darstellenden vektorwertigen Modulformen $\vec{\phi}_m$ sind daher Modulformen zur Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(KAN')$. Diese hat im allgemeinen mehrere Spitzen. Wir müssen also noch die Holomorphie in allen diesen Spitzen sicherstellen. Letzteres bedeutet, daß mit den Bezeichnungen aus Definition 1.2.12 für jedes $M \in Sl_2(\mathbb{Z})$ die Modulform $\sqrt{cz+d}^{\dim(V_0)}(cz+d)^{-k}\rho^*_{(eL_0,-mq)}(M, \sqrt{c\cdot +d})^{-1}\vec{\phi}_m(Mz)$ in $i\infty$ holomorph sein muß, also eine Fourierentwicklung besitzt, in der nur nichtnegative Indizes auftreten.

Hierfür machen wir uns zunutze, daß nicht nur die vorgegebene Modulform F eine reguläre Fourierentwicklung besitzt, sondern jede Transformierte $J(g, Z)^{-k}F(gZ)$. Sei nun $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sl_2(\mathbb{Z})$. Dann ist insbesondere $J([M], \cdot)^{-k}F \circ [M]$ eine Modulform zur konjugierten Gruppe und zum konjugierten Charakter. Sie ist aber jedenfalls holomorph und genügt nach Definition dem Koecherprinzip (Satz 1.3.15). Wir vollziehen die Wirkung von

$[M]$ auf der Fourier-Jacobi-Entwicklung von F nach:

$$J([M],(z_3,z_4,\mathcal{Z}))^{-k}F([M](z_3,z_4,\mathcal{Z})) = (cz_4+d)^{-k}F\left(z_3+\frac{q(\mathcal{Z})}{cz_4+d},\frac{az_4+b}{cz_4+d},\frac{\mathcal{Z}}{cz_4+d}\right)$$

$$= (cz_4+d)^{-k}\sum_{\substack{m\in\frac{1}{e}\mathbb{Z}\\ m\geq 0}}\Phi_m\left(\frac{az_4+b}{cz_4+d},\frac{\mathcal{Z}}{cz_4+d}\right)\mathbf{e}(mz_3+m\tfrac{q(\mathcal{Z})}{cz_4+d})$$

$$= (cz_4+d)^{\frac{\dim(V_0)}{2}-k}\times$$

$$\times\sum_{\substack{m\in\frac{1}{e}\mathbb{Z}\\ m\geq 0}}\left\langle\overline{\vec{\phi}_m\left(\frac{az_4+b}{cz_4+d}\right),e^{2\pi i m\frac{q(\mathcal{Z})}{cz_4+d}}\sqrt{cz_4+d}}^{-\dim(V_0)}\vec{\Theta}_{e,m,q}\left(\frac{az_4+b}{cz_4+d},\frac{\mathcal{Z}}{cz_4+d}\right)\right\rangle\mathbf{e}(mz_3)$$

$$= \sum_{\substack{m\in\frac{1}{e}\mathbb{Z}\\ m\geq 0}}\left\langle\overline{(cz_4+d)^{\frac{\dim(V_0)}{2}-k}\vec{\phi}_m\left(\frac{az_4+b}{cz_4+d}\right)},\rho_{(eL_0,-mq)}(M,\sqrt{c\cdot+d})\vec{\Theta}_{e,m,q}(z_4,\mathcal{Z})\right\rangle\mathbf{e}(mz_3)$$

$$= \sum_{\substack{m\in\frac{1}{e}\mathbb{Z}\\ m\geq 0}}\left\langle\overline{(cz_4+d)^{\frac{\dim(V_0)}{2}-k}\rho^*_{(eL_0,-mq)}(M,\sqrt{c\cdot+d})^{-1}\vec{\phi}_m(Mz_4)},\vec{\Theta}_{e,m,q}(z_4,\mathcal{Z})\right\rangle\mathbf{e}(mz_3).$$

Wegen Satz 3.1.17 ist nun die neue vektorwertige Modulform

$$\vec{\psi}^M_m(z_4) := (cz_4+d)^{\frac{\dim(V_0)}{2}-k}\rho^*_{(eL_0,-mq)}(M,\sqrt{c\cdot+d})^{-1}\vec{\phi}_m(Mz_4)$$

in $i\infty$ holomorph, da die Ausgangsform $J([M],\cdot)^{-k}F\circ[M]$ dem Koecherprinzip genügt. Damit ist jede dieser Transformierten überall holomorph und somit trivial, falls das Gewicht $k-\dim(V_0)/2$ negativ ist. Wir haben daher den folgenden Hauptsatz bewiesen:

3.1.19 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$, das über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen abspaltet. Sei F eine nichttriviale holomorphe Modulform vom Gewicht $k\in\mathbb{Q}$ zur Gruppe Γ_L und zu einem Multiplikatorsystem endlicher Ordnung. Dann gilt $k\geq\frac{n}{2}-1$.*

Aus der Konstruktion der Komponentenfunktionen ϕ^h_m und der Thetareihe $\Theta_{e,m,q}$ sieht man unmittelbar, daß eine orthogonale Modulform F genau dann das (halbzahlige) **singuläre Gewicht** $\frac{n}{2}-1$ hat, wenn die Indizes aller F tragenden Fourierkoeffizienten im Rand des positiven Kegels liegen, wenn also stets gilt

$$a(j,m,\mathcal{M})\neq 0\Longrightarrow mj+q(\mathcal{M})=0.$$

Ein ähnliches Phänomen tritt auch im Falle der Siegelschen Modulgruppe auf (cf. [Fr1], Anhang IV). Es bleibt anzumerken, daß es in bestimmten Spezialfällen Liftungsabbildungen gibt, die Jacobiformen orthogonale Modulformen singulären Gewichts zuordnen.

3.2 Vorbereitungen

3.2.1 Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe E_0

Wir erinnern kurz an Notationen und Tatsachen aus Abschnitt 1.2.5. Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit $n \geq 3$. Jedem Vektor $\beta \in L'$ mit ganzzahliger Norm ist eine Eisensteinreihe $E_\beta(z)$ zugeordnet. Durchläuft β ein Repräsentantensystem von $(L'/L)/\{\pm 1\}$, so ist jede Modulform in $[Mp_2(\mathbb{Z}), 1 + \frac{n}{2}, \rho_L^*]$ Summe einer Spitzenform und einer Linearkombination dieser Eisensteinreihen. In der Spitze $i\infty$ hat E_β den "Wert" $\mathfrak{e}_\beta + \mathfrak{e}_{-\beta}$, insbesondere ist $E_0(i\infty) = 2\mathfrak{e}_0$.

Nach dem Dualitätssatz 2.1.7 codieren die Fourierkoeffizienten $q_0(\gamma, n)$ der Reihe E_0 Gewichte bestimmter Borcherdsprodukte; wenn ein Borcherdsprodukt mit dem Divisor $H(\gamma, -n)$ existiert, so ist sein Gewicht $-\frac{1}{4} q_0(\gamma, n)$. Ziel ist zu zeigen, daß für Gitter mit hinreichend großer Determinante stets ein Fourierkoeffizient $q_0(\gamma, -q(\gamma))$ zu gegebenem $\gamma \in L'$ existiert, so daß dieser Ausdruck unter das singuläre Gewicht fällt, denn in dieser Situation müssen Spitzenformen im Kontrollraum die Existenz eines solchen Borcherdsproduktes verhindern.

Im folgenden sei stets $k = 1 + \frac{n}{2}$ das Gewicht der Modulformen im Kontrollraum. Nach Satz 1.2.22 sind die Fourierkoeffizienten von E_0 für $\gamma \in L'$ und $m \in \mathbb{Z} - q(\gamma)$, $m > 0$ gegeben durch

$$q_0(\gamma, m) = -\frac{2^{k+1} \pi^k m^{k-1}}{\sqrt{|L'/L|}\Gamma(k)} \cdot \frac{\sigma_{1-k}(d_\gamma^2 m, \chi_{4D})}{L(k, \chi_{4D})} \prod_{p | 2\det(L)} p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,m}(p^{w_p}),$$

falls n gerade ist, und

$$q_0(\gamma, m) = -\frac{2^{k+1} \pi^k m^{k-1}}{\sqrt{|L'/L|}\Gamma(k)} \cdot \frac{L(k - \frac{1}{2}, \chi_{\mathcal{D}})}{\zeta(2k-1)} \times$$
$$\times \sum_{d|f} \mu(d) \chi_{\mathcal{D}}(d) d^{1/2-k} \sigma_{2-2k}\left(\frac{f}{d}\right) \prod_{p | 2\det(L)} \frac{p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,m}(p^{w_p})}{1 - p^{1-2k}}$$

sonst. Dabei ist die Bedeutung der einzelnen Symbole in der Formulierung des Satzes 1.2.22 angegeben.

Die bestimmenden Größen sind dabei für jede in $2\det(L)$ aufgehende Primzahl p die Darstellungsanzahl $p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,m}(p^{w_p})$ sowie der Vorfaktor $|\det L|^{-\frac{1}{2}}$. Letzterer wird dem angedeuteten Argument zum Durchbruch verhelfen.

Mit Hilfe p-adischer Diagonalisierung (bzw. 2-adischer Normalform) der quadratischen Form (cf. [Si3], Nummern (45) und (46)) läßt sich im allgemeinen die gewichtete Darstellungsanzahl $p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,m}(p^{w_p})$ nur gegen $p^{\frac{1}{2}\nu_p(\det(L))}$ abschätzen. Damit wäre das Produkt

$$\frac{1}{\sqrt{|\det(L)|}} \prod_{p | 2\det(L)} p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,m}(p^{w_p})$$

zwar beschränkt, würde aber mit wachsender Determinante nicht gegen 0 konvergieren. Man muß also geringfügig bessere Abschätzungen herleiten. Hierzu wird in einem ersten Schritt das Gitter in geeigneter Weise koordinatisiert. Wir schließen mit der folgenden Beobachtung, die die Berechnungen vereinfachen wird:

3.2.1 Lemma. *(cf. [Br-Ku], Lemma 4.4 bzw. [Si1], Hilfssatz 13) Sei p eine Primzahl, die $2\det(L)$ teilt. Dann gilt für jedes $w \geq w_p$ stets*

$$p^{w(1-2k)} N_{\gamma,m}(p^w) = p^{w_p(1-2k)} N_{\gamma,m}(p^{w_p}).$$

3.2.2 Koordinatisierung und Darstellungsanzahlen der quadratischen Form

Es sei wie bisher L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$. Es spalte über $\mathbb{Q}$ eine hyperbolische Ebene ab; dies ist stets gegeben, wenn $n \geq 3$ ist. Dann besitzt es nach Bemerkung 1.1.29 eine Gitterbasis, bezüglich der die Gram-Matrix von L die Gestalt

$$\left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b & c & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & c & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & T & \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right) \tag{3.2}$$

hat, wobei T eine Tridiagonalmatrix ist. Für die Determinante gilt dann $\det(L) = -a^2 \det(T)$, in den Term $\sqrt{|\det(L)|}$ geht $|a|$ also linear ein. Dies ist von Vorteil, da dieser Koeffizient a entscheidenden Einfluß auf die Darstellungsanzahlen $N_{\gamma,m}(p^{w_p})$ hat. Wir geben noch eine leichte Verbesserung dieser Normalform an.

3.2.2 Lemma. *Jedes indefinite isotrope gerade Gitter der Dimension mindestens* 3 *besitzt eine Basis, bezüglich der die Gram-Matrix die Gestalt (3.2) hat, so daß zusätzlich für jede Primzahl* $\nu_p(c) \leq \nu_p(\det(T))$ *und* $\nu_p(\frac{b}{2} - ggT(a, \frac{b}{2}, c)) \leq \nu_p(a)$ *gilt.*

Beweis: Nach der Cramerschen Regel gibt es einen Vektor $u = (u_3, \ldots, u_{n+2})^t$ mit $Tu = (\det(T), 0, \ldots, 0)^t$. Transformation der Matrix A aus (3.2) mit

$$M(l,m) := \begin{pmatrix} 1 & l & & & \\ & 1 & & & \\ & mu_3 & 1 & & \\ & \vdots & & \ddots & \\ & mu_{n+2} & & & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt

$$M(l,m)^t A M(l,m) = \left(\begin{array}{cc|cccc} 0 & a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a & b + 2mu_3c + m^2u_3\det(T) + 2la & c + m\det(T) & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & c + m\det(T) & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ \vdots & \vdots & & & T & \\ 0 & 0 & & & & \end{array}\right).$$

Man kann nun zunächst m so wählen, daß $\nu_p(c + m\det(T)) \leq \nu_p(\det(T))$ für alle beteiligten p gilt. Die Variable l hat keinen Einfluß auf

$$g := \mathrm{ggT}\left(a, \frac{b}{2} + mu_3c + \frac{m^2u_3\det(T)}{2} + la, c + m\det(T)\right),$$

weswegen man bei nun festem m ein l mit

$$\nu_p\left(\frac{b}{2} + mu_3c + \frac{m^2u_3\det(T)}{2} + la - g\right) \leq \nu_p(a)$$

findet. $\square$

Im weiteren wählen wir stets für jedes betrachtete Gitter L eine Basis $l_1, \dots, l_{n+2}$ mit den Eigenschaften aus Lemma 3.2.2 und schreiben $(x_1, \dots, x_{n+2})$ für den Gittervektor $\mathfrak{x} = \sum x_i l_i$. Auch die Bezeichnungen a, b und c stehen stets für die Koeffizienten aus (3.2) mit den Eigenschaften aus 3.2.2, ebenso wie g stets $\mathrm{ggT}(a, \frac{b}{2}, c)$ (> 0) bezeichne.

In diesen Koordinaten sei $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{n+2})^t \in L'$ und $n \in \mathbb{Z} - q(\gamma)$. Dann ist

$$N_{\gamma,m}(p^w) = |\{(x_1, \dots, x_{n+2})^t \in (\mathbb{Z}/p^w\mathbb{Z})^{n+2} \mid a(x_2 - \gamma_2)x_1 + \tfrac{b}{2}x_2^2 - (a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3)x_2 \\ + c(x_2 - \gamma_2)x_3 + a\gamma_1\gamma_2 + \tfrac{b}{2}\gamma_2^2 + c\gamma_2\gamma_3 + q(\tilde{x} - \tilde{\gamma}) + m \equiv 0 \mod p^w\}|$$

mit

$$\tilde{x} = (0, 0, x_3, \dots, x_{n+2})^t \text{ und } \tilde{\gamma} = (0, 0, \gamma_3, \dots, \gamma_{n+2})^t.$$

In diese Kongruenz geht also als zweiter Vorteil unserer speziellen Koordinatisierung die Variable x_1 nur linear ein. Wir schließen mit der folgenden

3.2.3 Bemerkung. *Wenn $p \nmid a$, so gibt es einen primitiven Gittervektor $\mathfrak{x}$ mit $p \nmid q(\mathfrak{x})$.*

Beweis: Dies ist wegen $q(ml_1 + l_2) = ma + \frac{b}{2}$ klar. □

3.2.3 Zur Wahl hinreichend guter Vektoren

Zum Beweis des angedeuteten Satzes genügt es nicht, lediglich den Wert eines Fourierkoeffizienten $q_0(\gamma, m)$ nach oben hinreichend gut abzuschätzen. Es muß vielmehr für jedes untersuchte Gitter ein geeigneter Vektor γ im Dual gewählt und dann der Koeffizient $q_0(\gamma, -q(\gamma))$ betrachtet werden. Findet man nämlich einen Koeffizienten $q_0(\gamma, m)$, so daß $-\frac{1}{4}q_0(\gamma, m)$ kleiner als das singuläre Gewicht ist, so scheitert der vorgesehene Schluß, falls es kein $\gamma' \equiv \gamma \mod L$ mit $m = -q(\gamma')$ gibt, falls also der Heegnerdivisor $H(\gamma, -m)$ leer ist.

Es müssen also Vektoren γ negativer Norm im dualen Gitter gefunden werden, für die man den Koeffizienten $q_0(\gamma, -q(\gamma))$ betrachtet. In der Koeffizientenformel geht $m = -q(\gamma)$ in positiver Potenz in den Wert $q_0(\gamma, -q(\gamma))$ ein. Es ist daher vorteilhaft, die Norm des gesuchten Vektors möglichst klein zu halten. Wegen der auftretenden Teilersummen und Darstellungsanzahlen ist weiterhin eine möglichst geringe Anzahl und gute Kontrolle über die Primteiler der Norm des Gittervektors $d_\gamma\gamma$ anzustreben. Letzteres liefert der Satz von Hermite nicht, der eine Abschätzung für den kleinsten auftretenden Betrag $|q(x)|$ mit nichttrivialem x besagt; deswegen wollen wir einen Vektor konkret auswählen.

3.2.4 Definition. *Sei L ein gerades isotropes Gitter der Signatur $(2, n)$. Es sei eine Basis so gewählt, daß die Gram-Matrix die Form (3.2) mit den Eigenschaften aus Lemma 3.2.2 hat. Dann sei mit γ_L der Vektor mit der Koordinatendarstellung*

$$\gamma_L := \left(\frac{1 + \frac{b}{2g}}{a}, -\frac{1}{g}, 0, \dots, 0 \right)^t$$

*bezeichnet, wobei a, b, c und $g = ggT(a, \frac{b}{2}, c)$ in der Bedeutung von (3.2) zu verstehen sind. Wir nennen ihn den **Testvektor** des Gitters L.*

Man beachte, daß der Testvektor nicht nur vom Gitter L, sondern auch von der gewählten Koordinatisierung abhängt. Da wir diese jedoch festgelegt haben, ist die Bezeichnung γ_L zulässig.

3.2.5 Lemma. *Der Vektor γ_L liegt im dualen Gitter L'. Es gelten ferner $q(\gamma_L) = -\frac{1}{g}$ und $d_{\gamma_L} \mid a$. Insbesondere ist $2d_{\gamma_L} q(\gamma_L)$ ein Teiler von $2\frac{a}{g}$ und $q(d_{\gamma_L}\gamma_L)$ ein Teiler der Determinante des Gitters L.*

Beweis: Wegen

$$A\gamma_L = \left(-\frac{a}{g}, 1 - \frac{b}{2g}, -\frac{c}{g}, 0, \ldots, 0\right)^t \in \mathbb{Z}^{n+2}$$

ist $\gamma \in L'$. Ferner ist $d_{\gamma_L} = \mathrm{kgV}\left(g, \frac{a}{\mathrm{ggT}(a, 1+\frac{b}{2g})}\right)$ und somit ein Teiler von a. $\square$

Die so erlangte Kontrolle über die Primteiler des Terms $q(d_{\gamma_L}\gamma_L)$ erlaubt es uns unter anderem, die Vorfaktoren in der Formel für die Fourierkoeffizienten zu beschränken:

3.2.6 Lemma. *Sei L ein gerades isotropes Gitter der Signatur $(2,n)$. Sei γ_L der Testvektor von L, und sei $k = 1 + \frac{n}{2}$. Dann gilt*

$$-\frac{1}{4} q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L)) \leq R(k) \prod_{p \mid 2\det(L)} p^{-\frac{1}{2}\nu_p(\det(L)) + w_p(1-2k)} N_{\gamma_L, -q(\gamma_L)}(p^{w_p})$$

mit einer nur von k (bzw. n) abhängigen positiven Zahl $R(k)$, die explizit angebbar ist.

Beweis: Sei zunächst n gerade. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{-\frac{1}{4} q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L))}{\prod_{p \mid 2\det(L)} p^{-\frac{1}{2}\nu_p(\det(L)) + w_p(1-2k)} N_{\gamma_L, -q(\gamma_L)}(p^{w_p})} &= \frac{2^{k-1}\pi^k (-q(\gamma_L))^{k-1} \sigma_{1-k}(-d_{\gamma_L}^2 q(\gamma_L), \chi_{4D})}{\Gamma(k) L(k, \chi_{4D})} \\
&= \frac{2^{k-1}\pi^k \sigma_{1-k}(-d_{\gamma_L}^2 q(\gamma_L), \chi_{4D})}{g^{k-1}\Gamma(k) L(k, \chi_{4D})}.
\end{aligned}$$

Da nach Lemma 3.2.5 die Norm $-d_{\gamma_L}^2 q(\gamma_L)$ ein Teiler der Determinante von L ist, ist die Teilersumme

$$\sigma_{1-k}(-d_\gamma^2 q(\gamma_L), \chi_{4D}) = \sum_{d \mid -d_\gamma^2 q(\gamma_L)} \left(\frac{d}{4(-1)^{\frac{n+2}{2}} \det(L)}\right) d^{1-k} = 1.$$

Ferner gilt, da der Charakter quadratisch und $k \geq 2$ ist, stets

$$\begin{aligned}
L(k, \chi_{4D})^{-1} &= \prod_p (1 - \chi_{4D}(p) p^{-k}) \\
&\leq \prod_p (1 + p^{-k}) = \prod_p (1 - p^{-2k})/(1 - p^{-k}) \\
&= \zeta(k)/\zeta(2k),
\end{aligned}$$

da alle Produkte absolut konvergieren und die Faktoren positiv sind. Der Vorfaktor

$$R(k) := \frac{2^{k-1}\pi^k \zeta(k)}{\Gamma(k)\zeta(2k)} \qquad (n \text{ gerade})$$

leistet also das gewünschte.

Nun sei n ungerade. Der abzuschätzende Quotient lautet nun

$$\frac{2^{k-1}\pi^k L(k-\frac{1}{2},\chi_{\mathfrak{D}})}{g^{k-1}\Gamma(k)\zeta(2k-1)}\sum_{d|f}\mu(d)\chi_{\mathfrak{D}}(d)d^{1/2-k}\sigma_{2-2k}\left(\frac{f}{d}\right).$$

Dabei ist $f \in \mathbb{N}$ und n_0 folgendermaßen zu wählen: Es soll f teilerfremd sein zu $2\det(L)$, die Beziehung $n_0 f^2 = \frac{1}{g}$ soll gelten, und für alle nicht in $2\det(L)$ aufgehenden Primzahlen p soll $\nu_p(n_0) \in \{0,1\}$ sein. Da g als Teiler von a in $\det(L)$ aufgeht, erfüllt die Wahl $f=1$, $n_0 = \frac{1}{g}$ diese Bedingungen, und die Teilersumme hat den Wert 1. Ferner ist $L(k-\frac{1}{2},\chi_{\mathfrak{D}}) \leq \zeta(k-\frac{1}{2})$. Damit erfüllt der Term

$$R(k) := \frac{2^{k-1}\pi^k\zeta(k-\frac{1}{2})}{\Gamma(k)\zeta(2k-1)} \qquad (n \text{ ungerade})$$

alle Forderungen. □

Wenn es nun gelingt, die einzelnen Terme des Produktes geeignet zu beschränken, kann der Schluß in unserem Sinne durchgeführt werden. Dieses Problem wird im nachfolgenden Abschnitt angegangen. Es sei jedoch nochmals darauf hingewiesen, daß wir *für jedes isotrope gerade Gitter* L einen Testvektor $\gamma_L \in L'$ gefunden haben, so daß die Aussagen aus den Lemmata 3.2.5 und 3.2.6 gelten.

3.3 Quadratische Kongruenzen

Nach den geleisteten Vorbereitungen geht es nun darum, für jede $2\det(L)$ teilende Primzahl p den Term $B_L(p) := p^{-\frac{1}{2}\nu_p(\det(L))+w_p(1-2k)} N_{\gamma_L,-q(\gamma_L)}(p^{w_p})$ nach oben abzuschätzen. Wegen der Lemmata 3.2.1 und 3.2.5 kann dabei die signifikante p-Ordnung w_p durch $m_p := 2\nu_p(2\frac{a}{g}) + 1$ ersetzt werden.

Um dieses Problem zu lösen, werden in einem ersten Unterabschnitt überwiegend bekannte Resultate über Lösungsanzahlen linearer und quadratischer Kongruenzen modulo Primzahlpotenzen zusammengestellt, die dann im zweiten Teil auf die konkrete Situation angewendet werden.

3.3.1 Lösungsanzahlen modulo Primzahlpotenzen

Wir beginnen mit einer einfachen Betrachtung linearer Kongruenzen.

3.3.1 Lemma. *Sei p eine Primzahl, und seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \nu_p(a)$. Die lineare Kongruenz*

$$ax + b \equiv 0 \mod p^m$$

hat genau dann Lösungen, wenn $\nu_p(b) \geq \nu_p(a)$. In diesem Fall ist die Anzahl modulo p^m verschiedener Lösungen gleich $p^{\nu_p(a)}$.

Im Primzahlfall (m=1) hat eine nichttriviale quadratische Kongruenz höchstens zwei Lösungen, da sie eine quadratische Gleichung über dem Körper $\mathbb{F}_p$ ist. Das Henselsche Lemma, welches wir als nächstes angeben, gibt Auskunft darüber, wie Lösungen zu höheren Primzahlpotenzen geliftet werden. Es läßt sich daher einsetzen, um die Lösungsanzahl einer quadratischen Kongruenz modulo Primzahlpotenzen abzuleiten.

3.3.2 Lemma. *(Hensel) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $m, \alpha \in \mathbb{N}$ mit $m \geq \alpha$ und p eine Primzahl. Sei x_0 eine Lösung der Kongruenz*

$$ax_0^2 + bx_0 + c \equiv 0 \mod p^m.$$

Alle modulo p^m zu x_0 kongruenten Lösungen der Kongruenz

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \mod p^{m+\alpha}$$

sind dann von der Form $x_0 + p^m y$, wobei y eine Lösung der linearen Kongruenz

$$(2ax_0 + b)y + \frac{ax_0^2 + bx_0 + c}{p^m} \equiv 0 \mod p^\alpha$$

ist.

Eine unmittelbare Folgerung ist das nachstehende

3.3.3 Korollar. *Wenn a von p geteilt wird, b jedoch nicht, so besitzt für jedes $m \in \mathbb{N}$ die quadratische Kongruenz*

$$ax^2 + bx + c \equiv 0 \mod p^m$$

genau eine Lösung modulo p^m.

