INAUGURALDISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Gerhard Kulzinger
aus Heidelberg

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Januar 2002

Friedrich Hölderlin

Mnemosyne

Ein Zeichen sind wir, deutungslos
Schmerzlos sind wir und haben fast
Die Sprache in der Fremde verloren.
Wenn nemlich über Menschen
Ein Streit ist an dem Himmel und gewaltig
Die Monde gehn, so redet
Das Meer auch und Ströme müssen
Den Pfad sich suchen. Zweifellos
Ist aber Einer. Der
Kann täglich es ändern. Kaum bedarf er
Gesetz. Und es tönet das Blatt und Eichbäume wehn dann neben
Den Firnen. Denn nicht vermögen
Die Himmlischen alles. Nemlich es reichen
Die Sterblichen eh'an den Abgrund. Also wendet es sich, das Echo
Mit diesen. Lang ist
Die Zeit, es ereignet sich aber
Das Wahre.

Hochenergiestreuung im Nichtperturbativen Vakuum der Quantenchromodynamik

Gutachter: Prof. Dr. Hans Günter Dosch
Prof. Dr. Bogdan Povh

Zusammenfassung

Wir untersuchen Streuung in nichtperturbativer Quantenchromodynamik (QCD) für große invariante Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$. Unserer Analyse zugrunde liegt das Modell des Stochastischen Vakuums (MSV) von Dosch und Simonov und die nichtperturbative $s \to \infty$-asymptotische Formel Nachtmanns für die Streuung zweier Wegner-Wilson-Loops. Wir argumentieren, daß die Gültigkeit der Formel hin zu großen aber endlichen Werten von s erweitert werden kann dadurch, daß die ursprünglichen nahezu lichtartigen Loops *nicht* ersetzt werden durch ihre exakt lichtartigen Limites. Die T-Amplitude hängt daher ab von s über den kinematischen Faktor hinaus. Diese s-Abhängigkeit wird explizit berechnet. Wir führen abschließend durch die analytische Fortsetzung in Euklidische Raumzeit und machen auf diese Weise Hochenergiestreuung zugänglich Euklidischen Theorien wie QCD als Gittereichtheorie.

Auf Basis der $s \to \infty$-asymptotischen Formel berechnen wir ferner exklusive Photo- und Leptoproduktion von Vektormesonen am Proton: $\gamma^{(*)}p \to Vp$, – für $V \equiv \rho(770), \omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$ und $\rho(1450), \rho(1700)$. Wesentlich zugrunde liegt die zu verschwindenden Virtualitäten Q hin universalisierte Photon-Lichtkegelwellenfunktion der Lichtkegelstörungstheorie (LCPT) und entsprechend modellierte Wellenfunktionen für die Vektormesonen. Wir verifizieren den MSV-spezifischen Mechanismus der Ausbildung wechselwirkender gluonischer Strings zwischen den Quark-Konstitueneten.

High-energy scattering in the nonperturbative vacuum of Quantum Chromodynamics

Abstract

We consider scattering in nonperturbative Quantum Chromodynamics (QCD) for large invariant centre of mass energy $\sqrt{s}$. Our analysis is based upon the Stochastic Vacuum Model (SVM) of Dosch and Simonov and on the nonperturbative $s \to \infty$-asymptotic formula of Nachtmann for the scattering of two Wegner Wilson loops. We argue, that its validity can be expanded to large but finite values of s by *not* substituting the initial near light-like loops for their exact light-like limits. Thus, the T-amplitude depends on s beyond the kinematical factor. This s-dependence is explicitly calculated. We conclude performing the analytical continuation to Euclidean spacetime and in that way make accessible high-energy scattering to Euclidean theories such as QCD lattice gauge theory.

Based upon the $s \to \infty$-asymptotic formula, we further calculate exclusive photo- and leptoproduction of a vectormeson at the proton: $\gamma^{(*)}p \to Vp$, – for $V \equiv \rho(770), \omega(782), \phi(1020)$, $J/\psi(3097)$ und $\rho(1450), \rho(1700)$. Essential entities are the photon light-cone wave function of light-cone perturbation theory (LCPT) universalised to vanishing virtualities Q and wave functions for the vectormesons modelled accordingly. We verify the SVM-specific mechanism of formation of interacting gluonic strings between the quark constituents.

Notation

Griechische Indizes μ, ν, ρ, σ, ... beziehen sich auf die Raumzeit-Koordinaten, i.a. 0, 1, 2, 3.

Lateinische Indizes i, j, k, ... beziehen sich auf die raumartigen Koordinaten, i.a. 1, 2, 3.

Vektoren sind definiert als Spalten kontravarianter Komponenten.

Vektoren der Raumzeit sind bezeichnet mit dem Buchstaben an sich: x.

Karthesische Dreier-Vektoren sind bezeichnet durch einen Pfeil: $\vec{x}$.

Kartesische (Zweier-)Vektoren, in denen gestrichen sind die longitudinalen Komponenten (i.a. mit Indizes 0, 3), sind bezeichnet als transversal und notiert in geradem Fettdruck: $\mathbf{x}$.

Zeitartige Komponenten der Raumzeit gehen in die Signatur derer Metrik ein mit $+1$, raumartige Komponenten mit -1.

Dirac-Indizes werden i.a. nicht notiert, wenn doch durch griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$

Griechische Indizes α, β, γ, δ, ... bezeichnen i.a. die Matrixindizes einer nicht spezifizierten, beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}$ der Eichgruppe.

Lateinische Indizes a, b, c, d, ... nummerieren die Generatoren einer beliebigen Darstellung der Eichgruppe oder bezeichnen die Matrixindizes der adjungierten Darstellung $\mathfrak{A}$.

Lateinische Indizes m, n, ... bezeichnen die Matrixindizes der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$ der Eichgruppe.

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, wenn nicht ausdrücklich anders vereinbart.

Wir arbeiten in Einheiten, in denen das Plancksche Wirkungsquantum geteilt durch Zwei Pi und die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit identisch Eins sind: $\hbar \equiv c \equiv 1$. Es existiert nur eine Dimension, o.E.d.A. die der Energie, gemessen in GeV. Mit $\hbar = 6.582\,118\,89\,(26) \cdot 10^{-25}$ GeV s, $c = 299\,792\,458$ m s^{-1} und $\mathrm{e} = 1.602\,176\,462\,(63) \cdot 10^{-19}$ C gelten die Umrechnungsfaktoren: $(1\,\mathrm{GeV})/c^2 = 1.782\,661\,731\,(70) \cdot 10^{-27}$ kg, $(1\,\mathrm{GeV})^{-1}\hbar c = 0.197\,326\,960\,2\,(77)$ fm.

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung/Abstract
Notation

Einführung: Quantenchromodynamik **1**
Invarianzen 2
„Phänomene und Konzepte“ 6
Formale Darstellung 10
Ausblick 15

1 Stochastisches Vakuum **19**
1.1 Observable als Eichfeld-Funktionalintegrale 22
1.2 Mathematische Hilfsmittel 25
1.2.1 Manifest eichinvariante Funktionale durch Konnektoren 25
1.2.2 Nichtabelscher Stokes'scher Satz 28
1.2.3 Entwicklung in Kumulanten 30
1.3 Annahmen und Konstituierung des MSV 34

2 Analytische nahezu lichtartige T-Amplitude **43**
2.1 Nahezu versus exakt lichtartige Trajektorien 44
2.2 Kinematik 49
2.3 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Konstruktion 54
2.3.1 Hadronniveau I. Exposition 54
2.3.2 Partonniveau. Durchführung 56
2.3.3 Hadronniveau II. Conclusio 66
2.4 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Auswertung 72
2.4.1 Identifizierung von $\tilde{\chi}_{\imath\jmath} = (1-\varkappa)\,\tilde{\chi}^{NC}_{\imath\jmath} + \varkappa\,\tilde{\chi}^{C}_{\imath\jmath}$, $\imath,\jmath \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$ 73
2.4.2 Explizite Raumzeit-Parametrisierung von $\mathcal{S}_\imath \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath)$, $\imath = \mathfrak{p},\mathfrak{m}$ 76
2.4.3 Nicht-konfinierende Funktionen $\tilde{\chi}^{NC}_{\imath\jmath}$, $\imath,\jmath \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$ 80
2.4.4 Konfinierende Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{\imath\jmath}$, $\imath,\jmath \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$ 84
2.5 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Diskussion 88
2.6 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Analytizität 101

3 Leptoproduktion von $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$ **107**
3.1 Zugrundeliegendes Bild und Zusammenhang 108
3.2 Weiche Hochenergiestreuung im MSV 113
3.2.1 Transversale Konfiguration 114
3.2.2 Loop-Loop-Streuamplitude $\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mathcal{U}}$ 117
3.2.3 Hadron-Hadron-Streuamplitude $T^{(s,t)}_{hh}$ 124

3.3 Hadronische (Lichtkegel-)Wellenfunktionen 129
3.3.1 Lichtkegelwellenfunktion des Photons 130
3.3.2 Lichtkegelwellenfunktionen der $1S$-Vektormesonen 132
3.4 Numerische Analyse 137
3.4.1 Leptoproduktion von $\rho(770)$, $\omega(782)$ und $\phi(1020)$ 140
3.4.2 Photo- und Leptoproduktion von $J/\psi(3097)$ 145

4 Photo- und Leptoproduktion von $\rho(770)$, $\rho(1450)$ und $\rho(1700)$ 149
4.1 Universelle Photon-Lichtkegelwellenfunktion 150
4.1.1 Zusammenhang 150
4.1.2 Transversaler Harmonischer Oszillator. Konstruktion 152
4.2 System höherer $1^+(1^{--})$-/Rho-Anregungen 160
4.2.1 Zusammenhang 160
4.2.2 $1S$- und $2S$-Lichtkegelwellenfunktion. Konstruktion 164
4.2.3 $1S$- und $2S$-Parameter. Fixierung 166
4.2.4 Charakteristik der physikalischen ρ-, ρ', ρ'' Zustände 176
4.3 Diffraktive Streuquerschnitte: Numerische Analyse 178
4.3.1 Generelle Diskussion 180
4.3.2 Spezifische Diskussion 186

Resumée 199

A Algebra 207
A.1 Lorentz-Algebra 207
A.1.1 Generelle Konventionen und Definitionen 207
A.1.2 Lichtkegelkoordinaten 209
A.2 Dirac-Algebra 210
A.3 $su(N_c)$-Eichalgebra 212

B Kinematik für große s 221
B.1 Zusammenhang von s und ε_i für $i=1,1'$ 221
B.1.1 Funktion $s(\varepsilon_i)$ 221
B.1.2 Funktion $\varepsilon_i(s)$ 222
B.2 Entwicklung für große s 223
B.2.1 (Inverse) Epsilon ε_i, ε_i^{-1} bzw. Impulskomponenten P_i^+, P_i^- 223
B.2.2 Impulskomponenten P_i^0, P_i^3 225
B.2.3 Dreier-Impuls-Betrag $|\vec{P}_i|$ 227
B.2.4 Quadrat des invarianten Impulstransfers $-t$ 229

C Streuung der Zustände h^i 233
C.1 Skalarprodukt $\langle h^{i'}|h^i\rangle$ 233
C.2 Disconnected Terme: $\delta(i',i)$ als Integral $\int d_{i'i}$ 234
C.3 S-Matrixelement $\langle h^{2'}\, h^{1'}, \mathrm{in}|\, S\, |h^1\, h^2, \mathrm{in}\rangle$ 235

D Aktive Lorentz-Boosts 241
D.1 Lorentz-Boosts 241
D.2 Aktive versus passive Transformation 244
D.3 Streuung im Bild aktiver Lorentz-Boosts 245
D.4 Minkowskische Koordinaten: $\{e_{(\tilde{\mu})}, x^{\tilde{\mu}}\}$; – versus $\{e_{(\bar{\mu})}, x^{\bar{\mu}}\}$ und $\{e_{(\mu)}, x^{\mu}\}$ . . 249

D.5 Euklidische Koordinaten: $\{e_{\mathrm{E}(\tilde{\mu})}, x_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}}\}$; – versus $\{e_{\mathrm{E}(\mu)}, x_{\mathrm{E}}^{\mu}\}$ 255
D.5.1 Analytische Fortsetzung: $\{e_{\mathrm{E}(\mu)}, x_{\mathrm{E}}^{\mu}\}$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$ nach $\{e_{(\mu)}, x^{\mu}\}$, $\mu \in \{1,2,3,4\}$ 255
D.5.2 Aktive $O(4)$-Drehungen: $\{e_{\mathrm{E}(\tilde{\mu})}, x_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}}\}$ versus $\{e_{(\tilde{\mu})}, x^{\tilde{\mu}}\}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. 256
D.6 Kompendium 263
D.6.1 Wick-Drehung der Korrelationsfunktionen 263
D.6.2 Raumzeit-Parameter $\{z, \mathbf{k}\}$ der Lichtkegelwellenfunktionen unter speziellen orthochronen Lorentz-Transformationen 264

E Integration **269**
E.1 Integration auf (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten. 269
E.2 Integration der Funktionen $\tilde{\chi}^{C}\ \tilde{\chi}^{NC}$ 273
E.2.1 Integration der longitudinalen Parameter $u_{\mathfrak{p}}$, $u_{\mathfrak{m}}$: Funktional $I_L[F]$. 273
E.2.2 Integration bezüglich der transversalen Projektionen $S_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, $S_{\mathfrak{m}}^{\perp}$: Funktional $I_T[F]$ 275

F Korrelationsfunktionen **281**
F.1 $\tilde{D}_{\nu}(k^2, m^2), D_{\nu}(\xi^2, m^2)$ – „ν-verallgemeinerter“ Feynman-Propagator im verallgemeinerten Minkowski-Raum $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ 281
F.2 C- und NC-Korrelationsfunktionen 282
F.2.1 Zusammenhang $\tilde{D}_{C}(k^2), F^{C}(\xi^2) \leftrightarrow \tilde{D}_{\nu}(k^2, m^2), D_{\nu}(\xi^2, m^2)$ 282
F.2.2 Zusammenhang $\tilde{D}_{NC}(k^2), F^{NC}(\xi^2) \leftrightarrow \tilde{D}_{\nu}(k^2, m^2), D_{\nu}(\xi^2, m^2)$ 283
F.3 $D_{\nu}(\xi^2, m^2)$: explizite Darstellung in $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ 284
F.3.1 Vorbereitung 285
F.3.2 Durchführung 288
F.4 Parameter A_{ν}, λ_{ν}: Fixierung in $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ 292
F.4.1 $D \equiv D_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}$ – Kontrahierter Korrelations-Lorentztensor 292
F.4.2 Parameter A_{ν} 293
F.4.3 Parameter λ_{ν} 294
F.5 Conclusio: C- und NC-Korrelationsfunktionen – explizite Darstellung 296

G Lichtkegelwellenfunktionen **299**
G.1 Photon-Lichtkegelwellenfunktion $\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z, \mathbf{r})$ 299
G.2 Vektormeson-Lichtkegelwellenfunktion $\psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z, \mathbf{r})$ 302
G.2.1 $1S$-Vektormeson 303
G.2.2 $2S$-Vektormeson 306
G.3 Kompendium 312
G.3.1 Leptonische Zerfallsbreite $\Gamma_V^{l^+l^-}$ 312
G.3.2 Photoproduktion und l^+l^--Annihilation in $\pi^+\pi^-$, $2\pi^+2\pi^-$ 313
G.3.3 Mischungswinkel Θ, Kopplung f_{2S} 314

H $d\sigma_{\lambda\equiv L,T}/dt|_{Q^2}(\tau^2)$, $\rho(770)$-Produktion: Tabellen zu Abbildung 4.16 **317**

Literaturverzeichnis **323**

Danksagung

Abbildungsverzeichnis

1.1 Deformation der Kurve $\mathcal{C}$ des Wegner-Wilson-Loops zu der Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$, die infinitesimal plakettiert die Fläche $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$ mit $\partial\mathcal{S} \equiv \mathcal{C}$ 29
1.2 Korrelationstensor $\left(D_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}(x_1, x_2; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_1}, \mathcal{C}_{x_0x_2})\right)$ über $\mathcal{C}_{x_2x_1} \equiv \mathcal{C}_{x_0x_2}{}^{-1} \circ \mathcal{C}_{x_0x_1}$. 37

2.1 Streuung der Wegner-Wilson-Linien $V_+ \equiv \Phi(\mathcal{C}_+)$, $V_- \equiv \Phi(\mathcal{C}_-)$ 45
2.2 Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_+ \equiv \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\, \Phi(\partial\mathcal{S}_+)$, $W_- \equiv \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\, \Phi(\partial\mathcal{S}_-)$ . . . 48
2.3 Streukinematik: $h^1(P_1) + h^2(P_2) \to h^{1'}(P_{1'}) + h^{2'}(P_{2'})$ allgemein 50
2.4 Raumzeit-Darstellung der Pyramiden $P_{\mathfrak{p}}$, $P_{\mathfrak{m}}$ 76
2.5 Raumzeit-Parametrisierung der Pyramide $P_{\mathfrak{p}}$ 77
2.6 $\sqrt{s}$-Abhängigkeit der Komponenten $g_{\mathfrak{pp}}$, $g_{\mathfrak{pm}}$ des metrischen Tensors 95
2.7 $\sqrt{s}$-Abhängigkeit von $g_{\mathfrak{pp}}$ versus $\sqrt{s} \to \infty$-Asymptotik 98

3.1 Streukinematik: $\gamma^{(*)} + N \to V + N$ speziell 112
3.2 Transversale Konfiguration der Loop-Loop-Streuung durch $\mathbf{b}, \omega$ 115
3.3 Transversale Konfiguration der Loop-Loop-Streuung durch $\mathbf{b}', \omega'$ 117
3.4 Transversale Konfiguration der nichtlokalen Wechselwirkung des C-Terms . . 120
3.5 Wechselwirkung zweier Dipole, NC- und C-Term 122
3.6 Wechselwirkung zweier kollinearer Dipole, NC- und C-Term 123
3.7 Dipol-Proton-totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}(z, r^2)$ für $z \equiv 0$ vs. $1/2$ 128
3.8 Q^2-Abhängigkeit von $d\sigma_\lambda/dt|_{\tau^2 \equiv 0}$ für ρ-Produktion, $\lambda \equiv L, T$ 138
3.9 Verhältnis $d\sigma_\lambda/dt|_{\tau^2 \equiv 0}(r_{\mathrm{cut}})/d\sigma_\lambda/dt|_{\tau^2 \equiv 0}(\infty)$ für ρ-Produktion, $\lambda \equiv L, T$ 139
3.10 Skalierter integrierter ρ-Wirkungsquerschnitt $Q^4\,\sigma(Q^2)$ 140
3.11 Q^2-Abhängigkeit von $R_{LT} = \sigma_L/\sigma_T$ für ρ-Produktion 141
3.12 τ^2-Verhalten von $[\epsilon_{\mathrm{NMC}} d\sigma_L/dt + d\sigma_T/dt]$ für ρ-Produktion bei $Q^2 \equiv 6$ GeV^2 . . . 142
3.13 τ^2-Verhalten von $d\sigma_\lambda/dt$ für ρ-Produktion bei $Q^2 \equiv 2$, 10 GeV^2, $\lambda \equiv L, T$ 143
3.14 Skalierter integrierter ϕ-Wirkungsquerschnitt $Q^4\,\sigma(Q^2)$ 145
3.15 Skalierter integrierter J/ψ-Wirkungsquerschnitt $[1 + Q^2/M^2_{J/\psi}]^2\,\sigma_{\lambda \equiv L,T}(Q^2)$ . . . 146
3.16 τ^2-Verhalten von $d\sigma_\lambda/dt$ für J/ψ-Produktion bei $Q^2 \equiv 0$, 10 GeV^2, $\lambda \equiv L, T$ . . . 147

4.1 Ref. [66]: Effektive Quarkmasse $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$ für $f \equiv up/down$ und $strange$ . . . 157
4.2 Ref. [66]: Strukturfunktion $F_2(Q^2)$ für $\sqrt{s} = 20$ GeV 159
4.3 Massespektrum für Photoproduktion von $\pi^+\pi^-$ elastisch am Proton 160
4.4 Massespektrum für e^+e^--Annihilation in $\pi^+\pi^-$ 161
4.5 Quarkmodell-Kopplungen f_V für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$ als reine $1S$-,$2S$-,$2D$-Wellen . . . 163
4.6 $1S$-Parameter $\omega_{1S,T}(Q^2)$, $\mathcal{N}_{1S,T}(Q^2)$, transversal 168
4.7 Parameter $\Delta^{\mathrm{a.o.}}(Q^2)$, $\Delta(Q^2)$, approximativ und exakt orthogonal 170
4.8 Q^2-Verhalten von $f_{2S,\lambda}$, approximativ und exakt orthogonal 171
4.9 $2S$-Parameter $\omega_{2S,L}(Q^2)$, $\mathcal{N}_{2S,L}(Q^2)$, $A_L(Q^2)$, longitudinal 172

4.10 $2S$-Parameter $\omega_{2S,T}(Q^2)$, $\mathcal{N}_{2S,T}(Q^2)$, $A_T(Q^2)$, transversal 173
4.11 Dipol-Proton-totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\ell p}^{\text{tot}}|_{\varkappa}(z{\equiv}1/2,\, r)$, $\varkappa{\equiv}0$ vs. 0.74 . . 181
4.12 Effektiver Überlapp $[r\,\psi_{2S}^{\dagger}{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](r)$, $\lambda{\equiv}L,T$, für $Q^2{\equiv}0,1,2,10,20\,\text{GeV}^2$
& Dipol-Proton-Querschnitt $\sigma_{\ell p}^{\text{tot}}|_{\varkappa}(z{\equiv}1/2,\, r)$, $\varkappa{\equiv}0$ vs. 0.74 182
4.13 Verhältnis $\sigma_{V,\lambda}(r_{\text{cut}})/\sigma_{V,\lambda}(\infty)$ für, $V{\equiv}1S,2S$-Produktion, $\lambda{\equiv}L,T$ 184
4.14 Integrierte Wirkungsquerschnitte $\sigma_{V,\lambda}(Q^2)$ für $V{\equiv}\rho(770),2S$, $\lambda{\equiv}L,T$ 187
4.15 Q^2-Abhängigkeit von $R_{V,LT}=\sigma_{V,L}/\sigma_{V,T}$ für Produktion von $V{\equiv}\rho(770),2S$ . . 191
4.16 $d\sigma_{V,\lambda}/dt|_{Q^2}(\tau^2)$, $V{\equiv}\rho(770),2S$, $\lambda{\equiv}L,T$, für $Q^2{\equiv}0$, 0.25, 2, 10, 20 GeV^2 . . . 193
4.17 Massespektrum für e^+e^--Annihilation in $2\pi^+2\pi^-$ 195
4.18 Massespektrum für Photoproduktion von $2\pi^+2\pi^-$ elastisch am Proton 196
4.19 Verhältnis $R_\pi(Q^2)$: $2\pi^+2\pi^-$-Photoproduktion via ρ',ρ'' zu $\pi^+\pi^-$ via ρ . . . 197

D.1 Minkowski-Diagramm: Lorentz-Boost 242
D.2 Minkowski-Diagramm: Weltlinien unter aktiven Lorentz-Boosts 246
D.3 Euklidische Raumzeit-Diagramm: $O(4)$-Drehung 257
D.4 Wick-Drehung der Koorelationsfunktionen in komplexer k^0-Ebene 263

E.1 Direktes Produkt $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}\big|_I \otimes \mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}\big|_J$ der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}\big|_I$ und $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}\big|_J$ 278

Tabellenverzeichnis

2.1 Parameter des asymptotischen Zusammenhangs $g_{\mathrm{pp}}(s)/g_{+-} = \alpha \cdot s^{-(1+\alpha')}$ . . . 98

3.1 $1S$-/Grundzustand-Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$: Charakteristik und Parameter . . . 135

4.1 $1S$- und $2S$-Parameter für $Q^2 \equiv 0$, $m_{\mathrm{eff}}(0) \equiv 0.220$ GeV . . . 167
4.2 Charakteristik der Vektormesonen $\rho(770)$, $\rho(1450)$ und $\rho(1700)$ . . . 177
4.3 Leptoproduktion, $0 < Q^2 < 20$ GeV^2, von $\rho(770)$: Theorie vs. Experiment . . . 189
4.4 Photoproduktion von $\rho(770)$ – und $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$: Theorie vs. Experiment . . . 190
4.5 $1S$-/Grundzustand-Vektormesonen: Parameter für $Q^2 \equiv 0$ . . . 190

G.1 Q^2-Abhängigkeit von $\omega_{1S,T}$, Δ – und resultierende $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ . . . 311
G.2 Normierungsparameter $c_{V,f}$ der Breit-Wigner-Distributionen . . . 314

H.1 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv T$, transversal, $Q^2 \equiv 0$ . . . 317
H.2 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv L$, longitudinal, $Q^2 \equiv 0.25$ GeV . . . 318
H.3 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv T$, transversal, $Q^2 \equiv 0.25$ GeV^2 . . . 318
H.4 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv L$, longitudinal, $Q^2 \equiv 2$ GeV . . . 319
H.5 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv T$, transversal, $Q^2 \equiv 2$ GeV^2 . . . 319
H.6 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv L$, longitudinal, $Q^2 \equiv 10$ GeV . . . 320
H.7 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv T$, transversal, $Q^2 \equiv 10$ GeV^2 . . . 320
H.8 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv L$, longitudinal, $Q^2 \equiv 20$ GeV . . . 321
H.9 $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für $\rho(770)$: $\lambda \equiv T$, transversal, $Q^2 \equiv 20$ GeV^2 . . . 321

Einführung: Quantenchromodynamik

Nach heutigem Verständnis der Physik gibt es vier fundamentale Wechselwirkungen, über die Materie miteinander in Beziehung tritt. Grundlegendes Verständnis dieser Wechselwirkungen auf Basis fundamentaler Prinzipe impliziert notwendig ihr Verständnis auf Quantenniveau: auf Niveau ihrer fundamentalen Elementarteilchen. Mit dem *Standardmodell der Elementarteilchenphysik* (SM) verfügt die Physik über eine Theorie in diesem Sinne, die alle beobachteten Phänomene – nicht eingeschlossen die Gravitationswechselwirkung[0.1] – in beeindruckender Weise beschreibt. Wir verweisen allgemein auf Ref. [147] und wenden uns unmittelbar dem Sektor des SM zu, auf den im wesentlichen sich unsere Arbeit bezieht: dem Sektor der Starken Wechselwirkung, der Quantenchromodynamik (QCD).

Die QCD des SM[0.2] ist mathematisch in das Konzept der *Lagrange'schen Quantenfeldtheorie* gefaßt, Refn. [38, 114, 123, 147, 224, 240]. In diesem Rahmen bedeutet das zugrundeliegende Bild von *Wechselwirkung vermittels des Austauschs von Teilchen* die Kopplung von Quantenfeldern untereinander und gegebenenfalls an sich selbst. Eine renormierbare Quantenfeldtheorie ist – bei Angabe eines Regularisierungs- und Renormierungsschemas und von Zahlenwerten für dessen Parameter – vollständig bestimmt durch ihr Wirkungs-Funktional, das gegeben ist als das $d\equiv 4$-dimensionale Raumzeit-Integral ihrer Lagrangedichte $\mathfrak{L}(x)$, die Funktional ist der fundamentalen Quantenfelder der Theorie. Die Lagrangedichte ist allgemein bereits dadurch wesentlich in ihrer Struktur eingeschränkt, daß für $dx\,\mathfrak{L}(x)$ Symmetrien, cum grano salis *Invarianzen* gefordert werden, die in der Natur realisierten „Symmetrien" entsprechen. Zusätzlich wird gefordert vor dem Hintergrund der Newtonschen Axiome, daß nicht höhere als zweite Ableitungen auftreten. Das Prinzip, ausgehend von fundamentalen „Symmetrien" zu grundlegenden Theorien zu gelangen, ist wichtiges Konzept der Elementarteilchenphysik. Wir tragen seiner Bedeutung im besonderen für unsere Arbeit Rechnung und gehen zunächst ein auf die Invarianzen, die der Lagrangedichte der QCD inhärent sind.

[0.1] Konsequenz der kleinen Newtonschen Gravitationskonstanten $G = 6.707 \cdot 10^{-39}\,\hbar c(\mathrm{GeV}/c^2)^{-2}$ ist die schwache Kopplung des Gravitons. Quanteneffekte manifestieren sich signifikant auf der Skala der Planck-Masse $m_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{\hbar c/G} = 1.221 \cdot 10^{19}\ \mathrm{GeV}/c^2$, die Strukturen der Planck-Länge $l_{\mathrm{Pl}} = \hbar c/m_{\mathrm{Pl}}c^2 = 1.616 \cdot 10^{-20}$ fm auflöst, das heißt siebzehn Größenordnungen (!) entfernt von den heute im Beschleuniger-Labor zugänglichen Skalen.

[0.2] Wir gehen nicht auf supersymmetrische QCD und Formulierungen im Rahmen von (Super)Stringtheorien ein [98]. Beide Konzepte zusammen sind hochaktuell: Arbeiten von Seiberg und Witten haben eine Dualität zwischen stark und schwach gekoppeltem Regime von ($\mathcal{N}$=2)-supersymmetrischen (oder superkonformen) $SU(N)$-invarianten Eichtheorien aufgezeigt [186, 187], die auch für ($\mathcal{N}$=1)-supersymmetrische und SM-QCD bedeutende Konsequenzen hat [194]; vgl. auch die Refn. [3–6, 136]. Nichtperturbative Beiträge sind also in der dualen Theorie perturbativ zugänglich. Nach einer Vermutung von Maldacena [138] existiert eine Dualität zwischen der *large-N*-Entwicklung einer konformen Quantenfeldtheorie in d Dimensionen und der perturbativen Entwicklung einer *M(atrix)-Stringtheorie* im Hintergrund einer $AdS_{d+1} \otimes M$-Raumzeit, wobei AdS_{d+1} der $(d+1)$-dimensionale Anti-deSitter- und M ein beliebiger kompakter Raum sind; vgl. auch die Refn. [102, 103]. Auf der Basis einer Dualität in diesem Sinne zwischen *superkonformer* $SU(N)$-invarianter nichtabelscher Eichtheorie in 4 Dimensionen – dies die Klasse von Theorien eines supersymmetrisch erweiterten SM – und einer Typ-IIB-Stringtheorie in einem $AdS_5 \otimes S^5$-Hintergrund wäre in natürlicher Weise die Vereinheitlichung mit der letzten Wechselwirkung im Rahmen einer Superstring-Gravitation greifbar.

Invarianzen

Invarianz unter den diskreten Transformationen $\mathcal{C}$, $\mathcal{P}$ und $\mathcal{T}$, einzeln[0.3] entspricht den drei separaten Forderungen: daß ein physikalischer Prozeß prinzipiell genauso real sein sollte bei Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen (Ladungskonjugationsinvarianz, $\mathcal{C}$), daß es prinzipiell nicht entscheidbar sein sollte, ob die Welt, die man „direkt", oder ob die, die man in einem Spiegel sieht, die reale ist (Paritätsinvarianz, $\mathcal{P}$) und daß auf *mikroskopischer*, das heißt der Ebene von Elementarteilchen, ebenso aus prinzipiellen Gründen, nicht entscheidbar sein sollte, ob ein Prozeß „vorwärts" oder „rückwärts" in der Zeit abläuft (Zeitumkehrinvarianz, $\mathcal{T}$). Es sei angemerkt, daß hierzu in Kontrast die Schwache Wechselwirkung $\mathcal{P}$ wie auch die Kombination $\mathcal{CP}$ verletzt.

Poincaréinvarianz bedeutet im Sinne der Speziellen Relativitätstheorie (SRT), daß die mathematische Struktur der Gleichungen die gleiche sein sollte, ob physikalische Phänomene von einem „ruhenden" Beobachter beschrieben werden oder von einem Beobachter, der sich relativ zum ersten gleichförmig bewegt. Die Feldgleichungen nach Euler-Lagrange sollten daher Tensorgleichungen sein bezüglich einer Transformation zwischen solchen *nichtbeschleunigten*, oder *Inertialsystemen* und in definierter Weise – *kovariant* – transformieren.

Formal gesprochen, leiten sich diese Transformationen her von der Poincarégruppe ϱ, der direkten Summe der Translationen in der Raumzeit und der Gruppe der Lorentztransformationen $\mathcal{L}$. Kovarianz oder Tensorverhalten der Gleichungen heißt genau zu fordern, daß die Lagrangedichte zum einen nicht explizit vom Weltpunkt x abhängt und zum anderen sich wie ein Skalar verhält unter Transformationen der speziellen orthochronen Lorentzgruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$, das ist die Eins-Zusammengangskomponente der Lorentzgruppe. Sei verwiesen auf

[0.3] Invarianz bezüglich der kombinierten $\mathcal{CPT}$-Transformation folgt bereits aus sehr allgemeinen Prinzipen: hinreichend sind schon die Wightman-Axiome, die Forderungen der Art stellen wie Kausalität, oder daß der Impulsoperator seine Eigenwerte auf dem Vorwärtslichtkegel annimmt. Zu diesen Axiomen wie auch zum axiomatischen Zugang zu Quantenfeldtheorie im allgemeinen sei verwiesen auf die Refn. [29, 203].
Zum Kontext: Seit den fünfziger, spätestens in den sechziger Jahren wurde das Konzept der Quantenfeldtheorie auf der Basis einer fundamentalen mikroskopischen Lagrangedichte immer mehr zwiespältig, ja als das falsche Konzept angesehen. Ursache war zum einen das bekannte *Zero charge*-Problem der Quantenelektrodynamik (QED), vgl. Ref. [130], das sich zwar erst bei extrem hohen Energien zeigt und somit als *akademisch* abgetan werden konnte, aber nichts desto trotz eine prinzipielle Inkonsistenz der Theorie aufzeigt (Landau hat dies 1955 mit der Bemerkung konstatiert, „weak coupling electrodynamics is a theory, which is, fundamentally, logically incomplete", siehe Ref. [131]). Im Falle der Starken Wechselwirkung kann dieses Problem nicht mehr ignoriert werden. Zum anderen und noch schwererwiegend war die tiefe Skepsis gegenüber dem Verfahren der Renormierung, wie sie seit den ersten Ansätzen durch Dirac – schon von ihm selbst (vgl. Ref. [185]) wie auch von Wigner als dem zweiten Wegbereiter der Lagrange'schen Quantenfeldtheorie – allgemein empfunden und immer wieder ausgedrückt wurde: Renormierung – ein mathematischer Trick, ihre physikalische Bedeutung nicht wirklich verstanden. Diese Skepsis blieb bestehen trotz des Erfolges von Renormierung in der QED und wurde geteilt selbst von deren Begründern. So erklärte Feynman 1961 lokale Felder, da nicht direkt observabel, für bedeutungslos: „I still hold to this belief and do not subscribe to the philosophy of renormalization", siehe Ref. [80]. An die Stelle einer Lagrangedichte in Feldern fundamentaler Konstituenten wurden in der *axiomatischen Quantenfeldtheorie* die observablen Elemente der $S(treu)$-Matrix gesetzt, auf der Grundlage derer und unter der Annahme allgemeiner Prinzipe wie Kausalität, Unitarität und Analytizität – aber unter Aufgabe des „unphysikalischen" Anspruchs, die mikroskopische Dynamik verstehen zu wollen – man glaubte, quasi in einem *Bootstrap*-Verfahren zu einer eindeutigen Theorie zu gelangen. Heute ist bekannt, daß es unendlich viele solcher konsistenten S-Matrix-Theorien gibt: jede nichtabelsche Eichtheorie bezüglich einer beliebigen halbeinfachen Liegruppe (*Yang-Mills-Theorie* nach Ref. [237]), mit beliebig vielen Multipletts N_{F} von Fermionen, solange sie sich noch UV-asymptotisch wie eine freie Theorie verhält (d.h. $N_{\mathrm{F}} \leq 16$ für das Beispiel von $SU(N)$-Invarianz). Dies ist Konsequenz der Beweise von zum einen ihrer *Renormierbarkeit* durch 't Hooft 1971 und zum anderen ihrer *Asymptotischen Freiheit* durch Gross, Wilczek 1973, vgl. die Refn. [204, 205] respektive [100]. Beides sind Meilensteine der Elementarteilchenphysik, auch insofern als sie *konstruktiv* zur Lagrange'schen Formulierung zurückgeführt haben. Vgl. die Refn. [104, 212, 213].

Ref. [147], bzgl. tiefergehender Fragen auf die Refn. [29, 188].

Eichinvarianz bedeutet, daß die observablen Aussagen einer Quantenfeldtheorie dieselben bleiben, wenn ihre Lagrange'schen Felder einer *Eichtransformation* unterworfen werden. Dieses Prinzip leitet sich letztlich aus folgender Überlegung her: Da die quantentheoretische (Materie-)Wellenfunktion $\phi(x) \in \mathbb{C}$ zu interpretieren ist als *Amplitude* einer Wahrscheinlichkeitsdichte, beschreibt sie noch dieselbe Physik nach einer beliebigen Phasenänderung und ist in diesem Sinne nur bestimmt bis auf Transformationen unter einer unitären Matrix, das heißt einer Matrix $U \in U(1)$. Analog sollte ein Spinorfeld $\psi(x)$ in der fundamentalen Darstellung der speziellen unitären Gruppe $SU(N)$ – wie es in einer realistischen Quantenfeldtheorie Materie beschreibt – nur bis auf eine Transformation unter einer Matrix $U \in SU(N)$ festgelegt sein. Mit anderen Worten ist eine Klasse $[\psi]$ *global-*$SU(N)$-äquivalenter Spinorfelder definiert durch die Transformation $\psi(x) \to U\psi(x)$, die bezeichnet wird als *globale Eichtransformation* bezüglich der *Eich-* oder *Strukturgruppe* $\mathfrak{G} = SU(N)$. *Global* deshalb, weil die Matrix U nicht vom Weltpunkt x abhängt.

Zugrundeliegend dem Bild von Wechselwirkung vermittels Teilchenaustausch sind andererseits genau die Forderungen von *Lokalität* und *Kausalität*. Lokalität heißt, Felder koppeln punktförmig aneinander. Kausalität im Sinne der SRT heißt, daß Ereignisse an zwei Weltpunkten nur dann in einen kausalen Zusammenhang gebracht werden können, wenn es eine zeitartige Trajektorie gibt, die diese verbindet.[0.4] In conclusio: Austauschteilchen propagieren vom einen zum anderen *Wechselwirkungspunkt* und benötigen dazu *eine von Null verschiedene Zeit*. Fernwechselwirkung existiert nicht.

Mit diesem Prinzip in Widerspruch steht, daß bei einer globalen Eichtransformation an beliebig entfernten Weltpunkten unter der gleichen, auf der Raumzeit konstanten Matrix U, also *instantan* transformiert wird. Auf diesen Fernparallelismus hat als erster Weyl kritisch hingewiesen. Seine Lösung ist genau das Konzept der *(lokalen) Eichtheorie*; siehe den Übersichtsartikel von Straumann [202] und die Originalrefn. [225–228].

Wird nicht *globale*, sondern stärker *lokale* Eichinvarianz gefordert, das heißt die Transformationsmatrix darf von Weltpunkt zu Weltpunkt variieren, also $U \to U(x)$, die $\in SU(N)$ für jedes x (mathematisch: $[\psi]$ ist die Klasse *lokal-*$SU(N)$-äquivalenter Spinorfelder), so impliziert dies zwangsläufig die Existenz eines Felds $A(x)$ des *Tangentialfaserbündels* – das also für jeden Weltpunkt x der Raumzeit-Mannigfaltigkeit Element der in x angehefteten Tangentialfaser der Gruppe $SU(N)$ ist, das heißt eines in x angebrachten isomorphen Bildes der Liealgebra $su(N)$.[0.5] Das Feld $A(x)$ wird als *Eichfeld* bezeichnet und beschreibt physikalisch genau das Austauschteilchen, das die *Eichwechselwirkung* vermittelt.

Weyls Konzept der Eichtheorie entwickelt sich weitgehend aus infinitesimalgeometrischen Überlegungen. Wir wollen einen fundierten Abriß in Hinblick auf Eichtheorien in der Physik geben. Wir führen ein in die Begriffe der zugrundeliegenden Mathematik, der *Differential-*

[0.4] Dies ist letztlich Konsequenz der pseudo-Riemannschen Signatur der Minkowski-Raumzeit, die genau zu Begriffen führt wie *Zeitartigkeit*, *Vorwärtslichtkegel* etc. Auf Basis dieser Raumzeit impliziert die Forderung von Invarianz unter speziell-relativistischen Koordinatentransformationen zunächst die Existenz einer Geschwindigkeit c, die *fundamental* ist in dem Sinne, daß sie invariant ist unter diesen Transformationen, das heißt in einem beliebigen Inertialsystem dieselbe ist. Dies wiederum impliziert, daß *kausal* nicht schneller Einfluß genommen werden kann als mit c. Physikalisch ist c zu identifizieren mit der Vakuumlichtgeschwindigkeit. Wir verweisen auf Ref. [188].

[0.5] Wir beschränken uns auch weiterhin auf $\mathfrak{G} = SU(N)$ als prominenteste Klasse von Transformationsgruppen insofern, als sie dem SM zugrunde liegt. Wir merken aber an, daß wesentlich zur Eichung einer Quantenfeldtheorie mit einer Gruppe $\mathfrak{G}$ die Bijektivität der Exponentialabbildung ist, die das Feld $A(x)$ des Tangentialfaserbündels in die Gruppe selbst abbildet; diese Eigenschaft ist schon gegeben, wenn $\mathfrak{G}$ eine zusammenhängende kompakte Liegruppe ist.

geometrie auf Liealgebren. Vgl. die Refn. [116, 189] bzgl. des Kalküls alternierender Differentialformen und Ref. [189] Kap. 11, und die Refn. [19, 117] bzgl. der Anwendung auf Lie-Strukturen (die Begriffe *Fasermetrik*, *G-Struktur*).

Sei M eine Mannigfaltigkeit und sei an jedem Punkt $x \in M$ eine „Kopie“ $\mathbb{V}_x$ (d.i. ein isomorphes Bild) irgendeines fest vorgegebenen Vektorraums $\mathbb{V}$ angebracht. Ein derartiges Gebilde heißt ein *Vektor(raum)bündel* über der Basis M mit Standardfaser $\mathbb{V}$, symbolisch $E(M, \mathbb{V})$; die Vektorräume $\mathbb{V}_x$ heißen seine *Fasern*. Die Verallgemeinerung des Tangentialvektorfelds in diesem Rahmen ist der Begriff des *Schnittes* eines Bündels: Ein Schnitt λ ordnet jedem Punkt $x \in M$ einen Vektor $\lambda(x) \in \mathbb{V}_x$ aus der Faser über x zu. Spezialfälle sind das *Tangentialbündel* $T(M)$ mit $\mathbb{V}_x := T_x$, das *Kotangentialbündel*[0.6] $T^*(M)$ mit $\mathbb{V}_x := T_x^*$ und allgemeiner *Tensorbündel* ${T_b}^a(M)$ mit $\mathbb{V}_x := T_x \otimes \ldots \otimes T_x^* \otimes \ldots$ Analog werden mit einem gegebenen Vektorbündel $E(M, \mathbb{V})$ weitere Bündel $E^*(M, \mathbb{V}^*)$ und ${E_b}^a(M, {\mathbb{V}_b}^a)$ assoziiert.

Sei $\{\partial_\mu\}$ eine holonome[0.7] Basis des Tangentialbündels $T(M)$ und sei $\{dx^\mu\}$ die (dann ebenfalls holonome) Kobasis, das heißt die dazu duale Basis des assoziierten Kobündels $T^*(M)$; es gilt also $dx^\mu(\partial_\nu) = {\delta^\mu}_\nu$. Die Komponentenzerlegung einer beliebigen p-Form – d.i. ein *Ko(tangential)tensorfeld* $\in \Lambda^p(T_x^*)\ \forall x$, wo Λ die *äußere* (oder Graßmann-) *Algebra* ist – lautet dann $a(x) = a_{\mu_1 \ldots \mu_p}(x)\, dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p}$.

Mit diesen Begriffen setzen wir an, wo die Überlegungen Weyls ihren Ausgangspunkt nehmen, nämlich bei der Feststellung der Inkommensurabilität von Elementen aus Fasern, die an verschiedenen Punkten x der Mannigfaltigkeit M (hier: an verschiedenen Weltpunkten der speziell-relativistischen Minkowski-Raumzeit) angeheftet sind:

Formal ist das Eichfeld $A(x)$, in o.g. Basis $A(x) = A_\mu(x) dx^\mu$, eine $E(M, \mathbb{V})$-wertige 1-Form, wo $\mathbb{V}$ ein Darstellungsraum der Eichgruppe $\mathfrak{G}$ ist (hier: der Vektorraum der adjungierten Darstellung der $SU(N)$), das heißt für jedes $x \in M$ ist es ein Element aus $\mathbb{V}_x \otimes T_x^*(M)$: Element der *an x angehefteten Vektorfaser*, – und daher *Menge von Elementen verschiedener Räume*, die insofern *inkommensurabel*, das heißt nicht miteinander vergleichbar sind.

Kommensurabilität kann definiert werden nur für Vektoren A derselben Faser (allgemein: für Tensoren derselben Tensorfaser). Um Vektoren vergleichen zu können, die zu Fasern zweier infinitesimal benachbarter Punkte x und $x + dx$ gehören, bedarf es der Definition einer *Übertragung* (auch bezeichnet als: *Zusammenhang, Konnexion*). Dies ist eine Vorschrift, wie sich ein Vektor der Faser über x in die Faser über $x + dx$ überträgt. Dabei wird per definitionem die „Richtung“ von A nicht geändert.

Äquivalent zur Definition einer bezüglich des Vektorbündels $E(M, \mathbb{V})$ *affinen torsionsfreien Übertragung* von beliebigen $E(M, \mathbb{V})$-wertigen p-Formen (insbes. der 1-Form A) – dies ist eine Übertragung in obigem Sinne, die *linear* in der „Übertragungsstrecke“ ist, und für das Tangentialfaserbündel $T(M)$ eine *holonome* Basis besitzt – ist die Definition einer *kovarianten Ableitung*, formal: die Definition einer *äußeren kovarianten Ableitung $D\wedge$ von $E(M, \mathbb{V})$-wertigen p-Formen.* Da Vektorbündel-wertige p-Formen jedem Punkt $x \in M$ ein Element aus $\mathbb{V}_x \otimes \Lambda^p(T_x^*)$ zuordnen, sind sie Summen von Produkten $\lambda \otimes \alpha$, wo λ ein Schnitt des Bündels $E(M, \mathbb{V})$ und α eine gewöhnliche p-Form ist.

Es genügt dabei, die Operation $D\wedge$ für solche Produkte $\lambda \otimes \alpha$ als $E(M, \mathbb{V})$-wertige $(p+1)$-Form zu definieren, und Additivität zu fordern. Man definiert also eine Leibniz-Regel $D \wedge (\lambda \otimes \alpha) := (D\lambda) \wedge \alpha + \lambda \otimes d \wedge \alpha$, wobei D entweder auf den Schnitt λ oder auf die gewöhnliche p-Form α wirkt. Für die p-Form wird in natürlicher Weise $D \wedge \alpha := d \wedge \alpha$ gesetzt (d der gewöhnliche Differentialoperator für p-Formen; in o.g. Basis: $d \equiv dx^\mu \partial_\mu$).

[0.6] Die linearen Funktionale über $\mathbb{V}$ bilden den zu $\mathbb{V}$ *dualen Vektorraum* $\mathbb{V}^*$, d.h. für $a \in \mathbb{V}^*$, $u, v \in \mathbb{V}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $a(v) =$ reelle Zahl (Skalarprodukt von a und v) und $a(\alpha u + \beta v) = \alpha a(u) + \beta a(v)$.

[0.7] Eine Basis eines Tangentialraumes $T_x(M)$ heißt *holonom*, falls (lokal) Basisvektoren ∂_μ gefunden werden können, die Tangentialvektoren sind an die Koordinatenlinien eines geeigneten Koordinatensystems.

Eine kovariante Differentiation D in einem Vektorbündel $E(M,\mathbb{V})$ ist andererseits formal eine Vorschrift, die jedem Tangentialvektorfeld u und jedem Schnitt λ des Bündels einen Schnitt $D_u\lambda$ zuordnet, das heißt seine kovariante Ableitung nach u. Das *kovariante* (oder: *absolute*) Differential $D\lambda$ wird daher als $E(M,\mathbb{V})$-*wertige 1-Form* definiert, wobei $(D\lambda)(u)$ für jedes Vektorfeld u der Schnitt $(D\lambda)(u) := D_u\lambda$ ist. Explizit ist dieses D – und damit die Übertragung – definiert durch seine Wirkung auf eine *Schnittbasis* $\{b_I\}$, wobei I eine Indexmenge von der Dimension der Faser $\mathbb{V}$ ist, das heißt, über die Gleichung $Db_I = \mathrm{i}\,gA^J{}_I \otimes b_J$, durch die Matrix $(A^J{}_I)$ von 1-Formen. Dies ist die *Übertragungsmatrix*, g wird als *Eichkopplung* bezeichnet. *Kovarianz* ist dabei garantiert durch definiertes Verhalten bei Eichtransformationen, das heißt bei einem Basiswechsel $\{b_I \to U^J{}_I b_J\}$.

Ohne neue Strukturen einführen zu müssen, kann diese Operation von D auf die assoziierten Ko- und Tensorbündel $E^*(M,\mathbb{V}^*)$ und $E_b{}^a(M,\mathbb{V}_b{}^a)$ ausgedehnt werden, worauf wir aber nicht weiter eingehen wollen.

Jedenfalls ist damit die kovariante Ableitung D und damit die Übertragung vollständig bestimmt. Für einen beliebigen Schnitt λ mit Komponentenzerlegung $\lambda = \lambda^I b_I$, die λ^I also gewöhnliche Funktionen, ergibt sich $D\lambda = (D\lambda)^I \otimes b_I$ mit $(D\lambda)^I := d\lambda^I + \mathrm{i}\,gA^I{}_J\lambda^J$. In der Notation der Elementarteilchenphysik: $D = \mathbb{1}\,d + \mathrm{i}\,gA$, mit dem Verhalten unter Eichtransformationen $\psi \to \psi^U := U\psi$ (mit $U(x)$ beliebig $\in \mathbb{V}_x, \forall x$) *per definitionem* wie $D \to D^U := UDU^\dagger$.

Das Bündel $E(M,\mathbb{V})$, aufgefaßt als Mannigfaltigkeit, hat im allgemeinen nichtverschwindende Krümmung, was sich ausdrückt in der nichttrivialen $E(M,\mathbb{V})$-wertigen Krümmungs-2-Form: $F = (\mathrm{i}\,g)^{-1}D \wedge D = (d \wedge A) + \mathrm{i}\,g\,A \wedge A = (D \wedge A)$, in o.g. Basis: $F = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu$, so daß $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \mathrm{i}\,g[A_\mu, A_\nu]$, mit $[\,\cdot\,,\,\cdot\,]$ dem Kommutator ist.

Die durch D vermittelte Richtungsübertragung in $E(M,\mathbb{V})$ ist also *nicht-integrabel*, das heißt wegabhängig und daher definiert nur, wenn bezogen auf eine Kurve $\mathcal{C} : [0,1] \to M$: Die „Richtung" eines Schnittes λ (insbes. des Vektors A), die sich bei seiner kovarianten Übertragung per definitionem nicht ändert, ist genau seine Richtung bezüglich dieser Kurve; man spricht daher auch von *Parallelverschiebung*. Ein Schnitt λ, dessen Werte $\lambda(x) \in \mathbb{V}_x$, $\lambda(x+dx) \in \mathbb{V}_{x+dx}$, ... im Sinne der Übertragung *parallel* sind, erfüllt $D\lambda = 0$, was so viel heißt wie: (Wert in $x+dx$) $\equiv$ (Wert in x, nach $x+dx$ übertragen).

Wir schließen diesen Paragraphen über das allgemeine Konzept der Eichtheorie mit einer Bemerkung zu Weyls ursprünglicher Intention, der Konstruktion einer „konsistenten"[0.8] Allgemeinen Relativitätstheorie (ART).

Weyl stellte fest, daß in der Riemannschen Geometrie, wie sie der ART Einsteins zugrunde liegt, „ein letztes ferngeometrisches Element"[0.8] enthalten ist. Die Riemannsche Metrik erlaubt es nämlich, die *Länge* von Vektoren in zwei voneinander beliebig entfernten Weltpunkten zu vergleichen, während ja die *Richtung*sübertragung nicht-integrabel, also vom Weg der Übertragung abhängig ist. Diese „Inkonsistenz"[0.8] zu beseitigen, gelangte er zu einer Formulierung der ART, die im ausgeführten Sinne eine (lokale) Eichtheorie ist über der Strukturgruppe $\mathfrak{G}$ der allgemeinen Koordinatentransformationen, formal: $\mathfrak{G} = \varrho_+^\uparrow$, die spezielle orthochrone Poincarégruppe (d.i. die Eins-Zusammenhangskomponente von ϱ). Das darin auftretende Eichfeld A identifizierte Weyl mit dem elektromagnetischen Feld, siehe die Refn. [229–231], und sah so „Elektrizität und Gravitation aus einer gemeinsamen Quelle"[0.8] hergeleitet. In Abwesenheit elektromagnetischer Felder – die Längenübertragung wird integrabel und es gibt eine Eichung, in der A verschwindet – geht seine Theorie in die Einsteinsche über. Sie „gestattet sogar in einem gewissen Sinne zu begreifen, warum die Welt vierdimensional ist"[0.8].

Diese mathematisch konsequentere Weylsche ART hat weitreichende Konsequenzen. So

[0.8] Weyl im Briefwechsel mit Einstein, zitiert nach Straumann [202], Originalrefn. ebenda.

sollten beim bekannten Zwillingsparadoxon – wie es sich aus der Zeitdilatation der SRT erklärt – zusätzlich *Uhreneffekte zweiter Art* auftreten, das heißt die wieder an einen Weltpunkt zusammengeführten Uhren sich nicht nur in ihrem *Stand* sondern auch in ihrem *Gang* unterscheiden. Dies bedeutet, der Begriff „Einheitsuhr" ist nicht mehr definiert, da der Gang einer Uhr von ihrer Vorgeschichte abhängt (analog der Begriff „Einheitsmaßstab"). Das invariante Linienelement ds ist nicht mehr über Meßprozesse mit unendlich kleinen Maßstäben und Uhren zugänglich, sondern Lichtstrahlen sind das einzige Mittel, metrische Verhältnisse in der Umgebung eines Weltpunktes empirisch zu ermitteln.

Solche Uhreneffekte sind heute mit großer Sicherheit ausgeschlossen, das heißt die Weylsche ART ist in der Natur nicht realisiert. Die Relativitätstheorie behält über ds ihre empirische Basis. Geblieben, und zwar beherrschend die Elementarteilchenphysik heute, ist – „Genie-Streich ersten Ranges" , „grandiose Leistung des Gedankens", „Natürlichkeit und Schönheit [des] Gedankenganges"[0.9] – Weyls Konzept der Eichtheorie.

„Phänomene und Konzepte"

Die Invarianzen der Lagrangedichte der QCD und die Struktur nichtabelscher Eichtheorien sind ausführlich dargestellt. Wir zeichnen den Weg der Phänomenologie der Starken Wechselwirkung nach hin zur QCD, einer Eichtheorie auf Basis der nichtabelschen Strukturgruppe $\mathfrak{G}=SU(N_c)$, mit $N_c=3$ die Anzahl der *Colour*-Freiheitsgrade.

Im Anfang war die QED ... Die QCD ist konstruiert in Analogie zur QED, motiviert durch deren Erfolg. Dieser dokumentiert sich im Postulat physikalischer Größen mit in keiner anderen Theorie erreichten Präzision: Beispielsweise folgt für das *anomale magnetische Moment* des Myons, $a_\mu=(g_\mu-2)/2$, theoretisch $a_\mu|_{\text{th.}}=116\,591\,596\,(67)\times10^{-11}$ im Vergleich mit experimentell $a_\mu|_{\text{exp.}}=116\,592\,300\,(840)\times10^{-11}$; vgl. die Refn. [165,232], insbes. Ref. [45] bzgl. der darin enthaltenen Korrekturen aufgrund der SM-Starken und Schwachen Wechselwirkung. Sicherlich rührt diese Präzision mit her von dem glücklichen Umstand, daß der Entwicklungsparameter der perturbativen Theorie auf *in praxi* relevanten Skalen numerisch klein ist. Letztlich Ursache ist aber die Theorie: neben dem Renormierungsverfahren das *Prinzip der Eichinvarianz*, das der QED zugrundeliegt auf Basis der *abelschen* Strukturgruppe $U(1)$. – Der Erfolg der QED hat von Anfang an dazu hingeführt, das Eichprinzip auf höhere, nichtabelsche Gruppen zu verallgemeinern, um in analogem Rahmen zu einer konsistenten Theorie der Starken Wechselwirkung zu gelangen.

So formulierten schon 1954 Yang und Mills in Ref. [237] eine Eichtheorie für die Wechselwirkung von Nukleonen, die formal basiert auf der Forderung lokaler $SU(2)$-Invarianz und sich bezieht auf den Raum des Heisenbergschen Isospins.[0.10] Dies genau war die Konstruktion der neuen Klasse *nichtabelscher* Eichtheorien.[0.11] In Referenz auf diese Arbeit werden Eichtheorien auf der Basis halbeinfacher Liegruppen $\mathfrak{G}$ – oft spezieller: auf Basis der $SU(N)$ – bezeichnet als *Yang-Mills-Theorien*.

Diese Klasse von Theorien geriet danach wieder in Vergessenheit. Grund dafür waren zum einen Fragen prinzipieller Natur, die sich schon bei der QED gestellt hatten. Wir haben in Fußnote 0.3 das *Zero charge*-Problem und die tiefe Skepsis gegenüber dem Verfahren der Renormierung als solchem angesprochen, und daß dies bis hin zur generellen Ablehnung Lagrange'scher Quantenfeldtheorie geführt hat. Beides, so kann man im nachhinein sagen, resultierte großenteils aus einem mangelnden Verständnis der Renormierungsgruppe.

[0.9] Einstein im Briefwechsel mit Weyl, zitiert nach Straumann [202], Originalrefn. ebenda.

[0.10] Heisenberg in Ref. [110]: „und durch eine ... Zahl ϱ^ζ, die der beiden Werte $+1$ und -1 fähig ist. $\varrho^\zeta=+1$ soll bedeuten, das Teilchen sei ein Neutron, $\varrho^\zeta=-1$ bedeutet, das Teilchen sei ein Proton".

[0.11] Die Weylsche ART ist die älteste Eichtheorie; mit der Strukturgruppe $\varrho_+^\uparrow$ auch die älteste nichtabelsche.

Zum anderen koppeln nichtabelsche Eichfelder auch an sich selbst und induzieren so Nichtlinearitäten, die die Strukturen gegenüber der abelschen Theorie wesentlich verändern.

Ferner war ein massives Problem, daß Eichinvarianz einen *expliziten Massenterm* für das Eich-Vektorfeld A verbietet, Yang-Mills-Theorien es daher – zunächst – als *masseloses* Feld postulieren. Dies schien weder vereinbar zu sein mit der Vier-Fermion-Kopplung der wohletablierten, wenn auch nicht renormierbaren Fermi-Theorie der Schwachen Wechselwirkung, noch waren masselose intermediäre Vektorbosonen der Starken Wechselwirkung beobachtet.

Was speziell die Starken Wechselwirkung betraf, war nicht klar, auf welche der experimentell beobachteten Symmetrien die Strukturgruppe $\mathfrak{G}$ zu beziehen sei. Das Quarkmodell [91, 241, 242] war zwar anerkannt mit *Quarks* als Materie- und *Gluonen* als Eich-Vektorfeldern (die die Wechselwirkung vermitteln), mit der *Colour*-Symmetrie – allerdings als reines *Abstraktum*, reine *Arbeitshypothese*, die keinen direkten Bezug zur Wirklichkeit beanspruchte: So faßte noch 1972 Gell-Mann (neben Zweig der Begründer des Quarkmodells), fast entschuldigend, als den „main point“ seinen vorausgegangenen Vortrag zusammen: „Since the entities [quarks and some kind of glue] we start with are fictitious, there is no need for any conflict with the bootstrap or conventional dual parton point of view“, vgl. Ref. [92]. Oder im Zusammenhang mit Stromalgebren, aber aus dem gleichen Denken heraus [90]: „We construct a mathematical theory of the strongly interacting particles, which may or may not have anything to do with reality, find suitable algebraic relations that hold in the model, postulate their validity, and then throw away the model“. Dieser Vorbehalt rührte daher, daß die Lagrange'schen Felder des Quarkmodells asymptotisch nicht beobachtet waren und ihr *Confinement* in Colour-Singletts als Mechanismus, der dies aus prinzipiellen Gründen verhindert, nicht vorstellbar schien. Die Betonung lag daher lange auf der approximativen $SU(3)$-*Flavour*-Symmetrie [88, 89, 92, 149], die direkt observabel war. (Heute ist klar, daß sie mehr oder weniger zufällig ist, dadurch daß die drei leichtesten Quarks relativ leicht sind im Vergleich zu Λ_{QCD}, der hadronischen Skala.)

Es war dies eine Reihe von Problemen, die gelöst werden mußten. Wir wollen nur kurz die wichtigsten Stationen der Entwicklung nennen, die dahin geführt hat, daß 1974 Quantenchromodynamik – in ihrer heutigen Gestalt als $SU(N_{\mathrm{c}})$-invariante Yang-Mills-Theorie – schlagartig anerkannt war; siehe auch die Darstellung in den Refn. [104, 212].

Diese Entwicklung wurde sehr konkret Mitte der sechziger Jahre, als Higgs und Kibble einen Mechanismus identifizierten, der Symmetrien der Lagrangedichte unter einer kontinuierliche Transformation spontan bricht; siehe die Refn. [107, 111–113], in Hinblick auf gruppentheoretische Aspekte Ref. [115]. Diesem *Higgs-Kibble-Mechanismus* liegt wesentlich das *Goldstone-Theorem* [95] zugrunde, das besagt, daß Nicht-Invarianz des Vakuums unter einer kontinuierlichen Symmetrie der Lagrangedichte die Existenz masseloser Spin-0-Bosonen impliziert. Angewandt auf lokale Eichtheorien werden Massenterme für die Eich-Vektorfelder generiert: Die *would be* masselosen Goldstone-Bosonen kombinieren mit den *would be* masselosen Eich-Vektorfeldern – bis auf jeweils eines – zu massiven Vektorfeldern; sie liefern deren longitudinalen Freiheitsgrad, die Anzahl der Freiheitsgrade insgesamt bleibt erhalten.

Schon 1961 schlug Glashow [93] vor zur Vereinheitlichung der Schwachen mit der elektromagnetischen Wechselwirkung eine Yang-Mills-Theorie auf der Basis der nichtabelschen Strukturgruppe[0.12] $\mathfrak{G} = SU(2) \otimes U(1)$, mußte sie allerdings noch von Hand abändern, um der Masse der intermediären Vektorbosonen Rechnung zu tragen. Salam [183, 184] und Weinberg [223] gelangten zu derselben Theorie, bedienten sich zur Generierung von Massentermen für die Eichfelder aber des Higgs-Kibble-Mechanismus'. Unbefriedigend blieb noch der hadronische Sektor der Theorie. Unbeantwortet war noch die Frage ihrer Renormierbar-

[0.12] Die $U(1)$ hier bezieht sich auf *Hyperladung* und ist nicht identisch mit der Eichgruppe der bloßen QED.

keit – geschweige denn, daß ein Renormierungsverfahren explizit formuliert gewesen wäre.

Dennoch fand diese vereinheitlichte Theorie augenblicklich Beachtung. Veltman glaubte an eine nichtabelsche Eichstruktur der Schwachen Wechselwirkung und arbeitete seit 1963 daran, ein Renormierungsschema für Yang-Mills-Theorien zu finden; vgl. die entsprechenden Referenzen in [212]. Allerdings lehnte er den Higgs-Kibble-Mechanismus ab, wie dieser auch allgemein als „ugly" empfunden wurde im Vergleich zum „clean" Konzept von Yang-Mills-Theorien. Nicht so 't Hooft, er präferierte ihn gegenüber der Alternative der Einführung expliziter Massenterme, da diese die Eichinvarianz preisgaben – und damit Unitarität und Kausalität – und daher versprachen, zu gravierenden Probleme bei der Renormierung zu führen. Als Kompromiß untersuchte er in seiner Dissertation bei Veltman zunächst die Renormierbarkeit *masseloser* Yang-Mills-Theorien. Sein Beweis im Jahr 1971 gehört bis heute zu den grundlegendsten Arbeiten der theoretischen Physik überhaupt, Ref. [204]. Renormierbarkeit – das hieß im Sinne von *power counting*, das heißt *perturbativ, zu allen Ordnungen* – basiert im wesentlichen auf der Gültigkeit bestimmter verallgemeinerter *Ward-Identitäten* (deren *Off-mass shell*-Versionen heute als *Slavnov-Taylor-Identitäten* bekannt sind). Da diese Identitäten durch den Higgs-Kibble-Mechanismus nicht wesentlich modifiziert werden, konnte 't Hooft direkt im Anschluß die Renormierbarkeit von – in diesem Sinne – *massiven* Yang-Mills-Theorien zeigen, Ref. [205].

Im darauffolgenden Jahr konnten 't Hooft und Veltman im Rahmen des neuen Verfahrens der dimensionalen Regularisierung ein *Regularisierungs- und Renormierungsschema* für Eichtheorien vom Yang-Mills-Typ explizit angeben [206]. Das Feynmansche Funktionalintegral [79] war schon 1967, in Gross' Worten [104]: „reemerged from obscurity", als Faddeev und Popov mit seiner Hilfe *Feynman-Regeln* für nichtabelsche Eichtheorien über einfachen Liegruppen $\mathfrak{G}$ und *für beliebige Diagramme* ableiteten [71,72] (für *1-Loop*-Diagramme hatte bereits Feynman die Änderungen gegenüber der QED aufgrund der Nicht-Abelizität beschrieben [81] und De Witt im Detail ausgearbeitet [49]). In einer zweiten Arbeit 1972 gaben 't Hooft und Veltman [207] ein Verfahren an, wie man Feynman-Regeln in beliebigen Eichungen ableiten kann und gaben weiter – ausdrückend deren Äquivalenz – einen kombinatorischen Beweis dafür, daß die S-Matrix einer renormierbaren Eichtheorie, ohne Kompaktheit für die zugrundeliegende Liegruppe $\mathfrak{G}$ fordern zu müssen, unabhängig ist von der Wahl der Eichung.

Zusammenfassend war das Konzept nichtabelscher Eichtheorien 1972 allgemein anerkannt von Seiten der Theoretischen Physik, und mit ihm die elektroschwache Theorie von Glashow–Weinberg–Salam; zur Übersicht verweisen wir auf die Refn. [1, 134]. Experimentell bestätigt wurden die von ihr postulierten *neutralen Ströme* 1973 in Neutrino-Reaktionen, Ref. [109], und die *Eichbosonen* $W^{\pm}$ und Z^0 1983 am Proton-Antiproton-Speicherring Sp$\bar{\text{p}}$S im CERN, Refn. [215–217].

Mit dem Verständnis der „exakten Regeln" durch diese elektroschwache Theorie, konnte sie schnell auf Hadronen ausgedehnt werden. Es konnten bald Vorhersagen gemacht werden, daß etwa das gegenseitige Kürzen anomaler Beiträge – die andernfalls die Renormierbarkeit der Theorie zerstörten – erfordert dieselbe Anzahl von Quark*flavours* und Lepton*spezies*. So wurde das *Charm*-Quark postuliert und gefunden; der Entdeckung der Familie von τ- und ν_τ-Lepton folgte die Entdeckung von *Bottom*- und *Top*-Quark.

Die Situation 1972/73 war also die folgende. Es gab eine neue Klasse nichtabelscher Eichtheorien, die *theoretisch* weit ausgearbeitet waren: Allgemeine Feynman-Regeln konnten konsistent abgeleitet werden in beliebiger Eichung, die einander äquivalent waren in dem Sinne, daß sie zu derselben eichunabhängigen S-Matrix führten. Man verfügte über ein explizites Regularisierungs- und Renormierungsschema, dem zugrunde lag die Gültigkeit

verallgemeinerter Ward-Identitäten, die Unitarität und Kausalität der Theorie implizierte. – Es waren dies notwendige Eigenschaften einer realistischen Theorie und insofern schon axiomatischer Ausgangspunkt des Bootstrap-Verfahrens gewesen; vgl. Fußn. 0.3.
Andererseits war die Vereinheitlichung der Schwachen und elektromagnetischen Wechselwirkung als eine solche nichtabelsche Eichtheorie *experimentell* augenblicklich erfolgreich.

Der Gedanke lag nahe, analog könne eine konsistente Theorie der Starken Wechselwirkung formuliert werden. Dahingehenden Fortschritten stand lange entgegen das Phänomen *Confinement*. Quarks und Gluonen waren zwar in gewissem Sinne, nämlich um hadronische Symmetrien zusammenzufassen in ihrer fundamentalen Bedeutung akzeptiert, galten aber – da nicht asymptotisch, nicht direkt observabel – als *nicht real*, als *Abstraktum*.
Im Herbst 1968 postulierte *Bjorken* das nach ihm benannte *Skalenverhalten* tief-inelastischer Strukturfunktionen [25], das kurz danach in Experimenten am SLAC bestätigt wurde. Es wurde von Feynman erklärt in seinem bekannten *Partonbild* [82], in dem sich Hadronen aus *Partonen* konstituieren, die sich bei immer kleineren Abständen mehr und mehr wie freie Teilchen verhalten. Callan und Gross [33] konnten bereits zuvor die experimentellen Daten dahin deuten, daß diese Konstituenten im wesentlichen Spin-1/2 tragen; darüberhinaus zeigten die Experimente bald 1/3 als deren Baryonquantenzahl. Allerdings konnte man sich keine Quantenfeldtheorie vorstellen, deren Kopplung zwischen den Quarks einerseits so schwach sei, daß *Asymptotische Freiheit* im genannten Sinne resultiert, und andererseits nicht erlaube, daß Hadronen in ihre Quarkkonstituenten aufbrechen.

Auf Basis der Renormierungsgruppe – durch Wilson wieder ins allgemeine Bewußtsein zurückgerufen [234] – wurde argumentiert, daß *Bjorken scaling* generell im Widerspruch stehe mit Quantenfeldtheorie:[0.13] Aufgrund von Renormierung ändern sich die Dimensionen von Operatoren mit der (Energie)Skala μ, die mit den zugrundeliegenden Prozessen die betrachtete Physik bestimmt. In gleicher Weise ändern sich dimensionslose Kopplungskonstanten. Die Abhängigkeit, das heißt das „Laufen“ der renormierten Eichkopplung $g_{\text{ren.}}(\mu)$ mit der Skala μ wird beschrieben durch die entsprechende *Betafunktion* $\beta[g_{\text{ren.}}(\mu)]$, die allgemein definiert ist als die logarithmische Ableitung von $g_{\text{ren.}}(\mu)$ nach μ, in Formeln $\beta[g_{\text{ren.}}(\mu)] := d/d\ln\mu\ g_{\text{ren.}}(\mu) = \mu\, d/d\mu\ g_{\text{ren.}}(\mu)$. Das UV-Verhalten einer Quantenfeldtheorie – explizit werden ihre *ein-Teilchen-irreduziblen renormierten (n-Punkt-)Greenfunktionen* diskutiert, vgl. $G^{(n)}_{1-\text{irred.}}$ auf Seite 23 – ist bestimmt durch die Nullstellen der Betafunktion: $\beta[g^{\text{F}}_{\text{ren.}}(\mu)] = 0$, das heißt durch die Theorie am *Fixpunkt* F *der Renormierungsgruppengleichungen* $g_{\text{ren.}}(\mu) \to g^{\text{F}}_{\text{ren.}}(\mu)$. Genau dann zeigt eine Theorie (bis auf Korrekturen $\ln\mu$) naives Skalenverhalten, das heißt ist asymptotisch frei, wenn sie einen Fixpunkt am Ursprung $g^{\text{F}}_{\text{ren.}}(\mu) = 0$ besitzt und dieser UV-stabil ist. Tatsächlich besitzt jede Theorie trivialerweise einen Fixpunkt bei $g^{\text{F}}_{\text{ren.}}(\mu) = 0$. Ob er stabil ist, bestimmt in einer Entwicklung der Betafunktion $\beta[g_{\text{ren.}}(\mu)]$ in Potenzen von $g_{\text{ren.}}(\mu)$ das Vorzeichen des führenden Koeffizienten. In allen zu Anfang der siebziger Jahre bekannten Quantenfeldtheorien war dieser führende Koeffizient *positiv*, das heißt der Fixpunkt verschwindender renormierter Kopplung *UV-instabil*: $g_{\text{ren.}}(\mu)$ wächst an mit der Energie μ, das heißt mit kleinerwerdendem Abstand $1/\mu$. Dies hielt man für ein Charakteristikum von Quantenfeldtheorie im allgemeinen und sah von daher in Asymptotischer Freiheit das Argument für deren konzeptuelle Mangelhaftigkeit. Als Gross und Wilczek vor diesem Hintergrund der Renormierungsgruppe die Betafunktion nichtabelscher Eichtheorien auf der Basis halbeinfacher Liegruppen $\mathfrak{G}$ betrachteten, hatten sie tatsächlich die Absicht, für die letzte bekannte Klasse von Theorien – quasi als Todesstoß für eine Quantenfeldtheorie der Starken Wechselwirkung – die

[0.13] 'T Hooft macht dieses allgemeine Empfinden konkret mit den Worten Gross' aus dem Jahr 1971: „no quantum field theory will ever explain Bjorken scaling“; vgl. die Refn. [212,213].

UV-Instabilität des Fixpunktes $g^{\mathrm{F}}_{\mathrm{ren.}}(\mu) = 0$ zu zeigen. Sie fanden im April 1973 [100] das Gegenteil: die Formel für den relevanten Koeffizienten, die besagt, daß er *negativ* ist, der Fixpunkt also *UV-stabil* – solange nur N_{F}, die Zahl der Quarkflavours, 16 nicht überschreitet;[0.14] vgl. auch Politzer, Ref. [168]. Explizit zeigten Coleman und Gross [42], daß dieses Ergebnis – Asymptotische Freiheit – nicht möglich ist für Theorien, die nur Fermionen und Skalare, aber kein (Eich-)Vektorfeld enthalten; vgl. die Verallgemeinerung in Ref. [212].

Das experimentell beobachtete Bjorken-Skalenverhalten war von *first principles* verstanden. Gross und Wilczek berechneten die logarithmischen Abweichungen [101] und schlugen deren Messung als Präzisionstest vor; tatsächlich beobachtet wurden sie ab Ende der siebziger Jahre und sind heute bestätigt auf besser als ein Prozent.

Die Anwendung Asymptotischer Freiheit konnte ausgedehnt werden auf viele neue Prozesse; sie wird heute als *perturbative* QCD bezeichnet. Ihr Erfolg hat wesentlichen Anteil daran, daß QCD im allgemeinen schnell als *die* Theorie der Starken Wechselwirkung anerkannt wurde. Sehr auch durch die grundlegende Änderung im Denken, zu dem der Erfolg perturbativer QCD führte: Quarks und Gluonen wurden anerkannt als *physikalische Realität*. Daß sie in Colour-Singletts konfiniert sind, wurde verstanden als Konsequenz des entgegengesetzten Limes kleiner Skalen μ (d.h. großer Abstände $1/\mu$): – unabhängig von Asymptotischer Freiheit, und daher *nicht im Widerspruch* dazu. Das Phänomen *Confinement* wurde damit nicht gelöst, aber akzeptiert.

In der Folgezeit wurden im Rahmen von QCD große Fortschritte gemacht, den Mechanismus, der zu Confinement führt, von *first principles* zu verstehen. Wir verweisen an dieser Stelle auf den Abriß 't Hoofts in den Refn. [212,213], kommen aber zurück auf diesen Hintergrund *nichtperturbativer* QCD, vor dem unsere Arbeit zu sehen ist.

Formale Darstellung

Dies der Weg dahin, daß QCD heute als *die* Theorie der Starken Wechselwirkung anerkannt ist. In Gegenüberstellung mit der QED, der Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung auf Basis einer Strukturgruppe $U(1)$ gelangen wir – auch vor Augen unsere Einführung in die Mathematik nichtabelscher Eichtheorien auf S. 3 ff. – zur QCD, der Theorie der Starken Wechselwirkung auf der Basis der $SU(N_{\mathrm{c}})$, $N_{\mathrm{c}} \equiv 3$ die *Colour*-Freiheitsgrade. Dies heißt konkret: zu ihrer Lagrangedichte.

Die wesentlichen Unterschiede sind Konsequenzen der *Nicht-Abelizität*. Physikalisch manifestiert sie sich in der Selbstkopplung der Eichfelder. Mathematisch resultiert sie daraus, daß in der Krümmungs-2-Form $F = d \wedge A + \mathrm{i}\, g\, A \wedge A$, wie diskutiert auf S. 5, das äußere Produkt des Eichfelds mit sich selbst $A \wedge A$ nur in der abelschen Theorie verschwindet. Ansonsten bleibt es im $su(N_{\mathrm{c}})$-wertigen Feldstärkentensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \mathrm{i}\, g [A_\mu, A_\nu]$ als Kommutatorterm stehen. Die Nichtlinearität, den dieser Term darstellt, verhindert letztlich eine simple Extrapolation der abelschen Theorie hin zur nichtabelschen. Wir diskutieren, wie direkte Verallgemeinerung zu teilweise konträren Konsequenzen führt. Zur diesbzgl. umrissenen $SU(N_{\mathrm{c}})$-Eichalgebra vgl. Anh. A.3.

Sei $\{T^a\}$ eine Basis der Liealgebra $su(N_{\mathrm{c}})$, die mit der Eichgruppe $SU(N_{\mathrm{c}})$ assoziiert ist. Die T^a sind *spurlose hermitesche Operatoren* in einer Darstellung $\mathfrak{R}$ der $su(N_{\mathrm{c}})$, das heißt $\mathrm{tr}\, T^a = 0$ und $T^{a\dagger} = T^a$, $a = 1, 2, \ldots, d_{SU(N_{\mathrm{c}})}$, mit $d_{SU(N_{\mathrm{c}})} \equiv N_{\mathrm{c}}^2 - 1$ der Dimension der Gruppe. Die T^a werden bezeichnet als die *Erzeugenden* oder *Generatoren* der Darstellung.

[0.14] Bereits im Sommer zuvor während eines Meetings in Marseille [208] schrieb 't Hooft dieselbe Formel an die Tafel, publizierte sie aber nicht. Wohl angesichts des ungelösten Confinement-Problems erkannte er nicht die Bedeutung seiner Rechnung, – insbesondere zur Erklärung des Bjorken-Skalenverhaltens. Wir verweisen auf die Darstellungen in den Refn. [104, 212].

Darstellungsunabhängig erfüllt ihr Kommutator $[T^a, T^b] = \mathrm{i}\, f_{abc} T^c$ mit f_{abc} den Strukturkonstanten der $su(N_\mathrm{c})$, die o.E.d.A. als *voll antisymmetrisch* und *reell* definiert sind.

Die elementaren Lagrange'schen Felder der QCD sind die Materie-Spinorfelder ψ_n und Eich-Vektorfelder $A_{\mu a}$, mit $n = 1, 2, \ldots, d_\mathfrak{F}$ und $a = 1, 2, \ldots, d_\mathfrak{A}$. Dabei ist allgemein $d_\mathfrak{R}$ die Dimension des Raumes, in dem die Darstellung $\mathfrak{R}$ wirkt, – explizit $d_\mathfrak{F} = N_\mathrm{c}$ die Dimension der *fundamentalen Darstellung* $\mathfrak{F}$ und $d_\mathfrak{A} \equiv d_{SU(N_\mathrm{c})} = N_\mathrm{c}^2 - 1$ die der *adjungierten Darstellung* $\mathfrak{A}$. – Die *Quarkfelder* ψ_n transformieren unter der fundamentalen Darstellung.[0.15] Als Normierung $\mathrm{tr}\, T^a_\mathfrak{F} T^b_\mathfrak{F} = n_\mathfrak{F}\, \delta^{ab}$ wählen wir standardmäsig $n_\mathfrak{F} = 1/2$ und für $N_\mathrm{c} = 3$ die λ-Matrizen Gell-Manns als Erzeugende: $(T^a_\mathfrak{F})_{mn} = 1/2 (\lambda^a)_{mn}$. Die *Gluonfelder* $A_{\mu a}$ transformieren unter der adjungierten Darstellung, definiert durch $(T^a_\mathfrak{A})_{bc} := -\mathrm{i}\, f_{abc}$.

Wir zerlegen ein Element B einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}$ der Liealgebra $su(N_\mathrm{c})$ gemäß $B =: B_a T^a_\mathfrak{R}$ in Komponenten entlang der Erzeugenden. Die so definierten – darstellungsabhängigen – Komponenten B_a erhält man zurück durch $B_a = n_\mathfrak{R}^{-1}\, \mathrm{tr}\, B T^a_\mathfrak{R}$, mit $n_\mathfrak{R}$ der *Normierung* der Generatoren gemäß $\mathrm{tr}\, T^a_\mathfrak{R} T^b_\mathfrak{R} = n_\mathfrak{R}\, \delta^{ab}$, standardmäßig $n_\mathfrak{F} = 1/2$ und $n_\mathfrak{A} = N_\mathrm{c}$ für die fundamentale beziehungsweise adjungierte Darstellung. Über $n_\mathfrak{R} d_{SU(N_\mathrm{c})} = c_2(\mathfrak{R}) d_\mathfrak{R}$ ist diese Normierung verknüpft mit dem *quadratischen Casimir-Operator* der Darstellung.[0.16]

So haben wir für das Eich-Vektorfeld die Zerlegung $A_\mu = A_{\mu a} T^a$, wobei die Komponenten $A_{\mu a}$ Elemente aus $\mathbb{R}$ sind (Zahl der Freiheitsgrade!). Die kovariante Ableitung lautet allgemein $(D_\mu)_{\alpha\beta} = \partial_\mu (\mathbb{1}_\mathfrak{R})_{\alpha\beta} + \mathrm{i}\, g A_{\mu a} (T^a_\mathfrak{R})_{\alpha\beta}$ in $\mathfrak{R}$ der Darstellung des Felds, auf das D_μ wirkt: Das heißt für die Quarkfelder $(D_\mu \psi)_n = \partial_\mu \psi_n + \mathrm{i}\, g A_{\mu a} (T^a_\mathfrak{F})_{nm} \psi_m$ (fundamentale Darstellung) und für die Gluonfeldstärken $(D_\mu F_{\rho\sigma})_a = \partial_\mu F_{\rho\sigma a} - g f_{abc} A_{\mu b} F_{\rho\sigma c}$ (adjungierte Darstellung). Wir haben dabei für den Feldstärkentensor gemäß der Zerlegung $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu a} T^a$ die Komponenten $F_{\mu\nu a} = \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - g f_{abc} A_{\mu b} A_{\nu c}$ eingeführt. Sie ergeben sich in dieser Gestalt unabhängig von der Darstellung: aus $F_{\mu\nu} = (\mathrm{i}\, g)^{-1} [D_\mu, D_\nu]$ mithilfe der – darstellungsunabhängigen – Relation $[T^a, T^b] = \mathrm{i}\, f_{abc} T^c$ für den Kommutator der Erzeugenden.

Die *Lagrangedichte der* QCD[0.17] setzt sich zusammen aus der *Yang-Mills*- und der Materie- oder *Dirac-Lagrangedichte*

$$\mathfrak{L} \;=\; \mathfrak{L}_\mathrm{YM} \;+\; \mathfrak{L}_\mathrm{D} \;=\; -\frac{1}{2}\, \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \;+\; \bar{\psi}\, (\mathrm{i}\, \gamma^\mu D_\mu - m)\, \psi \tag{0.1}$$

die Spur ist wieder bezüglich der $su(N_\mathrm{c})$ zu bilden, die Feldstärken zu nehmen in der *fundamentalen Darstellung*: $\mathrm{tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu}{}_b\, \mathrm{tr}\, T^a_\mathfrak{F} T^b_\mathfrak{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu a} F^{\mu\nu}{}_a$. Die Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ besitzt die eingangs diskutierten Invarianzen und steht – höhere als erste Ableitungen der Felder ausgeschlossen – *in eindeutiger Weise* für die Theorie eines N_c-Multipletts ψ von Spin-1/2-Materiefeldern, das über ein entsprechendes Eich-Vektorfeld A wechselwirkt.

Wird die Jacobi-Identität für die kovariante Ableitung, $[D_\mu, [D_\rho, D_\sigma]] + \text{zykl.} = 0$, kontrahiert mit dem Pseudotensor $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, so folgt mithilfe $F_{\rho\sigma} = (\mathrm{i}\, g)^{-1} [D_\rho, D_\sigma]$ die *Bianchi-Identität* $0 = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} D_\mu F_{\rho\sigma} \equiv D_\mu (\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma})$. Sie ist die nichtabelsche Verallgemeinerung der homogenen Maxwellgleichungen und offenbar unmittelbare Konsequenz des *Eichprinzips*: des Begriffes nichtverschwindender *Krümmung* und daher *nicht-integrabler Übertragung im Eichraum*, die sich ihrerseits ausdrückt im Eich-Vektorfeld der *eichkovarianten Ableitung*.

Aus der Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ resultieren die *Feldgleichungen der* QCD nach Euler-Lagrange. Dies ist zum einen die *Dirac-Gleichung* im Hintergrund des Eichfelds $(\mathrm{i}\, \gamma^\mu D_\mu - m)\psi = 0$. Zum anderen sind dies die nichtabelsch verallgemeinerten inhomogenen Maxwellgleichungen

[0.15] Wir unterscheiden mit „fundamental" begrifflich nicht zwischen der Darstellung $\mathfrak{F}$ der Quarks und der dazu komplex konjugierten (Stern-)Darstellung $\mathfrak{F}^*$ der Antiquarks.

[0.16] Der quadratische Casimir-Operator $c_2(\mathfrak{R})$ einer Darstellung $\mathfrak{R}$ ist allgemein definiert durch „die aufsummierten Quadrate aller Generatoren", $T^a_\mathfrak{R} T^a_\mathfrak{R} =: c_2(\mathfrak{R})\, \mathbb{1}_\mathfrak{R}$; die Eins der Darstellung ist dabei die $d_\mathfrak{R}$-dimensionale Einheitsmatrix, – d.h. explizit $c_2(\mathfrak{F}) = n_\mathfrak{F}\, d_{SU(N_\mathrm{c})} / d_\mathfrak{F} = (N_\mathrm{c}^2 - 1)/2N_\mathrm{c}$ und $c_2(\mathfrak{A}) = n_\mathfrak{A} = N_\mathrm{c}$.

[0.17] Sei durch die gesamte Arbeit implizit summiert über N_F *Flavours* von Fermion-Multipletts ψ.

$D_\mu F^{\mu\nu} = g J^\nu$, in Komponenten $(D_\mu F^{\mu\nu})_a = \partial_\mu F^{\mu\nu}{}_a - g f_{abc} A_{\mu b} F^{\mu\nu}{}_c = g J^\nu{}_a$ (also die kovariante Ableitung auf die adjungierte Darstellung bezogen), mit dem *Dirac-Materiestrom* J, dessen Komponenten durch $J^\nu{}_a := \bar\psi \gamma^\nu T^a \psi$ definiert sind.

Dieser Strom ist für *freie Quarks* erhalten so daß diese mit seiner Hilfe charakterisiert werden können bezüglich der *Colour-Ladung*, die er assoziiert. Kombinationen von Quarks mit definierter Colour können angegeben werden, insbesondere global colour-neutrale Hadronen als nichtlokale Objekte, zusammengesetzt aus Quarkkonstituenten. Koppeln Quarks allerdings an Gluonen, so ist J nicht erhalten und gestattet nicht, Zustände bezüglich Colour zu charakterisieren. Dies spiegelt wider, daß auch Gluonen Colour-Ladung tragen – eklatanter Kontrast zu Photonen in der QED, die nicht elektrisch geladen sind.

Eine geeignete erhaltene Colour-Ladung in der QCD – und dadurch sind *Konstituentenquarks* erst definierbar – folgt aus der Invarianz ihrer Lagrangedichte unter Eichtransformationen. Wir wollen diese daher rekapitulieren, folgen dabei der Darstellung von Lavelle und McMullan in Ref. [133]; bezüglich formalerer Aspekte verweisen wir auf Ref. [114].

Werde das Konzept der Eichtheorie auf das Spinorfeld ψ angewandt, das heißt überführen es lokale Eichtransformationen in physikalisch äquivalente Kopien. Sei $U(x)$ die Transformationsmatrix, das heißt für jeden Weltpunkt x ein beliebiges Element der Eichgruppe $SU(N_c)$ – in geeigneter Darstellung. Dann transformiert die kovariante Ableitung *per definitionem* wie $D_\mu \to D_\mu^U := U D_\mu U^\dagger$. In Termen der Lagrange'schen Felder der Theorie sind lokale Eichtransformationen vollständig bestimmt durch

$$\psi \;\to \psi^U \;:= U\,\psi \tag{0.2}$$

$$A_\mu \;\to A_\mu^U \;:= \frac{1}{\mathrm{i}\,g}\,U\,(D_\mu\,U^\dagger) \;=\; U\,A_\mu\,U^\dagger \;+\; \frac{1}{\mathrm{i}\,g}\,U\,(\partial_\mu\,U^\dagger) \tag{0.2'}$$

Es gilt:

$$D_\mu \;\to\; D_\mu^U \;=\; U\,D_\mu\,U^\dagger \tag{0.3}$$

per definitionem. Mit der Darstellung $F_{\mu\nu} = (\mathrm{i}\,g)^{-1}[D_\mu, D_\nu]$ und Unitarität von $U(x)$ an jedem Weltpunkt x der Raumzeit: $U^\dagger(x)U(x) = \mathbb{1}$, transformiert der Feldstärkentensor wie

$$F_{\mu\nu} \;\to\; D_{\mu\nu}^U \;=\; U\,F_{\mu\nu}\,U^\dagger \tag{0.4}$$

Damit ist evident die *Eichinvarianz* der Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ der QCD, vgl. Gl. (0.1).

Schreibt man $U(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\theta(x)}$, ist θ ein Element der Liealgebra $su(N_c)$ mit der Komponentenzerlegung $\theta = \theta_a T^a$. Es folgt der mit den Eichtransformationen assoziierte *Noether-Strom* j_θ, wobei $j_\theta{}^\nu = -g^{-1} F^{\nu\mu}{}_a (D_\mu\theta)_a + J^\nu{}_a \theta_a = -g^{-1} F^{\nu\mu}{}_a \partial_\mu \theta_a + (f_{abc} A_{\mu b} F^{\mu\nu}{}_c + J^\nu{}_a)\theta_a$ und sich die kovariante Ableitung auf die adjungierte Darstellung bezieht. Für *globale* Eichtransformationen, das heißt U ist konstant und damit θ, ergibt sich für seine Komponente entlang θ_a der Ausdruck in den runden Klammern, $j^\nu{}_a := f_{abc} A_{\mu b} F^{\mu\nu}{}_c + J^\nu{}_a$. Die Erhaltung dieses Stromes j ist Konsequenz des *Noetherschen Theorems*, – folgt aber auch unmittelbar aus den Feldgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu}{}_a - g f_{abc} A_{\mu b} F^{\mu\nu}{}_c = g J^\nu{}_a$, indem man den Term mit den Strukturkonstanten auf die rechte Seite bringt: $\partial_\mu F^{\mu\nu}{}_a = g(f_{abc} A_{\mu b} F^{\mu\nu}{}_c + J^\nu{}_a) = g j^\nu{}_a$.

Der Generator der Eichtransformationen ist zu identifizieren mit der assoziierten erhaltenen *Noether-Ladung* $G(\theta) = \int d^3x\, j_\theta{}^0(x) =: \int d^3x\, G_a(x)\,\theta_a(x)$; dabei haben wir den Integranden zerlegt in Komponenten $G_a := -g^{-1}(D_i E^i)_a + J^0{}_a$ entlang θ_a und durch $E_a^i := F^{i0}{}_a$ das *chromo-elektrische Feld* definiert. Die Ladung $G(\theta)$ generiert die Transformationen

$$\delta_\theta A_{ia}(x) \;=\; [\mathrm{i}\,G(\theta), A_{ia}(x)] \;=\; -\frac{1}{g}\,(D_i\theta)_a\,(x) \tag{0.5}$$

$$\delta_\theta \psi\,(x) \;=\; [\mathrm{i}\,G(\theta), \psi(x)] \;=\; \mathrm{i}\,\theta\psi\,(x) \tag{0.5'}$$

Dies ist die infinitesimale Gestalt der Eichtransformationen der Felder A_i und ψ. Wir beto-

nen, daß wir nicht das Transformationsgesetz der *Zeitkomponenten A_0 der Eich-Vektorfelder* wiedergefunden haben. Dies ist Konsequenz daraus, daß A_{0a} keine dynamische Variable ist, *kein physikalischer Freiheitsgrad*, – sondern integrierender Faktor, *Lagrange-Multiplikator*. Die zugehörigen kanonisch konjugierten Felder $E^0{}_a$ sind genau $F^{00}{}_a$, die identisch verschwinden; also $E^0{}_a(x) = 0$. Variation der Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ nach $A_{0a}(x)$ ergibt $G_a(x) = 0$: die *nichtabelsche Verallgemeinerung des Gauß'schen Gesetzes*, $(D_i E^i)_a(x) = g J^0{}_a(x)$. Soweit halten wir fest: Die QCD ist ein *System mit $2\cdot(N_c^2-1)$ Zwangsbedingungen*.

Dies ist bereits für die *klassische Chromodynamik* der Fall. In der *quantisierten Theorie* – wir denken an die BRST-Operatorformulierung, s.u. – werden die Felder A_i und ψ durch *Feldoperatoren* ersetzt; von diesen mit den entsprechenden kanonisch konjugierten Operatoren werden *für gleiche Zeiten (Anti)Kommutatorrelationen* gefordert. Mithilfe dieser Relationen haben wir für infinitesimale Eichtransformationen Kommutatordarstellungen des entsprechenden Felds mit der Noether-Ladung $G(\theta)$ angegeben, die offensichtlich in Widerspruch stehen – und damit die fundamentalen (Anti)Kommutatorrelationen – mit der strikten Forderung, daß $G_a(x)=0$ *als Operatoren*. Sie ist daher abzuschwächen. Dies geschieht dadurch, daß $G_a(x)|\psi\rangle = 0$ nur für eine Unterklasse von Zuständen $|\psi\rangle$ gefordert wird und genau diese als *physikalisch* erklärt. Sie bilden einen *linearen Unterraum* – das Superpositionsprinzip ist also unberührt –, und es verschwinden die auf sie bezogenen Erwartungswerte der Zwangsbedingungen, $\langle\psi|G_a(x)|\psi\rangle = 0$. Dies führt zu einem konsistenten Bild.

Hierin macht auch der Kommutator $[G_a(x), G_b(x')] = -\mathrm{i}\, f_{abc} G_c(x)\delta(x-x')$ Sinn, der die G_a als Erzeuger der Eichtransformationen ausweist, was allerdings suggeriert – bezüglich der *Interpretation des Gauß'schen Gesetzes* $G_a(x)|\psi\rangle = 0$ –, alle physikalischen Zustände seien eichinvariant. Dies aber führt schon in der QED auf Probleme im Zusammenhang mit der Konstruktion *elektrisch geladener* physikalischer Zustände: Bei einer globalen Eichtransformation, $\theta = konst.$, geht die abelsche Ladung in die elektrische Ladung über, so daß physikalische Zustände, die *per definitionem* durch diese annihiliert werden, notwendig elektrisch ungeladen sind. Wir haben im Rahmen des vorliegenden Abrißes nicht den Raum, die subtile Argumentation von Lavelle und McMullan, Ref. [133], nachzuzeichnen, die dieses Problem auflöst. Ihre abschließende Aussage ist aber: Eine in der QCD adäquate Colour-Ladung kann konsistent definiert werden, allerdings nur für eichinvariante Zustände; lokale Eichtransformationen müssen auf eine Unterklasse $U(x) \in SU(N_c)$ eingeschränkt werden, so daß globale Eichtransformationen nicht mehr aus diesen folgen durch Konstantsetzen von Parametern, sondern unabhängig betrachtet werden müssen. – Die *Colour-Ladung* $Q = Q_a T^a$, mit $Q_a := \int d^3x\, j^0{}_a(x) = \int d^3x\, (f_{abc} A_{\mu b} F^{\mu 0}{}_c + J^0{}_a)$, ist per contructionem erhalten $dQ/dt = 0$, ist aber nicht eichinvariant; sie wird eichinvariant, $Q \equiv Q^U$, wo $Q \to Q^U := UQU^\dagger$, wenn sie auf physikalische Zustände $|\psi\rangle$ wirkt. Dies folgt daraus, daß sich weiter schreiben läßt $Q_a = \int d^3x\, (g^{-1}\partial_i E^i{}_a + G_a)$, und so auf einen physikalischen Zustand $|\psi\rangle$ bezogen effektiv $j^0{}_a = g^{-1}\partial_i E^i{}_a$ zu setzen ist. Anwendung des Gauß'schen Satzes führt auf ein Oberflächenintegral, so daß man dahin geführt ist, die zulässigen Eichtransformationen auf Elemente der Eins-Zusammenhangskomponente der Eichgruppe $SU(N_c)$ einzuschränken, die im räumlich Unendlichen in die Eins übergehen.

Mithilfe dieser Ladung Q können von first principles *Konstituentenquarks* konstruiert werden mit definierter *Colour-Ladung* – in Termen derer QCD alternativ formuliert werden kann, vgl. Ref. [133]. Explizit meint dies die Konstruktion eines *dressed quarks*: ein Lagrange'sches Quark, dergestalt umgeben von einer Wolke virtueller Gluonen und (Anti)Quarks, daß das gesamte System eichinvariant ist.[0.18] Der Begriff des Konstituentenquarks spielt in

[0.18] Die Konstruktion dynamischer *dressings* für individuelle Quarks in Ref. [133] ist a priori *perturbativ*. Von hier kommend, spiegelt sich das Einsetzen von Confinement im Auftreten eines Mechanismus wider – formal

der vorliegenden Arbeit eine wichtige Rolle; er ist *wohldefiniert von first principles*.

Daß die QCD eine Theorie mit *Zwangsbedingungen* ist, hat wesentliche Konsequenzen für den Begriff der *Eichinvarianz* in der Standardformulierung der QCD als *manifest Poincaré-kovariante lokale Theorie*; vgl. Ref. [133], bzgl. tiefergehender Fragen Ref. [114].

Der Eichsektor der QCD konstituiert sich aus den Feldern $A_{\mu a}$, das sind $4\cdot(N_c^2-1)$ Freiheitsgrade. Wir haben gesehen, daß Eichinvarianz $2\cdot(N_c^2-1)$ Zwangsbedingungen impliziert, nämlich $E^0{}_a=0$ und das Gauß'sche Gesetz $G_a|\psi\rangle=0$. Dies ist analog zur QED, in der die vier Freiheitsgrade des Vektorpotentials auf die zwei transversalen Polarisationen des Photons eingeschränkt werden – und dabei (zunächst) Poincarékovarianz verlorengeht. Diese ist aber von eminenter Bedeutung im perturbativen Regularisierungs- und Renormierungsprogramm, insofern als es bislang überhaupt erst für manifest Poincaré-kovariante lokale Theorien erfolgreich hat durchgeführt werden können; vgl. die Refn. [204–206, 213].

Um die Nicht-Kovarianz zu vermeiden, die der Dynamik der QCD inhärent ist, zerstört man ihre Eichinvarianz von Hand, indem man zur Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ einen *eichfixierenden Term* $\mathfrak{L}_{\text{gf.}}$ hinzuaddiert, der genau einen Repräsentanten auswählt je Äquivalenzklasse von A (die für genau eine physikalische Feldstärke steht). Explizit ist $\mathfrak{L}_{\text{gf.}}=-\xi^{-1}\,\text{tr}\,\mathcal{F}^2[A]$ für die Eichfixierung $\mathcal{F}[A]=C$, wobei $\mathcal{F}$ ein *lokales Funktional* in A ist (d.h. Funktion von $A_\mu(x)$ und $\partial_\mu A_\nu(x)$), das wie die Funktion $C(x)$ seine Werte in der Liealgebra $su(N_c)$ annimmt; der Parameter ξ wird induziert durch *gauß'sche* Mittelung von C und ist frei wählbar. Konsequenz dieses Verfahrens ist, daß wieder alle $4\cdot(N_c^2-1)$ Komponenten $A_{\mu a}$ dynamische Feldvariablen sind. Offensichtlich ist aber dadurch zum einen die Physik der Theorie nicht mehr dieselbe, und zum anderen hat ihr Zustandsraum *indefinite Metrik*. In der QED wird simultan das eine gelöst, das andere umgangen – dadurch, daß man nach Gupta und Bleuler [27, 106] physikalische Zustände auf den linearen Unterraum beschränkt, der definiert ist durch Restriktion der Lorentz-Eichung auf *positive Frequenzen*: $(\partial_\mu A^\mu)^+|\psi\rangle=0$.

In der QCD ist dies nicht möglich. Um den physikalischen Gehalt der Theorie nicht zu ändern, müssen *Faddeev-Popov-Geistfelder* eingeführt werden, die als *fermionische (d.h. antikommutierende) Skalare* formal jeweils den Freiheitsgrad (-1) beitragen, vgl. Ref. [71, 72]. Hinzufügen von je (N_c^2-1) Geister $c_a(x)$ und Antigeister $\bar{c}_a(x)$ zum Eichfixierungsterm führt also wieder auf die korrekte Anzahl von Freiheitsgraden zurück. Zur Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ der QCD ist also neben dem Anteil $\mathfrak{L}_{\text{gf.}}$ zur Eichfixierung ein Geist-Anteil $\mathfrak{L}_{\text{ghost}}$ zu addieren. Dieser hängt allgemein von der Eichfixierung ab, das heißt von dem Funktional $\mathcal{F}$; er lautet explizit $\mathfrak{L}_{\text{ghost}}=-\bar{c}_a(\delta\mathcal{F}_a[A]/\delta A_{\mu b})(D_\mu c)_b$, wobei sich gemäß $(D_\mu c)_a=\partial_\mu c_a-g f_{abc}A_{\mu b}c_c$ die kovariante Ableitung auf die adjungierte Darstellung bezieht. So wählt die Fixierung auf das *(Eich)Orbit*, das durch $\mathcal{F}[A]\equiv\partial_\mu A^\mu=0$ gegeben ist, das heißt $\mathfrak{L}_{\text{gf.}}=-(2\xi)^{-1}\,(\partial_\mu A^\mu{}_a)^2$, die Klasse der *Lorentz-Eichungen* aus; ihr Geistterm folgt zu $\mathfrak{L}_{\text{ghost}}=\bar{c}_a\,\partial^\mu(D_\mu c)_a$. Es werden $\xi=1$ als die *Feynman-* und $\xi=0$ als die *Landau-Eichung* bezeichnet.

Mit der Lagrangedichte $\mathfrak{L}=\mathfrak{L}_{\text{YM}}+\mathfrak{L}_{\text{D}}$, vgl. Gl. (0.1), ist in diesem Sinne die *effektive Lagrangedichte der* QCD:

$$\mathfrak{L}_{\text{eff.}} \;=\; \mathfrak{L} \;+\; \mathfrak{L}_{\text{gf.}} \;+\; \mathfrak{L}_{\text{ghost}} \tag{0.6}$$

mit

$$\mathfrak{L}_{\text{gf.}} \;=\; -\xi^{-1}\;\text{tr}\;\mathcal{F}^2[A] \;=\; -\frac{1}{2\xi}\;(\partial_\mu A^\mu{}_a)^2 \tag{0.6$'$}$$

$$\mathfrak{L}_{\text{ghost}} \;=\; -\,\bar{c}_a\;\frac{\delta\mathcal{F}_a[A]}{\delta A_{\mu b}}\;(D_\mu c)_b \;=\; -\,\bar{c}_a\;\partial^\mu\;(D_\mu c)_a \tag{0.6$''$}$$

und die zweite Darstellung den Fall der Lorentz-Eichungen illustriert.

aufgrund der *Gribov ambiguities* der nichtabelschen Theorie, vgl. Fußnote 0.19 –, der *nichtperturbative dressings* verhindert und dadurch, daß (Konstituenten)Quarks asymptotisch werden.

Eichinvarianz ist von Hand zerstört, *Invarianz unter* BRST-*Transformationen* an ihre Stelle getreten – wie gezeigt wurde unabhängig voneinander von Becchi, Rouet, Stora [16,17] und Tyutin [214]. Für die Felder $A_{\mu a}$ und ψ haben sie *infinitesimal* die Gestalt

$$\delta_{\text{BRST}} A_{\mu a}(x) = -\frac{1}{g}(D_\mu c)_a(x) \tag{0.7}$$

$$\delta_{\text{BRST}} \psi(x) = \mathrm{i}\, c\psi(x) \tag{0.7'}$$

haben; siehe auch die Refn. [18,98,123,201]. Vergleich mit den entsprechenden Ausdrücken für Eichtransformationen – die Gln. (0.5), (0.5′) – unterstreicht den engen Zusammenhang.

Diese Invarianz der effektiven Lagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{eff.}}$ wird durch die nilpotente BRST-*Ladung* Q_{BRST} generiert: $Q^2_{\text{BRST}} = 0$. *Physikalische Zustände* sind dadurch definiert, daß sie gefordert werden als BRST-*invariant*; dies zeichnet als physikalisch dieselben Zustände aus, wie die Bedingung oben: daß sie annihiliert werden durch den Gauß'schen Operator. Die Forderung, daß BRST-invarianten Zuständen eine definierte Colour-Ladung zugeordnet werden kann, übersetzt sich dahin, daß die Geister im räumlich Unendlichen verschwinden. Für Zustände, die sich konstituieren aus Eich- und Materiefelder, ist aufgrund der Analogie der Transformationsgleichungen äquivalent, entweder BRST-*Invarianz* zu fordern oder *Eichinvarianz* unter den wie oben eingeschränkten Transformationen. Wie allgemein üblich sei im folgenden mit „Eichinvarianz" sprachlich nicht mehr differenziert das eine und das anderen.

Hiermit haben wir vorgestellt die *Standardformulierung der* QCD[0.19], deren wesentliche Charakteristika sind: *Lokalität*, *Poincarékovarianz* und *Eich-* im Sinne von *BRST-Invarianz*.

Aus ihrer Lagrangedichte hergeleitet werden Feynman-Regeln, die eine *lokale und Poincaré-kovariante Diagrammatik* darstellen, vgl. Ref. [220]. Auf dieser basisiert der Beweis 't Hoofts ihrer Renormierung und sein explizites Regularisierungs- und Renormierungsverfahren, vgl. unsere Ausführungen dazu; ebenso der Beweis Asymptotischer Freiheit, vgl. unsere Ausführungen dazu. Beide Beweise zusammen heißen Selbstkonsistenz der Theorie und ihre Konsistenz mit der Phänomenologie der Starken Wechselwirkung im Ultravioletten (perturbativen) Bereich. Ihre Konsistenz auch im Infraroten (nichtperturbativen) Bereich ist akzeptiert, wenn auch keine Technik existiert, ihre zentralen Phänomene wie sie Chirale Symmetriebrechung und Confinement formal-analytisch aus der effektiven Lagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{eff.}}$ herzuleiten. Die Diagrammatik *perturbativer* QCD scheint dazu ungeeignet zu sein.

Ausblick

Die vorliegende Arbeit wendet sich zu der Struktur der Theorie im Infraroten, das heißt auf die Struktur der QCD in ihrem *nichtperturbativ* dominierten Bereich, dem gleichermaßen zugrunde liegt die vorgestellte lokale Poincaré-kovariante Formulierung der QCD als Lagrange'sche Quantenfeldtheorie. Diese ist – wir rekapitulieren – vollständig bestimmt durch die formulierte effektive Lagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{eff.}}$, wenn vorgegeben sind ein Regularisierungs- und Renormierungsverfahren und Zahlenwerte für dessen Parameter.

Alle physikalischen Aussagen, das heißt alle observablen Größen einer renormierbaren Quantenfeldtheorie lassen sich ausdrücken durch ihre *ein-Teilchen-irreduziblen (n-Punkt-) Greenfunktionen* $G^{(n)}_{\text{1–irred.}}$, die in diesem Sinne synonym stehen für die Theorie an sich, s.u.

[0.19] Sei angemerkt, daß der vorgestellten Quantisierung im Funktionalintegral-Formalismus nach Faddeev und Popov [71,72] das *perturbative Konzept* bereits inhärent ist: Insofern, als sie fordert, daß $\mathcal{F}[A] = C$ das Eichfeld auf *genau ein* (Eich)Orbit fixiert. In einer nichtabelschen Eichtheorie ist dies aber nicht der Fall für große Werte des Eichfelds, das heißt auf nichtperturbativen Skalen; bzgl. dieser *Gribov ambiguities* [99] vgl. Ref. [114]. Der Formalismus ist *nichtperturbativ* „krank" definiert. Es gibt Versuche, ihn entsprechend zu modifizieren [190]; solange dies nicht gelungen ist, bleibt nur das Problem als Dokument dessen zu ignorieren, daß (nichtabelsche) Quantenfeldtheorie noch immer nicht mathematisch in aller Strenge formuliert ist.

Seite 23. Diese Greenschen Funktionen sind im *Funktional- oder Pfadintegralzugang* definiert über normierte Funktionalintegrale eines entsprechenden Produkts von n Quantenfeldern, gewichtet mit der exponentierten *effektiven Wirkung* $\exp iS_{\text{eff.}}$, die genau das Raumzeit-Integral der effektiven Lagrangedichte ist: $S_{\text{eff.}} = \int dx \mathfrak{L}_{\text{eff.}}(x)$. „Die Theorie lösen" besteht im eigentlichen darin, diese Funktionalintegrale auszuwerten. Allerdings lassen sich Funktionalintegrale allgemein lösen nur für eine Wirkung, in der die Felder *quadratisch* auftreten; nur dann lassen sich die Integrationen auf *Gauß'sche Integrationen* zurückführen, nur diese lassen sich analytisch auswerten.

Perturbative QCD ist definiert genau durch eine perturbative Behandlung des Funktionalintegrals. Dabei wird die effektive Wirkung formal in zwei Summanden aufgeteilt: in einen in diesem Sinne quadratischen Anteil, der analytisch ausgewertet wird, und in einen Rest, der als *kleine Korrektur* im Rahmen einer Störungsreihe erfaßt wird. Effektiv ist dies eine Entwicklung in dem Parameter $g^2_{\text{ren.}}/4\pi$ (mit $g_{\text{ren.}}$ die *renormierte Eichkopplung* der QCD), und sie ist sinnvoll, nur solange diese klein ist, das heißt Abbruch der Reihe nach einer endlichen Anzahl Glieder ein kleiner Fehler bedeutet. Dies ist der Fall im ultravioletten Bereich der Theorie, der asymptotisch frei ist: $g_{\text{ren.}}(\mu)$ verschwindet mit anwachsender (Energie)Skala μ. Dies ist nicht der Fall im Infraroten, wo die nichtabelsche Eichstruktur der Theorie – die Selbstkopplung des Eich-Vektorfelds durch den Kommutatorterm $[A_\mu, A_\nu]$ im Feldstärkentensor – zu einem Anwachsen der Kopplung bis hin zu ihrer formalen Divergenz am sogenannten *Landau-Pol* führt.

Kapitel 1 geht hierauf näher ein. Es wird sich die dringende Frage nach einem Verfahren ergeben, mithilfe dessen das Funktionalintegral ausgewertet werden kann, ohne auf eine störungstheoretische Behandlung im angesprochenen Sinne zurückgreifen zu müssen. Wir werden dieser Frage begegnen, indem wir das *Modell des Stochastischen Vakuums* (MSV) von Dosch und Simonov motivieren und einführen. Die geführte Diskussion und der angegebene Formalismus liegen wesentlich zugrunde den nachfolgenden Kapitel.

Kapitel 2 führt aus, wie das Modell des Stochastischen Vakuums bezogen wird auf Hochenergiestreuung und einer Analyse zugänglich macht nichtperturbative Beiträge. – Die eigentliche Zielrichtung unserer Arbeit: *Hochenergiestreuung im nichtperturbativen Vakuum der Quantenchromodynamik.*

Explizit geschieht dies mithilfe einer nichtperturbativen Formel für die Streuung zweier Colour-Singuletts, die repräsentiert sind in Termen (eichinvarianter) Wegner-Wilson-Loops, bei *kleinem* invarianten Quadrat des Impulsübertrags, typischerweise $-t < 1\ \text{GeV}^2$, *im Limes unendlichen* invarianten Quadrats der Schwerpunktenergie, $s \to \infty$.

Wir geben an die Herleitung dieser Formel durch Nachtmann. Vor dem Hintergrund dieser Herleitung argumentieren wir, in welcher Weise die Formel verallgemeinert werden kann zur Anwendung auf große aber *endliche* Schwerpunktenergie. Wir gelangen zu einem Ausdruck, der dominiert ist von dem Erwartungswert bezüglich des nichtperturbativen QCD-Vakuums zweier Wegner-Wilson-Loops, deren zeitartige Linien *nahe* des Lichtkegels liegen – statt exakt darauf. Die Streuamplitude kann daher *analytisch fortgesetzt* werden von der physikalischen *Minkowskischen Raumzeit* in deren analytische Fortsetzung ins *Euklidische*. Wir arbeiten diese Fortsetzung explizit aus.

Zum einen führt die Rechnung zu einem tieferen Verständnis davon, wie sich vor dem Hintergrund des MSV nichtperturbative Streubeiträge bei hohen Energien $\sqrt{s}$ konstituieren im Zusammenspiel von longitudinaler und transversaler Dynamik. Zum anderen machen wir die Streuamplitude, die *a priori* nur definiert ist in der physikalischen Minkowskischen Raumzeit, zugänglich einer Auswertung in Euklidischer Raumzeit. Dies ist von Bedeutung aus verschiedenen Gründen: Hier ist die Argumentation sehr viel natürlicher, die zu den An-

nahmen führt, auf denen das MSV ruht; – mit anderen Worten, wir bestätigen *a posteriori* die naive Minkowskische Formulierung des MSV. Und hier ist im Prinzip eine *modellunabhängige* Auswertung möglich: durch numerische Simulationen im Rahmen von QCD als Gittereichtheorie.

In den beiden folgenden Kapiteln wird der angegebene Formalismus bezogen auf explizite Teilchenreaktionen, die in besonderer Weise dominiert sind durch nichtperturbative QCD.

Kapitel 3 diskutiert diffraktive Leptoproduktion eines Vektormesons V im Grundzustand an einem Nukleon N: Das Lepton strahlt ein virtuelles Photon γ^* ab, das diffraktiv und bei hoher Schwerpunktenergie an N streut und im Sinne der Reaktion $\gamma^* N \to V N$ exklusiv ein Vektormeson produziert; das Nukleon bleibt dabei vollständig intakt. Diese Reaktion wird theoretisch zugänglich im Rahmen des MSV mit zusätzlicher Kenntnis der hadronischen Wellenfunktionen der involvierten Teilchen.

Zunächst rechtfertigt der diskutierte kinematische Bereich großer inverianter Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$, die Zustände zu repräsentieren als Superposition ihres führenden Fock-Zustandes. Auf der einen Seite der Streuung wird zugrunde gelegt für das Nukleon der einfache Ansatz von Quark-Diquark-Paaren, deren beiden Konstituenten gleichverteilt sind bezüglich ihres longitudinalen Impulses und Gauß'sch verteilt bezüglich ihres trensversalen Relativimpulses. Auf der anderen Seite der Streuung wird das Photon repräsentiert als Superposition von Quark-Antiquark-Zuständen, deren Wellenfunktion bestimmt ist durch *Light-Cone Perturbation Theory* (LCPT), das heißt durch gewöhnlichen Störungstheorie auf dem Lichtkegel. Diese Beschreibung ist wohldefiniert für große Virtualitäten Q des Photons, bricht aber bei kleinen Skalen Q zusammen. Dies geschieht bei zunehmender Manifestation der *Brechung der Chiralen Symmetrie*[0.20] und von *Confinement*; dann wenn diese Effekte die Quark-Antiquark-Dipole auf transversale Ausdehnungen beschränken, die sehr viel kleiner sind als $1/Q$, die transversale Ausdehnung des perturbativen Photons. In praxi ist dies massiv zu erwarten für Virtualitäten kleiner als ein GeV, $Q^2 < 1\ \mathrm{GeV}^2$.

In Analogie zu der Wellenfunktion des Photons modellieren wir eine Quark-Antiquark-Wellenfunktion des Vektormesons. Dies heißt im wesentlichen, die Helizitätsstruktur des Quarks und Antiquarks von der Wellenfunktion des Photons zu übernehmen und den das Photon in der LCPT charakterisierende Energienenner $\left(z(1-z)\,Q^2 + m^2 + \mathbf{k}^2\right)^{-1}$ zu ersetzen durch eine Funktion, die abhängt von dem transversalen Impuls $\mathbf{k}^2$, der verknüpft ist mit dem transversalen Relativimpuls von Quark und Antiquark, und dem Anteil z des Quarks, $(1-z)$ des Antiquarks am gesamten Lichtkegelimpuls. Für diese Funktion wird ein Ansatz gemacht, der motiviert ist durch die Gauß'schen Wellenfunktionen des transversalen Harmonischen Oszillators; seine zwei Parameter werden Fixiert durch Forderung von Normiertheit und Reproduktion der observablen elektronischen Zerfallsbreite des Vektormesons.

Auf Basis der in dieser Weise konstruierten hadronischen Wellenfunktionen werden berechnet charakteristische Observable der Reaktion $\gamma^* N \to V N$ und verglichen mit den experimentellen Daten – soweit diese vorhanden sind. Wir untersuchen insbesondere die Produktion der Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$ und finden insgesamt gute Übereinstimmung mit dem Experiment.

Die – drei – Parameter des MSV sind numerisch fixiert durch Prozesse, die allenfalls entfernt in Zusammenhang stehen mit den diskutierten Reaktionen. Wir sehen daher bestätigt als *wesentlich* den grundlegenden Mechanismus des MSV, der nichtperturbative Beiträge zur

[0.20] Die Lagrangedichte der QCD besitzt zusätzlich zu den Symmetrien unter $\mathcal{C}$-, $\mathcal{P}$- und $\mathcal{T}$-, lokale $SU(N_c)$-Eich- und Poincaré-Transformationen noch weitere Symmetrien: Es sind dies, im Limes verschwindender Fermionmassen, die in Fußnote 0.17 angemerkte globale $SU(N_F)$-Symmetrie und die *chirale Symmetrie*, d.h. Invarianz unter globalen $SU(N_F)_l \otimes SU(N_F)_r$-Transformationen, wobei die Skripte für *Links-* und *Rechts-Händigkeit* stehen.

Hochenergiestreuung erklärt durch die *Ausbildung und Wechselwirkung gluonischer Strings* zwischen den (Anti)Quarkkonstituenten.

Kapitel 4 arbeitet die Relevanz dieses Mechanismus weiter heraus in Reaktionen, die hierzu prädestiniert sind aufgrund der erheblich größeren transversalen Ausdehnung der involvierten – struenden – Teilchen.

Zum einen erweitern wir unsere Analyse, indem wir auch Photonen mit kleiner bis verschwindender Virtualität – das heißt Photoproduktion: $Q^2 \equiv 0$ – in unsere Diskussion mit einbeziehen. Dies, so kann argumentiert werden, ist möglich durch phenomenologische Extrapolation der renormierten Lagrange'schen Quarkmasse, wie sie auftritt in der LCPT, von $Q^2 \cong 1\,\mathrm{GeV}^2$ nach $Q^2 = 0$ hin zu einer Konstituentenquarkmasse.

Zum anderen betrachten wir neben der exklusiven Produktion des ρ-Vektormesons auch die seiner ersten beiden angeregten Zustände $\rho(1450)$ und $\rho(1700)$. Benötigt werden hierzu entsprechend die Quark-Antiquark-Wellenfunktionen der angeregten Vektormesonen. Wir geben Argumente dafür an, die angeregten Zustände als Mischung eines Quark-Antiquark-$2S$-Zustandes und eines inerten Restes aufzufassen, der dadurch per definitionem charakterisiert ist, daß seine Kopplung an das Photon unterdrückt ist. Es sind dies also entweder Anregungen höheren Bahndrehimpulses, deren Kopplung differiert von Null erst durch relativistische Effekte, oder höhere Fock Zustände: im einfachsten Fall ein Quark-Antiquark-$2D$-beziehungsweise ein hybrider Quark-Antiquark-Gluon-Zustand. Die explizite Konstruktion der Wellenfunktion geschieht analog zur Wellenfunktion des Grundzustandes – der unverändert übernommen wird vom vorhergehenden Kapitel 3. Die Parameter werden analog fixiert und zusätzlich gefordert Orthogonalität zum Grundzustand.

Auf Basis dieser phänomenologischen Ansätze werden berechnet charakteristische Observable und diese verglichen mit den experimentellen Daten – soweit diese vorhanden sind. Abgesehen von einzelnen subtileren Fragen, erhalten wir en gros trotz der Einfachheit unserer Ansätze gute bis sehr gute Übereinstimmung. Dies trifft insbesondere zu für Größen, die wir postulieren, während sie in der sonstigen Literatur nur parametrisiert sind.

Zusammenfassend die Kapitel 3 und 4 sind zwei Aspekte zu betonen. Angesichts dessen, daß die Parameter des MSV numerisch fixiert sind in Prozessen mit allenfalls entfernten Zusammenhang mit den diskutierten Reaktionen, unterstreicht die gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten – soweit vorhanden – die Relevanz des Modells. Das heißt die allgemeine Relevanz seines grundlegenden Mechanismus der Ausbildung und Wechselwirkung gluonischer Strings für nichtperturbative Quantenchromodynamik. Andererseits geben wir in großem Umfang numerische Postulate an für Observable, die wir vorschlagen zur Messung – zur Verifizierung (oder Falsifizierung) dieses Mechanismus.

Die wesentlichen Resultate unserer Arbeit von Kapitel 3 und 4 sind veröffentlicht in den beachteten Refn. [65] beziehungsweise [125–127]. Ihnen liegt zugrunde die $s \to \infty$-asymptotische T-Amplitude. Die T-Amplitude für große aber endliche Werte von s ist Resultat der Analyse von Kapitel 2, die chronologisch den Abschluß unserer Arbeit darstellt; ihre Veröffentlichung ist in Vorbereitung in Ref. [128].

Wir weisen ferner hin auf Ref. [124], unsere Diplomarbeit an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, die mit Fragen aufgeworfen hat, die hier diskutiert und beantwortet werden.

Kapitel 1

Stochastisches Vakuum

Wir diskutieren in dieser Arbeit diffraktive Streuung bei hohen invarianten Schwerpunktenergien als Konsequenz *nichtperturbativer* QCD. Zu nichtperturbativer QCD existiert kein kanonischer Zugang aber die verschiedensten Ansätze. Wir werden daher zunächst unseren Zugang zu diesem Bereich der QCD kleiner (Energie)Skalen formulieren: das *Modell des Stochastischen Vakuums* (MSV) von Dosch und Simonov. In diesem ersten Kapitel wollen wir dieses Modell in seinen Grundzügen vorstellen: die zugrundeliegende Idee – wie diese motiviert ist und die de facto Annahmen, die sie bedeutet – die Größen, in Termen derer das Modell arbeitet, die notwendige Mathematik und den resultierenden Formalismus im allgemeinen. Zwangsläufig, in Hinblick auf unsere Anwendung auf diffraktive Hochenergiestreuung, gehen wir ein auf die Beschreibung von Confinement.

Nichtperturbative QCD steht synonym für den Infrarotbereich, also den Bereich kleiner (Energie)Skalen μ der QCD, die allgemein definiert ist durch die Lagrangedichte $\mathfrak{L}$ beziehungsweise die effektive Lagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{eff.}}$, vgl. Gl. (0.1) bzw. (0.6).

Die Asymptotische Freiheit dieser Theorie auf *großen* Skalen μ, das heißt das Verschwinden der renormierten Eichkopplung $g_{\text{ren.}}(\mu)$ asymptotisch mit $\mu \to \infty$ legt eine Entwicklung in diesem Parameter nahe und definiert durch die entsprechende Störungsreihe *perturbative* QCD: Terme höherer Ordnung bedeuten eine nur „kleine“ Korrektur und schon die ersten Terme vermitteln Aussagen von in praxi ausreichender Genauigkeit; eine „kleine“ Anzahl höherer Ordnungen ist dann miteinzubeziehen, wenn eine höhere Genauigkeit gefordert wird.

Konträr hierzu ist das Verhalten der Theorie auf *kleinen* Skalen μ. (Diffraktion ist genau dominiert von großen Abständen der Ordnung $1/\mu$.) So zeigt die Extrapolation der Eichkopplung $g_{\text{ren.}}(\mu)$ hin zu kleinen μ mit Argumenten der Renormierungsgruppe (also das perturbative Konzept impliziert), daß diese anwächst wie $(\ln \mu/\Lambda_{\text{QCD}})^{-1}$, das heißt formal sogar divergiert für $\mu = \Lambda_{\text{QCD}}$, dem Landau-Pol der QCD – sie also weit davon entfernt ist, „kleiner“ Parameter zu sein. Auf kleinen Skalen konvergiert die Störungsreihe also nicht, die herkömmliche Störungstheorie, mit anderen Worten: perturbative QCD, ist nicht definiert.

Daß eine Entwicklung in $g_{\text{ren.}}(\mu)$ auf beliebigen Skalen μ nicht definiert sein kann, folgt schon *a priori*, seit bekannt ist, daß Eichfeldkonfigurationen existieren – aufgrund einfacher Überlegungen sogar existieren müssen, vgl. in Ref. [147] –, die zur effektiven Lagrangedichte und damit zur effektiven Wirkung $S_{\text{eff.}} = \int dx \mathfrak{L}_{\text{eff.}}(x)$ der QCD proportional zu $g_{\text{ren.}}^{-2}$ beitragen. Dies insofern, als sich observable Größen – im Formalismus des Funktionalintegrals – herleiten aus dem Erzeugenden Funktional Z nach Gl. (1.6), in das wesentlich eingeht das Exponential der effektiven Wirkung, $\exp iS_{\text{eff.}}$; für verschwindende Kopplung $g_{\text{ren.}}$ besitzt Z also eine wesentliche Singularität und daher observable Größen keine Entwicklung um die-

sen Punkt. Auf der anderen Seite sind diese Beiträge relevant, da für sie die (Euklidische) effektive Wirkung ein Extremum annimmt, sie also Lösungen der klassischen Theorie sind, um die herum Quantenfluktuationen auftreten.

Wir können hier nicht näher auf diese sogenannten *Instanton(konfiguration)en* eingehen, die Mitte der siebziger Jahre explizit angegeben wurden, vgl. die Refn. [20, 209]; was ihre Konstruktion und Relevanz für die QCD betrifft verweisen wir auf die Refn. [34, 68, 195]. Wesentlich ist aber, daß sie in Minkowskischer Raumzeit physikalisch zu interpretieren sind als Wahrscheinlichkeit für den Übergang (im Raum des Eichfelds) zwischen zwei topologisch nicht-äquivalenten Grundzuständen – Vakua – der Theorie. Oder: Das *physikalische* Vakuum der QCD ist zu verstehen als Überlagerung unendlich vieler topologisch nicht-äquivalenter Vakua. Es hat in diesem Sinne eine *nichttriviale* Struktur.

Ein ähnlich anknüpfendes Verständnis des physikalischen Vakuums liegt den *Summenregeln der* QCD zugrunde, wie sie 1979 von Shifman, Vainshtein, Zakharov formuliert worden sind in Ref. [193], vgl. auch Ref. [161]: Ausgehend von perturbativer QCD treten nichtperturbative Beiträge auf als power corrections, die bestimmt sind durch Erwartungswerte bezüglich des *physikalischen* Vakuums, die identisch verschwinden würden bezüglich des *perturbativen* Vakuums. Explizit wird die *Operatorproduktentwicklung* Wilsons, vgl. Ref. [233], ausgedehnt auf nichtperturbative Skalenbereiche und angewandt auf Korrelatoren von Vektorströmen, vgl. Ref. [159]. In der Entwicklung treten normalgeordnete Operatoren in den Lagrange'schen Quantenfeldern $\mathcal{O}_d$ auf mit beliebig hoher kanonischen Dimension d. Alle bis auf $\mathcal{O}_0 \equiv \mathbb{1}$ verschwinden per definitionem bezüglich des perturbativen Vakuums; ihre Erwartungswerte bezüglich des physikalischen Vakuums, parametrisieren nichtperturbative Beiträge über eine nichttriviale Struktur des Vakuums der QCD.

In dieselbe Richtung einer nichttrivialen Struktur des Vakuums der QCD, gehen die Arbeiten 't Hoofts von 1978/79, siehe die Refn. [210, 211]. Sie zeigen, daß das Vakuum einer nichtabelschen Eichtheorie aufgefaßt werden kann als Kondensat magnetischer Monopole, das sich daher verhält wie ein dualer Supraleiter; Confinement das Ausbilden eines (chromo)elektrischen gluonischen Strings erklärt sich durch einen dualen Meißner-Effekts. Vgl. auch die Refn. [170, 212].

Das gemeinsame Bild aller dieser Ansätze ist das folgende: Im Sinne von Quantenfluktuationen werden aus dem Vakuum heraus permanent und, da masselos, in großer Zahl niederenergetische (oder -frequenten) Gluonen erzeugt, treten aufgrund der Nicht-Abelizität der QCD miteinander in eine komplizierte, nichtlineare Wechselwirkung und werden wieder vernichtet. Dies führt zu einem permanent fluktuierenden Eichfeld-Hintergrund.

Im Formalismus des Funktionalintegrals, der bekanntereren und intuitiveren Quantenformulierung nichtabelscher Feldtheorien (im Vergleich zum BRST-Operatorformalismus), wird dieser Hintergrund gerade vermittelt durch die Integration über alle Eichfeldkonfigurationen, die in komplizierter Weise gewichtet sind durch $\exp iS_{\text{eff.}} = \exp \mathrm{i} \int dx\, \mathfrak{L}_{\text{eff.}}(x)$. Hier gehen ein die Yang-Mills- und die Dirac-Lagrangedichten, $\mathfrak{L}_{\text{YM}}$ bzw. $\mathfrak{L}_{\text{D}}$, wie auch die Zwangsbedingungen der Theorie, die sich in einem Eichfixierungs- und Geistterm, $\mathfrak{L}_{\text{gf.}}$ bzw. $\mathfrak{L}_{\text{ghost}}$, manifestieren; vgl. die Gln. (0.6′) bzw. (0.6″) bzgl. deren expliziten Gestalt.

Es ergeben sich Schlußfolgerung für die Formulierung des MSV, vgl. auch Ref. [62]. Dosch und Simonov nehmen zunächst an, das Eichfeldmaß des Funktionalintegrals aufspalten zu können in die Summe zweier Anteile, die von hoch- beziehungsweise niederfrequenten Gluon-Eichfeldern dominiert sind. Der erste Anteil kann aufgrund von Asymptotischer Freiheit kanonisch behandelt werden im Rahmen von perturbativer QCD. Der zweite, verantwortlich für den nichtperturbativen Eichfeld-Hintergrund, wird durch einen expliziten

Ansatz approximiert.
Es wird argumentiert: Das Infrarotproblem der QCD ist Konsequenz des perturbativen Konzeptes, das auf beliebigen Skalen nicht geeignet ist – da nicht definiert –, die Theorie auszuwerten; es ist insofern Artefakt des Zugangs zur Theorie und nicht ihr selbst inhärent. In der observablen Physik existiert kein Infrarotproblem. Offensichtlich sind im Funktionalintegral die Eichfeldkonfigurationen in subtiler Weise genau so gegeneinander gewichtet, daß Beiträge, die für sich genommen divergieren, einander aufheben.

Dies suggeriert die zwei Annahmen, die Grundannahmen des MSV: Die Fluktuationen niederfrequenter Eichfeldkonfigurationen (die ihrer Komplexität wegen bislang nicht haben systematisch erfaßt werden können) können approximiert werden als *stochastisch* und sie führen zu *infrarot-endlichen* Aussagen für observable Größen.

Formal heißt dies: Für (observable) Erwartungswerte im nichtperturbativen Vakuum der QCD – repräsentiert im Formalismus des Funktionalintegrals, das heißt als Integral des entsprechenden Eichfeld-Funktionals, das aufzufassen ist als dessen Mittelung bezüglich eines komplizierten Integrationsmaßes über sämtliche niederfrequenten Eichfeldkonfigurationen – wird angenommen, es existiert eine *konvergente Kumulanten- oder Clusterentwicklung*. Darunter wiederum ist zu verstehen eine konvergente Entwicklung, deren n-ter Term gegeben ist durch die *Kumulante n-ter Ordnung*, eine nichtlokale Größe mit n Raumzeit-Argumenten $x_1, \ldots, x_n$, die definiert ist über ihre *Clustereigenschaft*, das heißt sie verschwindet „schnell“ (de facto exponentiell), wenn nur eines dieser Argumente den Cluster verläßt (den Bereich fest umrissener Ausdehnung), in dem die übrigen Argumente liegen.

Diese Entwicklung induziert als Parameter im wesentlichen die *Korrelationslänge* als Maß der Ausdehnung des korrelierten Bereiches und als Maß der Korrelationsstärke die *Normierungen* der einzelnen Kumulanten – die aufgrund der Bianchi-Identitäten $D_\rho F_{\mu\nu} + \text{zykl.} = 0$ nicht unabhängig voneinander sind, vgl. die Refn. [8, 191].

Wesentlich ist, daß der zugrundeliegende stochastische Prozeß nicht bezüglich der *Eichfelder* A_μ, sondern bezüglich der *Eichfeldstärken* $F_{\mu\nu}$ angenommen wird. Die Kumulanten beziehen sich auf diese Felder und stehen für die *Korrelation auf kleinen Abständen von Eichfeldstärken*. Dies impliziert dann – anstatt sie von vornherein auszuschließen – die komplexe *Korrelation auf großen Abständen von Eichfeldern*, mit anderen Worten deren Wechselwirkung bis hin über makroskopische Distanzen, wie sie gerade verantwortlich ist für den von Aharonov und Bohm beschriebenen Effekt.

Das MSV in seiner allgemeinsten Form definiert sich genau über die Existenz einer konvergenten Kumulantenentwicklung in diesem Sinne. Noch unabhängig von dem zugrundeliegenden stochastischen Prozeß, das heißt noch ohne die ihn definierenden Kumulanten explizit anzugeben – letztlich aufgrund deren Clustereigenschaft –, führt es zu *linearem Confinement* für ein statisches Quark-Antiquark-Paar.

Wird dann der stochastische Prozeß spezifiziert, ist das dadurch definierte MSV im engeren Sinne ein voraussagekräftiges Instrument, indem es in die Lage versetzt, nichtperturbative Observable analytisch anzugehen und auszuwerten.

Es ist offensichtlich um so voraussagekräftiger, durch je weniger Parameter es bestimmt ist, je „einfacher“ der zugrundeliegende Prozeß ist. Der einfachste stochastische Prozeß ist ein *(zentrierter) Markov-* oder *Gauß'scher Prozeß*, das heißt nur die *Kumulante zweiter Ordnung* ist von Null verschieden. Das MSV im engeren Sinne spezifiziert in genau dieser Weise den Prozeß, der die Fluktuationen der niederfrequenten Eichfeldkonfigurationen beschreibt. Diese Annahme ist „natürlich“ schon insofern, als die stochastische Interpretation der Fluktuationen nur dann sinnvoll ist, wenn die assoziierte Kumulantenentwicklung

„schnell“ konvergiert, wenn höhere Ordnungen also nur „kleine“ Korrekturen darstellen. Verschwinden die Kumulanten höherer Ordnung identisch und damit die Korrekturen, ist dies trivialerweise der Fall und die erste Approximation eines beliebigen sinnvollen Prozesses.

Impliziere das MSV zusätzlich diese Gauß'sche Annahme. Es ist also vollständig bestimmt durch die *Kumulante zweiter Ordnung*, die nichtlokale Verallgemeinerung des *Gluonkondensats* $\langle g^2 FF\rangle_A \equiv \langle g^2 F_{\mu\nu a}(0) F^{\mu\nu}{}_a(0)\rangle_A$ der Summenregeln von Shifman, Vainshtein, Zakharov. Sie ist schon weitgehend bestimmt durch die Invarianz der QCD unter $\mathcal{C}$-, $\mathcal{P}$- und $\mathcal{T}$-Transformationen und ihrer (lokalen) Eich- und Poincaréinvarianz. Sieht man ab von ihrer expliziten funktionalen Form für korrelierte Raumzeit-Argumente (die tatsächlich zweitrangig ist), so treten zwei Parameter auf: die Normierung der Kumulante zweiter Ordnung, die gegeben ist durch $\langle g^2 FF\rangle_A$, und die Korrelationslänge a der Eichfeldstärken. Beides sind Größen von herausragender Bedeutung in nichtperturbativer QCD im allgemeinen, ihre Zahlenwerte daher innerhalb gewisser Bereiche festgelegt.

Wir wollen diese Gedanken formaler fassen und das MSV explizit formulieren.

1.1 Observable als Eichfeld-Funktionalintegrale

Wie in der Einleitung ausgeführt ist eine renormierbare Quantenfeldtheorie (bei Angabe eines Renormierungsschemas und Zahlenwerten für dessen Parameter) vollständig bestimmt durch ihre Lagrangedichte. Für die QCD haben wir effektiv

$$\mathfrak{L}_{\text{eff.}} \;=\; \mathfrak{L} \;+\; \mathfrak{L}_{\text{gf.}} \;+\; \mathfrak{L}_{\text{ghost}} \tag{1.1}$$

Dabei ist

$$\mathfrak{L} \;=\; \mathfrak{L}_{\text{YM}} \;+\; \mathfrak{L}_{\text{D}} \;=\; -\frac{1}{2}\,\text{tr}\, F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \;+\; \bar\psi\big(\text{i}\,\gamma^\mu D_\mu - m\big)\psi \tag{1.2}$$

die eigentliche Lagrangedichte der QCD, die sich aus dem Yang-Mills- und dem Dirac-Anteil zusammensetzt, vgl. Gl. (0.1); die Dichten

$$\mathfrak{L}_{\text{gf.}} \;=\; -\xi^{-1}\,\text{tr}\,\mathcal{F}^2[A] \qquad \mathfrak{L}_{\text{ghost}} \;=\; -\bar c_a\,\frac{\delta \mathcal{F}_a[A]}{\delta A_{\mu b}}\,(D_\mu c)_b \tag{1.3}$$

sind der die Eichung auf $\mathcal{F}[A]=C$ fixierende Term beziehungsweise der zugehörige Term der Faddeev-Popov-Geistfelder, vgl. Gl. (0.6). Wir erinnern an Eichfelder und -feldstärken:

$$F_{\mu\nu} \;=\; (\text{i}\,g)^{-1}[D_\mu, D_\nu] \;=\; \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + \text{i}\,g[A_\mu, A_\nu] \tag{1.4}$$

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu a}\,T^a_{\mathfrak{R}} \qquad A_\mu = A_{\mu a}\,T^a_{\mathfrak{R}} \qquad F_{\mu\nu a} = \partial_\mu A_{\nu a} - \partial_\nu A_{\mu a} - g f_{abc} A_{\mu b} A_{\nu c} \tag{1.4$'$}$$

und die eichkovariante Ableitung:

$$D_\mu \;=\; \partial_\mu + \text{i}\,g A_\mu \qquad (D^x_\mu)_{\alpha\beta} \;=\; \partial^x_\mu\,(\mathbb{1}_{\mathfrak{R}})_{\alpha\beta} + \text{i}\,g\,A_{\mu a}(x)\,(T^a_{\mathfrak{R}})_{\alpha\beta} \tag{1.5}$$

Dabei sind $T^a_{\mathfrak{R}}$ die Generatoren und $\mathbb{1}_{\mathfrak{R}}$ die Eins einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}$ der Eichgruppe $SU(N_c)$ und $\partial^x_\mu \equiv \partial/\partial x^\mu$. Sei verwiesen auf Ref. [114].

Die effektive Lagrangedichte $\mathfrak{L}_{\text{eff.}}$ ist also Funktional in den Quantenfeldern: in den Eich- und fundamentalen Materiefeldern, A bzw. ψ, $\bar\psi$, und den Geistern c, $\bar c$. Zentrale Größe in der Funktionalintegral-Formulierung der QCD ist Z, das *Erzeugendes Funktional*

$$Z[J,\eta,\bar\eta] \;=\; \mathfrak{N}^{-1} \int \mathfrak{D}(A,\psi,\bar\psi,c,\bar c)\;\exp \text{i} \int dx\,\big(\mathfrak{L}_{\text{eff.}} + \text{tr}\, J^\mu A_\mu + \bar\eta\,\psi + \bar\psi\,\eta\big) \tag{1.6}$$

wobei entsprechende *Quellenfelder* J und η, $\bar\eta$ eingeführt sind. Die Normierungskonstante $\mathfrak{N}^{-1}$ folgt aus der Forderung $Z|_{J,\eta,\bar\eta=0} \equiv 1$. Die Integration dx ist zu verstehen als über die vierdimensionale Minkowskische Raumzeit.

Eine Quantenfeldtheorie zu lösen heißt explizit, ihre *Greenfunktionen* zu bestimmen. Diese sind formal *Vakuumerwartungswerte von zeitgeordneten Produkten wechselwirkender Quantenfelder* und bestimmen die S-Matrix der Theorie vollständig. Verschieden definierte Greenfunktionen sind von Bedeutung:
Die *(n-Punkt-)Greenfunktionen* $G^{(n)}$ werden erzeugt durch das gerade definierte Funktional Z und zwar durch Anwendung – in definierter Reihenfolge – von Funktionalableitungen nach den Quellen J und η, $\bar\eta$ und deren anschließendes Nullsetzen, generisch:

$$\begin{aligned} &G^{(n=l+2m)}(x_1,\cdots,x_l;\,y_1,\cdots,y_m;\,\bar y_1,\cdots,\bar y_m) \\ &= \langle\Omega|\; T\;\textstyle\prod_{i=1}^{l} A_{\mu_i}(x_i)\;\prod_{j=1}^{m}\psi(y_j)\;\prod_{\bar j=1}^{m}\bar\psi(\bar y_{\bar j})\;|\Omega\rangle \qquad (1.7)\\ &= \mathfrak{N}^{-1}\int\mathfrak{D}(A,\psi,\bar\psi,c,\bar c)\;\Big(T\textstyle\prod_{i=1}^{l}A_{\mu_i}(x_i)\prod_{j=1}^{m}\psi(y_j)\prod_{\bar j=1}^{m}\bar\psi(\bar y_{\bar j})\Big)\,\exp\mathrm{i}\int dx\,\mathfrak{L}_{\text{eff.}} \qquad (1.7')\\ &= \Big(T\textstyle\prod_{i=1}^{l}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta J^{\mu_i}(x_i)}\;\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\bar\eta(y_j)}\;\prod_{\bar j=1}^{m}-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta}{\delta\eta(\bar y_{\bar j})}\Big)\;Z[J,\eta,\bar\eta]\;\Big|_{J,\eta,\bar\eta=0} \qquad (1.7'')\end{aligned}$$

wobei T für den Zeitordnungsoperator steht (die zweite Zeile suggestive Notation aus der Operatorformulierung mit Ω dem *physikalischen Vakuum*). Ableitungen nach Graßmann-wertigen – d.h. antikommutierenden – Feldern antikommutieren selbst und sind als linksseitige zu verstehen, Eichgruppenindizes sind weggelassen.
Die *zusammenhängenden (n-Punkt-)Greenfunktionen* $G_{\mathrm{c}}^{(n)}$ werden analog zu Gl. (1.7) erzeugt durch das Funktional $Z_{\mathrm{c}}=\ln Z$.
Die *ein-Teilchen-irreduziblen (n-Punkt-)Greenfunktionen* $G^{(n)}_{\text{1–irred.}}$ – dies sind die Greenfunktionen, die Feynman-Diagrammen entsprechen, die zusammenhängend bleiben, wenn eine beliebige interne Linie durchgeschnitten wird – folgen aus der Legendretransformierten $Z_{1-\text{irred}}$ von Z_{c} bezüglich der Quellenfelder J und η, $\bar\eta$:

$$\mathrm{i}\,Z_{\text{1–irred.}}[A,\psi,\bar\psi] \;=\; Z_{\mathrm{c}}[J,\eta,\bar\eta] \;-\; \mathrm{i}\int dx\,\left(\mathrm{tr}\,J^{\mu}A_{\mu}+\bar\eta\,\psi+\bar\psi\,\eta\right) \qquad (1.8)$$

$$\text{mit}\qquad A_{\mu}\;=\;\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta Z_{\mathrm{c}}}{\delta J^{\mu}}\qquad \psi\;=\;\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta Z_{\mathrm{c}}}{\delta\bar\eta}\qquad \bar\psi\;=\;-\frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\delta Z_{\mathrm{c}}}{\delta\eta} \qquad (1.8')$$

die konjugierten Felder definieren und bezüglich der Quellen invertierbar sind.

Wir betrachten das Erzeugende Funktional Z nach Gl. (1.6). Die Materiefelder ψ, $\bar\psi$ wie auch die Geistfelder c, $\bar c$ treten im Wirkung-Exponential nicht höher als quadratisch auf, vgl. die Gln. (1.1)-(1.3); ihre Integrationen sind *Gauß'sch* und können formal ausgeführt werden:

$$\begin{aligned} Z[J,\eta,\bar\eta] \;=\; \mathfrak{N}^{-1}\int\mathfrak{D}(A)\;\mathrm{Det}\big(i\mathcal{O}_{\text{ghost}}\big)\,\mathrm{Det}\big(-\mathrm{i}\,\mathcal{O}_{\mathrm{D}}\big)\;\exp-\mathrm{i}\iint dx\,dx'\;\bar\eta\,\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}\,\eta \qquad (1.9)\\ \times\exp\mathrm{i}\int dx\,\left(\mathfrak{L}_{\mathrm{YM}}+\mathfrak{L}_{\text{gf.}}+\mathrm{tr}\,J^{\mu}A_{\mu}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mit}\qquad \big(\mathcal{O}_{\text{ghost}}\big)_{ab}(x,x') \;&=\; \frac{\delta\mathcal{F}_a[A]}{\delta A_{\mu c}(x)}\,\big(D^x_{\mu}\big)_{cb}\,\delta(x-x')\\ \big(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}\big)_{nm}(x,x') \;&=\; \big(\mathrm{i}\gamma^{\mu}D^x_{\mu}-m\big)_{nm}\,\delta(x-x')\qquad \mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}=\big(\mathrm{i}\gamma^{\mu}D^x_{\mu}-m\big)^{-1}\end{aligned} \qquad (1.9')$$

Es sind $\mathcal{O}_{\text{ghost}}$ und $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}$, $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}$ Funktionale im Eich-Vektorfeld A; bei Bildung der *Faddeev-Popov-Geist-* und der *Fermion-Funktionaldeterminanten*, $\mathrm{Det}(\mathrm{i}\mathcal{O}_{\text{ghost}})$ bzw. $\mathrm{Det}(-\mathrm{i}\mathcal{O}_{\mathrm{D}})$, sind

sie aufzufassen als Matrizen mit (kontinuierlichen) Raumzeit-Indizes und Indizes bezüglich der Eichgruppe in entsprechender Darstellung. Die kovariante Ableitung versteht sich demgemäß als bezüglich der *adjungierten Darstellung* $\mathfrak{A}$: $(D_\mu)_{cb} = \partial_\mu \delta_{cb} + g f_{cbd} A_{\mu d}$, respektive der *fundamentalen Darstellung* $\mathfrak{F}$: $(D_\mu)_{nm} = \partial_\mu \delta_{nm} + \mathrm{i}\, g A_{\mu a} (T^a_{\mathfrak{F}})_{nm}$; vgl. Gl. (1.5).

Wir betrachten Greenfunktionen nach Gl. (1.7) mit dem Erzeugenden Funktional Z in der Darstellung von Gl. (1.9). Anwendung der $2m$ Funktionalableitungen nach den Graßmann-wertigen Quellen $\bar\eta(y_j)$, $\eta(\bar y_{\bar\jmath})$ projiziert m-mal das Funktional $i\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}[A]$ aus dem Exponenten herunter (bevor dieser gleich Null gesetzt wird) und führt auf die Summe dieser Monome über alle verschiedenen Paarungen der Raumzeit-Argumente (versehen mit dem Vorzeichen der entsprechenden Permutation $\sigma \in S_m$, das heißt der natürlichen Zahlen $1, \ldots m$, und dividiert durch $m!$, ihre Anzahl):

$$G^{(n=l+2m)}(x_1, \cdots, x_l; y_1, \cdots, y_m; \bar y_1, \cdots, \bar y_m) \tag{1.10}$$

$$= \langle\, T \prod_{i=1}^{l} A_{\mu_i}(x_i) \cdot \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} \mathrm{sign}(\sigma)\ \big(\mathrm{i}\,\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}\big)(y_1, \bar y_{\sigma(1)})\ \cdots \big(\mathrm{i}\,\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}\big)(y_m, \bar y_{\sigma(m)})\, \rangle_A$$

Die Notation $\langle\, \cdot\, \rangle_A$, bezogen auf ein beliebiges Funktional $\mathcal{G}$ im Eich-Vektorfeld A, steht für das Funktionalintegral

$$\langle\, \mathcal{G}\, \rangle_A \;=\; \int \mathfrak{D}\mu(A)\ \ \mathcal{G}[A] \tag{1.11}$$

Es ist $\mathfrak{D}\mu(A)$ das Haarsche Eichfeldmaß, das definiert ist durch

$$\mathfrak{D}\mu(A) \;=\; \mathfrak{D}(A)\ \ \mu[A] \tag{1.11$'$}$$

$$\text{mit} \qquad \mu[A] = \mathfrak{N}^{-1}\ \mathrm{Det}\big(\mathrm{i}\,\mathcal{O}_{\mathrm{ghost}}[A]\big)\ \mathrm{Det}\big(-\mathrm{i}\,\mathcal{O}_{\mathrm{D}}[A]\big) \tag{1.11$''$}$$

$$\times \exp\, \mathrm{i} \int dx\, \big(\mathfrak{L}_{\mathrm{YM}}[A] + \mathfrak{L}_{\mathrm{gf.}}[A]\big)$$

Das implizite Auftreten des eichfixierenden Funktionals $\mathcal{F}$ suggeriert eine Abhängigkeit von der Eichfixierung. Tatsächlich ist dies nicht der Fall, $\mathfrak{D}\mu(A)$ ist eindeutig definiert und eichinvariant. Die Eichinvarianz[1.1] des Funktionalintegrals $\langle\, \cdot\, \rangle_A$ eines eichinvarianten Funktionals in A überträgt sich unmittelbar von der ursprünglichen Darstellung nach Gl. (1.7).

Durch die Greenschen Funktionen $G^{(n)}$ nach Gl. (1.10) läßt sich ein beliebiger *Erwartungswert bezüglich des physikalischen Vakuums* formal darstellen als Integral $\langle\, \cdot\, \rangle_A$ eines definierten Eichfeld-Funktionals. Mit der Konsequenz der Eichinvarianz dieses Funktionals – wie auch der Lokalität aufgrund der Forderung von Kausalität (vgl. die ausführliche Diskussion in Ref. [133]) – auch beliebige *Observable* und insbesondere *nichtperturbative Observable* – unter dem Caveat von Fußnote 0.19 auf Seite 15.

Allgemein macht die Darstellung $\langle\, \mathcal{G}\, \rangle_A$ des Erwartungswertes einer Größe bezüglich des physikalischen Vakuums deutlich, vgl. Gl. (1.11), daß dieser genau die Mittelung des entsprechenden Funktionals $\mathcal{G}[A]$ über alle Konfiguration des Eichfelds A ist, die jeweils gewichtet sind mit dem komplizierten Funktional $\mu[A]$, vgl. Gl. (1.11).

Wir wollen uns *anschaulich* – *formal* ist dies in eichinvarianter Weise nicht möglich – das Eichfeld aufgespalten denken in einen Anteil „kleiner“ und einen „großer“ Impulse: einen Anteil *nieder-* beziehungsweise *hochfrequenter Gluonen*. Nichtperturbative Observable sind dadurch definiert, daß sie im wesentlichen bestimmt sind durch in diesem Sinne niederfrequente Eichfeld-Konfigurationen (für genau die in der Darstellung $\langle\, \cdot\, \rangle_A$ das MSV einen Ansatz macht); hochfrequente Konfigurationen bewirken *per definitionem* eine nur kleine Korrektur, die, wenn nicht ganz vernachlässigt, berechnet wird im perturbativen Rahmen.

[1.1] Cum grano salis nicht Eich- sondern BRST-Invarianz; bzgl. unseres Sprachgebrauchs vgl. Seite 15.

1.2 Mathematische Hilfsmittel

In diesem Abschnitt führen wir mathematische Hilfsmittel ein, die essentiell in die Formulierung des MSV eingehen.

Dies sind zunächst Konnektoren, mit deren Hilfe (im Sinne lokaler Eichkovarianz) paralleltransportierte Feldstärken definiert werden, die wegen der Einfachheit ihres Verhaltens unter Eichtransformationen die geeigneten Größen sind zur Formulierung manifest eichinvarianter Funktionale in A.
Wir identifizieren Konnektoren bezüglich geschlossener Kurven, sogenannte Wegner-Wilson-Loops, als die relevanten Eichfeld-Funktionale und geben mit dem nichtabelschen Stokes'schen Satz an, wie sie in Termen paralleltransportierter Feldstärken geschrieben werden. Wir geben an, wie der Vakuumerwartungswerte $\langle \cdot \rangle_A$ eines Wegner-Wilson-Loops dargestellt wird als Entwicklung in Kumulanten.

1.2.1 Manifest eichinvariante Funktionale durch Konnektoren

Eichartefakte treten *a priori* nicht auf, wenn eine Theorie in eichinvarianten Größen formuliert ist. Stehe $\mathcal{O}[A]$ allgemein für ein *eichinvariantes Funktional* in A. Zu seiner Konstruktion rufen wir uns *lokale Eichtransformationen* in Erinnerung, das heißt Transformationen unter einer Matrix $U(x)$, die in jedem Punkt x der Raumzeit Element der Eichgruppe $SU(N_c)$ ist in geeigneter Darstellung $\mathfrak{R}$, vgl. die Gln. (0.2), (0.2′):

$$\psi \quad \to \psi^U \quad := U\,\psi \tag{1.12}$$

$$A_\mu \quad \to A_\mu^U \quad := \frac{1}{\mathrm{i}\,g}\,U\,(D_\mu\,U^\dagger) \;=\; U\,A_\mu\,U^\dagger \;+\; \frac{1}{\mathrm{i}\,g}\,U\,(\partial_\mu\,U^\dagger) \tag{1.12′}$$

Dabei transformiert die kovariante Ableitung *per definitionem* wie

$$D_\mu \quad \to D_\mu^U \quad = \; U\,D_\mu\,U^\dagger \tag{1.13}$$

vgl. Gl. (0.3). Aus $F_{\mu\nu} = (\mathrm{i}\,g)^{-1}[D_\mu, D_\nu]$, vgl. Gl. (1.4), und der Unitarität der Transformation, $U^\dagger U = \mathbb{1}_{\mathfrak{R}}$, folgt damit für den Feldstärkentensor

$$F_{\mu\nu} \quad \to D_{\mu\nu}^U \quad = \; U\,F_{\mu\nu}\,U^\dagger \tag{1.14}$$

vgl. Gl. (0.4). Dieses einfache Transformationsverhalten legt nahe, eichinvariante Funktionale $\mathcal{O}[A]$ in Termen von Feldstärken F statt von Feldern A zu konstruieren.

Allerdings ist in den Gln. (1.12)-(1.14) die Transformationsmatrix am entsprechenden Weltpunkt zu nehmen. Für nichtlokale Funktionale dargestellt durch Produkte von Feldstärken an Weltpunkten $x_1, x_2, \ldots$, die mithilfe der Matrizen $U(x_1), U(x_2), \ldots$ transformieren, treten daher Produkten $U^\dagger(x_1)U(x_2), \ldots$ auf, die im allgemeinen $\neq \mathbb{1}_{\mathfrak{R}}$ sind. Wir definieren daher verallgemeinerte Feldstärken mit geeigneterem Transformationsverhalten.

Hierzu führen wir zunächst den Eichgruppen-wertigen *Konnektor* Φ ein, nichtabelsche Verallgemeinerung des Schwinger-Strings der QED:

$$\Phi(x_0, x; \mathcal{C}) \;=\; P\;\exp -\mathrm{i}\,g \int_{\mathcal{C}} dx'^\mu\; A_\mu(x') \tag{1.15}$$

mit $A_\mu = A_{\mu a}\,T^a_{\mathfrak{R}}$, $\mathfrak{R}$ eine beliebige Darstellung der $SU(N_c)$, und P dem *Pfadordnungsoperator* $P \equiv P_{\mathcal{C}}$ bezüglich der orientierten Kurve $\mathcal{C}$ von x nach x_0:

$$\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_{x_0 x} : \; t \in [0,1] \to x'(t) \qquad \text{mit} \qquad x'(0) = x \qquad x'(1) = x_0 \tag{1.16}$$

das heißt bezüglich des Kurvenparameters t. Allgemein hat Φ die Eigenschaften

$$\Phi^\dagger(x_0,x;\mathcal{C}_{x_0x}) = \Phi^{-1}(x_0,x;\mathcal{C}_{x_0x}) = \Phi(x,x_0;\mathcal{C}_{x_0x}^{-1}) \tag{1.17}$$

$$\Phi(x_0,x;\mathcal{C}_{x_0y}\circ\mathcal{C}_{yx}) = \Phi(x_0,y;\mathcal{C}_{x_0y})\;\Phi(y,x;\mathcal{C}_{yx}) \tag{1.17'}$$

und ist Lösung der Differentialgleichung im Kurvenparameter t mit Randbedingung:

$$\frac{d}{dt}\,\Phi(t) = -\mathrm{i}\,g\,\frac{dx'^\mu(t)}{dt}\,A_\mu(x'(t))\,\Phi(t) \qquad \Phi(0) = \mathbb{1}_\mathfrak{R} \tag{1.18}$$

Die Bedeutung des Konnektors Φ folgt aus seinem Transformationsverhalten

$$\Phi(x_0,x;\mathcal{C}) \to \Phi^U(x_0,x;\mathcal{C}) := U(x_0)\,\Phi(x_0,x;\mathcal{C})\,U^\dagger(x) \tag{1.19}$$

das in Kontrast steht zu Gl. (1.13) und (1.14).

Φ ist aufzufassen als *Paralleltransporter*: Mithilfe von $\Phi(x_0,x;\mathcal{C})$ läßt sich der *Colour*-Gehalt einer Größe *in eichkovarianter Weise* entlang einer Kurve $\mathcal{C}$ von x nach x_0 transportieren. Beziehen wir in diesem Sinne $\Phi(x_0,x;\mathcal{C})$ auf den Feldstärkentensor, das heißt definieren wir den *paralleltransportierten Feldstärkentensor* durch

$$F_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C}) = \Phi(x_0,x;\mathcal{C})\,F_{\mu\nu}(x)\,\Phi^\dagger(x_0,x;\mathcal{C}) \tag{1.20}$$

so transformiert dieser wie:

$$F_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C}) \to F^U_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C}) := U(x_0)\,F_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C})\,U^\dagger(x_0) \tag{1.21}$$

vgl. Gl. (1.14) und (1.19), – das heißt wie eine bezüglich ihres Colour-Gehalts in x_0 lokale Größe. Der paralleltransportierte Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C})$ ist der konventionelle Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}(x)$ modifiziert in dem Sinne, daß dessen *Colour-Gehalt entlang der Kurve $\mathcal{C}$ paralleltransportiert ist an den Punkt x_0* – der bezeichnet wird als *Referenzpunkt*.