Als drittes Hilfsmittel geben wir eine direkte Abschätzung der Lösungsanzahl an, die auf einem Lemma von Siegel beruht.

3.3.4 Lemma. *Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ und p eine Primzahl. Dann gilt die Abschätzung*

$$\left|\left\{x \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \,|\, ax^2 + bx + c \equiv 0 \mod p^m\right\}\right| \leq 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=1}^{m} p^{\frac{1}{2}(\min\{\nu_p(2a),\nu\}+\nu)}.$$

Wenn p nicht in a aufgeht, ist diese Zahl insbesondere durch $(m+1)p^{\frac{m}{2}}$ beschränkt.

Beweis: Nach [Si2], Lemma 1 ist

$$\left|\sum_{x=1}^{p^m} e^{\frac{2\pi i}{p^m}(ax^2+bx)}\right|^2 \leq \mathrm{ggT}(2a, p^m)p^m.$$

Es folgt dann aufgrund der Charakterrelationen

$$\begin{aligned}
|\{x \in \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \,|\, ax^2 + bx + c \equiv 0 \mod p^m\}| &= \frac{1}{p^m} \sum_{x=1}^{p^m} \sum_{r=1}^{p^m} e^{\frac{2\pi i r}{p^m}(ax^2+bx+c)} \\
&\leq \frac{1}{p^m} \sum_{r=1}^{p^m} \left| \sum_{x=1}^{p^m} e^{\frac{2\pi i r}{p^m}(ax^2+bx+c)} \right| \\
&= \frac{1}{p^m} \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\substack{r \bmod p^m \\ p^\nu || r}} \left| p^\nu \sum_{x=1}^{p^{m-\nu}} e^{\frac{2\pi i}{p^{m-\nu}}(hax^2+hbx)} \right| \qquad (r = p^\nu h) \\
&\leq \frac{1}{p^m} \sum_{\nu=0}^{m} \sum_{\substack{r \bmod p^m \\ p^\nu || r}} p^\nu \sqrt{\mathrm{ggT}(2ha, p^{m-\nu})p^{m-\nu}} \\
&= 1 + \frac{1}{p^m} \sum_{\nu=0}^{m-1} \left(p^{m-\nu} - p^{m-\nu-1}\right) p^\nu \sqrt{\mathrm{ggT}(2a, p^{m-\nu})p^{m-\nu}} \\
&= 1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=1}^{m} p^{\frac{1}{2}(\min\{\nu_p(2a),\nu\}+\nu)}
\end{aligned}$$

□

3.3.2 Anwendung auf die Darstellungsanzahlen $N_{\gamma_L,-q(\gamma_L)}(p^{m_p})$

Nun sollen die Abschätzungen für die Lösungsanzahl quadratischer Kongruenzen benutzt werden, um die Darstellungsanzahlen $N_{\gamma_L,-q(\gamma_L)}(p^{m_p})$, die in die Formel für die Fourierkoeffizienten eingehen, nach oben zu beschränken. Es ist sinnvoll, für jede in $2\det(L)$ aufgehende Primzahl p den p-Beitrag

$$B_L(p) := p^{-\frac{1}{2}\nu_p(\det(L))+m_p(1-2k)} N_{\gamma_L,-q(\gamma_L)}(p^{m_p})$$

zu betrachten. Dabei bezeichnet m_p die Zahl $2\nu_p(2\frac{a}{g})+1$. Wir behandeln der Übersichtlichkeit wegen verschiedene Konfigurationen getrennt und stellen die Ergebnisse im folgenden Lemma zusammen. Die Bezeichnungen γ_L, a, b, c und g sowie m_p seien stets im bisherigen Sinne zu verstehen.

3.3.5 Lemma. *Seien L, a, b, c, g, γ_L und m_p wie vereinbart. Dann gelten in den verschiedenen Konstellationen die folgenden Abschätzungen:*

(1)	$p \nmid 2\frac{a}{g}$	$B_L(p) \leq 2p^{-\frac{1}{2}\nu_p(\det(L))}$
(2)	$2 \nmid \frac{a}{g}$	$B_L(2) \leq 8 \cdot 2^{-\frac{1}{2}\nu_2(\det(L))}$
(3)	$p \mid \frac{a}{g}, p \mid g, \nu_p\left(\frac{b}{2g} - 1\right) < \nu_p\left(\frac{b}{2}\right)$	$B_L(p) \leq p^{-\frac{1}{2}\nu_p(a) - \frac{1}{2}\nu_p(\det(T))}$
(4)	$p \mid \frac{a}{g}, p \mid g, \nu_p\left(\frac{b}{2g} - 1\right) \geq \nu_p\left(\frac{b}{2}\right)$	$B_L(p) \leq \nu_p\left(\frac{a}{g}\right) p^{-\frac{1}{2}\nu_p(a) - \frac{1}{2}\nu_p(\det(T))}$
(5)	$p \mid \frac{a}{g}, p \nmid c, p \neq 2$	$B_L(p) \leq (\nu_p(a) + 2)\left(\frac{4}{3}\nu_p(a) + 1\right) p^{-\frac{1}{3}\nu_p(a) - \frac{1}{2}\nu_p(\det(T))}$
(6)	$2 \mid \frac{a}{g}, 2 \nmid c$	$B_L(2) \leq \sqrt{2}(\nu_2(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_2(a)+1\right) p^{-\frac{1}{3}\nu_2(a) - \frac{1}{2}\nu_2(\det(T))}$
(7)	$p \mid \frac{a}{g}, p \mid c, p \nmid \frac{b}{2}, p \neq 2$	$B_L(p) \leq (\nu_p(a) + 2)\left(\frac{4}{3}\nu_p(a) + 1\right) p^{-\frac{1}{8}\nu_p(a) - \frac{1}{8}\nu_p(\det(T))}$
(8)	$2 \mid \frac{a}{g}, 2 \mid c, 2 \nmid \frac{b}{2}$	$B_L(2) \leq \sqrt{2}(\nu_2(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_2(a)+1\right) 2^{-\frac{1}{8}\nu_2(a) - \frac{1}{8}\nu_2(\det(T))}$

Beweis: (1) Wegen Bemerkung 3.2.3 ist die Kongruenz $q(\mathfrak{x} - \gamma_L) - q(\gamma_L) = q(\mathfrak{x}) - \langle \mathfrak{x}, \gamma_L \rangle \equiv 0 \mod p^{m_p}$ bei $n+1$ fest gewählten Koordinaten eine nichttriviale quadratische Kongruenz für die noch freie Koordinate über dem Körper $\mathbb{F}_p$, da $m_p = 1$ ist. Sie hat somit höchstens $2p^{n+1} = 2p^{2k-1}$ Lösungen.
(2) In diesem Fall ist $m_p = 2\nu_p(2\frac{a}{g}) + 1 = 3$, für jede Wahl von $n+1$ Koordinaten gibt es also maximal 8 Lösungen.
(3) In den gewählten Koordinaten lautet die betrachtete Kongruenz

$$\frac{a}{g}\left(gx_2 + 1\right)x_1 + \frac{b}{2}x_2^2 + \left(cx_3 + \frac{b}{2g} - 1\right)x_2 + \frac{c}{g}x_3 + q(\tilde{x}) \equiv 0 \mod p^{m_p} \tag{3.3}$$

mit $\tilde{x} = (0, 0, x_3, \ldots, x_{n+2})^t$. Dabei variieren die x_i in $\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$. Für jedes x_2 geht p nicht in $gx_2 + 1$ auf, da g von p geteilt wird. Wenn wir nun die $x_2, \ldots, x_{n+2}$ fest wählen, so hat die verbliebene lineare Kongruenz in x_1 genau $p^{\nu_p(\frac{a}{g})}$ Lösungen, falls

$$\frac{b}{2}x_2^2 + \left(cx_3 + \frac{b}{2g} - 1\right)x_2 + \frac{c}{g}x_3 + q(\tilde{x}) \equiv 0 \mod p^{\nu_p(\frac{a}{g})}, \tag{3.4}$$

ansonsten gar keine. Wir erhalten also schlimmstenfalls $p^{m_p(2k-1)+\nu_p(\frac{a}{g})}$ Lösungen der Kongruenz (3.3) und damit die Abschätzung

$$B_L(p) \leq p^{-\nu_p(g) - \frac{1}{2}\nu_p(\det(T))}. \tag{3.5}$$

In einem zweiten Schritt betrachten wir die Kongruenz (3.4) und geben eine Schranke für deren Lösungsanzahl an. Wir setzen $\nu := \nu_p(\frac{b}{2g} - 1)$; nach Voraussetzung ist diese Zahl kleiner als die p-Ordnung von $\frac{b}{2}$ und nach Lemma 3.2.2 kleiner oder gleich der p-Ordnung von $\frac{a}{g}$. Ist $\nu > 0$, so stimmen zwangsläufig die p-Ordnungen von $b/2$ und g überein, und somit gilt $p^{\nu+1} \mid g$. Wenn $\nu = 0$, so gilt letzteres nach Voraussetzung. Hat (3.4) überhaupt Lösungen bei fest gewählten $x_3, \ldots, x_{n+2}$, so kann die Kongruenz durch p^ν dividiert werden, und wir erhalten die neue Relation

$$\frac{b}{2p^\nu}x_2^2 + \left(\frac{c}{p^\nu}x_3 + \left(\frac{b}{2g} - 1\right)/p^\nu\right)x_2 + \left(\frac{c}{g}x_3 + q(\tilde{x})\right)/p^\nu \equiv 0 \mod p^{\nu_p(\frac{a}{g})-\nu}, \tag{3.6}$$

bei der nun der Koeffizient des quadratischen Terms durch p teilbar ist, der des linearen Terms aber nicht, unabhängig von x_3. Eine solche Kongruenz hat aber nach Korollar (3.3.3) höchstens eine Lösung modulo $p^{\nu_p(\frac{a}{g})-\nu}$. Wir bekommen für jede Wahl von $x_3, \dots, x_{n+2}$ daher höchstens $p^{m_p-\nu_p(\frac{a}{g})+\nu} \leq p^{m_p-\nu_p(\frac{a}{g})+\nu_p(g)}$ Lösungen der Kongruenz (3.4), die jeweils $p^{\nu_p(\frac{a}{g})}$ Lösungen der Kongruenz (3.3) erzeugen können. Dies liefert die Abschätzung

$$B_L(p) \leq p^{-\nu_p(\frac{a}{g})-\frac{1}{2}\nu_p(\det(T))}$$

und zusammen mit (3.5) unter Beachtung von $\max\{\nu_p(\frac{a}{g}), \nu_p(g)\} \geq \frac{1}{2}(\nu_p(\frac{a}{g})+\nu_p(g)) = \frac{1}{2}\nu_p(a)$ das verlangte Resultat.

(4) Wir argumentieren wie in der vorher betrachteten Konstellation und dividieren die Kongruenz (3.4) durch die maximale p-Potenz. Diese ist nun allerdings nicht durch $\nu_p(\frac{b}{2g}-1)$, sondern durch $\mu := \min\{\nu_p(b/2), \nu_p(a/g)\} = \min\{\nu_p(g), \nu_p(a/g)\} \leq \nu_p(g)$ gegeben. Die Division führt auf eine möglicherweise triviale quadratische Kongruenz modulo $p^{\nu_p(\frac{a}{g})-\mu}$, bei der der Koeffizient des quadratischen Terms nicht durch p teilbar ist. Nach Lemma 3.3.4 hat eine solche höchstens $(\nu_p(\frac{a}{g})-\mu+1)p^{(\nu_p(\frac{a}{g})-\mu)/2}$ Lösungen modulo $p^{\nu_p(\frac{a}{g})-\mu}$. Wir erhalten daraus

$$\left(\nu_p\left(\frac{a}{g}\right)-\nu_p(g)+1\right)p^{m_p(2k-1)+\frac{1}{2}\nu_p(g)-\frac{1}{2}\nu_p(\frac{a}{g})}$$

Konstellationen von $x_2, \dots, x_{n+2}$, die jeweils $p^{\nu_p(\frac{a}{g})}$ Lösungen der Kongruenz (3.3) liefern können, und daraus die Behauptung.

(5) Wir betrachten wiederum im ersten Schritt die Kongruenz (3.3) bei festen $x_2, \dots, x_{n+2}$ als lineare Kongruenz in x_1. Da nun g von p nicht geteilt wird, ist die durch $x_2 \mapsto gx_2+1$ auf $\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$ gegebene Abbildung bijektiv. Wir erhalten also potentiell $p^{\min\{\nu_p(a/g(gx_2+1)), m_p\}}$ Lösungen. Die Idee ist nun, für jede auftretende p-Ordnung des Ausdrucks gx_2+1 getrennt die Zahl der Wahlmöglichkeiten für $x_2, \dots, x_{n+2}$, für die die rechte Seite der Kongruenz durch $p^{\nu_p(a/g(gx_2+1))}$ teilbar ist, abzuschätzen.

Sei $\nu \in \{0, 1, \dots, m_p-\nu_p(a/g)\}$. Es gibt modulo p^ν genau ein x_2^0, so daß gx_2^0+1 die p-Ordnung ν hat. Wir wollen dieses eine x_2^0 zu Lösungen der simultanen Kongruenz

$$\frac{b}{2}x_2^2+\left(cx_3+\frac{b}{2g}-1\right)x_2+\frac{c}{g}x_3+q(\tilde{x}) \equiv 0 \mod p^{\nu+\nu_p(\frac{a}{g})}, \quad x_2 \equiv x_2^0 \mod p^\nu \tag{3.7}$$

liften; denn nur solche x_2, die von diesem einen modulo p^ν bestimmten herkommen, können $p^{\nu+\nu(\frac{a}{g})}$ Lösungen für x_1 liefern. Summiert man anschließend über ν, so werden alle möglichen Lösungen erfaßt. Wir unterscheiden dabei noch einmal drei Fälle: a) $\nu+\nu_p(b/2) \leq \nu_p(a)/3$, b) $\nu_p(a) \geq \nu+\nu_p(b/2) > \nu_p(a)/3$ und c) $\nu+\nu_p(b/2) > \nu_p(a)$.

a) Die Kongruenz (3.7) hat nach Lemma 3.3.4 höchstens $(\nu+\nu_p(a)+1)p^{\frac{1}{2}\nu_p(b)+\frac{1}{2}(\nu+\nu_p(a))}$ Lösungen modulo $p^{\nu+\nu_p(a)}$ für jede Wahl von $x_3, \dots, x_{n+2}$, also insgesamt höchstens

$$\begin{aligned}&\left(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1\right)p^{m_p(2k-2)}p^{\frac{1}{2}\nu_p(b)+\frac{1}{2}(\nu+\nu_p(a))+m_p-\nu-\nu_p(a)}\\ &\qquad \leq \left(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1\right)p^{m_p(2k-1)+\frac{1}{2}\nu_p(b)-\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\nu_p(a)}\end{aligned}$$

rechte Seiten, die zu jeweils $p^{\nu+\nu_p(a)}$ Lösungen der ursprünglichen Kongruenz (3.3) führen. Für jedes ν mit $\nu+\nu_p(b/2) \leq \nu_p(a)/3$ ergeben sich daher maximal

$$\left(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1\right)p^{m_p(2k-1)+\frac{2}{3}\nu_p(a)} \tag{3.8}$$

Lösungen.

b) Wir betrachten jetzt solche ν mit $\nu_p(a) \geq \nu + \nu_p(b/2) > \nu_p(a)/3$. Dann ist $\nu + \nu_p(b/2)$ jedenfalls positiv. Wir wollen nun das gewählte x_2^0 zu einer Lösung der simultanen Kongruenz (3.7) abändern und setzen daher die Lösungen von (3.7) in der Form $x_2^0 + p^\nu y$ an, wobei y modulo $p^{m_p-\nu}$ zu bestimmen ist. Einsetzen in (3.7) und Sortieren ergibt

$$\begin{aligned} p^\nu \left[\tfrac{b}{2}p^\nu y^2 + \left(bx_2^0 + cx_3 + \tfrac{b}{2g} - 1\right) y\right] + \tfrac{b}{2}(x_2^0)^2 \quad &+ \left(cx_3 + \tfrac{b}{2g} - 1\right) x_2^0 + \\ &+ \tfrac{c}{g}x_3 + q(\tilde{x}) \equiv 0 \mod p^{\nu+\nu_p(\frac{a}{g})}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Gibt es überhaupt Lösungen, die vom betrachteten x_2^0 herkommen, läßt sich die Kongruenz durch p^ν teilen, was dann auf

$$\frac{b}{2}p^\nu y^2 + \left(bx_2^0 + cx_3 + \frac{b}{2g} - 1\right) y + f(x_2^0, \tilde{x}) \equiv 0 \mod p^{\nu_p(\frac{a}{g})},\ y \bmod p^{m_p-\nu} \tag{3.10}$$

führt. Da c nicht durch p teilbar ist, ist die Abbildung $x_3 \mapsto bx_2^0 + cx_3 + \frac{b}{2g} - 1$ bijektiv auf $\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$. Es gibt daher $p^{m_p} - p^{m_p-1}$ Werte für x_3, für die $bx_2^0 + cx_3 + \frac{b}{2g} - 1$ die p-Ordnung 0 hat, die Kongruenz (3.10) also genau eine Lösung modulo $p^{\nu_p(a)}$ $(= p^{\nu_p(a/g)})$ besitzt. Analog dazu führen $p^{m_p-1} - p^{m_p-2}$ x_3-Werte auf p Lösungen etc. Es bleiben die $p^{m_p-\nu-\nu_p(b/2)}$ x_3-Werte zu behandeln, für die der Ausdruck $bx_2^0 + cx_3 + \frac{b}{2g} - 1$ mindestens die p-Ordnung $\nu + \nu_p(b/2)$ hat. Hat die Kongruenz (3.10) für solche x_3 überhaupt Lösungen, so läßt sie sich noch einmal durch $p^{\nu+\nu_p(b/2)}$ teilen, was auf die neue Bedingung

$$p^{-\nu_p(b/2)}\frac{b}{2}y^2 + p^{-\nu-\nu_p(b/2)}\left(bx_2^0 + cx_3 + \frac{b}{2g} - 1\right) + p^{-\nu_p(b/2)} f(x_2^0, \tilde{x}) \equiv 0 \mod p^{\nu_p(a)-\nu-\nu_p(b/2)} \tag{3.11}$$

führt. Dies hat nach Lemma 3.3.4 maximal $(1 + \nu_p(a) - \nu - \nu_p(b/2))p^{\frac{1}{2}(\nu_p(a)-\nu-\nu_p(b/2))}$ Lösungen modulo $p^{\nu_p(a)-\nu-\nu_p(b/2)}$. Summieren wir nun über x_3 auf, so bekommen wir für diejenigen ν mit $\nu_p(a) \geq \nu + \nu_p(b/2) > \nu_p(a)/3$ im schlimmsten Falle

$$\begin{aligned} &p^{m_p(2k-3)} p^{m_p-\nu-\nu_p(b/2)} p^{\nu+\nu_p(b/2)} \left(\left(\nu + \nu_p\left(\tfrac{b}{2}\right) - 1\right) p^{m_p} + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 + \nu_p(a) - \nu - \nu_p\left(\tfrac{b}{2}\right)\right) p^{m_p-\nu-\nu_p(b/2)} p^{\frac{\nu_p(a)-\nu-\nu_p(b/2)}{2}} p^{\nu+\nu_p(b/2)}\right) \\ &\quad \leq (\nu_p(a) + 1)\, p^{m_p(2k-1)+\frac{1}{3}\nu_p(a)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

c) Es bleiben diejenigen ν mit $\nu + \nu_p(b/2) > \nu_p(a)$ zu untersuchen. Unter dieser Annahme ist die Kongruenz (3.10) äquivalent zu

$$\left(bx_2^0 + cx_3 + \frac{b}{2g} - 1\right) y + f(x_2^0, \tilde{x}) \equiv 0 \mod p^{\nu_p(a)}, \qquad y \mod p^{m_p-\nu}. \tag{3.13}$$

Die Anzahl der Lösungen dieser nun linearen Kongruenz läßt sich direkt in Abhängigkeit von x_3 ablesen. Dies führt auf

$$\begin{aligned} &(\nu_p(a) + 1)p^{m_p(2k-3)} p^{m_p} p^{m_p-\nu-\nu_p(a)} p^{\nu+\nu_p(a)} \\ &\quad = (\nu_p(a) + 1)p^{m_p(2k-1)} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Lösungen der Kongruenz (3.3).

Setzen wir nun die Ergebnisse der drei Fälle a)-c) durch Summation über ν zusammen, so ergibt sich eine Schranke für die Lösungsanzahl mit dem Wert

$$(\nu_p(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1\right)p^{m_p(2k-1)+\frac{2}{3}\nu_p(a)}$$

und damit die Behauptung

$$B_L(p) \leq (\nu_p(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1\right)p^{-\frac{1}{3}\nu_p(a)-\frac{1}{2}\nu_p(\det(T))}.$$

(6) Die Argumentation verläuft wörtlich wie im Fall (5), nur muß in der Ungleichung (3.8) die Abschätzung $\nu+\nu_2(b)=\nu+\nu_2(b/2)+1 \leq \nu_2(a)/3+1$ verwendet werden, die den zusätzlichen Faktor $\sqrt{2}$ bedingt.
(7), (8) Analog zum ersten Schritt in Fall (3) erhalten wir die triviale Abschätzung

$$B_L(p) \leq (\nu_p(a)+2)p^{-\frac{1}{2}\nu_p(\det(T))}. \tag{3.15}$$

Wir nehmen nun die Gültigkeit der Ungleichung $\nu_p(a) \leq 3\nu_p(\det(T))$ an. Dann folgt sofort

$$B_L(p) \leq (\nu_p(a)+2)p^{-\frac{1}{8}(3\nu_p(\det(T))+\nu_p(\det(T)))} \leq (\nu_p(a)+2)p^{-\frac{1}{8}\nu_p(a)-\frac{1}{8}\nu_p(\det(T))}. \tag{3.16}$$

In diesem Falle gilt also die Behauptung. Wir können also im folgenden $\nu_p(a) > 3\nu_p(\det(T))$ voraussetzen und haben die Behauptung noch in diesem Falle zu zeigen. Dazu gehen wir wie in (5) vor und schätzen die Lösungsanzahl für verschiedene p-Ordnungen ν des Ausdrucks $a/g(gx_2+1)$ getrennt ab. Wenn $\nu = \nu + \nu_p(b/2) \leq \nu_p(a)/3$ ist, so liefert die wörtlich gleiche Argumentation wie unter (5a) die Abschätzung (3.8).

Wir betrachten nun solche ν, die die Ungleichung $\nu_p(a) \geq \nu > \nu_p(a)/3$ erfüllen; dann gilt wegen $\nu_p(a) > 3\nu_p(\det(T))$ jedenfalls $\nu > \nu_p(\det(T))$. Wir gehen wieder analog zu (5b) vor, wobei allerdings die Abbildung $x_3 \mapsto bx_2^0 + cx_3 + b/(2g) - 1$ nun nicht bijektiv ist. Mit x_3 durchläuft $bx_2^0 + cx_3 + b/(2g) - 1$ im schlimmsten Fall genau die Vielfachen von $p^{\nu_p(\det(T))}$ im Ring $\mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}$. Die Zahl der Lösungen ist also um den Faktor $p^{\nu_p(\det(T))}$ höher als in (3.12) bzw. dem entsprechenden Ausdruck für den Sonderfall $p=2$.

Der noch offene Fall $\nu > \nu_p(a)$ trifft nur auf $\nu = \nu_p(a)+1$ zu, da $b/2$ nach Voraussetzung nicht von p geteilt wird. Auch hier gilt das Ergebnis (3.14) aus (5c) mit dem zusätzlichen $p^{\nu_p(\det(T))}$-Faktor. Setzen wir alle diese Ergebnisse zusammen, so gilt die Abschätzung

$$B_L(p) \leq (\nu_p(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1\right)p^{-\frac{1}{3}\nu_p(a)+\frac{1}{2}\nu_p(\det(T))} \tag{3.17}$$

bzw. für $p=2$

$$B_L(2) \leq \sqrt{2}(\nu_2(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_2(a)+1\right)2^{-\frac{1}{3}\nu_2(a)+\frac{1}{2}\nu_2(\det(T))}. \tag{3.18}$$

Zusammen mit (3.15) folgt

$$B_L(p) \leq (\nu_p(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1\right)p^{-\max\{\frac{1}{3}\nu_p(a)-\frac{1}{2}\nu_p(\det(T)),\frac{1}{2}\nu_p(\det(T))\}} \tag{3.19}$$

bzw. für $p=2$

$$B_L(2) \leq \sqrt{2}(\nu_2(a)+2)\left(\frac{4}{3}\nu_2(a)+1\right)2^{-\max\{\frac{1}{3}\nu_2(a)-\frac{1}{2}\nu_2(\det(T)),\frac{1}{2}\nu_p(\det(T))\}}. \tag{3.20}$$

Bilden wir aus den beiden Exponenten die Konvexkombination $\frac{3}{8}(\frac{1}{3}\nu_p(a) - \frac{1}{2}\nu_p(\det(T))) + \frac{5}{8}\frac{1}{2}\nu_p(\det(T))$, so erhalten wir die Behauptung. □

3.4 Der Hauptsatz und Folgerungen

3.4.1 Hauptsatz

Nach den nun geleisteten Vorbereitungen sind wir in der Lage, den avisierten Hauptsatz zu formulieren und zu beweisen.

3.4.1 Theorem. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$, $n \geq 3$, das über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen abspaltet. Ist die Determinante des Gitters betragsmäßig hinreichend groß, so gibt es Spitzenformen im Kontrollraum $\mathscr{K}_L$.*

Beweis: Sei γ_L der Testvektor des Gitters L, so gilt

$$-\frac{1}{4}q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L)) \leq R(k) \prod_{p|2\det(L)} B_L(p). \tag{3.21}$$

Nach den in Lemma 3.3.5 angegebenen Abschätzungen gilt für jedes p stets $B_L(p) \to 0$, falls $\nu_p(\det(L))$ gegen ∞ konvergiert. Mit einer leichten Modifikation läßt sich Satz 316 aus [Ha-Wr] anwenden, der garantiert, daß die rechte Seite in (3.21) mit steigender Determinante gegen 0 fällt. Ist die Determinante hinreichend groß, so fällt $-\frac{1}{4}q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L))$ unter das singuläre Gewicht $n/2-1$. Gäbe es nun keine Spitzenform im Kontrollraum $\mathscr{K}_L$, so ließe sich der Heegnerdivisor $H(\gamma_L, q(\gamma_L))$ durch ein holomorphes Borcherdsprodukt realisieren. Dieses hätte nach Satz 2.1.7 das Gewicht $-\frac{1}{4}q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L)) < n/2-1$, kann also nicht existieren. □

Zusammen mit Satz 1.1.31 und Korollar 2.2.7 ergibt sich unmittelbar die folgende Umformulierung.

3.4.2 Theorem. *Unter den geraden Gittern der Signatur $(2,n)$ mit $n \geq 3$, die über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen abspalten, gibt es bis auf Isomorphie nur endlich viele mit einfachem Kontrollraum.*

Unter Benutzung der Ergebnisse aus Abschnitt 13 der Arbeit von Bruinier [Br1] ergibt sich eine weitere Folgerung. Nach dem dortigen Theorem 13.15 und Korollar 13.16 hat jede Modulform f zur betrachteten Modulgruppe Γ_L, die a priori kein Borcherdsprodukt zu sein braucht und deren Divisor eine Linearkombination

$$(f) = \sum_{\gamma \in (L'/L)/\{\pm 1\}} \sum_{\substack{m \in \mathbb{Z}+q(\gamma) \\ m<0}} a(\gamma, m) H(\gamma, m)$$

ist, das Gewicht $-\frac{1}{4}\sum a(\gamma, m) q_0(\gamma, -m)$, also dasselbe Gewicht, das ein Borcherdsprodukt mit gleichem Divisor hätte. Sinkt dieses unter das singuläre Gewicht, so kann der Divisor durch überhaupt keine Modulform realisiert werden.

Unsere Konstruktion liefert also unter der Annahme, daß die Determinante des Gitters L hinreichend groß ist, einen Heegnerdivisor $H(\gamma_L, q(\gamma_L))$, der ein nichttriviales Element der Divisorenklassengruppe $\widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{H}_n/\Gamma_L)$ des Quotienten $\mathcal{H}_n/\Gamma_L$ repräsentiert. Die Divisorenklassengruppe sei wie in [Br2] erklärt, d.h. man betrachtet Divisoren modulo der Hauptdivisoren meromorpher Modulformen (rationalen Gewichts mit Multiplikatorsystem).

Um ein zu Theorem 3.4.2 analoges Resultat zu erhalten, können wir uns aber nicht auf Korollar 2.2.7 berufen, da dieses nur die Existenz von Hindernissen liefert. Man beachte jedoch, daß der das Gewicht bestimmende Term $-\frac{1}{4}q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L))$ durch eine Schranke der Form $R(k)\prod B_L(p)$ beschränkt ist, wobei auch $R(k)$ mit wachsendem, hinreichend großem k monoton gegen Null konvergiert.

3.4.3 Theorem. *Für fast alle Isomorphieklassen von geraden Gittern der Signatur* $(2, n)$ *mit* $n \geq 3$*, die über* $\mathbb{Q}$ *zwei hyperbolische Ebenen abspalten, definiert der Heegnerdivisor* $H(\gamma_L, q(\gamma_L))$ *ein nichttriviales Element in der Divisorenklassengruppe* $\widetilde{\mathrm{Cl}}(\mathcal{H}_n/\Gamma_L)$*. Ist* $\Gamma \subset \Gamma_L$ *ein fixpunktfreier Normalteiler von endlichem Index, so gilt genauer die Beziehung* $\dim(\mathrm{Pic}(\mathcal{H}_n/\Gamma) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q})^{\Gamma_L/\Gamma} > 1$.

3.4.2 Quantitative Aussagen

Wir wollen zusätzlich zu den prinzipiellen Aussagen in den vorangegangenen Theoremen auch quantitative Aussagen herleiten. Theorem 3.4.1 sichert die Existenz einer Schrankenfunktion $S(n)$, so daß gerade Gitter der Signatur $(2, n)$ mit einer Determinante größer als $S(n)$, die den Bedingungen genügen, nicht einfach sein können.

Eine solche Schranke in voller Allgemeinheit anzugeben, ist jedoch nicht einfach. Damit $S(n)$ diese Eigenschaft hat, muß für jedes Gitter mit einer Determinante D, wobei $|D| \geq S(n)$ sei, eine Normalform mit Parametern a, b, c, g und $\det(T)$ existieren, so daß der Wert

$$r := -\frac{1}{4} q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L)) \leq R\left(1 + \frac{n}{2}\right) \prod_{p|2D} B_L(p)$$

unter das singuläre Gewicht $n/2-1$ fällt. Für jeden Beitrag $B_L(p)$ müßten wir die Abschätzung durch $(\nu_p(a)+2)(\frac{4}{3}\nu_p(a)+1)p^{-\frac{1}{8}\nu_p(a)-\frac{1}{8}\nu_p(\det(T))}$ vornehmen, da wir ohne weitere Annahmen nicht entscheiden können, welcher der Fälle aus Lemma 3.3.5 eintritt. Eine Ausnahme hiervon bilden nur jene Primzahlen p mit $\nu_p(D) = 1$, da diese nicht in a aufgehen können. Die Funktion $x \mapsto (x+2)(\frac{4}{3}x+1)p^{-\frac{1}{8}x}$ nimmt jedoch relativ große Werte an. Dies führt auf eine Schranke, die wegen ihrer Größe für praktische Berechnungen unbrauchbar ist. Untersuchen wir hingegen ein konkret gegebenes Gitter, so kann durch Einsetzen der Daten a, b etc. die Bedingung $r < n/2 - 1$ leicht überprüft werden.

In Bezug auf eine allgemeingültige Aussage beschränken wir uns daher auf eine einfachere Situation, in der eine brauchbare Schranke angebbar ist. Wir stützen uns dabei auf das folgende

3.4.4 Lemma. *Für eine natürliche Zahl* N *bedeute* $r(N)$ *die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von* N*. Dann gibt es zu jedem natürlichen* n *ein* $k_n > 0$*, so daß für alle natürlichen Zahlen* N *gilt* $2^{r(N)} \leq k_n \sqrt[n]{N}$*. Bedeutet* p_i *die* i*-te Primzahl (in natürlicher Reihenfolge) und ist* $r_0^n := \max\{i \in \mathbb{N} \,|\, 2 > \sqrt[n]{p_i}\}$*, so kann man*

$$k_n = \frac{2^{r_0^n}}{\sqrt[n]{p_1 \cdot \dots \cdot p_{r_0^n}}}$$

wählen. Insbesondere ist $k_2 = \frac{4}{\sqrt{6}}$ *und* $k_3 = \frac{16}{\sqrt[3]{210}}$.

Beweis: Da für jedes N stets $N \geq p_1 \cdot \dots \cdot p_{r(N)}$ gilt, folgt die Ungleichung

$$\frac{2^{r(N)}}{\sqrt[n]{N}} \leq \frac{2^{r(N)}}{\sqrt[n]{p_1 \cdot \dots \cdot p_{r(N)}}}$$

für alle natürlichen N. Hat N genau r_0^n Primfaktoren in einfacher Potenz, so gilt die Behauptung nach Konstruktion von k_n, und wegen $\frac{2}{\sqrt[n]{p_r}} \leq 1$ für $r \geq r_0^n$ auch für alle N mit $r(N) \geq r_0^n$. Es bleibt also die Ungleichung

$$\frac{2^r}{\sqrt[n]{p_1 \cdot \dots \cdot p_r}} \leq k_n$$

für $r < r_0^n$ nachzuprüfen. Dies ist aber für $r < r_0^n$ ebenfalls klar wegen $\frac{2}{\sqrt[n]{p_r}} > 1$, und somit ist die Behauptung bewiesen. □

3.4.5 Lemma. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit $n \geq 3$, das über $\mathbb{Z}$ ein skalares Vielfaches einer hyperbolischen Ebene abspaltet. Die Koordinatisierung sei so gewählt, daß b und c verschwinden. Dann gelten die Abschätzungen*

$$-\frac{1}{4}q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L)) \leq R\left(1+\frac{n}{2}\right) 8 \cdot \frac{2^{r(D)}}{\sqrt{D}} \tag{3.22}$$

$$\leq R\left(1+\frac{n}{2}\right) \frac{128}{\sqrt[3]{210}}|D|^{-\frac{1}{6}}. \tag{3.23}$$

Insbesondere gelten diese, falls das Gitter quadratfreie Determinante hat.

Beweis: In der gegebenen Situation ist $a/g = 1$. Somit gilt

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L)) &\leq R\left(1+\frac{n}{2}\right) 8 \cdot 2^{-\frac{1}{2}\nu_2(D)} \prod_{\substack{p|D \\ p\neq 2}} 2p^{-\frac{1}{2}\nu_p(D)} \\
&\leq R\left(1+\frac{n}{2}\right) 8 \cdot 2^{r(D)}|D|^{-\frac{1}{2}} \\
&\leq R\left(1+\frac{n}{2}\right) 8 \cdot \frac{16}{\sqrt[3]{210}}|D|^{\frac{1}{3}}|D|^{-\frac{1}{2}} \\
&= R\left(1+\frac{n}{2}\right) \frac{128}{\sqrt[3]{210}}|D|^{-\frac{1}{6}}.
\end{aligned}$$

□

Auch die durch Lemma 3.4.5 ermittelbare explizite Schranke (3.23) hat für kleine Dimensionen des Gitters nur einen eingeschränkten praktischen Nutzen. So fällt beispielsweise für $n = 3$ der Wert der angegebenen Schranke für $-1/4q_0(\gamma_L, -q(\gamma_L))$ erst für Determinanten zwischen 10^{20} und 10^{21} unter das singuläre Gewicht $1/2$. Auch für $n = 12$ liegt diese Grenze oberhalb von 10^{18}. Lediglich für große n ergibt sich eine brauchbare Schranke, da dann der Vorfaktor $R(1 + n/2)$ klein wird. Für solche n ist aber die Verwendung der Ergebnisse aus Abschnitt 2 (Korollar 2.2.7) günstiger. Immerhin erhalten wir im Gegensatz zu den dort verwendeten Methoden die Daten eines konkreten, nicht als Hauptdivisor realisierbaren Divisors. Die Abschätzung (3.22) hingegen liefert bereits für relativ kleine Determinanten D Werte unterhalb des singulären Gewichts.

Kapitel 4

Konstruktion von Spitzenformen mittels Symmetrisierung

In den vorangegangenen Kapiteln wurde bewiesen, daß unter milden zusätzlichen Voraussetzungen im Kontrollraum eines Gitters mit hinreichend großer Determinante Spitzenformen existieren. Bei kleinen Dimensionen kommen jedoch Gitter mit sehr großen Determinanten vor, über die mit diesen Methoden keine Aussage möglich ist. Wir wollen daher Spitzenformen im Kontrollraum konkret konstruieren und ihre Existenz auf diesem Wege beweisen.

Ansatzpunkt ist die Beobachtung, daß der Standardbasisvektor $\mathfrak{e}_0 \in \mathbb{C}[L'/L]$ ein Eigenvektor unter der Operation der Gruppe $\Gamma_0(N)$ via der Weildarstellung ist. Infolgedessen ist für $f \in M_k(N,\chi)$ mit einem gewissen Charakter χ die Funktion $f\mathfrak{e}_0 : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ eine Modulform aus dem Raum $[\Gamma_0(N), k, \rho_L^*]$. Diese kann man zu einer vollinvarianten Modulform symmetrisieren. Dabei kann die symmetrisierte Form allerdings zu Null werden. Eine genauere Untersuchung des Symmetrisierungsoperators zeigt jedoch Injektivität auf einem geeigneten Teilraum und damit die Existenz von Spitzenformen in den meisten Fällen.

Wir beschränken uns im gesamten Kapitel auf Gitter, deren Stufe quadratfrei ist. Im letzten Abschnitt wird der Spezialfall der Primzahldeterminante gesondert behandelt. Man findet in diesem Fall einen Isomorphismus zwischen einem Raum gewisser vektorwertiger Spitzenformen und geeigneten Unterräumen von $S_k(N,\chi)$.

4.1 Elliptische Modulformen zu $\Gamma_0(N)$

Wir stellen einige Fakten über elliptische Modulformen auf der Heckegruppe $\Gamma_0(N)$ zusammen. Dabei verstehen wir wie üblich unter $\Gamma_0(N)$ die Gruppe derjenigen Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in Sl_2(\mathbb{Z})$, die der Kongruenzbedingung $c \equiv 0 \mod N$ genügen. Sie hat in der vollen Modulgruppe den Index

$$[Sl_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)] = N \prod_{p|N} (1 + \tfrac{1}{p}) \tag{4.1}$$

Mit $M_k(N,\chi)$ wollen wir den Raum der holomorphen Modulformen vom Gewicht k zum Charakter χ und zur Gruppe $\Gamma_0(N)$ bezeichnen, und mit $S_k(N,\chi)$ den Unterraum der Spitzenformen darin. Wegen der avisierten Anwendungen legen wir besonderes Augenmerk auf die Räume mit quadratfreiem N sowie Charakter χ der Form $\chi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) = \xi(d)$ mit einem quadratischen Dirichletcharakter ξ modulo N.

Für $f,\, g \in S_k(N,\chi)$ existiert das Integral

$$\langle f,g\rangle := \int_{\mathscr{F}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{dx\,dy}{y^2}$$

und ist unabhängig von der Wahl eines Fundamentalbereiches $\mathscr{F}$. Dies definiert eine positiv definite hermitesche Form, die wir das **Peterssonsche Skalarprodukt** nennen. Mit diesem Skalarprodukt ist $S_k(N,\chi)$ ein endlichdimensionaler Hilbertraum.

Im folgenden ist mit Orthogonalität im Raum $S_k(N,\chi)$ stets Orthogonalität bezüglich dieses Skalarproduktes gemeint. Auch die Bildung adjungierter Operatoren wird bezüglich des Peterssonschen Skalarproduktes durchgeführt.

Alle Bezeichungen dieses Abschnittes wurden in Anlehnung an die Monographie [Mi] gewählt.

4.1.1 Frickeinvolutionen

4.1.1 Definition. *Sei $N = \prod_{i=1}^r p_i$ quadratfrei. Für $i = 1,\ldots,r$ bezeichnen wir mit γ_{p_i} jeweils eine fest gewählte Matrix aus $Sl_2(\mathbb{Z})$, die den Bedingungen*

$$\gamma_{p_i} \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \bmod p_i^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \bmod (N/p_i)^2 \end{cases}$$

*genügt. Mit η_{p_i} bezeichnen wir das Produkt $\gamma_{p_i}\left(\begin{smallmatrix} p_i & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ferner sei abkürzend $\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} := \gamma_{p_{i_1}}\cdots\gamma_{p_{i_t}}$ und ebenso $\eta_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} := \eta_{p_{i_1}}\cdots\eta_{p_{i_t}}$ geschrieben. Die η_q heißen **partielle Frickeinvolutionen**, für $q = N$ auch einfach **Frickeinvolution**.*

Die Produkte $\gamma_{p_{i_1}}\cdots\gamma_{p_{i_t}}$ hängen im allgemeinen von der Reihenfolge der Faktoren ab; modulo N (sogar N^2) stimmen die verschiedenen Produkte jedoch überein. Da es uns nur auf die $\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} \bmod N$ sowie $\eta_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} \bmod N^2$ ankommt, ist diese Schreibweise gerechtfertigt. Für η_N kann stets die Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{smallmatrix}\right)$ gewählt werden.

Die partiellen Frickeinvolutionen normalisieren die Gruppe $\Gamma_0(N)$, und für quadratische Charaktere stimmen die Werte $\chi(\gamma)$ und $\chi(\eta_q\gamma\eta_q^{-1})$ für alle $\gamma \in \Gamma_0(N)$ überein. Definieren wir wie üblich den Peterssonschen Slashoperator für alle $M \in Gl_2^+(\mathbb{R})$ durch die Vereinbarung

$$f|_k M(z) := \det(M)^{\frac{k}{2}} j(M,z)^{-k} f(Mz),$$

so induzieren die partiellen Frickeinvolutionen Automorphismen der Räume $M_k(N,\chi)$ und $S_k(N,\chi)$. Das Quadrat der Frickeinvolution η_N induziert dabei die Multiplikation mit $(-1)^k$.

4.1.2 Heckeoperatoren

Wir definieren für gegebenes N die Halbgruppen

$$\Delta_0(N) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \equiv 0 \mod N,\ \mathrm{ggT}(a,N) = 1,\ ad - bc > 0\right\}$$

und

$$\Delta_0^*(N) := \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}) \,|\, c \equiv 0 \mod N,\ \mathrm{ggT}(d,N) = 1,\ ad - bc > 0\right\}$$

und bezeichnen mit $\mathscr{R}(N)$ bzw. $\mathscr{R}^*(N)$ die Heckealgebren $\mathscr{R}(N) := \mathscr{R}(\Gamma_0(N), \Delta_0(N))$ bzw. $\mathscr{R}^*(N) := \mathscr{R}(\Gamma_0(N), \Delta_0^*(N))$. Nach Ausdehnung des Charakters auf die genannten Halbgruppen via $\chi(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) := \overline{\chi(a)}$ sowie $\chi^*(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)) := \chi(d)$ operieren die Heckealgebren $\mathscr{R}(N)$ und $\mathscr{R}^*(N)$ auf dem Modulformenraum $S_k(N,\chi)$ (und auf $M_k(N,\chi)$). Lineare Operatoren, die auf diese Weise von Elementen der beiden Heckealgebren herkommen, nennen wir **Heckeoperatoren**.

4.1.2 Definition. *Zu $n \in \mathbb{N}$ definieren wir Elemente $T(n)$ bzw. $T^*(n)$ von $\mathscr{R}(N)$ bzw. $\mathscr{R}^*(N)$ durch*

$$T(n) := \sum_{\substack{\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N) \in \mathscr{R}(N) \\ \det(\alpha)=n}} \Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N) \quad \text{und} \quad T^*(n) := \sum_{\substack{\Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N) \in \mathscr{R}^*(N) \\ \det(\alpha)=n}} \Gamma_0(N)\alpha\Gamma_0(N).$$

4.1.3 Satz. *Es gelten die folgenden Fakten:*

1. *Die Heckealgebren $\mathscr{R}(N)$ und $\mathscr{R}^*(N)$ sind kommutativ.*
2. *Die Operatoren $T(n)$ und $T^*(n)$ sind jeweils zueinander adjungiert bezüglich des Peterssonschen Skalarproduktes auf $S_k(N,\chi)$.*
3. *Der Raum $S_k(N,\chi)$ besitzt eine Basis aus simultanen Eigenformen zu den Operatoren $T(n)$ mit $ggT(n,N) = 1$.*

4.1.4 Bemerkung. *Definitionsgemäß (cf. [Mi], Nr. 4.5.25 und 4.5.26) wirkt der Heckeoperator $T(n)$ auf eine Modulform f durch*

$$(f|T(n))(z) = n^{k-1} \sum_{\substack{ad=n \\ d>0}} \sum_{b=0}^{d-1} \chi(a) d^{-k} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Ist nun n ein Teiler von N, so spezialisiert sich dies zu

$$(f|T(n))(z) = n^{-1} \sum_{b=0}^{n-1} f\left(\frac{z+b}{n}\right).$$

Sei $f(z) = \sum a_j \mathbf{e}(jz)$ die Fourierentwicklung einer Modulform f, so folgt in diesem Fall insbesondere

$$(f|T(n))(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{nj} \mathbf{e}(jz).$$

4.1.3 Alt- und Neuformen

Seien l und M natürliche Zahlen. Dann ist $\Gamma_0(lM)$ eine Untergruppe der Gruppe $\Gamma_0(M)$. Modulformen aus $S_k(M,\chi)$ liegen deswegen auch in $S_k(lM,\chi)$ (genauer in $S_k(lM, \chi_{|\Gamma_0(lM)})$). Es gibt aber mehr als nur eine Einbettung: Ist n ein beliebiger Teiler von l, so liegt die Funktion $z \mapsto f(nz)$ ebenfalls im Modulformenraum $S_k(lM,\chi)$.

Im Raum $S_k(N,\chi)$ liegen also im allgemeinen auch solche Modulformen, die sich bezüglich einer größerer Gruppe $\Gamma_0(M)$ für einen Teiler M von N transformieren. Dabei treten aber nur solche Teiler M auf, für die sich der vorgegebene Charakter χ auf die größere Gruppe $\Gamma_0(M)$ fortsetzen läßt. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Führer m_χ des Charakters die kleinere Stufe M teilt. Wir kommen daher zu der folgenden

4.1.5 Definition. *Mit $S_k^1(N,\chi)$ sei der Raum bezeichnet, der als Vektorraum von der Menge*

$$\bigcup_{\substack{m_\chi|M|N\\ M\neq N}} \bigcup_{l|\frac{N}{M}} \{f(lz) \mid f(z) \in S_k(M,\chi)\}$$

*erzeugt wird. Wir nennen ihn den Raum der **Altformen**. Sein orthogonales Komplement $S_k^0(N,\chi)$ heißt **Neuformenraum**. Die Elemente des Neuformenraumes heißen **Neuformen**.*

Die Modulform $f(lz)$ hat offensichtlich nur solche Fourierkoeffizienten $a_n \neq 0$, für die n ein Vielfaches von l ist. Hiervon gilt in gewisser Weise auch die Umkehrung:

4.1.6 Satz. *(cf. [Mi], Thm. 4.6.8) Sei l eine natürliche Zahl und sei $f(z) = \sum a_n q^n \in M_k(N,\chi)$. Ferner sei m_χ der Führer des Charakters χ. Es sei $a_n = 0$ für alle zum vorgegebenen l teilerfremden n.*

Dann folgt $f = 0$, falls $ggT(l, N/m_\chi) = 1$. Andernfalls gibt es zu jedem Primteiler p von $ggT(l, N/m_\chi)$ ein $f_p \in M_k(N/p,\chi)$ mit

$$f(z) = \sum_{p|ggT(l,N/m_\chi)} f_p(pz).$$

Ist f eine Spitzenform, so kann man auch alle auftretenden f_p als Spitzenformen wählen.

Die Unterräume $S_k^0(N,\chi)$ und $S_k^1(N,\chi)$ sind invariant unter den Heckeoperatoren $T(n)$ für zur Stufe N teilerfremde n, außerdem auch unter den (partiellen) Frickeinvolutionen η_Q. Beide besitzen Basen, die aus simultanen Eigenformen zu allen $T(n)$ mit $\mathrm{ggT}(n,N) = 1$ bestehen. Ist f eine solche Eigenform aus dem Neuformenraum, so ist ihr erster Fourierkoeffizient a_1 ungleich Null, man kann ihn also normieren.

4.1.7 Definition. *Eine **primitive Form** ist eine Modulform $f \in S_k^0(N,\chi)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1. *f ist eine Eigenform zu allen Heckeoperatoren $T(n)$ mit $ggT(n,N) = 1$.*
2. *Ist $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{e}(nz)$ die Fourierentwicklung von f, so gilt $a_1 = 1$.*

4.1.8 Satz. *(cf. [Mi], Thm. 4.6.13) Der Neuformenraum $S_k^0(N,\chi)$ besitzt eine Basis aus primitiven Formen. Diese sind simultane Eigenfunktionen der Heckealgebren $\mathscr{R}(N)$ und $\mathscr{R}^*(N)$. Ist $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{e}(nz)$ die Fourierentwicklung einer solchen Eigenform f, so gilt $f|T(n) = a_n f$.*

Alt- und Neuformenräume sind also unter den vollen Heckealgebren invariant. Zum Abschluß des Unterabschnittes geben wir das Verhalten einer Neuform unter der Frickeinvolution an.

4.1.9 Satz. *(cf. [Mi], Thm. 4.6.15) Sei χ ein quadratischer Charakter modulo N. Ist $f(z) = \sum_{n=1}^\infty a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k^0(N,\chi)$ eine primitive Neuform, so auch $f_\rho(z) := \sum_{n=1}^\infty \bar{a}_n \mathbf{e}(nz)$, und es gilt*

$$f|_k \eta_N = c f_\rho$$

für eine von f abhängige Konstante $c \in \mathbb{C}^*$.

4.2 Der Symmetrisierungsoperator für quadratfreie Stufe

4.2.1 Die Idee der Symmetrisierung

4.2.1 Satz. *(cf. [Od], Cor. $\mathrm{A}'_{\text{even}}$ und Cor. A'_{odd}) Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$, Determinante D und Stufe N. Dann ist der Standardbasisvektor $\mathfrak{e}_0 \in \mathbb{C}[L'/L]$ ein Eigenvektor von $\rho_L(g)$ für jedes $g = (M, \varphi)$ mit $M \in \Gamma_0(N)$. Ist n gerade, so gilt $\rho_L^*(g)\mathfrak{e}_0 = \chi_L(g)\mathfrak{e}_0$ mit*

$$\chi_L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \varphi\right) = \begin{cases} \left(\frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}D}{d}\right) & \text{falls } d > 0, \\ (-1)^{\frac{n+2}{2}}\left(\frac{(-1)^{\frac{n+2}{2}}D}{-d}\right) & \text{falls } d < 0. \end{cases}$$

Wir beschränken uns von vornherein auf solche Gitter, deren Stufe quadratfrei ist. Nach Korollar 1.1.34 ist dann die Dimension des Gitters gerade, und $\Gamma_0(N)$ operiert auf $\mathfrak{e}_0$ durch einen quadratischen Charakter. Ist F ein Element des zum Gitter gehörigen Kontrollraumes, so ist die $\mathfrak{e}_0$-Komponentenfunktion F_0 im Raum $M_{1+\frac{n}{2}}(N, \bar{\chi}_L) = M_{1+\frac{n}{2}}(N, \chi_L)$ enthalten.