In Termen paralleltransportierter Feldstärkentensoren $F_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C}_{x_0x})$ definieren wir die n-lokalen Eichfeld-Funktionale

$$\mathcal{O}_n[A] = g^n F_{\mu_1\nu_1}(x_1;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_1})\,F_{\mu_2\nu_2}(x_2;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_2})\,\cdots\,F_{\mu_n\nu_n}(x_n;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_n}) \tag{1.22}$$

Dabei sei der Referenzpunkt x_0 beliebig, aber fest gewählt, ebenso die Kurven $\mathcal{C}_{x_0x_i}$ von Punkten x_i nach x_0. Aus Gl. (1.21) und wegen der Eichinvarianz des physikalischen Vakuums $\mathfrak{D}\mu(A^U)=\mathfrak{D}\mu(A)$, oder in Operatornotation $U|\Omega\rangle=|\Omega\rangle$, folgt die Eichinvarianz von

$$\begin{aligned}&\langle\,\mathcal{O}_n\,\rangle_A \\ &= \langle\,g^n F_{\mu_1\nu_1}(x_1;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_1})\,F_{\mu_2\nu_2}(x_2;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_2})\,\cdots\,F_{\mu_n\nu_n}(x_n;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_n})\,\rangle_A\end{aligned} \tag{1.23}$$

und daher Proportionalität zur Eins

$$\langle\,\mathcal{O}_n\,\rangle_A \;=\; \mathrm{tr}_\mathfrak{R}\,\langle\,\mathcal{O}_n\,\rangle_A\cdot\mathbb{1}_\mathfrak{R} \tag{1.24}$$

Die Spur bezieht sich auf eine beliebige Darstellung $\mathfrak{R}$ der Eichgruppe $SU(N_c)$ und ist definiert als normiert auf die Dimension $d_\mathfrak{R}$ der Darstellung:

$$\mathrm{tr}_\mathfrak{R} \;=\; \frac{1}{d_\mathfrak{R}}\,\mathrm{tr} \qquad\Longrightarrow\qquad \mathrm{tr}_\mathfrak{R}\,\mathbb{1}_\mathfrak{R} \;\equiv\; 1 \quad \forall\mathfrak{R} \tag{1.25}$$

$$\text{mit} \qquad d_\mathfrak{F} \;\equiv\; N_c, \quad d_\mathfrak{A} \;\equiv\; N_c^2-1 \tag{1.25'}$$

in der fundamentalen beziehungsweise adjungierten Darstellung und mit $\mathbb{1}_\mathfrak{R}$ der entsprechenden Eins (d.h. der $d_\mathfrak{R}$-dimensionalen Einheitsmatrix); vgl. Seite 10. Die Spur tr und

damit $\mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}$ vertauscht mit der Bildung des Vakuumerwartungswertes $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ wegen dessen Linearität.

Um *manifeste Eichinvarianz* unserer Formulierung zu garantieren, werden wir statt mit Greenfunktionen in Termen von Eichfeldern $A(x)$ nach Gl. (1.10) in der hierzu äquivalenten Darstellung nach Gl. (1.23) arbeiten: mit Vakuumerwartungswerten $\langle\,\mathcal{O}_n\,\rangle_A$ in Termen entlang definierter Kurven $\mathcal{C}_{x_0x_i}$ zu einem festen (aber beliebigen) Referenzpunkt x_0 paralleltransportierter Feldstärken $F_{\mu\nu}(x_i;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_i})$.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Exkurs. Zur Illustration geben wir die *Koordinateneichung bezüglich des Referenzpunktes* x_0 an:

$$(x-x_0)^\mu\,A_\mu(x)\;=\;0\qquad A_\mu(x_0)\;=\;0 \tag{1.26}$$

sie ist offensichtlich *nicht kovariant*.

In ihr wird für Paralleltransport nach x_0 entlang *geradliniger* Kurven $\mathcal{C}_{x_0x}$ unsere Formulierung besonders einfach: Die entsprechenden Konnektoren $\Phi(x,x_0;\mathcal{C}_{x_0x})$ sich auf die Eins reduzieren und daher die mit ihrer Hilfe paralleltransportierten Feldstärken mit den konventionellen identisch. Wir zeigen $F_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C}_{x_0x})=F_{\mu\nu}(x)$.

Wir betrachten zunächst die totale Ableitung von $t^2F_{\mu\nu}(y)$, mit $y(t)=x_0+t(x-x_0)$, nach dem Parameter t. Sie schreibt sich mithilfe der Eichbedingung, vgl. Gl. (1.26):

$$\frac{d}{dt}\Big[t^2\,F_{\mu\nu}(y)\Big]\;=\;t\,\Big[2\,F_{\mu\nu}(y)+(x-x_0)^\rho\,D^x_\rho\,F_{\mu\nu}(y)\Big] \tag{1.27}$$

und mithilfe der Jacobi-Identität für die kovariante Ableitung $D_\rho F_{\mu\nu}+D_\mu F_{\nu\rho}+D_\nu F_{\rho\mu}=0$, vgl. Seite 11

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[t^2\,F_{\mu\nu}(y)\Big]\;&=\;t\,\Big[F_{\mu\nu}(y)+(x-x_0)^\rho\,D^x_\mu\,F_{\rho\nu}(y)\Big]\;-\;\{\mu\leftrightarrow\nu\} &(1.28)\\ &=\;D^x_\mu\Big[t\,(x-x_0)^\rho\,F_{\rho\nu}(y)\Big]\;-\;\{\mu\leftrightarrow\nu\}\end{aligned}$$

Wir haben damit die Darstellung des Feldstärkentensors als Integral

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu}(x)\;&=\;\int_0^1 dt\,\frac{d}{dt}\,\Big[t^2\,F_{\mu\nu}(x_0+t(x-x_0))\Big] &(1.29)\\ &=\;D^x_\mu\,\Big[\int_0^1 dt\,t\,(x-x_0)^\rho\,F_{\rho\nu}(x_0+t(x-x_0))\Big]\;-\;\{\mu\leftrightarrow\nu\}\end{aligned}$$

Andererseits gilt $F_{\mu\nu}=(\mathrm{i}\,g)^{-1}[D_\mu,D_\nu]=\partial_\mu A_\nu-\partial_\nu A_\mu+\mathrm{i}\,g[A_\mu,A_\nu]$, vgl. Gl. (1.4), das heißt $F_{\mu\nu}(x)=D^x_\mu A_\nu(x)-\{\mu\leftrightarrow\nu\}$. Gegenüberstellung mit Gl. (1.29) ergibt

$$A_\mu(x)\;=\;\int_0^1 dt\,t\,(x-x_0)^\rho\,F_{\rho\mu}(x_0+t(x-x_0)) \tag{1.30}$$

als (nichtlokale) Darstellung von A durch F.

Für das Linienintegral im Exponenten des Konnektors $\Phi(x_0,x;\mathcal{C})$, vgl. Gl. (1.15), gilt entlang der *geradlinigen* Verbindung $\mathcal{C}$ von einem Punkt x nach x_0:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}}dx'^\mu\,A_\mu(x')\;&=\;-\int_0^1 dt'(x-x_0)^\mu\,A_\mu(x'(t')) &(1.31)\\ &=\;-\int_0^1 dt\,\int_0^1 dt'\,t\,t'\,(x-x_0)^\rho\,(x-x_0)^\mu\,F_{\rho\mu}(x_0+t\,t'(x-x_0)) &(1.31')\\ &=\;0 &(1.31'')\end{aligned}$$

mit der zweiten Identität wegen Gl. (1.30) und der dritten wegen der Antisymmetrie des Feldstärkentensors bezüglich der Lorentz-Indizes.

Entlang gerader Verbindungen zum Referenzpunkt x_0 ist der Konnektor nach Gl. (1.15) in Koordinateneichung bezüglich x_0 die Exponentialfunktion an der Stelle Null, das heißt die Eins. Feldstärken und paralleltransportierte Feldstärken sind identisch:

$$\Phi(x, x_0; \mathcal{C}_{x_0 x}) \equiv \mathbb{1}_{\mathfrak{R}} \qquad \text{so daß} \qquad F_{\mu\nu}(x; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x}) = F_{\mu\nu}(x) \tag{1.32}$$

dabei ist $\mathfrak{R}$ die Darstellung von Φ, vgl. Gl. (1.15).

Wir betonen, daß wir uns weder auf diese Eichung noch auf Geradlinigkeit der Kurven $\mathcal{C}_{x_0 x_i}$ beschränken. Wir arbeiten in Termen allgemeiner paralleltransportierter Feldstärken $F_{\mu\nu}(x_i; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_i})$. Unsere Formulierung ist *manifest eich- und Poincaré-kovariant*.

1.2.2 Nichtabelscher Stokes'scher Satz

Wir betrachten den Konnektor Φ von x zurück nach x entlang $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_{xx}$, einer beliebigen geschlossenen Kurve $\mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_{xx}$

$$\Phi(x, x; \mathcal{C}) = P \exp -\mathrm{i}\, g \int_{\mathcal{C}} dx'^{\mu}\, A_\mu(x') \tag{1.33}$$

$$\text{mit} \qquad \mathcal{C} \equiv \mathcal{C}_{xx} : \; t \in [0,1] \to x'(t) \qquad x'(0) = x'(1) = x$$

Das Eich-Vektorfeld A, vermittels $A_\mu = A_{\mu a} T^a_{\mathfrak{R}}$, und damit Φ sind aufzufassen als bezüglich einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}$ der Eichgruppe.

Die Spur von Φ ist *eichinvariant* und wird bezeichnet als *Wegner-Wilson-Loop*

$$W(\mathcal{C}) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\, \Phi(x, x; \mathcal{C}) \tag{1.34}$$

Zur Definition der Spur $\mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}$ vgl. die Gln. (1.25), (1.25′). Vakuumerwartungswerte $\langle \cdot \rangle_A$ von Produkten von Wegner-Wilson-Loops sind von herausragender Bedeutung als Ordnungsparameter von Eichtheorien auf Skalen, die perturbativ nicht zugänglich sind; vgl. die Refn. [222, 235]. – Wir werden sehen, inwiefern auch in der vorliegenden Arbeit.

Zur Anknüpfung an den vorangehenden Abschnitt 1.2.1 ist in Gl. (1.33) überzugehen von Eichfeldern A zu Eichfeldstärken F.

Der *Stokes'sche Satz* auf einer (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit G ist für das Integral der äußeren Ableitung einer beliebigen *abelschen* $(s-1)$-Form ω über eine s-dimensionale Untermannigfaltigkeit $G_s \subset G$ genau folgende Identität:

$$\int_{G_s} d \wedge \omega = \int_{\partial G_s} \omega \tag{1.35}$$

vgl. Gl. (E.12) in Anhang E.1 und Ref. [86].

Seien $\omega \equiv A = A_\mu dx^\mu$ und $F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$ respektive Eichfeld und Eichfeldstärke einer *abelschen* Theorie, etwa der QED. Dann gilt $d \wedge \omega \equiv d \wedge A = F$. Sei ferner $G_s = \mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\mathcal{C})$ eine beliebige Fläche mit Rand $\mathcal{C}$, das heißt $\partial G_s \equiv \partial \mathcal{S} \equiv \mathcal{C}$. Dann lautet Gl. (1.35):

$$\int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} F = \int_{\mathcal{C}} A \tag{1.36}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} d\sigma^{\mu\nu}(x')\, F_{\mu\nu}(x') = \int_{\mathcal{C}} dx'^{\mu}\, A_\mu(x') \tag{1.36′}$$

mit $d\sigma^{\mu\nu}(x') \equiv dV^{\mu\nu}(x') = dx'^{\mu} \wedge dx'^{\nu}$, vgl. die Gln. (E.10), (E.13) und Ref. [200]. Diese Identität ist zu verallgemeinern auf das *nichtabelsche* Eichfeld/die Eichfeldstärke der QCD.

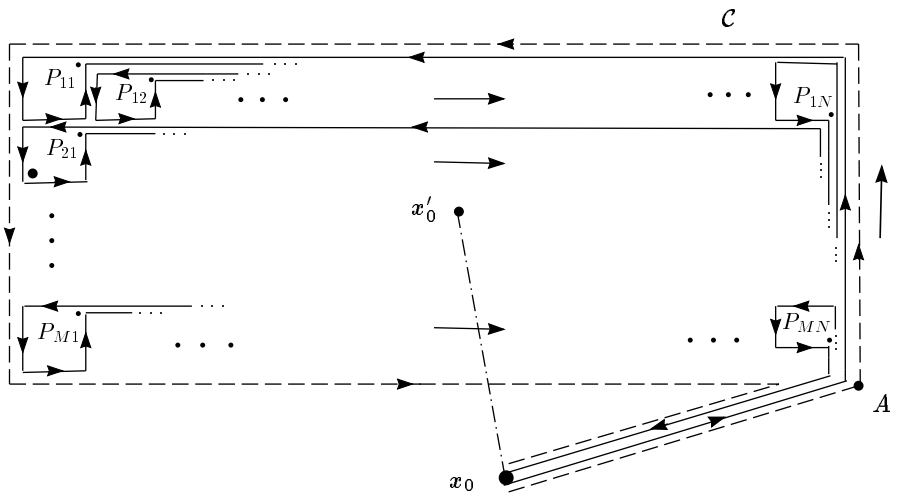


Abbildung 1.1: Die Kurve $\mathcal{C}$ (gestrichelt) wird aufgeschnitten in A und durch Einschub von Einsen deformiert zu der Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$. Diese fächert pfadgeordnet mit infinitesimalen Plaketten P_{IJ} eine (hier: plane) Fläche $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$, $\partial\mathcal{S} \equiv \mathcal{C}$, auf. Im Grenzfall unendlich feiner Plakettierung treten auf: an den Punkten $x' \equiv x_{11}, x'' \equiv x_{12}, \ldots \in \mathcal{S}$ die zu einem Referenspunkt $x_0 \in \mathcal{S}$ entlang Kurven $\mathcal{C}_{x_0x'}, \mathcal{C}_{x_0x''}, \ldots$ paralleltransportierte Feldstärken. Die Pfeile nach rechts illustrieren die Wirkung des Pfadordnungsoperators $P_{\tilde{\mathcal{C}}}$ für diese spezielle Auffächerung. Der Colour-Gehalt der Feldstärken kann o.E.d.A. weiter paralleltransportiert werden von x_0 an einen beliebigen anderen Referenz-Punkt x_0'. Wir danken Edgar Berger für die Überlassung dieser Abbildung; sie illustriere das im Text diskutierte Verfahren.

Der *Nichtabelsche Stokes'sche Satz* für den Konnektor $\Phi(x, x; \mathcal{C})$, vgl. Gl. (1.33), wird allgemein hergeleitet, indem die Kurve $\mathcal{C}$ durch Einschub von Einsen $\mathbb{1}_{\mathfrak{R}} = \Phi^\dagger\Phi$ deformiert wird, vgl. die Refn. [9,30,53,84,192,197], besonders Ref. [148]. Er lautet:

$$\begin{aligned} \Phi(x, x; \mathcal{C}) &= P_{\mathcal{C}} \exp -\mathrm{i}\, g \int_{\mathcal{C}} dx'^{\mu}\, A_\mu(x') \qquad (1.37) \\ &= \Phi(x, x_0; \mathcal{C}_{x_0x}^{-1}) \left(P_{\tilde{\mathcal{C}}} \exp -\frac{\mathrm{i}\, g}{2} \int_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})} d\sigma^{\mu\nu}(x')\, F_{\mu\nu}(x'; x_0, \mathcal{C}_{x_0x'}) \right) \Phi(x_0, x; \mathcal{C}_{x_0x}) \end{aligned}$$

Spurbildung $\mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}$ bezüglich der Darstellung $\mathfrak{R}$ von Φ ergibt, vgl. die Gln. (1.25), (1.25′):

$$\begin{aligned} W(\mathcal{C}) &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\, \Phi(x, x; \mathcal{C}) = \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\, P_{\mathcal{C}} \exp -\mathrm{i}\, g \int_{\mathcal{C}} dx'^{\mu}\, A_\mu(x') \qquad (1.38) \\ &= \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\, P_{\tilde{\mathcal{C}}} \exp -\frac{\mathrm{i}\, g}{2} \int_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})} d\sigma^{\mu\nu}(x')\, F_{\mu\nu}(x'; x_0, \mathcal{C}_{x_0x'}) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen, insbesondere das pfadgeordnete Exponential des Flächenintegrals, bedürfen gegenüber dem konventionellen Stokes'schen Satz folgender Anmerkungen, vgl. Abb. 1.1.

Es tritt ein *Referenzpunkt* x_0 auf, der als Element der Integrationsfläche $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$ beliebig gewählt werden kann, und *an* x_0 *paralleltransportierte Feldstärken* $F_{\mu\nu}(x'; x_0, \mathcal{C}_{x'x_0})$.
Der Paralleltransport geschieht entlang einer Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$, die die Fläche $\mathcal{S}$ aufspannt („plakettiert") und aus der Kurve $\mathcal{C}$ formal hervorgeht, indem diese durch Einschub von Einsen $\mathbb{1}_{\mathfrak{R}} = \Phi^{-1}\Phi = \Phi(x', x_0; \mathcal{C}_{x_0x'^{-1}})\Phi(x_0, x'; \mathcal{C}_{x_0x'}) = \Phi(x'', x_0; \mathcal{C}_{x_0x''^{-1}})\Phi(x_0, x''; \mathcal{C}_{x_0x''}) = \ldots$ deformiert wird nach dem Schema: von x_0 nach x' – infinitesimale Plakette um x' – von x' zurück nach x_0 – von x_0 nach x'' (infinitesimal entfernt von x') – infinitesimale Plakette um x'' – von x'' zurück nach x_0 – ... *In conclusio*: Erst die Wahl der Kurven $\mathcal{C}_{x_0x'}$, $\mathcal{C}_{x_0x''}, \ldots$

zum Referenzpunkt x_0 legt die Deformation $\tilde{\mathcal{C}}$ von $\mathcal{C}$ vollständig fest: das heißt zum einen die Pfadordnung entlang $\tilde{\mathcal{C}}$ (angedeutet durch den Operator $P_{\tilde{\mathcal{C}}}$), die konsistent ist mit der Pfadordnung des Kurvenintegrals entlang $\mathcal{C}$, und zum anderen die von $\tilde{\mathcal{C}}$ aufgespannte Fläche $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$, von der nur zu fordern ist, daß ihr Rand mit $\mathcal{C}$ zusammenfällt: $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$. Umgekehrt hat man Freiheit in der Wahl der Pfadordnung auf der Fläche $\mathcal{S}$ wie auch von $\mathcal{S}$ selbst, so lange $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$ und $\tilde{\mathcal{C}}$ eine Deformation von $\mathcal{C}$ ist im Sinne des Einschubs von Einsen.

Im abelschen Fall vereinfachen sich die Gln. (1.37), (1.38) zum konventionellen Stokes'-schen Satz.

1.2.3 Entwicklung in Kumulanten

In diesem Abschnitt führen wir ein das Konzept der Entwicklung in Kumulanten. Wichtige frühe Reviews, auf die wir uns wesentlich beziehen, sind die Arbeiten van Kampens, vgl. die Refn. [218,219]. Diese formulieren gleichermaßen mathematisch streng und anschaulich anhand einer Reihe von Beispielen den Begriff der Kumulante zur Lösung stochastischer Differentialgleichungen. Kumulanten wurde auf dieser Basis zuerst bezogen auf das Eichfeldmaß nichtperturbativer Quantenchromodynamik – in Zusammenhang mit der Beschreibung von Confinement – zunächst von Dosch in Ref. [60], dann von Dosch, Simonov in Ref. [61]. Der Bezug auf Hochenergiestreuung ist ausführlich dargestellt von Krämer in Ref. [122]; er impliziert insbesondere die Unterscheidung van Kampenscher und Waldenfels'scher Kumulanten wie die Frage der Faktorisierung auf Matrix- versus Matrixelementeniveau.

Unsere Darstellung steht vor dem Hintergrund dieser Arbeiten. Sie hält sich formal an die systematische Diskussion Nachtmanns in Ref. [148], geht aber über diese hinaus.

Wir betrachten die Mittelung eines t-geordneten Exponentials, beispielsweise den Vakuumerwartungswert

$$w(\lambda) \;=\; \langle P \;\exp\; \lambda \int_0^1 dt\; B(t) \;\rangle_A \tag{1.39}$$

Dabei sei $B(t) = B_a(t) T^a_{\mathfrak{R}}$ zunächst ein beliebiges Liealgebra-wertiges Funktional in A in einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}$ der Eichgruppe; der (Pfad)Ordnungsoperator $P \equiv P_t$ beziehe sich auf den Parameter t. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig.

Wir werden später $w(\lambda)$ in Verbindung bringen mit dem Vakuumerwartungswert des geschlossenen Konnektors $\Phi(x,x;\mathcal{C})$ aus Gl. (1.37), das heißt B mit der paralleltransportierten Feldstärke F und $t \in [0,1]$ identifizieren mit dem Kurvenparameter entlang $\tilde{\mathcal{C}}$, einer definierten Deformation von $\mathcal{C}$ im Sinne des vorangegangenen Unterabschnitts.

Der Erwartungswert $w(\lambda)$ nach Gl. (1.39) ist formal definiert durch die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion:

$$w(\lambda) \;=\; 1 + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\lambda^n}{n!}\, b_n \tag{1.40}$$

$$\text{mit} \qquad b_n \;=\; \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_n \; B_n(t_1, \ldots t_n) \tag{1.40'}$$

$$B_n(t_1, \ldots t_n) \;\equiv\; \langle P \; B(t_1) \cdots B(t_n) \rangle_A \tag{1.40''}$$

Die Funktion B_n ist wegen des Pfadordnungsoperators P *vollständig symmetrisch* in ihren n Argumenten.

Geschieht die Erwartungswertbildung zu $w(\lambda)$ bezüglich einer *stochastischen Variablen* – konkret: kann bei Bildung von $\langle \cdot \rangle_A$ die Verteilung von Eichfeldkonfigurationen $A(x)$ durch das Haarsche Maß $\mathfrak{D}\mu(A)$ nach Gl. (1.11) aufgefaßt werden als *stochastisch* –, so existiert für $w(\lambda)$ eine *konvergente Entwicklung in Kumulanten*, das heißt die Identität

$$\ln w(\lambda) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, k_n \tag{1.41}$$

$$\text{mit} \qquad k_n \;=\; \int_0^1 dt_1 \cdots \int_0^1 dt_n \; K_n(t_1, \ldots, t_n) \tag{1.41'}$$

Die Funktion K_n wird bezeichnet als *Kumulante n-ter Ordnung*; sie kann definiert werden als *vollständig symmetrisch* in ihren Argumenten, s.u. die Diskussion von Gl. (1.49) und (1.50).

Durch Gleichsetzen der Entwicklungen von Gl. (1.40) und (1.41) in der Form

$$w(\lambda) \;=\; 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, b_n \tag{1.42}$$

$$\stackrel{!}{=} \exp\left[\ln w(\lambda)\right] \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, k_n\right]^m \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

folgt:

$$b_n \;=\; \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m!} \sum_{\substack{i_1, \ldots i_m \in \mathbb{N} \\ i_1 + \ldots + i_m = n}} \frac{n!}{i_1! \cdots i_m!} \lceil k_{i_1} \cdots k_{i_m} \rceil \tag{1.43}$$

Es treten sämtliche *verschiedene Partitionen* des Index n in m Summanden $i_1, \ldots i_m \in \mathbb{N}$ auf. Wir haben darüberhinaus die Notation $\lceil \cdot \rceil$ eingeführt, mit

$$\lceil k_{i_1} \cdots k_{i_m} \rceil \;\equiv\; k_{i_1} \cdots k_{i_m} \;+\; \text{versch. Reihenfolgen der } m \text{ Faktoren} \tag{1.44}$$

die Summe sämtlicher *verschiedenen Reihenfolgen der m Faktoren* k_i, die im allgemeinen Liealgebra-wertig, das heißt Matrizen sind.

Gl.(1.42) ist invertierbar, oder einfacher durch Logarithmieren von Gl. (1.42):

$$\ln w(\lambda) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, k_n \tag{1.45}$$

$$\stackrel{!}{=} \ln\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, b_n\right] \;=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\, b_n\right]^m \qquad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

erhält man

$$k_n \;=\; \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{\substack{i_1, \ldots i_m \in \mathbb{N} \\ i_1 + \ldots + i_m = n}} \frac{n!}{i_1! \cdots i_m!} \lceil b_{i_1} \cdots b_{i_m} \rceil \tag{1.46}$$

analog zu Gl. (1.43); bzgl. der Notation $\lceil \cdot \rceil$ vgl. Gl. (1.44). Wir veranschaulichen diese Gleichung durch explizite Angabe der Ausdrücke für die ersten Indizes n:

$$k_1 \;=\; b_1 \tag{1.47}$$

$$k_2 \;=\; b_2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2!}{(1!)^2} b_1^2$$

$$k_3 \;=\; b_3 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3!}{1!2!} \lceil b_1 b_2 \rceil + \frac{1}{3} \cdot \frac{3!}{(1!)^3}$$

$$k_4 \;=\; b_4 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4!}{1!3!} \lceil b_1 b_3 \rceil + \frac{4!}{(2!)^2} b_2^2\right) + \frac{1}{3} \cdot \frac{4!}{(1!)^2 2!} \lceil b_1^2 b_2 \rceil - \frac{1}{4} \cdot \frac{4!}{(1!)^4} b_1^4$$

$$k_5 \;=\; b_5 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5!}{1!4!} \lceil b_1 b_4 \rceil + \frac{5!}{2!3!} \lceil b_2 b_3 \rceil\right) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5!}{(1!)^2 3!} \lceil b_1^2 b_3 \rceil + \frac{5!}{1!(2!)^2} \lceil b_1 b_2^2 \rceil\right)$$
$$- \frac{1}{4} \cdot \frac{5!}{(1!)^3 2!} \lceil b_1^3 b_2 \rceil + \frac{1}{5} \cdot \frac{5!}{(1!)^5} b_1^5$$

$$
\begin{aligned}
k_6 \;=\; & b_6 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{6!}{1!5!}\lceil b_1 b_5\rceil + \frac{6!}{2!4!}\lceil b_2 b_3\rceil + \frac{6!}{(3!)^2}b_3^2\right) \\
& + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{6!}{(1!)^2 4!}\lceil b_1^2 b_4\rceil + \frac{6!}{1!2!3!}\lceil b_1 b_2 b_3\rceil + \frac{6!}{(2!)^3}b_2^3\right) \\
& - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{6!}{(1!)^3 3!}\lceil b_1^3 b_3\rceil + \frac{6!}{(1!)^2(2!)^2}\lceil b_1^2 b_2^2\rceil\right) + \frac{1}{5}\cdot\frac{6!}{(1!)^4 2!}\lceil b_1^4 b_2\rceil - \frac{1}{6}\cdot\frac{6!}{(1!)^6}b_1^6 \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

Gl.(1.46) bestimmt k_n als Summe von Monomen

$$b_{i_1}\, b_{i_2}\cdots b_{i_m} \tag{1.48}$$

wobei die Indizes $i_1,\ldots i_m \in \mathbb{N}$ sämtliche verschiedenen Partitionen des Index n in m Summanden durchlaufen: $i_1+\ldots+i_m = n \quad (\forall m,\ 1\le m\le n)$, und – die Notation $\lceil\,\cdot\,\rceil$ – die m Faktoren b_i in sämtlichen verschiedenen Reihenfolgen stehen.

Die Kumulante n-ter Ordnung $K_n(t_1,\ldots t_n)$ folgt daher aufgrund ihrer Definition in Gl. (1.41′) als Summe von Monomen

$$B_{i_1}(t_1,\ldots t_{i_1})\; B_{i_2}(t_{i_1+1},\ldots t_{i_1+i_2})\cdots B_{i_m}(t_{i_1+\ldots+i_{m-1}+1},\ldots t_n) \tag{1.49}$$

Diese m Faktoren $(1\le m\le n)$ treten in sämtlichen verschiedenen Reihenfolgen auf.

Da sich das Integral k_n, als dessen Integrand K_n definiert ist, über ein *vollständig symmetrisches* n-dimensionales Integrationsgebiet erstreckt, kann $K_n(t_1,\ldots t_n)$ definiert werden als vollständig symmetrisch in seinen Argumenten. Die Monome in Gl. (1.49) treten daher zusätzlich auf als *vollständig symmetrisiert* in den t_i. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
& K_n(t_1,\ldots t_n) \qquad\qquad (1.50)\\
& \equiv \sum_{m=1}^{n}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\sum_{\substack{i_1,\ldots i_m\in\mathbb{N}\\ i_1+\ldots+i_m=n}} \lceil\!\lceil \lceil B_{i_1}\, B_{i_2}\cdots B_{i_m}\rceil\!\rceil_{t_1,\ldots t_n}
\end{aligned}
$$

Dabei haben wir die Notation $\lceil\!\lceil\,\cdot\,\rceil\!\rceil$ eingeführt, mit

$$
\begin{aligned}
& \lceil\!\lceil B_{i_1}\, B_{i_2}\cdots B_{i_m}\rceil\!\rceil_{t_1,\ldots t_n} \qquad\qquad (1.51)\\
& \equiv \lceil B_{i_1}(t_1,\ldots t_{i_1})\; B_{i_2}(t_{i_1+1},\ldots t_{i_1+i_2})\cdots B_{i_m}(t_{i_1+\ldots+i_{m-1}+1},\ldots t_n)\rceil \\
& \quad + \text{ versch. Partitionen der } n \text{ Argumente}
\end{aligned}
$$

Sie impliziert also $\lceil\,\cdot\,\rceil$ nach Gl. (1.44), das heißt sämtliche verschiedenen Reihenfolgen der m Faktoren, und bedeutet darüberhinaus Symmetrisierung der n Argumente t_i, das heißt Summation über sämtlichen *verschiedenen Partitionen von* $t_1,\ldots t_n$ *in Mengen von* $i_1,\ldots i_m$ *Elementen* – was gerade dazu führt, daß der Multinomialkoeffizient $n!/i_1!\cdots i_m!$ von Gl. (1.46) verschwunden ist in Gl. (1.50).

Der dem Erwartungswert zugrunde liegende stochastische Prozeß ist vollständig bestimmt durch die Kumulanten K_n in der Form von Gl. (1.50).

Wir haben in Gl. (1.41) die Entwicklung in Kumulanten für $E(\lambda)$ definiert. Die Konvergenz dieser Entwicklung impliziert – vgl. die Refn. [218, 219] – daß die Kumulante n-ter Ordnung $K_n(t_1,\ldots t_n)$ für alle $n\ge 2$ nur dann wesentlich von Null verschieden ist, wenn sämtliche ihrer n Argumente in einem Bereich des Integrationsintervalls $[0,1]$ fest bestimmter Größe zusammengeclustert sind; anderenfalls verschwindet K_n exponentiell mit den Differenzen ihrer Argumente. Diese Eigenschaft wird als *Cluster-Eigenschaft der Kumulanten* bezeichnet und definiert sie gleichsam.

Die Cluster-Eigenschaft ist dahingehend zu interpretieren, daß die durch die stochastische Variable A bestimmten Größen $B(t)$ in Gl. (1.39) an verschiedenen Stellen t nur dann *korreliert* fluktuiert, wenn alle diese Stellen in einem Cluster fest bestimmter Größe liegen. In diesem Sinne zu verstehen ist die Standard-Notation der Kumulante:

$$\langle\langle B(t_1)\cdots B(t_n)\rangle\rangle \;\equiv\; K_n(t_1,\ldots t_n) \tag{1.52}$$

und ihre Bezeichnung als *Korrelator*.

Die Konvergenz der Entwicklung in Kumulanten, vgl. Gl. (1.41), impliziert aber auch, daß die Größen k_n mit höherem Index n immer weniger zu $\ln w(\lambda)$ beitragen. Die Annahme, daß sämtliche Kumulanten höherer als zweiter Ordnung verschwinden, $K_n \equiv 0$, $\forall n > 2$, kann daher aufgefaßt werden als *grobe erste Näherung* eines beliebig komplizierten stochastischen Prozesses. Diese Annahme heißt genau Annahme eines *Gauß'schen stochastischen Prozesses* für die Eichfeldkonfigurationen $A(x)$ bei der Bildung des Vakuumerwartungswertes $\langle\,\cdot\,\rangle_A$.

Wir werden $B(t)$ in Verbindung bringen mit dem paralleltransportierten Feldstärkentensor $F_{\mu\nu}$. Aufgrund der Poincaréinvarianz des physikalischen Vakuums ist $\langle F_{\mu\nu}\rangle_A \equiv 0$ und nach Gl. (1.50) daher $K_1(t) \equiv B_1(t) \equiv \langle B(t)\rangle_A \equiv 0$. Das heißt der Gauß'sche Prozeß, der in der vorliegenden Arbeit von Relevanz sein wird, ist – wie man sagt – *zentriert*.

Wir betrachten einen *zentrierten Gauß'schen Prozeß*, der per definitionem vollständig bestimmt ist durch seine *Kumulante zweiter Ordnung* $K_2(t_1,t_2)$.

Wir lösen Gl. (1.50) auf nach dem Term auf der rechten Seite mit dem höchsten Index und erhalten

$$\begin{aligned} \lceil\!\lceil B_n \rceil\!\rceil_{t_1,\ldots t_n} \;&=\; B_n(t_1,\ldots t_n) \qquad\qquad (1.53)\\ &=\; K_n(t_1,\ldots t_n) \;+\; \textstyle\sum_{m=2}^{n} \dfrac{(-1)^m}{m} \sum_{\substack{i_1,\ldots i_m\in\mathbb{N}\\ i_1+\ldots+i_m=n}} \lceil\!\lceil B_{i_1}\, B_{i_2}\cdots B_{i_m}\rceil\!\rceil_{t_1,\ldots t_n} \end{aligned}$$

Das heißt $B_1 = K_1 \equiv 0$ und $B_2 = K_2$. Für Indizes $n > 2$ steht wegen $K_{n>2} \equiv 0$ und $m \geq 2$ die Summe von Monomen mit mindestens zwei Faktoren, das heißt höhere Erwartungswerte $B_{n>2}$ *faktorisieren* – sukzessive in $B_2 \equiv K_2$; da insbesondere alle Kumulanten ungerader Ordnung identisch Null sind, überträgt sich diese Eigenschaft auf die B_n. Für einen *zentrierten Gauß'schen Prozeß* gilt zusammenfassend:

$$B_2(t_1,t_2) = K_2(t_1,t_2) \tag{1.54}$$

$$B_n(t_1,\ldots t_n) = \begin{cases} 0 & n \text{ ungerade} \\ \sum_{m=2}^{n} \dfrac{(-1)^m}{m} \sum_{\substack{j_1,\ldots j_m\in\mathbb{N}\\ 2j_1+\ldots+2j_m=n}} \lceil\!\lceil B_{2j_1}\, B_{2j_2}\cdots B_{2j_m}\rceil\!\rceil_{t_1,\ldots t_n} & n\geq 4, \text{ gerade} \end{cases}$$

Die Faktorisierung ist dabei bestimmt durch die Summe über sämtlicher *verschiedenen Partitionen* des Index n in m *geradzahlige* Summanden: $2j_1 + \ldots + 2j_m = n$ mit $j_1,\ldots j_m \in \mathbb{N}$. Diese Gleichung vereinfacht sich zu

$$B_n(t_1,\ldots t_n) \;=\; c_n\, \lceil\!\lceil B_2^{n/2}\rceil\!\rceil_{t_1,\ldots t_n} \tag{1.55}$$

$$\text{mit} \qquad c_n \;=\; \sum_{m=2}^{n/2} \frac{(-1)^m}{m} \sum_{\substack{j_1,\ldots j_m\in\mathbb{N}\\ 2j_1+\ldots+2j_m=n}} c_{2j_1}\, c_{2j_2}\cdots c_{2j_m} \quad n\geq 4, \text{ gerade} \tag{1.55$'$}$$

$$B_2(t_1,t_2) \;=\; K_2(t_1,t_2) \qquad c_2 \equiv 1$$

Der Ausdruck $\lceil\!\lceil B_2^{n/2}\rceil\!\rceil_{t_1,\ldots t_n}$ steht für die Summe sämtlicher $n!/(2!)^{n/2}$ Ausdrücke $\lceil B_2^{n/2}\rceil$ von Vertauschungen der Argumente $t_1,\ldots t_n$, vgl. Gl. (1.51). Die Gl. (1.54) implizite Rekursion reduziert sich hier auf den Koeffizienten c_n; wir haben für die ersten Indizes $c_4 = 1/2$,

$c_6 = -1/12,\ c_8 = 1/6, \ldots$ Zur Illustration geben wir mit

$$\begin{aligned} & B_4(t_1,t_2,t_3,t_4) \qquad (1.56)\\ &= \frac{1}{2}\Big\{B_2(t_1,t_2)\,B_2(t_3,t_4) + B_2(t_1,t_3)\,B_2(t_2,t_4) + B_2(t_1,t_4)\,B_2(t_2,t_3)\\ &\quad + B_2(t_3,t_4)\,B_2(t_1,t_2) + B_2(t_2,t_4)\,B_2(t_1,t_3) + B_2(t_2,t_3)\,B_2(t_1,t_4)\Big\} \end{aligned}$$

die Faktorisierung von $B_4(t_1,t_2,t_3,t_4) \equiv \langle P\,B(t_1)B(t_2)B(t_3)B(t_4)\rangle_A$ an.

1.3 Annahmen und Konstituierung des MSV

Wir haben nun die Mathematik zur Hand, nichtperturbative Observable unter der Annahme eines stochastischen Prozesses für $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ auszudrücken durch die ihn definierenden Kumulanten: das MSV explizit zu formulieren.

Wir betrachten einen Wegner-Wilson-Loop nach Gl. (1.34). Mithilfe des Nichtabelschen Stokes'schen Satzes nach Gl. (1.38) gehen wir über vom Eich-Vektorfeld zum paralleltransportierten Eich-Feldstärkentensor. Sein Erwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ lautet:

$$\langle W(\mathcal{C})\rangle_A \;=\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\,\langle P_{\tilde{\mathcal{C}}}\,\exp -\frac{\mathrm{i}\,g}{2}\int_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})} d\sigma^{\mu\nu}(x')\;F_{\mu\nu}(x';x_0,\mathcal{C}_{x_0x'})\,\rangle_A \qquad (1.57)$$

vgl. $\mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}$ in den Gln. (1.25), (1.25′). Hier bezieht sich die Pfadordnung $P_{\tilde{\mathcal{C}}}$ auf die Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$, das heißt die Deformation der Kurve $\mathcal{C}$, die die Fläche $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$ aufspannt; es gilt $\partial\mathcal{S} = \mathcal{C}$. Der Referenzpunkt x_0 ist beliebig aber fest auf $\mathcal{S}$. Die Kurven $\mathcal{C}_{x_0x'}$ verlaufen von den Punkten x' der Fläche nach x_0. Diese Kurven, mit ihren Inversen $\mathcal{C}_{x_0x'}^{-1} \equiv \mathcal{C}_{x'x_0}$ in definierter Weise verkettet, bilden genau die Deformation $\tilde{\mathcal{C}}$ und damit $\mathcal{S}$. Vgl. die Diskussion im Anschluß an Gl. (1.38).

Gegenüberstellen von Gl. (1.57) und (1.39) konkretisiert die Funktion $w(\lambda)$. Sei $\lambda \equiv 1$ gesetzt, das Eichfeld-Funktional $B(t)$ wird dann identifiziert über die Ersetzung

$$\int_0^1 dt\;B(t) \quad\longrightarrow\quad -\frac{\mathrm{i}\,g}{2}\int_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})} d\sigma^{\mu\nu}(x')\;F_{\mu\nu}(x';x_0,\mathcal{C}_{x_0x'}) \qquad (1.58)$$

im wesentlichen mit der paralleltransportierten Feldstärke $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu a}T^a_{\mathfrak{R}}$ in einer Darstellung $\mathfrak{R}$ der Eichalgebra $su(N_c)$ – integriert über den zweiten, keiner definierten Ordnung unterworfene Parameter, der zusammen mit dem Parameter der Kurve $\tilde{\mathcal{C}}$ lokal die Fläche $\mathcal{S}$ aufspannt. Dieser wiederum ist mit $t \in [0,1]$ in Gl. (1.58) beziehungsweise (1.39) zu identifizieren, und folglich $P_{\tilde{\mathcal{C}}}$ mit dem Ordnungsoperator $P \equiv P_t$ dort.

Konkretisiere Gl. (1.58) den Erwartungswert $w(\lambda \equiv 1)$, so heißt die **Annahme (1) einer konvergenten Entwicklung in Kumulanten** nach Gl. (1.41) genau Konvergenz von

$$\langle W(\mathcal{C})\rangle_A \;=\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\;\exp\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\,k_n\right] \qquad (1.59)$$

$$\text{mit}\qquad k_n \;=\; \left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^n \int_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})} d\sigma^{\mu_1\nu_1}(x_1)\;\cdots\int_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})} d\sigma^{\mu_n\nu_n}(x_n)\;\;K_n(x_1,\ldots,x_n)$$

$$K_n(x_1,\ldots,x_n) \;\equiv\; \langle\!\langle g^n F^{(1)}\cdots F^{(n)}\rangle\!\rangle$$

$$F^{(i)} \;\equiv\; F_{\mu_i\nu_i}(x_i;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_i})$$

vgl. die Notation von Gl. (1.52).

Die Clustereigenschaft dieser Kumulanten K_n manifestiert sich darin, daß $K_n(x_1,\ldots x_n)$

für $n \geq 2$ nur dann wesentlich von Null verschieden ist, wenn sämtliche ihrer Raumzeit-Argumente $x_1, \ldots x_n$, das heißt die paralleltransportierten Feldstärken in einer Sphäre festen Radius' zusammengeclustert sind.[1.2] Sei a der Radius der Sphäre (oder charakterisiere a die Größe eines anderen Gebietes in diesem Sinne), innerhalb derer(dessen) sich die stochastische Fluktuation des Eichfelds $\langle \cdot \rangle_A$ manifestiert als *Korrelation* der paralleltransportierten Eichfeldstärken. a wird allgemein als *Korrelationslänge* bezeichnet.

Schon die Existenz einer konvergenten Entwicklung in Kumulanten, vgl. Gl. (1.59), und zwar über deren Cluster-Eigenschaft, hat schon weitreichende Konsequenzen.

Wir betrachten einen Wegner-Wilson-Loop $W(\mathcal{C})$, dessen Ausdehnung sehr viel größer ist als A; Kriterium hierfür sei $\mathcal{S}_{\min.} \gg a^2$, wobei $\mathcal{S}_{\min.}$ definiert ist als die Fläche $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$, bestimmt durch eine Deformation $\tilde{\mathcal{C}}$ im ausgeführten Sinne, deren Betrag *minimal* ist.
Wir schätzen den Ausdruck k_n aus Gl. (1.59) ab. Sei dazu die Cluster-Eigenschaft der Kumulante $K_n(x_1, \ldots x_n)$ dadurch approximiert, daß $K_n \equiv 1$, falls sämtliche ihrer n Argumente innerhalb einer Sphäre des Radius' a liegen, und ansonsten $K_n \equiv 0$ (d.h. ϑ-Funktions-artiger Abfall und Normierung der Korrelation auf 1): Die ersten $n-1$ Integrationen $d\sigma_i \equiv d\sigma^{\mu_i \nu_i}(x_i)$, $i = 1, \ldots n-1$, über die Fläche $\mathcal{S}$ ergeben dann den Faktor a^2, nämlich wenn die Argumente $x_1, \ldots x_{n-1}$ von x_n nicht weiter entfernt sind als a; die letzte Integration $d\sigma_n$ schließlich ist frei und ergibt den Betrag von $\mathcal{S}$. Letztlich ist die Minimalfläche $\mathcal{S}_{\min.}$ zu nehmen, vgl. die Refn. [60, 61], und wir erhalten die Abschätzung

$$\langle W(\mathcal{C}) \rangle_A \;\cong\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}} \, \exp \, -\sigma \, |\mathcal{S}_{\min.}| \tag{1.60}$$

mit σ einer Konstanten der Dimension $Fläche^{-1} = Energie\ pro\ Länge$.

Dies ist genau das *area law*. Es begründet die Bedeutung des Wegner-Wilson-Loops in nichtabelschen Eichtheorien als Ordnungsparameter auf nichtperturbativ dominierten Skalenbereichen. Wegner-Wilson-Loops wurden 1971 erstmals definiert von Wegner in der statistischen Physik, Ref. [222], bevor 1974 Wilson mit ihrer Hilfe *Confinement* von Quarks diskutierte im Rahmen von QCD als Gittereichtheorie, Ref. [235].

Da das Verstehen des Confinements von Eichladungen ursprüngliches Moment war zur Formulierung des MSV und der Confinement zugrundeliegende Mechanismus von herausragender Bedeutung ist für unsere Arbeit, gehen wir näher darauf ein; vgl. Ref. [198].

Wir betrachten das eichinvariante Paar eines statischen Quarks und Antiquarks mit räumlicher Separation R. Die klassische Weltlinie des Quarks verläuft parallel der Zeitachse der Raumzeit, die des Antiquarks mit räumlichem Abstand R parallel zu dieser aber entgegengesetzt orientiert. Der Propagation des Quarks und Antiquarks durch die Raumzeit entsprechen Konnektoren entlang dieser Kurven. Wir betrachten das statische Paar über einen Zeitraum T (bzg. seines Ruhesystems). Eichinvarianz manifestiert sich darin, daß die Konnektoren entlang der Weltlinien verbunden sind durch Konnektoren zu den Zeiten 0 und T. Resultat ist eine geschlossene orientierte Rechteckkurve, bezeichnet mit $\mathcal{C}_{RT}$. Das Paar ist daher repräsentiert – vgl. die Verkettungseigenschaft von Konnektoren nach

[1.2] An dieser Stelle ist eine grundlegende Bemerkung notwendig: Die Clusterung, das heißt die *korrelierte* Fluktuation paralleltransportierter Feldstärken bezogen auf Sphären macht a priori nur Sinn bezüglich Euklidischer Sphären: Das MSV macht a priori nur Sinn formuliert auf einer Raumzeit mit *Euklidischer* (Riemannscher) Metrik. Um die prinzipielle Argumentation dieses Abschnitts nicht unnötigerweise zu komplizieren, geben wir zunächst nur eine Formulierung an: die des MSV auf der physikalischen Raumzeit mit *Minkowskischer* (pseudo-Riemannscher) Metrik – da diese unmittelbar anwendbar ist auf nichperturbative Hochenergiestreuung. Wir argumentieren dessen ungeachtet auf der Basis einer Euklidischen Metrik. Damit suggerieren wir Existenz und Äquivalenz zweier Formulierungen: auf der physikalischen Minkowski-Raumzeit und ihrer Fortsetzung ins Euklidische. Das folgende Kapitel 2 zeigt dies dann explizit durch Angabe der *analytischen Fortsetzung* des MSV – und diskutiert die physikalischen Konsequenzen.

Gl. (1.17′) – als Spur eines Konnektors entlang der geschlossenen Kurve $\mathcal{C}_{RT}$, das heißt als Wegner-Wilson-Loop $W(\mathcal{C}_{RT})$, der steht in der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$ der Quarks.

Für die potentielle Energie dieses Paares gilt

$$V(R) \;=\; \lim_{T\to\infty} \; -\frac{1}{T}\,\ln\,\langle W(\mathcal{C}_{RT})\rangle_A \tag{1.61}$$

Da der Betrag der Minimalfläche mit Rand $\mathcal{C}_{RT}$ gerade RT ist, ergibt Gl. (1.60) die Abschätzung $V(R)=\sigma R$, vgl. die Refn. [60,61]. Die potentielle Energie eines statischen Quarks und Antiquarks wächst also *linear* mit wachsender Separation R. Das resultierende physikalische Bild ist die Ausbildung eines *gluonischen Strings* zwischen dem Quark und dem Antiquark, das diese konfiniert mit der Stärke σ, der Stringspannung. Wir haben *lineares Confinement*.

Wir betonen, daß das MSV dies folgert allein auf Basis der Annahme, daß die Entwicklung in Kumulanten bezüglich paralleltransportierter Feldstärken konvergiert – Gl. (1.59) sinnvoll in diesem Sinne existiert. Der zugrundeliegende stochastische Prozeß, das heißt die Kumulanten an sich sind ausdrücklich noch nicht spezifiziert.

Um zu quantitativen Aussagen zu gelangen wird das MSV im engeren Sinne definiert. Dies geschieht durch die zusätzliche **Annahme (2) eines Gauß'schen Prozesses** im Sinne des vorangegangenen Abschnitts.

Wie dort schon angemerkt ist dieser wegen der Poincaréinvarianz des Vakuums der QCD *zentriert*: $K_1(x)\equiv\langle\!\langle gF_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C}_{x_0x})\rangle\!\rangle\equiv\langle gF_{\mu\nu}(x;x_0,\mathcal{C}_{x_0x})\rangle_A\equiv 0$. Unter der Ersetzung nach Gl. (1.58) haben wir Relationen, die Gl. (1.54) entsprechen, das heißt Faktorisierung nach Gl. (1.55): Vakuumerwartungswerte $\langle P\,g^n F^{(1)}\cdots F^{(n)}\rangle_A$ faktorisieren in die Kumulante zweiter Ordnung, das heißt in $K_2(x_1,x_2)\equiv\langle\!\langle g^2F^{(1)}F^{(2)}\rangle\!\rangle\equiv\langle P\,g^2F^{(1)}F^{(2)}\rangle_A$. Mit ihrer Kenntnis ist das MSV im engeren Sinne vollständig bestimmt. Wir entwickeln im folgenden einen Ansatz.

Wir haben mit der Notation $F^{(i)}\equiv F_{\mu_i\nu_i}(x_i;x_0,\mathcal{C}_{x_0x_i})$ aus Gl. (1.59):

$$\begin{aligned} K_2 \;&=\; (K_2)_{a_1a_2}\,T^{a_1}T^{a_2} \qquad\qquad (1.62)\\ &=\; \langle P\,g^2F^{(1)}F^{(2)}\rangle_A \;=\; \langle P\,g^2F^{(1)}{}_{a_1}F^{(2)}{}_{a_2}\,T^{a_1}T^{a_2}\rangle_A \;=\; P\,\langle g^2F^{(1)}{}_{a_1}F^{(2)}{}_{a_2}\rangle_A\,T^{a_1}T^{a_2} \end{aligned}$$

mit der letzten Identität wegen der Linearität von $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ und dem Pfadordnungsoperator P, der die Reihenfolge der T^{a_1}, T^{a_2} bestimmt, den Generatoren einer Darstellung $\mathfrak{R}$ der $su(N_c)$. Dies ist ein Operator, der aufgrund der Eichinvarianz des physikalischen Vakuums, mit einem beliebigen anderen Operator vertauscht; er ist daher proportional zum quadratischen Casimir-Operator $T^aT^a=c_2(\mathfrak{R})\mathbb{1}_{\mathfrak{R}}$, also zur Eins der Darstellung:

$$\begin{aligned} K_2 \;&=\; (K_2)_{a_1a_2}\,T^{a_1}T^{a_2} \;=\; c_{\mathfrak{R}}\,(c_2(\mathfrak{R}))^{-1}\,T^aT^a \;=\; c_{\mathfrak{R}}\,\mathbb{1}_{\mathfrak{R}} \qquad\qquad (1.63)\\ \text{mit}\qquad c_{\mathfrak{R}} \;&=\; c_2(\mathfrak{R})/d_{SU(N_c)}\,(K_2)_{aa} \;=\; n_{\mathfrak{R}}/d_{\mathfrak{R}}\,(K_2)_{aa} \end{aligned}$$

vgl. Gl. (1.24). Dabei folgt die Konstante $c_{\mathfrak{R}}$ durch Spurbildung mithilfe $\mathrm{tr}\,T^{a_1}T^{a_2}=n_{\mathfrak{R}}\delta^{a_1a_2}$; sie hängt ab von der Darstellung $\mathfrak{R}$ über den Faktor $c_2(\mathfrak{R})$ deren quadratischen Casimir-Operators beziehungsweise von deren Normierung $n_{\mathfrak{R}}$ und Dimension $d_{\mathfrak{R}}$.

Unmittelbare Konsequenz der zweiten Identität in Gl. (1.63) ist Proportionalität der Komponenete $(K_2)_{a_1a_2}$ der Kumulante zweiter Ordnung zum Kroneckersymbol $\delta_{a_1a_2}$:

$$(K_2)_{a_1a_2} \;=\; \delta_{a_1a_2}/d_{SU(N_c)}\,(K_2)_{aa} \tag{1.64}$$

Die zu den Gln. (1.63), (1.64) äquivalenten Relationen in der suggestiven Notation von Vaku-

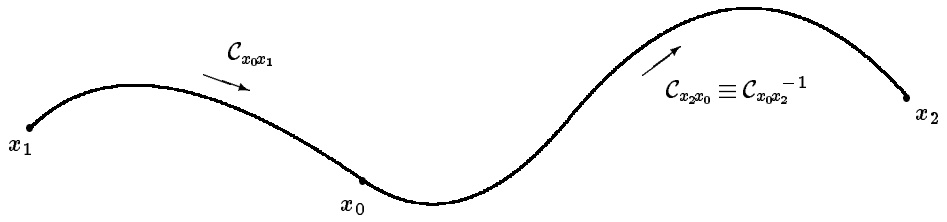


Abbildung 1.2: Die funktionale Abhängigkeit des Tensor $D = (D_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2})$, vgl. Gl. (1.66), kann folgendermaßen aufgefaßt werden: D hängt ab von den Positionen x_1, x_2 der paralleltransportierten Feldstärken, von der diese Punkte verbindenden Kurve $\mathcal{C}_{x_2x_1} \equiv \mathcal{C}_{x_0x_2}^{-1} \circ \mathcal{C}_{x_0x_1}$ und von dem auf dieser Kurve gewählten Referenzpunkt x_0.

umerwartungswerten, vgl. Gl. (1.62), lauten:

$$\langle g^2 F^{(1)} F^{(2)} \rangle_A = c_2(\mathfrak{R})/d_{SU(N_c)} \; \langle g^2 F^{(1)}{}_a F^{(2)}{}_a \rangle_A \cdot \mathbb{1}_{\mathfrak{R}} \tag{1.63'}$$

$$\langle g^2 F^{(1)}{}_{a_1} F^{(2)}{}_{a_2} \rangle_A = \delta_{a_1 a_2}/d_{SU(N_c)} \; \langle g^2 F^{(1)}{}_a F^{(2)}{}_a \rangle_A \tag{1.64'}$$

wobei der Pfadordnungsoperator P aufgrund der Symmetrie bezüglich der Eichgruppenindizes überflüssig und daher weggelassen ist. Über diese Relationen ist die Kumulante zweiter Ordnung vollständig bestimmt durch den bezüglich der Eichgruppenindizes kontrahierten Vakuumerwartungswert $\langle g^2 F^{(1)}{}_a F^{(2)}{}_a \rangle_A$.

Wir führen ein die Notation

$$\langle g^2 FF \rangle_A \equiv \langle g^2 F_{\mu\nu a}(x_1; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_1}) F^{\mu\nu}{}_a(x_2; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_2}) \rangle_A \Big|_{x_1 \equiv x_2} \tag{1.65}$$

für die Minkowskische Version des *Gluonkondensats*, wie definiert in den Summenregeln der QCD von Shifman, Vainshtein, Zakharov. Herausziehen dieses Faktors gemäß

$$\begin{aligned} &\langle g^2 F^{(1)}{}_a F^{(2)}{}_a \rangle_A \\ &= \langle P \; g^2 F_{\mu_1\nu_1 a}(x_1; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_1}) F_{\mu_2\nu_2 a}(x_2; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_2}) \rangle_A \\ &=: \langle g^2 FF \rangle_A \cdot D_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}(x_1, x_2; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_1}, \mathcal{C}_{x_0x_2}) \qquad \text{mit} \qquad D_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}\Big|_{x_1 \equiv x_2} = 1 \end{aligned} \tag{1.66}$$

definiert über seine kovarianten Komponenten den dimensionslosen Lorentz-Tensor vierter Stufe $D = (D_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2})$, der den reinen Konfigurationsanteil der Kumulante zweiter Ordnung subsumiert, vgl. die Gln. (1.63'), (1.64'). Er hängt ab von den Positionen x_1, x_2 der beiden paralleltransportierten Feldstärken, von dem Referenzpunkt x_0, *an den*, und von den Kurven $\mathcal{C}_{x_0x_1}$, $\mathcal{C}_{x_0x_2}$, *entlang derer* diese paralleltransportiert werden, vgl. Abb. 1.2.

Für diesen Tensor D wird im folgenden gemacht: die **Annahme (3) der Unabhängigkeit vom Referenzpunkt x_0 und von den Kurven $\mathcal{C}_{x_0x_1}$ und $\mathcal{C}_{x_0x_2}$.**

Referenzpunkt wie Kurven sind mit denen zu identifizieren, die der Nichtabelsche Stokes'sche Satz einführt, vgl. Gl. (1.38). Sie sind daher a priori – innerhalb gewisser Randbedingungen – frei wählbar: Unabhängigkeit von den Kurven ist gegeben, wenn die Integrationen über die Argumente x_1 und x_2 nach Gl. (1.59), das heißt insbesondere die Fläche $\mathcal{S} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$ und die Pfadordnung entlang $\tilde{\mathcal{C}}$, kompatibel sind mit den Integrationen des Nichtabelschen Stokes'schen Satzes. Beides werden wir respektieren. Unabhängigkeit vom Referenzpunkt x_0 ist gegeben, wenn alle Kumulanten berechnet werden, die den stochastischen Prozeß definieren, der der Bildung $\langle \cdot \rangle_A$ des Vakuumerwartungswerts zugrunde liegt. Annahme (2) eines Gauß'schen Prozesses – aufgefaßt als Weglassen der höheren Kumulanten des tatsächlichen

komplizierteren Prozesses – ist daher mehr Approximation als Annahme. In praxi ist bei „sinnvoller“ Wahl des Referenzpunktes die Abhängigkeit numerisch nur schwach; wir kommen hierauf zurück, sei auch verwiesen auf die Refn. [64, 178, 179].

Poincaré- und Paritätskovarianz von D als Tensor impliziert, daß seine Tensorstruktur nur aus zwei Tensoren konstruiert sein kann: dem *metrischen Tensor* $g = (g_{\mu\nu})$ und der Differenz ξ seiner Argumente, und seine skalare funktionale Abhängigkeit nur aus ξ^2, dem invarianten Differenzquadrat. Äquivalent zu ξ in dieser Hinsicht ist die partielle Ableitung $\partial \equiv \partial/\partial\xi$, da sie auf solche Funktionen wie $\partial \equiv 2\xi\, d/d\xi^2$ wirkt. Wir definieren

$$\xi \;=\; (x_1 - x_2)/a \tag{1.67}$$

Sei a eine Konstante der Dimension einer Länge, dann ist ξ dimensionslos. [Wir werden a identifizieren als „Korrelationslänge“.] Damit gilt für $D \equiv (D_{\mu\nu\rho\sigma})$ die Darstellung:

$$D_{\mu\nu\rho\sigma}(\xi) \;=\; \varkappa\, t^C_{\mu\nu\rho\sigma}\;\; D_C(\xi^2) \;+\; (1-\varkappa)\, t^{NC}_{\mu\nu\rho\sigma}\;\; \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\xi^2} du\; D_{NC}(u) \tag{1.68}$$

mit

$$t^C_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \frac{1}{12}\left(g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}\, g_{\nu\rho}\right) \;=\; \frac{1}{12}\;\; \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\;\; g_{\alpha\rho}\, g_{\beta\sigma} \tag{1.69}$$

$$t^{NC}_{\mu\nu\rho\sigma} \;=\; \frac{1}{6}\left(g_{\mu\rho}\,\partial_\nu\,\partial_\sigma - g_{\mu\sigma}\,\partial_\nu\,\partial_\rho + g_{\nu\sigma}\,\partial_\mu\,\partial_\rho - g_{\nu\rho}\,\partial_\mu\,\partial_\sigma\right) \tag{1.69'}$$

$$\;=\; \frac{1}{6}\;\; g_{\alpha\gamma}\;\; \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\,\partial_\beta\;\; \delta^{\gamma\delta}_{\rho\sigma}\,\partial_\delta$$

Der Lorentz-Tensor $D_{\mu\nu\rho\sigma}$ und damit $t^C_{\mu\nu\rho\sigma}$, $t^{NC}_{\mu\nu\rho\sigma}$ sind antisymmetrisch unter Vertauschung der Indizes $\mu \leftrightarrow \nu$ oder $\rho \leftrightarrow \sigma$. Dies ist evident, geschrieben in Termen verallgemeinerter Kronecker-Symbole, die allgemein definiert sind als Determinante konventioneller Kronecker-Symbole, vgl. Gl. (E.4):

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} \;:=\; \det\left(\delta^{\mu_i}_{\nu_j}\right) \;=\; \delta^{[\mu_1\cdots\mu_s]}_{\nu_1\cdots\nu_s} \;=\; \delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{[\nu_1\cdots\nu_s]} \;=\; \begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_s\\ \nu_1 & \nu_2 & \cdots & \nu_s\end{pmatrix} \tag{1.70}$$

Sie sind folglich voll antisymmetrisch in den kontra- wie kovarianten Indizes und gleich dem Signum der Indexpermutation $\sigma^\star\colon \mu_i \to \nu_i$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, falls $\{\mu_i\}$ und $\{\nu_i\}$ paarweise verschiedene Indexmengen sind, – und Null sonst; bzgl. der Klammernotation vgl. Gl. (A.8).

Die Kontraktionen der Tensorstrukturen t^C und t^{NC} sind normiert gemäß

$$t^C_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} \;=\; 1 \tag{1.71}$$

$$t^{NC}_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} \;=\; \partial^2 \tag{1.71'}$$

mit $\partial^2 \equiv \partial_\mu \partial^\mu$ dem d'Alembert-Operator.

Die Darstellung Gl. (1.68) leiten wir in Ref. [124] her. Sie ist die geeignetste für unsere Zwecke, differiert aber von der Standarddarstellung, die folgt durch Ausführen einer der partiellen Ableitungen in t^{NC} (angewandt auf das Integral bleibt wegen $\partial \equiv 2\xi\; d/d\xi^2$ der Integrand an der oberen Grenze stehen) und Umbenennung $D_C \to D$ und $D_{NC} \to D_1$.

Gl. (1.68) ist die Zerlegung in zwei Tensorstrukturen t^C und t^{NC}, die gewichtet sind mit einem Parameter $\varkappa$ und multipliziert mit skalaren (Korrelations-)Funktionen D_C beziehungsweise D_{NC} des invarianten Abstandquadrats ξ^2. Der Term mit $t^{NC}_{\mu\nu\rho\sigma}$ verschwindet identisch *per constructionem*, wenn einer der Differentialoperatoren

$$\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\;\partial^{x_1}_\beta \tag{1.72}$$

$$\epsilon^{\alpha\beta\rho\sigma}\;\partial^{x_2}_\beta \tag{1.72'}$$

auf ihn wirkt; der Term mit t^C ist a priori definiert als der Rest. Diese Zerlegung der Kumulante zweiter Ordnung in den Feldstärken – vgl. die Gln. (1.63′), (1.64′) und (1.66) –

resultiert also in *einen* Term (NC), wenn die Feldstärken der Theorie die *abelsche* Bianchi-Identität erfüllen: $\partial^x_\mu F_{\nu\rho}(x) + \text{zykl.} = 0$, und in die *Summe zweier Terme* (C und NC), wenn sie diese nicht erfüllen. Die Funktion D_C ist ungleich Null also nur in einer *nicht-abelschen Theorie* wie der QCD oder in einer *abelschen Theorie mit magnetischen Monopolen*. Die Indizes C und NC stehen für *confining* (konfinierend) beziehungsweise *non-confining* (nicht konfinierend) und greifen ein zentrales Resultat des MSV auf: Für die Stringspannung σ als Maß für die Stärke *linearen Confinements* – vgl. Seite 35 – wird berechnet:[1.3]

$$\sigma = \varkappa \langle g^2 F F \rangle_A \, a^2 \cdot \frac{\pi}{4N_c} \int_0^\infty du^2 \, D_{C\,\mathrm{E}}(-u^2) \tag{1.73}$$
$$= \varkappa \langle g^2 F F \rangle_A \, (\lambda_\nu a)^2 \cdot \frac{\pi}{4N_c} \, 2(\nu - 3)$$

vgl. die Ref. [63]. Ihr Nichtverschwinden setzt das Nichtverschwinden der Funktion D_C voraus: Das MSV postuliert lineares Confinement – für die QCD, nicht aber für die QED.

Wir geben die Ansätze des MSV für die Korrelationsfunktionen D_C und D_{NC} an. Sei verwiesen auf unserer Diplomarbeit, Ref. [124].

Wir schreiben die rechte Seite von Gl. (1.68) als ihr Fourier-Integral. Sei k der zu ξ konjugierte dimensionslose Impuls [k in Einheiten von a^{-1}, da ξ in Einheiten von a], seien $\tilde{D}_C$, $\tilde{D}_{NC}$ die Fourier-transformierten Korrelationsfunktionen. Dann folgt

$$D_{\mu\nu\rho\sigma}(\xi) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k\cdot\xi} \left[\varkappa \, \tilde{t}^{NC}{}_{\mu\nu\rho\sigma} \; \tilde{D}_C(k^2) + (1-\varkappa) \, \frac{1}{2} \, \tilde{t}^{NC}{}_{\mu\nu\rho\sigma} \; \tilde{D}'_{NC}(k^2) \right] \tag{1.74}$$

mit

$$\tilde{t}^{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = t^{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{12} \, \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \; g_{\alpha\rho} \, g_{\beta\sigma} \tag{1.75}$$

$$\tilde{t}^{NC}{}_{\mu\nu\rho\sigma} = t^{NC}{}_{\mu\nu\rho\sigma}\Big|_{\partial \to -\mathrm{i}\, k} = -\frac{1}{6} \; g_{\alpha\gamma} \; \delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \, k_\beta \; \delta^{\gamma\delta}_{\rho\sigma} \, k_\delta \tag{1.75'}$$

Der Strich bezeichnet im Sinne $\tilde{D}'_{NC}(k^2) \equiv d/dk^2 \, \tilde{D}_{NC}(k^2)$ die totale Ableitung einer Funktion nach ihrem Argument; die Tensoren $\tilde{t}^C$, $\tilde{t}^{NC}$ kontrahieren zu:

$$\tilde{t}^{C}_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} = 1 \tag{1.76}$$

$$\tilde{t}^{NC}{}_{\mu\nu}{}^{\mu\nu} = -k^2 \tag{1.76'}$$

vgl. die Gln. (1.71), (1.71′). Daraus folgt

$$D(\xi^2) \equiv D_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}(\xi) \tag{1.77}$$
$$= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k\cdot\xi} \left[\varkappa \, \tilde{D}_C(k^2) + (1-\varkappa) \left(-\frac{1}{2} \, k^2 \, \tilde{D}'_{NC}(k^2) \right) \right]$$

Dies ist eine Funktion, die im Rahmen von QCD als $SU(N_c)$-Gittereichtheorie numerisch berechnet wird, vgl. die Refn. [35, 50, 51] und [46–48] bezüglich QCD ohne beziehungsweise mit dynamischen Fermionen. Ref. [51] zeigt für explizit $N_c \equiv 3$, daß beide Tensorstrukturen im (Gitter-)relevanten Bereich des Ortsraums *proportionales Abklingverhalten* zeigen. Ref. [122] macht daher, zunächst für beliebiges $\varkappa$, den Ansatz:

$$\tilde{D}(k^2) \equiv \varkappa \, \tilde{D}_C(k^2) + (1-\varkappa) \left(-\frac{1}{2} \, k^2 \, \tilde{D}'_{NC}(k^2) \right) \tag{1.78}$$
$$\stackrel{!}{=} -6\mathrm{i} \, A_\nu \, \lambda_\nu^6 \, \frac{k^2}{(\lambda_\nu^2 k^2 - 1 + \mathrm{i}\,\epsilon)^\nu} \qquad \forall \varkappa, \;\; \nu \in \mathbb{C}, \;\; \mathrm{Re}\, \nu > 3$$

Dieser Ansatz ist die unmittelbare Verallgemeinerung des Feynman-Propagators $\tilde{\Delta}_F$, wie wir explizit zeigen in Ref. [124], Anh. B. Sie impliziert dessen Polstruktur in der komplexen k^0-Ebene, das heißt die Existenz keiner weiteren Pole als $k^0 = \pm\sqrt{m^2 + \vec{k}^2}$, mit $m^2 \equiv \lambda_\nu^{-2}$,

[1.3] Die zweite Identität gilt auf Basis des unten in Gl. (1.78) gemachten Ansatzes.

und die wohlbekannte mit diesen assoziierte Epsilon-Vorschrift zur Integration entlang der Achse $\mathrm{Re}k^0$. Die Wick-Drehung in Euklidische Raumzeit geschieht daher vollständig analog; in Hinblick auf die Analytische Fortsetzung der T-Amplitude in Kapitel 2 führen wir sie für Definiertheit explizit durch in Anhang D.6.1. Unter dieser Wick-Drehung gehen die Funktionen D_C, D_{NC} über in die *Euklidischen Korrelationsfunktionen* $D_{C\,\mathrm{E}}$, $D_{NC\,\mathrm{E}}$. Diese hängen ab von $-\xi_{\mathrm{E}}^2 = \xi_{\mathrm{E}}^\mu \xi_{\mathrm{E}}^\mu > 0$, dem *negativ definiten* Euklidischen Vier-Skalarprodukt, vgl. Def. in Gl. (D.108). Die Funktionen D_{EC}, D_{ENC} sind dort in der Weise konstruiert, daß sie für $\nu \in \mathbb{N} > 3$ und großes reell positives Argument $-\xi_{\mathrm{E}}^2$ *exponentielles Abfallverhalten* zeigen: $\sim \exp \sqrt{-\xi_{\mathrm{E}}^2}$. Sie sind daher zu interpretieren als *Korrelationsfunktionen*. Diese Eigenschaft überträgt sich unmittelbar auf die *Minkowskischen Korrelationsfunktionen* $D_C(\xi^2)$, $D_{NC}(\xi^2)$ für großes negatives, das heißt *raumartiges* Argument.

Die a priori freien Konstanten A_n und λ_n in Gl. (1.78) sind so zu bestimmen, daß sie zum einen die durch Gl. (1.66) festgelegte Normierung von $D(\xi^2) = D_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}(\xi)$, vgl. Gl. (1.78), garantieren und zum anderen der ξ impliziten Konstanten a die Bedeutung einer Korrelationslänge geben. Dies geschieht über die Forderungen

$$1 \stackrel{!}{=} D\Big|_{\xi^2 \equiv 0} \qquad \text{und} \qquad 1 \stackrel{!}{=} \int_0^\infty du\, D(-u^2) \tag{1.79}$$

Durch die zweite Bedingung – an das Abfallverhalten von D für raumartiges Argument, ergo von D_{E} – erhält die ξ implizite Skala a die Bedeutung einer Korrelationslänge. Es folgt – vgl. die Gln. (F.99), (F.109):[1.4]

$$A_\nu \;=\; -\,\mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{4\pi^2}{3}\,\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-3)} \;=\; -\,\mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}} \cdot 8\pi^2 \binom{\nu-1}{3} \tag{1.80}$$

$$\lambda_\nu \;=\; \frac{4}{3}\,\frac{\Gamma(\nu-3)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left((\nu-3)+\frac{1}{2}\right)} \;=\; \frac{8}{3\pi}\,\frac{\Gamma(\nu-3)\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left((\nu-3)+\frac{1}{2}\right)} \qquad \mathrm{Re}\,\nu > 3 \tag{1.80'}$$

der Binomialkoeffizient für Einträge $\in \mathbb{C}$ in Standard-Definition.

Forderung von Gl. (1.78) für beliebige Parameterwerte $\varkappa$ impliziert:[1.5]

$$\tilde{D}_C(k^2) \;=\; -\,\frac{1}{2}\,k^2\,\tilde{D}'_{NC}(k^2) \;=\; 6\mathrm{i}\,A_\nu \cdot \lambda_\nu^2(-k^2)\;\lambda_\nu^4\,\frac{1}{(\lambda_\nu^2 k^2 - 1 + \mathrm{i}\,\epsilon)^\nu} \tag{1.81}$$

Diese explizite Relation zwischen den Korrelationsfunktionen $\tilde{D}_C$ und $\tilde{D}_{NC}$ implementieren wir in Ref. [124], Anh. B in der Weise, daß folgt die Darstellung, die wir auch der vorliegenden Arbeit zugrunde legen – vgl. die Gln. (F.9), (F.10), (F.116), in $d \equiv 4$ Dimensionen:[1.4]

$$D_{\mu\nu\rho\sigma}(\xi) \;=\; \varkappa\; t^C_{\mu\nu\rho\sigma}\;\partial^2\;\; F^C(\xi^2) + \;(1-\varkappa)\;\; t^{NC}_{\mu\nu\rho\sigma}\;\; F^{NC}(\xi^2) \tag{1.82}$$

$$\text{mit} \qquad F^C(\xi^2) \;\equiv\; F^{NC}(\xi^2) \;=\; \lambda_\nu^2\,\frac{\nu-1-d/2}{d/2}\cdot \mathcal{K}_{\nu-\frac{d}{2}}(\zeta)\,\Big|_{d\equiv 4}$$

$$= \;\lambda_\nu^2\,\frac{\nu-3}{2}\cdot \mathcal{K}_{\nu-2}(\zeta) \qquad\qquad \zeta \equiv \sqrt{-\xi^2/\lambda_\nu^2 + \mathrm{i}\,\epsilon}$$

und

$$\mathcal{K}_\mu(\zeta) \;\equiv\; \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\;\zeta^\mu\,\mathrm{K}_\mu(\zeta) \qquad \underset{\zeta\to 0}{\longrightarrow}\;\; 1, \quad \forall \mathrm{Re}\,\mu > 0 \tag{1.83}$$

Bzgl. der Tensorkomponenten $t^C_{\mu\nu\rho\sigma}$, $t^{NC}_{\mu\nu\rho\sigma}$ vgl. die Gln. (1.68), (1.68′). Die Funktion $\mathcal{K}_\mu$ ist definiert über K_μ, die modifizierte Besselfunktion zweiter Art mit Index μ in der Konvention von Ref. [2]; sie ist *per constructionem* normiert auf Eins für verschwindendes Argument.

Die modifizierte Besselfunktion $\mathrm{K}_\mu(\zeta)$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$ geht gegen Null wie $\sim \exp -|\zeta|$ für $|\zeta| \to \infty$ in der rechten Halbebene: $|\mathrm{Arg}\;\zeta| < \frac{\pi}{2}$, und divergiert wie $\sim \exp|\zeta|$ auf der imaginären Achse;

[1.4] Im Zuge der Herleitungen in Anhang F werden verifiziert die Gln. (1.74), (1.80), (1.80′), (1.82); vgl. dort.
[1.5] gesetzt $\varkappa = 0$, beziehungsweise $\varkappa = 1$

vgl. Ref. [124], Anh. B und Ref. [2]. Die Epsilon-Vorschrift $\epsilon \to 0+$ ist daher *essentiell* für zeitartige und *redundant* für raumartige ξ. In nichtperturbativer Streuung im Limes unendlicher Schwerpunktenergie, $\sqrt{s} \to \infty$, zeigen wir in Ref. [124] – und für den Fall großer aber endlicher Werte $\sqrt{s}$ im folgenden Kapitel 2 –, daß nur *raumartige* Differenzvektoren ξ beitragen: das heißt $\xi^2 < 0$ ergo $\zeta \equiv \sqrt{-\xi^2/\lambda_\nu^2 + \mathrm{i}\,\epsilon} \cong \sqrt{-\xi^2}/\lambda_\nu \in \mathbb{R}^+$.

Wir zeigen in Ref. [124] – vgl. auch Anh. F – vgl. auch, daß die Darstellung von $D_{\mu\nu\rho\sigma}$ durch Gl. (1.82) gültig ist für Indizes $\nu \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}\nu > 3$. Die beste Anpassung an die Gitterdaten ist gegeben durch ν als der kleinstmöglichen natürlichen Zahl, vgl. die Refn. [51,63,122]. Sei in diesem Sinne gesetzt $\nu \equiv 4$ und der Index im folgenden unterdrückt:

$$A \equiv A_4 = -8\pi^2 \tag{1.84}$$

$$\lambda \equiv \lambda_4 = \frac{8}{3\pi} \tag{1.84'}$$

vgl. die Gln. (1.80), (1.80′).

Aus zitierter Ref. [51] wird extrahiert die Gewichtung der Tensorstruktur t^C versus t^{NC}; es folgt $\varkappa \cong 0.74$. Dieser Zahlenwert schränkt ein die Werte für Gluonkondensat $\langle g^2 FF \rangle_A$ und Korrelationslänge a – der zwei Zahlen-Parameter des MSV; vgl. unten auf Seite 124.

Dies die Annahmen und Ansätze des MSV, die gestatten seine Anwendung auf den Vakuumerwartungswert *eines* Wegner-Wilson-Loops $\langle W(\mathcal{C}) \rangle_A$. Es kann Confinement eines statischen Quark-Antiquark-Paares quantifiziert werden: die Stringspannung σ, vgl. Gl. (1.73) und die Refn. [60,61], die spinabhängigen Terme, Ref. [139], das transversale Profil des konfinierenden gluonischen Strings, Refn. [64, 178, 179], – als nur die wichtigsten Anwendungen in der Niederenergiephysik.

Wir betrachten Hochenergiephysik. Im Limes unendlicher invarianter Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ leitet Nachtmann in Ref. [146] die T-Amplitude her für die Streuung von (Anti)Quarks und verallgemeinert sie in Ref. [148] auf Gluonen und eichinvariante Quark-Antiquark-Paare. Sie ist wesentlich bestimmt durch den Vakuumerwartungswert zweier Wegner-Wilson-Linien entlang der klassischen im Limes $s \to \infty$ lichtartigen Trajektorien der Partonen, in deren Darstellung der $SU(N_c)$ – für eichinvariante Quark-Antiquark-Paare durch den Vakuumerwartungswert zweier lichtartiger Wegner-Wilson-Loops der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$.

Wir benötigen daher eine Formel zur Berechnung des Vakuumerwartungswertes *zweier* Wegner-Wilson-Loops $\langle W(\mathcal{C}_\mathrm{p}) W(\mathcal{C}_\mathrm{m}) \rangle_A$. In Ref. [122] wird gezeigt für den Vakuumerwartungswert *eines* Wegner-Wilson-Loops, daß in sinnvoller Approximation dasselbe Resultat folgt aus der strengen Entwicklung in Kumulanten nach van Kampen, das heißt auf Basis der Faktorisierung in die Kumulante zweiter Ordnung nach Gl. (1.55) auf *Matrixniveau*:

$$B_n(t_1, \ldots t_n) = c_n \; \lceil\!\lceil B_2^{n/2} \rceil\!\rceil_{t_1, \ldots t_n} \tag{1.85}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad B_n(t_1, \ldots t_n) \quad &\longrightarrow \quad \langle P\, g^n F^{(1)} \cdots F^{(n)} \rangle_A \\ K_2(t_1, t_2) \quad &\longrightarrow \quad K_2(x_1, x_2) \qquad\qquad \text{für } n = 2 \end{aligned}$$

und auf Basis der Faktorisierung auf *Matrixelementeniveau* wie folgt:

$$B_{n,\, a_1 \cdots a_n}(t_1, \ldots t_n) = c_n \; \lceil\!\lceil B_2^{n/2} \rceil\!\rceil_{(t_1, a_1), \ldots (t_n, a_n)} \tag{1.86}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad B_{n,\, a_1 \cdots a_n}(t_1, \ldots t_n) \quad &\longrightarrow \quad \langle P\, g^n F^{(1)}{}_{a_1} \cdots F^{(n)}{}_{a_n} \rangle_A \\ (K_2)_{a_1 a_2}(t_1, t_2) \quad &\longrightarrow \quad (K_2)_{a_1 a_2}(x_1, x_2) \qquad\qquad \text{für } n = 2 \end{aligned}$$

Es ist $F^{(i)} \equiv F_{\mu_i \nu_i}(x_i; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_i})$, vgl. Gl. (1.59). Bzgl. der Notation $\lceil\!\lceil \cdot \rceil\!\rceil$ vgl. Gl. (1.51), bzgl. der Ersetzung $B \to F$ Gl. (1.58). Im Gegensatz zu Gl. (1.85) ist Gl. (1.86) unmittelbar anwendbar auf den Erwartungswert zweier Loops. Statt Annahme (2) eines Gauß'schen

stochastischen Prozesses für $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ machen wir **Annahme (2′): Faktorisierung der Vakuumerwartungswerte** $\langle P\, g^n F_{\mu_1\nu_1 a_1}(x_1; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_1}) \cdots F_{\mu_n\nu_n a_n}(x_n; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_n})\rangle_A$; wir nehmen an Gl. (1.86) statt Gl. (1.85). In Hinblick auf später halten wir fest

$$\langle 1,2,3,4\rangle_A \;=\; \langle 1,2\rangle_A\,\langle 3,4\rangle_A + \langle 1,3\rangle_A\,\langle 2,4\rangle_A + \langle 1,4\rangle_A\,\langle 2,3\rangle_A \tag{1.87}$$

$$\text{mit} \qquad \langle i_1,\ldots i_n\rangle_A \;\equiv\; \langle P\, g^n F^{(i_1)}{}_{a_1} \cdots F^{(i_n)}{}_{a_n}\rangle_A$$

als das Pendant zu Gl. (1.56) auf Matrixelementeniveau.

Im Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ zweier Wegner-Wilson-Loops $W(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}) \equiv W(\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}}))$ und $W(\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}) \equiv W(\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}}))$ treten a priori zwei Pfadordnungsoperatoren auf: $P_{\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}}}$ bezüglich der Deformation $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}}$ und $P_{\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}}}$ bezüglich $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}}$. Entsprechend in den Vakuumerwartungswerten, die folgen aus der Entwicklung der Loop-Exponentiale. Die Gln. (1.85), (1.86) sind weiterhin anwendbar auf Basis der folgenden Überlegung, die Nachtmann vorschlägt in Ref. [148]: Die Referenzpunkte der Loops, die Konsequenz sind des Übergang von Eichfeld zu Eichfeldstärke mithilfe des Nichtabelschen Stokes'schen Satzes, werden identifiziert, so daß sich die Integrationsflächen $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}})$ und $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}})$ berühren und ein einziger Pfadordnungsoperator $P \equiv P_{\tilde{\mathcal{C}}}$ definiert werden kann, der sich bezieht auf die Verkettung $\tilde{\mathcal{C}} \equiv \tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}} \circ \tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}}$ der Deformationen.

Wir bemerken abschließend, daß Berger, Nachtmann in Ref. [21] angeben eine formale Entwicklung in Kumulanten für den Vakuumerwartungswert zweier Wegner-Wilson-Loops, die wir skizzieren wie folgt.[1.6] Grundlegend ist zunächst die Darstellung des Produkts zweier Loop-Exponentiale als ein einziges Loop-Exponential eines Produkt-Raumes [der Raum des direkten Produkts zweier fundamentaler $SU(N_{\mathrm{c}})$-Darstellungen $T^a_{\mathfrak{F}} \otimes T^a_{\mathfrak{F}}$]; die Spuren gehen über in eine "Produkt-Spur" [$\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \otimes \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}$]. Auf das eine „Produkt-Exponential" wird bezogen Annahme (1), vgl. Gl. (1.59): die Annahme, daß existiert seine Entwicklung in „Produkt-Kumulanten" $k_{\otimes n}$. Die „Produkt-Kumulante" zweiter Ordnung $k_{\otimes 2}$ wird ausgedrückt durch die Vakuumerwartungswerte $\langle P\, g^n F^{(1)}{}_{a_1} \cdots F^{(n)}{}_{a_n}\rangle_A$ in den „Faktor-Räumen" der initialen Loops. Für diese wird wieder gemacht Annahme (2'): angenommen Faktorisierung auf Matrixelementeniveau in den „Faktor-Räumen", vgl. Gl. (1.86); die Vakuumerwartungswerte $\langle P\, g^2 F^{(1)}{}_{a_1} F^{(2)}{}_{a_2}\rangle_A$ werden ausgedrückt durch den Korrelationstensor D nach Gl. (1.66) und für diesen gemacht wie hier Annahme (3). Der Korrelationstensor D tritt auf in Form derselben Funktion χ wie hier. Ausführen der „Produkt-Spur" führt zurück in die „Faktor-Räume" und stellt her den abschließenden funktionalen Zusammenhang von χ.

Berger, Nachtmann nehmen an dieselbe Faktorisierung, sie finden $k_{\otimes 1} \equiv 0$ und vernachlässigen höhere „Produkt-Kumulanten" $k_{\otimes n}$, $n>2$. Konsequenz ist, daß die T-Amplitude der Streuung dort bestimmt ist in Form $\left(\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{1}{2}\chi} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{2}\chi}\right) - 1 \cong -\chi^2 + \mathcal{O}(\chi^3)$, wohingegen hier in Form $-\chi^2$; vgl. unten Fußn. 2.29 auf Seite 75. Berger, Nachtmann summieren eine bestimmte Klasse von Beiträgen auf; die Diskrepanz beider Formeln verschwindet für große transversale Stoßparameter $\mathbf{b}$, für die χ klein ist; vgl. die Diskussion in Ref. [21].

Der eine wie der andere Zugang basiert auf Annahmen, die a priori nicht mehr oder weniger gerechtfertigt sind.[1.7] Wir arbeiten mit der ausführlich vorgestellten ursprünglichen Formulierung des MSV.

[1.6] Besten Dank Edgar Berger und Timo Paulus für die Diskussion.

[1.7] Die Annahme von Konvergenz der Entwicklung in „Produkt-Kumulanten" $k_{\otimes n}$ ist gleichbedeutend mit der Existenz eines stochastischen Prozesses im Produkt-Raum; vgl. van Kampen in den Refn. [218, 219]. Statt zu übernehmen die Ad hoc-Hypothese von Faktorisierung auf Matrixelementeniveau in den „Faktor-Räumen", scheint es uns logisch konsequenter, eine Annahme zu machen für diesen stochastischen Prozeß. Dies ist dann *auch physikalisch* sinnvoll, wenn die Entwicklung selbst sinnvoll ist – im Sinne, daß sie geschieht in einem kleinen Entwicklungsparameter. Die Annahme eines (zentrierten) Gauß'schen Prozesses sollte bereits gute Approximation sein und die einzige von Null verschiedene „Produkt-Kumulante" $k_{\otimes 2}$ unmittelbar ausdrückbar durch den Korrelationstensor D – ohne weitere Faktorisierungshypothese.

Kapitel 2

Analytische nahezu lichtartige T-Amplitude

Wir betrachten nichtperturbative Hochenergiestreuung zweier Wegner-Wilson-Loops: bei großem invarianten Quadrat s der Schwerpunktenergie und kleinem invarianten Quadrat $-t$ des Impulsübertrags. Wir zeigen *Existenz* und *Äquivalenz* zweier Formulierungen des MSV – der auf der physikalischen Minkowskischen Raumzeit und der auf deren analytischen Fortsetzung ins Euklidische. Dies impliziert Auflösung des – scheinbaren – Widerspruchs von a priori nur im Euklidischen fundierten Annahmen aber im Minkowskischen konstituiertem MSV.

Wir argumentieren, daß die von Nachtmann im Limes $s \to \infty$ hergeleitete nichtperturbative T-Amplitude für die Parton-Parton-Streuung von (Anti)Quarks und Gluonen in ihrer Gültigkeit verallgemeinert werden kann: Sie gibt für große aber endliche Werte von s das führende Verhalten in s im Sinne einer *leading log*-Approximation korrekt wider. Dies genau dadurch, daß die klassischen Trajektorien der Partonen genommen werden als die *physikalischen mit kleiner zeitartigen Komponente* statt ersetzt werden durch deren für $s \to \infty$ *lichtartige* Limites. – Betrachtet von Nachtmanns Formel her: dadurch daß die lichtartigen Trajektorien vom Lichtkegel „ein wenig weggerückt“ werden.

Die Formel Nachtmanns ist im wesentlichen bestimmt durch den Vakuumerwartungswert $\langle \cdot \rangle_A$ zweier *Wegner-Wilson-Linien*, das heißt Konnektoren Φ in der den Partonen entsprechenden Darstellung $\mathfrak{R}$ der Eichgruppe entlang deren klassischen Trajektorien. Die Streuung zweier Quark-Antiquark-Paaren ist im wesentlichen bestimmt durch den Vakuumerwartungswert zweier *Wegner-Wilson-Loops*, die zustande kommen durch orientiertes Verbinden der Trajektor-Konnektoren durch Konnektoren bei großen positiven und negativen Zeiten, formal bei $\pm\infty$. Wir zeichnen Nachtmanns Herleitung nach bezogen auf physikalische klassische Trajektorien *nahe* des Lichtkegels – so explizit, wie die Klarheit der Darstellung erfordert – und gelangen zu einer Formel für die T-Amplitude, die im wesentlichen bestimmt ist durch den Vakuumerwartungswert zweier Wegner-Wilson-Loops *nahe* des Lichtkegels.

Diesen Vakuumerwartungswert werten wir zum einen aus mithilfe des MSV in der Formulierung des vorangehenden Kapitels, das heißt in der Minkowskischen Theorie. Zum anderen kann er – da Funktional *zeit-* und nicht *lichtartiger* Trajektorien – analytisch fortgesetzt werden ins Euklidische. Diese Fortsetzung werten wir aus mithilfe der Formulierung des MSV auf der ins Euklidische fortgesetzten Raumzeit, das heißt in der Euklidischen Theorie.

Wir finden, daß beide Darstellungen der T-Amplitude verknüpft sind durch die analytische Fortsetzung eines *hyperbolischen Winkels* ψ zu einem *Euklidischen Winkel* θ, die definieren: ψ den *aktiven Lorentz-Boost* der beiden Wegner-Wilson-Linien gegeneinander in der Minkowski-Raumzeit, θ deren $O(4)$-*Verdrehung* gegeneinander in der ins Euklidische fortge-

setzten Raumzeit. Wir verallgemeinern damit ein für Quark-Quark-Streuung veröffentlichtes etabliertes Resultat auf den Fall der Streuung eichinvarianter, physikalischer Objekte.

Die Formulierung der Euklidischen Theorie besitzt eine Reihe von Aspekten von Bedeutung. So liegt der Argumentation hin zu den Annahmen des MSV wesentlich zugrunde eine Raumzeit mit *Euklidischer (Riemannscher)* statt *Minkowskischer (pseudo-Riemannscher)* Metrik: Korrelation paralleltransportierter Feldstärken – Observabler überhaupt – macht Sinn bezüglich Euklidischer Sphären, nicht aber (wozu diese unter Fortsetzung werden) bezüglich Minkowskischer Hyperboloide, die sich entlang des Lichtkegels bis ins Unendliche erstrecken, und so implizierten *maximale Korrelation* aller lichtartig separierten Weltpunkte unabhngig von deren räumlichen Separation. Darüberhinaus ist die Formulierung der Euklidischen Theorie essentielle Voraussetzung dafür, Hochenergiestreuung auszuwerten im Rahmen numerischer Simulationen von QCD als Gittereichtheorie.

Überblickartig diskutieren wir das resultierende führende Verhalten der T-Amplitude für großes s. Dies geschieht in Referenz auf Quark-Quark-Streuung, in der das „Wegrücken" der klassischen Partontrajektorien vom Lichtkegel zu verstehen ist als s-Regularisierung $\ln s$-divergenter Feynman-Loop-Diagramme. Summation von $\ln s$-Termen aber muß auf die experimentell beobachtete s-Asymptotik führen, die für die T-Amplitude eine Abhängigkeit wie $s^{1+\epsilon}$ heißt und von der rein kinematischen durch ein „kleines" Epsilon ϵ abweicht.[2.1]

2.1 Nahezu versus exakt lichtartige Trajektorien

In den Refn. [146, 148] leitet Nachtmann eine nichtperturbative Formel her für Parton-Parton-Streuung bei großer invarianter Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$. Seiner Analyse liegt zugrunde der Formalismus des Funktionalintegrals. Sie impliziert die Eikonalapproximation für die Lösung der Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines externen nichtabelschen Eichfelds. Die nächstführende Ordnung, unterdrückt durch Faktoren $1/\sqrt{s}$, wird vernachlässigt. Dies ist de facto der Grenzwert $s \to \infty$: Die physikalischen klassischen Partontrajektorien werden *lichtartig*. Nachtmanns Formel ist wesentlich bestimmt durch den Vakuumerwartungswert zweier Wegner-Wilson-Linien entlang dieser lichtartigen Trajektorien.

Im folgenden zeichnen wir Nachtmanns Analyse nach bezogen auf physikalische *nahezu* lichtartige Partontrajektorien. Hier definieren und begründen wir dieses Vorgehen.

Wir betrachten die Streuung zweier Partonen in deren Schwerpunktsystem. Sei gewählt die x^3-Achse als Kollisionsrichtung und mit ihr verknüpfte Größen bezeichnet als *longitudinal*, mit x^i, $i \in \{1,2\}$, verknüpfte Größen als *transversal* und zusammengefaßt als (Spalten-)Vektor $\mathbf{x} \equiv (x^i)$, $i \in \{1,2\}$: $\mathbf{x} = (x^1, x^2)^t$ in geradem Fettdruck.

Für einen beliebigen Lorentz-Vektor x, der definiert ist als (Spalten-)Vektor seiner kontravarianten Komponenten: $x \equiv (x^\mu)$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$: $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)^t$, führen wir Lichtkegelkoordinaten ein durch $\bar{x} \equiv (x^{\bar{\mu}})$, $\bar{\mu} \in \{+,-,1,2\}$: $\bar{x} = (x^+, x^-, x^{\bar{1}}, x^{\bar{2}})^t$, das heißt durch den (Spalten-)Vektor kontravarianter Komponenten, die definiert seien wie folgt:

$$x^\pm := \alpha\,(x^0 \pm x^3) \qquad x^{\bar{i}} := x^i \quad i \in \{1,2\} \tag{2.1}$$

$$\text{d.h.} \qquad \bar{x} = \mathbb{L}\,x \qquad x^{\bar{\mu}} = \mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_\nu\, x^\nu$$

$$\mathbb{L} \equiv \left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_\nu\right) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad - \left[\det \mathbb{L}\right]^{-1} = 1/(2\alpha^2) = g_{+-} = g_{-+}$$

mit $g_{++} \equiv 0$, $g_{--} \equiv 0$, explizit ausgeschrieben in der Übergangsmatrix $\mathbb{L} \equiv \left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_\nu\right)$ nur die

[2.1] Die nichtperturbative Wechselwirkung wird aufgefaßt als vermittels des Austauschs des *Soft Pomeron*, dessen effektiver Intercept gegeben ist durch $1+\epsilon$ mit $\epsilon \cong 0.0808$; vgl. Gl. (3.43) und die Refn. [56, 58].

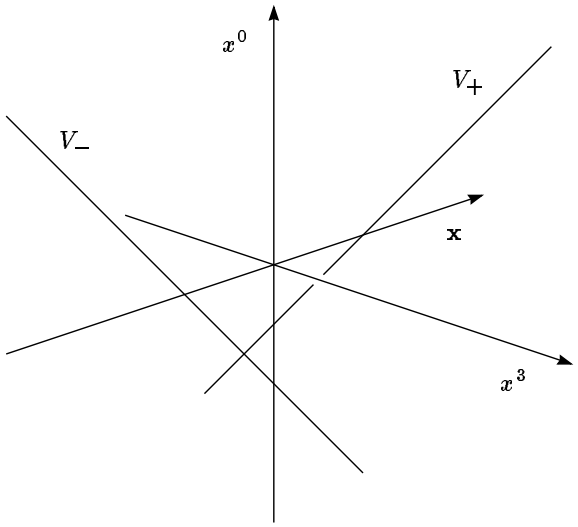


Abbildung 2.1: Die Wegner-Wilson-Linien $V_+ \equiv \Phi(\mathcal{C}_+)$, $V_- \equiv \Phi(\mathcal{C}_-)$ – im Schwerpunktsystem der Streuung – entlang der klassischen Partontrajektorien, die im Limes $s \to \infty$ übergehen in die lichtartigen Trajektorien $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_-$. Ihr gemeinsamer Vakuumerwartungswert $\langle \cdot \rangle_A$ bestimmt wesentlich die T-Amplitude der Streuung.

nichttrivialen longitudinalen Komponenten $(+,-) \leftrightarrow (0,3)$ und definiert $\alpha \in \mathbb{R}^+$ als noch offene Normierung, die wir in praxi setzen: $\alpha = 1/\sqrt{2}$; vgl. Anh. A.1.2.

Seien analog[2.2] definiert Koordinaten $\tilde{x} \equiv (x^{\tilde{\mu}})$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$: $\tilde{x} = (x^{\mathfrak{p}}, x^{\mathfrak{m}}, x^{\tilde{1}}, x^{\tilde{2}})^t$. Für ihre *longitudinalen* Komponenten gelte $x^{\mathfrak{p}} \to x^+$ und $x^{\mathfrak{m}} \to x^-$ im Limes $s \to \infty$, und für ihre *transversalen* Komponenten $x^{\tilde{i}} \equiv x^{\bar{i}} \equiv x^i$. Das heißt die longitudinalen Komponenten seien definiert als die Richtungen der *physikalischen* klassischen Partontrajektorien $\mathcal{C}$ – die angenommen werden als *geradlinig*. So besitzt longitudinal *per definitionem* die Trajektorie des in positive x^3-Richtung propagierenden Partons nur eine $x^{\mathfrak{p}}$-Komponente, die Trajektorie des in negative x^3-Richtung propagierenden Partons nur eine $x^{\mathfrak{m}}$-Komponente, – im Limes $s \to \infty$ nur eine x^+- beziehungsweise x^--Komponente. Sei suggestiv notiert

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \underset{s \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{C}_+ \qquad \text{und} \qquad \mathcal{C}_{\mathfrak{m}} \underset{s \to \infty}{\longrightarrow} \mathcal{C}_- \tag{2.2}$$

bezüglich der physikalischen Trajektorien und deren Limites. Wir haben vor Augen ein „plus"- und ein „minus"-Parton und indizieren allgemein die zugehöhrigen Größen mit den Skripten „$\mathfrak{p}$" beziehungsweise „$\mathfrak{m}$", im Limes $s \to \infty$ mit „$+$" beziehungsweise „$-$".

Wir verweisen ausdrücklich auf Anhang D. Dort ist entwickelt der formale wie interpretatorische Zusammenhang, der ein *tieferes Verständnis* vermittelt bereits an dieser Stelle, *essentiell* ist dann in den Abschnitten 2.4 und 2.6.

Das anschauliche Bild ist das folgende; vgl. Abb. 2.1. Seien die beiden Partonen zunächst in Ruhe. Aus diesem System mit den longitudinalen Koordinaten x^0 und x^3 heraus werden sie „langsam" in positive beziehungsweise negative x^3-Richtung aufeinander zu geboostet im Sinne aktiver Lorentz-Transformationen $\Lambda_{\mathfrak{p}} \equiv \Lambda(\beta_{\mathfrak{p}})$ beziehungsweise $\Lambda_{\mathfrak{m}} \equiv \Lambda(\beta_{\mathfrak{m}})$. Dabei seien die *Beta-Parameter* definiert als positiv $\in [0,1)$, das heißt das „plus"-Parton propagiere mit der Geschwindigkeit $\beta_{\mathfrak{p}}$, das „minus"-Parton mit der Geschwindigkeit $-\beta_{\mathfrak{m}}$ in die x^3-Richtung. Hänge $\beta_{\mathfrak{m}}$ dabei „in jedem Moment" des Boosts so von $\beta_{\mathfrak{p}}$ ab, daß sich

[2.2] Tensoren und Tensorkomponeten seien generell bezeichnet im Sinne $T \equiv (T^{\mu_1 \cdots \mu_s})$ versus $\bar{T} \equiv (T^{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_s})$ versus $\tilde{T} \equiv (T^{\tilde{\mu}_1 \cdots \tilde{\mu}_s})$ mit $\mu \in \{0,1,2,3\}$, $\bar{\mu} \in \{+,-,1,2\}$ bzw. $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$.

das System der aufeinander zulaufenden Partonen im „momentanen“ Schwerpunktsystem befindet. Dem Beta-Parameter äquivalente Variable der Lorentz-Transformation ist die *Rapidität* – der *hyperbolische Winkel* ψ, den in der x^0,x^3-Projektion des Minkowski-Diagramms die geboostete Zeitachse mit der ursprünglichen einschließt; für diesen gilt allgemein:

$$\psi(\beta) \;=\; \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \;=\; \operatorname{artanh}\beta \tag{2.3}$$

das heißt $\psi\in[0,+\infty)$ für $\beta\in[0,1)$.

Die Trajektorien der so geboosteten Partonen verlaufen in der x^0,x^3-Projektion des Minkowski-Diagramms entlang der geboosteten Zeitachsen $x^{\mathfrak{p}}$ beziehungsweise entlang $x^{\mathfrak{m}}$ und schließen mit der ursprünglichen Zeitachse x^0 die *endlichen* hyperbolischen Winkel $\psi_{\mathfrak{p}}$ beziehungsweise $-\psi_{\mathfrak{m}}$ ein, das heißt zusammen den *endlichen* hyperbolischen Winkel $\psi\equiv\psi_{\mathfrak{p}}+\psi_{\mathfrak{m}}$. Die Beta- wie Gamma-Parameter sind in diesem Bild aktiver Lorentz-Boosts Funktionen des „momentanen“ invarianten Quadrats der Schwerpunktenergie s. Der Limes $s\to\infty$ wird realisiert durch $\beta_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}}\to 1$, das heißt $\psi_{\mathfrak{p}}$, $\psi_{\mathfrak{m}}\to\infty$, also $\psi\equiv\psi_{\mathfrak{p}}+\psi_{\mathfrak{m}}\to\infty$. Vgl. Anh. D. Die Trajektorien $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_-$ fallen zusammen mit der ersten beziehungsweise zweiten Winkelhalbierenden zweier Schnitte der Minkowski-Raumzeit parallel zur x^0x^3-Ebene, vgl. Abb.2.1. Diesebezüglich sind die physikalischen Trajektorien $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$ in den Lichtkegel hineingedreht.

Wir betrachten Wegner-Wilson-Linien bezogen genau auf diese Trajektorien, auf dieses geometrische Bild.

Vor dieser Geometrie betrachten wir Nachtmanns Formel für die T-Amplitude. Sie ist im wesentlichen bestimmt durch den Vakuumerwartungswert – im Sinne der Definition von $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ durch Gl. (1.11) – zweier Wegner-Wilson-Linien entlang der klassischen Partontrajektorien, die zu nehmen sind in den Darstellungen der Partonen in der Eichgruppe $\mathfrak{R}_+$ beziehungsweise $\mathfrak{R}_-$. Aufgrund des Limes $s\to\infty$, den Nachtmann de facto ausführt, sind diese Trajektorien lichtartig und im Sinne und Notation von Gl. (2.2) genau $\mathcal{C}_+$ und $\mathcal{C}_-$:

$$\langle\, Z_{2,+}^{-1}\,(V_+ - 1)\cdot Z_{2,-}^{-1}\,(V_- - 1)\,\rangle_A \tag{2.4}$$

$$\text{mit, } \imath \equiv +,-\text{:}\qquad V_\imath = P_{\mathcal{C}_\imath}\,\exp -\mathrm{i}g\int_{\mathcal{C}_\imath} dx^\mu\, A_\mu(x)\qquad Z_{2,\imath} = \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}_\imath}\, V_\imath\rangle_A$$

Es sind $V_+\equiv\Phi(\mathcal{C}_+)$ und $V_-\equiv\Phi(\mathcal{C}_-)$ die Wegner-Wilson-Linien; die Konnektoren Φ, definiert in Gl. (1.15), stehen in den Darstellungen $\mathfrak{R}_+$ bzw. $\mathfrak{R}_-$, bzgl. $\mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}$ vgl. die Gln. (1.25), (1.25′).

Dieser Vakuumerwartungswert ist zu interpretieren wie folgt. Die Partonen propagieren durch die Raumzeit mit festem äußerem Eichfeld $A(x)$ und nehmen entlang ihrer klassischen Trajektorien nichtabelsche Phasen auf: die Eichgruppen-wertigen Exponentiale $V_\imath$. Im Sinne von $\langle\,\cdot\,\rangle_A$, das heißt mit dem Haarschen Eichfeldmaß $\mathfrak{D}_\mu(A)$ nach Gl. (1.11), ist dann zu mitteln über sämtliche Konfigurationen $A(x)$ des nichtperturbativen Vakuums der QCD. Streuung geschieht vermittels korrelierter Fluktuation der Vakuum-Eichfeldkonfiguration.

Die Formel Nachtmanns wurde später von Meggiolaro im Rahmen eines anderen Formalismus hergeleitet in den Refn. [140, 143]. Dieser Zugang wurde in den frühen sechziger Jahren entwickelt von Fradkin [87] und basiert auf einer Funktionalintegral-Formulierung von Quantenfeldtheorien in erster Quantisierung, vgl. hierzu Feynman in Ref. [78]. Explizit werden darin Propagatoren (2-Punkt-Greenfunktionen) in Anwesenheit einer externen Metrik ($g_{\mu\nu}$) und in einem externen nichtabelschen Eichfeld ($A_{\mu a}$) ausgedrückt durch ein Funktionalintegral über Teilchentrajektorien und berechnet in einer Eikonal-Approximation. Mit Kenntnis der Propagatoren – *on-mass shell*, trunkiert und Beiträge von Vakuum-Diagramme herausdividiert – extrahiert der von Lehmann, Symanzik, Zimmermann entwickelte LSZ-Formalismus

die S- beziehungsweise T-Amplitude. Venziano hat diesen Formalismus wieder aufgegriffen; in Ref. [70] diskutiert er Streuung durch Gravitationswechselwirkung in einer vierdimensionalen gekrümmten Raumzeit bei Energien auf der Skala der Planckmasse. Hierdurch motiviert betrachtet Meggiolaro im selben Formalismus zunächst skalare QCD. Die Verallgemeinerung auf „reale" fermionische QCD ist genau Nachtmanns Formel.

Meggiolaro geht im Sinne seines Zugangs einen Schritt weiter und ersetzen in dieser Formel die Grenzwerte der klassischen Partontrajektorien $\mathcal{C}_+$ und $\mathcal{C}_-$ durch die ursprünglichen physikalischen Trajektorien $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$ beziehungsweise $\mathcal{C}_\mathfrak{m}$. Das heißt Gl. (2.4) geht über in

$$\langle\, Z_{\mathbf{2},\mathfrak{p}}^{-1}\,(V_\mathfrak{p}-1)\cdot Z_{\mathbf{2},\mathfrak{m}}^{-1}\,(V_\mathfrak{m}-1)\,\rangle_A \tag{2.5}$$

$$\text{mit, } \imath \equiv \mathfrak{p},\mathfrak{m}\text{:}\qquad V_\imath = P_{\mathcal{C}_\imath}\ \exp -ig\int_{\mathcal{C}_\imath} dx^\mu\ A_\mu(x) \qquad Z_{\mathbf{2},\imath} = \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}_\imath}\, V_\imath\rangle_A$$

Dabei stehen die Wegner-Wilson-Linien $V_\mathfrak{p}\equiv\Phi(\mathcal{C}_\mathfrak{p})$ und $V_\mathfrak{m}\equiv\Phi(\mathcal{C}_\mathfrak{m})$ in den Darstellungen der Partonen, respektive $\mathfrak{R}_\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{R}_\mathfrak{m}$.

Meggiolaro führt Argumente dafür an, daß diese Ersetzung sinnvoll und zumindest a priori auch geboten ist. Wir beziehen uns auf sie und zeichnen sie daher kurz nach.

Verlinde, Verlinde zeigen in Ref. [221] für Quark-Quark-Streuung, daß klassische Partontrajektorien *exakt lichtartig* ein *singulärer* Grenzwert darstellen, der also Divergenzen impliziert. Diese können verstanden werden als Infrarotdivergenzen infolge verschwindender Quarkmassen, denn dies genau zwingt die Propagation der Quarks auf den Lichtkegel. Eine Möglichkeit diese Divergenzen zu regularisieren besteht darin, den Trajektorien eine kleine zeitartige Komponente zu geben: genau in der Art, daß sie identisch sind den Trajektorien von Quarks mit nichtverschwindender Masse.

Dies induziert die Vorschrift, *a priori* auszugehen von den physikalischen Trajektorien $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{C}_\mathfrak{m}$ statt von ihren Grenzwerten $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_-$: ihnen ihre *physikalische* zeitartige Komponente zu belassen. Es geht insofern nicht um „Wegrücken" vom Lichtkegel, sondern um „Nicht-erst-Hinrücken". Die T-Amplitude ist wohldefiniert und auszuwerten auf Basis nicht von Gl. (2.4), sondern von Gl. (2.5): Die Partonen bewegen sich respektive mit $\beta_\mathfrak{p}$ und $-\beta_\mathfrak{m}$ in x^3-Richtung. Die korrespondierenden Wegner-Wilson-Linien schließen in der x^0,x^3-Projektion der Minkowski-Raumzeit den endlichen hyperbolischen Winkel $\psi\equiv\psi_\mathfrak{p}+\psi_\mathfrak{m}$ ein. Der Hochenergielimes $s\to\infty$ ist erst als letzter Schritt zu nehmen in der Form $\beta_\mathfrak{p}$, $\beta_\mathfrak{m}\to 1$ beziehungsweise $\psi\to\infty$. Damit zusammen hängt, daß die Transformationsmatrix $\mathbb{L}\equiv\left(\mathbb{L}^{\bar\mu}{}_\nu\right)$, die nach Gl. (2.1) auf die Lichtkegelkoordinaten transformiert, zwar *Grenzwert* der Lorentz-Transformationen $\Lambda_\mathfrak{p}$, $\Lambda_\mathfrak{m}$ gegeneinander, selbst aber *keine Lorentz-Transformation* ist.

Diese Vorschrift wird *a posteriori* legitimiert durch Resultate, die Meggiolaro auf ihrer Basis herleitet – wie auch andere Autoren, vgl. die Refn. [10, 120, 121]. So entwickelt er in Ref. [141] für Quark-Quark-Streuung die T-Amplitude auf der Basis von Gl. (2.5) in der renormierten Kopplungskonstanten $g_\text{ren.}$ bis zu Termen proportional $g^4_\text{ren.}$ und erhält genau das Resultat der konventionellen perturbativen QCD, vgl. Cheng, Wu [37] und Lipatov [137]. Logarithmen in s, die in perturbativer QCD auftreten aufgrund divergenter Feynman-Loop-Diagramme, treten in Meggiolaros Herleitung auf aufgrund des Zusammenhangs der invarianten Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ und dem Parameter ψ des Lorentz-Boosts der Partonen gegeneinander:

$$s \;=\; 2m^2\,(\cosh\psi+1) \qquad \text{d.h.} \qquad \psi \underset{s\to\infty}{\sim} \ln s \tag{2.6}$$

Es skaliert also s mit m^2, dem invarianten Quadrat des Quark-Vierer-Impulses.

Die T-Amplitude auf Basis von Gl. (2.5) reproduziert nicht nur die korrekte führende Ord-

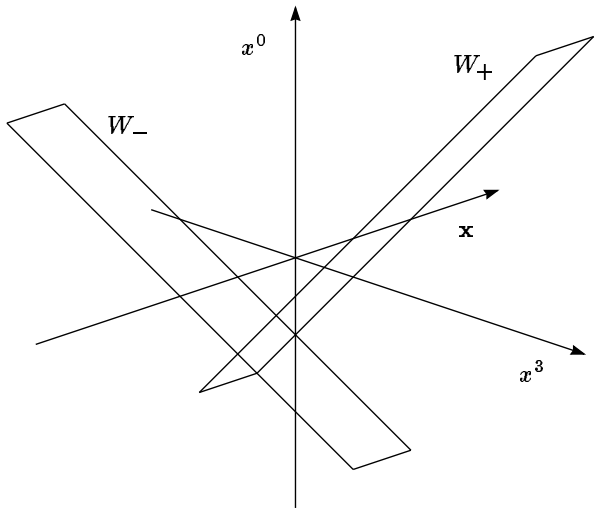


Abbildung 2.2: Die Wegner-Wilson-Loops $W_+ \equiv \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\,\Phi(\partial\mathcal{S}_+)$ und $W_- \equiv \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\,\Phi(\partial\mathcal{S}_-)$ im Schwerpunktsystem der Streuung. Ihre longitudinalen Linien verlaufen entlang der klassischen im Limes $s \to \infty$ lichtartigen Trajektorien der (Anti)Quarks, orientiert in positive (negative) Zeitrichtung. Bei großen positiven und negativen Zeiten, in praxi bei $\pm\infty$, sind sie verbunden durch Konnektoren, die Eichinvarianz garantiert und in der Art orientiert sind, daß resultieren Konnektoren bezüglich geschlossener orientierter Kurven $\partial\mathcal{S}_+$ beziehungsweise $\partial\mathcal{S}_-$ der Raumzeit, das heißt Wegner-Wilson-Loops. Ihr gemeinsamer Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ bestimmt wesentlich die T-Amplitude der Streuung.

nung in s im Limes $s \to \infty$, sondern ermöglicht auch ihre analytische Fortsetzbarkeit ins Euklidische. Meggiolaro gibt in Ref. [141] den formalen Beweis bis Ordnung $\mathcal{O}(g_{\mathrm{ren.}}^4)$ und in Ref. [142] zu jeder Ordnung. Diesem Beweis liegt zugrunde – wir kommen hierauf zurück – im wesentlichen die Forderung der Fortsetzbarkeit der gluonischen Green-Funktionen auf der Minkowskischen Raumzeit zu den entsprechenden Schwinger-Funktionen auf deren Fortsetzung ins Euklidische. Vgl. hierzu Ref. [29].

Dies eröffnet die Möglichkeit, Quark-Quark-Streuung bei großer aber endlicher invarianter Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ zu betrachten auf einer Raumzeit mit Euklidischer (Riemannscher) Metrik und stellt den ersten Schritt dar hin zu ihrer Auswertung im Rahmen numerischer Simulationen auf einem Euklidischen Gitter.

Unser Interesse gilt der Steuung eichinvarianter Obiekte – letztlich physikalischer Hadronen. Nachtmann leitet in Ref. [148] im Limes $s \to \infty$ die entsprechende T-Amplitude her und findet, daß sie im wesentlichen bestimmt ist durch den Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ zweier lichtartiger Wegner-Wilson-Loops im Sinne von Gl. (2.4); vgl. die Abbn. 2.1 und 2.2. Wir zeichnen diese Herleitung nach bezogen auf Wegner-Wilson-Loops, die im Sinne von Gl. (2.5) vom Lichtkegel weggerückt sind.

Zum einen ist dies aufzufassen als unmittelbare Verallgemeinerung der Arbeiten Meggiolaros auf den Fall eichinvarianter physikalischer Objekte. – In Hinblick auf dieselbe Fragenstellung: Untersuchung der führenden Ordnung großer, aber endlicher s und Formulierung einer Euklidischen Theorie als erster Schritt hin zu einer numerischen Auswertung im Rahmen von QCD als Gittereichtheorie.

Zum anderen – so das Resultat des vorangegeangenen Kapitels – ist *a priori* wohldefiniert

nur eine Formulierung des MSV auf einer Raumzeit mit Euklidischer (Riemannscher) Metrik. Wir verifizieren daher seine naive Minkowskische Formulierung *a posteriori* dadurch, daß wir sie herleiten als konsistente analytische Fortsetzung aus dem Euklidischen.

2.2 Kinematik

In den folgenden Abschnitten geben wir an Konstruktion, Auswertung und analytische Fortsetzung der T-Amplitude für nahezu lichtartige Trajektorien. Die dem zugrundeliegende Kinematik sei diskutiert hier und formal vertieft in Anhang B.

Wir betrachten Streuung

$$h^1(P_1) \;+\; h^2(P_2) \;\longrightarrow\; h^{1'}(P_{1'}) \;+\; h^{2'}(P_{2'}) \tag{2.7}$$

mit P_i den Vierer-Impulsen der Zustände h^i. Seien indiziert mit $i=1,1'$ „plus"-, mit $i=2,2'$ „minus"-Teilchen im Sinne von Propagation mit „großer" Geschwindigkeit in positive respektive negative x^3-Richtung; bezeichnen ungestrichene Indizes ein-, gestrichene Indizes auslaufende Teilchen. Ihre Lichtkegelkomponenten mit Normierung α lauten dann:[2.3]

$$\begin{pmatrix} P_i^+ \\ P_i^- \equiv \alpha^2 \mathbf{M}_i^2 / P_i^+ \\ \mathbf{P}_i \end{pmatrix} \quad \text{für } i=1,1', \qquad \begin{pmatrix} P_i^+ \equiv \alpha^2 \mathbf{M}_i^2 / P_i^- \\ P_i^- \\ \mathbf{P}_i \end{pmatrix} \quad \text{für } i=2,2' \tag{2.8}$$

$$\text{mit} \qquad P_1^+,\, P_{1'}^+ \;\text{ und }\; P_2^-,\, P_{2'}^- \underset{s\to\infty,\; t \text{ fest}}{\longrightarrow} \infty \tag{2.9}$$

Es bezeichnen M_i^2 und $\mathbf{M}_i^2$, mit

$$\mathbf{M}_i^2 \;\overset{!}{=}\; M_i^2 + \mathbf{P}_i^2 \tag{2.10}$$

die Quadrate von *invarianter* beziehungsweise *transversaler Masse* des Zustands h^i; diese können negativ sein, etwa für ein Photon mit Virtualität Q: $M^2_{\gamma^*} \equiv -Q^2$ mit $Q^2 \geq 0$. Die Abhängigkeit in den Gl. (2.8) de facto von nur einer longitudinalen Komponente ist Konsequenz der *on-mass shell*-Forderung an die physikalischen Zustände:

$$P_i^2 \;=\; M_i^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad P_i^+ P_i^- \;=\; \alpha^2\, \mathbf{M}_i^2 \tag{2.11}$$

Wir betrachten diesbezüglich als unabhängig – vgl. Gl. (2.8) – die Komponenten

$$P_1^+,\, P_{1'}^+ \;\text{ und }\; P_2^-,\, P_{2'}^- \tag{2.12}$$

In Termen dieser arbeiten wir im folgenden und sprechen sie an als die „großen" Komponenten – in dem Sinne, daß sie gegen Unendlich gehen im Limes $s\to\infty$, t fest; vgl. Gl. (2.9). Von diesen abhängig sind die „kleinen" Komponenten P_1^-, $P_{1'}^-$ und P_2^+, $P_{2'}^+$.

Seien entsprechend „kleine" Größen ε_i für $i=1,1',2,2'$ definiert durch:[2.4]

$$\varepsilon_i \;\overset{!}{=}\; \alpha\, \mathbf{M}_i^2 / P_i^+ \qquad \Longleftrightarrow\; P_i^+ = \alpha\, \mathbf{M}_i^2 \;\; \varepsilon_i^{-1} \qquad \text{für } i=1,1' \tag{2.13}$$

$$\varepsilon_i \;\overset{!}{=}\; \alpha\, \mathbf{M}_i^2 / P_i^- \qquad \Longleftrightarrow\; P_i^- = \alpha\, \mathbf{M}_i^2 \;\; \varepsilon_i^{-1} \qquad \text{für } i=2,2' \tag{2.13'}$$

$$\text{mit} \qquad \varepsilon_i \underset{s\to\infty,\; t \text{ fest}}{\longrightarrow} 0 \qquad \text{für } i=1,1',2,2'; \text{ vgl. Gl. (2.9)} \tag{2.14}$$

[2.3] Bzgl. Lichtkegelkoordinaten vgl. Gl. (2.1) und Anh. A.1.2: Definition $P^\pm = \alpha\,(P^0 \pm P^3)$, $\mathbf{P} = (P^1, P^2)^t$, invertiert: $P^0 = (P^+ + P^-)/2\alpha$, $P^3 = (P^+ - P^-)/2\alpha$, folgt für das invariante Skalarprodukt zweier beliebiger Vektoren P, Q: $P\cdot Q = [P^0 Q^0 - P^3 Q^3] - \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q} = [P^+ Q^- + P^- Q^+]/2\alpha^2 - \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}$, das heißt: $g_{+-} = g_{-+} = 1/2\alpha^2$.

[2.4] Die Definition geschieht zweckmäßigerweise in Termen von Masse*quadraten* und *nicht* dimensionslos.

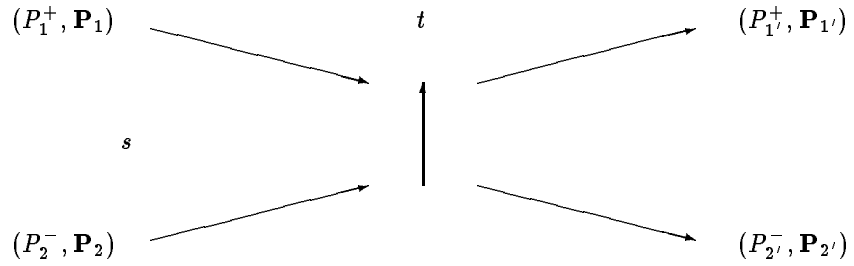


Abbildung 2.3: Die Kinematik der Streuung, vgl. Gl. (2.7), ist für *on-mass shell*-Zustände $h^i(P_i)$ vollständig bestimmt durch jeweils drei Impulskomponenten: per definitionem die „große" longitudinale Komponente $P_i^{\pm}$ (die gegen Unendlich geht im Limes $s \to \infty, t$ fest) und der transversale Vektor $\mathbf{P}_i$.

Durch die ε_i schreiben sich die „kleinen" Komponenten P_1^-, $P_{1'}^-$ und P_2^+, $P_{2'}^+$ suggestiv in der Form:

$$P_i^- = \alpha\,\varepsilon_i \qquad \text{für } i = 1, 1' \tag{2.15}$$

$$P_i^+ = \alpha\,\varepsilon_i \qquad \text{für } i = 2, 2' \tag{2.15'}$$

$$\text{mit} \quad P_1^-,\, P_{1'}^- \text{ und } P_2^+,\, P_{2'}^+ \underset{s \to \infty,\ t \text{ fest}}{\longrightarrow} 0 \tag{2.16}$$

Seien die „großen" Komponenten verstanden als endlich, folglich die „kleinen" Komponenten und ε_i als *epsilon-wertig* im Sinne *nichtverschwindend infinitesimal*. Mit Definition $P^{\pm} \stackrel{!}{=} \alpha(P^0 \pm P^3)$ gilt für Energie- und Impuls-Komponenete in x^3-Richtung allgemein:

$$P^0 = \frac{1}{2\alpha}\left(P^+ + P^-\right) \tag{2.17}$$

$$P^3 = \frac{1}{2\alpha}\left(P^+ - P^-\right) \tag{2.17'}$$

in Termen der ε_i:

$$\overset{0}{P}{}_1^3 = \left(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1} \pm \varepsilon_1\right)/2\alpha \qquad \text{und:} \qquad \overset{0}{P}{}_2^3 = \left(\varepsilon_2 \pm \mathbf{M}_2^2\,\varepsilon_2^{-1}\right)/2\alpha \tag{2.18}$$

$$\overset{0}{P}{}_{1'}^3 = \left(\mathbf{M}_{1'}^2\,\varepsilon_{1'}^{-1} \pm \varepsilon_{1'}\right)/2\alpha \qquad \overset{0}{P}{}_{2'}^3 = \left(\varepsilon_{2'} \pm \mathbf{M}_{2'}^2\,\varepsilon_{2'}^{-1}\right)/2\alpha \tag{2.18'}$$

Index 0 oberes/ 3 unteres Zeichen. Wir arbeiten in Termen der vier Drei-Tupel $[\varepsilon_i, \mathbf{P}_i]$. Die Komponenten P_i^+, P_i^- und P_i^0, P_i^3 folgen unmittelbar aus den angegebenen Gleichungen.

Es sind die Invarianten der Streuung nach Mandelstam; vgl. Gl. (2.7) und Abb. 2.3:

$$s = (P_1 + P_2)^2 \tag{2.19}$$

$$t = (P_{1'} - P_1)^2 \tag{2.19'}$$

$$u = (P_{2'} - P_1)^2 \tag{2.19''}$$

Nur zwei davon – wir wählen s und t – sind unabhängig, die dritte – also u – folgt aus der Relation $s + t + u = \sum_i M_i^2 + \frac{1}{2}P^2$; dabei ist

$$P = (P_{1'} + P_{2'}) - (P_1 + P_2) \tag{2.20}$$

der *Differenzimpuls zwischen den aus- und einlaufenden Zuständen*. Er verschwindet identisch, $P \equiv 0$, wenn die Streu-Wechselwirkung den Gesamtimpuls erhält.[2.5] Seien die Impul-

[2.5] Für die im folgenden Abschnitt 2.3 hergeleitete T-Amplitude der Streuung ist dies der Fall als Konsequenz der Impulserhaltung an jedem Vertex der Quantenchromodynamik.

se $P_i = (P_i^+, P_i^-, \mathbf{P}_i)$, vgl. Gl. (2.8), bezogen auf ein beliebiges, aber festes (inertiales) Koordinatensystem. Dann schreiben sich die Gln. (2.19), (2.19′) in Termen der Tupel $[\varepsilon_i, \mathbf{P}_i]$ und Massequadrate $\mathbf{M}_i^2$ wie folgt:

$$s = -(\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2)^2 + \mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2 + \left[\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 \cdot \left(\varepsilon_1\,\varepsilon_2\right)^{-1} + (\varepsilon_1\,\varepsilon_2)\right] \tag{2.21}$$

$$t = -(\mathbf{P}_{1'}-\mathbf{P}_1)^2 + \left[\mathbf{M}_1^2\left(1-\varepsilon_1^{-1}\,\varepsilon_{1'}\right) + \mathbf{M}_{1'}^2\left(1-\varepsilon_1\,\varepsilon_{1'}^{-1}\right)\right] \tag{2.21′}$$

Physikalisch hat s die Bedeutung des Quadrats der invarianten Schwerpunktenergie und $-t$ die des Quadrats des invarianten Impulstransfers der Streuung.

Sei aus formalen Gründen für den Moment noch nicht impliziert Erhaltung des Gesamtimpulses, das heißt $P \equiv 0$. Dann beziehen sich s, t zunächst auf die *einlaufende* beziehungsweise *1,1'-Seite* der Streuung. Entsprechende Größen s', t', die sich beziehen auf die *auslaufende* beziehungsweise *2,2'-Seite* der Streuung sind definiert in Analogie zu den Gln. (2.19), (2.19′) durch:

$$s' = (P_{1'} + P_{2'})^2 \tag{2.22}$$

$$t' = (P_{2'} - P_2\ )^2 \tag{2.22′}$$

dabei gilt offensichtlich, vgl. Gl. (2.20):

$$P \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad s' \equiv s \quad \text{und} \quad t' \equiv t \tag{2.23}$$

Im folgenden werden explizit formuliert Relationen in Termen der ungestrichenen Variablen s, t. Durch Indexsubstitution gemäß der Gln. (2.19)→(2.22) und (2.19′)→(2.22′) folgen unmittelbar analoge Relationen in Termen der gestrichenen Variablen s', t'.

Sei analog zu P, vgl. Gl. (2.20), definiert der Vierer-Vektor Q und in Gegenüberstellung geschrieben:

$$P = (P_{1'} - P_1) + (P_{2'} - P_2) \tag{2.24}$$

$$Q = (P_{1'} - P_1) - (P_{2'} - P_2) \tag{2.24′}$$

Wir drücken t aus symmetrisch durch gestrichene und ungestrichene Größen gemäß

$$t = \frac{1}{2}\left(t + t'\right) + \frac{1}{2}\,P \cdot Q \tag{2.25}$$

und finden durch Einsetzen von Gl. (2.21′) und ihrem gestrichenen Pendant:

$$\begin{aligned} t = {} & -(\mathbf{P}_{1'}-\mathbf{P}_1)^2 \\ & + \frac{1}{2}\left[\mathbf{M}_1^2\left(1-\varepsilon_1^{-1}\,\varepsilon_{1'}\right) + \mathbf{M}_{1'}^2\left(1-\varepsilon_1\,\varepsilon_{1'}^{-1}\right) + \mathbf{M}_2^2\left(1-\varepsilon_2^{-1}\,\varepsilon_{2'}\right) + \mathbf{M}_{2'}^2\left(1-\varepsilon_2\,\varepsilon_{2'}^{-1}\right)\right] \\ & + \frac{1}{2}\left[P^0\,Q^0 - P^3\,Q^3\right] \end{aligned} \tag{2.26}$$

Erhaltung des Gesamtimpulses impliziert: $P \equiv 0$, verschwindet identisch die letzte Zeile und wir erhalten die bezüglich der relevanten Terme symmetrisierte Darstellung von Gl. (2.26).

In Hinsicht auf die Abhängigkeit von s sind zu bestimmen die Größen Epsilon für ungestrichene und gestrichene Indizes. Daraus folgen die longitudinalen Impulskomponenten $P^\pm$ beziehungsweise P^0, P^3 und das Quadrat $-t$. Wir tun dies im folgenden.

Zwischen den Elementen der vier Drei-Tupel $[\varepsilon_i, \mathbf{P}_i]$ bestehen Relationen, die – subsumiert in P – widerspiegeln die Impulsstruktur der zugrundeliegenden Wechselwirkung. Für definiertes P lauten diese:

$$P^+ = \alpha\left[\left(\mathbf{M}_{1'}^2\,\varepsilon_{1'}^{-1} + \varepsilon_{2'}\right) - \left(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2\right)\right] \tag{2.27}$$

$$P^- = \alpha\left[\left(\varepsilon_{1'} + \mathbf{M}_{2'}^2\,\varepsilon_{2'}^{-1}\right) - \left(\varepsilon_1 + \mathbf{M}_2^2\,\varepsilon_2^{-1}\right)\right] \tag{2.27′}$$

$$\mathbf{P} = \left(\mathbf{P_{1'}} + \mathbf{P_{2'}}\right) - \left(\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2}\right) \tag{2.27″}$$

Explizit, wenn die Wechselwirkung den Gesamtimpuls erhält: $P \equiv 0$, verschwinden identisch die linken Seiten dieser Gleichungen.

Die Elemente der Drei-Tupel $[\varepsilon_i, \mathbf{P}_i]$ werden weiter verknüpft durch explizite Wahl eines (inertialen) Bezugsystems. Geschehe dies in analoger Form zu den Gln. (2.27)-(2.27″), durch Spezifizieren der einlaufenden Impulse auf der linken Seite der Gleichungen:

$$P_1^3 + P_2^3 \;=\; \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1} \;-\; \varepsilon_1\right) \;-\; \left(\mathbf{M}_2^2\,\varepsilon_2^{-1} \;-\; \varepsilon_2\right)\right] \tag{2.28}$$

$$\mathbf{P_1} + \mathbf{P_2} \tag{2.28′}$$

das heißt durch Spezifizierung des Dreier-Vektors $\vec{P}_1 + \vec{P}_2$. Explizit für das *Schwerpunktsystem* bezüglich der x^3-Richtung ist zu setzen $P_1^3 + P_2^3 \equiv 0$, bezüglich der transversalen $\mathbf{x}$-Richtung $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \equiv \mathbf{0}$. Die Wahl bezieht sich allgemein zunächst auf die einlaufenden Zustände, determiniert vollständig aber auch das auslaufende System.

Die Verknüpfungen durch die Gln. (2.27)-(2.27″) und (2.28), (2.28′) führen zu den folgenden Konsequenzen für die longitudinalen Größen ε_i. Wir sind dabei in erster Linie interessiert an deren Abhängigkeit von s, aus der unmittelbar folgt die Abhängigkeit der „großen“ Impulskomponeneten P_1^+, $P_{1'}^+$ und P_2^-, $P_{2'}^-$, daraus der „kleinen“ Komponenten, und des Quadrats $-t$ des invarianten Impulstransfers nach Gl. (2.21′).

Sei zunächst bezeichnet mit ε das Produkt $\varepsilon_1\varepsilon_2$:

$$\varepsilon \;\equiv\; \varepsilon_1\varepsilon_2 \tag{2.29}$$

Einerseits aus Gl. (2.28) folgt unmittelbar ε_2 als Funktion von ε_1:

$$\varepsilon_2(\varepsilon_1) \;=\; -\varrho \;+\; \sqrt{\varrho^2 + \mathbf{M}_2^2} \tag{2.30}$$

$$\text{mit} \qquad \varrho(\varepsilon_1) \;=\; \frac{1}{2}\left(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_1\right) \;-\; (P_1^3 + P_2^3)^2 \tag{2.30′}$$

Mithilfe dieser Relationen ist das Produkt $\varepsilon \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2$ Funktion von ε_1 allein:

$$\begin{aligned} \varepsilon|_\varrho(\varepsilon_1) \;&=\; \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\right)_\varrho(\varepsilon_1) \\ &\stackrel{!}{=}\; \varepsilon_1\left[\,-\varrho \;+\; \sqrt{\varrho^2 + \mathbf{M}_2^2}\right] \end{aligned} \tag{2.31}$$

entsprechend Gl. (2.29) und ε in suggestiver Indizierung.

Andererseits nach Gl. (2.21) hängt s ab von den ε_i allein über das Produkt $\varepsilon \equiv \varepsilon_1\varepsilon_2$; hiernach aufgelöst Gl. (2.21), folgt dessen Abhängigkeit von s:

$$\begin{aligned} \varepsilon|_\sigma(s) \;&=\; \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\right)_\sigma(s) \\ &\stackrel{!}{=}\; \left(\varepsilon_1\varepsilon_2\right)(s) \;=\; \sigma \;-\; \sqrt{\sigma^2 - \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2} \end{aligned} \tag{2.32}$$

$$\text{mit} \qquad \sigma(s) \;=\; \frac{1}{2}\left[s \;-\; \left[\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2 - \left(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\right)^2\right]\right] \tag{2.32′}$$

entsprechend Gl. (2.29) und ε in Indizierung im Sinne von Gl. (2.31).

Auf Basis dieser Relationen – durch Identifizieren $\varepsilon|_\varrho \equiv \varepsilon|_\sigma$ – werden in Anhang B.1 berechnet s als Funktion von ε_1 und umgekehrt ε_1 als Funktion von s. Wir finden:

$$s(\varepsilon_1) \;=\; \left[\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2 - \left(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\right)^2\right] \;+\; 2\,\sigma \tag{2.33}$$

$$\text{mit} \qquad 2\,\sigma(\varepsilon_1) \;=\; \sqrt{\varrho^2 + \mathbf{M}_2^2}\cdot\left(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_1\right) \;+\; \varrho\cdot\left(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1} - \varepsilon_1\right) \tag{2.33′}$$

Dabei ist aufzufassen $\varrho \equiv \varrho(\varepsilon_1)$ entsprechend Gl. (2.30′) als Funktion von ε_1. Weiter durch

Einsetzen $\varepsilon_1 \equiv \alpha \mathbf{M}_1^2 / P_1^+$ folgt unmittelbar s als Funktion von P_1^+, – P_2^- ist eliminiert. Umgekehrt finden wir:

$$\varepsilon_1(s) \;=\; \beta \Big[-\big(P_1^3 + P_2^3\big) \;+\; \sqrt{\big(P_1^3 + P_2^3\big)^2 + \gamma} \,\Big] \tag{2.34}$$

$$\text{mit} \qquad \beta(\varepsilon) \;=\; \varepsilon \big/ \big(\mathbf{M}_2^2 + \varepsilon\big) \tag{2.34'}$$

$$\gamma(\varepsilon) \;=\; \big(\mathbf{M}_1^2 + \varepsilon\big)\big(\mathbf{M}_2^2 + \varepsilon\big) \big/ \,\varepsilon \tag{2.34''}$$

Dabei ist aufzufassen $\varepsilon \equiv \varepsilon|_\sigma(s) = \big(\varepsilon_1 \varepsilon_2\big)(s)$ entsprechend der Gln. (2.32), (2.32′). Durch

$$\varepsilon_2 \;=\; \varepsilon|_\sigma \;/\; \varepsilon_1 \tag{2.35}$$

vgl. Gl. (2.29), folgt ε_2 als Funktion von s, durch Indexsubstitution $1 \to 1'$, $2 \to 2'$ im Sinne

$$\mathbf{M}_1^2 \;\to\; \mathbf{M}_{1'}^2, \;\; \mathbf{P}_1 \;\to\; \mathbf{P}_{1'} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{M}_2^2 \;\to\; \mathbf{M}_{2'}^2, \;\; \mathbf{P}_2 \;\to\; \mathbf{P}_{2'} \tag{2.36}$$

schließlich Darstellungen für die gestrichenen Größen: für $s'(\varepsilon_{1'})$ und $\varepsilon_{1'}(s')$, $\varepsilon_{2'}(s')$ mit $s' \equiv s$ nach Gl. (2.23) bei Erhaltung des Gesamtimpulses $P \equiv 0$.

Mit den Epsilon $\varepsilon_i(s)$, $i = 1, 1', 2, 2'$, sind bekannt als Funktionen der invarianten Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ alle relevanten Größen: die Lichtkegelkomponenten der Impulse P_i^+, P_i^- durch die Gln. (2.13), (2.13′) und (2.15), (2.15′), die Energie- und Drei-Komponenten P_i^0, P_i^3 durch die Gln. (2.18), (2.18′), die Dreier-Impuls-Beträge $|\vec{P}_i| = \sqrt{\mathbf{P}_i^2 + P_i^{3\,2}}$ und das Quadrat des invarianten Impulstransfers $-t$, vgl. die Gln. (2.21′), (2.26).

In Anhang B.2 geben wir an deren Reihen-Entwicklungen für große s, das heißt für kleine Parameter

$$\kappa \;\equiv\; \frac{1}{s} \tag{2.37}$$

Wir diskutieren den allgemeinen Fall, der Erhaltung des Gesamtimpulses impliziert: $P \equiv 0$, aber noch nicht spezifiziert das Bezugsystem: $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2$, $P_1^3 + P_2^3$, – und den Fall, der dieses konkretisiert als das Schwerpunktsystem bezüglich der drei Raumrichtungen. Diese Entwicklungen liegen zugrunde der Diskussion dieses wie der folgenden Kapitel. Exemplarisch und in Hinblick auf später seien hier nur zitiert:

$$\begin{aligned} \big|\vec{P}_1(\kappa)\big| \;&=\; \big|\vec{P}_2(\kappa)\big| \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \;-\; \frac{1}{2}\,(M_1^2 + M_2^2)\;\sqrt{\kappa} \;-\; M_1^2\,M_2^2\;\kappa^{3/2} \;+\; \mathcal{O}(\kappa^{5/2}) \end{aligned} \tag{2.38}$$

$$\begin{aligned} \big|\vec{P}_{1'}(\kappa)\big| \;&=\; \big|\vec{P}_{2'}(\kappa)\big| \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \;-\; \frac{1}{2}\,(M_{1'}^2 + M_{2'}^2)\;\sqrt{\kappa} \;-\; M_{1'}^2\,M_{2'}^2\;\kappa^{3/2} \;+\; \mathcal{O}(\kappa^{5/2}) \end{aligned} \tag{2.38'}$$

vgl. Gl. (B.33′) wie auch die Gln. (B.30), (B.33), – und:[2.6]

$$\begin{aligned} t(\kappa) \;=\; &-(\mathbf{P}_{1'} - \mathbf{P}_1)^2 \\ &-\,(\mathbf{M}_1^2 - \mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2 - \mathbf{M}_{2'}^2)\;\kappa \\ &-\,\frac{1}{2}\Big\{(\mathbf{M}_1^2 - \mathbf{M}_{1'}^2) + (\mathbf{M}_2^2 - \mathbf{M}_{2'}^2)\Big\} \\ &\qquad \times \Big\{(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2 - \mathbf{M}_{2'}^2) + (\mathbf{M}_1^2 - \mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2 + \mathbf{M}_{2'}^2)\Big\}\;\kappa^2 \\ &+\,\mathcal{O}(\kappa^3) \end{aligned} \tag{2.39}$$

vgl. Gl. (B.36). Dabei ist gesetzt $\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 \equiv \mathbf{0}$ und $P_1^3 + P_2^3 \equiv 0$, das heißt Bezug genommen auf das Schwerpunktsystem bezüglich der drei Raumrichtungen.

[2.6] Es hängt t ab von s; sei insofern „t fest" generell verstanden bzgl. des transversalen Anteils $-(\mathbf{P}_{1'} - \mathbf{P}_1)^2$ das heißt als „t fest bis auf $\mathcal{O}(\kappa) \equiv \mathcal{O}(s^{-1})$" im Sinne kleiner effektiver Skalen $\mathbf{M}_i^2\,\kappa \equiv \mathbf{M}_i^2\,s^{-1}$.

Die Asymmetrie zwischen ε_1 und ε_2, die unsere Diskussion und Herleitung suggeriert, ist selbstverständlich nur scheinbar; die Gln. (2.38), (2.38′) verifizieren dies a posteriori. Es folgt allgemein die „1-Größe“ aus der „2-Größe“ und die „1′-Größe“ aus der „2′-Größe“ durch Indexsubstitution $1 \leftrightarrow 2$ beziehungsweise $1' \leftrightarrow 2'$ im Sinne

$$\mathbf{M}_1^2 \;\leftrightarrow\; \mathbf{M}_2^2\,,\;\; \mathbf{P}_1 \;\leftrightarrow\; \mathbf{P}_2 \qquad \text{bzw.} \qquad \mathbf{M}_{1'}^2 \;\leftrightarrow\; \mathbf{M}_{2'}^2\,,\;\; \mathbf{P}_{1'} \;\leftrightarrow\; \mathbf{P}_{2'} \tag{2.40}$$

und die „gestrichenen“ Größen durch die „ungestrichenen“ durch $1 \to 1'$, $2 \to 2'$ im Sinne von Gl. (2.36).

2.3 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Konstruktion

In Ref. [148] leitet Nachtmann die T-Amplitude von Hadron-Hadron-Streuung her bei festem kleinen invarianten Impulstransfer: typischerweise $\sqrt{-t} < 1\,\mathrm{GeV}^2$, und im Limes unendlicher invarianter Schwerpunktenergie: $\sqrt{s} \to \infty$. Wir zeichnen diese Herleitung nach und verallgemeinern auf den Fall großer, aber endlicher $\sqrt{s}$.

2.3.1 Hadronniveau I. Exposition

Seien $|h^i(P_i)\rangle$ hadronische Zustände, die bei großem, aber endlichem s – im Sinne von Mesonen und deren führender Fock-Komponente – identifiziert seien mit Wellenpaketen von Quark-Antiquark-Paaren, oder: *Colour-Dipolen*.[2.7] Seien definiert diese Zustände wie folgt:

$$|h^i(P_i)\rangle \;=\; \frac{\delta_{n_i \bar{n}_i}}{\sqrt{N_\mathrm{c}}} \int \frac{d^2\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2} \int_0^1 \frac{dz_i}{2\pi}\; \tilde{\varphi}^i_{s_i \bar{s}_i}(z_i, \mathbf{k}_i)\;\; |q_{s_i,n_i}(z_i, \mathbf{k}_i)\; \bar{q}_{\bar{s}_i,\bar{n}_i}(\bar{z}_i, \mathbf{k}_i)\rangle \tag{2.41}$$

Wir betrachten eichinvariante Zustände, so daß wir a priori herausziehen ein normiertes Kronecker-Symbol bezüglich Eichgruppenindizes: Die Indizes n_i, $\bar{n}_i = 1, \ldots d_{\mathfrak{F}}$ beziehen sich auf die fundamentale Darstellung $\mathfrak{F}$ der Eichgruppe mit Dimension $d_{\mathfrak{F}} \equiv N_\mathrm{c}$. Bzgl. der Differenzierung von $\mathfrak{F}$ für Quarks respektive $\mathfrak{F}^*$ für Antiquarks vgl. Fußn. 0.15 auf Seite 11.

Per constructionem durch Gl. (2.41) ist $\tilde{\varphi}^i_{s_i \bar{s}_i}(z_i, \mathbf{k}_i)$ die quantentheoretische Wellenfunktion des Colour-Dipols $h^i(P_i)$. Das heißt sie ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß das Quark q in $|h^i(P_i)\rangle$ charakterisiert ist durch Spin s_i, Colour n_i, Flavour f_i, das Antiquark $\bar{q}$ durch Spin $\bar{s}_i$, Colour $\bar{n}_i$, Flavour $\bar{f}_i$ – und entsprechende Raumzeit-Parameter.[2.8] Bewege sich der Colour-Dipol $h^i(P_i)$ annähernd mit Lichtgeschwindigkeit, das heißt $P_i^+ \gg P_i^-$ [oder umgekehrt] unter geeigneter Wahl der x^3-Achse. Dann ist per definitionem $\tilde{\varphi}^i_{s_i \bar{s}_i}$ seine *Lichtkegelwellenfunktion* und die Raumzeit-Parameter sind genau z_i und $\mathbf{k}_i$. Diese sind definiert wie folgt.

Seien p_i, $\bar{p}_i$ für $i \in 1\{, 1', 2, 2'\}$ die Vierer-Impulse von Quarks respektive Antiquarks. Seien diese definiert durch ihre große Lichtkegel- und durch ihre transversale Vektorkomponente, vgl. (2.8). Es gilt für die Quarks:

$$p_i^+ \;=\; z_i P_i^+ \qquad \mathbf{p}_i \;= z_i \mathbf{P}_i + \mathbf{k}_i \qquad \text{für} \quad i = 1, 1' \tag{2.42}$$

$$p_i^- \;=\; z_i P_i^- \qquad\qquad \sim \qquad\qquad \text{für} \quad i = 2, 2' \tag{2.42′}$$

Die Komponenten der Antiquarks folgen durch Substitution

$$\bar{p}_i \;=\; p_i \left[z_i \to \bar{z}_i \;\;\&\;\; \mathbf{k}_i \to -\mathbf{k}_i \right] \tag{2.43}$$

[2.7] Diese Beschreibung schließt mit ein Baryonen, in denen zwei Quarks zusammengeclustert sind zu einem Diquark (das sich unter Eichtransformationen verhält wie ein Antiquark). Die Beschreibung als Zustand dreier separierter Quarks ist prinzipiell identisch, nur aufwendiger; sei verwiesen auf die Refn. [122, 148].

[2.8] Seien weiterhin global unterdrückt Flavour-Indizes.

Dies ist unmittelbare Konsequenz der Forderungen:

$$p_i^+ + \bar{p}_i^+ \stackrel{!}{=} P_i^+ \qquad \mathbf{p}_i + \bar{\mathbf{p}}_i \stackrel{!}{=} \mathbf{P}_i \qquad \text{für} \quad i=1,1' \tag{2.44}$$

$$p_i^- + \bar{p}_i^- \stackrel{!}{=} P_i^- \qquad \sim \qquad \text{für} \quad i=2,2' \tag{2.44'}$$

die genau ausdrücken, daß sich die großen longitudinalen und die transversalen Komponenten von Quark und Antiquark – im Sinne von Impulserhaltung – addieren zu den entsprechenden Komponenten des Colour-Dipols $h^i(P_i)$. Quark und Antiquark auf dem Lichtkegel sind on mass-shell; infinitesimal weggerückt vom Lichtkegel seien sie angenommen als approximativ on mass-shell; – das heißt die (Anti)Quarkimpulse besitzen Darstellungen äquivalent denen in Gl. (2.11) mit deren Implikationen für die kleinen Lichtkegelkomponenten.

Wir weichen in den Gln. (2.42), (2.42′) bezüglich des einen Punktes ab von Nachtmann in Ref. [148], daß der Anteil z_i des Quarks beziehungsweise $\bar{z}_i \equiv 1-z_i$ des Antiquarks am Gesamt-Lichtkegelimpuls – statt des Faktors 1/2 – eingeht auch in den transversalen Komponenten. Im allgemeinen ist $z_i \neq 1/2$, so daß unser Ansatz essentiell differiert von dem Nachtmanns. Für den transversalen *Differenzimpuls* von Quark und Antiquark im Zustand $|h^i(P_i)\rangle$ folgt $(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}_i) = 2\mathbf{p} - \mathbf{P}$, vgl. die Gln. (2.44),(2.44′), und mithilfe der Gln. (2.42),(2.42′) unmittelbar:

$$\mathbf{k}_i \;=\; \frac{1}{2}\,(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}_i) + \left(\frac{1}{2} - z_i\right) \mathbf{P}_i \tag{2.45}$$

Diskrepanz zu Nachtmann ist also, daß $2\mathbf{k}$ und $(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}_i)$ in unserer Definition nicht identisch sind. Dies zieht Konsequenzen nach sich in Bezug auf die Größe, die als relevanter – zum Impulstransfer konjugierter – Stoßparameter der Streuung identifiziert wird.

In Anhang D.6.2 zeigen wir explizit, daß bei Definition von z_i als dem Anteil des Quarks am Gesamt-Lichtkegelimpuls: $p_i^\pm = z_i P^\pm$ für die große Komponente, – Definition eines transversalen „Relativimpulses“ $\mathbf{k}_i$ von Quark und Antiquark durch $\mathbf{p}_i =: \lambda' \mathbf{P}_i + \mathbf{k}_i$ notwendig impliziert $\lambda' \equiv z_i$, wenn gefordert wird Kovarianz bezüglich einer beliebigen Lorentz-Transformation $\Lambda \equiv (\lambda^\mu{}_\nu)$ im weitesten Sinne, das heißt formal: $p_i^\pm = z_i P^\pm \to p_i^{\pm\,\prime} = z_i P^{\pm\,\prime}$ und $\mathbf{p}_i = \lambda' \mathbf{P}_i + \mathbf{k}_i \to \mathbf{p}_i' = \lambda' \mathbf{P}_i' + \mathbf{k}_i'$. Wir danken Dosch, Nachtmann, Michael Rüter für die Diskussion, auf die hin der Beweis zustande gekommen ist.[2.9]

Seien die in Gl. (2.41) definierten Zustände $|h^i(P_i)\rangle$ normiert in Standardkonvention:

$$\langle h^i(P) | h^i(P') \rangle \;=\; (2\pi)^3 2P_{0+}\, \delta(\vec{P} - \vec{P}') \qquad \text{für festes} \;\; i \in \{1,1',2,2'\} \tag{2.46}$$

Dabei ist $P_{0+} = +\sqrt{\vec{P}^2 + M^2}$ der Betrag der Null-Komponente von P; die Diracsche Delta-Distribution bezieht sich auf die Komponenten des Dreier-Vektors. Wir zeigen in Anhang C.1, daß hieraus für die Lichtkegelwellenfunktionen folgt

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \int_0^1 \frac{dz}{2\pi} \;\; 2z\bar{z} \;\; \tilde{\varphi}^{i\,\dagger}_{s\bar{s}}(z,\mathbf{k})\, \tilde{\varphi}^i_{s\bar{s}}(z,\mathbf{k}) \;=\; 1 \qquad \text{für festes} \;\; i \in \{1,1',2,2'\} \tag{2.47}$$

Spinsumme impliziert. Wir definieren mit

$$\varphi^i_{s\bar{s}}(z,\mathbf{x}) \;=\; \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \;\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \;\sqrt{2z\bar{z}} \;\; \tilde{\varphi}^i_{s\bar{s}}(z,\mathbf{k}) \tag{2.48}$$

die bezüglich ihrer transversalen Koordinaten Fourier-transformierte Lichtkegelwellenfunkti-

[2.9] Forderung von Lorentz-Kovarianz läßt zu, den durch die Gln. (2.42), (2.42′) definierten Vektor $\mathbf{k}$ zu ersetzen durch $\mathbf{k}' = c\,\mathbf{k}, c \in \mathbb{R}$. Es ist sinnvoll keinen Faktor einzuführen zwischen $\mathbf{k}$ und den transversalen (Anti)Quarkimpulsen $\mathbf{p}_i$, $\bar{\mathbf{p}}_i$. Denn diese sind Fourier-konjugiert zu den (Anti)Quarkpositionen, ergo – vgl. die Gln. (2.42),(2.42′) – der Vektor $\mathbf{k}$ konjugiert zur Differenz dieser Positionen. Zum einen kann die T-Amplitude nur abhängen von Differenzvektoren, zum anderen ist der reine Abstand von Quark und Antiquark des Colour-Dipols Größe von suggestiver Anschauuung.

on; sei dabei $\mathbf{x}$ die zu $\mathbf{k}$ konjugierte Variable im (transversalen) Ortsraum. Wir beachten den Faktor $\sqrt{2z\bar{z}}$, in dem wir von der üblichen Definition abweichen. Normierung im der $\tilde{\varphi}^i_{s_i\bar{s}_i}$ Impulsraum nach Gl. (2.47) heißt Normierung der $\varphi^i_{s\bar{s}}$ im Ortsraum wie

$$\int d^2\mathbf{x} \int_0^1 \frac{dz}{2\pi}\, \varphi^{i\dagger}_{s\bar{s}}(z,\mathbf{x})\, \varphi^i_{s\bar{s}}(z,\mathbf{x}) \;=\; 1 \qquad \text{für festes } \; i\in\{1,1',2,2'\} \tag{2.49}$$

Spinsumme impliziert. In Anhang C.1 zeigen wir für das Skalarprokukt in diesem Sinne zweier „plus"- oder zweier „minus"-Zustände, das heißt für deren Überlapp die Relation

$$\begin{aligned} &\langle h^{i'}(P_{i'})|h^i(P_i)\rangle \qquad\qquad (2.50)\\ &= (2\pi)^3\, 2(P_i)_{0+}\, \delta(\vec{P}_{i'}-\vec{P}_i)\cdot \int d^2\mathbf{x} \int_0^1 \frac{dz}{2\pi}\, \varphi^{i'\dagger}_{s\bar{s}}(z,\mathbf{x})\, \varphi^i_{s\bar{s}}(z,\mathbf{x}) \\ &\qquad\qquad \text{für feste } \; i,\, i', \text{ beide } \in\{1,1'\} \text{ oder } \in\{2,2'\} \end{aligned}$$

Für $i'\equiv i$ impliziert Gl. (2.50) die Normierung der Zustände $|h^i(P_i)\rangle$ nach Gl. (2.46) dann, wenn die Lichtkegelwellenfunktionen normiert sind entsprechend Gl. (2.47) respektive (2.49).

Wir können bereits hier die Konsequenzen dessen ablesen, daß wir abweichend von Nachtmann auch die transversalen (Anti)Quarkimpulse allgemein mit z_i und nicht mit dem konstanten Faktor 1/2 definieren, vgl. die Gln. (2.42), (2.42′) und (2.43) bzw. (2.45):

In der T-Amplitude der Hadron-Hadron-Streuung nach Gl. (2.7) werden analoge Integrationen auftreten wie in Gl. (2.50). Sie werden sich beziehen auf den Vakuumerwartungswert zweier Wegner-Wilson-Loops, der nur noch von transversalen Vektoren abhängt, – von der *Projektion der Loops in den Transversalraum.* Über die Transversalvektoren wird dieser Vakuumerwartungswert aber sehr wohl noch abhängen von den Faktoren z_i, die daher nicht trivialerweise – im Sinne von Gl. (2.49), das heißt nur auf die Wellenfunktionen bezogen – ausintegriert werden können. Das Bild ist zwar das getrennter (kleiner) transversalen Skala $\sqrt{-t}$ und der (großer) longitudinalen $\sqrt{s}$, die Faktorisierung geschieht aber nur *effektiv*.

Im Limes großer invarianter Schwerpunktenergie sind die streuenden Zustände zu *infinitesimal flachen* transversalen Scheiben Lorentz-kontrahiert, so daß sie sich nur für eine *infinitesimal kleine* Zeit durchdringen. Ihre Wechselwirkung sollte beschrieben werden durch eine effektive zweidimensionale Quantenfeldtheorie im Transversalraum. Daß sie in der Tat *effektiv* ist in dem Sinne, daß sie notwendigerweise longitudinale Dynamik subsummiert, zeigt die subtile Diskussion, die in diesem Rahmen Lipatovs Gluon-Emissions-Vertex verlangt, vgl. Ref. [221].

2.3.2 Partonniveau. Durchführung

Die Zustände $h^i(P_i)$ in Definition nach Gl. (2.41) sind Wellenpakete von Quark-Antiquark-Paaren. Ihrer Streuung, vgl. Gl. (2.7), liegt zugrunde auf Partonniveau der Prozeß

$$q(1) \;+\; \bar{q}(\bar{1}) \;+\; q(2) \;+\; \bar{q}(\bar{2}) \;\longrightarrow\; q(1') \;+\; \bar{q}(\bar{1}') \;+\; q(2') \;+\; \bar{q}(\bar{2}') \tag{2.51}$$

wobei abkürzend notiert sei

$$q(i) \;\equiv\; q_{s_i,n_i}(z_i,\mathbf{k}_i) \;\equiv\; q_{s_i,n_i}(p_i) \tag{2.52}$$

$$\bar{q}(\bar{i}) \;\equiv\; \bar{q}_{\bar{s}_i,\bar{n}_i}(\bar{z}_i,\mathbf{k}_i) \;\equiv\; \bar{q}_{\bar{s}_i,\bar{n}_i}(\bar{p}_i) \tag{2.52′}$$

für Quarks q beziehungsweise Antiquarks $\bar{q}$, vgl. die Gln. (2.42), (2.42′) bzw. (2.43). Stehe generell i für die Gesamtheit $\{i\}$ der internen Quantenzahlen (Dirac, Colour, Flavour) und des Impulses mit Index i; sei der Querstrich für die Antiquarks unterdrückt, wenn er folgt aus dem Zusammenhang.

Der Partonprozeß nach Gl. (2.51) ist vollständig bestimmt durch das *S-Matrixelement*

$$\langle\, \bar{q}(\bar{2}')\, q(2')\, \bar{q}(\bar{1}')\, q(1'),\, \text{in} \mid S \mid q(1)\, \bar{q}(\bar{1})\, q(2)\, \bar{q}(\bar{2}),\, \text{in}\,\rangle \tag{2.53}$$
$$= \langle\, \bar{q}(\bar{2}')\, q(2')\, \bar{q}(\bar{1}')\, q(1'),\, \text{out} \mid q(1)\, \bar{q}(\bar{1})\, q(2)\, \bar{q}(\bar{2}),\, \text{in}\,\rangle$$

Dabei ist S der *S-Operator*, der *unitär*, das heißt unter Normerhaltung die Darstellung eines beliebigen Zustands f bezüglich der auslaufenden Basis abbildet auf seine Darstellung bezüglich der einlaufenden:

$$\langle f, \text{out}\,| \;=:\; \langle f, \text{in}\,| S \qquad \text{mit} \qquad S S^\dagger \;=\; S^\dagger S \;=\; \mathbb{1} \tag{2.54}$$

Definition nach Ref. [114].

Die zweite Darstellung in Gl. (2.53) bezüglich der jeweils „natürlichen“ Basis werde ausgeschrieben mithilfe entsprechender Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, vgl. Ref. [114]:

$$\langle\, \bar{q}(\bar{2}')\, q(2')\, \bar{q}(\bar{1}')\, q(1'),\, \text{out} \mid q(1)\, \bar{q}(\bar{1})\, q(2)\, \bar{q}(\bar{2}),\, \text{in}\,\rangle \tag{2.55}$$
$$= \langle\, \Omega, \text{out} \mid b_{\text{out}}(\bar{2})\, a_{\text{out}}(2')\, b_{\text{out}}(\bar{1}')\, a_{\text{out}}(1')\, a^\dagger_{\text{in}}(1)\, b^\dagger_{\text{in}}(\bar{1})\, a^\dagger_{\text{in}}(2)\, b^\dagger_{\text{in}}(\bar{2}) \mid \Omega, \text{in}\,\rangle$$

Die Operatoren $a^\dagger_{\text{in}}$, $b^\dagger_{\text{in}}$ in Gl. (2.55) erzeugen ein freies Quark, Antiquark im einlaufenden, die Operatoren a_{out}, b_{out} vernichten ein (freies) Quark, Antiquark im auslaufenden Zustand, das heißt bei großen negativen beziehungsweise positiven Zeiten: $x^0 \to \pm\infty$.

Es gelten – für „in“- und „out“-, das heißt asymptotische Zustände – für Quarks

$$a^\dagger(i) \;=\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; \overline{\psi}(x)\, \gamma^0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x}\, u(i) \;\equiv\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; \overline{\psi}(x)\, \gamma^0\, (x|i) \tag{2.56}$$

$$a(i) \;=\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; \overline{u}(i)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x}\, \gamma^0\, \psi(x) \;\equiv\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; (i|x)\, \gamma^0\, \psi(x) \tag{2.56'}$$

und für Antiquarks

$$b^\dagger(\bar{i}) \;=\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; \overline{v}(\bar{i})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{p}_i x}\, \gamma^0\, \psi(x) \;\equiv\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; (\bar{i}|x)\, \gamma^0\, \psi(x) \tag{2.57}$$

$$b(\bar{i}) \;=\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; \overline{\psi}(x)\, \gamma^0\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{p}_i x}\, v(\bar{i}) \;\equiv\; \int_{x^0} d^3\vec{x}\; \overline{\psi}(x)\, \gamma^0\, (x|\bar{i}) \tag{2.57'}$$

verstanden als Integration über die Hyperfläche $x^0 = const.$ Dabei sind

$$u(i) \equiv u_{s_i,n_i}(p_i) \qquad \text{und} \qquad v(\bar{i}) \equiv v_{\bar{s}_i,\bar{n}_i}(\bar{p}_i) \tag{2.58}$$

die Dirac-Spinoren für Quarks beziehungsweise Antiquarks. Die Indizes i, $\bar{i}$ stehen wieder für die Gesamtheiten $\{i\}$, $\{\bar{i}\}$ der internen Quantenzahlen und der Impulsraumvariablen im Sinne von Gl. (2.52). Zur Dirac-Algebra vgl. auch Anhang A.2.