Ist umgekehrt $f \in M_{1+\frac{n}{2}}(N, \chi_L)$, so auch $f|_{1+\frac{n}{2}}\eta_N$, und die Vorschrift

$$\begin{aligned} f|_{1+\frac{n}{2}}\eta_N\mathfrak{e}_0 : \quad & \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L] \\ & z \mapsto f|_{1+\frac{n}{2}}\eta_N(z)\mathfrak{e}_0 \end{aligned}$$

definiert eine vektorwertige Modulform auf der Gruppe $\Gamma_0(N)$, die man durch Summation über ein Repräsentantensystem der Nebenklassen von $\Gamma_0(N)\backslash Sl_2(\mathbb{Z})$ vollinvariant und somit zu einem Element des Kontrollraumes machen kann. Die Verwendung von $f|_{1+\frac{n}{2}}\eta_N$ anstelle von f ist eigentlich unerheblich, sorgt aber für eingängigere Formeln.

4.2.2 Definition. *Seien L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ und χ_L der quadratische Charakter im Sinne von Satz 4.2.1. Sei ferner $f \in M_{1+\frac{n}{2}}(N, \chi_L)$. Dann nennen wir die Modulform*

$$F^f(z) := \sum_{M \in \Gamma_0(N)\backslash Sl_2(\mathbb{Z})} f|_{1+\frac{n}{2}}\eta_N(z)\mathfrak{e}_0 \Big|^*_{1+\frac{n}{2}} M \qquad \left(\in \mathscr{K}_L\right)$$

die ***Symmetrisierung*** *von f. Die lineare Abbildung $f \mapsto F^f$ heißt zu L gehöriger* ***Symmetrisierungsoperator****.*

4.2.2 Repräsentantensysteme

4.2.3 Satz. *Sei $N = \prod_{i=1}^r p_i$ quadratfrei, und seien γ_q die zu den Teilern q von N gehörigen Matrizen aus Definition 4.1.1. Seien ferner a_i ganze Zahlen, die den Kongruenzen*

$$a_i \equiv \begin{cases} 0 & \mod p_i^2 \\ 1 & \mod (N/p_i)^2 \end{cases}$$

genügen. Dann ist ein Repräsentantensystem für die Nebenklassen $\Gamma_0(N)\backslash Sl_2(\mathbb{Z})$ durch die Matrizen

$$R_s^{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} := \gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} T^{A_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} s}, \quad A_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} := \prod_{j \notin \{i_1, \ldots, i_t\}} a_j,$$

gegeben, wobei $p_{i_1} \ldots p_{i_t}$ alle Teiler von N und s die Menge $\{0, 1, \ldots, \prod_{j=1}^t p_{i_j} - 1\}$ durchläuft.

Beweis: Die Matrizen $R_s^{p_{i_1}\cdots p_{i_t}}$ erfüllen die Kongruenzen

$$R_s^{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} \equiv \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & s \end{pmatrix} & \bmod (p_{i_1}\dots p_{i_t})^2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \bmod \left(\frac{N}{p_{i_1}\cdots p_{i_t}}\right)^2 \end{cases}. \tag{4.2}$$

Da zwei Matrizen $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in Sl_2(\mathbb{Z})$ genau dann kongruent modulo $\Gamma_0(N)$ sind, wenn $c\delta - \gamma d \equiv 0 \mod N$ gilt, repräsentieren die angegebenen Matrizen paarweise verschiedene Nebenklassen. Aus Anzahlgründen (cf. (4.1)) müssen sie dann bereits ein vollständiges Repräsentantensystem bilden. □

Bemerkung: Wählt man verschiedene γ_q und a_i, die den jeweiligen Bedingungen genügen, so sind die daraus entstehenden $R_s^{p_{i_1}\cdots p_{i_t}}$ modulo $\Gamma(N^2) \subset \Gamma_0(N)$ äquivalent, repräsentieren also die gleiche Nebenklasse. In diesem Sinne sind die γ_q und die $R_s^{p_{i_1}\cdots p_{i_t}}$ wohldefiniert.

Auf die Tatsache, daß die Kongruenzen (4.2) modulo der Quadrate q^2 und $(N/q)^2$ erfüllt sind, kommt es nicht an; auch Matrizen, die diese nur modulo q und N/q realisieren, sind Repräsentanten. Es ist jedoch vorteilhaft, die angegebenen Repräsentanten zu wählen, da man das Verhalten von elliptischen Modulformen unter den partiellen Frickeinvolutionen kennt.

4.2.3 Struktur der Diskriminantengruppe

Sei L ein gerades Gitter mit quadratfreier Stufe N. Die Ordnung $|L'/L| = |\det(L)|$ der Diskriminantengruppe L'/L ist dann nach Lemma 1.1.16 ein Teiler von N^∞. In der Zerlegung dieser Gruppe gemäß dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen treten daher als Summanden genau solche zyklische Gruppen $\mathbb{Z}/p_i^{\alpha_i}$ mit in der Stufe aufgehenden Primzahlen p_i auf. Da die quadratfreie Stufe die Diskriminantengruppe annulliert, kann aber als Exponent in dieser Zerlegung nur $\alpha_i = 1$ auftreten. Wir erhalten somit eine genaue Aufschlüsselung der Struktur von L'/L.

4.2.4 Satz. *Sei L ein gerades Gitter mit quadratfreier Stufe $N = \prod_{i=1}^r p_i$. Dann ist die Diskriminantengruppe L'/L eine direkte Summe eindeutig bestimmter $\mathbb{F}_{p_i}$-Vektorräume $L^{(p_i)}$. Es gilt die Identität $\dim_{\mathbb{F}_{p_i}}(L^{(p_i)}) = \nu_{p_i}(D)$. Die Elemente von $L^{(p_i)}$ sind gerade die N/p_i-fachen in L'/L.*

4.2.5 Korollar. *Ist $\gamma = \gamma_{p_1} + \cdots + \gamma_{p_r} \in L'/L = L^{(p_1)} \oplus \cdots \oplus L^{(p_r)}$ die Zerlegung eines Gruppenelementes γ in seine Komponenten, so gelten die Kongruenzen*

$$-Nq(\gamma) \equiv -Nq(\gamma_{p_i}) \mod p_i, \quad i \in \{1, \dots, r\}.$$

4.2.6 Korollar. *Für $\gamma \in L'/L$ folgt aus $ggT(-Nq(\gamma), N) = 1$ bereits, daß keine der Komponenten γ_{p_i} in den Untergruppen $L^{(p_i)}$ trivial ist.*

4.2.4 Wirkung partieller Frickeinvolutionen auf dem Gruppenring

Wir untersuchen die Wirkung der transponierten Darstellungsmatrizen von $\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}}$ auf dem Gruppenring. Dabei ist für den Symmetrisierungsoperator einzig die Wirkung auf den Basisvektor $\mathfrak{e}_0$ von Bedeutung. In ihr spiegelt sich die Struktur der Diskriminantengruppe als direkte Summe der Untergruppen $L^{(p_i)}$ wieder.

Da die Weildarstellung über die Gruppe $Sl_2(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ faktorisiert, ist $\rho_L(\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}})^t$ unabhängig von der Auswahl der Matrix $\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}}$.

4.2.7 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit quadratfreier Stufe $N = \prod_{i=1}^r p_i$. Sei $p_{i_1} \cdots p_{i_t}$ ein Teiler von N. Dann gilt*

$$\rho_L(\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}})^t \mathfrak{e}_0 = \rho_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} \sum_{\gamma \in L^{(p_{i_1})}\oplus\cdots\oplus L^{(p_{i_t})}} \mathfrak{e}_\gamma$$

mit $\rho_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} \in \mathbb{C}^*$.

Beweis: Sei $\gamma \in L^{(p_{i_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{i_t})}$ und sei

$$\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann ist c zum Produkt $p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_t}$ teilerfremd. Somit ist die natürliche Multiplikation mit c ein Automorphismus der Untergruppe $L^{(p_{i_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{i_t})}$. Wir können daher ein $\tilde{\gamma}$ mit $\gamma = c\tilde{\gamma}$ wählen. Man beachte, daß aufgrund der Definition die Produkte ac und cd von N geteilt werden. Nach der expliziten Formel (cf. Satz 1.2.10) folgt dann

$$\begin{aligned}
\langle \mathfrak{e}_\gamma, \rho_L(\gamma_{p_{i_1}\cdots p_{i_t}})^t \mathfrak{e}_0\rangle = a_{0,\gamma} &= \frac{\sqrt{i}^{(n-2)\operatorname{sgn}(c)}}{\sqrt{|c|}^{2+n}\sqrt{|D|}} \sum_{r \in L/cL} \mathbf{e}\left(\frac{a}{c}q(r) - \langle \tilde{\gamma}, r\rangle + cdq(\tilde{\gamma})\right) \\
&= \frac{\sqrt{i}^{(n-2)\operatorname{sgn}(c)}}{\sqrt{|c|}^{2+n}\sqrt{|D|}} \sum_{r \in L/cL} \mathbf{e}\left(\frac{a}{c}q(r)\right).
\end{aligned}$$

Somit ist $a_{0,\gamma}$ unabhängig von der Wahl von $\gamma \in L^{(p_{i_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{i_t})}$. Wir betrachten nun den Ausdruck

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma \in L^{(p_{i_1})}\oplus\cdots\oplus L^{(p_{i_t})}} |a_{0,\gamma}|^2 &= \sum_{\gamma \in L^{(p_{i_1})}\oplus\cdots\oplus L^{(p_{i_t})}} \frac{1}{|c|^{2+n}|D|} \left(\sum_{r \in L/cL} \mathbf{e}\left(\frac{a}{c}q(r)\right)\right)\left(\sum_{s \in L/cL} \mathbf{e}\left(-\frac{a}{c}q(s)\right)\right) \\
&= \frac{|L^{(p_{i_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{i_t})}|}{|c|^{2+n}|D|} \sum_{r,s \in L/cL} \mathbf{e}\left(\frac{a}{c}(\langle s, r-s\rangle + q(r-s))\right) \\
&= \frac{|L^{(p_{i_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{i_t})}|}{|c|^{2+n}|D|} \sum_{m \in L/cL} \sum_{s \in L/cL} \mathbf{e}\left(\frac{a}{c}(\langle s, m\rangle + q(m))\right).
\end{aligned}$$

Für festes $m \in L$ ist die Abbildung $s \mapsto \mathbf{e}(\frac{a}{c}\langle s, m\rangle)$ ein Charakter der endlichen Gruppe L/cL. Dieser ist genau dann der triviale Charakter, falls $c \mid a\langle s, m\rangle$ für alle $s \in L$, was wegen $\operatorname{ggT}(a,c) = 1$ zu $m \in L \cap cL'$ äquivalent ist. In diesem Falle ist auch $\frac{a}{c}q(m)$ ganz, denn es gilt $m = c\delta$ für ein $\delta \in L'$ und somit $\frac{a}{c}q(m) = acq(\delta) \in \mathbb{Z}$. Damit können wir die Gleichung fortsetzen durch

$$\begin{aligned}
&= \frac{|L^{(p_{i_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{i_t})}| \cdot |L/cL| \cdot |(L \cap cL')/cL|}{|c|^{2+n}|D|} \\
&= \frac{|L^{(p_{i_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{i_t})}| \cdot |L^{(p_{j_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{j_{r-t}})}|}{|D|} \\
&= 1
\end{aligned}$$

wegen des Isomorphismus $(L \cap cL')/cL \cong \{\gamma \in L'/L \mid c\gamma \in L\} = L^{(p_{j_1})} \oplus \cdots \oplus L^{(p_{j_{r-t}})}$, wobei $\{j_1, \ldots, j_{r-t}\}$ das Komplement der Indexmenge $\{i_1, \ldots, i_t\}$ sei. Damit sind die in die Summe eingehenden Einträge jedenfalls nichttrivial. Da die Darstellungsmatrix $\rho_L(\gamma_p)^t$ aber unitär ist, müssen alle übrigen Einträge verschwinden. $\square$

4.2.5 Wirkung der Symmetrisierung auf Fourierreihen

Nach Konstruktion überführt der Symmetrisierungsoperator Spitzenformen in Spitzenformen. Wir haben also eine Konstruktion vorliegen, die prinzipiell die gesuchten Objekte liefert. Im allgemeinen kann jedoch bei der Summation die Null entstehen. Um zu entscheiden, wann dies geschieht, wollen wir eine explizitere Darstellung des Symmetrisierungsoperators angeben.

4.2.8 Theorem. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit der quadratfreien Stufe $N=\prod_{i=1}^r p_i$. Sei $f\in M_k(N,\chi_L)$ mit $k=1+\frac{n}{2}$. Für jeden Teiler $Q=p_{i_1}\cdots p_{i_t}$ von N sei*

$$f|_k\eta_N\eta_Q(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^Q\mathbf{e}(nz)$$

die Fourierentwicklung von $f|_k\eta_N\eta_Q$. Ferner sei ρ_Q die Konstante aus Satz 4.2.7. Für $\gamma=\gamma_1+\cdots+\gamma_r\in L'/L=L^{(p_1)}\oplus\cdots\oplus L^{(p_r)}$ sei $A_\gamma:=\prod_{\gamma_i\neq 0}p_i$. Dabei sei $A_0:=1$ und $\eta_1:=\gamma_1:=E_2$ vereinbart.

Dann hat die zu γ gehörige Komponentenfunktion der Symmetrisierung F^f die Gestalt

$$F_\gamma^f(z)=\sum_{A_\gamma|Q|N}Q^{1-\frac{k}{2}}\rho_Q\sum_{n\equiv -Qq(\gamma)\mod Q}a_n^Q\mathbf{e}(\tfrac{n}{Q}z)\tag{4.3}$$

$$=A_\gamma^{1-\frac{k}{2}}\sum_{n\equiv -A_\gamma q(\gamma)\mod A_\gamma}\left(\sum_{P|\frac{N}{A_\gamma}}P^{1-\frac{k}{2}}\rho_{A_\gamma P}\,a_{Pn}^{A_\gamma P}\right)\mathbf{e}(\tfrac{n}{A_\gamma}z).\tag{4.4}$$

Insbesondere gilt für γ mit zur Stufe teilerfremder Norm $Nq(\gamma)$ (cf. Korollar 4.2.6) stets

$$F_\gamma^f(z)=N^{1-\frac{k}{2}}\rho_N\sum_{n\equiv -Nq(\gamma)\mod N}a_n^N\mathbf{e}(\tfrac{n}{N}z).\tag{4.5}$$

Beweis: Wir setzen zunächst die ausgewählten Repräsentanten in die Definition der Symmetrisierung von f ein und erhalten mit der Notation aus Satz 4.2.3

$$\begin{aligned}F^f(z)&=\sum_{Q|N}\sum_{s=0}^{Q-1}f|_k\eta_N\mathfrak{e}_0\Big|_k^* R_s^Q(z)\\&=\sum_{Q|N}\sum_{s=0}^{Q-1}\left(f|_k\eta_N\gamma_Q T^{(\prod_{\{j:\,p_j\nmid Q\}}a_j)s}\right)(z)\rho_L^*\left(\gamma_Q T^{(\prod_{\{j:\,p_j\nmid Q\}}a_j)s}\right)^{-1}\mathfrak{e}_0.\end{aligned}$$

Da die Weildarstellung unitär ist, ergibt dies unter Benutzung der Gleichung $\rho_L^*(M)^{-1}=\rho_L(M)^t$ und durch Einsetzen der Definitionen

$$\begin{aligned}&=\sum_{Q|N}\sum_{s=0}^{Q-1}Q^{-\frac{k}{2}}f|_k\eta_N\eta_Q\left(\frac{z+(\prod_{\{j:p_j\nmid Q\}}a_j)s}{Q}\right)\rho_L\left(T^{(\prod_{\{j:\,p_j\nmid Q\}}a_j)s}\right)^t\rho_L(\gamma_Q)^t\,\mathfrak{e}_0\\&=\sum_{Q|N}\sum_{s=0}^{Q-1}Q^{-\frac{k}{2}}f|_k\eta_N\eta_Q\left(\frac{z+(\prod_{\{j:p_j\nmid Q\}}a_j)s}{Q}\right)\rho_L\left(T^{(\prod_{\{j:\,p_j\nmid Q\}}a_j)s}\right)^t\rho_Q\sum_{\gamma\text{ mit }A_\gamma|Q}\mathfrak{e}_\gamma.\end{aligned}$$

Wir betrachten nun eine feste Komponentenfunktion F_γ^f. Zu dieser liefern dann offenbar in der ersten Summe nur diejenigen Teiler von N, die über A_γ liegen, einen Beitrag. Somit folgt unter Beachtung der Kongruenz $\prod_{\{j:\, p_j \nmid Q\}} a_j \equiv 1 \mod Q$ und unter Ausnutzung der üblichen Charakterrelationen

$$\begin{aligned}
F_\gamma^f(z) &= \sum_{A_\gamma | Q | N} Q^{-\frac{k}{2}} \rho_Q \sum_{s=0}^{Q-1} f|_k \eta_N \eta_Q \left(\frac{z + (\prod_{\{j:\, p_j \nmid Q\}} a_j) s}{Q} \right) e^{2\pi i (\prod_{\{j:\, p_j \nmid Q\}} a_j) s q(\gamma)} \\
&= \sum_{A_\gamma | Q | N} Q^{-\frac{k}{2}} \rho_Q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{Q-1} e^{2\pi i \frac{(\prod_{\{j:\, p_j \nmid Q\}} a_j) s (n + Q q(\gamma))}{Q}} a_n^Q \mathbf{e}(\tfrac{n}{Q} z) \\
&= \sum_{A_\gamma | Q | N} Q^{-\frac{k}{2}} \rho_Q \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{Q-1} e^{2\pi i s \frac{n + Q q(\gamma)}{Q}} a_n^Q \mathbf{e}(\tfrac{n}{Q} z) \\
&= \sum_{A_\gamma | Q | N} Q^{1-\frac{k}{2}} \rho_Q \sum_{\substack{n=0 \\ n \equiv -Q q(\gamma) \mod Q}}^{\infty} a_n^Q \mathbf{e}(\tfrac{n}{Q} z)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung (4.3). Durch Umsortieren ergibt sich hieraus die Darstellung (4.4). $\square$

Bemerkung: Die Komponentenfunktion F_0^f besitzt offenbar die alternative Darstellung

$$F_0^f(z) = \sum_{Q|N} Q^{1-\frac{k}{2}} \rho_Q f|_k \big(\eta_N \eta_Q T(Q)\big)(z). \tag{4.6}$$

Diese entsteht, indem die Summation $\sum_{n \equiv -Q q(\gamma) \mod Q} a_n^Q \mathbf{e}(\frac{n}{Q} z)$ durch Heckeoperatoren $T(Q)$ ausgedrückt wird, was für $\gamma = 0$ möglich ist. Aus der angegebenen Operatordarstellung folgt insbesondere, daß mit f auch die Komponentenfunktion F_0^f im Neuformenraum liegt.

4.3 Abbildungseigenschaften des Symmetrisierungsoperators

4.3.1 Geometrie über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$

Ist N die Stufe eines geraden Gitters, so definiert $-Nq$ eine quadratische Form auf der Diskriminantengruppe mit Werten in $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$. Gemäß Korollar 4.2.5 zerfällt L'/L für quadratfreie Stufe in eine Summe von $\mathbb{F}_{p_i}$-Vektorräumen $L^{(p_i)}$. Jeder dieser Vektorräume trägt eine quadratische Form $-Nq_{|L^{(p_i)}}$, deren Werte man in natürlicher Weise im Grundkörper $\mathbb{F}_{p_i}$ lesen kann. Wegen der Bedingungen $-Nq(\gamma) \equiv -Nq_{|L^{(p_i)}}(\gamma) \equiv -Nq(\gamma_i) \mod p_i$ ist das Abbildungsverhalten der Diskriminantenform $-Nq$ durch die Geometrie der quadratischen Räume $(L^{(p_i)}, -Nq|_{L^{(p_i)}})$, die sich mit wenigen Parametern beschreiben läßt, bestimmt.

Seien zunächst p eine ungerade Primzahl, V ein endlichdimensionaler $\mathbb{F}_p$-Vektorraum und q eine quadratische Form darauf. Nach Definition ist dann $\langle x, y\rangle := q(x+y) - q(x) - q(y)$ eine Bilinearform auf V. Analog zu Definition 1.1.1 nennen wir q nicht ausgeartet, falls es zu jedem $x \in V$, $x \neq 0$ ein y mit $\langle x, y\rangle \neq 0$ gibt. Alle im folgenden auftretenden quadratischen Formen seien nicht ausgeartet.

Wir betrachten einen eindimensionalen Raum $V = \mathbb{F}_p v$. Dann hat q die Gestalt $q(xv) = ax^2$. Das Bild von q besteht also entweder aus allen Quadraten oder aus allen Nichtquadraten und der Null. In beiden Fällen wird die Null nur trivial dargestellt, wogegen jeder andere Wert im Bild genau zweimal dargestellt wird. Da p ungerade ist, sind diese Fälle wesentlich voneinander verschieden. Ist $g \in \mathbb{F}_p$ kein Quadrat, so können wir nach Wahl einer geeigneten Basis q in die Form $q(xv) = x^2$ oder $q(xv) = gx^2$ bringen. Im ersten Fall wollen wir der quadratischen Form das Vorzeichen $\epsilon = +1$ zuordnen, im zweiten das Vorzeichen $\epsilon = -1$.

Die Dimension des $\mathbb{F}_p$-Vektorraums V sei nun 2. Auch hier gibt es zwei verschiedene Normalformen der quadratischen Form: Nach Wahl einer geeigneten Basis ist (1) $q(xv+yw) = xy$ oder (2) $q(xv+yw) = x^2 - gy^2$, g kein Quadrat. Im hyperbolischen Fall (1) gibt es $2p-1$ isotrope Vektoren, und jeder Wert aus $\mathbb{F}_p^*$ wird genau $(p-1)$-mal dargestellt. Im anisotropen Fall (2) gibt es nur die triviale Darstellung der Null, und jeder andere Wert besitzt genau $p+1$ Darstellungen.

Ist die Dimension größer als 2, so ist V stets isotrop. Man kann daher hyperbolische Ebenen abspalten und sich so auf die skizzierten Fälle zurückziehen. Wir fassen diese Überlegungen wie folgt zusammen:

4.3.1 Satz. *(cf. [Ar], S. 143ff) Sei p eine ungerade Primzahl, und sei V ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum der Dimension n mit einer nicht ausgearteten quadratischen Form q darauf.*

1. *Ist $n = 1$, so stellt die quadratische Form entweder alle Quadrate in $\mathbb{F}_p$ oder alle Nichtquadrate und die Null dar, und zwar genau zweimal mit Ausnahme der Null, die nur die triviale Darstellung besitzt.*

2. *Ist n gerade, so stellt die quadratische Form jedes Element von $\mathbb{F}_p$ dar, und zwar mit Ausnahme der Null mit gleicher Darstellungsanzahl.*

3. *Ist $n \geq 3$ ungerade, so stellt q jedes Element von $\mathbb{F}_p$ dar, jedoch Quadrate und Nichtquadrate in unterschiedlicher Anzahl.*

Ist $p = 2$, so stellt jede nicht ausgeartete quadratische Form auf V jedes Element von $\mathbb{F}_2$ dar, und aus trivialen Gründen mit Ausnahme der Null gleich oft.

4.3.2 Injektivität

Wir wollen die eben angeführten Tatsachen über das Abbildungsverhalten quadratischer Formen über den endlichen Körpern $\mathbb{F}_p$ nutzen, um den Symmetrisierungsoperator zunächst auf Injektivität zu untersuchen. Zu diesem Zweck betrachten wir die in Theorem 4.2.8 angegebene Darstellung (4.4) der Symmetrisierung einer elliptischen Modulform $f \in S_k(N, \chi_L)$. Es genügt nachzuweisen, daß mindestens ein Fourierkoeffizient einer Komponentenfunktion von F^f ungleich Null ist.

Besitzt der Quotient N/A_γ mehrere Teiler, so sind die Fourierkoeffizienten aus (4.4) durch Summen der Form

$$a\left(\gamma, \frac{n}{A_\gamma}\right) = A_\gamma^{1-\frac{k}{2}} \sum_{P | \frac{N}{A_\gamma}} P^{1-\frac{k}{2}} \rho_{A_\gamma P}\, a_{Pn}^{A_\gamma P}$$

gegeben, in die die zunächst nur dem Betrage nach bekannten Zahlen $\rho_{A_\gamma P}$ eingehen. Ist die Ausgangsform f keine primitive Neuform, so weiß man wenig über die Koeffizienten $a_{Pn}^{A_\gamma P}$ der Transformierten $f|\eta_N \eta_Q$. Es liegt daher auf der Hand, zunächst die Komponentenfunktionen zu solchen Elementen γ der Diskriminantengruppe zu betrachten, deren Zerlegung in Komponenten aus den $\mathbb{F}_{p_i}$-Vektorräumen $L^{(p_i)}$ keinen trivialen Bestandteil hat. In diesem Falle stimmt die γ zugeordnete Zahl A_γ mit der Stufe N überein, und die Komponentenfunktion hat die Darstellung (4.5). Die Betrachtungen aus dem vorangegangenen Abschnitt liefern dann in Verallgemeinerung unseres Vorgehens in der Arbeit [Br-Bu] die gewünschten Ergebnisse. Wir beginnen mit den notwendigen Definitionen.