Weiter treten in den Gln. (2.56)-(2.57') auf die freien (Anti)Quarkfelder ψ, $\overline{\psi}$; wir halten uns an die Standarddefinition

$$\psi(x) = \int d^R k\, \sum\nolimits_s \left(a_{s,n}(k)\, u_{s,n}(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + b^\dagger_{s,n}(k)\, v_{s,n}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right) \tag{2.59}$$

$$\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\, \gamma^0 \tag{2.59'}$$

mit Integrationsmaß

$$d^R k \;=\; \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3\, 2k_{0+}} \;=\; \frac{dk}{(2\pi)^4}\; 2\pi\, \delta(k^2 - m^2)\, \theta(k^0) \qquad k_{0+} = +\sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \tag{2.60}$$

Einschränkung der Vierer-Impulse auf die Vorwärts-Masseschale – so das Maß $d^R k$ selbst – ist *invariant* unter Transformationen der speziellen orthochronen Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}^\uparrow_+$; vgl. Anh. D.1, D.2, insbes. die Gln. (D.185)-(D.185‴) und (D.192)-(D.192‴) in D.6.2.

Im Hinblick auf später haben wir durch die zweiten Identitäten in den Gln. (2.56)-(2.57′) die *Zustandsvektoren* $|\cdot)$ und $(\cdot|$ für Quark-Indizes i und Antiquark-Indizes $\bar{i}$ eingeführt. Sie erfüllen die *freie renormierte Dirac-Gleichung*, vgl. unten Gl. (2.80). Definiert durch ihre Darstellung im Ortsraum haben wir für ein- und auslaufend (Anti)Quarks

$$(x|i) \;=\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p_i x}\, u(i) \qquad \text{bzw.} \qquad (i|x) \;=\; \overline{u}(i)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p_i x} \;=\; \overline{(x|i)} \tag{2.61}$$

$$(\bar{i}|x) \;=\; \overline{v}(\bar{i})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{p}_i x} \qquad \text{bzw.} \qquad (x|\bar{i}) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{p}_i x}\, v(\bar{i}) \;=\gamma^0\,(\bar{i}|x)^\dagger \tag{2.61′}$$

Sie sind prägnante Bra-Ket-Notation im Diracschen Sinne.

LSZ-Reduktionsformalismus

Wir skizzieren den Reduktionsformalismus nach Lehmann, Symanzik, Zimmermann. Wie er auf Basis der der Gln. (2.56)-(2.57′) S-Matrixelemente von n Partonen mit der entsprechenden *n-Punkt-Greenfunktion* $G^{(n)}$ nach Gl. (1.7) verknüpft.

Im n-Teilchen-S-Matrixelement entsprechend den Gln. (2.53), (2.55) wird Gl. (2.56) angewandt zunächst o.E.d.A. auf einen Erzeuger $a_{\mathrm{in}}^\dagger(j)$ bezüglich der einlaufenden „in“-Basis und mit den Quantenzahlen $\{j\}$. Das heißt das Raumintegral bezieht sich auf die Hyperfläche konstanter *negativ unendlicher* Zeit x^0; aufgefaßt als Funktion von x^0 ist dies sein Grenzwert $x^0 \to -\infty$. Mit der Identität

$$\lim_{x^0\to-\infty} \;=\; \lim_{x^0\to\infty} \;-\; \int_{-\infty}^{\infty} dx^0\;\partial_0 \tag{2.62}$$

wird dieser überführt in die *Differenz* des Grenzwerts konstanter *positiv unendlicher* Zeit $x^0 \to +\infty$ und des so generierten Ableitungsterm. Dieser ist gleich dem vierdimensionalen Raumzeit-Integral

$$\partial_{(j)} \;=\; \int dx\;\partial_0\,\left[\,\overline{\psi}(x)\,\gamma^0\;(x|j)\,\right] \tag{2.63}$$

Der Limes-Term ist – vgl. Gl. (2.56) von rechts nach links – gerade der ursprüngliche Erzeuger bezüglich der auslaufenden „out“-Basis: $a_{\mathrm{out}}^\dagger(j)$.

Dieser wird nach links permutiert, wo er letztlich den Vakuumzustand annihiliert.[2.10] Bevor er dies tut, ergibt er an *genau einem* der Vernichter, o.E.d.A. an $a_{\mathrm{out}}(j')$ mit Index j', den Zusatzterm $\delta(j',j)$; dies aufgrund der nichttrivialen Antikommutatorrelationen

$$\left\{a(i'),a^\dagger(i)\right\} \;=\; \delta_{s_{i'}s_i}\delta_{n_{i'}m_i}\,(2\pi)^3\,2(p_i)_{0+}\;\delta(\vec{p}_{i'}-\vec{p}_i) \;=\; \delta(i',i) \tag{2.64}$$

$$\left\{b(\bar{i}'),b^\dagger(\bar{i})\right\} \;=\; \delta_{\bar{s}_{i'}\bar{s}_i}\delta_{\bar{n}_{i'}\bar{m}_i}\,(2\pi)^3\,2(\bar{p}_i)_{0+}\;\delta(\vec{\bar{p}}_{i'}-\vec{\bar{p}}_i) \;=\; \delta(\bar{i}',\bar{i}) \tag{2.64′}$$

symmetrisieren entsprechend $(p_i)_{0+} = \sqrt{(p_{i'})_{0+}(p_i)_{0+}}$ und $(\bar{p}_i)_{0+} = \sqrt{(\bar{p}_{i'})_{0+}(\bar{p}_i)_{0+}}$ unter der Diracschen Delta-Distribution. Mit jeder Vertauschung nach links ergibt $a_{\mathrm{out}}^\dagger(j)$ nur noch ein Vorzeichen und letztlich Null. Exakt gesprochen tauscht die *Summe dreier Terme* nach links durch und sammelt in definierter Weise Vorzeichen auf: der Vernichter $a_{\mathrm{out}}^\dagger(i)$, der Zusatzterm $\delta(j',j)$ und der (negative) Graßmann-wertige Ableitungsterm.

Der Ableitungsterm $\partial_{(j)}$, vgl. Gl. (2.63), ist dabei multipliziert mit $a_{\mathrm{out}}(j')$. Dieser Vernichter wird seinerseits geschrieben als Grenzwert $x^0 \to +\infty$ eines Raumintegrals nach Gl. (2.56′). Mit der Identität

$$\lim_{x^0\to\infty} \;=\; \lim_{x^0\to-\infty} \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} dx^0\;\partial_0 \tag{2.65}$$

vgl. Gl. (2.62), wird dieser überführt in die *Summe* des Grenzwerts $x^0 \to +\infty$ und dem zu

[2.10] Das Vakuum ist invariant unter dem S-Operator, das heißt $|\,\Omega\,\rangle \equiv |\,\Omega,\mathrm{in}\,\rangle \equiv |\,\Omega,\mathrm{out}\,\rangle$.

Gl. (2.63) analogen Ableitungsterm

$$\partial_{(j')} \;=\; \int dx'\, \partial_0 \left[\, (j'|x')\, \gamma^0\, \psi(x') \,\right] \tag{2.66}$$

Der Limes-Term ist genau der Vernichter $a_{\rm in}(j')$, wird nach rechts durchpermutiert, sammelt dabei Vorzeichen auf und annihiliert schließlich den Vakuumzustand [2.10]. Dabei entstehen a priori Zusatzterme $\delta(j',i)$ aufgrund der nichttrivialen Antikommutatorrelationen nach Gl. (2.64). Diese verschwinden alle identisch, da der Index $i\equiv j$ nicht mehr vorkommt. Der Limes-Term fällt daher weg.

In conclusio sind die Operatoren $a^\dagger_{\rm in}(j)$ und $a_{\rm out}(j')$ verschwunden und an ihre Stelle getreten, mit definiertem Vorzeichen, die Differenz

$$\delta(j',j) - \partial_{(j')}\cdot\partial_{(j)} \tag{2.67}$$

mit expliziten Gestalt der $\partial_{(j)}$, $\partial_{(j')}$ wie in den Gln. (2.63), (2.66).

In den Ableitungstermen $\partial_{(j)}$, $\partial_{(j')}$ können die auf die Zustandsvektoren $|i)$, $(j'|$ wirkenden Differentiationen $\gamma^0\partial_0^x$ beziehungsweise $\gamma^0\partial_0^{x'}$ mithilfe der freien renormierten Dirac-Gleichung – die $|j)$, $(j'|$ lösen, vgl. unten Gl. (2.80) – ersetzt werden durch die räumlichen Differentiationen. Diese können partiell integriert werden – die Randterme verschwinden – und wirken, von links beziehungsweise rechts, auf die Felder $\psi(x)$, $\overline{\psi}(x)$: zusammen mit $\gamma^0\partial_0^{x_j}$ beziehungsweise $\gamma^0\partial_0^{x_{j'}}$ genau als die *freien renormierten Dirac-Operatoren*.

Dieses Verfahren wird sukzessive auf sämtliche Operatoren $a^\dagger_{\rm in}(i)$ und $a_{\rm out}(i')$ angewandt. Es treten a priori sämtliche verschiedenen Kontraktionen von Indexpaaren $\delta(i',i)$, $\delta(\bar{\imath}',\bar{\imath})$ auf im Sinne von Gl. (2.67). Welche davon ungleich Null sind, folgt über die nichttrivialen Antikommutatorrelationen nach den Gln. (2.64), (2.64′) letztlich aus den internen Quantenzahlen und Impulsen der (Anti)Quarks, – der Kinematik der Streuung.

(Anti)Quark-Propagation durch vorgegebenen Gluon-Hintergrund

Wir kommen zurück auf das S-Matrixelement nach den Gln. (2.53), (2.55). Resultat ist die folgende Reduktion: Es wirkt für jedes der acht Argumente der (Anti)Quarks der freie renormierte Dirac-Operator auf die *8-Punkt-Greenfunktion* $G^{(8)}$

$$\begin{aligned} &G^{(8)}(\bar{2}',2',\bar{1}',1',1,\bar{1},2,\bar{2}) \\ &=\; \langle\Omega|\; T\, \overline{\psi}(\bar{2}')\,\psi(2')\,\overline{\psi}(\bar{1}')\,\psi(1')\,\overline{\psi}(1)\,\psi(\bar{1})\,\overline{\psi}(2)\,\psi(\bar{2})\;|\Omega\,\rangle \end{aligned} \tag{2.68}$$

vgl. Gl. (1.7) und Fußn. 2.10. Die Integrationen dx, dx' in (2.67) – siehe auch die Gln. (2.63), (2.66) – stehen für abschließende Fourier-Transformation in den Impulsraum.

Im betrachteten t-Kanal, vgl. die Gln. (2.42), (2.42′) und (2.43), folgt

$$\begin{aligned} &\langle\, \bar{q}(\bar{2}')\, q(2')\, \bar{q}(\bar{1}')\, q(1'),\, \text{in} \mid S \mid q(1)\, \bar{q}(\bar{1})\, q(2)\, \bar{q}(\bar{2}),\, \text{in}\,\rangle \\ &=\; \langle\, \big(\delta(1',1) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \mathcal{M}^F_{1'1}[A]\big)\, \big(\delta(\bar{1}',\bar{1}) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{1}'\bar{1}}[A]\big) \\ &\quad\times \big(\delta(2',2) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \mathcal{M}^F_{2'2}[A]\big)\, \big(\delta(\bar{2}',\bar{2}) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{2}'\bar{2}}[A]\big)\,\rangle_A \end{aligned} \tag{2.69}$$

wobei wir formal wieder zurückkehren von der BRST-Operatornotation $\langle\,\Omega|\cdot|\Omega\,\rangle$ zur Funktionalintegraldarstellung $\langle\,\cdot\,\rangle_A$, vgl. Gl. (1.11). Wir merken an, daß der Ausdruck nach Gl. (2.69) über $\delta(i,i)$ und $\delta(\bar{\imath},\bar{\imath})$ noch sämtliche nichtzusammenhängenden, *disconnected* Terme mit einschließt.

Diese Gleichung ist fundamentale Basis unserer Analyse. Wir diskutieren wie folgt die auftretenden Größen.

Die Konstante Z_2 ist Element des reellen Einheitsintervalls $(0,1]$ und verknüpft mit der Renormierung des Quark-Spinorfelds durch

$$\psi(x) \underset{x^0 \to \pm\infty}{\longrightarrow} Z_2^{-1/2}\, \psi_{\substack{\text{out}\\ \text{in}}}(x) \tag{2.70}$$

im schwachen Sinne, das heißt als Erwartungswert.[2.11] Sie tritt auf im Zuge des Übergangs im LSZ-Formalismus von Lagrange'schen *nichtrenormierten* Quarkfeldern zu asymptotischen „in"- und „out"-, das heißt *renormierten* Feldern.

Die Größen $\mathcal{M}^F_{i'i}$, und $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}$ sind bezeichnet und definiert nach Nachtmann:

$$\mathcal{M}^F_{i'i}[A] \;=\; (i'|\;\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m_{\text{ren.}}\right)\; S_F[A]\;\left(\mathrm{i}\gamma^\nu \overleftarrow{\partial}_\nu + m_{\text{ren.}}\right)\;|i) \tag{2.71}$$

$$\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A] \;=\; -(\bar{i}|\;\left(\mathrm{i}\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m_{\text{ren.}}\right)\; S_F[A]\;\left(\mathrm{i}\gamma^\nu \overleftarrow{\partial}_\nu + m_{\text{ren.}}\right)\;|\bar{i}') \tag{2.71'}$$

Wir betonen die Vertauschung $(\bar{i}|\cdot|\bar{i}')$ für Antiquarks gegenüber $(i'|\cdot|i)$ für Quarks. Es ist definiert $m_{\text{ren.}}$ als die *renormierte* Quarkmasse, im Gegensatz zu m der nichtrenormierten Lagrange'schen. Sie sind verknüpft über die Beziehung [2.11]

$$m_{\text{ren.}} \;=\; m \;+\; \delta m \tag{2.72}$$

Die Größen $\mathcal{M}^F_{i'i}$, $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}$ sind, wie notiert in den Gln. (2.71), (2.71′), Funktionale im Gluon-Eichfeld A – über das Eichfeld-Funktional $S_F[A] \equiv S_F[A](x,x';m^2)$. Die Bedeutung von $\mathcal{M}^F_{i'i}$, $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}$ erschließt sich über diese Größe.

Bevor wir hierauf näher eingehen, erinnern wir an die Definition der Zustandsvektoren $|\cdot)$, $(\cdot|$ in den Gln. (2.61), (2.61′) und machen die folgende Anmerkung zur Schreibweise. Wir arbeiten in der Bra-Ket-Notation Nachtmanns, in der die Größen aufgefaßt sind als Vektoren beziehungsweise Matrizen bezüglich des internen Eichgruppen- und Dirac-Raumes *und* des Konfigurationsraumes. Multiplikation impliziert daher zusätzlich zur Summation über Eichgruppen- und Dirac-Indizes Vierer-Integration der Ortsraum-Variable über den gesamten Raum. Die Eins lautet ausgeschrieben $\mathbb{1} = \delta_{n'n}\delta_{s's}\delta(x'-x))$ und impliziert die Diracsche Delta-Distribution bezüglich der vierdimensionalen Minkowski-Raumzeit. So lauten die Gln. (2.71), (2.71′) ausgeschrieben:

$$\mathcal{M}^F_{i'i}[A] \tag{2.73}$$
$$= \int dx\, dx'\;\; (i'|x)\;\; (\mathrm{i}\overrightarrow{\not\partial}^x - m_{\text{ren.}})\;\; S_F[A](x,x';m^2)\;\; (\mathrm{i}\overleftarrow{\not\partial}^{x'} + m_{\text{ren.}})\;\; (x'|i)$$

$$\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A] \tag{2.73'}$$
$$= -\int dx\, dx'\;\; (\bar{i}|x)\;\; (\mathrm{i}\overrightarrow{\not\partial}^x - m_{\text{ren.}})\;\; S_F[A](x,x';m^2)\;\; (\mathrm{i}\overleftarrow{\not\partial}^{x'} + m_{\text{ren.}})\;\; (x'|\bar{i}')$$

in Notation mit wohlbekanntem *Feynman-Slash*: $\not\partial \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$.

Wir kommen zurück auf das Funktional $S_F[A]$. Es ist genau die *Greenfunktion* – mit Polvorschrift nach *Feynman* [Skript „F"] – der *vollen nichtrenormierten Dirac-Gleichung*, das heißt für ein (Anti)Quarks in vorgegebener Konfiguration $A(x)$ des Gluon-Eichfelds. Anwendung des vollen nichtrenormierten Dirac-Operators ergibt per definitionem von links:[2.12]

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu[A] - m\right)\; S_F[A] \;=\; -\mathbb{1} \tag{2.74}$$

$$\text{d.h.} \qquad \left(\mathrm{i}\gamma^\mu D^x_\mu[A] - m\right)\; S_F[A](x,x';m^2) \;=\; -\delta(x-x') \tag{2.74'}$$

[2.11] Vgl. die Bemerkung in Anschluß an die Gln. (2.76), (2.76′).

[2.12] Die implizite Vierer-Integration ist bereits ausgeführt: Aufgrund der Diagonalität der Differentialoperatoren steht zunächst $\delta(x-x')\,(\mathrm{i}\gamma^\mu D^{x'}_\mu[A] - m)$ respektive $(\mathrm{i}\gamma^\mu(-\overleftarrow{\partial}^x_\mu[A] + \mathrm{i}gA_\mu(x)) - m)\,\delta(x-x')$.

mit $D^x_\mu[A] = \partial^x_\mu + \mathrm{i}gA_\mu(x)$, vgl. Gl. (1.5), – und von rechts:[2.12]

$$S_F[A]\,\big(\mathrm{i}\gamma^\mu(-\overleftarrow{\partial}_\mu + \mathrm{i}gA_\mu) - m\big) \;=\; -\mathbb{1} \tag{2.75}$$

Differentiation bezieht sich generell auf sämtliche Funktionen in Richtung des Pfeils.

In Hinblick auf die Differentialoperatoren in den Gl. (2.71), (2.71′) geben wir – entsprechend den Gln. (2.74), (2.75) – die Relationen an für die *Feynmansche Greenfunktion der freien renormierten Diracgleichung* $S_F^{(0)}$:

$$\big(\mathrm{i}\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu - m_{\text{ren.}}\big)\;S_F^{(0)} \;=\; -\mathbb{1} \tag{2.76}$$

$$S_F^{(0)}\;\big(\mathrm{i}\gamma^\mu(-\overleftarrow{\partial}_\mu) - m_{\text{ren.}}\big) \;=\; -\mathbb{1} \tag{2.76′}$$

Sie sind relevant für die in den Gln. (2.61), (2.61′) definierten Zustandsvektoren $|\cdot)$, $(\cdot|$, die per definitionem Lösungen sind der freien renormierten Diracgleichung. Die Größen $m_{\text{ren.}}$ und Z_2 sind definiert als der Pol von $S_F^{(0)}$ im Impulsraum respektive das zugehörige Residuum; Gl. (2.70) und (2.72) sind unmittelbare Konsequenz von dieser Definition.

Physikalisch ist S_F genau der *volle nichtrenormierte Feynman-Propagator* eines Quarks im Gluon-Hintergrund A und tritt auf im S-Matrixelement nach Gl. (2.69) aufgrund der Relation mit den nichtrenormierten, das heißt von m abhängenden Quarkfeldern:

$$\mathrm{i}\,S_F[A](x,x';m^2) \;=\; \psi(x)\,\overline{\psi}(x') \;=\; \mathrm{i}\,\big(\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}\big)[A](x,x';m^2) \tag{2.77}$$

Das heißt $\langle \mathrm{i}\,S_F[A]\rangle_A = \langle\psi\overline{\psi}\rangle_A = \langle \mathrm{i}\,\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1}[A]\rangle_A$ ist der volle nichtrenormierte Feynman-Propagator der QCD, geschrieben in Referenz auf Gl. (1.7) mit $\mathcal{O}_{\mathrm{D}}^{-1} = (\mathrm{i}\gamma^\mu D^x_\mu - m)^{-1}$, wie definiert in Gl. (1.9).

Die physikalische Bedeutung der das S-Matrixelement bestimmenden Größen $\mathcal{M}^F_{i'i}$, $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}$, vgl. die Gln. (2.71), (2.71), erschließt sich dadurch, daß wir sie mithilfe der Gluonfeldabhängigen Zustandsvektoren $|\psi^F_i)$ beziehungsweise $(\bar{\psi}^F_{\bar{i}}|$ umschreiben. Definiert durch

$$|\psi^F_i[A]) \;=\; S_F[A]\;\big(\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m_{\text{ren.}}\big)\;\;|i) \tag{2.78}$$

$$(\bar{\psi}^F_{\bar{i}}[A]| \;=\; (\bar{i}|\;\;\big(\mathrm{i}\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu - m_{\text{ren.}}\big)\;\;S_F[A] \tag{2.78′}$$

lösen sie die *volle nichtrenormierte Dirac-Gleichung*, das heißt:

$$\big(\mathrm{i}\gamma^\mu(\overrightarrow{\partial}_\mu + igA_\mu) - m\big)\;\;|\psi^F_i) \;=\; 0 \tag{2.79}$$

$$(\bar{\psi}^F_{\bar{i}}|\;\;\big(\mathrm{i}\gamma^\mu(-\overleftarrow{\partial}_\mu + igA_\mu) - m\big) \;=\; 0 \tag{2.79′}$$

Dabei ist wesentlich, daß die Zustände $|i)$, $(\bar{i}|$ die *freie renormierte Dirac-Gleichung* lösen, das heißt:

$$\big(\mathrm{i}\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu - m\big)\;\;|i) \;=\; 0 \tag{2.80}$$

$$(\bar{i}|\;\;\big(\mathrm{i}\gamma^\mu(-\overleftarrow{\partial}_\mu) - m\big) \;=\; 0 \tag{2.80′}$$

Mithilfe von $|\psi^F_i)$ beziehungsweise $(\bar{\psi}^F_{\bar{i}}|$ schreiben sich die Gln. (2.71), (2.71′) wie folgt:

$$\mathcal{M}^F_{i'i}[A] \;=\; (i'|\;\big(\mathrm{i}\gamma^\mu\overrightarrow{\partial}_\mu - m_{\text{ren.}}\big)\,|\psi^F_i[A]) \;=\; (i'|\;\big(g\gamma^\mu A_\mu - \delta m\big)\,|\psi^F_i[A]) \tag{2.81}$$

$$\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A] \;=\; (\bar{\psi}^F_{\bar{i}}[A]|\;\big(\mathrm{i}\gamma^\mu\overleftarrow{\partial}_\mu + m_{\text{ren.}}\big)\,|\bar{i}') \;=\; (\bar{\psi}^F_{\bar{i}}[A]|\;\big(g\gamma^\mu A_\mu - \delta m\big)\,|\bar{i}') \tag{2.81′}$$

Die zweiten Gleichheitszeichen gelten aufgrund der Gln. (2.79), (2.79′). Nachtmann findet diese Identitäten äquivalent, indem er benutzt:

$$S_F[A] \;=\; S_F^{(0)} \;-\; S_F[A]\;\big(g\gamma^\mu A_\mu - \delta m\big)\;S_F^{(0)} \tag{2.82}$$

$$\;=\; \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}\big[-S_F^{(0)}\;\big(g\gamma^\mu A_\mu - \delta m\big)\big]^n\;\;S_F^{(0)} \tag{2.82′}$$

die *Lippmann-Schwinger-Gleichung* für S_F, vgl. die Gln. (2.76), (2.76′).

Auf Basis der Darstellungen durch die Gln. (2.81), (2.81′) halten wir fest: Die Größe $\mathcal{M}^F_{i'i}$ ist das Integral über eine vollständige einlaufende Wellenfunktion $\psi^F_i(x) = (x|\psi^F_i)$ eines Quarks i, das an einem vorgegebenen (externen) Gluon-Potential $(g\not{A} - \delta m)$ streut und projiziert wird auf eine freie auslaufende Quark-Welle $(x|i')$. – Diese Darstellungen suggerieren daher die physikalische Interpretation von $\mathcal{M}^F_{i'i}[A]$ als der entsprechenden *Streuamplitude*. Die Größe $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A]$ ist analog zu interpretieren als die Streuamplitude einer vollständigen einlaufenden Wellenfunktion $\bar{\psi}^F_{\bar{i}}(x) = (\bar{\psi}^F_{\bar{i}}|x)^*$ eines Antiquarks $\bar{i}$ an demselben (externen) Gluon-Potential.

Die Amplituden $\mathcal{M}^F_{i'i}$, $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A]$ – vgl. die Gln. (2.71), (2.71′) und (2.81), (2.81′) – sollten miteinander verknüpft sein aufgrund der Invarianz der QCD unter Ladungskonjugation $\mathcal{C}$. Wir verweisen auf die einleitende Diskussion auf Seite 2.

Hierbei werden Teilchen mit Antiteilchen vertauscht, das heißt Operatoren $a \leftrightarrow b$, $a^\dagger \leftrightarrow b^\dagger$ im S-Matrixelement. Dies heißt bezüglich der (Anti)Quark- und der Gluon-Eichfelder:

$$\psi \xrightarrow{\mathcal{C}} \psi^{\mathcal{C}} = C\,\overline{\psi}^t \qquad \text{d.h.} \qquad u^{\mathcal{C}} = C\,\overline{v}^t \qquad v^{\mathcal{C}} = C\,\overline{u}^t \tag{2.83}$$

$$A \xrightarrow{\mathcal{C}} A^{\mathcal{C}} = C\,A\,C^{-1} = -A^t = -A^* \tag{2.83′}$$

Dabei ist C eine definierte Matrix, die nichttrivial wirkt im Dirac-Raum; sie ist antisymmetrisch, antihermitesch und unitär: $-C = C^t = C^\dagger = C^{-1}$.

Unter Ladungskonjugation $\mathcal{C}$ verhalten sich ein- respektive auslaufende Quarks wie

$$|i) \xrightarrow{\mathcal{C}} |i)^{\mathcal{C}} = C\,(\bar{i}|^t \tag{2.84}$$

$$(i| \xrightarrow{\mathcal{C}} (i|^{\mathcal{C}} = |\bar{i})^t\,C \tag{2.84′}$$

Dies impliziert für die Greenfunktion:

$$S_F[A] \xrightarrow{\mathcal{C}} S_F[A^{\mathcal{C}}] = C^t\,\big(S_F[A]\big)^t\,C \tag{2.85}$$

Die vollen einlaufenden Wellenfunktionen des (Anti)Quarks $|\psi^F_i)$, $(\bar{\psi}^F_{\bar{i}}|$ in der Definition der Gln. (2.78), (2.78′) erfüllen dann genau

$$|\psi^F_i[A]) \xrightarrow{\mathcal{C}} |\psi^F_i[A])^{\mathcal{C}} = C^t\,(\bar{\psi}^F_{\bar{i}}[A^{\mathcal{C}}]|^t \tag{2.86}$$

Aus den Gln. (2.84), (2.84′) und (2.85) zusammen folgt

$$\mathcal{M}^F_{i'i}[A] \xrightarrow{\mathcal{C}} \big(\mathcal{M}^F_{i'i}[A]\big)^{\mathcal{C}} = \bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A^{\mathcal{C}}] \tag{2.87}$$

Dies verifiziert genau, was wir a priori erwarten: Die Propagation eines Quarks durch die Konfiguration A des Gluon-Eichfelds ist äquivalent zum $\mathcal{C}$-transformierten Bild: Das aus dem Quark durch $\mathcal{C}$-Transformation hervorgegangene Antiquark propagiert – zurück in der Zeit – durch die Konfiguration $A^{\mathcal{C}}$.

Ferner genügt es, die Quark-Streuamplitude $\mathcal{M}^F_{i'i}[A]$ zu betrachten. Die Antiquark-Amplitude $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A^{\mathcal{C}}]$ folgt unmittelbar durch Substitution, vgl. die Gln. (2.83), (2.83′).

(Anti)Quark-Streuamplituden $\mathcal{M}^F_{i'i}[A]$, $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A]$ als Wegner-Wilson-Linien

Aufgabe ist es, die Streuamplituden des (Anti)Quarks an der vorgegebenen Konfiguration A des Gluon-Eichfelds $\mathcal{M}^F_{i'i}[A]$, $\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{i}'\bar{i}}[A]$ einer Auswertung im Rahmen *nichtperturbativer* QCD zugänglich zu machen. Das heißt – wir beschränken uns auf das Quark – die vollen Wellenfunktionen $|\psi^F_i)$ zu bestimmen als Lösungen der vollen nichtrenormierten Dirac-Gleichung, vgl. Gl. (2.79).

Unmittelbares Problem ist, daß $|\psi_i^F)$ als einlaufender Zustand nicht den physikalischen Randbedingungen genügt. Insofern als für negativ unendliche Zeiten $|\psi_i^F)$ *nicht* übergeht in den freien „in"-Zustand $|i)$:

$$|\psi_i^F) \underset{x^0 \to -\infty}{\not\longrightarrow} |i) \tag{2.88}$$

entsprechend $(\bar{\psi}_{\bar{i}}^F|$ nicht in $(\bar{i}|$.

Allerdings ist die Greenfunktion $S_F(x, x'; m^2)[A]$ als Lösung von Gl. (2.74) nur bestimmt bis auf ein Funktional $\sigma(x, x'; m^2)[A]$, das identisch verschwindet unter der Wirkung des vollen nichtrenormierten Dirac-Operators:

$$\left(\mathrm{i}\gamma^\mu D_\mu[A] - m\right)\ \sigma[A] \ = \ 0 \tag{2.89}$$

Neben S_F existieren bekanntlich weitere Greenfunktionen. – In dem Sinne, daß diese eine Gl. (2.74) analoge Gleichung lösen und von S_F genau in ihrer ϵ-Vorschrift differieren: wie ihre Impulsraum-Darstellung bezüglich k^0- von $-\infty$ nach $+\infty$ Fourier-zu-integrieren ist in den Ortsraum, das heißt wie in der komplexen k^0-Ebene der Integrationsweg an den Polen $(\pm\sqrt{\vec{k}^2+m^2},\ 0)$ vorbeizuführen ist.

Nachtmann betrachtet die *retardierte* Greenfunktion S_r. Es gilt Gl. (2.74) unter der Ersetzung von S_F durch S_r – wie auch alle weiteren über S_F definierten Größen, analog definiert über S_r, analoge Relationen erfüllen. Eingeschlossen $|\psi_i^r)$, vgl. Gl. (2.78), die volle retardierte Wellenfunktion eines einlaufenden Quarks, die das Pendant zu Gl. (2.79) erfüllt. Wesentliche Beobachtung ist, daß $|\psi_i^r)$ genau die geforderte Asymptotik besitzt:

$$|\psi_i^r) \underset{x^0 \to -\infty}{\longrightarrow} |i) \tag{2.90}$$

Gedanke ist daher genau der, generell S_F zu ersetzen durch S_r.

Dies ist möglich, falls die longitudinalen (Anti)Quark-Impulse sehr viel größer sind als die des Gluon-Eichfelds A, dies ist gegeben im Grenzwert $s \to \infty$ für $-t < 1\,\mathrm{GeV}^2$, fest. Es gilt die Asymptotik

$$\mathcal{M}^F_{i'i}[A] \ - \ \mathcal{M}^r_{i'i}[A] \underset{s\to\infty,\ -t<1\ \mathrm{GeV}^2,\ \mathrm{fest}}{\sim} \mathcal{O}(\varepsilon_{i'}, \varepsilon_i) \tag{2.91}$$

mit $\mathcal{O}(\varepsilon_{i'}, \varepsilon_i) \equiv \mathcal{O}(1/\sqrt{s})$; vgl. Abschn. 2.2. Nachtmann zeigt dies in Ref. [146] mithilfe der Lippmann-Schwinger-Gleichungen für S_F und S_r, vgl. Gl. (2.82′), durch vollständige Induktion nach n bezüglich ihrer Entwicklungen nach den freien Greenfunktionen.

In conclusio werden in der zentralen Größe unserer Betrachtung, dem S-Matrixelement nch Gl. (2.69), die Feynmanschen Streuamplituden $\mathcal{M}^F_{i'i}$, $\bar{\mathcal{M}}^r_{\bar{i}'\bar{i}}$ ersetzt durch die *retardierten*

$$\mathcal{M}^r_{i'i} \ = \ (i'|\ \left(g\gamma^\mu\ A_\mu - \delta m\right)\ |\psi_i^r) \tag{2.92}$$

$$\bar{\mathcal{M}}^r_{\bar{i}'\bar{i}} \ = \ (\bar{\psi}^r_{\bar{i}}|\ \left(g\gamma^\mu\ A_\mu - \delta m\right)\ |\bar{i}') \tag{2.92′}$$

vgl. die Gln. (2.81), (2.81′).

Nachtmann leitet für $|\psi_i^r)$ als der Lösung der vollen nichtrenormierten Dirac-Gleichung, vgl. Gl. (2.79), die Darstellung in der Eikonal-Approximation her, Ref. [146]. Diese Näherung basiert auf der Annahme, die longitudinalen (Anti)Quark-Impulse seien sehr viel größer als die des Gluon-Eichfelds A. Dies ist realisiert im Grenzwert $s \to \infty$ und für $-t < 1\,\mathrm{GeV}^2$, fest. Nachtmann arbeitet in diesem Grenzwert. Er gibt an für die einlaufenden Quarks:

$$\psi_1^r(x) \ = \ (x|\psi_1^r) \ = \ V_+(x)\,(x|1) \ + \ \mathcal{O}(\varepsilon_1) \tag{2.93}$$

$$\psi_2^r(x) \ = \ (x|\psi_2^r) \ = \ V_-(x)\,(x|2) \ + \ \mathcal{O}(\varepsilon_2) \tag{2.93′}$$

mit $\mathcal{O}(\varepsilon_i)=\mathcal{O}(1/\sqrt{s})$. Dabei sind $V_+(x)$, $V_-(x)$ die Eichgruppen-, das heißt *matrixwertigen* pfadgeordneten Phasenfaktoren:

$$V_+[A](x) \;=\; P\,\exp -ig\int_{-\infty}^{x^+} dx'^+\; A_+(x'^+,x^-,\mathbf{x}) \tag{2.94}$$

$$V_-[A](x) \;=\; P\,\exp -ig\int_{-\infty}^{x^-} dx'^-\; A_-(x^+,x'^-,\mathbf{x}) \tag{2.94$'$}$$

Wobei wir streng unterscheiden zwischen ko- und kontravarianten Komponenten, vgl. Anhang A.1.2; vgl. die Bem. zu Gl. (A.23). Diese Phasen werden bezeichnet als *Wegner-Wilson-Linien* und sind nichts anderes als die Eichgruppen-Konnektoren Φ entlang der klassischen Trajektorien der Quarks als Funktionen des Endpunktes x in der Raumzeit, vgl. Gl. (1.15). Aufgrund des Limes unendlicher invarianter Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ sind sie *lichtartig*.

Für die Limites bezüglich ihrer oberen Integrationsgrenzen, das heißt in Richtung ihrer „großen“ Impulse gilt

$$\lim_{x^+\to\infty} V_+(x^+,x^-,\mathbf{x}) \;=\; V_+(\infty,x^-,\mathbf{x}) \tag{2.95}$$

$$\lim_{x^-\to\infty} V_-(x^+,x^-,\mathbf{x}) \;=\; V_-(x^+,\infty,\mathbf{x}) \tag{2.95$'$}$$

und

$$\lim_{x^+\to-\infty} V_+(x) \;=\; \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} \tag{2.96}$$

$$\lim_{x^-\to-\infty} V_-(x) \;=\; \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} \tag{2.96$'$}$$

mit den klassischen lichtartigen Trajektorien $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_-$ wie eingeführt in Gl. (2.2) und den vollen Wegner-Wilson-Linien $V_+\equiv\Phi(\mathcal{C}_+)$, $V_-\equiv\Phi(\mathcal{C}_-)$ wie in Gl. (2.4$'$).

Die Streuamplituden $\mathcal{M}^r_{i'i}$, $\bar{\mathcal{M}}^r_{\bar{i}'\bar{i}}$ entsprechend den Gln. (2.92), (2.92$'$) folgen im wesentlichen durch Anwendung der definierenden Differentialgleichung für Konnektoren, die nach Gl. (1.18) einen Ableitungsoperatior nach dem Kurvenparameter generiert, der wirkt auf die Wegner-Wilson-Linien; vgl. die Gln. (2.95), (2.95$'$) und (2.96), (2.96$'$). Nachtmann findet letztlich für Quarks:[2.13]

$$\mathcal{M}^r_{1'1}[A] \;=\; \mathrm{i}\,\delta_{s_{1'}s_1}\int d_{1'1}(x^-,\mathbf{x})\,\big[V_+[A](\infty,x^-,\mathbf{x})-\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big]_{n_{1'}n_1} \tag{2.97}$$

$$\mathcal{M}^r_{2'2}[A] \;=\; \mathrm{i}\,\delta_{s_{2'}s_2}\int d_{2'2}(y^+,\mathbf{y})\,\big[V_-[A](y^+,\infty,\mathbf{y})-\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big]_{n_{2'}n_2} \tag{2.97$'$}$$

Diese Amplituden $\mathcal{M}^r_{i'i}$ sind Funktionale im Gluon-Eichfeld A genau über $V_\pm$, vgl. die Gln. (2.95), (2.95$'$) und (2.96), (2.96$'$). Aufgrund des Verhaltens unter Ladungskonjugation $\mathcal{C}$ zum einen des Eichfelds $A^{\mathcal{C}}\equiv -A^*$ und zum anderen dieser Amplituden, vgl. Gl. (2.83$'$) und (2.87), ist für Antiquarks genau $V_\pm[A^{\mathcal{C}}\equiv -A^*]\equiv V_\pm^*[A]$ zu nehmen; es folgt

$$\bar{\mathcal{M}}^r_{\bar{1}'\bar{1}}[A] \;=\; \mathrm{i}\,\delta_{\bar{s}_{1'}\bar{s}_1}\int d_{\bar{1}'\bar{1}}(\bar{x}^-,\bar{\mathbf{x}})\,\big[V_+^*[A](\infty,\bar{x}^-,\bar{\mathbf{x}})-\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big]_{\bar{n}_{1'}\bar{n}_1} \tag{2.98}$$

$$\bar{\mathcal{M}}^r_{\bar{2}'\bar{2}}[A] \;=\; \mathrm{i}\,\delta_{\bar{s}_{2'}\bar{s}_2}\int d_{\bar{2}'\bar{2}}(\bar{y}^+,\bar{\mathbf{y}})\,\big[V_-^*[A](\bar{y}^+,\infty,\bar{\mathbf{y}})-\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big]_{\bar{n}_{2'}\bar{n}_2} \tag{2.98$'$}$$

unter Definition der Integrationsmaße

$$d_{1'1}(x^-,\mathbf{x}) \tag{2.99}$$
$$\equiv\; 2\sqrt{p_{1'}^+p_1^+}\;\; g_{+-}\,dx^-d^2\mathbf{x}\;\;\exp\mathrm{i}\big\{g_{+-}(p_{1'}^+-p_1^+)x^- -(\mathbf{p}_{1'}-\mathbf{p}_1)\cdot\mathbf{x}\big\}$$

$$d_{2'2}(y^+,\mathbf{y}) \tag{2.99$'$}$$
$$\equiv\; 2\sqrt{p_{2'}^-p_2^-}\;\; g_{+-}\,dy^+d^2\mathbf{y}\;\;\exp\mathrm{i}\big\{g_{+-}(p_{2'}^--p_2^-)y^+ -(\mathbf{p}_{2'}-\mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{y}\big\}$$

[2.13] unter Vernachlässigung der Terme mit δm im Limes $s\to\infty$

und

$$d_{\bar{1}'\bar{1}}(\bar{x}^-,\bar{\mathbf{x}}) \tag{2.100}$$
$$\equiv\ 2\sqrt{\bar{p}^+_{1'}\bar{p}^+_1}\ \ g_{+-}\,d\bar{x}^-d^2\bar{\mathbf{x}}\ \ \exp\mathrm{i}\{g_{+-}(\bar{p}^+_{1'}-\bar{p}^+_1)\bar{x}^- - (\bar{\mathbf{p}}_{1'}-\bar{\mathbf{p}}_1)\cdot\bar{\mathbf{x}}\}$$
$$d_{\bar{2}'\bar{2}}(\bar{y}^+,\bar{\mathbf{y}}) \tag{2.100'}$$
$$\equiv\ 2\sqrt{\bar{p}^-_{2'}\bar{p}^-_2}\ \ g_{+-}\,d\bar{y}^+d^2\bar{\mathbf{y}}\ \ \exp\mathrm{i}\{g_{+-}(\bar{p}^-_{2'}-\bar{p}^-_2)\bar{y}^+ - (\bar{\mathbf{p}}_{2'}-\bar{\mathbf{p}}_2)\cdot\bar{\mathbf{y}}\}$$

mit Fourier-Transformation der „kleinen" longitudinalen und der transversalen Komponenten durch die Ausdrücke nach den Quadratwurzeln und mit $g_{+-}=(2\alpha^2)^{-1}=(-\det\mathbb{L})^{-1}$ nach Definition der Lichtkegelkoordinaten, vgl. Gl. (2.1) und Anhang A.1.2.

Im Limes $s\to\infty$ gilt Helizitätserhaltung im s-Kanal. Dies ist Konsequenz dessen, daß die führenden Spinor-Produkte $\overline{u}(i')\gamma^{\bar\mu}u(i)$ und $\overline{v}(\bar{i})\gamma^{\bar\mu}v(\bar{i}')$, mit $\bar\mu\in\{+,-,1,2\}$, sind:

$$\overline{u}(1')\,\gamma^+\,u(1)\ \underset{s\to\infty}{\sim}\ \delta_{s_{1'}s_1}\,2\sqrt{p^+_{1'}p^+_1} \tag{2.101}$$
$$\overline{u}(2')\,\gamma^-\,u(2)\ \underset{s\to\infty}{\sim}\ \delta_{s_{2'}s_2}\,2\sqrt{p^-_{2'}p^-_2} \tag{2.101'}$$
$$\text{und}\qquad \overline{v}(\bar{1})\,\gamma^+\,v(\bar{1}')\ \underset{s\to\infty}{\sim}\ \delta_{\bar{s}_{1'}\bar{s}_1}\,2\sqrt{\bar{p}^+_{1'}\bar{p}^+_1} \tag{2.102}$$
$$\overline{v}(\bar{2})\,\gamma^-\,v(\bar{2}')\ \underset{s\to\infty}{\sim}\ \delta_{\bar{s}_{2'}\bar{s}_2}\,2\sqrt{\bar{p}^-_{2'}\bar{p}^-_2} \tag{2.102'}$$

unterdrückt Eichgruppenindizes, vgl. Gl. (A.48). Hieraus folgen die Kronecker-Symbole in den Spinindizes in den Gln. (2.97), (2.97′) und (2.98), (2.98′) und die Wurzelausdrücke der „großen" longitudinalen Komponenten in den Gln. (2.99), (2.99′) und (2.100), (2.100′).

Im S-Matrixelement auf Partonniveau – vgl. Gl. (2.69) – treten die Amplituden $\mathcal{M}^r_{i'i}$, $\mathcal{M}^r_{\bar{i}'\bar{i}}$ auf zusammen mit *disconnected*, das heißt nichtzusammenhängenden Termen. In Anhang C.2 stellen wir diese Terme $\delta(i',i)$, $\delta(\bar{i}',\bar{i})$ dar durch Integrale $\int d_{i'i}$, $\int d_{\bar{i}'\bar{i}}$ entsprechende den Gln. (2.99), (2.99′) beziehungsweise (2.100), (2.100′). Dies ermöglicht ihre gemeinsame Behandlung mit den Einsen $\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}$ der Eichgruppe in den Ausdrücken für $\mathcal{M}^r_{i'i}$ und $\mathcal{M}^r_{\bar{i}'\bar{i}}$ nach den Gln. (2.97), (2.97′) beziehungsweise (2.98′), (2.98′). Zusammen mit den Gln. (C.10), (C.10′) und (C.11), (C.11′) folgt für die relevanten Ausdrücke:

$$\big(\delta(1',1)-\mathrm{i}\,Z_2^{-1}\,\mathcal{M}^F_{1'1}[A]\big) \tag{2.103}$$
$$=\ \delta_{s_{1'}s_1}\int d_{1'1}(x^-,\mathbf{x})\ \ Z_2^{-1}\big(V_+[A](\infty,x^-,\mathbf{x})-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{n_{1'}n_1}$$
$$\big(\delta(2',2)-\mathrm{i}\,Z_2^{-1}\,\mathcal{M}^F_{2'2}[A]\big) \tag{2.103'}$$
$$=\ \delta_{s_{2'}s_2}\int d_{2'2}(y^+,\mathbf{y})\ \ Z_2^{-1}\big(V_-[A](y^+,\infty,\mathbf{y})-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{n_{2'}n_2}$$

und

$$\big(\delta(\bar{1}',\bar{1})-\mathrm{i}\,Z_2^{-1}\,\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{1}'\bar{1}}[A]\big) \tag{2.104}$$
$$=\ \delta_{\bar{s}_{1'}\bar{s}_1}\int d_{\bar{1}'\bar{1}}(\bar{x}^-,\bar{\mathbf{x}})\ \ Z_2^{-1}\big(V^\dagger_+[A](\infty,\bar{x}^-,\bar{\mathbf{x}})-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{\bar{n}_1\bar{n}_{1'}}$$
$$\big(\delta(\bar{2}',\bar{2})-\mathrm{i}\,Z_2^{-1}\,\bar{\mathcal{M}}^F_{\bar{2}'\bar{2}}[A]\big) \tag{2.104'}$$
$$=\ \delta_{\bar{s}_{2'}\bar{s}_2}\int d_{\bar{2}'\bar{2}}(\bar{y}^+,\bar{\mathbf{y}})\ \ Z_2^{-1}\big(V^\dagger_-[A](\bar{y}^+,\infty,\bar{\mathbf{y}})-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{\bar{n}_2\bar{n}_{2'}}$$

Dabei ist benutzt $V^*\equiv V^{\dagger t}$ in den letzten Relationen mit den Antiquark-Amplituden – vgl. die umgekehrte Reihenfolge der Eichgruppen-Indizes $\bar{n}_i$, $\bar{n}_{i'}$ – und definiert

$$\delta Z_2\ \equiv\ 1-Z_2 \tag{2.105}$$

als abkürzende Notation

Mithilfe der Relationen der Gln. (2.103), (2.103′) und (2.104), (2.104′) folgt aus Gl. (2.69) unmittelbar

$$\begin{aligned}
&\langle\, \bar q(\bar 2')\, q(2')\, \bar q(\bar 1')\, q(1'),\, \mathrm{in} \mid S \mid q(1)\, \bar q(\bar 1)\, q(2)\, \bar q(\bar 2),\, \mathrm{in}\,\rangle \\
&= \langle \big(\delta(1',1) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \mathcal{M}^F_{1'1}[A]\big)\, \big(\delta(\bar 1',\bar 1) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \bar{\mathcal{M}}^F_{\bar 1'\bar 1}[A]\big) \qquad (2.106)\\
&\quad \times \big(\delta(2',2) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \mathcal{M}^F_{2'2}[A]\big)\, \big(\delta(\bar 2',\bar 2) - \mathrm{i}\, Z_2^{-1}\, \bar{\mathcal{M}}^F_{\bar 2'\bar 2}[A]\big)\,\rangle_A \\
&= \delta_{s_{1'}s_1}\, \delta_{\bar s_{1'}\bar s_1}\, \delta_{s_{2'}s_2}\, \delta_{\bar s_{2'}\bar s_2} \qquad (2.106')\\
&\quad \times \int d_{1'1}(x^-,\mathbf{x}) \int d_{\bar 1'\bar 1}(\bar x^-,\bar{\mathbf{x}}) \int d_{2'2}(y^+,\mathbf{y}) \int d_{\bar 2'\bar 2}(\bar y^+,\bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad \times \langle\, Z_2^{-1}\big(V_+[A](\infty,x^-,\mathbf{x}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{n_{1'}n_1}\, Z_2^{-1}\big(V_+^\dagger[A](\infty,\bar x^-,\bar{\mathbf{x}}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{\bar n_1\bar n_{1'}} \\
&\qquad Z_2^{-1}\big(V_-[A](y^+,\infty,\mathbf{y}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{n_{2'}n_2}\, Z_2^{-1}\big(V_-^\dagger[A](\bar y^+,\infty,\bar{\mathbf{y}}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)_{\bar n_2\bar n_{2'}}\,\rangle_A
\end{aligned}$$

für das S-Matrixelement der Streuung auf Partonniveau.

2.3.3 Hadronniveau II. Conclusio

Wir kehren zurück auf Hadronniveau. Das volle S-Matrixelement der Hadron-Hadron-Streuung nach Gl. (2.7) wird ausgedrückt durch das S-Matrixelement des zugrundeliegenden Parton-Parton-Prozesses entsprechend Gl. (2.51). Wir rekapitulieren die mesonartigen Zustände $h^i(P_i)$ in der Form

$$|h^i(P_i)\rangle \;=\; \frac{\delta_{n_i\bar n_i}}{\sqrt{N_\mathrm{c}}} \int d\tilde\varphi^i_{s_i\bar s_i}(z_i,\mathbf{k}_i)\;\; |q_{s_i,n_i}(z_i,\mathbf{k}_i)\, \bar q_{\bar s_i,\bar n_i}(\bar z_i,\mathbf{k}_i)\rangle \qquad (2.107)$$

vgl. Gl. (2.41), mit Integrationsmaß $d\tilde\varphi^i_{s\bar s}(z,\mathbf{k})$ definiert durch:

$$d\tilde\varphi^i_{s\bar s}(z,\mathbf{k}) \;\equiv\; \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\frac{dz}{2\pi}\, \tilde\varphi^i_{s\bar s}(z,\mathbf{k}) \qquad (2.108)$$

Die Zustandvektoren $|h^i(P_i)\rangle$ nach Gl. (2.41) oder (2.107) vermitteln zwischen dem S-Matrixelement auf Hadron- und Partonniveau:

$$\begin{aligned}
&\langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\, \mathrm{in} \mid S \mid h^1(P_1)\, h^2(P_2),\, \mathrm{in}\,\rangle \qquad (2.109)\\
&= \frac{\delta_{n_1\bar n_1}}{\sqrt{N_\mathrm{c}}}\, \frac{\delta_{n_{1'}\bar n_{1'}}}{\sqrt{N_\mathrm{c}}}\, \frac{\delta_{n_2\bar n_2}}{\sqrt{N_\mathrm{c}}}\, \frac{\delta_{n_{2'}\bar n_{2'}}}{\sqrt{N_\mathrm{c}}} \\
&\quad \times \int d\tilde\varphi^{1'\dagger}_{s_{1'}\bar s_{1'}}(z_{1'},\mathbf{k}_{1'}) \int d\tilde\varphi^1_{s_1\bar s_1}(z_1,\mathbf{k}_1) \int d\tilde\varphi^{2'\dagger}_{s_{2'}\bar s_{2'}}(z_{2'},\mathbf{k}_{2'}) \int d\tilde\varphi^2_{s_2\bar s_2}(z_2,\mathbf{k}_2) \\
&\quad \times \langle\, \bar q(\bar 2')\, q(2')\, \bar q(\bar 1')\, q(1'),\, \mathrm{in} \mid S \mid q(1)\, \bar q(\bar 1)\, q(2)\, \bar q(\bar 2),\, \mathrm{in}\,\rangle
\end{aligned}$$

Eingesetzt den expliziten Ausdruck nach Gl. (2.106′), ergibt Kontraktion der Spin-Indizes die Spinsumme der Lichtkegelwellenfunktionen; Kontraktion mit den Kronecker-Symbolen bezüglich der Eich-Indizes führt auf die Spuren $\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} = 1/N_\mathrm{c}\,\mathrm{tr}$, normiert wie $\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} = 1$:

$$\begin{aligned}
&\langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\, \mathrm{in} \mid S \mid h^1(P_1)\, h^2(P_2),\, \mathrm{in}\,\rangle \qquad (2.110)\\
&\underset{s\to\infty}{\sim} \int d\tilde\varphi^{1'\dagger}_{s_{1'}\bar s_{1'}}(z_{1'},\mathbf{k}_{1'}) \int d\tilde\varphi^1_{s_1\bar s_1}(z_1,\mathbf{k}_1) \int d\tilde\varphi^{2'\dagger}_{s_{2'}\bar s_{2'}}(z_{2'},\mathbf{k}_{2'}) \int d\tilde\varphi^2_{s_2\bar s_2}(z_2,\mathbf{k}_2) \\
&\quad \times \int d_{1'1}(x^-,\mathbf{x}) \int d_{\bar 1'\bar 1}(\bar x^-,\bar{\mathbf{x}}) \int d_{2'2}(y^+,\mathbf{y}) \int d_{\bar 2'\bar 2}(\bar y^+,\bar{\mathbf{y}}) \\
&\quad \times \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[Z_2^{-1}\big(V_+[A](\infty,x^-,\mathbf{x}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\; Z_2^{-1}\big(V_+^\dagger[A](\infty,\bar x^-,\bar{\mathbf{x}}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\big] \\
&\qquad \times \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[Z_2^{-1}\big(V_-[A](y^+,\infty,\mathbf{y}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\; Z_2^{-1}\big(V_-^\dagger[A](\bar y^+,\infty,\bar{\mathbf{y}}) - \delta Z_2\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\big]\,\rangle_A
\end{aligned}$$

Der Vakuumerwartungswert der vier Wegner-Wilson-Linien und disconnected Terme hängt ab nicht von sämtlichen zwölf Komponenten der (Anti)Quark-Positionen $x, \bar{x}$ und $y, \bar{y}$. Zunächst reduziert die Translationsinvarianz des physikalischen Vakuums die Zahl unabhängiger Variablen um vier; dann können ausgeführt werden die zwei verbleibenden longitudinalen Integrationen. Konsequenz ist die Abhängigkeit von sechs transversalen Komponenten.

Wir verweisen auf Anhang C.3, in dem wir diese Reduktion explizit durchführen und identifizieren die relevanten Variablen.[2.14] Wir zitieren für das S-Matrixelement (2.110) die Darstellung (C.42), die in Anhang C.3 folgt als Resultat konsequenter Reduktion auf diese Variablen:

$$\begin{aligned}
&\langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\, \mathrm{in} \,|\, S \,|\, h^{1}(P_1)\, h^{2}(P_2),\, \mathrm{in}\,\rangle \qquad (2.111)\\
&\underset{s\to\infty}{\sim} \mathrm{i}\,(2\pi)^4\,\delta(P)\\
&\quad\times -2\mathrm{i}\,s\int d^2\mathbf{b}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}}\int d\varphi_{1',1}(z_1,\mathbf{X})\int d\varphi_{2',2}(z_2,\mathbf{Y})\\
&\quad\times\langle\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[Z_2^{-1}\big(V_+(\infty,0,\bar{z}_1\mathbf{X}+\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\,Z_2^{-1}\big(V_+^{\dagger}(\infty,0,-z_1\mathbf{X}+\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\big]\\
&\qquad\times\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[Z_2^{-1}\big(V_-(0,\infty,\bar{z}_2\mathbf{Y}-\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\,Z_2^{-1}\big(V_-^{\dagger}(0,\infty,-z_2\mathbf{Y}-\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\big]\,\rangle_A
\end{aligned}$$

und rekapitulieren im folgenden die explizit wie implizit auftretenden Größen; vgl. Anh. C.3.

Es ist definiert das Integrationsmaß, für $i=1,2$ und $(z,\mathbf{Z})$ für $(z_1,\mathbf{X})$, $(z_2,\mathbf{Y})$:

$$d\varphi_{i',i}(z,\mathbf{Z}) \;\equiv\; \frac{dz}{2\pi}\,d^2\mathbf{Z}\;\;\varphi_{s\bar{s}}^{i'\dagger}(z,\mathbf{Z})\,\varphi_{s\bar{s}}^{i}(z,\mathbf{Z}) \qquad (2.112)$$

das also gewichtet entsprechend des Überlapps $\varphi_{s\bar{s}}^{i'\dagger}\varphi_{s\bar{s}}^{i}$ – Spinsumme impliziert – der Lichtkegelwellenfunktionen; vgl. Gl. (C.41).

Es ist P der Differenzvektor zwischen ein- und auslaufendem Vierer-Impuls in der Definition von Gl. (2.20). Die Erhaltung des Gesamtimpulses in Form $\delta(P)$ ist unmittelbare Konsequenz der Translationsinvarianz des Vakuumerwartungswertes $\langle\,\cdot\,\rangle_A$, das Quadrat der invarianten Schwerpunktenergie s der Konsequenz der Kinematik.

Der Vierer-Vektor τ bezeichnet den *Gesamt-Impulsübertrag*, der verknüpft ist mit dem invarianten Impulsübertrag t nach Mandelstam, vgl. Gl. (2.19):

$$\tau \;\equiv\; P_{1'} - P_1 \qquad \text{mit} \qquad \tau^2 \;=\; t \qquad (2.113)$$

Zu τ konjugiert ist der *Impakt* b. Relevant ist seine transversale Projektion:

$$\mathbf{b} \;=\; \mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z \;=\; (z_1\,\mathbf{x}+\bar{z}_1\,\bar{\mathbf{x}}) - (z_2\,\mathbf{y}+\bar{z}_2\,\bar{\mathbf{y}}) \qquad (2.114)$$

Mit X_z, Y_z sind bezeichnet – für das „plus"- beziehungsweise „minus"-Paar – die z_i-*gewichtete Mitte* auf dem Quark-Antiquark-Abstandvektor:

$$X_z \;=\; z_1\,x \;+\; \bar{z}_1\,\bar{x} \qquad (2.115)$$

$$Y_z \;=\; z_2\,y \;+\; \bar{z}_2\,\bar{y} \qquad (2.115')$$

Die Abstandvektoren selbst sind gegeben durch die Differenzen der (Anti)Quark-Positionen:

$$X \;=\; x \;-\; \bar{x} \qquad (2.116)$$

$$Y \;=\; y \;-\; \bar{y} \qquad (2.116')$$

Der Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ der vier Wegner-Wilson-Linien und disconnected Terme in Gl. (2.111) hängt ab nur von den transversalen Projektionen der (Anti)Quark-Positionen

[2.14] Unser Ansatz für die transversalen Impulse der Quarks (Antiquarks) impliziert eine Abhängigkeit von deren Bruchteil z_i ($\bar{z}_i$) am gesamten – longitudinalen – Lichtkegelimpuls, vgl. die Gln. (2.42), (2.42′). Infolge dessen identifizieren wir als relevant Variable, die differieren von denen Nachtmanns in Ref. [148].

im Ortsraum, die gegeben sind für die „plus"-Zustände (Index 1) durch:

$$\mathbf{x} = \bar{z}_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2 + \omega \tag{2.117}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = -z_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2 + \omega \tag{2.117'}$$

für die „minus"-Zustände (Index 2) durch:

$$\mathbf{y} = \bar{z}_2 \mathbf{Y} - \mathbf{b}/2 + \omega \tag{2.118}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = -z_2 \mathbf{Y} - \mathbf{b}/2 + \omega \tag{2.118'}$$

bzgl. $\omega = (X_z + Y_z)/2 \stackrel{!}{=} 0$ vgl. Fußn. C.1. Die Abhängigkeit der transversalen Impulse der (Anti)Quarks in unserem Ansatz – vgl. die Gln. (2.42), (2.42') und Fußn. 2.14 – überträgt sich unmittelbar auf ihre transversalen Positionen $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{y}$, $\bar{\mathbf{y}}$. Dies impliziert, daß der relevante Impakt der Streuung folgt als die Differenz der z_i-abhängigen Vektoren $\mathbf{X}_z$, $\mathbf{Y}_z$: als der Verbindungsvektor nicht der *bloßen Mitten*, sondern der *z_i-gewichteten Mitten* Quark-Antiquark-Dipole. Dies genau der Unterschied zur Diskussion Nachtmanns in Ref. [148].

Unmittelbar streu-relevant ist nicht das S- sondern das T-Matrixelement. Dabei ist der S-Operator – vgl. Gl. (2.54) – verknüpft mit dem T-Operator über[2.15]

$$S = \mathbb{1} + \mathrm{i}(2\pi)^4 \, \delta(P) \; T \tag{2.119}$$

so daß folgt für das T-Matrixelement:

$$\langle h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}), \mathrm{in} \mid T \mid h^1(P_1)\, h^2(P_2), \mathrm{in} \rangle \tag{2.120}$$

$$\begin{aligned} &\underset{s \to \infty}{\sim} -2\mathrm{i}\, s \int d^2\mathbf{b}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}} \int d\varphi_{1',1}(z_1, \mathbf{X}) \int d\varphi_{2',2}(z_2, \mathbf{Y}) \\ &\quad \times \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \big[Z_2^{-1} \big(V_+(\infty, 0, \bar{z}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}/2) - \delta Z_2 \, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} \big) \, Z_2^{-1} \big(V_+^\dagger(\infty, 0, -z_1\mathbf{X} + \mathbf{b}/2) - \delta Z_2 \, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} \big) \big] \\ &\qquad \times \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \big[Z_2^{-1} \big(V_-(0, \infty, \bar{z}_2\mathbf{Y} - \mathbf{b}/2) - \delta Z_2 \, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} \big) \, Z_2^{-1} \big(V_-^\dagger(0, \infty, -z_2\mathbf{Y} - \mathbf{b}/2) - \delta Z_2 \, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} \big) \big] \\ &\qquad\quad - 1 \rangle_A \end{aligned}$$

vgl. Gl. (2.111). Die im Vakuumerwartungswert subtrahierte Eins ist unmittelbare Konsequenz des Einsoperators in Gl. (2.119).

Das T-Matrixelement nach Gl. (2.120) wird im folgenden dargestellt in Termen von Wegner-Wilson-*Loops* statt -*Linien*, also in manifest eichinvarianter Form.

Dazu betrachten wir die Renormierungskonstante Z_2 des (Anti)Quark-Spinorfelds nach Gl. (2.70), die nach Nachtmann in Ref. [146] wie folgt verknüpft ist im Limes $s \to \infty$ mit dem Vakuumerwartungswert $\langle \cdot \rangle_A$ der Spur einer einzelnen vollen[2.16] Wegner-Wilson-Linie:

$$Z_2 \underset{s \to \infty}{\sim} \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+(\infty, 0, \mathbf{0}) \rangle_A \tag{2.121}$$

vgl. die Gln. (2.95), (2.95'). Poincaréinvarianz des Vakuums der Quantenchromodynamik und/oder seine Invarianz unter Ladungskonjugation $\mathcal{C}$ führt dann unmittelbar auf

$$Z_2 \underset{s \to \infty}{\sim} \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+(\infty, 0, \bar{z}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}/2) \rangle_A \tag{2.122}$$

$$\underset{s \to \infty}{\sim} \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+^\dagger(\infty, 0, -z_1\mathbf{X} + \mathbf{b}/2) \rangle_A \tag{2.122'}$$

$$\underset{s \to \infty}{\sim} \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-(0, \infty, \bar{z}_2\mathbf{Y} - \mathbf{b}/2) \rangle_A \tag{2.122''}$$

$$\underset{s \to \infty}{\sim} \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-^\dagger(0, \infty, -z_2\mathbf{Y} - \mathbf{b}/2) \rangle_A \tag{2.122'''}$$

Die Umformungen des T-Matrixelements beziehen sich auf den Vakuumerwartungswert der

[2.15] Definition nach Ref. [114]

[2.16] im Sinne des exponentierten Integrals des Eichfeldes entlang der vollen Parton-Trajektorie

vier Wegner-Wilson-Linien und disconnected Terme; wir bezeichnen diesen kurz mit $\langle 4V\rangle_A$, vgl. die drei letzten Zeilen von Gl. (2.120), und schreiben:[2.17]

$$\begin{aligned}\langle 4V\rangle_A \;=\; \big\langle\, \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+\rangle_A^{-1}\, \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+^\dagger\rangle_A^{-1}\;\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[(V_+ - \delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}})(V_+^\dagger - \delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}})\big] \\ \times \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-\rangle_A^{-1}\, \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-^\dagger\rangle_A^{-1}\;\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[(V_- - \delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}})(V_-^\dagger - \delta Z_2\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}})\big] \;-\; 1\,\big\rangle_A\end{aligned} \tag{2.123}$$

unter Herausziehen der Konstanten Z_2 – in Form der Gln. (2.122)-(2.122‴) zur Verdeutlichung ihres Zusammenhangs mit den respektiven Wegner-Wilson-Linien – aus den Spuren.

Für große invariante Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ differiert die Renormierungskonstante des Quarkfelds Z_2 von Eins nur in Korrekturen der Ordnung $1/\sqrt{s}$:

$$Z_2 \underset{s\to\infty}{\sim} 1 \tag{2.124}$$

$$\Longrightarrow \qquad \delta Z_2 \;=\; 1 - Z_2 \underset{s\to\infty}{\sim} 0 \tag{2.124'}$$

Aufgefaßt in diesem Sinne $\delta Z_2 \equiv 0$, folgt für Gl. (2.123):

$$\begin{aligned}\langle 4V\rangle_A \;=\; \big\langle\, \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+\,\rangle_A^{-1}\, \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+^\dagger\,\rangle_A^{-1}\;\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[V_+ V_+^\dagger\big] \\ \times \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-\,\rangle_A^{-1}\, \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-^\dagger\,\rangle_A^{-1}\;\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[V_- V_-^\dagger\big] \;-\; 1\,\big\rangle_A\end{aligned} \tag{2.125}$$

indem weiterhin explizit ausgeschrieben sind die Konstanten $Z_2 \equiv 1$.

Der Übergang zu Wegner-Wilson-Loops geschieht auf Basis der folgenden Überlegung. Wir betrachten Streuung *eichinvarianter* Zustände $h^i(P_i)$. Dem trägt der Ansatz der Zustandvektoren $|h^i(P_i)\rangle$, vgl. die Gln. (2.41), (2.107), bereits Rechnung durch die Kronecker-Symbole in den Eichgruppenindizes, durch die entsprechend verknüpft ist die Colour von Quark und Antiquark des Zustands. Diese induzieren die Spuren $\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}$ im T-Matrixelement nach Gl. (2.120), vgl. die Bem. vorab Gl. (2.110). Vollständig garantiert ist Eichinvarianz aber erst durch Einführen von Schwinger-Strings: in definierter Weise orientierter Eichfeld-Konnektoren, die die Wegner-Wilson-Linien der (Anti)Quarks eines Zustands verbinden bei großen positiven und negativen Zeiten bei $x^0 = \pm T$ – in praxi mit $T \to \infty$ – und so diese überführen in *Wegner-Wilson-Loops*; vgl. die Refn. [63, 122, 148]. Formal heißt dies:[2.18]

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[V_+ V_+^\dagger\big] \;\longrightarrow\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, W'_+ \;\equiv\; W_+ \tag{2.126}$$

$$\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\big[V_- V_-^\dagger\big] \;\longrightarrow\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, W'_- \;\equiv\; W_- \tag{2.126'}$$

bzgl. der Spur $\mathrm{tr}_{\mathfrak{R}} = 1/d_{\mathfrak{R}}\mathrm{tr}$ vgl. Gl. (1.34).

In Ref. [124] zeigen wir für den Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ eines einzelnen *lichtartigen* Wegner-Wilson-Loop:

$$\langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, W'_+\rangle_A \;\equiv\; \langle W_+\rangle_A \underset{s\to\infty}{\sim} 1 \tag{2.127}$$

$$\langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, W'_-\rangle_A \;\equiv\; \langle W_-\rangle_A \underset{s\to\infty}{\sim} 1 \tag{2.127'}$$

Dies suggeriert, auf Basis von Gl. (2.124), das heißt explizit von

$$Z_2^2 \underset{s\to\infty}{\sim} \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+\,\rangle_A \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_+^\dagger\,\rangle_A \underset{s\to\infty}{\sim} 1 \tag{2.128}$$

$$Z_2^2 \underset{s\to\infty}{\sim} \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-\,\rangle_A \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\, V_-^\dagger\,\rangle_A \underset{s\to\infty}{\sim} 1 \tag{2.128'}$$

[2.17] Seien für Prägnanz der Notation im folgenden unterdrückt Argumente von Funktionalen und Funktionen.

[2.18] Unsere Konvention für den Wegner-Wilson-Loop W impliziert Bildung der Spur bezüglich der entsprechenden Darstellung $\mathfrak{R}$. Sei mit W' bezeichnet der Ausdruck *vor* Spurbildung, das heißt: $W = \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}} W' = W'_{\alpha\alpha}$ mit $W' = P_{\mathcal{C}} \exp -ig/2 \iint_{S(\mathcal{C})} d\sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, vgl. Gl. (1.38). Mit W' dem *eichinvarianten Pendant* zu V erhält die Konfrontation von Größen in Termen von Wegner-Wilson-*Loops* versus -*Linien* suggestive Gestalt.

zu identifizieren:

$$\langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} V_+ \rangle_A \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} V_+^\dagger \rangle_A = Z_2^2 \stackrel{!}{=} \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} W'_+ \rangle_A \equiv \langle W_+ \rangle_A \tag{2.129}$$

$$\langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} V_- \rangle_A \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} V_-^\dagger \rangle_A = Z_2^2 \stackrel{!}{=} \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} W'_- \rangle_A \equiv \langle W_- \rangle_A \tag{2.129'}$$

im Limes $s \to \infty$, vgl. die Gln. (2.126), (2.126′). Es sind Z_2 und Z_2^2 zu interpretieren respektive als Renormierungskonstante der Wegner-Wilson-Linien und -Loops.

Für Gl. (2.125) folgt, daß die Vakuumerwartungswerte der Spuren der einzelnen Linien – die Z_2-Fakotren – überführt werden in die Vakuumerwartungswerte der (Spuren der) respektiven Loops. Da sie identisch Eins sind, kann ferner die subtrahierte Eins, die rührt aus dem Übergang von S- zu T-Operator, symmetrisch absorbiert werden in die Spuren der Vakuumerwartungswerts beider Loops. Es folgt:

$$\langle 4V \rangle_A = \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} W'_+ \rangle_A^{-1} \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} W'_- \rangle_A^{-1} \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} [W'_+ - \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}] \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} [W'_- - \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}] \rangle_A \tag{2.130}$$

$$= \langle W_+ \rangle_A^{-1} \langle W_- \rangle_A^{-1} \langle [W_+ - 1][W_- - 1] \rangle_A \tag{2.130'}$$

Dieser Formel wesentlich zugrunde liegt die Identifizierung von Z_2^2 mit $\langle W_+ \rangle_A$, $\langle W_- \rangle_A$. Formales Argument hierfür ist die Identität beider Größen mit Eins im Limes $s \to \infty$. Argument ist ferner: Daß die T-Amplitude für Streuung eichinvarianter Wegner-Wilson-Loops W_+, W_- a priori vollständig ausdrückbar sein sollte durch die relevanten eichinvarianten Größen: das heißt genau durch diese Loops, insbesondere Z_2 durch $\langle W_+ \rangle_A$, $\langle W_- \rangle_A$. Und daß sie von äquivalenter Form sein sollte wie die T-Amplitude für Streuung von Partonen. Gl. (2.130) ist daher zu konfrontieren mit den Formeln, die Nachtmann herleitet für die Streuung zweier Partonen, etwa für zwei Quarks:

$$\langle 2V \rangle_A = \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} V_+ \rangle_A^{-1} \langle \operatorname{tr}_{\mathfrak{F}} V_- \rangle_A^{-1} \langle [V_+ - \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}]_{n_1' n_1} [V_- - \mathbb{1}_{\mathfrak{F}}]_{n_2' n_2} \rangle_A \tag{2.131}$$

$$\text{wobei} \quad T_{QQ}^{(s,t)} \underset{s \to \infty}{\sim} -2\mathrm{i}\, s \int d^2\mathbf{b}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}} \langle 2V \rangle_A \tag{2.131'}$$

vgl. Ref. [146]; für Gluonen – vgl. Ref. [148] – ist über zu gehen von der fundamentalen zur adjungierten Darstellung, das heißt von $\mathfrak{F}$ zu $\mathfrak{A}$. Wir verweisen auf die ausführliche Diskussion dieser Formel – vgl. Gl. (2.4) – in Abschnitt 2.1.

Für das T-Matrixelement nach Gl. (2.120) folgt mit Gl. (2.130′) abschließend:

$$T_{hh}^{(s,t)} \equiv \langle h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}), \text{in} \,|\, T \,|\, h^1(P_1)\, h^2(P_2), \text{in} \rangle \tag{2.132}$$

$$\underset{s \to \infty}{\sim} -2\mathrm{i}\, s \int d^2\mathbf{b}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}} \int d\varphi_{1',1}(z_1, \mathbf{X}) \int d\varphi_{2',2}(z_2, \mathbf{Y}) \times \langle W_+ \rangle_A^{-1} \langle W_- \rangle_A^{-1} \langle [W_+ - 1][W_- - 1] \rangle_A$$

mit

$$W_+ \equiv W_+(z_1, \mathbf{X}, +\mathbf{b}/2) \equiv W(\mathcal{C}_+) \tag{2.133}$$

$$W_- \equiv W_-(z_2, \mathbf{Y}, -\mathbf{b}/2) \equiv W(\mathcal{C}_-) \tag{2.133'}$$

Es ist der Wegner-Wilson-Loop W_+ bezüglich Index und Argumente zu lesen wie folgt [entsprechend W_-]: Zunächst ist W_+ der Eichfeld-Konnektor entlang der geschlossenen orientierten Rechteckkurve $\mathcal{C}_+$ von Quark- und Antiquark-Trajektorie und deren Verbindungen bei $x^0 = \pm T_+$ – also T_+ die halbe „Länge“ dieser Trajektorien im Sinne der Eigenzeit der Propagation. Longitudinal besitzt $\mathcal{C}_+$ nur eine x^+-Komponente: liegt *exakt* in der durch $x^- \equiv 0$ charakterisierten Lichtkegel-Hyperfläche.[2.19] Transversal sind die $\mathcal{C}_+$ konstituierenden (Anti)Quarks separiert durch den Vektor $\mathbf{X}$, der zeigt vom Antiquark zum Quark,

[2.19] Konsequenz dessen, daß sich die Herleitung de facto geschieht im Limes $s \to \infty$

vgl. Gl. (2.116). Nach Gl. (2.42) trägt das Quark den Bruchteil z_1 am gesamten Lichtkegelimpuls des Zustands $h^1(P_1)$. Ausgehend vom Antiquark den Bruchteil z_1 in Richtung Quark, das heißt abgetragen den Vektor $z_1\mathbf{X}$, sei definiert als die „z_1-gewichtete Mitte" von Quark und Antiquark. Diese ist positioniert an der Stelle $+\mathbf{b}/2$.

Der Diskussion dieses wie der folgenden Kapitel liegt wesentlich zugrunde diese Geometrie, auf die wir noch ausführlich eingehen.

In Abschnitt 2.1 ist argumentiert, daß die Gültigkeit des T-Matrixelements auf Basis *exakt lichtartiger* Partontrajektorien verallgemeinert wird, indem diese betrachtet werden als die unphysikalischen Limites der physikalischen *nahezu lichtartigen* Trajektorien und durch diese ersetzt werden; dies impliziert für die geschlossenen Kurven der Wegner-Wilson-Loops:

$$\mathcal{C}_+ \longrightarrow \mathcal{C}_\mathfrak{p} \tag{2.134}$$

$$\mathcal{C}_- \longrightarrow \mathcal{C}_\mathfrak{m} \tag{2.134'}$$

mit $\mathcal{C}_\mathfrak{p} \to \mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_\mathfrak{m} \to \mathcal{C}_-$ im Limes $s \to \infty$, vgl. Gl. (2.2).

In Anhang D werden motiviert und definiert Koordinatenlinien $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ durch die Richtungen der physikalischen nahezu lichtartigen Weltlinien der Partonen, so daß longitudinal die der „plus"-Partonen nur eine $\mathfrak{p}$- und die der „minus"-Partonen nur eine $\mathfrak{m}$-(kontravariante) Komponente besitzt. Wir setzen im folgenden voraus den formalen wie interpretatorischen Zusammenhang dieser Koordinatenlinien, wie er ausführlich hergestellt und diskutiert wird in Anhang D.1 bis D.4. In Termen dieser Koordinaten wird die Ersetzung der Trajektorien nach Gl. (2.134) formal realisiert durch Substitution der Lorentz-Indizes

$$+ \longrightarrow \mathfrak{p} \tag{2.135}$$

$$- \longrightarrow \mathfrak{m} \tag{2.135'}$$

mit $\mathfrak{p} \to +$, $\mathfrak{m} \to -$ im Limes $s \to \infty$. In diesem Sinne geht auf Hadronniveau[2.20] das T-Matrixelement – vgl. Gl. (2.132) und (2.133), (2.133') – über in:

$$\begin{aligned} T_{hh}^{(s,t)} \;&\equiv\; \langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\, \mathrm{in} \,|\, T \,|\, h^1(P_1)\, h^2(P_2),\, \mathrm{in}\,\rangle \\ &=\; -\,2\mathrm{i}\,s \int d^2\mathbf{b}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}} \int d\varphi_{1',1}(z_1,\mathbf{X}) \int d\varphi_{2',2}(z_2,\mathbf{Y}) \\ &\qquad \times \langle W_\mathfrak{p}\rangle_A^{-1}\, \langle W_\mathfrak{m}\rangle_A^{-1}\; \langle\, [W_\mathfrak{p}-1][W_\mathfrak{m}-1]\,\rangle_A \end{aligned} \tag{2.136}$$

mit

$$W_\mathfrak{p} \;\equiv\; W_\mathfrak{p}(z_1,\mathbf{X},+\mathbf{b}/2) \;\equiv\; W(\mathcal{C}_\mathfrak{p}) \tag{2.137}$$

$$W_\mathfrak{m} \;\equiv\; W_\mathfrak{m}(z_2,\mathbf{Y},-\mathbf{b}/2) \;\equiv\; W(\mathcal{C}_\mathfrak{m}) \tag{2.137'}$$

Die Geometrie des Wegner-Wilson-Loops W_+ ist in extensio diskutiert in Anschluß an die Gln. (2.133), (2.133'). Die des Loops $W_\mathfrak{p}$ differiert dieser gegenüber genau darin [entsprechend $W_\mathfrak{m}$ gegenüber W_-], daß die longitudinalen Lorentz-Indizes zu substituieren sind entsprechend $+ \to \mathfrak{p}$, $- \to \mathfrak{m}$. Die orientierte Loop-Rechteckkurve $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$ besitzt nur eine $x^\mathfrak{p}$-Komponente: liegt *exakt* in der durch $x^\mathfrak{m} \equiv 0$ charakterisierten Hyperfläche. $W_\mathfrak{p}$, W_+ sind *gegeneinander verdreht* longitudinal in der x^0x^3-Ebene und *identisch* transversal.

Die Auswertung der T-Amplitude geschieht mit Methoden der Differemtialgeometrie auf (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten und ist formal identisch auf Basis der Kurven $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{C}_\mathfrak{m}$ und deren Limites $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_-$ für $s \to \infty$ – Gl. (2.136) versus (2.132): Die longitudinale Dynamik ist vollständig subsumiert durch longitudinale Komponenten des metrischen Tensors

[2.20] Bzgl. des Übergangs auf Partonniveau sei verwiesen auf Gl. (2.5) gegenüber (2.4).

der respektiven „natürlichen" Koordinatenlinien – $\mu \in \{+,-,1,2\}$ versus $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$. Diskrepanz besteht daher genau darin, daß die Außerdiagonalelemente g_{+-}, g_{-+} des einen metrischen Tensors zu substituieren sind durch die Elemente $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}$, $g_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}$ des anderen und daß die Diagonalelemente g_{++}, g_{--} identisch verschwinden, während die Elemente $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$, $g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}$ für endliche Werte von s ungleich Null sind und zusätzliche nichtverschwindende Terme generieren. Die unabhängigen Elemente $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$, $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}$ hängen, definiert über die Richtungen der Weltlinien der Partonen, nichttrivial ab von deren invarianter Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$. Folglich differiert die s-Abhängigkeit der „nahezu lichtartigen" T-Amplitude von der rein kinematischen Abhängigkeit proportional zu s der „exakt lichtartigen" T-Amplitude.

2.4 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Auswertung

Wir betrachten die T-Amplitude für die Streuung der hadronischen Zustände $h^1(P_1)$, $h^2(P_2)$ in $h^{1'}(P_{1'})$, $h^{2'}(P_{2'})$ nach Gl. (2.136). Sei durch

$$T_{hh}^{(s,t)} \equiv \langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\, \mathrm{in} \,|\, T \,|\, h^1(P_1)\, h^2(P_2),\, \mathrm{in}\,\rangle \tag{2.138}$$
$$= \int d^2\mathbf{b}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}} \int d\varphi_{1',1}(z_1,\mathbf{X}) \int d\varphi_{2',2}(z_2,\mathbf{Y})\;\; \tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathbf{b})}(z_1,\mathbf{X};z_2,\mathbf{Y};\mathbf{b})$$

definiert, vgl. Fußn. 2.17:

$$\tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathbf{b})} = -2\mathrm{i}\,s\;\langle 4V\rangle_A \tag{2.139}$$
$$= -2\mathrm{i}\,s\;\langle W_{\mathfrak{p}}\rangle_A^{-1}\,\langle W_{\mathfrak{m}}\rangle_A^{-1}\;\langle\,[W_{\mathfrak{p}}-1][W_{\mathfrak{m}}-1]\,\rangle_A \tag{2.139'}$$

vgl. Gl. (2.130′). Wir rekapitulieren, daß die Notation $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ bereits impliziert normierte Spurbildung $\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} = 1/d_{\mathfrak{F}}\,\mathrm{tr}$ bezüglich der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$ der Loops.

Die Funktion $\tilde{T}_{\ell\ell} \equiv \tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathbf{b})}$ ist zu interpretieren als die T-Amplitude der zugrundeliegenden Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ „bezüglich des transversalen Stoßparameters $\mathbf{b}$", das heißt der bezüglich τ Fourier-transformierten T-Amplitude. – Der Vierer-Impulstransfer τ ist transversal bis auf Korrekturen $\propto s^{-2}$, die Mandelstam-Variable daher für großes s approximativ gegeben durch $t = \tau^2 \cong \tau^2$; vgl. unten die Gln. (3.6), (3.6′). Wir halten fest, daß gilt bezüglich der *Energiedimension*, $[E] = +1$: $[T_{hh}^{(s,t)}] = 0$, folglich $[\tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathbf{b})}] = +2$.

Die Amplitude $\tilde{T}_{\ell\ell}$ ist neben den Lichtkegelwellenfunktionen die eigentliche streu-relevante Größe. Sie ist hergeleitet in nichtperturbativ determinierter Quantenchromodynamik: für kleinen invarianten Impulsübertrag, etwa $-t < 1\ \mathrm{GeV}^2$, sie wird im folgenden ausgewertet im Rahmen des MSV und in der resultierenden Form MSV-spezifisch.

Die Streuung wird nach Gl. (2.139′) determiniert durch die Korrelation $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ – über die nichtperturbativen Fluktuation des Vakuum-Eichfelds A – normiert mit den inversen Vakuumerwartungswerten der einzelnen Loops. Die Loops selbst sind vollständig bestimmt als Funktionale von Flächen $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}})$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}})$, für $\imath = \mathfrak{p},\mathfrak{m}$:

$$W_\imath \equiv W(\mathcal{C}_\imath) \equiv W(\mathcal{S}_\imath) \tag{2.140}$$
$$\text{mit} \qquad \partial\mathcal{S}_\imath \equiv \mathcal{C}_\imath \qquad \mathcal{S}_\imath \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath) \tag{2.140'}$$

explizit, mit $\tilde{\mu},\tilde{\nu} \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$:[2.21]

$$W_\imath = \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}_\imath}\; P_{\tilde{\mathcal{C}}_\imath}\;\exp\,-\frac{\mathrm{i}\,g}{2}\iint_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath)} d\sigma_\imath^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_\imath')\; F_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_\imath';x_0,\mathcal{C}_{x_0\tilde{x}_\imath'}) \tag{2.141}$$

[2.21] Die Auswertung der Funktionen $\chi_{\imath\jmath}$ in den Abschnitten 2.4.3 und 2.4.4 geschieht – zwar größtenteils nur argumentativ – durch Integration über Mannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten verschiedener Dimension; sei dies im folgenden suggestiv verdeutlicht durch Integrationszeichen in entsprechender Zahl.

mit $\Re_\imath$ der Darstellung von $W_\imath$, die in praxi zu identifizieren ist mit der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$ der (Anti)Quarks die die hadronischen Zustände konstituieren.

Die Darstellung der Wegner-Wilson-Loops nach Gl. (2.141) impliziert bereits den Übergang mithilfe des Nichtabelschen Stokes'schen Satzes von der Kurve $\mathcal{C}_\imath$ zu der Fläche $\mathcal{S}_\imath$. Diese ist frei wählbar innerhalb der zwei Forderungen: Daß $\mathcal{S}_\imath$ berandet ist durch die orientierte Kurve $\mathcal{C}_\imath$. Und daß $\mathcal{S}_\imath$ infinitesimal plakettiert ist durch die Deformation $\tilde{\mathcal{C}}_\imath$ von $\mathcal{C}_\imath$.[2.22]

Die paralleltransportierte Feldstärke $F_{\mu\nu}(\tilde{x}'_\imath; x_0, \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}'_\imath})$ bezüglich Referenzpunkt x_0 – wir rekapitulieren – ist definiert als die konventionelle Feldstärke am Weltpunkt $\tilde{x}'_\imath$, deren Eichgehalt paralleltransportiert ist an x_0. Dies geschieht mithilfe von Konnektoren entlang der Kurve $\mathcal{C}_{x_0\tilde{x}'_\imath}$ und ihrer Inversen $\mathcal{C}_{\tilde{x}'_\imath x_0} \equiv \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}'^{-1}_\imath}$ in der Weise, daß die paralleltransformierte Feldstärke bezüglich Eichtransformationen transformiert mit $U(x_0)$ wie eine Größe, angeheftet an der Raumzeit im Punkt x_0. Vgl. Gl. (1.21).

Die so zu lesende paralleltransportierte Feldstärke ist nach Gl. (2.141) bezüglich $\tilde{x}'_\imath$ zu integrieren über die Fläche $S_\imath \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath)$. Diese Integration schließt ein Pfadordnung $P_{\tilde{\mathcal{C}}_\imath}$ entlang der Deformation $\tilde{\mathcal{C}}_\imath$ der Kurve $\mathcal{C}_\imath$. Explizit ist diese Deformation $\tilde{\mathcal{C}}_\imath$ gegeben als die Verkettung von Kurven $\mathcal{C}_{x_0\tilde{x}'_\imath}$ und deren Inversen $\mathcal{C}_{\tilde{x}'_\imath x_0} \equiv \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}'^{-1}_\imath}$ bezüglich infinitesimal benachbarter Weltpunkten $\tilde{x}'_\imath = \tilde{x}'_{\imath 1}, \tilde{x}'_{\imath 2}, \tilde{x}'_{\imath 3}, \ldots$, die repräsentieren die zu durchlaufende – die Fläche $\mathcal{S}_\imath$ plakettierende – Deformation $\tilde{\mathcal{C}}_\imath$; vgl. Abschn. 1.2.2, zur Illustration Abb. 1.1.

2.4.1 Identifizierung von $\tilde{\chi}_{\imath\jmath} = (1-\varkappa)\,\tilde{\chi}^{NC}_{\imath\jmath} + \varkappa\,\tilde{\chi}^{C}_{\imath\jmath}$, $\imath,\jmath \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$

Seien die Flächen $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$ fest gewählt im Sinne der zu fordernden Einschränkungen. Wir setzen die Wegner-Wilson-Loops $W_\mathfrak{p} \equiv W(\mathcal{S}_\mathfrak{p})$, $W_\mathfrak{m} \equiv W(\mathcal{S}_\mathfrak{p})$ in der Darstellung nach Gl. (2.141) ein in die Amplitude $\tilde{T}_{\ell\ell} \equiv \tilde{T}^{(s,\mathrm{b})}_{\ell\ell}$ nach Gl. (2.139) und werten diese aus wie folgt.

Die Loop-Exponentiale werden entwickelt bis zum ersten nichtverschwindenden Term und die Reihen danach abgebrochen. Aufgrund der Subtraktion der Einsen und der Spurfreiheit der Generatoren $T^a_{\Re_\imath}$[2.23], $a = 1, 2, \ldots, d_{SU(N_\mathrm{c})}$, mit $d_{SU(N_\mathrm{c})} \equiv N_\mathrm{c}^2 - 1$ der Dimension der $SU(N_\mathrm{c})$, verschwinden identisch der erste und zweite Term der Entwicklung. Es resultiert der Vakuumerwartungswert von vier paralleltransportierten Feldstärken $F_{\mu\nu}(\tilde{x}_\imath; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_\imath})$, die je zwei stammen von $W_\mathfrak{p}$ und $W_\mathfrak{m}$ und durchlaufen respektive auf $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ und $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$.

Es wird gemacht Annahme (2') des MSV – vgl. Seite 42 – das heißt angenommen, ein Gauß'scher stochastischer Prozeß liege zugrunde der nichtperturbativen Fluktuation des Vakuum-Eichfelds A in der Bildung des Vakuumerwartungswerts $\langle\cdot\rangle_A$. Dem approximativ äquivalent – vgl. die Diskussion dort – kann angenommen werden Faktorisierung der Vakuumerwartungswerte $\langle P\, g^n F_{\mu_1\nu_1 a_1}(x_1; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_1}) \cdots F_{\mu_n\nu_n a_n}(x_n; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_n})\rangle_A$ für gerade n in Summen von $n/2$ Faktoren $\langle P\, g^2 F_{\mu_1\nu_1 a_1}(x_1; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_1}) F_{\mu_2\nu_2 a_2}(x_2; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_2})\rangle_A$, Vakuumerwartungswerte einer ungeraden Zahl paralleltransportierte Feldstärketensoren verschwinden identisch; vgl. Gl. (1.86). Für vier Feldstärken schreibt sich diese Faktorisierung explizit:

$$\langle 1,2,3,4\rangle_A \;=\; \langle 1,2\rangle_A\,\langle 3,4\rangle_A \;+\; \langle 1,3\rangle_A\,\langle 2,4\rangle_A \;+\; \langle 1,4\rangle_A\,\langle 2,3\rangle_A \tag{2.142}$$

$$\text{mit} \qquad \langle i_1, \ldots i_n\rangle_A \;\equiv\; \langle P\, g^n F^{(i_1)} \cdots F^{(i_n)}\rangle_A$$

$$F^{(i)} \;\equiv\; F_{\mu_i\nu_i a_i}(x_i; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x_i})$$

vgl. Gl. (1.87); insbes. die abweichende Definition von $F^{(i)}$ als a_i-*Matrixelement* hier.

[2.22] In Zusammenhang mit dem Nichtabelschen Stokes'schen Satz wird in Abschn. 1.2.2 darüberhinaus gefordert, daß der Referenzpunkt x_0, der induziert wird durch den zwingenden Übergang zu *paralleltransportierten* Feldstärken, zu fordern ist als Element der respektiven Fläche. Diese Forderung ist nicht wirklich notwendig, da der Colour-Gehalt der Feldstärken o.E.d.A. von x_0 an einen belibigen anderen (Referenz)Punkt x'_0 weiter paralleltransportiert werden kann; vgl. insbes. Abb. 1.1 auf Seite 29.

[2.23] Bzgl. der Darstellung $\Re_\imath$ des Loops $W_\imath$ vgl. die Anmerkung in Anschluß an Gl. (2.141).

Der Vier-Feldstärken-Vakuumerwartungswert zerfällt gemäß dieser Relation in die Summe dreier Terme von je dem Produkt zweier Zwei-Feldstärken-Vakuumerwartungswerten. Seien o.E.d.A. die Indizes 1,2 bezogen auf den „$\mathfrak{p}$"-, die Indizes 3,4 auf den „$\mathfrak{m}$"-Loop, die Indizes der Raumzeit-Argumente bezogen auf die Koordinatenlinien $\mu \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. Dann korreliert der erste Term in Gl. (2.142) je zwei Feldstärken auf der „$\mathfrak{p}$"-Fläche $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ und je zwei auf der „$\mathfrak{m}$"-Fläche $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$; die zwei verbleibenden Terme korrelieren in beiden Faktoren je eine Feldstärke auf $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ mit einer auf $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$. Für $\tilde{T}_{\mathcal{U}} \equiv \tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ nach Gl. (2.139′) folgt:[2.24]

$$\tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; -2\mathrm{i}\,s\;\frac{n_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}\; n_{\mathfrak{R}_\mathfrak{m}}}{(2!)^2\; d_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}\; d_{\mathfrak{R}_\mathfrak{m}}} \cdot \langle W_\mathfrak{p} \rangle_A^{-1}\; \langle W_\mathfrak{m} \rangle_A^{-1} \left[\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\; \chi_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;+\; \frac{2}{d_{SU(N_\mathrm{c})}}\; \chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}{}^2 \right] \tag{2.143}$$

Die Wegner-Wilson-Loops sind Konsequenz von (Anti)Quark-Konnektoren; ihre Darstellungen sind daher zu identifizieren mit der fundamentalen Darstellung: $R_\mathfrak{p} \equiv R_\mathfrak{m} \equiv \mathfrak{F}$; für diese gilt $n_\mathfrak{F} \equiv 1/2$, $d_\mathfrak{F} \equiv N_\mathrm{c}$ für Normierung und Dimension, so daß folgt mit $d_{SU(N_\mathrm{c})} = N_\mathrm{c}^2 - 1$:

$$\tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; -2\mathrm{i}\,s\;\frac{1}{(4N_\mathrm{c})^2} \cdot \langle W_\mathfrak{p} \rangle_A^{-1}\; \langle W_\mathfrak{m} \rangle_A^{-1} \left[\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\; \chi_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;+\; \frac{2}{N_\mathrm{c}^2 - 1}\; \chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}{}^2 \right] \tag{2.143′}$$

Die Korrelation der paralleltransportierten Feldstärken $F_{\mu\nu a}(\tilde{x}_\imath'; x_0, \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}_\imath'})$, $F_{\rho\sigma a}(\tilde{x}_\jmath'; x_0, \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}_\jmath'})$, die respektive integriert werden über die Flächen $\mathcal{S}_\imath \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath)$, $\mathcal{S}_\jmath \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\jmath)$, mit $\imath, \jmath \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$, ist dabei subsumiert in den wie folgt definierten Funktionen $\chi_{\imath\jmath}$ mit $\imath, \jmath \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$:[2.25]

$$\chi_{\imath\jmath} \;=\; \Big(-\frac{\mathrm{i}\,g}{2}\Big)^2 \iint_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath)} d\sigma_\imath^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_\imath') \iint_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\jmath)} d\sigma_\jmath^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}(\tilde{x}_\jmath') \times \left\langle\, F_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}a}(\tilde{x}_\imath'; x_0, \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}_\imath'})\, F_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}a}(\tilde{x}_\jmath'; x_0, \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}_\jmath'}) \,\right\rangle_A \tag{2.144}$$

auf die ferner zurückgeführt werden die Vakuumerwartungswerte der einzelnen Wegner-Wilson-Loops $\langle W_\mathfrak{p} \rangle_A$, $\langle W_\mathfrak{m} \rangle_A$ – und die insofern die eigentlich relevanten Funktionen sind in Hinblick auf Auswertung und analytische Fortsetzung der T-Amplitude.

Als zweifaches Flächenintegral der Größe $\langle\, g^2 F_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}a}(\tilde{x}_\imath'; x_0, \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}_\imath'})\, F_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}a}(\tilde{x}_\jmath'; x_0, \mathcal{C}_{x_0\tilde{x}_\jmath'}) \,\rangle_A$ mit Energie-Dimension $+4$ sind die Funktionen $\chi_{\imath\jmath}$ dimensionslos. Wir gehen von diesen über zu den Funktionen $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$ durch Definition:

$$\chi_{\imath\jmath} \;=:\; -\mathrm{i}\;\langle g^2 F F \rangle_A a^4 \;\cdot\; \tilde{\chi}_{\imath\jmath} \qquad \imath, \jmath \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\} \tag{2.145}$$

Herausziehen des Faktors $-\mathrm{i}$ garantiert, daß die Funktionen $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$ positiv reell sind für *maximale Korrelation*: $0 = \tilde{x}'^2 = (\tilde{x}_\mathfrak{p}' - \tilde{x}_\mathfrak{m}')^2$, vgl. unten Gl. (2.146). Herausziehen des dimensionslosen Faktors $\langle g^2 F F \rangle_A a^4$, – mit $\langle g^2 F F \rangle_A$ dem Minkowskischen Gluonkondensat und a der Korrelationslänge –, eliminiert in den Funktionen $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$ die zwei Zahlenparameter des MSV im eigentlichen Sinne.[2.26] Es gilt, mit $\imath, \jmath \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$:

$$\tilde{\chi}_{\imath\jmath} \;=\; \mathrm{i}\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)^2 \iint_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath)} d\sigma_\imath^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_\imath) \iint_{\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\jmath)} d\sigma_\jmath^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}(\tilde{x}_\jmath)\;\; D_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\,\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}(\tilde{x}) \tag{2.146}$$

unter Definition[2.27] $\qquad \tilde{x} \;\equiv\; \tilde{x}_\imath - \tilde{x}_\jmath$ (2.147)

und Reskalierung $\qquad \tilde{x}_\imath \equiv \tilde{x}_\imath'/a$ (2.147′)

Mit dieser Reskalierung sind Längen implizit $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$ gegeben durch ungestrichene Raumzeit-

[2.24] Der Vorfaktor ergibt sich wie folgt: Zwei Faktoren 1/2! folgen aus der Entwicklung der Exponentialfunktionen. Als Normierung der Spuren $\mathrm{tr}_{\mathfrak{R}_\imath} = 1/d_{\mathfrak{R}_\imath}\,\mathrm{tr}$, vgl. Gl. (1.38), folgen die Faktoren $1/d_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}$, $1/d_{\mathfrak{R}_\mathfrak{m}}$. Spurbildung tr mit Normierung $\mathrm{tr}\, T_{\mathfrak{R}_\imath}^a\, T_{\mathfrak{R}_\imath}^b = n_{\mathfrak{R}_\imath}\,\delta^{ab}$ der Generatoren ergibt die Faktoren $n_{\mathfrak{R}_\mathfrak{p}}$, $n_{\mathfrak{R}_\mathfrak{m}}$. Die Eichgruppen-Faktoren aus Gl. (1.64′) kontrahieren wie $\delta_{aa}/d_{SU(N_\mathrm{c})} \cdot \delta_{bb}/d_{SU(N_\mathrm{c})}$ bzw. $\delta_{ab}/d_{SU(N_\mathrm{c})} \cdot \delta_{ab}/d_{SU(N_\mathrm{c})}$.

[2.25] Die Operatoren $P_{\tilde{\mathcal{C}}_\imath}$, $P_{\tilde{\mathcal{C}}_\jmath}$ für Flächenordnung – vgl. Gl. (2.141) – sind redundant für zwei Feldstärken unter Spurbildung und daher weggelassen im folgenden.

[2.26] Die Unabhänggikeit von diesen Parametern ist unmittelbar klar für $\langle g^2 F F \rangle_A$; sie wird offensichtlich für a nach Skalierung der Vierer-Vektoren $\tilde{x}_\imath'$ in Einheiten der Korrelationslänge im Sinne von Gl. (2.147′).

[2.27] Der Zusammenhang klar stellt, ob – vgl. Gl. (2.147) vs. (2.117) – $\mathbf{x}$ gleich $\mathbf{x}_\imath - \mathbf{x}_\jmath$, dem Differenzvektor

Argumente in „Einheiten von a“. Vgl. die Gln. (1.65)-(1.68).

Im Sinne der Tensorstrukturen $t^{C}_{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\rho\tilde\sigma}$ und $t^{NC}_{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\rho\tilde\sigma}$ des Korrelationstensors $\tilde D \equiv \left(D_{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\rho\tilde\sigma}\right)$ sind unmittelbar definiert durch

$$\tilde\chi_{\imath\jmath} \;=\; \varkappa\,\tilde\chi^{C}_{\imath\jmath} \;+\; (1-\varkappa)\,\tilde\chi^{NC}_{\imath\jmath} \qquad \imath,\jmath \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\} \tag{2.148}$$

die konfinierende Funktion $\tilde\chi^{C}_{\imath\jmath}$ und die nicht-konfinierende Funktion $\tilde\chi^{NC}_{\imath\jmath}$.

Im folgenden Abschnitt 2.4.2 wird getroffen eine Wahl der Flächen $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}$ und angegeben explizite Parametrisierungen, auf Basis derer in den Abschnitten 2.4.3, 2.4.4 ausgewertet werden die Funktionen $\tilde\chi^{C}_{\imath\jmath}$, $\tilde\chi^{NC}_{\imath\jmath}$. Wesentliches Resultat ist die Faktorisierung der Funktion $\tilde\chi_{\imath\jmath}$ in einen rein longitudinal bestimmten Anteil $-\det\mathbb{SL}\,g_{\imath\jmath}$ und ein – mit dem Großbuchstaben bezeichnetes – Funktional $\tilde X_{\imath\jmath}$, das bestimmt ist durch die Geometrie in der x^1x^2-Transversalebene, die wiederum effektiv abhängt von den z_i, das heißt von Größen longitudinalen Ursprungs:[2.28]

$$\tilde\chi_{\imath\jmath} \;=\; -\det\mathbb{SL}\;g_{\imath\jmath}\;\cdot\;\tilde X_{\imath\jmath} \qquad \imath,\jmath \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\} \tag{2.149}$$

In Anhang D.4 wird hergeleitet $g_{\mathfrak{pp}} = \varrho^2$, $g_{\mathfrak{pm}} = \varrho^2\cosh\psi$ für die unabhängigen Komponenten des metrischen Tensors und $\varrho^2 = (-\det\mathbb{SL}\cdot\sinh\psi)^{-1}$ für die Normierung ϱ der Koordinaten in Richtung der Teilchen-Weltlinien, vgl. die Gln. (D.68), (D.68′) bzw. (D.78). Es folgt:

$$-\det\mathbb{SL}\;g_{\mathfrak{pp}} \;=\; \sinh^{-1}\psi \tag{2.150}$$

$$-\det\mathbb{SL}\;g_{\mathfrak{pm}} \;=\; \tanh^{-1}\psi \;=\; 1 \;+\; \mathrm{e}^{-\psi}\,\sinh^{-1}\psi \tag{2.150′}$$

die letzte Identität mit $\cosh\psi = \sinh\psi + \mathrm{e}^{-\psi}$.

Die Faktoren $-\det\mathbb{SL}\,g_{\imath\jmath}$ hängen ab vom Quadrat s der invarianten Schwerpunktenergie über $\psi = \psi_{\mathfrak{p}} + \psi_{\mathfrak{m}}$, mit $\beta_{\mathfrak{p}} = \tanh\psi_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}} = \tanh\psi_{\mathfrak{m}}$ den Beta-Parametern der aktiven Boosts der Teilchen head-to-head. Die Normierung ϱ der Koordinaten $\tilde\mu \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ ist bestimmt durch die Forderung von *Längentreue* der Abbildung, die vermittelt mit den Lichtkegelkoordinaten $\bar\mu \in \{+,-,1,2\}$, vgl. Anh. D.4 auf Seite 254. Dies heißt formal $\det\mathbb{S} \equiv 1$ und impliziert im Limes $s\to\infty \Leftrightarrow \psi\to\infty$ unmittelbar $g_{\mathfrak{pm}} \to g_{+-}$ [und $g_{\mathfrak{pp}} \to g_{++} \equiv 0$]; ergo gilt: $-\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{pm}} \equiv -\det\mathbb{L}\,g_{\mathfrak{pm}} \to -\det\mathbb{L}\,g_{+-} \equiv 1$ [und $-\det\mathbb{SL}g_{\mathfrak{pp}} \to -\det\mathbb{L}g_{++} \equiv 0$] – *unabhängig* von der Normierung α der Lichtkegelkoordinaten, von der abhängt g_{+-} und $-\det\mathbb{L}$.[2.29]

Explizit sind die Funktionale $\tilde X_{\imath\jmath}$ Integrale der paralleltransportierten Feldstärken über $\mathcal{S}^{\perp}_{\imath}$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\jmath}$, das heißt über die Projektionen in den Transversalraum der initialen Flächen $\mathcal{S}_{\imath}$, $\mathcal{S}_{\jmath}$. Mithilfe des Stokes'schen Satzes können die so verbleibenden zwei Integrale reduziert werden: Für die respektive konfinierende Funktion $\tilde\chi^{C}_{\imath\jmath}$ ein Integral, so daß korreliert sind die Endpunkte von $\mathcal{S}^{\perp}_{\imath}$ mit jedem Punkt von $\mathcal{S}^{\perp}_{\jmath}$ – und umgekehrt. Für die respektive nicht-konfinierende Funktion $\tilde\chi^{NC}_{\imath\jmath}$ beide Integrale, so daß korreliert sind die Endpunkte von $\mathcal{S}^{\perp}_{\imath}$ mit denen von $\mathcal{S}^{\perp}_{\jmath}$. Die Wechselwirkung resultiert als *nichtlokal* beziehungsweise *lokal*.

Bezüglich der funktionalen Abhänggikeit der Größen mit Indizes $\imath,\jmath,\ldots \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$ sei festgehalten, daß diese im Sinne

$$\mathfrak{p} \;\leftrightarrow\; \{z_1,\,\mathbf{X},\,+\mathbf{b}/2\} \qquad \text{und/oder} \qquad \mathfrak{m} \;\leftrightarrow\; \{z_2,\,\mathbf{Y},\,-\mathbf{b}/2\} \tag{2.151}$$

abhängen von den hierdurch definierten „$\mathfrak{p}$“- und „$\mathfrak{m}$“-Variablensätzen. Dies folgt aus der Abhänggikeit der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$, vgl. die Gln. (2.137), (2.137′).

---

der Feldstärken auf $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\imath})$, $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\jmath})$, oder gleich $\bar z_1\,\mathbf{X} + \mathbf{b}/2 + \omega$, der Position des mit $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}})$ assoziierten Quarks.

[2.28] Dies ist insofern a priori klar, als Hochenergiestreuung beschreibbar sein sollte durch eine *effektive Quantenfeldtheorie der Transversalebene*; vgl. etwa Verlinde, Verlinde in Ref. [221].

[2.29] In Kapitel 1 auf Seite 42 ist diskutiert die Entwicklung des Vakuumerwartungswerts $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ zweier Wegner-Wilson-Loops in „Produkt-Kumulanten“; vgl. Berger, Nachtmann in Ref. [21]. Die dort angesprochene Funktion χ ist genau χ_{+-}, das heißt $\chi_{\mathfrak{pm}}$ im Limes $s\to\infty$. Aus Gl. (2.143) resultiert in der Tat $\tilde T_{\mathfrak{U}} \propto \chi^2_{\mathfrak{pm}} \to \chi^2_{+-}$ im Limes $s\to\infty$, da Gl. (2.149) impliziert $\chi_{\mathfrak{pp}} \propto g_{\mathfrak{pp}}$, $\chi_{\mathfrak{mm}} \propto g_{\mathfrak{mm}}$ und gilt $g_{\mathfrak{pp}} \to g_{++} \equiv 0$, $g_{\mathfrak{mm}} \to g_{--} \equiv 0$.

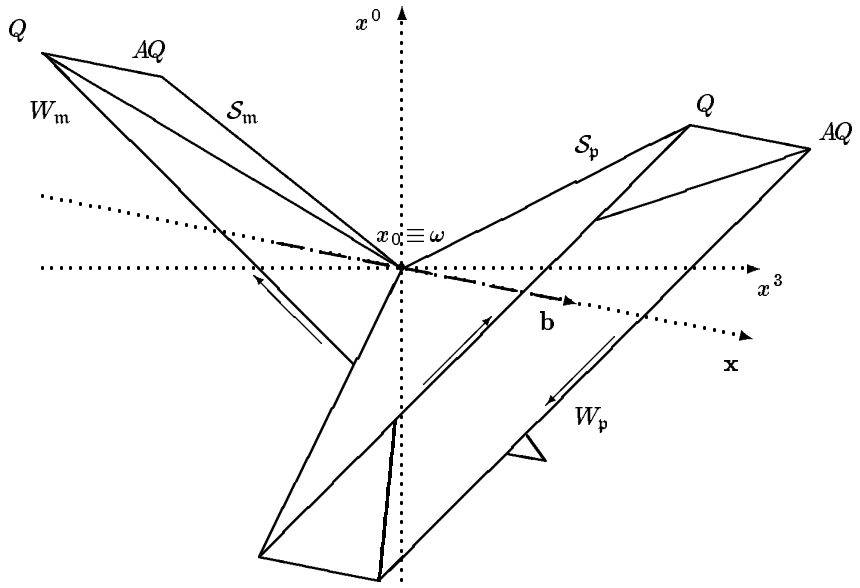


Abbildung 2.4: Raumzeit-Darstellung der Pyramiden $P_{\mathfrak{p}}$, $P_{\mathfrak{m}}$ mit Mantelflächen $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}})$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}})$ über den Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}} \equiv W(\mathcal{S}_{\mathfrak{p}})$, $W_{\mathfrak{m}} \equiv W(\mathcal{S}_{\mathfrak{m}})$. Die Integrationen der paralleltransportierten Feldstärken beziehen sich auf $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}$. Wir betonen, daß die transversalen Projektionen der Loops nicht parallel sind.

2.4.2 Explizite Raumzeit-Parametrisierung von $\mathcal{S}_\imath \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\imath)$, $\imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$

Für Definiertheit[2.30] – vgl. Abb. 2.4 – spezifizieren wir die Integrationsflächen $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}$ als die Mantelflächen (planer) Pyramiden $P_{\mathfrak{p}}$, $P_{\mathfrak{m}}$, deren Basen gegeben sind als die von den Kurven $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$ der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}} \equiv W(\mathcal{C}_{\mathfrak{p}})$, $W_{\mathfrak{m}} \equiv W(\mathcal{C}_{\mathfrak{m}})$ berandeten (planen) Rechteckflächen und deren Apex $\omega \equiv \omega^{\tilde{\mu}} \tilde{e}_{(\tilde{\mu})}$ gewählt wird identisch dem gemeinsamen Referenzpunkt x_0 – im Sinne höchster Symmetrie[2.31] als die Mitte des transversalen Impaktvektors $\mathbf{b}$.

Explizite Parametrisierungen – vgl. Abb. 2.5 – geben wir an wie folgt, wobei wir uns beschränken auf die „$\mathfrak{p}$"-Seite der Streuung: die Pyramide $P_{\mathfrak{p}}$; bzgl. $P_{\mathfrak{m}}$ vgl. die Gln. (2.170), (2.170′). Wir führen ein Parameter $s_{\mathfrak{p}}$, $\tau_{\mathfrak{p}}$, $u_{\mathfrak{p}}$, die laufen in den Intervallen

$$s_{\mathfrak{p}} : 0 \to 1 \qquad \tau_{\mathfrak{p}} : 0 \to 1 \qquad u_{\mathfrak{p}} : -T_{\mathfrak{p}}/2 \to T_{\mathfrak{p}}/2 \tag{2.152}$$

Bzgl. $T_{\mathfrak{p}}$ – der „Länge" des Loops $W_{\mathfrak{p}}$ in $x^{\mathfrak{p}}$-Richtung – vgl. Gl. (D.100′).

Die Mantelfläche $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}})$ von $P_{\mathfrak{p}}$ – mit $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}}$ der Deformation von $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, die $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ infinitesimal plakettiert – ist dann gegeben als vier (plane) Dreiecke, parametrisiert: [2.32]

$$\begin{aligned}
&\mathcal{S}_{\mathfrak{p}} \qquad\qquad (2.153)\\
&= \Big\{ \tilde{x}_{\mathfrak{p}} \equiv (x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}) \,\Big|\, \tilde{x}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{p}}) = \omega + s_{\mathfrak{p}} \big[\quad u_{\mathfrak{p}}\, \varrho^{-1}\, \tilde{e}_{(\mathfrak{p})} + \big(\qquad (1-z_1) X^i + b^i/2 \big)\, \tilde{e}_{(i)} \big] \Big\}\\
&\bigcup \Big\{ \tilde{x}_{\mathfrak{p}} \equiv (x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}) \,\Big|\, \tilde{x}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}}) = \omega + s_{\mathfrak{p}} \big[\qquad \varrho^{-1}\, \tilde{e}_{(\mathfrak{p})} + \big(([1-\tau_{\mathfrak{p}}] - z_1) X^i + b^i/2 \big)\, \tilde{e}_{(i)} \big] \Big\}\\
&\bigcup \Big\{ \tilde{x}_{\mathfrak{p}} \equiv (x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}) \,\Big|\, \tilde{x}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{p}}) = \omega + s_{\mathfrak{p}} \big[-u_{\mathfrak{p}}\, \varrho^{-1}\, \tilde{e}_{(\mathfrak{p})} + \big(\qquad (0-z_1) X^i + b^i/2 \big)\, \tilde{e}_{(i)} \big] \Big\}\\
&\bigcup \Big\{ \tilde{x}_{\mathfrak{p}} \equiv (x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}) \,\Big|\, \tilde{x}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}}) = \omega + s_{\mathfrak{p}} \big[\quad -\varrho^{-1}\, \tilde{e}_{(\mathfrak{p})} + \big(\qquad (\tau_{\mathfrak{p}} - z_1) X^i + b^i/2 \big)\, \tilde{e}_{(i)} \big] \Big\}
\end{aligned}$$

[2.30] Unserer Auswertung ist zugänglich einer allgemeineren Klasse von Flächen; vgl. die Anmerkungen dort.
[2.31] Wir kommen ausführlich zurück auf diese Wahl „im Sinne höchster Symmetrie"; vgl. Kap. 3.2.1.
[2.32] Diese repräsentieren – dem Umlaufsinn nach von oben nach unten – den Quark-, den Quark-Antiquark-, den Antiquark- und den Antiquark-Quark-Konnektor des Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$.

Parametrisierungen $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$, $V_\mathfrak{p}$ und $L_\mathfrak{p}$:

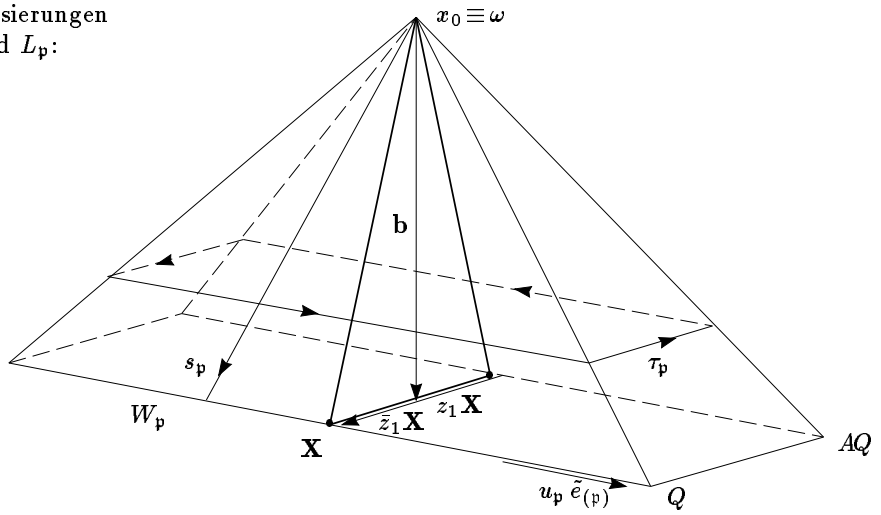


Abbildung 2.5: Raumzeit-Parametrisierung – durch Parameter $s_\mathfrak{p}$, $\tau_\mathfrak{p}$, $u_\mathfrak{p}$ – der planen Pyramide $P_\mathfrak{p}$ über dem Wegner-Wilson-Loop $W_\mathfrak{p} \equiv W(\mathcal{S}_\mathfrak{p})$. Es ist $\mathcal{S}_\mathfrak{p} \equiv \mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_\mathfrak{p})$ mit Deformation $\tilde{\mathcal{C}}_\mathfrak{p}$ von $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$ ihre Mantelfläche, $V_\mathfrak{p}$ ihr Volumen, $L_\mathfrak{p}$ ihre Grundfläche. Die Integration der paralleltransportierten Feldstärken bezieht sich zunächst auf $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$; sie reduziert sich für die konfinierende Funktion $\tilde{\chi}^C$ auf die transversale Projektion $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, für die nicht-konfinierende $\tilde{\chi}^{NC}$ auf die Endpunkte von $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$ [Schenkel des Dreiecks über $\mathbf{X}$ bzw. Punkte].

Ruhe zunächst das Quark-Antiquark-Paar „$\mathfrak{p}$“ im System mit karthesischen Koordinatenlinien $\mu \in \{0,1,2,3\}$. Unter dem aktiven Lorentz-Boost mit Geschwindigkeit $\beta_\mathfrak{p}$ in $+x^3$-Richtung transformiert die Richtung der (Anti)Quark-Weltlinien – des Loops $W_\mathfrak{p}$ – in der x^0x^3-Ebene wie $e_{(0)} \to \gamma_\mathfrak{p}\big(e_{(0)} + \beta_\mathfrak{p} e_{(3)}\big)$. Durch $\tilde{x} = x^{\tilde{\mu}}\tilde{e}_{(\tilde{\mu})}$ mit $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ sind verknüpft der Vektor $\tilde{e}_{(\mathfrak{p})} = \varrho\,\gamma_\mathfrak{p}\big(e_{(0)} + \beta_\mathfrak{p} e_{(3)}\big)$ und die kontravariante Komponente $x^\mathfrak{p}$ der Weltlinien, vgl. die Gln. (D.54), (D.55). Ihre Endpunkte [bzgl. $\tilde{e}_{(\mathfrak{p})}$] sind $\big(\zeta_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}\big) \equiv \big(\pm\,\zeta_\mathfrak{p}^\mathfrak{p}, 0, \mathbf{z}^t\big)^t$ mit $\mathbf{z} = \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}$ und $\zeta_\mathfrak{p}^\mathfrak{p} = g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}{}^{-1/2} \cdot T_\mathfrak{p}/2 = \varrho^{-1} \cdot T_\mathfrak{p}/2$, vgl. die Gln. (D.101), (D.102) – abhängig von der Normierung ϱ, die fixiert ist in Gl. (D.94′) durch Forderung von Längentreue des Zusammenhangs $\tilde{\mu} \leftrightarrow \bar{\mu}$.

Das Volumen $V_\mathfrak{p}$ ist parametrisiert analog zu $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$:

$$V_\mathfrak{p} = \Big\{ \tilde{x}_\mathfrak{p} \equiv (x_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}) \,\Big|\, \tilde{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}, \tau_\mathfrak{p}, u_\mathfrak{p}) = \omega + s_\mathfrak{p}\big[\, u_\mathfrak{p}\, \varrho^{-1}\, \tilde{e}_{(\mathfrak{p})} + \big((\tau_\mathfrak{p} - z_1)X^i + b^i/2\big)\, \tilde{e}_{(i)}\,\big] \Big\} \tag{2.154}$$

die Grundfläche $L_\mathfrak{p}$:

$$L_\mathfrak{p} = V_\mathfrak{p}\Big|_{s_\mathfrak{p} \equiv 1} = \Big\{ \tilde{x}_\mathfrak{p} \equiv (x_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}) \,\Big|\, \tilde{x}_\mathfrak{p}(\tau_\mathfrak{p}, u_\mathfrak{p}) = \omega + u_\mathfrak{p}\, \varrho^{-1}\, \tilde{e}_{(\mathfrak{p})} + \big((\tau_\mathfrak{p} - z_1)X^i + b^i/2\big)\, \tilde{e}_{(i)} \Big\} \tag{2.155}$$

Resultat der longitudinalen $u_\mathfrak{p}$-Integration ist „transversale Projektion“ von $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$, $V_\mathfrak{p}$, $L_\mathfrak{p}$ auf deren eigentlich relevanten Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, $V_\mathfrak{p}^\perp$, $L_\mathfrak{p}^\perp$, charakterisiert durch

$$\tilde{x}_\mathfrak{p}^\mathfrak{p} \equiv 0 \tag{2.156}$$

das heißt durch identisch verschwindende longitudinalen Komponente.

Für die projizierte Mantelflache $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$ – mit $\omega \equiv \omega^i \tilde{e}_{(i)} = (0, 0, \omega^1, \omega^2)^t$ – gilt explizit:[2.33]

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp = {} & \Big\{ \tilde{x}_\mathfrak{p} \equiv (x_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}) \,\Big|\, \tilde{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) = \omega + s_\mathfrak{p}\big(\ \bar{z}_1 X^i + b^i/2\big)\, \tilde{e}_{(i)} \Big\} \\ & \bigcup \Big\{ \tilde{x}_\mathfrak{p} \equiv (x_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}) \,\Big|\, \tilde{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) = \omega + s_\mathfrak{p}\big(-z_1 X^i + b^i/2\big)\, \tilde{e}_{(i)} \Big\} \end{aligned} \tag{2.157}$$

[2.33] Vgl. Gl. (2.153): den ersten und dritten Abschnitt der Parametrisierung von $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$.

Das projizierte Volumen $V_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ ist parametrisiert:

$$V_{\mathfrak{p}}^{\perp} \;=\; \Big\{ \tilde{x}_{\mathfrak{p}} \equiv (x_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}}) \Big|\; \tilde{x}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}}) = \omega + s_{\mathfrak{p}} \big((\tau_{\mathfrak{p}} - z_1) X^i + b^i/2 \big)\, \tilde{e}_{(i)} \Big\} \tag{2.158}$$

die projizierte Grundfläche $L_{\mathfrak{p}}^{\perp}$:

$$L_{\mathfrak{p}}^{\perp} \;=\; V_{\mathfrak{p}}^{\perp}\Big|_{s_{\mathfrak{p}} \equiv 1} \;=\; \Big\{ \tilde{x}_{\mathfrak{p}} \equiv (x_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}}) \Big|\; \tilde{x}_{\mathfrak{p}}(\tau_{\mathfrak{p}}) = \omega + \big((\tau_{\mathfrak{p}} - z_1) X^i + b^i/2 \big)\, \tilde{e}_{(i)} \Big\} \tag{2.159}$$

Die Parameter $s_{\mathfrak{p}}$, $\tau_{\mathfrak{p}}$, $u_{\mathfrak{p}}$ in den Gln. (2.153)-(2.155) und (2.157)-(2.159) laufen einheitlich in den Intervallen angegeben in Gl. (2.152).

Mit diesen Parametrisierungen sind gegeben explizite Flächenelemente, die wir angeben wie folgt. Für das Volumen $V_{\mathfrak{p}}$ und seine transversale Projektion $V_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ gilt – für die dualen Elemente:

$$\big[d\tilde{\sigma}_{V_{\mathfrak{p}}} \big]_{\tilde{\mu}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \;=\; \frac{1}{1!}\, \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\, \frac{\partial x^{\tilde{\nu}}}{\partial s_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial x^{\tilde{\rho}}}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial x^{\tilde{\sigma}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, ds_{\mathfrak{p}}\, d\tau_{\mathfrak{p}}\, du_{\mathfrak{p}} \tag{2.160}$$

$$= \; 2\, g_{\tilde{\mu}}{}^{\mathfrak{m}}\, \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, du_{\mathfrak{p}} \;\otimes\; \big[d\tilde{\sigma}_{V_{\mathfrak{p}}^{\perp}} \big]_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \tag{2.160'}$$

mit

$$\big[d\tilde{\sigma}_{V_{\mathfrak{p}}^{\perp}} \big]_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \;=\; \frac{1}{2!}\, \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\, \frac{\partial x^{\tilde{\rho}}}{\partial s_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial x^{\tilde{\sigma}}}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}}\, ds_{\mathfrak{p}}\, d\tau_{\mathfrak{p}} \tag{2.161}$$

und für die nicht-verschwindenden nicht dualen Elemente:

$$\big[d\sigma_{V_{\mathfrak{p}}} \big]^{\mathfrak{p}ij}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}})$$

$$= \; \frac{\partial \big(x^{\mathfrak{p}}, x^i, x^j \big)}{\partial \big(s_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{p}} \big)}\, ds_{\mathfrak{p}}\, d\tau_{\mathfrak{p}}\, du_{\mathfrak{p}} \tag{2.162}$$

$$= \; \left\{ \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial s_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial \big(x^i, x^j \big)}{\partial \big(\tau_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{p}} \big)} \;-\; \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial \big(x^i, x^j \big)}{\partial \big(s_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{p}} \big)} \;+\; \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial \big(x^i, x^j \big)}{\partial \big(s_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}} \big)} \right\} ds_{\mathfrak{p}}\, d\tau_{\mathfrak{p}}\, du_{\mathfrak{p}} \tag{2.162'}$$

Ergo

$$\big[d\sigma_{V_{\mathfrak{p}}} \big]^{\mathfrak{p}ij}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \;=\; \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, du_{\mathfrak{p}} \;\otimes\; \big[d\sigma_{V_{\mathfrak{p}}^{\perp}} \big]^{ij}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \tag{2.163}$$

$$\text{mit} \qquad \big[d\sigma_{V_{\mathfrak{p}}^{\perp}} \big]^{ij}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \;=\; \frac{\partial \big(x^i, x^j \big)}{\partial \big(s_{\mathfrak{p}}, \tau_{\mathfrak{p}} \big)}\, ds_{\mathfrak{p}}\, d\tau_{\mathfrak{p}} \tag{2.163'}$$

wegen

$$\frac{\partial \big(x^i, x^j \big)}{\partial \big(\tau_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{p}} \big)} \;\equiv\; 0 \qquad\qquad \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}} \;\equiv\; 0 \tag{2.164}$$

vgl. Gl. (2.154).

Für die Grundfläche $L_{\mathfrak{p}}$ und ihre transversale Projektion $L_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ gilt analog für die nichtverschwindenden Flächenelemente:

$$\big[d\sigma_{L_{\mathfrak{p}}} \big]^{i\mathfrak{p}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \;=\; \frac{\partial \big(x^i, x^{\mathfrak{p}} \big)}{\partial \big(\tau_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{p}} \big)}\, d\tau_{\mathfrak{p}}\, du_{\mathfrak{p}} \tag{2.165}$$

$$= \; \left\{ \frac{\partial x^i}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}} \;-\; \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial x^i}{\partial u_{\mathfrak{p}}} \right\} d\tau_{\mathfrak{p}}\, du_{\mathfrak{p}} \tag{2.165'}$$

Ergo

$$\big[d\sigma_{L_{\mathfrak{p}}} \big]^{i\mathfrak{p}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \;=\; \frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, du_{\mathfrak{p}} \;\otimes\; \big[d\sigma_{L_{\mathfrak{p}}^{\perp}} \big]^{i}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \tag{2.166}$$

$$\text{mit} \qquad \big[d\sigma_{L_{\mathfrak{p}}^{\perp}} \big]^{i}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \;=\; \frac{\partial x^i}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}}\, d\tau_{\mathfrak{p}} \tag{2.166'}$$

wegen

$$\frac{\partial x^{\mathfrak{p}}}{\partial \tau_{\mathfrak{p}}} \equiv 0 \qquad \frac{\partial x^{i}}{\partial u_{\mathfrak{p}}} \equiv 0 \tag{2.167}$$

vgl. Gl. (2.155).

Für die Auswertung in den folgenden Abschnitten werden diese Darstellungen nicht wirklich explizit benötigt, sondern allein die *Faktorisierung* des $V_{\mathfrak{p}}$- und $L_{\mathfrak{p}}$-Elements bezüglich longitudinalen und transversalen Komponenten, vgl. Gl. (2.163) bzw. (2.166). Um diese zu garantieren, ist für die Mantelfläche $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$ zu fordern *Planarität* in $\tilde{e}_{(\mathfrak{p})}$-Richtung; vgl. Gl. (2.153): den ersten und dritten Abschnitt von $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$.

Ferner werden explizit benötigt die Flächenelemente der Transversalprojektion $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ der Mantelfläche $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$; bezüglich deren zwei Abschnitte gilt, vgl. Gl. (2.157):

$$\left[d\sigma_{\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}}\right]^{i}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) = \frac{\partial x^{i}}{\partial s_{\mathfrak{p}}}\, ds_{\mathfrak{p}} = \left(r_{\mathfrak{p}}^{Q}\right)^{i} ds_{\mathfrak{p}} \tag{2.168}$$

$$\text{bzw.} \quad = \left(r_{\mathfrak{p}}^{AQ}\right)^{i} ds_{\mathfrak{p}} \tag{2.168'}$$

mit

$$r_{\mathfrak{p}}^{Q} \equiv \bar{z}_1 X + b/2 = x - \omega \tag{2.169}$$

$$r_{\mathfrak{p}}^{AQ} \equiv -z_1 X + b/2 = \bar{x} - \omega \tag{2.169'}$$

als systematische Notation für die Differenzvektoren der Positionen von Quark Q und Antiquark AQ der Pyramide $P_{\mathfrak{p}}$ und deren Apex ω.

Explizite Parametrisierungen für $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}$, $V_{\mathfrak{m}}$, $L_{\mathfrak{m}}$ und $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$, $V_{\mathfrak{m}}^{\perp}$, $L_{\mathfrak{m}}^{\perp}$ bezüglich der Pyramide $P_{\mathfrak{m}}$ folgen aus den Parametrisierungen bezüglich $P_{\mathfrak{p}}$ durch Substitution

$$\tilde{e}_{(\mathfrak{p})} \longrightarrow \tilde{e}_{(\mathfrak{m})} \tag{2.170}$$

$$\text{und} \qquad z_1 \longrightarrow z_2\,, \qquad X \longrightarrow Y\,, \qquad b \longrightarrow -b \tag{2.170'}$$

Es ist $\tilde{e}_{(\mathfrak{m})} = \varrho\,\gamma_{\mathfrak{m}}\left(e_{(0)} - \beta_{\mathfrak{m}} e_{(3)}\right)$, vgl. Gl. (D.54'), die Richtung der Weltlinie des mit $\beta_{\mathfrak{m}}$ in $-x^3$-Richtung aktiv geboosteten Teilchens und ihre Endpunkte $(\zeta_{\mathfrak{m}}^{\tilde{\mu}}) \equiv \left(0, \pm\zeta_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}, \mathbf{z}^{t}\right)^{t}$ mit $\mathbf{z} = \mathbf{y}, \bar{\mathbf{y}}$ und $\zeta_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}} = 1/\sqrt{g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}} \cdot T_{\mathfrak{m}}/2 = \varrho^{-1} \cdot T_{\mathfrak{m}}/2$, vgl. die Gln. (D.101'), (D.102).

Die korrespondierenden Flächenelemente folgen entsprechend. So gilt für das Element des Volumens $V_{\mathfrak{m}}$ die Faktorisierung

$$\left[d\sigma_{V_{\mathfrak{m}}}\right]^{\mathfrak{m}ij}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) = \frac{\partial x^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}}\, du_{\mathfrak{m}} \;\otimes\; \left[d\sigma_{V_{\mathfrak{m}}^{\perp}}\right]^{ij}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) \tag{2.171}$$

$$\text{mit} \qquad \left[d\sigma_{V_{\mathfrak{m}}^{\perp}}\right]^{ij}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) = \frac{\partial\left(x^{i}, x^{j}\right)}{\partial\left(s_{\mathfrak{m}}, \tau_{\mathfrak{p}}\right)}\, ds_{\mathfrak{m}}\, d\tau_{\mathfrak{m}} \tag{2.171'}$$

und für das Element der Grundfläche $L_{\mathfrak{m}}$

$$\left[d\sigma_{L_{\mathfrak{m}}}\right]^{i\mathfrak{m}}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) = \frac{\partial x^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}}\, du_{\mathfrak{m}} \;\otimes\; \left[d\sigma_{L_{\mathfrak{m}}^{\perp}}\right]^{i}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) \tag{2.172}$$

$$\text{mit} \qquad \left[d\sigma_{L_{\mathfrak{m}}^{\perp}}\right]^{i}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) = \frac{\partial x^{i}}{\partial \tau_{\mathfrak{m}}}\, d\tau_{\mathfrak{m}} \tag{2.172'}$$

angenommen Planarität der Mantelfläche $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}$ der Pyramide $P_{\mathfrak{m}}$ in $\tilde{e}_{(\mathfrak{m})}$-Richtung; vgl. die Gln. (2.163), (2.163') bzw. (2.166), (2.166').

Für die transversale Projektion $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$ von $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}$ sind die Flächenelemente abschnittweise gegeben durch

$$\left[d\sigma_{\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}}\right]^{i}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) = \frac{\partial x^{i}}{\partial s_{\mathfrak{m}}}\, ds_{\mathfrak{m}} = \left(r_{\mathfrak{m}}^{Q}\right)^{i} ds_{\mathfrak{m}} \tag{2.173}$$

$$\text{bzw.} \quad = \left(r_{\mathfrak{m}}^{AQ}\right)^{i} ds_{\mathfrak{m}} \tag{2.173'}$$

mit

$$r_{\mathfrak{m}}^{Q} \equiv \bar{z}_2 Y - b/2 = y - \omega \tag{2.174}$$

$$r_{\mathfrak{m}}^{AQ} \equiv -z_2 Y - b/2 = \bar{y} - \omega \tag{2.174'}$$

als systematische Notation für die Differenzvektoren der Positionen von Quark und Antiquark der Pyramide $P_{\mathfrak{m}}$ und deren Apex. Vgl. die Gln. (2.168), (2.168′) und (2.169), (2.169′).

Es ist hiermit der technische Apparat gegeben, die $\tilde{\chi}$-Funktionen nach Gl. (2.146) auszuwerten. Eingesetzt der Korrelationstensor $\tilde{D} \equiv \left(D_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\right)$ in Darstellung nach Gl. (1.82), mit Lorentz-Indizes $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ und $n \equiv 4$, folgen im Sinne von Gl. (2.148) die Funktionen $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}^{NC}$ und $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}^{C}$ – mit $\imath, \jmath \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$. Die nicht-konfinierenden Funktionen $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}^{NC}$ werden ausgewertet im folgenden Abschnitt 2.4.3, die konfinierenden Funktionen $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}^{C}$ in 2.4.4.

2.4.3 Nicht-konfinierende Funktionen $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}^{NC}$, $\imath, \jmath \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$

Wir betrachten die nicht-konfinierenden $\tilde{\chi}$-Funktionen, zunächst $\tilde{\chi}^{NC} \equiv \tilde{\chi}_{\mathfrak{pm}}^{NC}$. Es gilt – vgl. die Gln. (2.146), (2.148) und (1.82) – mit $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$:

$$\tilde{\chi}^{NC} = \mathrm{i}\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)^2 \iint_{S_{\mathfrak{p}}} d\sigma_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \iint_{S_{\mathfrak{m}}} d\sigma_{\mathfrak{m}}^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}})\ t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\ F^{NC}(\tilde{x}^2) \tag{2.175}$$

dabei ist definiert, vgl. Gl. (2.147):

$$\tilde{x} = \tilde{x}_{\mathfrak{p}} - \tilde{x}_{\mathfrak{m}} \qquad \tilde{x}_{\mathfrak{p}} \in S_{\mathfrak{p}},\ \ \tilde{x}_{\mathfrak{m}} \in S_{\mathfrak{m}} \tag{2.176}$$

mit $\tilde{x} \equiv (x^{\tilde{\mu}})$ und $\tilde{x}_{\mathfrak{p}} \equiv (x_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}})$, $\tilde{x}_{\mathfrak{m}} \equiv (x_{\mathfrak{m}}^{\tilde{\mu}})$. Die nicht-konfinierenden Tensorstruktur $t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$ ist explizit angegeben in Gl. (1.69′); wir rekapitulieren:

$$t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} = \frac{1}{6}\ g_{\tilde{\alpha}\tilde{\gamma}}\ \delta^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\ \partial_{\tilde{\beta}}\ \delta^{\tilde{\gamma}\tilde{\delta}}_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\ \partial_{\tilde{\delta}} \tag{2.177}$$

sie kontrahiert wie

$$t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}{}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \tilde{\partial}^2 \equiv \partial^{\tilde{\mu}}\partial_{\tilde{\mu}} \tag{2.178}$$

Die nicht-konfinierende Korrelationsfunktion F^{NC} ist definiert durch

$$F^{NC}(\tilde{x}^2) = \frac{1}{2}\lambda^2 \cdot \mathcal{K}_2(\zeta) \tag{2.179}$$

unter Definition

$$\mathcal{K}_\mu(\zeta) = \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\mu-1} \frac{1}{\Gamma(\mu)}\ \zeta^\mu\, \mathrm{K}_\mu(\zeta) \qquad \zeta \equiv \sqrt{-\tilde{x}^2/\lambda^2 + \mathrm{i}\,\epsilon} \cong \sqrt{-\tilde{x}^2}/\lambda \tag{2.180}$$

$$\text{mit} \qquad \mathcal{K}_\mu(\zeta) \to 1,\ \ \forall \mathrm{Re}\mu > 0 \qquad \text{für} \quad \zeta \to 0 \tag{2.180'}$$

vgl. Gl. (1.83) – und K_μ der modifizierten Besselfunktion zweiter Art nach Ref. [2]. Diese Relationen basieren auf Gl. (1.82) mit Index $\nu \equiv 4$, ergo: $\lambda \equiv \lambda_4 = 8/3\pi$, vgl. Gl. (1.84′) – der physikalisch suggerierten Darstellung. Für Vollständigkeit sei angegeben mit

$$F^{NC}(\tilde{x}^2) = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\tilde{x}^2} du\ D_{NC}(u) \tag{2.181}$$

der Zusammenhang mit der D-Korrelationsfunktion nach Gl. (1.68).

Wir fassen die Mantelfläche der Pyramide $P_\imath$, mit $\imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$, in orientierter Weise auf als vollständigen Rand ihres Volumens $\partial V_\imath$ subtrahiert ihre Grundfläche $L_\imath$:

$$S_\imath = \partial V_\imath - L_\imath \tag{2.182}$$

ergo für die Flächenintegrale:

$$\iint_{S_\imath} d\sigma_\imath^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_\imath)\ T_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \left[\iint_{\partial V_\imath} - \iint_{L_\imath}\right] d\sigma_\imath^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}(\tilde{x}_\imath)\ T_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \tag{2.183}$$

und mithilfe des Stokes'schen Satzes:

$$\iint_{\partial V_\imath} d\sigma_\imath^{\tilde\mu\tilde\nu}(\tilde x_\imath)\; T_{\tilde\mu\tilde\nu} = \iiint_{V_\imath} d\sigma_\imath^{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\rho}(\tilde x_\imath)\; \partial_{\tilde\mu}^{\tilde x_\imath}\; T_{\tilde\mu\tilde\nu} \tag{2.184}$$

Dabei ist $\tilde T \equiv \big(T_{\tilde\mu\tilde\nu}(\tilde x_\imath)\big)$ ein beliebiger Fourier-integrabler $(0,2)$-Lorentz-Tensor und $d\sigma_\imath^{\tilde\mu\tilde\nu}(\tilde x_\imath)$ zu identifizieren mit $d\tilde V^{\tilde\mu\tilde\nu}$ in den Gln. (E.30), (E.31). Für $\tilde\chi^{NC}$ folgt, vgl. Gl. (2.175):

$$\begin{aligned}\tilde\chi^{NC} \;=\; \mathrm{i}\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)^2 &\left[\iiint_{V_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{p}^{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\nu'}(\tilde x_\mathfrak{p})\;\partial_{\tilde\nu'} \;-\; \iint_{L_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{p}^{\tilde\mu\tilde\nu}(\tilde x_\mathfrak{p})\right] \\ &\times\left[\iiint_{V_\mathrm{m}} d\sigma_\mathrm{m}^{\tilde\rho\tilde\sigma\tilde\sigma'}(\tilde x_\mathrm{m})\;(-\partial_{\tilde\sigma'}) \;-\; \iint_{L_\mathrm{m}} d\sigma_\mathrm{m}^{\tilde\rho\tilde\sigma}(\tilde x_\mathrm{m})\right]\; t^{NC}_{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\rho\tilde\sigma}\; F^{NC}(\tilde x^2)\end{aligned} \tag{2.185}$$

mithilfe der Identität

$$\partial_{\tilde\mu} \;\equiv\; \partial_{\tilde\mu}^{\tilde x} \;=\; \partial_{\tilde\mu}^{\tilde x_\mathfrak{p}} \;=\; -\partial_{\tilde\mu}^{\tilde x_\mathrm{m}} \tag{2.186}$$

die unmittelbar folgt aus Gl. (2.176).

Unter Kontraktion mit dem vollständig antisymmetrischen Lorentz-Tensor $\tilde T \equiv \big(T^{\tilde\mu_1\cdots\tilde\mu_s}\big)$ faktorisiert das verallgemeinerte Kronecker-Symbol:[2.34]

$$\delta^{\tilde\mu_1\tilde\mu_2\cdots\tilde\mu_s}_{\tilde\nu_1\tilde\nu_2\cdots\tilde\nu_s}\; T^{\tilde\nu_1\tilde\nu_2\cdots\tilde\nu_s} \;=\; s!\; T^{\tilde\mu_1\tilde\mu_2\cdots\tilde\mu_s} \;=\; s!\;\delta^{\tilde\mu_1}_{\tilde\nu_1}\delta^{\tilde\mu_2}_{\tilde\nu_2}\cdots\delta^{\tilde\mu_s}_{\tilde\nu_s}\; T^{\tilde\nu_1\tilde\nu_2\cdots\tilde\nu_s} \tag{2.187}$$

Unter Kontraktion mit den Flächenelementen gilt daher die Äquivalenz:

$$\begin{aligned} t^{NC}_{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\rho\tilde\sigma} \;&=\; \frac{1}{6}\; g_{\tilde\alpha\tilde\gamma}\;\delta^{\tilde\alpha\tilde\beta}_{\tilde\mu\tilde\nu}\,\partial_{\tilde\beta}\;\delta^{\tilde\gamma\tilde\delta}_{\tilde\rho\tilde\sigma}\,\partial_{\tilde\delta} \\ &\cong\; \frac{1}{6}\; g_{\tilde\alpha\tilde\gamma}\;2\,\delta^{\tilde\alpha}_{\tilde\mu}\delta^{\tilde\beta}_{\tilde\nu}\,\partial_{\tilde\beta}\;2\,\delta^{\tilde\gamma}_{\tilde\rho}\delta^{\tilde\delta}_{\tilde\sigma}\,\partial_{\tilde\delta} \;=\; \frac{2}{3}\; g_{\tilde\mu\tilde\nu}\,\partial_{\tilde\rho}\partial_{\tilde\sigma}\end{aligned} \tag{2.188}$$

vgl. Gl. (2.177). Aufgrund von $d\sigma_\mathfrak{p}^{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\nu'}(\tilde x_\mathfrak{p})\partial_{\tilde\nu'}\partial_{\tilde\nu}\equiv 0$ und $d\sigma_\mathrm{m}^{\tilde\rho\tilde\sigma\tilde\sigma'}(\tilde x_\mathrm{m})\partial_{\tilde\sigma'}\partial_{\tilde\sigma}\equiv 0$ verschwindet identisch das $V_\mathfrak{p}$- respektive das V_m-Integral.

Die Grundfläche $L_\mathfrak{p}$ besitzt – unabhängig von der Parametrisierung – eine longitudinale Komponente $\mathfrak{p}$ und eine transversale i. Das Flächenelement $d\sigma_\mathfrak{p}^{\tilde\mu\tilde\nu}(\tilde x_\mathfrak{p})$ ist daher ungleich Null nur für $\tilde\mu\equiv i$, $\tilde\nu\equiv\mathfrak{p}$ und umgekehrt; es folgen zwei identische Terme. Entsprechend das L_m-Integral. Der Faktor Vier kürzt den Nenner des Vorfaktors. Es folgt, mit $i,j\in\{1,2\}$:

$$\tilde\chi^{NC} \;=\; -\,\mathrm{i}\iint_{L_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{p}^{i\mathfrak{p}}(\tilde x_\mathfrak{p})\iint_{L_\mathrm{m}} d\sigma_\mathrm{m}^{j\mathrm{m}}(\tilde x_\mathrm{m})\; t^{NC}_{i\mathfrak{p}j\mathrm{m}}\; F^{NC}(\tilde x^2) \tag{2.189}$$

dabei ist mit Gl. (2.177):

$$t^{NC}_{i\mathfrak{p}j\mathrm{m}} \;=\; \frac{1}{6}\; g_{\tilde\alpha\tilde\gamma}\;\delta^{\tilde\alpha\tilde\beta}_{i\,\mathfrak{p}}\,\partial_{\tilde\beta}\;\delta^{\tilde\gamma\tilde\delta}_{j\,\mathrm{m}}\,\partial_{\tilde\delta} \;=\; \frac{1}{6}\,\big(g_{ij}\,\partial_\mathfrak{p}\,\partial_\mathrm{m} \;+\; g_{\mathfrak{p}\mathrm{m}}\,\partial_i\,\partial_j\big) \tag{2.190}$$

aufgrund von $g_{\mathfrak{p}j}\equiv 0$, $g_{i\mathrm{m}}\equiv 0$, das heißt aufgrund der Faktorisierung des metrischen Tensors $\tilde g\equiv\big(g_{\tilde\mu\tilde\nu}\big)$ bezüglich longitudinalen und transversalen Komponenten.

Für die Mantelfläche $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ ist gefordert *Planarität* in $\tilde e_{(\mathfrak{p})}$-, für $\mathcal{S}_\mathrm{m}$ in $\tilde e_{(\mathrm{m})}$-Richtung. Dies induziert *Faktorisierung* der Flächenelemente bezüglich longitudinaler und transversalen Komponenten und impliziert für die *Grundflächen* $L_\mathfrak{p}$, L_m – vgl. die Gln. (2.166), (2.172):

$$d\sigma_\mathfrak{p}^{i\mathfrak{p}}(\tilde x_\mathfrak{p}) \;=\; d\sigma_\mathfrak{p}^{i}(\tilde x_\mathfrak{p}) \;\otimes\; d\sigma_\mathfrak{p}^{\mathfrak{p}}(\tilde x_\mathfrak{p}) \tag{2.191}$$

$$\text{d.h.}\qquad \iint_{L_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{p}^{i\mathfrak{p}}(\tilde x_\mathfrak{p}) \;=\; \int_{L_\mathfrak{p}^\perp} dx_\mathfrak{p}^{i} \;\otimes\; \int dx_\mathfrak{p}^{\mathfrak{p}} \tag{2.191$'$}$$

[2.34] Dies ist unmittelbar klar, gelesen von rechts nach links; vgl. Gl. (E.8).

und

$$d\sigma_{\mathfrak{m}}^{j\,\mathfrak{m}}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) \;=\; d\sigma_{\mathfrak{m}}^{j}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) \;\otimes\; d\sigma_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) \tag{2.192}$$

$$\text{d.h.} \qquad \iint_{L_{\mathfrak{m}}} d\sigma_{\mathfrak{m}}^{j\,\mathfrak{m}}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) \;=\; \int_{L_{\mathfrak{m}}^{\perp}} dx_{\mathfrak{m}}^{j} \;\otimes\; \int dx_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}} \tag{2.192'}$$

mit Notation

$$dx_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}} \;\equiv\; d\sigma_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}}) \qquad dx_{\mathfrak{m}}^{\tilde{\mu}} \;\equiv\; d\sigma_{\mathfrak{m}}^{\tilde{\mu}}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}}) \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\} \tag{2.193}$$

Die Integration der longitudinalen Komponente bezieht sich dabei auf die volle Länge des respektiven Wegner-Wilson-Loops – das heißt der diesem zugrunde liegenden Parton-Trajektorien $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$, deren Endpunkte $\left(\pm\zeta_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}},0,\mathbf{z}^t\right)^t$, $\left(0,\pm\zeta_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}},\mathbf{z}^t\right)^t$ bestimmt sind durch die Eigenzeiten $T_{\mathfrak{p}}$, $T_{\mathfrak{m}}$, über die diese durch das Vakuum-Eichfeld A propagieren und hängen ab von den Richtungen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$. Vgl. die Bemn. zu Gl. (2.153) und (2.170) wie Anh. D.4, S. 254.

Auf Basis dieser Faktorisierung gilt für $\tilde{\chi}^{NC}$:

$$\tilde{\chi}^{NC} \;=\; -\mathrm{i}\int_{L_{\mathfrak{p}}^{\perp}} dx_{\mathfrak{p}}^{i}\int_{L_{\mathfrak{m}}^{\perp}} dx_{\mathfrak{m}}^{j}\;\; t^{NC}{}_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}\;\; I_L[F^{NC}] \tag{2.194}$$

unter Definition

$$I_L[F] \;=\; \int dx_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}\int dx_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}\;\; F(\tilde{x}^2) \tag{2.195}$$

$$\;=\; \int_{-T_{\mathfrak{p}}/2}^{T_{\mathfrak{p}}/2}\frac{\partial x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\,du_{\mathfrak{p}}\int_{-T_{\mathfrak{m}}/2}^{T_{\mathfrak{m}}/2}\frac{\partial x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}}\,du_{\mathfrak{m}}\;F(\tilde{x}^2) \tag{2.195'}$$

Wir betrachten das Funktional I_L für eine allgemeine Funktion F der Raumzeit mit wohldefinierter Fourier-Transformierten $\tilde{F}$; *in praxi* ist zu identifizieren

$$F \;\equiv\; F^{NC} \tag{2.196}$$

vgl. Gl. (2.189) und die Gln. (2.194), (2.195), (2.195').

In Anhang E.2.1 wird I_L geeignet vereinfacht für allgemeine Funktion F: In Gl. (2.195') werden explizit ausintegriert die longitudinalen Parameter $u_{\mathfrak{p}}$, $u_{\mathfrak{m}}$; es folgt:

$$I_L[F] \;=\; -\det\mathbb{SL}\cdot\tilde{F}[F](|\mathbf{x}|) \tag{2.197}$$

$$\text{mit} \qquad \tilde{F}[F](|\mathbf{x}|) \;=\; \iint_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\;\tilde{F}(-\mathbf{k}^2) \tag{2.197'}$$

vgl. Gl. (E.47).

Nach Gl. (2.194) für $\tilde{\chi}^{NC}$ ist auf $I_L[F]$ – das heißt auf die Funktion $\tilde{F}[F]$ – zu beziehen die Tensorstruktur $t^{NC}{}_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}$, vgl. Gl. (2.190). Da $\tilde{F}[F]$ abhängt nur vom Betrag des transversalen Vektors $\mathbf{x}\equiv(x^1,x^2)^t$, ergibt identisch Null der Term von $t^{NC}{}_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}$ mit den longitudinalen Ableitungen: $g_{ij}\partial_{\mathfrak{p}}\partial_{\mathfrak{m}}$. Es folgt aus dem Term $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}\partial_i\partial_j$, mit $i,j\in\{1,2\}$:

$$\tilde{\chi}^{NC} \;=\; -\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}\cdot\mathrm{i}\,\frac{1}{6}\int_{L_{\mathfrak{p}}^{\perp}} dx_{\mathfrak{p}}^{i}\;\partial_i^{\tilde{x}_{\mathfrak{p}}}\int_{L_{\mathfrak{m}}^{\perp}} dx_{\mathfrak{m}}^{j}\;\partial_j^{\tilde{x}_{\mathfrak{m}}}\;\;\tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|) \tag{2.198}$$

$$\;=\; -\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}\cdot\mathrm{i}\,\frac{1}{6}\int_{\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}} dx_{\mathfrak{p}}^{i}\;\partial_i^{\tilde{x}_{\mathfrak{p}}}\int_{\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}} dx_{\mathfrak{m}}^{j}\;\partial_j^{\tilde{x}_{\mathfrak{m}}}\;\;\tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|) \tag{2.198'}$$

dabei ist ein Signum absorbiert im Übergang $\partial_i\to\partial_i^{\tilde{x}_{\mathfrak{p}}}$, $\partial_j\to-\partial_j^{\tilde{x}_{\mathfrak{m}}}$, vgl. Gl. (2.186).

Der Integrand ist vollständiges Differential der Koordinatenlinien, derentlang integriert wird über die respektiven transversalen Projektionen. Mithilfe des Stokes'schen Satzes reduzieren sich die Integrationen unmittelbar auf Differenzen bezüglich der Endpunkte der Linien $L_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, $L_{\mathfrak{m}}^{\perp}$ oder alternativ $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$ – vgl. Gl. (2.198) bzw. (2.198').

Bezugnehmend auf die explizite Wahl von $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$ und $L_\mathfrak{p}$, $L_\mathfrak{m}$ als die Mantel- beziehungsweise Grundflächen planer Pyramiden $P_\mathfrak{p}$, $P_\mathfrak{m}$ – vgl. die Gln. (2.153), (2.155) und Gl. (2.170′) – sind die transversalen Projektionen $L_\mathfrak{p}^\perp$, $L_\mathfrak{m}^\perp$ und $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp$ *geradlinig*[2.35]. Wir werten $\tilde{\chi}^{NC}$ aus o.E.d.A. auf Basis von Gl. (2.198) – als Integral über $L_\mathfrak{p}^\perp$, $L_\mathfrak{m}^\perp$, orientiert $\tilde{x}_\mathfrak{p}(\tau_\mathfrak{p})$, $\tilde{x}_\mathfrak{m}(\tau_\mathfrak{m})$ für $\tau_\mathfrak{p}, \tau_\mathfrak{m} : 0 \to 1$ vom respektiven Antiquark AQ zum Quark Q:

$$L_\mathfrak{p}^\perp(\tau_\mathfrak{p} : 0 \to 1) : \quad AQ : \; x_\mathfrak{p}(0) \; = \omega + r_\mathfrak{p}^{AQ} \quad \longrightarrow \quad Q : \; \tilde{x}_\mathfrak{p}(1) \; = \omega + r_\mathfrak{p}^{Q} \tag{2.199}$$

$$L_\mathfrak{m}^\perp(\tau_\mathfrak{m} : 0 \to 1) : \quad AQ : \; x_\mathfrak{m}(0) \; = \omega + r_\mathfrak{m}^{AQ} \quad \longrightarrow \quad Q : \; \tilde{x}_\mathfrak{m}(1) \; = \omega + r_\mathfrak{m}^{Q} \tag{2.199′}$$

mit deren Positionen in Termen der systematisch notierten Differenzvektoren $r_\mathfrak{p}^Q$, $r_\mathfrak{p}^{AQ}$ und $r_\mathfrak{m}^Q$, $r_\mathfrak{m}^{AQ}$ der (Anti)Quarks und des gemeinsamen Apex ω der – o.E.d.A. generalisierten – Pyramiden, vgl. die Gln. (2.169), (2.169′) bzw. (2.174), (2.174′).

Im Sinne der expliziten Parametrisierungen $\tilde{x}_\mathfrak{p}(\tau_\mathfrak{p})$, $\tilde{x}_\mathfrak{m}(\tau_\mathfrak{m})$ gilt

$$dx_\imath^i \, \partial_i^{\tilde{x}_\imath} \; = \; d\tau_\imath \; \frac{dx_\imath^i}{d\tau_\imath} \frac{\partial}{\partial x_\imath^i} = \; d\tau_\imath \; \frac{d}{d\tau_\imath} \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{2.200}$$

und für die Funktion $\tilde{\chi}^{NC}$ nach Gl. (2.198):

$$\tilde{\chi}^{NC} \; = \; - \det \mathbb{SL}\, g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \; \cdot \mathrm{i} \, \frac{1}{6} \; \int_0^1 d\tau_\mathfrak{p} \, \frac{d}{d\tau_\mathfrak{p}} \; \int_0^1 d\tau_\mathfrak{m} \, \frac{d}{d\tau_\mathfrak{m}} \; \tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|) \tag{2.201}$$

Abgekürzt $f(\mathbf{x}) \equiv \tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|)$, folgt für den Integralausausdruck:

$$\int_0^1 d\tau_\mathfrak{p} \, \frac{d}{d\tau_\mathfrak{p}} \; \int_0^1 d\tau_\mathfrak{m} \, \frac{d}{d\tau_\mathfrak{m}} \; f\big(\mathbf{x}_\mathfrak{p}(\tau_\mathfrak{p}) - \mathbf{x}_\mathfrak{m}(\tau_\mathfrak{m})\big) \tag{2.202}$$

$$= \; \Big[\Big[\; f\big(\mathbf{x}_\mathfrak{p}(\tau_\mathfrak{p}) - \mathbf{x}_\mathfrak{m}(\tau_\mathfrak{m})\big) \; \Big]_{\tau_\mathfrak{m} \equiv 0}^{\tau_\mathfrak{m} \equiv 1} \Big]_{\tau_\mathfrak{p} \equiv 0}^{\tau_\mathfrak{p} \equiv 1} \tag{2.202′}$$

$$= \; \sum\nolimits_{\tau_\mathfrak{p},\, \tau_\mathfrak{m} \equiv 0,\, 1} \; (-1)^{\tau_\mathfrak{p} + \tau_\mathfrak{m}} \; f\big(\mathbf{x}_\mathfrak{p}(\tau_\mathfrak{p}) - \mathbf{x}_\mathfrak{m}(\tau_\mathfrak{m})\big) \tag{2.202″}$$

Für $\tilde{\chi}^{NC}$ nach Gl. (2.201) folgt

$$\tilde{\chi}^{NC} \; = \; - \det \mathbb{SL}\, g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \; \cdot \mathrm{i} \, \frac{1}{6} \; \sum\nolimits_{I,J \equiv Q, AQ} \; \mathrm{sign}_{I,J} \; \tilde{F}[F^{NC}]\big(\big|\mathbf{r}_\mathfrak{p}^I - \mathbf{r}_\mathfrak{m}^J\big|\big) \tag{2.203}$$

in Termen von $r_\mathfrak{p}^Q$, $r_\mathfrak{p}^{AQ}$ und $r_\mathfrak{m}^Q$, $r_\mathfrak{m}^{AQ}$; dabei ist für Suggestivität der Schreibweise summiert über die (Anti)Quarks: $I, J \in \{Q, AQ\}$, und definiert

$$\mathrm{sign}_{I,J} = (-1)^{I+J} \qquad I, J \in \{Q, AQ\}, \quad Q \equiv 0, \; AQ \equiv 1 \tag{2.204}$$

das heißt durch Zuweisen der Zahlenwerte $Q \equiv 0$, $AQ \equiv 1$; s.u. Fußn. 2.40 auf Seite 88.

Die nicht-konfinierende Funktion $\tilde{\chi}^{NC}$ ist nach Gl. (2.203) – da $\tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|)$ allgemein abhängt nur von $|\mathbf{x}|$ – bestimmt durch die Beträge der transversal projizierten Abstandvektoren der paralleltransportierten Feldstärken an den (Anti)Quark-Positionen. Deren Wechselwirkung ist in diesem Sinne *lokal*. Die konfinierende Funktion $\tilde{\chi}^C$ basiert dazu in Kontrast auf einer *nicht-lokalen* Wechselwirkung der paralleltransportierten Feldstärken im Sinne, daß diese eingehen bezüglich „sämtlicher Weltpunkte der Raumzeit zwischen den (Anti)Quarks“. Die Herleitung von $\tilde{\chi}^C$ im folgenden Abschnitt präzisiert diese Aussage.

Die Funktionen $\tilde{\chi}_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}^{NC}$, $\tilde{\chi}_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}^{NC}$ differieren von $\tilde{\chi}^{NC} \equiv \tilde{\chi}_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}^{NC} (\equiv \tilde{\chi}_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}^{NC})$ genau darin, daß beide paralleltransportierten Feldstärken Elemente sind *derselben* Pyramiden-Mantelfläche –

[2.35] Es ist *nicht* notwendig zu fordern *transversale Planarität* der Flächen $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$ und $L_\mathfrak{p}$, $L_\mathfrak{m}$, das heißt *Geradlinigkeit* der transversalen Projektionen $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp$ und $L_\mathfrak{p}^\perp$, $L_\mathfrak{m}^\perp$. Dies geschieht hier einzig für Definiertheit.

entweder $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$ oder $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$. So gilt nach Gl. (2.203) für $\tilde{\chi}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$ – mit $\mathbf{r}^{Q}_{\mathfrak{p}} - \mathbf{r}^{AQ}_{\mathfrak{p}} \equiv \mathbf{X}$ der (orientierten) transversalen Ausdehnung des Wegner-Wilson-Loops $W_\mathfrak{p}$:

$$\tilde{\chi}^{NC}_{\mathfrak{pp}} \;=\; -\det \mathbb{SL}\, g_{\mathfrak{pp}} \;\cdot\, \mathrm{i}\,\frac{1}{3}\left\{\, \tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{0}|) \;-\; \tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{X}|) \,\right\} \tag{2.205}$$

und für $\tilde{\chi}^{NC}_{\mathfrak{mm}}$ analog: $g_{\mathfrak{pp}} \to g_{\mathfrak{mm}}$ und $r_\mathfrak{p} \to r_\mathfrak{m}$, ergo $X \to Y$.