4.3.2 Definition. *Sei χ ein Dirichletcharakter modulo $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ mit paarweise verschiedenen p_i, und sei $i \in \{1, \ldots, r\}$. Zu jedem ganzen n wählen wir ein m, das den Bedingungen*

$$m \equiv \begin{cases} n & \mod p_i \\ 1 & \mod N/p_i \end{cases}$$

genügt, und setzen

$$\chi_{p_i}(n) := \begin{cases} \chi(m) & \text{falls } ggT(n, p_i) = 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist χ_{p_i} ein Dirichletcharakter modulo p_i, und es gilt $\chi = \prod_{i=1}^r \chi_{p_i}$. Wir nennen die χ_{p_i} die ***Komponentenzerlegung*** *von χ.*

4.3.3 Definition. *Sei $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ quadratfrei, wobei vereinbarungsgemäß $p_1 < \ldots < p_r$ gelte. Zu $i = 1, \ldots, r$ seien $\epsilon_i \in \{-1, 0, +1\}$ vorgegeben. Sei $\chi_L = \prod_{p|N} \chi_{L,p}$ die Zerlegung des Charakters χ_L in seine p-Anteile. Dann nennen wir den Raum*

$$S_k^{\epsilon_1 \ldots \epsilon_r}(N, \chi_L) := \left\{ f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k^0(N, \chi_L) \,\middle|\, a_n = 0 \text{ falls } \exists i : \epsilon_i \neq 0 \text{ und } \chi_{L,p_i}(n) = -\epsilon_i \right\}$$

den ***$\epsilon_1 \ldots \epsilon_r$-Raum****. Statt $+1$ und -1 schreiben wir auch kurz $+$ und $-$.*

Die $\epsilon_1 \ldots \epsilon_r$-Räume verallgemeinern die klassischen $+$- und $-$-Räume im Falle der Primzahlstufe $N = p$, wie sie beispielsweise in [He] definiert sind und auch in [Br-Bu] aufgenommen werden. Ist $N = 2N'$, so ist der Raum $S_k^{-0\ldots 0}(2N', \chi_L)$ leer, da der triviale Charakter der einzige Charakter modulo 2 ist.

Im Falle $r = 1$ und $\epsilon_1 = 0$ ist $S_k^0(N,\chi)$ genau der Raum der Neuformen; die zwei möglichen Interpretationen des Symboles $S_k^0(N,\chi)$ fallen dann zusammen. Es sei aber auf den Unterschied zwischen den Bedeutungen der Symbole $S_k^{+1}(N,\chi) = S_k^{+}(N,\chi)$ und $S_k^1(N,\chi)$ hingewiesen!

4.3.4 Satz. *Seien $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$ quadratfrei und χ ein quadratischer Dirichletcharakter modulo N. Dann gilt*

$$S_k^0(N,\chi) = \bigoplus_{(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r)\in\{-1,+1\}^r} S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi).$$

Beweis: Offenbar gilt

$$S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi) = \bigcap_{i=1}^{r} S_k^{0\ldots\epsilon_i\ldots 0}(N,\chi).$$

Daher genügt es zu zeigen, daß für jedes i stets

$$S_k^0(N,\chi) = S_k^{0\ldots+\ldots 0}(N,\chi) \oplus S_k^{0\ldots-\ldots 0}(N,\chi) \tag{4.7}$$

gilt. Sei zunächst f aus dem Durchschnitt $S_k^{0\ldots+\ldots 0}(N,\chi) \cap S_k^{0\ldots-\ldots 0}(N,\chi)$. Dann folgt aus Satz 4.1.6 bereits $f = 0$, die Summe ist also direkt. Sei nun $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k^0(N,\chi)$ eine primitive Neuform im Sinne von Definition 4.1.7. Dann gibt es nach [Mi], Theorem 4.6.16 eine Konstante $c_{p_i} \in \mathbb{C}^*$ und eine primitive Neuform g_{p_i} mit $f|\eta_{p_i} = c_{p_i} g_{p_i}$. Ist $g_{p_i} = \sum b_n \mathbf{e}(nz)$ die Fourierentwicklung dieser Neuform, so berechnen sich die Fourierkoeffizienten b_n mit nicht durch p_i teilbarem n zu $b_n = \chi_{p_i}(n) a_n$. Es folgt

$$\begin{aligned} f + c_{p_i}^{-1} f|\eta_{p_i} &\in S_k^{0\ldots+\ldots 0}(N,\chi), \\ f - c_{p_i}^{-1} f|\eta_{p_i} &\in S_k^{0\ldots-\ldots 0}(N,\chi) \end{aligned}$$

und daher $f \in S_k^{0\ldots+\ldots 0}(N,\chi) + S_k^{0\ldots-\ldots 0}(N,\chi)$. Da der Neuformenraum $S_k^0(N,\chi)$ eine Basis aus primitiven Neuformen besitzt (cf. Satz 4.1.8), ist damit die Behauptung gezeigt. □

4.3.5 Definition. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit der quadratfreien Stufe $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$. Sei $k = 1 + \frac{n}{2}$. Jedem $i \in \{1,\ldots,r\}$ werde wie folgt ein $\epsilon_i \in \{-1,0,+1\}$ zugeordnet:*

$$\epsilon_i = \begin{cases} 0 & \text{falls } \dim_{\mathbb{F}_{p_i}} L^{(p_i)} \geq 2 \text{ oder } p_i = 2, \\ +1 & \text{falls } p_i \neq 2, \dim_{\mathbb{F}_{p_i}} L^{(p_i)} = 1 \text{ und die Form } -Nq_{|L^{(p_i)}} \text{ die} \\ & \qquad \text{Quadrate modulo } p_i \text{ darstellt,} \\ -1 & \text{falls } p_i \neq 2, \dim_{\mathbb{F}_{p_i}} L^{(p_i)} = 1 \text{ und die Form } -Nq_{|L^{(p_i)}} \text{ die} \\ & \qquad \text{Nichtquadrate modulo } p_i \text{ darstellt.} \end{cases}$$

*Dann werde mit Φ_L die **Einschränkung des Symmetrisierungsoperators** $f \mapsto F^f$ auf den Raum $S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi_L)$ bezeichnet.*

4.3.6 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit quadratfreier Stufe $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$. Dann ist der Symmetrisierungsoperator Φ_L aus Definition 4.3.5 injektiv.*

Beweis: Sei $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L)$ mit $F^f = 0$. Dann verschwinden insbesondere alle Komponentenfunktionen F_γ^f. Wegen der Darstellung (4.5) verschwinden daher alle Fourierkoeffizienten a_n^N von $f|_k \eta_N^2 = (-1)^k f$, die zur Stufe N teilerfremd sind und von der quadratischen Form $-Nq$ dargestellt werden. Nach Definition des Raumes $S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L)$ verschwinden aber auch alle $a_n^N = (-1)^k a_n$, die zur Stufe teilerfremd sind und nicht im Bild von $-Nq$ liegen. Daher wird $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz)$ nur von solchen Fourierkoeffizienten getragen, die mit der Stufe N gemeinsame nichttriviale Teiler haben. Nach Satz 4.1.6 liegt f daher im Durchschnitt

$$f \in S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L) \cap S_k^1(N, \chi_L) = \{0\}.$$

□

4.3.7 Korollar. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit quadratfreier Stufe N und Determinante D. Wenn für jede ungerade in der Stufe aufgehende Primzahl p die Vielfachheit $\nu_p(D)$ stets größer oder gleich zwei ist, so ist der Symmetrisierungsoperator Φ_L auf dem vollen Neuformenraum $S_k^0(N, \chi_L)$ injektiv, denn es gilt dann $\epsilon_1 = \ldots = \epsilon_r = 0$.*

4.3.3 Das Bild des Symmetrisierungsoperators

Wir wollen nun den Symmetrisierungsoperator, genauer gesagt seine Einschränkung Φ_L auf den Raum $S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L)$ gemäß Definition 4.3.5, auf Surjektivität untersuchen und sein Bild beschreiben. Wegen der Darstellung (4.6) ist die zu $\mathfrak{e}_0$ gehörige Komponente der Symmetrisierung einer Neuform stets wiederum eine Neuform. Dies motiviert die erste der folgenden Definitionen.

4.3.8 Definition. *Zu einem Gitter L der Stufe N sei*

$$\mathscr{S}_L^0 := \{F = (F_\gamma)_\gamma \in \mathscr{S}_L \,|\, F_0 \in S_k^0(N, \chi_L)\}$$

der Unterraum derjenigen Spitzenformen im Kontrollraum, deren $\mathfrak{e}_0$-Komponenten Neuformen sind, und

$$\mathscr{A}_L := \{F = (F_\gamma)_\gamma \in \mathscr{S}_L \,|\, F_0 = 0\}$$

der Raum derjenigen Spitzenformen, deren $\mathfrak{e}_0$-Komponenten sogar verschwinden.

4.3.9 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit quadratfreier Stufe $N = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r$. Sei $k = 1 + \frac{n}{2}$. Jedem Primfaktor p_i sei ein $\epsilon_i \in \{-1, 0, +1\}$ wie in Definition 4.3.5 zugeordnet. Ferner gelte für jeden ungeraden der Primfaktoren p_i entweder $\dim_{\mathbb{F}_{p_i}} L^{(p_i)} = 1$, oder $\dim_{\mathbb{F}_{p_i}} L^{(p_i)}$ ist gerade. Dann folgt*

$$\mathscr{S}_L^0 = \mathscr{A}_L \oplus \mathit{Bild}(\Phi_L).$$

Beweis: Wegen (4.6) gilt die Relation $\Phi_L(S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L)) \subset \mathscr{S}_L^0$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \Psi_L : \mathscr{S}_L^0 &\to S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L) \\ F &\mapsto F_0|_k \eta_N. \end{aligned}$$

Offenbar ist nach Definition $f|_k\eta_N(z) = N^{k/2}f|_kS(Nz)$ für jede Funktion f. Mithin folgt wegen des Transformationsverhaltens der vektorwertigen Modulform F unter der Stürzung S die Gleichung

$$
\begin{aligned}
F_0|_k\eta_N(z) &= N^{\frac{k}{2}}F_0|_kS(Nz) \\
&= N^{\frac{k}{2}}\frac{\sqrt{i}^{2-n}}{\sqrt{|L'/L|}}\sum_{\gamma\in L'/L}F_\gamma(Nz) \qquad (4.8)\\
&= N^{\frac{k}{2}}\frac{\sqrt{i}^{2-n}}{\sqrt{|L'/L|}}\sum_{\gamma\in L'/L}\sum_{\substack{n\equiv -Nq(\gamma) \mod N\\ n>0}} a\left(\gamma,\frac{n}{N}\right)\mathbf{e}(nz) \qquad \in S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi_L),
\end{aligned}
$$

wobei

$$
F(z) = \sum_{\gamma\in L'/L}\left(\sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}-q(\gamma)\\ n>0}} a(\gamma,n)\mathbf{e}(nz)\right)\mathfrak{e}_\gamma \tag{4.9}
$$

die Fourierentwicklung von $F\in\mathscr{S}_L^0$ sei. Somit ist Ψ_L wohldefiniert.

Sei nun $F = F^f$ die Symmetrisierung einer Neuform $f = \sum a_n\mathbf{e}(nz) \in S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi_L)$. Wegen der Voraussetzungen an die Dimensionen $\dim_{\mathbb{F}_{p_i}} L^{(p_i)} = \nu_{p_i}(\det(L))$ stellen alle auftretenden quadratischen Formen $-Nq|_{L^{(p_i)}}$ die nichttrivialen Elemente des korrespondierenden Grundkörpers $\mathbb{F}_{p_i}$ nach Satz 4.3.1 gleich oft dar. Somit werden nach Lemma 4.2.5 alle zur Stufe N teilerfremden Zahlen m gleich oft von $-Nq$ modulo N dargestellt. Sei ν diese Darstellungsanzahl. Jedes γ mit $\mathrm{ggT}(-Nq(\gamma),N) = 1$ erfüllt $A_\gamma = N$ gemäß Korollar 4.2.6. Damit finden wir

$$
\begin{aligned}
F_0^f|_k\eta_N(z) =& N^{\frac{k}{2}}\frac{\sqrt{i}^{2-n}}{\sqrt{|L'/L|}}\left(\sum_{\substack{\gamma\in L'/L\\ A_\gamma=N}} N^{1-\frac{k}{2}}\rho_N\sum_{n\equiv -Nq(\gamma) \mod N} a_n^N\mathbf{e}(nz)\right.\\
&\left.+\sum_{\substack{\gamma\in L'/L\\ A_\gamma<N}} A_\gamma^{1-\frac{k}{2}}\sum_{n\equiv -Nq(\gamma) \mod N}\left(\sum_{P|\frac{N}{A_\gamma}} P^{1-\frac{k}{2}}\rho_{A_\gamma P}a_{Pn}^{A_\gamma P}\right)\mathbf{e}\left(\tfrac{N}{A_\gamma}nz\right)\right)\\
=&(-1)^k\nu\frac{\sqrt{i}^{2-n}}{\sqrt{|L'/L|}}N\rho_N\sum_{\substack{n>0\\ \mathrm{ggT}(n,N)=1}} a_n\mathbf{e}(nz) + \sum_{\substack{n>0\\ \mathrm{ggT}(n,N)>1}} b_n\mathbf{e}(nz)
\end{aligned}
$$

mit gewissen Koeffizienten b_n. Wegen $\gamma_N \equiv S \mod \Gamma(N)$ läßt sich die Konstante ρ_N bestimmen zu $\rho_N = \frac{\sqrt{i}^{n-2}}{\sqrt{|L'/L|}}$. Da nun f eine Neuform ist, können wir die Gleichung nach Satz 4.1.6 fortsetzen mit

$$
=(-1)^k\nu\frac{N}{|L'/L|}f(z).
$$

Die Hintereinanderausführung $\Psi_L\circ\Phi_L : S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi_L)\to S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi_L)$ ist also lediglich die Multiplikation mit einem Skalar aus $\mathbb{C}^*$ und mithin ein Isomorphismus. Da aber auch die Frickeinvolution $F_0\mapsto F_0|_k\eta_N$ ein Isomorphismus ist, kommt jede mögliche $\mathfrak{e}_0$-Komponente im Bild von Φ_L vor. Es folgt

$$
\mathscr{S}_L^0 = \mathscr{A}_L + \mathrm{Bild}(\Phi_L).
$$

Sei nun $F = \Phi_L(f)$ die Symmetrisierung einer Neuform $f \in S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L)$ mit verschwindender $\mathfrak{e}_0$-Komponente F_0. Dann verschwindet auch $f = C \cdot F_0|_k \eta_N \quad (C \in \mathbb{C}^*)$ und mithin die Symmetrisierung $\Phi_L(f) = F$. Die Summe ist also direkt. $\square$

Die Frage nach der Surjektivität des Operators Φ_L ist also mit der Bestimmung des Raumes $\mathscr{A}_L$ äquivalent. Dieser ist im allgemeinen nicht Null; Beispiel 1.2.16 besitzt ein nichttriviales Element in $\mathscr{A}_L$, allerdings für nicht quadratfreie Stufe. Die Bauart dieses Beispiels ist aber allgemeiner Natur. Wir geben eine zweite Beschreibung, die es erlaubt, in manchen Fällen das Bild von Φ_L zu bestimmen. Wir erhalten dann unser Resultat aus der Arbeit [Br-Bu] (cf. Thm. 5) zurück.

Die Modulgruppe $O^+(L)$ eines Gitters L operiert auf L sowie auf L' und somit auch auf der Diskriminantengruppe L'/L durch Gruppenhomomorphismen. Dies induziert eine Operation durch lineare Automorphismen auf dem Gruppenring: Seien $g \in O^+(L)$ und $\mathfrak{e}_\gamma$ einer der Basisvektoren, so setze $\mathfrak{e}_\gamma^g := \mathfrak{e}_{g(\gamma)}$. Für Abbildungen $f = \sum_{\gamma \in L'/L} f_\gamma \mathfrak{e}_\gamma : \mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ setze

$$^g f := \sum_{\gamma \in L'/L} f_\gamma \mathfrak{e}_{g(\gamma)} = \sum_{\gamma \in L'/L} f_{g^{-1}(\gamma)} \mathfrak{e}_\gamma.$$

Da die Operation der metaplektischen Gruppe $Mp_2(\mathbb{Z})$ via der Weildarstellung mit dieser Operation der Modulgruppe auf Abbildungen $\mathbb{H} \to \mathbb{C}[L'/L]$ (von links) vertauscht, wie man unmittelbar an der Definition (Satz 1.2.6) sieht, führt letztere Modulformen zu ρ_L^* in ebensolche über. Wir haben also eine Operation der Gruppe $O^+(L)$ auf dem Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ und ebenso auf dem Unterraum $\mathscr{S}_L$ der darin enthaltenen Spitzenformen.

Da die zu $\mathfrak{e}_0$ gehörende Komponente in sich überführt wird, sind die Räume $\mathscr{S}_L^0$ und $\mathscr{A}_L$ invariant. Die Menge der invarianten Elemente in $\mathscr{S}_L^0$ bezeichnen wir mit $(\mathscr{S}_L^0)^{O^+(L)}$. Da die Operation der Modulgruppe auf L'/L die Zerlegung in die $\mathbb{F}_{p_i}$-Vektorräume $L^{(p_i)}$ respektiert, gelten $A_{g(\gamma)} = A_\gamma$ und $-Nq(g(\gamma)) \equiv -Nq(\gamma) \mod N$ für alle $\gamma \in L'/L$ und $g \in O^+(L)$. Somit folgt aus (4.4) unmittelbar

$$\text{Bild}(\Phi_L) \subset (\mathscr{S}_L^0)^{O^+(L)}.$$

4.3.10 Lemma. *Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 4.3.9 operiere die Gruppe $O^+(L)$ transitiv auf der Menge der Vektoren $\gamma \in L'/L$ gleicher Norm modulo N. Dann folgt*

$$\textit{Bild}(\Phi_L) = (\mathscr{S}_L^0)^{O^+(L)}.$$

Beweis: Wegen $\text{Bild}(\Phi_L) \subset (\mathscr{S}_L^0)^{O^+(L)}$ und $\text{Bild}(\Phi_L) \oplus \mathscr{A}_L = \mathscr{S}_L^0$ genügt es, in dieser Situation die Relation $\mathscr{A}_L \cap (\mathscr{S}_L^0)^{O^+(L)} = \{0\}$ nachzuweisen. Sei also $f = \sum_\gamma f_\gamma \mathfrak{e}_\gamma$ aus diesem Schnitt. Nach Voraussetzung sind die Komponenten f_γ und f_δ gleich, falls $-Nq(\gamma) \equiv -Nq(\delta) \mod N$. Aus der Umsetzungsgleichung (4.8) folgt dann die Behauptung $f = 0$. $\square$

4.3.11 Lemma. *Sei p eine Primzahl und L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ der Determinante p. Dann operiert $O^+(L)$ transitiv auf den Vektoren (modulo der Stufe p) gleicher Länge in L'/L. Der Invariantenraum $(\mathscr{S}_L^0)^{O^+(L)}$ stimmt mit dem Raum der Spitzenformen $\mathscr{S}_L$ überein. Insbesondere gilt $\mathscr{A}_L = \{0\}$.*

Beweis: Es gilt $L'/L \cong \mathbb{F}_p$. Für $p = 2$ ist die Aussage trivial. Ansonsten sind die Vektoren γ und $-\gamma$ die einzigen mit der Norm $pq(\gamma) \mod p$ und werden durch die Abbildung $\gamma \mapsto -\gamma$

vertauscht. Diese wird durch die Multiplikation mit -1, die in $O^+(L)$ enthalten ist, da die Dimension gerade sein muß, induziert.

Gleichzeitig entspricht diese Abbildung der Wirkung des Elementes $Z \in Mp_2(\mathbb{Z})$ auf dem Gruppenring. Wegen der für alle Modulformen zum Dual der Weildarstellung gültigen Beziehung $f_\gamma = f_{-\gamma}$ sind alle Modulformen invariant. Ferner ist χ_L der nichttriviale quadratische Charakter modulo p, jede Modulform in $S_k(p, \chi_L)$ ist daher bereits Neuform. □

4.3.12 Korollar. *(cf. [Br-Bu], Thm. 5) Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit Primzahldeterminante und -stufe $|\det(L)| = N = p$. Ihm sei wie in Definition 4.3.5 ein Vorzeichen ϵ zugeordnet. Dann ist*

$$\Phi_L : S^\epsilon_{1+\frac{n}{2}}(p, \chi_p) \longrightarrow \mathscr{S}_L$$

ein Isomorphismus.

4.3.13 Bemerkung. *Im Primzahlfall kann man die Wahl des Vorzeichens ϵ mit Hilfe von Satz 1.1.39 ganz explizit angeben. Für $p = 2$ ist $\epsilon = 0$, ansonsten bestimmt sich ϵ durch $p \mod 8$ und $n \mod 8$ wie in der Tabelle angegeben:*

$n(8)\backslash p(8)$	1	3	5	7
0	/	−	/	−
2	+	/	+	/
4	/	+	/	+
6	−	/	−	/

Gitter mit Daten, deren Position mit / gekennzeichnet ist, existieren nicht.

Beweis: Sei p eine ungerade Primzahl und sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit Determinante p. Dann ist $M := L'(p)$, also das duale Gitter mit der reskalierten quadratischen Form pq, wiederum ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$, allerdings mit Determinante p^{n+1}. Hierauf wollen wir Satz 1.1.39 anwenden und bestimmen daher die Größen n_q, k_p und t_q von M. Da sowohl Stufe als auch Determinante ungerade sind, besteht die 2-adische Zerlegung nur aus 2×2-Blöcken mit ungeraden Vorfaktoren. Es treten also nur die Terme $t_{2^0} = 0$, $k_2 = 0$ und $n_{2^0} = n + 2$ auf. Für alle ungeraden Primzahlen $q \neq p$ ist $n_{q^0} = n + 2$ und $k_q = 0$, alle anderen n_{q^i} verschwinden. Daher liefern diese Primzahlen keinen Beitrag in der Gleichung aus dem genannten Satz.

Es bleiben die zu p gehörigen Daten n_{p^i} und k_p zu bestimmen. Wegen der Bedingungen an die Diskriminantengruppe gilt

$$M \sim_p L_{p^0} \oplus L_p(p)$$

mit $n_{p^0} = 1$, $n_p = n + 1$ und $n_{p^i} = 0$ für alle $i \geq 2$. Sind $\epsilon_i = \left(\frac{\det L_{p^i}}{p}\right)$, so gilt $\epsilon_0\epsilon_1 = \left(\frac{a}{p}\right)$, wobei $\det(L) = p^\alpha a$ mit $p \nmid a$ sei. Ferner ist $k_p = 1$ äquivalent zu $\epsilon_1 = -1$ und somit durch das Vorzeichen $\epsilon_0 = \epsilon$ bestimmt. Wir erhalten die Beziehung

$$4\delta_{\epsilon,-1} \equiv (2-p)n - p - 1 \mod 8$$

mit dem Kroneckersymbol $\delta_{*,*}$. Bezieht man noch den Faktor $-\frac{1}{2}$, der aus der Darstellung $-pq(x) = -\frac{1}{2}x^tAx$ herrührt und der das Abbildungsverhalten im Falle $p \equiv 5$ oder $7 \mod 8$ umkehrt, mit ein, so erhalten wir obige Tabelle. □

Der Unterschied zur in [Br-Bu] angegebenen Tabelle rührt von der Verwendung des Gitters $L(-1)$ anstelle von L her. Alternativ läßt sich diese Tafel auch über Milgrams Formel herleiten. Ist p eine ungerade Primzahl, so hat das Gitter $H \oplus H \oplus A_{p-1}(-1)$ (mit A_n aus Beispiel 1.1.18 Nr. 3) Determinante und Stufe p, liefert also ein Gitter, das den Bedingungen von Korollar 4.3.12 genügt. Für solche Gitter wird übrigens der komplementäre Raum $S^{-\epsilon}(p, \chi_p)$ vom Symmetrisierungsoperator annulliert. Denn die Komponentenfunktionen F_γ^f für $\gamma \neq 0$ verschwinden nach Definition von $S^{-\epsilon}(p, \chi_p)$, woraus mittels der Umsetzungsgleichung (4.8) und einem Neuformenargument auch $F_0^f = 0$ folgt. Für Gitter mit allgemeinen quadratfreien Stufen bleiben aber weitere Komponentenfunktionen zu bestimmen, für die wir lediglich lineare Relationen erhalten.

Aus der Darstellung der $\mathfrak{e}_0$-Komponente gemäß (4.6) in Verbindung mit dem Beweis von Satz 4.3.9 ergibt sich ein Korollar über elliptische Modulformen, das Lemma 3 aus [Br-Bu] verallgemeinert und das wir zum Abschluß angeben wollen.

4.3.14 Korollar. *Sei L ein Gitter, das den Voraussetzungen aus Satz 4.3.9 genügt, und sei $f \in S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L)$. Dann gilt mit den aus 4.3.9 übernommenen Bezeichungen die Gleichheit*

$$f = \frac{(-1)^k |L'/L|}{\nu\, N} \sum_{Q|N} Q^{1-\frac{k}{2}} \rho_Q f|_k \big(\eta_N \eta_Q T(Q)\big).$$

Kapitel 5

Konsequenzen für einfache Kontrollräume

Den im vorangegangenen Kapitel untersuchten Symmetrisierungsoperator Φ_L wollen wir ausnutzen, um bei möglichst vielen Gittern die Existenz von Spitzenformen im Kontrollraum nachzuweisen. Wegen der Injektivität dieses Operators Φ_L auf dem dem Gitter zugeordneten $\epsilon_1 \dots \epsilon_r$-Raum genügt es, die Existenz nichttrivialer Modulformen $f \in S_k^{\epsilon_1 \dots \epsilon_r}(N, \chi_L)$ nachzuweisen.

Dabei behandeln wir zunächst unter Benutzung klassischer Resultate den Fall der Primzahlstufe getrennt. Hier können wir alle Konfigurationen von Dimension, Determinante und Stufe angeben, in denen einfache Kontrollräume möglich sind.

Die Behandlung von Gittern mit beliebiger quadratfreier Stufe führt in die Theorie gewisser elliptischer Modulformen, sogenannter CM-Formen. Diese werden im zweiten Abschnitt behandelt. Den Abschluß bildet eine Betrachtung der Eigenschaften von Gittern, bei denen sich die Untersuchung der Spitzenformenräume $\mathscr{S}_L$ allen in der Arbeit dargestellten Methoden entziehen.

5.1 Gitter mit Primzahlstufe

5.1.1 Der Fall $p = 2$

Wir betrachten zunächst den Fall eines geraden Gitters der Stufe 2 gesondert. Ein Beispiel eines solchen Gitters ist $L = H \oplus H(2)$. Nach Satz 4.3.6 ist der Symmetrisierungsoperator Φ_L für diese Gitter auf dem Neuformenraum $S_k^0(2, \chi_L) = S_k^0(2, 1)$ injektiv. Enthält dieser Raum ein nichttriviales Element, so umfaßt der Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ eine echte Spitzenform. Wir müssen also die Neuformenräume auf $\Gamma_0(2)$ untersuchen.

5.1.1 Satz. *(cf. [Co-Oe], Thm. 1) Seien $k \geq 2$ ganz, N quadratfrei und χ ein Dirichletcharakter modulo N, der der Relation $\chi(-1) = (-1)^k$ genügt. Dann gilt für den Raum der Spitzenformen zu $\Gamma_0(N)$ die Dimensionsformel*

$$\dim S_k(N, \chi) = \frac{k-1}{12} \sum_{d|N} d + K(N, \chi, k) + R(k, \chi)$$

mit

$$K(N, \chi, k) := -2^{r(N)-1} + k_1(k) \sum_{\substack{x \mod N \\ x^2+1 \equiv 0 \mod N}} \chi(x) + k_2(k) \sum_{\substack{x \mod N \\ x^2+x+1 \equiv 0 \mod N}} \chi(x),$$

wobei

$$k_1(k) := \begin{cases} 0 & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ -\frac{1}{4} & \text{falls } k \equiv 2 \mod 4, \\ \frac{1}{4} & \text{falls } k \equiv 0 \mod 4, \end{cases} \qquad k_2(k) := \begin{cases} 0 & \text{falls } k \equiv 1 \mod 3, \\ -\frac{1}{3} & \text{falls } k \equiv 2 \mod 3, \\ \frac{1}{3} & \text{falls } k \equiv 0 \mod 3 \end{cases}$$

und $r(N)$ die Zahl der verschiedenen Primfaktoren von N bezeichne. Der Korrekturterm $R(k,\chi)$ hat den Wert 1, falls $k = 2$ und $\chi = 1$, ansonsten verschwindet er.

5.1.2 Bemerkung. *Unter Ausnutzung von Lemma 3.4.4 folgt die triviale Abschätzung*

$$|K(N,\chi,k)| \leq \frac{13\sqrt{6}}{18}\sqrt{N}.$$

Für eine natürliche Zahl t und eine Modulform f bezeichne $\iota_t(f)$ die Modulform

$$\iota_t(f)(z) := f(tz).$$

Wir fassen ι_t stets als linearen Operator $S_k(m,\chi) \to S_k(stm,\chi)$ $(s \in \mathbb{N})$ zwischen geeigneten Räumen von Modulformen auf. Dieser ist injektiv, und die Bilder aller möglichen Einbettungen erzeugen den Unterraum der Altformen. Altformen auf der Gruppe $\Gamma_0(2)$ müssen bereits zur vollen Modulgruppe $Sl_2(\mathbb{Z})$ gehören; es gibt die zwei Einbettungen ι_1 und ι_2. Wir untersuchen ihren Schnitt.

5.1.3 Lemma. *Sei χ ein Dirichletcharakter mit Führer m_χ und sei $k > 0$. Ferner seien m ein Vielfaches von m_χ und $p > 1$ eine zu m teilerfremde natürliche Zahl. Dann gilt*

$$\iota_1(S_k(m,\chi)) \cap \iota_p(S_k(m,\chi)) = \{0\}.$$

Beweis: Sei $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k(m,\chi) \cap \iota_p(S_k(m,\chi))$. Dann gibt es nach Definition ein $g \in S_k(m,\chi)$ mit $f(z) = g(pz)$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Mithin folgt $a_n = 0$ für alle zu p teilerfremden n. Wegen $\mathrm{ggT}(p, m/m_\chi) = 1$ folgt aus Satz 4.1.6 sofort $f = 0$. □

Es folgt in unserer Situation

$$\dim S_k^0(2,1) = \dim S_k(2,1) - 2\dim S_k(Sl_2(\mathbb{Z}),1). \tag{5.1}$$

Dies erlaubt uns eine Abschätzung der Dimension. Zusammen mit den hinlänglich bekannten Tafeln (cf. [Mi], S. 296) erkennen wir, daß der Raum der Neuformen auf $\Gamma_0(2)$ genau dann trivial ist, wenn k eine der Zahlen 2, 4, 6 oder 12 ist. Dies liefert den folgenden

5.1.4 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ der Stufe 2. Dann ist sein Kontrollraum nicht einfach, falls $n \notin \{2,6,10,22\}$ ist.*

5.1.2 Der Fall großer Determinante

Als nächstes betrachten wir Gitter mit ungerader Primzahlstufe p, deren Determinante nicht mit der Stufe übereinstimmt. Ihr Betrag ist dann eine Potenz p^α, $\alpha > 1$. In diesem Fall ist nach Satz 4.3.6 der Symmetrisierungsoperator Φ_L auf dem Neuformenraum $S_k^0(p,\chi_L)$ injektiv. Wir müssen letzteren also auf Trivialität überprüfen.

Nach Satz 4.2.1 ist in dem Fall, daß die Determinante eine ungerade Potenz der Stufe ist, der Charakter χ_L primitiv, jede Modulform in $S_k(p,\chi_L)$ ist eine Neuform. Im Fall gerader Potenz gilt die zu (5.1) analoge Dimensionsformel. Die bekannten Tafeln in Verbindung mit Satz 5.1.1 und Bemerkung 5.1.2 erlauben uns wiederum, alle Fälle mit trivialem Neuformenraum zu bestimmen.

5.1.5 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$. Seine Stufe sei eine ungerade Primzahl p und seine Determinante sei eine Potenz p^α mit $\alpha > 1$. Dann ist sein Kontrollraum nicht einfach, falls das Tripel $(p, n, \alpha \bmod 2)$ nicht der folgenden Ausnahmemenge angehört:*

$$(p, n, \alpha \text{ mod } 2) \notin \{(3,2,0),(3,4,1),(3,6,0),(3,8,1),(5,2,0),(5,2,1),(5,6,1),\\ (7,2,0),(13,2,0),(13,2,1),(17,2,1)\}$$

(Man beachte, daß wegen $\chi(-1) = (-1)^k$ durch p und α der Wert von n bereits modulo 4 bestimmt ist.)

5.1.3 Der Fall der Primzahldeterminante

Im letzten noch zu behandelnden Fall gerader Gitter mit Primzahlstufe ist bereits die Determinante eine ungerade Primzahl. Dann ist der Charakter $\chi_L = (\frac{\cdot}{p})$ primitiv, jede Modulform ist daher eine Neuform. Allerdings ist der Symmetrisierungsoperator Φ_L in dieser Situation nur auf dem Raum $S_k^\epsilon(p, \chi_L)$ injektiv, wobei sich das Vorzeichen ϵ aus k bzw. n und p gemäß der in Bemerkung 4.3.13 angegebenen Tabelle bestimmt. Da die Stufe p eine Primzahl ist, können wir uns auf ein klassisches Resultat stützen.

5.1.6 Satz. *(cf. [He], Sätze 9 und 10) Sei p eine ungerade Primzahl. Gilt $p \equiv 1 \mod 4$, so haben $S_k^+\left(p, (\frac{\cdot}{p})\right)$ und $S_k^-\left(p, (\frac{\cdot}{p})\right)$ die gleiche Dimension. Für Primzahlen $p \equiv 3 \mod 4$, $p \neq 3$ gilt*

$$\dim S_k^+\left(p, (\tfrac{\cdot}{p})\right) - \dim S_k^-\left(p, (\tfrac{\cdot}{p})\right) = h(-p)$$

mit der Klassenzahl $h(-p)$ des imaginär quadratischen Zahlkörpers $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$. Für $p = 3$ gilt schließlich

$$0 \leq \dim S_k^+\left(p, (\tfrac{\cdot}{p})\right) - \dim S_k^-\left(p, (\tfrac{\cdot}{p})\right) \leq 1.$$

Da die Summe der beiden Vorzeichenräume den Vektorraum aller Modulformen zu $\Gamma_0(p)$ geeigneten Gewichts und Charakters ergibt, ist für Primzahlen $p \equiv 1 \mod 4$ mit $S_k(p, (\frac{\cdot}{p}))$ auch jeder der Vorzeichenräume nichttrivial, und die Symmetrisierung liefert eine Spitzenform im Kontrollraum. Für $p \equiv 3 \mod 4$ und $\epsilon = +1$ ist dafür ebenfalls die Bedingung $S_k(p, (\frac{\cdot}{p})) \neq \{0\}$ hinreichend. Ist das Vorzeichen dagegen $\epsilon = -1$, so stellt erst die Ungleichung

$$\dim S_k(p, (\tfrac{\cdot}{p})) > h(-p)$$

die Existenz nichttrivialer Spitzenformen im Kontrollraum sicher. Eine Standard-Abschätzung für die Klassenzahl liefert in Verbindung mit Satz 5.1.1 dann die Ergebnisse.

5.1.7 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$. Seine Stufe sei eine ungerade Primzahl p und stimme mit seiner Determinante überein. Dann ist sein Kontrollraum nicht einfach, falls das Paar (p, n) nicht der folgenden Ausnahmemenge angehört:*

$$(p, n) \notin \{(3,4),(3,8),(5,2),(5,6),(7,8),(13,2),(17,2)\}$$

5.2 Gitter mit quadratfreier Stufe

5.2.1 Die Diskriminantenform stellt $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ dar

Nach der vollständigen Abhandlung der Gitter, deren Stufe sogar eine Primzahl ist, betrachten wir nun Gitter allgemeiner quadratfreier Stufe N. In diesem ersten Abschnitt sei die quadratische Form $-Nq : L'/L \to \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ surjektiv. Dies ist nach Satz 4.3.1 genau dann der Fall, wenn die p-Ordnung der Determinante des Gitters für jeden ungeraden Primteiler mindestens 2 ist. Dann ist der Symmetrisierungsoperator Φ_L auf dem Neuformenraum $S_k^0(N, \chi_L)$ injektiv. Wir müssen also untersuchen, wann dieser eine positive Dimension hat.

Der Charakter χ_L ist im allgemeinen nicht primitiv; sein Führer m_L ist gegeben durch

$$m_L := \prod_{\substack{p \neq 2 \\ \nu_p(\det(L)) \equiv 1 \bmod 2}} p. \tag{5.2}$$

Wir leiten zunächst eine Dimensionsformel für die Räume $S_k^0(N, \chi)$ mit quadratfreiem N her. Diese beruht darauf, daß für Summen endlichdimensionaler Vektorräume V_i die Dimensionsformel

$$\dim(V_1 + \ldots + V_t) = \sum_{j=1}^{t} (-1)^{j+1} \sum_{\{i_1, \ldots, i_j\} \subset \{1, \ldots, t\}} \dim(V_{i_1} \cap \ldots \cap V_{i_j}) \tag{5.3}$$

gilt. Um diese auf die verschiedenen Einbettungen der Modulformenräume zu kleinerer Stufe anwenden zu können und damit die Dimension des Altformenraumes zu bestimmen, müssen wir die Schnitte solcher Räume untersuchen. Ein erstes derartiges Ergebnis lieferte Lemma 5.1.3. Im folgenden sei χ ein Dirichletcharakter modulo N mit Führer m_χ. Ferner sei k stets positiv.

5.2.1 Lemma. *Seien m, p_1 und p_2 paarweise teilerfremde natürliche Zahlen mit $m_\chi \mid m$. Dann gilt*

$$S_k(p_1 m, \chi) \cap S_k(p_2 m, \chi) = S_k(m, \chi).$$

Beweis: Sei f ein Element des Schnittes $S_k(p_1 m, \chi) \cap S_k(p_2 m, \chi)$. Dann gilt $f|_k \gamma = f$ für alle $\gamma \in \Gamma_0(p_1 m) \cup \Gamma_0(p_2 m)$ und daher auch für alle γ in der von dieser Menge erzeugten Gruppe. Sei n eine zu m teilerfremde Zahl, so läßt sie sich schreiben als Produkt

$$n = n_1 n_2 \quad \text{mit} \quad \mathrm{ggT}(n_1, p_1 m) = 1, \quad \mathrm{ggT}(n_2, p_2 m) = 1.$$

Die Gruppen $\Gamma_0(p_i m)$ enthalten daher jeweils ein Element, das modulo der Hauptkongruenzgruppe $\Gamma(p_i m)$ zu

$$\begin{pmatrix} n_i & 0 \\ 0 & n_i^{-1} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2)$$

äquivalent ist. Die von $\Gamma_0(p_1 m) \cup \Gamma_0(p_2 m)$ erzeugte Gruppe enthält daher eine modulo $\Gamma(m)$ zu

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n^{-1} \end{pmatrix}$$

äquivalente Matrix M_n. Ohnehin ist die Translationsmatrix in den beiden Heckegruppen enthalten. Da diese und die Matrizen M_n für $(n, m) = 1$ bereits die Gruppe $\Gamma_0(m)$ erzeugen, ist $f \in S_k(m, \chi)$. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. $\square$

5.2.2 Lemma. *Seien m, p_1 und p_2 paarweise teilerfremde Zahlen mit $m_\chi \mid m$. Dann gelten*

$$\iota_1(S_k(p_1 m, \chi)) \cap \iota_{p_1}(S_k(p_2 m, \chi)) = \iota_{p_1}(S_k(m, \chi))$$

und

$$\iota_{p_2}(S_k(p_1 m, \chi)) \cap \iota_{p_1}(S_k(p_2 m, \chi)) = \iota_{p_1 p_2}(S_k(m, \chi)).$$

Beweis: Sei $r = 1$ oder $r = p_2$ und sei

$$f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in \iota_r(S_k(p_1 m, \chi)) \cap \iota_{p_1}(S_k(p_2 m, \chi)) \subset S_k(p_1 p_2 m, \chi).$$

Dann gibt es $g \in S_k(p_1 m, \chi)$ und $h \in S_k(p_2 m, \chi)$ mit $f(z) = g(rz) = h(p_1 z)$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Daher verschwinden alle a_n mit zu r oder p_1 teilerfremdem n, mithin für alle zu rp_1 teilerfremden n. Für $r = 1$ gilt nach Satz 4.1.6 nun $f(z) = f_{p_1}(p_1 z)$ und somit die Inklusion "$\subset$". Im Falle $r = p_2$ folgt aus Satz 4.1.6 lediglich $f(z) = f_{p_1}(p_1 z) + f_{p_2}(p_2 z)$. Durch nochmalige Anwendung des Argumentes auf f_{p_1} und f_{p_2} folgt die Behauptung aber auch in diesem Fall. Die umgekehrte Inklusion ist trivial. $\square$

5.2.3 Satz. *Sei m_χ der Führer des Dirichletcharakters χ und sei $N = p_1 \ldots p_r m_\chi$ mit paarweise verschiedenen und m_χ nicht teilenden Primzahlen p_i. Dann gilt die Dimensionsformel*

$$\begin{aligned}
\dim S_k^0(N, \chi) &= \sum_{j=0}^{r} (-2)^{r-j} \sum_{\{i_1, \ldots, i_j\} \subset \{1, \ldots, r\}} \dim S_k(p_{i_1} \cdot \ldots \cdot p_{i_j} m_\chi, \chi) \\
&= \frac{k-1}{12} \sum_{d \mid m_\chi} d \cdot \prod_{p \mid \frac{N}{m_\chi}} (p-1) + K(N, m_\chi, \chi, k) - \delta_r 2^{r(N)-1} + (-1)^r R(k, \chi)
\end{aligned}$$

mit

$$K(N, m_\chi, \chi, k) = \sum_{j=0}^{r} (-2)^{r-j} \sum_{\{i_1, \ldots, i_j\} \subset \{1, \ldots, r\}} \left(k_1(k) \sum_{\substack{x \mod p_{i_1} \cdots p_{i_j} m_\chi \\ x^2+1 \equiv 0 \mod p_{i_1} \cdots p_{i_j} m_\chi}} \chi(x) + k_2(k) \sum_{\substack{x \mod p_{i_1} \cdots p_{i_j} m_\chi \\ x^2+x+1 \equiv 0 \mod p_{i_1} \cdots p_{i_j} m_\chi}} \chi(x) \right)$$

mit $k_1(k)$, $k_2(k)$, $r(n)$ und $R(k, \chi)$ wie in Satz 5.1.1 sowie $\delta_r = 1$, falls $r = 0$, $\delta_r = 0$ sonst.

Beweis: Offenbar gilt

$$\begin{aligned}
S_k^1(N, \chi) &= \sum_{m_\chi \mid n \mid N} \sum_{\delta \mid N/n} \iota_\delta(S_k(n, \chi)) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \Big(\iota_1(S_k(p_1 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_r m_\chi, \chi)) + \iota_{p_i}(S_k(p_1 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_r m_\chi, \chi)) \Big),
\end{aligned}$$

da alle übrigen Einbettungen von Räumen zu kleinerer Stufe über diese angegebenen faktorisieren. Setzen wir für einen Moment

$$\begin{aligned}
V_{2i} &:= \iota_1(S_k(p_1 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_r m_\chi, \chi)) \\
\text{und } V_{2i-1} &:= \iota_{p_i}(S_k(p_1 \ldots \widehat{p_i} \ldots p_r m_\chi, \chi)),
\end{aligned}$$

wobei die Notation $\widehat{p_i}$ die Auslassung des Faktors p_i im Produkt bedeute, so liefert (5.3) die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\dim S_k^0(N,\chi) &= \dim S_k(N,\chi) - \dim\left(\sum_{i=1}^{2r} V_i\right)\\
&= \dim S_k(N,\chi) - \sum_{j=1}^{2r}(-1)^{j+1} \sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subset\{1,\dots,2r\}} \dim(V_{i_1}\cap\dots\cap V_{i_j}).
\end{aligned}
$$

Nun ist der Schnitt nach Lemma 5.1.3 trivial, falls ein Paar V_{2i-1}, V_{2i} darin vorkommt. Es liefern daher nur diejenigen Summanden einen Beitrag zur Summe, in denen von solchen Paaren höchstens ein Vertreter vorkommt, was die Zahl der zu schneidenden Vektorräume auf r begrenzt. Wir erhalten

$$
= \dim S_k(N,\chi) + \sum_{j=1}^{r}(-1)^j \sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subset\{1,\dots,r\}} \sum_{(k_1,\dots,k_j)\in\{0,1\}^j} \dim(V_{2i_1-k_1}\cap\dots\cap V_{2i_j-k_j}).
$$

Wendet man weiter sukzessive die Lemmata 5.2.1 und 5.2.2 an, so kann man die verbliebenen Schnitte bestimmen. Dies führt zu

$$
\begin{aligned}
= \dim S_k(N,\chi) &+ \sum_{j=1}^{r}(-1)^j \sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subset\{1,\dots,r\}} \times\\
&\times \sum_{(k_1,\dots,k_j)\in\{0,1\}^j} \dim(\iota_{\prod\limits_{k_j=1} p_{i_j}}(S_k(p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi,\chi))).
\end{aligned}
$$

Beachtet man, daß die verschiedenen Einbettungen $\iota_q(S_k(p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi)$ als injektive Bilder des gleichen Raumes zueinander isomorph sind, so erhält man das erste behauptete Ergebnis

$$
\begin{aligned}
&= \dim S_k(N,\chi) + \sum_{j=1}^{r}(-2)^j \sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subset\{1,\dots,r\}} \dim S_k(p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi,\chi)\\
&= \sum_{j=0}^{r}(-2)^j \sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subset\{1,\dots,r\}} \dim S_k(p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi,\chi).
\end{aligned}
$$

Setzen wie die Dimensionsformeln aus Satz 5.1.1 ein, so erhalten wir hieraus

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^{r}(-2)^j \sum_{\{i_1,\dots,i_j\}\subset\{1,\dots,r\}} \Bigg(\frac{k-1}{12} \sum_{d\mid p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi} d + K(p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi,\chi,k)\\
&\qquad + 2^{r(p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi)-1} - 2^{r(p_1\dots\widehat{p_{i_1}}\dots\widehat{p_{i_j}}\dots p_r m_\chi)-1} + R(k,\chi)\Bigg)\\
&= \frac{k-1}{12} \sum_{m_\chi\mid n\mid N} (-2)^{r-r(\frac{n}{m_\chi})} \sum_{d\mid n} d + K(N,m_\chi,\chi,k) - \sum_{m_\chi\mid n\mid N} (-2)^{r-r(\frac{n}{m_\chi})} 2^{r(\frac{n}{m_\chi})+r(m_\chi)-1}\\
&\qquad + \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-2)^j R(k,\chi)
\end{aligned}
$$

$$= \frac{k-1}{12} \sum_{d|m_\chi} d \cdot \prod_{p|\frac{N}{m_\chi}} \Big((p+1) + (-2) \Big) + K(N, m_\chi, \chi, k) - 2^{r(N)-1} \sum_{m_\chi|n|N} (-1)^{r - r(\frac{n}{m_\chi})}$$
$$+ (-1)^r R(k, \chi)$$
$$= \frac{k-1}{12} \sum_{d|m_\chi} d \cdot \prod_{p|\frac{N}{m_\chi}} (p-1) + K(N, m_\chi, \chi, k) - \delta_r 2^{r(N)-1} + (-1)^r R(k, \chi)$$

durch mehrmalige Anwendung des binomischen Lehrsatzes wie behauptet. □

Da der größte positive Summand in der Dimensionsformel aus Satz 5.2.3 für alle positiven δ größer als $k_\delta N^{1-\delta}$ ist und da sich alle weiteren Summanden nach Lemma 3.4.4 durch eine beliebige Wurzel aus N abschätzen lassen, gewinnen wir ein Kriterium, wann der Neuformenraum $S_k^0(N, \chi)$ für quadratfreie Stufe N nicht trivial sein kann. In diesen Fällen müssen Gitter, deren Symmetrisierungsoperator Φ_L gemäß Definition 4.3.5 auf diesem Raum injektiv ist, Spitzenformen in ihrem Kontrollraum besitzen.

5.2.4 Satz. *(cf. Anhang A, Korollar A.1.2) Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit der quadratfreien Stufe N. Für jeden ungerade Primteiler p von N sei $\nu_p(\det(L)) \geq 2$. Ist dann N größer als eine von n abhängige Schranke $N_0(n)$, so ist sein Kontrollraum nicht einfach. Dabei ist $N_0(n)$ gegeben durch die folgende Tabelle:*

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$N_0(n)$	570570	39270	4830	4830	30030	30	4290	2310	390

5.2.2 Noch einmal: Der Fall der Primzahldeterminante

Bevor wir uns den Gittern L mit quadratfreier Stufe, deren Diskriminantenform nicht surjektiv ist, zuwenden, rekurrieren wir kurz auf den Fall der ungeraden Primzahldeterminante p. In diesem Falle ist der Symmetrisierungsoperator Φ_L auf dem zugeordneten ϵ-Raum injektiv. Der Raum $S_k(p, \chi_L)$ stimmt mit dem Raum der Neuformen überein und besitzt daher eine Basis aus primitiven Neuformen. Diese spiegeln nicht die Zerlegung in die Vorzeichenräume wider: Da für jede primitive Neuform $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz)$ nach Definition $a_1 = 1$ gilt, müssen sie stets einen Anteil im $+$-Raum haben; andererseits muß es zumindest bei einigen von ihnen Anteile im $-$-Raum geben, da sie sonst keine Basis sein könnten.

Ist c der Faktor aus Satz 4.1.9, so kann man mit Hilfe der Darstellung (4.6) die Komponente F_0^f der Symmetrisierung einer primitiven Neuform f berechnen. Wir erhalten:

5.2.5 Lemma. *Ist L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit ungerader Primzahldeterminante p, so gilt für die Symmetrisierung einer primitiven Neuform $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k(p, \chi_L)$ die Gleichung*

$$F_0^f = c f_\rho + (-1)^k \sqrt{i}^{n-2} p^{\frac{1-k}{2}} a_p f. \tag{5.4}$$

Wenn nun diese $\mathfrak{e}_0$-Komponente verschwindet, so sind offenbar f und f_ρ linear abhängig und sogar schon gleich, da ihre jeweiligen ersten Fourierkoeffizienten a_1 und $\bar{a}_1$ übereinstimmen, denn f und f_ρ sind primitive Neuformen. Da stets für n mit $p \nmid n$ die Beziehung $\bar{a}_n = \chi_L(n) a_n$ gilt, ist $f = f_\rho$ mit der Bedingung $a_n = \chi_L(n) a_n$ äquivalent. Spitzenformen, die solcher Bedingung genügen, nennen wir CM-Formen. Trivialerweise erfüllen die Elemente des $+$-Raumes diese Bedingung. Die Untersuchung solcher primitiven Neuformen, die keine

CM-Formen sind, stellt sich als das richtige Hilfsmittel heraus, die Existenz von nichttrivialen Spitzenformen im Kontrollraum zu zeigen, da sie in gewissem Sinne "dicht liegende" Fourierkoeffizienten haben. Wir gehen darauf im nachfolgenden Abschnitt genauer ein.