Wir verweisen auf Anhang F. Dort leiten wir her – vgl. Gl. (F.128′), mit $\nu \equiv 4$: [2.36]

$$\tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|) \;=\; -\mathrm{i}\,4\pi\cdot\lambda^4 \;\mathcal{K}_3(\zeta) \tag{2.206}$$
$$\lambda \equiv \lambda_4 = 8/3\pi, \quad \zeta \equiv \sqrt{|\mathbf{x}|^2/\lambda^2 + \mathrm{i}\,\epsilon} \cong |\mathbf{x}|/\lambda$$

auf Basis unseres Ansatzes $F^{NC}(\tilde{x}^2) = \frac{1}{2}\lambda^2\,\mathcal{K}_2(\zeta)$, $\zeta \equiv \sqrt{-\tilde{x}^2/\lambda^2 + \mathrm{i}\,\epsilon} \cong \sqrt{-\tilde{x}^2}/\lambda$ für die nicht-konfinierende F-Korrelationsfunktion. Vgl. Gl. (2.179)ff., ferner Kap. 1.3, Gl. (1.82)ff. und Anh. F, die Gln. (F.1), (F.10).

2.4.4 Konfinierende Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{\imath\jmath}$, $\imath,\jmath \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$

Wir betrachten die konfinierenden χ-Funktionen, zunächst $\tilde{\chi}^{C} \equiv \tilde{\chi}^{C}_{\mathfrak{pm}}$. Analog zu Gl. (2.175) gilt – vgl. wieder die Gln. (2.146), (2.148) und (1.82) – mit $\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\rho},\tilde{\sigma} \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$:

$$\tilde{\chi}^{C} \;=\; \mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 \iint_{S_\mathfrak{p}} d\sigma^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{\mathfrak{p}}(\tilde{x}_\mathfrak{p}) \iint_{S_\mathfrak{m}} d\sigma^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}_{\mathfrak{m}}(\tilde{x}_\mathfrak{m}) \;\, t^{C}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \;\tilde{\partial}^2\, F^{C}(\tilde{x}^2) \tag{2.207}$$

dabei ist $\tilde{x} = \tilde{x}_\mathfrak{p} - \tilde{x}_\mathfrak{m}$ mit $\tilde{x}_\mathfrak{p} \in S_\mathfrak{p}$, $\tilde{x}_\mathfrak{m} \in S_\mathfrak{m}$ nach Gl. (2.176). Die konfinierende Tensorstruktur $t^{C}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$ ist explizit gegeben in Gl. (1.69); wir rekapitulieren:

$$t^{C}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \;=\; \frac{1}{12}\;\delta^{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\;\; g_{\tilde{\alpha}\tilde{\rho}}\, g_{\tilde{\beta}\tilde{\sigma}} \tag{2.208}$$

sie kontrahiert wie

$$t^{C}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}{}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = 1 \tag{2.209}$$

Die konfinierende Korrelationsfunktion F^C ist definiert durch

$$F^{C}(\tilde{x}^2) \;=\; \frac{1}{2}\lambda^2\cdot\mathcal{K}_2(\zeta) \tag{2.210}$$

mit $\mathcal{K}_\mu(\zeta) = (\frac{1}{2})^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\,\zeta^\mu \mathrm{K}_\mu(\zeta)$, $\zeta \equiv \sqrt{-\tilde{x}^2/\lambda^2 + \mathrm{i}\,\epsilon} \cong \sqrt{-\tilde{x}^2}/\lambda$ und $\mathcal{K}_\mu(\zeta) \to 1$, $\forall \mathrm{Re}\mu > 0$ für $\zeta \to 0$; vgl. die Gln. (1.83) und (2.180), (2.180′). Diese Relationen basieren auf Gl. (1.82) mit Index $\nu \equiv 4$, ergo $\lambda \equiv \lambda_4 = 8/3\pi$. Für Vollständigkeit sei angegeben mit

$$\tilde{\partial}^2\, F^{C}(\tilde{x}^2) \;=\; D_C(\tilde{x}^2) \tag{2.211}$$

der Zusammenhang mit der D-Korrelationsfunktion nach Gl. (1.68).

Die Gln. (2.179), (2.210) implizieren

$$F^{C} \;\equiv\; F^{NC} \tag{2.212}$$

Die Existenz einer Relation zwischen nicht-konfinierender und konfinierender Korrelationsfunktion folgt aus dem Ansatz nach Gl. (1.78). Sie wird am sinnvollsten ausgedrückt durch die eine Korrelationsfunktion $\mathcal{K}_2$, die Diskrepanz beider Terme vollständig subsumiert in den Lorentz-Tensorstrukturen: $t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$ versus $t^{C}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\tilde{\partial}^2$; vgl. auch Gl. (2.178) versus (2.209).

Im Sinne $S_\imath = \partial V_\imath - L_\imath$ für $\imath = \mathfrak{p},\mathfrak{m}$, vgl. Gl. (2.182), seien die Mantelflächen der Pyramiden wieder aufgefaßt als vollständiger Rand ihres Volumens, subtrahiert ihre Grundfläche:

$$\tilde{\chi}^{C} \;=\; \mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2 \left[\iiint_{V_\mathfrak{p}} d\sigma^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\nu}'}_{\mathfrak{p}}(\tilde{x}_\mathfrak{p})\;\partial_{\tilde{\nu}'} \;-\; \iint_{L_\mathfrak{p}} d\sigma^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{\mathfrak{p}}(\tilde{x}_\mathfrak{p})\right] \tag{2.213}$$
$$\times\left[\iiint_{V_\mathfrak{m}} d\sigma^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'}_{\mathfrak{m}}(\tilde{x}_\mathfrak{m})\;(-\partial_{\tilde{\sigma}'}) \;-\; \iint_{L_\mathfrak{m}} d\sigma^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}_{\mathfrak{m}}(\tilde{x}_\mathfrak{m})\right]\; t^{C}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\;\tilde{\partial}^2\, F^{C}(\tilde{x}^2)$$

das konfinierende Pendant zu Gl. (2.185).

[2.36] In den Größen in (geradem) Fettdruck sind gestrichen die ausintegrierten longitudinalen Komponenten.

Nach Gl. (2.187) sind äquivalent unter der Kontraktion mit den Flächenelementen aufgrund deren vollständigen Antisymmetrie:

$$t^C_{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\rho\tilde\sigma} = \frac{1}{12}\,\delta^{\tilde\alpha\tilde\beta}_{\tilde\mu\tilde\nu}\;g_{\tilde\alpha\tilde\rho}\,g_{\tilde\beta\tilde\sigma} \tag{2.214}$$
$$\cong \frac{1}{12}\,2\,\delta^{\tilde\alpha}_{\tilde\mu}\delta^{\tilde\beta}_{\tilde\nu}\;g_{\tilde\alpha\tilde\rho}\,g_{\tilde\beta\tilde\sigma} = \frac{1}{6}\,g_{\tilde\mu\tilde\rho}\,g_{\tilde\nu\tilde\sigma}$$

vgl. Gl. (2.208).

Grundfläche $L_\mathfrak{p}$ wie Volumen $V_\mathfrak{p}$ besitzen – unabhängig von der Parametrisierung – eine longitudinale Komponente: $\mathfrak{p}$, sonst transversale Komponente(n): i bzw. i,i'. Aus den Flächenelementen $d\sigma_\mathfrak{p}^{\tilde\mu\tilde\nu\tilde\nu'}$ und $d\sigma_\mathfrak{p}^{\tilde\mu\tilde\nu}$ folgen jeweils zwei identische Terme für $\tilde\mu\equiv i$, $\tilde\nu\equiv\mathfrak{p}$ und umgekehrt. Zusätzlich tritt auf im $V_\mathfrak{p}$-Integral für $\tilde\mu\equiv i$, $\tilde\nu\equiv i'$, $\tilde\nu'\equiv\mathfrak{p}$ der Term $d\sigma_\mathfrak{p}^{ii'\mathfrak{p}}\partial_\mathfrak{p}$ mit longitudinaler Ableitung $\partial_\mathfrak{p}$. Entsprechend das $V_\mathfrak{m}$-Integral. Der Faktor Vier kürzt – wie im nicht-konfinierenden Fall – den Nenner des Vorfaktors. Es folgt, mit $i,i',j,j'\in\{1,2\}$:

$$\tilde\chi^C = -\mathrm{i}\left[\iiint_{V_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{p}^{i\mathfrak{p}i'}(\tilde x_\mathfrak{p})\;\partial_{i'} - \iint_{L_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{p}^{i\mathfrak{p}}(\tilde x_\mathfrak{p})\right] \tag{2.215}$$
$$\times\left[\iiint_{V_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{m}^{j\mathfrak{m}j'}(\tilde x_\mathfrak{m})\;(-\partial_{j'}) - \iint_{L_\mathfrak{m}} d\sigma_\mathfrak{m}^{j\mathfrak{m}}(\tilde x_\mathfrak{m})\right]\;t^C_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}\;\tilde\delta^2\;F^C(\tilde x^2)$$
$$+\;[\text{Terme mit }\partial_\mathfrak{p}\text{ und/oder }\partial_\mathfrak{m}]$$

und mit Gl. (2.208):

$$t^C_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}} = \frac{1}{12}\,\delta^{\tilde\alpha\tilde\beta}_{i\mathfrak{p}}\;g_{\tilde\alpha j}\,g_{\tilde\beta\mathfrak{m}} = \frac{1}{12}\,g_{ij}\,g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \tag{2.216}$$

aufgrund von $g_{\mathfrak{p}j}\,,g_{i\mathfrak{m}}\equiv 0$, vgl. Gl. (2.190).

Faktorisierung der Pyramiden-Mantelflächen $S_\mathfrak{p}$, $S_\mathfrak{m}$ bezüglich longitudinaler und transversaler Komponenten impliziert für die *Volumina* $V_\mathfrak{p}$, $V_\mathfrak{m}$ – vgl. die Gln. (2.163), (2.171):

$$d\sigma_\mathfrak{p}^{ii'\mathfrak{p}}(\tilde x_\mathfrak{p}) = d\sigma_\mathfrak{p}^{ii'}(\tilde x_\mathfrak{p})\;\otimes\;d\sigma_\mathfrak{p}^{\mathfrak{p}}(\tilde x_\mathfrak{p}) \tag{2.217}$$

$$\text{d.h.}\qquad \iiint_{V_\mathfrak{p}} d\sigma_\mathfrak{p}^{i\mathfrak{p}i'}(\tilde x_\mathfrak{p}) = -\iint_{V_\mathfrak{p}^\perp} d\sigma_\mathfrak{p}^{ii'}(\tilde x_\mathfrak{p})\;\otimes\;\int dx_\mathfrak{p}^{\mathfrak{p}} \tag{2.217'}$$

und

$$d\sigma_\mathfrak{m}^{jj'\mathfrak{m}}(\tilde x_\mathfrak{m}) = d\sigma_\mathfrak{m}^{jj'}(\tilde x_\mathfrak{m})\;\otimes\;d\sigma_\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}}(\tilde x_\mathfrak{m}) \tag{2.218}$$

$$\text{d.h.}\qquad \iiint_{V_\mathfrak{m}} d\sigma_\mathfrak{m}^{j\mathfrak{m}j'}(\tilde x_\mathfrak{m}) = -\iint_{V_\mathfrak{m}^\perp} d\sigma_\mathfrak{m}^{jj'}(\tilde x_\mathfrak{m})\;\otimes\;\int dx_\mathfrak{m}^{\mathfrak{m}} \tag{2.218'}$$

mit $V_\mathfrak{p}^\perp$, $V_\mathfrak{m}^\perp$ den *transversalen Projektionen* der Pyramiden-Volumina im Sinne der expliziten Parametrisierung nach Gl. (2.158). Bezüglich der Grundflächen $L_\mathfrak{p}$, $L_\mathfrak{m}$ sei verwiesen auf die Gln. (2.191), (2.191′) und (2.191), (2.191′) und die Bemerkungen dort.

Eingesetzt die Faktorisierung der Flächenelemente von $V_\mathfrak{p}$, $V_\mathfrak{m}$ und $L_\mathfrak{p}$, $L_\mathfrak{m}$, folgt aus Gl. (2.215) unmittelbar:

$$\tilde\chi^C = -\mathrm{i}\left[-\iint_{V_\mathfrak{p}^\perp} d\sigma_\mathfrak{p}^{ii'}(\tilde x_\mathfrak{p})\;\partial_{i'} - \int_{L_\mathfrak{p}^\perp} dx_\mathfrak{p}^{i}\right] \tag{2.219}$$
$$\times\left[-\iint_{V_\mathfrak{m}^\perp} d\sigma_\mathfrak{m}^{jj'}(\tilde x_\mathfrak{m})\;(-\partial_{j'}) - \int_{L_\mathfrak{m}^\perp} dx_\mathfrak{m}^{j}\right]\;t^C_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}\;\tilde\delta^2\;\;I_L[F^C]$$
$$+\;[\text{Terme mit }\partial_\mathfrak{p}\text{ und/oder }\partial_\mathfrak{m}]$$

mit

$$I_L[F] \;=\; \int dx^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}} \int dx^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{m}}\;\; F(\tilde{x}^2) \tag{2.220}$$

Analog zum nicht-konfinierenden Fall – vgl. Gl. (2.194) – führt diese Faktorisierung unmittelbar auf das longitudinal bestimmte Funktional I_L, wie definiert in den Gl. (2.195), (2.195′). Die Integration der longitudinalen Parameter $u_{\mathfrak{p}}$, $u_{\mathfrak{m}}$ ist für allgemeine Funktion F explizit durchgeführt in Anhang E.2.1, das Resultat für $I_L[F]$ zitiert in den Gln. (2.197), (2.197′). Für $\tilde{\chi}^C$ nach (2.219) folgt auf dieser Basis:

$$\begin{aligned}\tilde{\chi}^C \;&=\; -\det\mathbb{SL} \\ &\times(-\mathrm{i})\left[-\iint_{V^{\perp}_{\mathfrak{p}}} d\sigma^{ii'}_{\mathfrak{p}}(\tilde{x}_{\mathfrak{p}})\;\partial^{\tilde{x}\mathfrak{p}}_{i'}\;-\int_{L^{\perp}_{\mathfrak{p}}} dx^{i}_{\mathfrak{p}}\right] \\ &\times\left[-\iint_{V^{\perp}_{\mathfrak{m}}} d\sigma^{jj'}_{\mathfrak{m}}(\tilde{x}_{\mathfrak{m}})\;\partial^{\tilde{x}\mathfrak{m}}_{j'}\;-\int_{L^{\perp}_{\mathfrak{m}}} dx^{j}_{\mathfrak{m}}\right]\; t^{C}_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}\;\tilde{\partial}^2\;\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|)\end{aligned} \tag{2.221}$$

gesetzt $\partial_{i'}=\partial^{\tilde{x}\mathfrak{p}}_{i'}$, $-\partial_{j'}=\partial^{\tilde{x}\mathfrak{m}}_{j'}$, vgl. Gl. (2.186). Da $\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|)$ nur abhängt von $|\mathbf{x}|$, also nicht von den longitudinalen Komponenten von $\tilde{x}$, verschwinden identisch die Terme mit $\partial_{\mathfrak{p}}$ und/oder $\partial_{\mathfrak{m}}$, vgl. Gl. (2.219), und es gilt $\tilde{\partial}^2\equiv g^{\mathfrak{pp}}(\partial_{\mathfrak{p}}\partial_{\mathfrak{p}}+\partial_{\mathfrak{m}}\partial_{\mathfrak{m}})+2g^{\mathfrak{pm}}\partial_{\mathfrak{p}}\partial_{\mathfrak{m}}-\partial_i\partial_i=-\partial_i\partial_i$.

In Gl. (2.221) sind gegenüber Gl. (2.213) im wesentlichen die Integrationsgebiete übergegangen in ihre transversalen Projektionen. Eine Dimension reduziert, gehen wir die Schritte zurück, die uns geführt haben von Gl. (2.207) zu Gl. (2.213): Wir gehen über von $V^{\perp}_{\imath}$ zu $\partial V^{\perp}_{\imath}$ für $\imath=\mathfrak{p},\mathfrak{m}$ mithilfe des Stokes'schen Satzes:

$$\iint_{V^{\perp}_{\imath}} d\sigma^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{\imath}(\tilde{x}_{\imath})\;\partial^{\tilde{x}\imath}_{\tilde{\nu}}\;\;T_{\tilde{\mu}} \;=\; -\int_{\partial V^{\perp}_{\mathfrak{p}}} d\sigma^{\tilde{\mu}}_{\imath}(\tilde{x}_{\imath})\;\;T_{\tilde{\mu}} \tag{2.222}$$

für $\tilde{T}\equiv\left(T_{\tilde{\mu}}\right)$ ein beliebiger Fourier-integrabler $(0,1)$-Lorentz-Tensor, das heißt -Vektor, vgl. Gl. (2.184). – Und fassen zusammen die Flächenintegrale über $\partial V^{\perp}_{\imath}$ und $L^{\perp}_{\imath}$ im Sinne[2.37]

$$S^{\perp}_{\imath} \;=\; \partial V^{\perp}_{\imath} - L^{\perp}_{\imath} \tag{2.223}$$

$$\text{ergo:}\qquad \int_{S^{\perp}_{\imath}} d\sigma^{\tilde{\mu}}_{\imath}(\tilde{x}_{\imath})\;\;T_{\tilde{\mu}} \;=\; \left[\int_{\partial V^{\perp}_{\imath}} \;-\int_{L^{\perp}_{\imath}}\right]\; d\sigma^{\tilde{\mu}}_{\imath}(\tilde{x}_{\imath})\;\;T_{\tilde{\mu}} \tag{2.224}$$

vgl. Gl. (2.182) bzw. (2.183).

Aus Gl. (2.221) folgt unmittelbar – mit $dx^{\tilde{\mu}}_{\imath}\equiv d\sigma^{\tilde{\mu}}_{\imath}(\tilde{x}_{\imath})$, vgl. Gl. (2.193):

$$\tilde{\chi}^C \;=\; -\det\mathbb{SL}\;\cdot\;(-\mathrm{i})\int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}} dx^{i}_{\mathfrak{p}}\;\int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}} dx^{j}_{\mathfrak{m}}\;\;t^{C}_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}\;\tilde{\partial}^2\,\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|) \tag{2.225}$$

und mit $t^{C}_{i\mathfrak{p}j\mathfrak{m}}=-\frac{1}{12}\,\delta_{ij}\,g_{\mathfrak{pm}}$, vgl. Gl. (2.216):

$$\tilde{\chi}^C \;=\; -\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{pm}}\;\cdot\;\mathrm{i}\,\frac{1}{12}\;\int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}} dx^{i}_{\mathfrak{p}}\;\int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}} dx^{i}_{\mathfrak{m}}\;\;\tilde{\partial}^2\,\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|) \tag{2.226}$$

Diese Darstellung von $\tilde{\chi}^C$ ist unmittelbares Pendant zu der von $\tilde{\chi}^{NC}$ nach Gl. (2.198).

In Anhang E.2.2 wird diese Darstellung ausgewertet in Form

$$\tilde{\chi}^C \;=\; -\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{pm}}\;\cdot\;\mathrm{i}\,\frac{1}{12}\;\;I_T[F] \tag{2.227}$$

unter Definition

$$I_T[F] \;=\; \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}} dx^{i}_{\mathfrak{p}}\;\;\int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}} dx^{i}_{\mathfrak{m}}\;\;\partial_j\,\left[x^j\,F\right] \tag{2.228}$$

Und zwar auf Basis der speziellen Wahl der verallgemeinerten Pyramiden $P_{\mathfrak{p}}$, $P_{\mathfrak{m}}$ wie in

[2.37] Es folgt $S^{\perp}_{\imath}=\partial V^{\perp}_{\imath}-L^{\perp}_{\imath}$ aus $S_{\imath}=\partial V_{\imath}-L_{\imath}$ für $\imath=\mathfrak{p},\mathfrak{m}$: Seien die Orientierungen repräsentiert durch äußere Normalenvektoren; dann sind transversal projizierte Differenzen identisch den respektiven Differenzen der transversal Projizierten. Die longitudinale Integration hat zur Konsequenz transversale Projektion des Integrtaionsgebiets, so daß a priori übergeht $S_{\imath}$ in $S^{\perp}_{\imath}$ – ungeachtet der intermediären, formalen Aufteilung.

Abschnitt 2.4.2, Gl. (2.153): Deren Mantelflächen $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}$ – über die ab initio die paralleltransportierten Feldstärken zu integrieren sind – werden angenommen als *planar* bezüglich der transversalen Komponenten, das heißt deren Projektionen $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$ als abschnittweise *geradlinig*. Anhang E.2.2 abschließend wird argumentiert, daß Geradlinigkeit beziehungsweise Planarität in diesem Sinne nicht notwendig ist.

Relevant für die Auswertung in Anhang E.2.2 ist der Differentialoperator $\partial_{\tilde{\mu}}$, der rührt aus dem d'Alembert-Operator $\tilde{\partial}^2 \equiv \partial_{\tilde{\mu}}\partial_{\tilde{\mu}}$[2.38]. Relevant ist nicht die explizite Darstellung der konfinierenden Korrelationsfunktion F^C beziehungsweise deren Projektion $\tilde{F}[F^C]$, so daß wir – auch für Kürze der Notation – arbeiten mit der allgemeinen Funktion $F \equiv F(|\mathbf{x}|)$, die aber in praxi zu identifizieren auf Basis der Relation

$$x^j F \;\equiv\; \partial^j \tilde{F}[F^C] \tag{2.229}$$

vgl. die Gln. (2.226)-(2.228). Da $\tilde{F}[F^C]$ abhängt nur von $|\mathbf{x}| \equiv \sqrt{\mathbf{x}^2}$, $\mathbf{x}^2 \equiv x^i x^i \equiv -g_{ij}x^i x^j$, gilt für den kontravarianten Ableitungsoperator ∂^j, der wirkt auf $\tilde{F}[F^C]$:

$$\partial^j \;=\; -\partial_j \;\equiv\; -\frac{\partial}{\partial x^j} \;=\; -\frac{\partial \mathbf{x}^2}{\partial x^j}\,\frac{d\sqrt{\mathbf{x}^2}}{d\mathbf{x}^2}\,\frac{d}{d|\mathbf{x}|} \;=\; -x^j\,\frac{1}{|\mathbf{x}|}\,\frac{d}{d|\mathbf{x}|} \tag{2.230}$$

Folglich ist zu identifizieren:

$$F(|\mathbf{x}|) \;\equiv\; \tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|) \;\equiv\; -\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{d}{d|\mathbf{x}|}\;\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|) \tag{2.231}$$

indem definiert seien durch

$$\tilde{F}^{(n)}[F^C](|\mathbf{x}|) \;\equiv\; \left(-\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{d}{d|\mathbf{x}|}\right)^n\;\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|) \tag{2.232}$$

geeignete n-fache Ableitungen $\tilde{F}^{(n)}[F^C]$ der Projektion $\tilde{F}[F^C]$.[2.39]

Die Auswertung des Funktionals $I_T[F]$ nach Gl. (2.228) in Anhang E.2.2 geschieht wie folgt: Der Integralausdruck wird aufgefaßt als *direktes Produkt von Linienintegralen* entlang der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}\big|_I$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}\big|_J$ und dargestellt als *Flächenintegral über das nichttriviale direkte Produkt* $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}\big|_I \otimes \mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}\big|_J$ der Mannigfaltigkeiten; dabei wird zerlegt in Summen geradliniger Abschnitte: $I, J \in \{Q, AQ\}$ die respektiven Quark- und Antiquark-Abschnitte bei Planarität der Pyramiden $P_{\mathfrak{p}}$, $P_{\mathfrak{m}}$ im diskutierten Sinne. Die Flächenintegrale über $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}\big|_I \otimes \mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}\big|_J$ werden überführt in Linienintegrale entlang $\partial\big(\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}\big|_I \otimes \mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}\big|_J\big)$ mithilfe des *dualen Stokes'schen Satzes* – da der Integrand *Divergenz* ∂_j ist einer Funktion. Resultat ist das Linienintegrale entlang des *äußeren* Randes $\partial\big(\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp} \otimes \mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}\big)$, in parametrisierter Form – vgl. Gl. (E.77):

$$\begin{aligned} & I_T[F] \\ &= \sum\nolimits_{I,J \equiv Q,AQ} \;\mathrm{sign}_{I,J}\;\; \mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I \cdot \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J \;\int_0^1 ds\;\Big\{\, F\big(|s\,\mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I - \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J|\big) \;+\; F\big(|\mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I - s\,\mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J|\big)\,\Big\} \end{aligned} \tag{2.233}$$

ergo – vgl. Gl. (E.79):

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}^C \;=\; & -\det \mathbb{SL}\, g_{\mathfrak{pm}} \cdot \mathrm{i}\,\frac{1}{12}\;\sum\nolimits_{I,J \equiv Q,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,J} \\ & \times\; \mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I \cdot \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J \;\int_0^1 ds\;\Big\{\, \tilde{F}^{(1)}[F^C]\big(|s\,\mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I - \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J|\big) \;+\; \tilde{F}^{(1)}[F^C]\big(|\mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I - s\,\mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J|\big)\,\Big\} \end{aligned} \tag{2.234}$$

mit $F \equiv \tilde{F}^{(1)}[F^C]$ nach Gl. (2.231). Es ist $\mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I \cdot \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J \equiv +\delta_{ij} r_{\mathfrak{p}}^{Ii} r_{\mathfrak{m}}^{Jj}$ mit $i, j \in \{1, 2\}$ das Skalarprodukt der transversalen Vektoren. Der Faktor $\mathrm{sign}_{I,J} = (-1)^{I+J}$ ist definiert in Gl. (2.204) durch Zuweisen der Zahlenwerte $Q \equiv 0$, $AQ \equiv 1$ und – vgl. die nicht-konfinierende Struktur

[2.38] *cum grano salis* der negative transversale Laplace-Operator $-\partial_i\partial_i \equiv -\nabla^2$, da $\tilde{F}[F^C]$ – vgl. Gl. (2.226) – abhängt nur von den Komponenten des transversalen Vektors $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2)^t$

[2.39] formal: Ableitungen nach $-\frac{1}{2}|\mathbf{x}|^2$

nach Gl. (2.203) – trägt Rechnung dem relativen Signum von Beiträgen mit $I \not\equiv J$: wenn genau eine paralleltransportierte Feldstärke Element ist des Antiquark-Abschnitts.[2.40]

Diese Reduktion der transversalen Integrationen auf eine einzige beruht wesentlich auf der Nichttrivialität des direkten Produkts $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J$ der Faktor-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I$ und $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J$. Sie kann – in dieser Form – *nicht* durchgeführt werden für die Funktionen $\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{pp}}$ und $\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{mm}}$, da diese determiniert sind durch die Integration zweier paralleltransportierter Feldstärken über *dieselbe* Mannigfaltigkeit: $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}$ beziehungsweis $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}$. Es ist daher für diese Funktionen auszugehen von der ursprünglichen Darstellung des Funktionals $I_T[F]$ nach Gl. (2.228), für die in Anhang E.2.2 angegeben wird eine geeignete Parametrisierung. Der Differentialoperator ∂_j – nicht explizit benötigt in Hinblick auf den Stokes'schen Satz – wird überführt in eine Ableitung nach dem eigentlich relevanten Raumzeit-Argument $|\mathbf{x}|$ und entsprechend umgeformt der Integrand:

$$\partial_j \left[x^j F\right] = g^j{}_j\, F + x^j\, \partial_j\, F \qquad \text{mit}^{2.41} \quad g^j{}_j \equiv d-2\,\big|_{d\equiv 4} = 2 \tag{2.235}$$

$$= 2\,F - |\mathbf{x}|^2 \left(-\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{d}{d|\mathbf{x}|}\right) F \tag{2.235'}$$

$$= 2\,\tilde{F}^{(1)}[F^C] - |\mathbf{x}|^2\,\tilde{F}^{(2)}[F^C] \tag{2.235''}$$

vgl. die Gln. (2.230), (2.232). Es folgt – vgl. Gl. (E.80):

$$\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{pp}} = -\det \mathbb{SL}\, g_{\mathfrak{pp}} \cdot \mathrm{i}\,\frac{1}{12} \sum\nolimits_{I,J\equiv Q,AQ} \mathrm{sign}_{I,J} \tag{2.236}$$

$$\times\, \mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{r}^J_{\mathfrak{p}} \int_0^1 ds \int_0^1 ds' \left\{ 2\,\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|) - |\mathbf{x}|^2\,\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\mathbf{x}|) \right\} \Big|_{(I,J)}$$

$$\text{mit} \qquad \mathbf{x}\big|_{(I,J)} \equiv \mathbf{x}(s,s')\big|_{(I,J)} \equiv s\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - s'\,\mathbf{r}^J_{\mathfrak{p}}$$

und daraus $\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{mm}}$ durch $g_{\mathfrak{pp}} \to g_{\mathfrak{mm}}$ und $\mathbf{r}_{\mathfrak{p}} \to \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}$.

Bezüglich der streu-relevanten Projektionen $\tilde{F}^{(1)}[F^C]$, $\tilde{F}^{(1)}[F^C]$ verweisen wir auf Anhang F. Dort leiten wir her – vgl. die Gln. (F.128''), (F.128''') mit $\nu \equiv 4$:

$$\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|) = -\mathrm{i}\,\pi\cdot\lambda^2\ \mathcal{K}_2(\zeta) \tag{2.237}$$

$$\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\mathbf{x}|) = -\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}\cdot\mathcal{K}_1(\zeta) \tag{2.237'}$$

$$\lambda \equiv \lambda_4 = 8/3\pi, \quad \zeta \equiv \sqrt{|\mathbf{x}|^2/\lambda^2 + \mathrm{i}\,\epsilon} \cong |\mathbf{x}|/\lambda$$

durch ein- beziehungsweise zweifache Differentiation $-\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{d}{d|\mathbf{x}|}$ aus der Projektion $\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|) \equiv \tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|) = -\mathrm{i}\,4\pi\cdot\lambda^4\,\mathcal{K}_3(\zeta)$, vgl. Gl. (2.206). Diese Darstellung wiederum ist Konsequenz unseres Ansatzes $F^C(\tilde{x}^2) \equiv F^{NC}(\tilde{x}^2) = \frac{1}{2}\lambda^2\,\mathcal{K}_2(\zeta)$, $\zeta \equiv \sqrt{-\tilde{x}^2/\lambda^2 + \mathrm{i}\,\epsilon} \cong \sqrt{-\tilde{x}^2}/\lambda$ für die konfinierende F-Korrelationsfunktion. Vgl. Gl. (2.210)ff., ferner Kap. 1.3, Gl. (1.82)ff. und Anh. F, die Gln. (F.1), (F.9).

2.5 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Diskussion

Die konfinierenden und nicht-konfinierenden Funktionen konstituieren vollständig die nahezu lichtartige T-Amplitude, die wir zusammenfassend darstellen durch die hergeleiteten expliziten Ausdrücke und diskutieren vor diesem Hintergrund.

Die T-Amplitude $T^{(s,t)}_{hh'}$ für Streuung der hadronischen Zustände $h^1(P_1)$, $h^2(P_2)$ in $h^{1'}(P_{1'})$, $h^{2'}(P_{2'})$ ist gegeben in Gl. (2.138) in Termen der T-Amplitude $\tilde{T}^{(s,\mathrm{b})}_{\mathfrak{u}\mathfrak{l}}$ für die zugrundeliegende

[2.40] Dies ist Konsequenz der induzierten Orientierung: $Apex \to Q$, $Apex \to AQ$ [statt $AQ \to Apex \to Q$], so daß die Antiquarks eingehen mit entgegengesetztem Vorzeichen, die sich im (AQ, AQ)-Beitrag kompensieren.

[2.41] Anhang F nimmt Bezug auf den verallgemeinerten Minkowski-Raums $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ mit Dimension d und Signatur σ, für den hier steht d subtrahiert die zwei ausintegrierten – „longitudinalen" – Dimensionen.

Loop-Loop-Streuung. Diese ist gegeben in Termen der Funktionen $\chi_{\imath\jmath}$, $\imath,\jmath\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$:

$$\tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; -2\mathrm{i}\,s\;\frac{n_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}\,n_{\mathfrak{N}_\mathfrak{m}}}{(2!)^2\,d_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}\,d_{\mathfrak{N}_\mathfrak{m}}} \times\Big[\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\,\chi_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}\;+\;\frac{2}{d_{SU(N_\mathrm{c})}}\;\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}{}^2\Big]\;\exp\,-\frac{1}{2!}\Big(\frac{n_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}}{d_{\mathfrak{N}_\mathfrak{p}}}\;\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}+\frac{n_{\mathfrak{N}_\mathfrak{m}}}{d_{\mathfrak{N}_\mathfrak{m}}}\;\chi_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}\Big) \tag{2.238}$$

$$\underset{\mathfrak{N}_\imath\equiv\mathfrak{F}}{=}\;-2\mathrm{i}\,s\;\frac{1}{(4N_\mathrm{c})^2}\;\Big[\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\,\chi_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}\;+\;\frac{2}{N_\mathrm{c}^2-1}\;\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}{}^2\Big]\;\exp\,-\frac{1}{4N_\mathrm{c}}\big(\chi_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}+\chi_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}\big) \tag{2.238$'$}$$

vgl. die Gln. (2.143), (2.143$'$), – dort eingesetzt in diesem Sinne:[2.42]

$$\langle W_\imath\rangle_A \;=\; \exp\,\frac{1}{2!}\,\frac{c_2(\mathfrak{N}_\imath)}{d_{SU(N_\mathrm{c})}}\;\chi_{\imath\imath} \;=\; \exp\,\frac{1}{2!}\,\frac{n_{\mathfrak{N}_\imath}}{d_{\mathfrak{N}_\imath}}\;\chi_{\imath\imath} \tag{2.239}$$

$$\underset{\mathfrak{N}_\imath\equiv\mathfrak{F}}{=}\;\exp\,\frac{1}{4N_\mathrm{c}}\;\chi_{\imath\imath} \tag{2.239$'$}$$

für die Vakuumerwartungswerte der einzelnen Wegner-Wilson-Loops $\langle W_\imath\rangle_A$, $\imath=\mathfrak{p},\mathfrak{m}$.

Durch die Funktion $\chi_{\imath\jmath}$ ist definiert die reellwertige Funktion $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$:[2.43]

$$\chi_{\imath\jmath} \;=\; -\mathrm{i}\;\langle g^2FF\rangle_A a^4\;\cdot\;\tilde{\chi}_{\imath\jmath} \qquad\qquad \imath,\jmath\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\} \tag{2.240}$$

vgl. Gl. (2.145), – und diese im Sinne der Tensorstrukturen $t^C_{\mu\check{\nu}\hat{\rho}\tilde{\sigma}}$ und $t^{NC}_{\mu\check{\nu}\hat{\rho}\tilde{\sigma}}$ des Korrelationstensors als Summe eines konfinierenden und eines nicht-konfinierenden Anteils:

$$\tilde{\chi}_{\imath\jmath} \;=\; \varkappa\,\tilde{\chi}^C_{\imath\jmath}\;+\;(1-\varkappa)\;\tilde{\chi}^{NC}_{\imath\jmath} \qquad\qquad \imath,\jmath\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\} \tag{2.241}$$

vgl. Gl. (2.148). Die Funktionen $\tilde{\chi}^C_{\imath\jmath}$, $\tilde{\chi}^{NC}_{\imath\jmath}$ sind unabhängig für die Indexpaare $\mathfrak{p}\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{p}\mathfrak{m}$. Sie sind definiert und ausgewertet in den vorangehenden Abschnitten 2.4.3 und 2.4.4 und seien zusammenfassend angegeben in systematischer Form – vgl. Gl. (2.149):

$$\tilde{\chi}_{\imath\jmath} \;=\; -\,\det\mathbb{SL}\;g_{\imath\jmath}\;\cdot\;\tilde{X}_{\imath\jmath} \qquad\qquad \imath,\jmath\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\} \tag{2.242}$$

unter Separation des rein longitudinal determinierten Faktors $-\det\mathbb{SL}\,g_{\imath\jmath}$ von Komponenten des metrischen Tensors. Die Funktionen $\tilde{X}_{\imath\jmath}$ sind vollständig bestimmt durch die Geometrie der Streuung in der x^1x^2-Transversalebene, in die aber – wir rekapitulieren Fußn. 2.28 –projiziert ist die longitudinale Dynamik der Streuung in Form der Abhängigkeit des relevanten Impaktvektors $\mathbf{b}$ von den Quark-Anteilen z_1, z_2 am Lichtkegelimpuls der Loops $W_\mathfrak{p}$, $W_\mathfrak{m}$.

Bezüglich der nicht-konfinierenden NC-Lorentz-Tensorstruktur folgt für die $\mathfrak{p}\mathfrak{m}$-Funktion – vgl. Gl. (2.203):

$$\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{1}{6}\;\sum\nolimits_{I,\,J\equiv Q,\,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,J}\;\;\tilde{F}[F^{NC}]\big(|\mathbf{r}^I_\mathfrak{p}-\mathbf{r}^J_\mathfrak{m}|\big) \tag{2.243}$$

$$\;=\; 8\cdot\lambda^4\,\frac{\pi}{12}\;\sum\nolimits_{I,\,J\equiv Q,\,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,J}\;\;\mathcal{K}_3\big(|\mathbf{r}^I_\mathfrak{p}-\mathbf{r}^J_\mathfrak{m}|/\lambda\big) \tag{2.243$'$}$$

und für die $\mathfrak{p}\mathfrak{p}$-Funktion – vgl. Gl. (2.205):

$$\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{1}{3}\Big\{\;\tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{0}|)\;-\;\tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{X}|)\;\Big\} \tag{2.244}$$

$$\;=\; 16\cdot\lambda^4\,\frac{\pi}{12}\Big\{\;1\;-\;\mathcal{K}_3(|\mathbf{X}|/\lambda)\;\Big\} \tag{2.244$'$}$$

die zweiten Identitäten mit $\tilde{F}[F^{NC}](|\mathbf{x}|)=-\mathrm{i}\,4\pi\cdot\lambda^4\,\mathcal{K}_3(|\mathbf{x}|/\lambda)$ nach Gl. (2.206), mit $\mathcal{K}_\nu(\zeta)\to 1$

[2.42] Die erste Identität in Gl. (2.239) folgt auf Basis der expliziten Darstellung von $W_\imath$ nach Gl. (2.141) unmittelbar aus Annahme (1): der *Existenz* einer konvergenten Entwicklung in Kumulanten K_n, und aus Annahme (2) eines *Gauß'schen* zugrundeliegenden stochastischen Prozesses: $K_n\equiv 0$, $\forall n\neq 2$; vgl. Gl. (1.59) bzw. die Ausführungen auf Seite 36. Für den Vorfaktor gilt: K_2 ist multipliziert mit 1/2!; es ist $K_2\equiv\langle g^2F^{(1)}F^{(2)}\rangle_A = c_2(\mathfrak{N})/d_{SU(N_\mathrm{c})}\,\langle g^2F^{(1)}{}_aF^{(2)}{}_a\rangle_A\cdot\mathbb{1}_\mathfrak{N}$ und $\langle g^2F^{(1)}{}_aF^{(2)}{}_a\rangle_A=\langle g^2FF\rangle_A\cdot D_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}$ mit $F^{(i)}\equiv F_{\mu_i\nu_i}$, vgl. die Gln. (1.63$'$), (1.66), ferner $\mathrm{tr}_\mathfrak{N}\exp\alpha\mathbb{1}_\mathfrak{N}=\exp\alpha$ für $\mathbb{C}$-Zahlen α. Die zweite Identität in Gl. (2.238) folgt mit $c_2(\mathfrak{N})d_\mathfrak{N}=n_\mathfrak{N}\,d_{SU(N_\mathrm{c})}$, vgl. Gl. (A.69). Gl. (2.238$'$) folgt mit $d_{SU(N_\mathrm{c})}=N_\mathrm{c}^2-1$, explizit eingesetzt $d_\mathfrak{F}\equiv N_\mathrm{c}$, $n_\mathfrak{F}\equiv 1/2$ – vgl. die Gln. (A.58), (A.65) – im Fall $\mathfrak{N}_\imath\equiv\mathfrak{F}$ von Quark-Loops. Vgl. Fußn. 2.24

[2.43] Die $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$-impliziten Vektoren sind *reskaliert* „in Einheiten von a“ – vgl. Gl. (2.147$'$) – folglich $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$ selbst.

für $\zeta \to 0$, vgl. Gl. (2.180′). Die $\mathfrak{mm}$-Funktion $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{mm}}$ folgt aus $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$ durch Übergang $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$.

Bezüglich der konfinierenden C-Lorentz-Tensorstruktur folgt für die $\mathfrak{pm}$-Funktion – vgl. Gl. (2.234):

$$\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}} = \mathrm{i}\,\frac{1}{12}\,\sum\nolimits_{I,J\equiv Q,AQ}\,\mathrm{sign}_{I,J} \tag{2.245}$$
$$\times\ \mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}\cdot\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{m}}\ \int_0^1 ds\,\Big\{\,\tilde{F}^{(1)}[F^C]\big(|s\,\mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}-\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{m}}|\big)\ +\ \tilde{F}^{(1)}[F^C]\big(|\mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}-s\,\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{m}}|\big)\,\Big\}$$

$$= \lambda^4\,\frac{\pi}{12}\,\sum\nolimits_{I,J\equiv Q,AQ}\,\mathrm{sign}_{I,J} \tag{2.245′}$$
$$\times\ \mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}\cdot\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{p}}/\lambda^2\ \int_0^1 ds\,\Big\{\,\mathcal{K}_2\big(|s\,\mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}-\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{m}}|/\lambda\big)+\ \mathcal{K}_2\big(|\mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}-s\,\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{m}}|/\lambda\big)\,\Big\}$$

und für die $\mathfrak{pp}$-Funktion – vgl. Gl. (2.205):

$$\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}} = \mathrm{i}\,\frac{1}{12}\,\sum\nolimits_{I,J\equiv Q,AQ}\,\mathrm{sign}_{I,J} \tag{2.246}$$
$$\times\ \mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}\cdot\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{p}}\ \int_0^1 ds\ \int_0^1 ds'\ \Big\{\,2\,\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|)\ -\ |\mathbf{x}|^2\,\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\mathbf{x}|)\,\Big\}\ \Big|_{(I,J)}$$

$$= 2\cdot\lambda^4\,\frac{\pi}{12}\,\sum\nolimits_{I,J\equiv Q,AQ}\,\mathrm{sign}_{I,J} \tag{2.246′}$$
$$\times\ \mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}\cdot\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{p}}/\lambda^2\ \int_0^1 ds\ \int_0^1 ds'\ \Big\{\,\mathcal{K}_2(|\mathbf{x}|/\lambda)\ -\ \frac{1}{4}\,\big(|\mathbf{x}|/\lambda\big)^2\,\mathcal{K}_1(|\mathbf{x}|/\lambda)\,\Big\}\ \Big|_{(I,J)}$$

$$\text{mit}\qquad \mathbf{x}\big|_{(I,J)}\ \equiv\ \mathbf{x}(s,s')\big|_{(I,J)}\ \equiv\ s\,\mathbf{r}^{I}_{\mathfrak{p}}-s'\,\mathbf{r}^{J}_{\mathfrak{p}}$$

die zweiten Identitäten mit $\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|)=-\mathrm{i}\,\pi\cdot\lambda^2\,\mathcal{K}_2(|\mathbf{x}|/\lambda)$ nach Gl. (2.237) beziehungsweise $\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\mathbf{x}|)=-\mathrm{i}\,\frac{\pi}{2}\cdot\mathcal{K}_1(|\mathbf{x}|/\lambda)$ nach Gl. (2.237′). Die $\mathfrak{mm}$-Funktion $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{mm}}$ folgt aus $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$ durch Übergang $\mathbf{r}_{\mathfrak{p}}\to\mathbf{r}_{\mathfrak{m}}$, ergo $z_1\to z_2$, $\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$, $\mathbf{b}\to-\mathbf{b}$.

Wir rekapitulieren die Positionen der $\mathfrak{p}$-(Anti)Quarks:[2.44]

$$\mathbf{r}^{Q}_{\mathfrak{p}}\ \equiv\ \ \bar{z}_1\,\mathbf{X}\ +\ \mathbf{b}/2 \tag{2.247}$$
$$\mathbf{r}^{AQ}_{\mathfrak{p}}\ \equiv\ -\,z_1\,\mathbf{X}\ +\ \mathbf{b}/2 \tag{2.247′}$$

vgl. die Gln. (2.169), (2.169′), – und invertiert:

$$\mathbf{X}\ =\ \mathbf{r}^{Q}_{\mathfrak{p}}\ -\ \mathbf{r}^{AQ}_{\mathfrak{p}} \tag{2.248}$$
$$\mathbf{b}/2\ =\ z_1\,\mathbf{r}^{Q}_{\mathfrak{p}}\ +\ \bar{z}_1\,\mathbf{r}^{AQ}_{\mathfrak{p}} \tag{2.248′}$$

für Ausdehnung beziehungsweise Impakt. Die $\mathfrak{p}$-Größen folgen durch Übergang

$$z_1\ \longrightarrow\ z_2\,,\qquad \mathbf{X}\ \longrightarrow\ \mathbf{Y}\,,\qquad \mathbf{b}\ \longrightarrow\ -\mathbf{b} \tag{2.249}$$

vgl. Gl. (2.170′). Vor dem Hintergrund dieser Notation diskutieren wir wie folgt die Funktionen $\tilde{X}^{C}_{ij}$, $\tilde{X}^{NC}_{ij}$ für Indexpaare $ij\equiv\mathfrak{pp}$, $\mathfrak{mm}$ und $\mathfrak{pm}$.

Wir stellen fest *Übereinstimmung* der $\mathfrak{pm}$-Funktionen mit den entsprechenden Ausdrücken, die wir herleiten in Ref. [124]: vgl. die Gln. (2.243′), (2.245′) hier mit Gl. (4.33) dort[2.45], – da *per constructionem* der $\mathfrak{p}$-,$\mathfrak{m}$-Koordinatenlinien der separierte Faktor $-\det\mathbb{S}\mathbb{L}\,g_{\mathfrak{pm}}$ übergeht in $-\det\mathbb{L}\,g_{+-}\equiv 1$ im Limes $s\to\infty$; vgl. die Diskussion der Gln. (2.150), (2.150′).

Wir stellen fest in den gestrichenen Darstellungen – die Gln. (2.243′), (2.244′), (2.245′) und (2.246′) – den *globalen Faktor* λ^4, wenn – wie geschehen – die Vektoren $\mathbf{r}^{Q}_{\mathfrak{p}}$, $\mathbf{r}^{AQ}_{\mathfrak{p}}$ und $\mathbf{r}^{Q}_{\mathfrak{m}}$, $\mathbf{r}^{AQ}_{\mathfrak{m}}$ konsistent skaliert sind mit λ. Diese Vektoren selbst sind bereits implizit skaliert mit

[2.44] relativ zum gemeinsamen Apex $\omega\equiv\omega^i\tilde{e}_{(i)}$ der verallgemeinerten Pyramiden $P_{\mathfrak{p}}$, $P_{\mathfrak{m}}$

[2.45] Wir weisen hin auf auf den Faktor 12, um den die $\tilde{\chi}$-Funktionen dort größer definiert sind als hier.

der Korrelationslänge a, vgl. Gl. (2.147′), – über deren Bedeutung als *Korrelations*-Länge genau λ fixiert wird, vgl. die zweite Relation in Gl. (1.79) bzw. (F.79) und explizit Anh. F.4.3. Diese Skalierung a^{-1} der Vektoren – ergo die Skalierung a^{-4} der χ- und $\tilde{\chi}$-Funktionen – impliziert Skalierung mit a^4 des faktorisierten Gluonkondensats $\langle g^2 FF\rangle_A$; zusammen mit dem Faktor λ^4 also $(a\lambda)^4$. Es ist folglich das Produkt $(a\lambda)$ die eigentliche Korrelationslänge des stochastischen Prozeßes, der zugrunde liedt dem Eichfeld-Vakuumerwartungswert der Quantenchromodynamik; – a ist numerisch modifiziert durch den Faktor $\lambda = 8/3\pi \cong 0.849$.

Die ungestrichenen Darstellungen – die Gln. (2.243), (2.244), (2.245) und (2.246) – sind allgemein gültig für nicht weiter spezifizierte Korrelationsfunktionen F^C, F^{NC}, die gestrichenen Darstellungen ist gültig auf Basis unseres speziellen Ansatzes für diese. Analytische Lösbarkeit der $\mathcal{K}_\mu$-Integrale ist daher denkbar und sei diskutiert bezüglich der Funktion $\tilde{X}^C_{\mathfrak{pp}}$ nach Gl. (2.246′). Es gilt – mit $I, J \in \{Q, AQ\}$:

$$\big|\mathbf{x}(s,s')\big|_{(I,J)} \;\equiv\; \big|s\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - s'\,\mathbf{r}^J_{\mathfrak{p}}\big| \;=\; \begin{cases} |s-s'|\cdot|\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}}| & I \equiv J \\ \big|(s-s')\mathbf{b}/2 + (z_1\,s + \bar{z}_1\,s')\mathbf{X}\big| & I \not\equiv J \end{cases} \tag{2.250}$$

Wir betrachten daher:[2.46]

$$I_{n,\mu}(\mathbf{a},\mathbf{a}') \;\equiv\; \int_0^1 ds \int_0^1 ds' \;\big(|\mathbf{x}|/\lambda\big)^n\,\mathcal{K}_\mu(|\mathbf{x}|/\lambda) \tag{2.251}$$

$$= \int_{-1}^1 d\zeta' \int_0^{|\zeta'|} d\zeta \;\big(|\mathbf{x}|/\lambda\big)^n\,\mathcal{K}_\mu(|\mathbf{x}|/\lambda) \;\equiv\; \int_{-1}^1 d\zeta'\; I'_{n,\mu}(\mathbf{a},\mathbf{a}';\zeta') \tag{2.251′}$$

$$\text{mit}\quad |\mathbf{x}| \equiv \big|(s-s')\mathbf{a} + (z_1\,s + \bar{z}_1\,s')\mathbf{a}'\big| \qquad \text{bzw.}\quad |\mathbf{x}| \equiv |\zeta\,\mathbf{a} + \zeta'\mathbf{a}'|$$

die zweite Darstellung unter Substitution $(s,s') \to (\zeta,\zeta')$ mit $\zeta \equiv s - s'$, $\zeta' \equiv z_1 s + \bar{z}_1 s'$ und Jacobi-Determinante $+1$. Die Funktion $\tilde{X}^C_{\mathfrak{pm}}$ nach Gl. (2.245′) ist bestimmt durch ein Integral vom Typ des inneren ζ-Integrals $I'_{n,\mu}(\mathbf{a},\mathbf{a}';\zeta')$ mit $\zeta' \equiv 1$. Es gilt

$$|x|/\lambda \;\equiv\; a/\lambda \cdot \sqrt{(\zeta+\alpha)^2 - \alpha'^2} \tag{2.252}$$

$$\text{mit}\qquad \alpha \equiv \mathbf{a}\cdot(\zeta'\mathbf{a}')/a^2\,,\quad \alpha' \equiv \alpha^2 - (\zeta' a')^2/a^2 \qquad \text{und}\quad a \equiv |\mathbf{a}|\,,\;\; a' \equiv |\mathbf{a}'|$$

und für das ζ-Integral unter Substitution $\zeta \to z \equiv |x|/\lambda$:

$$I'_{n,\mu}(\mathbf{a},\mathbf{a}';\zeta') \;=\; \int_0^{|\zeta'|} d\zeta \;\big(|\mathbf{x}|/\lambda\big)^n\,\mathcal{K}_\mu(|\mathbf{x}|/\lambda) \qquad |\mathbf{x}| \;\equiv\; |\zeta\,\mathbf{a} + \zeta'\mathbf{a}'| \tag{2.253}$$

$$= \big(a/\lambda\big)^{-3/2} \int_{z_\star}^{z^\star} dz\;\; \frac{z^{n+1}\,\mathcal{K}_\mu(z)}{\sqrt{z^2+\alpha''^2}} \qquad \alpha'' \equiv a/\lambda\cdot\alpha' \tag{2.253′}$$

$$\text{mit}\qquad z_\star \equiv a/\lambda\cdot\sqrt{\alpha^2 - \alpha'^2} \qquad z^\star \equiv a/\lambda\cdot\sqrt{(|\zeta'|+\alpha)^2 - \alpha'^2}$$

Daraus folgt für $\mathbf{a}' \equiv \mathbf{0} \Rightarrow \alpha, \alpha', \alpha'' \equiv 0$:

$$I'_{n,\mu}(\mathbf{a},\mathbf{0};\zeta') \;=\; \big(a/\lambda\big)^{-3/2} \int_0^{a/\lambda\,\cdot\,|\zeta'|} dz\;\; z^n\,\mathcal{K}_\mu(z) \tag{2.254}$$

In Ref. [96], Gradstein, Ryshik 5.52.1 ist angegeben ein Integral[2.47], aus dem unmittelbar folgt das $\mathbf{a}' \equiv \mathbf{0}$-Integral nach Gl. (2.254) für Indizes $n \equiv 1$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$; ungeradzahlige Indizes n folgen durch partielle Integration. Für geradzahlige Indizes n kann analytisch kein Ausdruck angegeben werden, – ergo nicht für die (Q,Q)- und (AQ,AQ)-Terme der Funktion $\tilde{X}^C_{\mathfrak{pp}}$ [$\tilde{X}^C_{\mathfrak{mm}}$] nach Gl. (2.246′). Desgleichen kann analytisch kein Ausdruck angegeben werden für das allgemeinere $\mathbf{a}' \not\equiv \mathbf{0}$-Integral nach Gl. (2.253′), – ergo nicht für die Integrale der (Q,AQ)- und

[2.46] Die Parameter $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ und $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ seien in praxi gesetzt entsprechend den Gln. (2.246′), (2.250).

[2.47] eigentliche crux ist, daß wir die Integrale benötigen als *unbestimmte* Integrale

(AQ,Q)-Terme der Funktion $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}}$ $[\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{mm}}]$ und die der Funktion $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}}$ nach Gl. (2.245′).

Die Darstellung durch das Integral $I'_{n,\mu}(\mathbf{a},\mathbf{a}')$ nach Gl. (2.251′) mit dem inneren ζ-Integral $I'_{n,\mu}(\mathbf{a},\mathbf{a}';\zeta')$ nach Gl. (2.253′) beziehungsweise (2.254) kann aber zweckmäßig zugrunde gelegt werden einer numerischen Analyse.

Qualitativ können die Ausdrücke der $\mathfrak{pm}$-, $\mathfrak{pp}$- und $\mathfrak{mm}$-Funktionen – einschließlich der sie wesentlich konstituierenden Integalausdrücke – leicht in bekannten Zusammenhang gebracht werden. Streuung im Limes $s\to\infty$ ist bestimmt wegen $-\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{pp}}\to-\det\mathbb{L}\,g_{++}\equiv 0$ und $-\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{mm}}\to-\det\mathbb{L}\,g_{--}\equiv 0$ vollständig bestimmt durch die Funktionen $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pm}}$, $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}}$ nach den Gln. (2.243′), (2.245′). Diese sind bekannt aus früheren Arbeiten; Referenzen und eine ausführliche Diskussion folgen in Kapitel 3, vgl. insbes. die Abschnitte 3.2.1 und 3.2.2.

An dieser Stelle seien qualitativ diskutiert die (Integral)Ausdrücke, die konstituieren die $\mathfrak{pp}$-Funktionen $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$, $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}}$ nach den Gln. (2.243′), (2.245′) – und analog die $\mathfrak{mm}$-Funktionen $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{mm}}$, $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{mm}}$. Die durch sie vermittelten Beiträge verschwinden erst im Limes $s\to\infty$ aufgrund des verschwindenden Komponente $g_{\mathfrak{pp}}$ des metrischen Tensors als Vorfaktor. Sie sind Konsequenz dessen, daß für endliches s der Vakuumerwartungswert eines einzelnen Wegner-Wilson-Loops nicht identisch Eins ist, daß heißt der nicht-verschwindenden internen Wechselwirkung der (Anti)Quarks des Loops. Die Funktionen $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$, $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}}$ sollten in Zusammenhang stehen mit der entsprechenden Größe eines statischen, das heißt eines Quark-Antiquark-Paares im entgegengesetzten Limes verschwindender kinetischer Schwerpunktenergie: mit der (statischen) Stringspannung σ, die dessen Confinement subsumiert. Sie sollten repräsentieren die Stringspannung eines schnell bewegten Quark-Antiquark-Paares. Sei verwiesen auf die Diskussion in Zusammenhang der Gln. (1.60) und (1.61) auf Seite 35f.

Die $\mathfrak{pp}$-Funktionen repräsentieren die Integration zweier paralleltransportierter Feldstärken bezüglich desselben Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, die *korreliert* sind als Konsequenz der Cluster-Eigenschaft der Kumulante Zweiter Ordnung, durch die wesentlich bestimmt ist der Korrelations-Lorentztensor und daher die Funktionen $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$, $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}}$. Korrelationslänge ist $(a\lambda)$, Stärke bei maximaler Korrelation ist Eins per definitionem. Die integrierte Funktion kann daher approximiert werden als Eins, falls ihre Argumente nicht weiter auseinander liegen als $(a\lambda)$, und Null sonst.

Für die konfinierende Funktion $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}}$ nach Gl. (2.246′) folgt bei festgehaltener ersten Feldstärke für das Integral der zweiten genau $(a\lambda)\cdot 1$, dann für das Integral der ersten Feldstärke genau $\left|\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\right|$, der Betrag des Integrationsgebietes:

$$\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}} \;\propto\; \left|\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\right| \quad \underset{|\mathbf{X}|/\lambda\gg 1}{\sim} \quad \left|\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}\,\text{min.}}\right| \;\equiv\; |\mathbf{X}|/\lambda \tag{2.255}$$

Dazu in Kontrast gilt für die nicht-konfinierende Funktion $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$ nach Gl. (2.244′):

$$\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}} \;\propto\; \left\{\,1\;-\;\mathrm{e}^{-|\mathbf{X}|/\lambda}\;\;P_3(|\mathbf{X}|/\lambda)\right\} \quad \underset{|\mathbf{X}|/\lambda\gg 1}{\sim} \quad \left\{\,1\;-\;\mathrm{e}^{-|\mathbf{X}|/\lambda}\right\} \tag{2.256}$$

da sich $\mathcal{K}_{\mu}(x)$ für $\mathrm{Re}\mu>0$, $x\in\mathbb{R}^{+}$ verhält wie $\sim\mathrm{e}^{-x}\cdot P_{\mu}(x)$, mit P_{μ} einer Potenzreihe, die normiert ist auf Eins für verschwindendes Argument.

Die konventionelle Stringspannung des Systems des $\mathfrak{p}$-Quarks und -Antiquarks – durchgeführt der Limes $T_{\mathfrak{p}}\to\infty$ – ist genau der Koeffizient in dessen Potential vor deren minimaler transversaler Separation $|\mathbf{X}|$. Die Gln. (2.255), (2.256) dokumentieren einen Beitrag durch die konfinierende C-, nicht aber durch die nicht-konfinierende NC-Tensorstruktur. Dieses Resultat ist notwendig für Konsistenz damit, daß die statische Stringspannung abhängt von der C-, nicht aber von der NC-Korrelationsfunktion, vgl. Gl. (1.73) auf Seite 39. Und es legitimiert die Bezeichnung „konfinierend“ und „nicht-konfinierend“ auch für die $\mathfrak{pp}$- und $\mathfrak{mm}$-Funktionen der entsprechenden Struktur $t^{C}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$, $t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$ des Korrelationstensors.

Wir konstatieren, daß die Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{ij}$, $\tilde{\chi}^{NC}_{ij}$ mit unabhängigen Indexpaaren $\mathfrak{pp}$, $\mathfrak{mm}$ und $\mathfrak{pm}$ bestimmt sind durch die Geometrie in der x^1x^2-Transversalebene, in die aber projiziert ist die longitudinale Dynamik der Streuung in Form der Abhängigkeit des relevanten Impaktvektors $\mathbf{b}$ – vgl. Gl. (2.248′) und (2.249) – von z_1, z_2, den Anteilen der respektiven Quarks am gesamten Lichtkegelimpuls der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$. Diese Anteile z_1, z_2 sind Lorentz-invariant, wie wir zeigen in Anhang D.6.2. Sie hängen folglich nicht ab von den aktiven Lorentz-Boosts der Quark-Antiquark-Systeme „$\mathfrak{p}$“ und „$\mathfrak{m}$“ gegen einander, insbesondere nicht von s, dem durch diese Boosts kontrollierten Quadrat ihrer invarianten Schwerpunktenergie. Folglich hängt auch nicht ab von s: die Geometrie in der x^1x^2-Transversalebene – und die Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{ij}$, $\tilde{\chi}^{NC}_{ij}$.

Die s-Abhängigkeit Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{ij}$, $\tilde{\chi}^{NC}_{ij}$ für festes Indexpaar ij ist vollständig subsumiert in dem separierten Faktor $-\det\mathbb{SL}\,g_{ij}$, der bestimmt ist durch die korrespondierende Komponente g_{ij} des metrischen Tensors bezüglich der Koordinatenlinien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$. Diese Faktoren sind vorab der Auswertung der χ-Funktionen angegeben in den Gln. (2.150), (2.150′); wir rekapitulieren diese in Form

$$\begin{aligned} -\det\mathbb{SL}\;g_{\mathfrak{pp}} &= -\det\mathbb{L}\;g_{\mathfrak{pp}} = g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-} \\ &= \sinh^{-1}\psi \end{aligned} \tag{2.257}$$

$$\begin{aligned} -\det\mathbb{SL}\;g_{\mathfrak{pm}} &= -\det\mathbb{L}\;g_{\mathfrak{pm}} = g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-} \\ &= \tanh^{-1}\psi = 1 + \mathrm{e}^{-\psi}\sinh^{-1}\psi \end{aligned} \tag{2.257′}$$

und diskutieren sie wie folgt.

Die Koordinatenlinien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ sind definiert als die Richtungen der physikalischen nahezu lichtartigen Weltlinien der (Anti)Quarks, die exakt auf dem Lichtkegel verlaufen im Limes $s\to\infty$. Dies suggeriert zu fordern, daß die Koordinaten $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ übergehen in Lichtkegelkoordinaten $\bar{\mu}\in\{+,-,1,2\}$ und entsprechend die longitudinalen Komponenten des metrischen Tensors: $g_{\mathfrak{pm}}\to g_{+-}$, $g_{\mathfrak{pp}}\to g_{++}\equiv 0$ bezüglich der unabhängigen Komponenten. Dies ist simultan gegeben bei Forderung von *Längentreue* der vermittelnden Abbildung, das heißt, daß ihre Determinante identisch Eins ist oder äquivalent die Determinante des metrischen Tensors invariant:

$$\det\tilde{g} \equiv \det\bigl(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\bigr) \stackrel{!}{=} \det\bar{g} \equiv \det\bigl(g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\bigr) \tag{2.258}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad 1 \stackrel{!}{=} \det\mathbb{S} \equiv \det\bigl(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\bigr) = \frac{\sqrt{-\det\bar{g}}}{\sqrt{-\det\tilde{g}}} \qquad \text{für alle } \psi\in(0,\infty) \tag{2.258′}$$

Durch diese Forderung wird fixiert in Anhang D.4 – vgl. Gl. (D.93)ff. auf Seite 254 – die Normierungskonstante $\varrho\in\mathbb{R}^+$ der Koordinaten $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$.

Die ersten Identitäten der Gln. (2.257), (2.257′) sind unmittelbar die Forderung $\det\mathbb{S}\equiv 1$ nach Gl. (2.258′). Die zweiten Identitäten folgen aus $-\det\mathbb{L}\equiv(g_{+-})^{-1}$, dem Zusammenhang der Determinanten der Transformation von konventionellen Koordinaten $\mu\in\{0,1,2,3\}$ auf Lichtkegelkoordinaten und der einen unabhängigen Komponente g_{+-} deren metrischen Tensors – unabhängig von deren Normierung α. Die Faktoren $-\det\mathbb{SL}\,g_{ij}$ sind in der Tat unabhängig von der Konvention bezüglich der Lichtkegelkoordinaten, da *per constructionem* $g_{\mathfrak{pm}}\to g_{+-}$ und $g_{\mathfrak{pp}}\to g_{++}\equiv 0$ und daher im Grenzwert der α-abhängige Nenner g_{+-} gekürzt wird beziehungsweise multipliziert wird mit Null. Für endliche Werte von s, das heißt ψ ist diese Unabhängigkeit dokumentiert in den expliziten Ausdrücken – vgl. die zweiten Zeilen der Gln. (2.257), (2.257′) – die folgen auf Basis der gestellten Forderung.

Die Faktoren $-\det\mathbb{SL}\,g_{ij}$ sind gegeben als einfache Funktionen des *hyperbolischen Winkels* ψ. Dieser ist bestimmt als die Summe

$$\psi = \psi_{\mathfrak{p}} + \psi_{\mathfrak{m}} \tag{2.259}$$

mit

$$\beta_{\mathfrak{p}} \;=\; \tanh\psi_{\mathfrak{p}} \qquad \text{und} \qquad \beta_{\mathfrak{m}} \;=\; \tanh\psi_{\mathfrak{m}} \tag{2.260}$$

den Beta-Parametern, das heißt den Geschwindigkeiten der aktiven Lorentz-Boost der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ gegen einander. Durch diese wird unmittelbar kontrolliert das Quadrat s der invarianten Schwerpunktenergie des Loop-Loop-Systems. Sei $\beta_{\mathfrak{m}}$ [$\psi_{\mathfrak{m}}$] gewählt als Funktion von $\beta_{\mathfrak{p}}$ [$\psi_{\mathfrak{p}}$], so daß der Schwerpunkt des Systems (longitudinal) ruht. Dann ist der Limes $s\to\infty$ realisiert durch $\beta_{\mathfrak{p}}\to 1$, ergo $\psi_{\mathfrak{p}}\to\infty$, das heißt $\psi\to\infty$. Wir betrachten Werte dieser Parameter *nahe* dieser Grenzwerte, aber von diesen verschieden: $\beta_{\mathfrak{p}}<1$, ergo $\psi_{\mathfrak{p}}<\infty$. Endlich Werte von s sind realisiert durch endliche Werte von ψ.

Seien $P_{\mathfrak{p}}$, $P_{\mathfrak{m}}$ die Vierer-Impulsvektoren der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$. Dann sind mit diesen assoziiert die Lorentz-invarianten (Ruhe)Massen $M_{\mathfrak{p}}\equiv\sqrt{P_{\mathfrak{p}}^2}$, $M_{\mathfrak{m}}\equiv\sqrt{P_{\mathfrak{m}}^2}$ mit o.E.d.A. $M_{\mathfrak{p}}, M_{\mathfrak{m}}\gtrless 0$. Diese sind aufzufassen als Parameter der Funktion ψ von s: $\psi\equiv\psi_{M_{\mathfrak{p}},M_{\mathfrak{m}}}(s)$. Wir verweisen auf Anhang D.3, in dem – für allgemeine $M_{\mathfrak{p}}$, $M_{\mathfrak{m}}$ – hergeleitet werden explizite Relationen zwischen ψ, den Beta-Parametern $\beta_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}}$ und dem Quadrat s der invarianten Schwerpunktenergie. Auf Basis dieser Relationen folgen unmittelbar aus den Gln. (2.257), (2.257′) die Faktoren $-\det\mathbb{SL}\,g_{ij}$, durch die vollständig bestimmt ist die s-Abhängigkeit der $\tilde\chi$-Funktionen und ergo der Loop-Loop-Streuung.

Zur Illustration ist dargestellt in Abbildung 2.6 die s-Abhängigkeit der relevanten Faktoren $-\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{pp}}\equiv g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}=\sinh^{-1}\psi$ und $-\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{pm}}\equiv g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-}=1+\mathrm{e}^{-\psi}\sinh^{-1}\psi$ – der diagonalen und außerdiagonalen Komponente des metrischen Tensors bezüglich der Richtungen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ der Weltlinien der Wegner-Wilson-Loops, die normiert sind in der Weise, daß $g_{\mathfrak{pp}}$, $g_{\mathfrak{pm}}$ für $s\to\infty$ übergehen respektive in die Komponenten g_{++}, g_{+-} bezüglich Lichtkegelkoordinaten *unabhängig* von deren Normierung. Wir geben an die Fälle, in denen die Masse $M_{\mathfrak{p}}$ identifiziert ist mit der Ruhemasse des Protons und $M_{\mathfrak{m}}$ mit der des $\rho(770)$, des Protons oder des $J/\psi(3097)$, die entsprechen der s-Abhängigkeit von Proton-$\rho(770)$-, von Proton-Proton- und Proton-$J/\psi(3097)$-Streuung; dabei sind nicht erfaßt Effekte, die rühren von der s-Abhängigkeit der hadronischen (Quark-Antiquark-)Wellenfunktionen.[2.48]

Wir finden, daß die Abweichung des normierte Diagonalelements $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$ von seinem asymptotischen Wert Null größer ist als die Abweichung des normierten Außerdiagonalelements $g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-}$ von dessen asymptotischen Wert Eins. Dies ist unmittelbare Konsequenz dessen, daß die eine Abweichung gegeben ist durch die Funktion $\sinh^{-1}\psi$, die andere durch $\mathrm{e}^{-\psi}\sinh^{-1}\psi$, das heißt zusätzlich unterdrückt ist durch den Faktor $\mathrm{e}^{-\psi}$. Absolut beträgt die Abweichung von $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$ für $J/\psi(3097)$ etwa ein Prozent im Bereich von $\sqrt{s}$ zwischen 20 und 30 GeV. Dies erscheint zunächst numerisch eher klein und vernachlässigbar zu sein.

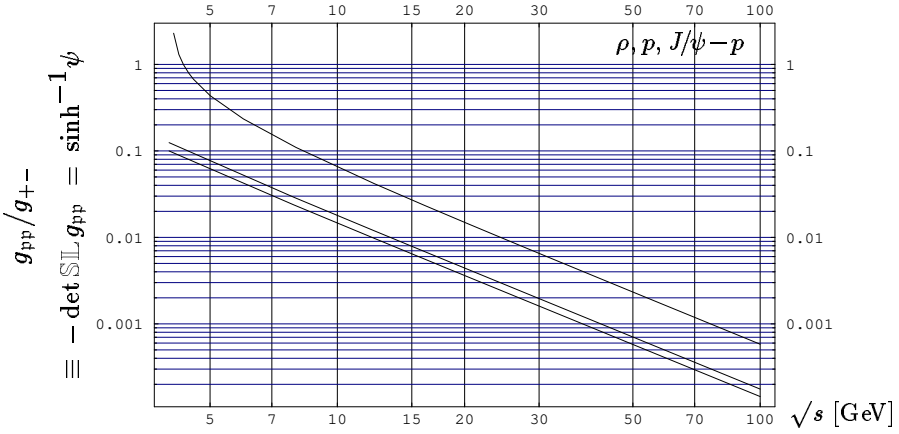
Wir betrachten, wie die longitudinalen Metrikkomponenten $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}\equiv g_{\mathfrak{mm}}/g_{+-}=\sinh^{-1}\psi$ und $g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-}=1+\mathrm{e}^{-\psi}\sinh^{-1}\psi$ explizit bestimmen die T-Amplitude $\tilde T_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ für die Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$:

$$\begin{aligned}\tilde T_{\mathcal{U}} \;=\; 2\mathrm{i}\,s\;&\frac{1}{(4N_{\mathrm{c}})^2}\;\left(\langle g^2FF\rangle_A a^4\right)^2 \\ &\times\left[\left(\frac{g_{\mathfrak{pp}}}{g_{+-}}\right)^2\tilde X_{\mathfrak{pp}}\,\tilde X_{\mathfrak{mm}}\;+\;\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\;\left(\frac{g_{\mathfrak{pm}}}{g_{+-}}\right)^2\tilde X_{\mathfrak{pm}}{}^2\right] \\ &\times\exp-\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\cdot\langle g^2FF\rangle_A a^4\cdot\frac{g_{\mathfrak{pp}}}{g_{+-}}\left(\tilde X_{\mathfrak{pp}}+\tilde X_{\mathfrak{mm}}\right)\end{aligned} \tag{2.261}$$

eingesetzt in Gl. (2.238′) die Gln. (2.240), (2.242). Es ist $\tilde X_{ij}=\varkappa\tilde X_{ij}^{C}+(1-\varkappa)\tilde X_{ij}^{NC}$ im Sinne von Gl. (2.241); bzgl. $\tilde X_{ij}^{C}$, $\tilde X_{ij}^{NC}$ explizit vgl. die Gln. (2.243′), (2.244′), (2.245′), (2.246′).

[2.48] So ist die Darstellung eines Hadrons als Superposition von Quark-Antiquark-Paaren – durch den niedrigsten Fock-Zustand allein – *streng* nicht zulässig für endliche Werte von s, *approximativ* zulässig nur oberhalb eines Schwellenwerts, wo Abstrahlungs- und Rekombinationsprozesse *numerisch* vernachlässigbar sind.

(a) diagonal:



(b) außerdiagonal:

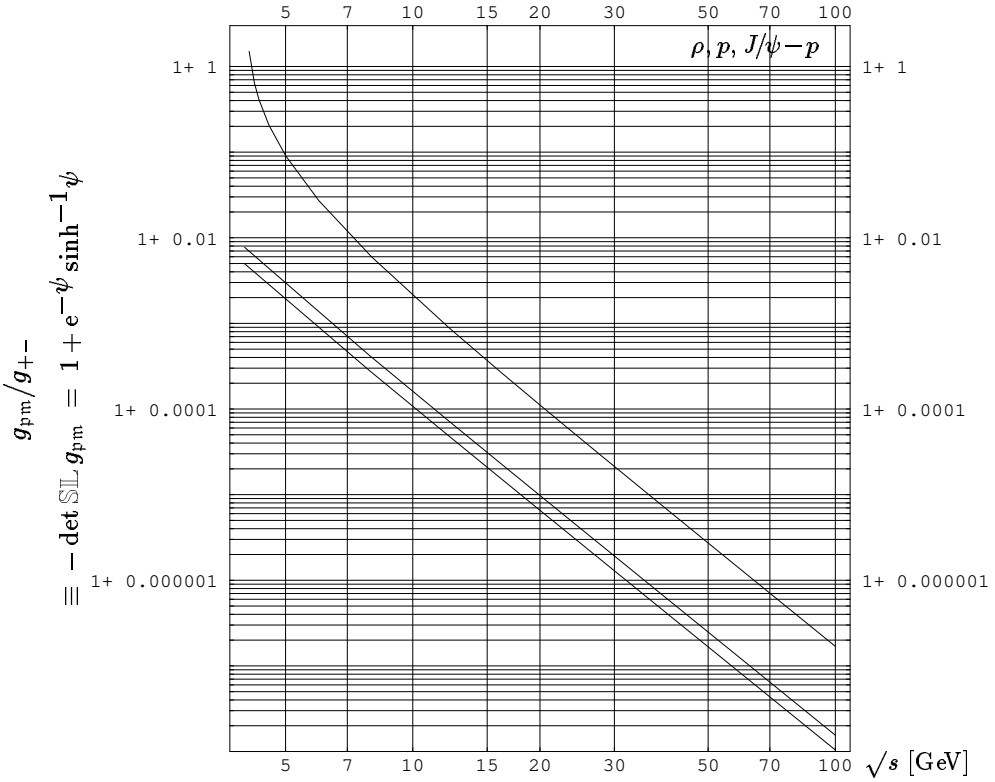


Abbildung 2.6: Komponenten $g_{\mathfrak{pp}}$, $g_{\mathfrak{pm}}$ des metrischen Tensors als Funktionen der invarianten Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$. (a) diagonal: die Größe $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-} \equiv \sinh^{-1}\psi$, die abweicht von Null für endliche $\sqrt{s}$; (b) außerdiagonal: die Größe $g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-} \equiv 1 + \mathrm{e}^{-\psi} \sinh^{-1}\psi$, deren Abweichung von Eins zusätzlich unterdrückt ist durch den Faktor $\mathrm{e}^{-\psi}$. Es hängt $\psi = \psi_{\mathfrak{p}} + \psi_{\mathfrak{m}}$ – mit $\beta_{\mathfrak{p}} = \tanh\psi_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}} = \tanh\psi_{\mathfrak{m}}$ – ab von $\sqrt{s}$ und den Massen des „$\mathfrak{p}$“- und „$\mathfrak{m}$“-Teilchens. Die Kurven beziehen auf die Fälle, die $M_{\mathfrak{p}}$ identifizieren mit der Ruhemasse des Protons und $M_{\mathfrak{m}}$ mit der des $\rho(770)$, des Protons oder des $J/\psi(3097)$ – mit zunehmender Diskrepanz zum asymptotischen Wert. Bzgl. der zugrundeliegenden Zahlenwerte vgl. Ref. [165], Particle Data Group: $M_p = 0.938\,271\,998(38)\,\mathrm{GeV}$; bzgl. $\rho(770)$, $J/\psi(3097)$ vgl. Tabl. 3.1.

Die Metrik-Komponenten $g_{\mathfrak{pp}}$, $g_{\mathfrak{pm}}$ sind nicht unabhängig. Induziert durch die Forderung der Gln. (2.258), (2.258′) besteht für die Determinanten der metrischen Tensoren der Zusammenhang $\det \tilde{g} = (g_{\mathfrak{pp}})^2 - (g_{\mathfrak{pm}})^2 \stackrel{!}{=} \det \bar{g} = -(g_{+-})^2$, ergo:

$$\left(g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-}\right)^2 \;=\; 1 \;+\; \left(g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}\right)^2 \tag{2.262}$$

Die Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ folgt in Form:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; 2\mathrm{i}\,s\;\frac{1}{(4N_{\mathrm{c}})^2}\;&\left(\langle g^2FF\rangle_A a^4\right)^2 \\ &\times\left[\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\,\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2 \;+\; \left(\frac{g_{\mathfrak{pp}}}{g_{+-}}\right)^2\cdot\left(\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}\,\tilde{X}_{\mathfrak{mm}} + \frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\,\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2\right)\right] \\ &\times\,\exp\,-\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\cdot\langle g^2FF\rangle_A a^4\cdot\frac{g_{\mathfrak{pp}}}{g_{+-}}\left(\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}+\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}\right)\end{aligned} \tag{2.263}$$

vgl. die Gl. (2.261). Im Limes $s\to\infty$ verschwindet $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$, ergo der zweite Summand in der eckigen Klammer und das Argument der Exponentialfunktion: Es folgt die bekannte asymptotische Formel von Dosch, Ferreira, Krämer in Ref. [63]; vgl. auch die Refn. [124, 148].

Für endliche Werte von s ist $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$ nichtverschwindender kleiner Parameter, dessen absolute Größe vollständig bestimmt ist durch s und $M_{\mathfrak{p}}$, $M_{\mathfrak{m}}$. Er tritt auf *quadratisch* in der eckigen Klammer, *linear* im Argument der Exponentialfunktion, so daß durch diese bestimmt ist die führende Korrektur für endliches s im Vergleich zum Grenzwert $s\to\infty$. Die Funktionen $\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}$, $\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}$ sind reell-positiv, ergo die führende Korrektur reell-negativ. Der Absolutbetrag der T-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ für die Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ ist monoton leicht ansteigende Funktion von s. Dies ist konsistent mit der experimentellen Beobachtung, daß der Beitrag nichtperturbativer Quantenchromodynamik – des *Soft Pomeron* – zu totalen Wirkungsquerschnitten leicht ansteigt mit s: bezogen auf die T-Amplitude wie $s^{1+\epsilon}$ mit der Eins rein kinematischen Ursprungs und zu identifizieren mit dem expliziten Faktor s unserer Formel und $\epsilon\cong 0.0808$ dem effektiven Intercept des Soft Pomeron.

Wir halten fest, daß die eckige Klammer darstellt den Vakuumerwartungswert beider Wegner-Wilson-Loops $\langle\,[W_{\mathfrak{p}}-1][W_{\mathfrak{m}}-1]\,\rangle_A$ und die Exponentialfunktion dessen Normierung $\langle W_{\mathfrak{p}}\rangle_A^{-1}\,\langle W_{\mathfrak{m}}\rangle_A^{-1}$ – vgl. Gl. (2.139′). Die führende Korrektur $\propto g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$ der Loop-Loop-Amplitude für endliche Werte von s rührt daher von den Vakuumerwartungswerten der einzelnen Loops, das heißt von Z_2 der Renormierungskonstante des Quarkfelds; sie ist Konsequenz der nichtverschwindenden Selbst-Wechselwirkung des Loops für endliches s, das heißt der Wechselwirkung des ihn konstituierenden Quarks und Antiquarks. Erst die nächstführende Korrektur $\propto (g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-})^2$ ist beeinflußt durch die bloße Loop-Loop-Wechselwirkung.

Angesichts der absolute Größe des Parameters $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$ – vgl. Abb. 2.6(a) – ist gerechtfertigt, die Exponentialfunktion zu entwickeln. Es folgt:

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; 2\mathrm{i}\,s\;&\left(\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\,\langle g^2FF\rangle_A a^4\right)^2 \\ &\times\left[\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\,\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2\right. \\ &\quad-\;(g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-})\cdot\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\left(\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\,\langle g^2FF\rangle_A a^4\right)\cdot\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2\left(\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}+\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}\right) \\ &\quad+\;(g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-})^2\cdot\left\{\left(\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}\,\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}+\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\,\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2\right)\right. \\ &\qquad\qquad\left.+\;\frac{1}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\left(\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\,\langle g^2FF\rangle_A a^4\right)^2\cdot\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2\left(\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}+\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}\right)^2\right\} \\ &\quad\left.+\;\mathcal{O}\left((g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-})^3\right)\right]\end{aligned} \tag{2.264}$$

vgl. Gl. (2.263). Die korrelierten Loop-Exponentiale im Ausdruck $\langle\,[W_{\mathfrak{p}}-1][W_{\mathfrak{m}}-1]\,\rangle_A$ sind bereits entwickelt bis zur Ordnung $\mathcal{O}\big((F_{\mu\nu})^6\big)=\mathcal{O}\big((\tilde{\chi}_{ij})^3\big)=\mathcal{O}\big((g_{ij}/g_{+-})^3\,(\tilde{X}_{ij})^3\big)$, so daß diese Formel die konsequentere ist – da *exakt* bis zu dieser Ordnung.

Die Darstellungen von $\tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ – die Gln. (2.263), (2.264) – dokumentieren Unterdrückung der $\mathfrak{pm}$- gegenüber den $\mathfrak{pp}$-,$\mathfrak{mm}$-Termen durch den Faktor $2/(N_{\mathrm{c}}^2-1)$ von $1/4$ in der physikalischen Quantenchromodynamik mit drei Colour-Freiheisgraden $N_{\mathrm{c}}\equiv 3$:[2.49]

$$\tilde{X}_{\mathfrak{pp}},\,\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}\;\longleftrightarrow\;\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{N_{\mathrm{c}}^2-1}}\,\tilde{X}_{\mathfrak{pm}} \tag{2.265}$$

Die Funktionen $\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}$, $\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}$ selbst erwartem wir von derselben Größenordnung wie $\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}$ – eher größer, da sie subsumieren Korrelation zweier paralleltransportierter Feldstärken *desselben* Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$ oder $W_{\mathfrak{m}}$. Absolut etwa für $\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}^{C}$: „Stringspannung“ σ multipliziert mit der transversalen (Minimal-)Ausdehnung $\mathbf{X}$ von $W_{\mathfrak{p}}$, mit σ von der Größenordnung der konventionellen Stringspannung eines statischen Quark-Antiquark-Paares; vgl. die Gln. (2.255), (2.256).

Es sind zu identifizieren als die effektiven Entwicklungsparameter

$$\alpha_{\mathfrak{pm}}\;\equiv\;\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\langle g^2\,F\,F\rangle_A a^4 \tag{2.266}$$

$$\alpha_{\mathfrak{pp}}\;\equiv\;(g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-})\cdot\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\,\langle g^2\,F\,F\rangle_A a^4 \tag{2.266$'$}$$

Der Parameter $\alpha_{\mathfrak{pp}}$ ist dominiert durch die Metrik-Komponente $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$, die numerisch klein ist für große Werte von s, ergo $\alpha_{\mathfrak{pp}}$. Im Limes $s\to\infty$ gilt $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}\to 0$ und $g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-}\to 1$, so daß die Loop-Loop-Amplitude in diesem Grenzwert vollständig gegeben ist als Entwicklung in dem Parameter $\alpha_{\mathfrak{pm}}$, den wir versehen mit den Indizes des $\mathfrak{pm}$-Terms, da er auftritt nur multipliziert mit der Colour-unterdrückten Funktion $\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}$, vgl. Gl. (2.265). Dieses Produkt ist in praxi numerisch klein; vgl. auch die Diskussion in Ref. [122]. Zusammen ist a posteriori gerechtfertigt die Entwicklung in Kumulanten.

In Tabelle 2.1/Abbildung 2.7 ist quantitativ diskutiert die $\sqrt{s}$-Abhängigkeit der Komponente $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-}$ des metrischen Tensors. Durch diese ist vollständig bestimmt die $\sqrt{s}$-Abhängigkeit der Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$, vgl. die Gln. (2.263), (2.264). Bereits Abbildung 2.6(a) dokumentiert asymptotisch für $s\to\infty$ *lineare Abhängigkeit* der doppellogarithmischen Auftragung. Wir betrachten daher als funktionalen Ansatz:

$$\ln\left(g_{\mathfrak{pp}}(s)/g_{+-}\right)\;=\;\ln\alpha-(1+\alpha')\cdot\ln s \tag{2.267}$$

$$\Longleftrightarrow\qquad g_{\mathfrak{pp}}(s)/g_{+-}\;=\;\alpha\cdot s^{-(1+\alpha')} \tag{2.267$'$}$$

und bestimmen die Parameter α, α'.

Diese Parameter hängen ab – wenn auch nur sehr schwach – davon, wie hoch der Bereich von $\sqrt{s}$ gewählt ist, in dem die exakte Kurve $g_{\mathfrak{pp}}(s)/g_{+-}$ approximiert wird; so sollte α' identisch verschwinden im Limes $s\to\infty$, in dem erwartet werden exakt-$1/s$-Korrekturen. Für praktische Anwendung wählen wir den Bereich $\sqrt{s}=10^3-10^4$ GeV, der zum einen genügend hoch ist, als „asymptotisch“ bezeichnet werden zu können, und zum anderen physikalisch zugänglich zu sein. Für Einfachheit des Verfahrens konstruieren wir die asymptotische Gerade – im Sinne doppellogarithmischer Auftragung – als Sekante durch die Punkte bezüglich der Intervall-Endpunkte: $(s_\star,\,g_{\mathfrak{pp}}(s_\star)/g_{+-})$, $(s^\star,\,g_{\mathfrak{pp}}(s^\star)/g_{+-})$ mit $s_\star\equiv 10^3$ GeV, $s^\star\equiv 10^4$ GeV. In Tabelle 2.1 sind – für die drei Fälle $M_{\mathfrak{p}}\equiv M_p$ und $M_{\mathfrak{m}}\equiv M_{\rho(770)}, M_p$ oder $M_{J/\psi(3097)}$ von Abb. 2.6(a) – angegeben numerisch die Funktionswerte $g_{\mathfrak{pp}}(s_\star)/g_{+-}$, $g_{\mathfrak{pp}}(s^\star)/g_{+-}$ und die

[2.49] Die 2 repräsentiert die zwei Möglichkeiten, je zwei paralleltransportierte Feldstärken von $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ zu kontrahieren in Paare bezüglich verschiedener Loops. Der Colour-Faktor $1/d_{SU(N_{\mathrm{c}})}\equiv 1/(N_{\mathrm{c}}^2-1)$ folgt aus differierender Kontraktion der Eichgruppen-Tensorstruktur der $\mathfrak{pm}$- gegenüber der $\mathfrak{pp}$-,$\mathfrak{mm}$-Terme. Vgl. Fußn.2.24.

Parameter α, α' des – doppellogarithmisch linearen – Zusammenhangs $g_{\mathfrak{pp}}(s)/g_{+-} = \alpha \cdot s^{-(1+\alpha')}$					
	$g_{\mathfrak{pp}}(s_\star)/g_{+-}$ für $\sqrt{s_\star} \equiv 10^3$ GeV	$g_{\mathfrak{pp}}(s^\star)/g_{+-}$ für $\sqrt{s^\star} \equiv 10^4$ GeV	$\ln \alpha$	α	α'
$p-\rho(770)$	$1.4436\,2742\,140 \times 10^{-6}$	$1.4436\,2531\,738 \times 10^{-8}$	0.3671 6336	1.4436 337	$0.3164\,8281 \times 10^{-6}$
$p-p$	$1.7607\,1178\,457 \times 10^{-6}$	$1.7607\,0871\,546 \times 10^{-8}$	0.5657 2338	1.7607 210	$0.3785\,1038 \times 10^{-6}$
$p-J/\psi(3097)$	$5.8114\,7365\,669 \times 10^{-6}$	$5.8114\,1341\,340 \times 10^{-8}$	1.7598 653	5.8116 544	$2.2510\,178 \times 10^{-6}$

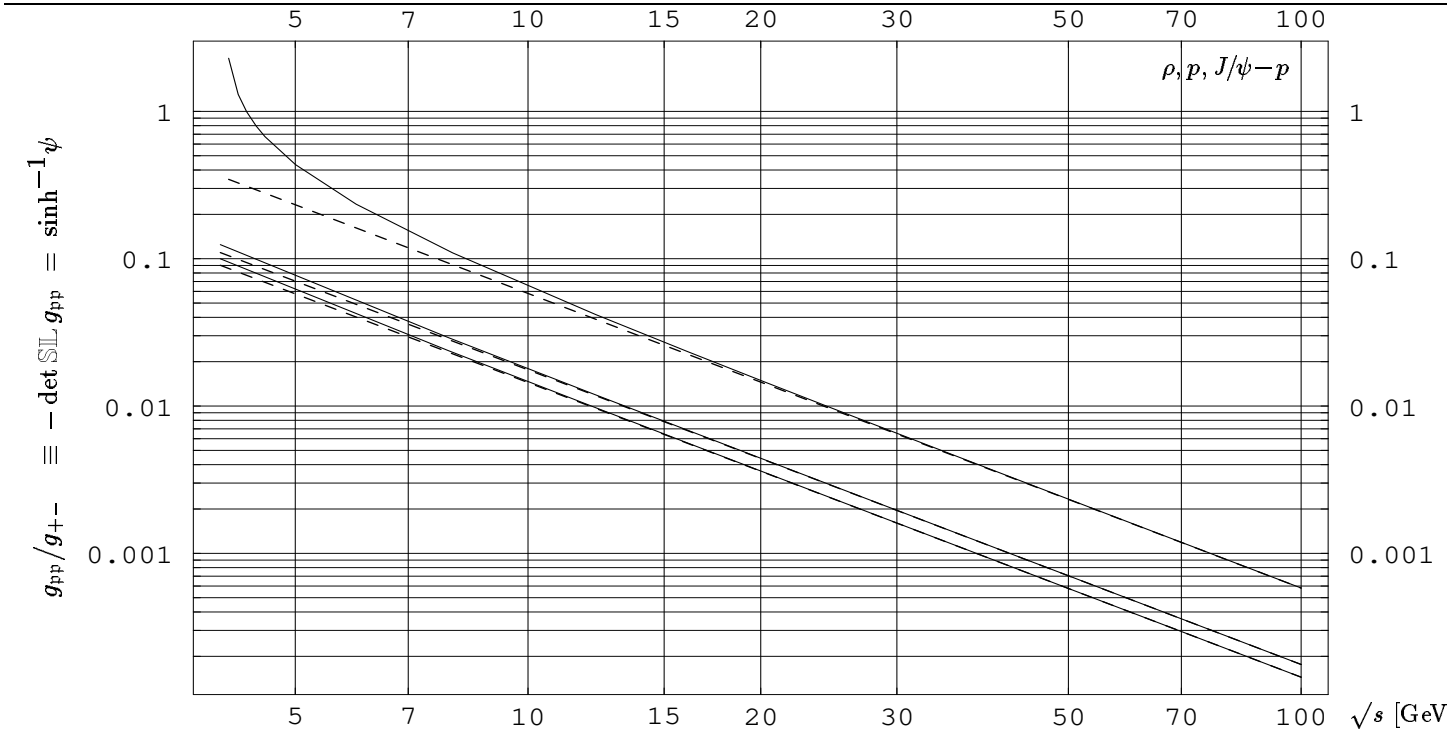


Tabelle 2.1/Abbildung 2.7: DoppelLogarithmische Auftragung der $\sqrt{s}$-Abhängigkeit der Metrik-Komponente $g_{\mathfrak{pp}}$ zeigt asymptotisch linearen Zusammenhang: $\ln(g_{\mathfrak{pp}}(s)/g_{+-}) = \ln\alpha - (1+\alpha')\cdot\ln s \Leftrightarrow g_{\mathfrak{pp}}(s)/g_{+-} = \alpha \cdot s^{-(1+\alpha')}$. Angegeben sind Parameter und Auftragung approximierender Geraden – konstruiert als Sekanten der Punkte für $\sqrt{s} = 10^3$ und 10^4 GeV. Es ist $M_{\mathfrak{p}} \equiv M_p$ und $M_{\mathfrak{m}} \equiv M_{\rho(770)}, M_p, M_{J/\psi(3097)}$ wie in Abb. 2.6(a).

resultierenden Zahlenwerten für $\ln\alpha$, α und α'. Zur Illustration sind in Abbildung 2.7 dargestellt in doppellogarithmischer Auftragung die durch sie bestimmten Geraden – gestrichelte versus durchgezogene Linien – gegen die exakten Kurven.

Wir fassen zusammen wie folgt Tabelle 2.1 und Abbildung 2.7. Die Steigung der approximierenden Geraden differiert von der asymptotischen Geraden durch Werte von α' von der Größenordnung einiger 10^{-7} bis 10^{-6}. Die Parameter α, α' sind fixiert weit außerhalb des $\sqrt{s}$-Intervalls, über das wir auftragen die approximierende Gerade und die exakte Kurve für $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}(s)/g_{+-}$. Signifikante Diskrepanz besteht dennoch nur für kleine Werte von $\sqrt{s}$; oberhalb von $\sqrt{s}\cong 15$, 20 beziehungsweise 50 GeV ist in praxi die Asymptotik „perfekt“ realisiert.

Dies unterstreicht, daß der absolute Effekt endlicher Werte von s gegenüber dem Limes $s\to\infty$ nur klein ist. Dies genau läßt erwarten die experimentelle Beobachtung, daß der s-Abhängigkeit der T-Amplitude entspricht ein leichter Anstieg wie $s^{1+\epsilon}$, die abweicht von der kinematischen Abhängigkeit durch ein numerisch kleines Epsilon von $\epsilon\cong 0.0808$. Die quantitative Verifizierung dieses subtilen Anstiegs mit s gegen den Grenzwert für $s\to\infty$ kann nur erfolgen auf Basis *expliziter* Auswertung der T-Amplitude $\tilde{T}_{\mu}^{(s,\mathbf{b})}$ entsprechend den Gln. (2.263), (2.264) für die Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$. Diese wiederum schließt ein die explizite Auswertung der Funktionen $\tilde{X}_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$, $\tilde{X}_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}$, die ausdrücken die Selbstwechselwirkung der Loops und nicht auftreten im Limes $s\to\infty$. Gegenüber der Auswertung der bekannten $s\to\infty$-asymptotischen Loop-Loop-Amplitude ist daher die Auswertung der Loop-Loop-Amplitude für endliche Werte von s technisch aufwendiger. Sie ist aber straightforward, so daß wir sie für diese Arbeit zurückstellen.[2.50]

Es besteht berechtigte Annahme, daß die hergeleitete nahezu lichtartige T-Amplitude für die Streuung zweier Wegner-Wilson-Loops die beobachtete s-Abhängigkeit reproduziert. – Unter der Einschränkung, daß sie per constructionem erfaßt nicht-observable Loop-Loop-, nicht aber observable Hadron-Hadron-Streuung, das heißt den Einfluß hadronischer Wellenfunktionen; vgl. Fußn.2.48. Wir knüpfen an an die Diskussion in Abschnitt 2.1.

Die T-Amplitude für Parton-Parton-Streuung für große invariante Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ und kleinen invarianten Impulstransfer $\sqrt{-t}$ ist gegeben in Termen der Vakuumerwartungswerte $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ beider und der einzelnen korrespondierenden Wegner-Wilson-Linien. Diese beziehen sich auf die *physikalischen* Parton-Parton-Trajektorien, die nahezu lichtartig sind mit einer kleinen zeitartigem Komponente. Die Herleitung Nachtmanns – vgl. Ref. [146] und unseren Abriß in Abschn. 2.3.2 – berücksichtigt konsequent die führende Ordnung bezüglich s. Dies involviert formal den Übergang der physikalischen nahezu lichtartigen Trajektorien zu deren lichtartigen Limites unter $s\to\infty$.

Verlinde, Verlinde zeigen in Ref. [221] für Quark-Quark-Streuung, daß dieser Limes singulär ist, wie etwa folgt aus der perturbativen Entwicklung. Diese Singularität kann verstanden werden als Konsequenz infraroter Divergenzen, die daher rühren, daß die im Limes $s\to\infty$ auf den Lichtkegel gezwungene Propagation der Quarks impliziert das Verschwinden ihrer Masse m, und die dadurch regularisiert werden, daß den Quark-Trajektorien eine „kleine zeitartige Komponente“ gegeben wird, die genau entspricht der von Quarks mit endlicher Masse m. Dies impliziert, daß die T-Amplitude – über den kinematische Faktor s hinaus – abhängt von s vermittels der Richtungen der physikalischen Parton-Trajektorien.

Unser Zugang besteht genau darin, den Parton-Trajektorien in diesem Sinne ihre zeitartige Komponente zu belassen: zu arbeiten mit den initialen physikalischen Trajektorien und mit den diese induzierenden nahezu lichtartigen Wegner-Wilson-Linien und -Loops.

Auf derselben Basis diskutiert Meggiolaro in Ref. [141] Quark-Quark-Streuung, indem

[2.50] Chronologisch steht die Analyse des vorliegenden Kapitels am Ende unserer Arbeit; wir ziehen sie vor, da sie auch darstellt die bekannte asymptotische Amplitude, die noch zugrunde liegt den folgenden Kapiteln.

er im Sinne Verlindes, Verlindes die Wegner-Wilson-Linien, die konstituieren die T-Amplitude, betrachtet als Funktionale der physikalischen Trajektorien. Meggiolaro entwickelt die T-Amplitude konsequent bis zu Termen proportional $g^4_{\text{ren.}}$ – mit $g_{\text{ren.}}$ der renormierten Kopplungskonstanten der QCD – und findet exakte Übereinstimmung mit dem Standard-Resultat der konventionellen perturbativen Theorie nach Cheng, Wu, vgl. Ref. [37]. Die identifizierte s-Abhängigkeit manifestiert sich explizit in Form

$$g^2_{\text{ren.}} \cdot \tanh^{-1}\psi \qquad \text{und} \qquad g^4_{\text{ren.}} \cdot \tanh^{-2}\psi\,, \qquad g^4_{\text{ren.}} \cdot \psi \, \tanh^{-2}\psi \tag{2.268}$$

mit ψ wie in unserer Definition dem hyperbolischen Winkel, den die physikalischen Trajektorien einschließen in der Boost-Ebene: mit $\beta_\imath = \tanh\psi_\imath$, $\imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$, den Beta-Parametern der aktiven Lorentz-Boosts gegeneinander und $\psi = \psi_\mathfrak{p} + \psi_\mathfrak{m}$. Im Rahmen unserer differentialgeometrischen Formulierung – die in natürlicher Weise definiert Koordinatenlinien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ als die Richtungen dieser Trajektorien – verstehen wir in Gl. (2.268) den inversen hyperbolischen Tangens als die eine unabhängige Komponente $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}/g_{+-} = \tanh^{-1}\psi$ des induzierten metrischen Tensors[2.51]; vgl. $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}/g_{+-} = \sqrt{1-(g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}/g_{+-})^2}$ nach Gl. (2.262) und $g_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}} \equiv g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}$, $g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \equiv g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$.

Der letzte Term in Gl. (2.268) mit explizitem Faktor ψ folgt in Meggiolaros Analyse aus der $T^a_{(1)} \otimes T^a_{(2)}$-Colour-Struktur der Summe der zwei Feynman-Diagramme – dem *ladder*- und *cross*-Diagramm – für den Austausch zweier Gluonen. Für Streuung zweier Quarks derselben Masse m gilt $s = 2m^2\,(\cosh\psi + 1)$, so daß folgt $\psi \sim \ln s$ für $s \to \infty$ – vgl. Gl. (2.6) – und auf diese Weise generiert werden in Quark-Quark-Streuung die bekannten Logarithmen von s.

Meggiolaro gelangt ferner zu denselben Ausdrücken $I(t) \propto \int d^2\mathbf{z}\, e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{z}} \big(\mathrm{K}_0(\lambda|\mathbf{z}|)\big)^2$, mit $t = q^2 \cong -\mathbf{q}^2$, wie die konventionelle perturbative Theorie; diese entsprechen Gluon-Loop-Diagrammen und sind wie dort zu regularisieren – vgl. $K_0(z) \sim -\ln z$ für $z \to 0$ – durch eine endliche Gluonmasse λ [die am Ende: $\lambda \to 0+$, identisch Null zu setzen ist].

Diese Logarithmen – wie auch die Ausdrücke $I(t)$ – erscheinen uns Artefakte zu sein der perturbativen Entwicklung und des diese induzierenden Renormierungsverfahren. Wir erwarten weniger, daß ihre Aufsummierung zu dem „korrekten Potenzverhalten“ $s^{1+\epsilon}$ der T-Amplitude führt als vielmehr ein wesentlich nichtperturbativer Mechanismus, etwa im Sinne des Regge-Pol-Mechanismus auf Basis ihrer Analytizität. Meggiolaro gibt in Ref. [141] an die explizite Herleitung des Regge-Pol-Modells aus der T-Amplitude für Quark-Quark-Streuung, die genau betrachtet die sie konstituierenden Wegner-Wilson-Linien als Funktionale der physikalischen Parton-Trajektorien. Wir verweisen ausdrücklich auf diese Herleitung[2.52] – zum einen wegen ihrer Ästhetik, zum anderen in Hinblick auf ihre Relevanz in Bezug auf die von uns diskutierte T-Amplitude $\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mathcal{U}}$ – vgl. die Gln. (2.263), (2.264) – für die Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_\mathfrak{p}$, $W_\mathfrak{m}$ im Sinne eichinvarianter Objekte.

Diese Herleitung Meggiolaro geschieht in Euklidischer Raumzeit auf Basis der Feststellung, daß die Analytische Fortsetzung der T-Amplitude sich reduziert auf die Analytische Fortsetzung des *hyperbolischen Winkels* ψ zwischen den Parton-Trajektorien in der Boost-

[2.51] cum grano salis als deren Anteil *unabhängig* von der Konvention bezüglich der Lichtkegelkoordinaten

[2.52] Wir skizzieren ihre wesentlichen Schritte: Partialwellen-Zerlegung der T-Amplitude. Annahme analytischer Fortsetzbarkeit der Partial-Amplituden $A_l(t)$ mit Drehimpulsen $l \in \mathbb{N}$ zu komplexen Werten $l \in \mathbb{C}$. Umformung der Partialsumme – auf Basis der Produkt-Entwicklung von $\sin(\pi l)$ – in ein Integral, dessen Kontur in der komplexen l-Ebene genau die nicht-negativen natürlichen l einschließt. Überführen dieser Kontur in die Gerade $\mathrm{Re}\, l = -\frac{1}{2}$ parallel zur imaginären l-Achse, indem aufgrund des Residuensatzes explizit auftritt die Summe über die Residuen des Integranden rechts der Geraden: $\mathrm{Re}\, l > -\frac{1}{2}$. Im Limes $s \to \infty$ verschwindet das Integral mindestens wie $1/\sqrt{s}$ und die Amplitude ist gegeben durch die Summe über die Residuen. Die T-Amplitude im Limes $s \to \infty$ ist gegeben als Summe von Termen, die abhängen von s wie $s^{1+\alpha_n(t)}$ mit $\alpha_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, den Positionen der – für Einfachheit angenommenen – *einfachen* Pole der Partial-Amplituden $A_l(t)$ in der komplexen l-Ebene. Der Pol mit dem größten Realteil, $\mathrm{Re}\,\alpha_n(t) > -\frac{1}{2}$ dominiert die Summe – und wird konventionell bezeichnet als *Regge-Pol*. Bzgl. der – sehr lesenswerten – Originalarbeiten Regges vgl. die Refn. [175, 176].

Ebene in Minkowskischer Raumzeit zu dem *Winkel* θ, den diese einschließen in der entsprechenden Ebene in Euklidischer Raumzeit. Meggiolaro zeigt diesen Zusammenhang zunächst in Ref. [141] bis zu Termen proportional $g^4_{\text{ren.}}$, dann in Ref. [142] zu jeder Ordnung. Wir gelangen zu demselben Resultat für die Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mu}$, wie abschließend dieses Kapitel explizit gezeigt wird im folgenden Abschnitt.

2.6 Nahezu lichtartige T-Amplitude: Analytizität

In Anhang D.5 ist allgemein diskutiert der Übergang von Komponenten x^{μ} bezüglich Koordinatenlinien $\mu \in \{0,1,2,3\}$ in der Minkowski-Raumzeit zu Komponenten $x^{\mu_{\mathrm{E}}}_{\mathrm{E}}$ bezüglich Koordinatenlinien $\mu_{\mathrm{E}} \in \{1,2,3,4\}$ in deren Fortsetzung ins Euklidische. Es ist ferner ausführlich dargestellt der formale wie interpretatorische Zusammenhang spezieller Koordinatenlinien $\tilde{\mu}_{\mathrm{E}} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ in dieser Euklidischen Raumzeit, deren longitudinale Komponenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ – analog zum Minkowskischen – definiert sind als die Richtungen physikalischer (klassischer) Teilchen-Trajektorien. In Anhang D.6.1 ist explizit ausgeführt die Wick-Drehung, die vermittelt zwischen den Korrelationsfunktionen der einen und der anderen Raumzeit.

Die Formulierung von Anhang D.5 für diese Euklidische Raumzeit parallel und in vollständiger Analogie zu Anhang D.4 für die Minkowski-Raumzeit – vgl. auch Abb. D.3 versus Abb. D.1 – suggeriert bereits weitgehend die analytische Fortsetzung der T-Amplitude $\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mu}$ für die Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ – vgl. die Gln. (2.263), (2.264). Wir setzen daher im folgenden Anhang D voraus, so daß genügt die Fortsetzung von $\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mu}$ zu skizzieren.

In Anhang D.5.2 sind ausführlich formuliert die aktiven $O(4)$-Drehungen, die unmittelbar entsprechen den aktiven Lorentz-Boosts im Minkowskischen. Es ist diskutiert der Zusammenhang des *Winkels* θ in der $x^4_{\mathrm{E}}x^3_{\mathrm{E}}$-Ebene der Teilchen-Trajektorien gegeneinander im Euklidischen mit dem *hyperbolischen Winkel* ψ, den diese einschließen in der x^0x^3-Boost-Ebene im Minkowskischen – vgl. Gl. (D.128):[2.53]

$$-\mathrm{i}\theta \longleftrightarrow \psi \qquad \theta \in (0,\pi/2)\,, \quad \psi \in (0,\infty) \tag{2.269}$$

$$\text{mit} \qquad \theta \equiv \theta_{\mathfrak{p}} + \theta_{\mathfrak{m}}\,, \qquad \psi \equiv \psi_{\mathfrak{p}} + \psi_{\mathfrak{m}} \tag{2.269'}$$

Es sind $\theta_{\mathfrak{p}}$, $\theta_{\mathfrak{m}}$ und $\psi_{\mathfrak{p}}$, $\psi_{\mathfrak{m}}$ die *Winkel* und *hyperbolischen Winkel* der Trajektorien gegen die x^4_{E}- und x^0-Achse, vgl. Gl. (D.38) bzw. (D.133). Der Limes $s \to \infty$ ist realisiert durch

$$\theta \longrightarrow \pi/2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \psi \longrightarrow \infty \tag{2.270}$$

Die Normierungskonstante ϱ_{E} der Koordinatenlinien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ im Euklidischen ist – analog zu ϱ im Minkowskischen – bestimmt genau durch die Forderung von Längentreue der Abbildung zwischen den relevanten Koordinaten x^{μ}_{E}, $\mu \in \{1,2,3,4\}$ und $x^{\tilde{\mu}}_{\mathrm{E}}$, $\mu \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$[2.54] oder äquivalent der Forderung von Invarianz der Determinante des metrischen Tensors. Dies impliziert explizite Ausdrücke für die Komponenten des metrischen Tensors $\tilde{g}_{\mathrm{E}} \equiv \left(g_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)$ und daß diese übergehen in die Komponenten des metrischen Tensors $g_{\mathrm{E}} \equiv \left(g_{\mathrm{E}\mu\nu}\right)$ im Limes $s \to \infty$:

$$g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}} = g_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{m}} = -\varrho^2_{\mathrm{E}} = -\sin^{-1}\theta \tag{2.271}$$

$$\longrightarrow -1 \qquad \text{für } \theta \to \pi/2 \tag{2.271'}$$

$$g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}} = g_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{p}} = -\varrho^2_{\mathrm{E}}\cos\theta = -\tan^{-1}\theta \tag{2.272}$$

$$\longrightarrow 0 \qquad \text{für } \theta \to \pi/2 \tag{2.272'}$$

vgl. die Gln. (D.161), (D.161′) und (D.162), (D.162′).

[2.53] Meggiolaro definiert in den Refn. [141, 142] den Winkel θ mit *umgekehrtem* Vorzeichen.

[2.54] Sei im folgenden – wie in Anhang D – unterdrückt das Skript „E" an den Raumzeit-Indizes $\mu_{\mathrm{E}}, \ldots, \tilde{\mu}_{\mathrm{E}}, \ldots$

Die Analyse im Minkowskischen – vgl. Abschn. 2.4 – ist zunächst vollständig neu durchzuführen im Euklidischen. De facto ist dies offensichtlich nicht notwendig, sondern sie reduziert sich genau auf die folgenden Substitutionen: Es sind zu ersetzen zum einen die Lorentz-Komponenten der Tensoren durch ihre Euklidischen, zum anderen die Korrelationsfunktionen durch ihre analytischen Fortsetzungen ins Euklidische.

Die differentialgeometrische Auswertung bleibt unverändert; es ist lediglich anzubringen das Skript „E“ zur Indizierung, daß sich die entsprechenden geometrischen Objekte beziehen auf die Euklidische, statt auf die Minkowskische Raumzeit. In der abschließenden Formel für die Euklidische T-Amplitude $(\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}$ für die Streuung der Euklidischen Wegner-Wilson-Loops W_{Ep}, W_{Em} ist insofern in Bezug auf die Minkowskische T-Amplitude $\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mathcal{U}}$ entsprechend den Gln. (2.263), (2.264) – ist zu ersetzen die unabhängige Komponente des metrischen Tensors wie folgt:

$$-\det \mathbb{SL}\ g_{\mathrm{pp}} \;=\; g_{\mathrm{pp}}/g_{+-} \;=\; \sinh^{-1}\psi \;=\; \mathrm{i}\,\sin^{-1}(\mathrm{i}\psi) \tag{2.273}$$

$$\longrightarrow\ +\det \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}\ g_{\mathrm{Epp}} \;=\; g_{\mathrm{Epp}} \;=\; -\sin^{-1}\theta \tag{2.273'}$$

bzgl. der expliziten Ausdrücke vgl. Gl. (2.257) bzw. die Gln. (2.271), (2.271′); der Übergang zum Argument $\mathrm{i}\psi$ ist angegeben in Hinblick auf den Zusammenhang $\mathrm{i}\psi \leftrightarrow \theta$ nach Gl. (2.269).

Im Übergang von Minkowskischen Null- zu Euklidischen Vier-Komponenten treten auf explizite Faktoren der imaginären Einheit. Daraus folgt $F(\xi^2) \to F_{\mathrm{E}}(\xi^2_{\mathrm{E}}) = -\mathrm{i}\cdot F\left(\xi^2 \to \xi^2_{\mathrm{E}}\right)$, vgl. Gl. (D.170). Der Faktor $-\mathrm{i}$ zusammen mit dem Signum in Gl.(2.273′) ist genau der explizite Faktor i in Gl.(2.273). Mit Beweis der Gln. (2.273), (2.273′) ist daher im wesentlichen gezeigt der Zusammenhang der respektiven T-Amplituden durch den Zusammenhang $\mathrm{i}\psi \leftrightarrow \theta$ allein. Dieser Beweis erfordert bei aller gewünschten Prägnanz eine gewisse Explizitheit der Darstellung. In diesem Sinne führen wir wie folgt duch die Analyse im Euklidischen.

Seien zunächst rekapituliert – vgl. Anh. D.5 – unsere allgemeinen Definitionen und Konventionen. Analytische Fortsetzung der Minkowski-Raumzeit in eine Euklidische sei verstanden als formale Substitution der pseudo-Riemannschen Metrik durch eine Riemannsche im Sinne:

$$g \;\equiv\; (g_{\mu\nu}) \;=\; \mathrm{diag}[+1,-1,-1,-1] \tag{2.274}$$

$$\overset{!}{\longrightarrow}\ \mathrm{diag}[-1,-1,-1,-1] \;=\; -(\delta_{\mathrm{E}\mu\nu}) \;\equiv\; -\delta_{\mathrm{E}} \;\equiv\; g_{\mathrm{E}}$$

Bezogen auf Punkte x der Raumzeit impliziert formale Substitution der Metrik $g \to g_{\mathrm{E}} = -\delta_{\mathrm{E}}$ bei Forderung von Invarianz des Skalarprodukts – vgl. die Gln. (D.105), (D.106):

$$\mathrm{i}x^0 \;\longrightarrow\; x^4_{\mathrm{E}} \tag{2.275}$$

$$x^i \;\longrightarrow\; x^i_{\mathrm{E}} \qquad i \in \{1,2,3\} \tag{2.275'}$$

das heißt Identifizierung von x^4_{E} mit $\mathrm{i}x^0$ und trivial von x^i_{E} mit x^i für $i \in \{1,2,3\}$.

Das Vierer-Skalarprodukt ist definiert für Vektoren a_{E}, b_{E} durch $a_{\mathrm{E}} \cdot b_{\mathrm{E}} \equiv g_{\mathrm{E}\mu\nu}\, a^\mu_{\mathrm{E}}\, b^\nu_{\mathrm{E}}$ vollständig analog wie im Minkowskischen – es ist daher *negativ definit*:

$$a_{\mathrm{E}} \cdot a_{\mathrm{E}} \;=\; -\,a^\mu_{\mathrm{E}}\, a^\mu_{\mathrm{E}} \;\leq\; 0 \tag{2.276}$$

entsprechend kovariante Komponenten durch:

$$a_{\mathrm{E}\mu} \;:=\; g_{\mathrm{E}\mu\nu}\, a^\nu_{\mathrm{E}} \;=\; -\delta_{\mathrm{E}\mu\nu}\, a^\nu_{\mathrm{E}} \tag{2.277}$$

Sie differieren durch ein *Signum* von den kontravarianten Komponenten: $a_{\mathrm{E}\mu} = -a^\mu_{\mathrm{E}}$.

Der Euklidische Epsilon-Pseudotensor $\epsilon_{\mathrm{E}} \equiv (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}_{\mathrm{E}})$ sei definiert als das Signum der Permutation seiner Indizes – durch seine kontravrianten Komponenten wie folgt:

$$\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_4}_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_4 \\ 1 & \cdots & 4 \end{pmatrix} \epsilon^{1234} \qquad \textit{per def.:} \qquad \epsilon^{1234}_{\mathrm{E}} \;\equiv\; +1 \tag{2.278}$$

folglich: $\epsilon_{\mathrm{E}1234} = g_{\mathrm{E}1\mu}\, g_{\mathrm{E}2\nu}\, g_{\mathrm{E}3\rho}\, g_{\mathrm{E}4\sigma}\, \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}_{\mathrm{E}} = (-1)^4\, \epsilon^{1234}_{\mathrm{E}} \equiv +1$; vgl. die Gln. (A.7), (A.8).

Lorentz-Tensorgleichungen involvieren o.E. Vektorfunktionen $a^\mu(x)$, den metrischen Tensor g und den Epsilon-Pseudotensor ϵ; es folgt als allgemeine Substitutionsvorschrift für den Übergang von Minkowskischer zu Euklidischer Raumzeit – vgl. die Gln. (D.106), (D.112):

$$a^\mu(x) \longrightarrow a^\mu_{\rm E}(x_{\rm E}) \tag{2.279}$$

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{{\rm E}\mu\nu} = -\delta_{{\rm E}\mu\nu} \tag{2.279'}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \longrightarrow -{\rm i}\,\epsilon_{{\rm E}\mu\nu\rho\sigma} \qquad \text{s.u. Fußn. 2.57} \tag{2.279''}$$

mit Euklidischen Vektor-Komponenten $a^\mu_{\rm E}$ im Sinne der Gln. (2.275), (2.275′).

Auf dieser Basis werden explizt angegeben die relevanten Größen bezüglich der Euklidischen Raumzeit aus denen bezüglich der Minkowskischen.

Der (paralleltransportierte) Feldstärkentensor ist antisymmetrisch in den Raumzeit-Indizes und im Minkowskischen dargestellt wie folgt durch die colour-elektrischen und -magnetischen Felder – Konvention nach Ref. [114]:[2.55]

$$F \equiv \left(F^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E^1 & -E^2 & -E^3 \\ & 0 & -B^3 & B^2 \\ & & 0 & -B^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = -F^{\,t} \tag{2.280}$$

in kompakter Notation – mit $i,j,k,\ldots\in\{1,2,3\}$, $\epsilon_{123}\equiv 1$:[2.56]

$$F^{i0} \equiv E^i, \qquad F^{ij} \equiv -\epsilon_{ijk}\,B^k \tag{2.281}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad E^i \equiv F^{i0}, \qquad B^i \equiv -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,F^{jk} \tag{2.281'}$$

dabei sind $\vec{E}\equiv(E^i)^t$, $\vec{B}\equiv(B^i)^t$ die konventionellen Dreier-Vektoren und $\epsilon_{ikl}\epsilon_{jkl}=2\delta_{ij}$ benutzt für die zweite Zeile. Der duale (paralleltransportierte) Feldstärkentensor[2.57] ist definiert durch:[2.58]

$$\tilde{F}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\,F_{\rho\sigma} \tag{2.282}$$

mit $\epsilon^{0123}\equiv 1$. Daraus folgt unmittelbar:

$$\tilde{F}^{i0} \equiv B^i, \qquad \tilde{F}^{ij} \equiv \epsilon_{ijk}\,E^k \equiv -\epsilon_{ijk}\,(-E^k) \tag{2.283}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad B^i \equiv \tilde{F}^{i0}, \qquad E^i \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\tilde{F}^{jk} \tag{2.283'}$$

ergo $\tilde{F}\equiv F[E^i\to B^i, B^i\to -E^i]$, vgl. die Gln. (2.281), (2.281′). In Matrixform gilt:[2.55]

$$\tilde{F} \equiv \left(\tilde{F}^{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -B^1 & -B^2 & -B^3 \\ & 0 & E^3 & -E^2 \\ & & 0 & E^1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = -\tilde{F}^{\,t} \tag{2.284}$$

analog zu Gl. (2.280). Es folgt

$$F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu} = 2\left(-E^iE^i + B^iB^i\right) \equiv 2\left(-\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right) \tag{2.285}$$

$$F_{\mu\nu}\,\tilde{F}^{\mu\nu} = -4\,E^iB^i \equiv -4\,\vec{E}\cdot\vec{B} \tag{2.285'}$$

für die beiden Lorentz-Invarianten.

[2.55] Zu lesen als $d_{\mathfrak{F}}\times d_{\mathfrak{F}}$-*Matrizen* $E^i\equiv E^{ia}T^a_{\mathfrak{F}}$, $B^i\equiv B^{ia}T^a_{\mathfrak{F}}$, mit $a=1,2,\ldots d_{SU(N_{\rm c})}$, $d_{\mathfrak{F}}\equiv N_{\rm c}$, $d_{SU(N_{\rm c})}\equiv N_{\rm c}^2-1$, oder *unterdrückt* der Colour-Index a; seien suggestiv ausgeschrieben nur die unabhängigen Komponenten.

[2.56] Der Epsilon-Pseudotensor bezüglich der drei *Raum*koordinaten sei – entgegen Gl. (A.7) – konsequent notiert mit *unteren* Indizes und in dieser Form gleichermaßen benutzt im Minkowskischen *und* Euklidischen.

[2.57] Die Pseudo-Tensoren werden hier nicht explizit benötigt und angegeben nur für Vollständigkeit.

[2.58] In Standard-Konvention nach Ref. [114] – abweichend von der Konvention bezüglich *Dualität*, die wir zweckmäßig einführen für Integration auf *allgemeinen* (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten $G_{d,\sigma}$; vgl. Anh. E.1, insbes. Gl. (E.28).

Der (paralleltransportierte) Feldstärkentensor im Euklidischen sei dargestellt vollständig analog wie im Minkowskischen – vgl. die Gln. (2.281), (2.281′):[2.56]

$$F_{\mathrm{E}}^{i4} \equiv: E_{\mathrm{E}}^{i}, \qquad F_{\mathrm{E}}^{ij} \equiv: -\epsilon_{ijk}\, B_{\mathrm{E}}^{k} \tag{2.286}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad E_{\mathrm{E}}^{i} \equiv F_{\mathrm{E}}^{i4}, \qquad B_{\mathrm{E}}^{i} \equiv -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\, F_{\mathrm{E}}^{jk} \tag{2.286′}$$

Dadurch definiert sind Euklidischen colour-elekrische und -magnetische Felder mit Dreier-Vektoren $\vec{E}_{\mathrm{E}} \equiv (E_{\mathrm{E}}^{i})^{t}$, $\vec{B}_{\mathrm{E}} \equiv (B_{\mathrm{E}}^{i})^{t}$. Die Definition nach Gl. (2.286) impliziert

$$\mathrm{i}E^{i} \equiv \mathrm{i}F^{i0} \longrightarrow F_{\mathrm{E}}{}^{i4} \equiv E_{\mathrm{E}}^{i} \tag{2.287}$$

$$B^{i} \equiv -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\, F^{jk} \longrightarrow -\frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\, F_{\mathrm{E}}^{jk} \equiv B_{\mathrm{E}}^{i} \tag{2.287′}$$

im Sinne der Gln. (2.275), (2.275′). Der duale (paralleltransportierte) Feldstärkentensor[2.57] im Euklidischen ist analog zu Gl. (2.282) definiert durch:[2.58]

$$\tilde{F}_{\mathrm{E}}^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{\mathrm{E}}^{\mu\nu\rho\sigma}\, F_{\mathrm{E}\rho\sigma} \tag{2.288}$$

mit $\epsilon_{\mathrm{E}}^{1234} \equiv 1$. Daraus folgt unmittelbar – vgl. die Gln. (2.283), (2.283′):

$$\tilde{F}_{\mathrm{E}}^{i4} \equiv -B_{\mathrm{E}}^{i}, \qquad \tilde{F}_{\mathrm{E}}^{ij} \equiv \epsilon_{ijk}\, E_{\mathrm{E}}^{k} \equiv -\epsilon_{ijk}\,(-E_{\mathrm{E}}^{k}) \tag{2.289}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad B_{\mathrm{E}}^{i} \equiv -\tilde{F}_{\mathrm{E}}^{i4}, \qquad E_{\mathrm{E}}^{i} \equiv \frac{1}{2}\,\epsilon_{ijk}\,\tilde{F}_{\mathrm{E}}^{jk} \tag{2.289′}$$

ergo $\tilde{F}_{\mathrm{E}}^{i} \equiv F_{\mathrm{E}}[E_{\mathrm{E}}^{i} \to -B_{\mathrm{E}}^{i}, B_{\mathrm{E}}^{i} \to -E_{\mathrm{E}}^{i}]$, vgl. die Gln. (2.286), (2.286′). Für Vollständigkeit seien angegeben $F_{\mathrm{E}} \equiv (F_{\mathrm{E}}^{\mu\nu})$, $\tilde{F}_{\mathrm{E}} \equiv (\tilde{F}_{\mathrm{E}}^{\mu\nu})$ in Matrixform:[2.55]

$$(F_{\mathrm{E}}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B_{\mathrm{E}}^{3} & B_{\mathrm{E}}^{2} & E_{\mathrm{E}}^{1} \\ & 0 & -B_{\mathrm{E}}^{1} & E_{\mathrm{E}}^{2} \\ & & 0 & E_{\mathrm{E}}^{3} \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \qquad (\tilde{F}_{\mathrm{E}}^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E_{\mathrm{E}}^{3} & -E_{\mathrm{E}}^{2} & -B_{\mathrm{E}}^{1} \\ & 0 & E_{\mathrm{E}}^{1} & -B_{\mathrm{E}}^{2} \\ & & 0 & -B_{\mathrm{E}}^{3} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \tag{2.290}$$

vgl. die Gln. (2.280), (2.284). Es folgt – vgl. die Gln. (2.285), (2.285′):

$$F_{\mathrm{E}\mu\nu}\, F_{\mathrm{E}}^{\mu\nu} = 2\,(+E_{\mathrm{E}}^{i}E_{\mathrm{E}}^{i} + B_{\mathrm{E}}^{i}B_{\mathrm{E}}^{i}) \equiv 2\,(+\vec{E}_{\mathrm{E}}^{2} + \vec{B}_{\mathrm{E}}^{2}) \tag{2.291}$$

$$F_{\mathrm{E}\mu\nu}\, \tilde{F}_{\mathrm{E}}^{\mu\nu} = -4\, E_{\mathrm{E}}^{i}B_{\mathrm{E}}^{i} \equiv -4\,\vec{E}_{\mathrm{E}}\cdot\vec{B}_{\mathrm{E}} \tag{2.291′}$$

für die beiden $O(4)$-Invarianten.

Der fundamentale Korrelations-Lorentztensor $D \equiv (D_{\mu\nu\rho\sigma})$ ist zerlegt in die Summe seiner Anteile bezüglich der Strukturen $t^{NC}{}_{\mu\check{\nu}\check{\rho}\tilde{\sigma}}$ und $t^{C}_{\mu\check{\nu}\check{\rho}\tilde{\sigma}}$, die explizit gegeben sind durch die Gln. (2.177), (2.208); es folgt:[2.59]

$$t^{C}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{12}\;\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\;g_{\alpha\rho}\,g_{\beta\sigma} \tag{2.292}$$

$$\longrightarrow \quad t^{C}_{\mathrm{E}\,\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{12}\;\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\;g_{\mathrm{E}\alpha\rho}\,g_{\mathrm{E}\beta\sigma}$$

und

$$t^{NC}{}_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{6}\;g_{\alpha\gamma}\;\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\,\partial_{\beta}\;\delta^{\gamma\delta}_{\rho\sigma}\,\partial_{\delta} \tag{2.292′}$$

$$\longrightarrow \quad t^{NC}_{\mathrm{E}\,\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{6}\;g_{\mathrm{E}\alpha\gamma}\;\delta^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\,\partial_{\mathrm{E}\beta}\;\delta^{\gamma\delta}_{\rho\sigma}\,\partial_{\mathrm{E}\delta}$$

mit Euklidischen Komponenten im Sinne der Gln. (2.275), (2.275′).

Die konfinierenden und nicht-konfinierenden $\tilde{\chi}_{\imath\jmath}$-Funktionen im Minkowskischen sind ausgewertet in den Abschnitten 2.4.3 und 2.4.4. Explizite Darstellungen sind angegeben für $\imath \equiv \mathfrak{p}, \jmath \equiv \mathfrak{m}$ in den Gln. (2.175), (2.207). Unter analytischer Fortsetzung gehen sie über

[2.59] Die verallgemeinerten Kronecker-*Symbole* sind definiert – unabhängig von der Raumzeit – als Determinante konventioneller Kronecker-*Sympole*: $\delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} = \det(\delta^{\mu_i}_{\nu_j})$; vgl. Gl. (E.4).

respektive in

$$\tilde{\chi}^{C}_{\mathrm{E}ij} \;=\; \mathrm{i}\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)^2 \iint_{S_i} d\sigma^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{\mathrm{E}i}(\tilde{x}_i) \iint_{S_j} d\sigma^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}_{\mathrm{E}j}(\tilde{x}_j)\; t^{C}_{\mathrm{E}\,\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\; \tilde{\partial}^2_{\mathrm{E}}\, F^{C}_{\mathrm{E}}(\tilde{x}^2) \tag{2.293}$$

und

$$\tilde{\chi}^{NC}_{\mathrm{E}ij} \;=\; \mathrm{i}\Big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\Big)^2 \iint_{S_i} d\sigma^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}_{\mathrm{E}i}(\tilde{x}_i) \iint_{S_j} d\sigma^{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}_{\mathrm{E}j}(\tilde{x}_j)\; t^{NC}_{\mathrm{E}\,\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\; F^{NC}_{\mathrm{E}}(\tilde{x}^2) \tag{2.293$'$}$$

Es ist $\tilde{x}\equiv(x^{\tilde{\mu}})$ und $\tilde{x}\equiv\tilde{x}_i-\tilde{x}_j$, $i,j\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$; ferner sind $\tilde{\mu},\ldots\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ Koordinatenlinien in der Euklidischen Raumzeit. Sei verwiesen auf Anhang D.5, in dem diese explizit definiert sind durch die Richtungen der klassischen Teilchen-Trajektorien und ausführlich dargestellt ist ihr Zusammenhang mit den entsprechenden Koordinatenlinien der Minkowski-Raumzeit.

Die Auswertung der Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{\mathrm{E}ij}$, $\tilde{\chi}^{NC}_{\mathrm{E}ij}$ – vgl. die Gln. (2.293), (2.293$'$) – im Euklidischen geschieht vollständig analog zu der Auswertung der Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{ij}$, $\tilde{\chi}^{NC}_{ij}$ im Minkowskischen in den Abschnitten 2.4.3 und 2.4.4. Es folgt in faktorisierter Form:

$$\tilde{\chi}^{C}_{ij} \;=\; -\det\mathbb{SL}\; g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\;\cdot\;\tilde{X}^{C}_{ij} \;=\; g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}/g_{+-}\;\cdot\;\tilde{X}^{C}_{ij} \tag{2.294}$$

$$\text{analog:}\qquad \tilde{\chi}^{C}_{\mathrm{E}ij} \;=\; +\det\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}\; g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\;\cdot\;\tilde{X}^{C}_{\mathrm{E}ij} \;=\; g_{\mathrm{E}ij}\;\cdot\;\tilde{X}^{C}_{ij} \tag{2.294$'$}$$

entsprechend für die nicht-konfinierenden Funktionen $\tilde{X}^{NC}_{ij}$. Die Funktionen $\tilde{X}^{C}_{ij}$, $\tilde{X}^{NC}_{ij}$ in den zweiten Darstellungen sind die Funktionen im Minkowskischen, die vollständig bestimmt sind durch die Geometrie in der x^1x^2-Transversalebene. Explizite Darstellungen sind angegeben in den Gln. (2.243)-(2.246) und in deren gestrichenen Pendants. Von diesen Funktionen differieren die Funktionen $\tilde{X}^{C}_{\mathrm{E}ij}$, $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{E}ij}$ der ersten Darstellung in Gl. (2.294$'$) genau darin, daß in ihnen auftritt die respektive ins Euklidische fortgesetzte Korrelationsfunktion F^{C}_{E}, F^{NC}_{E} an Stelle der ursprünglichen F^{C}, F^{NC}. Die zweite Darstellung in Gl. (2.294$'$) ist daher unmittelbare Konsequenz deren Zusammenhangs

$$F_{\mathrm{E}}(\xi^2_{\mathrm{E}}) \;=\; -\mathrm{i}\cdot F\big(\xi^2\to\xi^2_{\mathrm{E}}\big) \qquad\qquad F\equiv F^{C},F^{NC},\ldots \tag{2.295}$$

vgl. Anh. D.6.1, Gl. (D.170).

Zunächst nichttrivial – vgl. die Gln. (2.294), (2.294$'$) – ist das *positive* Vorzeichen im Euklidischen gegenüber dem *negativen* Vorzeichen im Minkowskischen, mit dem multipliziert ist die respektive Determinante der Transformationsmatrix $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}$ und $\mathbb{SL}$. Bzgl. $\det\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}\equiv 1$ vgl. die Fixierung der Euklidischen Koordinatenlinien $\mu\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ in Anh. D.5.2, Gl. (D.159$'$). Dieses Signum ist die einzige Diskrepanz der Euklidischen Auswertung gegenüber der Minkowskischen; es folgt im Zuge der Integration der longitudinalen Parameter $u_{\mathfrak{p}}$, $u_{\mathfrak{m}}$ – vgl. Anh. E.2.1 –, da das Volumenelement im Euklidischen Impulsraum gegeben ist durch

$$dk_{\mathrm{E}} \;\equiv\; dk^4_{\mathrm{E}}\,dk^3_{\mathrm{E}}\,d^2\mathbf{k}_{\mathrm{E}} \;=\; +\det\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}\;\; dk_{\mathrm{E}\mathfrak{p}}\,dk_{\mathrm{E}\mathfrak{m}}\,d^2\mathbf{k}_{\mathrm{E}} \tag{2.296}$$

gegenüber $dk\equiv dk^0dk^3d^2\mathbf{k}=\;-\det\mathbb{SL}\,dk_{\mathfrak{p}}dk_{\mathfrak{m}}d^2\mathbf{k}$ im Minkowskischen, vgl. Gl. (E.44): Herunterziehen der longitudinalen Raumzeit-Indizes ergibt zwei Vorzeichen statt nur eines.

Es gelten die expliziten Darstellungen:

$$g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;=\; -\sin^{-1}\theta \;\equiv\; \mathrm{i}\cdot\sinh^{-1}(-\mathrm{i}\theta) \tag{2.297}$$

$$g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \;=\; -\tan^{-1}\theta \;\equiv\; \mathrm{i}\cdot\tanh^{-1}(-\mathrm{i}\theta) \tag{2.297$'$}$$

vgl. die Gln. (2.271), (2.271$'$) und (2.272), (2.272$'$). Es gilt für die unabhängigen konfinierenden Funktionen:

$$\tilde{\chi}^{C}_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}}[\theta] \;=\; \sinh^{-1}(-\mathrm{i}\theta)\;\cdot\;\tilde{X}^{C}_{ij} \;=\; \tilde{\chi}^{C}_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}[\psi\to-\mathrm{i}\theta] \tag{2.298}$$

$$\text{analog:}\qquad \tilde{\chi}^{C}_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{m}}[\theta] \;=\; \tilde{\chi}^{C}_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}[\psi\to-\mathrm{i}\theta] \tag{2.298$'$}$$

$$\tilde{\chi}^{C}_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}}[\theta] \;=\; \tanh^{-1}(-\mathrm{i}\theta)\;\cdot\;\tilde{X}^{C}_{ij} \;=\; \tilde{\chi}^{C}_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}[\psi\to-\mathrm{i}\theta] \tag{2.298$''$}$$

entsprechend für die unabhängigen nicht-konfinierenden Funktionen $\tilde{\chi}_{\mathrm{E}\mathfrak{pp}}^{NC}$, $\tilde{\chi}_{\mathrm{E}\mathfrak{mm}}^{NC}$, $\tilde{\chi}_{\mathrm{E}\mathfrak{pm}}^{NC}$.

Für die T-Amplituden $(\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}} \equiv (\tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})})_{\mathrm{E}}$ und $\tilde{T}_{\mathcal{U}} \equiv \tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ für die Streuung der respektiven Wegner-Wilson-Loops in Euklidischer und Minkowskischer Raumzeit besteht folglich der Zusammenhang:

$$(\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}[\theta] \;=\; \tilde{T}_{\mathcal{U}}[\psi \to -\mathrm{i}\theta] \tag{2.299}$$

$$\text{umgekehrt:} \qquad \tilde{T}_{\mathcal{U}}[\psi] \;=\; (\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}[\theta \to \mathrm{i}\psi] \tag{2.299$'$}$$

Explizite Darstellungen folgen auf Basis von Gl. (2.263) und (2.264).

Zusammenfassend ist der Zusammenhang der T-Amplituden für die Streuung zweier Wegner-Wilson-Loops in Euklidischer und Minkowskischer Raumzeit vollständig gegeben durch den Zusammenhang – vgl. Gl. (2.269) und Fußn. 2.53:

$$-\mathrm{i}\,\theta \;\longleftrightarrow\; \psi \tag{2.300}$$

mit θ dem *Winkel* und ψ dem *hyperbolischen Winkel*, den respektive einschließen die Loops $W_{\mathrm{E}\mathfrak{p}}$, $W_{\mathrm{E}\mathfrak{p}}$ im Euklidischen und die Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ im Minkowskischen.

Die s-Abhängigkeit der Loop-Loop-Amplituden $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ und $(\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}$ ist vollständig subsumiert in den respektiven longitudinalen Metrik-Komponenten $g_{\mathfrak{pm}}$, $g_{\mathfrak{mp}}$ und $g_{\mathrm{E}\mathfrak{pm}}$, $g_{\mathrm{E}\mathfrak{mp}}$. Unsere Herleitung zeigt, daß der Zusammenhang der T-Amplituden gemäß der Gln. (2.299), (2.299$'$) daher *exakt* ist: zu jeder Ordnung einer Entwicklung in Kumulanten – oder etwa in der renormierten Eichkopplung $g_{\mathrm{ren.}}^4$ der Quantenchromodynamik, in Termen derer Meggiolaro – vgl. die Refn. [141, 142] – seine Beweise führt für die Quark-Quark-Amplitude.

Mit der Euklidischen Amplitude $(\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}$ als Funktion von θ ist daher die Minkowskische Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ gegeben durch analytische Fortsetzung von θ zu imaginären Werten: $\theta \to \mathrm{i}\psi$. Auf diese Weise können auf Basis einer Euklidischen Theorie – etwa Quantenchromodynamik als Gittereichtheorie oder das Modell des Stochastischen Vakuums in seiner ursprünglichen Formulierung, die im eigentlichen Sinne erst seine Annahmen rechtfertigt – physikalische Wirkungsquerschnitte für hohe Energien berechnet werden; mit Übergang $\psi \to \infty$ in den abschließenden Ausdrücken ist gegeben der Limes $s \to \infty$ lichtartiger Wegner-Wilson-Loops.

Es ist uns wohl bewußt, daß dieser Weg in praxi nicht trivial durchzuführen ist: Die Euklidische T-Amplitude ist zu *bestimmen* als Funktion des Winkels θ, sie ist dann *analytisch fortzusetzen* zu imaginären Werten dieses Winkels: $\theta \to \mathrm{i}\psi$ und abschließend zu *extrapolieren* zu Unendlichen Werten des hyperbolischen Winkels ψ. Für QCD als Gittereichtheorie ist dieser Weg noch nicht angegangen und erst von prinzipieller Bedeutung. Für das MSV ist er explizit durchgeführt im vorliegenden Kapitel dieser Arbeit.

Kapitel 3

Leptoproduktion von $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$ [3.1]

In den Kapiteln 3 und 4 wenden wir uns weg von der Theorie hin zu der Phänomenologie des MSV und konfrontieren diese mit dem Experiment. Wir präsentieren explizite Anwendungen des MSV auf Diffraktion, die wir in weiterem Rahmen betrachten wollen als Referenz auf nichtperturbativ dominierter QCD im allgemeinen. Zu der impliziten Forderung genügend kleinen invarianten Impulsübertrags tritt, als Voraussetzung für die Skalentrennung im Sinne des vorangegangenen Kapitels 2, die Forderung genügend großer invarianter Schwerpunktsenergie. Konkret diskutieren wir als Prozeß der Hochenergiestreuung die Transmutation eines realen oder virtuellen Photons $\gamma^{(*)}$ in ein Vektormeson V – kurz: die exklusive Photo- beziehungsweise Leptoproduktion eines Vektormesons – diffraktiv an einem Nukleon N, das selbst also in diesem Prozeß intakt bleibt: $\gamma^{(*)}N \to VN$.[3.2] Photon und Vektormeson sind beides $J^{PC} = 1^{--}$-Teilchen, so daß die Wechselwirkung aufgefaßt werden kann als der Austausch eines Quasiteilchens mit den Quantenzahlen des Vakuums: des (Weichen) Pomerons. Wir berechnen in t differentielle Wirkungsquerschnitte für $\sqrt{-t} < 1$ GeV und hoher aber fester Schwerpunktenergie $\sqrt{s} > 10$ GeV, für Definiertheit $\sqrt{s} = 20$ GeV.

Kapitel 3, veröffentlicht in Ref. [65], leitet ein mit der Diskussion des zugrundeliegenden Bildes, im Rahmen dessen – in Gegenüberstellung mit konkurrierenden Zugängen – wir allgemein unseren Zugang herstellen. Dieser Zugang induziert zunächst die Einschränkung auf Photonen nicht beliebig kleiner Virtualitäten, *a posteriori* $Q^2 > 1$ GeV^2. Wir beziehen uns weiter zunächst auf Vektormesonen im Grundzustand. Der die Observablen wesentlich determinierende Mechanismus nichtperturbativer QCD wird im Rahmen des MSV identifiziert und diskutiert: ein String-String-Mechanismus, der besteht in der *Ausbildung und Wechselwirkung gluonischer Strings*. Die Diskussion konkret der Resonanzen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$ – in der Notation der Particle Data Group, Ref. [164] – zeigt in Gegenüberstellung mit den verfügbaren experimentellen Daten die Relevanz dieses Mechanismus'. Sie suggeriert weiter die Analyse des nachfolgenden Kapitels.

Kapitel 4, veröffentlicht in den Refn. [125–127], arbeitet die Bedeutung dieses Mechanismus' weiter heraus. Es dehnt die Analyse aus tiefer in einen Bereich nichtperturbativ dominierter QCD, der noch wesentlicher bestimmt sein *sollte* – und im Resultat *ist* – durch den identifizierten String-String-Mechanismus: möglichst große Ausdehnung der involvierten

[3.1] Kapitel 2 ist verfaßt *nach* Kapitel 3 und 4; es bestehen Redundanzen, die bewußt *nicht* ausgeräumt sind.

[3.2] Das Präfix „Lepto-“ greift auf das physikalische Lepton, das im Experiment das einlaufende virtuelle wie auch das reale Photon abstrahlt; „Photo-“ steht bei realem, physikalischem Photon. Experimentelle Daten existieren großenteils für Protonen, wir sprechen daher häufig von „Proton“ statt von „Nukleon“.

Strings, oder gleichbedeutend (transversal) möglichst ausgedehnte hadronische Zustände. Bezogen auf den konkreten Prozeß, der wesentlich variiert werden kann bezüglich seiner Photon-Vektormeson-Komponente, heißt dies zum einen, unseren Zugang auszudehnen auf *virtuelle Photonen beliebig kleiner* bis *reale Photonen verschwindender Virtualität*, und zum anderen, zusätzlich zu der Grundzustand-$\rho(770)$-Resonanz deren *(transversal) ausgedehntere Anregungen* zu diskutieren, also zunächst – wieder in der Notation von Ref. [164] – die Zustände $\rho(1450)$ und $\rho(1700)$. Zielrichtung ist auch hier die Konfrontation unserer Postulate mit den verfügbaren experimentellen Daten.

3.1 Zugrundeliegendes Bild und Zusammenhang

Exklusive Photo- und Leptoproduktion eines Vektormesons $\gamma^{(*)}N \to VN$ ist in besonderer Weise geeignet, die Physik zu untersuchen, die Diffraktion im speziellen und nichtperturbativ dominierter QCD im allgemeinen zugrundeliegt.

Ist die Kohärenzlänge des (virtuellen) Photons größer als der Radius des Hadrons, mit dem es zur Kollision kommt, kann dieses Photon – im Ruhesystem des Hadrons oder im Schwerpunktsystem der Kollision – aufgefaßt werden als hadronisches System aus Partonen im Feynmanschen Sinne. Die Photon-Hadron-Wechselwirkung ist dann grundlegend vergleichbar einer konventionellen Hadron-Hadron-Wechselwirkung.
Der Prozeß ist in zweierlei Hinsicht determiniert durch die Physik großer Abstände, das heißt durch nichtperturbativ dominierte QCD: Zum ersten aufgrund der Beschränkung auf Diffraktion, also *per definitionem* auf einen genügend kleinen invarianten Impulsübertrag $\sqrt{-t}$. Und zum zweiten aufgrund der großen (transversalen) Ausdehnungen der involvierten Zustände.
Er ist in besonderer Weise geeignet, diese Physik zu untersuchen, insofern als er insbesondere bezüglich seiner Photon-Vektormeson-Komponente eine Anzahl Parameter besitzt, die theoretisch *variiert* und im Experiment als unterscheidbare Signale *detektiert* werden können, und er daher eine breit angelegte Untersuchung gestattet. Unter Betonung dieser Parameter stellt sich der Prozeß exklusiver Photo- und Leptoproduktion eines Vektormesons in folgender Weise dar: Durch Variation der Wellenfunktion des hochenergetischen Photons in Bezug auf seine Virtualität Q und Polarisation λ wird ein hadronischer Zustand „nahezu beliebiger“ (transversaler) Ausdehnung generiert. Dieser transmutiert diffraktiv am Nukleon in ein Vektormeson mit entsprechender Hochenergiewellenfunktion, die ihrerseits, in Abhängigkeit von invarianter Masse M_V und Polarisation λ', dessen (transversale) Ausdehnung bestimmt. Der für den String-String-Mechanismus wesentliche Parameter: (transversale) Ausdehnung der involvierten hadronischen Zustände, wird so mittelbar variiert und der Mechanismus und dessen Relevanz für die Determinierung nichtperturbativer QCD untersucht.

Hadronische Zustände in nichtperturbativ dominierter QCD können anschaulich[3.3] aufgefaßt werden als Zusammenspiel zweier Komponenten: der diese Zustände konstituierenden Partonen, im allgemeinen Quarks, und der sich zwischen diesen ausbildenden gluonischen Strings. Die Ausdehnung hadronischer Zustände wird bestimmt durch die (axiale wie radiale) Ausgedehnung der Strings zwischen den konstituierenden Partonen, – die auf diese Weise erst zu Hadronen fester Radii konfiniert werden. Vor dem Hintergrund dieser Anschauung

[3.3] Wir beziehen uns in dieser Anschauung auf die Approximation einer reinen Gluodynamik im Sinne der *quenched approximation*: Mit letztlich dem Argument der Dominanz der Skala des Gluonkondensates $\langle g^2 FF\rangle_A$ über die des Quarkkondensates $\langle\psi\bar{\psi}\rangle_A$ vernachlässigt sie konsequent Quarkloopdiagramme, – und kann so formal aufgefaßt werden als der der Limes unendlicher Quarkmassen.

macht das MSV einen quantitativen Mechanismus identifizierbar, der nichtperturbativ dominierte QCD im allgemeinen aus derselben Ursache heraus erklärt wie deren prominentestes Phänomen: das Phänomen des Confinements.
Dieser String-Mechanismus wurde zunächst eingehend untersucht für das Phänomen des Confinements selbst, das heißt, in unserer Anschauung, dem *Ausbilden* gluonischer Strings zwischen den konstituierenden Partonen und deren dadurch vermittelten Einschluß zu eichinvarianten Objekten, den Hadronen. Für die einfachste Darstellung eines statischen – in praxi: schweren – Hadrons als eichinvariantes Paar eines statischen Quarks und Antiquarks wurde der verantwortliche String buchstäblich ausgemessen und unter anderem bezüglich seines Energiegehaltes Konsistenz gezeigt mit einem bekannten Niederenergietheorem, der Michael-sum rule, vgl. die Refn [64, 179].
Der hierfür relevante String-Mechanismus in der Niederenergiephysik führt unmittelbar auf einen String-String-Mechanismus in der Hochenergiestreuung. Dieser erklärt die Observablen genau dadurch, daß die gluonischen Strings der streuenden Hadronen miteinander in *Wechselwirkung* treten – letztlich durch deren transversale Ausdehnung und implizierend die Aussage, daß Observable der Hadron-Hadron-Streuung nicht konstruiert werden können aus Quark-Quark-Streuung im Sinne von Quarkadditivität allein, vgl. Ref. [122]. Konkret postuliert das MSV Hochenergie-Wirkungsquerschnitte, differentiell im invarianten Quadrat des Impulstransfers $-t$, für $-t < 1$ GeV^2, und erklärt die Korrelation zwischen slope-Parameter und totalem Wirkungsquerschnitt in der elastischen Proton-Proton-Streuung, vgl. Ref. [63], bzgl. der phänomenologischen Beobachtung dieser Korrelation Ref. [171].

Wir untersuchen diesen zugrundeliegenden String-String-Mechanismus des MSV. Die Verifizierung und Demonstration seiner Relevanz muß für Prozesse geschehen, die große Effekte – auch und gerade im Vergleich zu konkurrierenden Beschreibungen – erwarten lassen. Wir sind daher a priori interessiert an möglichst ausgedehnten Strings, oder gleichbedeutend an möglichst ausgedehnten Zuständen.

Im vorangegangenen Kapitel haben wir Nachtmanns Zugang zu weiche Hochenergiestreuung nachgezeichnet. Seine T-Amplitude ist dominiert durch einen Ausdruck, der dem diffraktiven, in diesem Sinne nichtperturbativen Charakter des Prozesses Rechnung trägt: der Vakuumerwartungswert zweier (nahezu) lichtartiger Wegner-Wilson-Loops, der ausgewertet werden kann im Rahmen des MSV. Darüberhinaus ist aber wesentlich die Kenntnis der (Nahezu)Lichtkegelwellenfunktionen der in der Kollision involvierten hadronischen Zustände.

Diese hadronischen Zustände werden aufgefaßt als Wellenpakete von Colour-Dipolen – Mesonen von Quark-Antiquark-Dipolen, Baryonen von Quark-Diquark-Dipolen[3.4] – die bestimmt sind durch zum einen die Aufteilung des Lichtkegel-Gesamtimpulses auf die beiden Colourladungen: z der Anteil des Quarks, und zum anderen deren transversalen Abstandsvektor $\mathbf{r}$. Die (Nahezu)Lichtkegelwellenfunktionen beziehen sich im üblichen Sinne einer Wellenfunktion auf diese Variablen z und $\mathbf{r}$ und daher auf das ihnen zugrundeliegende Bild mit (nahezu) Lichtgeschwindigkeit propagierender hadronischer Zustände.

Zusammenfassend dieses Bild, fluktuiert also das hochenergetische einlaufende Photon $\gamma^{(*)}$ gemäß einer Wellenfunktion in Wellenpakete von Colour-Dipolen (Quark-Antiquark-Paaren), das jedes einzelne charakterisiert ist durch das Variablenpaar $(z, \mathbf{r})$. Diese Dipole $\{z, \mathbf{r}\}$ streuen diffraktiv am Nukleon und werden gebunden als definierter Zustand eines Vektormesons V, – formalisiert wiederum durch *dessen* (Nahezu)Lichtkegelwellenfunktion. Das Nukleon wird dabei der Einfachheit halber betrachtet als Wellenpakete von Colour-Dipolen (Quark-Diquark-Paaren), deren variable Abhängigkeit – wir kommen hierauf zu-

[3.4] Der besseren Lesbarkeit wegen sei hierzwischen im folgenden sprachlich nicht mehr differenziert.

rück – betrachtet werden kann als reduziert auf $|\mathbf{r}'|$, den Betrag es transversalen Abstands der darüberhinaus gauß'sch verteilt ist. Dem so resultierenden Bild einer Dipol-Dipol-Streuung liegt die Beobachtung zugrunde, daß die Zeitskala, auf der die beiden Colour-Dipole miteinander in Wechselwirkung treten sehr viel kleiner ist als die, auf der die Fluktuation aus beziehungsweise die Bindung in die asymptotischen hadronischen Zustände stattfindet. Wir erinnern an Nachtmanns Diskussion dieser Zeitskalen und seinen Begriff „Femtouniversum", vgl. Ref. [146].

Exklusive Photo- und Leptoproduktion eines Vektormesons an einem Nukleon kann allgemein in vollständiger Analogie zu Hadron-Nukleon-Streuung berechnet werden: indem das Photon repräsentiert wird durch seine hadronische Wellenfunktion, in dem von uns betrachteten Hochenergieprozeß durch seine (Nahezu)Lichtkegelwellenfunktion. Diese kann unter bestimmten Bedingungen perturbativ berechnet werden, im Rahmen der Lichtkegelstörungstheorie (light cone perturbation theory, LCPT).

Für kleine Virtualitäten, a posteriori $Q^2 < 1$ GeV^2, ist das Photon von der Größe typischer Hadronen und wird dominiert durch die – nichtperturbative – Physik großer Distanzen: seine perturbative Beschreibung im Rahmen der LCPT bricht zusammen. Unser Ansatz für diesen Bereich von Q^2 war zunächst der des Verallgemeinerten Vektormeson-Dominanz-Modells (GVDM). Dieses repräsentiert das Photon als Überlagerung nicht von Colour-Dipolen aus (Anti)Quarks, sondern im Sinne der Quark-Hadron-Dualität als Überlagerung der Grundzustand-Vektormesonen $\rho(770)$ und $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$ und deren immer höheren Anregungen. Einerseits müssen für eine Approximation des Photons auf diese Weise möglichst viele Anregungen berücksichtigt werden, vgl. Ref. [66]. Andererseits werden für jedes in die Diskussion mit einbezogene höher angeregte Vektormeson V de facto unbekannte Parameter eingeführt (etwa deren mit einer komplexen Phase versehene Kopplung an den elektromagnetischen Strom f_V). Im Resultat führt dies zu einer Inflation der Parameter und zur totalen Deflation der Aussagekraft des Modells – und damit den Ansatz *ad absurdum*. Wir haben ihn daher verworfen und werden im folgenden Kapitel 4 eine aussagekräftige Analyse für kleine bis verschwindende Virtualitäten des Photons vorstellen, die basiert auf der konsequenten Fortführung des im folgenden formulierten Zugangs für mittlere Virtualitäten.

Mit wachsender Virtualität Q des Photons, und abhängig von einem subtilen Wechselspiel zwischen seiner Virtualität und Polarisation, verringert sich die transversale Ausdehnung $|\mathbf{r}|$ der Colour-Dipole, deren Wellenpakete es konstituieren. Wir werden im folgenden Kapitel diskutieren, wie sich in Hinhlick auf die Phänomenologie der Prozesse dieser Übergang der Dominanz großer zu der kleiner Abstände vollzieht. Für mittlere Virtualitäten im Bereich von $Q^2 = 1 - 10$ GeV^2 kann so die perturbative Beschreibung des Photons durch seine im Rahmen der LCPT berechneten Lichtkegelwellenfunktion verläßlich beschrieben werden. Allerdings behalten die Wirkungsquerschnitte transversal polarisierter Photonen große nichtperturbative Beiträge, die daher rühren, daß die Endpunkte des Impulsanteils in der Wellenfunktion, das heißt $z = 0$ und $z = 1$, *nicht* auf Colour-Dipole kleiner transversaler Ausdehnung einschränken. Dies erklärt sich daraus, daß die Skala, auf der sich die transversale Ausdehnung der Dipole mit wachsendem Q^2 verringert im wesentlichen das Produkt $z(1-z)Q^2$ ist. Der String-String-Mechanismus des MSV, der genau anknüpft an den gluonischen Strings zwischen den Valenzquark-Konstituenten und umso wichtiger ist, je ausgedehnter diese Strings sind, kommt auch hier wesentlich zum tragen.
Wir betonen, daß diese Stringausdehnung – der (transversale) Abstand der Quarkkonstituenten des Dipols – abhängt von der expliziten Form der Wellenfunktion. Andererseits ist

nur sehr wenig über die Physik bekannt, die die Lichtkegel-Hamiltonfunktion nichtperturbativer QCD bestimmt. Die Wellenfunktionen in der Gestalt, wie wir sie angeben, und deren integrierte Verteilungen erfüllen daher in erster Linie die phänomenologische Aufgabe, den Konstituentengehalt des hadronischen Zustandes zu paramtrisieren. Den mit diesen Wellenfunktionen berechneten Wirkungsquerschnitten ist dies Unsicherheit inhärent; die exakten Werte hängen ab von der detaiilierten Form der Wellenfunktionen. Das Q^2-Verhalten anderer Observable, wie des Verhältnisses der Produktion longitudinaler zu transversaler Vektormesonen oder des slope-Parameters, versprechen dagegen, ein guter Test für das String-Bild des MSV zu sein.

Bevor wir unseren Zugang explizit darstellen, gehen wir in aller Kürze auf konkurierende Zugänge und Modelle ein.

Exklusive Elektroproduktion von Vektormesonen wird im Rahmen eines Weichen Pomerons von Donnachie und Landshoff in den Refn. [54, 57] diskutiert. In diesem Modell spielt die transversale Ausdehnung der streuenden hadronischen Zustände eine nur marginale Rolle. Zum einen kann Hadron-Hadron-Streuung aufgrund der dem Modell inhärenten Quarkadditivität systematisch reduziert werden auf Quark-Quark-Streuung. Zum anderen wird angenommen, der transversale Abstand der Quarks im virtuellen Photon sei sehr viel kleiner als die Wellenfunktion des Vektormesons, so daß diese ersetzt wird durch ihren Wert am Ursprung. Diese Annahmen stehen nicht außerhalb jeder Diskussion, umso mehr als zusätzlich angenommen wird die Kopplung des Weichen Pomerons an Quarks hänge ab von dessen Flavour. Für mittlere Q^2 im Bereich von $1 - 10$ GeV^2, vgl. Ref. [54], wird ein Pomeron-Formfaktor für *far-off-shell*-Quarklinien eingeführt. Für größere Werte von Q^2, vgl. Ref. [57], wird der Austausch zweier nichtperturbativer Gluon (mit entsprechenden nichtperturbativen Propagatoren) angewandt; dies führt dazu, daß sich bei kleiner Ausdehnung des Quark-Antiquark-Dipols *colour singlet*-Beiträge gegeneinander wegheben.

In den Veröffentlichungen Refn. [119, 150] wird ein Modell, das basiert auf perturbativem Zwei-Gluon-Austausch, zur Beschreibung nichtperturbativer Effekte in der Weise ausgeweitet, daß die Gluon-Verteilung im Proton explizit mit in den Ansatz einbezogen wird, diese quasi durch Vergleich mit bestimmten Beispielen exklusiver Vektormesonproduktion parametrisiert und in dieser Form zur Postulation verwandter Prozesse benutzt wird. Dieses Modell wird weiter verfeinert durch eine BFKL-artige Entwicklung, um Aussagen machen zu können über die s- wie auch Q^2-Abhängingkeit der Observablen. Zusammenfassend ist hier zugrundeliegendes Bild die Streuung von Colour-Dipolen. Also ähnlicher Ausgangspunkt wie die von uns im folgenden vorgestellte Analyse. Wesentlicher Unterschied beider Zugänge liegt in beider Reaktionsmechanismen.

Die Wichtigkeit der Gluon-Verteilung im Proton wird als notwendiges Ingredient auch für harte Diffraktion betont. Wird sie in straight-forward perturbative Rechnung miteinbezogen und deren Gültigkeit eingeschränkt auf den Bereich, in dem eine große Skala invarianten Impulstransfers gegeben ist, können exklusive Produktion von $J/\psi(3097)$, vgl. Ref. [182], oder Prozesse bei großen Virtualitäten von $Q^2 > 10$ GeV^2 postuliert werden, vgl. Ref. [32].

Mit dem DESY-Beschleuniger HERA sind neue Möglichkeiten geschaffen, den zugänglichen s- und Q^2-Bereich exklusiver Vektormesonproduktion zu erweitern. Daten, die von den ZEUS- und H1-Kollaborationen veröffentlicht wurden, sprechen dafür, daß bei großen Q^2 der Wirkungsquerschnitt steiler ansteigt, als von dem Austausch des Weichen Pomerons her zu erwarten ist. Eine mögliche Erklärung in der Sprache von Colour-Dipolen ist, daß die Evolution der Wellenfunktion zu höheren s und Q^2 darin resultiert, daß sich immer mehr solcher Dipole im Hadron finden, vgl. die Refn. [145, 154]. Die Kenntnis dieser Evoluti-

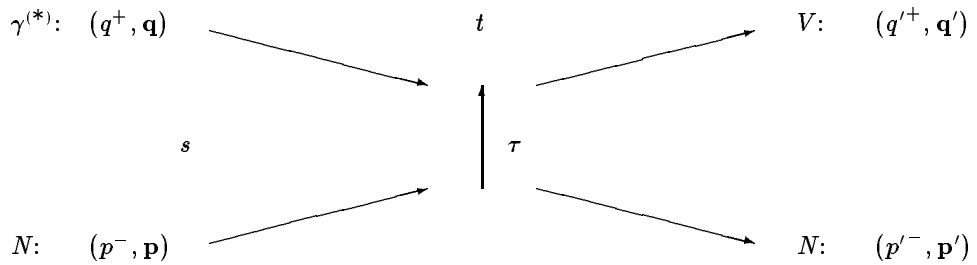


Abbildung 3.1: Die Kinematik der Streuung $\gamma^{(*)}N \to VN$. Im Limes $s \to \infty$ ist ein Teilchenimpuls P vollständig bestimmt durch die zwei transversalen $\mathbf{P}$ und *eine* der longitudinale Impulskomponenten $P^{\pm}$; wir arbeiten mit de „großen", die „kleine" ist dann gegeben durch $P^{\pm} = (\mathbf{P}^2 + M^2)/2P^{\mp} = \mathbf{M}^2/2P^{\mp}$, mit M der Masse, $\mathbf{M}$ der transversalen Masse des Teilchens. Vgl. Abb. 2.3 auf Seite 50.

on wäre dann Voraussetzung, die s-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts eines virtuellen Photons bei steigender Auflösung zu diskutieren.