Abschließend erwähnen wir, daß die Darstellung (5.4) zeigt, daß gewisse primitive Neuformen vom Symmetrisierungsoperator tatsächlich anulliert werden. Der Vorfaktor c und der Hecke-Eigenwert $\bar{a}_p$ stehen zueinander in der Beziehung $c = p^{-\frac{k}{2}} W(\chi)\chi(-1)\bar{a}_p$ mit der Gauß-Summe $W(\chi)$. Ferner gilt $c^2 = (-1)^k$. Es ergibt sich für eine primitive Neuform, die auch CM-Form ist, somit $F_0^f = c(1+(-1)^{\frac{3}{2}k+1})f$, falls $p \equiv 1 \mod 4$, und $F_0^f = c(1+(-1)^{\frac{3}{2}(k+1)})f$ sonst. Ist also $p \equiv 1 \mod 4$ und $n \equiv 6 \mod 8$ oder $p \equiv 3 \mod 4$ und $n \equiv 0 \mod 8$, so liegen CM-Neuformen stets im Kern des Operators Φ_L.

5.2.3 CM-Formen

Die klassische (gerade) Thetareihe

$$\vartheta(z) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{e}(n^2 z)$$

wird offensichtlich von den Fourierkoeffizienten a_n, für die n ein Quadrat ist, getragen. Sie und die aus ihr durch Twists mit Dirichletcharakteren entstehenden Modulformen sind Prototypen der CM-Formen, die diese Konstruktion verallgemeinern.

5.2.6 Definition. *(cf. [Ri], S. 18) Eine primitive Neuform $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k(M, \varepsilon)$ heißt eine φ-**CM-Form**, falls es einen nichttrivialen quadratischen Dirichletcharakter φ modulo D gibt, so daß*

$$\varphi(p)a_p = a_p \text{ für alle } p \nmid DM$$

gilt.

*Den von allen $\iota_t(f) \in S_k(N, \chi)$, für die f eine φ-CM-Form in $S_k(M, \varepsilon)$ für geeignetes φ, M, t und ε ist, erzeugten Vektorraum bezeichnen wir mit $S_k^{CM}(N, \chi)$. Seine Elemente nennen wir **CM-Formen**.*

5.2.7 Satz. *(cf. [Se1], Thm. 15 und Cor. 2) Sei $f \in S_k(N, \chi)$ eine Eigenform zu allen Hecke-operatoren $T(p)$, für die $p \nmid N$, mit Eigenwerten a_p. Ferner sei $k \geq 2$ und f keine CM-Form. Für $x \in \mathbb{R}$ sei*

$$\mathrm{P}_f(x) := |\{p \text{ Primzahl} \mid p \nmid N, p \leq x \text{ und } a_p = 0\}|.$$

Dann gilt

$$\mathrm{P}_f(x) = O(x/(\log x)^{\frac{3}{2}-\delta})$$

für jedes positive δ.

Dieser Satz ist eine Anwendung des Dichtesatzes von Chebotarev. Zusammen mit dem Primzahlsatz und dem Satz über Primzahlen in arithmetischen Progressionen ergibt sich das folgende

5.2.8 Korollar. *(cf. [On-Sk], S. 459) Ist $f = \sum a_n \mathbf{e}(nz) \in S_k(N, \chi)$ eine primitive Neuform, die keine CM-Form ist, so gibt es in jeder arithmetischen Progression $\{r + km \mid k \in \mathbb{Z}\}$ mit teilerfremden r und m ein n mit $a_n \neq 0$.*

5.2.9 Korollar. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit quadratfreier Stufe N. Gibt es eine Neuform $f \in S_k^0(N,\chi_L)$, $f \neq 0$, die keine CM-Form ist, so ist der L zugeordnete $\epsilon_1 \dots \epsilon_r$-Raum nicht trivial. Insbesondere ist dann der Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ nicht einfach.*

5.2.10 Bemerkung. *Ist f eine primitive Neuform, die keine CM-Form ist, so ist ihre Symmetrisierung niemals Null. Denn es wird eine zur Stufe N teilerfremde Zahl r von der Form $-Nq$ modulo N dargestellt, und wir finden einen Koeffizienten $a_n \neq 0$ mit $n \equiv r \mod N$. Wegen (4.5) ist dann $F^f \neq 0$.*

Wir stellen nun dar, wie man im allgemeinen CM-Formen konstruiert. Sei im folgenden $K := \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ein fest gewählter imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $-d$, und sei $\mathcal{O}_K$ der Ring der ganzen Zahlen in K. Die Einheiten in $\mathcal{O}_K$ bilden die endliche zyklische Gruppe $\mathcal{U}_K$. Sei I die Gruppe der gebrochenen Ideale in $\mathcal{O}_K$ und P die Untergruppe der Hauptideale, also $P := \{(\alpha) \mid \alpha \in K^*\}$. Die Ordnung der endlichen Faktorgruppe I/P ist per definitionem die Klassenzahl $h(-d)$ des Körpers K.

5.2.11 Definition. *Sei $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_K$ ein Ideal. Wir setzen*

$$I_\mathfrak{m} = \{\mathfrak{a} \in I \mid ggT(\mathfrak{a},\mathfrak{m}) = 1\},$$
$$P_\mathfrak{m} = \{(\alpha) \in P \mid \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{m}\}$$

Dabei bedeute $ggT(\mathfrak{a},\mathfrak{m}) = 1$, daß $\mathfrak{a}$ eine Darstellung der Form $\mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{a}_1}{\mathfrak{a}_2}$ mit Idealen $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2 \subset \mathcal{O}_K$ besitzt, für die die Relation $ggT(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\mathfrak{m}) = 1$ gilt, sowie $\alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$, daß sich $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ mit α_1, $\alpha_2 \in \mathcal{O}_K$, die $ggT(\alpha_1\alpha_2,\mathfrak{m}) = 1$ und $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathfrak{m}$ erfüllen, schreiben läßt. Die Faktorgruppe $I_\mathfrak{m}/P_\mathfrak{m}$ heißt ***Strahlklassengruppe****.*

Sei $\sigma : K \to \mathbb{C}$ eine der zwei möglichen Einbettungen des Körpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ in $\mathbb{C}$. Für $u \in \mathbb{Z}$ definiert

$$\xi_\infty^u(\alpha) := \left(\frac{\sigma(\alpha)}{|\sigma(\alpha)|}\right)^u$$

einen Homomorphismus $\xi_\infty^u : K^* \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$. Im allgemeinen liegt die Gruppe der Einheiten von $\mathcal{O}_K$ nicht im Kern von ξ_∞^u. Ist $\mathfrak{m} \subset \mathcal{O}_K$ ein Ideal, so daß zumindest die Untergruppe

$$\mathcal{U}_\mathfrak{m} := \{\eta \in \mathcal{U}_K \mid \eta \equiv 1 \mod \mathfrak{m}\}$$

im Kern von ξ_∞^u liegt, kann man ξ_∞^u durch die Definition

$$\xi_\infty^u\big((\alpha)\big) := \xi_\infty^u(\alpha) \text{ für ein } \alpha \in K^* \text{ mit } \alpha \equiv 1 \mod \mathfrak{m}$$

zu einem Gruppenhomomorphismus $\xi_\infty^u : P_\mathfrak{m} \to S^1$ machen. Das Ideal $\mathfrak{m}$ nennen wir einen Modul von ξ_∞^u; zu jedem K, σ und u existiert ein solcher Modul.

5.2.12 Definition. *Sei $u \in \mathbb{Z}$ und sei $\mathfrak{m}$ ein Modul für ξ_∞^u. Ein Gruppenhomomorphismus $c : I_\mathfrak{m} \to S^1$ heißt* ***Hecke-Größencharakter*** *modulo $\mathfrak{m}$ vom Typ u, falls er auf der Untergruppe $P_\mathfrak{m}$ mit ξ_∞^u übereinstimmt. Wir setzen ihn kanonisch auf I fort durch $c(\mathfrak{a}) := 0$, falls $ggT(\mathfrak{a},\mathfrak{m}) \neq 1$.*

Ist $c : I_\mathfrak{m} \to S^1$ ein Größencharakter und $\mathfrak{n}$ ein Ideal, welches $\mathfrak{m}$ umfaßt und ebenfalls ein Modul für ξ_∞^u ist, so gibt es möglicherweise einen Größencharakter c^* modulo $\mathfrak{n}$, der auf $I_\mathfrak{m}$ mit c übereinstimmt. Es gibt ein größtes Ideal mit dieser Eigenschaft.

5.2.13 Definition. *Sei c ein Größencharakter modulo $\mathfrak{m}$. Das größte Ideal $\mathfrak{n}$, das ein Modul für ξ_∞^u ist und für das ein Hecke-Größencharakter c^* existiert, der auf $I_\mathfrak{m}$ mit c übereinstimmt, heißt der* ***Führer*** *von c. Wir bezeichnen es mit $\mathfrak{f}_c$. Stimmt der Führer mit $\mathfrak{m}$ überein, so heißt der Charakter* ***primitiv***. *Den Dirichletcharakter, der durch*

$$\omega_c(n) = c((n)) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ mit } ggT(n, \mathfrak{f}_c) = 1$$

definiert ist, nennen wir den c zugeordneten Dirichletcharakter.

Ist $q \in \mathbb{Z}$ der positive Erzeuger von $\mathfrak{f}_c \cap \mathbb{Z}$, so ist ω_c ein Dirichletcharakter modulo q. Es kann im allgemeinen aber auch kleinere Moduln geben.

Wir erinnern an die Norm-Abbildung $N : I \to \mathbb{Q}^*$. Ist $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K$ ein Ideal, so ist $N(\mathfrak{a}) := |\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}|$; dies wird multiplikativ auf gebrochene Ideale fortgesetzt.

5.2.14 Theorem. *(cf. [Iwa], Thm. 12.5 und anschließende Bemerkungen) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ ein imaginär-quadratischer Zahlkörper der Diskriminante $-d$, und sei c ein Hecke-Größencharakter modulo $\mathfrak{m}$ vom Typ $k-1$ mit $k \geq 2$. Dann definiert die Reihe*

$$\varphi_{K,c}(z) := \sum_{\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_K} c(\mathfrak{a}) N(\mathfrak{a})^{\frac{k-1}{2}} \mathbf{e}(N(\mathfrak{a})z)$$

ein Element von $S_k\big(dN(\mathfrak{m}), (\frac{-d}{\cdot})\omega_c\big)$. Ist c sogar ein primitiver Größencharakter modulo $\mathfrak{m}$, so ist $\varphi_{K,c}$ eine primitive Neuform.

5.2.15 Satz. *(cf. [Ri], [Se1], [Se2]) Der Raum $S_k^{CM}(N, \chi)$ der CM-Formen zu vorgegebenem N, χ und $k \geq 2$ wird erzeugt von den Funktionen $\iota_\delta(\varphi_{K,c})$, die den Bedingungen*

$$\delta d N(\mathfrak{f}_c) \mid N \tag{5.5}$$

und

$$\chi = \left(\frac{-d}{\cdot}\right) \omega_c \pmod N \tag{5.6}$$

genügen. Dabei erzeugen diejenigen dieser Funktionen mit $\delta = 1$ und $dN(\mathfrak{f}_c) = N$ den Schnitt $S_k^{CM}(N, \chi) \cap S_k^0(N, \chi)$.

Dieser Satz liefert nun den Schlüssel zu unserem Problem. Wie wir in Bemerkung 5.2.10 gesehen haben, sind Neuformen, die im Kern des Symmetrisierungsoperators Φ_L eines beliebigen Gitters mit quadratfreier Stufe liegen, stets CM-Formen. Finden wir also eine Neuform, die keine CM-Form ist, liefert die Symmetrisierung eine nichttriviale Spitzenform im Kontrollraum. Die Dimension des Raumes der CM-Neuformen läßt sich aber durch Zählung der Paare (K, c), die den Bedingungen (5.5) und (5.6) genügen, nach oben abschätzen und so die Existenz geeigneter Spitzenformen sicherstellen. Dies wollen wir im nächsten Abschnitt durchführen.

5.2.4 Beliebige Gitter mit quadratfreier Stufe

Wir wollen zu vorgegebener Stufe N und quadratischem Charakter χ_L die Anzahl der Paare (K, c) bestimmen, für die die korrespondierende Modulform $\varphi_{K,c}$ im entsprechenden Neuformenraum liegt. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathcal{S}_L := S_k^{CM}(N, \chi_L) \cap S_k^0(N, \chi_L).$$

Dabei ist im ganzen folgenden Abschnitt wie bisher L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit quadratfreier Stufe N, $k = 1 + \frac{n}{2}$ und χ_L der zugehörige quadratische Charakter mit Führer m_L (cf. (5.2)). Wir bestimmen zunächst die in Frage kommenden Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$. Nach vorigem Abschnitt ist d ein Teiler der Stufe N, der der Kongruenz $d \equiv 3 \mod 4$ genügt. Wir können dies aber weiter einschränken.

5.2.16 Lemma. *Sei $d \equiv 3 \mod 4$ ein Teiler von N, und sei c ein Hecke-Größencharakter bezüglich des Körpers $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, so daß die Modulform $\varphi_{K,c}$ in $\mathcal{S}_L$ liegt. Dann ist d ein Teiler des Führers m_L von χ_L.*

Beweis: Sei $d \equiv 3 \mod 4$ ein Teiler von N, der eine Modulform $\varphi_{K,c} \in \mathcal{S}_L$ zuläßt. Dann gibt es einen Größencharakter c, der die Bedingung (5.6) erfüllt. Es gilt mithin $\omega_c = \left(\frac{-d}{\cdot}\right)\chi_L$, aufgefaßt als Gleichung zwischen Dirichletcharakteren modulo N. Also hat der von c induzierte Dirichletcharakter ω_c den Führer $\frac{m_L d}{\mathrm{ggT}(m_L,d)^2}$. Sei $\mathfrak{f}_c$ der Führer des Größencharakters c, so ist $dN(\mathfrak{f}_c) = N$, da $\varphi_{K,c}$ im Neuformenraum liegt, und außerdem ist die Norm $N(\mathfrak{f}_c)$ eine Periode des Dirichletcharakters ω_c und daher ein Vielfaches des Führers $\frac{m_L d}{\mathrm{ggT}(m_L,d)^2}$. Es folgt

$$\frac{m_L d}{\mathrm{ggT}(m_L,d)^2} \mid N(\mathfrak{f}_c) = \frac{N}{d},$$

was wegen der Quadratfreiheit von N nur möglich ist, wenn d den Führer m_L teilt. □

5.2.17 Lemma. *Sei $d \equiv 3 \mod 4$ ein Teiler von m_L, sei K der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$, und sei $r(N/d)$ die Anzahl der Primteiler von N/d. Dann gibt es genau $2^{r(N/d)}$ Ideale in $\mathcal{O}_K$, die als Führer von Größencharakteren c mit $\varphi_{K,c} \in \mathcal{S}_L$ auftreten können. Diese sind genau die Mengen*

$$\mathfrak{m}_n := \frac{N}{d}\mathbb{Z} + \left(n + \frac{1+\sqrt{-d}}{2}\right)\mathbb{Z} \tag{5.7}$$

mit solchen n, die die quadratische Kongruenz $n^2 + n + \frac{1}{4}(d+1) \equiv 0 \mod N/d$ lösen. Die Menge $\{1, 2, \ldots, N/d\}$ ist ein Repräsentantensystem von $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_n$ für jedes dieser n.

Beweis: Seien d, K wie im Lemma, und sei c ein Größencharakter mit $\varphi_{K,c} \in \mathcal{S}_L$ sowie $\mathfrak{f}_c$ dessen Führer. Dann ist wie vorher $N(\mathfrak{f}_c) = N/d$. Der Charakter ω_c hat den Führer $\frac{m_L d}{\mathrm{ggT}(m_L,d)^2} = m_L/d$. Für den positiven Erzeuger q des Ideals $\mathbb{Z}/(\mathfrak{f}_c \cap \mathbb{Z})$ folgt $m_L/d \mid q \mid N/d$.

Da die Norm sich als Determinante des Ideals $\mathfrak{f}_c$, aufgefaßt als Untergitter des Gitters $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\frac{1+\sqrt{-d}}{2})$, berechnen läßt, muß genau eines der Elemente

$$n + \frac{N}{dq}\frac{1+\sqrt{-d}}{2}, \quad 1 \leq n \leq q$$

und damit der $\mathbb{Z}$-Modul

$$\mathfrak{m} := q\mathbb{Z} + \left(n + \frac{N}{dq}\frac{1+\sqrt{-d}}{2}\right)\mathbb{Z}$$

in $\mathfrak{f}_c$ liegen. Wiederum wegen der Norm-Bedingung muß bereits Gleichheit vorliegen. Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathfrak{m}$ ist genau dann ein Ideal, wenn Multiplikation mit $\frac{1+\sqrt{-d}}{2}$ die Menge erhält. Das Produkt $q\frac{1+\sqrt{-d}}{2}$ liegt genau dann in $\mathfrak{m}$, wenn q von $\frac{N}{dq}$ geteilt wird. Daraus folgt aber

$$\left(\frac{N}{dq}\right)^2 \mid q\frac{N}{dq} = \frac{N}{d}.$$

Da die Stufe N quadratfrei ist, ergibt sich $\frac{N}{dq} = 1$. Ferner ist die Norm

$$N\left(n + \frac{1+\sqrt{-d}}{2}\right) = n^2 + n + \frac{1}{4}(d+1)$$

in $\mathfrak{f}_c \cap \mathbb{Z}$, mithin durch $q = N/d$ teilbar. Daraus ergibt sich die behauptete Gestalt (5.7) der möglichen Führer sowie das angegebene Repräsentantensystem. Da die Diskriminante der Bestimmungsgleichung

$$n^2 + n + \frac{1}{4}(d+1) \equiv 0 \mod \frac{N}{d} \tag{5.8}$$

gerade $-d$ ist, besitzt sie genau $2^{r(\frac{N}{d})}$ Lösungen. Ist n eine Lösung der Kongruenz (5.8), so liegt auch das Produkt $(n + \frac{1+\sqrt{-d}}{2})\frac{1+\sqrt{-d}}{2}$ in $\mathfrak{m}_n$, es handelt sich also tatsächlich um ein Ideal. $\square$

Es bleibt nun noch bei festem Körper K und Führer $\mathfrak{m}_n$ die Anzahl der Größencharaktere abzuschätzen, die einen geeigneten Dirichletcharakter induzieren.

5.2.18 Lemma. *Sei $\mathfrak{m}_n$ eines der Ideale aus Satz 5.2.17. Die Zahl der Hecke-Größencharaktere c modulo $\mathfrak{m}_n$, die die Relation (5.6) erfüllen, ist höchstens $h(-d)$.*

Beweis: Sei c ein Größencharakter modulo $\mathfrak{m}_n$, der (5.6) erfüllt, und sei $l \in \mathbb{Z}$ teilerfremd zu N/d. Wegen $N/d = N(\mathfrak{m}_n) \in \mathfrak{m}_n$ folgt dann $\mathrm{ggT}(l, \mathfrak{m}_n) = 1$ und somit nach Definition $c((l)) = \omega_c(l) \neq 0$. Durch Multiplikativität ist der Wert von c bereits auf jedem Element der Untergruppe

$$G := \left\{ (l) \;\middle|\; l \in \mathbb{Q},\, \mathrm{ggT}\left(l, \frac{N}{d}\right) = 1 \right\} \subset I_{\mathfrak{m}_n} \cap P$$

festgelegt. Zu $\mathfrak{a} = (\alpha) \in I_{\mathfrak{m}_n} \cap P$ gibt es definitionsgemäß $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathcal{O}_k$ mit $\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ und $\mathrm{ggT}(\alpha_1\alpha_2, \mathfrak{m}_n) = 1$. Mit t durchläuft auch $\alpha_1 - t\alpha_2$ ein Repräsentantensystem des Quotienten $\mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_n$. Wegen der speziellen Gestalt des Ideals $\mathfrak{m}_n$ gibt es also ein $t \in \{1, \ldots, N/d\}$ mit $\alpha_1 - t\alpha_2 \in \mathfrak{m}_n$. Hätte t einen gemeinsamen Teiler mit $N/d = N(\mathfrak{m}_n)$, so wäre $\mathrm{ggT}(t\alpha_2, \mathfrak{m}_n) \neq 1$, und aus der Relation $\alpha_1 - t\alpha_2 \in \mathfrak{m}_n$ würde $\mathrm{ggT}(\alpha_1, \mathfrak{m}_n) \neq 1$ im Widerspruch zu unserer Annahme folgen. Es treten daher nur solche t auf, die zu N/d teilerfremd sind. Somit ist das Hauptideal (t) ein Element von G mit $(\alpha)/(t) \in P_{\mathfrak{m}_n}$. Jedes Element von $I_{\mathfrak{m}_n} \cap P$ ist also modulo $P_{\mathfrak{m}_n}$ zu einem Ideal in G äquivalent, und daher ist der Wert des Hecke-Größencharakters auf ihm festgelegt.

Je zwei Hecke-Größencharaktere c und c' modulo $\mathfrak{m}_n$, die die Relation (5.6) erfüllen, stimmen somit auf $I_{\mathfrak{m}_n} \cap P$ überein, das Produkt $c^{-1}c'$ ist dort also trivial. Gibt es überhaupt einen Größencharakter modulo $\mathfrak{m}_n$, so gibt es also höchstens $h(-d)$, denn der Index der Untergruppe $I_{\mathfrak{m}_n} \cap P$ in $I_{\mathfrak{m}_n}$ ist durch die Klassenzahl $h(-d)$ beschränkt. $\square$

Damit haben wir insgesamt eine Abschätzung für die Dimension des Schnittes $\mathcal{S}_L$ gefunden:

5.2.19 Satz. *Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ mit quadratfreier Stufe N. Sei χ_L der zugeordnete Charakter, und sei m_L sein Führer. Dann gilt*

$$\dim \mathcal{S}_L = \dim S_k^{CM}(N, \chi_L) \cap S_k^0(N, \chi_L) \leq \sum_{\substack{d \mid m_L \\ d \equiv 3 \mod 4}} 2^{r(\frac{N}{d})} h(-d).$$

Zusammen mit der Dimensionsformel für den Neuformenraum (Satz 5.2.3) erkennen wir anhand des asymptotischen Verhaltens, daß es bei festem n für hinreichend große quadratfreie Stufe stets Neuformen, die keine CM-Formen sind, gibt. Genauer gilt:

5.2.20 Satz. *(cf. Anhang A, Satz A.2.1) Sei L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit der quadratfreien Stufe N. Ist dann N größer als eine von n abhängige Schranke $N_0(n)$, so ist sein Kontrollraum nicht einfach.*

Beweis: Wir müssen für $k = 1 + \frac{n}{2}$ die Positivität des Ausdrucks $\dim S_k^0(N, \chi_L) - \dim \mathcal{S}_L$ für Gitter mit hinreichend großer Stufe N zeigen. Dazu muß der Ausdruck

$$\sum_{\substack{d|m_L\\ d\equiv 3 \mod 4}} 2^{r(\frac{N}{d})} h(-d)$$

geeignet abgeschätzt werden. Unter Verwendung einer Standardabschätzung für die Klassenzahl $h(-d)$ der Form

$$h(-d) \leq \frac{\sqrt{d}\log(d)}{\pi} + \delta_3(-d)$$

mit

$$\delta_3(-d) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\sqrt{3}\log(3)}{\pi}\right) & \text{falls } -d = -3,\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

und der Abschätzung $2^{r(\frac{N}{d})} \leq \frac{4}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{N}{d}}$ gemäß Lemma 3.4.4 erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d|m_L\\ d\equiv 3 \mod 4}} 2^{r(\frac{N}{d})} h(-d) &\leq \frac{4}{\sqrt{6}} \sum_{d|N} \sqrt{\frac{N}{d}} \frac{\sqrt{d}\log(d)}{\pi} + \frac{4}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{N}{3}}\delta_3(-3)\\ &\leq \frac{4}{\pi\sqrt{6}}\sqrt{N}\sum_{d|N}\log(d) + \frac{4}{\sqrt{6}}\sqrt{\frac{N}{3}}\delta_3(-3).\end{aligned}$$

Nun gilt für quadratfreie Zahlen N die Relation $\prod_{d|N} d = N^{(2^{r(N)-1})}$, woraus durch Logarithmieren

$$\sum_{d|N}\log(d) = \log\left(\prod_{d|N} d\right) = \log\left(N^{(2^{r(N)-1})}\right) = 2^{r(N)-1}\log(N)$$

folgt. Damit erkennt man

$$\sum_{\substack{d|m_L\\ d\equiv 3 \mod 4}} 2^{r(\frac{N}{d})} h(-d) \in O(2^{r(N)}\sqrt{N}\log(N)) \quad (N \text{ quadratfrei}),$$

also

$$\sum_{\substack{d|m_L\\ d\equiv 3 \mod 4}} 2^{r(\frac{N}{d})} h(-d) \in O(N^{\frac{1}{2}+\varepsilon}) \qquad \text{für jedes positive } \varepsilon,$$

woraus die Behauptung schließlich folgt. □

5.3 Schlußbetrachtungen

Zum Abschluß unserer Arbeit wollen wir kurz einen Überblick über die Ergebnisse geben. Wir haben geraden Gittern L der Signatur $(2,n)$ einen Kontrollraum $\mathscr{K}_L$ zugeordnet, der aus gewissen vektorwertigen Modulformen besteht. Der Unterraum $\mathscr{S}_L$ der Spitzenformen im Kontrollraum gibt Informationen über die Existenz von Modulformen, die vorgegebene Divisoren realisieren. Ist der Kontrollraum einfach, also der Unterraum der Spitzenformen trivial, so ist jeder Heegnerdivisor der Divisor eines Borcherdsproduktes.

Wir haben mittels dreier verschiedener Ansätze die Frage untersucht, ob es bis auf Isomorphie nur endlich viele Gitter mit einfachem Kontrollraum gibt. Zunächst (Kapitel 2) konnte durch Betrachtung der auf dem Satz von Riemann-Roch basierenden Dimensionsformel für den Kontrollraum die Dimension einfacher Gitter beschränkt werden. Ist L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit einfachem Kontrollraum, so folgt $n \leq 26$.