Diesbezüglich verweisen wir auf Arbeiten von Dosch und Rüter, die den Zugang des MSV inzwischen dahingehend erweitern, daß auch die s-Abhängigkeit postuliert wird, vgl. Ref. [181]. Dies geschieht, indem im Sinne des phänomenologischen Donnachie-Landshoff-Modells, vgl. Ref. [58], der Austausch eines Weichen Pomerons (motiviert aus der Regge-Theorie) und eines Harten Pomerons (aus perturbativen BFKL-Rechnungen) zugrundegelegt wird, die jeweils als einfache Pole in der komplexen Drehimpulsebene angenommen werden. An das Weiche Pomeron koppeln Dipole von der Größe typischer Hadronen, an das Harte Pomeron sehr viel kleinere Dipole – behandelt im Rahmen des MSV herkömmlich beziehungsweise als perturbativer Zwei-Gluon-Austausch. Dieser erweiterte Zugang reproduziert die Resultate bei $\sqrt{s} = 20$ GeV und erklärt die s-Abhängigkeit des gesamten Q^2- und M_V-Spektrums von HERA-Daten – insbesondere den Übergang der Dominanz des Weichen zu der des Harten Pomerons.

Der Frage der s-Abhängigkeit und dem Phänomen des Austauschs eines Harten Pomerons wenden wir uns im folgenden aber *nicht* zu; wir beschränken uns auf die feste Energie von $\sqrt{s} = 20$ GeV und auf Physik des Weichen Pomerons.

Wir konkretisieren die in Abschnitt 2.2 geführte allgemeine Diskussion der zugrundeliegenden Kinematik auf den Fall exklusiver Produktion von Vektormesonen.

Seien der einlaufende Vierer-Impuls des Photons mit q, der des einlaufenden Nukleons mit p bezeichnet, mit q' und p' die entsprechenden auslaufenden Impulse, vgl. Abb. 3.1 in Gegenüberstellung zu Abb. 2.3 auf Seite 50. Dann ist $\tau = q' - q$ der Vierer-Gesamt-Impulstransfer und die unabhängigen Lorentz-invarianten Variablen sind gegeben durch

$$s = (p + q)^2 \tag{3.1}$$

$$t = \tau^2 = (q' - q)^2 \tag{3.2}$$

$$Q^2 = -q^2 \tag{3.3}$$

vgl. die Gln. (2.19), (2.19′). Wir betrachten *weiche* Streuung, das heißt $-t < 1\ \mathrm{GeV}^2$, bei *hohen* Energien, das heißt $s \gg Q^2$ und $s \gg M_N^2$, M_V^2, etwa $s > 100\ \mathrm{GeV}^2$. Die Bjorken-Skalenvariable $x_{Bj} = Q^2/2p\cdot q = Q^2/(s + Q^2 - M_N^2)$ ist in diesem kinematischen Bereich klein von der Größenordnung $x_{Bj} < 0.1$.

Weiter arbeiten wir im Schwerpunktsystem, in dem der Photon-Dreier-Impuls $\vec{q}$ in posi-

tive x^3-Richtung zeigt. Die Beträge der Dreier-Impulse sind dann gegeben durch

$$|\vec{p}| \;=\; |\vec{q}| \;=\; \frac{\sqrt{s}}{2}\left[\,1 \;-\; \frac{M_N^2-Q^2}{s} \;+\; O(s^{-2})\,\right] \tag{3.4}$$

$$|\vec{p}\,'| \;=\; |\vec{q}\,'| \;=\; \frac{\sqrt{s}}{2}\left[\,1 \;-\; \frac{M_N^2+M_V^2}{s} \;+\; O(s^{-2})\,\right] \tag{3.4$'$}$$

vgl. die Gln. (2.38), (2.38′). In diesem Bezugsystem erhält das Vektormeson einen kleinen transversalen Impuls vom Betrag $|\mathbf{q}'| = |\tau| \cong \sqrt{s}\,\vartheta/2 < 1$ GeV. Im Unterschied zu elastischer Hadron-Hadron-Streuung, wegen $q^2 = -Q^2 \leq 0$, existiert kein Bezugsystem, in dem die Differenz der Dreier-Impuls-Beträge auf der Nukleonseite identisch verschwindet; wir finden die Abhängigkeit

$$\delta \;=\; |\vec{p}| - |\vec{p}\,'| \;\cong\; \frac{Q^2+M_V^2}{2\sqrt{s}} \;>\; 0 \tag{3.5}$$

Dies impliziert eine nichtverschwindende Zeitkomponente des Gesamt-Impulstransfers $\tau^0 \cong \delta$ zusätzlich zu den Raumkomponeneten $\tau^3 \cong -\delta - \sqrt{s}\,\vartheta^2/4$ und $|\tau| \cong \sqrt{s}\,\vartheta/2$. Und folglich:

$$t \;=\; \tau^2 \;=\; -\tau^2 \;+\; \delta t \tag{3.6}$$

$$\text{mit} \qquad \delta t \;=\; -\,\frac{M_N^2\,(Q^2+M_V^2)^2}{s^2} \;+\; O(s^{-3}) \tag{3.6$'$}$$

vgl. Gl. (2.39). Im Hochenergielimes $s \to \infty$ dominieren die Raumkomponenten; fordern wir im Rahmen dieses Limes einen endlichen invarianten Impulstransfer $\sqrt{-t}$, das heißt einen kleinen Streuwinkel $\vartheta/2 = O(1/\sqrt{s})$, so ist der transversale Vektor τ der führende Eintrag in τ. Wir werden daher im folgenden alle Komponenten bis auf τ vernachlässigen.

3.2 Weiche Hochenergiestreuung im MSV

Das MSV wurde in Kapitel 1, seine Anwendung auf weiche Hochenergiestreuung in Kapitel 2 diskutiert. Wir rekapitulieren in aller Kürze diese Diskussion unter Betonung von Aspekten, die uns ein tieferes Verständnis in Hinblick auf unsere Untersuchung vermitteln.

Die T-Amplitude für Hadron-Hadron-Streuung im Limes $s \to \infty$, vgl. Gl. (2.138), lautet:

$$T_{hh}^{(s,t)} \;\equiv\; \langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\, \text{in} \,|\, T \,|\, h^1(P_1)\, h^2(P_2),\, \text{in}\,\rangle \tag{3.7}$$

$$= \int d^2\mathbf{b}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}} \int d\varphi_{1',1}(z_1,\mathbf{X}) \int d\varphi_{2',2}(z_2,\mathbf{Y})\;\; \tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}(z_1,\mathbf{X};z_2,\mathbf{Y};\mathbf{b})$$

mit den Lichtkegelwellenfunktionen absorbiert im Integrationsmaß

$$d\varphi_{i',i}(z,\mathbf{Z}) \;\equiv\; \frac{dz}{2\pi}\, d^2\mathbf{Z}\;\; \varphi_{s\bar{s}}^{i'\dagger}(z,\mathbf{Z})\; \varphi_{s\bar{s}}^{i}(z,\mathbf{Z}) \tag{3.8}$$

vgl. Gl. (2.112). Die Funktion $\tilde{T}_{\mathcal{U}} \equiv \tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ ist definiert als die bezüglich τ, mit $t = \tau^2$, Fouriertransformierte T-Amplitude der zugrundeliegenden Streuung zweier Wegner-Wilson-Loops; sie ist explizit gegeben durch – vgl. Gl. (2.139′):

$$\tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; -2\mathrm{i}\,s\;\langle W_{\mathfrak{p}}\rangle_A^{-1}\,\langle W_{\mathfrak{m}}\rangle_A^{-1}\;\langle\,[W_{\mathfrak{p}}-1][W_{\mathfrak{m}}-1]\,\rangle_A \tag{3.9}$$

$$\underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \;\; -2\mathrm{i}\,s\;\langle\, W_+\cdot W_- \;-\; 1\,\rangle_A$$

$$\text{wegen} \qquad W_{\mathfrak{p}} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} W_+,\;\; W_{\mathfrak{m}} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} W_-, \qquad \langle W_+\rangle_A = \langle W_-\rangle_A = 1$$

das heißt im wesentlichen durch den Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ des Produkts W_+W_-. Wir merken an, daß unsere Notation W_+, W_- normierte Spurbildung $\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} = 1/d_{\mathfrak{F}}\mathrm{tr}$ bezüglich der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$ der Loops bereits impliziert.

Longitudinal, in der x^0,x^3-Ebene fällt der Loop W_+ [bzw.W_-] mit deren erster [bzw. zweiter] Winkelhalbierenden, das heißt mit der x^+-Achse [bzw. x^--Achse] zusammen. Diese Seiten sind lichtartig und verlaufen entlang der physikalische klassischen Trajektorien eines Quarks und Antiquarks, die parallel zueinander mit (nahezu) Lichtgeschwindigkeit in positive [bzw. negative] x^3-Richtung propagieren, also $x^3(x^0) = x^0$ [bzw. $x^3(x^0) = -x^0$], und gemeinsam einen Quark-Antiquark-/Colour-Dipol darstellen.
Transversal projiziert ist die Loop-Loop-Konfiguration insofern von besonderer Relevanz, als durch sie – in dem wie folgt ausgeführten Sinne – die Streuung vollständig bestimmt ist.

3.2.1 Transversale Konfiguration

Wir geben die funktionale Abhängigkeit der Wegner-Wilson-Loops W_+, W_- und damit der Funktion $\tilde{T}_{\mathit{ll}}$ aus Gl. (3.9) wie folgt an:

$$\tilde{T}_{\mathit{ll}} \;=\; -2\mathrm{i}\,s\,\langle\, W_+ \cdot W_- \;-\; 1\,\rangle_A \tag{3.9$'$}$$

$$=\; \tilde{T}_{\mathit{ll}}(z_1,\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}};z_2,\mathbf{y},\bar{\mathbf{y}}) \;=\; -2\mathrm{i}\,s\,\langle\, W_+(z_1,\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}})\cdot W_-(z_2,\mathbf{y},\bar{\mathbf{y}}) \;-\; 1\,\rangle_A \tag{3.10}$$

$$=\; \tilde{T}_{\mathit{ll}}(z_1,\mathbf{X};z_2,\mathbf{Y};\mathbf{b}) \;=\; -2\mathrm{i}\,s\,\langle\, W_+(z_1,\mathbf{X},+\mathbf{b}/2)\cdot W_-(z_2,\mathbf{Y},-\mathbf{b}/2) \;-\; 1\,\rangle_A \tag{3.10$'$}$$

Als Variable *longitudinalen Ursprungs* treten auf: die Anteile z_i der Quarks am jeweiligen gesamten Lichtkegelimpuls, als *transversale* Variable: die (Anti)Quarkpositionen $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{y}$, $\bar{\mathbf{y}}$ und die Ausdehnungen der Colour-Dipole $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ und deren Impakt $\mathbf{b}$.

Diese zwei alternativen Variablensätze $\{z_1,z_2,\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y},\bar{\mathbf{y}}\}$ und $\{z_1,z_2,\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{b}\}$ parametrisieren die Projektion der Konfiguration der Wegner-Wilson-Loops in den Transversalraum: durch die Positionen der (Anti)Quarks oder durch die Konstellation der Quark-Antiquark-/Colour-Dipole. Allein von dieser Transversalprojektion hängt die T-Amplitude der Loop-Loop-Streuung $\tilde{T}_{\mathit{ll}}$ und folglich der Hadron-Hadron-Streuung T_{hh} ab.

Grund dafür ist, daß die Definition der relevanten transversalen Vektoren die longitudinale Dynamik subsumiert: Die $\mathbf{b}$-Integration mit dem Exponential $\exp\{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}\}$ in T_{hh}, vgl. Gl. (3.7), ist Reminiszenz daran, daß der relevante Impakt der Streuung – im Sinne von Fourier-konjugiert zu τ, dem Vierer-Gesamt-Impulsübertrag – genau der Vierer-Vektor b ist. In Kapitel 2.3.3 beziehungsweise Anhang C.3 wurde gezeigt, daß aus dieser Definition der Konjugation zu τ folgt, daß $\mathbf{b}$ (in unserem Bezugsystem ist b rein transversal) die mit den z_i-Faktoren gewichteten Mitten der projizierten Dipole $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ verbindet. Der Impakt $\mathbf{b}$ setzt die longitudinalen Größen z_1, z_2 voraus, involviert über diese die Abhängigkeit von der longitudinalen Dynamik – und übersetzt sie in den Transversalraum.

Wir rekapitulieren die formalen Definitionen und Zusammenhänge dieser Variablen, in Termen derer wir die transversale Konfiguration parametrisieren; vgl. Seite 67 und Abb. 3.2.

Die Paare $\{z_1,\mathbf{x}\}$, $\{\bar{z}_1,\bar{\mathbf{x}}\}$ und $\{z_2,\mathbf{y}\}$, $\{\bar{z}_2,\bar{\mathbf{y}}\}$ charakterisieren die (Anti)Quarks des (+)- beziehungsweise des (−)-Dipols vollständig durch ihre Anteile am Lichtkegelimpuls und ihre transversalen Positionen; dabei schreiben wir abkürzend: $\bar{z}_i = (1-z_i)$.
Diese Variablen sind nicht unabhängig, wohl aber der Satz: die Paare $\{z_1,\mathbf{X}\}$ und $\{z_2,\mathbf{Y}\}$ für den (+)- beziehungsweise (−)-Dipol und $\mathbf{b}$ deren Impakt. Konkret sind $\mathbf{X}$ beziehungsweise $\mathbf{Y}$ die vom Antiquark zum Quark hin orientierten transversalen Abstandvektoren, und es verbindet $\mathbf{b}$, vom (−)- zum (+)-Dipol hin orientiert, deren z_i-gewichteten Mitten.

Für $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$, die (Anti)Quark-Positionen des (+)-Dipols, haben wir den Zusammenhang:

$$\mathbf{x} \;=\; \;\bar{z}_1\,\mathbf{X} \;+\; \mathbf{b}/2 \;+\; \omega \tag{3.11}$$

$$\bar{\mathbf{x}} \;=\; -z_1\,\mathbf{X} \;+\; \mathbf{b}/2 \;+\; \omega \tag{3.11$'$}$$

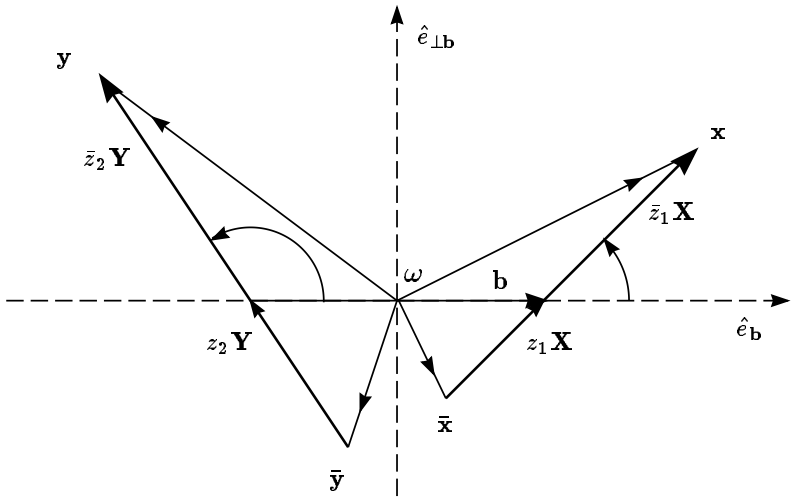


Abbildung 3.2: Die Konfiguration der wechselwirkenden Wegner-Wilson-Loops W_+, W_- im Transversalraum. Die Vektoren $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{y}$, $\bar{\mathbf{y}}$ sind die Positionen der (Anti)Quarks des (+)- bzw. (−)-Loops. Die Quark-Antiquark-Differenzvektoren $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$ sind die Ausdehnungen der entsprechenden Dipole. Der Impaktvektor $\mathbf{b}$, dessen Mitte bezeichnet ist mit ω (Schnittpunkt des Achsenkreuzes), ist orientiert in Richtung (+)-Dipol und verbindet die z_i-gewichteten Mitten von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$.

und für $\mathbf{y}$, $\bar{\mathbf{y}}$, die des (−)-Dipols:

$$\mathbf{y} = \bar{z}_2\,\mathbf{Y} - \mathbf{b}/2 + \omega \tag{3.12}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = -z_2\,\mathbf{Y} - \mathbf{b}/2 + \omega \tag{3.12'}$$

Bis auf den mit ω bezeichneten Punkt, den wir als Koordinatenursprung, das heißt identisch Null wählen werden – sind dies die Gln. (2.117), (2.117′) beziehungsweise (2.118), (2.118′).

Dieser Zusammenhang invertiert, gilt für den Impaktvektor $\mathbf{b}$ und für dessen zunächst noch allgemein gehaltene Mitte ω:

$$\mathbf{b} = \mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z \tag{3.13}$$

$$\omega = (\mathbf{X}_z + \mathbf{Y}_z)/2 \tag{3.14}$$

Anschaulich verbindet dieser Impaktvektor die z_i-gewichteten Dipol-Mitten $\mathbf{X}_z$, $\mathbf{Y}_z$, die wie folgt definiert sind:

$$\mathbf{X}_z = z_1\,\mathbf{x} + \bar{z}_1\,\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{b}/2 + \omega \tag{3.15}$$

$$\mathbf{Y}_z = z_2\,\mathbf{y} + \bar{z}_2\,\bar{\mathbf{y}} = -\mathbf{b}/2 + \omega \tag{3.15'}$$

Für die Quark-Antiquark-Abstandvektoren schließlich gilt:

$$\mathbf{X} = \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \tag{3.16}$$

$$\mathbf{Y} = \mathbf{y} - \bar{\mathbf{y}} \tag{3.16'}$$

Vgl. Gl. (2.114), die Gln. (2.115), (2.115′) und (2.116), (2.116′).

Im folgenden arbeiten wir je nach Zweckmäßigkeit entweder mit dem einen oder dem anderen dieser Variablensätze, ohne bezüglich der *Notation* – vgl. die Gl. (3.10), (3.10′) – zwischen den entsprechenden Funktionen zu unterscheiden.

Wir unterbrechen unsere Diskussion mit einem Exkurs, der sich von wesentlich größerer Bedeutung herausstellen wird als die Koordinatentransformation, als die er zunächst erscheint.

Die transversalen Abstandvektoren der Quark-Antiquark-Paare sind $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Sei der Vektor $\mathbf{b}'$ mit Mitte ω' dadurch definiert, daß er ihre *bloßen Mitten* verbindet. Es gilt

$$\mathbf{b}' \equiv \mathbf{b} \qquad \omega' \equiv \omega \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_1 \equiv z_2 \equiv 1/2 \tag{3.17}$$

in Gegenüberstellung mit dem Vektor $\mathbf{b}$ mit Mitte ω, der die *z_i-gewichteten Mitten* von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ verbindet. Vgl. Abb. 3.3 in Kontrast zu Abb. 3.2.
An die Stelle der Gln. (3.11), (3.11′) treten für den (+)-Dipol:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}/2 + \mathbf{b}'/2 + \omega' \tag{3.18}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{X}/2 + \mathbf{b}'/2 + \omega' \tag{3.18′}$$

und an die Stelle der Gln. (3.12), (3.12′) für den (−)-Dipol:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Y}/2 - \mathbf{b}'/2 + \omega' \tag{3.19}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = -\mathbf{Y}/2 - \mathbf{b}'/2 + \omega' \tag{3.19′}$$

Addition und Gleichsetzen der (Anti)Quark-Positionen nach (3.11)+(3.11′)$\stackrel{!}{=}$(3.18)+(3.18′) beziehungsweise (3.12)+(3.12′)$\stackrel{!}{=}$(3.19)+(3.19′) führt auf

$$\mathbf{b}' + 2\omega' = (\bar{z}_1 - z_1)\,\mathbf{X} + \mathbf{b} + 2\omega \tag{3.20}$$

$$-\mathbf{b}' + 2\omega' = (\bar{z}_2 - z_2)\,\mathbf{Y} - \mathbf{b} + 2\omega \tag{3.20′}$$

Addition und Subtraktion dieser Gleichungen führt respektive auf

$$\omega' = \omega + 1/2\,[\,(1/2 - z_1)\,\mathbf{X} - (1/2 - z_2)\,\mathbf{Y}\,] \tag{3.21}$$

$$\mathbf{b}' = \mathbf{b} + \qquad [\,(1/2 - z_1)\,\mathbf{X} - (1/2 - z_2)\,\mathbf{Y}\,] \tag{3.22}$$

vgl. $\bar{z}_i - z_i = 1 - 2z_i$, als Relationen zwischen den gestrichenen und ungestrichenen Größen – insbesondere in Übereinstimmung mit (3.17): Eine Diskrepanz existiert nur für Konfigurationen mit nicht gleichverteilten Lichtkegelimpulsen.

Die Loop-Loop-Streuamplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ hängt allein ab von der transversalen Konfiguration der Streuung. Sei diese Konfiguration statt durch die Vektoren $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{b}$ wie in Abbildung 3.2 parametrisiert durch die Vektoren $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{b}'$ wie in Abbildung 3.3 – also auch implizit *unabhängig* von den Anteilen z_i der Quarks am Lichtkegelimpuls; vgl. Diskussion oben bzgl. der impliziten Abhängigkeit des Impakts $\mathbf{b}$ von den z_i. In der Formel für die T-Amplitude der Hadron-Hadron-Streuung T_{hh}, vgl. Gl. (3.7), geht im Rahmen dieses Variablenübergangs $\mathbf{b} \to \mathbf{b}'$, Jacobi-Determinante $\equiv 1$, die $\mathbf{b}$- über in eine $\mathbf{b}'$-Integration und, vgl. Gl. (3.22), die Exponentialfunktion $\exp\{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}\}$ über in einen Faktor $\exp\{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}'\}$ und in einen zweiten Faktor $\exp\{+i\tau\cdot[(1/2-z_1)\mathbf{X} - (1/2-z_2)\mathbf{Y}]\}$. Die z_1,z_2-Abhängigkeit ist aus der Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ faktoriell herausgezogen.

Bei genauerer Überlegung konstatieren wir folgendes: Dokumentiert durch Gl. (3.21) bewegen sich ω' und ω relativ zueinander, wenn die z_1-, z_2- und die $\mathbf{X}$-, $\mathbf{Y}$-Integrationen ausgeführt werden. Da wir den gemeinsamen Referenzpunkt x_0 der Wegner-Wilson-Loops – im Sinne einer „möglichst symmetrischen Wahl“ – wählen werden als die *Mitte des Impaktvektors*, hat dies zur Konsequenz, daß sich dieser in der einen „Parametrisierung“ relativ zur anderen bewegt. Es handelt sich daher nicht mehr um verschiedene Parametrisierungen derselben Geometrie. Genau diese Beobachtung machen wir uns zunutze und untersuchen, wie eine solche permanente Zitterbewegung des Referenzpunktes, mit der korreliert ist eine entsprechende Bewegung der Flächen, über die die paralleltransportierten Feldstärken integriert werden, sich quantitativ auf die postulierten Wirkungsquerschnitte auswirkt.

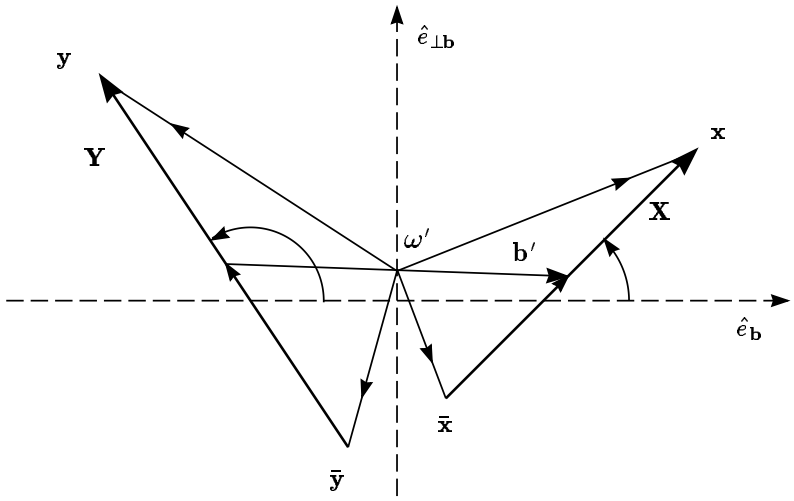


Abbildung 3.3: In Kontrast zu dem Vektor $\mathbf{b}$ mit Mitte ω, vgl. Abb. 3.2, verbindet der Vektor $\mathbf{b}'$ mit Mitte ω' nicht die *z_i-gewichteten*, sondern die *bloßen Mitten* der Dipole.

Wir finden vernachlässigbare numerische Effekte von kleiner als einem halben Prozent. Dies ist die A posteriori-Rechtfertigung der Annahme einer nur geringen Abhängigkeit unseres Zugangs von der Wahl des Referenzpunktes, wenn diese nur „vernünftig" ist, im Sinne von „möglichst symmetrisch". Diese Annahme ist eingegangen in den nicht explizit vom Referenzpunkt abhängenden Ansatz für die Kumulante zweiter Ordnung in den paralleltransportierten Feldstärken.[3.5] Wir schließen diesen Exkurs und fahren fort mit unserer Diskussion in Termen der ungestrichenen Vektoren wie veranschaulicht in Abbildung 3.2.

3.2.2 Loop-Loop-Streuamplitude $\tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathbf{b})}$

Wir rekapitulieren die Umformungen der Loop-Loop-Streuamplitude $\tilde{T}_{\ell\ell}$ als des Vakuumerwartungswerts $\langle \cdot \rangle_A$ im wesentlichen des Produkts der Wegner-Wilson-Loops W_+, W_-, vgl. Gl. (3.10′), – in eine Gestalt, die in einfacher und anschaulicher Weise allein von der gerade diskutierten transversalen Konfiguration abhängt. Sei verwiesen auf Kapitel 2.4 und 2.5.

Sei Abbildung 3.2 formal aufgefaßt als transversaler Schnitt bei $x^+ \equiv \omega^+, x^- \equiv \omega^-$ bezüglich eines Punktes ω, dessen transversale Komponente ω in dieser Ebene gerade die Mitte des Impaktvektors $\mathbf{b}$ bezeichnet. Sei dieser Punkt ω gewählt als der Koordinatenursprung – ohne unmittelbar $\omega \equiv \mathbf{0}$ zu setzen. Die funktionale Abhängigkeit der Loops W_+, W_- ist dann zu lesen: Die lange, longitudinale Seite des (+)-Loops $W_+(z_1, \mathbf{X}, +\mathbf{b}/2)$ verläuft auf der x^+-Achse; seine kurze, transversale Seite ist der Vektor $\mathbf{X}$, dessen z_1-gewichtete Mitte transversal bei $+\mathbf{b}/2+\omega$ positioniert ist. Analog der (−)-Loop $W_-(z_2, \mathbf{Y}, -\mathbf{b}/2)$.

Der Wegner-Wilson-Loop selbst sei in der Gestalt von Gl. (2.140) konkretisiert:

$$W(\mathcal{C}) \;=\; \mathrm{tr}_{\mathfrak{R}}\; P_{\mathcal{C}}\;\; \exp\; -\frac{\mathrm{i}\,g}{2} \int_{\mathcal{S}(\mathcal{C})} d\sigma^{\mu\nu}(x')\; F_{\mu\nu}(x'; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x'}) \tag{3.23}$$

In dieser Formel ist die Feldstärke $F(x'; x_0, \mathcal{C}_{x_0 x'})$, deren Eichanteil mithilfe Konnektoren entlang einer Kurve $\mathcal{C}_{x_0 x'}$ hin und entlang deren Inversen $\mathcal{C}_{x' x_0} \equiv \mathcal{C}_{x_0 x'}^{-1}$ zurück an den Referenzpunkt x_0 paralleltransportiert ist, bezüglich ihres Arguments x' in folgendem Sinne zu

[3.5] Vgl. Kapitel 1 die Gln. (1.63), (1.63′), (1.64) (1.64′), Gl. (1.66) und Gl. (1.68).

integrieren: In definierter Ordnung $P_{\tilde{\mathcal{C}}}$ über eine Fläche $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$, die unendlich fein plakettiert zu denken ist durch die Deformation $\tilde{\mathcal{C}}$, die zusammengesetzt ist aus den Kurven $\mathcal{C}_{x_0x'}$, $\mathcal{C}_{x_0x'}^{-1}$ und weiter den Kurven für x'', x''',... Diese Fläche $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}})$ hat dabei den Bedingungen zu genügen: daß ihr Rand mit dem orientierten Loop zusammenfällt und daß sie den Referenzpunkt x_0 als Element enthält, – sie ist dadurch aber noch nicht vollständig bestimmt. Vgl. die Diskussion zum Nichtabelschen Stokes'schen Satz Gl. (1.38) auf Seite 29.

Um auf die Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ in der Gestalt des Vakuumerwartungswerts zweier Wegner-Wilson-Loops die Kumulantenentwicklung anwenden zu können, vgl. Abschnitt 1.3, müssen die Referenzpunkte von W_+, W_- identisch sein, das heißt es müssen die Integrationsflächen $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_+)$, $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_-)$ in diesem Punkt geometrisch verknüpft sein. Der Ansatz für die Kumulante zweiter Ordnung in den paralleltransportierten Feldstärken, vgl. Fußnote 3.5, trägt Rechnung einer funktionalen Abhängigkeit von der Vierer-Differenz ξ der Feldstärkenpositionen allein und nicht auch vom gemeinsamen Referenzpunkt x_0. Wir haben argumentiert und gerade verifiziert, daß dies dann gerechtfertigt ist, wenn in möglichst symmetrischer Weise x_0 und – damit in Zusammenhang – die Integrationsflächen gewählt werden.

In diesem Sinne identifizieren wir die Referenzpunkte der Wegner-Wilson-Loops W_+, W_- mit einem gemeinsamen Referenzpunkt x_0. Wir wählen diesen identisch der Mitte ω des Impaktvektors $\mathbf{b}$, das heißt $\mathbf{x_0} \equiv \omega$. Wir konkretisieren die Integrationsflächen als die orientierten Mantelflächen zweier Pyramiden, deren gemeinsamer Apex gerade der Referenzpunkt x_0 und deren Basen der jeweilige plane Loop ist. Wir verweisen auf Abbildung 2.4 auf Seite 76.

Die Geraden, die in dem in Abbildung 3.2 dargestellten transversalen Schnitt von ω zu den Positionen $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{y}$, $\bar{\mathbf{y}}$ der (Anti)Quarks verlaufen, sind die Projektionen dieser Pyramiden-Mantelflächen in den Transversalraum. Wir rekapitulieren im folgenden, wie sich die Integrationen der paralleltransportierten Feldstärken über die Pyramiden-Mantelflächen reduzieren auf ihre Integration über diese Projektionen im Transversalraum.

Wir verweisen auf die ausführliche Darstellung dieser Geometrie in Kapitel 2.4.2, die einschließt explizite Parametrisierungen der Pyramiden-Mantelflächen $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{p}})$ und $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_{\mathfrak{m}})$ über den nahezu lichtartigen Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ und deren transversale Projektionen. Diese gehen über im hier betrachteten Limes $s \to \infty$ in die Flächen $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_+)$ und $\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}_-)$ über den lichtartigen Wegner-Wilson-Loops W_+, W_-.

Vor dieser Geometrie wird in Kapitel 2.4 und 2.5 die Streuamplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}} \equiv \tilde{T}_{\mathcal{U}}^{(s,\mathbf{b})}$ für große aber endliche Werte des Quadrats s der invarianten Schwerpunktenergie dargestellt wie folgt – vgl. Gl. (2.263):

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; 2\mathrm{i}\,s\;\frac{1}{(4N_{\mathrm{c}})^2}\;\left(\langle g^2FF\rangle_A a^4\right)^2 \\ \times\left[\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\,\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2\;+\;\left(\frac{g_{\mathfrak{pp}}}{g_{+-}}\right)^2\cdot\left(\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}\,\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}+\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\,\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2\right)\right] \\ \times\;\exp\,-\frac{1}{4N_{\mathrm{c}}}\cdot\langle g^2FF\rangle_A a^4\cdot\frac{g_{\mathfrak{pp}}}{g_{+-}}\left(\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}+\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}\right) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Im Limes $s \to \infty$ geht die Komponente $g_{\mathfrak{pp}}$ des metrischen Tensors bezüglich der Koordinatenlinien $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ über in die – identisch verschwindende – Komponente g_{++} des metrischen tensors bezüglich der Lichtkegel-Koordinatenlinien $\bar{\mu} \in \{+, -, 1, 2\}$. Aus Gl. (3.24) folgt die bekannte $s \to \infty$-asymptotische Formel:

$$\tilde{T}_{\mathcal{U}} \;=\; 2\mathrm{i}\,s\;\frac{1}{(4N_{\mathrm{c}})^2}\,\frac{2}{N_{\mathrm{c}}^2-1}\;\left(\langle g^2FF\rangle_A a^4\right)^2\;\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}{}^2 \tag{3.25}$$

Die Funktion $\tilde{X}_{\mathfrak{pm}} \equiv \tilde{X}_{\mathfrak{pm}}(z_1, \mathbf{X}; z_2, \mathbf{Y}; \mathbf{b})$ hängt ab allein von der Geometrie der Streuung

in der x^1x^2-Transversalebene und ist insbesondere unabhängig von den der Energie $\sqrt{s}$ der Streuung. Sie ist Summe eines Anteils $\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}}$ bezüglich der konfinierenden Lorentz-Tensorstruktur $t^C_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$ des Korrelationstensors und eines Anteils $\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}}$ bezüglich der nicht-konfinierenden Struktur $t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$ – vgl. die Gln. (2.241), (2.242):

$$\tilde{X}_{\mathrm{pm}} \;=\; \varkappa\, \tilde{X}^C_{\mathrm{pm}} \;+\; (1-\varkappa)\, \tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}} \tag{3.26}$$

Die nicht-konfinierende Funktion ist explizit angegeben in den Gln. (2.243), (2.243′):

$$\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{1}{6}\;\sum\nolimits_{I,\,J\equiv Q,\,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,\,J}\;\;\tilde{F}\,[F^{NC}]\big(\big|\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}-\mathbf{r}^J_{\mathrm{m}}\big|\big) \tag{3.27}$$

$$\;=\; 8\cdot\lambda^4\,\frac{\pi}{12}\;\sum\nolimits_{I,\,J\equiv Q,\,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,\,J}\;\;\mathcal{K}_3\big(\big|\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}-\mathbf{r}^J_{\mathrm{m}}\big|/\lambda\big) \tag{3.27′}$$

für die konfinierende in den Gln. (2.245), (2.245′):

$$\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{1}{12}\;\sum\nolimits_{I,\,J\equiv Q,\,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,\,J} \tag{3.28}$$

$$\times\;\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}\cdot\mathbf{r}^J_{\mathrm{m}}\;\int_0^1 ds\,\Big\{\;\tilde{F}^{(1)}[F^C]\big(\big|s\,\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}-\mathbf{r}^J_{\mathrm{m}}\big|\big)\;+\;\tilde{F}^{(1)}[F^C]\big(\big|\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}-s\,\mathbf{r}^J_{\mathrm{m}}\big|\big)\;\Big\}$$

$$=\;\lambda^4\,\frac{\pi}{12}\;\sum\nolimits_{I,\,J\equiv Q,\,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,\,J} \tag{3.28′}$$

$$\times\;\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}\cdot\mathbf{r}^J_{\mathrm{p}}/\lambda^2\;\int_0^1 ds\,\Big\{\;\mathcal{K}_2\big(\big|s\,\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}-\mathbf{r}^J_{\mathrm{m}}\big|/\lambda\big)+\;\mathcal{K}_2\big(\big|\mathbf{r}^I_{\mathrm{p}}-s\,\mathbf{r}^J_{\mathrm{m}}\big|/\lambda\big)\;\Big\}$$

Dabei folgen die gestrichenen Darstellungen auf Basis unseres expliziten Ansatzes für die Korrelationsfunktionen; vgl. Anh. F. Die Funktionen $\mathcal{K}_\mu(\zeta)$ sind definiert durch

$$\mathcal{K}_\mu(\zeta) \;=\; \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\,\zeta^\mu\,\mathrm{K}_\mu(\zeta) \tag{3.29}$$

$$\text{mit}\qquad \mathcal{K}_\mu(\zeta)\to 1,\;\;\forall\mathrm{Re}\mu>0\qquad\text{für}\quad\zeta\to 0 \tag{3.29′}$$

vgl. Gl. (2.180) – und K_μ der modifizierten Besselfunktion zweiter Art mit Index μ in der Konvention von Ref. [2]. Sie sind normiert auf Eins für verschwindendes Argument.

Die nicht-konfinierende Funktion $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$ ist zunächst gegeben in Form des Integrals:

$$\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{1}{6}\;\int_{\mathcal{S}^\perp_{\mathrm{p}}} dx^i_{\mathrm{p}}\;\partial_i^{\tilde{x}_{\mathrm{p}}}\;\int_{\mathcal{S}^\perp_{\mathrm{m}}} dx^j_{\mathrm{m}}\;\partial_j^{\tilde{x}_{\mathrm{m}}}\;\;\tilde{F}\,[F^{NC}](|\mathbf{x}|) \tag{3.30}$$

vgl. Gl. (2.198′) mit $\tilde{\chi}^{NC}_{\mathrm{pm}} = -\det\mathbb{SL}\,g_{\mathrm{pp}}\cdot\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$ nach Gl. (2.242).

Die partiellen Ableitungen stammen aus der nicht-konfinierenden Tensorstruktur $t^{NC}_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}$. Der Integrand ist daher vollständiges Differential beider Koordinatenlinien, so daß das Integral folgt als Differenzen bezüglich der Endpunkte der transversalen Projektionen $\mathcal{S}^\perp_{\mathrm{p}}$, $\mathcal{S}^\perp_{\mathrm{m}}$ der Pyramiden-Mantelflächen: den transversalen Projektionen der (Anti)Quark-Positionen. Der resultierende Ausdruck – vgl. Gln. (3.27) – ist dominiert durch die entsprechende Korrelationsfunktion, die für großes Argument, das heißt große Separation der (Anti)Quarks allgemein exponentiell abfällt. Die Funktion $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$ ist in der Tat nicht konfinierend.

Die konfinierende Funktion $\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}}$ ist zunächst gegeben in Form des Integrals – vgl. die Gln. (2.227), (2.228′):

$$\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}} \;=\; \mathrm{i}\,\frac{1}{12}\;\int_{\mathcal{S}^\perp_{\mathrm{p}}} dx^i_{\mathrm{p}}\;\;\int_{\mathcal{S}^\perp_{\mathrm{m}}} dx^i_{\mathrm{m}}\;\;\partial_j\,\big[x^j F\big] \tag{3.31}$$

mit $\tilde{\chi}^C_{\mathrm{pm}} = -\det\mathbb{SL}\,g_{\mathrm{pp}}\cdot\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}}$ nach Gl. (2.242) und $F(|\mathbf{x}|)\equiv\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|)$ nach Gl. (2.231).

Der Integrand in diesem Ausdruck ist *nicht* vollständiges Differential beider Koordinatenlinien. Es kann allgemein nur eine Integration ausgeführt werden. Die Funktion $\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}}$ ist

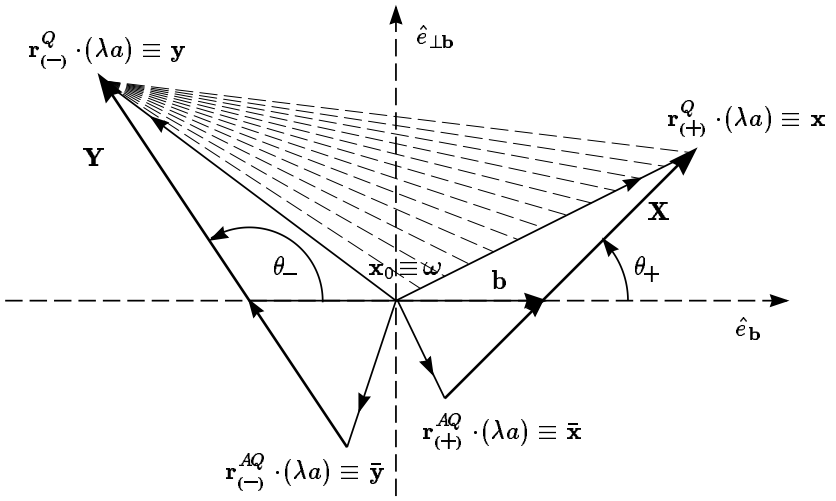


Abbildung 3.4: In Kontrast zur Quark-Quark-Wechselwirkung, inhärent der Funktion $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$, liegt $\tilde{X}^{C}_{\mathrm{pm}}$ eine nichtlokale Wechselwirkung zugrunde. Sei betrachtet die Kombination $\{\mathbf{r}^{I}_{(+)},\mathbf{r}^{J}_{(-)}\}$ für feste $I,J\in\{Q,AQ\}$. Nach Gl. (3.32) treten zwei Kurvenintegrale auf entlang der *Verbindungslinie* vom Referenzpunkt zu den Positionen $\mathbf{r}^{I}_{(+)}$, $\mathbf{r}^{J}_{(-)}$: entlang dem entsprechenden orientierten Abschnitt $\mathcal{S}^{\perp}_{+}\big|_{I}(s)$, $\mathcal{S}^{\perp}_{-}\big|_{J}(s)$, der Transversalprojektionen der Pyramiden-Mantelflächen $\mathcal{S}_{+}$, $\mathcal{S}_{-}$ – *Geraden* für plane Flächen. Das erste Integral integriert die Korrelationen bezüglich $\mathcal{K}_2$ auf: jedes Punktes auf $\mathcal{S}^{\perp}_{+}\big|_{I}$ mit $\mathbf{r}^{J}_{(-)}$, das zweite Integral die Korrelationen jedes Punktes auf $\mathcal{S}^{\perp}_{-}\big|_{J}$ mit $\mathbf{r}^{I}_{(+)}$. Dargestellt ist $I\equiv J\equiv Q$.

nichtlokal in dem Sinne, daß sie abhängt nicht nur von den Differenzen der – transversal projizierten – Positionen der (Anti)Quarks, sondern auch davon, wie diese verbunden sind durch die Projektionen $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathrm{p}}$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathrm{m}}$ der Pyramiden-Mantelflächen. Wir argumentieren, daß diese „Verbindungen“ zu interpretieren sind als die – transversalen Projektionen – gluonischer Strings, die sich ausbilden zwischen den (Anti)Quarks.

Seien zunächst die Funktionen $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$ und $\tilde{X}^{C}_{\mathrm{pm}}$ – vgl. Gl. (3.27′) bzw. (3.28′) – abschließend angegeben in Form:

$$\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}} \;=\; 8\cdot\lambda^4\,\frac{\pi}{12}\;\sum\nolimits_{I,J\equiv Q,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,J}\;\;\mathcal{K}_3\big(\big|\mathbf{r}^{I}_{(+)}-\mathbf{r}^{J}_{(-)}\big|\big) \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}\tilde{X}^{C}_{\mathrm{pm}} \;&=\; \lambda^4\,\frac{\pi}{12}\;\sum\nolimits_{I,J\equiv Q,AQ}\;\mathrm{sign}_{I,J} \\ &\qquad\times\;\mathbf{r}^{I}_{(+)}\cdot\mathbf{r}^{J}_{(-)}\;\int_0^1 ds\;\Big\{\;\mathcal{K}_2\big(\big|s\,\mathbf{r}^{I}_{(+)}-\mathbf{r}^{J}_{(-)}\big|\big)+\;\mathcal{K}_2\big(\big|\mathbf{r}^{I}_{(+)}-s\,\mathbf{r}^{J}_{(-)}\big|\big)\;\Big\}\end{aligned} \tag{3.32′}$$

mit Notation[3.6]

$$\mathbf{r}^{Q}_{(+)}\;\equiv\;\mathbf{x}/(\lambda a)\qquad\mathbf{r}^{AQ}_{(+)}\;\equiv\;\bar{\mathbf{x}}/(\lambda a)\qquad\mathbf{r}^{Q}_{(-)}\;\equiv\;\mathbf{y}/(\lambda a)\qquad\mathbf{r}^{AQ}_{(-)}\;\equiv\;\bar{\mathbf{y}}/(\lambda a) \tag{3.33}$$

für die skalierten Positionen der (Anti)Quarks des (+)- und (–)-Dipols, bzgl. $\mathbf{x}$, $\bar{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{y}$, $\bar{\mathbf{y}}$, vgl. die Gln. (3.11), (3.11′) bzw. (3.12), (3.12′). Wir verweisen auf Abbildung 3.4.

Die Funktion $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$ subsumiert Wechselwirkung der Dipol-Endpunkte oder (Anti)Quarks; sie induziert daher Quarkadditivität. Die Funktion $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$ hängt ab von der Ausdehnung der wechselwirkenden Colour-Dipole. Die T-Amplitude des MSV bricht Quarkadditivität aufgrund des C-Terms. Das Verhältnis der totalen Wirkungsquerschnitte Pion-Proton zu

[3.6] Die Konstanten λ, a treten auf nur als Produkt (λa) – vgl. die Gln. (3.24), (3.25) – das daher die *effektive* Korrelationslänge ist; mit $\lambda=8/3\pi\cong 0.849$ ist diese um 15% keiner als a allein.

Proton-Proton folgt aber auch im MSV ungefähr zu Zwei Drittel: $\sigma_{\pi p}^{\rm tot}/\sigma_{pp}^{\rm tot} \cong 2/3$; allerdings nicht aufgrund Quarkadditivität, sondern aufgrund dessen, daß das Verhältnis der Ausdehnungen von Pion zu Proton im Quadrat ungefähr 2/3 beträgt. Vgl. die Bem. zu Gl. (3.57).

In Kapitel 1 sind eingeführt die Indizes C und NC als *confining* (Colour-Ladungen konfinierend in eichinvariante Zustände) und *non-confining* (nicht konfinierend). Dies geschah in Konsequenz des Resultats des MSV für ein statisches Quark-Antiquark-Paar – mathematisch repräsentiert durch den Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ eines einzelnen Wegner-Wilson-Loops. So setzt das Nichtverschwinden der Stringspannung σ – das heißt (lineares) Confinement – notwendig voraus das Nichtverschwinden der Lorentz-Tensorstruktur t^C; sie ist insbesondere unabhängig von der Struktur t^{NC}; vgl. Gl. (1.73).

Wir diskutieren, daß in diesem Sinne auch in weicher Hochenergiestreuung – mathematisch repräsentiert durch den Vakuumerwartungswert $\langle\,\cdot\,\rangle_A$ zweier, nahezu lichtartiger Wegner-Wilson-Loops – der C-Term anzusprechen ist als konfinierend, der NC-Term demgegenüber als nicht konfinierend. Ursache hierfür ist genau die Nicht-Lokalität der Wechselwirkung immanent der Funktion $\tilde{X}_{\rm pm}^{C}$ gegenüber der bloßen Quark-Quark-Wechselwirkung der Funktion $\tilde{X}_{\rm pm}^{NC}$. Diese Nicht-Lokalität führt auf einen Mechanismus, der sensitiv ist auf die Grösse der wechselwirkenden Colour-Dipole, in dem Sinne, daß die „Quark-Antiquark-Verbindungslinien“ wesentlich an der Streuung beteiligt ist. Wir interpretieren dies als *String-String-Mechanismus*: das Ausbilden und Wechselwirken gluonischer Strings zwischen den Quarkkonstituenten des Dipols.

Die Abbildungen 3.5(a),(b) und 3.6 suggerieren und veranschaulichen diese Interpretation. Dargestellt ist die dimensionslose Funktion

$$\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}(\mathbf{b}) \;=\; \frac{1}{s}\,\mathrm{Im}\;\int_0^{2\pi}\frac{d\theta_-}{2\pi}\;\tilde{T}_{\mathcal{U}}(\ldots,\theta_-,\ldots;\mathbf{b}) \tag{3.34}$$

wobei durch Integral und Punkte eine Dipol-Dipol-Konfiguration mit Impaktvektor $\mathbf{b}$ angedeutet sei. Die Funktion $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}$ ist definiert durch $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$: die bezüglich des transversalen Impulstransfers τ, mit $t=\tau^2$, Fourier-transformierte T-Amplitude für die Wechselwirkung dieser Konfiguration; bzgl. $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ vgl. die Gln. (3.25), (3.32), (3.32′). Aufgrund des *optischen Theorems* ist $\sigma_{\mathcal{U}}^{\rm tot}\equiv\int d^2\mathbf{b}\,\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}(\mathbf{b})$ der entsprechende *totale Wirkungsquerschnitt*, $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}(\mathbf{b})$ selbst daher aufzufassen als Wechselwirkungsamplitude der zugrundeliegenden Dipol-Dipol-Konfiguration mit Impakt $\mathbf{b}$, die wir wie folgt definieren.

Seien systematische Notation und polare Koordinaten eingeführt durch:

$$\mathbf{r}_+\equiv\mathbf{X},\quad \mathbf{r}_-\equiv\mathbf{Y}\qquad\text{und}\qquad r_\pm\equiv|\mathbf{r}_\pm|,\quad \theta_\pm\equiv\text{Azimut von }\mathbf{r}_\pm\text{ bzgl. }\mathbf{b} \tag{3.35}$$

mit r_+, r_- den transversalen Ausdehnungen des (+)-, (−)-Dipols und θ_+, θ_- den Azimutwinkeln um ihre z_+-, z_--gewichteten Mitten in der Transversalebene, abgetragen vom Impaktvektor $\mathbf{b}$ so, daß $\theta_+,\theta_-=0\;[\pi]$, falls $\mathbf{X},\mathbf{Y}$ parallel [antiparallel] zu $\mathbf{b}$, vgl. Abb. 3.4.

Besitze der eine Dipol, o.E.d.A. der (+)-Dipol die Ausdehnung $r_+=12\,a$, sei $z_+=1/2$, das heißt der Lichtkegellimpuls ist gleichverteilt auf Quark und Antiquark: die z_+-gewichtete Mitte identisch mit seiner bloßen Mitte. Besitze der andere, (−)-Dipol die Ausdehnung $r_-=1\,a$, sei $z_-=1/2$. Er werde gemittelt über sämtliche Orientierungen θ_- und beliebig verschoben relativ zum (+)-Dipol, der fest positioniert sei. Wir betrachten $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}$ als Funktion des entsprechenden Impakts, den wir gemäß $\mathbf{b}=\mathbf{b}_\parallel+\mathbf{b}_\perp$ zerlegen in einen Anteil parallel und in einen orthogonal zu der Richtung, die der (+)-Dipol definiert.[3.7]

Wir betrachten im Vergleich die Abbildungen 3.5(a) und (b). Dargestellt ist die Am-

[3.7] Wahl eines Koordinatensystems heißt Wahl des Azimutwinkels $\varphi_{\mathbf{b}}$ des Impaktvektors bzgl. dessen x^1-Achse; $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}$ ist unabhängig von $\varphi_{\mathbf{b}}$, relevant ist θ_+ als Azimut von $\mathbf{b}$ zur Richtung des (+)-Dipols.

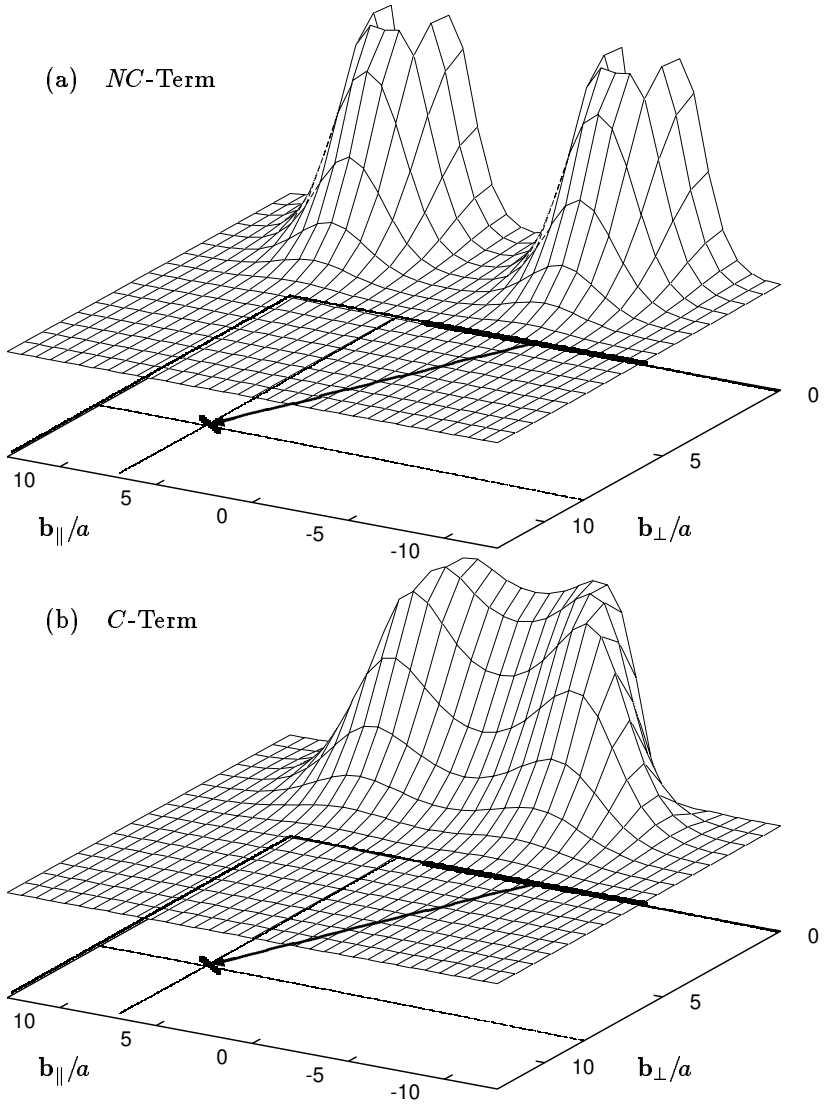


Abbildung 3.5: Amplitude $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}$ für die Wechselwirkung zweier Colour-Dipole als Funktion deren Impakts $\mathbf{b}$, vgl. Gl. (3.34). Der (+)-Dipol hat Ausdehnung $r_+ = 12\,a$ ($z_+ = 1/2$) und ist fest positioniert. Der (−)-Dipol hat Ausdehnung $r_- = 1\,a$ ($z_- = 1/2$), er werde gemittelt über seine Orientierungen und verschoben relativ zum (+)-Dipol. (a) Nicht-konfinierender Fall, $\varkappa \equiv 0$. Wesentliche Beiträge zur Wechselwirkung treten auf nur für kleine Abstände der Dipol-Endpunkte, das heißt (Anti)Quarks. (b) Konfinierender Fall, $\varkappa \equiv 1$. Wesentliche Beiträge treten auf für kleine Abstände der Dipole an sich: es genügt ein kleiner Abstand des kleinen Dipols zu der geraden Verbindung der Quarkkonstituenten des großen, auch wenn er von diesen selbst weit separiert ist.

plitude $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}$ der Wechselwirkung zweier Colour-Dipole als Funktion deren Impakts $\mathbf{b}$, vgl. Gl. (3.34): in Abbildung 3.5(a) der *NC*-Term und in 3.5(b) der *C*-Term, die folgen durch Setzen $\varkappa \equiv 0$ beziehungsweise $\varkappa \equiv 1$, vgl. Gl. (3.26). Für jede Verschiebung des (+)-Dipols relativ zum (−)-Dipol sind diese Terme berechnet als Funktion des Impakts $\mathbf{b} = \mathbf{b}_\parallel + \mathbf{b}_\perp$ und aufgetragen über der $\mathbf{b}_\parallel$,$\mathbf{b}_\perp$-Ebene.

Wesentliche Beiträge treten aufgrund des exponentiellen Abfalls der $\tilde{X}^C_{\mathrm{pm}}$-, $\tilde{X}^{NC}_{\mathrm{pm}}$-inhären-

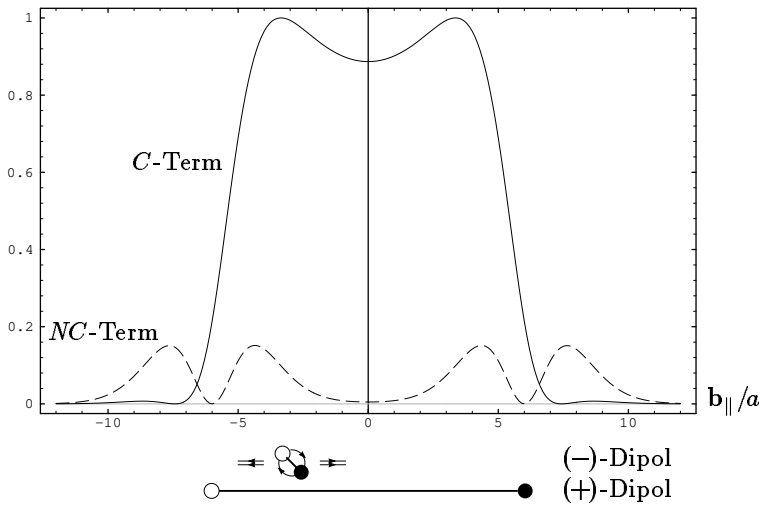


Abbildung 3.6: Amplitude $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}$ für die Wechselwirkung zweier kollinearer Colour-Dipole als Funktion deren Impakts $\mathbf{b}_\parallel$, vgl. Gl. (3.34). *NC*- gegen *C*-Term, normiert auf das Maximum des *C*-Terms. Der (+)- und (−)-Dipol sind identisch dimensioniert wie in Abbildung 3.5 und identisch konfiguriert mit dem einzigen Unterschied, daß die Position des (−)-Dipols eingeschränkt ist auf die gerade Verbindungslinie der Quarkkonstituenten des (+)-Dipols. Es ist $\mathbf{b}_\perp \equiv 0$ per definitionem und $\tilde{\sigma}_{\mathcal{U}}$ aufgetragen über $\mathbf{b} \equiv \mathbf{b}_\parallel$: das heißt genau die Profile über der $\mathbf{b}_\perp \equiv 0$-Linie der Abbildungen 3.5(a),(b). Während sich der *NC*-Term konstituiert aus Konfigurationen mit kleinen Abständen der Dipol-Endpunkte, treten im *C*-Term wesentliche Beiträge auch auf bei kleinen Abständen der Dipole an sich. Die physikalische Kurve für $\varkappa = 0.74$, s.u. Gl. (3.47), folgt durch Multiplikation des *NC*-Terms mit $(1-\varkappa)/\varkappa \cong 1/3$ und Addition zum *C*-Term, das heißt der konfinierende Term dominiert die Wechselwirkung.

ten Korrelationsfunktionen $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{K}_3$ nur auf für kleine Abstände. Dabei bezieht sich „Abstand“ für den *NC*-Term auf die Separation der Endpunkte der Dipole, das heißt der Separation ihrer Quarkkonstituenten. Für den *C*-Term dagegen bezieht sich „Abstand“ auf die Separation der geraden Verbindungslinie der Quarkkonstituenten des einen zu der des anderen Dipols. Dies ist insbsondere im dargestellten Falle eines großen und eines kleinen Dipols von eklatantem Unterschied: Bei Positionierung des kleinen Dipols auf der Verbindungslinie der Quarkkonstituenten des großen, hat er zu dieser Linie minimalen, zu dessen Endpunkte mitunter sehr großen Abstand. Dies ist dahin zu interpretieren, daß zwischen den Quarkkonstituenten eines Dipols ein *gluonischer String* ausgebildet ist, und diese wesentlich zur Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ der Dipol-Dipol-Wechselwirkung beitragen: Der postulierte String-String-Mechanismus.

Dieser Mechanismus wird noch deutlicher herauspräpariert in Abbildung 3.6, in der die Profile der $\mathbf{b}_\perp \equiv 0$-Linien der Abbildungen 3.5(a) und (b) gegeneinander aufgetragen sind: Der (−)-Dipol wird verschoben nur auf der geraden Verbindungslinie der Quarkkonstituenten des des (+)-Dipols, (+)- und (−)-Dipol sind kollinear.

Wir merken an zu den Abbildungen 3.5 und 3.6: Erstens. Von den Funktionen $\tilde{X}^C$, $\tilde{X}^{NC}$, vgl. die Gln. (3.32), (3.32′), übertragen sich auf die *T*-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ die Symmetrien:

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_{\mathcal{U}}(z_+, \theta_+, z_-, \theta_-, \ldots) \qquad (3.36)\\ &= \tilde{T}_{\mathcal{U}}(1-z_+, \pi+\theta_+, z_-, \theta_-, \ldots) \;=\; \tilde{T}_{\mathcal{U}}(z_+, \theta_+, 1-z_-, \pi+\theta_-, \ldots) \end{aligned}$$

das heißt sie ist symmetrisch bezüglich gleichzeitiger Ersetzung $\theta_\pm \to (\pi+\theta_\pm)$ und $z_\pm \to \bar{z}_\pm$ im (+)- und/oder (−)-Dipol. Zweitens. In Wirklichkeit sind die Quarkkonstituenten weniger deutlich voneinander getrennt als in den Abbildungen 3.5(b), 3.6(NC) – und entsprechend fällt der C-Term weniger stark ab auf ihrer Verbindungslinie als in den Abbildungen 3.5(a), 3.6(C): Der Wert der Korrelationslänge a beträgt ungefähr 0.35 fm, so daß ein physikalischer Colour-Dipol eine transversale Ausdehnung von nur $4-5\,a$ besitzt.[3.8]

3.2.3 Hadron-Hadron-Streuamplitude $T_{hh}^{(s,t)}$

Wir gehen über von der Fourier-transformierten T-Amplitude $\tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathbf{b})}$ für Loop-Loop-Streuung zur vollen T-Amplitude $T_{hh}^{(s,t)}$ für Hadron-Hadron-Streuung. Wir rekapitulieren:

$$\begin{aligned} T_{hh}^{(s,t)} &\equiv \langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\, \text{in} \,|\, T \,|\, h^1(P_1)\, h^2(P_2),\, \text{in}\,\rangle \qquad (3.37)\\ &= \int d^2\mathbf{b}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}} \int d\varphi_{1',1}(z_+,\mathbf{r}_+) \int d\varphi_{2',2}(z_-,\mathbf{r}_-)\;\; \tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathbf{b})}(z_+,\mathbf{r}_+;z_-,\mathbf{r}_-;\mathbf{b}) \end{aligned}$$

Bzgl. der von Gl. (3.7) differierenden Notation $z_\pm$, $\mathbf{r}_\pm$ vgl. (3.35).

Wir betrachten $\tilde{T}_{\ell\ell}$ als ausintegriert bezüglich der Variablen eines Dipols; sei dies o.E.d.A. der (−)-Dipols, das heißt ausintegriert mit dem Maß $d\varphi_{2',2}$, das die Spinsumme der Lichtkegelwellenfunktionen $\varphi_{s\bar{s}}^{2'\dagger}$, $\varphi_{s\bar{s}}^{2}$ impliziert, die Variablen z_-, $\mathbf{r}_-$, vgl. Gl. (3.8). Aufgrund derselben Argumentation wie oben, vgl. Fußnote 3.7, hängt die resultierende Funktion vom Impaktvektor $\mathbf{b}$ nur ab über dessen Betrag $|\mathbf{b}|$ und nicht von dessen Azimut $\varphi_\mathbf{b}$, der Verdrehung relativ einer beliebig gewählten x^1-Achse. Die $\varphi_\mathbf{b}$-Winkelintegration betrifft daher nur die Exponentialfunktion und wird trivial bei Wahl der x^1-Achse in Richtung τ; wir erhalten:

$$T_{hh} \;=\; \int d\varphi_{1',1}(z_+,\mathbf{r}_+)\;\; T_{\ell p}(z_+,\mathbf{r}_+;|\tau|) \qquad (3.38)$$

dabei gilt $|\tau| = \sqrt{-t+\delta t} \cong \sqrt{-t}$, vgl. Gl. (3.6), und ist definiert:

$$T_{\ell p}(z_+,\mathbf{r}_+;|\tau|) \;=\; 2\pi \int_0^\infty |\mathbf{b}|\, d|\mathbf{b}|\, J_0(|\tau||\mathbf{b}|) \int d\varphi_{2',2}(z_-,\mathbf{r}_-)\;\; \tilde{T}_{\ell\ell}(z_+,\mathbf{r}_+;z_-,\mathbf{r}_-;|\mathbf{b}|) \qquad (3.39)$$

mit J_0 der Besselfunktion erster Art in der Definition von Ref. [2]: $J_0(z) \to 1$ für $z \to 0$.

In der vorliegenden Arbeit diskutieren wir Photo- und Leptoproduktion verschiedener Vektormesonen V unter verschiedenen kinematischen Bedingungen (s,t) an einem festen intakt bleibenden Proton-Target, vgl. Fußnote 3.2. Mit Bezug des Index „1“, des (+)-Dipols auf die Vektormeson-Seite der Streuung und des Index „2“ des (−)-Dipols auf die des Protons heißt dies die Identifizierung: $h^1 \equiv \gamma^{(*)}$, $h^{1'} \equiv V$ und $h^2 \equiv h^{2'} \equiv p$. Wir haben daher den unveränderlichen Teil der Streuung, die Proton-Seite absorbiert in die Funktion $T_{\ell p} \equiv T_{\ell p}^{(s,t)}$, die genau die T-Amplitude ist für die Streuung eines Wegner-Wilson-Loops, das heißt Colour-Dipols an dem festen Proton-Target. Außer von der Kinematik (s,t), vgl. $|\tau| \cong \sqrt{-t}$, hängt sie ab von dem Paar $\{z_+,\mathbf{r}_+\}$, das den als variabel zu betrachtenden (+)-Dipol charakterisiert. Sie ist von unmittelbarer physikalischer Bedeutung.

Parameter. Wir unterbrechen die Diskussion mit der Bestimmung der Parameter, die unserer Beschreibung weicher Hochenergiestreuung zugrunde liegen. Dies sind zum einen die Parameter des MSV an sich: Gluonkondensat $\langle g^2 FF\rangle_A$, Korrelationslänge a und die Konstante $\varkappa$, die NC- und C-Term gegeneinander gewichtet. Zum anderen ist ein Ansatz

[3.8] Effektive Korrelationslänge ist nicht a, sondern λa, vgl. die Bem. zu Gl. (3.33). Wir werden dies im folgenden sprachlich nicht mehr differenzieren.

zu machen für die Wellenfunktion des Protons und anzugeben deren Parameter.

Diese Bestimmung geschieht bezüglich weicher Proton-Proton-Streuung bei hoher invarianter Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ wie bezüglich Confinements eines statischen Quark-Antiquark-Paares. – Sie garantiert daher Konsistenz des vorgestellten Zugangs zu Streuphänomenen des Hochenergiebereichs nichtperturbativer Quantenchromodynamik mit der Beschreibung im Rahmen des MSV von Phänomenen ihres Niederenergiebereich.

Wir gehen in derselben Weise vor wie Ref. [63], vgl. auch Ref. [122]: Die Beschreibung eines statischen Quark-Antiquark-Paares reduziert sich unter sehr allgemeinen Annahmen auf die fundamentale Kumulante zweiter Ordnung in paralleltransportierten Feldstärken: $(K_2)_{a_1a_2} \equiv \langle g^2 F^{(1)}{}_{a_1} F^{(2)}{}_{a_2} \rangle_A$, mit $F^{(i)} \equiv F_{\mu_i\nu_i}(x_i; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_i})$. Vgl. die Gln. (1.64), (1.64′), bzgl. der Relation von $(K_2)_{a_1a_2}$ mit dem Korrelations-Lorentz-Tensor $D = (D_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2})$ Gl. (1.66) und bzgl. dessen Gestalt Gl. (1.82) bzw. (1.82). Diese Kumulante $(K_2)_{a_1a_2}$ wird berechnet in den Refn. [35, 50, 51] im Rahmen einer *pure* $SU(N_c \equiv 3)$-Gittereichtheorie, das heißt einer reinen (Gitter)Eichtheorie ohne dynamische Fermionen.[3.9] Ref. [51] gelangt unmittelbar zu $\varkappa \cong 0.74$, das heißt bei maximaler Korrelation beträgt der *NC*-Term nur ein Drittel des *C*-Terms. Sie postuliert innerhalb der numerischen Unsicherheit im (Gitter-)relevanten Bereich des Ortsraums Proportionalität der entsprechenden $D_{\mu_1\nu_1\mu_2\nu_2}$-inhärenten Korrelationsfunktionen; dies induziert die Verknüpfung der Korrelationsfunktionen im Impulsraum $\widetilde{D}_C$ und $\widetilde{D}'_{NC}$ wie formuliert in den Gln. (1.78), (1.81). Bezüglich des in diesen Gleichungen angegebenen Ansatz folgt weiter beste Anpassung an die auf dem Gitter „gemessenen" Korrelationsfunktionen für den Index $n \equiv 4$ (der auch im folgenden unterdrückt sei).

Im Rahmen des dargestellten Zugangs des MSV zu weicher Hochenergiestreuung wird in Ref. [63] zunächst die Streuung zweier gleicher hadronischer Zustände diskutiert und festgestellt die dominierende Sensitivität auf deren transversale Ausdehnung. Bezogen auf die Streuung zweier Proton existiert das umfangreichste und genaueste Material experimenteller Daten. Zum einen ist aber nur wenig bekannt über die exakte Gestalt der Proton-Lichtkegelwellenfunktion, zum anderen sollte sie in Hinblick auf die Aussagekraft des Modells nur wenige Parameter enthalten. Für das Absolutquadrat der Proton-Wellenfunktion wird daher der einfache Ansatz gemacht:

$$\varphi^{p\dagger}_{s\bar{s}}(z_-, \mathbf{r}_-)\ \varphi^{p}_{s\bar{s}}(z_-, \mathbf{r}_-) \ \equiv\ \left|\varphi_p(z_-, \mathbf{r}_-)\right|^2 \stackrel{!}{=}\ 2\,\omega_p^2\ \delta(z_- - 1/2)\ \mathrm{e}^{-\omega_p^2 r_-^2} \tag{3.40}$$

mit $r_- = |\mathbf{r}_-|$, vgl. Gl. (3.35), normiert wie in Gl. (2.49). Das Proton aufgefaßt als $1S$-Zustand in einem Harmonischen-Oszillator-Potential, besitzt genau diesen Transversalanteil. Mit ω_p dem Oszillatorparameter sind $R_p \equiv \langle r_-^2 \rangle^{1/2} = 1/2\omega_p$ und $R_{3,p} = \langle \vec{r}_-^{\,2} \rangle^{1/2} = \sqrt{3/2}/2\omega_p$ der transversale beziehungsweise volle *root mean square-Radius* (rmsq-Radius) dieses Zustands. Bezüglich des Lichtkegelimpulses wird Gleichverteilung auf Quark und Antiquark angenommen: $z_- = 1/2$. Wir kommen darauf zurück, wie gerechtfertigt diese Approximationen sind.

Auf Basis dieses Absolutquadrats der Proton-Wellenfunktion werden in Ref [63] für Proton-Proton-Streuung unter anderem berechnet der *totaler Wirkungsquerschnitt*:

$$\sigma^{\mathrm{tot}} \ =\ \frac{1}{s}\,\mathrm{Im}\ T_{hh}^{(s,t=0)} \tag{3.41}$$

auf Basis des optischen Theorems, und der *slope-Parameter*, der zusammenhängt mit dem

[3.9] Neuere Gittersimulationen existieren, die versuchen perturbative Beiträge präziser von den nichtperturbativen Gluonfluktuationen zu isolieren, auch die dynamische Fermionen miteinbeziehen, vgl. Ref. [52] bzw. die Refn. [46–48]; angesichts der nur geringen Diskrepanz in Hinblick auf numerische wie konzeptionelle Unsicherheit hier wie dort erscheint es gegenwärtig nicht als gerechtfertigt, die etablierte Formulierung des MSV umzuwerfen – etwa durch verfeinerte Anpassungen der Korrelationsfunktionen.

t-differentiellen elastischen Wirkungsquerschnitt in Vorwärtsrichtung:

$$B_0 \;=\; \frac{d}{dt}\,\ln\frac{d\sigma^{\rm el}}{dt}\Big|_{t=0} \qquad \text{mit} \qquad \frac{d\sigma^{\rm el}}{dt}(t) \;=\; \frac{1}{16\pi}\,\frac{1}{s^2}\,\left|T_{hh}^{(s,t)}\right|^2 \tag{3.42}$$

anschaulich der Abfall mit $\tau^2 \cong -t$, dem invarianten Quadrat des Impulstransfers, des in t differentiellen Wirkungsquerschnitts an der Stelle $t=0$. Durch Eliminierung der Abhängigkeit vom Protonradius R_p in den resultierenden Funktionen $\sigma^{\rm tot}(R_p/a)$ und $B_0(R_p/a)$ und durch Anbinden an die experimentellen Zahlenwerte für $\sqrt{s}=20$ GeV, s' in GeV^2:

$$\sigma^{\rm tot}_{pom.}(pp,p\bar{p}) \;=\; 21.70\ {\rm mb}\cdot(s')^{0.0808}\,\Big|_{\sqrt{s}=20\ {\rm GeV}} \;\cong\; 35.2\ {\rm mb} \tag{3.43}$$

$$B_0\,\Big|_{\sqrt{s}=20\ {\rm GeV}} \;\cong\; 11.5\ {\rm GeV}^{-2} \tag{3.44}$$

vgl. Ref. [56] bzw. [7],[3.10] folgt $\langle g^2FF\rangle'_A$, das Gluonkondensat in GeV^4, als Funktion von a', der Korrelationlänge a in fm, wir schreiben symbolisch: $\langle g^2FF\rangle_A^{\prime(1)}(a')$. Eine zweite Funktion $\langle g^2FF\rangle_A^{\prime(2)}(a')$ folgt aus der Berechnung der Stringspannung σ im Rahmen des MSV:

$$\sigma = \frac{8}{81\pi}\,a^2\,\varkappa\langle g^2FF\rangle_A \qquad \sigma\cong 0.18\ {\rm GeV}^2 \tag{3.45}$$

vgl. Gl. (1.73) und die Refn. [60,61,63]. Eine dritte Funktion letztlich folgt aus Ref. [51], aus der Anbindung der QCD-Gitterskala $\Lambda_{latt.}$ an physikalische Einheiten:

$$\Lambda_{latt.} \;\cong\; 5\ {\rm MeV} \tag{3.46}$$

Aufgrund der Unsicherheit, die den experimentellen Werten für $\sigma^{\rm tot}$,B_0 und den Werten von σ, $\Lambda_{latt.}$ anhaften sind diese drei Kurven effektiv Bänder in der $\langle g^2FF\rangle_A$,a-Ebene. In deren Schnittbereich werden die Parameter $\langle g^2FF\rangle_A$ und a gewählt, R_p folgt unmittelbar quasi als Kurvenparameter von $\langle g^2FF\rangle_A^{\prime(1)}(a')$. Wir geben zusammenfassend an als die unserer Arbeit zugrundeliegenden Zahlenwerte:

$$\varkappa \;=\; 0.74 \qquad \langle g^2FF\rangle_A \;=\; 2.49\ {\rm GeV}^4 \qquad a \;=\; 0.346\ {\rm fm} \qquad R_p \;=\; 1.51\,a \tag{3.47}$$

folglich $R_p\cong 0.522$ fm und $\langle g^2FF\rangle_A a^4\cong 23.5$ für den dimensionslosen Parameter, in der Kombination nur das Gluonkondensat auftritt, vgl. die Gln. (3.24), (3.25).

Die Diskrepanz zu den Werten aus Ref. [63] rührt daher, daß dort $\varkappa=0.74$ gesetzt, aber im Sinne einer ersten Approximation der *NC*-Term komplett vernachläsiigt wird. Wir berechnen beide Terme. Nur der Vollständigkeit wegen sei angemerkt, daß wir den experimentellen Wert für den totalen Wirkungsquerschnitt (3.43) wählen für $\sqrt{s}$ „exakt" 20 GeV und nicht als „exakt" 35.0 mb (für kleineres $\sqrt{s}\cong 19.2$ GeV). Wesentlich dagegen, daß der experimentelle Wert für den slope-Parameter auf den Zahlenwert (3.44) aktualisiert ist.

Der Zahlenwert für das Gluonkondensat in (3.47) ist um einen Faktor Fünf größer als der Wert, zu dem Shifman, Vainshtein, Zakharov mithilfe QCD-Summenregeln in Ref. [193] gelangen. Dies ist insofern nicht unerwartet, als zum einen deren Wert allgemein als unterste zulässige Schranke betrachtet wird, und zum anderen wir in einer *pure gauge theory* arbeiten, vgl. Fußnote 3.3, deren Gluonkondensat um einen Faktor Zwei bis Drei größer generiert wird; sei verwiesen auf Ref. [63], Anh. C wie auf Ref. [160].

Der transversale rmsq-Radius des Protons ist mit $R_p\cong 0.52$ fm kleiner als sein experimenteller transversaler *rmsq-charge-Radius* $R_p^{\rm ch.}\cong 0.70$ fm, vgl. Ref. [196]. Dies kann in der

[3.10] Amaldi, Schubert geben an in ihrem „Review aller ISR-Daten für Proton-Proton-Streuuung", vgl. Ref. [7]: $B=11.8\pm0.3$ GeV^{-2} bezüglich $-t=0.04$ GeV^2 und der niedrigsten ISR-Energie von $\sqrt{s}=23.5$ GeV; im Hinblick auf die höheren ISR-Energien folgt als *educated guess* für $\sqrt{s}=20$ GeV, $t=0$ der Wert von Gl. (3.44). Besten Dank an Timo Paulus, der uns auf diese Referenz aufmerksam gemacht hat.

Weise interpretiert werden, daß *sea quarks* zum Formfaktor beitragen und so den elektromagnetischen Ladungs-Radius im Vergleich zu dem der Valenzquark-Konstituenten anwachsen läst. Dieselben sea quarks, in Gestalt zusätzlicher Colour-Dipole, könnten beitragen zur Streuung – umso wichtiger, je größer ihre Anzahl, insbesondere mit Anwachsen des invarianten Quadrats der Gesamtenergie s. Dies könnte erklären das Anwachsen des totalen Wirkungsquerschnitts mit s, vgl. Gl. (3.43), das in unserem Ansatz genau dadurch simuliert werden kann, daß der Protonradius R_p aufgefaßt wird als monoton steigende Funktion von s; vgl. die expliziten Ausdrücke in Ref. [63].

Wir kehren zurück zu der Diskussion der T-Amplitude T_{hh} für Hadron-Hadron-Streuung in der Gestalt der Gln. (3.38), (3.39). Die Lichtkegel-Wellenfunktionen der partizipierenden Zustände sind absorbiert im Integrationsmaß $d\varphi_{i',i}$, vgl. die Gln. (2.49), (2.50) und (3.8):

$$\langle h^{i'}(P_{i'})|h^{i}(P_i)\rangle \;=\; (2\pi)^3\, 2(P_i)_{0+}\,\delta(\vec{P}_{i'}-\vec{P}_i)\cdot\int d\varphi_{i',i}(z,\mathbf{r}) \tag{3.48}$$

$$\text{mit}\qquad 1 \;=\; \int d\varphi_{i,i}(z,\mathbf{r}) \;=\; \int_0^1 \frac{dz}{2\pi}\int d^2\mathbf{r}\;\varphi^{i\dagger}_{s\bar{s}}(z,\mathbf{r})\,\varphi^{i}_{s\bar{s}}(z,\mathbf{r}) \tag{3.48$'$}$$

Gl. (3.48) für feste i, i', beide $\in\{1,1'\}$ oder $\in\{2,2'\}$, bzw. Gl. (3.48′) für festes $i\in\{1,1',2,2'\}$.

Eine Notation in Übereinstimmung mit der Literatur, auf die wir wesentlich Bezug nehmen insbesondere unsere Veröffentlichungen, wird erreicht, indem wir umbenennen:

$$\psi_{s\bar{s},i} \;\equiv\; \sqrt{2}\cdot\varphi^{i}_{s\bar{s}} \qquad\text{und}\qquad d\psi_{i',i} \;\equiv\; d\varphi_{i',i} \tag{3.49}$$

indem die Notation für den Überlapp $\psi^{\dagger}_{i'}\psi_i \equiv 2\cdot\varphi^{i'\dagger}_{s\bar{s}}\varphi^{i}_{s\bar{s}}$ die Spinsumme impliziere (wie bereits die Flavour-Summe) und unterdrückt sei der Index „+“ der Variablen der Photon-/Vektormeson-Seite. Die Gln. (3.38), (3.39) schreiben sich dann:

$$T_{hh} \;=\; \int\frac{dzd^2\mathbf{r}}{4\pi}\;\;\psi^{\dagger}_{V}\psi_{\gamma}(z,\mathbf{r})\;\;T_{\ell p}(z,\mathbf{r};|\tau|) \tag{3.50}$$

$$T_{\ell p} \;=\; 2\pi\int_0^{\infty}|\mathbf{b}|\,d|\mathbf{b}|\,J_0(|\tau|\,|\mathbf{b}|)\int\frac{dz_-d^2\mathbf{r}_-}{4\pi}\;\;\left|\psi_p(z_-,\mathbf{r}_-)\right|^2\;\;\tilde{T}_{\ell\ell}(z,\mathbf{r};z_-,\mathbf{r}_-;\mathbf{b}) \tag{3.51}$$

Dabei ist entsprechend Gl. (3.40) zu setzen

$$\psi^{\dagger}_{p}(z_-,\mathbf{r}_-)\,\psi_p(z_-,\mathbf{r}_-) \;=\; \left|\psi_p(z_-,\mathbf{r}_-)\right|^2 \;=\; 4\,\omega_p^2\;\delta(z_--1/2)\;\mathrm{e}^{-\omega_p^2 r_-^2} \tag{3.52}$$

Wir betrachten $T_{\ell p}$ als ausintegriert. Aus den Gln. (3.48′), (3.49) folgt

$$1 \;=\; \int d\psi_{i,i}(z,\mathbf{r}) \;=\; \int\frac{dzd^2\mathbf{r}}{4\pi}\;\;\left|\psi_i(z,\mathbf{r})\right|^2 \tag{3.53}$$

als Normierung. Diese bezieht sich auf die Zustände $i=1'=V$ und $2=2'=p$; die Photon-Lichtkegelwellenfunktion ist nicht normiert, vgl. ihre Konstruktion unten auf Seite 130.

In Zusammenhang der Gln. (3.38), (3.39) greifen wir die Bemerkung von Fußnote 2.7 auf Seite 54 auf: Der Einfachheit halber fassen wir das Proton auf als Quark-Diquark-Zustand. Aufgefaßt als Drei-Quark-Zustand, und in diesem Bild fixiert die Parameter, vgl. Ref. [63], folgen prinzipiell die gleichen Vorhersagen, – allein der Rechenaufwand ist größer, da der Zustand formal repräsentiert ist durch drei Wegner-Wilson-Loops, das heißt Colour-Dipole, die verknüpft sind bezüglich ihres Eichgehalts. Die Berechnung des *Odderon*-Austausches ($C\equiv P\equiv -1$) zeigt, daß das Quark-Diquark-Bild insofern zu favorisieren ist, als es diesen Beitrag unterdrückt gegenüber dem des Pomerons ($C\equiv P\equiv +1$); vgl. Ref. [180].

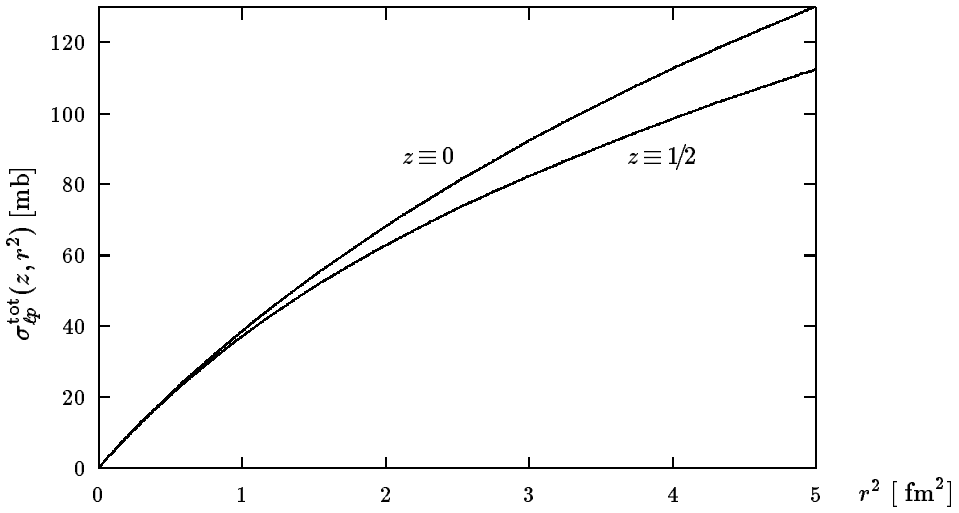


Abbildung 3.7: Totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\rm tot}_{\ell p}(z,r^2)$ für die Streuung eines Colour-Dipols $\{z,\mathbf{r}\}$, der Einfachheit halber gemittelt über sämtliche Orientierungen θ, als Funktion von $r^2\equiv\mathbf{r}^2$. Die obere Kurve bezieht sich auf $z=0$, die untere auf $z=1/2$; sie veranschaulichen seine nur marginale z-Abhängigkeit. Bezüglich der Dipolausdehnung r verhält er sich wie $\sigma^{\rm tot}_{\ell p}(z,r^2)\propto r^{2n}$, wobei $n\equiv 1$ im Limes verschwindender Ausdehnung, vgl. Ref. [124], und leicht abfallend für größere Dipole. Vgl. auch $\sigma^{\rm tot}_{\ell p}(z{\equiv}1/2,r)$ in Abb. 4.11 auf Seite 181.

Es ist definiert $T_{\ell p}\stackrel{!}{=}T^{(s,t)}_{\ell p}$ als die T-Amplitude für die Streuung eines Wegner-Wilson-Loops, das heißt Colour-Dipols an dem festen Proton-Target, vgl. die Gln. (3.39),(3.39). Der totale Wirkungsquerschnitt für die Streuung des (+)-Dipols $\{z,\mathbf{r}\}\equiv\{z,r,\theta\}$, der Einfachheit halber gemittelt über sämtliche Orientierungen θ, an dem festen Proton-Target ist gegeben durch

$$\sigma^{\rm tot}_{\ell p}(z,r^2) \;=\; \frac{1}{s}\,{\rm Im}\;\; T'_{\ell p}(z,r,|\tau|\equiv 0) \tag{3.54}$$

$$\text{mit}\qquad T'_{\ell p}(z,r,|\tau|) \;=\; \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\;\; T_{\ell p}(z,r,\theta,|\tau|) \tag{3.55}$$

aufgrund des optischen Theorems, vgl. die Gln. (3.34), (3.41).

In Abbildung 3.7 ist er aufgetragen über r^2 für $z\equiv 0$ und $z\equiv 1/2$. Für anwachsende Dipolausdehnung r wächst der Dipol-Proton-totale Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\rm tot}_{\ell p}(z,r^2)$ zunächst quadratisch mit r bis zu einer Größe von etwa $r\cong 1-2\,a$. Danach steigt er weiter an, jedoch mit langsam kleinerwerdender Potenz. Dieses stetige Ansteigen ist ganz wesentlich Effekt der Nicht-Lokalität des C-Terms des Korrelationstensors $D=(D_{\mu\nu\mu'\nu'})$. Der NC-Term allein saturiert. Perturbativer Gluonaustausch trägt nur zum NC-Term bei. Hierin genau unterscheidet sich unser Zugang grundlegend von Modellen auf Basis perturbativen Gluonaustauschs. So saturiert der entsprechende Dipol-Proton-Wirkungsquerschnitt in Ref. [153] bei etwa dem doppelten Protonradius.

Wir schließen den Abschnitt über den allgemeinen Zugang des MSV zu weicher Hochenergiestreuung mit der Diskussion eines weiteren Charaktristikums, in dem er sich grundlegend unterscheidet von perturbativen Modellen auf Basis lokaler Quark-Quark-Wechselwirkung mit inhärenter Quark-Additivität. Wir betrachten den Abfall der T-Amplituden $T_{\ell p}$, $T'_{\ell p}$ für Loop-Proton-Streuung mit $\tau^2\cong -t$, vgl. Gl. (3.6). Es gilt $T_{\ell p}, T'_{\ell p}\propto\exp -B_0\tau^2/2$ für kleine $|\tau|$, vgl. Gl. (3.42). In Ref. [63] wird der slope-Parameter B_0 in folgender Weise

numerisch parametrisiert:[3.11]

$$B_0 \;\cong\; 1.858\,a^2 \;+\; 0.244\,(R_+^2 + R_-^2) \tag{3.56}$$

Der konstante Term trägt mit $\cong 5.71\,\mathrm{GeV}^{-2}$ ungefähr die Hälfte bei zu typischen Zahlenwerten $B_0 \cong 11.5\,\mathrm{GeV}^{-2}$ für den slope-Parameter, vgl. Gl. (3.44). In einem perturbativen Modell auf Basis von Quarkadditivität kann unter bestimmten Bedingungen auch ein konstanter Term generiert werden. Allerdings kommt dieser zustande als Quark-Formfaktor und ist daher wesentlich kleiner als der zweite Term – typischerweise um das Verhältnis der elektromagnetischen Ladungsradien von Quark und Hadronen im Quadrat: $(R_q^{\mathrm{ch.}}/R_\pm^{\mathrm{ch.}})^2$. Vgl. die Diskussion des *modifizierten Chou-Yang-Modells* in Ref. [63].

3.3 Hadronische (Lichtkegel-)Wellenfunktionen

In die T-Amplitude für Hadron-Hadron-Streuung $T_{hh}^{(s,t)}$ gehen wesentlich ein die hadronischen Quark-Antiquark-(Lichtkegel-)Wellenfunktionen der involvierten Zuständen. Diese treten neben die im letzten Abschnitt diskutierte MSV-spezifische Funktion $\tilde{T}_{\ell\ell}^{(s,\mathrm{b})}$, die bezüglich τ Fourier-transformierte T-Amplitude für die Streuung zweier Wegner-Wilson-Loops, das heißt zweier Colour-Dipole. Der Übergang zu der T-Amplitude $T_{\ell p}^{(s,t)}$ für die Loop-Proton-Streuung schließt bereits ein das Absolutquadrat der Proton-Wellenfunktion.

Wenig ist bekannt über die wirkliche Dynamik von Hadronen, die diesbezügliche Unsicherheit selbst auf qualitativem Niveau ist groß. Es ist sicher eine Hauptaufgabe gegenwärtiger wie zukünftiger Experimente, grundlegende Tatsachen hadronischer Wellenfunktionen in Daten zu dokumentieren und so beizutragen, die Zusammenhänge zu erhellen, die wesentlich rühren an das Verhalten der Quantenchromodynamik auf großen Längenskalen. Wir zeigen, daß elastische Photo- und Leptoproduktion von Vektormesonen hochsensitiv ist auf bestimmte Aspekte und Details der involvierten hadronischen Wellenfunktionen. Ihre experimentelle wie theoretische Untersuchung verspricht daher, einen wichtigen Beitrag zu leisten zur Beantwortung grundlegender Fragen bezüglich der Dynamik von Hadronen.

Gegenwärtig müssen aber teils erhebliche Annahmen und Approximationen gemacht werden. Ziel ist, auf die Hadron-Hadron-Amplitude T_{hh}, möglichst wenig aufgeweicht durch komplizierte Wellenfunktionen, den MSV-spezifischen String-String-Mechanismus zu projizieren, der inhärent ist den Amplituden $\tilde{T}_{\ell\ell}$, $T_{\ell p}$ und so zu verifizier- wie falsifizierbaren Postulaten dieses Mechanismus, zu gelangen. Wesentliche Charakteristika der dynamischer Hadronen sollen zugänglich gemacht werden durch Formulierung einfacher Ansätze für deren Wellenfunktionen mit möglichst wenigen sensitiven Parametern.

Nachdem in Ref. [122] die hohe Sensitivität der MSV-Amplitude $\tilde{T}_{\ell\ell}$ auf die transversalen Hadronausdehnungen festgestellt ist, wird in diesem Sinne in Ref. [63] für die transversalen Wellenfunktionen einer Vielzahl von Hadronen h der einfache Ansatz gemacht:

$$\psi_h(r) \;=\; 2\,\omega_h\,\mathrm{e}^{-\omega_h^2 r^2/2} \tag{3.57}$$

Die Oszillatorparameter ω_h sind korreliert mit den transversalen rmsq-Radien R_h, die berechnet werden aus dem des Protons durch Multiplikation mit dem entsprechenden experimentellen Wert für das Verhältnis der elektromagnetischen Ladungsradien, etwa für das π-Meson: $R_\pi \cong 0.766\,R_p$, vgl. die Diskussion in Anschluß an Gl. (3.40), bzgl. R_p vgl. (3.47).

[3.11] In Ref. [63], Gl. (76) – vgl. dort besser Gl. (97) – ist bezüglich des konstanten Terms ein Schreibfehler unterlaufen, der sich in unsere Veröffentlichung Ref. [65] übertragen hat. Weiter arbeiten wir mit den rmsq-Radien $R_\pm$, die um $\sqrt{3/2} \cong 0.866$ kleiner sind als die Ausdehnungsparameter dort: $R_\pm = \sqrt{3/2}\;R_\pm^{\mathrm{Ref.[63]}}$.

Dies führt auf $\sigma^{\rm tot}_{\pi p}/\sigma^{\rm tot}_{pp} \cong 0.66$ für das Verhältnis der totalen Wirkungsquerschnitte – aufgrund des Verhälnisses der Hadronradien, nicht aufgrund Quarkadditivität.

Die Abhängigkeit von z, dem Anteil des Quarks am gesamten Lichtkegelimpuls, wurde in Ref. [63] nicht betrachtet. Auf Basis des angegebenen Zahlenwertes für R_π haben wir die Berechnung wiederholt und ähnliche Resultate gefunden für eine π-Wellenfunktion mit „vernünftiger" z-Abhängigkeit. Die Hadron-Hadron-Amplitude bleibt also wesentlich determiniert durch die transversalen Ausdehnungen der streuenden Hadronen. Wir behalten daher bei für das Absolutquadrat der Proton-Wellenfunktion den einfachen Ansatz gegeben in den Gln. (3.40), (3.52), konform mit der transversalen Wellenfunktion nach Gl. (3.57).

Aufgrund der Differenzierung verschiedener Helizitätszustände ist die Photon-/Vektormeson-Seite der Streuung sehr viel sensitiver auf z. Wir formulieren im folgenden die Lichtkegelwellenfunktionen von Photon und Vektormeson und diskutieren, wie deren z-Abhängigkeit teils erheblich mit Einfluß nimmt auf die effektive transversale Ausdehnung – und so auf die Hadron-Hadron-Amplitude T_{hh} und die postulierten Observablen.

Streuung bei hohen Energien impliziert, daß die einlaufenden, in unserem Fall elastischer Vektormesonproduktion auch die auslaufenden Teilchen auf Trajektorien nahe des Lichtkegels propagieren. Es liegt nahe, ihre Wellenfunktionen zu konstruieren als *Lichtkegelwellenfunktionen*; seien im Bild von Valenzquark-Konstituenten mit ψ bezeichnet ihre Quark-Antiquark-Lichtkegelwellenfunktionen. Die T-Amplitude T_{hh} für Hadron-Hadron-Streuung folgt dann allgemein in der Gestalt der Gln. (3.50), (3.51) mit $\tilde{T}_{\mu}$ der zunächst nicht näher bestimmten Amplitude für die Streuung der beiden Quark-Antiquark-(Colour)Dipole, vgl. neben Kapitel 2 bzw. Ref. [146] auch Ref. [105].

Die Funktionen $\psi(z,\mathbf{r})$ in ihrer Eigenschaft als Quark-Antiquark-Lichtkegelwellenfunktionen sind folgendermaßen aufzufassen, vgl. Kapitel 2.3.1: Sie sind zunächst definiert im Impulsraum, $\tilde{\psi}(z,\mathbf{k})$ stellt die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür dar, in einem Hadron mit Impuls $\{P^+,\mathbf{P}\}$[3.12] und wohldefiniertem Drehimpuls- und Flavour-Gehalt ein Quark und Antiquark anzutreffen mit Impulsen $\{zP^+,\mathbf{k}+z\mathbf{P}\}$ beziehungsweise $\{\bar{z}P^+,-\mathbf{k}+\bar{z}\mathbf{P}\}$, mit $\bar{z}=1-z$. Eine wesentliche Eigenschaft ist ihre Abhängigkeit allein von den Variablen z und $\mathbf{k}$, vgl. die Refn. [26,31]. Fourier-transformiert in den transversalen Ortsraum ist $\mathbf{r}$ der zu k konjugierte Vektor von Quark zu Antiquark.

3.3.1 Lichtkegelwellenfunktion des Photons

Die Quark-Antiquark-Wellenfunktion des Photons ψ hängt ab von dessen Virtualität Q und Helizität λ: $\psi(z,\mathbf{r}) \equiv \psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r})$. Sie ist die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, im Photon ein Quark-Antiquark-(Colour)Dipol anzutreffen mit Anteilen am Gesamt-Lichtkegelimpuls $(z,\bar{z})$ und transversaler Separation $\mathbf{r}=(r\cos\varphi, r\sin\varphi)^t$.[3.13] Quark und Antiquark sind definierte Zustände bezüglich Flavour $(f,\bar{f})$ und Helizitäten $(h,\bar{h})$ [bzw. Spins $(s,\bar{s})$]; ihr Colour-Gehalt induziert den globalen Faktor $\sqrt{N_c}$, vgl. unten Fußnote 3.15. Das Photon koppelt an die elektrische Ladung wie $e_f\delta_{f\bar{f}} \equiv e_f \sum_{f_i} \delta_{f,f_i}\delta_{\bar{f},\bar{f}_i}$, mit der Summe über die Flavour $f_i \equiv$ *down(d), up(u), strange(s), charm(c), bottom(b), top(t)* und $e_f = +2/3e$ und $-1/3e$ deren Ladung. Die explizite Raum-Konfiguration der Photon-Lichtkegelwellenfunktion, in Termen der Variablen z und $\mathbf{r}$ hängt ab von den Quark-Helizitäten h, $\bar{h}$ und der Photon-Helizität λ. Wir berechnen sie im Rahmen von Lichtkegelstörungstheorie (light cone per-

[3.12] Bzgl. der Lichtkegelkoordinaten, vgl. Anh. A.1.2; hier kurz: $P^\pm = \alpha(P^0 \pm P^3)$ und $\mathbf{P} = (P^1, P^2)^t$. Ein Teilchenimpuls ist vollständig bestimmt durch das Paar $\{P^+,\mathbf{P}\}$, aufgrund $P^+P^- = \alpha^2(M^2+\mathbf{P}^2) = \alpha^2\mathbf{M}^2$, mit M und $\mathbf{M}$ der Masse bzw. transversalen Masse des Teilchens. Sei ab sofort $\alpha = 1/\sqrt{2}$, vgl. Anh. G.1.

[3.13] Es ist $\varphi \equiv \varphi_{+}$, und $\varphi_\pm = \theta_\pm + \varphi_{\mathbf{b}}$ in Zusammenhang mit Gl. (3.35) und Fußnote 3.7.

turbation theory, LCPT) zu niedrigster Ordnung in Anhang G.1:

$$\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r}) \;=\; \sqrt{N_c}\;\; e_f \delta_{f\bar{f}}\;\; \chi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r}) \tag{3.58}$$

wobei[3.14]

$$\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv 0)} \;=\; -2z\bar{z}\;\; Q\;\delta_{h,-\bar{h}}\;\; \frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi} \tag{3.58$'$}$$

$$\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv +1)} \;=\; \sqrt{2}\left[\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}\;\left(z\,\delta_{h+,\bar{h}-} - \bar{z}\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right)\frac{\mathrm{K}_1(\varepsilon r)}{2\pi} \;+\; m_f\;\delta_{h+,\bar{h}+}\;\frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\right]$$

$$\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv -1)} \;=\; \sqrt{2}\left[\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\;\left(\bar{z}\,\delta_{h+,\bar{h}-} - z\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right)\frac{\mathrm{K}_1(\varepsilon r)}{2\pi} \;+\; m_f\;\delta_{h-,\bar{h}-}\;\frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\right]$$

mit abkürzend $\delta_{h+,\bar{h}-} \equiv \delta_{h,+1/2}\delta_{\bar{h},-1/2},\ldots$ Es steht m_f für die laufende Quarkmasse mit Flavour f, bzgl. Zahlenwerten vgl. unten Tabelle 3.1, Fußnote *a*; und es ist ε definiert durch:

$$\varepsilon = \sqrt{z\bar{z}\,Q^2 + m_f^2} \tag{3.59}$$

Die Funktionen K_0, K_1 sind die vertrauten modifizierten Besselfunktioinen zweiter Art in der Definition von Ref. [2].

Diese Funktionen K_0, K_1 fallen exponentiell ab mit ihrem Argument εr. Dies induziert ein subtiles Wechselspiel der Variablen z und Q, abhängig von der Quarkmasse m_f, vgl. Gl. (3.59), das bestimmt, bis zu welcher Ausdehnung: $r \lesssim \varepsilon^{-1}$, (Colour-)Dipole effektiv zu den Funktionsausdrücken $\mathrm{K}_0(\varepsilon r)$, $\mathrm{K}_1(\varepsilon r)$ beitragen. Die Wellenfunktionen $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$ wiederum, vgl. (3.58$'$), sind komplizierte zusätzlich subtil von z und Q abhängende Funktionale dieser K_0-,K_1-Ausdrücke – und wesentlich verschieden für longitudinale und transversale Polarisation des Photons, $\lambda \equiv 0$ beziehungsweise $\lambda \equiv \pm 1$. Im Resultat tragen zur transversalen Ausdehnung von longitudinal und transversal polarisiertem Photon wesentlich bei (Colour)Dipole verschiedenster transversaler Ausdehnungen – je nach Virtualität Q und je nach dem, ob mittlere Werte von z betrachtet werden oder z-Werte nahe der Intervall-Endpunkte 0 und 1.

Die longitudinale Wellenfunktion $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv 0)}$ ist gepeakt um $z = 1/2$, so daß sich das longitudinale Photon für großes Q^2 wie ein kleiner Dipol der Ausdehnung $r \sim 1/Q$ verhält. Dazu in Kontrast sind die transversalen Wellenfunktionen $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv\pm 1)}$ fast flach bezüglich z und die relevante Größe nicht Q^2 sondern $Q^2_{\mathrm{eff}} \equiv 4z\bar{z}Q^2$, so daß sich ein transversales Photonen für großes Q^2 komplizierter verhält: Teils, nämlich für mittlere z, wechselwirkt es als kleiner Dipol mit einer Ausdehnung von $r \lesssim 2/Q$. Teils, nämlich für $z \cong m_f/Q$ nahe dem Intervall-Endpunkt, – falls leichte Quarks mit Flavour *d, u, s* involviert sind – als großer Dipol mit einer Ausdehnung von bis zu $r \sim 1/\sqrt{m_f Q}$; dagegen für schwere Quarks mit Flavour *c, b, t* begrenzt allgemein die inverse Quarkmasse die Ausdehnung des Photons.

Die Photon-Wellenfunktion $\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$, vgl. die Gln. (3.58), (3.58$'$), ist perturbativ konstruiert, nichtperturbativen Effekten wie *Chirale Symmetriebrechung* oder *Confinement* trägt sie nicht Rechnung. Mit kleinerwerdendem Q^2 werden die Ausdehnungen der wesentlich beitragenden Dipole, insbesondere für transversale Polarisation des Photons, schnell größer und übersteigen typische Hadronausdehnungen, dies widerspricht der wirklichen Physik. In Photo- und Leptoproduktion von Vektormesonen wird die Ausdehnung der effektiv beitragenden Dipole bestimmt durch den Überlapp der Wellenfunktionen von Photon und Vektormeson. Die Form der Wellenfunktionen der in diesem Kapitel diskutierten $1S$-Vektormesonen unterdrückt den Bereich der z-Endpunkte und damit die großen

[3.14] Seien Indizes und Argumente der Funktionen nur soweit explizit notiert, wie der Zusammenhang fordert.

Dipole transversal polarisierter Dipole. Auf diese Weise testen Photon-Virtualitäten im Bereich $Q^2 \gtrsim 1-2$ GeV^2 effektiv Dipole von transversaler Ausdehnung bis ungefähr 1 fm. Dies läßt erwarten, daß unsere Photon-Wellenfunktion in diesem Q^2-Bereich verläßlich die für uns relevanten Aspekte der wirklichen Photon-Wellenfunktion approximiert. Die gute Übereinstimmung unseres Postulats mit den experimentellen Daten für das Verhältnis Longitudinaler zu transversaler Produktion des ρ-Mesons untermauert dies a posteriori, vgl. unten Abbildungen 3.11 auf Seite 141 und mehr noch Abbildung 4.15 auf Seite 191.
Unser Zugang im Rahmen des MSV ist nichtperturbativ, er ist adäquater Zugang zu Effekten auf Längenskalen typischer Hadronausdehnungen; Dominanz wesentlich kleinerer Dipole fordert, den Austausch perturbativer Gluonen miteinzubeziehen. Unser Interesse gilt vornehmlich kleinen Virtualitäten, so daß wir statt dessen den betrachteten Q^2-Bereich auch nach oben einschränken, in diesem Kapitel konservativ auf $1-2$ bis 10 GeV^2.

Es zeigt sich a posteriori Gültigkeit der in den Gln. (3.58), (3.58′) angegebene Photon-Wellenfunktion $\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$ auch für höhere Q^2; wir geben daher im folgenden Kapitel Zahlenwerte bis $Q^2 \cong 20$ GeV^2 an. Wir modifizieren dort die Wellenfunktion $\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$ in der Weise, daß sich ihre Gültigkeit erweitert hin zu kleineren bis verschwindenden Virtualitäten. Dies setzt uns in die Lage, auch ausgedehntere angeregte Vektormesonen zu diskutieren. So testet die Produktion des $2S$-Zustandes durch transversal polarisierte Photonen Dipole von transversaler Ausdehnung bis ungefähr 2 fm für $Q^2 \equiv 1$ GeV^2 und $2.5-2.8$ fm für $Q^2 \equiv 0$.

3.3.2 Lichtkegelwellenfunktionen der $1S$-Vektormesonen

Die Lichtkegelwellenfunktionen der $1S$-Vektormesonen seien definiert in Notation analog zu der des Photons und zunächst separiert ihr Colour- und Flavour-Gehalt. Dies sind der globale Faktor $1/\sqrt{N_c}$ bezüglich Colour;[3.15] bezüglich ihres Flavour-Gehaltes fassen wir $\rho(770)$ und $\omega(782)$ auf als reinen Isospin-1- beziehungsweise Isospin-0-Zustand und $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$ als reine Quarkonia. Wir schreiben analog zu Gl. (3.58):

$$\psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r}) \;=\; 1/\sqrt{N_c}\;\; i_{V,f}\;\; \chi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r}) \tag{3.60}$$

mit symbolisch – für $\rho = 1^+(1^{--})$ und $\omega, \phi, J/\psi = 0^-(1^{--})$[3.16] –:

$$i_{\rho,f} = (u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2} \qquad i_{\omega,f} = (u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2} \qquad i_{\phi,f} = s\bar{s} \qquad i_{J/\psi,f} = c\bar{c} \tag{3.61}$$

für $i_{\rho,f} = (u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2} \equiv (\delta_{f,u}\delta_{\bar{f},\bar{u}} - \delta_{f,d}\delta_{\bar{f},\bar{d}})/\sqrt{2}, \ldots$ mit $\sum_f i_{V,f}\, i_{V,f} = 1$, $\sum_f e_f \delta_{f\bar{f}}\, i_{V,f} = e_V \equiv e\hat{e}_V$; dabei sind e_V, $\hat{e}_V$ die effektive Quark-Ladung im Vektormeson V in natürlichen beziehungsweise in Einheiten der Proton-Ladung e; bzgl. expliziter Werte von $\hat{e}_V$ vgl. Tabelle 3.1.

Die Abhängigkeit von der Raum-Konfiguration ist subsumiert in den Funktionen $\chi_{V(\lambda)}$, die diese beschreiben in Termen der Variablen z und $\mathbf{r}$, je nach Helizitäten $(h, \bar{h})$ der Quarks und Helizität λ des Vektormesons. Vgl. die Photon-Funktionen $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$, Gl. (3.58′).

Bezüglich dieser Funktionen $\chi_{V(\lambda)}$, allgemein der Raum-Konfiguration der Quark-Antiquark-Lichtkegelwellenfunktion eines (Vektor)Mesons, existiert nur sehr punktuelle Information. Von dem Standpunkt der Theorie her ist gegenwärtig selbst die Form des Lichtkegel-Hamiltonoperators für Zustände aus Valenzquark-Konstituenten nicht bekannt. Theoretische Untersuchungen stehen erst am Anfang. So werden Versuche unternommen, Lichtkegelwellenfunktionen für Vektormesonen zu konstruieren als die *Melosh-Transformierten*

[3.15] Die Colour-Freiheitsgrade sind bereits vollständig absorbiert in den Wegner-Wilson-Loops durch die Normierung der Spuren gemäß $\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} = 1/d_{\mathfrak{F}}\,\mathrm{tr} = 1/N_c\,\mathrm{tr}$. Unsere Konvention für die Lichtkegelwellenfunktion, vgl. Gl. (3.58), schließt einen Faktor $\sqrt{N_c}$ ein, dieser ist zu kürzen durch einen Faktor $1/\sqrt{N_c}$ im Vektormeson.
[3.16] Notation $I^G(J^{PC})$ nach Ref. [165]. Für einen $q\bar{q}$-Zustand $|N^{2S+1}L_J\rangle$ gilt, mit $S = 0, 1$: $G = (-1)^{L+S+I}$, $P = (-1)^{L+1}$, $C = (-1)^{L+S}$. Für $L = 0$ sind $J^P = 0^-$ Pseudoskalare, 1^- Vektoren.

von Lösungen eines relativistisch erweiterten Konstituentenquark-Modells, vgl. Ref. [36]. Es wird eine String-Gleichung für ein Meson auf dem Lichtkegel gelöst, vgl. Ref. [144]. Doch liefern diese Überlegungen (noch) keine Lösungen für $\chi_{V(\lambda)}$ in parametrisierter Form. Wir haben im Einleitungskapitel auf Seite 12 geschildert, wie theoretisch komplex die Formulierung des Konstituentenbildes von *first principles* ist. Sie geschieht meist zunächst für QED, eine Verallgemeinerung auf QCD ist schwierig; vgl. den bereits zitierten Review von Lavelle und McMullan, Ref. [133], und die dort angegeben formaleren Referenzen.

Wir werden daher auf Basis der punktuellen Information, *die* existiert, *phänomenologische* Ansätze modellieren analog den Funktionen $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$ des Photons. Im Bereich der Quantenchromodynamik auf großen Längenskalen werden Hadronen erfolgreich beschrieben im Rahmen von Quark-Modellen: statische Hadronen durch Gauß'sche Wellenfunktionen, das heißt aufgefaßt als Systeme von Konstituentenquarks in einem Harmonischen-Oszillator-Potential. Die Aufgabe aber, diese nichtrelativistischen Wellenfunktionen in ein schnellbewegtes System Lorentz-zu tranformieren, ist hochgradig nichttrivial. Das Zusammenspiel von longitudinaler und transversaler Dynamik in der Physik nahe und auf dem Lichtkegel ist nicht wirklich verstanden, genausowenig, wie die Spin-Freiheitsgrade zu behandeln sind. Das MSV andererseits gelangt auf Basis einfacher Gauß'scher Wellenfunktionen, vgl. Gl. (3.57) bzw. die Gln. (3.40), (3.52), in denen Spin- und z-Abhängigkeit komplett vernachlässigt sind, zu einer überzeugenden quantitativen Beschreibung von weicher Streuung bei hohen Energien. Wir halten daher bei Einbeziehung einer Spin- und z-Abhängigkeit fest an dem Bild eines (transversalen) Harmonischen Oszillators. Im Bereich kleiner Längenskalen, werden mithilfe perturbativer Quantenchromodynamik unterstützt durch Summenregeln Eigenschaften der Wellenfunktionen im Limes verschwindender transversaler Separation r extrahiert, insbesondere bezüglich der Endpunkte des z-Intervalls $[0,1]$. In die Streuamplitude für harte exklusive Prozesse geht in guter Approximation nur der Wert der Wellenfunktion am Ursprung ein, vgl. Ref. [135], der innerhalb derselben Approximation gegeben ist durch die leptonische Zerfallsbreite des Mesons.

Vor diesem Hintergrund modellieren wir die Funktionen $\chi_{V(\lambda\equiv 0)}$; in Anhang G.2 gelangen wir zu, vgl. Fußnote 3.14:

$$\chi_{V(\lambda\equiv 0)} = 4z\bar{z}\ \omega_{V,L}\ \delta_{h,-\bar{h}} \cdot g_{V,L}(r)\ h_{V,L}(z) \tag{3.62}$$

$$\chi_{V(\lambda\equiv +1)} = \left[\mathrm{i}\,\omega_{V,T}^2 r\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}\ \left(z\,\delta_{h+,\bar{h}-} - \bar{z}\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) + m_f\ \delta_{h+,\bar{h}+}\right] \cdot g_{V,T}(r)\ h_{V,T}(z)$$

$$\chi_{V(\lambda\equiv -1)} = \left[\mathrm{i}\,\omega_{V,T}^2 r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\ \left(\bar{z}\,\delta_{h+,\bar{h}-} - z\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) + m_f\ \delta_{h-,\bar{h}-}\right] \cdot g_{V,T}(r)\ h_{V,T}(z)$$

dabei sind definiert für longitudinale und transversale Polarisation, $\lambda\equiv 0, L$ beziehungsweise $\lambda\equiv\pm 1, T$, die Funktionen:

$$g_{V,\lambda}(r) = \exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega_{V,\lambda}^2\,r^2\right] \tag{3.63}$$

$$h_{V,\lambda}(z) = \mathcal{N}_{V,\lambda}\ \sqrt{z\bar{z}}\ \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M_V^2\,(z-1/2)^2}{\omega_{V,\lambda}^2}\right] \tag{3.64}$$

Diese Darstellung hält sich an unsere Notation von Ref. [125]. Sie differiert nur in dem einen Punkt, daß in Hinblick auf Systematik mit den Photon-Funktionen $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$ auch in der Definition der Vektormeson-Funktionen $\chi_{V(\lambda)}$ der Colour-Gehalt – in Form des Faktors $1/\sqrt{N_c}$ – separiert ist, vgl. die Gln. (3.58),(3.60); die dimensonslosen Normierungskonstanten $\mathcal{N}_{V,\lambda}$ in den Funktionen $h_{V,\lambda}(z)$ nach Gl. (3.64) sind so um einen Faktor $\mathcal{N}_{V,\lambda}$, $N_c\equiv 3$, größer als die entsprechenden Konstanten dort.

Die Argumentation hin zu diesem Ansatz ist angegeben im Zuge seiner Herleitung in Anhang G.2. Wir merken hier nur folgendes an: Lichtkegelstörungstheorie (LCPT) liefert zunächst Ausdrücke für die Photon-Funktionen $\tilde{\chi}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{k})$; die Funktionen $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r})$ in Gl. (3.58) sind definiert als deren Fourier-Transformierte bezüglich $\mathbf{k}$. Die Funktionen $\tilde{\chi}_{\gamma(Q^2,\lambda)}$ faktorisieren in einen Term, dessen z- und $\mathbf{k}$-Abhängigkeit in komplizierter Weise abhängt von dem Paar $(h,\bar{h})$ der Quark-Helizitäten, und in einen zweiten Term, den *Energienenner des Photons* $1/(\varepsilon^2+\mathbf{k}^2)$, mit ε abhängig von z nach Gl. (3.59). Der erste Term kann aufgefaßt werden als allgemeine Konsequenz der Quark-Antiquark-Valenz-Struktur, der zweite Term als Photon-spezifisch. Als Ansatz für die Vektormeson-Funktionen $\tilde{\chi}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{k})$ wird der erste Term im wesentlichen unverändert übernommen, der zweite, der Photon-Energienenner, wird ersetzt durch eine Funktion, die analog abhängt von z und $k\equiv|\mathbf{k}|$ und die das spezifische Vektormeson V modelliert. Für diese wird angesetzt – bis auf konstante Faktoren:

$$\tilde{g}_{V,\lambda}(k)\cdot h_{V,\lambda}(z) \;\equiv\; 2\pi\,\omega_{V,\lambda}^{-2}\;\; g_{V,\lambda}\left(\omega_{V,\lambda}^{-2}k\right)\cdot h_{V,\lambda}(z) \tag{3.65}$$

Die so konstruierten Funktionen $\tilde{\chi}_{V(\lambda)}$ ergeben Fourier-transformiert bezüglich $\mathbf{k}$ die Funktionen $\chi_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r})$ von Gl. (3.60).

Die explizite funktionale Form von $h_{V,\lambda}$, $g_{V,\lambda}$ nach den Gln. (3.64), (3.63) wird vorgeschlagen von Wirbel, Stech, Bauer in Ref. [236] in Zusammenhang exklusiver semileptonischer Zerfälle der neutralen D- und B-Mesonen. Die r-Abhängigkeit ist parametrisiert durch die Funktionen $g_{V,\lambda}(r)$, das heißt das Quark-Antiquark-System des Vektormesons wird aufgefaßt als konfiniert in einem Harmonischen-Oszillator-Potential mit Parameter $\omega_{V,\lambda}$. Mit diesem unmittelbar verknüpft über $R_{V,\lambda}=\langle r^2\rangle^{1/2}=1/2\omega_{V,\lambda}$ und weiter über $R_{V,\lambda;3}=\sqrt{3/2}R_{V,\lambda}$ sind der zweidimensionale beziehungsweise der dreidimensionale rmsq-Radius des Vektormesons mit Polarisation λ. Diese erwarten wir vergleichbar den entsprechenden elektromagnetischen Ladungsradien. Elektromagnetische Ladungsradien für Vektormesonen sind allerdings noch nicht experimentell bekannt. Die z-Abhängigkeit der Vektormeson-Wellenfunktionen ist parametrisiert durch die Funktionen $h_{V,\lambda}(z)$. Diese sind invariant bezüglich der Vertauschung von Quark und Antiquark: $z\leftrightarrow\bar{z}$, vgl. $(z{-}1/2)^2=1/4{-}z\bar{z}$, und sind gepeakt für gleichverteilten Lichtkegelimpuls: global durch den Faktor $\sqrt{z\bar{z}}$ und durch die Exponentialfunktion um so stärker, je größer der Oszillatorparameter $\omega_{V,\lambda}$, das heißt je kleiner das Vektormeson ist.

Wir machen für alle betrachteten $1S$-Vektormesonenen *universell* den Ansatz dieser funktionalen Form. Für ein spezielles Vektormeson V hängt er ab, separat für longitudinale und transversale Polarisation, nur von den beiden Parametern $\omega_{V,\lambda}$, $\mathcal{N}_{V,\lambda}$. Diese werden durch die Forderungen fixiert, daß die Wellenfunktionen zum einen normiert sind, und zum anderen den experimentellen Zahlenwert reproduzieren für f_V, die Kopplung von V an den elektromagnetischen Strom $J_{\rm em}=(e_F\bar{\psi}_F\gamma^\mu\psi_F)$, impliziert Summation über alle (geladenen) Fermionen F; vgl. Anh. G.2.1 auf Seite 304. Sei diese Kopplung f_V definiert durch

$$\langle\Omega|\,J^\mu_{\rm em}(0)|V(q,\lambda)\rangle \;=\; e f_V\, M_V\, \varepsilon^\mu(q,\lambda) \tag{3.66}$$

dann ist sie durch

$$\Gamma_V^{l^+l^-} \;=\; \frac{4\pi\alpha_{\rm em}^2}{3}\frac{f_V^2}{M_V}\cdot\left[1+\frac{2m_l^2}{M_V^2}\right]\sqrt{1-\frac{4m_l^2}{M_V^2}} \tag{3.67}$$

verknüpft mit der Breite des elektromagnetischen Zerfalls von V in das Leptonpaar l^+l^-, mit m_l der Masse des Leptons. Unserer Arbeit zugrunde liegen die experimentellen Werte für die Zerfallsbreiten in e^+e^-; aus Gl. (3.67) folgen – unter Vernachlässigung der Elektronmasse m_e wird der Faktor nach dem Punkt zu Eins – Zahlenwerte für f_V; vgl. Tabl. 3.1.

Charakteristik der Grundzustand-$1^+(1^{--})$- und -$0^-(1^{-+})$-Vektormesonen				
	ρ $\equiv\rho(770)$	ω $\equiv\omega(782)$	ϕ $\equiv\phi(1020)$	J/ψ $\equiv J/\psi(3097)$
M_V[MeV]	769.3±0.8	782.57±0.12	1019.417±0.014	3096.87±0.04
$\Gamma_V^{e^+e^-}$[keV]	6.77±0.32	0.60±0.02	1.37±0.06	5.26±0.37
f_V[GeV]	0.152 6	0.045 8	0.079 1	0.270
Flavour[a]: $i_{V,f}$	$(u\bar{u}-d\bar{d})/\sqrt{2}$	$(u\bar{u}+d\bar{d})/\sqrt{2}$	$s\bar{s}$	$c\bar{c}$
$\hat{e}_V$	$1/\sqrt{2}$	$1/(3\sqrt{2})$	$1/3$	$2/3$
$\omega_{V,L}$[GeV]	0.330	0.300	0.368	0.682
$\mathcal{N}_{V,L}[\sqrt{N_c}\equiv 3]$	4.48	4.55	4.59	5.13
$R_{V,L}$[fm]	0.299	0.329	0.267	0.144
$\omega_{V,T}$[GeV]	0.217	0.212	0.270	0.573
$\mathcal{N}_{V,T}[\sqrt{N_c}\equiv 3]$	5.85	5.95	4.80	2.15
$R_{V,T}$[fm]	0.527	0.538	0.439	0.230

Tabelle 3.1: Charakteristik der Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$. Die Zahlenwerte für M_V, $\Gamma_V^{e^+e^-}$ sind i.w. unverändert in der neuesten Ausgabe der Particle Data Group [165], daher dieser entnommen – außer des zentralen Werts von $\Gamma_\phi^{e^+e^-}$, der gegenwärtig mit 1.32 keV angegben wird. Der Effekt auf unsere Resultate ist unwesentlich, genauso das Ersetzen der Werte für M_V durch die Ordnungszahlen in den runden Klammern. Die Kopplungen f_V sind berechnet aus den Zerfallsbreiten $\Gamma_V^{e^+e^-}$. Die Normierungskonstanten $\mathcal{N}_{V,\lambda}$ sind angegeben in Einheiten des Colour-Faktors $\sqrt{N_c}$, $N_c\equiv 3$. Abweichend von Ref. [65] sind die Radien hier definiert durch $R_{V,\lambda}\doteq\sqrt{\langle\mathbf{r}^2\rangle_{V,\lambda}}$, vgl. Anh. G.2.1, die Gln. (G.42), (G.42′).

[a] Als laufende Quarkmassen legen wir zugrunde $m_u=m_d=0$, $m_s=0.15$ GeV und $m_c=1.3$ GeV.

Für festes Vektormeson V und feste Polarisation $\lambda\equiv L,T$ sind die beiden Parameter $\omega_{V,\lambda}$, $\mathcal{N}_{V,\lambda}$ zu bestimmen in Abhängigkeit von M_V, f_V. Die genannten Forderungen sind formal ein über $\mathcal{N}_{V,\lambda}$ gekoppeltes System impliziter Gleichungen von Integralfunktionen in $\omega_{V,\lambda}$. Ihre Formulierung und Lösung geschieht in Anhang G.2.1 auf Seite 304; die expliziten Zahlenwerte sind festgehalten in Tabelle 3.1.

Mit den so definierten Lichtkegelwellenfunktionen für Photon und Vektormesonen sind alle Funktionen angegeben, die eingehen in die T-Amplitude T_{hh} für die exklusive Leptoproduktion dieser Vektormesonen elastisch am Proton. Wir stellen die Formeln zusammen, mit denen wir im folgenden Abschnitt Observablen explizit berechnen werden.

Wir rekapitulieren T_{hh}, Gl. (3.50):

$$T_{hh} \;=\; \int \frac{dz d^2\mathbf{r}}{4\pi}\;\; \psi_V^\dagger \psi_\gamma(z,\mathbf{r})\;\; T_{\ell p}(z,\mathbf{r};|\tau|) \tag{3.68}$$

mit $T_{\ell p}$ der T-Amplitude der zugrundeliegenden Loop(Dipol)-Proton-Streuung, Gl. (3.51). Wir betrachten $T_{\ell p}$ als zerlegt in Eigenfunktionen bezüglich des Drehimpulsoperators L_3:

$$T_{\ell p}(z,r,\varphi,|\tau|) \;=\; \textstyle\sum_{m\,\text{gerade}}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\varphi}\;\; T_{\ell p}^{(m)}(z,r,|\tau|) \tag{3.69}$$

Aufgrund der Periodizität von $T_{\ell p}$, vgl. Gl. (3.36), treten nur gerade m auf. Für die betrachtete Reaktion impliziert dies, daß nur Übergänge auftreten eines longitudinal polarisierten Photons zu einem longitudinal polarisierten Vektormeson und eines transversal polarisierten Photon zu einem transversal polarisierten Vektormeson. Aus der expliziten Gestalt der

Photon- und Vektormeson-Wellenfunktionen, vgl. die Gln. (3.58′), (3.62), folgt die Möglichkeit einer Änderung der Helizität um zwei Einheiten: $\lambda \equiv \pm 1 \to \mp 1$. Wir haben diese Übergänge berechnet und gefunden, daß sie im gesamten betrachteten Q^2-Bereich weniger als 2% zum jeweiligen Wirkungsquerschnitt beitragen. Wir vernachlässigen sie daher.

In die Amplitude T_{hh} gehen die Lichtkegelwellenfunktionen von Photon und Vektormeson ein als der Überlapp:

$$\psi^\dagger_{V(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)} \;\equiv\; \sum_{f,\bar f}\sum_{h,\bar h}\,\psi^{h,\bar h\,\dagger}_{\gamma(Q^2,\lambda)}\psi^{h,\bar h}_{V(\lambda)} \;=\; e\hat e_V\,\sum_{h,\bar h}\,\chi^{h,\bar h\,\dagger}_{\gamma(Q^2,\lambda)}\chi^{h,\bar h}_{V(\lambda)} \tag{3.70}$$

Die Kontraktion ist zu verstehen für feste Helizität $\lambda \equiv 0$, $+1$ oder -1; sie hängt nur noch ab von z, r und ist unabhängig vom Azimutwinkel φ. Der Übergang zu den Funktionen χ, vgl. die Gln. (3.58), (3.60), impliziert die Kontraktion der Flavour-Anteile; vgl. Gl. (3.61), bzgl. expliziter Werte für $\hat e_V$ vgl. Tabl. 3.1. Kontraktion der Funktionen $\chi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$, $\chi_{V(\lambda)}$ in der expliziten Gestalt der Gln. (3.58′), (3.62) führt auf den Überlapp:

$$\begin{aligned}&\psi^\dagger_{V(\lambda\equiv L)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv L)}(z,r) \qquad\qquad (3.71)\\ &=\; -e\hat e_V\;16(z\bar z)^2\;\;\omega_{V,L}\;\;g_{V,L}(r)\,h_{V,L}(z)\;\;Q\;\;\frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\psi^\dagger_{V(\lambda\equiv T)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv T)}(z,r) \qquad\qquad (3.71')\\ &=\;\; e\hat e_V\;\sqrt{2}\;\;g_{V,T}(r)\,h_{V,T}(z)\;\;\left[\omega^2_{V,T}r\varepsilon\big(z^2+\bar z^2\big)\frac{\mathrm{K}_1(\varepsilon r)}{2\pi}\;+\;m_f^2\;\frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\right]\end{aligned}$$

Der Überlapp ist identisch für $\lambda \equiv +1$ und -1; wir gehen daher über von *Helizitäten* zu *Polarisationen*, mit systematisch $\lambda \equiv L, T$ für longitudinal, transversal.

Die im Quadrat des invarianten Impulstransfers $-t$ differentiellen Wirkungsquerschnitte für elastische Vektormeson-Leptoproduktion folgen damit zu, vgl. die Gln. (3.42), (3.68):

$$\frac{d\sigma_\lambda}{dt}(\tau^2) \;=\; \frac{1}{16\pi}\frac{1}{s^2}\;\left|\;\int_0^{1/2}dz\;\int_0^\infty rdr\;\;\psi^\dagger_{V(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,r)\;\;T'_{\ell p}(z,r,|\tau|)\;\right|^2 \tag{3.72}$$

für $\lambda \equiv L, T$; bzgl. $|\tau| \cong \sqrt{-t}$ vgl. Gl. (3.6). Der Überlapp der Wellenfunktionen hängt nicht ab von φ; dessen Integration bezieht sich allein auf die Amplitude $T_{\ell p}$ und ergibt deren Mittelung $T'_{\ell p}$ über die azimutalen Orientierungen des Dipols $\{z, \mathbf{r}\}$, vgl. Gl. (3.55). Aufgrund der Symmetrie des Integranden, vgl. Gl. (3.36), wird z bezogen auf das halbe Intervall.

Die Amplituden $T_{\ell p}$, $T'_{\ell p}$ sind *rein imaginär* und hängen ab von der invarianten Gesamtenergie $\sqrt{s}$ nur *kinematisch*, das heißt durch einen globalen Faktor s. Aus dem Verschwinden des Realteils folgt, daß $\frac{1}{s}T'_{\ell p}$ für $|\tau| \equiv 0$ identisch gleich ist der Funktion $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}$, dem entsprechenden totalen Wirkungsquerschnitt, vgl. Gl. (3.54) und Abb. 3.7. Aufgrund der nur kinematischen Energieabhängigkeit von $T'_{\ell p}$, nämlich durch den globalen Faktor s folgt für die differentiellen Wirkungsquerschnitte Konstanz bezüglich s, vgl. Gl. (3.72). Sie beziehen sich auf den Wert $\sqrt{s} \cong 20$ GeV, für den unsere Parameter fixiert sind, vgl. Seite 124, insbes. die Gln. (3.43), (3.44). Sie hängen ab von Q^2 über den Überlapp der Wellenfunktionen von Photon und Vektormeson und von τ^2 über die Amplitude $T'_{\ell p}$. Für diese gilt, vgl. Seite 128: $T'_{\ell p} \propto \exp -B_0\tau^2/2$ für kleine $|\tau| \cong \sqrt{-t}$, mit B_0 dem slope-Parameter.

Experimentell sind diese Wirkungsquerschnitte schwierig zu trennen bezüglich Polarisationen. Daten in Abhängigkeit von τ^2 werden angegeben nur für

$$\frac{d\sigma}{dt} \;=\; \epsilon\,\frac{d\sigma_L}{dt} \;+\; \frac{d\sigma_T}{dt} \tag{3.73}$$

meist für festes Q^2. Diese Daten sind rar. Die meisten und präzisere Daten finden sich für die τ^2-integrierten Wirkungsquerschnitte

$$\sigma \;=\; \epsilon\,\sigma_L \;+\; \sigma_T \tag{3.74}$$

als Funktion von Q^2.

Dabei ist in den Gln. (3.73), (3.74) mit ϵ die Rate longitudinal polarisierter Photonen bezeichnet. Sie hängt ab vom Streuwinkel θ_l des Leptons, von dem das (virtuelle) Photon emittiert wird, und von dessen Energie ν; so gilt

$$\epsilon \;=\; \left[\,1+\left[1+\nu^2/Q^2\right]\cdot 2\tan^2(\theta_l/2)\,\right]^{-1} \tag{3.75}$$

im Ruhesystem des Protons.

In die Herleitung unserer T-Amplitude T_{hh} ist die Annahme eingegangen, daß im Limes $s\to\infty$ Helizitätserhaltung im s-Kanal gilt, vgl. die Gln. (2.101), (2.101′) und (2.102), (2.102′). Ihre Gültigkeit kann untersucht werden in Zerfällen von Vektormesonen. Umgekehrt können wir unter ihrer Annahme berechnen

$$R_{LT} \;=\; \sigma_L/\sigma_T \tag{3.76}$$

in Abhängigkeit von Q^2, das heißt das Verhältnis der integrierten Wirkungsquerschnitts bezüglich longitudinaler und transversaler Polarisation als Funktion der Photon-Virtualität.

3.4 Numerische Analyse

In diesem Abschnitt analysieren wir detailiert die numerischen Konsequenzen, die sich aus diesen Formeln ergeben für die observablen der Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$. Wir stellen dieser speziellen Analyse voran die allgemeine Diskussion dieser Formeln.

Zunächst bezieht sich unsere Analyse zu einem wichtigen Teil auf die Abhängigkeit von der Photon-Virtualität in dem betrachteten Bereich von $Q^2 = 1-2$ bis 10 GeV^2. Wir diskutieren daher qualitativ die allgemeine Q^2-Abhängigkeit der differentiellen Wirkungsquerschnitte für longitudinale und transversale Polarisation. Wir betrachten Gl. (3.72) für $\lambda\equiv L,T$ mithilfe der Formeln für den entsprechenden Überlapp der Wellenfunktionen, die Gln. (3.71), (3.71′). Die T-Amplitude $T'_{\ell p}(z,\mathbf{r};|\tau|)$ für Loop(Dipol)-Proton-Streuung zeigt Potenzverhalten bezüglich r und fällt für kleines $|\tau|\cong\sqrt{-t}$ exponentiell ab mit τ^2. Sie hängt nur marginal ab von z, vgl. Abb. 3.7.[3.17] Für festes $|\tau|$ gilt $T'_{\ell p}\propto r^{2n}$, wobei $n\equiv 1$ analytisch für verschwindendes r langsam kleiner wird für $r\gtrsim a$, vgl. Abb. 3.7.[3.17] Wir interessieren uns dafür für welche Werte von r, abhängig von Q^2, die Amplitude $T'_{\ell p}$ effektiv auszuwerten ist. Da die Abhängigkeit von $T'_{\ell p}$ von z nur sehr schwach ist, vernachlässigen wir sie für den Moment komplett, so daß sich die z-Integration im differentiellen Wirkungsquerschnitt bezieht nur auf den Überlapp der Wellenfunktionen von Photon und Vektormeson. Dieser bestimmt dann die effektiven Dipol-Ausdehnungen und diese die effektive Potenz n' in $T'_{\ell p}\propto r^{2n'}$. Durch Reskalieren $r\to Qr$ in der Amplitude $T'_{\ell p}$ wird diese dimensionslos und herausprojiziert entsprechende Faktoren von Q; diese zusammen mit dem Q^2-Verhalten des Überlapps bestimmen wesentlich das Q^2-Verhalten des Wirkungsquerschnitts. Wir unterscheiden auf diese Weise zwei verschiedene Bereich: Für kleine Q^2 ist die effektive Ausdehnung dominiert

[3.17] Bzgl. der Verknüpfung mit der dort aufgetragenen Funktion $\sigma^{\rm tot}_{\ell p}(z,r^2)$ vgl. die Diskussion zu Gl. (3.72).

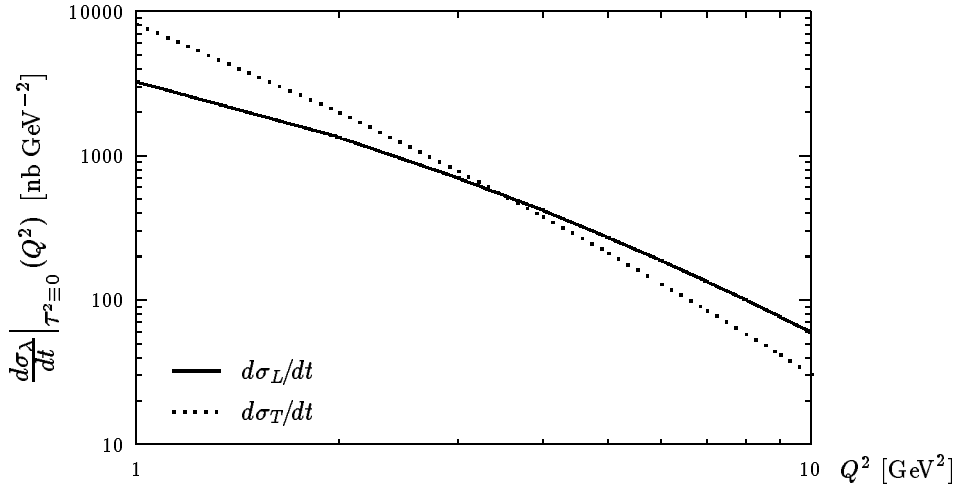


Abbildung 3.8: Q^2-Verhalten von $d\sigma_\lambda/dt(\tau^2 \equiv 0)$ für ρ-Produktion. Die durchgezogene Linie bezieht sich auf longitudinale Polarisation, die gepunktete auf transversale. Die effektive Potenz des Abfalls mit Q steigt an um zwei Einheiten im dargestellten Bereich von Q^2.

durch die Vektormeson-Wellenfunktion, wohingegen sie für große Q^2 gegeben ist allein durch die des Photons; wir finden asymptotisch:

$$d\sigma_L \propto Q^2 \qquad d\sigma_T = \text{konst.} \qquad \text{für } Q^2 \to 0 \tag{3.77}$$

$$d\sigma_L \propto Q^{-6} \qquad d\sigma_T \propto Q^{-8} \qquad \text{für } Q^2 \to \infty \tag{3.77'}$$

Diese Asymptotik der Wirkungsquerschnitte hängt stark ab von dem zugrundegelegten Modell. Die meisten gegenwärtigen Experimente beziehen sich auf Werte von Q^2, die diese Asymptotik großer Q^2 noch nicht erreichen. Auch der von uns betrachtete Bereich von $Q^2 = 1\text{–}2$ bis 10 GeV^2 ist zu beziehen weder auf die Asymptotik kleiner noch der großer Q^2: Abbildung 3.8 zeigt effektiv log $d\sigma_\lambda/dt$, den Logarithmus des differentiellen Wirkungsquerschnitts für das ρ-Produktion bei $\tau \equiv 0$ in Gegenüberstellung für longitudinale und transversale Polarisation $\lambda \equiv L, T$. Die effektive Potenz m' für den Abfall log $d\sigma_\lambda/dt \propto Q^{-m'}$ ist ungefähr 2.5 für longitudinale und 4 für transversale Polarisation bei $Q^2 \equiv 1$ GeV^2. Diese Potenz steigt an auf ungefähr 4.5 beziehungsweise 6 bei $Q^2 \equiv 10$ GeV^2. Die Asymptotik großer Q^2 beginnt also erst jenseits dieses Wertes, wir erwarten im Bereich $Q^2 = 10\text{–}100$ GeV^2.

In Abbildung 3.9 illustrieren wir die Bedeutung der transversalen Ausdehnung des Photons für die Wirkungsquerschnitte. Wir führen als obere Grenze in der r-Integration des differentiellen Wirkungsquerschnitts nach Gl. (3.72) einen *Cut-Off* r_{cut} ein, das heißt wir beschränken die transversale Ausdehnung der beitragenden Dipole von Hand auf Werte $r \leq r_{\text{cut}}$. Wir normieren diese Größe auf den vollen Wert mit entferntem Cut-Off, formal $r_{\text{cut}} = \infty$, und tragen ihn auf als Funktion von r_{cut}. Wie erwartet ist die Quark-Antiquark-Lichtkegelwellenfunktion des Photons transversal ausgedehnter für transversale als für longitudinale Polarisation. So rührt für $Q^2 \equiv 4$ GeV^2 bei transversaler Polarisation mehr als 50% des Wirkungsquerschnitts von Dipolen transversal größer als 1 fm, wohingegen bei longitudinaler Polarisation dies nur noch 15% sind. Dies ist Konsequenz dessen, daß die transversale Wellenfunktion fast flach bezüglich z ist und ihre Ausdehnung grob gegeben ist als $r \sim \varepsilon^{-1}$; aufgrund der Proportionalität von ε für große Photon-Virtualitäten zu $\sqrt{z\bar{z}Q^2}$ und nicht zu $\sqrt{Q^2}$, vgl. Gl. (3.59), führen große Q^2 nicht notwendig zu Dominanz kleiner Dipole, sondern treten für die z-Endpunkte weiterhin große Dipole auf.

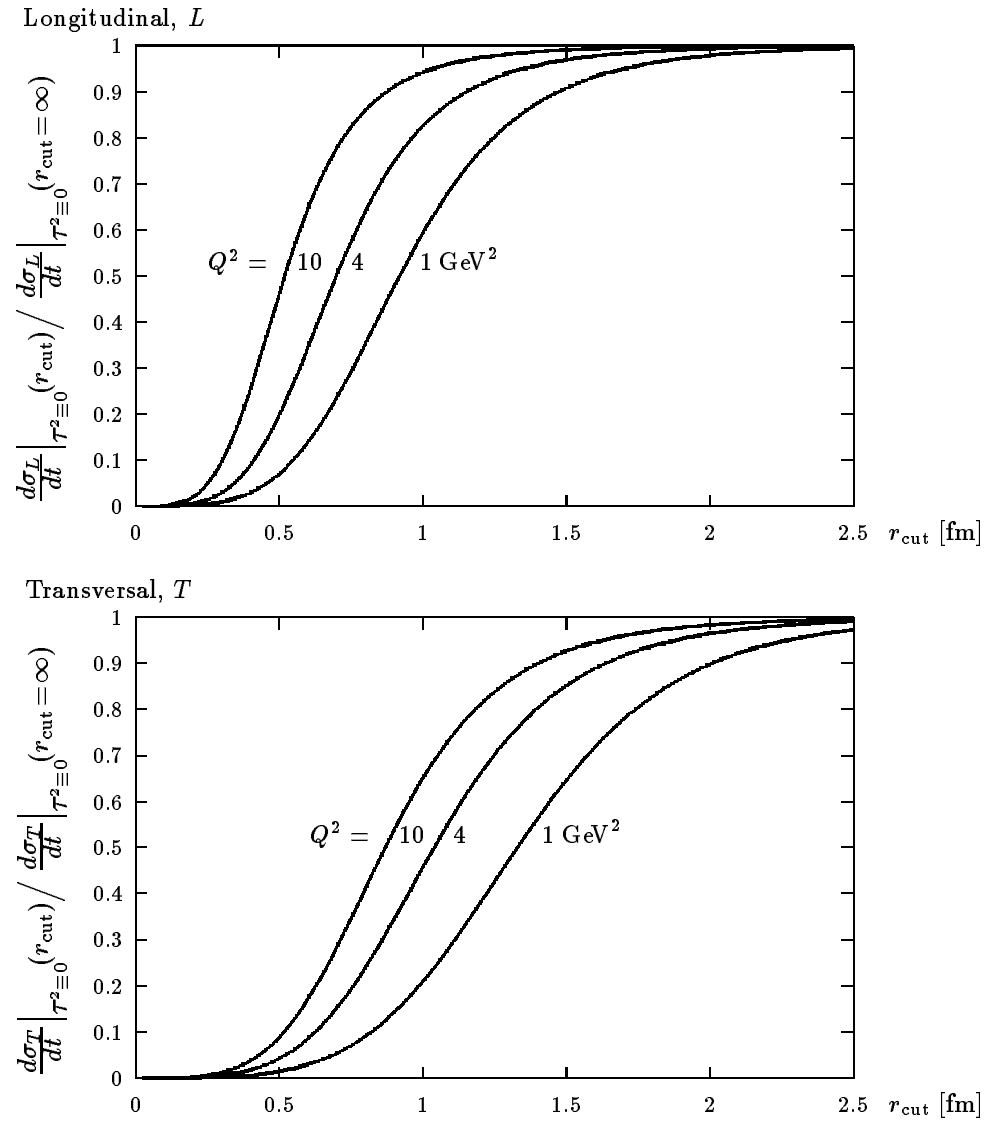


Abbildung 3.9: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ρ-Produktion bei $|\tau| \equiv 0$ als Funktion des Cut-off $r_{\rm cut}$ für die transversale Ausdehnung der Dipole, normiert auf den vollen Wert. Die Kurven beziehen sich auf $Q^2 \equiv 1$, 4, 10 GeV^2, in (a) auf longitudinale, in (b) auf transversale Polarisation. Mit wachsendem Q^2 dominieren kleinere Dipole. Der Wirkungsquerschnitt ist erst später aufintegriert für transversale Polarisation aufgrund des z-Endpunkte-Beitrags.

Unsere Resultate hängen andererseits ab von den Lichtkegelwellenfunktionen der Vektormesonen. Noch ohne ihre funktionale Form zu verändern zeigt sich dies durch Variation des (Oszillator)Parameters $\omega_{V,\lambda}$. Wir halten den Wert der Vektormeson-Wellenfunktion am Ursprung konstant. Ein um 5% verkleinerter Wert von $\omega_{V,\lambda}$ ergibt eine Erhöhung um ungefähr 20% für den Wirkungsquerschnitt bei $Q^2 \equiv 1\,\text{GeV}^2$. Dieser Effekt verringert sich auf 3% bei $Q^2 \equiv 10\,\text{GeV}^2$. Dies ist Konsequenz dessen, daß der kleine Dipol in der Photon-Wellenfunktion bei großen Virtualitten Q nur einen transversal engen Bereich der Vektormeson-Wellenfunktion um deren Ursprung testet.
Eine weitere Möglichkeit die Abhängigkeit von der Lichtkegelwellenfunktion des Vektorme-

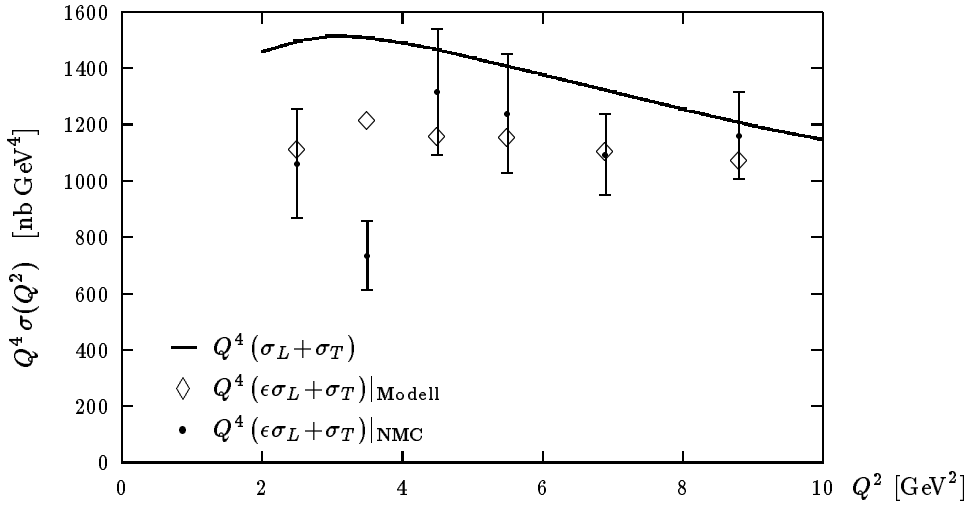


Abbildung 3.10: Skalierter integrierte Wirkungsquerschnitt $Q^4\,\sigma(Q^2)$ für ρ-Produktion. Als Punkte sind aufgetragen die NMC-Daten, vgl. Ref. [156], als Rauten, unter Verwendung der entsprechenden NMC-Polarisationsrate $\epsilon(Q^2)$, unser Postulat für $Q^4\,(\epsilon\sigma_L+\sigma_T)$.

sons zu untersuchen ist, ihre funktionale Abhängigkeit zu verändern. So führt die Ersetzung $\sqrt{z\bar{z}} \to z\bar{z}\sqrt{z\bar{z}}$ in der Funktion $h_{V,\lambda}(z)$, vgl. Gl. (3.64), zu einer schärferen Konzentrierung der Wellenfunktionen hin zu mittleren z. Dies führt zu einer Verringerung des Wirkungsquerschnitts um ungefähr 30% im gesamten Q^2-Bereich. Wie erwartet aufgrund der unterschiedlichen Bedeutung des z-Endpunkte-Beitrags ist der Effekt ausgeprägter für transversale als für longitudinale Polarisation.

3.4.1 Leptoproduktion von $\rho(770)$, $\omega(782)$ und $\phi(1020)$

Wir vergleichen unsere Resultate mit den experimentellen Daten im Bereich $Q^2 = 1$–10 GeV^2. Wir betonen vorab, daß unser Modell im Rahmen des MSV keine neuen Parameter einführt, die in irgendeinem Sinne bezeichnet werden könnten als spezifisch für Photo- und Leptoproduktion. Die Parameter, die unserem Zugang auf Niveau der Quark-Gluon-Wechselwirkung zugrundeliegen, sind fixiert in Konsistenz mit Quark-Confinement in der Nieder- und elastischer Proton-Proton-Streuung in der Hochenergiephysik, vgl. Seite 124.

ρ-Produktion. EMC und NMC beobachten eine Skalierung des integrierten Wirkungsquerschnitts ungefähr wie $1/Q^4$; wir reproduzieren dieses Verhalten sehr gut. In Abbildung 3.10 sind aufgetragen die NMC-Daten für Deuteron, vgl. Ref. [156], und unser Postulat für $Q^4\,(\sigma_L+\sigma_T)$. Diese Größe ist nicht gleich der gemessenen, da die NMC-Rate longitudinal polarisierter Photonen ungleich Eins ist: $\epsilon \neq 1$, vgl. Gl. (3.74); wir tragen daher über den NMC-Werten für Q^2 die Größe $Q^4(\epsilon\sigma_L+\sigma_T)$ auf, indem wir deren Werte für $\epsilon(Q^2)$ verwenden. Wir verweisen auch auf Tabelle 4.3 auf Seite 189, die Daten von EMC und NMC für integrierte elastische Wirkungsquerschnitte unseren Postulaten gegenüberstellt.

In unserem Zugang ist das Verhalten des Wirkungsquerschnitts $\sigma = (\sigma_L+\sigma_T)$ ungefähr wie $1/Q^4$ Resultat der Kombination des unterschiedlichen Verhaltens von σ_L und σ_T, vgl. die Gln. (3.77), (3.77′), das seinerseits Resultat ist des subtilen Wechselspiels zwischen der Abhängigkeit der Dipol-Proton-Amplitude $T'_{\ell p}$ von der transversalen Ausdehnung des Dipols mit dem effektiven Überlapp der Photon- und Vektormeson-Wellenfunktion. Dieser

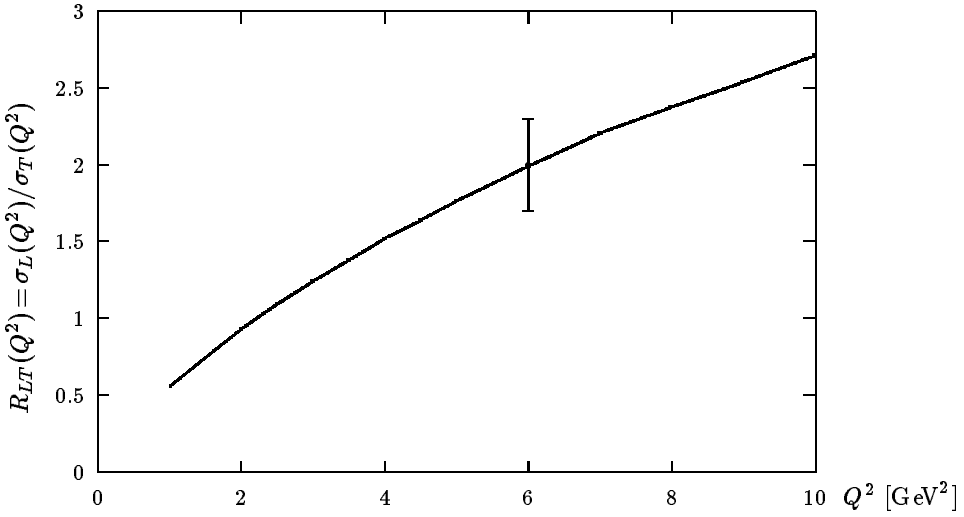


Abbildung 3.11: Integrierter elastischer Wirkungsquerschnitt für ρ-Produktion, Verhältnis longitudinale zu transversale Polarisation als Funktion von Q^2. Originalabbildung aus unserer Veröffentlichung Ref. [65]: zum Zeitpunkt ihres Entstehens war der aufgetragene NMC-Datenpunkt, vgl. Ref. [156], der einzige verläßliche Wert im betrachteten Q^2-Bereich; unsere Analyse war in guter Übereinstimmung mit weiteren Daten, doch lagen diese weit oberhalb des Q^2-Bereichs von $10-20$ GeV^2 oder waren mit großen Fehlern behaftet. Bzgl. einer aktuellen Gegenüberstellung vgl. Abb. 4.15 auf Seite 191.

Ursprung differiert wesentlich von der Dynamik, die auftritt bei Quark-Quark-Streuung, die aber dennoch zu ähnlichen Resultaten führt. Wie bereits diskutiert, ist demgegenüber das asymptotische Verhalten für große Q^2 beherrscht von der Ausdehnung der Photon-inhärenten Dipolen und daher weitgehend unabhängig von der funktionalen Form der Vektormeson-Wellenfunktion und dem Modell, wie diese Dipole wechselwirken mit dem Proton.

Ein möglicher Weg beide Zugänge zu unterscheiden: Quark-Quark-Wechselwirkung von der String-String-Wechselwirkung des MSV, besteht in der präzisen Messung als Funktion von Q^2 des Verhältnisses des integrierten elastischen Wirkungsquerschnitts für longitudinale zu dem für transversale Polarisation: $R_{LT} = \sigma_L/\sigma_T$, vgl. Gl. (3.76). Unser Postulat für $R_{LT}(Q^2)$ für ρ-Produktion ist aufgetragen in Abbildung 3.11. Für große Q^2 wird asymptotisch ein Verhalten erwartet wie $R_{LT} \propto Q^2$, vgl. die Gln. (3.77), (3.77′); dieses Verhalten ist in dem betrachteten Q^2-Bereich von $1-2$ bis 10 GeV^2 noch nicht erreicht, wir stellen ein Ansteigen fest weniger stark als Q^2. In diesem Bereich mittlerer Q^2 erwarten wir signifikante Diskrepanz mit den konkurrierenden Modellen, die basieren auf bloßer Quark-Quark-Wechselwirkung.

Abbildung 3.11 ist die Originalabbildung aus unserer Veröffentlichung Ref. [65]. Inzwischen sind mehr verlässliche experimentelle Werte bekannt als der dort eingetragene NMC-Datenpunkt, vgl. Ref. [156]. Im Rahmen der Erweiterung unseres Zugangs im folgenden Kapitel werden auch kleinere bis verschwindende Virtualitäten zugänglich, wobei unsere Vorhersage für $Q^2 \gtrsim 1$ GeV^2 unverändert bestehen bleiben. Mit Abbildung 4.15 auf Seite 191 geben wir eine aktuelle Gegenüberstellung mit dem Experiment an. Wir finden dokumentieren dort in doppeltlogarithmischer Auftragung sehr gute Übereinstimmung im gesamten Bereich von $Q^2 = 20$ GeV^2 bis hinunter zu den kleinsten bekannten experimentellen Datenpunkten. Wir erwarten, daß zukünftige Experimente das bereits angedeutete

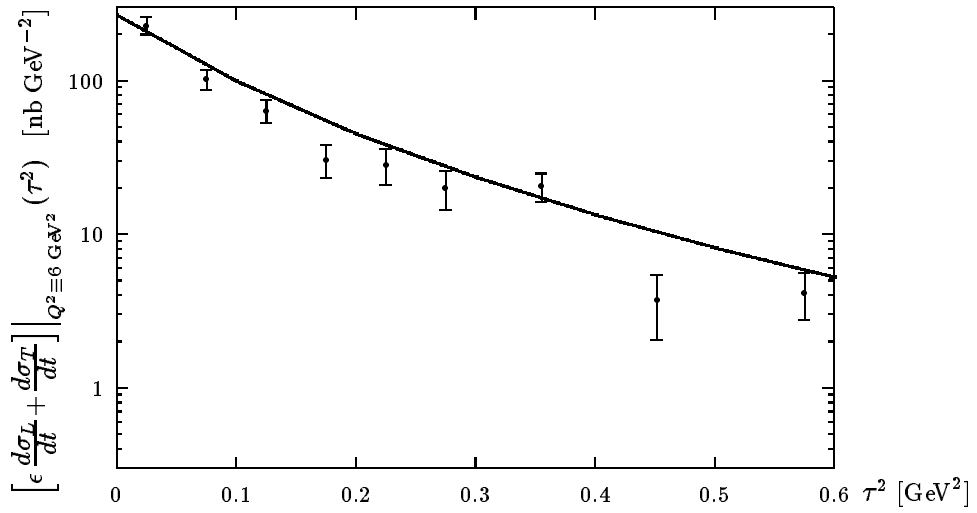


Abbildung 3.12: Differentieller Wirkungsquerschnitt $\epsilon_{\mathrm{NMC}} d\sigma_L/dt + d\sigma_T/dt$ für ρ-Produktion bei $Q^2 \equiv 6$ GeV^2 als Funktion von τ^2. Die Daten sind entnommen Ref. [156], vgl. Tabl. 4.3.

steilere Abfallen hin zu $R_{LT}(Q^2 \equiv 0) = 0$, vgl. die Gln. (3.77), (3.77′), mit kleineren Q^2 noch deutlicher herauspräparieren werden.

Eine weitere Möglichkeit zum Test der Wechselwirkung auf Quark-Gluon-Niveau ist die Untersuchung des differentiellen Wirkungsquerschnitts als Funktionen von $\tau^2 \cong -t$, vgl. Gl. (3.6). In Abbildung 3.12 tragen wir auf, als Funktion von τ^2, unser Resultat für die Größe $\epsilon d\sigma_L/dt + d\sigma_T/dt$ für ρ-Produktion bei $Q^2 \equiv 6$ GeV^2. Wir stellen diesem gegenüber die NMC-Datenpunkte für ρ-Produktion elastisch an Deuteron außerhalb der Region, in der kohärente Produktion stattfindet, vgl. Ref. [156]. Der Abfall ist nicht rein exponentiell, sondern gegeben durch eine konkave Kurve. Wir finden $\epsilon d\sigma_L/dt + d\sigma_T/dt \propto \exp -B(\tau^2)\tau^2/2$ mit $B(0) \equiv B_0$, dem in Gl. (3.42) definierten slope-Parameter für verschwindenden invarianten Impulstransfer und $B(\tau^2)$ langsam abfallend mit τ^2 für $\tau^2 \gtrsim 0.1$ GeV^2. Dieses Verhalten des effektiven slope-Parameters $B(\tau^2)$ ist modellabhängig und ist Konsequenz des MSV-spezifischen String-String-Mechanismus inhärent der Loop(Dipol)-Proton-Amplitude $T_{\ell p}$, vgl. die Refn. [63, 124]. Da die in τ^2 differentiellen Wirkungsquerschnitte schwer zu messen sind, existieren gegenwärtig kaum experimentelle Daten, aus denen $B(\tau^2)$ extrahiert werden könnte; wir müssen uns daher bezüglich einer Konfrontation unseres Postulats mit dem Experiment begnügen mit dieser Abbildung.

In Hinblick auf zukünftige Experimente zeigen wir in Abbildung 3.13 unsere Vorhersage für die differentiellen Wirkungsquerschnitte als Funktion von τ^2 für longitudinale und transversale Polarisation getrennt; wir wählen $Q^2 \equiv 2$ und 10 GeV^2 als einen niedrigeren und einen höheren Wert unseres Q^2-Bereichs. Wir finden wieder konkaves Abfallverhalten mit τ^2. Der Abfall für kleine τ^2 ist jedoch steiler für transversale als für longitudinale Polarisation; dieser Effekt wird schwächer für anwachsendes τ^2. Das heißt der effektive slope-Parameter B_λ ist für transversale Polarisation größer als für longitudinale: $B_T > B_L$ für festes τ^2, und zwar umso mehr, je kleiner τ^2 ist. Wir erwarten dies aus folgendem Grund: Je kleiner τ^2, desto mehr sollte B_λ in der Weise von den transversalen Ausdehnung der streuenden Hadronen bestimmt sein wie B_0 nach Gl. (3.56). Andererseits ist die transversale Ausdehnung der effektiven Dipole größer für transversale als für longitudinale Polarisation.

Wir vergleichen die Kurven in Abbildung 3.13 bezüglich fester Polarisation aber unterschiedlichem Q^2. Sie verlaufen nicht ganz parallel und dokumentieren eine nichttriviale

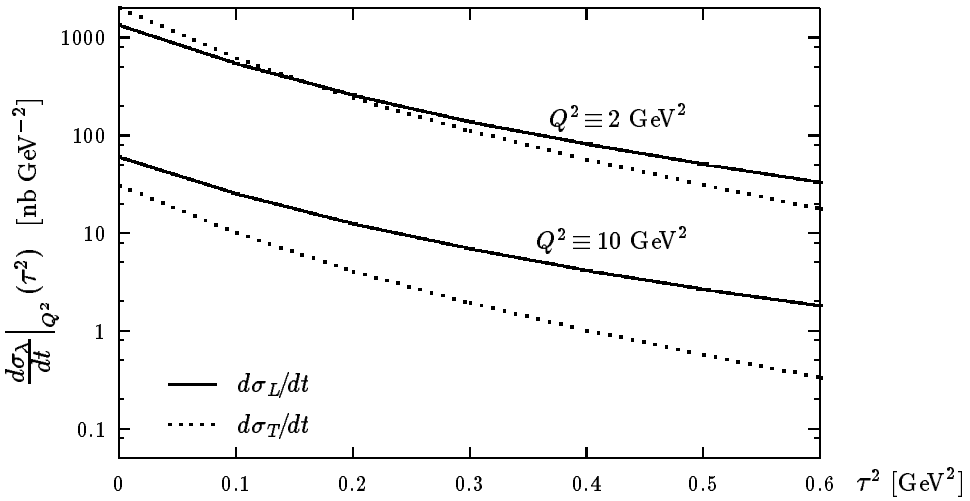


Abbildung 3.13: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ρ-Produktion als Funktion von τ^2 für festes $Q^2 \equiv 2$ und 10 GeV^2; die durchgezogene Linie bezieht sich auf longitudinale Polarisation, die gepunktete auf transversale.

Abhängigkeit des effektiven slope-Parameters auch von Q^2. Diese rührt daher, daß die Photon-Wellenfunktion mit wachsendem Q^2 langsam transversal kleiner wird und so einen transversal kleineren Ausschnitt der Vektormeson-Wellenfunktion testet.

Zusammenfassend sehen wir gute Signatur, in einer präzisen Messung der differentiellen Wirkungsquerschnitte als Funktion von τ^2 zu unterscheiden zwischen unserem Zugang und konkurrierenden. Im folgenden Kapitel führen wir in weiterem Rahmen unsere Diskussion der ρ-Produktion fort; bezüglich differentieller Wirkungsquerschnitte verweisen wir auf Abbildung 4.16(a),(b) auf Seite 193 und die Tabellen H.1-H.9 in Anhang H.

ω-Produktion. Das ω-Meson unterscheidet sich von dem ρ-Meson im wesentlichen durch seinen Flavour-Gehalt, genauer: seinen Isospin, vgl. Gl. (3.61) bzw. Tab. 3.1. Wir erwarten daher, daß die Lichtkegelwellenfunktionen beider Teilchen sehr ähnlich sind. Da diese proportional der entsprechenden Kopplung f_V an den elektromagnetischen Strom sind, sollte sich das Verhältnis von Wirkungsquerschnitten verhalten wie, vgl. Tabl. 3.1:

$$f^2_{\omega(782)} \Big/ f^2_{\rho(770)} \cong 9.01/\,100 \tag{3.78}$$

Dies beobachten wir in der Tat bis auf etwa 2 %, vgl. Tabl. 4.4 auf Seite 190, Fußn. *e*. Die theoretische Diskussion bleibt daher unverändert gegenüber dem ρ-Meson. Andererseits liegt nur sehr begrenzt experimentelles Datenmaterial vor, mit dem wir unsere Vorhersagen konfrontieren könnten, so daß wir unmittelbar übergehen zu den schwereren Vektormesonen.

Unserer Analyse liegen zugrunde für die laufenden Quarkmassen Zahlenwerte, wie angegeben in Tabelle 3.1, Fußnote *a*: Die up- und down-Massen werden identisch Null gesetzt: $m_u = m_d = 0$, die strange-Masse beträgt $m_s = 0.15$ GeV, die charm-Masse $m_c = 1.3$ GeV. Das ϕ-Meson konstituiert sich also aus Quarks des ersten Flavours mit nichtverschwindender Masse; diese hat weitreichende Konsequenzen. Wir diskutieren zunächt allgemein die Konsequenzen einer *nichtverschwindenden* Quarkmasse. Diese Diskussion bezieht sich bereits auf die unmittelbar folgende Analyse des ϕ-Mesons. Sie wird fortgesetzt im nächsten Unterabschnitt in der Analyse des J/ψ-Mesons, für den Fall, daß diese Quarkmasse *groß* ist.

Es tritt zunächst ein zusätzlicher Term auf im Überlapp der Lichtkegelwellenfunktionen von Photon und Vektormeson, der bislang identisch Null war, vgl. den Term proportional K_0 in Gl. (3.71′). Bereits das Photon allein hängt ab von der Masse der Quarkkonstituenten, in die es sich aufspaltet; das Epsilon, das deren transversale Separation, das heißt die transversale Ausdehnung der Photon-Wellenfunktion determiniert, hängt explizit ab von der Quarkmasse: $\varepsilon = \sqrt{z\bar{z}Q^2 + m_f^2}$, vgl. Gl. (3.59). Andererseits nimmt auch auf Seiten des Vektormesons dessen Quark-Gehalt Einfluß: zum einen auf die transversale Ausdehnung der Vektormeson-Wellenfunktion und zum anderen auf die Verteilung des Parameters z, das heißt auf die Aufteilung des Lichtkegel-Gesamtimpulses auf Quark und Antiquark. Der Einfluß auf die transversale Ausdehnung ist qualitativ gut verstanden und auch quantitativ kontrollierbar. Hingegen bezüglich des Einflusses auf die z-Verteilung $h_{V,\lambda}(z)$, vgl. Gl. (3.64), ist nur bekannt, daß bei größerer Quarkmasse die Verteilung mehr gepeakt sein sollte um den zentralen Wert $z = 1/2$, der den Lichtkegelimpuls gleichverteilt.

ϕ-Produktion. So wird für die Lichtkegelwellenfunktion des ϕ-Mesons eine transversal kleinere Ausdehnung erwartet. Dies zusammen mit der stärkeren Unterdrückung der Endpunkte des z-Intervalls läßt erwarten, daß vor allem bei kleinen Q^2 und stärker für longitudinale Polarisation als für transversale die Wirkungsquerschnitte gegenüber denen des ρ-Mesons mehr reduziert sein sollten als durch den Flavour-Faktor, vgl. Tabl. 3.1:

$$f^2_{\phi(1020)} \Big/ f^2_{\rho(770)} \cong 26.9/\,100 \tag{3.79}$$

Ein ähnlicher Effekt wird im Rahmen des MSV beobachtet im Verhältnis von Pion-Proton- zu Kaon-Proton-Streuung, vgl. hierzu Ref. [63]. Der Effekt sollte sich verringern mit steigender Virtualität des Photons, da für steigende Werte von Q^2 tendenziell die Photon-Wellenfunktion transversal kleiner wird und nur einen immer engeren Bereich der Vektormesonwellenfunktion um deren Ursprung testet: Die Wirkungsquerschnitte sollten weniger abhängen von der transversalen Ausdehnung des produzierten Vektormesons als von der des Photons. Es gibt Hinweise dafür, daß dieser Effekt in den ZEUS-Daten beobachtet wird, vgl. Ref. [239]. Weiter könnte eine veränderte z-Verteilung $h_{V,\lambda}(z)$ des ϕ- gegenüber dem ρ-Vektormeson die Wirkungsquerschnitte beeinflussen unabhängig von Q^2.

Wir legen unserer Berechnung für das ϕ-Meson dieselbe funktionale Form zugrunde wie dem ρ-Meson. Wir reproduzieren damit die Q^2-Abhängigkeit des integrierten Wirkungsquerschnitts wie $1/Q^4$, wie sie von NMC beobachtet wird. Unsere Vorhersage ist allerdings absolut um einen Faktor Zwei zu groß; vgl. Abbildun 3.14. Die ϕ-Lichtkegelwellenfunktion sollte stärker gepeakt sein um $z = 1/2$. Dies kann erreicht werden durch einen zusätzlichen Faktor $z\bar{z}$ in ihrer Verteilung $h_{\phi,\lambda}$, für $\lambda \equiv L, T$. Wir haben diskutiert, daß dies eine Verringerung der Wirkungsquerschnitte mit sich bringt von ungefähr 30% unabhängig von Q^2, vgl. oben auf Seite 139. Dieser Effekt geht in die richtige Richtung und kann verstärkt durch entsprechend stärkere Akzentuierung der mittleren z-Werte. Es liegt aber nicht in unsere Absicht durch *fine tuning* Konsistenz mit allen Observablen zu erreichen. Zumal gerade die zu Abbildung 3.14 korrespondierende Auftragung der NMC-Daten für ρ-Produktion, vgl. Abb. 3.10, suggeriert, daß diese mit größeren Fehlern behaftet sein könnten, als ihre Fehlerbalken angeben.

Für das Verhältnis der integrierten Wirkungsquerschnitte für longitudinale und transversale Polarisation finden wir einen ähnlichen Anstieg wie für das ρ-Meson; sein absoluter Wert liegt ungefähr 20% darunter. Die t-Abhängigkeit der differentiellen Wirkungsquerschnitte zeigt ein ähnliches Muster wie die für ρ-Produktion, wobei der $|\tau| \equiv 0$-Diffraktions-Peak etwas breiter ausläuft.

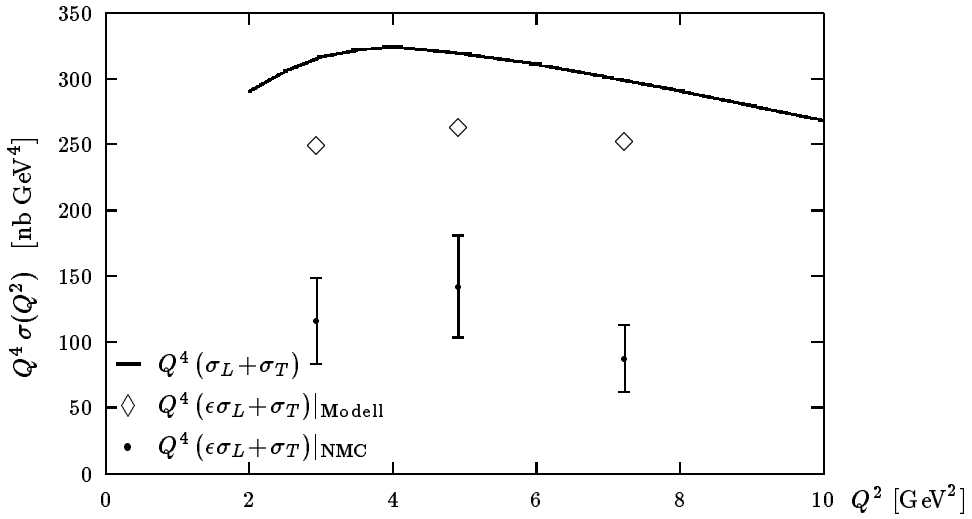


Abbildung 3.14: Skalierter integrierter Wirkungsquerschnitt für ϕ-Produktion konfrontiert mit den experimentellen Daten von NMC, vgl. Ref. [156]. Wir sehen die Ursache der Diskrepanz in der funktionalen Form der ϕ-Lichtkegelwellenfunktion.

3.4.2 Photo- und Leptoproduktion von $J/\psi(3097)$

Eine nichtverschwindende Quarkmasse führt zu drastischen Veränderungen in den Lichtkegelwellenfunktionen von Photon und Vektormeson und folglich in deren Überlapp, vgl. die Diskussion unmittelbar vor der Analyse des ϕ-Mesons auf Seite 143. Ist die Quarkmasse zusätzlich *groß*, so gehen die veränderungen erheblich weiter. Zunächst ist zu beachten, daß unser Zugang annimmt, daß die Quarks auf (nahezu) lichtartigen Trajektorien propagieren. Dies ist erst der Fall für Energien weit oberhalb $2m_f$. Daher sind für Leptoproduktion schwererer Vektormesonen wie des $J/\psi(3097)$ größere invariante Schwerpunktenergien $\sqrt{s}$ notwendig als die bisher diskutierten 10 GeV. Bei entsprechend höheren Energien wird wiederum eine nichttriviale s-Abhängigkeit beobachtet, die unser Modell nicht berücksichtigt; vgl. diesbzgl. Ref. [181]. Andererseits stellt die große Quarkmasse eine *harte Skala* dar, die es ermöglicht innerhalb unserer perturbativen Behandlung des Photons auch kleinere Q^2 zu betrachten bis hin zu Photoproduktion: $Q^2 \equiv 0$. Weiter induziert die Differenz $\delta t = -M_p^2(Q^2+M_V^2)^2/s^2$ von $\tau^2 \cong -t+\delta t$ und $-t$, vgl. Gl. (3.6), formal eine untere Schranke in der τ-Phasenraumintegration und führt für Wirkungsquerschnitte zu dem zusätzlichen Faktor $\exp B\delta t$. Bezogen auf J/ψ-Produktion und den von uns zu betrachtenden Energiebereich von $\sqrt{s} \gtrsim 15$ GeV finden wir, daß dieser Effekt erst für große $Q^2 \gtrsim 10$ GeV^2 deutlich wird. So ergibt $\sqrt{s}=15$ GeV, $Q^2 \equiv 10$ GeV^2 und der slope-Parameter im typischen Bereich $B=5-10$ GeV^{-2} explizit $\exp B\delta t = 0.97-0.94$. Wir werden diesen Faktor im folgenden vernachlässigen.

Eine große Quarkmasse hat ferner Konsequenzen für das Asymptotische Verhalten der Wirkungsquerschnitte für kleine Abstände im Sinne großer Q^2. Wir untersuchen die Modifikationen gegenüber Gl. (3.77′), die der zusätzliche Massenterm im Überlapp von Photon- und J/ψ-Lichtkegelwellenfunktion generiert, vgl. die Gln. (3.71), (3.71′). Wir nehmen dazu für den Moment an, die z-Verteilung sei nichtrelativistisch, das heißt $h_{J/\psi,\lambda}(z) \propto \delta(z-1/2)$ für $\lambda \equiv L,T$, vgl. Gl. (3.64), und für Konsistenz $m_c = M_{J/\psi}/2$. Wir betrachten so große Q^2, daß das Epsilon der Photon-Wellenfunktion $\varepsilon^2 = m_f^2 + z\bar{z}Q^2 = (Q^2+M_{J/\psi}^2)/4$ hinreichend groß

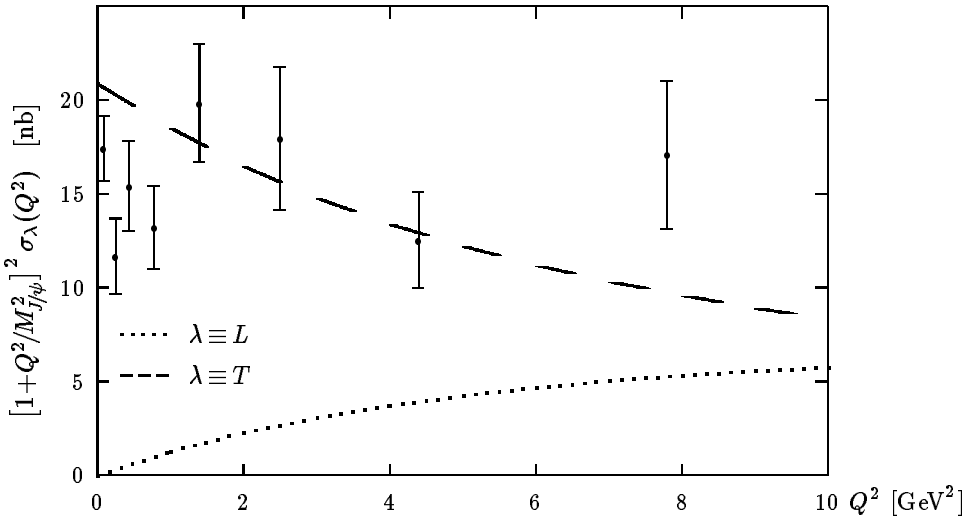


Abbildung 3.15: Skalierter integrierter Wirkungsquerschnitt $[1+Q^2/M^2_{J/\psi}]^2\,\sigma_\lambda(Q^2)$ als Funktion von Q^2: abweichend zu vorherigen Abbildungen bezieht sich die gepunktete Kurve auf longitudinale, die (fast) durchgezogene auf transversale. Um mit den aufgetragenen EMC-Daten, vgl. Ref. [69], zu vergleichen, sind unsere Kurven entsprechend $\epsilon\sigma_L+\sigma_T$ zu addieren, mit $\epsilon \cong 0.7$ der gemessenen EMC-Polarisationsrate.

ist, um $g_{J/\psi,\lambda}(r) = \exp\{-\omega^2_{J/\psi,\lambda}\, r^2/2\} \cong 1$ für $\lambda \equiv L, T$, vgl. Gl. (3.63), approximieren zu können; dann gilt $T'_{\ell p}(z \equiv 1/2, r, |\tau| \equiv 0) \cong i s\, C\, r^2$, mit $C \cong 4.3$, und wir erhalten:

$$\left.\frac{d\sigma_L}{dt}\right|_{\tau^2\equiv 0}(Q^2) \underset{Q^2\to\infty}{\cong} \alpha_{\rm em}\cdot\left[8 f_{J/\psi} C\right]^2 \frac{Q^2}{(Q^2+M^2_{J/\psi})^4} \tag{3.80}$$

$$\left.\frac{d\sigma_T}{dt}\right|_{\tau^2\equiv 0}(Q^2) \underset{Q^2\to\infty}{\cong} \alpha_{\rm em}\cdot\left[8 f_{J/\psi} C\right]^2 \frac{M^2_{J/\psi}}{(Q^2+M^2_{J/\psi})^4} \left[\frac{M^2_{J/\psi}+8\omega^2_{J/\psi,T}}{M^2_{J/\psi}+2\omega^2_{J/\psi,T}}\right]^2 \tag{3.80'}$$

Zunächst zeigen diese Ausdrücke, daß die relevante Skala, mit der die J/ψ-Produktionsquerschnitte abfallen $Q^2+M^2_{J/\psi}$ ist und nicht Q^2; erst für $Q^2 \gg M^2_{J/\psi}$ verliert dieser Unterschied an Relevanz und laufen die Ausdrücke dieser Gleichungen in die Asymptotik von Gl. (3.77′). Wie für den Fall leichter Quarks dominiert für große Q^2 der Wirkungsquerschnitt für longitudinale Polarisation über den für transversale; mit dem Zahlenwert $\omega_{J/\psi,T} \cong 0.57$ GeV, vgl. Tabl. 3.1, ist $(M^2_{J/\psi}+8\omega^2_{J/\psi,T})^2/(M^2_{J/\psi}+2\omega^2_{J/\psi,T})^2 \cong 1.42 \cong \sqrt{2}$ und wir finden:

$$R_{J/\psi,LT}(Q^2) \underset{Q^2\to\infty}{\cong} 1/\sqrt{2}\cdot\ Q^2/M^2_{J/\psi} \tag{3.81}$$

Ausgedrückt durch diese Funktion $R_{LT}(Q^2)$ sollte der differentielle Wirkungsquerschnitt in Vorwärtsrichtung abfallen wie $(\epsilon d\sigma_L/dt + d\sigma_T/dt)|_{\tau^2\equiv 0} \propto [\epsilon R_{LT}+1]\,(Q^2+M^2_{J/\psi})^{-4}$. Experimentell wird eine Skalierung beobachtet wie $(Q^2+M^2_{J/\psi})^{-m}$, mit $m \cong 2$. Dies könnte widerspiegeln, daß R_{LT} selbst von Q^2 abhängt und – ansteigend wie Q^2 – den vollständig asymptotischen Abfall mit $m = 4$ konterkariert: Der beobachtete Abfall wird gut gefittet durch eine kleinere Potenz m; zumal die Daten nicht ausreichend genau sind, $m = 4$ auszuschließen. Wir betonen, daß eine genaue Bestimmung des Potenzverhaltens bezüglich der Skala $Q^2+M^2_{J/\psi}$ unverzichtbare Voraussetzung ist für das Verständnis der zugrundeliegenden Physik.

In Abbildung 3.15 ist angegeben unser Postulat für $[1+Q^2/M^2_{J/\psi}]^2\,\sigma_\lambda(Q^2)$ für $\lambda \equiv L, T$, die entsprechend skalierten integrierten Wirkungsquerschnitte für longitudinale und transversa-

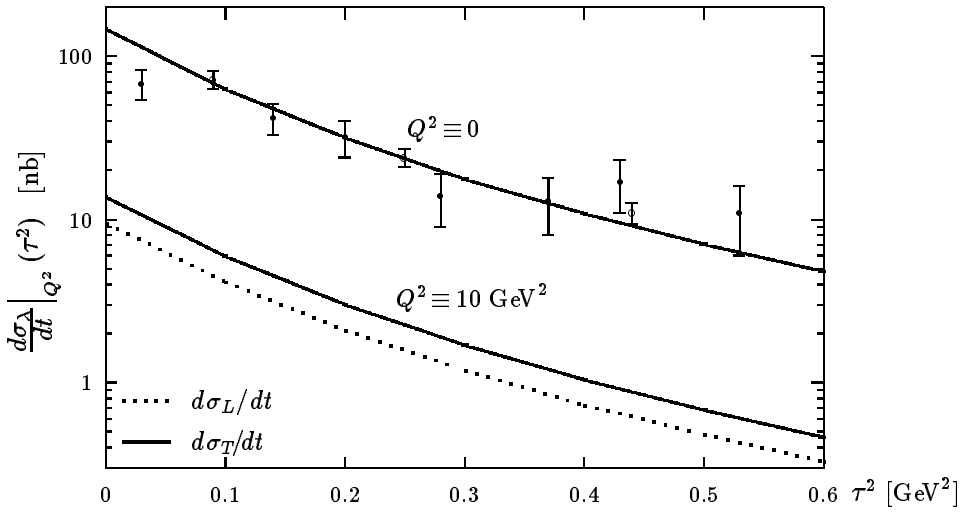


Abbildung 3.16: Differentiellen Wirkungsquerschnitte $d\sigma_\lambda/dt$, $\lambda \equiv L, T$, für J/ψ-Produktion in Abhängigkeit von τ^2 bei $Q^2 \equiv 0$, 10 GeV^2. Die obere Kurve ist unsere Vorhersage für Photoproduktion im Vergleich zu experimentellen Daten: der Messung von Ref. [23] (ausgefüllte Punkte) und der Extrapolation nach $Q^2 \equiv 0$ der EMC-Daten von Ref. [69] (offene Punkte). Ähnliche Daten sind gemessen von NMC bei $Q^2 \equiv 1.5$ GeV^2, vgl. Ref. [157]. Die unteren Kurven zeigen unser Postulat für $Q^2 \equiv 10$ GeV^2. Die Abhängigkeit des slope-Parameters von der Polarisation, wie von Q^2 sind nur marginal.

le Polarisation. Wir stellen ihnen gegenüber die genannten Experimentellen Daten, die von EMC im Energiebereich $\sqrt{s} = 10$–20 GeV genommen sind, vgl. Ref. [69]. Für kleine Q^2 nahe Photoproduktion sind im Energiebereich $\sqrt{s} = 10 - 20$ GeV mehrere experimentelle Werte angegeben, die aber nur grob einen Bereich von $10 - 20$ nb bestimmen. Unsere Untersuchung der Asymptotik für große Q^2 läßt bereits vermuten, daß die Wirkungsquerschnitte wesentlich determiniert sind durch die Form der z-Verteilumg $h_{J/\psi,\lambda}(z)$ und den Wert der charm-Quark-Masse m_u. Numerisch finden wir für eine Änderung von m_u um 5% für die Wirkungsquerschnitte eine Änderung von 20% bei $Q^2 \equiv 0$ und von 10% bei $Q^2 \equiv 10$ GeV^2. Für ansteigendes Q^2 folgt unsere Vorhersage qualitativ mehr und mehr dem Muster der Asymptotik kleiner Abstände, wie oben diskutiert; quantitativ tragen Dipole mittlerer transversaler Ausdehnung in der Weise effektiv bei, daß der Abfall flacher resultiert als die Asymptotik allein erwarten ließe.

In Abbildung 3.16 betrachten wir die Abhängigkeit der differentiellen Wirkungsquerschnitte $d\sigma_\lambda/dt$ für $\lambda \equiv L, T$ und festes Q^2 in Abhängigkeit von $\tau^2 \cong -t$. Unseren Vorhersagen stehen gegenüber die experimentellen Daten für $Q^2 \equiv 0$ von Ref. [23] (ausgefüllte Punkte) und die Extrapolation nach $Q^2 \equiv 0$ der EMC-Daten von Ref. [69] (offene Punkte). Wir finden gute Übereinstimmung. Zusätzlich tragen wir unsere Postulate für J/ψ-Leptoproduktion bei $Q^2 \equiv 10$ GeV^2 auf. In Kontrast zum Fall „großer“ Hadronen, vgl. Abb. 3.13, sind die Kurven weitgehend parallel, das heißt wir beobachten nur sehr marginale Abhängigkeit zum einen von der Polarisation, zum anderen von Q^2.

Zusammenfassend berechnen wir differentielle Wirkungsquerschnitte $d\sigma_\lambda/dt|_{Q^2}(\tau^2)$ für Leptoproduktion der Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$ und $\phi(1020)$ elastisch am Proton und entsprechende Querschnitte für Photo- und Leptoproduktion des $J/\psi(3097)$. Wir postulieren

diese Größen separat für longitudinale und transversale Polarisation, die sich Weise bezieht auf das einlaufende (virtuelle) Photon und das produzierte Vektormeson; Prozesse mit Helizitätsänderung um zwei Einheiten sind in unserem Zugang möglich, aber numerisch klein und daher vernachlässigt. Wir betrachten diese und daraus berechnete Observablen wie der integrierte Wirkungsquerschnitt $\sigma_\lambda(Q^2)$ und das Verhältnis $R_{LT}(Q^2)=\sigma_L(Q^2)/\sigma_T(Q^2)$, sprechen an den slope-Parameter.

Das zugrundeliegende Modell auf Niveau der Quark-Gluon-Wechselwirkung ist das Modell des Stochastischen Vakuums. Sein wesentliches Charakteristikum ist ein String-String-Mechanismus: das Ausbilden und die Wechselwirkung gluonischer Strings. Seine Parameter sind vollständig fixiert durch Quark-Confinement bei niedrigen Energien und weicher Proton-Proton-Streuung bei hohen Energien; sie sind vollständig unabhängig von Photo- und Leptoproduktion.

Die hadronischen Wellenfunktionen der involvierten Teilchen sind berechnet in Lichtkegelstörungstheorie [Photon] beziehungsweise danach modelliert in wohl-etablierter Weise [Vektormeson] und einfachster Weise [Proton].

Wichtiges Spezifikum von Photo- und Leptoproduktion ist die nichttriviale Abhängigkeit ihrer Wirkungsquerschnitte von der Photon-Virtualität. Wir diskutieren die Asymptotik für kleine und große Q^2. Unser Zugang schränkt ein auf $Q^2 = 1-2$ bis $10\,\mathrm{GeV}^2$ als konservativen Bereich. Dieser liegt weit ab von der Asymptotik, insbesondere der modellunabhängigen großer Q^2. Unsere Postulate beziehen sich auf mittlere Q^2, die ganz wesentlich abhängen vom zugrundeliegenden Quark-Gluon-Modell. So korrespondiert eine Photon-Virtualität im betrachteten Bereich mit einer transversalen Ausdehnung seiner konstituierenden Quark-Antiquark-Dipole von 0.5 bis 1.2 fm, je nach Polarisation; entsprechend ausgedehnte transversale Struktur des Vektormesons wird getestet, vgl. Abb. 3.9. Unsere Vorhersagen reproduzieren nahezu perfekt das Verhalten bezüglich der betrachteten intermediären Q^2; wir sehen darin den String-String-Mechanismus des MSV in wesentlichen Zügen bestätigt. Wir geben weitere Observable an, wie die τ^2-Abhängigkeit der differentiellen Wirkungsquerschnitte und die Q^2-Abhängigkeit des Verhältnisses R_{LT} der integrierten Wirkungsquerschnitte, die noch spezifischer abhängen vom MSV-Mechanismus, gegenwärtig aber noch nicht ausreichend genau experimentell bestimmt sind.

Wir reproduzieren die absoluten Wirkungsquerschnitte für ρ, ω und J/ψ; unser Resultat für ϕ ist um einen Faktor Zwei größer. Wir erklären dies damit, daß die Abhängigkeit der z-Verteilung von einer nichtverschwindenden Quarkmasse zu wenig verstanden ist (bevor sie für die große Masse des charm-Quarks wieder einfacher wird) und eine Definitive Aussage bezüglich ihrer funktionalen Form nicht gemacht werden kann. Der Faktor Zwei ist ein globaler; die Q^2-Abhängigkeit des ϕ wird korrekt reproduziert, wie wir finden im Vergleich mit den ZEUS-Daten für das Verhältnis von ϕ- zu ρ-Produktion, vgl. Ref. [239].

Die Ausdehnung unseres Zugangs im folgenden Kapitel geschieht dahingehend, daß noch spezifischer der String-String-Mechanismus des MSV getestet wird: Wir erweitern den Gültigkeitsbereich der Photon-Lichtkegelwellenfunktion hin zu kleiner bis verschwindender Virtualität. Und wir betrachten höher angeregte Vektormesonen. Es sind daher noch im Überlapp beider Wellenfunktionen Dipole involviert mit wesentlich größeren transversalen Ausdehnungen als bei den betrachteten $1S$-Vektormesonen; effektiv finden wir für transversale Polarisation spürbare Beiträge bis zu transversal $2.5-2.8$ fm.

In Tabelle 4.4 auf Seite 190, quasi als Nachtrag zu diesem Kapitel, geben wir Wirkungsquerschnitte der hier diskutierten Grundzustand-Vektormesonen an für Photoproduktion. Wir finden gute Übereinstimmung – auch für das $\phi(1020)$.

Kapitel 4

Photo- und Leptoproduktion von $\rho(770)$, $\rho(1450)$ und $\rho(1700)$

Zentrales Moment der Untersuchungen dieses Kapitels ist, uns weiter über die grundlegenden Mechanismen klar zu werden, die in nichtperturbativer Quantenchromodynamik auf Quark-Gluon-Niveau agieren. Wir betrachten als ganz wesentlich in dieser Hinsicht den String-String-Mechanismus, wie er Konsequenz ist der einfachen Annahmen des Modells des Stochastischen Vakuums: die Ausbildung gluonischer Strings zwischen den fundamentalen Partonen, aus denen wir uns einen hadronischen Zustand aufgebaut vorstellen, und deren Wechselwirkung. Ziel ist es, die Relevanz dieses Mechanismus' weiter herauszupräparieren, als dies bereits geschehen ist. Wir betrachten dazu Zustände größerer transversaler Ausdehnung, mit ausgedehnteren Strings.

In Termen der definierten Funktionen ist dies folgendermaßen motiviert. Die Funktion $T'_{lp}(z, r, |\tau|)$ ist die T-Amplitude für die zugrundeliegende Streuung eines Loops, das heißt Colour-Dipols $\{z, \mathbf{r}\}$ an dem festen Protontarget. Für festes $|\tau| \cong \sqrt{-t}$ und z steigt sie mit der transversalen Dipolausdehnung r an wie r^{2n}; dabei ist $n \equiv 1$ an der Stelle $r \equiv 0$ und fällt langsam ab für $r \gtrsim 1-2\,a$ auf typische Werte $n = 0.9-0.85$ für mittlere r. Wesentliche Konsequenz des String-String-Mechanismus des MSV ist, daß diese effektive Potenz zwar weiter – langsam – kleiner wird, aber T'_{lp} weiter ansteigt. Dies ist wesentlicher Effekt des konfinierenden C-Terms der eichinvarianten Zwei-Feldstärken-Kumulante, vgl. den Korrelationstensor $D = (D_{\mu\nu\mu'\nu'})$, und nicht zu erreichen durch den NC-Term allein. Konkurrierende Modelle auf Basis perturbativer Quark-Quark-Wechselwirkung generieren Dipol-Proton-Amplituden entsprechend T'_{lp}, die aber Quark-additiv sind und folglich von der Struktur unseres NC-Terms; sie saturieren typischerweise für $r = 1$–2 fm, vgl. etwa Ref. [153]. Je größer daher die transversale Ausdehnung r der Dipole ist, für die – nicht unterdrückt durch den Überlapp der Photon- und Vektormeson-Wellenfunktionen – die Amplitude T'_{lp} aufgerufen wird, desto relevanter der String-String-Mechanismus und desto größer die Diskrepanz der Postulate solcher Modelle zu unseren im Rahmen des MSV.

Hadronische Zustände größerer transversaler Ausdehnung sind im Rahmen von Photo- und Leptoproduktion von Vektormesonen elastisch am Proton involviert, wenn beider Wellenfunktionen „breit“ sind: Das einlaufende Photon muß tendenziell von möglichst kleiner Virtualität Q sein. Das erzeugte Vektormeson muß in gleicher Weise eine „breite“ Wellenfunktion besitzen. Nur dann läßt ihr Überlapp $\psi^\dagger_{V(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}$ Dipole großer transversaler Ausdehnung r zu. Das eine werden wir realisieren, indem wir die Lichtkegelwellenfunktion des Photons, wie sie zugrundeliegt der Analyse des vorangegangenen Kapitels, in ihrer Gültigkeit ausdehnen auf kleinere bis verschwindende Virtualitäten. Das andere, indem wir

höhere, „breitere“ Resonanzen betrachten. Wir nehmen vorweg, daß in dem System mit den Quantenzahlen des $\rho(770)$ als nächsthöhere Resonanz de facto (mindestens) zwei Zustände so dicht beieinander liegen, daß eine sie nur zusammen diskutiert werden können; wir bezeichnen diese mit ρ' und ρ'' und beziehen uns auf die Zustände $\rho(1450)$ und $\rho(1700)$ der Particle Data Group, Refn. [164, 165]. Nach Definition der Photon-Wellenfunktion für kleine bis verschwindende Virtualitäten, für Definiertheit $Q^2 \lesssim 2$ GeV^2, im folgenden Abschnitt gehen wir ein auf das Rho-System im daran anschließenden, bevor wir uns zuwenden der numerischen Analyse ihrer Photo- und Leptoproduktion elastisch am Proton.

4.1 Universelle Photon-Lichtkegelwellenfunktion

Dosch, Gousset, Pirner gehen in Ref. [66] einen in gleicher Weise einfachen und effektiven Weg, die Lichtkegelwellenfunktion des Photons in ihrer Gültigkeit auszudehnen auf kleinere bis verschwindende Virtualitäten. Wir geben einen Abriß ihrer Überlegungen, die in Zusammenhang stehen mit den konventionellen Zugängen zu den asymptotischen Bereichen großer und kleiner Q^2. Sie führen auf die konsistente Interpolation dieser Asymptotiken. Auf eine universelle Photon-Lichtkekelwellenfunktion für Virtualitäten auch im Bereich $Q^2 \lesssim 2$ GeV^2.

4.1.1 Zusammenhang

Aufgrund Asymptotischer Freiheit wird die Asymptotik kleiner (Konstituenten-)Abstände, tendenziell großer Q^2 beschrieben durch die perturbative Theorie; die Photon-Lichtkegelwellenfunktion des vorangegangenen Kapitels ist hergeleitet im Rahmen von LCPT.

Demgegenüber wird die Asymptotik kleiner Q^2 wesentlich determiniert durch Colour-Dipole von der Ausdehnung typischer Hadronen. Dies suggeriert, die Photon-Wellenfunktion zu entwickeln in einer hadronischen Basis; für transversale Polarisation:

$$\psi_{\gamma(Q^2,T)} \;=\; \sum_{V=\rho,\omega,\phi} \frac{e f_V M_V}{M_V^2+Q^2}\; \psi_{V(T)} \;+\; \psi_{Rest(T)} \tag{4.1}$$

und für longitudinale entsprechend durch Ersetzen $e f_V M_V \to e f_V Q$ und $\psi_{\#(T)} \to \psi_{\#(L)}$. Dies ist die Entwicklung in $J^{PC} = 1^{--}$-hadronische Zustände. Dabei sind die Grundzustand-Vektormesonen der drei leichten Flavour up, down, strange explizit ausgeschrieben im Sinne der Hypothese des Vektormeson-Dominanz-Modells (VDM), daß das Photon bei kleiner Virtualität im wesentlichen bestimmt ist durch die Resonanzen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$. Mit $\psi_{Rest(\lambda)}$ ist symbolisch bezeichnet die Summe der Wellenfunktionen sämtlicher anderer 1^{--}-Residuen: die höheren Anregungen von ρ, ω, ϕ bezüglich radialer und orbitalen Quantenzahlen und nicht-resonante Mehrteilchen-Zustände wie Multiquarkzustände und Hybride der Art Quark-Antiquark-Glue $q\bar{q}g$, Quark-Antiquark-Glue-Glue $q\bar{q}gg$ ...

In Zusammenhang mit der Ausdehnung dieser Darstellung hin zu größeren Q^2 ist von zentraler Bedeutung die Feststellung, daß die Terme ψ_{Rest} wesentlich das Q^2-Verhalten von Observablen mitbestimmen. Dies wird exemplifiziert für Leptoproduktion von Vektormesonen im Rahmen des vorangegangenen Kapitels und für Compton-Streuung; die entsprechenden T-Amplituden schreiben sich, vgl. die Gln. (3.68), (3.72):

$$T_\lambda[\gamma^{(*)} p \to V p] \;=\; \int_0^{1/2} dz \int_0^\infty r dr \qquad [\psi^\dagger_{V(\lambda)}\, \psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](z,r)\;\; T'_{\ell p}(z,r,|\tau|) \tag{4.2}$$

$$T_\lambda[\gamma^{(*)} p \to \gamma^{(*)} p] \;=\; \int_0^{1/2} dz \int_0^\infty r dr \;\; [\psi^\dagger_{\gamma(Q'^2,\lambda)}\, \psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](z,r)\;\; T'_{\ell p}(z,r,|\tau|) \tag{4.2'}$$

Dabei folgt die zweite Amplitude aus der ersten durch Ersetzen des auslaufenden Vektormesons durch ein Photon, dessen Virtualität bezeichnet sei mit Q'.

Zum einen wird diskutiert die Asymptotik großer Q^2 bezüglich des totalen Wirkungsquerschnitts von Photon-Proton-Streuung $\sigma^{\text{tot}} \equiv \sigma^{\text{tot}}[\gamma^* p]$ mit $\sigma^{\text{tot}} = \sigma_L^{\text{tot}} + \sigma_T^{\text{tot}}$. Diese Asymptotik wird beschrieben durch die perturbative Theorie, die eine T-Amplitude der Form (4.2′) generiert mit T'_{lp} der nicht näher bestimmten T-Amplitude für den Austausch des Pomerons in der Streuung eines Loops(Colour-Dipols) am Proton. Der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{(\lambda)}^{\text{tot}}$ für Polarisation $\lambda \equiv L, T$ ist aufgrund des optischen Theorems genau der Integralausdruck von (4.2′) in Vorwärtsrichtung $|\tau| = 0$ für $Q'^2 \equiv Q^2$. Als Asymptotik großer Q^2 folgt dann mithilfe der universellen Relation $T'_{lp} \propto r^2$ für $r \to 0$ für den totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\text{tot}} \propto Q^{-2}$ bei Dominanz transversaler Polarisation. Dem gegenüber steht das VDM auf Basis der drei Grundzustand-Resonanzen ρ, ω, ϕ allein: $\sigma_L^{\text{tot}} \propto Q^{-2}$ und $\sigma_T^{\text{tot}} \propto Q^{-4}$, das heißt Dominanz longitudinaler Polarisation. Der fehlende transversale inklusive Wirkungsquerschnitt muß daher resultieren aus $\psi_{Rest(T)}$.

Zum anderen wird diskutiert der integrierte Wirkungsquerschnitt für die Leptoproduktion von Vektormesonen elastisch am Proton: $\sigma^{\text{el}} \equiv \sigma^{\text{el}}[\gamma^* p \to Vp]$ mit $\sigma^{\text{el}} = \sigma_L^{\text{el}} + \sigma_T^{\text{el}}$, vgl. Gl. (3.42). Für Virtualitäten im Bereich $Q^2 = 1-2$ bis $10\,\text{GeV}^2$ wurde für die Produktion der Grundzustand-Vektormesonen der drei leichten Flavour im vorangegangenen Kapitel auf Basis der Amplitude (4.2) ein Verhalten wie $\sigma^{\text{el}} \propto Q^{-4}$ postuliert und experimentell bestätigt gefunden, vgl. die Abbn. 3.10 und 3.14; dabei stellten wir für größere Q^2 fest eine zunehmende Dominanz longitudinaler Polarisation, vgl. Abb. 3.8. Hierzu in Kontrast folgt im Rahmen des VDM auf Basis der drei Grundzustand-Resonanzen ρ, ω, ϕ allein: $\sigma_L^{\text{el}} \propto Q^{-2}$; wir stellen fest ein überschießen für longitudinale Polarisation. Diese Beiträge müssen also gekürzt werden durch $\psi_{Rest(L)}$.

Bei größeren Q^2 können die Beiträge von $\psi_{Rest(L)}$, $\psi_{Rest(T)}$ also nicht vernachlässigt werden, de facto bereits nicht bei $Q^2 \lesssim 1\,\text{GeV}^2$. Einerseits muß der beobachtete subtile Kürzungsmechanismus der Art konsistent implementiert werden, daß Resultat ist eine universelle Beschreibung des Photons in hadronischer Hochenergiestreuung. Andererseits ist über die Zustände, die eingehen in ψ_{Rest}, quantitativ wenig bis überhaupt nichts bekannt.

Dies suggeriert zunächst in einer Art gemischten Basis zu arbeiten: in der hadronischen für kleine und in der Quark-Gluon-Basis für mittlere bis große Q^2. Dies ist prinzipiell möglich aber nicht dadurch erreicht, ψ_{Rest} in Gl. (4.1) zu identifizieren mit der perturbativen Photon-Wellenfunktion. – Dies reproduzierte nicht die beobachtete (und in Ansatz gerade diskutierte) Phänomenologie, auch aus dem Grund, weil es zu unkontrolliertem *double counting* führte, das heißt Quark-Gluon-Konfigurationen, die bereits impliziert sind in den Termen für ρ, ω, ϕ, werden im perturbativen Anteil ein zweites Mal gezählt.

Dosch, Gousset, Pirner gehen in Ref. [66] den dritten Weg, indem sie in einer reinen Quark-Gluon-Basis arbeiten. Sie geben an die konsistente Fortsetzung der perturbativen Lichtkegelwellenfunktion des Photons zu kleinen bis verschwindenden Virtualitäten; für diese wird gefordert deren Übereinstimmung mit den drei expliziten Termen von Gl. (4.1) für die Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$. Zentraler Punkt ihrer Herleitung ist, daß die laufenden Quarkmassen der leichten Flavour der perturbativen Theorie: $m_u = m_d = 0$ und $m_s = 0.15$ GeV, vgl. Tabl. 3.1, Fußn. *a*, ersetzt werden durch effektive Massen $m_{f,\text{eff}}(Q^2)$, $f = u, d, s$, die abhängen von Q^2 als der effektiven Skala, die bestimmt die Auflösung des Photons in der Streureaktion. Für kleinerwerdende Q^2 unterhalb $Q^2 = 1-2\,\text{GeV}^2$ steigen $m_{f,\text{eff}}(Q^2)$ an von den laufenden, *bare* Werten m_f auf typische Konstituentenquark-Massen.

Eine effektive Q^2-Abhängigkeit der Quarkmassen der leichten Flavour in diesem Sinne

wird in Ref. [169] nicht-perturbativ mittels einer Operator-Produkt-Entwicklung diskutiert und berechnet die Beiträge aufgrund dynamischer, spontaner Brechung und aufgrund expliziter Brechung der $SU(2)\otimes SU(2)$-*chiralen Symmetrie*. Zusätzliche Beiträge werden erwartet aufgrund von *Confinement*.

4.1.2 Transversaler Harmonischer Oszillator. Konstruktion

Diese Ersetzung der laufenden Quarkmassen durch effektive, Q^2-abhängige ist motiviert aus der Analogie des transversalen (zweidimensionalen) Harmonischen Oszillators mit der Photon-Lichtkegelwellenfunktion in wesentlichen Charakteristika. Wir zeichnen die Argumentation von Dosch, Gousset, Pirner in Ref. [66] nach[4.1] hin zu deren Resultat für $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$ in parametrisierter Form.

Wir rekapitulieren, daß unser Zugang zu Hochenergiestreuung im Rahmen des MSV wesentlich determiniert wird durch die transversalen Ausdehnungen der involvierten Colour-Dipole. In Ref. [62] wurde weiche Hochenergiestreuung, in erster Linie Proton-Proton-Streuung diskutiert auf Basis von Wellenfunktionen mit nur einem Parameter: nämlich für ihre transversale Ausdehnung, Spin-Freiheitsgrade wurden vollständig vernachlässigt; vgl. Gl. (3.57). Es wurde dennoch gute Übereinstimmung mit dem Experiment gefunden.

In diesem Sinne: als approximative Untersuchung wesentlicher Charakteristika betrachten wir – unter Vernachlässigung der Spin-Freiheitsgrade – den transversalen Konfigurationsanteil der perturbativen Photon-Lichtkegelwellenfunktion:[4.2]

$$\psi_\gamma(z,\mathbf{r}) \;\propto\; \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{kr}}}{\mathbf{k}^2+\varepsilon^2} \;=\; \frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi} \qquad \text{mit} \quad \varepsilon=\sqrt{z\bar z\,Q^2+m_f^2} \quad r=|\mathbf{r}| \tag{4.3}$$

vgl. die Gln. (3.58), (3.58′) bzw. Anh. G.1. Ihre transversle Ausdehnung ist also beschränkt auf $r \lesssim \varepsilon^{-1}$ und sie ist adäquate Beschreibung für große ε. Für kleine ε wirken Brechung der chiralen Symmetrie und Confinement zu großen Ausdehnungen r entgegen. Dies kann anschaulich so betrachtet werden: Bei hohen Energien, weit entfernt vom Target, sollte die perturbative Theorie freier Quark-Antiquark-Paare gültig sein; aber für kleine Q^2 ist die Zeit ausreichend, daß sich diese im Photon formieren zu gebundenen hadronischen Zuständen.

Diesem Bild eines Quark-Antiquark-(Colour)Dipols in der Quantenchromodynamik entspricht das zweier Teilchen im Harmonischen Oszillatorpotential der Quantenmechanik in zweierlei Hinsicht. Zum einen treten nicht auf große transversale Separationen aufgrund des Potentials, das stark mit diesen ansteigt; zum anderen verschwindet es für kurze Zeiten und verschwindende Separation, und ist die Dynamik vollständig bestimmt durch die kinetische Energie. – Dies ist genau Confinement beziehungsweise Asymptotische Freiheit. In diesem Sinne interpretiert wird die Greensche Funktion des transversalen Harmonischen Oszillators:

$$G(\mathbf{r},\mathbf{0},-E) \;=\; \sum_{\mathbf{n}=(n^1,n^2)} \frac{\psi^*_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})}{E_{\mathbf{n}}-E} \qquad \text{mit} \quad E_{\mathbf{n}}=(n^1+n^2+1)\,\omega \tag{4.4}$$

Die Wellenfunktion $\psi_{\mathbf{n}}(\mathbf{0})$ steht für den harten Prozeß der Produktion des Quark-Antiquark-Paares weit entfernt vom Target und die Wellenfunktion $\psi^*_{\mathbf{n}}(\mathbf{r})$ bestimmt dessen transversale Separation. Die Beschränkung auf kleine Zeiten ist realisiert durch große negative Energien $E=-M$; große positive M entsprechen dabei dem tief-Euklidischen Bereich der QCD.

[4.1] Wesentlich sind die grundlegende Analogie und die daraus motivierte Idee. Wir stellen sie daher relativ ausführlich dar, auch auf die Gefahr hin einer gewissen Parallelität zu der prägnanten Darstellung dort.

[4.2] Die Diskussion bleibt qualitativ dieselbe bei Einbeziehung des Terms $\propto \mathrm{K}_1$ für transversale Polarisation.

Für kleine negative Werte $E=-M$ geht $G(\mathbf{r},\mathbf{0},-E)\to G(\mathbf{r},\mathbf{0},M)$ über in die freie zweidimensionale Greensche Funktion der Quantenmechanik:

$$G_0(\mathbf{r},\mathbf{0},M) \;=\; \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\,\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{kr}}}{\mathbf{k}^2/(2m)+M} \;=\; 2m\cdot\frac{\mathrm{K}_0(\sqrt{2mM}\,r)}{2\pi} \tag{4.5}$$

Die Analogie zu der Photon-Lichtkegelwellenfunktion $\psi_\gamma(z,\mathbf{r})$, vgl. Gl. (4.3), ist frappant. Die Korrespondenz $\sqrt{2mM}\leftrightarrow\varepsilon=\sqrt{z\bar{z}Q^2+m_f^2}$ verdeutlicht den Zusammenhang der Skalen M und Q^2.

Auf Basis dieser Analogie ist es möglich sich im Studium der Photon-Lichtkegelwellenfunktion zunutze zu machen, daß für den Harmonischen Oszillator eine Vielzahl von Resultaten analytisch zur Verfügung stehen oder in beliebiger Genauigkeit einfach berechnet werden können, vgl. etwa Ref. [97]. „Approximationen“ können dahingehend untersucht werden, ob sie die exakten Resultate tatsächlich approximieren oder deren wesentliche Charakteristika nicht reproduzieren.

Auf diese Weise gelangen Dosch, Gousset, Pirner zunächst zu zwei bedeutenden Feststellungen für den Harmonischen Oszillator: Sie finden zum einen, daß die Determinierung von Momenten der exakten Greenfunktion mit der Grundzustand-Wellenfunktion – die in analoger Form für die Lichtkegelwellenfunktion des Photons wesentlich eingehen in die Streuamplitude – einem subtilen Kürzungsmechanismus von Beiträgen unterworfen ist, die rühren von verschiedenen höheren Anregungen. Um die exakte Greenfunktion $G(\mathbf{r},\mathbf{0},M)$ in der Darstellung der unendlichen Reihe nach Gl. (4.4) zu approximieren durch eine entsprechende endliche Summe werden sehr viele Terme benötigt. Dosch, Gousset, Pirner finden zum anderen, daß zur Approximation von G sehr viel effektiver ist, auszugehen von der freien Greensche Funktion $G_0(\mathbf{r},\mathbf{0},M)$, vgl. Gl. (4.5), und diese zu modifizieren durch Verschieben ihres Arguments entsprechend $\sqrt{2mM}\to s_0+\sqrt{2mM}$, mit $s_0\equiv s_0(M)$.

Beide Feststellungen lauten in Gegenüberstellung: Schon bei mittleren Werten von M wie $M\cong 5\omega$ werden mehr als zwanzig Terme in der Entwicklung (4.4) benötigt, um eine bessere Approximation von G zu erreichen, als die bloße freie Greensche Funktion G_0 darstellt – noch ohne Verschieben ihres Arguments. Verschiebung des Arguments mit eingeschlossen, gelingt eine sehr gute Approximation bis zu verschwindenden M.

Aufgrund dieser Feststellungen wird ein Verfahren angegeben, das in konsistenter Weise die Verschiebung s_0 bestimmt als Funktion von M. Das Verfahren wird so eingerichtet – die exakte Greensche Funktion G ist ja bekannt für den Harmonischen Oszillator der Quantenmechanik, nicht aber ψ_γ für die QCD, vgl. die Gln. (4.3), (4.4) –, daß es in gleicher Weise anwendbar ist auf den einen, wie auf den anderen Fall. Es wird daher die Approximation: freie Greensche Funktion mit verschobenem Argument, nicht verglichen mit der exakten Greenschen Funktion. Sondern mit einem phänomenologischen Ansatz für diese, der in gleicher Weise gemacht werden kann für den Harmonischen Oszillator und das Quark-Antiquark-Photon der QCD. Dieser ist motiviert aus den QCD-Summenregeln nach Shifman, Vainshtein, Zakharov, vgl. Ref. [193], und lautet: „eine Resonanz plus perturbatives Kontinuum“. Er bezieht sich auf Funktionen, die in gleicher Weise definiert werden können für den einen wie für den anderen Fall. Für den Harmonischen Oszillator geben wir diese nur an:

$$\Pi^{(n)}(M) \;\equiv\; \frac{d^n}{d(-M)^n}\,\Pi(M) \qquad \text{mit} \quad \Pi(M) \;\stackrel{!}{=}\; G(\mathbf{0},\mathbf{0},M) \tag{4.6}$$

dabei garantiert der Zusammenhang mit der exakten Greenschen Funktion G Anbindung an das „exakte“ Resultat.

Wir gehen unmittelbar über zum Fall der Photon-Lichtkegelwellenfunktion der Quantenchromodynamik, den wir im folgenden skizzieren.

Die $\Pi(M)$ entsprechende Funktion der QCD ist die skalare *Vakuum-Polarisationsfunktion* $\Pi(q^2, m_f^2)$; vgl. generell auch Ref. [193]. Diese ist definiert über den Polarisationstensor des Vektorstroms $J_{(f)} = (\bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_f)$ eines Quarks mit leichtem Flavour $f = u, d, s$ und laufender Masse m_f (nicht impliziert in dieser Definition ist dessen Ladung $e_f = +2/3e, -1/3e$):

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu}(q, m_f^2) &= \mathrm{i} \int d^4x \, \mathrm{e}^{iqx} \, \langle \Omega | T\{ J^\mu_{(f)}(x), J^\nu_{(f)}(0) \} | \Omega \rangle \\ &= (q^\mu q^\nu - q^2 g^{\mu\nu}) \; \Pi(q^2, m_f^2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Der konstante Term der Funktion $\Pi(q^2, m_f^2)$ ist nicht definierbar, s.u. Gl. (4.19). Für große q^2 wird ihr Imaginärteil $\mathrm{Im}\Pi_0(s, m_f^2)$ in niedrigster Ordnung der perturbativen Theorie repräsentiert und berechnet durch einen einzigen Feynman-Graphen, der steht für die Erzeugung, *freie* Propagation und anschließende Vernichtung des Quark-Antiquark-Paares mit Flavour f.[4.3] Die erste partielle Ableitung von $\Pi(-Q^2, m_f^2)$ nach $-Q^2 = q^2$, s.u. Gl. (4.10), wird üblicherweise angegeben in Form der Dispersionsrelation:

$$\Pi_0^{(1)}(Q^2, m_f^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \; \frac{\mathrm{Im}\,\Pi_0(s, m_f^2)}{(s+Q^2)^2} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \text{mit} \qquad \mathrm{Im}\,\Pi_0(s, m_f^2) &= \frac{N_c}{12\pi} \frac{v(3-v^2)}{2} \, \theta(s-4m_f^2) \qquad v = \sqrt{1-4m_f^2/s} \\ &= \frac{N_c}{12\pi} \left[1+\frac{2m_f^2}{s}\right] \sqrt{1-\frac{4m_f^2}{s}} \; \theta(s-4m_f^2) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dabei ist v die Geschwindigkeit des Quarks; die Theta-Funktion schränkt ein auf Werte oberhalb der kinematischen Schwelle. Der Quark-Vektorstrom $J_{(f)}$ ist Teil des elektromagnetischen Stroms J_{em}; der hier auftretende Phasenraumfaktor entspricht daher dem in Gl. (3.67). Wir schreiben dimensionslos:[4.4]

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\,\tilde{\Pi}_0(\lambda, m_f^2) &= \frac{N_c}{12\pi} \left[1+\frac{1}{2\lambda}\right] \sqrt{1-\frac{1}{\lambda}} \; \theta(\lambda-1) \qquad \text{mit} \quad \lambda \equiv s/4m_f^2 \\ &= \mathrm{Im}\,\Pi_0(4m_f^2 \cdot \lambda, m_f^2) \end{aligned} \tag{4.9'}$$

Die Dispersionsrelation (4.8) gilt zu beliebiger Ordnung in α_s und kann verallgemeinert werden auf höhere Ableitungen. Wir definieren die n-ten partiellen Ableitungen nach $-Q^2$ beziehungsweise $-\xi \equiv -Q^2/4m_f^2$:

$$\Pi^{(n)}(Q^2, m_f^2) \equiv \left[-\frac{\partial}{\partial Q^2}\right]^n \Pi(Q^2, m_f^2) \tag{4.10}$$

$$\tilde{\Pi}^{(n)}(\xi, m_f^2) \equiv \left[-\frac{\partial}{\partial \xi}\right]^n \tilde{\Pi}(\xi, m_f^2) = (4m_f^2)^n \cdot \Pi^{(n)}(4m_f \cdot \xi, m_f^2) \tag{4.10'}$$

und formulieren allgemein die Dispersionsrelationen:

$$\Pi^{(n)}(Q^2, m_f^2) = \frac{n!}{\pi} \int ds \; \frac{\mathrm{Im}\,\Pi(s, m_f^2)}{(s+Q^2)^{n+1}} \qquad n \geq 1 \tag{4.11}$$

$$\tilde{\Pi}^{(n)}(\xi, m_f^2) = \frac{n!}{\pi} \int d\lambda \; \frac{\mathrm{Im}\,\tilde{\Pi}(\lambda, m_f^2)}{(\lambda+\xi)^{n+1}} \qquad n \geq 1 \qquad \text{mit} \quad \lambda \equiv s/4m_f^2 \tag{4.11'}$$

[4.3] Bzgl. des nächstführenden Terms $\mathrm{Im}\Pi_1(s, m_f^2)$ proportional α_s auf Basis zweier zusätzlicher Graphen, die den Austausch jeweils eines Gluons beinhalten, vgl. etwa Ref. [193].

[4.4] Die gestrichenen Gleichungen im folgenden sind Darstellungen in Termen dimensionsloser Variablen; Verdeutlichung in Hinsicht auf formale Umformungen, seien sie ignoriert beim weniger strengen Lesen.

Aufgrund Asymptotischer Freiheit besitzen die Funktionen $\Pi^{(n)}$ für $n \geq 0$ im Euklidischen Bereich eine sehr gute phenomenologische Darstellung der Art „eine Resonanz plus perturbatives Kontinuum“, vgl. Ref. [193]:

$$\Pi^{(n)}_{\rm ph}(Q^2, m_f^2) \;=\; \frac{n! f_V^2}{(M_V^2+Q^2)^{n+1}} \;+\; \frac{n!}{\pi}\int_{s_t}^{\infty} ds\;\frac{\mathrm{Im}\,\Pi_0(s, m_f^2)}{(s+Q^2)^{n+1}} \qquad n \geq 1 \tag{4.12}$$

mit s_t der Schwelle, an der das perturbative Kontinuum einsetzt. Als Resonanz tritt auf das Grundzustand-Vektormesonen $V \equiv \rho(770)$, $\omega(782)$ oder $\phi(1020)$, das dem Quark bezüglich Isospin und Flavour-Gehalt entspricht; vgl. Gl. (3.61) und Tabl. 3.1. Dabei bezeichnen M_V seine Masse und f_V seine Kopplung an den elektromagnetischen Strom, vgl. Gl. (3.66).

In niedrigster Ordnung der perturbativen Theorie ist die Kopplung f_V proportional zu der Wellenfunktion des Vektormesons V am Ursprung; sie tritt daher in Gl. (4.12) auf als Residuum des Resonanz-Pols. Aufgrund Quark-Hadron-Dualität besteht für dieses Residuum die Relation:

$$f_V^2 \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{s_t} ds\;\;\mathrm{Im}\,\Pi_0(s, m_f^2) \tag{4.13}$$

und mithilfe von Gl. (4.9′):

$$\begin{aligned}\frac{\pi f_V^2}{4m_f^2} \;&=\; \int_0^{\lambda_t} d\lambda\;\;\mathrm{Im}\,\Pi_0(4m_f^2\cdot\lambda, m_f^2) \qquad \text{mit} \qquad \lambda_t \equiv s_t/4m_f^2 \\ &=\; \frac{N_{\rm c}}{12\pi}\int_1^{\lambda_t} d\lambda\;\left[1+\frac{1}{2\lambda}\right]\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}} \;=\; \frac{N_{\rm c}}{12\pi}\,\lambda\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}\;\Bigg|_1^{\lambda_t}\end{aligned} \tag{4.13′}$$

Hierdurch folgt die Schwelle s_t, an der das perturbative Kontinuum einsetzt. Die Ableitungen $\Pi^{(n)}_{\rm ph}$, $n \geq 1$, sind damit wohldefiniert durch Gl. (4.12); sie stellen die phenomenologische, „exakte“ Seite der Gleichung dar, durch die $m_{f,\rm eff}$ bestimmt wird.

Die „approximierte“ Seite der Gleichung ist gegeben durch die approximierten Funktionen $\Pi^{(n)}_{\rm app}$; diese werden identifiziert mit den *freien Funktionen* $\Pi^{(n)}_0$ *mit verschobenem Argument*, vgl. die Gln. (4.9), (4.11) bzw. (4.9′), (4.11′).

In welcher Weise explizit diese Verschiebung des Arguments durchzuführen ist, folgt einerseits aus der entsprechenden Verschiebung $\sqrt{2mM} \to s_0(M)+\sqrt{2mM}$ im Fall des Harmonischen Oszillators, andererseits durch Identifizierung und Zusammenhang der relevanten Skalen M und Q aufgrund der Korrespondenz $\sqrt{2mM} \leftrightarrow \varepsilon = \sqrt{z\bar{z}Q^2+m_f^2}$ zwischen dem Harmonischen Oszillator der Quantenmechanik und der Photon-Lichtkegelwellenfunktion der QCD. Vgl. die Diskussion in Anschluß an Gl. (4.5). Die Verschiebung des Arguments in diesem Sinne kann subsumiert werden in

$$\psi_\gamma(z,\mathbf{r}) \;\propto\; \mathrm{K}_0\big(\sqrt{z\bar{z}Q^2+m_f^2}\;|\mathbf{r}|\big) \;\longrightarrow\; \mathrm{K}_0\big(\sqrt{z\bar{z}Q^2+m_{f,\rm eff}^2}\;|\mathbf{r}|\big) \tag{4.14}$$

$$m_f \;\longrightarrow\; m_{f,\rm eff} \tag{4.14′}$$

das heißt im Ersetzen der laufenden durch eine effektive Quarkmasse. Zwei Fälle werden unterschieden:

$$\text{(i)} \qquad m_{f,\rm eff} \;=\; m_{f,\rm eff}(Q^2) \tag{4.15}$$

$$\text{(ii)} \qquad m_{f,\rm eff} \;=\; m_{f,\rm eff}(Q^2_{\rm eff} \equiv 4z\bar{z}Q^2) \tag{4.15′}$$

Das heißt $m_{f,\rm eff}$ wird aufgefaßt als Funktion von Q^2 oder von $Q^2_{\rm eff} \equiv 4z\bar{z}Q^2$, dem Quadrat der effektiven Virtualität des Photons, die abhängt von z, dem Anteil des Quarks am Gesamt-Lichtkegelimpuls; vgl. die Diskussion der transversalen Photon-Wellenfunktion in Anschluß an Gl. (3.59) auf Seite 131.

Auf dieser Basis folgt als die „approximierte“ Seite der Gleichung:

$$\Pi^{(n)}_{\rm app}(Q^2, m^2_{f,\rm eff}) \;\equiv\; \Pi^{(n)}_0(Q^2, m^2_f \to m^2_{f,\rm eff}) \tag{4.16}$$

Und die Gleichung selbst, durch die $m_{f,\rm eff}$ bestimmt wird in Abhängigkeit der rein hadronischen Größen M_V und f_V:

$$\Pi^{(n)}_{\rm ph}(Q^2, m^2_f) \;=\; \Pi^{(n)}_{\rm app}(Q^2, m^2_{f,\rm eff}) \tag{4.17}$$

$$\frac{n! f_V^2}{(M_V^2+Q^2)^{n+1}} + \frac{n!}{\pi}\int_{s_t}^{\infty} ds\; \frac{\mathrm{Im}\,\Pi_0(s, m_f^2)}{(s+Q^2)^{n+1}} \tag{4.17$'$}$$

$$= \frac{n!}{\pi}\int_{4m^2_{f,\rm eff}}^{\infty} ds\; \frac{\mathrm{Im}\,\Pi_0(s, m^2_{f,\rm eff})}{(s+Q^2)^{n+1}} \qquad n \geq 1$$

vgl. die Gln. (4.11), (4.12); auf der rechten Seite ist die untere Integrationsgrenze retundant ausgeschrieben, insofern sie bereits impliziert ist in $\mathrm{Im}\,\Pi_0$, vgl. Gl. (4.9). Wir betonen, daß die Ableitungen nach Definition in Gl. (4.10) *partielle* Ableitungen sind und daher nicht wirken auf die Q^2-Abhängigkeit implizit der effektiven Quarkmasse $m_{f,\rm eff}$.

Wir betrachten die Dispersionsintegrale in Gl. (4.17′) und identifizieren mithilfe Gl. (4.10′) als relevantes Integral bezüglich der n-ten Ableitungen:

$$\left(4m^2\right)^n \cdot \Pi^{(n)}_{\#}(4m\cdot\xi, m^2)\,\Big|_{\rm Integral} = \tilde\Pi^{(n)}_{\#}(\xi, m^2)\,\Big|_{\rm Integral} \tag{4.18}$$

$$= \left[-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]^n \tilde\Pi_{\#}(\xi, m^2)\,\Big|_{\rm Integral}$$

$$= \frac{N_{\rm c}}{12\pi}\frac{n!}{\pi}\cdot\int_{\lambda_t,1}^{\infty} d\lambda\,\frac{1}{(\lambda+\xi)^{n+1}}\left[1+\frac{1}{2\lambda}\right]\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}} \;\stackrel{!}{=}\; \frac{N_{\rm c}}{12\pi^2}\cdot I_n(\xi,\lambda)\,\Big|_{\lambda_t,1}^{\infty}$$

mit $\xi = Q^2/4m^2$ und, für die linke Seite von Gl. (4.17′), $\#\equiv$ ph [bzw. rechte Seite, $\#\equiv$ app]: $m\equiv m_f$ [bzw. $m_{f,\rm eff}$] und die untere Integrationsgrenze gleich $\lambda_t \equiv s_t/4m_f^2$ [bzw. 1]. Die Funktion $I_n(\xi,\lambda)$ ist definiert als die Stammfunktion des Integranden.[4.5] Wir berechnen $I_n(\xi,\lambda)$ für möglichst kleinen Index $n\in\mathbb{N}_0$; alle höheren Dispersionsintegrale, das heißt bezüglich indizes $n' > n$ folgen dann durch $(n'-n)$-malige Differentiation. Der Index $n\equiv 0$ ist zulässig: Zwar divergiert das Integral logarithmisch an der oberen Grenze, wie folgt aus der Abschätzung des Integranden für große Argumente λ; es kann aber regularisiert und renormiert werden. Wir tun dies im folgenden. Zunächst finden wir:

$$\begin{aligned} I_0(\xi,\lambda) \;=\; & \ln\lambda \;+\; 2\ln\left[1+\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}\right] \\ & - \frac{1}{\xi}\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}} \\ & - \left[1-\frac{1}{2\xi}\right]\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}\left\{\ln\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}+\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}\right)\Big/\left(\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}-\sqrt{1-\frac{1}{\lambda}}\right)\right]\right. \\ & \qquad \left. + \ln\left[\xi^2\left[1-\frac{1}{2\xi}\right]\left(1+\frac{1}{\xi}\right)^{3/2}\right]\right\} \end{aligned} \tag{4.19}$$

Der erste Term $\ln\lambda$ ist verantwortlich für die Divergenz des Integrals an der oberen Integrationsgrenze, Regularisierung geschieht durch seine Subtraktion. Da er nicht abhängt von ξ, ändert diese Regularisierung nicht den Wert der höheren Ableitungen nach ξ, das

[4.5] Das in Gl. (4.13′) angegebene Integral kann formal aufgefaßt werden als I_{-1}.

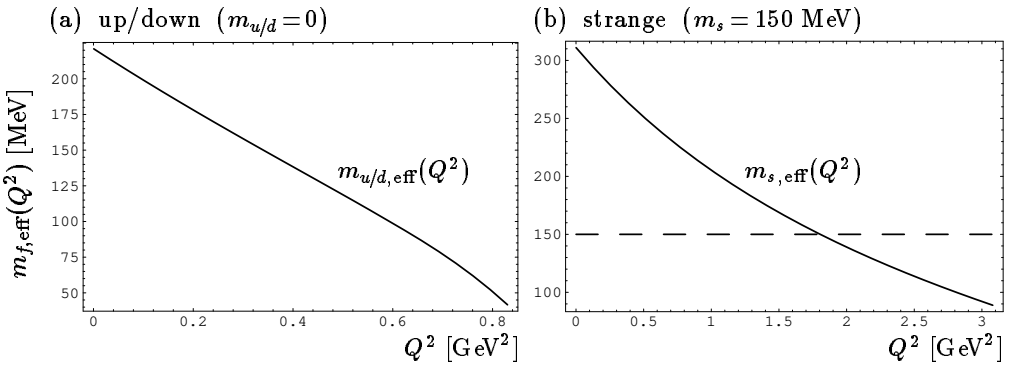


Abbildung 4.1: Effektive Quarkmassen $m_{u/d,\mathrm{eff}}$ und $m_{s,\mathrm{eff}}$ als Funktionen von Q^2, Fall (i) nach Gl. (4.15). Dieses Resultat ist entnommen Ref. [66]; wir danken den Autoren Dosch, Gousset, Pirner für die freundliche Überlassung dieser Abbildungen.

heißt deren Renormierung ist trivial. Für die nicht-abgeleitete Funktion selbst ist aufgrund seiner Unabhängigkeit von ξ die Subtraktion dieselbe auf der rechten und linken Seite von Gl. (4.17′); und somit irrelevant auch in diesem Fall. Aufgrund derselben Argumentation kann der zweite Term $2\ln[1+\sqrt{1-1/\lambda}]$ als konstant subtrahiert werden. Schließlich der Term in der letzten Zeile ist unabhängig von λ und verschwindet bei Differenzbildung bezüglich der oberen und unteren Integrationsgrenze; er kann daher o.E.d.A. vorab subtrahiert werden. Sei in diesem Sinne definiert das renormierte Integral $I_0^{\mathrm{ren}}(\xi,\lambda)$ als die verbleibende *zweite und dritte Zeile von* Gl. (4.19).

Das Dispersionsintegral folgt dann als die Differenz $I_0^{\mathrm{ren}}(\xi,\lambda\equiv\infty)-I_0^{\mathrm{ren}}(\xi,\lambda\equiv\lambda_t \text{ bzw. } 1)$, vgl. Gl. (4.18). Auf der „approximierten" Seite von Gl. (4.17′) verschwindet die Funktion I_0^{ren} identisch an der untere Integrationsgrenze $\lambda\equiv 1$ und wir gelangen zu dem Ausdruck, den Dosch, Gousset, Pirner in Ref. [66] angeben und ihrer Analyse zugrunde legen:

$$\begin{aligned}\left(4m_{f,\mathrm{eff}}^2\right)^n\cdot\,\Pi_{\mathrm{app}}^{(n)}(4m_{f,\mathrm{eff}}\cdot\xi,m_{f,\mathrm{eff}}^2) &= \tilde{\Pi}_{\mathrm{app}}^{(n)}(\xi,m_{f,\mathrm{eff}}^2) \qquad (4.20)\\ &= \left[-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]^n\;\frac{N_{\mathrm{c}}}{12\pi^2}\cdot I_0^{\mathrm{ren}}(\xi,\infty)\\ &= \left[-\frac{\partial}{\partial\xi}\right]^n\;\frac{N_{\mathrm{c}}}{12\pi^2}\left\{-\frac{1}{\xi}\;-\;\left[1-\frac{1}{2\xi}\right]\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}\;\ln\left[\left(\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}+1\right)\Big/\left(\sqrt{1+\frac{1}{\xi}}-1\right)\right]\right\}\end{aligned}$$

mit $\xi\equiv Q^2/4m_{f,\mathrm{eff}}^2$.

Auf dieser Basis bestimmen sie für die leichten Flavour up/down und strange, die funktionale Abhängigkeit der effektiven Quarkmassen $m_{u/d,\mathrm{eff}}$ und $m_{s,\mathrm{eff}}$, indem sie annehmen: eine Abhängigkeit (i) von Q^2 oder (ii) von $Q_{\mathrm{eff}}^2\equiv 4z\bar{z}Q^2$, vgl. die Gln. (4.15), (4.15′).

Ihre Resultate für den Fall (i) sind angegeben in den Abbildungen 4.1(a),(b). Sie stellen dar die funktionale Abhängigkeit der effektiven Quarkmassen $m_{u/d,\mathrm{eff}}(Q^2)$ und $m_{s,\mathrm{eff}}(Q^2)$, die folgt aus den Gln. (4.17), (4.17′) für die zweiten Ableitungen: $n\equiv 2$. Eine Abhängigkeit von der Anzahl der Differentiationen ist gegeben, jedoch wird diese referiert als schwach. Die Q^2-Abhängigkeit von $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$ ist in erster Approximation linear: Für große Q^2 ist die effektive Quarkmasse $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$ identisch der laufenden Quarkmasse m_f, mit $m_{u/d}=0$ und $m_s=150$ MeV, vgl. Tabelle 3.1, Fußnote *a*; für Virtualitäten unterhalb einer Schwelle $Q_{f,0}^2$ steigt sie linear an mit kleinerwerdendem Q^2 auf den Wert $m_{f,0}\equiv m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2\equiv 0)$. Numerisch sind diese Massen $m_{f,0}$ von der Größenordnung typischer Konstituentenquark-Massen: $m_{u/d,0}=220$ MeV und $m_{s,0}=310$ MeV, und die Schwellen für die Photon-Virtualität liegen bei: $Q_{u/d,0}^2=1.05$ GeV^2 und $Q_{s,0}^2=1.6$ GeV^2.

Unsere Resultate für die leichten Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ im vorangegangenen Kapitel folgen daher im Rahmen einer universellen Photon-Lichtkegelwellenfunktion mit effektiver Quarkmasse unverändert für Virtualitäten oberhalb dieser Werte: $Q^2 \geq 1.05\ \mathrm{GeV}^2$ beziehungsweise $Q^2 \geq 1.6\ \mathrm{GeV}^2$, und werden erst modifiziert für Werte darunter.

Dosch, Gousset, Pirner geben mit besser als 5% die Genauigkeit an, mit der die approximierte Polarisationsfunktionen $\Pi^{(n)}_{\mathrm{app}}(Q^2, m^2_{f,\mathrm{eff}})$ auf Basis dieser effektiven Quarkmassen die phenomenologischen, „exakten" Polarisationsfunktionen $\Pi^{(n)}_{\mathrm{ph}}(Q^2, m^2_f)$ reproduzieren.

Dosch, Gousset, Pirner diskutieren ferner den Fall (ii) nach Gl. (4.15′), in dem die effektive Quarkmasse $m_{f,\mathrm{eff}}$ angenommen wird als Funktion von $Q^2_{\mathrm{eff}} \equiv 4z\bar{z}Q^2$. Wir machen diesbezüglich nur die folgenden Bemerkungen. Die Abhängigkeit von Q^2_{eff} impliziert effektiv eine Abhänggikeit von z, dem Anteil des Quarks am gesamten Lichtkegelimpuls. Dem wird Rechnung getragen dadurch, daß $\mathrm{Im}\,\Pi_0(s, m^2)$ nach Gl. (4.9) ersetzt wird durch:

$$\mathrm{Im}\,\Pi_{0,z}(s, m^2) \;=\; \frac{N_{\mathrm{c}}}{12\pi} \int_0^1 dz \left[1 + \frac{2m^2}{s}\right] \theta(s - m^2/(z\bar{z})) \tag{4.21}$$

Das heißt der Phasenraum wird entsprechend des Werts von z eingeschränkt; m steht wieder für m_f beziehungsweise $m_{f,\mathrm{eff}}$. Formal ist $\mathrm{Im}\Pi_{0,z}(s, m^2)$ eine Distribution bezüglich s wie $\mathrm{Im}\Pi_0(s, m^2)$ nach Gl. (4.9); sie geht in diese über durch Ausführen der z-Integration [Substitution $\mu = 4z\bar{z}$], das heißt bei Bezug auf eine s-unabhängige Funktion. Eingesetzt im Dispersionsintegral nach Gl. (4.11) führt sie zu Dispersionsrelationen für $\Pi^{(n)}_{0,z}(Q^2, m^2)$ analog denen für $\Pi^{(n)}_0(Q^2, m^2)$, $n \geq 1$. Diese Modifikation besteht darin, daß die s-Integration des Dispersionsintegrals über die untere Grenze $m^2/(z\bar{z})$ abhängt von z und über diese z-Konfigurationen gemittelt wird.

Resultat ist wie erwartet im wesentlichen eine glattere Interpolation zwischen laufender Quarkmasse m_f und Konstituentenquark-Masse $m_{f,0}$. Im Rahmen der Genauigkeit der Approximation und der Abhängigkeit von der Anzahl n von Differentiationen kann $m_{f,0}$ betrachtet werden als konstant; dann ändert sich allein die Schwelle $Q^2_{f,0}$: und zwar zu den kleineren Werten $0.69\ \mathrm{GeV}^2$ für die Flavour up/down und $1.16\ \mathrm{GeV}^2$ für strange.

Die universelle Photon-Lichtkegelwellenfunktion ist auf Basis expliziter Parametrisierungen von $m_{f,\mathrm{eff}}$ gegeben durch – wir fassen zusammen mithilfe der Gln. (3.58),(3.58′):

$$\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z, \mathbf{r}) \;=\; \sqrt{N_{\mathrm{c}}}\ e_f \delta_{f\bar{f}}\ \chi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z, \mathbf{r}) \tag{4.22}$$

wobei, mit $\varepsilon = \sqrt{z\bar{z}Q^2 + m^2_{f,\mathrm{eff}}}$, vgl. Gl. (3.59):

$$\begin{aligned}
\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv 0)} \;&=\; -2z\bar{z}\ Q\ \delta_{h,-\bar{h}}\ \frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi} \qquad (4.22')\\
\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv +1)} \;&=\; \sqrt{2}\left[\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}\ \left(z\,\delta_{h+,\bar{h}-} - \bar{z}\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right)\frac{\mathrm{K}_1(\varepsilon r)}{2\pi} \;+\; m_{f,\mathrm{eff}}\,\delta_{h+,\bar{h}+}\,\frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\right]\\
\chi_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv -1)} \;&=\; \sqrt{2}\left[\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\ \left(\bar{z}\,\delta_{h+,\bar{h}-} - z\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right)\frac{\mathrm{K}_1(\varepsilon r)}{2\pi} \;+\; m_{f,\mathrm{eff}}\,\delta_{h-,\bar{h}-}\,\frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\right]
\end{aligned}$$

In den folgenden Abschnitten diskutieren wir ein System höher angeregter Resonanzen mit den Quantenzahlen des $\rho(770)$. Für Definiertheit geben wir an dieser Stelle die explizite Parametrisierung der effektiven Quarkmasse $m_{u/d,\mathrm{eff}}$ für Flavour up/down an, die wir dieser Diskussion zugrundelegen, mit $m_{u/d,0} = 220\ \mathrm{MeV}$, vgl. Ref. [66]:

$$m_{u/d,\mathrm{eff}}(Q^2) \;=\; \begin{cases} m_{u/d,0} \cdot \left[1 - Q^2/Q^2_{u/d,0}\right] & \text{für } Q^2 < Q^2_{u/d,0} = 1.05\ \mathrm{GeV}^2 \\ m_{u/d} = 0 & \text{für } Q^2 \geq Q^2_{u/d,0} \end{cases} \tag{4.23}$$

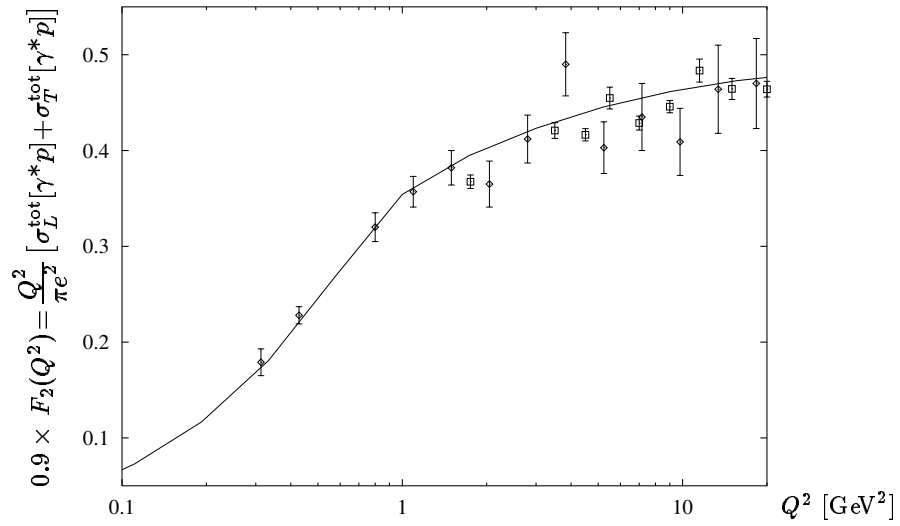


Abbildung 4.2: Q^2-Abhängigkeit des Beitrags der leichten Flavour up, down und strange zur Proton-Strukturfunktion F_2 für festes $\sqrt{s} = 20$ GeV. Die Daten stammen von NMC [Quadrate] und E665 [Rauten], vgl. die Refn. [75, 158]. Die Kurve ist berechnet in Ref. [66] als Resultat auf Basis der Photon-Lichtkegelwellenfunktion mit effektiven Quarkmassen $m_{u/d,\,\rm eff}$ und $m_{s,\,\rm eff}$, wie gezeigt in den Abbildungen 4.1(a),(b). Sie ist reskaliert um einen Faktor 0.9, der folgen würde etwa aus der Verringerung des Wertes für das Gluonkondensat um 5%. Wir danken Dosch, Gousset, Pirner für die freundliche Überlassung dieser Abbildung.

Dies ist die Q^2-abhängige effektive Quarkmasse nach Fall (i), Gl. (4.15) wie dargestellt in Abbildung 4.1(a). Das Ansteigen von $m_{f,\rm eff}$ hin zu kleinen Q^2 verhindert zu große transversale Separationen r des Quark-Antiquark-Paares und ist insofern zu interpretieren als Mimikry von Effekten, die diese unterdrücken: chirale Symmetriebrechung und Confinement.

Der Erfolg des Verfahrens einer effektiven Quarkmasse, die abhängt von der Skala des einlaufenden Impulstransfers, sei abschließend exemplarisch gezeigt an einem der Resultate von Dosch, Gousset, Pirner in Ref. [66]; er ist eindrucksvoll dokumentiert in Abbildung 4.2.

Dargestellt ist ein Resultat in Zusammenhang mit *Compton-Streuung*, das berechnet ist auf Basis der universellen Photon-Lichtkegelwellenfunktion nach den Gln. (4.22), (4.22′) mit den effektiven Quarkmassen $m_{u/d,\,\rm eff}$ und $m_{s,\rm eff}$ nach Abbildung 4.1(a),(b). Die zugrundeliegende T-Amplitude $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to \gamma^{(*)}p]$ für longitudinale und transversale Polarisation $\lambda \equiv L, T$ ist bereits angegeben in Gl. (4.2′). In Abbildung 4.2 ist dargestellt für feste invariante Schwerpunktenergie $\sqrt{s} \cong 20$ GeV und als Funktion von Q^2 die *Proton-Strukturfunktion* $F_2(Q^2) = Q^2/(\pi e^2)\cdot\sigma^{\rm tot}[\gamma^{(*)}p]$, mit $\sigma^{\rm tot}[\gamma^{(*)}p] = \sigma_L^{\rm tot}[\gamma^{(*)}p] + \sigma_T^{\rm tot}[\gamma^{(*)}p]$. Der experimentell beobachtet Verlauf von F_2 mit Q^2 ist hochgradig nichttrivial und wird perfekt reproduziert bis hinunter zu den kleinsten gemessenen Werten von Q^2. Der Knick bei 1–2 GeV^2, der zustande kommt durch das Anwachsen der Quarkmassen für Virtualitäten unterhalb der Schwellen $Q^2_{f,0}$, ist vorhanden in den experimentellen Daten. Dies suggeriert, daß die Brechung der chiralen Symmetrie bereits in gegenwärtigen Experimenten gemessen ist, und sie durch genaue Messungen der Proton-Strukturfunktionen in Leptoproduktion bei Virtualität Q besser zugänglich sein könnte als in Schwerionen-Kollisionen bei endlicher Temperatur $T = Q/(2\pi)$. Vgl. die Diskussion in Ref. [66]. Die absolute Skalierung der postulierten Kurve auf neun Zehntel entspricht einer Reskalierung des Gluonkondensats auf 95% des zugrundegelegten Wertes, – und ist insofern nicht wirklich von Bedeutung.

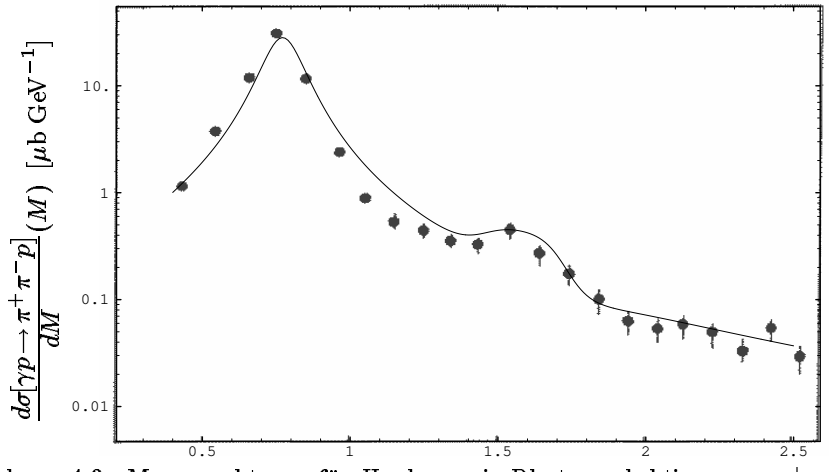


Abbildung 4.3: Massespektrum für Hochenergie-Photoproduktion von $\pi^+\pi^-$ elastisch am Proton. Im Bereich $M \cong 1.6$ GeV zeigt sich konstruktive Interferenz. Die experimentellen Daten stammen aus Ref. [11], mit einem Beitrag von 50±20 nb des 3^{--}-Vektormesons $\rho_3(1690)$ subtrahiert, vgl. Ref. [14]. Die Auftragung geschieht entsprechend Donnachie, Mirzaie, Ref. [55]: nicht normiert auf absolute Zahlenwerte. Die durchgezogene Kurve ist Resultat unserer Analyse, die basiert auf den im Text parametrisierten Ansätzen für ρ, ρ', ρ'' und deren einfache Breit-Wigner-Distribution; vgl. Anh. G.3.2.

4.2 System höherer $1^+(1^{--})$-/Rho-Anregungen

Auf Basis der so definierten universellen Photon-Lichtkegelwellenfunktion werden untersucht in Photo- und Leptoproduktion höhere Anregungen mit den Quantenzahlen des $\rho(770)$, das heißt mit $I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$, vgl. Fußn. 3.16 auf Seite 132. Wir betrachten zunächst den Zusammenhang, insbesondere die experimentelle Situation.

4.2.1 Zusammenhang

Wir sprechen von einem „System von Anregungen“ und setzen damit bereits implizit voraus die erste im folgenden diskutierte Feststellung. Die Spektren für die Produktion von zwei und vier geladenen Pionen, $\pi^+\pi^-$ und $2\pi^+2\pi^-$, bezüglich derer invarianten Masse M zeigen im Bereich von 1–2 GeV ein komplexes Bild, das hindeutet auf ein Wechselspiel subtil interferierender Zustände. Zum einen in *Hochenergie-Photoproduktion elastisch am Proton* wird im $\pi^+\pi^-$-Spektrum auf der $\rho(770)$-Schulter bei $M \cong 1.6$ GeV ein breites Maximum beobachtet; vgl. Abb. 4.3, und Ref. [11] bzgl. der experimentellen Daten. Ein Anstieg an derselben Stelle findet sich auch im $2\pi^+2\pi^-$-Massenspektrum, vgl. die Refn. [12, 13] und Abb. 4.18 auf Seite 196. Zum anderen in *Elektron-Positron-Annihilation* wird im $\pi^+\pi^-$-Spektrum bei $M \cong 1.2-2$ GeV ein Muster beobachtet, das wesentlich in Kontrast steht zu dem in der Photoproduktion, vgl. Abb. 4.4, und die Refn. [15, 24, 174] bzgl. der experimentellen Daten. Bzgl. des e^+e^--Annihilationspektrums in $2\pi^+2\pi^-$ vgl. Abb. 4.17 auf Seite 195.

Dieser Unterschied suggeriert die Interpretation als zum einen *konstruktive* und zum anderen *destruktive Interferenz* und impliziert, daß im Massebereich von 1.2–2 GeV nicht nur ein Zustand mit den Quantenzahlen des $\rho(770)$ produziert wird. Evidenz für die Existenz zweier Resonanzen wird seit langem diskutiert. So kommen Donnachie, Mirzaie in Ref. [55], vgl. auch Ref. [39], in einer Analyse der experimentellen Massespektren zu dem Schluß, daß eine konsistente Erklärung auf Basis nur einer Resonanz nicht, wohl aber möglich ist auf

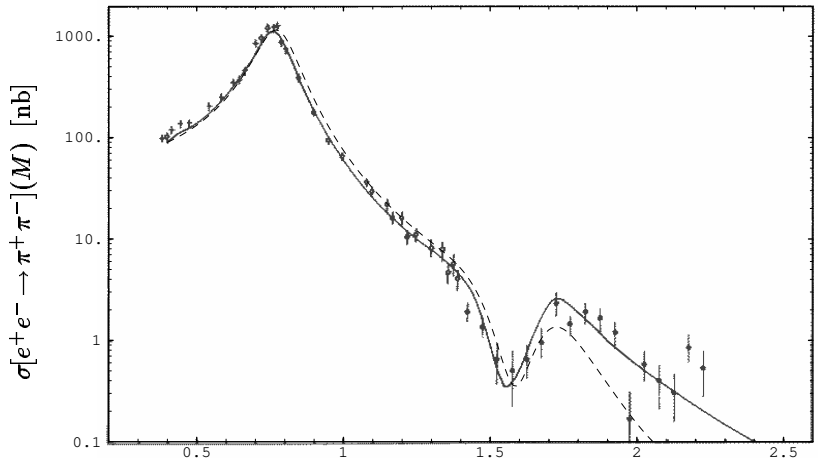


Abbildung 4.4: Massespektrum für e^+e^--Annihilation in $\pi^+\pi^-$. Die Interferenz im Bereich $M \cong 1.6$ GeV ist destruktiv; sie bestimmt die relativen Vorzeichen der Kopplungen an den elektromagnetischen Strom f_V, $V \equiv \rho, \rho', \rho''$, zu $[+,-,+]$. Die durchgezogene Kurve ist die Anpassung von Donnachie, Mirzaie auf Basis zweier interferierender Resonanzen „ρ_1"(1465) und „ρ_2"(1700), vgl. Ref. [55]. Die gestrichelte Kurve stellt dar das Resultat für die Parametrisierungen von ρ', ρ'' im Text, vgl. Tabl. 4.2 und Anh. G.3.2.

Basis zweier Resonanzen ρ_1, ρ_2 mit Massen 1465 beziehungsweise 1700 MeV, die in etwa gleichstark koppeln an den elektromagnetischen Strom. Der alte eine Eintrag für $\rho(1600)$ der Particle Data Group ist ersetzt durch zwei Einträge für $\rho(1450)$, $\rho(1700)$; vgl. die Diskussion unter letzterem ebenda, Ref. [165]. Ferner wird diskutiert die Existenz eines Hybrid-Zustands $h(1450)$ mit den Quantenzahlen des $\rho(770)$: $1^+(1^{--})$, der dominant zerfällt in $\pi\, a_1(1260)$, vgl. die Refn. [39–41]. Wir legen unserer Analyse zwei Zustände zugrunde, die wir bezeichnen mit ρ', ρ'' und verstehen als $\rho(1450)$, $\rho(1700)$. Diese sind zu präzisieren.

Mit Gesamtdrehimpuls $J \equiv 1$ und aufgefaßt als Überlagerung von Paaren eines Quarks und eines Antiquarks, deren Spins ausgerichtet sein können parallel oder antiparallel, besitzt die Wellenfunktion, gemäß der die Paare verteilt sind, Bahndrehimpuls Null oder Zwei; dies suggeriert den Ansatz als $2S$- und $2D$-Zustand [kurz $|NL\rangle$, für systematisch $|N^{2S+1}L_{JM}\rangle$]. Die Wellenfunktion der $2D$-Welle verschwindet am Ursprung, so daß erst in relativistisch erweiterten Modellen eine nichtverschwindende Kopplung an den elektromagnetischen Strom besteht. Diese relativistisch induzierte Kopplung f_V ist insofern von höherer Ordnung und numerisch kleiner als die der $2S$-Welle, entsprechend $\Gamma_V^{l^+l^-}$, die leptonische Zerfallsbreite.[4.6] Dies war auch unser ursprünglicher Ansatz: ρ'' aufzufassen als $2D$-Zustand. Wir argumentieren, weswegen wir ihn verworfen haben zugunsten eines anderen Ansatzes.

Wir rekapitulieren Gl. (3.66):

$$\langle \Omega | J^\mu_{\rm em}(0) | V(q,\lambda) \rangle \;=\; e f_V \, M_V \, \varepsilon^\mu(q,\lambda) \tag{4.24}$$

Durch sie ist f_V definiert als die Kopplung des Vektormesons V an den elektromagnetischen Strom $J_{\rm em} = (e_F \bar\psi_F \gamma^\mu \psi_F)$, Summation über alle (geladenen) Fermionen F impliziert.

[4.6] Donnachie, Mirzaie extrahieren aus den experimentellen Daten für die zweite Anregung ρ_2 mit Masse 1.7 GeV eine leptonische Zerfallebreite von $1.5-3.0$ keV, vgl. Ref. [55]. Als typisches relativistisch erweitertes Quarkmodell postuliert das von Godfrey, Isgur, vgl. Ref. [94], für einen $2D$-Zustand mit vergleichbarer Masse von 1.66 GeV Zahlenwerte von $0.15-0.45$ keV. Vorwegnehmend resultiert unser Ansatz für $V \equiv \rho', \rho''$ in Zahlenwerte für die Kopplung f_V von -103 und 90.3 MeV; damit ist zu konfrontieren der Wert 32.5 MeV auf Basis einer $2D$-Welle in Ref. [94].

Der Zustand $|V(q,\lambda)\rangle$ des Vektormesons mit Viererimpuls q und Helizität $\lambda \equiv 0, \pm 1$ wird aufgefaßt als Superposition von Quark-Antiquark-Paare, die verteilt sind bezüglich einer *nicht-relativistischen* Wellenfunktion. Auswertung der Formel (4.24) im Rahmen konventioneller relativistischer Quantenfeldtheorie ergibt dann, vgl. Ref. [22]:[4.7]

$$f_{V,nS} = \hat{e}_V \sqrt{N_c}\ M_{V,nS}^{-1/2} \cdot \Lambda_{\lambda,S} \cdot 2\sqrt{4\pi} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3}\, \tilde{R}_{n,0}(k) \cdot \frac{2}{3}\Big[1+\frac{1}{2}\frac{m}{k^0}\Big] \tag{4.25}$$

$$f_{V,nD} = \hat{e}_V \sqrt{N_c}\ M_{V,nD}^{-1/2} \cdot \Lambda_{\lambda,D} \cdot 2\sqrt{4\pi} \int_0^\infty \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3}\, \tilde{R}_{n,2}(k) \cdot \frac{\sqrt{2}}{3}\Big[1-\frac{m}{k^0}\Big] \tag{4.25'}$$

mit $k = |\vec{k}|$ dem Betrag des Dreier-Relativimpuls' der Quarks, m deren Konstituentenmasse, $k^0 = \sqrt{k^2+m^2}$ deren Energie und $\tilde{R}_{nl}$ dem Radialteil der Impulsraum-Wellenfunktion:

$$1 = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \left|\tilde{\phi}_{n,l,l_3}(\vec{k}) \equiv \tilde{R}_{n,l}(k)\, \mathrm{Y}_{l,l_3}(\hat{k})\right|^2 = \int \frac{k^2 dk}{(2\pi)^3} \left|\tilde{R}_{n,l}(k)\right|^2 \tag{4.26}$$

Die Faktoren $\Lambda_{\lambda,S}, \Lambda_{\lambda,D}$ in den Gln. (4.25), (4.25′) sind für feste Helizität $\lambda \equiv 0, \pm 1$ identisch Eins; sie geben die Beiträge an bezüglich der Spin-Konfigurationen $(s, \bar{s})$ der Quarks beziehungsweise der dritten Komponente des Bahndrehimpulses l_3:

$$1 = \Lambda_{\lambda,S} = \sum_{s,\bar{s}} \left\{ \delta_\lambda^0 \cdot \frac{1}{2}\left[\delta_{s+}\delta_{\bar{s}-} + \delta_{s-}\delta_{\bar{s}+}\right] + \delta_\lambda^\pm \cdot \delta_{s\pm}\delta_{\bar{s}\pm} \right\} \tag{4.27}$$

$$1 = \Lambda_{\lambda,D} \tag{4.27'}$$
$$= \sum_{l_3} \left\{ \delta_\lambda^0 \cdot \left[\frac{2}{5}\delta_{l_3,0} + \frac{3}{10}\delta_{l_3,+1} + \frac{3}{10}\delta_{l_3,-1}\right] + \delta_\lambda^\pm \cdot \left[\frac{1}{10}\delta_{l_3,0} + \frac{3}{10}\delta_{l_3,\pm 1} + \frac{3}{5}\delta_{l_3,\pm 2}\right] \right\}$$

Für den (nicht-relativistischen) Harmonischen Oszillator mit Parameter ω gilt:

$$\tilde{R}_{00}(k) = \sqrt{4\pi}\ 2^3 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\omega}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\omega^{-2}k^2/2} \tag{4.28}$$

$$\tilde{R}_{20}(k) = \sqrt{4\pi}\ 2^3 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\omega}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\omega^{-2}k^2/2} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\left[\frac{2}{3}\omega^{-2}k^2 - 1\right] \tag{4.28'}$$

$$\tilde{R}_{22}(k) = \sqrt{4\pi}\ 2^3 \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\omega}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\omega^{-2}k^2/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{15}}\,\omega^{-2}k^2 \tag{4.28'}$$

mit weiter nicht spezifizierter Phase. Die Integrale der Gln. (4.25), (4.25′) auf Basis dieser Ausdrücke können analytisch gelöst werden. Wir kürzen ab den Anteil der Kopplung f_V, der nicht abhängt von den Quantenzahlen von V:

$$\hat{f}_{nl} := \frac{f_{V,nl}}{\hat{e}_V \sqrt{N_c}\ M_{V,nl}^{-1/2}} \qquad l \equiv S, D \tag{4.29}$$

und finden, mit $\zeta \equiv m^2/4\omega^2$ und K_0, K_1 den modifizierten Besselfunktionen zweiter Art:

$$\hat{f}_{1S} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\omega}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/4} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\left[1 + \zeta^{3/2}\,\mathrm{e}^{\zeta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\mathrm{K}_1(\zeta) - \mathrm{K}_0(\zeta)\right\}\right] \tag{4.30}$$

$$\hat{f}_{2S} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\omega}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/4} \cdot \left[1 + \zeta^{3/2}\,\mathrm{e}^{\zeta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\frac{1}{3} - \frac{8}{3}\zeta\right]\mathrm{K}_1(\zeta) + \left[1 + \frac{8}{3}\zeta\right]\mathrm{K}_0(\zeta)\right\}\right] \tag{4.30'}$$

$$\hat{f}_{2D} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\omega}{\sqrt{\pi}}\right)^{3/4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\left[1 - \zeta^{3/2}\,\mathrm{e}^{\zeta}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left\{\left[\frac{4}{3} - \frac{8}{3}\zeta\right]\mathrm{K}_1(\zeta) + \frac{8}{3}\zeta\,\mathrm{K}_0(\zeta)\right\}\right] \tag{4.30''}$$

In Abbildung 4.5 sind aufgetragen auf Basis dieser Ausdrücke $f_{V,nl}(m,\omega)$ für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$ als Funktionen der Quarkmasse m beziehungsweise des Oszillatorparameters ω. Wir set-

[4.7] Die Phase in diesen Gleichungen ist nicht physikalisch. Die Diskrepanz für die D-Welle im Vergleich zu Ref. [22] ist Konsequenz dessen, daß wir in den Konventionen von Landau, Lifschitz arbeiten, deren Kugelflächenfunktionen Y_{l,l_3} die zusätzliche Phase i^l implizieren, vgl. Ref. [132].

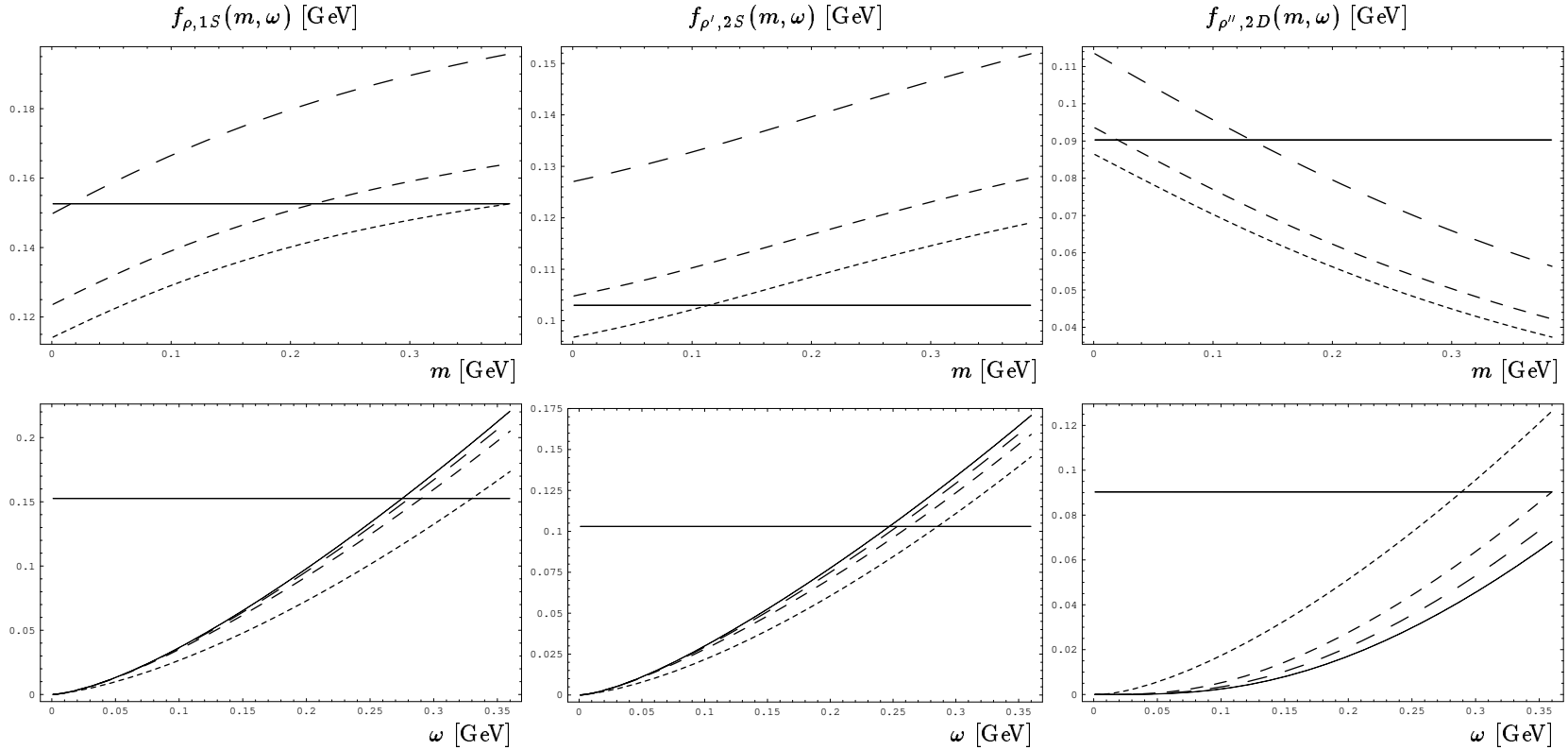


Abbildung 4.5: Kopplungen $f_V(m,\omega)$ in einem relativistisch erweiterten Quarkmodell auf Basis des Harmonischen Oszillators. Die physikalischen Zustände $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ sind aufgefaßt als reine $1S$-,$2S$-,$2D$-Welle. Horizontele Linien: für ρ experimenteller Wert $f_{\rho,\mathrm{exp}} = 0.1526$ GeV, für ρ', ρ'' die Werte, die Resultat sind unseres Ansatzes im Text und die experimentellen $\pi^+\pi^-$-, $2\pi^+2\pi^-$-Spektren reproduziert, vgl. Tabl. 4.2. Erste Zeile: f_V als Funktion der Quark-Konstituentenmasse m für feste $\omega = 0.275, 0.290, 0.330$ GeV [zunehmende Strichlänge]; die ersten beiden Werte reproduzieren $f_{\rho,\mathrm{exp}}$ für die Quarkmasse $M_\rho/2$ bzw. 0.220 GeV, der dritte Wert ist der Parameter $\omega_{\rho,T}$ unseres Ansatzes, vgl. die Tabln. 3.1, 4.1. Zweite Zeile: f_V als Funktion des Oszillatorparameters ω für feste $m = 0.0161, 0.220, 0.310$ GeV, $M_\rho/2$ [zunehmende Strichlänge, durchgezogene Linie]; der erste Wert reproduziert $f_{\rho,\mathrm{exp}}$ für $\omega_{\rho,T} = 0.330$ GeV, der zweite, dritte Wert ist $m_{u/d,\mathrm{eff}}(Q^2{\equiv}0)$ bzw. $m_{s,\mathrm{eff}}(Q^2{\equiv}0)$ als typische Konstituentenmassen.

zen $N_c \equiv 3$, $\hat{e}_V \equiv 1/\sqrt{2}$ und fassen für den Moment die physikalischen Zustände $\rho(770), \rho(1450), \rho(1700)$, vgl. Tabl. 4.2, auf als reine $1S$-,$2S$-,$2D$-Welle mit Massen $M_{\rho 1S}$, $M_{\rho',2S}$, $M_{\rho'',2D}$. Wir finden aus den Kurven für $f_{\rho'',2D}(m,\omega)$ [Spalte rechts]: daß der Ansatz von $\rho'' \equiv \rho(1700)$ als reine $2D$-Welle – ausgeklammert extreme Werte für m, ω – wesentlich kleinere Kopplungen $f_{\rho''}$ generieren, als notwendig sind, die experimentellen $\pi^+\pi^-$-, $2\pi^+2\pi^-$-Massespektren zu reproduzieren; vgl. unseren Ansatz, den wir nun fortfahren zu formulieren.

Die Beobachtung, daß die Anregungen $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ an das Photon etwa gleich stark und von der Größenordnung typischer $2S$-Wellen koppeln, verbietet den Ansatz eines der Zustände als reine $2D$-Welle. Im vorangegangenen Kapitel wurde festgestellt, daß Diffraktion im wesentlichen geschieht ohne Drehimpuls-Übertrag. Beides zusammen ist starkes Argument dafür, daß der $2D$-Zustand stark unterdrückt sein sollte.

Die Notation nS, nD,... rührt her von nicht-relativistischen Wellenfunktionen, wie gerade diskutiert; sie sei benutzt als abkürzende Bezeichnung für die *Lichtkegelwellenfunktionen* von Zuständen, die im nicht-relativistischen Limes entsprechend charakterisiert sind. Wir formulieren als unseren Ansatz für die physikalischen Vektormeson-Zustände:

$$|\rho(770)\rangle = |1S\rangle \tag{4.31}$$

$$|\rho(1450)\rangle = |2S\rangle \cdot \cos\Theta \quad + \; |rest\rangle \cdot \sin\Theta \tag{4.31'}$$

$$|\rho(1700)\rangle = |2S\rangle \cdot (-\sin\Theta) \; + \; |rest\rangle \cdot \cos\Theta \tag{4.31''}$$

Dabei stehe summarisch $|rest\rangle$ für Hybride $|h\rangle$ und den Zustand $|2D\rangle$, deren jeweilige Kopplung an den elektromagnetischen Strom – an das Photon – unterdrückt und numerisch klein ist; wir vernachlässigen daher diese Zustände. Der Mischungswinkel Θ wird berechnet in einer Analyse der $\pi^+\pi^-$-, $2\pi^+2\pi^-$-Massespektren, vgl. Anh. G.3.3. Zunächst aber konstruieren wir die Lichtkegelwellenfunktionen der Zustände $|1S\rangle$, $|2S\rangle$.

4.2.2 $1S$- und $2S$-Lichtkegelwellenfunktion. Konstruktion

In 3.3.2 sind die Lichtkegelwellenfunktionen der $1S$-Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$ angegeben. Der Zustand $|1S\rangle$ wird identifiziert mit der Wellenfunktion für das ρ-Meson dort, der Zustand $|2S\rangle$ in Analogie konstruiert; wir schreiben, vgl. Gl. (3.60):

$$\psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r}) = 1/\sqrt{N_c}\;\; i_{V,f}\;\; \chi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r}) \qquad \text{für} \quad V \equiv 1S, 2S \quad \lambda \equiv L, T \tag{4.32}$$

mit $i_{V,f} = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$ für $V \equiv \rho\text{-}1S, \rho\text{-}2S, \ldots$ (Isospin 1), vgl. Gl. (3.61). Für $V \equiv 1S$ rekapitulieren wir, vgl. Gl. (3.62) und Fußn. 3.14:[4.8]

$$\chi_{1S(\lambda\equiv 0)} = 4z\bar{z}\;\; \omega_{1S,L}\;\; \delta_{h,-\bar{h}} \cdot g_{1S,L}(r)\; h_{1S,L}(z) \tag{4.33}$$

$$\chi_{1S(\lambda\equiv +1)} = \Big[\mathrm{i}\,\omega^2_{1S,T} r\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi} \; \big(z\,\delta_{h+,\bar{h}-} - \bar{z}\,\delta_{h-,\bar{h}+} \big) \; + \; m_{\text{eff}}\,\delta_{h+,\bar{h}+} \Big] \cdot g_{1S,T}(r)\; h_{1S,T}(z)$$

$$\chi_{1S(\lambda\equiv -1)} = \Big[\mathrm{i}\,\omega^2_{1S,T} r\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi} \; \big(\bar{z}\,\delta_{h+,\bar{h}-} - z\,\delta_{h-,\bar{h}+} \big) \; + \; m_{\text{eff}}\,\delta_{h-,\bar{h}-} \Big] \cdot g_{1S,T}(r)\; h_{1S,T}(z)$$

mit $r \equiv |\mathbf{r}|$ und Definition von $g_{V,\lambda}(r)$, $h_{V,\lambda}(z)$ durch, vgl. die Gln. (3.63), (3.64):[4.9]

$$g_{V,\lambda}(r) = \exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega^2_{V,\lambda}\, r^2 \right] \tag{4.34}$$

$$h_{V,\lambda}(z) = \mathcal{N}_{V,\lambda}\;\; \sqrt{z\bar{z}}\;\; \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M^2 (z-1/2)^2}{\omega^2_{V,\lambda}} \right] \qquad \text{für} \quad V \equiv 1S, 2S \quad \lambda \equiv L, T \tag{4.35}$$

[4.8] Bzgl. der effektiven Quarkmasse $m_{\text{eff}} \equiv m_{u/d,\text{eff}}$, vgl. unten die Diskussion in Anschluß an Gl. (4.38).
[4.9] Bzgl. der Vektormeson-Masse $M \equiv M_{1S}$, vgl. unten die Bem. in Anschluß an Gl. (4.37).

Die Funktionen $g_{V,\lambda}(r)$, $h_{V,\lambda}(z)$ sind im wesentlichen die $1S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators und der Ansatz nach Wirbel, Stech, Bauer für die Verteilung der longitudinalen Anteils z des Quarks am Gesamt-Lichtkegelimpuls.

Durch den Index $V \equiv 2S$ seien Funktionen definiert, in Termen derer wir analog die Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ konstruieren. Diese besitzen somit dieselbe funktionale Abhängigkeit differieren aber in ihren Parametern $\omega_{V,\lambda}$, $\mathcal{N}_{V,\lambda}$. Die Bezeichnung als $2S$-, das heißt *radiale* Anregung bezieht sich auf die Freiheitsgrade des *drei*dimensionalen Konfigurationsraums: transversal wie longitudinal. Anschaulich gesprochen, sollte die Wellenfunktion des Zustands $|2S\rangle$ einen „Knoten" bezüglich r und einen „Knoten" bezüglich z besitzen. Wir konstruieren diese explizit in Anhang G.2; hier beschränken wir uns darauf, diese Konstruktion zu skizzieren. Zunächst ist wesentlich, daß sie geschieht im *Impulsraum*.

Für die zwei transversalen Anregungsmoden wird die $1S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators $\tilde{g}_{V,\lambda}(k) \propto g_{V,\lambda}\left(\omega_{V,\lambda}^{-2} k\right)$, $k \equiv |\mathbf{k}|$, vgl. Gl. (3.65), ersetzt durch die $2S$-Wellenfunktion; de facto wird $\tilde{g}_{2S,\lambda}(k)$ multipliziert mit dem entsprechenden Polynom ersten Grades in $\omega_{V,\lambda}^{-2} k^2$ – und dem Faktor $\sqrt{2}$ für die *zwei* Freiheitsgrade:

$$\tilde{g}_{1S,\lambda}(k) \quad \underset{V \equiv 1S \to 2S}{\longrightarrow} \quad \tilde{g}_{2S,\lambda}(k) \cdot \sqrt{2} \cdot \left(1 - \omega_{2S,\lambda}^{-2} k^2\right) \tag{4.36}$$

Für die eine longitudinale Anregungsmode wird $h_{2S,\lambda}(z)$ entsprechend multipliziert – in Hinblick auf manifeste Invarianz bezüglich des Austauschs von Quark und Antiquark: $z \leftrightarrow \bar{z}$ – mit einem Polynom in $z\bar{z}$, der Einfachheit halber mit einem Polynom ersten Grades:[4.10]

$$h_{1S,\lambda}(z) \quad \underset{V \equiv 1S \to 2S}{\longrightarrow} \quad h_{2S,\lambda}(z) \cdot \left(z\bar{z} - A_\lambda\right) \qquad \text{mit} \quad A_\lambda \in \mathbb{R} \tag{4.37}$$

Der Ausdruck im Impulsraum impliziert winkelabhängige Terme mit Faktoren k, die unter Fourier-Transformation übergehen in Ableitungen $\partial/\partial r$; diese wirken auf das aus der Transformation resultierende Polynom in $\omega_{2S,\lambda}^2 r^2$, das auftritt differenziert und nicht-differenziert.

Im Sinne eines konsistenten Modells sollte ein Zusammenhang zwischen den einzelnen Zuständen bestehen: Formal sollte in $g_{2S,\lambda}$ [transversales Exponential] für festes $\lambda \equiv L, T$ der Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ gleich $\omega_{1S,\lambda}$ sein; wir lassen ein leichtes Abweichen zu, vgl. unten 4.2.3, Schritt Zwei in der Fixierung der $2S$-Parameter. In demselben Sinne ist in $h_{2S,\lambda}$ [longitudinales Exponential] universell $M \equiv M_{1S}$ gesetzt.

In Anhang G.2.2 leiten wir her für $V \equiv 2S$, vgl. Fußn. 3.14:

$$\begin{aligned}
\chi_{2S(\lambda\equiv 0)} \;&=\; 4 z\bar{z}\;\omega_{2S,L}\;\delta_{h,-\bar{h}} \\
&\qquad \times \left\{\left(z\bar{z} - A_\lambda\right) + \sqrt{2}\left(\omega_{2S,\lambda}^2 r^2 - 1\right)\right\} \cdot g_{2S,L}(r)\; h_{2S,L}(z) \\
\chi_{2S(\lambda\equiv +1)} \;&=\; \Big[\mathrm{i}\,\omega_{2S,T}^2\, r\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\varphi}\;\left(z\,\delta_{h+,\bar{h}-} - \bar{z}\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) \\
&\qquad \times \left\{\left(z\bar{z} - A_\lambda\right) + \sqrt{2}\left(\omega_{2S,\lambda}^2 r^2 - 3\right)\right\} \\
&\quad +\; m_{\text{eff}}\;\delta_{h+,\bar{h}+} \cdot \left\{\left(z\bar{z} - A_\lambda\right) + \sqrt{2}\left(\omega_{2S,\lambda}^2 r^2 - 1\right)\right\}\Big] \cdot g_{2S,T}(r)\; h_{2S,T}(z) \\
\chi_{2S(\lambda\equiv -1)} \;&=\; \Big[\mathrm{i}\,\omega_{2S,T}^2\, r\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\;\left(\bar{z}\,\delta_{h+,\bar{h}-} - z\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) \\
&\qquad \times \left\{\left(z\bar{z} - A_\lambda\right) + \sqrt{2}\left(\omega_{2S,\lambda}^2 r^2 - 3\right)\right\} \\
&\quad +\; m_{\text{eff}}\;\delta_{h-,\bar{h}-} \cdot \left\{\left(z\bar{z} - A_\lambda\right) + \sqrt{2}\left(\omega_{2S,\lambda}^2 r^2 - 1\right)\right\}\Big] \cdot g_{2S,T}(r)\; h_{2S,T}(z)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

mit $g_{2S,\lambda}(r)$, $h_{2S,\lambda}(z)$ nach den Gln. (4.34), (4.35).

Wir betonen, daß in den Gln. (4.33), (4.38) wie in der Photon-Lichtkegelwellenfunktion,

[4.10] Die Analyse auf Basis eines Polynoms zweiten Grades führt auf vergleichbare Resultate, vgl. Anh. G.2.2.

vgl. die Gln. (4.22), (4.22′), die laufende Quarkmasse $m_{u/d}$ ersetzt ist durch die *effektive Quarkmasse* $m_{\rm eff}(Q^2)$, die nach Gl. (4.23) für $Q^2 < Q_0^2 = 1.05\,{\rm GeV}^2$ in nichttrivialer Weise abhängt von Q^2.[4.11] Dies verwundert für einen Augenblick, da $m_{\rm eff}$ bestimmt ist für die Lichtkegelwellenfunktion des Photons und abhängt von der Größe Q^2, die das Photon charakterisiert. Hier genau liegt aber auch die Konsistenz: Die Einführung der effektiven Quarkmasse $m_{\rm eff}$ im vorangehenden Abschnitt geschieht in der üblichen Interpretation, vgl. etwa Ref. [169]: als die „dem einlaufenden Impulstransfer Q^2 entsprechende Parton-Masse". Sie imitiert chirale Symmetriebrechung und Confinement entsprechend der effektiven Skala Q^2 und ist insofern die relevante Quarkmasse auch in der Lichtkegelwellenfunktion des Vektormesons, das produziert wird durch ein Photon, charakterisiert durch diese Skala.

4.2.3 1*S*- und 2*S*-Parameter. Fixierung

Wir diskutieren im folgenden die Fixierung der $1S$- und $2S$-Parameter. Sei diesbezüglich ausdrücklich verwiesen auf Anhang G.2, insbesondere auf Seite G.2.1 und 308. Es werden dort explizit angegeben und diskutiert die formalen Relationen, die zugrunde liegen der nicht-formalen Diskussion hier.

Aufgrund der unterschiedlichen Helizitätenstruktur der Lichtkegelwellenfunktionen $|1S\rangle$, $|2S\rangle$: Quark-Helizitäten $h, \bar{h} \equiv \pm 1/2$ in Abhängigket der Vektormeson-Helizität $\lambda \equiv 0, \pm 1$, sind diese formalen Relationen von unterschiedlicher Struktur für longitudinale und transversale Polarisation, vgl. die Gln. (4.33), (4.38). Für transversale Polarisation hängen sie weiter generell ab von der Quarkmasse, für longitudinale Polarisation dagegen generell nicht. Ersetzen der laufenden durch die effektive Quarkmasse $m_f \to m_{f,\rm eff}$ induziert daher über diese eine nichttriviale Q^2-Abhängigkeit der transversalen Relationen für $Q^2 < Q_0^2 = 1.05\,{\rm GeV}^2$, vgl. Gl. (4.23). Fixierung der Parameter und die folgende Diskussion bezieht sich daher a priori auf feste, wenn auch beliebige Werte von Q^2.

Die Fixierung der $2S$-Parameter geschieht in Schritten. **Schritt Null** ist die Fixierung der $1S$-Parameter $\omega_{1S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{1S,\lambda}$. Das prinzipielle Vorgehen ist bereits geschildert im vorangehenden Kapitel, vgl. Seite 135; wir rekapitulieren: Die Forderungen von *Normierung* der Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ und *Reproduktion von* f_{1S}, der Kopplung an den elektromagnetischen Strom, stellen für feste Polarisation $\lambda \equiv L, T$ und festes Q^2 formal ein System zweier gekoppelter Gleichungen dar, das implizit über Funktionen, die Integrationen implizieren, bestimmt die Parameter $\mathcal{N}_{1S,\lambda}$, $\omega_{1S,\lambda}$ in Abhängigkeit von den experimentell wohldeterminierten Zahlenwerten $M_{1S} \equiv M_{\rho(770)}$ und $f_{1S,\lambda} \equiv f_{\rho(770)}$ für das $\rho(770)$-Vektormeson. Ein solches System von Gleichungen ist zu lösen für transversale und longitudinale Polarisation und sämtliche Werte des betrachteten Q^2-Intervalls. Die Parameter $\omega_{1S,L}$, $\mathcal{N}_{1S,L}$ folgen als konstant, die Parameter $\omega_{1S,T}$, $\mathcal{N}_{1S,T}$ – aufgrund der $m_{\rm eff}$-Abhängigkeit der Relationen – als nichttrivial abhängig von Q^2 für Werte unterhalb $Q_0^2 = 1.05\,{\rm GeV}^2$.

Zahlenwerte für die $1S$-Parameter $\omega_{1S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{1S,\lambda}$ für $\lambda \equiv L, T$ und $Q^2 \equiv 0$ sind angegeben in Tabelle 4.1, linke Spalten; die Q^2-Abhängigkeit für transversale Polarisation ist graphisch dargestellt in Abbildung 4.6.

Dabei betonen wir zunächst, daß sich die Zahlenwerte von Tabelle 4.1 beziehen auf verschwindende Photon-Virtualität $Q^2 \equiv 0$. Aufgrund der bei diesem Wert nichtverschwindenden effektiven Quarkmasse $m_{u/d,\rm eff}(Q^2 \equiv 0) = 0.220\,{\rm GeV}$ sind die Zahlenwerte für $\rho(770)$ dort nicht gleich den entsprechenden Zahlen in Tabelle 3.1 auf Seite 135; diese basieren auf einer verschwindenden laufenden Quarkmasse $m_{u/d} = 0$. Übereinstimmung ist in der Tat gegeben für Werte $Q^2 \geq Q_{u/d,0}^2 = 1.05\,{\rm GeV}^2$, da für diese auch $m_{u/d,\rm eff}(Q^2)$ verschwindet.

[4.11] Sei hier und im folgenden abkürzend notiert: $m_{\rm eff} \equiv m_{u/d,\rm eff}$ und $Q^2 \equiv Q_{u/d,0}^2$.

Parameter der $1S$- und $2S$-Lichtkegelwellenfunktionen für $Q^2 \equiv 0$				
approximativ orthogonal (a.o.), Ref. [125]:				
	$1S$		$2S$	
	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
$\omega_{V,\lambda}$[GeV]	0.330	0.213	0.296 53[a]	0.234 50[a]
$\mathcal{N}_{V,\lambda}[\sqrt{N_c} \equiv 3]$[b]	4.48	3.44	3.21 16	1.96 44
A_λ	—	—	0.228 46	− 0.328 38
$f_{V,\lambda}$[GeV]	**0.152 6**	**0.152 6**	− 0.137 23	− 0.137 23
$R_{V,\lambda}$[fm]	0.299	0.536	0.572 8	0.725 0
orthogonal, Referenz-Parametersatz:				
	$1S$		$2S$	
	Longitudinal	Transversal	Longitudinal	Transversal
$\omega_{V,\lambda}$[GeV]	0.330	0.213	0.297 72[a]	0.233 74[a]
$\mathcal{N}_{V,\lambda}[\sqrt{N_c} \equiv 3]$[b]	4.48	3.44	3.20 98	1.96 34
A_λ	—	—	0.227 94	− 0.291 84
$f_{V,\lambda}$[GeV]	**0.152 6**	**0.152 6**	− 0.137 78	− 0.137 78
$R_{V,\lambda}$[fm]	0.299	0.536	0.570 6	0.723 0

Tabelle 4.1: Parameter der Wellenfunktionen $|1S\rangle$, $|2S\rangle$ für $Q^2 \equiv 0$, $m_{\rm eff}(0) \equiv 0.220$ GeV. Input in Fettdruck: $f_{1S} \equiv f_{\rho(770)}$ und Δ; zusätzlich: $M_{1S} \equiv M_{\rho(770)}$, vgl. die Tabln. 3.1, 4.2, und, zur Berechnung von $f_{2S,T}$, die Abschätzung $M_{2S} \cong 1.6$ GeV für den nichtphysikalischen $2S$-Zustand. Die Parametersätze beziehen sich auf approximative und exakte Orthogonalität von $|2S\rangle$ auf $|1S\rangle$, vgl. Text und Anh. G.2.2. Allein im Zahlenwert für A_T geht die Diskrepanz über die Genauigkeit hinaus, die wir in Ref. [125] angegeben haben, – so daß für Kommensurabilität hier die Anzahl angegebener Dezimalstellen erhöht wurde.

[a] entspricht Verrückung $\mathbf{\Delta^{a.o.} \cong 10.1\ \%}$ und $\mathbf{\Delta \cong 9.76\ \%}$ für approximative bzw. exakte Orthogonalität
[b] vgl. Unterschrift zu Tabl. 3.1 auf Seite 135

Daher sind unsere Resultate für $\rho(770)$ und $\omega(782)$ aus Kapitel 3 vollständig gültig oberhalb dieser Schwelle [bzw. die Resultate für $\phi(1020)$ oberhalb der Schwelle $Q^2_{s,0} = 1.6$ GeV^2].

Die Bestimmung von $\omega_{1S,T}$ als Funktion von Q^2 ist komplex; sie geschieht in praxi für $\lambda \equiv L, T$ und jedes Q^2 durch die numerische Bestimmung im Rahmen des Newtonschen Approximationsverfahrens des Fixpunktes einer komplizierten nicht-auflösbaren Gleichung von Integral-Funktionen in $\omega_{1S,T}$. Andererseits ist $\omega_{1S,T}(Q^2)$ von zentraler Bedeutung für die Berechnung aller übrigen Parameter. Wir geben daher in Anhang G.2.2 auf Seite 311, Tabelle G.1 explizite Zahlenwerte an in ausreichender Genauigkeit und für das gesamte relevante Intervall von Q^2; siehe dort auch den bezüglich Q^2 konstanten Zahlenwert für $\omega_{1S,L}$.

Die Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ des $2S$-Zustands besitzt gegenüber $|1S\rangle$ – für feste Polarisation $\lambda \equiv L, T$ – neben $\omega_{2S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$ einen dritten Parameter, nämlich A_λ. Dieser parametrisiert die Position des Knotens der longitudinalen Anregungsmode und stellt sich heraus als der Parameter, der allein die Forderung subsumiert von Orthogonalität von $|2S\rangle$ auf $|1S\rangle$ und durch diese bereits vollständig bestimmt ist, vgl. die Gln. (G.53), (G.54) bzw. (G.53′), (G.54′). Die Fixierung der Parameter $\omega_{2S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$ und A_λ kann nicht analog durchtgeführt werden wie die des $1S$-Zustands, und zwar aus dem folgenden Grund.

Der $2S$-Zustand ist nicht physikalisch und die $M_{\rho(770)}$ und $f_{\rho(770)}$ entsprechenden Parameter M_{2S} und f_{2S} daher experimentell nicht unmittelbar zugänglich. Seine Masse kann zwar abgeschätzt werden durch die experimentell bestimmten Massen der physikalischen

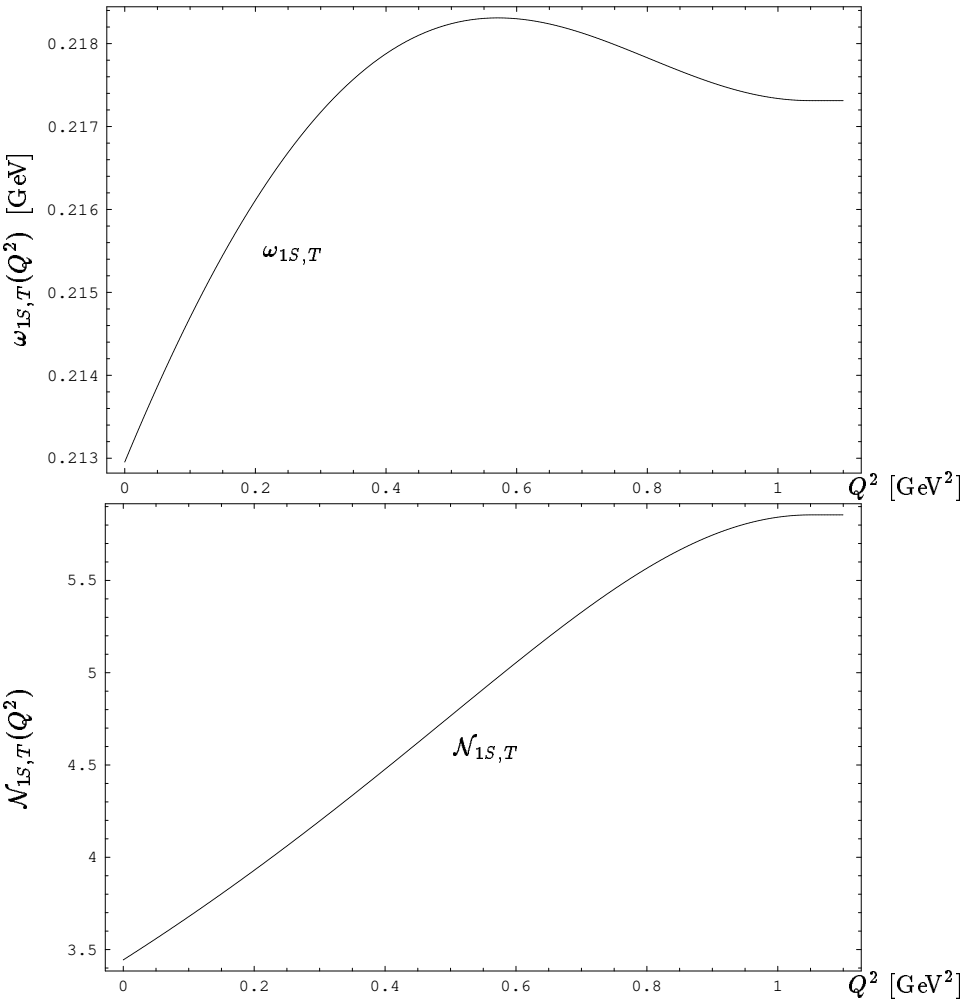


Abbildung 4.6: Verhalten mit Q^2 der Parameter $\omega_{1S,T}$, $\mathcal{N}_{1S,T}$. Die Abhängigkeit von Q^2 wird induziert durch die effektive Quarkmasse $m_{\text{eff}}(Q^2)$. Diese beträgt $m_{\text{eff}}(0) = 0.220$ GeV für $Q^2 \equiv 0$, fällt linear ab mit Q^2 und verschwindet für $Q^2 \geq Q_0^2 = 1.05$ GeV^2; das heißt für größere Q^2 sind die Parameter $\omega_{1S,T}$, $\mathcal{N}_{1S,T}$ eingefroren auf ihre Werte für $Q^2 \equiv 1.05$ und diese identisch denen des vorangehenden Kapitels.

Zustände $\rho(1450)$, $\rho(1700)$, vgl. die Gln. (4.31′), (4.31″). Die Kopplungen $f_{\rho(1450)}$, $f_{\rho(1700)}$ aber sind experimentell nicht bekannt, so daß unser Zahlenwert für f_{2S} reines Postulat sein wird. In die Relationen, auf Basis derer wir die $2S$-Parameter bestimmen, gehen die Kopplung de facto nur ein als $f_{2S,L}$ und als das Produkt $f_{2S,T} \cdot M_{2S}$, vgl. die Gln. (G.17), (G.17′). Wir stellen andererseits die physikalische Forderung von Identität der Kopplungen für longitudinale und transversale Polarisation: $f_{2S} \equiv f_{2S,L} \equiv f_{2S,T}$; vgl. etwa die Gln. (4.25), (4.25′) und (4.27), (4.27′) in dem vorgestellten relativistisch erweiterten Quarkmodell. Damit folgt prinzipiell M_{2S}. Wir gehen hiervon abweichend den folgenden Weg: Wir schätzen ab $M_{2S} \cong 1.6$ GeV[4.12] und fordern Identität der Kopplungen für longitudinale und transversale Polarisation. Dies wird erreicht, indem wir zulassen, daß für feste Polarisation der Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ abweicht von $\omega_{1S,\lambda}$, und fordern, daß die relative Verrückung *minimal* und *identisch* ist. Wir präzisieren dies im folgenden.

[4.12] Im Sinne des alten Eintrags $\rho(1600)$ der Particle Data Group, vgl. 4.2.1 auf Seite 161.

Sei betrachtet feste Polarisation $\lambda \equiv L, T$. **Schritt Eins** setzt an die Oszillatorparameter des $2S$-Zustands als identisch gleich denen des $1S$-Zustands:

$$\text{Schritt Eins:} \qquad \omega_{2S,\lambda} \stackrel{!}{=} \omega_{1S,\lambda} \qquad \lambda \equiv L, T, \text{ fest} \tag{4.39}$$

vgl. Gl. (G.48). **Schritt Eins′** bstimmt dann sukzessive A_λ, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$ und $f_{2S,\lambda}$: Aus der ersten Forderung an den Zustand $|2S\rangle$, von *Orthogonalität* auf $|1S\rangle$, folgt der Parameter A_λ in Abhängigkeit von $\omega_{1S,\lambda}$ und M_{1S},[4.13] vgl. die Gln. (G.53), (G.53′) und (G.54), (G.54′). Aus der zweiten Forderung an $|2S\rangle$, seiner *Normiertheit*, folgt weiter mithilfe A_λ der Parameter $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$[4.13], vgl. die Gln. (G.52), (G.52′). Aus der dritten Forderung an $|2S\rangle$, von *Reproduktion der Kopplung an den elektromagnetischen Strom* J_{em}, folgt schließlich mithilfe A_λ, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$ ein expliziter Zahlenwert für $f_{2S,\lambda}$, vgl. die Gln. (G.51), (G.51′):

$$\begin{aligned} \text{Schritt Eins}': \quad & \omega_{2S,\lambda} \qquad \lambda \equiv L, T, \text{ fest} \\ & \rightarrow \quad |2S\rangle \text{ ! orthogonal } |1S\rangle \quad \Longrightarrow \quad A_\lambda \\ & \rightarrow \quad |2S\rangle \text{ ! normiert} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{N}_{2S,\lambda} \\ & \rightarrow \quad |2S\rangle \text{ ! koppelt an } J_{\text{em}} \quad \Longrightarrow \quad f_{2S,\lambda} \end{aligned} \tag{4.40}$$

Dies geschieht separat und unabhängig voneinander für longitudinale und transversale Polarisation. Offensichtlich differieren die resultierenden Kopplungen: $f_{2S,L} \neq f_{2S,T}$; wir fordern dagegen physikalisch ihre Identität. **Schritt Zwei** ist daher, simultan wegzurücken $\omega_{2S,L}$ von $\omega_{1S,L}$ und $\omega_{2S,T}$ von $\omega_{1S,T}$:

$$\text{Schritt Zwei:} \qquad f_{2S,L} \stackrel{!}{=} f_{2S,T} \quad \Longrightarrow \quad \omega_{2S,\lambda} \neq \omega_{1S,\lambda} \qquad \lambda \equiv L, T, \text{ fest} \tag{4.41}$$

$$\omega_{2S,L} \stackrel{!}{=} \omega_{1S,L}(1-\Delta) \tag{4.41′}$$

$$\& \quad \omega_{2S,T} \stackrel{!}{=} \omega_{1S,T}(1+\Delta) \qquad |\Delta| \text{ minimal}$$

vgl. die Gln. (G.49), (G.49′). Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ kann in dieser Weise erreicht werden für $\Delta > 0$, das heißt $\omega_{2S,L}$ ist kleiner zu wählen als $\omega_{1S,L}$ und $\omega_{2S,T}$ größer als $\omega_{1S,L}$. Effektiv ist Identität der Kopplungen erreicht für relative Verrückungen um etwa 10 %. Explizit ist $\Delta \equiv \Delta(Q^2)$ eine Funktion von Q^2.

In praxi gehen wir vor wie folgt: Wir betrachten festes Q^2, für Definiertheit $Q^2 \equiv 0$. Wir setzen $\omega_{2S,\lambda} \equiv \omega_{1S,\lambda}$ als Schritt Eins. Wir führen durch Schritt Eins′, das heißt wir bestimmen sukzessive A_λ, dann $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, dann $f_{2S,\lambda}$ – separat für longitudinale und transversale Polarisation $\lambda \equiv L, T$. Vergleich von $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ suggeriert einen Ansatz für Δ; der gemäß Gl. (4.41′) Werte für $\omega_{2S,\lambda}$ induziert. Mit diesen Oszillatorparameter wird wiederholt Schritt Eins′, das heißt sukzessive bestimmt A_λ, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, und $f_{2S,\lambda}$. Vergleich von $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ suggeriert eine Modifikation von Δ. Mit den korrespondierenden $\omega_{2S,\lambda}$ wird wieder durchgeführt Schritt Eins′. Und so weiter. Resultat dieser Iteration von Hand ist ein Wert $\Delta(Q^2 \equiv 0)$, der garantiert neben Identität von $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ die Forderungen von Orthogonalität und Normiertheit der Lichtkegelwellefunktionen $|1S\rangle$, $|2S\rangle$ für feste Polarisation.

Dieses Iterationsverfahren ist durchzuführen für sämtliche Werte von Q^2 in dem Intervall von 0 bis $Q_0^2 = 1.05\ \text{GeV}^2$, in dem die Forderungen über die effektive Quarkmasse m_{eff} in nichttrivialer Weise abhängen von Q^2. Dieses Vorgehen ist offensichtlich sehr aufwendig. Prinzipiell kann es formalisiert und automatisiert werden, etwa auf Basis des Newtonschen Approximationsverfahrens zur Bestimmung von Fixpunkten impliziter Funktionen.

[4.13] d.h. ein expliziter Zahlenwert, der effektiv abhängt von $M_{1S} \equiv M_{\rho(770)}$ und $f_{1S} \equiv f_{\rho(770)}$

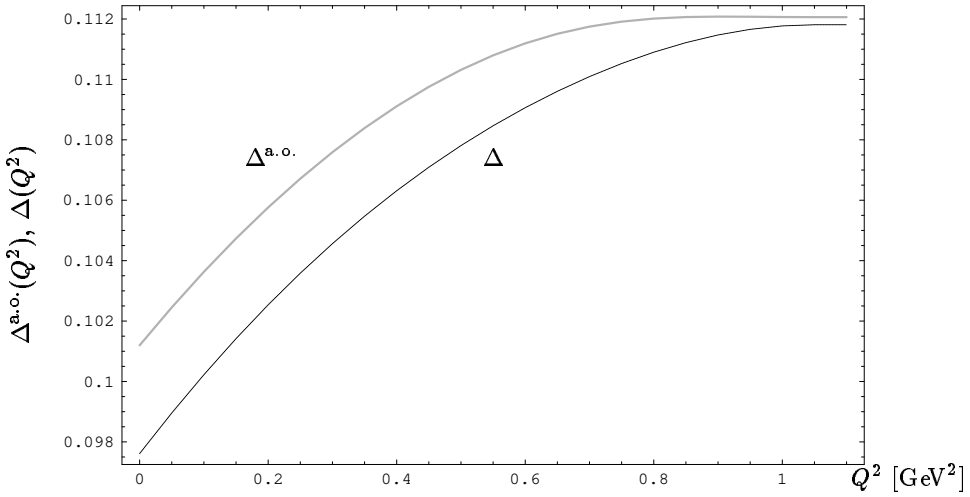


Abbildung 4.7: Verhalten mit Q^2 der Parameter $\Delta^{a.o.}$, Δ. Diese bestimmen die Verrückung der Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ relativ zu $\omega_{1S,\lambda}$ in der Weise, daß garantiert ist Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ bei minimaler und identischer relativen Verrückung. Graue Kurve für approximierte, schwarze für exakte Orthogonalität von $|2S\rangle$ auf $|1S\rangle$, vgl. Text.

Dieses legen wir zugrunde der Berechnung des $1S$-Oszillatorparameters für transversale Polarisation: $\omega_{1S,T}$ in Schritt Null; vgl. explizit Anh. G.2.1, die Gln. (G.40), (G.41). Aufgrund der Komplexität der Gleichungen zur Bestimmung von $\Delta(Q^2)$ ist dies in diesem Fall nicht praktikabel; wir verweisen auf Anh. G.2.1, die Gln. (G.51), (G.51′), (G.52), (G.52′) und (G.53), (G.53′). Wir sind dazu gezwungen, $\Delta(Q^2)$ zu bestimmen *von Hand*.

In Abbildung 4.7 stellt die schwarze (durchgezogene) Kurve graphisch dar das Resultat für Δ als Funktion von Q^2. Zum einen ist die Bestimmung von $\Delta(Q^2)$ sehr aufwendig. Zum anderen determiniert $\Delta(Q^2)$ gemäß Gl. (4.41′) eindeutig die Oszillatorparameter $\omega_{2S,L}$, $\omega_{2S,T}$. Diese sind – als Schritt Eins′ – fundamentaler Ausgangspunkt der sukzessiven Bestimmung der Parameter A_λ, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, und $f_{2S,\lambda}$. Neben den $1S$-Oszillatorparametern, insbesondere $\omega_{1S,T}(Q^2)$ ist daher die Funktion $\Delta(Q^2)$ von zentraler Bedeutung, so daß wir explizite Zahlenwerte in ausreichender Genauigkeit und für das gesamte relevante Intervall von Q^2 hinzufügen der Tabelle G.1 auf Seite 311.

Aus $\Delta(Q^2)$ folgen unmittelbar die $2S$-Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$. Nach Gl. (4.41′) *induziert* ihre Abhängigkeit von Q^2 eine Q^2-Abhängigkeit des longitudinalen $2S$-Oszillatorparameters $\omega_{2S,L}$ gegenüber dem konstanten $1S$-Parameter $\omega_{1S,L}$ – und *modifiziert* ihre Abhängigkeit die Q^2-Abhängigkeit des transversalen $2S$-Oszillatorparameters $\omega_{2S,T}$, die herrührt von dem $1S$-Parameter $\omega_{1S,T}$. Konsequenz des Fixierungsverfahrens ist daher die nichttriviale Abhängigkeit von Q^2 für Werte unterhalb $Q_0^2 = 1.05\,\mathrm{GeV}^2$ *beider Polarisationen* aufgrund Schritt Zwei und *sämtlicher* $2S$-Parameter aufgrund Schritt Eins′.

Die Parameter A_λ, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$ und die Kopplung $f_{2S} \equiv f_{2S,L} \equiv f_{2S,T}$ folgen aus $\omega_{2S,\lambda}$ sukzessive durch Schritt Eins′. Zahlenwerte für $Q^2 \equiv 0$ sind angegeben im unteren Teil von Tabelle 4.1. Die Abhängigkeit von Q^2 der Kopplung f_{2S} ist graphisch dargestellt in Abbildung 4.8, die der Parameter $\omega_{2S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ für longitudinale Polarisation in Abbildung 4.9, für transversale Polarisation in Abbildungen 4.10: Wir verweisen auf die schwarzen durchgezogenen Kurven und betrachten die entsprechenden Parameter, die resultieren aus dem geschilderten Verfahren auf Basis von $\omega_{1S,\lambda}$, $\Delta(Q^2)$, vgl. Tabl. G.1 auf Seite 311, als *Referenz-Parametersatz*. Wir fassen zusammen, daß er charakterisiert: Lichtkegelwellenfunktionen $|1S\rangle$, $|2S\rangle$, die für je-

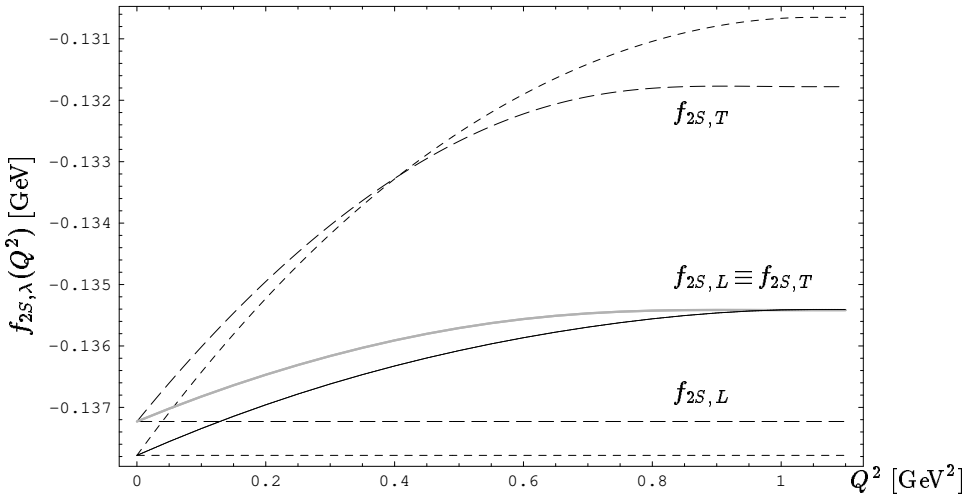


Abbildung 4.8: Verhalten mit Q^2 der Kopplungen $f_{2S,\lambda}$. Lang gestrichelt: Die approximativ orthogonale Parametrisierung von Ref. [125]; die Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ werden für $Q^2 \equiv 0$ minimal in der Weise verrückt von $\omega_{1S,\lambda}$, daß die Kopplungen $f_{2S,\lambda}$ identisch sind, und eingefroren auf diese Werte $\omega_{2S,\lambda}(Q^2{\equiv}0)$. Für nichtverschwindende Q^2 ist Identität von $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ nicht mehr erfüllt, da die transversalen Relationen über $m_{\rm eff}$ abhängen von Q^2, vgl. Schritt Eins$'$. Kurz gestrichelt: analog für exakte Orthogonalität. Die durchgezogenen Kurven zeigen den Effekt, wenn die $\omega_{2S,\lambda}$ – abhängig von Q^2 – so verschoben werden, daß Identität der Kopplungen für jedes Q^2 garantiert ist: grau approximative, schwarz exakte Orthogonalität auf Basis von $\Delta^{\rm a.o.}(Q^2)$ beziehungsweise $\Delta(Q^2)$.

des Q^2 normiert sind, orthogonal aufeinander stehen und eine für longitudinale und transversale Polarisation identische Kopplungen $f_{2S} \equiv f_{2S,L} \equiv f_{2S,T}$ an den elektromagnetischen Strom generieren. Dabei ist die relative Verrückung der $2S$- von den $1S$-Oszillatorparameter minimal und identisch.

Im oberen Teil von Tabelle 4.1 sind angegeben Zahlenwerte, die abweichen von denen des Referenz-Satzes; in den Abbildungen 4.7-4.10 sind neben den schwarzen durchgezogenen Kurven weitere Kurven aufgetragen. In den folgenden zwei Bemerkungen diskutieren wir die argumentative Basis, auf der diese Zahlenwerte und Kurven stehen, und vergleichen sie kritisch mit denen des Referenz-Satzes.

Bemerkung Eins. In Anhang G.2, vgl. die Seiten 304ff. und 308ff., ist geschildert, daß wir Relationen, die eingehen in die dargestellte Fixierung der $2S$-Parameter, analytisch hergeleitet haben erst nach Veröffentlichung von Ref. [125]. Im Zuge ihrer numerischen Approximation wurde dort eine Näherung angenommen, die dazu führt, daß die Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ nur approximativ, nicht exakt orthogonal ist auf $|1S\rangle$. Die Näherung bezieht sich allein auf Orthogonalität, nicht auf Normiertheit und Reproduktion der Kopplung; daher ist unmittelbar affektiert nur A_λ. Sie ist sensitiver auf eine nichtverschwindende Quarkmasse, so daß sie zu deutlicheren Effekten führen sollte für transversale Polarisation und kleinen Q^2. Aufgrund des dargestellten Verfahrens zur sukzessiven Bestimmung der Parameter – Iteration von Schritt Zwei und Schritt Eins$'$ – werden mittelbar affektiert sämtliche Größen: $\omega_{2S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ und $f_{2S,\lambda}$, ungeachtet der Polarisation.

In Tabelle 4.1 sind angegeben die expliziten Zahlenwerte für $Q^2 \equiv 0$. Wir finden, vgl. oben und unten, die beiden rechten Spalten, daß die numerische Diskrepanz bereits vollständig verschwindet in der Genauigkeit, die angegeben war in Ref. [125]; so beträgt für f_{2S} der

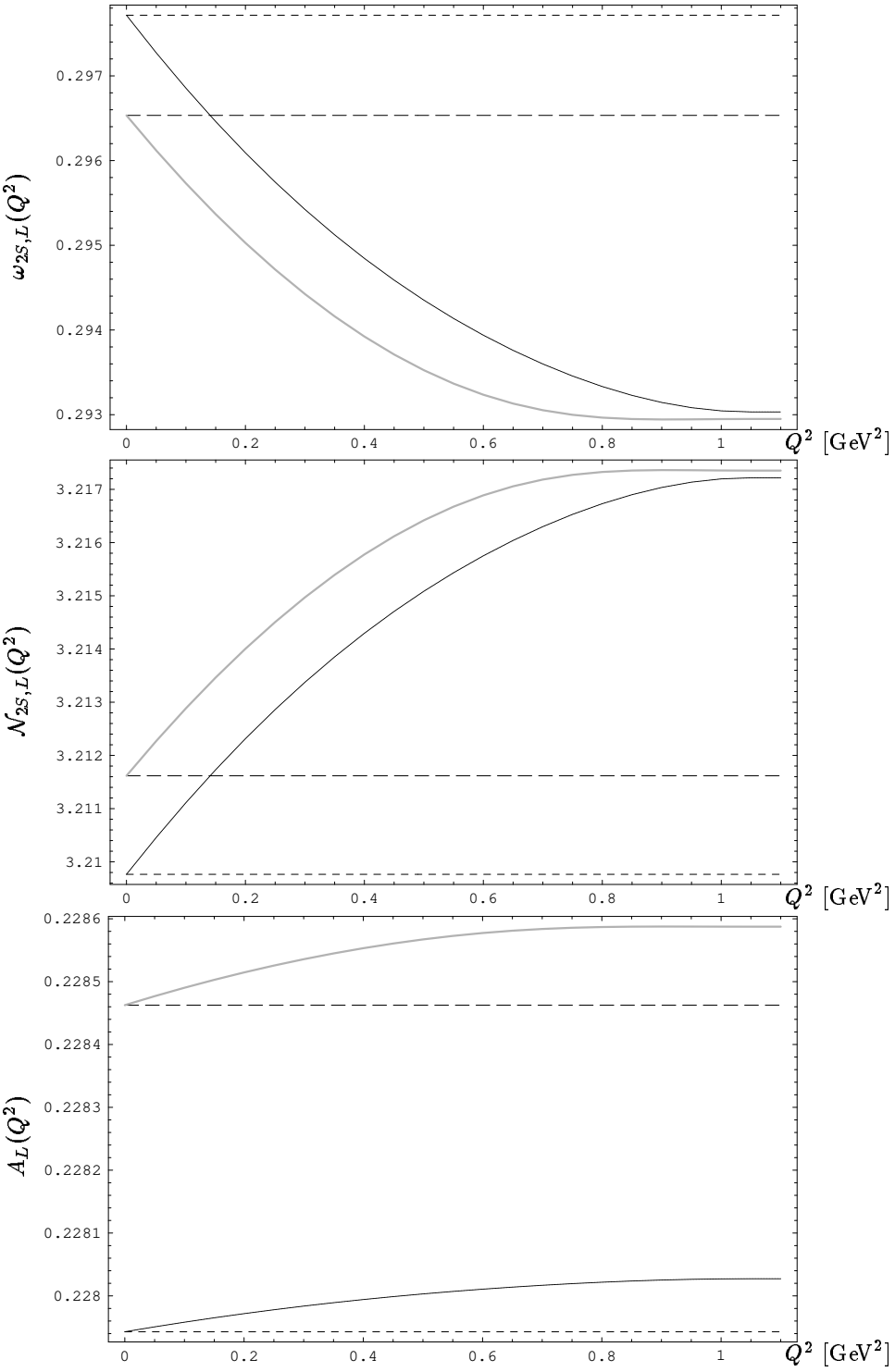


Abbildung 4.9: Verhalten mit Q^2 der $2S$-Parameter $\omega_{2S,L}$, $\mathcal{N}_{2S,L}$, A_L für longitudinale Polarisation, $\lambda \equiv L$. Gestrichelte und durchgezogene Kurven entsprechend Abbildung 4.8 und Text. Die Q^2-Abhängigkeit der longitudinalen Parameter ist induziert durch die Forderung von Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ für jedes Q^2; sie ist insgesamt nur sehr schwach.

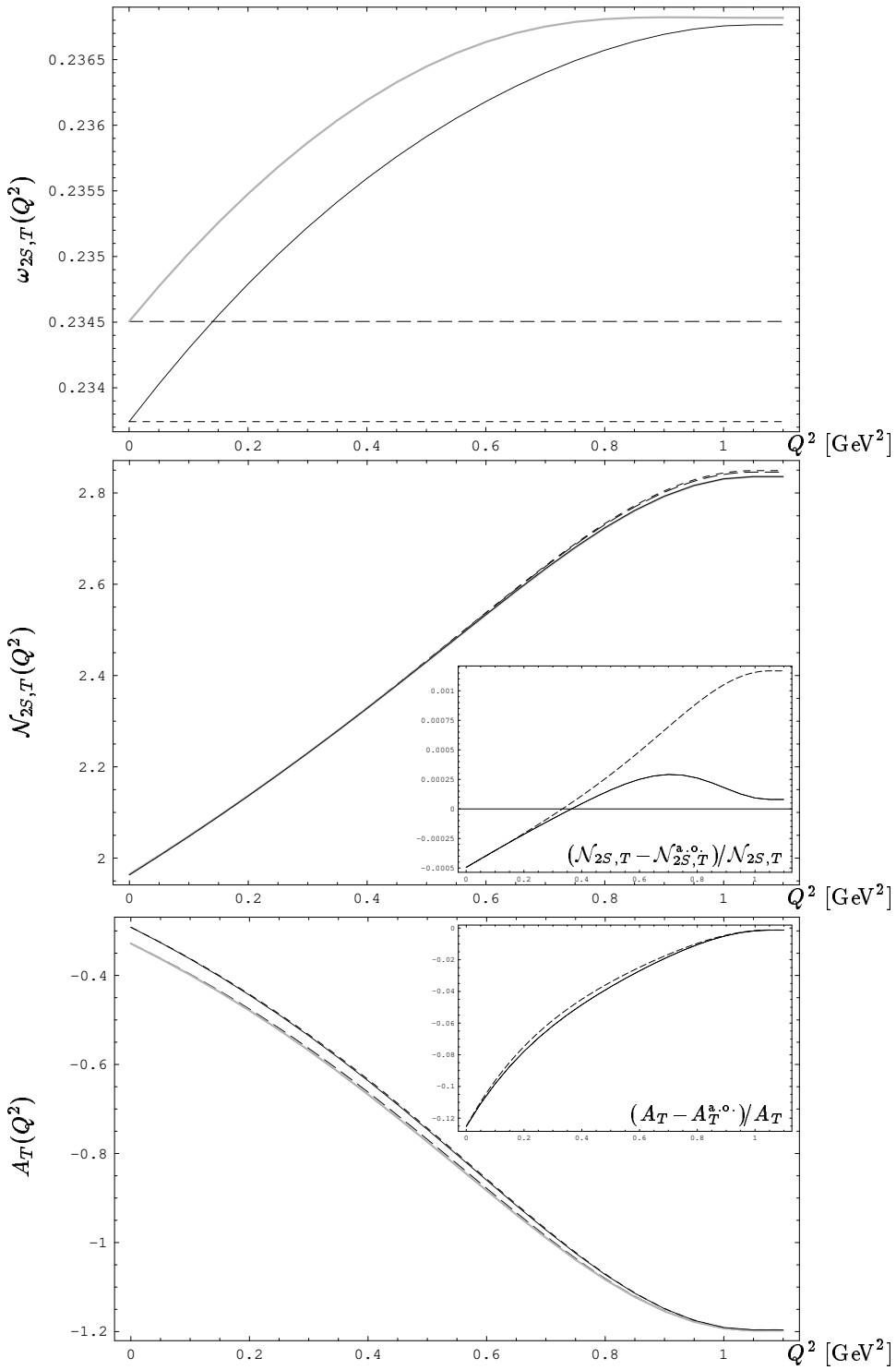


Abbildung 4.10: Verhalten mit Q^2 der $2S$-Parameter $\omega_{2S,T}$, $\mathcal{N}_{2S,T}$, A_T für transversale Polarisation, $\lambda \equiv T$. Kurven entsprechend Abbildung 4.8 und Text. Die relative Abweichung für approximative Orthogonalität bezogen auf exakte ist gezeigt in den kleinen Abbildungen: Für $\mathcal{N}_{2S,T}$ ist sie $< 0.12\,\%$ und $< 0.05\,\%$ für Identität der Kopplungen nur für $Q^2 \equiv 0$ bzw. für alle Q^2 [volle Linie], also irrelevant; für A_T beträgt sie in beiden Fällen bis zu 12 %.

Zahlenwert $-0.137\,23$ gegenüber $-0.137\,78$ im Referenz-Satz. – Ausgenommen der transversale Parameter A_T: für diesen folgt -0.328 gegenüber -0.291. Die Diskrepanz beträgt bis zu 12 % und ist damit zunächst signifikant, vgl. die untere Abbildung in 4.10: Die Kurve in langen Strichen ist zu vergleichen mit der Kurve in kurzen Strichen, die korrespondiert mit dem Referenz-Satz. Wir werden diesen Punkt ausführlich diskutieren.

Der Parametersatz von Ref. [125] ist in den Abbildungen 4.8-4.10 konsequent dargestellt durch die Kurven in langen Strichen. Wir verglichen hier mit den Kurven in kurzen Strichen, statt mit den schwarzen durchgezogenen Linien – die konsequent darstellen den Referenz-Parametersatz – aus dem Grund der folgenden Bemerkung.

Bemerkung Zwei. Das Iterationsverfahren zur Bestimmung der Funktion $\Delta(Q^2)$ ist sehr aufwendig und muß von Hand durchgeführt werden. Bereits dies ist in praktikablem Rahmen erst möglich, seit wir sämtliche Relationen, die entsprechen den Forderungen von Orthonormalität und Reproduktion der Kopplung an denn elektromagnetischen Strom, analytisch hergeleitet haben. Zum Zeitpunkt unserer Veröffentlichung Ref. [125] war dies noch nicht der Fall. Dort wird Δ bestimmt für $Q^2 \equiv 0$ und die Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ entsprechend verrückt von den Werten $\omega_{1S,\lambda}$. Statt das Verfahren durchzuführen für sämtliche Werte von Q^2 im Intervall nichttrivialer Abhängigkeit: $Q^2 < Q_0^2 = 1.05$ GeV, werden die Oszillatorparameter eingefroren auf diese Werte $\omega_{2S,\lambda}(Q^2 \equiv 0)$ für nichtverschwindende Q^2. Die Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ sind von Hand konstant gesetzt, vgl. die Abbn. 4.9, 4.10; mit diesen konstanten Zahlenwerten wird für jedes Q^2 wieder Schritt Eins′ durchgeführt, das heißt sukzessive bestimmt A_λ, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, $f_{2S,\lambda}$. Konsequenz ist, daß für feste Polarisation die Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ normiert ist und [approximativ][4.14] orthogonal steht auf $|1S\rangle$ *für jedes* Q^2, identische Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ liefert aber *nur für* $Q^2 \equiv 0$.