Spaltet ein Gitter über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen ab, so liefert die Theorie singulärer Gewichte eine untere Schranke für das Gewicht einer holomorphen, nicht konstanten Modulform zur orthogonalen Gruppe Γ_L. Diese Tatsache widerspricht bei hinreichend großer Determinante des Gitters L der Einfachheit des Kontrollraumes (Kapitel 3). Da es bei beschränkter Dimension und Determinante nur endlich viele Isomorphieklassen gerader Gitter gibt, kann es bis auf Isomorphie auch nur endlich viele Gitter geben, die zwei hyperbolische Ebenen abspalten und einfache Kontrollräume besitzen. Diese zusätzliche Voraussetzung ist insbesondere erfüllt, wenn n mindestens 5 ist (Korollar 1.1.25).

Da der genannte, in der Dualitätstheorie ansetzende indirekte Schluß einige Fälle kleiner Dimension nicht erfaßt und auch sonst nur sehr schlechte quantitative Aussagen zuläßt, wurden durch Symmetrisierung elliptischer Modulformen Spitzenformen im Kontrollraum explizit konstruiert (Kapitel 4). Diese Konstruktion wurde für alle Gitter mit quadratfreier Stufe durchgeführt und liefert nichttriviale Spitzenformen, sobald geeignete Inputs zur Verfügung stehen. Ist die Stufe quadratfrei und hinreichend groß, so ist letzteres stets der Fall (Kapitel 5). Da Stufe und Determinante sich bei fester Dimension gegeneinander abschätzen lassen, ist unsere Ausgangsfrage unter der Voraussetzung der Quadratfreiheit der Stufe zu bejahen. Man erhält nun auch explizite Schranken.

Wir fassen die erreichten Ergebnisse in einem abschließenden Satz zusammen.

5.3.1 Satz. *Sei $(L_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge nichtäquivalenter gerader Gitter der Signatur $(2,n)$ mit $\mathscr{S}_{L_m} = \{0\}$ für fast alle m. Dann gelten simultan die folgenden Aussagen:*

1. *$n \leq 4$.*
2. *Höchstens endlich viele der Gitter L_m spalten über $\mathbb{Q}$ zwei hyperbolische Ebenen ab.*
3. *Höchstens endlich viele der Gitter L_m haben quadratfreie Stufe.*

Folgen inäquivalenter gerader Gitter der Signatur $(2,1)$ erfüllen stets alle diese Bedingungen. Sie entziehen sich also allen von uns angeführten Ansätzen. Es bleibt anzumerken, daß sich die Frage nach Einfachheit des Kontrollraumes für konkrete Gitter mit $n \geq 3$ ohne Schwierigkeiten beantworten läßt. Denn die Lemmata 2.2.2 und 2.2.3 führen zu einer geschlossenen Form der in Satz 1.2.26 angegebenen Dimensionsformel, die also durch ein Programm direkt ausgewertet werden kann. Ein solches Programm, welches die Auswertung bei Eingabe der Gram-Matrix des zu betrachtenden Gitters durchführt, wurde von uns geschrieben. Ferner kann auch das Programm "eis" von Bruinier und Kuss herangezogen werden, um Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihe E_0 zu berechnen und mit dem singulären Gewicht zu vergleichen.

Anhang A

Tabellen kritischer Stufen

A.1 Tabelle eventuell kritischer Stufen bei surjektiver Diskriminantenform

Wir berechnen eine Tabelle derjenigen quadratfreien Stufen, in denen möglicherweise der Neuformenraum $S_k^0(N,\chi_L)$, abhängig vom Charakter χ_L, trivial ist.

A.1.1 Satz. *(cf. Satz 5.2.4) Seien $N > 1$ quadratfrei, $2 \leq k \leq 10$, und sei χ ein Dirichletcharakter modulo N. Ist dann der Neuformenraum $S_k^0(N,\chi)$ trivial, so ist N eine der in Tabelle A.2 angegebenen Stufen. Dabei sind wegen der großen Zahl der Ausnahmestufen in den Fällen $k = 2$ und $k = 3$ für diese beiden Werte von k nur die ungeraden Stufen aufgeführt, was durch das * angedeutet wird.*

A.1.2 Korollar. *Ist L ein gerades Gitter der Signatur $(2,n)$ mit quadratfreier Stufe N und $2 \leq n \leq 18$, dessen Diskriminantenform $-Nq$ surjektiv ist, so ist der zugehörige Kontrollraum nicht einfach, falls N nicht eine der in Satz A.1.1 angegebenen Stufen ist. Für größere n greifen die Angaben in Kapitel 2. Dabei ist $k = 1 + \frac{n}{2}$ das Gewicht der Modulformen im Kontrollraum von L.*

Diese und somit die in Satz 5.2.4 angegebene Tabelle erhält man wie folgt: Zunächst wird für kleine Werte von $r(N)$ die Dimensionsformel aus Satz 5.2.3 im schlechtesten Fall, d.h. für $m_L = 1$, nach unten abgeschätzt. Dabei wird für ein positives δ eine Abschätzung der Form $\prod_{p|N}(p-1) \geq k_\delta N^{1-\delta}$ verwendet, die elementar hergeleitet werden kann. Man kann relativ gute Konstanten $k_{n,8}$ finden, die die in Lemma 3.4.4 angegebene Abschätzung für alle quadratfreien N mit mindestens 8 Primfaktoren verbessern, und diese auf die sinngemäß übertragene Schranke aus Bemerkung 5.1.2 anwenden. Man erkennt, daß die kleinste quadratfreie Zahl mit $r(N) \geq 8$ bereits so groß ist, daß immer nichttriviale Neuformen existieren. Man muß dann nur noch für die quadratfreien Zahlen mit höchstens 7 Primfaktoren, die unter den ermittelten Schranken liegen, das Produkt $\prod_{p|N}(p-1)$ berechnen. Offenbar liefert der Primfaktor $p = 2$ keinen wesentlichen Beitrag zu diesem Produkt, weswegen unter den Stufen, bei denen man nicht garantieren kann, daß der Neuformenraum nicht trivial ist, bevorzugt gerade Zahlen auftreten.

Wie zu erwarten ist, ist die Anzahl derjenigen quadratfreien Stufen mit trivialem Neuformenraum wesentlich geringer, wenn der Charakter primitiv ist. Dann ist N ungerade, und es gilt $(-1)^k N \equiv 1 \mod 4$ sowie $(\frac{(-1)^k \det(L)}{\cdot}) = (\frac{(-1)^k N}{\cdot})$. Man kann in diesem Fall die Dimensionen der Neuformenräume $S_k^0(N, (\frac{(-1)^k N}{\cdot}))$ konkret berechnen und so alle Fälle mit trivialem Neuformenraum bestimmen.

A.1.3 Satz. *Seien $N > 1$ ungerade und quadratfrei sowie $k \in \mathbb{N}$ mit $(-1)^k N \equiv 1 \mod 4$. Der Neuformenraum $S_k^0(N, (\frac{(-1)^k N}{\cdot}))$ ist genau dann trivial, wenn N eine der folgenden, in Abhängigkeit von k angegebenen Stufen ist. Ist L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$ und der Stufe N, so daß der zugeordnete Charakter χ_L primitiv und die Diskriminantenform $-Nq$ surjektiv ist, so ist es nur einfach, wenn seine Stufe eine der im folgenden angegebenen ist.*

k	n	N
2	2	*5, 13, 17, 21*
3	4	*3*
4	6	*5*
5	8	*3*
6	10	-
7	12	-
8	14	-
9	16	-
10	18	-

A.2 Tabelle eventuell kritischer Stufen bei nicht surjektiver Diskriminantenform

Ist die Diskriminantenform $-Nq$ eines geraden Gitters mit quadratfreier Stufe N nicht surjektiv, so ist der Unterraum der Spitzenformen im Kontrollraum jedenfalls dann nicht leer, wenn es Neuformen gibt, die keine CM-Formen sind. Nutzt man die in Satz 5.2.19 angegebene Abschätzung aus, so kann man wiederum im Prinzip alle Stufen berechnen, in denen möglicherweise alle Neuformen CM-Formen sind. Da entsprechend der Erwartung die Ergebnisse weniger gut sind als im zuvor behandelten Fall, beschränken wir uns auf den Fall des primitiven Charakters und Gitter der Signatur $(2, n)$ mit $n \geq 6$.

A.2.1 Satz. *Seien $N > 1$ ungerade und quadratfrei sowie $k \geq 4$ mit $(-1)^k N \equiv 1 \mod 4$. Der Raum $S_k^{CM}(N, (\frac{(-1)^k N}{\cdot}))^\perp \cap S_k^0(N, (\frac{(-1)^k N}{\cdot}))$ hat höchstens dann Dimension Null, wenn N eine der folgenden, in Abhängigkeit von k angegebenen Stufen ist. Ist L ein gerades Gitter der Signatur $(2, n)$, $n \geq 6$ und der Stufe N, so daß der zugeordnete Charakter χ_L primitiv ist, so ist es nur einfach, wenn seine Stufe eine der angegebenen Stufen ist.*

k	n	N
4	6	*5, 15, 21, 35*
5	8	*3, 7, 15*
6	10	*15*
7	12	-
8	14	-
9	16	-
10	18	-

Tabelle A.1: Eventuell kritische Stufen bei surjektiver Diskriminantenform

k	n	N
2^*	2^*	3, 5, 7, 13, 15, 17, 21, 33, 35, 39, 51, 55, 57, 65, 69, 77, 85, 87, 91, 93, 95, 105, 111, 115, 119, 123, 129, 133, 141, 143, 145, 155, 159, 161, 165, 177, 183, 185, 195, 201, 213, 219, 231, 255, 273, 285, 345, 357, 385, 399, 429, 435, 455, 465, 483, 555, 561, 595, 609, 615, 627, 645, 651, 663, 665, 705, 715, 741, 759, 777, 795, 861, 885, 903, 915, 1155, 1365, 1785, 1995, 2145, 2415, 2805, 3003, 3045, 3135, 3255, 3315, 3705, 3795, 3885, 15015
3^*	4^*	3, 15, 21, 33, 35, 39, 51, 55, 57, 69, 105, 165, 195, 231, 255, 273, 285, 1155
4	6	2, 3, 5, 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 30, 33, 34, 35, 38, 39, 42, 46, 66, 70, 78, 102, 105, 110, 114, 130, 138, 154, 165, 170, 174, 182, 186, 190, 210, 222, 246, 330, 390, 462, 510, 546, 570, 690, 714, 770, 798, 858, 870, 910, 930, 966, 1110, 2310, 2730, 3570, 3990, 4290, 4830
5	8	3, 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 30, 33, 34, 38, 42, 46, 66, 70, 78, 102, 105, 110, 114, 130, 138, 154, 170, 174, 182, 186, 190, 210, 222, 330, 390, 462, 510, 546, 570, 690, 714, 770, 798, 858, 870, 930, 966, 2310, 2730, 3570, 3990, 4290, 4830
6	10	2, 6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 30, 33, 34, 35, 38, 39, 42, 46, 66, 70, 78, 102, 105, 110, 114, 130, 138, 154, 165, 170, 174, 182, 186, 190, 195, 210, 222, 230, 238, 246, 258, 282, 330, 390, 462, 510, 546, 570, 690, 714, 770, 798, 858, 870, 910, 930, 966, 1110, 1122, 1218, 1230, 1254, 1290, 1302, 1410, 2310, 2730, 3570, 3990, 4290, 4830, 5610, 6006, 6090, 6270, 6510, 30030
7	12	6, 10, 30
8	14	6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 30, 34, 38, 42, 66, 70, 78, 102, 105, 110, 114, 130, 138, 154, 170, 174, 186, 210, 330, 390, 462, 510, 546, 570, 690, 714, 770, 798, 858, 870, 930, 966, 2310, 2730, 3570, 3990, 4290
9	16	6, 10, 14, 15, 22, 70, 30, 42, 66, 78, 102, 114, 210, 330, 390, 462, 510, 2310
10	18	6, 10, 14, 15, 30, 42, 66, 70, 78, 210, 330, 390

Anhang B

Symbolverzeichnis

(M,q), (V,q)	quadratische Räume (cf. 1.1.2)
$\{Mp_2(\mathbb{Z}),k,\rho\}$	Raum der fast holomorphen Modulformen zu ρ vom Gewicht k
$[Mp_2(\mathbb{Z}),k,\rho]$	Raum der holomorphen Modulformen zu ρ vom Gewicht k
$[Mp_2(\mathbb{Z}),k,\rho]_0$	Raum der Spitzenformen zu ρ vom Gewicht k
$a_{\beta\gamma}$	Koeffizient der Matrixdarstellung von $\rho_L(M,\varphi)$
$\alpha(M)$	$=\sum\beta_j$ mit den Eigenwerten $\mathbf{e}(\beta_j)$ von $M\in U(V)$ (cf. 1.2.23)
$B(F)$	Borcherdsprodukt zum Input $F\in\{Mp_2(\mathbb{Z}),1-\frac{n}{2},\rho_L\}$ (cf. 2.1.2)
c	Hecke-Größencharakter (cf. 5.2.12)
$\mathbb{C}[L'/L]$	Gruppenring der Diskriminantengruppe
χ_L	Dirichletcharakter, mit dem $\Gamma_0(N)$ via ρ_L^* auf $\mathfrak{e}_0$ wirkt (cf. 4.2.1)
χ_p	p-Komponente eines Dirichletcharakters (cf. 4.3.2)
$\det(L)$	Determinante eines Gitters
E_8	unimodulares gerades positiv definites Gitter der Dimension 8
$E(L,p)$	p-Exzess eines Gitters (cf. 1.1.35)
$E(u,v)$	Eichlertransformation (cf. 3.1.1)
$E_\beta(z)$	Eisensteinreihe zu $\beta\in L'$ mit $q(\beta)\in\mathbb{Z}$ (cf. 1.2.17)
$\mathbf{e}(z)$	$=e^{2\pi iz}$
$\mathfrak{e}_\gamma$	zu $\gamma\in L'/L$ korrespondierender Standardbasisvektor von $\mathbb{C}[L'/L]$
F^f	Symmetrisierung einer elliptischen Modulform (cf. 4.2.2)
$F_\mathfrak{v}$	$=f\circ\sigma_\mathfrak{v}$
f_γ	Komponentenfunktion einer vektorwertigen Modulform $F=(f_\gamma)_\gamma$
$f\|_kM(z)$	$=\det(M)^{\frac{k}{2}}j(M,z)^{-k}f(Mz)$ für alle $M\in Gl_2^+(\mathbb{R})$
$f\|_k'(M,\varphi)(z)$	$=\varphi(z)^{-2k}\rho_L(M,\varphi)^{-1}f(Mz)$ für alle $(M,\varphi)\in Mp_2(\mathbb{Z})$
$f\|_k^*(M,\varphi)(z)$	$=\varphi(z)^{-2k}\rho_L^*(M,\varphi)^{-1}f(Mz)$ für alle $(M,\varphi)\in Mp_2(\mathbb{Z})$
$\mathfrak{f}_c$	Führer eines Größencharakters
Γ_L	Kern des natürlichen Homomorphismus $O^+(L)\to\mathrm{Aut}(L'/L)$
γ_L	Testvektor eines Gitters (cf. 3.2.4)
H	hyperbolische Ebene (cf. 1.1.8)
$H(V_0)$	Heisenberggruppe (cf. 3.1.4)
$H(\gamma,m)$	Heegnerdivisor (cf. 1.3.22)
$\mathcal{H}_n$	orthogonale Halbebene (cf. 1.3.3)
$\hat{\mathcal{H}}_n$	Realisierung von $\mathcal{H}_n$ als Teilmenge von $P(V_\mathbb{C})$
$\tilde{\mathcal{H}}_n$	deren Urbild in $P(V_\mathbb{C})$ (cf. 1.3.4)
$\mathcal{H}_{n-1}(\mathfrak{v})$	Heegnerprimdivisor (cf. 1.3.21)

$J(g,\mathfrak{z})$	Automorphiefaktor auf $O^+(V) \times \tilde{\mathcal{H}}_n$ (cf. 1.3.6)
$j(g,z)$	kanonischer Automorphiefaktor auf $Sl_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{H}$
$J(V_0)$	Jacobigruppe (cf. 3.1.8)
ι, $\iota_{\mathfrak{v}}$	Bijektion $\hat{\mathcal{H}}_n \leftrightarrow \mathcal{H}_n$
K	imaginär-quadratischer Zahlkörper
$\mathscr{K}_L$	Kontrollraum eines Gitters (cf. 2.1.3)
L	Gitter; meist gerade der Signatur $(2,n)$
L'	zu L duales Gitter
L'/L	Diskriminantengruppe
$L_1 \oplus L_2$	orthogonale Summe zweier Gitter
$L \sim_p M$	p-adische Äquivalenz zwischen den Gittern L und M
$Mp_2(\mathbb{Z})$	metaplektische Gruppe (cf. 1.2.3)
N	Stufe eines Gitters (cf. 1.1.15)
$\mathcal{N}$	Nullquadrik
$\nu_p(a)$	gewöhnliche p-adische Bewertung einer ganzen Zahl
$O(V)$	orthogonale Gruppe
$O^+(V)$	Untergruppe von $O(V)$, die $\hat{\mathcal{H}}_n$ in sich überführt
$\mathcal{O}_K$	Ring der ganzen Zahlen in K
Φ_L	Einschränkung des Symmetrisierungsoperators auf den Raum $S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi)$ (cf. 4.3.5)
$\varphi_{K,c}$	CM-Form zu einem Größencharakter (cf. 5.2.14)
q	quadratische Form $q: M \to N$
q_A	der Matrix $A \in Gl_r(\mathbb{R})$ zugeordnete quadratische Form auf $\mathbb{R}^r$
$q_\beta(\gamma,n)$	Fourierkoeffizient der Eisensteinreihe $E_\beta(z)$ (cf. 1.2.19)
$\mathscr{R}_L$	Hindernisraum eines Gitters (cf. 2.1.3)
$\Re(z)$, $\Im(z)$	Real- und Imaginärteil
$r(N)$	Anzahl der verschiedenen Primteiler von N
ρ_L, ρ_L^*	Weildarstellung eines Gitters sowie deren duale Darstellung
S, T	Erzeuger der $Mp_2(\mathbb{Z})$ bzw. der $Sl_2(\mathbb{Z})$
$S_k^0(N,\chi)$	Raum der Neuformen (cf. 4.1.5)
$S_k^1(N,\chi)$	Raum der Altformen (cf. 4.1.5)
$S_k^{\epsilon_1\ldots\epsilon_r}(N,\chi)$	Vorzeichenraum (cf. 4.3.3)
$S_k^{CM}(N,\chi)$	Raum der CM-Formen (cf. 5.2.6)
$\mathcal{S}_L$	$= S_k^{CM}(N,\chi_L) \cap S_k^0(N,\chi_L)$
$\mathscr{S}_L$	Unterraum der Spitzenformen im Kontrollraum eines Gitters
σ, $\sigma_{\mathfrak{v}}$	Schnitt $\mathcal{H}_n \to \tilde{\mathcal{H}}_n$ (cf. 1.3.5)
$\sigma_r(m)$	Teilersumme r-ten Grades
$\vec{\Theta}_{e,m,q}$	Jacobische Thetareihe (cf. 3.1.16)
$V_{\mathbb{C}}$	Komplexifizierung des reellen Vektorraumes V
$V_{\mathbb{Q}}$	von in V enthaltenem Gitter erzeugter $\mathbb{Q}$-Vektorraum (cf. 1.1.4)
$\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$	Vektoren in V
$\mathcal{X}$	Element von V_0 bei Aufspaltung $L = H \oplus H \oplus L_0$
Z	1) Element von $\mathcal{H}_n$ 2) das Element $\left(\left(\begin{smallmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{smallmatrix}\right), i\right) \in Mp_2(\mathbb{Z})$
$\mathfrak{z}$	Element von $V_{\mathbb{C}}$
$[\mathfrak{z}]$	Element von $P(V_{\mathbb{C}})$
$\mathcal{Z}$	Element von $V_{0,\mathbb{C}}$ bei Aufspaltung $L = H \oplus H \oplus L_0$

Index

Literaturverzeichnis

[Ar] Artin, E.: Geometric Algebra
Interscience tracts in pure and applied mathematics 3
5. Auflage, Interscience publishers, New York 1966

[Bo1] Borcherds, R. E.: Automorphic forms with singularities on Grassmannians
Invent. Math. 132 (1998), 491-562

[Bo2] Borcherds, R. E.: The Gross-Kohnen-Zagier-theorem in higher dimensions
Duke Math. J. 97 (1999), 219-233

[Bo3] Borcherds, R. E.: Correction to "The Gross-Kohnen-Zagier-theorem in higher dimensions"
Duke Math. J. 105 (2000), 183-184

[Br1] Bruinier, J. H.: Borcherds products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors
Lecture Notes in Mathematics 1780
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (vrsl. 2002)

[Br2] Bruinier, J. H.: On the rank of Picard groups of modular varieties attached to orthogonal groups
Preprint, 2000 (http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bruinier/pic.dvi)
(erscheint in Compos. Math.)

[Br-Bu] Bruinier, J. H., Bundschuh, M.: On borcherds products associated with lattices of prime discriminant
Preprint, 2001 (http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~bruinier/prim.dvi)
(erscheint in Ramanujan J.)

[Br-Ku] Bruinier, J. H., Kuss, M.: Eisenstein series attached to lattices and modular forms on orthogonal groups
Manuscr. Math. 106 (2001), 443-459

[Bu] Bundschuh, M.: Über die Existenz von Modulformen zu orthogonalen Gruppen mit vorgegebenen Null- und Polstellen
Diplomarbeit, Heidelberg 1998

[Co-Oe] Cohen, H., Oesterlé, J.: Dimensions des espaces de formes modulaires
in: Modular Functions of One Variable VI
Lecture Notes in Mathematics 627
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1977

[Co-Sl] Conway, J. H., Sloane, N. J. A.: Sphere Packings, Lattices and Groups
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 290
Springer-Verlag, New York 1988

[Ei-Za] Eichler, M., Zagier, D.: The Theory of Jacobi Forms
Progress in Mathematics 55
Birkhäuser-Verlag, Boston 1985

[Fi] Fischer, J.: An Approach to the Selberg Trace Formula via the Selberg Zeta-Function
Lecture Notes in Mathematics 1253
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1987

[Fr1] Freitag, E.: Siegelsche Modulformen
Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 254
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1983

[Fr2] Freitag, E.: Some modular forms related to cubic surfaces
Preprint, 1999
(http://www.rzuser.uni-heidelberg.de/~t91/skripten/preprints/modcub.dvi)

[Fr3] Freitag, E.: Orthogonale Modulformen
Vorlesungsskript, Heidelberg 2000

[Fr-Bu] Freitag, E., Busam, R.: Funktionentheorie
2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1995

[Gr] Gritsenko, V.: Modular forms and moduli spaces of abelian and $K3$ surfaces
St. Petersbg. Math. J. 6 (1994), 1179-1208

[Ha-Wr] Hardy, G. H., Wright, E. M.: Einführung in die Zahlentheorie
Oldenbourg Verlag, München 1958

[He] Hecke, E.: Analytische Arithmetik der positiven quadratischen Formen
Mat. Fys. Medd. K. Dan. Vidensk. Selsk., XIII, 12, 1940 (ges. Werke, 789-918)

[Iwa] Iwaniec, H.: Topics in Classical Automorphic Forms
Graduate Studies in Mathematics 17
American Mathematical Society, Providence 1997

[Kna] Knapp, A. W.: Elliptic Curves
Mathematical Notes 40
Princeton University Press, Princeton 1992

[Kne] Kneser, M.: Quadratische Formen
Vorlesungsskript, korrigierter Nachdruck, Göttingen 1987

[Marg] Margulis, G. A.: Discrete Subgroups of Semisimple Lie Groups
Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3/17
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1991

[Mart] Martinet, J.: Les réseaux parfaits des espaces euclidiens
Masson, Paris 1996

[Me] Meyer, O.: Über die Satakekompaktifizierung arithmetischer Quotienten von beschränkten hermiteschen Bereichen des Typs IV_n
Diplomarbeit, Heidelberg 1998

[Mi] Miyake, T.: Modular Forms
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1989

[Ni] Nikulin, V. V.: Integral symmetric bilinear forms and some of their applications
Math. USSR Izvestija 14 (1980), 103-167

[Od] Oda, T.: On Modular Forms Associated with Indefinite Quadratic Forms of Signature $(2, n-2)$
Math. Ann. 231 (1977), 97-144

[On-Sk] Ono, K., Skinner, C.: Fourier coefficients of half-integral weight modular forms modulo l
Ann. Math. 147 (1998), 453-470

[Ri] Ribet, K. A.: Galois representations attached to eigenforms with nebentypus
in: Modular Functions of One Variable V
Lecture Notes in Mathematics 601
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1977

[Se1] Serre, J.-P.: Quelques applications du théorème de densité de chebotarev
Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci. 54 (1981), 323-401

[Se2] Serre, J.-P.: Sur la lacunarité des puissances de η
Glasg. Math. J. 27 (1985), 203-221

[Sh] Shintani, T.: On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight
Nagoya Math. J. 58 (1975), 83-126

[Si1] Siegel, C. L.: Über die analytische Theorie der quadratischen Formen
Ann. Math. 36 (1935), 527-606 (ges. Werke I, 326-405)

[Si2] Siegel, C. L.: Equivalence of quadratic forms
Am. J. Math. 63 (1941), 658-680 (ges. Werke II, 217-239)

[Si3] Siegel, C. L.: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie I
Math. Ann. 124 (1951), 17-54 (ges. Werke III, 105-142)

[Wa] Watson, G. L.: Integral quadratic forms
Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics 51
Nachdruck, Cambridge University Press, Cambridge 1970