Mit Kenntnis aller Relationen *analytisch* ist das Iterationsverfahren zur Bestimmung der Verrückung Δ praktikabler, obwohl es weiterhin von Hand durchgeführt werden muß. Dies setzt uns dennoch in die Lage, analog zu $\Delta(Q^2)$ die Funktion $\Delta^{\text{a.o.}}(Q^2)$ zu bestimmen. Dabei stehe der Index für „approximativ orthogonal“ und bestimme $\Delta^{\text{a.o.}}$ in vollständiger Analogie zu Δ die Verrückung von $\omega_{2S,\lambda}$ relativ zu $\omega_{1S,\lambda}$ – impliziere aber dieselbe Näherung, die gemacht ist in Ref. [125] und die führt auf bezüglich $|1S\rangle$ nur approximativ orthogonale Lichtkegelwellenfunktionen $|2S\rangle$. In Abbildung 4.7 ist als graue (durchgezogene) Kurve die Funktion $\Delta^{\text{a.o.}}(Q^2)$ aufgetragen in Gegenüberstellung mit $\Delta(Q^2)$.

Die Kurven der Abbildungen 4.8-4.10 beziehen sich konsequent auf Lichtkegelwellenfunktione $|1S\rangle$, $|2S\rangle$, die folgendermaßen charakterisiert sind:

- durchgezogen schwarz, Referenz-Parametersatz: Orthogonalität, Normiertheit, Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ für sämtliche Q^2
- durchgezogen grau: approximative Orthogonalität[4.14], Normiertheit, Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ für sämtliche Q^2
- kurze Striche: Orthogonalität, Normiertheit für sämtliche Q^2; Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ nur für $Q^2 \equiv 0$[4.15]
- lange Striche, Ref. [125]: approximative Orthogonalität[4.14]; Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ nur für $Q^2 \equiv 0$[4.15]

Zu Aussagen bezüglich approximativer versus exakter Orthogonalität von $|2S\rangle$ auf $|1S\rangle$ im Sinne von Bemerkung Eins gelangen wir durch Vergleich der gestrichelten beziehungsweise

[4.14] im Sinne von Bemerkung Eins
[4.15] im Sinne von Bemerkung Zwei

durchgezogenen Kurven. Zu Aussagen bezüglich Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ für sämtliche Q^2 versus nur für $Q^2 \equiv 0$ im Sinne von Bemerkung Zwei durch Vergleich der durchgezogenen grauen Kurve mit der in langen Strichen beziehungsweise durch Vergleich der durchgezogenen schwarzen Kurve mit der in kurzen Strichen.

Auf dieser Basis betrachten wir Abbildung 4.7. Die relativen Verrückungen $\Delta^{\text{a.o.}}$, Δ der Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ von $\omega_{1S,\lambda}$ steigen monoton an mit Q^2 und variieren im Bereich von zehn bis elf Prozent. Dabei ist für approximative Orthogonalität die Verrückunfg zunächst größer, gleicht sich aber für größere Q^2 der an für exakte Orthogonalität. Die Kurven flachen ab, das heißt, wie erwartet, wird der Effekt kleiner für kleinere Quarkmasse.

Dies wird noch deutlicher im Verhalten der Kopplungen in Abbildung 4.8: Die durchgezogenen Kurven sind nicht unterscheidbar für $Q^2 \geq 1\,\text{GeV}^2$. Wenn die Oszillatorparameter nicht angepaßt werden für jedes Q^2, sondern eingefroren sind auf die Werte für $Q^2 \equiv 0$, gestrichelte Kurven, ist $f_{2S,L}$ konstant und steigt $f_{2S,T}$ an mit Q^2 aufgrund dessen, daß die Schritt Eins$'$ zugrundeliegenden Relationen unabhängig sind von $m_{\text{eff}}(Q^2)$ beziehungsweise davon abhängen. Die Aufspaltung von $f_{2S,T}$ relativ zu $f_{2S,L}$ für größere Q^2 ist weniger stark für approximative als für exakte Orthogonalität, steigt aber an für steigendes Q^2 aufgrund des Anstiegs von $\Delta^{\text{a.o.}}(Q^2)$ wie auch von $\Delta(Q^2)$. Die Aufspaltung wird flacher für größere Q^2 parallel zum Verlauf von $\Delta^{\text{a.o.}}$, Δ. Absolut gesehen, bezieht sich die Varianz der Kopplungen auf einen Bereich, der nur klein ist. Auf Niveau von Streuquerschnitten erwarten wir daher keinen signifikanten Effekt, der herrührt von der absoluten Größe der Kopplung. Für Photoproduktion, $Q^2 \equiv 0$ ist exakte Identität der Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ gegeben; die Diskrepanz zwischen approximativer und exakter Orthogonalität, $-0.137\,23$ gegenüber $-0.131\,78$, ist von keiner praktischen Relevanz.

Das Verhalten mit Q^2 der Parameter $\omega_{2S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ für longitudinale Polarisation $\lambda \equiv L$ ist dargestellt in Abbildung 4.9 und für transversale Polarisation $\lambda \equiv T$ in Abbildung 4.10. Die gestrichelten Kurven stellen wieder dar, die Fälle – approximativer und exakter Orthogonalität –, wenn die $2S$-Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ nicht angepaßt werden für jedes Q^2, sondern eingefroren sind auf die Werte für $Q^2 \equiv 0$. Ihre Konstanz in den oberen Abbildungen ist daher von Hand. Da die transversalen Relationen über m_{eff} abhängen von Q^2, die longitudinalen hingegen nicht, folgt unmittelbar die Abhängigkeit von Q^2 der transversalen Parameter $\mathcal{N}_{2S,T}$, A_T und die Konstanz der longitudinalen Parameter $\mathcal{N}_{2S,L}$, A_L. Die durchgezogenen Kurven stellen wieder dar die Fälle identischer Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ für jedes Q^2. Das Abfallen von $\omega_{2S,L}(Q^2)$ gegenüber dem Wert bei $Q^2 \equiv 0$ und das entsprechende Ansteigen von $\omega_{2S,T}(Q^2)$ beträgt kaum mehr als ein Prozent. Der Effekt ist noch deutlich kleiner bei den Parametern $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ: durchgezogene versus entsprechende gestrichelte Kurve. Die absolute Skala der Ordinate ist generell nur sehr klein für $\mathcal{N}_{2S,L}$, A_L, beziehungsweise die Kurven nur kaum unterscheidbar für $\mathcal{N}_{2S,T}$, A_T. Insofern sollten die Effekte auf Niveau der Streuquerschnitte nicht von Relevanz sein.

Ausnahme ist der Parameter A_T; er zeigt für approximative Orthogonalität bezogen auf exakte eine Abweichung bis zu 12 % für kleine Werte von Q^2. Er parametrisiert die Position des Knotens der longitudinalen Anregungsmode für transversale Polarisation. Observable, die sensitiv sind auf die Position dieses Knotens, sollten abhängen von approximativer versus exakter Orthogonalität. Dies aber ist zu sehen in Zusammenhang mit dem generellen Modell-Charakter der $2S$-Wellenfunktion: Die Konstruktion der Knoten geschieht im Sinne einer *Modellierung* und soll heranführen an ein Verständnis von Effekten, die bestimmt sind durch Beiträge „rechts und links des Knotens“, die im Falle eines Nulldurchgangs auftreten mit entgegengesetztem Vorzeichen und so führen können zu signifikanten Kürzungen. Sie geschieht nicht im Sinne eines definitiven Postulats der Position der Knoten.

Diesen Punkt ausgeklammert in diesem Sinne, erwarten wir nur marginale numerische Diskrepanz auf Niveau von Streuquerschnitten. Wir werden daher im folgenden die Abbildungen unserer Veröffentlichung, Ref. [125], – die basieren auf Tabelle 4.6 oben und den Kurven in langen Strichen – unverändert übernehmen, sie jedoch diskutieren auch in Hinblick auf Unterschiede, die zu erwarten sind auf Basis des Referenz-Parametersatzes.

Dieser ist der konsequenteste im theoretischen Sinne, wir schlagen ihn vor für zukünftige Untersuchungen. Vgl. diesbzgl.: Tabl. 4.6 unten, die durchgezogenen schwarzen Kurven in den Abbn. 4.7-4.10 und Tabl. G.1 auf Seite 311 zu seiner numerischen Reproduktion.

4.2.4 Charakteristik der physikalischen ρ-, ρ'-, ρ''-Zustände

Das Grundzustand-Vektormeson ρ [$\equiv \rho(770)$] wird entsprechend Gl. (4.31) identifiziert mit dem $1S$-Zustand und repräsentiert durch die Lichtkegelwellenfunktion $|1S\rangle$. Die angeregten Vektormesonen ρ', ρ'' [$\equiv \rho(1450), \rho(1700)$] sind entsprechend den Gln. (4.31′), (4.31″) verknüpft mit dem nichtphysikalischen $2S$-Zustand über den Mischungswinkel Θ und in elastischer Photo- und Leptoproduktion im wesentlichen repräsentiert entsprechend durch $|2S\rangle$.

Sei durch $B_{V\to f} \equiv \Gamma_{V\to f}/\Gamma_V^{tot}$ das Verzweigungsverhältnis bezeichnet für den Zerfall des Vektormesons V in den Zustand f; wir definieren Größen $X_{V,i}$ für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$ wie folgt:

$$X_1 \;=\; B_{e^+e^-} \cdot B_{\pi^+\pi^-} \tag{4.42}$$

$$X_2 \;=\; B_{2\pi^+2\pi^-} \,/\, B_{\pi^+\pi^-} \tag{4.42'}$$

$$X_3 \;=\; B_{\pi^+\pi^-} \,+\, B_{2\pi^+2\pi^-} \tag{4.42''}$$

Sei der Index V für das Vektormeson auch im folgenden unterdrückt, wenn er folgt aus dem Zusammenhang.

Der Mischungswinkel Θ wird definiert durch den Zusammenhang der physikalischen Zustände $|\rho(1450)\rangle$, $|\rho(1700)\rangle$ mit $|2S\rangle$, vgl. die Gln. (4.31′), (4.31″). Er kann ausgedrückt werden durch M_V, Γ_V^{tot} und die Größen $X_{V,i}$ für $V \equiv \rho', \rho''$:

$$\tan^2\Theta \;=\; M_{\rho'}\Gamma_{\rho'}^{tot}\, x_{\rho'} \;/\; M_{\rho''}\Gamma_{\rho''}^{tot}\, x_{\rho''} \qquad \text{mit} \quad x_V \;\equiv\; X_{V,1}(1+X_{V,2})/X_{V,3} \tag{4.43}$$

vgl. Anhang G.3.3, Gl. (G.79).

In Tabelle 4.2 geben wir an, im Sinne einer zusammenfassenden Gegenüberstellung, wesentliche Größen, durch die charakterisiert und angebunden sind an observable Größen die physikalischen Zustände $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\rho(1700)$. Auf Basis der dort angegebenen Zahlenwerte berechnen wir einen expliziten Zahlenwert für den Mischungswinkel Θ. Diesen Punkt, wie auch die Diskussion der zentralen Größen in Fettdruck: der Kopplungen f_V und der daraus berechneten elektronischen Zerfallsbreiten $\Gamma_V^{e^+e^-}$ für $V \equiv \rho', \rho''$, stellen wir für einen Moment zurück. Wir kommentieren zunächst wie folgt die anderen Zahlenwerte.

Die Massen M_V sind im Sinne von Definiertheit aktualisiert auf die Zahlenwerte der neuesten Ausgabe der Particle Data Group, vgl. Ref. [165]; Diskrepanz zu Ref. [125] bzw. [164] besteht nur für $M_{\rho(770)}$, der Unterschied ist nicht relevant. Für $V \equiv \rho$ werden Zahlenwerte für $X_{V,i}$ bestimmt auf Basis der Particle Data Group, Ref. [165]: Zerfall des $\rho(770)$ in die Pion-Endzustände $f \equiv \pi^+\pi^-$, $2\pi^+2\pi^-$ wird in Ref [165] angegeben als $\sim 100\,\%$ beziehungsweise $(1.8 \pm 0.9) \times 10^{-5}\,\%$, so daß wir in der betrachteten Genauigkeit die Verzweigungsverhältnisse gleich Eins und Null setzen: $B_{\rho\to\pi^+\pi^-} = 1$ und $B_{\rho\to 2\pi^+2\pi^-} = 0$. X_2, X_3 folgen so unmittelbar, X_1 aus der elektronischen und totalen Zerfallsbreite. Für $V \equiv \rho', \rho''$ geben Donnachie, Mirzaie in Ref. [55] Zahlenwerte an für $X_{V,1}$, $X_{V,2}$, die sie extrahieren aus den experimentellen $\pi^+\pi^-$- und $2\pi^+2\pi^-$-Massespektren im Rho-Kanal [$I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$,

Charakteristik der $1^+(1^{--})$-Vektormesonen $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\rho(1700)$			
	ρ $\equiv\rho(770)$	ρ' $\equiv\rho(1450)$	ρ'' $\equiv\rho(1700)$
M_V [MeV]	769.3±0.8	1465±25	1700±20
Γ_V^{tot} [MeV]	150.9±3.0	310±60	235±50
$\Gamma_V^{e^+e^-}$ [keV]	6.77±0.32	**1.63**	**1.07**
f_V [GeV]	0.152 6	**− 0.103**	**+ 0.090 3**
$X_{V,1}$	4.48×10^{-5}	5.2×10^{-7}	6.0×10^{-7}
$X_{V,2}$	0	12.5	$55/6\cong9.17$
$X_{V,3}$	1	0.8	0.8
$B_{V\to\pi^+\pi^-}$ [a]	1	$8/135\cong.0593$	$24/305\cong.0787$
$B_{V\to2\pi^+2\pi^-}$ [a]	0	$20/27\cong.741$	$44/61\cong.721$

Tabelle 4.2: Charakteristik der Vektormesonen ρ, ρ', ρ''. Die Kopplungen f_V an den elektromagnetischen Strom für $V\equiv\rho',\rho''$ in Fettdruck folgen unmittelbar aus dem Zahlenwert $f_{2S}=-0.137$ GeV, vgl. die Gln. (4.31′), (4.31″), der berechnet wird auf Basis der Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ und sich bezieht auf $Q^2\equiv0$, vgl. Tabl. 4.1. Die Massen sind aktualisiert auf die neueste Ausgabe der Particle Data Group, vgl. Ref. [165], die totalen Breiten belassen als die Zahlenwerte von Ref. [55] bzw. [164]. Die Zahlenwerte für X_1, X_2 für ρ', ρ'' stammen von Donnachie, Mirzaie, vgl. Ref. [55]; sie werden dort extrahiert aus den $\pi^+\pi^-$-, $2\pi^+2\pi^-$-Massespektren für e^+e^--Annihilation und Photoproduktion. Im Rahmen der angegebenen Genauigkeit setzen wir $B_{\rho\to\pi^+\pi^-}=1$ und schätzen ab das Verzweigungsverhältnis in zwei oder vier geladene Pionen X_3 für ρ', ρ'' übereinstimmend als 80 %. Die $B_{V\to\pi^+\pi^-}$, $B_{V\to2\pi^+2\pi^-}$ für $V\equiv\rho',\rho''$ sind berechnet aus den $X_{V,2}$, $X_{V,3}$, vgl. Fußn. *a*.

[a] Es ist $B_{\pi^+\pi^-}=X_3/(1+X_2)$ und $B_{2\pi^+2\pi^-}=X_2X_3/(1+X_2)$ aufgrund der Gln. (4.42′), (4.42″).

vgl. Fußn. 3.16 auf Seite 132] für Elektron-Positron-Annihilation und für Photoproduktion elastisch am Proton. Die totalen Zerfallsbreiten Γ_V^{tot} für $V\equiv\rho',\rho''$ sind aus Gründen der Konsistenz belassen als deren Werte, vgl. ebenda, die übernommen sind in Ref. [164]; Unterschied zu der neuesten Ausgabe der Particle Data Group besteht nur für $\Gamma^{tot}_{\rho(1700)}$ und ist von keiner Relevanz. Die Größe $X_{V,2}$ für $V\equiv\rho',\rho''$, das heißt die Summe der Verzweigungsverhältnisse in zwei oder vier geladene Pionen, schätzen wir ab auf Basis der Particle Data Group für beide Anregungen übereinstimmend als 80 %. Für Vollständigkeit sind in den letzten Zeilen von Tabelle 4.2 festgehalten die Verzweigungsverhältnisse $B_{\pi^+\pi^-}$, $B_{2\pi^+2\pi^-}$, wie sie folgen aus den Zahlenwerten für X_2, X_3.

Wir wenden uns zu der Diskussion der Größen in Fettdruck: den Kopplungen an den elektromagnetischen Strom $f_{\rho(1450)}$, $f_{\rho(1700)}$ und den daraus berechneten, vgl. Gl. (G.67,) elektronischen Zerfallsbreiten $\Gamma^{e^+e^-}_{\rho(1450)}$, $\Gamma^{e^+e^-}_{\rho(1700)}$. Die Kopplungen folgen aus f_{2S} aufgrund des Ansatzes für den Zusammenhang der Zustände $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ mit dem unphysikalischen $2S$-Vektormeson, vgl. die Gln. (4.31′), (4.31″). Zugrundegelegt ist der explizite Zahlenwert $f_{2S}=-0.137$ GeV, der berechnet wird auf Basis der Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ und sich bezieht auf $Q^2\equiv0$, vgl. Tabl. 4.1. Dabei ist die Kopplung f_V generell festgelegt bis auf eine komplexe Phase, diese ist *zunächst Konvention*: Der Ansatz unserer $1S$-Lichtkegelwellenfunktion ist gewählt als positiv am Ursprung, unsere $2S$-Lichtkegelwellenfunktion entsprechende negativ. Proportionalität von f_V zu der Wellenfunktion für verschwindender Separation des Quark-Antiquark-Paares induziert daher für f_{1S} positives, für f_{2S} negatives Vorseichen. Diese Vorzeichen werden *physikalisch* durch folgende

Überlegung. Lepton-Antilepton-Annihilation in einen Zustand V ist in gleicher Weise dominiert durch das Verhalten der Wellenfunktion von V für kleine Separation. Das experimentell beobachtete destruktive Interferenzmuster im $\pi^+\pi^-$-Massespektrums für Elektron-Positron-Annihilation im Bereich einer invarianten Masse des Pion-Endzustands von $M \cong 1.6\,\mathrm{GeV}$, vgl. Abb. 4.4 auf Seite 161, bestimmt daher die relativen Vorzeichen der Kopplungen f_V, $V \equiv \rho, \rho', \rho''$, zu $[+,-,+]$. Mit der Konvention der Kopplung $f_{\rho(770)} = f_{1S}$ als *positiv* und der Kopplung f_{2S} als *negativ*, ist die Forderung, daß $f_{\rho(1450)} = \cos\Theta\, f_{2S}$ *negativ* und $f_{\rho(1700)} = -\sin\Theta\, f_{2S}$ *positiv* sind, genau dann erfüllt, wenn der Mischungswinkel Θ gewählt wird im *ersten Quadranten*. Damit folgt unmittelbar:

$$\Theta \;=\; 0.229\,\pi \;=\; 41.2^\circ \tag{4.44}$$

vgl. Gl. (4.43) auf Basis der Zahlenwerte von Tabl. 4.2.

Abschließend die folgende generelle Bemerkung betreffend unseren Ansatz für die Zustände $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ als Mischung einer $2S$-Komponente und eines Restes, der nur in höherer Ordnung an den elektromagnetischen Strom koppelt, etwa eine $2D$- und/oder Hybrid-Komponenete; vgl. die Gln. (4.31′), (4.31′): Clegg, Donnachie finden in Ref. [39], vgl. auch Ref. [55], in einer Analyse der $2\pi^+2\pi^-$-Massespektren für e^+e^--Annihilation [und diffraktive Photoproduktion], wichtige Verzweigung der produzierten Rho-Zustände [$1^+(1^{--})$, vgl. Fußn. 3.16 auf Seite 132] in $\pi\, a_1$, mit $\pi \equiv \pi^0$, $1^-(0^{-+})$ und $a_1 \equiv a_1(1260)$, $1^-(1^{++})$. Close, Page diskutieren gluonische Anregungen von Mesonen: *Hybride*, in einem Modell, das basiert auf dem Aufbrechen chromo-elektrischer gluonischer Strings in einer Harmonischen-Oszillator-Approximation, vgl. die Refn. [40, 41, 162]. Sie postulieren für den niedrigstliegenden Hybrid-Zustand mit den Quantenzahlen des $\rho(770)$: $1^+(1^{--})$, als dominanten Zerfallskanal $\pi\, a_1$ über eine S-Partialwelle mit einer Breite von etwa 150 MeV. Demgegenüber unterdrückt sei der Kanal $\pi\, h_1$, mit $h_1 \equiv h_1(1170)$, $0^-(1^{+-})$. Dazu in Kontrast präferiere der Zerfall eines $2D$- oder $2S$-Zustands den Zerfall in $\pi\, h_1$ gegenüber dem in $\pi\, a_1$. Der große $\pi\, a_1$-Beitrag, den Clegg, Donnachie konstatieren, ist daher starkes Indiz, daß in der Wellenfunktion des $\rho(1450)$ zum einen zumindest eine Hybrid-Komponente anwesend sein sollte. Close, Page stellen weiter fest – auf Basis der Analyse von Clegg, Donnachie – daß zum anderen, aufgrund des nichtverschwindenden $\pi\pi$-Kanals, auch eine radial angeregte Komponente im $\rho(1450)$ anwesend sein könnte. Diese $2S$-Komponente könnte dann sowohl den beobachteten $\pi\omega$-Beitrag erklären, $\omega \equiv \omega(782)$, $0^-(1^{--})$, wie auch die Verschiebung des physikalischen $\rho(1450)$-(Eigen)Zustands hin zu dem niedrigeren Massewert relativ zu $\rho(1700)$. Eine analoge Analyse der Zerfallskanäle des $\rho(1700)$ fordert nicht streng eine Hybrid-Beimischung, läßt eine solche aber zu. Vgl. auch Ref. [59].

4.3 Diffraktive Streuquerschnitte: Numerische Analyse

Im vorangehenden Kapitel 3 wurde diskutiert Leptoproduktion elastisch am Proton der Grundzustand-Vektormesonen $\rho(770)$, $\omega(782)$, $\phi(1020)$ und $J/\psi(3097)$. Vor dem Hintergrund der effektiven Quarkmasse, wie diskutiert in 4.1 behält diese Analyse ihre vollständige Gültigkeit für Q^2 größer als $Q^2_{u/d,0} = 1.05\,\mathrm{GeV}^2$ für ρ, ω und für Q^2 größer als $Q^2_{s,0} = 1.6\,\mathrm{GeV}^2$ für ϕ. Die von Q^2 abhängende Quarkmasse $m_{f,\mathrm{eff}}$ figuriert im Sinne von Mimikry von chirale Symmetriebrechung und Confinement der Gestalt, daß Colour-Dipole beschränkt sind auf transversale Ausdehnungen von der Größenordnung dieser Skalen, $\sim 1/m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$. Die laufende Quarkmasse der schweren Flavour beschränkt von vornherein auf kleinere Ausdehnungen; die grosse Masse des Charm-Quarks beschränkt auf Ausdehnungen $\sim 1/m_c$ und

garantiert effektiiv Gültigkeit der Analyse für J/ψ bis hinunter zu kleinsten Q^2 und für Photoproduktion.

Die Analyse dort geschieht im Rahmen des Modells des Stochastischen Vakuums (MSV), das ausführlich vorgestellt und diskutiert ist in Kapitel 1 bezüglich seiner Konstruktion und Annahmen, in Kapitel 2 bezüglich seiner formalen Anwendung auf diffraktive Hochenergiestreuung und in Kapitel 3 bezüglich seiner expliziten Anwendung auf die genannte Klasse von Reaktionen.

Ein wesentliches Charakteristikum des MSV ist, daß es erklärt als Konsequenz desselben Mechanismus nichtpreturbative Phänomene der Nieder- und Hochenergiephysik. Wir bezeichnen diesen Mechanismus als Strin-String-Mechanismus in dem Sinne, als er zu interpretieren ist als das Ausbilden und Wechselwirken gluonischer Strings zwischen den Quarkkonstituenten hadronischer Zustände. Er ist in gleichem Maße verantwortlich für Confinement von statischen Colour-Ladungen zu Colour-Singuletts und die Wechselwirkung schnell bewegter Colour-Dipole in diffraktiver Streuung.

Diese in diesem Sinne nichtperturbative Wechselwirkung auf Quark-Gluon-Niveau ist formal subsumiert in der Funktion $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$, die mit der T-Amplitude für die Streuung zweier Wegner-Wilson-Loops oder Colour-Dipole zusammenhängt durch Fourier-Transformation bezüglich des Impaktvektors $\mathbf{b}$ der Dipole. Für große invariante Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ und kleinem invariantem Impulstransfer $\sqrt{-t} = |\tau|$, bis auf Korrekturen $\sim s^{-2}$, vgl. Gl. (3.5), ist die T-Amplitude für Hadron-Hadron-Streuung T_{hh} – konkret für Photo-/Leptoproduktion $\gamma^{(*)}$ des Vektormesons V elastisch am Proton p gegeben durch die Gln. (3.50), (3.51):

$$T_{hh} \;=\; \int \frac{dz d^2\mathbf{r}}{4\pi} \;\; [\psi_V^\dagger \, \psi_\gamma](z,\mathbf{r}) \;\; T_{\ell p}(z,\mathbf{r};|\tau|) \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned} &T_{\ell p}(z,\mathbf{r};|\tau|) \\ &= \; 2\pi \int_0^\infty b\, db\, J_0(|\tau|\, b) \int \frac{dz_- d^2\mathbf{r}_-}{4\pi} \;\; \left|\psi_p(z_-,\mathbf{r}_-)\right|^2 \;\; \tilde{T}_{\mathcal{U}}(z,\mathbf{r};z_-,\mathbf{r}_-;\mathbf{b}) \end{aligned} \tag{4.46}$$

mit $T_{\ell p}$ der T-Amplitude für die T_{hh}-inhärente Streuung des Dipols $\{z,\mathbf{r}\}$ am Proton.[4.16] Dabei ist $T_{\ell p}$ über $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ MSV-spezifisch aber Photo-/Leptoproduktion-nichtspezifisch.

Die Produktions-Amplitude $T_{hh} \equiv T[\gamma^{(*)}p \to Vp]$ ist wesentlich bestimmt durch den Überlapp der Lichtkegelwellenfunktionen, der nicht abhängt vom Azimut von $\mathbf{r}$. Es gilt für Amplitude und differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp] \;\; = \int_0^{1/2} dz \int_0^\infty r dr \;\; [\psi_{V(\lambda)}^\dagger \, \psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](z,r) \;\; T'_{\ell p}(z,r,|\tau|) \tag{4.47}$$

$$d\sigma_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]/dt \;=\; 1/(16\pi\, s^2) \;\cdot\; \left|T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]\right|^2 \tag{4.48}$$

für Polarisationen $\lambda \equiv L,T$,[4.17] vgl. die Gl. (3.72), (4.2). Dabei ist $T'_{\ell p}$ gegenüber $T_{\ell p}$ gemittelt über sämtliche azimutalen Orientierungen des Dipols $\{z,\mathbf{r}\}$, der streut an dem festen Proton-Target; vgl. die Definition in Gl. (3.55) und unten in Gl. (4.50).

Die T-Amplitude für Photo- und Leptoproduktion nach Gl. (4.47), und damit Gl. (4.48), ist im kinematischen Bereich großer $\sqrt{s}$ und kleiner $\sqrt{-t}$, in ihrer Gültigkeit allein beschränkt durch die Gültigkeit der zugrundegelegten Lichtkegelwellenfunktionen $\psi_\gamma \equiv \psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r})$ und $\psi_V \equiv \psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r})$ für Photon beziehungsweise Vektormeson. Nach Diskussion und Konstruktion in den vorangehenden Abschnitten 4.1 und 4.2 verfügen wir in diesem Kapitel über

[4.16] Die Proton-Wellenfunktion ψ_p, die den Dipols $\{z_-,\mathbf{r}_-\}$ verteilt, wird angesetzt wie in Gl. (3.52).

[4.17] Bzgl. der Untredrückung der Beiträge mit Helizitätsänderung $\lambda \to la'$ um zwei (und mehr) Einheiten, vgl. die Diskussion in Anschluß an Gl. (3.69) auf Seite 135.

eine explizite Parametrisierung der Photon-Lichtkegelwellenfunktion für beliebig kleines bis verschwindendes Q^2 und über explizite Parametrisierungen nichtperturbativer Lichtkegelwellenfunktionen in demselben Sinne für das Systems $\rho(770)$, $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ der niedrigstliegenden $1^+(1^{--})$-Rho-Mesonen. Auf dieser Basis dehnen wir zum einen die Analyse von $\rho(770)$ im vorangehenden Kapitel 3 aus auf Q^2 unterhalb der Skala $Q^2_{u/d,\,0} = 1.05\ \mathrm{GeV}^2$ auf den Q^2-Bereich $0 - 20\ \mathrm{GeV}^2$ und diskutieren zum anderen neu in diesem Bereich die höheren Zustände $\rho(1450)$, $\rho(1700)$.

Dazu rekapitulieren wir zunächst kurz, in welcher Weise die Wellenfunktionen beziehungsweise deren Überlapp Einfluß nimmt auf die Streuquerschnitte. Dies wird exemplifiziert an der angeregten $2S$-Wellenfunktion unter Betonung des Bereichs kleiner bis verschwindender Q^2 – das heißt wenn Dipole großer transversaler Ausdehnung involviert sind. Diese generelle Diskussion setzt uns in die Lage zu *verstehen*, wie explizit die Streuquerschnitte generiert werden, die wir daran anschließend angeben und diskutieren.

4.3.1 Generelle Diskussion

In Abbildung 3.7 auf Seite 128 ist aufgetragen der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}(z, r^2)$ für die Streuung eines Wegner-Wilson-Loops, das heißt Dipols $\{z, \mathbf{r}\} \equiv \{z, r, \theta\}$, gemittelt über seine sämtlichen azimutalen Orientierungen an dem festen Proton-Target. Dieser Querschnitt $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}$ ist aufgrund des optischen Theorems verknüpft mit der T-Amplitude $T'_{\ell p}$ in Vorwärtsrichtung und ist, da diese rein imaginär ist, proprotional zu der entsprechenden Mittelung $T'_{\ell p}$ von $T_{\ell p}$; diese hängt weiter ab von der invarianten Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ nur kinematisch, das heißt durch den Faktor s. Formal gilt:

$$\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}(z, r^2) \;=\; \frac{1}{s}\,\mathrm{Im}\;\; T'_{\ell p}(z, r, |\tau| \equiv 0) \tag{4.49}$$

$$\text{mit} \qquad T'_{\ell p}(z, r, |\tau|) \;=\; \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}\;\; T_{\ell p}(z, r, \theta, |\tau|) \tag{4.50}$$

vgl. die Gln. (3.54), (3.55). Der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}$ subsumiert vollständig auf Niveau von Dipol-Proton-Streuung die nichtperturbetive MSV-spezifische Quark-Gluon-Wechselwirkung, die basiert auf dem diskutierten String-String-Mechanismus.

Die Funktionen $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}$, $T'_{\ell p}$ hängen nur marginal ab von z, vgl. Abb. 3.7 auf Seite 128. Für festes z [und $|\tau|$] zeigen sie Potenzverhalten bezüglich der Quark-Antiquark-Separation r des Dipols, der streut am Proton: $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}$, $T'_{\ell p} \propto r^{2n}$ mit $n \equiv 1$ im Limes verschwindender Separation[4.18]; für $z = 1/2$ beginnt im Bereich $r \gtrsim 1 - 2\,a$ der Exponenet n langsam abzufallen: auf typische Werte $n = 0.9 - 0.85$ für mittlere r und $n \cong 0.75$ für $r = 2\ \mathrm{fm}\ [\cong 5.8\,a]$. Wesentliches Charakteristikum ist das stetige Ansteigen mit r der Funktionen $\sigma^{\mathrm{tot}}_{\ell p}$, $T'_{\ell p}$, insbesondere, daß sie nicht absättigen. Dies ist unmittelbare Konsequenz dessen, daß in der Wechselwirkung involviert sind – in conclusio sogar dominant involviert sind – die gluonischen Strings zwischen den Quarkkonstituenten. Das stetiges Ansteigen rührt allein aus deren nichtlokalen Wechselwirkung im C-Term [konfinierend]; es ist nicht zu erreichen durch eine lokale Wechselwirkung in dem Sinne, daß diese nur abhängt von den Parton-Abständen, wie sie repräsentiert der NC-Term [nicht-konfinierend].[4.19] Demgegenüber generieren Mo-

[4.18] analytisches Resultat

[4.19] Wir rekapitulieren: Das MSV konstatiert allgemein, daß Präsenz eines C-Terms äquivalent ist der Verletzung der Bianchi-Identität der Feldstärken in Termen der *partiellen* Ableitung; dies ist der Fall in einer nichtabelschen Theorie, deren Bianchi-Identität sich bezieht auf die *kovariante* Ableitung, und explizit in einer abelschen Theorie mit magnetischen Monopolen. Der C-Term der Quantenchromodynamik folgt aus Gitterrechnungen, die bestimmen $\varkappa \cong 0.74$, als dominant. Vgl. die Diskussion der Abbn. 3.5, 3.6.

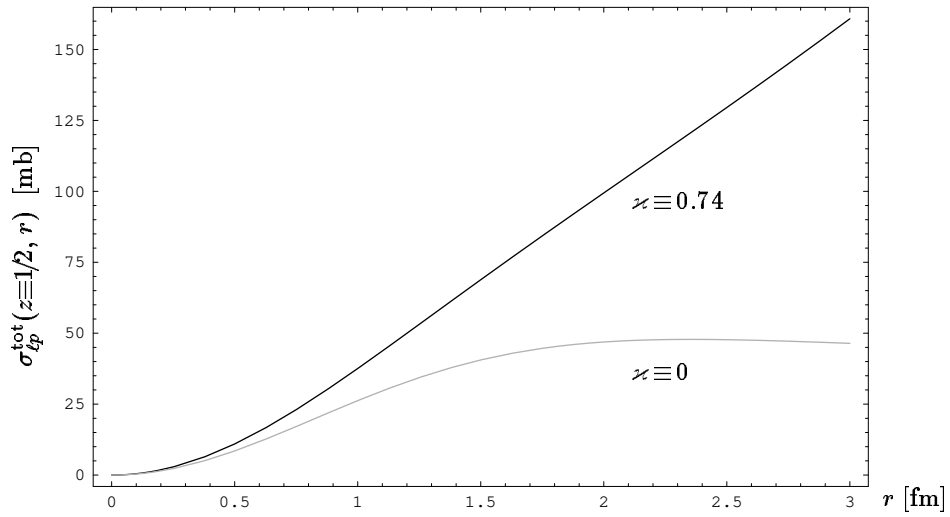


Abbildung 4.11: Verhalten mit r des totalen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}$ der Loop(Dipol)-Proton-Streuung für festes $z = 1/2$. Die graue Kurve mit $\varkappa \equiv 0$ stellt dar den reinen nichtkonfinierenden NC-Term, die schwarze Kurve mit $\varkappa \equiv 0.74$ den vollen physikalischen Verlauf, der weitgehend dominiert ist durch den konfinierenden C-Term. Austausch perturbativer Gluonen generiert einen Term von NC-Typ entsprechend der grauen Kurve.

delle auf Basis perturbativer Quark-Gluon-Wechselwirkung, die lokal abhängen von den Parton-Abständen allein, nur Terme von NC-Typ.

In Abbildung 4.11 ist für den Dipol-Proton-totalen Wirkungsquerschnitt $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}$ gegenübergestellt das Verhalten auf Basis eines reinen NC-Terms dem physikalischen Verhalten mit dominantem C-Term. Die graue Kurve, $\varkappa \equiv 0$, zeigt die Absättigung des NC-Terms bereits für mittlere Dipolausdehnungen r, die schwarze Kurve, $\varkappa \equiv 0.74$, dagegen das starke stetige Ansteigen des physikalischen $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}$, das basiert auf der nichtlokalen String-String-Wechselwirkung des dominanten C-Terms.

Zu Funktionen analog $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}$, $T_{\ell p}'$ gelangen Autoren auch auf Basis perturbativer Quark-Gluon-Wechselwirkung. Allerdings rührt etwa in den Refn. [118, 151, 152, 155] im Bereich $r \lesssim 2$ fm nur etwa die Hälfte des Streuquerschnitts aus dem Austausch zweier perturbativer Gluonen – denn dei entsprechenden Funktionen $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}$, $T_{\ell p}'$ sätiigen ab bei $r \cong 1$ fm –, für die andere Hälfte ist notwendig ein nichtperturbativer Dipol-Proton-Wirkungsquerschnitt, der bestimmt ist durch Anpassung an verwandte experimentelle Querschnitte. Dies liegt im Rahmen dessen, was wir erwarten auf Basis von Abbildung 4.11.

Zur Differenzierung unseres Zugangs von perturbativen Zugängen wie geschildert, sind daher transversal möglichst ausgedehnte Dipole in die Analyse zu involvieren. Für Ausdehnungen r im Bereich $1-2$ fm erwarten wir sich die differierenden Postulate signfikant zu manifestieren. In unserer Analyse ist dies insbesondere für kleine Virtualitäten Q des Photons in der Tat der Fall; für Photoproduktion sind sogar wesentlich involviert Dipole mit transversalen Ausdehnungen r bis $2.5-2.8$ fm. Wir diskutieren dies im folgenden.

Dazu betrachten wir zunächst, wie die Streuquerschnitte für Photo-/Leptoproduktion generiert werden auf Basis von Gl. (4.47) für die T-Amplitude. Ihrzufolge sind wesentlich zwei Größen: zum einen die gerade diskutierte (azimutal gemittelte) Dipol-Proton-Amplitude $T_{\ell p}'$, zum anderen der Überlapp der Photon-Lichtkegelwellenfunktion mit der des Vektormesons. Beide Größen treten in ein subtiles Wechselspiel miteinander entsprechend, wie geschildert in Kapitel 3 für den $1S$-Zustand. Der Fall des $2S$-Zustands ist aber insofern komplexer,

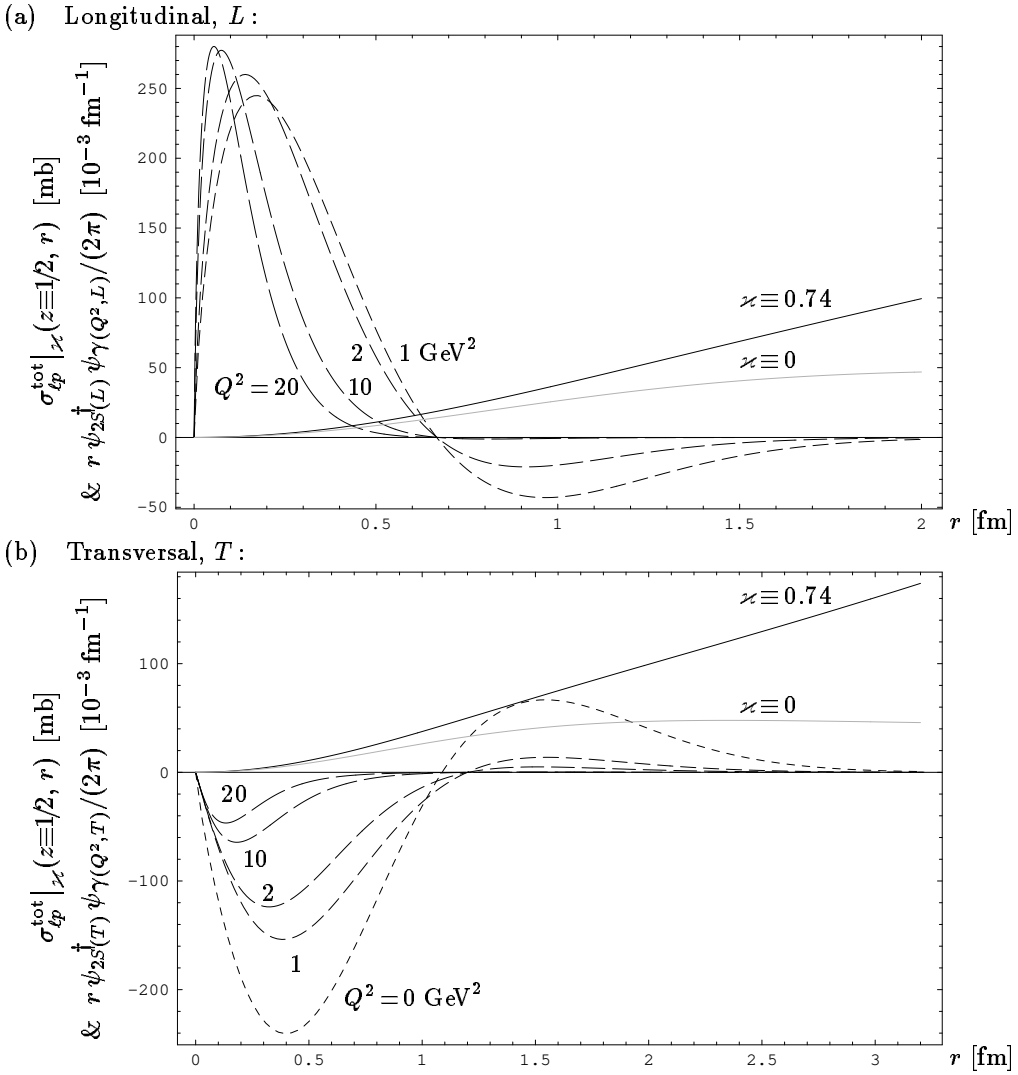


Abbildung 4.12: Als Funktion von r: effektiver Überlapp $[r\,\psi_{2S}^{\dagger}{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](r)$, $\lambda \equiv L, T$, für $Q^2 \equiv 0, 1, 2, 10, 20$ GeV^2 [gestrichelt, zunehmende Strichlänge] und Dipol-Proton-totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tp}^{\rm tot}|_{\varkappa}(z{\equiv}1/2,\,r)$, $\varkappa{\equiv}0$ vs. 0.74 [durchgezogen, grau bzw. schwarz]. Die Produktionsamplitude $T_{\lambda}^{|\mathcal{T}|\equiv 0}[\gamma^{(*)}p \to 2S\,p]$ in Vorwärtsrichtung wird *mit dem Auge abgeschätzt* durch Integration über r des Produkts dieser Größen, vgl. Gl. (4.52).

als dessen Wellenfunktion einen Knoten besitzt, der für den Überlapp mit der Photon-Wellenfunktion einen Nulldurchgang induziert. Beiträge großer und kleiner Dipole treten auf mit entgegengesetztem Vorzeichen, kompensieren und kürzen einander zum Teil.

In Abbildung 4.12 ist dargestellt dieses Wechselspiel explizit. Dort ist aufgetragen zum einen der Dipol-Proton-totale Wirkungsquerschnitt $\sigma_{tp}^{\rm tot}(z{\equiv}1/2,\,r)$ für $\varkappa{\equiv}0$ versus 0.74 von Abbildung 4.11, zum anderen für den $2S$-Zustand der in Hinblick auf Gl. (4.47) wie folgt definierte *effektive Überlapp*:

$$[r\,\psi_{V}^{\dagger}{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](r) \;=\; \int_0^{1/2} dz\;\; r\;\, [\psi_{V}^{\dagger}{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](z,r) \tag{4.51}$$

dies also der mit dem r des Integrationsmaßes multiplizierte und über z gemittelte Über-

lapp.[4.20] Der Dipol-Proton-Querschnitt $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}(z,r)$ ist proportional $T'_{\ell p}(z,r,|\tau|\equiv 0)$, vgl. Gl. (4.49). Diese Größe genommen für $z\equiv 1/2$, das heißt ihre z-Abhängigkeit vernachlässigt – sie ist in Abb. 4.11 dokumentiert als nur marginal – gilt nach Gl. (4.47) für die T-Amplitude $T_\lambda[\gamma^{(*)}p\to Vp]$ für Photo-/Leptoproduktion in Vorwärtsrichtung *approximativ*:

$$T_\lambda^{|\tau|\equiv 0}[\gamma^{(*)}p\to Vp] \;\cong\; i\,s\int_0^\infty dr\;\;[r\,\psi_V^\dagger{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](r)\;\;\sigma_{\ell p}^{\rm tot}(z{\equiv}1/2,\,r) \tag{4.52}$$

So können wir $T_\lambda^{|\tau|\equiv 0}[\gamma^{(*)}p\to 2Sp]$ in Abbildung 4.12 *mit dem Auge abschätzen* auf Basis der dort aufgetragenen Größen $[r\,\psi_{2S}^\dagger{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](r)$ und $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}(z{\equiv}1/2,\,r)$. Sei ausdrücklich betont, daß wir an keiner Stelle unserer Arbeit mit dem approximativen Ausdruck von Gl. (4.52) arbeiten; er diene lediglich der Diskussion von Abbildung 4.12, der wir uns hiermit zuwenden.

Zunächst finden wir für den dargestellten Fall des $2S$-Zustands, daß dessen effektiver Überlapp mit dem Photon $[r\,\psi_{2S}^\dagger{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](r)$ [gestrichelte Kurven] noch deutlich nichtverschwindende Werte annimmt für Quark-Antiquark-Separationen r des streuenden Dipols, für die sich die Dipol-Proton-Querschnitte $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}(z{\equiv}1/2,\,r)$ der verschiedenen Modelle, $\varkappa\equiv 0$ und $\varkappa\equiv 0.74$ [durchgezogene Kurven, grau bzw. schwarz] bereits deutlich unterscheiden. Wir testen daher in der Tat einen Bereich von Distanzen r, der signifikant differierende Postulate für Streuquerschnitte erwarten läßt gegenüber rein perturbativen Modellen [grau].

Wir finden weiter, daß für ansteigendes Q^2 der effektive Überlapp immer mehr hin zu kleineren Dipolen verschoben wird. Für kleine $Q^2\lesssim 2\,{\rm GeV}^2$ und stärker für transversale als für longitudinale Polarisation[4.21] existiert ein deutlich nichtverschwindender effektiver Überlapp *rechts des Nulldurchgangs* für große Dipole. Im Aufbau der (Vorwärts)Amplitude $T_\lambda^{|\tau|\equiv 0}[\gamma^{(*)}p\to 2Sp]$ wird dieser stark gewichtet gegenüber dem *links des Nulldurchgangs* für kleine Dipole, der entgegengesetztes Vorzeichen trägt, durch den stark ansteigenden Dipol-Proton-Querschnitt; dies in erheblich größerem Umfang durch die physikalische Kurve für $\varkappa\equiv 0.74$ als durch die nichtkonfinierende für $\varkappa\equiv 0$. In dieser Weise – werden wir sehen – sind für kleine Q^2 die Beiträge großer Dipole in der Lage die Beiträge kleiner Dipole vollständig zu kürzen und das Vorzeichen von $T_\lambda[\gamma^{(*)}p\to 2Sp]$ herumzudrehen. Dies ist ein ganz wesentlicher Punkt, den wir noch ausführlich diskutieren werden.

Das so weit auf Basis von Abbildung 4.12 diskutierte subtile Wechselspiel von effektivem Überlapp $[r\,\psi_{2S}^\dagger{}_{(\lambda)}\,\psi_{\gamma(Q^2,\lambda)}](r)$ und Dipol-Proton-Querschnitt $\sigma_{\ell p}^{\rm tot}(z{\equiv}1/2,\,r)$ manifestiert sich weiter und zum Tel noch deutlicher in Abbildung 4.13. Dort ist dokumentiert in den großen Abbildungen für den $2S$-, in den kleinen für den $1S$-Zustand, Dipole welcher transversaler Ausdehnung – abhängig vom Wert von Q^2 – die Wirkungsquerschnitte für Photo-/Leptoproduktion effektiv bestimmen. Explizit berechnen wir $\sigma_{V,\lambda}(r_{\rm cut})/\sigma_{V,\lambda}(r_{\rm cut}{=}\infty)$, das heißt die integrierten Produktionsquerschnitte für die Zustände $V\equiv 1S$ und $2S$ auf Basis der Gln. (4.49), (4.50), indem wir durch Einführung des Cut-off $r_{\rm cut}$ die Integration über die transversale Ausdehnung der Dipole beschränken auf Werte $r\le r_{\rm cut}$; wir skalieren auf den vollen Wert mit entferntem Cut-off.[4.22]

Wir betrachten zunächst Photoproduktion $Q^2\equiv 0$, die Kurve in kurzen Strichen in Abbildung 4.13(b). Nach Abbildung 4.12(b) besitzt der effektive Überlapp der Photon- und der Vektormeson-Lichtkegelwellenfunktion einen Nulldurchgang für $r\cong 1.1\,{\rm fm}$. Entsprechend finden wir hier, daß der Wirkungsquerschnitt stetig ansteigt für $r\lesssim 1.1\,{\rm fm}$, das heißt er ist dominiert durch kleine Dipole *links des Nulldurchgangs*. Werden größere Dipole miteinbezo-

[4.20] Die entsprechende Größe in Ref. [125] ist zusätzlich dividiert durch 2π, vgl. die Ordinate in Abb. 4.12.
[4.21] Die Skalen der Abszissen sind nicht identisch!
[4.22] Für Vergleichbarkeit geben wir auch an $\sigma_{1S,\lambda}(r_{\rm cut})/\sigma_{1S,\lambda}(r_{\rm cut}{=}\infty)$, das heißt für den $1S$-Zustand; vgl. auch Abb. 3.9 auf Seite 139 bzgl. *differentieller Wirkungsquerschnitte in Vorwärtsrichtung*.

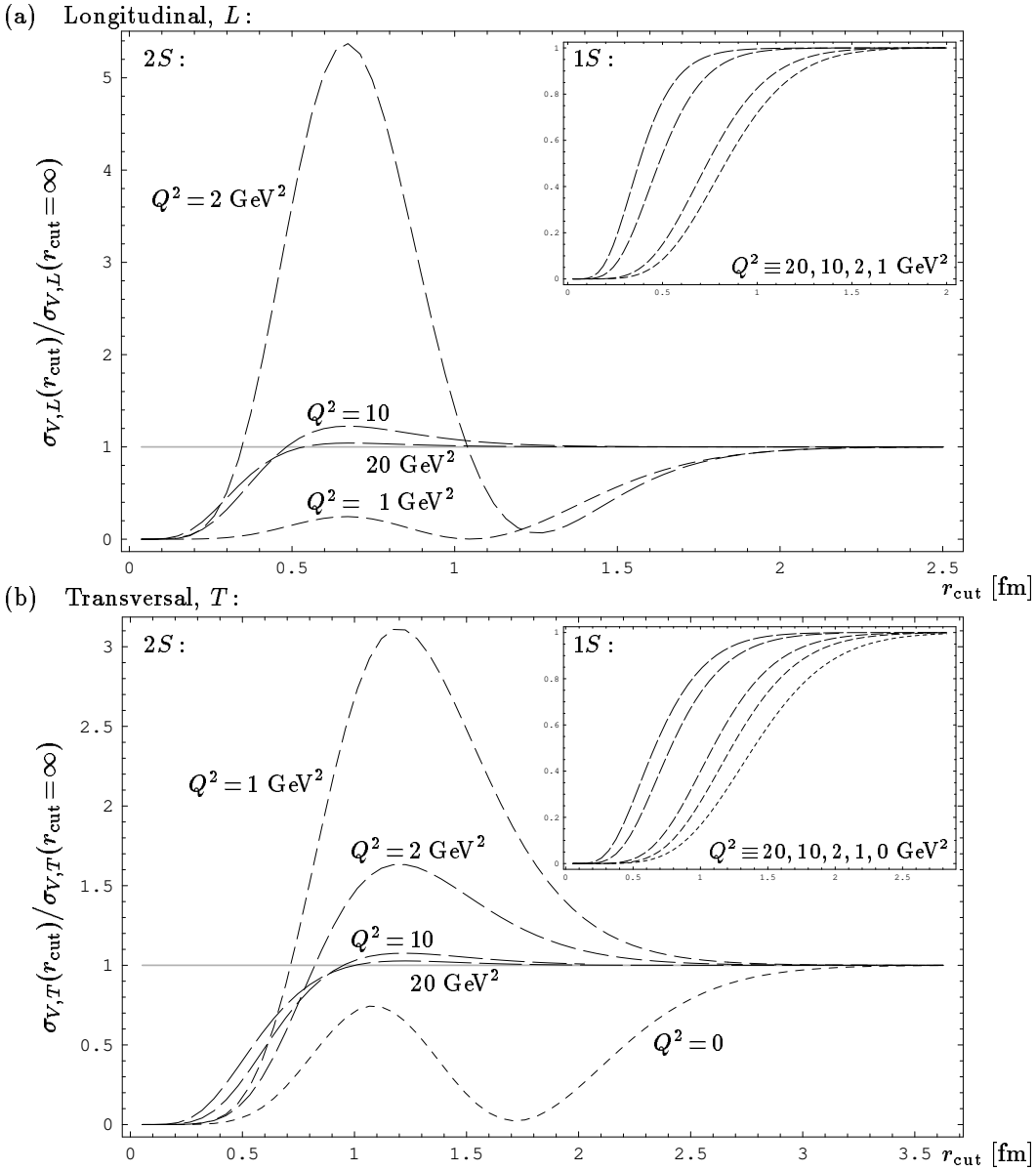


Abbildung 4.13: Integrierter Wirkungsquerschnitt als Funktion des Cut-off $r_{\rm cut}$ der transversalen Ausdehnung der Dipole; normiert auf den vollen Wert. Klein: $1S$-, groß: $2S$-Produktion. Die Kurven beziehen sich auf $Q^2 = 0, 1, 2, 10, 20\,\mathrm{GeV}^2$ [zunehmende Strichlänge], in (a) auf longitudinale, in (b) auf transversale Polarisation. Aufgrund des Knotens der $2S$-Wellenfunktion sind ausgedehntere Dipole von größerer Bedeutung für kleine Q^2, aufgrund des z-Endpunkte-Beitrags für transversale mehr als für longitudinale Polarisation.

gen, das heißt *rechts des Nulldurchgangs*, deren Beiträge daher auftreten mit entgegengesetztem, positivem Vorzeichen, vermindert sich der Betrag der Amplitude $T_\lambda^{|\mathcal{T}|\equiv 0}[\gamma^{(*)}p \to 2S\,p]$ und damit der Wirkungsquerschnitt.[4.23] Für $r \cong 1.7$ fm tritt vollständige Kürzung ein, das heißt Kompensation der Beiträge kleiner durch die großer Dipole. Werden noch größere

[4.23] Die Amplitude $T_\lambda^{|\mathcal{T}|}$ fällt ab wie $\exp - B_0 \mathcal{T}^2$, das heißt ihr Vorzeichen und Betrag in Vorwärtsrichtung sind von besonderer Bedeutung auch für $-t \cong \mathcal{T}^2$-integrierte Querschnitte.

Dipole miteinbezogen steigt der Wirkungsquerschnitt wieder an, bis er für etwa $r \cong 3$ fm seinen vollen asymptotischen Wert erreicht. Wie bereits angemerkt rühren dabei wesentliche Beiträge von Dipolen mit transversaler Ausdehnung im Bereich $r = 2.5 - 2.8$ fm.

Generell tragen größere Dipole mehr bei zu den $2S$- als zu den $1S$-Wirkungsquerschnitten; für feste Werte von Q^2 generell mehr für transversale als für longitudinale Polarisation.[4.21]

Variation von Q^2 ändert die Position des Nulldurchgangs des effektiven Überlapps der Wellenfunktionen; dies spiegelt sich wider in der starken Q^2-Abhängigkeit der Kurven. Der Einfluß der Dipole großer Ausdehnung geht mehr und mehr zurück für wachsendes Q^2. Für longitudinale Polarisation besitzt der effektive Überlapp einen festen Nulldurchgang unabhängig von Q^2, vgl. Abb. 4.12(a); dies rührt her von der Struktur der Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$, die durch ein Polynom in r^2 bestimmt ist.[4.24] Infolgedessen vermindert sich der effektive Überlapp der Wellenfunktionen für wachsendes Q^2 allein aufgrund der globalen Dämpfung durch die modifizierte Besselfunktion zweiter Art $\mathrm{K}_0(\epsilon r)$ der Photon-Wellenfunktion. Das Verhalten von $\sigma_{2S,L}(r_{\mathrm{cut}})/\sigma_{2S,L}(r_{\mathrm{cut}} = \infty)$ für $Q^2 \equiv 1$ und $2\,\mathrm{GeV}^2$, vgl. Abb. 4.13(a), ist entsprechend dem für Photoproduktion: Dominanz kleiner Dipole, vollständige Kompensation durch größere, schließlich Dominanz großer Dipole.

Für transversale Polarisation besitzt die Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ zwei verschiedene Polynome in r^2, die durch die effektive Quarkmasse $m_{\mathrm{eff}}(Q^2)$ abhängig von Q^2 gegeneinander gewichtet sind, vgl. Fußn. 4.24. Dies resultiert effektiv darin, vgl. Abb. 4.12(b), daß der Nulldurchgang des effektiven Überlapps von Photon- und $2S$-Wellenfunktion für ansteigendes Q^2 schnell zu größeren Dipolausdehnungen r verschoben wird. Für größere Q^2 bewirken die Besselfunktionen $\mathrm{K}_0(\epsilon r)$, $\mathrm{K}_1(\epsilon r)$ eine starke Unterdrückung des effektiven Überlapps rechts des Nulldurchgangs. Bezogen auf die Wirkungsquerschnitte, vgl. Abb. 4.13(b), tritt bereits für $Q^2 \equiv 1\,\mathrm{GeV}^2$ Kompensation der Beiträge kleiner Dipole, links des Nulldurchgangs durch die großer Dipole, rechts des Nulldurchgangs nicht mehr vollständig ein: Von dem einmal durch kleine Dipole erreichten Maximum fallen die Kurven für $Q^2 > 1\,\mathrm{GeV}^2$ monoton ab auf den vollen asymptotischen Wert, das heißt der einmal erreichte Wirkungsquerschnitt wird durch größere Dipole vermindert, ohne daß deren Beiträge so groß würden, sie vollständig kürzen und das Vorzeichen von $T_\lambda^{|\mathcal{T}|\equiv 0}[\gamma^{(*)}p \to 2Sp]$ umdrehen zu können.

Vergleich gegenüber den grau eingezeichneten Hilfslinien zeigt aber, daß für beide Polarisationen und sämtliche betrachteten Werte von Q^2 ein Nulldurchgang existieren muß, auch wenn dieser aus Abbildung 4.12 nicht mehr abgelesen werden kann. Denn sämtliche Wirkungsquerschnitte besitzen ein Maximum, das über dem asymptotischen vollen Wert liegt, Verminderung der Amplitude durch große Dipole ist globales Phänomen. Demgegenüber dokumentieren die kleinen Abbildungen für den $1S$-Zustand stetiges Ansteigen der T-Amplitude bis zum vollen Asymptotischen Wert des Wirkungsquerschnitts.

Dem festen Nulldurchgang für longitudinale polarisation stehen gegenüber zwei gegeneinander gewichtete Polynome für transversale polarisation. Dies führt zu einem „Verwaschungseffekt", der Grund dafür ist, daß die absolute Größe des intermediär erreichten Maximums fast um einen Faktor Zwei größer ist für longitudinale als für transversale Polarisation; vgl. die Skala der Ordinate in Abb. 4.13(a) gegenüber (b).

Auf Basis dieser generellen Diskussion spezifizieren wir im folgenden die numerische Analyse im Sinne der Diskussion expliziter Streuquerschnitte.

[4.24] In Hinsicht auf die $2S$-Parameter $\omega_{2S,\lambda}$ $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ beziehen sich die Abbildungen 4.12, 4.13 auf den Satz von Ref. [125]: für longitudinale Polarisation sind diese unabhängig von Q^2, ebenso die Oszillatorparameter beider Polarisationen. Für den *Referenz-Satz* hängen sie dagegen sämtlich, wenn auch nur leicht, ab von Q^2. Entsprechend unserer Diskussion des Einflußes auf A_T bezieht sich die einzige nicht von vornherein irrelevante Diskrepanz auf die Position des „longitudinalen Knotens" für transversale Polarisation. Wir erwarten daher kaum eine quantitative Änderung des diskutierten Bildes.

4.3.2 Spezifische Diskussion

Wir diskutieren die $\pi^+\pi^-$-Massespektren für e^+e^--Annihilation und Photoproduktion in Hinblick auf die unterschiedlichen Interferenzmuster im Bereich einer invarianten Masse M von etwa 1.6 GeV. In Anhang G.3.2 auf Seite 313 leiten wir her[4.25] die Formeln für Lepton-Antilepton-Annihilation in die Pion-Endzustände $f \equiv \pi^+\pi^-$, $2\pi^+2\pi^-$, vgl. Gl. (G.73):

$$\sigma_f(M) \;=\; \frac{4\pi e^4}{3} \left| \sum_{V=\rho,\rho',\rho''} \frac{f_V}{M_V} \; \frac{c_{V,f} \cdot \sqrt{M_V \Gamma_V^{tot}/\pi}}{M^2 - M_V^2 + \mathrm{i}\, M_V \Gamma_V^{tot}} \; \sqrt{B_{V\to f}} \right|^2 \tag{4.53}$$

und für Photoproduktion elastisch am Proton, vgl. Gl. (G.75):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2M} \frac{d\sigma_{f,\lambda}}{dM}\Big|_{Q^2}(M) \qquad\qquad (4.54)\\ &\quad = \int_{-\infty}^{0} dt \; \frac{1}{16\pi\, s^2} \left| \sum_{V=\rho,\rho',\rho''} \; T_{V,\lambda}(s,t) \; \frac{c_{V,f} \cdot \sqrt{M_V \Gamma_V^{tot}/\pi}}{M^2 - M_V^2 + \mathrm{i}\, M_V \Gamma_V^{tot}} \; \sqrt{B_{V\to f}} \right|^2 \end{aligned}$$

mit M der invarianten Masse des Endzustands f. Dabei seien abkürzend notiert für die $1^+(1^{--})$-/Rho-Kanal-Querschnitte $\sigma_f \equiv \sigma[l^+l^- \to V \to f]$, $d\sigma_{f,\lambda} \equiv d\sigma_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]$ und für die physikalischen T-Amplituden $T_{V,\lambda} \equiv T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]$ für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$; diese folgen unmittelbar auf Basis der Gln. (4.31)-(4.31″) aus den $1S$-, $2S$-Amplituden $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to 1S\,p]$, $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to 2S\,p]$. Die Massen, totalen Zerfallsbreiten, Verzweigungsverhältnisse M_V, Γ_V^{tot}, $B_{V\to f}$ sind diskutiert in Zusammenhang mit Tabelle 4.2 und angegeben dort; bzgl. der Normierungsparameter $c_{V,f}$ vgl. Gl. (G.75) und Tabl. G.2 bzgl. expliziter Zahlenwerte.

In den Abbildungen 4.3, 4.4 ist dargestellt unser Resultat für die $\pi^+\pi^-$-Massespektren auf Basis dieser Gln. (4.53), (4.54). Das e^+e^--Spektrum ist perturbativ bestimmt durch kleine Quark-Antiquark-Abstände, das heißt dominiert durch Dipole kleiner (transversaler) Ausdehnung r. Die relativen Vorzeichen der Kopplungen f_V für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$ sind $[+,-,+]$, das Interferenzmuster im Bereich $M \cong 1.6$ GeV entsprechend *destruktiv*. Resultat unserer Diskussion der Abbildungen 4.12(b), 4.13(b) ist unater anderem, daß für Photoprpduktion $Q^2 \equiv 0$ die Beiträge großer Dipole rechts des Nulldurchgangs die kleiner Dipole links des Dipols vollständig kürzen und das Vorzeichen der Amplitude $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to 2S\,p]$ umdrehen.[4.26] Dieser Vorzeichenwechsel überträgt sich entsprechend auf die physikalischen Produktions-Amplituden $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]$ für $V \equiv \rho', \rho''$ und induziert über deren kohärente Addition in Gl. (4.54) zu der konstruktiven Interferenz im $\pi^+\pi^-$-Massespektrum für Photoproduktion. Daß wir dieses experimentelle Interferenzmuster reproduzieren ist definitive Konsequenz der Dominanz der Beiträge von Dipolen großer transversaler Ausdehnung – wir haben gesehen, daß de facto noch Ausdehnungen im Bereich $r = 2.5 - 2.8$ fm signifikant beitragen. Diese Dominanz wiederum ist ganz wesentlich verknüpft mit dem starken Ansteigen mit r der Dipol-Proton-Amplitude T'_{qp} für $\varkappa \equiv 0.74$ versus für $\varkappa \equiv 0$ und damit letztlich Konsequenz des MSV-spezifischen Mechanismus von Ausbildung und Wechselwirkung gluonischer Strings.

Für Leptoproduktion von $f \equiv \pi^+\pi^-$ entsprechend Gl. (4.54) für $Q^2 > 0$ vermögen die Beiträge großer Dipole rechts des Nulldurchgangs die kleiner Dipole links des Nulldurchgangs bald nicht mehr volllständig zu kürzen, vgl. die Diskussion oben, und so das Vorzeichen von $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to 2S\,p]$ nicht mehr umzudrehen; wir beobachten ein Interferenzmuster entsprechend dem in e^+e^--Annihilation.

Auf Basis der Gln. (4.47), (4.48) werden berechnet in Abhängigkeit von der Virtualität Q des Photons integrierte Wirkungsquerschnitte $\sigma_{V,\lambda} \equiv \sigma_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]$ für die Zustände $V \equiv \rho(770)$

[4.25] vgl. ebenda Anh. G.3.2 bzgl. aller formalen Details

[4.26] Für kleine Dipole sind die Vorzeichen von f_V/M_V und $T_{V,\lambda}$ in den Gln. (4.53), (4.54) identisch, da in derselben Weise determiniert durch das Vorzeichen der $2S$-Wellenfunktion am Ursprung.

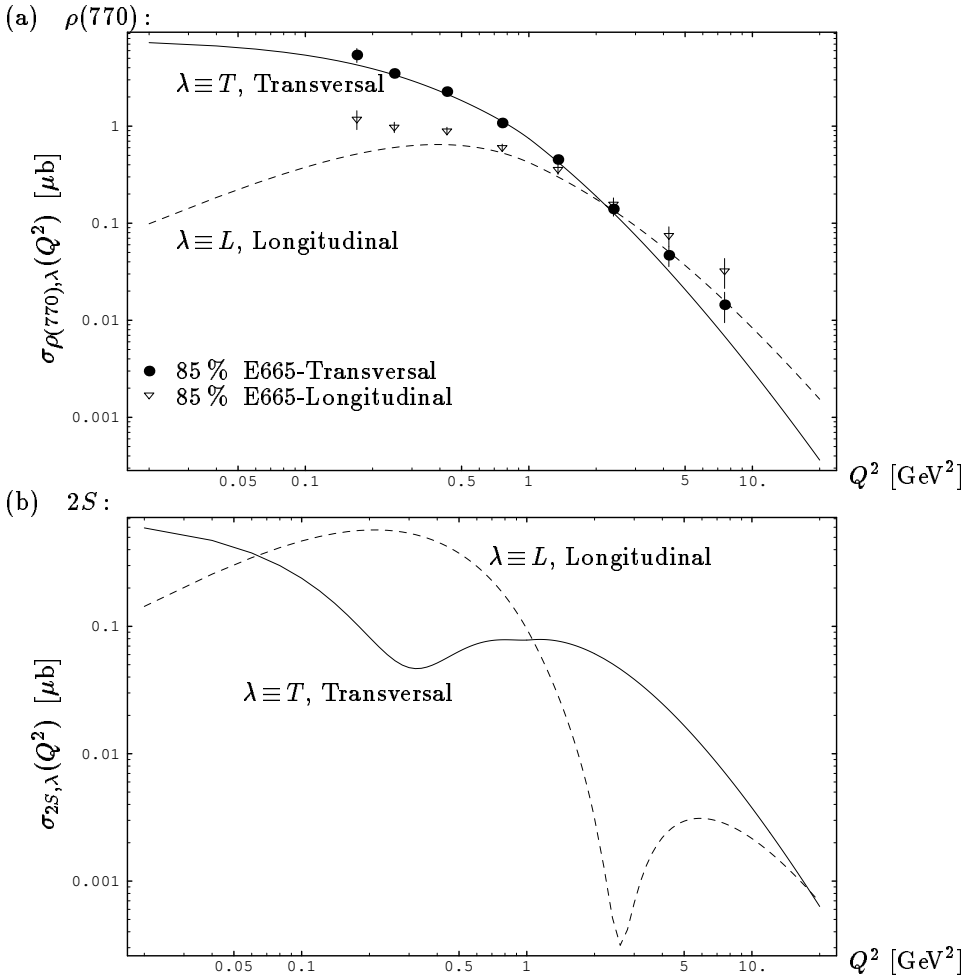


Abbildung 4.14: Integrierte Wirkungsquerschnitte $\sigma_{V,\lambda}$, $V \equiv \rho(770), 2S$, $\lambda \equiv L, T$, als Funktion von Q^2. (a) Produktion des $\rho(770)$-, (b) des $2S$-Zustands; gestrichelte Kurve für longitudinale, durchgezogene für transversale Polarisation. Die experimentellen Daten für $\rho(770)$ stammen von E665, vgl. Ref. [76]; sie schließen ein einen Regge-Anteil, den wir abgeschätzen als etwa 15 % und subtrahieren. Vgl. auch Tabl. 4.3.

und $2S$, für longitudinale und transversale Polarisation. Sei dabei im folgenden angesprochen mit $\rho(770)$ der Vektormeson-Grundzustand, der bisher generisch als $1S$-Zustand bezeichnet ist. Die Querschnitte $\sigma_{V,\lambda}$ als Funktion von Q^2 sind angegeben graphisch in Abbildung 4.14(a) für $V \equiv \rho(770)$ und in 4.14(b) für $V \equiv 2S$. Für $V \equiv \rho(770)$ sind explizite Zahlenwerte angegeben und verglichen mit experimentellen Daten für Leptoproduktion im Bereich $0 < Q^2 < 20$ GeV^2 in Tabelle 4.3 und für Photoproduktion, $Q^2 \equiv 0$, in Tabelle 4.4.

Zunächst existieren experimentelle Daten nur für $\rho(770)$. Fermilab-E665, vgl. Ref. [76], gibt Zahlenwerte an separat für longitudinale und transversale Polarisation. NMC veröffentlicht in Ref. [156] Zahlenwerte für die Größe $\sigma = \epsilon\sigma_L + \sigma_T$, mit ϵ der Rate longitudinaler Photonen, die typischerweise im Bereich 0.5–0.8 liegt; vgl. die Gln. (3.73), (3.74) und (3.75). Dabei ist zu beachten, daß die experimentellen Daten einen Regge-Anteil einschließen, das heißt einen nicht-diffraktiven „harten“ Anteil, den unser Zugang in der vorgestellten Form nicht diskutiert. Dieser Anteil ist daher zu subtrahieren. Für kleine Q^2 wird er abgeschätzt

durch Vergleich mit der Parametrisierung des Compton-Streuquerschnitts $\sigma^{\rm tot}[\gamma p]$ nach Donnachie, Landshoff in den Refn. [56, 165]; vgl. auch Gl. (4.2′). Diese gibt für die betrachtete inveriante Schwerpunktenergie $\sqrt{s}=20$ GeV einen Regge-Anteil an von etwa 7 %. Der Wirkungsquerschnitt für die Photo-/Leptoproduktion des Vektormesons V ist hierzu in Kontrast determiniert durch das (Absolut)Quadrat der entsprechenden T-Amplitude, so daß hier äquivalent erwartet wird ein Beitrag von 15 % des Reggeons. Wir geben explizite Zahlenwerte experimenteller Daten im folgenden immer an *nicht-modifiziert*, den Regge-Anteil einschließend.

Für unmittelbare Vergleichbarkeit weichen wir hierin nur ab in der Auftragung in Abbildung 4.14(a), der wir uns nun zuwenden. Dort ist angegeben im Bereich von $0.02-20$ GeV^2 für Q^2 unser Postulat für $\sigma_{\rho(770),\lambda}(Q^2)$ und ihm gegenübergestellt 85 % der E665-Daten als deren Pomeron-Anteil, wie gerade abgeschätzt. Die doppel-logarithmische Auftragung setzt die Betonung auf kleine Werte von Q^2. Für transversale Polarisation ist der niedrigste Datenpunkt bei $Q^2 \cong 0.08$ GeV^2 konsistent mit unserem Postulat, die Punkte bis etwa 4.8 GeV^2 in guter Übereinstimmung. Wir betonen dabei, daß die Parameter unseres Zugangs vollständig festgelegt sind durch Überlegungen, die *nicht* Bezug nehmen auf Photo- und Leptoproduktion; wir postulieren absolute Zahlenwerte und finden Übereinstimmung mit dem Experiment. Für longitudinale Polarisation stellen wir eine Abweichung fest für kleine Q^2 unterhalb 0.8 GeV^2. Für longitudinale und transversale Polarisation, für mittlere Werte von Q^2 – die beiden Datenpunkte bei etwa 4.8 und 7.8 GeV^2 – liegt Fermilab-E665 um etwa $20-30$ % über unserem Postulat. Tabelle 4.3 dokumentiert, daß die E665-Daten und deren Extrapolation zu höheren Q^2 allerdings dieselbe dieselbe Diskrepanz zeigen im Vergleich zu den Daten von NMC. Mit diesen stellen wir gute Übereinstimmung fest über den gesamten betrachteten Q^2-Bereich.

In Abbildung 4.14(b) ist aufgetragen für demselben Bereich von $Q^2=0.02-20$ GeV^2 unser Postulat für $\sigma_{2S,\lambda}(Q^2)$. Die Kurven für longitudinale und transversale Polarisation unterscheiden sich qualitativ aufgrund der unterschiedliche Struktur der $2S$-Lichtkegelwellenfunktion in Hinsicht auf ihre Knoten. Für longitudinale Polarisation wird der Überlapp der Wellenfunktionen für Photon und $2S$-Vektormeson repräsentiert durch einen einzigen Term, der, und folglich der integrierte Wirkungsquerschnitt $\sigma_{2S,L}(Q^2)$, für $Q^2 \cong 2.5$ GeV^2 eine reelle Nullstelle besitzt. Für transversale Polarisation hingegen existieren zwei Terme: der relativistische mit Bahndrehimpuls $l_3 = 1$ und antiparallelen Quark-Spins und der Term mit $l_3 = 0$ und parallelen Quark-Spins. Die Nullstellen der entsprechenden Polynome werden angenommen – wie bereits diskutiert in Zusammenhang mit den Abbildungen 4.12(b) und 4.13(b) – für unterschiedliche transversale Quark-Antiqurk-Separatioenn. Entsprechend des „Verwaschungseffektes“ bezüglich der absoluten Höhen der intermediären Maxima in Abbildung 4.13 stellen wir hier in demselben Sinne fest, daß – statt eines definitiven Nulldurchgangs für einen festen Wert von Q^2 für longitudinale Polarisation – für transversale Polarisation lediglich ein Minimum existiert für $Q^2 \cong 0.3$ GeV^2 und – statt eines ausgeprägten Maximums – lediglich ein Plateau bei $Q^2 \cong 1-1.1$ GeV^2. Mit wachsendem Wert Q^2 vermindern sich die absoluten Werte der Wirkungsquerschnitte $\sigma_{2S,\lambda}(Q^2)$ für longitudinale wie für transversale Polarisation, $\lambda \equiv L, T$, aufgrund der zunehmenden Unterdrückung des Überlapps der Wellenfunktionen durch die Funktionen $\mathrm{K}_0(\varepsilon r)$, $\mathrm{K}_1(\varepsilon r)$. Die transversale Ausdehnung der effektiv beitragenden Dipole verschiebt sich zu immer kleineren Separationen r, mehr und mehr zum inneren Teil des Überlapps, der negativ ist aufgrund des Vorzeichens der $2S$-Wellenfunktion. Asymptotisch für große Q^2, vgl. die Gln. (3.77), (3.77′), dominiert der Wirkungsquerschnitt für longitudinale Polarisation über den für transversale Polarisation aufgrund eines zusätzlichen Faktors Q^2. Wir stellen fest, daß diese Asymptotik selbst

Leptoproduktion, $0<Q^2<20$ GeV^2, des $\rho(770)$: Theorie versus Experiment								
Q^2 [GeV^2]	$\sigma_{\rho(770),L}$ [μb]		$\sigma_{\rho(770),T}$ [μb]		ϵ	$\epsilon\,\sigma_{\rho(770),L}+\sigma_{\rho(770),T}$ [μb]		exp.[Ref.]
	th.[a]	exp.	th.[a]	exp.	exp.	th.[a]	exp.	
0.17	0.517	1.39±0.26	4.28	6.37±0.89	0.76	4.67	7.42±0.91	E665[76]
0.25	0.603	1.15±0.12	3.37	4.11±0.23	0.80	3.85	5.03±0.25	E665[76]
0.43	0.645	1.051±0.081	2.14	2.67±0.13	0.81	2.66	3.52±0.15	E665[76]
0.76	0.530	0.708±0.052	1.12	1.269±0.073	0.81	1.55	1.84±0.084	E665[76]
1.35	0.300	0.422±0.040	0.426	0.533±0.045	0.81	0.669	0.875±0.055	E665[76]
2.39	0.135	0.185±0.025	0.127	0.165±0.022	0.81	0.237	0.315±0.030	E665[76]
2.5	$126.\times10^{-3}$	—	$115.\times10^{-3}$	—	0.50	$178.\times10^{-3}$	$(170.\pm31)\times10^{-3}$	NMC[156]
3.5	71.7×10^{-3}	—	51.6×10^{-3}	—	0.66	98.9×10^{-3}	$(60.\pm10)\times10^{-3}$	NMC[156]
4.23	50.7×10^{-3}	$(88.\pm17)\times10^{-3}$	32.0×10^{-3}	$(55.\pm11)\times10^{-3}$	0.81	73.1×10^{-3}	$(126.\pm18)\times10^{-3}$	E665[76]
4.5	45.1×10^{-3}	—	27.3×10^{-3}	—	0.66	57.1×10^{-3}	$(65.\pm11)\times10^{-3}$	NMC[156]
5.5	30.4×10^{-3}	—	16.1×10^{-3}	—	0.72	38.0×10^{-3}	$(41.\pm\ 7)\times10^{-3}$	NMC[156]
6.9	19.0×10^{-3}	—	8.68×10^{-3}	—	0.76	23.1×10^{-3}	$(23.\pm\ 3)\times10^{-3}$	NMC[156]
7.51	15.8×10^{-3}	$(38.\pm11)\times10^{-3}$	6.85×10^{-3}	$(17.\pm5)\times10^{-3}$	0.81	19.7×10^{-3}	$(47.8\pm10.2)\times10^{-3}$	E665[76]
8.8	11.1×10^{-3}	—	4.36×10^{-3}	—	0.78	13.1×10^{-3}	$(15.\ \pm\ 2\ \ )\times10^{-3}$	NMC[156]
11.9	5.55×10^{-3}	—	1.80×10^{-3}	—	0.82	6.35×10^{-3}	$(5.8\pm\ 0.9)\times10^{-3}$	NMC[156]
16.9	2.36×10^{-3}	—	0.617×10^{-3}	—	0.81	2.53×10^{-3}	$(2.6\pm\ 0.7)\times10^{-3}$	NMC[156]

Tabelle 4.3: Integrierte Wirkungsquerschnitte $\sigma_{\rho(770),\lambda}(Q^2)$, $\lambda\equiv L,T$, für Photo- und Leptoproduktion des $\rho(770)$-Vektormesons. Unser Postulat [th.] in Gegenüberstellung mit experimentellen Daten [exp.] von E665 für $\sigma_{\rho(770),L}$, $\sigma_{\rho(770),T}$, das heißt für longitudinale und transversale Polarisation separat, vgl. Ref. [76], und von NMC für die Größe $\epsilon\,\sigma_{\rho(770),L}+\sigma_{\rho(770),T}$, vgl. Ref. [156]. Die experimentellen Daten schließen ein einen Regge-Anteil, den wir für die betrachtete Energie $\sqrt{s}=20$ GeV abschätzen als etwa 15 %.

[a] Pomeron-Anteil

Photoproduktion, $Q^2 \equiv 0$, von $\rho(770)$ – und $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$: Theorie versus Experiment						
	$\sigma[\gamma p \to 1S\, p]$ [μb]		$d\sigma[\gamma p \to 1S\, p]/dt\|_{\tau^2 \equiv 0}$ [μb GeV^{-2}]		$B_0[\gamma p \to 1S\, p]$ [GeV^{-2}]	
$1S$	th.[a]	exp.	th.[a]	exp.	th.[a]	exp.
$\rho(770)$[b]	7.88	9.4 ± 1.1[c]	83.3	$84.4 \pm 27.$[d]	13.3	7.6 ± 1.2[d]
$\omega(782)$[b]	0.871[e]	1.2 ± 0.3[f]	9.27[e]	9.4 ± 1.3[g]	13.4	8.3 ± 1.3[g]
$\phi(1020)$[b]	0.730	0.96 ± 0.40[h]	6.69	7.2 ± 3.9[i]	11.5	7.3 ± 1.8[i]
$J/\psi(3097)$[b]	0.0211	0.018 ± 0.002[j]	0.150	0.080 ± 0.013[k,l]	9.26	5.6 ± 1.2[k]

Tabelle 4.4: Photoproduktion von $\rho(770)$ – und $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$, Theorie versus Experiment. Die experimentellen $\rho(770)$-Daten stammen von OMEGA-SPS, CERN, Ref. [13]. Der berechnete slope-Parameter B_0 ist die logarithmische Steigung der Kurve $d\sigma_\lambda/dt(\tau^2)$ im Limes $\tau^2 \to 0$, die der String-String-Mechanismus des MSV postuliert als stark konkav, das heißt aufwärts gekrümmt, vgl. etwa Abb. 4.16. Der experimentelle Wert ist Resultat einer Zwei- oder Drei-Parameter-Anpassung für einen endlichen, teils höheren Bereich von τ^2. Daher die Diskrepanz. Ansonsten finden wir – auch für das $\phi(1020)$ – gute Übereinstimmung.

[a] Pomeron-Anteil.

[b] Bzgl. der Parameter $\omega_{1S,T}(Q^2)$ und $\mathcal{N}_{1S,T}(Q^2)$ für $Q^2 \equiv 0$ vgl. unten Tabl. 4.5.

[c] Ref. [13]: Gemittelt über Photon-Energien $E_\gamma = 20 - 70$ GeV.

[d] Ref. [13]: Parameter a, b der Anpassung $d\sigma/dt(\tau^2) = a \exp\{-b\tau^2\}$ im Bereich $\tau^2 = 0.06 - 0.3$ GeV^2; gemittelt über Photon-Energien $E_\gamma = 20 - 30$ GeV.

[e] Für die Verhältnisse von $\rho(770)$- zu $\omega(782)$-Produktion erhalten wir beidesmal $\cong 11.1/100$, vgl. Gl. (3.78).

[f] Ref. [13]: Gemittelt über Photon-Energien $E_\gamma = 20 - 45$ GeV.

[g] Ref. [13]: Parameter a, b der Anpassung $d\sigma/dt(\tau^2) = a \exp\{-b\tau^2 + c(\tau^2)^2\}$, mit $c = (3.4 \pm 2.6)$ GeV^{-4}, im Bereich $\tau^2 = 0.06 - 0.8$ GeV^2; gemittelt über Photon-Energien $E_\gamma = 20 - 45$ GeV.

[h] Ref. [238]: Integriert über den Bereich $\tau^2 < 0.5$ GeV^2, durchschnittliche Energie $\sqrt{s} \cong 70$ GeV.

[i] Ref. [238]: Parameter a, b der Anpassung $d\sigma/dt(\tau^2) = a \exp\{-b\tau^2\}$ im Bereich $\tau^2 = 0.1 - 0.5$ GeV^2.

[j] Ref. [23] für durchschnittliche Photon-Energie $\langle E_\gamma \rangle \cong 150$ GeV. Konsistent mit Ref. [157]: Extrapolation nach $Q^2 \equiv 0$ durch Anpassen des Propagator-Terms $[1 + Q^2/M_0^2]^{-2}$ an die Q^2-Abhängigkeit, ergibt: $\sigma[\gamma N \to J/\psi N] = (18 \pm 3)$ nb, $M_0 = (3.2 \pm 0.6)$ GeV für $\langle E_\gamma \rangle \cong 150$ GeV.

[k] Ref. [23]: Parameter a, b der Anpassung $d\sigma/dt(\tau^2) = a \exp\{-b\tau^2 + c(\tau^2)^2\}$, mit $c = (2.9 \pm 1.3)$ GeV^{-4}, im Bereich $\tau^2 = 0.0 - 1.0$ GeV^2; durchschnittliche Photon-Energie $\langle E_\gamma \rangle = 150$ GeV.

[l] Extrapolation der Daten zu $Q^2 \equiv 0$, vgl. Abb. 3.16 auf Seite 147, läßt einen signifikant größeren experimentellen Wert für $d\sigma_\lambda/dt|_{\tau^2 \equiv 0}$ erwarten, der übereinstimmt mit unserem Postulat.

für $Q^2 = 20$ GeV^2 noch nicht erreicht ist.

In Tabelle 4.4 ist konfrontiert mit dem Experiment unser Postulat für Photoproduktion $Q^2 \equiv 0$. Dabei seien zunächst ignoriert die Einträge für die Grundzustand-Vektormesonen $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$, die wir angeben für Vollständigkeit in Nachtrag zum vorhergehenden Kapitel 3. Wir finden gute Übereinstimmung, stellen aber fest, daß insbesondere

Parameter für $Q^2 \equiv 0$ der $1S$-/Grundzustand-Vektormesonen				
	$\rho(770)$	$\omega(782)$	$\phi(1020)$	$J/\psi(3097)$
$\omega_{V,T}$ [GeV]	0.213	0.207	0.260	0.573
$\mathcal{N}_{V,T}[\sqrt{N_c} \equiv 3]$	3.44	3.43	3.21	2.15

Tabelle 4.5: Die Zahlenwerte basieren auf effektiven Quarkmassen von $m_{u/d,0} = 0.220$ GeV, $m_{s,0} = 0.310$ GeV für $Q^2 \equiv 0$ beziehungsweise der laufenden Charm-Masse $m_c = 1.3$ GeV. Bzgl. der Parameterwerte oberhalb der Schwellen $Q^2_{f,0}$ vgl. Tabl. 3.1 auf Seite 135; die $J/\psi(3097)$-Parameter sind unabhängig von Q^2 und daher identisch mit den Werten dort. Vgl. Text.

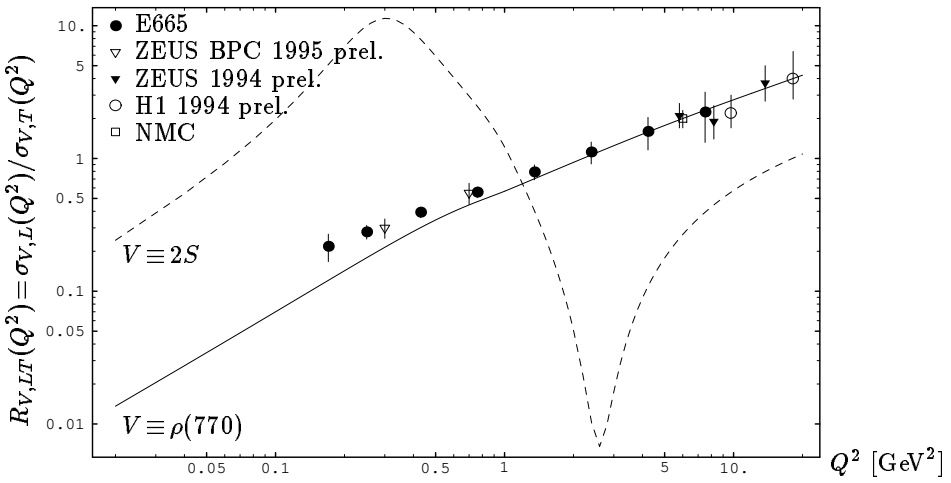


Abbildung 4.15: Verhältnis $R_{V,LT}$ für longitudinale zu transversale Polarisation als Funktion von Q^2. Durchgezogene Kurve für $V \equiv \rho(770)$-, gestrichelte für $2S$-Produktion. Experimentelle Daten liegen vor nur für $\rho(770)$. Vgl. auch Abb. 3.11 auf Seite 141.

für den in $-t \cong \tau^2$ differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma_\lambda/dt(\tau^2 \equiv 0)$ in Vorwärtsrichtung die experimentellen Zahlenwerte mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet sind. Wir erinnern daran, daß ein entsprechender Beitrag des Reggeons von den experimentellenZahlenwerten zu subtrahieren ist. Der von uns postulierte und angegebene slope-Parameter B_0 ist definiert dessen Limes in Vorwärtsrichtung, der experimentelle Wert dagegen ist Resultat einer Anpassung für einen endlichen Bereich von τ^2 [für $\omega(782)$ darüberhinaus nur einer von zwei angepaßten Parametern]. Aufgrund der starken Konkavität des differentiellen Wirkungsquerschnitts $d\sigma_\lambda/dt(\tau^2)$ als Postulat des MSV, vgl. etwa Abb. 4.16, ist die Diskrepanz erwartungsgemäß groß. Wir merken hierzu weiter an, daß ein starkes Ansteigen von $d\sigma_\lambda/dt(\tau^2)$ hin zu kleinen τ^2 experimentell schwierig zu verifizieren ist.

Zur Vollständigkeit im Sinne eines Nachtrags zu Kapitel 3 geben wir in Tabelle 4.4 Zahlenwerte an für Photoproduktion der $1S$-Grundzustand-Vektormesonen $\omega(782)$, $\phi(1020)$, $J/\psi(3097)$. Wir sind in der Lage die Analyse für ω und ϕ durchzuführen auf Basis der universellen Lichtkegelwellenfunktion des Photons, wie diskutiert zu Beginn des Kapitels in 4.1, vgl. die Gln. (4.22), (4.22′). Dabei werden effektive Quarkmassen $m_{u/d,\mathrm{eff}}(Q^2)$ beziehungsweise $m_{s,\mathrm{eff}}(Q^2)$ zugrundegelegt wie diskutiert dort. Wir rekapitulieren, daß $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$ im Bereich $Q^2 = 0$ bis $Q^2_{f,0}$ linear bezüglich Q^2 interpoliert zwischen der Konstituentenquark-Masse $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2 \equiv 0) = m_{f,0}$ und der laufenden Quarkmasse $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2 \geq Q^2_{f,0}) = m_f$. Explizit folgt: $Q^2_{u/d,0} = 1.05\,\mathrm{GeV}^2$, $m_{u/d,0} = 0.220\,\mathrm{GeV}$, $m_{u/d} = 0$ beziehungsweise $Q^2_{s,0} = 1.6\,\mathrm{GeV}^2$, $m_{s,0} = 0.310\,\mathrm{GeV}$, $m_s = 0.150\,\mathrm{GeV}$. Die Parameter $\omega_{1S,T}$, $\mathcal{N}_{1S,T}$ für $Q^2 \equiv 0$ für $\omega(782)$ und $\phi(1020)$ folgen damit in vollständiger Analogie zu der Fixierung der $\rho(770)$-Parameter; vgl. Abschnitt 4.2.3 auf Seite 166, Schritt Null. Die numerischen Zahlenwerte sind zusammengefaßt in Tabelle 4.5. Dabei sind die $J/\psi(3097)$-Parameter unabhängig von Q^2 und identisch den Werten in Tabelle 3.1 auf Seite 135; die Werte für $\rho(770)$ sind entnommen Tabelle 4.1. Auf dieser Basis folgen die Streu-Observablen von Tabelle 4.4.

In Abbildung 4.15 ist dargestellt als Funktion von Q^2 das Verhältnis integrierter Wirkungsquerschnitte, longitudinale zu transversale Polarisation:

$$R_{V,LT}(Q^2) \;=\; \sigma_{V,L}/\sigma_{V,T} \qquad V \equiv \rho(770), 2S \tag{4.55}$$

vgl. Gl. (3.76). Zunächst merken wir an, daß sich aufgrund der Fixierung der Parameter

des MSV, vgl. Seite 124, die postulierten Wirkungsquerschnitte beziehen auf eine invariante Schwerpunktenergie $\sqrt{s} = 20\,\mathrm{GeV}$. Für Verhältnisse von Wirkungsquerschnitten erwarten wir globalere Gültigkeit, da sich die s-Abhängigkeit tendenziell herausdividieren sollte. Explizit für $\rho(770)$ beschreibt unser Postulat für $R_{LT}(Q^2)$ – die durchgezogene Kurve – perfekt den beobachteten starken Anstieg mit Q^2; dieser wird insbesondere beobachtet in Studien zu *colour transparency* in Kernen, vgl. Ref. [73]. Der leichte Knick bei $Q^2 = Q_0^2 = 1.05$ rührt her von der effektiven Quarkmasse $m_{f,\mathrm{eff}}$, die an dieser Stelle einsetzt abzuweichen von dem verschwindenden laufenden Wert $m_{u/d}$. Die Daten scheinen einen etwas konvexeren Verlauf zu suggerieren. Ein solcher kann leicht erreicht werden durch eine sensiblere Interpolation zwischen Konstituenten- und laufender Quarkmasse als die zugrundegelegte Q^2-lineare Abhängigkeit. Wir verweisen auch auf Abbildung 3.11 auf Seite 141 in Hinsicht der experimentellen Status Quo im Moment unserer Veröffentlichungen Ref. [65] und [125]. Für die Anregungen $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ existieren keine experimentellen Daten. Wir geben unser Postulat für $R_{LT}(Q^2)$ bezüglich des $2S$-Zustandes an als gestrichelte Kurve in Abbildung 4.15. Wir finden eine starke Abhängigkeit von Q^2, die sensitiver als die bloßen Wirkungsquerschnitte in den Abbildungen 4.12-4.14, die Struktur der Knoten der $2S$-Wellenfunktion testet. Die reelle Nullstelle des longitudinalen Wirkungsquerschnitts $\sigma_{2S,L}$ für $Q^2 \cong 2.5\,\mathrm{GeV}^2$, vgl. Abb. 4.14(b), überträgt sich unmittelbar auf $R_{2S,LT}$. Diese Sensitivität bezieht sich in erster Linie auf die Position des „transversalen Knotens“ der $2S$-Lichtkegelwellenfunktion; signifikanter Unterschied bezüglich der diskutierten verschiedenen Parametersätze, vgl. Tabl. 4.1, bezieht sich ausschließlich auf A_T, das heißt auf die Position des „longitudinalen Knotens“. Dennoch erwarten wir $R_{LT}(Q^2)$ als den besten Kandidaten, diese zu unterscheiden auf Niveau von Streuquerschnitten. Wir weisen aber in diesem Zusammenhang darauf hin, daß die $2S$-Lichtkegelwellenfunktion in Hinsicht auf die Struktur ihrer Knoten eher modelliert als konstruiert ist. Wir betonen, daß unser Postulat insbesondere der Größe $R_{2S,LT}$ nicht zu interpretieren ist im Sinne eines definitiven Postulats der Position der Knoten. Wir betonen vielmehr, daß die explizite Struktur der Struktur wesentlichen Einfluß nimmt auf Observablen der Streuung.

Dieselbe Bemerkung ist zu beziehen auch auf die in $\tau^2 \cong -t$ differentiellen Streuquerschnitte $d\sigma_{V,\lambda}/dt(\tau^2)$ für den $2S$-Zustand, wie angegeben graphisch in Abbildung 4.16(c),(d). In Abbildung 4.16 ist dargestellt für eine Reihe von Parameterwerten Q^2 unser Postulat für die differentiellen Wirkungsquerschnitte $d\sigma_{V,\lambda}/dt|_{Q^2}(\tau^2)$; wir geben diese an separat für $V \equiv \rho(770), 2S$ und $\lambda \equiv L, T$. Wir wenden uns zunächst den Größen für $\rho(770)$-Produktion zu: Abbildung 4.16(a),(b). In Anhang H geben wir ohne weiteren Kommentar an als die Tabellen H.1-H.9 Auszüge aus Zahlenlisten, die den Abbildungen für $\rho(770)$ zugrundeliegen. Wir finden global, daß der Verlauf der Kurven abweicht von einem rein exponentiellen Abfallverhalten. Diese Konkavität oder Aufwärts-Krümmung ist besonders ausgeprägt für kleine Werte von τ^2 und spiegelt wider die großen Werte des postulierten slope-Parameters B_0, der definiert ist – vgl. Gl. (3.42) – als die logarithmische Steigung im Limes verschwindnden Impulstransfers $\tau^2 \to 0$; vgl. die Diskussion in Zusammenhang mit Tabelle 4.4. Bzgl. der Bedeutung von B_0 im MSV sei verwiesen auf Seite 128, die Diskussion von Gl. (3.56).

Für $\rho(770)$-Produktion verlaufen die Kurven für verschiedene Werte von Q^2 im wesentlichen parallel zueinander, vgl. Abb. 4.16(a), (b). Der Vergleich der Kurven für unterschiedliche Polarisalion, vgl. Abb. 4.16(a) in Kontrast zu (b), zeigt stärkeren Abfall mit τ^2 für transversale als für longitudinale Polarisation [sechs Dekaden gegenüber vier]. Dis ist bereits dokumentiert in Abbildung 3.13 auf Seite 143 und erklärt dort in Termen der effektiven slope-Parameter, die unmittelbar abhängen von den transversalen Ausdehnungen der effek-

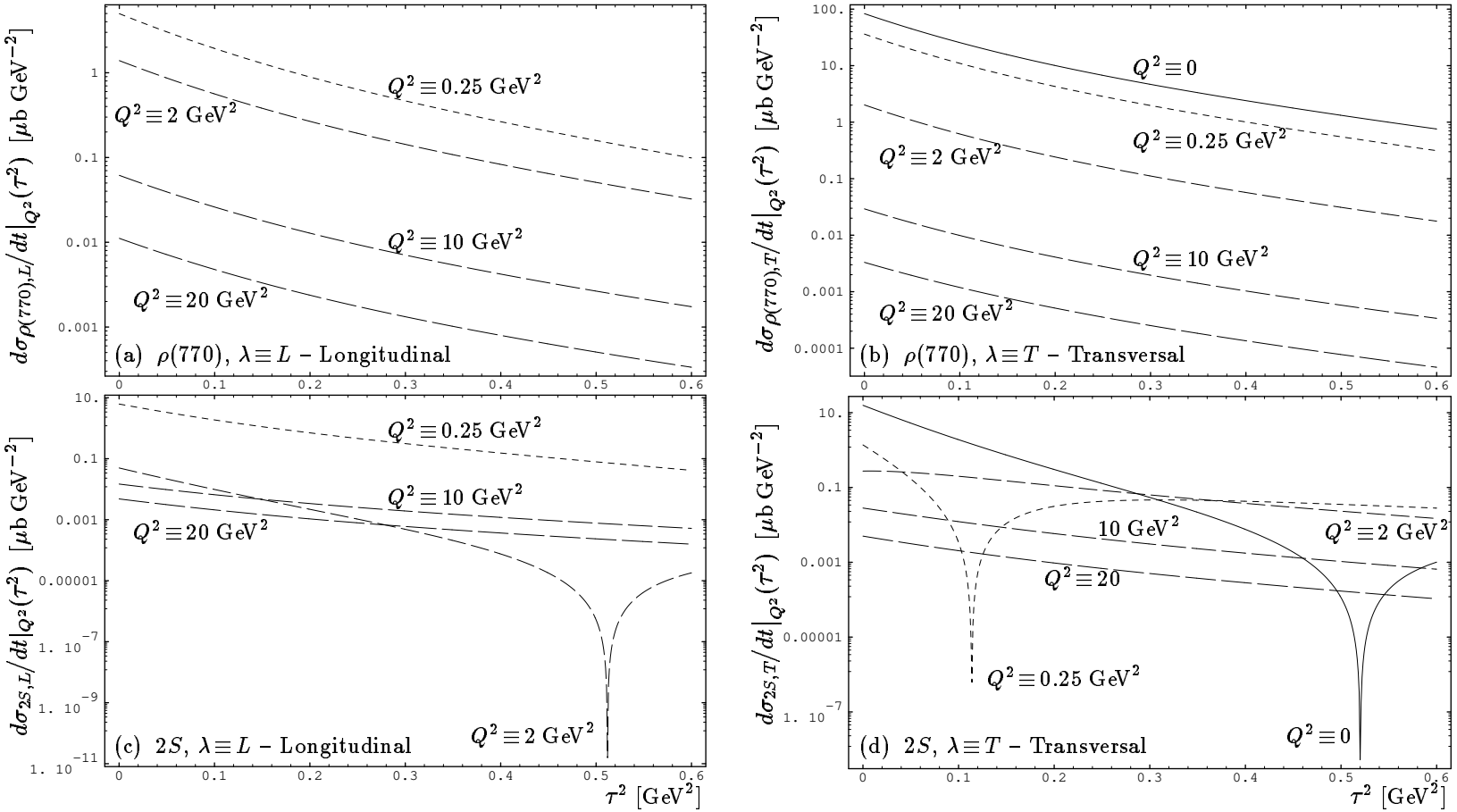


Abbildung 4.16: In $\tau^2 \cong -t$ differentieller Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{V,\lambda}/dt|_{Q^2}(\tau^2)$, $V \equiv \rho(770), 2S$, $\lambda \equiv L, T$, als Funktion von τ^2 für Parameterwerte $Q^2 \equiv 0$ und 0.25, 2, 10, 20 GeV^2 [durchgezogene Kurve bzw. zunehmende Strichlänge]. Aufgrund der Knoten verschwindet für kleine Q^2 die Amplitude des $2S$-Zustands für spezifische Werte von τ^2; in (d) beobachten wir, wie diese Werte nach innen wandern für $Q^2 \equiv 0$, 0.25, 2 GeV^2, wenn mehr und mehr kleine Dipole dominieren. Bzgl. der Kurven für $\rho(770)$-Produktion vgl. die Tabln. H.1-H.9 in Anh. H

tiv beitragenden Dipolen – die aufgrund des z-Endpiunkte-Verhaltens tendenziell größer sind für transversale als für longitudinale Polarisation.

Für die Produktion des $2S$-Zustands, vgl. die Abb. 4.16(c), (d), finden wir generell dasselbe Verhalten, doch ist dieses überlagert für kleine Werte von Q^2 durch den Einfluß der Knoten der $2S$-Wellenfunktion, die führen zu signifikanten Minima und Nullstellen bezüglich τ^2. Die Werte τ^2, an denen diese Minima und Nullstellen – „Dips" – der Amplitude auftreten, wandern nach innen für wachsendes Q^2 und dokumentieren so, daß Dominanz hin zu immer kleineren Dipolen verschoben wird. Wie bereits angedeutet hängt die explizite Position dieser „Dips" in hohem Maße ab von der Parametrisierung der $2S$-Wellenfunktion in Hinsicht auf die explizite Position ihrer Knoten. Wir betrachten daher nicht deren genaue Position wohl aber deren Existenz überhaupt als definitives Postulat. Experimentell ist der starke Abfall in der Nähe dieser „Dips" sicher ein leicht zu detektierendes Signal. Wir erwarten allerdings eine Auswaschung des Effektes, wenn statt der Wirkungsquerschnitte $d\sigma_{2S,\lambda}/dt$, $\lambda \equiv L, T$, für longitudinale und transversale Polarisation separat deren Superposition $\epsilon\, d\sigma_{2S,L}/dt + d\sigma_{2S,T}/dt$ gemessen wird. Dies erschwert die Detektion nicht unerheblich. Doch könnte aus einer experimentellen Bestimmung der Positionen der „Dips" wichtige Information extrahiert werden für die theoretische Konstruktion der $2S$-Lichtkegelwellenfunktion in Hinsicht ihrer Knoten.

Wir wenden uns erneut zu den $\pi^+\pi^-$- und $2\pi^+2\pi^-$-Massespektren für Elektron-Positron-Annihilation und für Photoproduktion elastisch am Proton. Wir richten besonderen Augenmerk auf einen Bereich der invarianten Masse M dieser Pion-Endzustände von $1-2$ GeV. Dieser Bereich ist wesentlich dominiert durch die Interferenz der Resonanzen ρ' $[\equiv \rho(1450)]$ und ρ'' $[\equiv \rho(1700)]$ und die beobachteten unterschiedlichen Muster dieser Interferenz – destruktiv für Annihilation, konstruktiv für Photoproduktion – Charakteristikum von ganz herausragender Bedeutung. Wir rekapitulieren die groben Züge der Diskussion auf Seite 186 in Zusammenhang mit den Gln. (4.53), (4.54).

In unserer Konvention ist für verschwindende transversale Quark-Antiquark-Separation die $1S$-Wellenfunktion *positiv*, dagegen die $2S$-Wellenfunktion *negativ* [4.27]. Das experimentell beobachtete destruktive Interferenzmuster im $\pi^+\pi^-$-Massespektrum für e^+e^--Annihilation – vgl. Abb. 4.4 – legt damit aufgrund unseres Ansatzes in Form der Gln. (4.31)-(4.31″) den Mischungswinkel Θ fest auf den *ersten Quadranten*. Die T-Amplituden von ρ' und ρ'' folgen aus $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to 2S\,p]$, vgl. Gl. (4.47), durch Multiplikation von $(\cos\Theta)$ beziehungsweise $(-\sin\Theta)$ und besitzen entgegengesetztes Vorzeichen. Und folglich sind die (relativen) Vorzeichen der T-Amplituden $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]$ für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$ im Limes verschwindender Quark-Antiquark-Separationen r bestimmt zu $[+,-,+]$. Lepton-Antilepton-Annihilation ist perturbativ dominiert, durch kleine Quark-Antiquark-Separationen: die Kopplungen f_V an den elektromagnetischen Strom in erster Ordnung konventioneller Störungstheorie ist proportional der Wellenfunktion von V am Ursprung. Folglich ist $[+,-,+]$ genau auch das Vorzeichenmuster der Kopplungen f_V für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$. Dieses Muster liegt zugrunde der experimentell beobachteten *destruktiven* Interferenz wenig unterhalb $M \cong 1.6$ GeV im $\pi^+\pi^-$-Massespektrum für e^+e^--Annihilation. Vgl. Abb. 4.4. Die experimentellen Daten dort stammen von den DM1- und DM2-Detektor, ORSAY, und den Detektoren OLYA und CMD am VEPP-2M-Beschleuniger in Nowosibirsk, vgl. Ref. [24, 174] bzw. [15]. Die zwei in Abbildung 4.4 angegebenen Kurven sind zum einen – durchgezogen – die Anpassung von Donnachie, Mirzaie aus Ref. [55], der auch entnommen sind die experimentellen Daten, und – gestrichelt – unser Resultat für das $\pi^+\pi^-$-Spektrum.

[4.27] Im Sinne der allgemein üblichen Konvention, die Wellenfunktion schmiege sich im Limes großer Separationen $|\vec{r}|$ von oben an die $|\vec{r}|$-Achse an, vgl. etwa Godfrey, Isgur in Ref. [94]

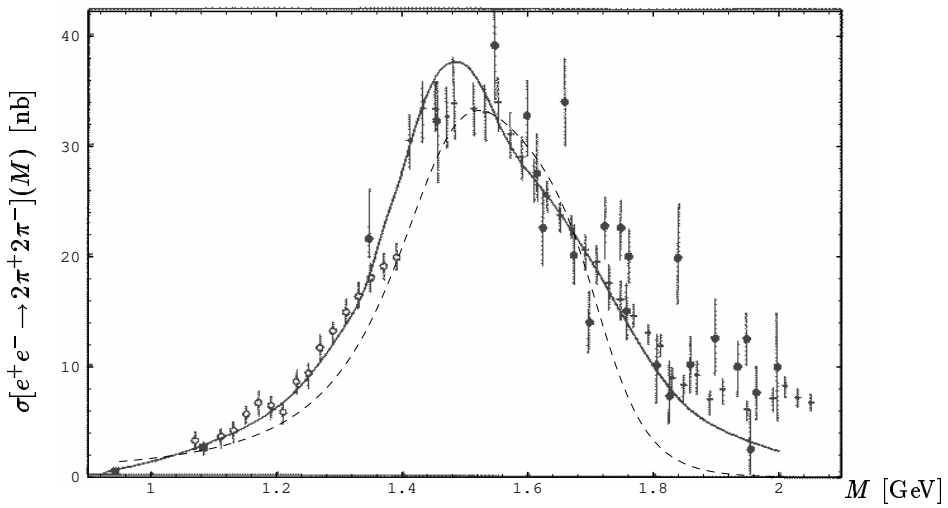


Abbildung 4.17: Massespektrum für e^+e^--Annihilation in $2\pi^+2\pi^-$. Die durchgezogene Kurve ist die Anpassung von Donnachie, Mirzaie, vgl. Ref. [55]. Die gestrichelte Kurve ist Resultat unserer Parametrisierung, vgl. die Gln. (4.53), (4.54) bzw. Anh. G.3.2 und Tabl. 4.2.

Diesem liegt zugrunde – wir formulieren unser generelles Konzept für die Berechnung der Massespektren – die Parametrisierung der Resonanzen ρ, ρ', ρ'' wie diskutiert und deren Verteilung entsprechend einfacher Breit-Wigner-Distributionen. Unser Analyse geschieht dahingehend, zu einem allgemeinen Verständnis der Phänomenologie zugelangen. Nicht durch subtile Ansätze und Feinadjustierung bestimmter Parameter in Hinsicht auf globale Übereinstimmung ein Verständnis zu suggerieren, das wir weder angesichts des status quo von Theorie noch von Experiment besitzen.

So weichen wir allein hier im Fall des $\pi^+\pi^-$-Massespektrums für Elektron-Positron-Annhilation und nur in dem einen Punkt ab, daß wir die totale Zerfallspreite $\Gamma^{tot}_{\rho(770)}$ des $\rho(770)$ in allgemein üblicher Weise ersetzen durch eine Parametrisierung durch ein Polynom zweiten Grades in $M^2/M^2_{\rho(770)}$. Sei vewiesen auf Gl. (4.53) bzw. auf Anh. G.3.2 bzgl. aller formaler Details. Wir finden, vgl. Abb. 4.4, daß wir die beobachtete Interferenz gut reproduzieren auf Basis des Mischungswinkels $\Theta \cong 41.2$, vgl. Gl. (4.44). Dieser ist Resultat einer einfachen Rechnung, vgl. Gl. (4.43) und Anh. G.3.3, die benutzt die Zahlenwerte für die Verzweigungsverhältnisse $B_{V\to f}$ [in Gestalt der Größen $X_{V,i}$], wie sie angegeben werden von Donnachie, Mirzaie in Ref. [55] und zusammengestellt sind in Tabelle 4.2. Wir betonen, daß wir den resultierenden Wert von Θ in keiner Weise modifizieren oder anpassen. Das Bild zu dem wir gelangen in Gestalt der gestrichelten Kurve ist konsistent mit der subtileren Anpassung von Donnachie, Mirzaie in Ref. [55] [durchgezogene Linie] und den experimentellen Datenpunkten – im Rahmen deren Unsicherheit und in Anbetracht der Details unserer Kurve. Unser Resultat für $2\pi^+2\pi^-$-Massespektrum für Elektron-Positron-Annihilation wie angegeben als gestrichelte Kurve in Abbildung 4.17 ist zu verstehen in demselben Sinne. Wir finden in demselben Bereich leicht unterhalb von $M \cong 1.6$ GeV ein Maximum von etwa 35 nb und insgesamt wieder ein Bild konsistent mit der subtileren Anpassung von Donnachie, Mirzaie in Ref. [55] [durchgezogene Linie] und den experimentellen Datenpunkten, die wieder entnommen sind dieser Referenz und wieder stammen aus Novosibirsk und ORSAY, vgl. Ref. [129] bzw. [43].

Für Photoproduktion des $2S$-Zustands – vgl. die Abbn. 4.12(b), 4.13(b), die Kurven in kurzen Strichen – dominieren die Dipole großer transversaler Ausdehnung rechts des Null-

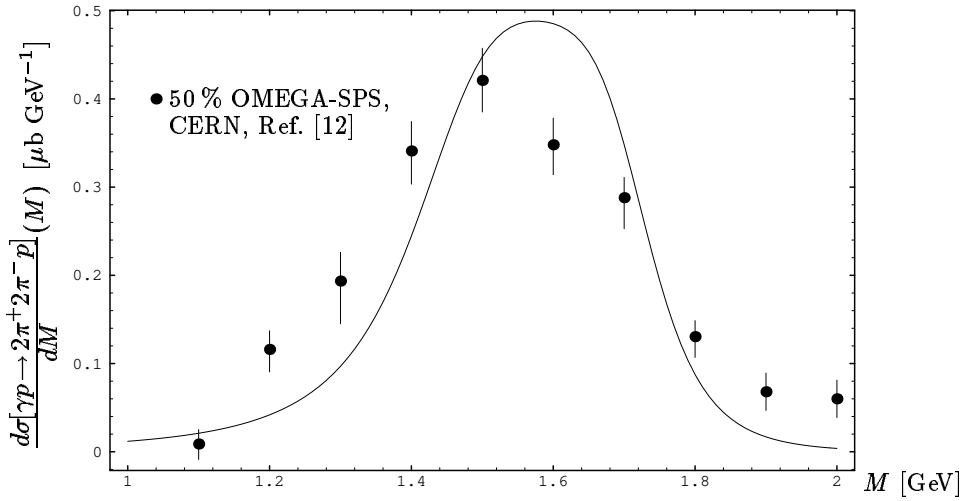


Abbildung 4.18: Massespektrum für $2\pi^+2\pi^-$-Photoproduktion elastisch am Proton. Die Kurve ist Resultat unserer Parametrisierung. Vgl. Text. Die Daten stammen vom OMEGA-Spektrometer am SPS, CERN, vgl. Ref. [12]; sie sind skaliert auf 50 % ihresr Werte.

durchgangs bei $r \cong 1.1$ fm über die links davon. Dominanz der Physik großer Abstände: der String-String-Mechanismus des MSV, dreht das Vorzeichen von $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to 2Sp]$ um und folglich die Vorzeichen der Amplituden für ρ' und ρ''. Es folgen die (relativen) Vorzeichen $[+,+,-]$ der T-Amplituden $T_\lambda[\gamma^{(*)}p \to Vp]$ für $V \equiv \rho, \rho', \rho''$ im Bereich großer Separationen r, durch den Photoproduktion dominiert ist. Dies führt auf die experimentell beobachtete *konstruktive* Interferenz im Bereich $M \cong 1.6$ GeV des $\pi^+\pi^-$-Massespektrums für Photoproduktion; vgl. Abb. 4.4. In Gestalt der durchgezogenen Kurve dort finden wir gute Reproduktion dieser Interferenz. Dabei leigt unserer Berechnung zugrunde – auf Basis desselben Zahlenwerts für den Mischungswinkel: $\Theta \cong 41.2$, vgl. Gl. (4.44), – die Parametrisierung der Resonanzen ρ, ρ', ρ'' wie diskutiert, vgl. die Gln. (4.31)-(4.31″), und deren Verteilung durch einfache unmodifiziert belassene Breit-Wigner-Distributionen. Im Sinne des ausgeführten allgemeinen Konzepts einfacher Ansätze verzichten wir darauf insbesondere Modifikationen dieser Distributionen miteinzubeziehen, die herrühren von den Effekten nach Ross, Stodolsky oder Drell, Söding, vgl. Ref. [177] bzw. [67, 199]. Sei verwiesen auf Gl. (4.54) bzw. auf Anh. G.3.2 bzgl. aller formaler Details. Angesichts dieses Hintergrunds ist die Übereinstimmung unseres Postulats mit den experimentellen Datenpunkten in Abbildung 4.4 in hohem Maße nichttrivial. Wir beobachten eine Anhebung des Spektrums an etwa derselben Stelle, wie sie indiziert wird von den experimentellen Daten von OMEGA-SPS, CERN, vgl. Ref. [11]. Wir merken an, daß für $\pi^+\pi^-$-Photoproduktion *Vorab-Daten* von Fermilab-E687 vorgestellt sind, vgl. Ref. [77], die eine Genauigkeit erreichen, die scheinen, die Produktion des 3^{--}-Vektormesons $\rho_3(1690)$, das heißt des hypothetischen $3S$-Zustands dokumentieren zu können. Für Vergleichbarkeit auf einem solchen Niveau ist aber sicher unser Konzept zu modifizieren und unser Ansatz zu verfeinern. Dies zeigt sich bereits in unserem Resultat für das $2\pi^+2\pi^-$-Massespektrum für Photoproduktion elastisch am Proton. So finden wir in Abbildung 4.17, daß die von uns postulierte durchgezogene Kurve um fast einen Faktor Zwei über den experimentell angegebenen Datenpunkten liegt, die stammen vom OMEGA-Spektrometer am SPS, CERN, vgl. Ref. [12]. Dabei ist anzumerken, daß es experimentell eine nicht zu unterschätzende Herausforderung ist, den vorhandenen Untergrund in diesem Bereich von M zu subtrahieren und so die resonanten Beiträge zu

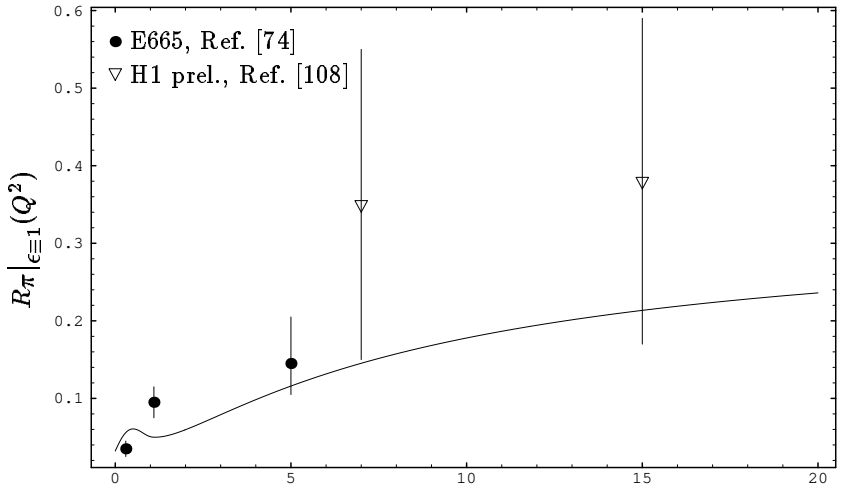


Abbildung 4.19: Als Funktion von Q^2 das Verhältnis R_π, das definiert ist als integrierter Wirkungsquerschnitt für $2\pi^+2\pi^-$-Photoproduktion via ρ', ρ'' dividiert durch den Querschnitt für $\pi^+\pi^-$-Produktion via ρ, vgl. die Gln. (4.56), (4.56′) und (4.57), (4.57′). Unser Postulat bezieht sich auf die Rate $\epsilon \equiv 1$ longitudinaler Photonen. Die experimentellen Datenpunkte stammen von Fermilab-E665 und H1, vgl. Ref. [74] bzw. [108].

identifizieren. Auch dies könnte mit Grund sein für die dokumentierte Diskrepanz.

In dieser Hinsicht sicherer ist sich zu konzentrieren weniger auf absolute Zahlenwerte als auf die relative Variation Q^2 und auf Verhältnisse von Wirkungsquerschnitten. So sind die Minima – oder „Dips“ – in den Abbildungen 4.14(b), 4.15 und 4.16(c),(d) klares Postulat unseres Zugangs auf Basis des MSV, wenn auch ihre exakte Position wesentlich abhängt von den Details der $2S$-Wellenfunktion in Hinblick auf der position ihrer Knoten.

Die Größe $R_{V,LT}(Q^2)$, vgl. Gl. (4.55), setzt in Beziehung die integrierten Wirkungsquerschnitte für longitudinale und transversale Polarisation. Analog setzt in Beziehung die integrierten Wirkungsquerschnitte von $1S$- und $2S$-Zustand die Größe $R_\pi\big|_\epsilon(Q^2)$. Diese ist definiert als das Verhältnis der integrierten Wirkungsquerschnitte für Photo- und Leptoproduktion von $2\pi^+2\pi^-$ via ρ', ρ'' $[\equiv \rho(1450), \rho(1700)]$ zu $\pi^+\pi^-$ via ρ $[\equiv \rho(770)]$. Wir definieren formal [4.28]:

$$R_\pi\big|_\epsilon(Q^2) \;=\; \sigma^{\{\rho',\rho''\}}_{f\equiv 2\pi^+2\pi^-} \Big/ \sigma^{\{\rho\}}_{f\equiv\pi^+\pi^-} \tag{4.56}$$

$$\text{mit} \qquad \sigma^{\{V\}}_f\big|_\epsilon(Q^2) \;=\; \epsilon\,\sigma^{\{V\}}_{f,L} \;+\; \sigma^{\{V\}}_{f,T} \tag{4.56'}$$

Dabei ist, mit $d\sigma/dM^2 = 1/(2M)\,(d\sigma/dM)$:

$$\sigma^{\{V\}}_{f,\lambda}(Q^2) \;=\; \int_{s_f}^{\infty} dM^2 \;\; \frac{1}{2M}\frac{d\sigma^{\{V\}}_{f,\lambda}}{dM}\Big|_{Q^2} \tag{4.57}$$

$$\frac{1}{2M}\frac{d\sigma^{\{V\}}_{f,\lambda}}{dM}\Big|_{Q^2}(M) \tag{4.57'}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} dt\; \frac{1}{16\pi s^2}\left|\sum_{V=\{V'\}} T_{V,\lambda}(s,t)\;\frac{c_{V,f}\cdot\sqrt{M_V\Gamma_V^{tot}/\pi}}{M^2-M_V^2+\mathrm{i}\,M_V\Gamma_V^{tot}}\;\sqrt{B_{V\to f}}\right|^2$$

Zur Berechnung von R_π auf Basis dieser Relatione ist die Summation über die Vektormesonen $\{V'\}$ zu beziehen im Nenner auf ρ und im Zähler auf ρ', ρ'', das heißt gegenüber

[4.28] Seien Argumente und Indizes unterdrückt, wenn diese folgen aus dem Zusammenhang.

Gl. (4.54) eingeschränkt auf entweder ρ oder ρ', ρ''. Es ist simultan zu setzen $f \equiv \pi^+\pi^-$ mit $s_f = (2m_\pi)^2$ beziehungsweise $f \equiv 2\pi^+2\pi^-$ mit $s_f = (4m_\pi)^2$; bzgl. der $c_{V,f}$ vgl. Gl. (G.72) und Tabl. G.2.

Numerisch finden wir eine Reduktion des Resultats für R_π auf $47 \pm 18\,\%$ gegenüber der *zero width approximation*, das heißt der Approximation auf Basis verschwindender Breiten der Resonanzen; die Unsicherheit rührt dabei aus der Unsicherheit der Breiten der Resonanzen, vgl. Tabl. 4.2. Die Größe R_π ist experimentell zugänglich. In Abbildung 4.19 geben wir an unser Postulat in Konfrontation mit experimentellen Daten von Fermilab-E665 und H1, vgl. Ref. [74] bzw. [108]. Wir finden zunächst, bei einem Wert von Q^2 von etwa 1 GeV^2 eine leichte Fluktuation. Diese rührt her von dem Wechselspiel der Wirkungsquerschnitte für longitudinale und transversale Polarisation. Diese wiederum sind dominiert durch die unterschiedliche Struktur der $2S$-Wellenfunktion in hinsicht auf die Position ihrer Knoten. Zum einen ist unsere Kenntnis um deren exakte Position nur sehr begrenzt. Und insbesondere erstreckt sich die transversale Ausdehnung der $2S$-Wellenfunktion weit über ihren Nulldurchgang, das heißt ist der Wirkungsquerschnitt für transversale Polarisation ist in hohem Maße sensitiv auf die Struktur ihrer beider Knoten – der für Quarkspins $S \equiv 0$ und der für $S \equiv 0$ – im Wechselspiel. Zum anderen ist die Fluktuation nur leicht Wir halten daher durchaus für denkbar, daß sie vollständig ausgewaschen sein könnte. Was wir dagegen betrachten als definitives Postulat ist das Verhalten von R_π für größere Werte von Q^2. Der Anstieg von $R_\pi(Q^2)$ sollte die tatsächliche Physik wiederspiegeln. Wir finden dies bestätigt in Konfrontation mit den beiden experimentellen Datenpunkten von H1 für $Q^2 \cong 7$ und 15 GeV^2. Bleibt anzumerken, daß diese noch mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet sind und stammen aus einer *Vorab-Veröffentlichung* von H1, vgl. Ref. [108].

Wir fassen dieses Kapitel zusammen wie folgt. Wir untersuchen die $1^+(1^{--})$-/Rho-Resonanzen $\rho, \rho', \rho'' \mathrel{\widehat{=}} \rho(770), \rho(1450), \rho(1700)]$ für Photo- und Leptoproduktion. Das ρ-Meson wird beschrieben als $1S$-Zustand bezogen auf das Verhalten der Quark-Antiquark-Wellenfunktion im nichtrelativistischen Limes. Die ρ'-, ρ''-Mesonen werden aufgefaßt als Mischung zweier Anteile: eines $2S$-Zustands, der wesentlich bestimmt die Querschnitte für Photo- und Leptoproduktion, und ein diesbezüglich inerter Rest, der zusammenfaßt ein $2D$-Zustand und gluonische Anregungen: Hybride. Dieser Ansatz ist suggeriert durch die Analyse deren Zerfallskanäle, insbesondere den Rho-Kanal-$\pi^+\pi^-$- und $2\pi^+2\pi^-$-Massespektren für Elektron-Positron-Annihilation und Photoproduktion elastisch am Proton. Der Mischungswinkel folgt unmittelbar und bestimmt die beiden Anteile als in etwa gleich groß. Eine solche Hybrid-Beimischung wird gefordert durch die Charakteristik des ρ' und ist konsistent mit der des ρ''. Auf Basis dieses Ansatzes werden konstruiert Lichtkegelwellenfunktionen für die Vektormesonen. Die Formulierung einer universellen Lichtkegelwellenfunktion für das Photon in Hinblick auf beliebig kleine bis verschwindende Virtualität macht zugänglich nichtperturbativ dominierte Photo- und Leptoproduktion von ρ, ρ', ρ'' im Rahmen des Modells des Stochastischen Vakuums (MSV). In diesem Zugang werden die Wirkungsquerschnitte wesentlich determiniert durch einen MSV-spezifischen String-String-Mechanismus, der verantwortlich ist für das stetige und starke Ansteigen des zugrundeliegenden Dipol-Proton-Querschnitts mit der transversalen Ausdehnung des Dipols. Wesentliche Beiträge rühren her von dem Bereich $1-2$ fm, für Photoproduktion bis $2.5-2.8$ fm. Die Parameter des MSV sind allgemeiner Natur und fixiert nich in Zusammenhang der untersuchten Reaktionen. In Anbetracht dessen gelangen wir zu guter bis sehr guter Übereinstimmung mit dem Experimente dort, wo Daten verfügbar sind, und zu definitiven Postulaten sonst. Wir ziehen ausführlich Resumée unserer Arbeit im folgenden.

Resumée

Die vorliegende Arbeit – Hochenergiestreuung im nichtperturbativen Vakuum der Quantenchromodynamik – ist zentral orientiert auf den Bereich *nichtperturbativer* Quantenchromodynamik (QCD), für den im Gegensatz zur Diagrammatik perturbativer Quantenchromodynamik kein etablierter Zugang existiert.

Etabliert ist lediglich, daß Zusammenhang besteht zwischen dem nichtperturbativen Bereich der Theorie und der Nichttrivialität der Struktur ihres Vakuums. Das Modell des Stochastischen Vakuums (MSV) von Dosch und Simonov knüpft an genau an diese Struktur. Es liegt wesentlich zugrunde unserer Arbeit. Observable sind im Formalismus des Funktionalintegrals gegeben durch eichinvariante Vakuumerwartungswerte von Funktionalen im Eichfeld A, die in diesem Sinne über sämtliche Raumzeit-Konfigurationen von $A(x)$ zu mitteln sind – gewichtet mit dem Wirkungsfunktional mit Yang-Mills- und Eichfixierungs-Lagrangedichte und der Fermion- und Geist-Determinante. Das MSV basiert wesentlich auf der Annahme, die dominanten Konfigurationen von $A(x)$ im nichtperturbativen Bereich können approximiert werden durch einen stochastischen Prozeß – das Vakuum-Eichfeld fluktuiert stochastisch. Formal ist die Annahme nicht zu beziehen auf das nicht-physikalische Eichfeld A, sondern auf den paralleltransportierten Feldstärkentensor $F[A]$. Die Annahme eines stochastischen Prozesses ist dann gleichbedeutend damit, daß für observable Vakuumerwartungswerte von Funktionalen im paralleltransportierten Feldstärkentensor eine konvergente Entwicklung in Kumulanten existiert. Mit $F^{(i)} \equiv F_{\mu_i\nu_i}(x_i; x_0, \mathcal{C}_{x_0x_i})$ dem Feldstärkentensor, dessen Colour-Gehalt entlang der Kurven $\mathcal{C}_{x_0x_i}$ und $\mathcal{C}_{x_0x_i}^{-1} \equiv \mathcal{C}_{x_ix_0}$ paralleltransportiert ist an den Referenzpunkt x_0, sei die Kumulante n-ter Ordnung bezeichnet durch $\langle\langle g^n F^{(1)} \cdots F^{(n)} \rangle\rangle$; sie ist charakterisiert durch ihre *Cluster-Eigenschaft* wie folgt. Ihr Wert ist maximal – gleich $\langle\langle g^n F^{(1)} \cdots F^{(n)} \rangle\rangle|_{x_1 \equiv x_2 \cdots \equiv x_n}$, dem „n-ten“ Parameter des stochastischen Prozesses –, wenn sämtliche n Raumzeit-Punkte x_i identisch und die $F^{(i)}$ auf diesen Punkt „zusammengeclustert“ sind. Ihr Wert fällt ab, wenn nur ein Weltpunkt x_i diesen Cluster verläßt, exponentiell mit dem Abstand, wenn dieser größer ist als die Korrelationslänge a, dem „0-ten“ Parmeter des Prozesses.[4.29] Dieses Bild ist beeindruckend intuitiv auf einer Raumzeit mit definiter Metrik, in der das Verschwinden des invarianten (Vierer)Abstands zweier Weltpunkte gleichbedeutend ist mit ihrer räumlichen und zeitlichen Koinzidenz: Die Colour-elektrischen und -magnetischen Felder sind maximal korreliert, wenn sie lokalisiert sind an demselben Weltpunkt, sie sind nicht mehr korreliert, wenn sie wesentlich weiter entfernt sind als ein gewisser Abstand a. Das MSV ist ursprünglich formuliert in der Euklidischen Raumzeit, die folgt aus der physikalischen Minkowskischen Raumzeit durch analytische Fortsetzung deren Zeitkomponente zu imaginären Werten. Ohne den stochastischen Prozeß in irgendeiner Weise spezifizieren zu müssen, postuliert das MSV bereits *lineares Confinement* für ein statisches Quark-Antiquark-Paar. Unter Spezifizierung des Prozesses als Gauß'sch kann explizit berechnet werden die Stringspannung des gluonischen

[4.29] Ein stochastischer Prozeß mit n unabhängigen Kumulanten besitzt daher $n+1$ Parameter.

Flußschlauches, der sich ausbildet zwischen dem Quark und Antiquark, – und dieser detailliert ausgemessen werden. Ein Quark-Antiquark-Paar ist dabei formal repräsentiert durch den Vakuumerwartungswert *eines* Wegner-Wilson-Loops, der mithilfe des nichtabelschen Stokes'schen Satzes Funktional ist des paralleltransportierten Feldstärkentensors $F[A]$.

Die T-Amplitude für die Streuung zweier Quark-Antiquark-Paare ist formal repräsentiert durch den Vakuumerwartungswert zweier Wegner-Wilson-Loops. Wir betrachten daher *Streuung* auch in Hinblick darauf, den String-Mechanismus, den das MSV postuliert, zu identifizieren als den dominierenden Mechanismus in der Bestimmung von Vakuumerwartungswerten *zweier* Wegner-Wilson-Loops. Wir betrachten *Hochenergie*streuung, da die T-Amplitude in Termen zweier Wegner-Wilson-Loops notwendig voraussetzt, daß sich die sie repräsentierenden (Anti)Quarks fundamental nicht ändern über die Dauer der Streuung – in dem Sinne, daß Abstrahlung von Gluonen weitestgehend ausgeschlossen sei. Dies ist gegeben für große Werte von s, dem Quadrat der invarianten Schwerpunktenergie der Streuung. Große s wiederum implizieren, daß die streuenden Wegner-Wilson-Loops in ihrem Schwerpunktsystem (nahezu) lichtartig sind, das heißt (nahezu) parallel verlaufen zu den Achsen $x^{\pm}$ des Lichtkegels. Der Wegner Wilson-Loop eines statischen Quark-Antiquark-Paares verläuft dagegen parallel zur Zeitachse x^0 desselben Schwerpunktsystems. Insofern untersucht *Hochenergiestreuung* einen essentiell anderen, essentiell anders repräsentierten Bereich nichtperturbativer QCD. Identifizierung des MSV-spezifischen String-Mechanismus wiese massiv hin auf dessen fundamentale Bedeutung.

Kapitel 1 gibt zunächst an Observable als eichinvariante Eichfeld-Funktionalintegrale. Dies geschieht unter expliziter Herleitung von $\mathfrak{D}_\mu(A)$, dem *Haarschen Eichfeldmaß* der QCD. Dies ist die Größe, die das MSV approximiert durch die Annahme, ihm liege zugrunde im nichtperturbativen Bereich ein stochastischer Prozeß. Im Anschluß werden eingeführt die wesentlichen mathematischen Hilfsmittel, auf denen die Konstituierung des MSV basiert. So werden eingeführt *Konnektoren* Φ, mit deren Hilfe explizit konstruiert werden paralleltransportierte Feldstärken als die eigentlich relevanten Größen. Es wird formuliert der *Nichtabelsche Stokes'sche Satz*, durch den Wegner-Wilson-Loops, die a priori Funktionale sind des Eichfeldes A, dargestellt werden als manifest eichinvariante Funktionale des paralleltransportierten Feldstärkentensors F. Es wird ferner explizit formuliert der Begriff der *Entwicklung in Kumulanten*. Auf Basis dieses Formalismus werden abschließend ausführlich diskutiert die Annahmen des MSV und dieses explizit konstituiert.

Kapitel 2 stellt her den Zusammenhang zu Hochenergiestreuung. Diesem Zusammenhang liegt zugrunde die T-Amplitude $\tilde{T}_\mu \equiv \tilde{T}_\mu^{(s,\mathbf{b})}$ für die Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_\mathfrak{p}$, $W_\mathfrak{m}$; es ist $\mathbf{b}$ ihr (transversaler) Impaktvektor, Fourier-konjugiert zum invarianten Impulsübertrag. Wir zeichnen nach die Herleitung Nachtmanns einer $s \to \infty$-asymptotischen Formel für $\tilde{T}_\mu$. Diese ist im wesentlichen gegeben als der Vakuumerwartungswert zweier – als Konsequenz des Limes – *exakt* lichtartiger Wegner-Wilson-Loops; Energieabhängigkeit besteht nurmehr über den kinematischen Faktor s, der verschwindet in den Wirkungsquerschnitten. Wir argumentieren vor dem Hintergrund von Arbeiten von Verlinde, Verlinde, daß die Formel Nachtmanns in ihrer Gültigkeit hin zu *großen aber endlichen Werten von s* erweitert werden kann dadurch, daß die klassischen Parton-Trajektorien mit kleiner zeitartiger Komponente – die *nahezu* lichtartig sind – nicht ersetzt werden durch ihre exakt lichtartigen $s \to \infty$-Limites. Diese Argumentation wird zusätzlich untermauert durch die Arbeiten Meggiolaros für Quark-Quark-Streuung, die basieren auf diesen Überlegungen.

Während die in diesem Sinne exakt lichtartige T-Amplitude a priori nicht analytisch fortgesetzt werden kann in die ins Euklidische fortgesetzte Minkowski-Raumzeit, ist dies

möglich für die nahezu lichtartige T-Amplitude. Dies machte Hochenergiestreuung prinzipiell zugänglich der Auswertung durch eine im Euklidischen formulierten Theorie. Dies wäre in erster Linie die modellunabhängige Formulierung von QCD als Gittereichtheorie; wir erinnern ferner daran, daß die Annahmen des MSV eigentlich stringent sind nur in seiner Euklidischen Formulierung: Maximal korreliert – mit verschwindendem invariantem Abstand – sind im Minkowskischen alle lichtartig separierten Weltpunkte, die räumlich und zeitlich im allgemeinen nicht koinzidieren, sondern im Gegeenteil beliebig großen Abstand haben.

Nach Einführung in die zugrundeliegende Kinematik rekapitulieren wir daher explizit die Konstruktion Nachtmanns der $s\to\infty$-asymptotischen Formel für die T-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ für Loop-Loop-Streuung, eingebunden in die Formel für die T-Amplitude $T_{hh}\equiv T_{hh}^{(s,t)}$ für Hadron-Hadron-Streuung; dies geschieht in Hinblick auf die klassischen nahezu lichtartigen Parton-Trajektorien, die konstituieren nahezu lichtartige Wegner-Wilson-Loops. Diese Konstruktion wird durchgeführt auf Partonniveau: $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$, und angebunden über hadronische Lichtkegelwellenfunktionen an Hadronniveau: T_{hh}.

Die resultierende Formel für $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ wird dann ausgewertet auf Basis des MSV und mit differentialgeometrischen Methoden von suggestiver Anschauung. Explizit werden die streuenden Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ aufgefaßt als zwei initial ruhende Loops unter *aktiven Lorentz-Boosts* mit Geschwindigkeiten $\beta_{\mathfrak{p}},\beta_{\mathfrak{m}}\to 1$ aufeinander zu. Die Beta-Parameter werden dabei genau in der Weise gewählt – o.E.d.A. $\beta_{\mathfrak{m}}$ als Funktion von $\beta_{\mathfrak{p}}$ –, daß das System in demselben initialen Schwerpunktsystem in Ruhe bleibt. Es ist daher das Quadrat der invarianten Schwerpunktenergie s Funktion von $\beta_{\mathfrak{p}}$[und $\beta_{\mathfrak{m}}$], und umgekehrt $\beta_{\mathfrak{p}}$[und $\beta_{\mathfrak{m}}$] Funktion von s. Ferner sind in eindeutiger Weise gegeben durch $\beta_{\mathfrak{p}}=:\tanh\psi_{\mathfrak{p}}$ und $\beta_{\mathfrak{m}}=:\tanh\psi_{\mathfrak{m}}$ die *hyperbolischen Winkel* $\psi_{\mathfrak{p}},\psi_{\mathfrak{m}}\in(0,\infty)$ der Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ gegen die Zeitachse x^0 des Systems $I_{\mathbf{0}}$, in dem ihr gemeinsamer Schwerpunkt ruht. Es ist $\psi:=\psi_{\mathfrak{p}}+\psi_{\mathfrak{m}}$ der hyperbolische Winkel zwischen den Wegner-Wilson-Loops im Minkowski-Diagramm mit orthogonalen Achsen bezüglich $I_{\mathbf{0}}$.

Die Auswertung der T-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ auf Basis der nahezu lichtartigen Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$ und $W_{\mathfrak{m}}$ geschieht nun genau bezüglich Koordinatenlinien $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$, die definiert sind durch deren Richtungen. Die entsprechenden Komponenten $x^{\mathfrak{p}}$, $x^{\mathfrak{m}}$ nähern sich per constructionem im Limes $s\to\infty$ mehr und mehr an den Komponenten x^+, x^- bezüglich Lichtkegelkoordinaten, ohne für endliche Werte von s – ergo $\beta_{\mathfrak{p}},\beta_{\mathfrak{m}}<1$ und $\psi_{\mathfrak{p}},\psi_{\mathfrak{m}}<1$ – exakt in diese überzugehen. Konsequenz ist, daß sich die Auswertung gegenüber dem $s\to\infty$-asymptotischen Fall – den etwa diskutiert unsere Diplomarbeit – genau darin ändert, daß die Lichtkegel-Koordinatenlinien $\bar{\mu}\in\{+,-,1,2\}$ übergehen in die Koordinatenlinien $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$. Dabei ist zu beachten, daß die longitudinalen Komponenten $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\equiv g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}$ und $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}\equiv g_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}}$ des metrischen Tensors $\tilde{g}\equiv\left(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)$ über $\psi_{\mathfrak{p}}$, $\psi_{\mathfrak{m}}$ beziehungsweise $\beta_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}}$ Funktionen sind von s. Es gilt per constructionem $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\to g_{++}$ und $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}}\to g_{+-}$ für die diagonale und außerdiagonale Komponente im Limes $s\to\infty$. Terme, die im asymptotischen Fall identisch verschwinden, da sie multipliziert sind mit $g_{++}\equiv g_{--}\equiv 0$, sind für endliche Werte von s multipliziert mit $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\equiv g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}\not\equiv 0$ treten also zusätzlich auf.

Wir finden zunächst, daß die relevanten Funktionen faktorisieren in Form $g_{\imath\jmath}/g_{+-}\cdot\tilde{X}_{\imath\jmath}$ mit $\imath,\jmath\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m}\}$, wobei die Funktionen $\tilde{X}_{\imath\jmath}$ vollständig bestimmt sind durch die Geometrie in der x^1x^2-Transversalebene, die nicht abhängt von s, in die aber projiziert ist die longitudinale Dynamik der Streuung in der Form, daß der effektive Impaktvektor $\mathbf{b}$ der Streuung abhängt von den z-Anteilen, die die (Anti)Quarks der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ an deren gesamten Lichtkegelimpuls tragen. Die s-Abhängigkeit ist vollständig absorbiert in den longitudinalen Komponenten $g_{\imath\jmath}$ des metrischen Tensors. Dieses Resultat ist konsistent damit, daß bereits auf Basis allgemeiner Überlegungen, unabhängig von den Details der

Wechselwirkung, Verlinde, Verlinde zeigen, daß Hochenergiestreuung in d Dimensionen faktorisiert in einen s-abhängigen longitudinalen Anteil und in einen s-unabhängigen Anteil, der beschrieben wird durch eine *effektive Quantenfeldtheorie* in den $(d-2)$ nicht-longitudinalen Dimensionen.

Die mit $g_{\mathfrak{pm}}$ multiplizierte Funktion $\tilde{X}_{\mathfrak{pm}}$ ist dieselbe wie im asymptotischen Fall, demgegenüber für endliche Werte von s zusätzlich auftreten die mit $g_{\mathfrak{pp}}$, $g_{\mathfrak{mm}}$ multiplizierten Funktionen $\tilde{X}_{\mathfrak{pp}}$, $\tilde{X}_{\mathfrak{mm}}$. Sie sind offensichtlich bestimmt durch die $\mathfrak{p}$- beziehungsweise $\mathfrak{m}$-Seite der Streuung allein. Bereits aufgrund der manifesten Eichinvarianz der Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ folgt, daß diese Funktionen bestimmt sein müssen durch den respektiven Vakuumerwartungswert des einzelnen Wegner-Wilson-Loops: $\langle W_{\mathfrak{p}}\rangle_A$, $\langle W_{\mathfrak{m}}\rangle_A$. Dies wird explizit verifiziert. Die Funktionen $\tilde{X}_{\imath\jmath}$ sind gegeben als die Summe eines Anteils bezüglich der konfinierenden Struktur $t^{C}_{\mu\nu\rho\sigma}$ und eines Anteils bezüglich der nicht-konfinierenden Struktur $t^{NC}_{\mu\nu\rho\sigma}$ des fundamentalen Korrelations-Lorentztensors: $\tilde{X}_{\imath\jmath}=\varkappa\tilde{X}^{C}_{\imath\jmath}+(1-\varkappa)\tilde{X}^{NC}_{\imath\jmath}$ mit $\varkappa\cong 0.74$ dem gewichtenden Parameter. Wir gelangen zu expliziten Darstellungen für die bekannten Funktionen $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}}$,$\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pm}}$ und die neu neu auftretenden Funktionen $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}}$,$\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pp}}$ und $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{mm}}$,$\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{mm}}$ – für allgemeine Korrelationsfunktionen wie auch für die Korrelationsfunktionen des bekannten expliziten Ansatzes. Für die konfinierenden Funktionen identifizieren wir in der Tat den postulierten String-Mechanismus. So ist die bekannte Funktion $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}}$ bestimmt durch die *Wechselwirkung* der gluonischen Strings, die sich ausbilden in den Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$. Die Funktionen $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pp}}$ und$\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{mm}}$ sind respektive bestimmt durch den gluonischen String von $W_{\mathfrak{p}}$ und $W_{\mathfrak{m}}$. Wir zeigen, daß diese Funktionen zu interpretieren sind als die *dynamische Stringspannung* der Wegner-Wilson-Loops.

Für die Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ konstatieren wir noch unabhängig von der expliziten Gestalt der Funktionen $\tilde{X}_{\imath\jmath}$ einen leichten Anstieg mit s – konsistent mit dem experimentell beobachteten Anstieg hadronischer Wirkungsquerschnitte. Explizite Verifizierung erfordert explizite Auswertung der angegebenen Loop-Loop-Amplitude für große aber endliche Werte von s und die Angabe hadronischer Wellenfunktionen – die gleichfalls abhängen sollten von s. Beides ginge weit hinaus über den Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Wir beschränken uns darauf – abschließend Kapitel 2 – explizit durchzuführen die analytische Fortsetzung der nahezu lichtartigen T-Amplitude in die ins Euklidische fortgesetzte Minkowski-Raumzeit. Dies geschieht dadurch, daß analog wie im Minkowskischen Koordinatenlinien $\tilde{\mu}_{\mathrm{E}}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ konstruiert werden im Euklidischen, deren longitudinalen Komponenten definiert sind durch die Richtungen der Wegner-Wilson-Loops in der Euklidischen $x^4_{\mathrm{E}}x^3_{\mathrm{E}}$-Ebene, die entspricht der Minkowskischen x^0x^3-Boost-Ebene. Die Loops schließen ein im Euklidischen den *Winkel* θ, im Minkowskischen den *hyperbolischen Winkel* ψ. Resultat ist, daß die T-Amplituden $(\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}\equiv(\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}$ und $\tilde{T}_{\mathcal{U}}\equiv\tilde{T}^{(s,\mathbf{b})}_{\mathcal{U}}$ für die Streuung der Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathrm{E}\mathfrak{p}}$, $W_{\mathrm{E}\mathfrak{m}}$ in Euklidischer beziehungsweise $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$ in Minkowskischer Raumzeit in einfacher Weise zusammenhängen durch die analytische Fortsetzung der (hyperbolischen) Winkel wie $-\mathrm{i}\,\theta\leftrightarrow\psi$. Zu derselben Fortsetzungsvorschrift gelangt Meggiolaro für Quar-Quark-Streuung.[4.30] Wir schließen Kapitel 2 mit der expliziten Angabe dieses Zusammenhangs in Form: $(\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}[\theta]=\tilde{T}_{\mathcal{U}}[\psi\rightarrow-\mathrm{i}\theta]$, umgekehrt: $\tilde{T}_{\mathcal{U}}[\psi]=(\tilde{T}_{\mathcal{U}})_{\mathrm{E}}[\theta\rightarrow\mathrm{i}\psi]$, und der ausführlichen Diskussion der Relevanz dieses Resultats.

Kapitel 3 – wie Kapitel 4 – stehen chronologisch *vor* der Herleitung der nahezu lichtartigen T-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ für Loop-Loop-Streuung in Kapitel 2. Beiden Kapiteln liegt zugrunde noch die bekannte asymptotische Formel für $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ im Limes $s\rightarrow\infty$. Beide diskutieren explizite Streureaktionen physikalischer Hadronen im betrachteten kinematischen Bereich, für Definiertheit $-t<1\ \mathrm{GeV}^2$ und $\sqrt{s}=20\ \mathrm{GeV}$ der Fixierungspunkt der Parameter des MSV.

[4.30] Vgl. Fußn. 2.53 auf Seite 101: Meggiolaro definiert den Winkel θ mit *umgekehrtem* Vorzeichen.

Unter Übergang der Koordinatenlinien $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\} \to \bar{\mu} \in \{+, -, 1, 2\}$, das heißt Substitution $\mathfrak{p} \to +$, $\mathfrak{m} \to -$ bezüglich der Lorentz-Indizes kann Kapitel 2 gelesen werden als Herleitung der $s \to \infty$-asymptotischen exakt lichtartigen T-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$. In diesem Sinne gehen wir über durch $g_{\mathfrak{pp}}/g_{+-} \to 0$ und $g_{\mathfrak{pm}}/g_{+-} \to 1$ zu der $s \to \infty$-asymptotischen T-Amplitude für die Streuung exakt lichtartiger Wegner-Wilson-Loops $W_{\mathfrak{p}}$, $W_{\mathfrak{m}}$, die wir auffassen als die T-Amplitude für die Streuung der entsprechenden Quark-Antiquark-Dipole und an den Anfang stellen unserer Analysen in Kapitel 3 und 4.

Der Übergang zu Hadronen geschieht, wie dargestellt in Kapitel 2: Hadronen werden aufgefaßt als Superposition von Quark-Antiquark-Dipolen, die verteilt sind gemäß quantentheoretischer Quark-Antiquark-Wellenfunktionen, cum grano salis *Lichtkegelwellenfunktionen* $\psi_i(z_i, \mathbf{k}_i)$ im Sinne der perturbativen Theorie auf dem Lichtkegel. Ihre relevanten Raumzeit-Paramete z_i und $\mathbf{k}_i$ sind bestimmt durch die Forderung ihrer Kovarianz unter Lorentz-Transformationen; dabei ist z der Anteil des Quarks am Lichtkegelimpuls des Dipols: $p_i^{\pm} = z_i P_i^{\pm}$ bei Propagation in die $x^{\pm}$-Richtung, und $\mathbf{k}_i = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_i - \bar{\mathbf{p}}_i) + (\frac{1}{2} - z_i)\mathbf{P}_i$ der transversalen Lichtkegel„relativ"impuls. Die Konstruktion der involvierten Lichtkegelwellenfunktionen wird explizit durchgeführt unmittelbar in Anschluß an die Diskussion der MSV-spezifischen Dipol-Dipol-, also der Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$.

Die Diskussion von $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$ für $s \to \infty$ reduziert sich auf die Funktionen $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}}, \tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pm}}$, diese wiederum sind vollständig bestimmt durch die Geometrie der Streuung in der x^1x^2-Transversalebene – also identisch für endliche Werte von s. Wesentliche Feststellung ist, daß in die Transversalebene projiziert wird die longitudinale Dynamik der Streuung in der Form, daß der relevante Impaktvektor $\mathbf{b}$ abhängt von den Anteilen z_i der respektiven Quarks der Dipole an deren gesamten Lichtkegelimpuls. In diesem Zusammenhang verifizieren wir a posteriori Annahme (3) des MSV, daß „bei möglichst symmetrischer Wahl" die Amplitude nur schwach abhängt von der Position des Referenzpunkts x_0 und, damit in Zusammenhang, nur schwach von der Wahl der Mantelflächen der verallgemeinerten Pyramiden, über die die paralleltransportierten Feldstärken in Kapitel 2 integriert werden.

Die Funktionen $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}}$ und $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pm}}$ zeigen wesentlich unterschiedliches Verhalten. So sind in $\tilde{X}^{C}_{\mathfrak{pm}}$ sämtliche Weltpunkte zwischen den (Anti)Quarks entlang der transversal projizierten Pyramiden-Mantelflächen miteinander korreliert, dagegen in $\tilde{X}^{NC}_{\mathfrak{pm}}$ nur die (Anti)Quarks selbst. Dies führt zu der Interpretation, daß die C-Funktion dominiert ist durch die Wechselwirkung gluonischer Strings, in der NC-Funktionen dagegen keine Strings ausgebildet werden. Diese Feststellung wird weiter herausgearbeitet und verifiziert für Hochenergiestreuung die Begriffe „konfinierend" und „nicht-konfinierend" für die Funktionen der respektiven Strukturen des Korrelations-Lorentztensors. Wichtiges Resultat in diesem Zusammenhang ist, daß der totale Wirkungsquerschnitt $\sigma^{\mathrm{tot}}_{tp}(z, r^2)$ für die Streuung eines Dipols am Proton ansteigt mit der transversalen Ausdehnung r des Dipols aufgrund des String-String-Mechanismus der C-Funktion, wohingegen er absättigt, wenn die C-Funktion ausgeschaltet wird und übrig bleibt nur die NC-Funktion. Perturbative Modelle auf Basis konventioneller Quark-Quark-Wechselwirkung führen zu Quark-additiven NC-Funktionen. Unterschiede sollten sich daher signifikant manifestieren für Dipole mit großer transversaler Ausdehnung.

Die in dieser Weise verstandenen Amplituden für Dipol-Dipol- und Dipol-Proton-Streuung liegen zugrunde der Analyse von Kapitel 3: exklusive (Photo- und) Leptoproduktion $\gamma^{(*)}p \to Vp$ der Grundzustand-Vektormesonen $V \equiv \rho(770), \omega(782), \phi(1020), J/\psi(3097)$ mit respektivem Flavour-Gehalt $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$, $(u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2}$, $s\bar{s}$, $c\bar{c}$.[4.31]

Es werden Lichtkegelwellenfunktionen $\psi(z, \mathbf{k})$ für die Verteilung von Quark-Antiquark-Dipolen konstruiert im Sinne der perturbativen Theorie auf dem Lichtkegel. Für das *Proton*

[4.31] Für *charm* kann betrachtet werden Photoproduktion; s.u. die Lichtkegelwellenfunktion des Photons.

wird der einfache Ansatz gemacht, der Lichtkegelimpuls werde zu gleichen Teilen getragen von Quark und Diquark: $z_2 \equiv 1/2$, ihr transversaler Relativimpuls $\mathbf{k}_2$ sei Gauß'sch verteilt, das heißt gemäß der $1S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators.

Die Lichtkegelwellenfunktion des *Photons* folgt unmittelbar aus der perturbativen Theorie. Parameter sind Virtualität Q und Helizität λ des Photons. Die T-Amplitude wesentlich bestimmende Größe ist die transversale Ausdehnung r der Dipole, die bestimmt wird in einem subtilen Wechselspiel der Parameter: Sie tritt auf in Form des Produkts εr als Argument der modifizierten Besselfunktionen zweiter Art K_0 und K_1; deren exponentieller Abfall für großes Argument induziert den Zusammenhang $r \sim \varepsilon^{-1}$ mit $\varepsilon \equiv \sqrt{z\bar{z}Q^2 + {m_f}^2}$ und m_f der laufenden renormierten Quarkmasse mit Flavour f. Für die leichten Quark-Flavour u, d mit $m_u \cong m_d \cong 0$ ist r groß für kleine Virtualitäten Q und an den Endpunkten des z-Intervalls $[0, 1]$; die z-Endpunkte sind unterdrückt durch einen expliziten Faktor $z\bar{z}$ in der Wellenfunktion für longitudinale Polarisation, nicht aber in der für transversale Polarisation. Für longitudinale Polarisation tritt auf ein Term $\propto K_0(\varepsilon r)$, für transversale die Terme $\propto K_1(\varepsilon r)$ und $\propto m_f\, K_0(\varepsilon r)$. Um zu große Dipole zu vermeiden – die physikalisch ausgeschlossen sind durch die Manifestierung der chiralen Symmetriebrechung und dem Phänomen von Confinement – beschränken wir uns für die Flavour *up*, *down*, *strange* auf Werte von Q^2 größer als $1-2\ \mathrm{GeV}^2$; da $m_c \cong 1.3$ GeV kann für *charm* Photoproduktion betrachtet werden. Da unser Zugang nicht einschließt die Streuung perturbativer Onia, das heißt „perturbativ kleiner" Dipole, beschränken wir uns konservativ auf Werte von Q^2 nicht größer als $10\ \mathrm{GeV}^2$.

Die Lichtkegelwellenfunktion der *Vektormesonen* wird konstruiert analog zu der des Photons. Es wird übernommen der Anteil, der die Helizitäten der (Anti)Quarks beschreibt. Ersetzt wird der Photon-spezifische Energienenner $(\mathbf{k}^2 + \varepsilon^2)^{-1}$ durch die $1S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators $\exp \frac{1}{2}\omega^2 r^2$ mit ω dem Oszillatorparameter, die z-Abhänggikeit wird repräsentiert nach Stech, Wirbel, Bauer. Die zwei Parameter des Ansatzes werden fixiert durch die Forderung von Normierung und Reproduktion des experimentellen Zahlenwerts für die Kopplung an den elektromagnetischen Strom. Die eigentlich relevante transversale Ausdehnung der Dipole wird hier in ähnlicher Weise bestimmt wie im Photon, wobei die Besselfunktionen entsprechend ersetzt sind durch die Gauß'schen Funktionen.

Auf Basis dieser hadronischen Wellenfunktionen werden diskutiert t-differentielle Wirkungsquerschnitte $d\sigma/dt$ als Funktion von t und ihr Integral σ im Bereich $-t = 0-0.6\ \mathrm{GeV}^2$, beide Größen im betrachteten Bereich von Q^2 zwischen $1-2$ und $10\ \mathrm{GeV}^2$ und für longitudinale und transversale Polarisation $\lambda \equiv L, T$ von Photon/Vektormeson.

Wir analysieren zunächst – am Beispiel von $\rho(770)$-Produktion als Prototyp mit der größten transversalen Ausdehnung – die allgemeine Charakteristik unserer Postulate. Dies involviert die $Q^2 \to 0$- und die $Q^2 \to \infty$-Asymptotik. Wir finden, daß der betrachtete Bereich von Q^2 intermediär ist, das heißt weder bezeichnet werden kann als asymptotisch klein noch als asymptotisch groß; dasselbe Resultat konstatieren wir für die experimentellen Wirkungsquerschnitte. Wir diskutieren die Wirkungsquerschnitte hin auf die transversale Ausdehnung r der Dipole, die sie wesentlich bestimmen. Für longitudinale Polarisation tragen wesentlich bei noch Dipole mit r bis 1.5 fm, für transversale Polarisation sogar bis über 2 fm.

In der expliziten Gegenüberstellung der von uns postulierten Wirkungsquerschnitte und der experimentellen Daten finden wir für alle betrachteten Observablen gute bis sehr gute Übereinstimmung – mit genau einer Ausnahme. Wir verzichten darauf, die Reihe der Observablen an dieser Stelle noch einmal aufzuzählen und verweisen auf die Abbildungen und deren Diskussion im Haupttext. Wir gehen nur ein auf die eine Diskrepanz. Diese bezieht sich auf den t-integrierten Wirkungsquerschnitt für $\phi(1020)$-Produktion. Wir verifizieren das von NMC beobachtete Skalierungsverhalten wie $1/Q^4$, postulieren aber absolut

etwa das Doppelte des experimentellen Wirkungsquerschnitts. Wir merken an im Haupttext, daß wir mit demselben funktionalen Ansatz arbeiten für die Lichtkegelwellenfunktionen sämtlicher Vektormesonen; Modifizierung des ϕ-Ansatzes hin zu einer stärker um $z=1/2$ gepeakten Funktion führte zu einer Verringerung des postuliereten Wirkungsquerschnitts ohne die $1/Q^4$-Skalierung zu verändern. Wir nehmen Abstand von einem solchen *fine tuning*. Tatsächlich postulieren wir in Kapitel 4 für Photoproduktion von $\phi(1020)$ einen Zahlenwert, der innerhalb des experimentellen Fehlerbereichs liegt und sogar kleiner als der zentrale Wert. Wir sehen dies als Argument dafür, daß auch die Daten für Leptoproduktion mit einem größeren Fehler behaftet sein könnten als angegeben.

Wir betonen, daß die gute bis sehr gute Übereinstimmung unserer Postulate mit den experimentellen Daten zu sehen ist vor dem Hintergrund, daß das MSV vollständig bestimmt ist durch drei Parameter: die Korrelationslänge a, das Gluonkondensat $\langle g^2 FF\rangle_A$ und der Proton-Radius bei der Referenzenergie von $\sqrt{s}=20$ GeV. Diese Parameter sind a priori festgelegt innerhalb sehr eng beschränkter Intervalle. Sie sind darüberhinaus fixiert durch Forderungen, die allenfalls in mittelbarem Zusammenhang stehen mit den hier postulierten Wirkungsquerschnitten: durch die Forderung von Konsistenz der MSV-Stringspannung eines statischen Quark-Antiquark-Paares mit dem Wert numerischer Gittersimulationen und der Forderung von Reproduktion des totalen Wirkungsquerschnitts und des *slope*-Parameters in Proton-Proton-Streuung für die Referenzenergie von $\sqrt{s}=20$ GeV.

Kapitel 4 liegt zugrunde – wie Kapitel 3 – die $s\to\infty$-asymptotische Formel für die Loop-Loop-Amplitude $\tilde{T}_{\mathcal{U}}$. Wir untersuchen exklusive Photo- und Leptoproduktion $\gamma^{(*)}p\to Vp$ der $1^+(1^{--})$-/Rho-Vektormesonen $V\equiv\rho(770),\rho(1450),\rho(1700)$. Gegenüber der Analyse in Kapitel 4 ist zum einen der Bereich von Q^2 erweitert zu kleineren bis verschwindenden Werten, zum anderen betrachtet höhere Rho-Anregungen. Beides impliziert größere transversale Ausdehnungen der involvierten Dipole. Der MSV-spezifische String-String-Mechanismus – die Ausbildung und Wechselwirkung gluonischer Flußschläuche zwischen den Quark-Konstituenten – wird noch weitgehender und effektiver untersucht. Konzeptionell erfordert diese Analyse zum einen die Kenntnis der Lichtkegelwellenfunktion des Photons auch für kleinere bis verschwindende Q^2, zum anderen die der höheren Rho-Anregungen.

Dosch, Gousset, Pirner diskutieren, daß sehr weitgehende Analogie besteht zwischen dem transversalen (zweidimensionalen) Harmonischen Oszillator und der Photon-Lichtkegelwellenfunktion der perturbativen Theorie auf dem Lichtkegel. Für den Harmonischen Oszillator sind die Greenfunktionen analytisch bekannt. Wir führen den Gang der Argumentation ausführlich aus im Haupttext. Resultat ist, daß – übertragen auf die Lichtkegelfunktion des Photons – diese im stark wechselwirkenden Bereich in einfacher Weise approximiert werden kann durch einen *shift* von Q^2, der in definierter Weise abhängt von Q^2, – besser als in Form der Superposition zahlreicher Residuen im Sinne des Vektormeson-Dominanz-Modells. Mit $\varepsilon\equiv\sqrt{z\bar{z}Q^2+m_f{}^2}\to\sqrt{z\bar{z}Q^2+m^2_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)}$ wird dieser Q^2-abhängige *shift* absorbiert in einer effektiven Quarkmasse. Diese Funktion berechnen Dosch, Gousset, Pirner für *up/down* und *strange*. Resultat ist, daß $m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$ oberhalb einer Schwelle $Q^2_{f,0}$ identisch ist der laufenden Quarkmasse m_f und von $Q^2_{f,0}$ an – im wesentlichen – linear ansteigt auf den Wert $m_{f,0}>m_f$ einer Konstituentenmasse für $Q^2\equiv 0$. Wir legen unserer Analyse zugrunde diese universelle Lichtkegelwellenfunktion des Photons mit den expliziten Werten $Q^2_{u/d,0}\equiv 1.05\ \mathrm{GeV}^2$, $m_{u/d,0}\equiv 0.220$ GeV und $m_{u/d}\equiv 0$.[4.32]

In Bezug auf die Lichtkegelwellenfunktionen der Rho-Anregungen $\rho(1450)$, $\rho(1700)$ diskutieren wir zunächst deren Massespektren in Photoproduktion am Proton und e^+e^--Anni-

[4.32] der Photoproduktion von $\phi(1020)$ die Werte $Q^2_{s,0}\equiv 1.6\ \mathrm{GeV}^2$, $m_{s,0}\equiv 0.310$ GeV und $m_s\equiv 0.150$ GeV

hilation. Im Bereich der invarianten Masse von 1.6 GeV wird beobachtet respektive eine konstruktive und destruktive Interferenz; dies ist nicht zu erklären auf Basis nur einer Resonanz. Die Analyse der Spektren und phänomenologischen Zerfallskanäle zeigt, daß zwei Resonanzen stark koppeln an den elektromagnetischen Strom. Wir machen den Ansatz eines (Quark-Antiquark-)$2S$-Zustands und eines „Rests", dessen Kopplung an den elektromagnetischen Strom unterdrückt ist – etwa der $2D$- oder hybride Zustände wie Quark-Antiquark-Gluon. Kopplung an den elektromagnetische Strom und Mischungswinkel folgen aus den Spektren. In den betrachteten Produktionsprozessen trägt per definitionem der „Rest" nur vernachlässigbar bei. Es genügt, eine Wellenfunktion anzugeben für den $2S$-Zustand.

Dies geschieht vollständig analog zum (Quark-Antiquark-)$1S$-Zustand des $\rho(770)$. Dabei wird der Anregung Rechnung getragen durch einen „transversalen" Knoten in Form der $2S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators und einem „longitudinalen" Knoten. Der Ansatz involviert zwei Parameter, die fixiert werden durch die Forderung von Normierung und Orthogonalität bezüglich der $1S$-Wellenfunktionen. Die Oszillatorparameter $\omega_{2S,L}$, $\omega_{2S,T}$ werden zunächst übernommen von der $1S$-Funktion, dann in der Weise minimal geändert, daß folgen identische Kopplungen an den elektromagnetischen Strom für longitudinale und transversale Polarisation.

Auf dieser Basis werden explizit berechnet t-differentielle Wirkungsquerschnitte $d\sigma/dt$ als Funktion von t und ihr Integral σ im Bereich $-t = 0-0.6$ GeV^2. Wir beziehen uns hier auf Werte von Q^2 von $0-20$ GeV^2 und diskutieren longitudinale und transversale Polarisation.

Zunächst diskutieren wir wieder die allgemeine Charkteristik unserer Postulate. Im effektiven Überlapp der Photon- und $2S$-Lichtkegelwellenfunktion als Funktion der transversalen Ausdehnung r der korrespondierenden Dipole identifizieren wir ein subtiles Wechselspiel zwischen den Beiträgen rechts und links des Knotens, die eingehen mit entgegengesetztem Vorzeichen. So dominieren für kleiner werdende Werte von Q^2 die äußeren positiven Beiträge über die inneren negativen. Die T-Amplitude in Photoproduktion $-Q^2 \equiv 0$, große Dipole – hat umgekehrtes Vorzeichen wie die T-Amplitude in e^+e^--Annihilation – kleine Dipole. Dies erklärt die Umkehr des Interferenzmusters in den Massespektren. Wesentlich ist, daß das Wechselspiel rechts-versus-links-des-Knotens darauf basiert, daß der Dipol-Proton-Wirkungsquerschnitt nicht absättigt, sondern ansteigt mit r, und dies wiederum über die C-Funktion $\tilde{X}^C_{\rm pm}$ unmittelbare Konsequenz ist des MSV-spezifischen String-String-Mechanismus. Perturbative Modelle auf Basis Quark-additiver Wechselwirkung führen auf eine absättigende NC-Funktion allein und erklären daher nicht die Rho-Massespektren.

Wir finden ferner, daß wesentlich beitragen zu den Wirkungsquerschnitten Dipole mit transversaler Ausdehnung r bis 2 fm für longitudinale und bis 3 fm für transversale Polarisation. Dies ist sicherlich ein Bereich, in dem die Beschreibung durch perturbative QCD versagt und die allgemein konstatierte gute bis sehr gute Übereinstimmung unserer Postulate mit den experimentellen Daten aufgefaßt werden kann als beeindruckende Verifizierung des MSV und unseres Zugangs im allgemeinen. Diese Übereinstimmung ist ausführlich dokumentiert in den Abbildungen und deren Diskussion im Haupttext, so daß wir sie hier nicht noch einmal rekapitulieren. Wir schließen Resumée und Arbeit.

Anhang A

Algebra

In diesem Anhang geben wir grundlegende Definitionen und Relationen an, die die Algebra bezüglich Größen mit Lorentz-, Dirac- beziehungsweise Eichgruppenindizes betrifft. Wir legen keinen Wert auf Vollständigkeit. Absicht aber ist, die im Haupttext benutzten Definitionen und Relationen festzuhalten.

A.1 Lorentz-Algebra

Wir geben zunächst an unsere generellen Konventionen und Definitionen bezüglich kontra- und kovarianter Komponenten von Tensoren, bezüglich metrischem Tensor, Epsilon-Pseudotensor und Basen des Minkowski-Raumes. Wir halten dann fest unsere Konventionen in Zusammenhang mit Lichtkegelkoordinaten.

A.1.1 Generelle Konventionen und Definitionen

Ein Lorentz-Vektor x sei definiert als Spaltenvektor seiner *kontravarianten Komponenten*:

$$x \;=\; \left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)^t \;\equiv\; \left(x^\mu\right) \qquad \mu \in \{0,1,2,3\} \tag{A.1}$$

Das Lorentz-invariante *Vierer-Skalarprodukt* zweier Vektoren x, y ist gegeben durch

$$x \cdot y \;=\; g_{\mu\nu}\, x^\mu\, y^\nu \;=\; x_\mu\, y^\mu \tag{A.2}$$

mit Definition *kovarianter Komponenten* durch

$$x_\mu \;:=\; g_{\mu\nu}\, x^\nu \tag{A.3}$$

Dabei ist g der *metrische Tensor*, der definiert ist durch seine kovarianten Komponenten:

$$g \;\equiv\; \left(g_{\mu\nu}\right) \;=\; \mathrm{diag}[+1,-1,-1,-1] \tag{A.4}$$

Seine kontravarianten Komponenten $g^{\mu\nu}$ sind definiert durch $x^\mu =: g^{\mu\nu} x_\nu$, das heißt durch die inverse Relation zu Gl. (A.3); daraus folgt:[A.1]

$$\delta^\mu_\nu \;=\; g^{\mu\sigma}\, g_{\sigma\nu} \;=\; g^\mu{}_\nu \;=\; g_{\nu\sigma}\, g^{\sigma\mu} \;=\; g_\nu{}^\mu \tag{A.5}$$

das heißt die Matrix der kontravarianten Komponenten $\left(g^{\mu\nu}\right)$ spielt die Rolle der Inversen g^{-1} und ist identisch mit g aufgrund deren expliziten Gestalt, vgl. Gl. (A.4):

$$g^{-1} \;\equiv\; \left(g^{\mu\nu}\right) \;=\; \mathrm{diag}[+1,-1,-1,-1] \;=\; g \tag{A.6}$$

[A.1] Sei die zweite und letzte Identität verstanden als suggestive Notation.

Der *Epsilon-Pseudotensor* ist allgemein definiert als das Signum der Permutation seiner Indizes, – durch seine kontravarianten Komponenten, $\epsilon \equiv (\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma})$ mit $\epsilon^{0123} \equiv 1$, wie folgt:

$$\epsilon^{\mu_0 \cdots \mu_3} \equiv \begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_3 \\ 0 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \epsilon^{0123} \qquad \Longrightarrow \quad \epsilon_{\mu_0 \cdots \mu_3} \equiv \begin{pmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_3 \\ 0 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \epsilon_{0123} \tag{A.7}$$

$$\textit{per definitionem:} \quad \epsilon^{0123} \equiv +1 \qquad \textit{folglich:} \quad \epsilon_{0123} \equiv -1 \tag{A.7'}$$

Dabei ist

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_s \\ b_1 & \cdots & b_s \end{pmatrix} := \text{sign}(\sigma^\star) \qquad \sigma^\star \in S_s \;\text{ mit }\; \sigma^\star(a_i) = b_i,\ \forall i = 1, \ldots s \tag{A.8}$$

Standard-Notation für das Signum der Indexpermutation $\sigma^\star : a_i \to b_i$; vgl. etwa Ref. [116].

Wir notieren kurz Symmetrisierung und Antisymmetrisierung von Tensorindizes, indem wir diese schreiben in geschweiften beziehungsweise eckigen Klammern:

$$T^{\{\mu_1 \cdots \mu_s\}} := \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} T^{\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(s)}} \tag{A.9}$$

$$T^{[\mu_1 \cdots \mu_s]} := \frac{1}{s!} \sum_{\sigma \in S_s} \text{sign}(\sigma)\ T^{\mu_{\sigma(1)} \cdots \mu_{\sigma(s)}} \tag{A.9'}$$

Von der (Anti-)Symmetrisierung ausgenommene Indizes seien notiert zwischen vertikalen Strichen, etwa: $T^{\lambda[\mu|\nu\rho|\sigma]} = 1/2!\,(T^{\lambda\mu\nu\rho\sigma} - T^{\lambda\sigma\nu\rho\mu})$.

Eine *Basis* des Minkowski-Raumes ist gegeben durch vier linear unabhängigge Lorentz-Vektoren $e_{(\mu)} \equiv (e_{(\mu)}{}^\nu)$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$. Das Vierbein $\{e_{(\mu)}\}$ ist *orthonormierte Basis*, falls:

$$e_{(\mu)} \cdot e_{(\nu)} = g_{\mu\nu} \tag{A.10}$$

$$\text{d.h.} \qquad e_{(0)} \cdot e_{(0)} = +1 \qquad e_{(1)} \cdot e_{(1)} = e_{(2)} \cdot e_{(2)} = e_{(3)} \cdot e_{(3)} = -1$$

Seien weiter definiert Vektoren $e^{(\mu)} \equiv (e^{(\mu)\nu})$ durch

$$e^{(\mu)} := g^{\mu\nu}\, e_{(\nu)} \tag{A.11}$$

Wegen $0 \neq \det(g^{\mu\nu}) = \det g^{-1} = (\det g)^{-1}$ bilden diese wieder eine Basis des Minkowski-Raumes.[A.2] Mit $e^{(\mu)} \cdot e^{(\nu)} = g_{\rho\sigma}\, e^{(\mu)\rho}\, e^{(\nu)\sigma} = g_{\rho\sigma}\, g^{\mu\alpha}\, e_{(\alpha)}{}^\rho\, g^{\nu\beta}\, e_{(\nu)}{}^\sigma = g^{\mu\alpha}\, g^{\nu\beta}\, e_{(\alpha)} \cdot e_{(\beta)}$ folgt

$$e^{(\mu)} \cdot e^{(\nu)} = g^{\mu\nu} \tag{A.12}$$

unmittelbar aus Gl. (A.10), das heißt mit $\{e_{(\mu)}\}$ ist $\{e^{(\mu)}\}$ orthonormiert. Für einen beliebigen Lorentz-Vektor x existieren eindeutige Zerlegungen:

$$x = x^\mu\, e_{(\mu)} = x_\mu\, e^{(\mu)} \tag{A.13}$$

Die Komponenten x^μ, x_μ bezüglich $\{e_{(\mu)}\}$, $\{e^{(\mu)}\}$ folgen umgekehrt als Projektionen:

$$x^\mu = x \cdot e^{(\mu)} \qquad \text{bzw.} \qquad x_\mu = x \cdot e_{(\mu)} \tag{A.14}$$

Diese Gleichungen sind Tensorgleichungen, die gelten in einem beliebigen (inertialen) Koordinatensystem. In diesem Sinne werden konstruiert Vierbeine $\{\bar{e}_{(\bar{\mu})}\}$, $\bar{\mu} \in \{+,-,1,2\}$, und $\{\tilde{e}_{(\tilde{\mu})}\}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ deren Vektoren verlaufen in Richtung der Lichtkegel-Koordinatenlinien bzw. der Weltlinien zweier aktiv geboosteter Teilchen. Vgl. Anh. A.1.2 bzw. Anh. D.

Es sind realisiert *karthesische* Koordinaten durch explizite Definition der $e_{(\mu)} \equiv (e_{(\mu)}{}^\nu)$ als die Einheitsvektoren in Richtung der (kontravarianten) karthesischen Koordinatenachsen:

$$e_{(\mu)}{}^\nu := g_\mu{}^\nu = \delta^\nu_\mu \tag{A.15}$$

Mit $e^{(\mu)\nu} = g^{\mu\rho}\, e_{(\rho)}{}^\nu$ folgt daraus unmittelbar:

$$e^{(\mu)\nu} = g^{\mu\nu} \tag{A.16}$$

Es sind x^μ, x_μ die konventionellen karthesischen kontra-/kovarianten Komponneten von x.

[A.2] Unsere Notation deute an, daß unter Lorentz-Transformatioenen die $e_{(\mu)}$ wie kovariante, die $e^{(\mu)}$ wie kontravariante Tensorkomponenten transformieren; vgl. Anh. D.

A.1.2 Lichtkegelkoordinaten

Sei $x \equiv (x^\mu)$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$, ein beliebiger Lorentz-Vektor nach Gl. (A.1). Seine Darstellung in Lichtkegelkoordinaten ist analog definiert durch seine *kontravarianten* Komponenten:[A.3]

$$\bar{x} \;=\; \left(x^+, x^-, x^1, x^2\right)^t \;\equiv\; \left(x^{\bar{\mu}}\right) \qquad \bar{\mu} \in \{+,-,1,2\} \tag{A.17}$$

Seien diese definiert durch:

$$x^\pm \;:=\; \alpha\left(x^0 \pm x^3\right) \qquad x^{\bar{i}} \;:=\; x^i \quad i \in \{1,2\} \tag{A.18}$$

in Matrixnotation $\bar{x} = \mathbb{L}\, x$, explizit:[A.4]

$$x^{\bar{\mu}} \;=\; \mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\nu}\, x^\nu \qquad \text{mit} \qquad \mathbb{L} \equiv \left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\nu}\right) = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det \mathbb{L} = -2\alpha^2 \tag{A.18$'$}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}^+$ einer noch offenen Normierung, die wir in praxi setzen: $\alpha \equiv 1/\sqrt{2}$ [in der Literatur nicht einheitlich, häufig 1 oder $1/\sqrt{2}$]. Invertiert gilt:

$$x^0 \;=\; \frac{1}{2\alpha}\left(x^+ + x^-\right) \qquad x^3 \;=\; \frac{1}{2\alpha}\left(x^+ - x^-\right) \qquad x^i \;=\; x^{\bar{i}} \quad i \in \{1,2\} \tag{A.19}$$

mit der kontragredienten Matrix:[A.4]

$$x^\mu \;=\; \mathbb{L}_{\bar{\nu}}{}^{\mu}\, x^{\bar{\nu}} \qquad \text{mit} \qquad \left(\mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\nu}\right) \equiv \left(g_{\bar{\mu}\bar{\rho}}\, \mathbb{L}^{\bar{\rho}}{}_{\sigma}\, g^{\sigma\nu}\right) = \mathbb{L}^{-1}\, t = \frac{1}{2\alpha}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.19$'$}$$

Der metrische Tensor ist dabei definiert durch $\bar{g} \equiv \left(g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)$, das heißt durch die Matrix seiner kovarianten Komponenten.[A.5] Es wird gefordert Invarianz des Vierer-Skalarprodukts, das heißt formal für x, y zwei beliebige Lorentz-Vektoren:

$$x \cdot y \;=\; g_{\mu\nu}\, x^\mu\, y^\nu \;\stackrel{!}{=}\; \bar{x} \cdot \bar{y} \;=\; g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\, x^{\bar{\mu}}\, y^{\bar{\nu}} \tag{A.20}$$

Für $\bar{g} \equiv \left(g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)$ folgen die Komponenten:

$$g_{++} = g_{--} = 0 \qquad g_{+-} = g_{-+} = 1/(2\alpha^2) = -\left[\det \mathbb{L}\right]^{-1} \tag{A.21}$$

$$g_{\bar{i}\bar{j}} = g_{ij} = -\delta_{ij} \quad i \in \{1,2\} \tag{A.21$'$}$$

Dann sind *kovariante* Lichtkegelkomponenten $x_{\bar{\mu}} = \mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\nu}\, x_\nu$ gegeben durch:

$$x_{\bar{\mu}} \;=\; g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\, x^{\bar{\nu}} \tag{A.22}$$

Durch $x^{\bar{\mu}} =: g^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\, x_{\bar{\nu}}$, das heißt durch die zu Gl. (A.22) inverse Relation sind definiert die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors. Es folgt:

$$g^{++} = g^{--} = 0 \qquad g^{+-} = g^{-+} = 2\alpha^2 = -\det \mathbb{L} \tag{A.23}$$

$$g^{\bar{i}\bar{j}} = g^{ij} = -\delta^{ij} \quad i \in \{1,2\} \tag{A.23$'$}$$

Ihre Matrix spielt die Rolle der Inversen zu $\bar{g}$, und wir schreiben: $\bar{g}^{-1} \equiv \left(g^{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)$.

Der Epsilon-Pseudotensor: $\bar{\epsilon} \equiv \left(\epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}}\right)$ mit $\bar{\mu}, \bar{\nu}, \bar{\rho}, \bar{\sigma} \in \{+,-,1,2\}$, ist definiert durch seine kontravarianten Komponenten, die folgen mithilfe der Leibnitz'schen Determinantenformel:

$$\epsilon^{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\rho}\bar{\sigma}} \;=\; \mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\, \mathbb{L}^{\bar{\nu}}{}_{\beta}\, \mathbb{L}^{\bar{\rho}}{}_{\gamma}\, \mathbb{L}^{\bar{\sigma}}{}_{\delta}\, \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; \det\left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\right) \cdot \begin{pmatrix} \bar{\mu} & \bar{\nu} & \bar{\rho} & \bar{\sigma} \\ + & - & 1 & 2 \end{pmatrix} \epsilon^{0123} \tag{A.24}$$

$$\text{mit} \qquad \det\left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\right) = \det \mathbb{L} = -\,2\alpha^2 = -\,g^{+-} \tag{A.24$'$}$$

[A.3] Tensoren und Tensorkomponeten seien generell bezeichnet im Sinne $T \equiv \left(T^{\mu_1 \cdots \mu_s}\right)$ versus $\bar{T} \equiv \left(T^{\bar{\mu}_1 \cdots \bar{\mu}_s}\right)$.

[A.4] Seien hier und im folgenden ausgeschrieben nur die nichttrivialen longitudinalen Komponenten.

[A.5] Die folgenden Definitionen, Konventionen, Zusammenhänge stehen in vollständiger Analogie zu A.1.1.

entsprechend die kovarianten Komponenten:

$$\epsilon_{\bar\mu\bar\nu\bar\rho\bar\sigma} \;=\; \mathbb{L}_{\bar\mu}{}^{\alpha}\,\mathbb{L}_{\bar\nu}{}^{\beta}\,\mathbb{L}_{\bar\rho}{}^{\gamma}\,\mathbb{L}_{\bar\sigma}{}^{\delta}\,\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \;=\; \det\left(\mathbb{L}_{\bar\mu}{}^{\alpha}\right)\cdot\begin{pmatrix}\bar\mu & \bar\nu & \bar\rho & \bar\sigma\\ + & - & 1 & 2\end{pmatrix}\,\epsilon_{0123} \tag{A.25}$$

$$\text{mit}\qquad \det\left(\mathbb{L}_{\bar\mu}{}^{\alpha}\right) = [\det\mathbb{L}]^{-1} = -\,1/(2\alpha^2) = -\,g_{+-} \tag{A.25'}$$

Unsere Konvention für $\epsilon\equiv\left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\right)$ ist $\epsilon^{0123}\equiv+1\Rightarrow\epsilon_{0123}=-1$, das Klammersymbol steht für das Signum der Indexpermutation $(\bar\mu,\bar\nu,\bar\rho,\bar\sigma)\to(+,-,1,2)$; vgl. Gl. (A.7′) bzw. (A.8).

Seien $e_{(\bar\mu)}\equiv\left(e_{(\bar\mu)}{}^{\bar\nu}\right)$, $\bar\mu,\bar\nu\in\{+,-,1,2\}$, vier linear unabhängige Lorentz-Vektoren mit

$$e_{(\bar\mu)}\cdot e_{(\bar\nu)} \;=\; g_{\bar\mu\bar\nu} \tag{A.26}$$

Dann ist das Vierbein $\{e_{(\bar\mu)}\}$ orthonormale Basis des Minkowski-Raumes, vgl. Gl. (A.10); seien die Vektoren $e_{(\bar\mu)}$ für $\bar\mu\in\{+,-,1,2\}$ ferner gewählt als als die Einheitsvektoren in Richtung der (kontravarianten) Lichtkegel-Koordinatenlinien $\{+,-,1,2\}$:

$$e_{(\bar\mu)}{}^{\bar\nu} \;:=\; g_{\bar\mu}{}^{\bar\nu} \;=\; \delta_{\bar\mu}^{\bar\nu} \tag{A.27}$$

Seien weiter definiert „kontravariante“ Vektoren $e^{(\bar\mu)}\equiv\left(e^{(\bar\mu)\bar\nu}\right)$ durch:

$$e^{(\bar\mu)} \;:=\; g^{\bar\mu\bar\nu}\,e_{(\bar\nu)} \tag{A.28}$$

Mit $e^{(\bar\mu)}\cdot e^{(\bar\nu)}=g^{\bar\mu\bar\alpha}\,g^{\bar\nu\bar\beta}\,e_{(\bar\alpha)}\cdot e_{(\bar\beta)}$ folgt unmittelbar aus Gl. (A.26):

$$e^{(\bar\mu)}\cdot e^{(\bar\nu)} \;=\; g^{\bar\mu\bar\nu} \tag{A.29}$$

und mit $e^{(\bar\mu)\bar\nu}=g^{\bar\mu\bar\sigma}\,e_{(\bar\sigma)}{}^{\bar\nu}$ weiter aus Gl. (A.27):

$$e^{(\bar\mu)\bar\nu} \;=\; g^{\bar\mu\bar\nu} \tag{A.30}$$

Dann besitzt ein beliebiger Lorentz-Vektor x eindeutige Zerlegungen:

$$\bar x \;=\; x^{\bar\mu}\,e_{(\bar\mu)} \;=\; x_{\bar\mu}\,e^{(\bar\mu)} \tag{A.31}$$

mit Komponenten:

$$x^{\bar\mu} \;=\; \bar x\cdot e^{(\bar\mu)} \qquad\text{bzw.}\qquad x_{\bar\mu} \;=\; \bar x\cdot e_{(\bar\mu)} \tag{A.32}$$

Aufgrund der Definition der $e_{(\bar\mu)}$ als die Einheitsvektoren in Richtung der (kontravarianten) Lichtkegel-Koordinatenachsen – Gl. (A.27) – sind $x^{\bar\mu}$, $x_{\bar\mu}$ genau die konventionellen kontra- beziehungsweise kovarianten Lichtkegelkomponenten der Gln. (A.18), (A.18′) und (A.22).

A.2 Dirac-Algebra [A.6]

Definierende Relation der Dirac- oder Clifford-Algebra ist:

$$\{\gamma^\mu,\gamma^\nu\} \;\equiv\; \gamma^\mu\,\gamma^\nu \;+\; \gamma^\nu\,\gamma^\mu \;=\; 2\,g^{\mu\nu}\;\mathbb{1} \tag{A.33}$$

mit $\mu,\nu\in\{0,1,2,3\}$. Es ist $\mathbb{1}$ die Eins des Dirac-Raums von 4×4-Matrizen und γ^μ vier Matrizen mit γ^0 hermitesch und unitär, γ^i antihermitesch und antiunitär:

$$\gamma^0 \;=\; \gamma^{0\dagger} \;=\; (\gamma^0)^{-1} \tag{A.34}$$

$$-\gamma^i \;=\; \gamma^{i\dagger} \;=\; (\gamma^i)^{-1} \tag{A.34'}$$

[A.6] Bzgl. der Dirac-Algebra orientieren wir uns in Notation und Konvention an den Refn. [114, 147].

Weiter ist definiert $\gamma_5 = \gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\mathrm{i}/4!\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$ mit $\gamma_5^2 = \mathbb{1}$ und $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$. Die γ^μ sind spurlos; allgemein folgt für Produkte von Gamma-Matrizen mit s ungerade:

$$\mathrm{tr}\ \gamma^{\mu_1} \cdots \gamma^{\mu_s} = 0 \qquad \forall\, s \text{ ungerade} \tag{A.35}$$

Für s gerade folgt:

$$\mathrm{tr}\ \mathbb{1} = 4 \tag{A.36}$$

$$\mathrm{tr}\ \gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2} = 4\, g^{\mu_1\mu_2} \tag{A.36'}$$

$$\mathrm{tr}\ \gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}\gamma^{\mu_3}\gamma^{\mu_4} = 4\left(g^{\mu_1\mu_2}\, g^{\mu_3\mu_4} - g^{\mu_1\mu_3}\, g^{\mu_2\mu_4} + g^{\mu_1\mu_4}\, g^{\mu_2\mu_3}\right) \tag{A.36''}$$

Hermitesche Konjugation wird vermittelt durch

$$\gamma^0\,\gamma^\mu\,\gamma^0 = \gamma^{\mu\dagger} \tag{A.37}$$

Ladungskonjugation durch

$$C^{-1}\,\gamma^\mu\,C = -\gamma^{\mu t} \qquad -C = C^t = C^\dagger = C^{-1} \tag{A.38}$$

das heißt C ist antisymmetrisch, antihermitesch und unitär. Wir bezeichnen

$$\sigma^0 = \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.39}$$

und definieren die Pauli-Matrizen durch

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.40}$$

Die Dirac-Darstellung ist damit definiert durch

$$\gamma^0_{\mathrm{Dirac}} = \sigma^3 \otimes \mathbb{1} = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{A.41}$$

$$\gamma^i_{\mathrm{Dirac}} = \mathrm{i}\,\sigma^2 \otimes \sigma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \tag{A.41'}$$

und $\gamma_5 = \sigma^1 \otimes \mathbb{1}$. Die Gamma-Matrizen einer beliebigen anderen Darstellung folgen aus

$$\gamma^\mu = U\,\gamma^\mu_{\mathrm{Dirac}}\,U^\dagger \tag{A.42}$$

Die Dirac-Spinoren u, v sind Funktionen des *On mass-shell*-Impulses p, für den also gilt: $p_{0+} = \sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2}$, und lösen die freie Dirac-Gleichung:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\ u_s(p) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (\mathrm{i}\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu - m)\ u_s(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} = 0 \tag{A.43}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)\ v_s(p) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad (\mathrm{i}\gamma^\mu \overrightarrow{\partial}_\mu + m)\ v_s(p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} = 0 \tag{A.43'}$$

Dirac-Konjugation impliziert Multiplikation mit γ^0; konjugierte Dirac-Spinoren sind definiert durch:

$$\overline{u} = u^\dagger\,\gamma^0 \tag{A.44}$$

$$\overline{v} = v^\dagger\,\gamma^0 \tag{A.44'}$$

Sie lösen die hermitesch konjugierte Dirac-Gleichung:

$$\overline{u}_s(p)\ (\gamma^\mu p_\mu - m) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{u}_s(p)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\ (\mathrm{i}\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \tag{A.45}$$

$$\overline{v}_s(p)\ (\gamma^\mu p_\mu + m) = 0 \qquad \text{bzw.} \qquad \overline{v}_s(p)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}\ (\mathrm{i}\gamma^\mu \overleftarrow{\partial}_\mu + m) = 0 \tag{A.45'}$$

Für die Projektoren $\Lambda_{(\pm)}$ auf Zustände positiver beziehungsweise negativer Energie folgt:

$$\Lambda_{(+)} \equiv \sum_{s=\pm 1/2} u_s(p)\,\overline{u}_s(p) = \mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m \tag{A.46}$$

$$\Lambda_{(-)} \equiv -\sum_{s=\pm 1/2} v_s(p)\,\overline{v}_s(p) = -\mathrm{i}\gamma^\mu p_\mu + m \tag{A.46'}$$

Die Dirac-Spinoren u, v erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$\overline{u}_s(p)\,u_{s'}(p) = -\overline{v}_s(p)\,v_{s'}(p) = 2m\,\delta_{ss'} \tag{A.47}$$

$$\overline{v}_s(p)\,u_{s'}(p) = \overline{u}_s(p)\,v_{s'}(p) = 0 \tag{A.47'}$$

und die Relationen

$$\overline{u}_s(p)\,\gamma^\mu\,u_{s'}(p) = 2p^\mu\,\delta_{ss'} \tag{A.48}$$

$$\overline{v}_s(p)\,\gamma^\mu\,v_{s'}(p) = 2p^\mu\,\delta_{ss'} \tag{A.48'}$$

bei Einschub einer Gamma-Matrix.

A.3 $su(N_\mathrm{c})$-Eichalgebra [A.7]

Eichtransformationen werden vermittelt durch speziell-unitäre $N_\mathrm{c}\times N_\mathrm{c}$-Matrizen. Diese sind aufzufassen als Elemente der zugrundeliegenden Liegruppe $SU(N_\mathrm{c})$; deren Dimension ist:

$$d_{SU(N_\mathrm{c})} = N_\mathrm{c}^2 - 1 \tag{A.49}$$

das heißt eine Eichtransformation ist determiniert durch $d_{SU(N_\mathrm{c})}$ reelle Parameter. Sei

$$\{T^a\} \qquad a = 1, 2, \ldots d_{SU(N_\mathrm{c})} \tag{A.50}$$

eine Basis der assoziierten Liealgebra $su(N_\mathrm{c})$, das heißt *per definitionem* gilt:

$$[T^a, T^b] = \mathrm{i}\,f_{abc}\,T^c \tag{A.51}$$

mit f_{abc} den *Strukturkonstanten* der $su(N_\mathrm{c})$, die o.E.d.A. gewählt seien als *vollständig antisymmetrisch* und *reell*. Die T^a sind *spurlose hermitesche Operatoren*:

$$\mathrm{tr}\,T^a = 0 \tag{A.52}$$

$$T^{a\dagger} = T^a \qquad \forall a = 1, 2, \ldots d_{SU(N_\mathrm{c})} \tag{A.52'}$$

und beziehen sich allgemein auf eine Darstellung $\mathfrak{R}$ der $SU(N_\mathrm{c})$; sie werden bezeichnet als deren *Erzeugende* oder *Generatoren*. Ein Index $\mathfrak{R}$ zur Notation einer allgemein gedachten Darstellung $\mathfrak{R}$ sei unterdrückt, wenn klar aus dem Zusammenhang.

Bezüglich des Begriffs der *Darstellung* sei verwiesen auf Ref. [147]. Wir fassen zusammen: Eine Darstellung $\mathfrak{R}$ der Dimension $d_\mathfrak{R}$ ist eine lineare Abbildung der Eins-Zusammenhangkomponente der Gruppe: $\mathfrak{E}\big|SU(N_\mathrm{c})$, in einen $d_\mathfrak{R}\times d_\mathfrak{R}$-dimensionalen linearen Raum, unter der die Gruppenrelation erhalten ist:

$$\mathfrak{R}(U)\cdot\mathfrak{R}(V) = \mathfrak{R}(U\cdot V) \qquad \forall\, U, V \in \mathfrak{E}\big|SU(N_\mathrm{c}) \tag{A.53}$$

Aufgrund der *Liestruktur* der $SU(N_\mathrm{c})$ genügt es, Elemente der Gruppe zu betrachten, die sich nur *infinitesimal* von der Eins unterscheiden, das heißt Elemente

$$U = \mathbb{1} + \mathrm{i}\,\delta\varphi_a\,T^a \tag{A.54}$$

mit $d_{SU(N_\mathrm{c})}$ reellen infinitesimalen Parametern $\delta\varphi_a$ und spurlosen hermiteschen $N_\mathrm{c}\times N_\mathrm{c}$-Matrizen T^a, die der Kommutatorrelation Gl. (A.51) genügen. Es zeigt sich, daß eine Darstellung

[A.7] Allgemeine nichtabelsche Eichgruppen $\mathfrak{G}$ wie $SU(N_\mathrm{c})$, $SO(N_\mathrm{c})$, $Sp(N_\mathrm{c})$, G_2, E_6, F_4, E_7 werden diskutiert in Ref. [44]. Zur Einführung in die Gruppen- und Darstellungstheorie der $SU(N_\mathrm{c})$ bzgl. allgemeinen N_c sei verwiesen auf Ref. [167], vgl.. auch die Refn. [163, 166], – bzgl. $N_\mathrm{c}\equiv 2, 3$ auf die Refn. [83, 147].

aufgrund von Gl. (A.53) diese Kommutatorrelation erhält und sie vollständig definiert ist durch die Abbildungsvorschrift in infinitesimaler Form:

$$\mathfrak{R}: \quad \mathbb{1} + \mathrm{i}\,\delta\varphi_a\, T^a \quad \longrightarrow \quad \mathbb{1}_{\mathfrak{R}} + \mathrm{i}\,\delta\varphi_a\, T^a_{\mathfrak{R}} \tag{A.55}$$

mit $T^a_{\mathfrak{R}}$ den Generatoren der Darstellung $\mathfrak{R}$. Diese Vorschrift von $\mathfrak{R}$ – aus der Liegruppe in die Liealgebra – gilt für ein beliebiges Gruppenelement $U = \mathbb{1} + \mathrm{i}\delta\varphi_a T^a$ nach Gl. (A.54), das heißt für beliebige Konstanten $\delta\varphi_a$, so daß für jedes feste $a = 1, 2, \ldots d_{SU(N_c)}$ die Matrix T^a auf den Operator $T^a_{\mathfrak{R}}$ abgebildet wird.

Sei im folgenden eine Darstellung $\mathfrak{R}$ aufgefaßt als *Matrix*darstellung, das heißt die sie erzeugenden Operatoren $T^a_{\mathfrak{R}}$ als $d_{\mathfrak{R}} \times d_{\mathfrak{R}}$-Matrizen, die den Gln. (A.52), (A.52′) genügen, in Komponenten:

$$T^a_{\alpha\alpha} \;=\; 0 \tag{A.56}$$

$$(T^{a\dagger})_{\alpha\beta} \;=\; T^{a\,*}_{\beta\alpha} \;=\; T^a_{\alpha\beta} \qquad a = 1, 2, \ldots d_{SU(N_c)} \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots d_{\mathfrak{R}} \tag{A.56′}$$

Aus dieser Gestalt folgt unmittelbar die Abhängigkeit der Darstellung $\mathfrak{R}$ von $d^2_{\mathfrak{R}} - 1$ reellen Parametern.

Zwei Darstellungen sind *physikalisch* von besonderer Relevanz: Die T^a auf der linken Seite von Gl. (A.55) können formal identifiziert werden mit den Generatoren $T^a_{\mathfrak{F}}$ einer Darstellung $\mathfrak{F}$ mit Dimension $d_{\mathfrak{F}} = N_c$. Diese Darstellung ist insofern ausgezeichnet und wird bezeichnet als definierende oder *fundamentale Darstellung*. Die Anzahl ihrer Parameter ist mit $d^2_{\mathfrak{R}} - 1 = N_c^2 - 1$ identisch der Anzahl $d_{SU(N_c)}$ der Parameter der Gruppe $SU(N_c)$, also *minimal* – also $Bild\,\mathfrak{F}$ der gesamte Darstellungsraum, nicht nur ein Unterraum. Die zweite physikalisch besonders relevante Darstellung ist die *adjungierte Darstellung* $\mathfrak{A}$, die bestimmt ist dadurch, daß ihre Generatoren entsprechend

$$(T^a_{\mathfrak{A}})_{bc} \;=\; -\mathrm{i}\, f_{abc} \tag{A.57}$$

definiert sind in Zusammenhang mit den Strukturkonstanten f_{abc} der Algebra. Dies definiert in der Tat eine Darstellung: Die Matrizen $T^a_{\mathfrak{A}}$ erfllen die Forderung von Spurfreiheit und Hermitezität, das heißt die Gln. (A.52), (A.52′), in Komponenten die Gln. (A.56), (A.56′) – aufgrund der Wahl der f_{abc} als voll antisymmetrisch und reell, vgl. die Bem. zu Gl. (A.51) und unten Gl. (A.60). Und sie erfüllen die Kommutatorrelation Gl. (A.51) – aufgrund der allgemeinen Jacobi-Identität, s.u. die Gln. (A.90), (A.90′). Die $T^a_{\mathfrak{A}}$ sind $d_{SU(N_c)} \times d_{SU(N_c)}$-Matrizen, so daß die adjungierte Darstellung die Dimension $d_{\mathfrak{A}} \equiv d_{SU(N_c)} = N_c^2 - 1$ besitzt.

Der fundamentalen Darstellung und adjungierten Darstellung gehören die *Materie-Spinorfelder* ψ beziehungsweise die *Eich-Vektorfelder* A an:

$$\psi_n \;\in\; \mathfrak{F} \qquad n = 1, 2, \ldots d_{\mathfrak{F}} \qquad \text{mit} \qquad d_{\mathfrak{F}} = N_c \tag{A.58}$$

$$A_a \;\in\; \mathfrak{A} \qquad a = 1, 2, \ldots d_{\mathfrak{A}} \qquad \sim \qquad d_{\mathfrak{A}} \equiv d_{SU(N_c)} = N_c^2 - 1 \tag{A.58′}$$

das heißt physikalisch die Quarks beziehungsweise Gluonen.

Wir kommen zurück auf die Kommutatorrelation Gl. (A.51):

$$[T^a, T^b] \;=\; \mathrm{i}\, f_{abc}\, T^c \tag{A.59}$$

Sie gilt zunächst für die Matrizen $T^a \in SU(N_c)$ auf der linken Seite von Gl. (A.55), die identifiziert werden mit den Generatoren $T^a_{\mathfrak{F}}$ der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$; sie überträgt sich aber unmittelbar auf die rechte Seite, also von $\mathfrak{F}$ auf eine beliebige Darstellung $\mathfrak{R}$ der $SU(N_c)$. Gl. (A.59) wird daher bezeichnet als definierende oder *fundamentale Kommutatorrelation*.

Wie wir leicht nachrechnen, folgt aus Gl. (A.59) – in dem Sinne, daß ihre Gestalt diese Wahl bereits impliziert:

$$f_{abc} \qquad \text{voll antisymmetrisch,} \quad \text{reell} \tag{A.60}$$

und hieraus

$$f_{aab} \;=\; 0 \tag{A.61}$$

bei Kontraktion zweier Indizes.

Entsprechend Gl. (A.59) kann für die Matrizen auf der linken Seite von Gl. (A.55), das heißt für die fundamentale Darstellung die Antikommutatorrelation

$$\{T^a_{\mathfrak{F}}, T^b_{\mathfrak{F}}\} \;=\; m_{\mathfrak{F}}\,\delta^{ab}\,\mathbb{1}_{\mathfrak{F}} \;+\; d_{abc}\,T^c_{\mathfrak{F}} \tag{A.59$'$}$$

angegeben werden – Konsequenz daraus, daß $Bild\,\mathfrak{F}$ der gesamte Darstellungsraum ist.

Wir sehen leicht, daß sich Gl. (A.59′) unter einer Abbildung entsprechend Gl. (A.55) *nicht* überträgt auf eine andere Darstellung: Für jede Darstellung $\mathfrak{R}$ ungleich der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$ gilt: $d^2_{\mathfrak{R}}-1 > d_{SU(N_c)}$, $\forall \mathfrak{R}\neq\mathfrak{F}$; das heißt ist die Anzahl ihrer Parameter $d^2_{\mathfrak{R}}-1$ *größer* als die Anzahl $d_{SU(N_c)}=N_c^2-1$ der Parameter der Gruppe, das heißt als die Anzahl Generatoren. Die Wahl von $d_{SU(N_c)} < d^2_{\mathfrak{R}}-1$ Generatoren im Darstellungsraum von $\mathfrak{R}$ wählt also willkürlich nur einen Unterraum aus. Die Eigenschaft einer Darstellung $\mathfrak{R}$, die Gruppenrelation zu erhalten, vgl. Gl. (A.53), garantiert, daß der Antikommutator zweier Elemente des Darstellungsraumes wieder ein Element des Darstellungsraumes ist, aber im allgemeinen *nicht*, daß der Antikommutator zweier Elemente eines willkürlich gewählten Unterraums wieder Element dieses Unterraums ist.
Aus Gl. (A.59′) folgt – da im Sinne von Gl. (A.60) o.E.d.A. bereits implizit gewählt:

$$d_{abc} \qquad \text{voll symmetrisch,} \quad \text{reell} \tag{A.60$'$}$$

Gl. (A.61), die folgt aufgrund der vollständigen Antisymmetrie der Strukturkonstanten f_{abc}, gilt aufgrund der Spurfreiheit der Generatoren, vgl. die Gln. (A.52), (A.56), analog auch für die Konstanten d_{abc}:

$$d_{aab} \;=\; 0 \tag{A.61$'$}$$

vgl. dazu Bem. 2 zu Gl. (A.71′) auf Seite 215. Die Relation

$$d_{aeg}\,f_{beg} \;=\; 0 \tag{A.62}$$

schließlich ist Konsequenz der Gln. (A.60), (A.60′).

Zur *Normierung* der Generatoren T^a einer Darstellung $\mathfrak{R}$, vgl. Gl. (A.50), betrachten wir die Spur des Produkts zweier Generatoren; mithilfe der Gln. (A.52′), (A.56′) finden wir

$$\mathrm{tr}\; T^a\,T^b \;=\; T^a_{\alpha\beta}\,T^b_{\beta\alpha} \;=\; T^a_{\alpha\beta}\,T^{b\,*}_{\alpha\beta} \tag{A.63}$$

als eine bezüglich des Indexpaares (a,b) hermitesche Matrix. Diese kann folglich auf Diagonalgestalt mit reellen Einträgen gebracht werden; bei Absorption entsprechender Faktoren in die T^a ist diese Matrix proportional zur Einheitsmatrix. Für die T^a kann daher die Normierung

$$\mathrm{tr}\; T^a\,T^b \;=\; n_{\mathfrak{R}}\,\delta^{ab} \qquad n_{\mathfrak{R}}\ \text{reell} \tag{A.64}$$

gefordert werden. Die übliche Konvention

$$n_{\mathfrak{F}} \;=\; 1/2 \tag{A.65}$$

$$n_{\mathfrak{A}} \;=\; N_c \tag{A.66}$$

liegt auch unserer Arbeit zugrunde. Durch Spurbildung folgt aus Gl. (A.59′)

$$2\, n_{\mathfrak{F}} \;=\; m_{\mathfrak{F}}\, d_{\mathfrak{F}} \tag{A.67}$$

als Relation zur Bestimmung von $m_{\mathfrak{F}}$ in Abhängigkeit von $n_{\mathfrak{F}}$.

Der *quadratische Casimir-Operator* einer Darstellung $\mathfrak{R}$ ist definiert als die Summe der quadrierten Generatoren; er vertauscht daher mit einem beliebigen Operator, das heißt ist proportional zur Eins und bestimmt durch die Proportionalitätskonstante $c_2(\mathfrak{R})$:

$$T^a\, T^a \;=\; c_2(\mathfrak{R})\, \mathbb{1}_{\mathfrak{R}} \tag{A.68}$$

Die Spur dieser Relation mithilfe von Gl. (A.64) lautet:

$$c_2(\mathfrak{R})\, d_{\mathfrak{R}} \;=\; n_{\mathfrak{R}}\, d_{SU(N_c)} \tag{A.69}$$

so daß mithilfe Gl. (A.67) folgt

$$2\, c_2(\mathfrak{F}) \;=\; m_{\mathfrak{F}}\, d_{SU(N_c)} \tag{A.70}$$

als Relation zur Bestimmung von $m_{\mathfrak{F}}$ in Abhängigkeit von $c_2(\mathfrak{F})$. Die Konstanten $n_{\mathfrak{R}}$ – daher oft bezeichnet mit $c(\mathfrak{R})$ – und $c_2(\mathfrak{R})$ sind die einzigen Invarianten der Darstellung $\mathfrak{R}$.

Wir skizzieren die Herleitung wichtiger Relationen. Die Spuren der mit einem Generator multiplizierten (Anti)Kommutatorrelationen, vgl. die Gln. (A.59), (A.59′), lauten:

$$f_{abc} \;=\; \frac{1}{\mathrm{i} n_{\mathfrak{R}}}\, \mathrm{tr}\, [T^a, T^b] T^c \tag{A.71}$$

$$d_{abc} \;=\; \frac{1}{n_{\mathfrak{F}}}\, \mathrm{tr}\, \{T^a_{\mathfrak{F}}, T^b_{\mathfrak{F}}\} T^c_{\mathfrak{F}} \tag{A.71′}$$

dabei gilt Gl. (A.71) in einer beliebigen, Gl. (A.71′) nur in der fundamentalen Darstellung.

Zu diesen Gleichungen zwei Bemerkungen. Bem. 1: Für die adjungierte Darstellung $\mathfrak{A}$ mit der expliziten Gestalt $(T^a_{\mathfrak{A}})_{bc} = -\mathrm{i} f_{abc}$ für ihre Generatoren, vgl. Gl. (A.57), – und mit $c_2(\mathfrak{A}) = n_{\mathfrak{A}}/d_{\mathfrak{A}} \cdot d_{SU(N_c)} = n_{\mathfrak{A}}$, vgl. Gl. (A.69), – schreibt sich Gl. (A.71):

$$f_{aeg}\, f_{bgh}\, f_{che} \;=\; \frac{1}{2}\, c_2(\mathfrak{A})\, f_{abc} \;=\; \frac{1}{2}\, n_{\mathfrak{A}}\, f_{abc} \tag{A.72}$$

Bem. 2: Kontraktion zweier Indizes der Gl. (A.71′) ergibt $d_{aab} = 0$, das heißt Gl. (A.61′). Dabei gehen ein: Gl. (A.68), Spurfreiheit der Generatoren, vgl. die Gln. (A.52), (A.56), und Invarianz der Spurbildung unter zyklischer Vertauschung der Faktoren des Arguments.

Zurück zu den Gln. (A.71), (A.71′). Diese aufgelöst nach den Spuren und addiert für die fundamentale Darstellung $\mathfrak{F}$ folgt:

$$\mathrm{tr}\, T^a_{\mathfrak{F}} T^b_{\mathfrak{F}} T^c_{\mathfrak{F}} \;=\; \frac{1}{2} n_{\mathfrak{F}}\, (d_{abc} + \mathrm{i}\, f_{abc}) \tag{A.73}$$

Diese Relation folgt alternativ aus

$$T^a T^b \;=\; \frac{1}{2}\, \big[\, \{T^a, T^b\} + [T^a, T^b]\, \big] \tag{A.74}$$

$$\underset{\mathfrak{F}}{=}\; \frac{1}{2}\, \Big[\, m_{\mathfrak{F}}\, \delta^{ab}\, \mathbb{1}_{\mathfrak{F}} + (d_{abc} + \mathrm{i}\, f_{abc})\, T^c \,\Big] \tag{A.74′}$$

durch Multiplikation mit einem Generator und anschließende Spurbildung.

Gl. (A.68) gilt für eine beliebige Darstellung $\mathfrak{R}$. Für die adjungierte Darstellung $\mathfrak{A}$ mit der expliziten Gestalt $(T^a_{\mathfrak{A}})_{bc} = -\mathrm{i} f_{abc}$ ihrer Generatoren, vgl. Gl. (A.57), schreibt sie sich:

$$f_{aeg}\, f_{beg} \;=\; c_2(\mathfrak{A})\, \delta_{ab} \;=\; n_{\mathfrak{A}}\, \delta_{ab} \tag{A.75}$$

mit der letzten Identität wegen $c_2(\mathfrak{A}) = n_{\mathfrak{A}}/d_{\mathfrak{A}} \cdot d_{SU(N_c)} = n_{\mathfrak{A}}$, vgl. Gl. (A.69). Analog muß $d_{aeg}\, d_{beg}$ proportional zu δ_{ab} sein; wir definieren durch

$$d_{aeg}\, d_{beg} \;=\; \alpha_1\, \delta_{ab} \qquad \text{bzgl. } \alpha_1 \text{ s.u. Gl. (A.80)} \tag{A.75$'$}$$

die Konstante α_1, die wir im folgenden berechnen, s.u. Gl. (A.80).

Wir kontrahieren mit f_{abc} die Kommutatorrelation nach Gl. (A.59) und finden mithilfe Gl. (A.75) für eine beliebige Darstellung $\mathfrak{R}$:

$$f_{abc}\, T^b T^c \;=\; \frac{\mathrm{i}}{2}\, c_2(\mathfrak{A})\, T^a = \;\frac{\mathrm{i}}{2}\, n_{\mathfrak{A}}\, T^a \tag{A.76}$$

Für die adjungierte Darstellung $\mathfrak{A}$, durch Einsetzen von $(T^a_{\mathfrak{A}})_{bc} = -\mathrm{i} f_{abc}$, vgl. Gl. (A.57), folgt wieder Gl. (A.72) aus Bem. 1, Seite 215.

Analog kontrahieren wir mit d_{abc} die Antikommutatorrelation nach Gl. (A.59$'$) und finden für die fundamentale Darstellung $\mathfrak{F}$:

$$d_{abc}\, T^b_{\mathfrak{F}} T^c_{\mathfrak{F}} \;=\; \frac{1}{2}\, \alpha_1\, T^a_{\mathfrak{F}} \tag{A.76$'$}$$

mit α_1 der Konstanten aus Gl. (A.75$'$).

Wir bestimmen diese. Einerseits ergibt Multiplikation von Gl. (A.74$'$) mit $T^b_{\mathfrak{F}}$:

$$T^a_{\mathfrak{F}} T^b_{\mathfrak{F}} T^b_{\mathfrak{F}} \;=\; \frac{1}{2}\left[\, m_{\mathfrak{F}}\, T^a_{\mathfrak{F}} + (d_{abc} - \mathrm{i}\, f_{abc})\, T^b_{\mathfrak{F}} T^c_{\mathfrak{F}} \,\right] \tag{A.77}$$

und mithilfe von $m_{\mathfrak{F}} = 2c_2(\mathfrak{F})/d_{SU(N_c)}$, vgl. Gl. (A.70), und den Gln. (A.76), (A.76$'$):

$$T^a_{\mathfrak{F}} T^b_{\mathfrak{F}} T^b_{\mathfrak{F}} \;=\; \frac{1}{2}\left[\, \frac{2}{d_{SU(N_c)}}\, c_2(\mathfrak{F}) + \frac{1}{2}(\alpha_1 + c_2(\mathfrak{A})) \,\right] T^a_{\mathfrak{F}} \tag{A.78}$$

Andererseits gilt mithilfe Gl. (A.68) für eine beliebige Darstellung $\mathfrak{R}$:

$$T^a T^b T^b \;=\; c_2(\mathfrak{R})\, T^a \tag{A.79}$$

Gleichsetzen der Gln. (A.78), (A.79) für die fundamentale Darstellung $\mathfrak{F}$ ergibt:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \;&=\; 4\left[1 - \frac{1}{d_{SU(N_c)}}\right] c_2(\mathfrak{F}) - c_2(\mathfrak{A}) \qquad\qquad (A.80)\\ &=\; 4\, n_{\mathfrak{F}}\, \frac{1}{d_{\mathfrak{F}}}\, (d_{SU(N_c)} - 1) - n_{\mathfrak{A}} \;=\; 2\, n_{\mathfrak{F}} \cdot \frac{1}{N_c}\, (N_c^2 - 4) \end{aligned}$$

Seien die vollständigen Kontraktionen der Konstanten f_{abc} und d_{abc} bezeichnet mit f^2 beziehungsweise d^2:

$$f^2 \;\equiv\; f_{abc}\, f_{abc} \tag{A.81}$$

$$d^2 \;\equiv\; d_{abc}\, d_{abc} \tag{A.81$'$}$$

Für diese gilt aufgrund Gl. (A.75) beziehungsweise aufgrund Gl. (A.75$'$) mit (A.80):

$$\begin{aligned} f^2 \;&=\; c_2(\mathfrak{A})\, d_{SU(N_c)} \qquad\qquad (A.82)\\ &=\; n_{\mathfrak{A}}\, d_{SU(N_c)} \;=\; 2\, n_{\mathfrak{F}} \cdot N_c (N_c^2 - 1) \\ d^2 \;&=\; 4\,[d_{SU(N_c)} - 1]\, c_2(\mathfrak{F}) - c_2(\mathfrak{A})\, d_{SU(N_c)} \qquad\qquad (A.82')\\ &=\; 4\, n_{\mathfrak{F}}\, \frac{1}{d_{\mathfrak{F}}}\, (d_{SU(N_c)} - 1)\, d_{SU(N_c)} - n_{\mathfrak{A}}\, d_{SU(N_c)} \;=\; 2\, n_{\mathfrak{F}} \cdot \frac{1}{N_c}\, (N_c^2 - 4)(N_c^2 - 1) \end{aligned}$$

Das heißt in der Summe

$$d^2 + f^2 = 4\,[d_{SU(N_c)}-1]\,c_2(\mathfrak{F}) \tag{A.83}$$
$$= 4\,n_{\mathfrak{F}}\,\frac{1}{d_{\mathfrak{F}}}\,(d_{SU(N_c)}-1)\,d_{SU(N_c)} = 4\,n_{\mathfrak{F}}\cdot\frac{1}{N_c}\,(N_c^2-2)(N_c^2-1)$$

wird gerade der Term mit $c_2(\mathfrak{A})$ beziehungsweise $n_{\mathfrak{A}}$ gekürzt.
Die zweiten Zeilen in Gl. (A.80), in den Gln. (A.82), (A.82′) und in Gl. (A.83) gehen entsprechend der Relation $c_2(\mathfrak{R}) = n_{\mathfrak{R}} d_{SU(N_c)}/d_{\mathfrak{R}}$, vgl. Gl. (A.69), von den quadratischen Casimir-Faktoren über zu den Normierungen. Die letzten Identitäten benutzen $n_{\mathfrak{A}} = 2 n_{\mathfrak{F}} d_{\mathfrak{F}}$ mit $d_{\mathfrak{F}} = N_c$. Wir zeigen unten, daß $n_{\mathfrak{A}}$ von $n_{\mathfrak{F}}$ über diese Relation abhängt, vgl. Gl. (A.89); im Moment verstehen wir sie als Konsequenz der Konvention $n_{\mathfrak{F}} = 1/2$, $n_{\mathfrak{A}} = N_c$, vgl. die Gln. (A.65), (A.66).

Da die Generatoren der adjungierten Darstellung wie $(T^a_{\mathfrak{A}})_{bc} = -\mathrm{i} f_{abc}$, vgl. Gl. (A.57), über die *darstellungsunabhängigen* Strukturkonstanten der $su(N_c)$ definiert sind, erwarten wir, daß die Normierung $n_{\mathfrak{R}}$ einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}$, vgl. Gl. (A.64), nicht unabhängig von der Normierung der adjungierten Darstellung $n_{\mathfrak{A}}$ ist. So folgt aus der Wahl der Normierung einer Darstellung – o.E.d.A. aus der Wahl $n_{\mathfrak{F}} = 1/2$, vgl. Gl. (A.65), für die fundamentale Darstellung $\mathfrak{F}$ – die Normierung einer beliebigen anderen Darstellung.

Wir geben mit

$$T^a_{\alpha\beta}\,T^a_{\gamma\delta} = \beta_1^{\mathfrak{R}}\cdot\Big(\,\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\beta\gamma} + \beta_2^{\mathfrak{R}}\cdot\delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta} + \beta_3^{\mathfrak{R}}\cdot\delta_{\alpha\gamma}\,\delta_{\beta\delta}\,\Big) \tag{A.84}$$
$$\alpha,\beta,\gamma,\delta = 1,2,\ldots d_{\mathfrak{R}} \qquad \forall\mathfrak{R}\setminus\mathfrak{A}$$

eine explizite Formel an, die als Zerlegung in elementare, hier also: *Kronecker*-Tensorkomponenten mit entsprechenden Konstanten $\beta_i^{\mathfrak{R}}$ für eine beliebige Darstellung $\mathfrak{R}\backslash\mathfrak{A}$ gilt. Diese Konstanten sind reell aufgrund der Hermitezität der Generatoren; aufgrund ihrer Spurfreiheit und Normierung gemäß Gl. (A.64) gilt:

$$\beta_1^{\mathfrak{R}} = n_{\mathfrak{R}} \qquad \beta_2^{\mathfrak{R}} = \frac{d_{\mathfrak{R}}(d_{\mathfrak{R}}-1) - d_{SU(N_c)}}{d_{\mathfrak{R}}(d_{\mathfrak{R}}-1)} \qquad \beta_3^{\mathfrak{R}} = -\frac{(d_{\mathfrak{R}}^2-1) - d_{SU(N_c)}}{d_{\mathfrak{R}}-1} \tag{A.85}$$

insbesondere für die fundamentale Darstellung $\mathfrak{F}$:

$$\beta_1^{\mathfrak{F}} = n_{\mathfrak{F}} \qquad \beta_2^{\mathfrak{F}} = -\frac{1}{N_c} \qquad \beta_3^{\mathfrak{F}} = 0 \tag{A.86}$$

Kontrahiert der Zusammenhang der Strukturkonstanten f_{abc} und der Spur dreier Generatoren T^a, vgl. Gl. (A.71), und gleichgesetzt mit der Kontraktion f^2 nach Gl. (A.82) folgt für eine beliebige Darstellung $\mathfrak{R}$ die Identität

$$n_{\mathfrak{A}}\,d_{SU(N_c)} = -\frac{1}{n_{\mathfrak{R}}^2}\cdot\mathrm{tr}\,[T^a,T^b]T^c\cdot\mathrm{tr}\,[T^a,T^b]T^c \tag{A.87}$$

Auf der rechten Seite dieser Identität eingesetzt Gl. (A.84), folgt eine Relation zwischen der Normierung $n_{\mathfrak{R}}$ einer beliebigen Darstellung $\mathfrak{R}\backslash\mathfrak{A}$ und $n_{\mathfrak{A}}$. Resultat ist:

$$n_{\mathfrak{A}}\,d_{SU(N_c)} = 2\,n_{\mathfrak{R}}\,d_{\mathfrak{R}}\,(d_{\mathfrak{R}}^2-1)\cdot f_{\mathfrak{R}}(d_{\mathfrak{R}},d_{SU(N_c)}) \tag{A.88}$$

$$\text{mit} \qquad f_{\mathfrak{R}}(d_{\mathfrak{R}},d_{SU(N_c)}) = 1 + \beta_3^{\mathfrak{R}}\cdot\Big[\,3(d_{\mathfrak{R}}+1)^{-1}\,(1-\beta_3^{\mathfrak{R}}) - (\beta_3^{\mathfrak{R}})^2\,\Big] \tag{A.88′}$$

und $\beta_3^{\mathfrak{R}}$ wie in Gl. (A.85). Für die fundamentale Darstellung $\mathfrak{F}$ ist $f_{\mathfrak{F}} \equiv 1$ wegen $\beta_3^{\mathfrak{F}} \equiv 0$, und es folgt unmittelbar:

$$n_{\mathfrak{A}} = 2\,n_{\mathfrak{F}}\,d_{\mathfrak{F}} \tag{A.89}$$

Aus $n_{\mathfrak{F}}$ folgt also unmittelbar $n_{\mathfrak{A}}$ – die Konvention $n_{\mathfrak{F}} = 1/2$, Gl. (A.65), impliziert bereits $n_{\mathfrak{A}} = N_c$, Gl. (A.66) – und mittelbar $n_{\mathfrak{R}}$, $\forall \mathfrak{R}$.

Analog zu Gl. (A.84) existiert eine Zerlegung in elementare Tensorkomponenten für die adjungierte Darstellung $\mathfrak{A}$. Ihre Gestalt ist komplizierter, da sie a priori außer Kroneckersymbolen δ_{ab} auch Konstanten d_{abc} und Strukturkonstanten d_{abc} involviert. Um sie entwickeln zu können, geben wir zunächst die unabhängigen *Jacobi-Identitäten* an:

$$0 = \left[[T^a, T^b], T^c\right] + \left[[T^b, T^c], T^a\right] + \left[[T^c, T^a], T^b\right] \tag{A.90}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = f_{abe}\, f_{cde} - f_{ace}\, f_{bde} + f_{ade}\, f_{bce} \tag{A.90'}$$

und:

$$0 = \left[\{T^a, T^b\}, T^c\right] + \left[\{T^b, T^c\}, T^a\right] + \left[\{T^c, T^a\}, T^b\right] \tag{A.91}$$

$$\underset{\mathfrak{F}}{\Rightarrow} \quad 0 = f_{abe}\, d_{cde} + f_{ace}\, d_{bde} + f_{ade}\, d_{bce} \tag{A.91'}$$

Dabei gelten die Gln. (A.90), (A.91) für beliebige Matrizen T^a. Die Gln. (A.90'), (A.91') folgen durch Einsetzen der expliziten Kommutatorrelation in einer beliebigen Darstellung beziehungsweise der expliziten Kommutator- und Antikommutatorrelation in der fundamentalen Darstellung, vgl. die Gln. (A.59), (A.59').

Aus den Jacobi-Identitäten – den Gln. (A.90'), (A.91') – wiederum folgen:

$$f_{aeg}\, f_{bgh}\, f_{che} = \frac{1}{2}\, n_{\mathfrak{A}}\, f_{abc} \tag{A.92}$$

$$d_{aeg}\, f_{bgh}\, f_{che} = -\frac{1}{2}\, n_{\mathfrak{A}}\, d_{abc} \tag{A.93}$$

$$d_{aeg}\, d_{bgh}\, f_{che} = -\frac{1}{2}\, \alpha_1\, f_{abc} \qquad \text{bzgl. } \alpha_1 \text{ vgl. Gl. (A.80)} \tag{A.94}$$

und zwar: Gl. (A.92) durch Kontraktion von Gl. (A.90') mit f_{cdg}, Gl. (A.93) durch Kontraktion von Gl. (A.91') mit f_{abg} und Gl. (A.94) durch Kontraktion von Gl. (A.91') mit d_{cdg}. Dabei ist die letzte dieser Relationen nur Rekapitulation von oben, vgl. Gl. (A.72) und die Bem. zu Gl. (A.76).
Die analoge Kontraktion dreier Konstanten d_{abc} ist voll symmetrisch, so daß gilt:

$$d_{aeg}\, d_{bgh}\, d_{che} = \alpha_1'\, d_{abc} \qquad \text{bzgl. } \alpha_1' \text{ s.u. Gl. (A.103)} \tag{A.95}$$

mit α_1' einer noch zu bestimmenden Konstanten.

Wir geben nun eine Formel analog zu Gl. (A.84) für die adjungierte Darstellung $\mathfrak{A}$ an. Mit der expliziten Gestalt der Generatoren wie $(T^a_{\mathfrak{A}})_{bc} = -if_{abc}$, vgl. Gl. (A.57), steht auf der linken Seite (bis auf ein Vorzeichen) $f_{abe} f_{cde}$, auf der rechten Seite – mit jeweils vier freien Indizes a, b, c, d – zunächst beliebige Kombinationen von Kroneckersymbolen δ_{ab}, Konstanten d_{abc} und Strukturkonstanten f_{abc}. Aufgrund der Antisymmetrie unter der Vertauschung $a \leftrightarrow b$ und $c \leftrightarrow d$ einzeln und der Symmetrie unter $a \leftrightarrow c$ und $b \leftrightarrow d$ gleichzeitig vereinfacht sich die Struktur erheblich:[A.8]

$$f_{abe} f_{cde} = \gamma_1 \cdot \left(\delta_{ac}\delta_{bd} - \delta_{ad}\delta_{bc}\right) + \gamma_2 \cdot \left(d_{ace} d_{bde} - d_{ade} d_{bce}\right) \tag{A.96}$$

$$a, b, c, d, e = 1, 2, \ldots d_{\mathfrak{A}} \equiv d_{SU(N_c)}$$

mit Konstanten γ_1, γ_2; vgl. unten die Gln. (A.99), (A.99').

[A.8] Aufgrund dieser Symmetrien und der Jacobi-Identität für die Strukturkonstanten f_{abc}, vgl. Gl. (A.90'), genügt es o.E.d.A. sich rechts auf Kroneckersymbole und Konstanten d_{abc} zu beschränken.

Wir bestimmen die Konstanten γ_1, γ_2 wie folgt. Kontraktion von Gl. (A.96) mit δ_{bd} ergibt mithilfe der Gln. (A.75), (A.75′):

$$n_{\mathfrak{A}} \;=\; \gamma_1\,(d_{SU(N_c)}-1) - \gamma_2\,\alpha_1 \tag{A.97}$$

Analoge Kontraktion von Gl. (A.96) mit f_{cdg} ergibt mithilfe der Gln. (A.75), (A.94):

$$n_{\mathfrak{A}} \;=\; 2\,\gamma_1 + \gamma_2\,\alpha_1 \tag{A.98}$$

Und aus den Gln. (A.97), (A.98) zusammen:

$$\gamma_1 \;=\; 2\,n_{\mathfrak{A}}\,\frac{1}{d_{SU(N_c)}+1} \;=\; 4\,n_{\mathfrak{F}}\cdot\frac{1}{N_c} \tag{A.99}$$

$$\gamma_2 \;=\; \frac{n_{\mathfrak{A}}}{\alpha_1}\,\frac{d_{SU(N_c)}-3}{d_{SU(N_c)}+1} \;=\; \frac{2\,N_c\,n_{\mathfrak{F}}}{2\,n_{\mathfrak{F}}\,N_c^{-1}\,(N_c^2-4)}\,\frac{N_c^2-4}{N_c^2} \;=\; 1 \tag{A.99′}$$

Dabei impliziert die zweite Identität die Relationen $d_{SU(N_c)}=N_c^2-1$ und $n_{\mathfrak{A}}=2d_{\mathfrak{F}}n_{\mathfrak{F}}$, $d_{\mathfrak{F}}=N_c$, vgl. Gl. (A.89). Die Konstante α_1, vgl. Gl. (A.80), ist in diesem Sinne in der Gestalt

$$\alpha_1 \;=\; 4\,n_{\mathfrak{F}}\,\frac{1}{d_{\mathfrak{F}}}\,(d_{SU(N_c)}-1) - 2\,d_{\mathfrak{F}}\,n_{\mathfrak{F}} \;=\; 2\,n_{\mathfrak{F}}\cdot\frac{1}{N_c}\,(N_c^2-4) \tag{A.100}$$

eingesetzt. Wir finden $\gamma_2\equiv 1$ unabhängig von der Konvention für $n_{\mathfrak{F}}$ und für alle N_c.

Die Formel nach Gl. (A.96) ist vollständig bestimmt. Sie setzt uns in die Lage, die Konstante α_1' aus Gl. (A.95) zu bestimmen. Dazu kontrahieren wir Gl. (A.96) mit d_{bdg}, das heißt die Indizes a, c, g sind frei. Auf der linken Seite tritt die Kontraktion $f_{abe}f_{ced}d_{gbd}$ auf, die mithilfe Gl. (A.93) auf einen Term proportional zu d_{acg} reduziert wird; nach der Kontraktion $d_{ade}d_{ceb}d_{gbd}$ auf der rechten Seite lösen wir auf. Wir finden:

$$d_{aeg}\,d_{bgh}\,d_{che} \;=\; \alpha_1'\,d_{abc} \tag{A.101}$$

$$\text{mit}\qquad \alpha_1' \;=\; \alpha_1 - \gamma_2^{-1}\left(\gamma_1 + \frac{1}{2}\,n_{\mathfrak{A}}\right) \tag{A.102}$$

und explizit:

$$\alpha_1' \;=\; \alpha_1\cdot\frac{1}{2}\,\frac{d_{SU(N_c)}-11}{d_{SU(N_c)}-3} = \; n_{\mathfrak{F}}\cdot\frac{1}{N_c}\,(N_c^2-12) \tag{A.103}$$

Die erste Identität in Gl. (A.103) ist unmittelbare Konsequenz der allgemeinen, ersten Ausdrücke für γ_1, γ_2, vgl. die Gln. (A.99), (A.99′). Die zweite Identität folgt mithilfe α_1 in der Gestalt von Gl. (A.100), das heißt aufgrund der Relation $n_{\mathfrak{A}}=2d_{\mathfrak{F}}n_{\mathfrak{F}}$, $d_{\mathfrak{F}}=N_c$.

Wir schließen hiermit die Diskussion der $su(N_c)$-Eichalgebra bezüglich allgemeinem N_c und betrachten explizit $N_c\equiv 2$ und $N_c\equiv 3$.

***SU*(N_c) mit $N_c\equiv 2$** besitzt Gruppendimension $d_{SU(N_c)}=N_c^2-1=3$. Die Strukturkonstanten sind gegeben durch

$$f_{abc} \;=\; \epsilon^{abc} \qquad \text{mit} \qquad f_{123} \;=\; \epsilon^{123} \;=\; 1 \tag{A.104}$$

das heißt durch die kontravarianten Komponenten des dreidimensionalen Epsilon-Pseudotensors in der Definition von Gl. (A.7). Die Konstanten d_{abc} verschwinden identisch:

$$d_{abc} \;\equiv\; 0 \tag{A.105}$$

Die Dimension der fundamentalen Darstellung ist $d_{\mathfrak{F}}=N_c=2$ und eine explizite Realisierung gegeben über

$$T^a_{\mathfrak{F}} \;=\; \frac{1}{2}\,\sigma^a \qquad a=1,2,3 \tag{A.106}$$

durch die drei 2×2-Pauli-Matrizen σ^a, vgl. Gl. (A.40). Die Relationen dieses Anhangs A.3 explizit für $N_c\equiv 2$ folgen unmittelbar durch Einsetzen der Gln. (A.104)-(A.106).

$SU(N_c)$ mit $N_c \equiv 3$ besitzt Gruppendimension $d_{SU(N_c)} = N_c^2 - 1 = 8$. Explizite Zahlenwerte für die Strukturkonstanten f_{abc} sind gegeben durch:[A.9]

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1 \\ f_{147} &= -f_{157} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = 1/2 \\ f_{458} &= f_{678} = \sqrt{3}/2 \end{aligned} \tag{A.107}$$

und für die Konstanten d_{abc} durch:[A.9]

$$\begin{aligned} d_{118} &= d_{228} = d_{338} = -d_{888} = 1/\sqrt{3} \\ d_{146} &= d_{157} = -d_{247} = d_{256} = d_{344} = d_{355} = -d_{366} = -d_{377} = 1/2 \\ d_{448} &= d_{558} = d_{668} = d_{778} = -1/(2\sqrt{3}) \end{aligned} \tag{A.108}$$

vgl. etwa Nachtmann, Ref. [147], Tab. C-1. Die Dimension der fundamentalen Darstellung ist $d_{\mathfrak{F}} = N_c = 3$ und eine explizite Realisierung gegeben über

$$T^a_{\mathfrak{F}} = \frac{1}{2}\lambda^a \qquad a = 1, 2, \ldots 8 \tag{A.109}$$

durch die acht 3×3-Gell-Mann-Matrizen λ^a:

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{A.110}$$

$$\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = \mathrm{diag}[1, -1, 0] \qquad \lambda_8 = 1\sqrt{3} \cdot \mathrm{diag}[1, 1, -2]$$

vgl. Nachtmann, Ref. [147], die Gln. (C-44).[A.10]

Abschließend geben wir eine Relation an, die speziell für $N_c \equiv 3$ gilt; ihre Existenz folgt durch Abzählen irreduzibler Tensorstrukturen mit vier freien Indizes a, b, c, d:

$$d_{abe}\, d_{cde} + d_{ace}\, d_{bde} + d_{ade}\, d_{bce} = \frac{1}{3}\left[\delta_{ab}\,\delta_{cd} + \delta_{ac}\,\delta_{bd} + \delta_{ad}\,\delta_{bc}\right] \tag{A.111}$$

Sei verwiesen auf Ref. [163], Gl. (A.26), und die Argumentation dort.

[A.9] sämtliche unabhängige nichtverschwindende Zahlenwerte

[A.10] Wir bemerken, daß die Konstruktion dieser Matrizen in Anlehnung an die Pauli-Matrizen geschieht und deren Verallgemeinerung auf größere N_c suggeriert. Wir formulieren Matrizen wie folgt für $N_c \geq 2$, also eingeschlossen die Pauli-Matrizen selbst:

Zum einen $N_c - 1$ diagonale Matrizen $\Delta^{(j)} = n_j\, \mathrm{diag}[1, \ldots, 1, -j, 0, \ldots, 0]$, wobei $j = 1, \ldots, N_c - 1$, mit j Einträgen Einsen, $N_c - (j+1)$ Einträgen Nullen und $n_j = \sqrt{n_{\mathfrak{F}}/j(j+1)}$, vgl. die Pauli-Matrix σ^3 nach Gl. (A.40). Zum anderen $N_c(N_c - 1)$ nicht-diagonale Matrizen $\Sigma^{(i,k)}$, wobei $i = 1, 2$ und $k = 1, 2, \ldots, 1/2 \cdot N_c(N_c - 1)$, in Anlehnung an die nicht-diagonalen Pauli-Matrizen σ^i, vgl. Gl. (A.40). Die $\Sigma^{(i,k)}$ werden folgendermaßen konstruiert: Zunächst wird das Element der Matrix $\Sigma^{(i,k)}$, mit i, k fest, an der Stelle (α_k, β_k), mit $1 \leq \alpha_k < \beta_k \leq N_c$ fest, identifiziert mit $(\sigma^i)_{12}$, das Element an der Stelle (β_k, α_k) mit $(\sigma^i)_{21}$, alle anderen identisch Null gesetzt. Dann wird diese Matrix mit dem Faktor $n_{i,k} = \sqrt{n_{\mathfrak{F}}/2}$ versehen. Da $1/2 \cdot N_c(N_c - 1)$ verschiedene Paare $\{\alpha_k, \beta_k\}$, mit $1 \leq \alpha_k < \beta_k \leq N_c$, existieren (Anzahl der Elemente einer $N_c \times N_c$-Matrix über der Hauptdiagonalen), folgen aus dieser Vorschrift in eindeutiger Weise $N_c(N_c - 1)$ Matrizen $\Sigma^{(i,k)}$.

Die nach dieser Vorschrift konstruierten $d_{SU(N_c)} = N_c^2 - 1$ Matrizen $\Delta^{(j)}$, $\Sigma^{(i,k)}$ sind spurlos, hermitesch und normiert im Sinne von Gl. (A.64). Wir überlegen uns leicht, daß sie linear unabhängig sind und folglich nach Gl. (A.50) eine Basis bilden der fundamentalen Darstellung $\mathfrak{F}$ der Liealgebra $su(N_c)$; wir identifizieren diese Matrizen daher mit deren Generatoren $T^a_{\mathfrak{F}}$.

Anhang B

Kinematik für große s

In Abschnitt 2.2 wird diskutiert Streuung

$$h^1(P_1) \;+\; h^2(P_2) \;\longrightarrow\; h^{1'}(P_{1'}) \;+\; h^{2'}(P_{2'}) \tag{B.1}$$

Dieser Anhang formalisiert und vertieft diese Diskussion in Hinblick auf die Kinematik für große s. Zunächst skizzieren wir die Herleitung wichtiger, im Haupttext nur zitierter Relationen, die zugrunde liegen den dann angegebenen Reihen-Entwicklungen der relevanten Größen für große invariante Schwerpunktenergie, das heißt für kleinen Parameter

$$\kappa \;\equiv\; \frac{1}{s} \tag{B.2}$$

Wir diskutieren den allgemeinen Fall, der Erhaltung des Gesamtimpulses impliziert, aber noch nicht spezifiziert das Bezugsystem – und den Fall, der dieses konkretisiert als das Schwerpunktsystem bezüglich der drei Raumrichtungen.

B.1 Zusammenhang von s und ε_i für $i = 1, 1'$

Im Haupttext sind alle relevanten Größen und damit ihre Abhängigkeit von der invarianten Schwerpunktenergie $\sqrt{s}$ ausgedrückt durch die Größen ε_i für $i = 1, 1', 2, 2'$: so die Impulskomponenten P_i^+, P_i^- und P_i^0, P_i^3 und das Quadrat des invarianten Impulstransfers $-t$.

Mit ε_2 ist das Produkt $\varepsilon \equiv \varepsilon_1 \varepsilon_2$ bestimmt in Termen der Funktion ε_1, vgl. die Gln. (2.30), (2.30′) und (2.31). Es bleibt daher zu bestimmen ε_1 als Funktion von s. Durch Indexsubstitution $1 \to 1'$ und $2 \to 2'$ im Sinne von Gl. (2.40) folgen unmittelbar $\varepsilon_{1'}$, $\varepsilon' \equiv \varepsilon_{1'}\varepsilon_{2'}$ und $\varepsilon_{2'}$. Wir bestimmen zunächst umgekehrt s als Funktion von ε_1.

B.1.1 Funktion $s(\varepsilon_i)$ für $i = 1, 1'$

Wir leiten her die Gln. (2.33), (2.33′). Statt unmittelbar s, bestimmen wir zunächst die Variable σ als Funktion von ε_1; s selbst folgt über deren Definition:

$$\sigma(s) \;=\; \frac{1}{2}\Big[\, s \;-\; \big[\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2 - \big(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\big)^2\big]\,\Big] \tag{B.3}$$

vgl. Gl. (2.32′). Aufgelöst nach σ folgt aus Gl. (2.21):

$$2\,\sigma \;=\; \big(\varepsilon_1\varepsilon_2\big)^{-1}\,\big\{\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + \big(\varepsilon_1\varepsilon_2\big)^2\big\} \tag{B.4}$$

$$\;=\; \big(\varepsilon|_\sigma\big)^{-1}\,\big\{\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + \big(\varepsilon|_\sigma\big)^2\big\} \tag{B.4′}$$

$$\;=\; \big(\varepsilon|_\varrho\big)^{-1}\,\big\{\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + \big(\varepsilon|_\varrho\big)^2\big\} \tag{B.4′}$$

Dabei folgt die letzte Zeile durch Identifizieren von $\varepsilon|_\sigma$ mit $\varepsilon|_\varrho$, vgl. die Gln. (2.30), (2.32). Partiell eingesetzt hierfür der Ausdruck in Termen von ϱ nach Gl. (2.31), folgt hieraus:

$$2\,\sigma \;=\; \big(\varepsilon|_\varrho\big)^{-1}\,\Big\{\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 \;+\; \varepsilon_1^2\,\Big[-2\,\varrho\,\Big(-\varrho \;+\; \sqrt{\varrho^2+\mathbf{M}_2^2}\Big) \;+\; \mathbf{M}_2^2\Big]\Big\} \tag{B.5}$$

das heißt:

$$2\,\sigma \;=\; \big(\varepsilon|_\varrho\big)^{-1}\,\big\{\varepsilon_1\,\big(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1\big)\,\mathbf{M}_2^2 \;-\; 2\,\varrho\,\varepsilon_1\,\big(\varepsilon|_\varrho\big)\big\} \tag{B.6}$$

Im ersten Term wird benutzt $\big(\varepsilon|_\varrho\big)^{-1}\,\varepsilon_1 = \varepsilon_2^{-1}$, im zweiten gekürzt $\varepsilon|_\varrho$; es folgt:

$$2\,\sigma \;=\; \mathbf{M}_2^2\,\varepsilon_2^{-1}\cdot\big(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1\big) \;-\; 2\,\varrho\,\varepsilon_1 \tag{B.7}$$

Mithilfe der expliziten Darstellung von ϱ wie folgt:

$$\varrho \;=\; \frac{1}{2}\,\big(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1}-\varepsilon_1\big) \;-\; (P_1^3{+}P_2^3)^2 \tag{B.8}$$

vgl. Gl. (2.30′), schreiben wir Gl. (2.28) um in die Form:

$$\mathbf{M}_2^2\,\varepsilon_2^{-1} \;=\; \varepsilon_2 + 2\,\varrho \tag{B.9}$$

Diese Relation eingesetzt in Gl. (B.7) folgt unmittelbar:

$$2\,\sigma \;=\; \big(\varepsilon_2+2\,\varrho\big)\cdot\big(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1\big) \;-\; 2\,\varrho\,\varepsilon_1 \tag{B.10}$$

$$\;=\; \varepsilon_2\cdot\big(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1\big) \;+\; 2\,\varrho\cdot\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1} \tag{B.10′}$$

Schließlich geschrieben ε_2 in Termen von ϱ, vgl. Gl. (2.30), folgt mithilfe Gl. (B.3):

$$s(\varepsilon_1) \;=\; \big[\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2-\big(\mathbf{P}_1{+}\mathbf{P}_2\big)^2\big] \;+\; 2\,\sigma \tag{B.11}$$

$$\text{mit}\qquad 2\,\sigma(\varepsilon_1) \;=\; \sqrt{\varrho^2+\mathbf{M}_2^2}\cdot\big(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_1\big) \;+\; \varrho\cdot\big(\mathbf{M}_1^2\,\varepsilon_1^{-1}-\varepsilon_1\big) \tag{B.11′}$$

Dabei ist $\varrho\equiv\varrho(\varepsilon_1)$ nach Gl. (B.8) aufzufassen als Funktion von ε_1. Dies ist genau die Darstellung im Haupttext, vgl. die Gln. (2.33), (2.33′).

Seien in Gl. (B.11′) die ε_1 umgeschrieben als P_1^+ mithilfe der Relation $\varepsilon_1 \equiv \alpha\mathbf{M}_1^2/P_1^+$, vgl. Gl. (2.13), – das heißt explizit gemacht Faktoren $\alpha\mathbf{M}_1^2$. Dies ist die Darstellung von s als Funktion von P_1^+, wobei die Abhängigkeit von P_2^- eliminiert ist.

B.1.2 Funktion $\varepsilon_i(s)$, für $i=1,1'$

Wir leiten her die Gln. (2.34)-(2.34″). Durch Gl. (2.31) ist $\varepsilon|_\varrho$ definiert in Termen von ϱ; wir schreiben diese Relation um in die Form:

$$\varepsilon|_\varrho \;=\; -\varepsilon_1\,\varrho \;+\; \mathrm{sign}(\varepsilon_1)\sqrt{\varepsilon_1^2\,(\varrho^2+\mathbf{M}_2^2)} \tag{B.12}$$

Aufgelöst nach dem Wurzelausdruck und die Gleichung quadriert, folgt:

$$0 \;=\; \varepsilon_1^2\,\mathbf{M}_2^2 \;-\; 2\,\big(\varepsilon|_\varrho\big)\,\big(\varepsilon_1\,\varrho\big) \;-\; \big(\varepsilon|_\varrho\big)^2 \tag{B.13}$$

Aufgrund der expliziten Darstellung von ϱ, vgl. die Gln. (2.30′), (B.8), gilt andererseits:

$$\varepsilon_1\,\varrho \;=\; \frac{1}{2}\,\big(\mathbf{M}_1^2-\varepsilon_1^2\big) \;-\; \varepsilon_1\,(P_1^3{+}P_2^3)^2 \tag{B.14}$$

Dies eingesetzt in Gl. (B.13) folgt die in ε_1 quadratische Gleichung:

$$0 \;=\; \varepsilon_1^2\cdot\big(\mathbf{M}_2^2+\varepsilon|_\varrho\big) \;+\; 2\,\varepsilon_1\cdot\varepsilon|_\varrho\,(P_1^3{+}P_2^3) \;-\; \varepsilon|_\varrho\,\big(\mathbf{M}_1^2+\varepsilon|_\varrho\big) \tag{B.15}$$

$$\;=\; \varepsilon|_\varrho\,\beta\;\Big\{\big[\varepsilon_1/\beta+(P_1^3{+}P_2^3)\big]^2 \;-\; \big[(P_1^3{+}P_2^3)^2+\gamma\big]\Big\} \tag{B.15′}$$

mit abkürzend $\beta \stackrel{!}{=} \varepsilon|_\varrho/(\mathbf{M}_2^2+\varepsilon|_\varrho)$ und $\gamma \stackrel{!}{=} (\mathbf{M}_2^2+\varepsilon|_\varrho)/\beta$. Wir lesen unmittelbar ab die Nullstellen der geschweiften Klammer:

$$\varepsilon_1/\beta \;=\; -(P_1^3+P_2^3) \;\pm\; \sqrt{(P_1^3+P_2^3)^2+\gamma} \tag{B.16}$$

Wir identifizieren $\varepsilon|_\varrho \equiv \varepsilon|_\sigma$; diese Funktion, abkürzend notiert durch $\varepsilon \equiv \varepsilon|_\sigma$, fassen wir auf mithilfe der Gln. (2.32), (2.32′) als Funktion von $\sigma(s)$, also letztlich von s. Wir finden zusammenfassend:[B.1]

$$\varepsilon_1(s) \;=\; \beta\Big[-\big(P_1^3+P_2^3\big) \;+\; \sqrt{\big(P_1^3+P_2^3\big)^2+\gamma}\Big] \tag{B.17}$$

$$\text{mit} \qquad \beta(\varepsilon) \;=\; \varepsilon\big/\big(\mathbf{M}_2^2+\varepsilon\big) \tag{B.17′}$$

$$\gamma(\varepsilon) \;=\; \big(\mathbf{M}_1^2+\varepsilon\big)\big(\mathbf{M}_2^2+\varepsilon\big)/\varepsilon \tag{B.17″}$$

Dies ist genau die Darstellung im Haupttext, vgl. die Gln. (2.34)-(2.34″).

B.2 Entwicklung für große s

Sei zugrundegelegt $P \equiv 0$, vgl. Gl. (2.20), das heißt impliziert, daß die der Streuung zugrundeliegende Wechselwirkung den Gesamtimpuls erhält. Dann wird das Bezugsystem bestimmt durch die drei einlaufenden Impulse, die wir abkürzend notieren in der Form

$$\mathbf{P}_{\text{in}} \;\equiv\; \mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2 \tag{B.18}$$

$$P_{\text{in}}^3 \;\equiv\; P_1^3+P_2^3 \tag{B.18′}$$

Wir betrachten die Fälle:

(i) $\mathbf{P}_{\text{in}}$, P_{in}^3 – das heißt Bezugsystem – nicht spezifiziert (B.19)

(ii) $\mathbf{P}_{\text{in}} \equiv \mathbf{0}$, $P_{\text{in}}^3 \equiv 0$: Schwerpunktsystem bzgl. der drei Raumrichtungen (B.19′)

und entwickeln Fall (ii) bis höhere Ordnung gegenüber Fall (i).

Aufgrund der bestehenden Symmetrien beschränken wir uns o.E.d.A., explizit anzugeben nur die Entwicklungen für die Größen mit **Index 1**. Die entsprechenden Entwicklungen der Größen mit **Index 1′** folgen durch Indexsubstitution $\mathbf{1 \to 1'}$ **und** $\mathbf{2 \to 2'}$ im Sinne von Gl. (2.36), die der Größen mit **Index 1′** und **2′** weiter durch Indexsubstitution $\mathbf{1 \leftrightarrow 2}$ **und** $\mathbf{1' \leftrightarrow 2'}$ im Sinne von Gl. (2.40).

B.2.1 (Inverse) Epsilon ε_i, ε_i^{-1} bzw. Impulskomponenten P_i^+, P_i^-

Mit den ε_i, ε_i^{-1} unmittelbar in Zusammenhang stehen die Lichtkegelkomponenten der Impulse P_i^+, P_i^-. Es gilt:

$$P_i^+ = \alpha\,\mathbf{M}_i^2\;\varepsilon_i^{-1} \qquad \text{für } i=1,1' \tag{B.20}$$

$$P_i^- = \alpha\,\mathbf{M}_i^2\;\varepsilon_i^{-1} \qquad \text{für } i=2,2' \tag{B.20′}$$

und:

$$P_i^- = \alpha\,\varepsilon_i \qquad \text{für } i=1,1' \tag{B.21}$$

$$P_i^+ = \alpha\,\varepsilon_i \qquad \text{für } i=2,2' \tag{B.21′}$$

vgl. die Gln. (2.13), (2.13′) bzw. (2.15), (2.15′). Entsprechend für die Reihen-Entwicklungen.

[B.1] Das Vorzeichen des Wurzelausdrucks folgt aus der Analyse der Vorzeichen der involvierten Größen im Limes „s groß“, das heißt „Epsilons klein“: dabei ist $\text{sign}(\varepsilon_i) \equiv \text{sign}(\mathbf{M}_i^2)$, vgl. die Gln. (2.13), (2.13′), und der Radiant reell positiv. Entsprechend die Gln. (2.30) und (2.32).

(i) Nicht-spezifiziertes Bezugsystem:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1(\kappa) \qquad\qquad (B.22)\\
&= \mathbf{M}_1^2\ \sqrt{\kappa}\\
&\quad - \mathbf{M}_1^2\, P_{\mathrm{in}}^3\ \kappa\\
&\quad + \frac{\mathbf{M}_1^2}{2}\left\{2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^2 - \mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right\}\ \kappa^{3/2}\\
&\quad + \mathbf{M}_1^2\, P_{\mathrm{in}}^3\left\{-\mathbf{M}_2^2 + \mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right\}\ \kappa^2\\
&\quad + \frac{\mathbf{M}_1^2}{8}\left\{8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + 8\,{\mathbf{M}_2^2}^2 + 4\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^2 - {P_{\mathrm{in}}^3}^4 - 6\left[2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^2\right]\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right.\\
&\qquad \left. + 3\left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^2\right\}\ \kappa^{5/2}\\
&\quad - \mathbf{M}_1^2\, P_{\mathrm{in}}^3\left\{\mathbf{M}_2^2\ \left(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2\right) - 2\,\mathbf{M}_2^2\,\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2 + \left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^2\right\}\ \kappa^3\\
&\quad + \frac{\mathbf{M}_1^2}{16}\left\{16\,{\mathbf{M}_1^2}^2\,\mathbf{M}_2^2 + 16\,{\mathbf{M}_2^2}^3 + 8\,{\mathbf{M}_2^2}^2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^2 - 2\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^4 + {P_{\mathrm{in}}^3}^6\right.\\
&\qquad + 8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\left[6\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^2\right] - 5\left[8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + 8\,{\mathbf{M}_2^2}^2 + 4\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^2 - {P_{\mathrm{in}}^3}^4\right]\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\\
&\qquad \left. + 15\left(2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^2\right)\left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^2 - 5\left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^3\right\}\ \kappa^{7/2}\\
&\quad + \mathcal{O}(\kappa^4)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_1^{-1}(\kappa) \qquad\qquad (B.23)\\
&= \frac{1}{\mathbf{M}_1^2}\ \frac{1}{\sqrt{\kappa}}\\
&\quad + \frac{P_{\mathrm{in}}^3}{\mathbf{M}_1^2}\\
&\quad + \frac{1}{2\,\mathbf{M}_1^2}\left\{-2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^2 + \mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right\}\ \sqrt{\kappa}\\
&\quad - \frac{\mathbf{M}_2^2\, P_{\mathrm{in}}^3}{\mathbf{M}_1^2}\ \kappa\\
&\quad - \frac{1}{8\,\mathbf{M}_1^2}\left\{8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + 4\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^4 + \left[-4\,\mathbf{M}_2^2 + 2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^2\right]\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2 + \left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^2\right\}\ \kappa^{3/2}\\
&\quad + \frac{\mathbf{M}_2^2\, P_{\mathrm{in}}^3}{\mathbf{M}_1^2}\left\{-\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right\}\ \kappa^2\\
&\quad + \frac{1}{16\,\mathbf{M}_1^2}\left\{-16\,{\mathbf{M}_1^2}^2\,\mathbf{M}_2^2 + 2\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^4 + {P_{\mathrm{in}}^3}^6 - 8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\left[2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^2\right]\right.\\
&\qquad + 3\left[8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + 4\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\mathrm{in}}^3}^2 + {P_{\mathrm{in}}^3}^4\right]\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2 + \left[-6\,\mathbf{M}_2^2 + 3\,{P_{\mathrm{in}}^3}^2\right]\left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^2\\
&\qquad \left. + \left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^3\right\}\ \kappa^{5/2}\\
&\quad - \frac{\mathbf{M}_2^2\, P_{\mathrm{in}}^3}{\mathbf{M}_1^2}\left\{\mathbf{M}_1^2\ \left(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2\right) - 2\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2 + \left(\mathbf{P}_{\mathrm{in}}^2\right)^2\right\}\ \kappa^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{1}{128\,\mathbf{M}_1^2}\Big\{128\,{\mathbf{M}_1^2}^3\,\mathbf{M}_2^2 + 64\,{\mathbf{M}_1^2}^2\,\mathbf{M}_2^2\left[6\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\rm in}^3}^2\right] + {P_{\rm in}^3}^6\left[8\,\mathbf{M}_2^2 + 5\,{P_{\rm in}^3}^2\right] \\
&\quad + 16\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\left[8\,{\mathbf{M}_2^2}^2 + 4\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\rm in}^3}^2 - {P_{\rm in}^3}^4\right] \\
&\quad - 20\left[16\,{\mathbf{M}_1^2}^2\,\mathbf{M}_2^2 + 8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\left(2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\rm in}^3}^2\right) - {P_{\rm in}^3}^4\left(2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\rm in}^3}^2\right)\right]\mathbf{P}_{\rm in}^2 \\
&\quad + 30\left[8\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + 4\,\mathbf{M}_2^2\,{P_{\rm in}^3}^2 + {P_{\rm in}^3}^4\right]\left(\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)^2 + 20\left[-2\,\mathbf{M}_2^2 + {P_{\rm in}^3}^2\right]\left(\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)^3 \\
&\quad + 5\left(\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)^4\Big\}\;\kappa^{7/2} \\
&+ \mathcal{O}(\kappa^4)
\end{aligned}
$$

(ii) Schwerpunktsystem, $\mathbf{P}_{\rm in} \equiv 0$ und $\boldsymbol{P}_{\rm in}^3 \equiv 0$:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1(\kappa) \;=\; & \mathbf{M}_1^2\;\sqrt{\kappa} \\
& + \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\;\kappa^{3/2} \\
& + \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\,\left(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2\right)\;\kappa^{5/2} \\
& + \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\left({\mathbf{M}_1^2}^2 + 3\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + {\mathbf{M}_2^2}^2\right)\;\kappa^{7/2} \\
& + \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\,\left(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2\right)\left({\mathbf{M}_1^2}^2 + 5\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + {\mathbf{M}_2^2}^2\right)\;\kappa^{9/2} \\
& + \mathcal{O}(\kappa^{11/2})
\end{aligned}
\tag{B.24}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1^{-1}(\kappa) \;=\; & \frac{1}{\mathbf{M}_1^2}\;\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \\
& - \frac{\mathbf{M}_2^2}{\mathbf{M}_1^2}\;\sqrt{\kappa} \\
& - \mathbf{M}_2^2\;\kappa^{3/2} \\
& - \mathbf{M}_2^2\,\left(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2\right)\;\kappa^{5/2} \\
& - \mathbf{M}_2^2\left({\mathbf{M}_1^2}^2 + 3\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + {\mathbf{M}_2^2}^2\right)\;\kappa^{7/2} \\
& - \mathbf{M}_2^2\,\left(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2\right)\left({\mathbf{M}_1^2}^2 + 5\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + {\mathbf{M}_2^2}^2\right)\;\kappa^{9/2} \\
& + \mathcal{O}(\kappa^{11/2})
\end{aligned}
\tag{B.25}
$$

B.2.2 Impulskomponenten $\boldsymbol{P}_i^0$, $\boldsymbol{P}_i^3$

Die longitudinalen Impulskomponenten P_i^0, P_i^3 – das heißt Energie und Impuls in x^3-Richtung – hängen zusammen mit ε_i, ε_i^{-1} wie folgt:[B.2]

$$
\overset{0}{P_1^3} \;=\; \left(\mathbf{M}_1^2\;\varepsilon_1^{-1} \pm \varepsilon_1\right)/2\alpha \qquad \text{und:} \qquad \overset{0}{P_2^3} \;=\; \left(\varepsilon_2 \pm \mathbf{M}_2^2\;\varepsilon_2^{-1}\right)/2\alpha \tag{B.26}
$$

$$
\overset{0}{P_{1'}^3} \;=\; \left(\mathbf{M}_{1'}^2\;\varepsilon_{1'}^{-1} \pm \varepsilon_{1'}\right)/2\alpha \qquad\qquad \overset{0}{P_{2'}^3} \;=\; \left(\varepsilon_{2'} \pm \mathbf{M}_{2'}^2\;\varepsilon_{2'}^{-1}\right)/2\alpha \tag{B.26$'$}
$$

vgl. die Gln. (2.18), (2.18′). Entsprechend die Reihen-Entwicklungen.

[B.2] Null-Komponente oberes, Drei-Komponente unteres Vorzeichen.

(i) Nicht-spezifiziertes Bezugsystem:

$$
\begin{aligned}
&P_1^0(\kappa) \qquad\qquad\qquad\

$$
\begin{aligned}
&+ 2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\left[{P_{\rm in}^3}^4 + 6\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2 - 3\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\right]\Big\}\;\kappa^{5/2}\\
&+ \frac{P_{\rm in}^3\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2}{2}\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)\;\kappa^3\\
&+ \frac{1}{256}\Big\{ - 16\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)^4 - 80\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^4 - 32\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^3\left[{P_{\rm in}^3}^2 - 5\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right]\\
&\quad - 5\left[{P_{\rm in}^3}^2 + \mathbf{P}_{\rm in}^2\right]^4 + 8\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^2\left[{P_{\rm in}^3}^4 + 10\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2 - 15\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\right]\\
&\quad - 8\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\left[{P_{\rm in}^3}^6 + 5\,{P_{\rm in}^3}^4\,\mathbf{P}_{\rm in}^2 + 15\,{P_{\rm in}^3}^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2 - 5\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^3\right]\\
&\quad + 8\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)^2\left[12\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^2 - {P_{\rm in}^3}^4 - 10\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2 + 15\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\right.\\
&\quad \left. + 4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\left({P_{\rm in}^3}^2 - 5\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)\right]\Big\}\;\kappa^{7/2}\\
&+ \mathcal{O}(\kappa^4)
\end{aligned}
$$

(ii) Schwerpunktsystem, $\mathbf{P}_{\rm in}\equiv\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{P}_{\rm in}^{\mathbf{3}}\equiv\mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
P_1^0(\kappa) \;=\; & \frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \\
& + \frac{1}{2}\;(\mathbf{M}_1^2 - \mathbf{M}_2^2)\;\sqrt{\kappa} \\
& + \mathcal{O}(\kappa^{11/2})
\end{aligned}
\tag{B.29}
$$

$$
\begin{aligned}
P_1^3(\kappa) \;=\; & \frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{\kappa}} \\
& - \frac{1}{2}\;(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2)\;\sqrt{\kappa} \\
& - \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\;\kappa^{3/2} \\
& - \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\;(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2)\;\kappa^{5/2} \\
& - \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\left(\mathbf{M}_1^{2\,2} + 3\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + \mathbf{M}_2^{2\,2}\right)\;\kappa^{7/2} \\
& - \mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2\;(\mathbf{M}_1^2 + \mathbf{M}_2^2)\left(\mathbf{M}_1^{2\,2} + 5\,\mathbf{M}_1^2\,\mathbf{M}_2^2 + \mathbf{M}_2^{2\,2}\right)\;\kappa^{9/2} \\
& + \mathcal{O}(\kappa^{11/2})
\end{aligned}
\tag{B.30}
$$

B.2.3 Dreier-Impuls-Betrag $|\vec{\boldsymbol{P}}_i|$

Der Betrag des Dreier-Impulses $|\vec{P}_i|$ hängt ab von ε_i, ε_i^{-1} über P_i^3 in der Form:

$$
\left|\vec{P}_i\right| \;=\; \sqrt{\mathbf{P}_i^2 + {P_i^3}^2}
\tag{B.31}
$$

Daraus folgen Reihen-Entwicklungen wie folgt.

(i) Nicht-spezifiziertes Bezugsystem:

$$
\begin{aligned}
&\left|\vec{P}_1(\kappa)\right| \\
&= \frac{1}{2}\;\frac{1}{\sqrt{\kappa}}
\end{aligned}
\tag{B.32}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{P_{\rm in}^3}{2}\\
&+\frac{1}{4}\Big\{-2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)+4\,\mathbf{P}_1^2+{P_{\rm in}^3}^2+\mathbf{P}_{\rm in}^2\Big\}\;\sqrt{\kappa}\\
&+\frac{P_{\rm in}^3}{2}\Big\{(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\Big\}\;\kappa\\
&+\frac{1}{16}\Big\{4\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)^2-4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^2+16\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\,\mathbf{P}_1^2-16\,{\mathbf{P}_1^2}^2\\
&\quad-4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\,{P_{\rm in}^3}^2+8\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2-{P_{\rm in}^3}^4+4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-8\,\mathbf{P}_1^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\\
&\quad-2\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\Big\}\;\kappa^{3/2}\\
&-\frac{P_{\rm in}^3}{2}\Big\{(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)\;\left(2\,\mathbf{P}_1^2+\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)-2\,\mathbf{P}_1^2\;\left(-2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)+3\,\mathbf{P}_1^2+\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)\Big\}\;\kappa^2\\
&+\frac{1}{32}\Big\{-8\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^3+64\,{\mathbf{P}_1^2}^3+64\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2-144\,{\mathbf{P}_1^2}^2\,{P_{\rm in}^3}^2\\
&\quad-4\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^4+{P_{\rm in}^3}^6+48\,{\mathbf{P}_1^2}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-24\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2+3\,{P_{\rm in}^3}^4\,\mathbf{P}_{\rm in}^2+12\,\mathbf{P}_1^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\\
&\quad+3\,{P_{\rm in}^3}^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2+{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^3+4\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)^2\left[2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-4\,\mathbf{P}_1^2+{P_{\rm in}^3}^2-3\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right]\\
&\quad+4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^2\left[12\,\mathbf{P}_1^2-{P_{\rm in}^3}^2+3\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right]\\
&\quad-2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\left[48\,{\mathbf{P}_1^2}^2-40\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2-{P_{\rm in}^3}^4+24\,\mathbf{P}_1^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-6\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right.\\
&\qquad\left.+3\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\right]\Big\}\;\kappa^{5/2}\\
&-\frac{P_{\rm in}^3}{2}\Big\{(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)\left[4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\,\mathbf{P}_1^2-6\,{\mathbf{P}_1^2}^2+4\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2-4\,\mathbf{P}_1^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\right]\\
&\quad+2\,\mathbf{P}_1^2\left[-(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)^2+4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^2+10\,{\mathbf{P}_1^2}^2-4\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2+6\,\mathbf{P}_1^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2+{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\right.\\
&\qquad\left.-2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\left(6\,\mathbf{P}_1^2-{P_{\rm in}^3}^2+2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)\right]\Big\}\;\kappa^3\\
&+\frac{1}{256}\Big\{-16\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)^4-80\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^4-1280\,{\mathbf{P}_1^2}^4+6400\,{\mathbf{P}_1^2}^3\,{P_{\rm in}^3}^2\\
&\quad-480\,{\mathbf{P}_1^2}^2\,{P_{\rm in}^3}^4+16\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^6-5\,{P_{\rm in}^3}^8-1280\,{\mathbf{P}_1^2}^3\,\mathbf{P}_{\rm in}^2+2880\,{\mathbf{P}_1^2}^2\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\\
&\quad+80\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^4\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-20\,{P_{\rm in}^3}^6\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-480\,{\mathbf{P}_1^2}^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2+240\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2-30\,{P_{\rm in}^3}^4\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\\
&\quad-80\,\mathbf{P}_1^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^3-20\,{P_{\rm in}^3}^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^3-5\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^4\\
&\quad+256\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2\left[6\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-12\,\mathbf{P}_1^2+{P_{\rm in}^3}^2-5\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right]\\
&\quad+32\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^3\left[20\,\mathbf{P}_1^2-{P_{\rm in}^3}^2+5\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right]-8\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^2\left[240\,{\mathbf{P}_1^2}^2-216\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2\right.\\
&\qquad\left.-{P_{\rm in}^3}^4+120\,\mathbf{P}_1^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-10\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2+15\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2\right]\\
&\quad+8\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\left[320\,{\mathbf{P}_1^2}^3-816\,{\mathbf{P}_1^2}^2\,{P_{\rm in}^3}^2+28\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^4-{P_{\rm in}^3}^6+240\,{\mathbf{P}_1^2}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right.\\
&\qquad\left.-200\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2-5\,{P_{\rm in}^3}^4\,\mathbf{P}_{\rm in}^2+60\,\mathbf{P}_1^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2-15\,{P_{\rm in}^3}^2\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2+5\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^3\right]\\
&\quad+8\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2)^2\left[12\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)^2+48\,{\mathbf{P}_1^2}^2-8\,\mathbf{P}_1^2\,{P_{\rm in}^3}^2-{P_{\rm in}^3}^4+40\,\mathbf{P}_1^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right.\\
&\qquad\left.-10\,{P_{\rm in}^3}^2\,\mathbf{P}_{\rm in}^2+15\,{\mathbf{P}_{\rm in}^2}^2-4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)\left(12\,\mathbf{P}_1^2-{P_{\rm in}^3}^2+5\,\mathbf{P}_{\rm in}^2\right)\right]\Big\}\;\kappa^{7/2}\\
&+\mathcal{O}(\kappa^4)
\end{aligned}
$$

(ii) Schwerpunktsystem, $\mathbf{P}_{\rm in}\equiv\mathbf{0}$ und $\boldsymbol{P}^3_{\rm in}\equiv\mathbf{0}$:

$$
\begin{aligned}
&\left|\vec{P}_1(\kappa)\right| \qquad\qquad (B.33)\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\\
&\quad -\frac{1}{2}\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]\,\sqrt{\kappa}\\
&\quad +\frac{1}{4}\left\{\left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2\right)^2-\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]^2\right\}\,\kappa^{3/2}\\
&\quad +\frac{1}{4}\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]\left\{\left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2\right)^2-\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]^2\right\}\,\kappa^{5/2}\\
&\quad +\frac{1}{16}\left\{-\left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2\right)^4+6\left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2\right)^2\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]^2\right.\\
&\qquad \left.-5\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]^4\right\}\,\kappa^{7/2}\\
&\quad -\frac{1}{16}\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]\left\{3\left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2\right)^4-10\left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2\right)^2\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]^2\right.\\
&\qquad \left.+7\left[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2)-2\,\mathbf{P}_1^2\right]^4\right\}\,\kappa^{9/2}\\
&\quad +\mathcal{O}(\kappa^{11/2})
\end{aligned}
$$

Aus $\mathbf{P}_1+\mathbf{P}_2\equiv\mathbf{P}_{\rm in}\equiv\mathbf{0}$ folgt $\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_2^2\equiv M_1^2-M_2^2$ und $\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_2^2-2\,\mathbf{P}_1^2\equiv M_1^2+M_2^2$, das heißt in Termen der *invarianten* Massen:

$$
\begin{aligned}
&\left|\vec{P}_1(\kappa)\right| \qquad\qquad (B.33')\\
&= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\\
&\quad -\frac{1}{2}\left(M_1^2+M_2^2\right)\,\sqrt{\kappa}\\
&\quad -M_1^2\,M_2^2\,\kappa^{3/2}\\
&\quad -M_1^2\,M_2^2\left(M_1^2+M_2^2\right)\,\kappa^{5/2}\\
&\quad -M_1^2\,M_2^2\left(M_1^{2\,2}+3\,M_1^2\,M_2^2+M_2^{2\,2}\right)\,\kappa^{7/2}\\
&\quad -M_1^2\,M_2^2\left(M_1^2+M_2^2\right)\left(M_1^{2\,2}+5\,M_1^2\,M_2^2+M_2^{2\,2}\right)\,\kappa^{9/2}\\
&\quad +\mathcal{O}(\kappa^{11/2})
\end{aligned}
$$

vgl. Gl. (B.30).

B.2.4 Quadrat des invarianten Impulstransfers $-t$

Das Quadrat des invarianten Impulstransfers $-t$ wird ausgedrückt durch ε_i, ε_i^{-1}, in symmetrisierter Form:

$$
\begin{aligned}
t \;&=\; -(\mathbf{P}_{1'}-\mathbf{P}_1)^2 \qquad\qquad (B.34)\\
&\quad +\;\frac{1}{2}\left[\mathbf{M}_1^2\left(1-\varepsilon_1^{-1}\,\varepsilon_{1'}\right)+\mathbf{M}_{1'}^2\left(1-\varepsilon_1\,\varepsilon_{1'}^{-1}\right)+\mathbf{M}_2^2\left(1-\varepsilon_2^{-1}\,\varepsilon_{2'}\right)+\mathbf{M}_{2'}^2\left(1-\varepsilon_2\,\varepsilon_{2'}^{-1}\right)\right]
\end{aligned}
$$

vgl. Gl. (2.26). Diese Formel impliziert die Reihen-Entwicklung wie folgt.

(i) Nicht-spezifiziertes Bezugsystem:

$$
\begin{aligned}
& t(\kappa) \qquad\qquad\qquad\

$$+ 30\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\,\mathbf{P}_{\rm in}^2 + 15\,P_{\rm in}^{3\,2}\,\mathbf{P}_{\rm in}^2 + 36\,\mathbf{P}_{\rm in}^{2\,2}\Big]\Big\}\;\kappa^{7/2}$$
$$+ \mathcal{O}(\kappa^4)$$

(ii) Schwerpunktsystem, $\mathbf{P}_{\rm in}\equiv\mathbf{0}$ und $P_{\rm in}^3\equiv 0$:

$$t(\kappa) \tag{B.36}$$
$$= -(\mathbf{P}_{1'}-\mathbf{P}_1)^2$$
$$-(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\,\kappa$$
$$-\frac{1}{2}\Big[(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)+(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\Big]$$
$$\times\Big\{(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)+(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\Big\}\;\kappa^2$$
$$+\frac{1}{4}\Big\{-\Big[(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^3\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\Big]$$
$$-2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2\,\Big[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)+(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\Big]$$
$$-(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\,\Big[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^2+(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2$$
$$+6\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)+(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^2\Big]$$
$$-2\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^2\,\Big[(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2+(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\,\Big((\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)+(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\Big)\Big]\Big\}\;\kappa^3$$
$$+\frac{1}{8}\Big\{-\Big[(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^4\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\Big]$$
$$-3\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^3\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\,\Big[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)+3\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\Big]$$
$$-(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2\,\Big[3\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^2+(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2$$
$$+10\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)+3\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^2\Big]$$
$$-(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^2\,\Big[11\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2+3\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^2\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)$$
$$+11\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)+10\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^2+3\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^3\Big]$$
$$-(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\,\Big[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^3+15\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^2\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)$$
$$+3\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)+(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^3$$
$$+3\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,\Big(3\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2+5\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^2\Big)\Big]\Big\}\;\kappa^4$$
$$+\frac{1}{16}\Big\{-\Big[(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^5\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\Big]$$
$$-2\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^3\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)\,\Big[3\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^2+7\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2$$
$$+26\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)+19\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^2\Big]$$
$$-4\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2\,\Big[(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^3+2\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2$$
$$+7\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)^2\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)+(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)$$
$$+7\,(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^2+(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)^3\Big]$$
$$-4\,(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2)^4\,\Big[2\,(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2)^2+(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\,\Big((\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2)+2\,(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2)\Big)\Big]$$

$$
\begin{aligned}
&- \left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2\right)\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)\Big[\left(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2\right)^4+\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^4\\
&\quad+28\left(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2\right)^3\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)+6\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2+\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^4\\
&\quad+2\left(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2\right)^2\left(19\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2+35\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2\right)\\
&\quad+4\left(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2\right)\left(13\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)+7\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^3\right)\Big]\\
&- 4\left(\mathbf{M}_1^2-\mathbf{M}_{1'}^2\right)^2\Big[2\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^4+\left(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2\right)^3\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)\\
&\quad+8\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2+\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^4\\
&\quad+\left(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2\right)^2\left(8\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2+7\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2\right)\\
&\quad+\left(\mathbf{M}_1^2+\mathbf{M}_{1'}^2\right)\left(26\left(\mathbf{M}_2^2-\mathbf{M}_{2'}^2\right)^2\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)+7\left(\mathbf{M}_2^2+\mathbf{M}_{2'}^2\right)^3\right)\Big]\Big\}\ \kappa^5\\
&+\mathcal{O}(\kappa^6)
\end{aligned}
$$

Anhang C

Streuung der Zustände h^i

In diesem Anhang leiten wir her Identitäten die Streuung der Zustände $|h^i(P_i)\rangle$ betreffend, die wir benötigen im Haupttext, dort aber nur zitieren können.

C.1 Skalarprodukt $\langle h^{i'}|h^i\rangle$

Wir berechnen das Skalarprodukt $\langle h^{i'}(P_{i'})|h^i(P_i)\rangle$ für feste i, i', beide entweder $\in\{1,1'\}$ oder $\in\{2,2'\}$. Für $i'=i$ heißt dies die Norm des Zustandes $|h^i(P_i)\rangle$, vgl. Gl. (2.46), für $i'\neq i$ der Überlapp zweier verschiedener, entweder „plus"- oder „minus"-Zustände, vgl. Gl. (2.50).

Wir schreiben mithilfe von Gl. (2.41)

$$\begin{aligned}&\langle h^{i'}(P_{i'})|h^i(P_i)\rangle \qquad\qquad (C.1)\\ &= \frac{\delta_{n_{i'}\bar n_{i'}}}{\sqrt{N_c}}\;\frac{\delta_{n_i\bar n_i}}{\sqrt{N_c}}\;\int\frac{d^2\mathbf{k}_{i'}}{(2\pi)^2}\int_0^1\frac{dz_{i'}}{2\pi}\;\int\frac{d^2\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2}\int_0^1\frac{dz_i}{2\pi}\;\tilde\varphi^{i'\dagger}_{s_{i'}\bar s_{i'}}(z_{i'},\mathbf{k}_{i'})\,\tilde\varphi^{i}_{s_i\bar s_i}(z_i,\mathbf{k}_i)\\ &\quad\times\langle q_{s_{i'},n_{i'}}(z_{i'},\mathbf{k}_{i'})\,\bar q_{\bar s_{i'},\bar n_{i'}}(\bar z_{i'},\bar{\mathbf{k}}_{i'})|q_{s_i,n_i}(z_i,\mathbf{k}_i)\,\bar q_{\bar s_i,\bar n_i}(\bar z_i,\bar{\mathbf{k}}_i)\rangle\end{aligned}$$

Wir drücken das Vier-Quark-Matrixelement aus durch Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren und erhalten mithilfe der Antikommutatorrelationen, vgl. Gl. (2.64), unmittelbar

$$\langle q_{s_{i'},n_{i'}}(z_{i'},\mathbf{k}_{i'})\,\bar q_{\bar s_{i'},\bar n_{i'}}(\bar z_{i'},\bar{\mathbf{k}}_{i'})|q_{s_i,n_i}(z_i,\mathbf{k}_i)\,\bar q_{\bar s_i,\bar n_i}(\bar z_i,\bar{\mathbf{k}}_i)\rangle \;=\; \delta(i',i)\,\delta(\bar i',\bar i) \qquad (C.2)$$

$$\text{mit}\qquad \delta(i',i) \;=\; \delta_{s_{i'}s_i}\delta_{n_{i'}n_i}\,(2\pi)^3\,2\sqrt{(p_{i'})_{0+}(p_i)_{0+}}\;\delta(\vec p_{i'}-\vec p_i) \qquad (C.2')$$

die Definition von $\delta(i',i)$ nach Gl. (2.64); bzgl. $\delta(\bar i',\bar i)$ vgl. Gl. (2.64′). Wir betrachten weiter den Anteil des Konfigurationsraumes, das heißt ohne die Kronecker-Symbole in den Eichgruppen- und Spinindizes. In Lichtkegelkoordinaten gilt

$$\begin{aligned}&\delta(i',i)\big|_{\text{Konfig.}}\\ &= (2\pi)^3\,2\sqrt{(p^+_{i'}+p^-_{i'})(p^+_i+p^-_i)}\;\;\delta\big((p^+_{i'}+p^-_{i'})-(p^+_i+p^-_i)\big)\;\;\delta(\mathbf{p}_{i'}-\mathbf{p}_i) \qquad (C.3)\\ &= (2\pi)^3\,2\sqrt{z_{i'}P^+_{i'}\left[1+\frac{\alpha^2\mathbf{m}^2_{i'}}{(z_{i'}P^+_{i'})^2}\right]\cdot z_iP^+_i\left[1+\frac{\alpha^2\mathbf{m}^2_i}{(z_iP^+_i)^2}\right]} \qquad (C.3')\\ &\quad\times\delta\left(z_{i'}P^+_{i'}\left[1+\frac{\alpha^2\mathbf{m}^2_{i'}}{(z_{i'}P^+_{i'})^2}\right]-z_iP^+_i\left[1+\frac{\alpha^2\mathbf{m}^2_{i'}}{(z_iP^+_i)^2}\right]\right)\;\;\delta\big((z_{i'}\mathbf{P}_{i'}+\mathbf{k}_{i'})-(z_i\mathbf{P}_i+\mathbf{k}_i)\big)\\ &\underset{s\to\infty}{\sim}\;(2\pi)^3\sqrt{z_{i'}P^+_{i'}\;z_iP^+_i}\;\;\delta(z_{i'}P^+_{i'}-z_iP^+_i)\;\;\delta((z_{i'}\mathbf{P}_{i'}+\mathbf{k}_{i'})-(z_i\mathbf{P}_i+\mathbf{k}_i)) \qquad (C.3'')\end{aligned}$$

mit $\mathbf{m}$ der transversalen Quarkmasse entsprechend Gl. (2.10). Dabei sind wir in Gl. (C.3″) zu den „großen" Impulskomponenten übergegangen und haben präzisiert den Fall $i \equiv 1$ ($i' \in \{1, 1'\}$). Im Fall $i \equiv 2$ ($i' \in \{2, 2'\}$) sind die „großen" Komponenten der Impulse die Minus-Komponenten und es ist zu ersetzen $P^+ \to P^-$. Gl. (C.3″) folgt für $s \to \infty$.

Mithilfe der Sustitution nach Gl. (2.43): $z \to \bar{z}$ und $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$, gelangen wir zu dem analogen Ausdruck $\delta(\bar{i}', \bar{i})$ für Antiquarks.

Für das Vier-Quark-Matrixelement nach Gl. (C.2) folgt weiter

$$\begin{aligned}
&\langle q_{s_{i'},n_{i'}}(z_{i'},\mathbf{k}_{i'})\ \bar{q}_{\bar{s}_{i'},\bar{n}_{i'}}(\bar{z}_{i'},\bar{\mathbf{k}}_{i'})|q_{s_i,n_i}(z_i,\mathbf{k}_i)\ \bar{q}_{\bar{s}_i,\bar{n}_i}(\bar{z}_i,\bar{\mathbf{k}}_i)\rangle \qquad \text{(C.4)}\\
&= \delta_{s_{i'}s_i}\delta_{n_{i'}n_i}\ \delta_{\bar{s}_{i'}\bar{s}_i}\delta_{\bar{n}_{i'}\bar{n}_i}\ (2\pi)^6 \sqrt{z_{i'}P_{i'}^+\ z_iP_i^+}\ \sqrt{\bar{z}_{i'}P_{i'}^+\ \bar{z}_iP_i^+}\\
&\quad\times \delta\big(z_{i'}P_{i'}^+ - z_iP_i^+\big)\ \ \delta\big((z_{i'}\mathbf{P}_{i'}+\mathbf{k}_{i'})-(z_i\mathbf{P}_i+\mathbf{k}_i)\big)\\
&\quad\times \delta\big([P_{i'}^+ - P_i^+] - (z_{i'}P_{i'}^+ - z_iP_i^+)\big)\ \ \delta\big([\mathbf{k}_{i'}-\mathbf{k}_i] - [(z_{i'}\mathbf{P}_{i'}+\mathbf{k}_{i'})-(z_i\mathbf{P}_i+\mathbf{k}_i)]\big)
\end{aligned}$$

wobei wir $\bar{z} = 1-z$ benutzt haben. Im Sinne von Distributionen verschwinden aufgrund der vorletzten Zeile die Terme in den eckigen Klammern der letzten Zeile; es folgen die Delta-Distributionen $\delta(P_{i'}^+ - P_i^+)$ und $\delta(\mathbf{k}_{i'} - \mathbf{k}_i)$. Diese wiederum haben Konsequenzen für die Delta-Distributionen der vorletzten Zeile. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
&\langle q_{s_{i'},n_{i'}}(z_{i'},\mathbf{k}_{i'})\ \bar{q}_{\bar{s}_{i'},\bar{n}_{i'}}(\bar{z}_{i'},\bar{\mathbf{k}}_{i'})|q_{s_i,n_i}(z_i,\mathbf{k}_i)\ \bar{q}_{\bar{s}_i,\bar{n}_i}(\bar{z}_i,\bar{\mathbf{k}}_i)\rangle\\
&= \delta_{s_{i'}s_i}\delta_{n_{i'}n_i}\ \delta_{\bar{s}_{i'}\bar{s}_i}\delta_{\bar{n}_{i'}\bar{n}_i}\ (2\pi)^6 \sqrt{z_{i'}P_{i'}^+\ z_iP_i^+}\ \sqrt{\bar{z}_{i'}P_{i'}^+\ \bar{z}_iP_i^+} \qquad \text{(C.5)}\\
&\quad\times (P_{i'}^+)^{-1}\ \delta(z_{i'}-z_i)\ \ \delta(\mathbf{P}_{i'}-\mathbf{P}_i)\ \ \delta(P_{i'}^+ - P_i^+)\ \ \delta(\mathbf{k}_{i'}-\mathbf{k}_i)\\
&= (2\pi)^3\ 2(P_{i'})_{0+}\ \delta(\vec{P}_{i'}-\vec{P}_i)\ \ \delta_{s_{i'}s_i}\delta_{n_{i'}n_i}\ \delta_{\bar{s}_{i'}\bar{s}_i}\delta_{\bar{n}_{i'}\bar{n}_i} \qquad \text{(C.5′)}\\
&\quad\times 2z_{i'}\bar{z}_{i'}\ (2\pi)^3\ \delta(z_{i'}-z_i)\ \ \delta(\mathbf{k}_{i'}-\mathbf{k}_i)
\end{aligned}$$

wobei wir in Gl. (C.5′) benutzt haben: $P_{i'}^+\delta(P_{i'}^+ - P_i^+) \sim (P_{i'})_{0+}\delta(P_{i'}^3 - P_i^3)$ im Limes $s \to \infty$ mit den nullten beziehungsweise dritten Komponenten.

Eingesetzt in Gl. (C.1) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}
&\langle h^{i'}(P_{i'})|h^i(P_i)\rangle \qquad \text{(C.6)}\\
&= (2\pi)^3\, 2(P_{i'})_{0+}\,\delta(\vec{P}_{i'}-\vec{P}_i)\ \int \frac{d^2\mathbf{k}_{i'}}{(2\pi)^2}\int_0^1 \frac{dz_{i'}}{2\pi}\ 2z_{i'}\bar{z}_{i'}\ \ \tilde{\varphi}^{i'\dagger}_{s_{i'}\bar{s}_{i'}}(z_{i'},\mathbf{k}_{i'})\,\tilde{\varphi}^{i}_{s_{i'}\bar{s}_{i'}}(z_{i'},\mathbf{k}_{i'})
\end{aligned}$$

Wir haben diese Gleichung streng hergeleitet für Indizes $i = 1$ und $i' \in \{1, 1'\}$. Für Indizes $i = 2$ und $i' \in \{2, 2'\}$ sind die „großen" Impulskomponeneten, über die die Herleitung geschieht, die Minus-Komponenten. Resultat ist wieder Gl. (C.6).

Seien die Lichtkegelwellenfunktionen $\tilde{\varphi}^i_{s\bar{s}}$ normiert wie in Gl. (2.47), ihre Fourier-Transformierten (bzgl. des transversalen Vektors) definiert durch Gl. (2.48). Dann ist Gl. (C.6) für Indizes $i' = i$ genau Gl. (2.46): die Normierungsbedingung der Zustände $|h^i(P_i)\rangle$, für Indizes $i' \neq i$ – beide entweder $\in \{1, 1'\}$ oder $\in \{2, 2'\}$ – genau Gl. (2.50): deren Überlapp.

C.2 Disconnected Terme: $\delta(i', i)$ als Integral $\int d_{i'i}$

Wir zeigen explizit die Umformung der *disconnected*, das heißt nichtzusammenhängenden Terme $\delta(i', i)$ der Darstellung nach Gl. (2.109) in die nach Gl. (2.110).

Diese aus dem LSZ-Formalismus heraus auftretenden Terme, vgl. die Gln. (2.69), (2.109″), stehen dann in derselben Form wie die Einsen $\mathbb{1}$, die zu subtrahieren sind von den Wegner-Wilson-Linien V_+, $V_+^\dagger$ und V_-, $V_-^\dagger$; vgl. die Gln. (2.97), (2.97′) und (2.98), (2.98′). Die gemeinsame Form ermöglicht die simultane Behandlung.

Wir betrachten den Ausdruck für $\delta(i',i)$ nach Gl. (C.3) – präzisiert auf Indizes der „plus"-Zustände, $(i,\,i')=(1,\,1')$:

$$\begin{aligned}&\delta(i',i)\big|_{\text{Konfig.}}\\ &=\ (2\pi)^3\,2\sqrt{(p_{i'}^+ + p_{i'}^-)(p_i^+ + p_i^-)}\;\delta\big((p_{i'}^+ + p_{i'}^-) - (p_i^+ + p_i^-)\big)\;\delta(\mathbf{p}_{i'} - \mathbf{p}_i)\end{aligned} \tag{C.7}$$

Im Limes $s\to\infty$ folgt durch Darstellung der Delta-Distributionen durch Fourier-Integrale:

$$\begin{aligned}&\delta(i',i)\big|_{\text{Konfig.}}\\ &=\ (2\pi)^3\,2\sqrt{p_{i'}^+ p_i^+}\;\delta\big((p_{i'}^+ + p_{i'}^-) - (p_i^+ + p_i^-)\big)\;\delta(\mathbf{p}_{i'} - \mathbf{p}_i)\end{aligned} \tag{C.8}$$

$$=\ 2\sqrt{p_{i'}^+ p_i^+}\int d(g_{+-}x^-)d^2\mathbf{x}\ \ \exp\mathrm{i}\big[(p_{1'}^+ - p_1^+)(g_{+-}x^-) - (\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1)\cdot\mathbf{x}\big] \tag{C.8'}$$

Vergleich mit der Definition des Integrationsmaßes $d_{i'i}$ in Gl. (2.99) zeigt

$$\delta(i',i)\ =\ \delta_{s_{i'}s_i}\delta_{n_{i'}n_i}\ \int d_{i'i}(x^-,\mathbf{x}) \tag{C.9}$$

Zunächst nur für die Indizes $(i',\,i)=(1',\,1)$, folgt diese Relation in analoger Herleitung für die anderen im S-Matrixelement relevanten Kombinationen $(2',\,2)$ und $(\bar1',\,\bar1)$, $(\bar2',\,\bar2)$. In suggestiver Schreibweise mit Eisen $\mathbb{1}$ der Eichgruppe gilt für Teilchen:

$$\delta(1',1)\ =\ \delta_{s_{1'}s_1}\int d_{1'1}(x^-,\mathbf{x})\ \ \mathbb{1}_{n_{1'}n_1} \tag{C.10}$$

$$\delta(2',2)\ =\ \delta_{s_{2'}s_2}\int d_{2'2}(y^+,\mathbf{y})\ \ \mathbb{1}_{n_{2'}n_2} \tag{C.10'}$$

und für Antiteilchen:

$$\delta(\bar1',\bar1)\ =\ \delta_{\bar s_{1'}\bar s_1}\int d_{\bar1'\bar1}(\bar x^-,\bar{\mathbf{x}})\ \ \mathbb{1}_{\bar n_{1'}\bar n_1} \tag{C.11}$$

$$\delta(\bar2',\bar2)\ =\ \delta_{\bar s_{2'}\bar s_2}\int d_{\bar2'\bar2}(\bar y^+,\bar{\mathbf{y}})\ \ \mathbb{1}_{\bar n_{2'}\bar n_2} \tag{C.11'}$$

Damit ist gezeigt die Darstellung der aus dem LSZ-Formalismus herrührenden disconnected Termen $\delta(i',i)$ in Gl. (2.110) als Einsen $\mathbb{1}$ unter den Integralen $d_{i'i}$, – äquivalent zu den Einsen $\mathbb{1}$, die auftreten als Summanden der Wegner-Wilson-Linien V_+, $V_+^\dagger$ und V_-, $V_-^\dagger$. Sie sind somit zu verstehen und zu behandeln im gleichen Sinne.

C.3 S-Matrixelement $\langle h^{2'}\,h^{1'},\mathrm{in}|\,S\,|h^1\,h^2,\mathrm{in}\rangle$

Wir leiten explizit her Gl. (2.111) aus Gl. (2.110). Dies impliziert die Identifizierung der relevanten Variablen, von denen allein abhängt der Vakuumerwartungswert der vier Wegner-Wilson-Linien $\langle V_+V_+^\dagger V_-V_-^\dagger\rangle_A$.

Wir betrachten das Differential

$$\begin{aligned}&d_{1'1}(x^-,\mathbf{x})\;d_{\bar1'\bar1}(\bar x^-,\bar{\mathbf{x}})\;d_{2'2}(y^+,\mathbf{y})\;d_{\bar2'\bar2}(\bar y^+,\bar{\mathbf{y}})\\ &=\ 2\sqrt{p_{1'}^+p_1^+}\;2\sqrt{\bar p_{1'}^+\bar p_1^+}\;2\sqrt{p_{2'}^+p_2^+}\;2\sqrt{\bar p_{2'}^+\bar p_2^+}\\ &\quad\times(g_{+-})^4\ \ dx^-d^2\mathbf{x}\ \ d\bar x^-d^2\bar{\mathbf{x}}\ \ dy^+d^2\mathbf{y}\ \ d\bar y^+d^2\bar{\mathbf{y}}\\ &\quad\times\exp\mathrm{i}\Big[g_{+-}(p_{1'}^+ - p_1^+)x^- - (\mathbf{p}_{1'} - \mathbf{p}_1)\cdot\mathbf{x}\\ &\qquad\quad+\ g_{+-}(\bar p_{1'}^+ - \bar p_1^+)\bar x^- - (\bar{\mathbf{p}}_{1'} - \bar{\mathbf{p}}_1)\cdot\bar{\mathbf{x}}\\ &\qquad\quad+\ g_{+-}(p_{2'}^- - p_2^-)y^+ - (\mathbf{p}_{2'} - \mathbf{p}_2)\cdot\mathbf{y}\\ &\qquad\quad+\ g_{+-}(\bar p_{2'}^- - \bar p_2^-)\bar y^+ - (\bar{\mathbf{p}}_{2'} - \bar{\mathbf{p}}_2)\cdot\bar{\mathbf{y}}\Big]\end{aligned} \tag{C.12}$$

vgl. die Definition in den Gln. (2.99), (2.99′). Dieses Differential wirke auf eine Funktion mit gleicher Abhängigkeit von x, $\bar{x}$ und y, $\bar{y}$ wie

$$\begin{aligned} &\langle\, V_+ V_+^\dagger V_- V_-^\dagger \,\rangle_A \qquad\qquad (C.13)\\ &\equiv \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_+(\infty, x^-, \mathbf{x})\, V_+^\dagger(\infty, \bar{x}^-, \bar{\mathbf{x}})\right]\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_-(y^+, \infty, \mathbf{y})\, V_-^\dagger(\bar{y}^+, \infty, \bar{\mathbf{y}})\right] \,\rangle_A \end{aligned}$$

Wir beziehen uns gegenüber Gl. (2.110) auf den nichttrivialen Ausdruck in Bezug auf die Abhängigkeit von x, $\bar{x}$ und y, $\bar{y}$ und lassen weg die Einsen bezüglich der Eichgruppe.

Wir betrachten separat das Exponential in Gl. (C.12) und drücken die Impulse der (Anti)Quarks aus durch die der Zustände $h^i(P_i)$ und die Bruchteile z_i der Quarks an den „großen“ Lichtkegelimpulsen, vgl. die Gln. (2.42), (2.42′) und (2.43):

$$\begin{aligned} \exp \mathrm{i}\Big[\, \cdots \,\Big] \;=\; \exp \mathrm{i}\Big[\quad & g_{+-} \left((P_{1'}^+ - P_1^+)\bar{x}^- + (P_{2'}^- - P_2^-)\bar{y}^+ \right) \qquad (C.14)\\ & + g_{+-} \left(+ (z_{1'} P_{1'}^+ - z_1 P_1^+) X^- + (z_{2'} P_{2'}^- - z_2 P_2^-) Y^+ \right) \\ & - \Big((\mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{k}_{2'} - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{Y} \Big) \\ & - \Big((z_{1'}\mathbf{P}_{1'} - z_1 \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{x} + (\bar{z}_{1'}\mathbf{P}_{1'} - \bar{z}_1 \mathbf{P}_1) \cdot \bar{\mathbf{x}} \\ & \quad + (z_{2'}\mathbf{P}_{2'} - z_2 \mathbf{P}_2) \cdot \mathbf{y} + (\bar{z}_{2'}\mathbf{P}_{2'} - \bar{z}_2 \mathbf{P}_2) \cdot \bar{\mathbf{y}} \Big) \;\Big] \end{aligned}$$

unter Definition durch

$$X \;=\; x \,-\, \bar{x} \qquad \text{und} \qquad Y \;=\; y \,-\, \bar{y} \qquad\qquad (C.15)$$

der Vierer-Differenzvektoren X, Y.

Longitudinal. Wir betrachten zunächst die Koordinatentransformation der longitudinalen Komponenten. Sei sie vermittelt durch die 4×4-Matrix $\mathbf{A}_L$:

$$\begin{pmatrix} x^- \\ \bar{x}^- \\ y^+ \\ \bar{y}^+ \end{pmatrix} \quad \xrightarrow{\mathbf{A}_L} \quad \begin{pmatrix} x^- \\ X^- \\ y^+ \\ Y^+ \end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_L \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (C.16)$$

Als obere Dreieckmatrix folgt für die Jacobi-Determinante der Transformation unmittelbar

$$\frac{\partial(X^-, x^-, Y^+, y^+)}{\partial(x^-, \bar{x}^-, y^+, \bar{y}^+)} \;=\; \det \mathbf{A}_L \;=\; 1 \qquad\qquad (C.17)$$

Die neuen Koordinaten sind insbesondere *linear unabhängig*.

Translationsinvarianz des Vakuumerwartungswertes $\langle\, \cdot \,\rangle_A$ impliziert für Gl. (C.13)

$$\begin{aligned} &\langle\, V_+ V_+^\dagger V_- V_-^\dagger \,\rangle_A \qquad\qquad (C.18)\\ &\equiv \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_+(\infty, X^-, \mathbf{x})\, V_+^\dagger(\infty, 0, \bar{\mathbf{x}})\right]\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_-(Y^+, \infty, \mathbf{y})\, V_-^\dagger(0, \infty, \bar{\mathbf{y}})\right] \,\rangle_A \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $\langle\, V_+ V_+^\dagger V_- V_-^\dagger \,\rangle_A$ longitudinal bezüglich der neuen Variablen abhängt nur von X^- und Y^+. Nach Substitution

$$X'^- \;=\; P_1^+ X^- \qquad \text{und} \qquad Y'^+ \;=\; P_2^- Y^+ \qquad\qquad (C.19)$$

treten auf in Gl. (C.18) statt X^-, Y^+ respektive die Variablen $(P_1^+)^{-1} X'^-$, $(P_2^-)^{-1} Y'^+$. Diese verschwinden im Limes $s \to \infty$, für den gilt P_1^+, $P_2^- \to \infty$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\langle\, V_+ V_+^\dagger V_- V_-^\dagger \,\rangle_A \qquad\qquad (C.20)\\ &\equiv \langle\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_+(\infty, 0, \mathbf{x})\, V_+^\dagger(\infty, 0, \bar{\mathbf{x}})\right]\, \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_-(0, \infty, \mathbf{y})\, V_-^\dagger(0, \infty, \bar{\mathbf{y}})\right] \,\rangle_A \end{aligned}$$

unabhängig von den longitudinalen Variablen.

Konsequenz ist, daß die Terme der Exponentialfunktion in Gl. (C.14) mit X^-, x^- und Y^+, y^+ ausintegriert werden können. Die erste Zeile ergibt die Delta-Distributionen

$$2\pi(g_{+-})^{-1}\cdot\delta(P_{1'}^+ - P_1^+) \qquad \text{und} \qquad 2\pi(g_{+-})^{-1}\cdot\delta(P_{2'}^- - P_2^-) \tag{C.21}$$

und hiermit die zweite Zeile:

$$2\pi\,(g_{+-}\,P_1^+)^{-1}\cdot\delta(z_{1'}-z_1) \qquad \text{und} \qquad 2\pi\,(g_{+-}\,P_2^-)^{-1}\cdot\delta(z_{2'}-z_2) \tag{C.22}$$

Transversal. Die Delta-Distributionen in Gl. (C.22) haben Konsequenzen für die transversalen Komponenten. Die Terme der Exponentialfunktion von Gl. (C.14) in der dritten bis fünften Zeile schreiben sich:

$$\begin{aligned}
&\exp\left[\ \cdots\ \right]\Big|_T \\
&= \exp\,\mathrm{i}\left[(\mathbf{k}_{1'}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{X} + (\mathbf{k}_{2'}-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{Y} \;+\; (\mathbf{P}_{1'}-\mathbf{P}_1)\cdot\mathbf{X}_z + (\mathbf{P}_{2'}-\mathbf{P}_2)\cdot\mathbf{Y}_z\right] &\text{(C.23)}\\
&= \exp\,\mathrm{i}\left[(\mathbf{k}_{1'}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{X} + (\mathbf{k}_{2'}-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{Y} \;+\; \tau\cdot(\mathbf{X}_z-\mathbf{Y}_z) - \mathbf{P}\cdot\mathbf{Y}_z\right] &\text{(C.23}')
\end{aligned}$$

Dabei definieren wir z_i-gewichtete Differenzvektoren

$$X_z \;=\; z_1\,x \;+\; \bar z_1\,\bar x \qquad \text{und} \qquad Y_z \;=\; z_2\,y \;+\; \bar z_2\,\bar y \tag{C.24}$$

und in Gl. (C.23′) zusätzlich die Vierer-Impulse

$$P \;=\; (P_{1'}+P_{2'}) - (P_1+P_2) \qquad \text{und} \qquad \tau \;=\; P_{1'} - P_1 \tag{C.25}$$

Es ist P der Differenzimpuls zwischen den ein- und auslaufenden Zuständen, wie definiert in Gl. (2.20), τ der Vierer-Impulsübertrag, dessen Quadrat identisch der Invarianten t nach Mandelstam ist: $\tau^2 = t$, vgl. Gl. (2.19).

In Gl. (C.23′) werden identifiziert $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z$, $\mathbf{Y}_z$ als die relevanten transversalen Variablen. Sie werden vermittelt durch die 8×8-Matrix $\mathbf{A}_T$:

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \bar{\mathbf{x}}\\ \mathbf{y}\\ \bar{\mathbf{y}}\end{pmatrix} \quad\xrightarrow{\mathbf{A}_T}\quad \begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\\ \mathbf{X}_z-\mathbf{Y}_z\\ \mathbf{Y}_z\end{pmatrix} \qquad \mathbf{A}_T \;=\; \begin{pmatrix} \mathbb{1} & -\mathbb{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbb{1} & \mathbf{0}\\ z_1\mathbb{1} & \bar z_1\mathbb{1} & -z_2\mathbb{1} & -\bar z_1\mathbb{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & z_2\mathbb{1} & \bar z_1\mathbb{1}\end{pmatrix} \tag{C.26}$$

in Termen von 2×2-Matrizen. Die Jacobi-Determinante der Transformation ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{X},\mathbf{Y},\mathbf{X}_z-\mathbf{Y}_z,\mathbf{Y}_z)}{\partial(\mathbf{x},\bar{\mathbf{x}},\mathbf{y},\bar{\mathbf{y}})} \;&=\; \det\,\mathbf{A}_T &\text{(C.27)}\\
&=\; \det\begin{pmatrix} z_1\mathbb{1} & \bar z_1\mathbb{1}\\ \mathbb{1} & -\mathbb{1}\end{pmatrix}\cdot\det\begin{pmatrix} z_2\mathbb{1} & \bar z_2\mathbb{1}\\ \mathbb{1} & -\mathbb{1}\end{pmatrix} \;=\; 1
\end{aligned}$$

Die neuen Koordinaten sind insbesondere *linear unabhängig*.

Für die Inverse der Matrix $\mathbf{A}_T$ folgt:

$$\mathbf{A}_T{}^{-1} \;=\; \begin{pmatrix} \bar z_1\mathbb{1} & \mathbf{0} & \mathbb{1} & \mathbb{1}\\ -z_1\mathbb{1} & \mathbf{0} & \mathbb{1} & \mathbb{1}\\ \mathbf{0} & \bar z_2\mathbb{1} & \mathbf{0} & \mathbb{1}\\ \mathbf{0} & -z_2\mathbb{1} & \mathbf{0} & \mathbb{1}\end{pmatrix} \tag{C.28}$$

Der Vierer-Impakt b der Streuung ist definiert als der zum Vierer-Impulsübertrag τ – vgl. Gl. (C.25) – Fourier-konjugierte Vektor; aus Gl. (C.23′) lesen wir ab:

$$b \;=\; X_z - Y_z \;=\; (z_1\,x + \bar z_1\,\bar x) - (z_2\,y + \bar z_2\,\bar y) \tag{C.29}$$

und definieren

$$\omega \;=\; (X_z + Y_z)/2 \;=\; \big((z_1\,x + \bar z_1\,\bar x) + (z_2\,y + \bar z_2\,\bar y)\big)/2 \tag{C.30}$$

Die Transversalprojektionen der (Anti-)Quark-Koordinaten in den Ortsraum folgen mithilfe von ${\mathbf{A}_T}^{-1}$; es folgt für die „plus"-Zustände (Index 1):

$$\mathbf{x} = \bar{z}_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2 + \omega \tag{C.31}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = -z_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2 + \omega \tag{C.31'}$$

für „minus"-Zustände (Index 2):

$$\mathbf{y} = \bar{z}_2 \mathbf{Y} - \mathbf{b}/2 + \omega \tag{C.32}$$

$$\bar{\mathbf{y}} = -z_2 \mathbf{Y} - \mathbf{b}/2 + \omega \tag{C.32'}$$

Mit $(\mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z) + \mathbf{Y}_z = \mathbf{b}/2 + \omega$, $\mathbf{Y}_z = -\mathbf{b}/2 + \omega$ folgt ω als global additiver Term, der o.E.d.A. weggelassen wird[C.1]:

$$\begin{aligned} \langle V_+ V_+^\dagger V_- V_-^\dagger \rangle_A \equiv\ & \langle \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_+(\infty, 0, \bar{z}_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2)\, V_+^\dagger(\infty, 0, -z_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2) \right] \\ & \times \mathrm{tr}_{\mathfrak{F}} \left[V_-(0, \infty, \bar{z}_2 \mathbf{Y} - \mathbf{b}/2)\, V_-^\dagger(0, \infty, -z_2 \mathbf{Y} - \mathbf{b}/2) \right] \rangle_A \end{aligned} \tag{C.33}$$

aufgrund der Translationsinvarianz des Vakuumerwartungswertes $\langle \cdot \rangle_A$.

Wir fassen das Resultat der Koordinatentransformationen von Gl. (C.16) und (C.26) zusammen. Im Limes $s \to \infty$ gilt $P_{1'}^+ - P_1^+ = P^+$ und $P_{2'}^- - P_2^- = P^-$, vgl. die Gln. (C.14), (C.23), so daß für das Differential nach Gl. (C.12) folgt

$$\begin{aligned} & d_{1'1}(x^-, \mathbf{x})\, d_{\bar{1}'\bar{1}}(\bar{x}^-, \bar{\mathbf{x}})\, d_{2'2}(y^+, \mathbf{y})\, d_{\bar{2}'\bar{2}}(\bar{y}^+, \bar{\mathbf{y}}) \\ & \underset{s \to \infty}{\sim} 2\sqrt{z_{1'} P_{1'}^+ z_1 P_1^+}\ 2\sqrt{\bar{z}_{1'} P_{1'}^+ \bar{z}_1 P_1^+}\ 2\sqrt{z_{2'} P_{2'}^- z_2 P_2^-}\ 2\sqrt{\bar{z}_{2'} P_{2'}^+ \bar{z}_2 P_2^-} \\ & \quad \times (g_{+-})^4\ dX^-\, dY^+\, d\bar{x}^-\, d\bar{y}^+\ d^2\mathbf{X}\, d^2\mathbf{Y}\, d^2(\mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z)\, d^2\mathbf{Y}_z \\ & \quad \times \exp \mathrm{i} \big[g_{+-} \big(P_1^+ (z_{1'} - z_1) X^- + P_2^- (z_{2'} - z_2) Y^+ + P^+ \bar{x}^- + P^- \bar{y}^+ \big) \\ & \qquad - \big((\mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{X} + (\mathbf{k}_{2'} - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{Y} - \tau \cdot (\mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z) + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Y}_z \big) \big] \end{aligned} \tag{C.34}$$

Dieses ist zu beziehen auf eine Funktion, die abhängt *longitudinal* von X^-, Y^+, $\bar{x}^-$, $\bar{y}^+$ und *transversal* von $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z$, $\mathbf{Y}_z$ in derselbe Weise wie $\langle V_+ V_+^\dagger V_- V_-^\dagger \rangle_A$ in Gl. (C.33), – einschließlich der Eichgruppen-Einsen im ursprünglichen Vakuumerwartungswert.

Die Integrationen der longitudinalen Variablen sind daher nur zu beziehen auf das Exponential: Integration von X^-, Y^+ ergibt Gl. (C.22): Delta-Distributionen in $(z_{1'} - z_1)$, respektive in $z_{2'} - z_2$. Integration von $\bar{x}^-$, $\bar{y}^+$ ergibt Erhaltung des *longitudinalen* Gesamtimpulses: Delta-Distributionen in P^+, P^-. Integration über $\mathbf{Y}_z$ schließlich ist im selben Sinne frei und ergibt Erhaltung des *transversalen* Gesamtimpulses: $\delta(\mathbf{P})$.

Wir benutzen die Implikationen dieser Delta-Distributionen für die Wurzelausdrücke, setzen $\mathbf{b} = \mathbf{X}_z - \mathbf{Y}_z$ nach Definition in Gl. (C.29) und erhalten für Gl. (C.34) weiter

$$\begin{aligned} & d_{1'1}(x^-, \mathbf{x})\, d_{\bar{1}'\bar{1}}(\bar{x}^-, \bar{\mathbf{x}})\, d_{2'2}(y^+, \mathbf{y})\, d_{\bar{2}'\bar{2}}(\bar{y}^+, \bar{\mathbf{y}}) \\ & \underset{s \to \infty}{\sim} 2^4\ z_1 \bar{z}_1 (P_1^+)^2\ z_2 \bar{z}_2 (P_2^-)^2\ (g_{+-})^4 \\ & \quad \times (2\pi)^6\ (g_{+-})^{-4}\ (P_1^+ P_2^-)^{-1}\ \delta(z_{1'} - z_1)\, \delta(z_{2'} - z_2)\ \delta(P^+)\, \delta(P^-)\, \delta(\mathbf{P}) \\ & \quad \times d^2\mathbf{b} \exp\left[-\mathrm{i}\, \tau \cdot \mathbf{b} \right]\ d^2\mathbf{X} \exp\left[-\mathrm{i}\, (\mathbf{k}_{1'} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{X} \right]\ d^2\mathbf{Y} \exp\left[-\mathrm{i}\, (\mathbf{k}_{2'} - \mathbf{k}_2) \cdot \mathbf{Y} \right] \end{aligned} \tag{C.35}$$

Es gilt im Limes $s \to \infty$:

$$2\, P_1^+ P_2^- \underset{s \to \infty}{\sim} (g_{+-})^{-1}\ s \tag{C.36}$$

$$\delta(P^+)\, \delta(P^-) \underset{s \to \infty}{\sim} g_{+-}\ \delta(P^0)\, \delta(P^3) \tag{C.37}$$

[C.1] Dies entspricht Wahl von $\omega = (X_z + Y_z)/2$ als Koordinatenursprung; i.a. wird nicht a priori $\omega \equiv 0$ gesetzt.

Folglich:

$$d_{1'1}(x^-, \mathbf{x})\;\; d_{\bar{1}'\bar{1}}(\bar{x}^-, \bar{\mathbf{x}})\;\; d_{2'2}(y^+, \mathbf{y})\;\; d_{\bar{2}'\bar{2}}(\bar{y}^+, \bar{\mathbf{y}}) \tag{C.38}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{s\to\infty}{\sim}\;\; \mathrm{i}\,(2\pi)^4\;\delta(P) \\
&\quad\times\;(-2\mathrm{i}\,s)\;\; d^2\mathbf{b}\,\exp\left[-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}\right] \\
&\quad\times\;2\pi\,\delta(z_{1'}-z_1)\;\; 2z_1\bar{z}_1\;\; d^2\mathbf{X}\;\; \exp\left[-\mathrm{i}\,(\mathbf{k}_{1'}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{X}\right] \\
&\quad\times\;2\pi\,\delta(z_{2'}-z_2)\;\; 2z_2\bar{z}_2\;\; d^2\mathbf{Y}\;\; \exp\left[-\mathrm{i}\,(\mathbf{k}_{2'}-\mathbf{k}_2)\cdot\mathbf{Y}\right]
\end{aligned}$$

in Termen der relevanten Transversalvektoren $\mathbf{b}$ und $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$.

In Gl. (2.109) steht das Differential $d_{1'1}d_{\bar{1}'\bar{1}}d_{2'2}d_{\bar{2}'\bar{2}}$ des Vakuumerwartungswerts der vier Wegner-Wilson-Linien $\langle\, V_+V_+^\dagger V_-V_-^\dagger\,\rangle_A$ – einschließlich der Einsen der Eichgruppe – unter den Integralen[C.2]

$$\prod_{i=1,2}\;\int d\tilde{\varphi}^{i'\dagger}_{s_{i'\bar{s}_{i'}}}(z_{i'}, \mathbf{k}_{i'})\;\int d\tilde{\varphi}^{i}_{s_{i\bar{s}_i}}(z_i, \mathbf{k}_i) \tag{C.39}$$

die implizieren die Lichtkegelwellenfunktionen der hadronischen Zustände; zur Definition der $d\tilde{\varphi}^{i}_{s_{i\bar{s}_i}}(z_i, \mathbf{k}_i)$ vgl. Gl. (2.108). Für $i=1,\,2$ und $\mathbf{Z}$ summarisch für $\mathbf{X}$ oder $\mathbf{Y}$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\int d\tilde{\varphi}^{i'\dagger}_{s_{i'\bar{s}_{i'}}}(z_{i'}, \mathbf{k}_{i'})\;\;\int d\tilde{\varphi}^{i}_{s_{i\bar{s}_i}}(z_i, \mathbf{k}_i) \\
&\qquad\qquad\times\;2\pi\,\delta(z_{1'}-z_1)\;2z_1\bar{z}_1\;\;\int d^2\mathbf{Z}\;\exp\left[-\mathrm{i}\,(\mathbf{k}_{1'}-\mathbf{k}_1)\cdot\mathbf{Z}\right] \\
&=\;\int d^2\mathbf{Z}\int_0^1\frac{dz_i}{2\pi}\left(\int\frac{d^2\mathbf{k}_{i'}}{(2\pi)^2}\;\exp\left[\mathrm{i}\,\mathbf{k}_{i'}\cdot\mathbf{Z}\right]\;\sqrt{2z_i\bar{z}_i}\;\;\tilde{\varphi}^{i'}_{s_{i\bar{s}_i}}(z_i, \mathbf{k}_{i'})\right)^\dagger \\
&\qquad\qquad\times\left(\int\frac{d^2\mathbf{k}_i}{(2\pi)^2}\;\exp\left[\mathrm{i}\,\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{Z}\right]\;\sqrt{2z_i\bar{z}_i}\;\;\tilde{\varphi}^{i}_{s_{i\bar{s}_i}}(z_i, \mathbf{k}_i)\right)
\end{aligned} \tag{C.40}$$

$$=\;\int d^2\mathbf{Z}\int_0^1\frac{dz_i}{2\pi}\;\varphi^{i'\dagger}_{s_{i\bar{s}_i}}(z_i, \mathbf{Z})\;\;\varphi^{i}_{s_{i\bar{s}_i}}(z_i, \mathbf{Z}) \tag{C.40$'$}$$

unter Absorption von Faktoren $\sqrt{2z_i\bar{z}_i}$ in die transversal Fourier-transformierten Lichtkegelwellenfunktionen $\varphi^i_{s_{i\bar{s}_i}}$, vgl. deren Definition in Gl. (2.48).

Wir definieren das Integrationsmaß

$$d\varphi_{i',i}(z, \mathbf{Z})\;\equiv\;d^2\mathbf{Z}\;\;\frac{dz}{2\pi}\;\;\varphi^{i'\dagger}_{s\bar{s}}(z, \mathbf{Z})\;\;\varphi^{i}_{s\bar{s}}(z, \mathbf{Z})\qquad\qquad i=1,2 \tag{C.41}$$

das gewichtet entsprechend dem Überlapp $\varphi_{s\bar{s}}^{i'\dagger}\varphi^i_{s\bar{s}}$ der Lichtkegelwellenfunktionen; Summation über die Spins von Quark und Antiquark sei impliziert. Dann gilt für das S-Matrixelement in conclusio:

$$\langle\, h^{2'}(P_{2'})\, h^{1'}(P_{1'}),\,\mathrm{in}\,|\,S\,|\,h^1(P_1)\, h^2(P_2),\,\mathrm{in}\,\rangle \tag{C.42}$$

$$\begin{aligned}
&\underset{s\to\infty}{\sim}\;\mathrm{i}\,(2\pi)^4\;\delta(P) \\
&\times\,-2\mathrm{i}\,s\int d^2\mathbf{b}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\tau\cdot\mathbf{b}}\;\int d\varphi_{1',1}(z_1, \mathbf{X})\int d\varphi_{2',2}(z_2, \mathbf{Y}) \\
&\times\,\langle\,\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\left[Z_2^{-1}\big(V_+(\infty, 0, \bar{z}_1\mathbf{X}+\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\;\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\;Z_2^{-1}\big(V_+^\dagger(\infty, 0, -z_1\mathbf{X}+\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\;\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\right] \\
&\quad\times\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}}\left[Z_2^{-1}\big(V_-(0, \infty, \bar{z}_2\mathbf{Y}-\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\;\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\;Z_2^{-1}\big(V_-^\dagger(0, \infty, -z_2\mathbf{Y}-\mathbf{b}/2)-\delta Z_2\;\mathbb{1}_{\mathfrak{F}}\big)\right]\,\rangle_A
\end{aligned}$$

Dies ist genau Gl. (2.111).

[C.2] also insgesamt von Dimension Zwölf

Anhang D

Aktive Lorentz-Boosts [D.1]

Zwei Inertialsysteme I und I' können differieren bezüglich zehn Parametern: bezüglich einer Verschiebung zeitlich um a^0, räumlich um $\vec{a}$, einer Drehung um $\vec{\alpha}$ und einer gleichförmigen Bewegung mit Geschwindigkeit $\vec{v}$.

Wir betrachten spezielle orthochrone Lorentz-Transformationen: Elemente der Eins-Zusammenhangkomponente der Lorentz-Gruppe $\mathcal{L}_+^\uparrow$, – charakterisiert durch $(a^0, \vec{a}^{\,t}) \equiv 0$ und für kontravariante Komponenten vermittelt durch pseudo-orthogonale Matrizen $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu)$, $\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$, im Sinne $\Lambda^t\, g\, \Lambda = g$, das heißt $g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma}$, mit $\Lambda^0{}_0 > 0$, $\det \Lambda \equiv +1$.

D.1 Lorentz-Boosts

Als *Lorentz-Boost* wird bezeichnet die reine Geschwindigkeitstransformation, die keine Drehung enthält: $\vec{\alpha} \equiv \vec{0}$. Sei $\vec{\beta} = \vec{v}/c$ die Boost-, das heißt Dreier-Geschwindigkeit von I' gemessen in I. Dann besteht zwischen den ungestrichenen und gestrichenen Komponneten eines beliebigen Lorentz-(Spalten)Vektors $x \equiv (x^\mu) \equiv (x^{\mu'})$ der Zusammenhang:[D.2]

$$x^{\mu'} \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu \; x^\nu \qquad \mu,\, \nu \in \{0,1,2,3\} \tag{D.1}$$

$$\Lambda = \; (\Lambda^\mu{}_\nu) = \; \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\, \vec{\beta}\, t \\ -\gamma\, \vec{\beta} & \mathbb{1} \;+\; \dfrac{\gamma^2}{\gamma+1}\, \vec{\beta}\, \vec{\beta}\, t \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

mit

$$\gamma \equiv \gamma(\beta) \;=\; 1/\sqrt{1-\beta^2} \qquad \beta \;=\; |\vec{\beta}| \tag{D.3}$$

Sei im folgenden die x^3-Achse gewählt in Boost-Richtung: $\vec{\beta} = \beta\,(0,0,1)^t$, so daß gilt:[D.3]

$$\Lambda \;=\; (\Lambda^\mu{}_\nu) \;=\; \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\,\beta \\ -\gamma\,\beta & \gamma \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \tag{D.4}$$

[bzgl. ψ vgl. die Gln. (D.12), (D.13)]. Mit Konvention des Beta-Parameters β als positiv – das heißt $\beta \in [0,1)$ – wird Umkehrung der Boost-Richtung realisiert durch Substitution $\beta \to -\beta$.

Wir bedienen uns des *Minkowski-Diagramms* als wichtigem Instrument für Argumentation und Anschauung. Wir rekapitulieren: Gl. (D.1) mithilfe (D.4) lautet explizit:

$$x^{0'} \;=\; \gamma\,\left(x^0 - \beta\, x^3\right) \tag{D.5}$$

$$x^{3'} \;=\; \gamma\,\left(-\beta\, x^0 + x^3\right) \tag{D.5'}$$

[D.1] Diesem Anhang zugrunde liegen die Konventionen bzgl. der Lorentz-Algebra von Anh. A.1, speziell bzgl. Lichtkegelkoordinaten von Anh. A.1.2. Bzgl. der einführenden Abschnitte vgl. Ref. [147], insbes. Ref. [188].

[D.2] Es ist $\vec{\beta}$ der dreidimensionale Spalten-Vektor, $\mathbb{1}$ die 3×3-Matrix und mit t bezeichnet Transposition.

[D.3] Es sind ausgeschrieben nur die longitudinalen Komponenten; die transversalen transformieren trivial.

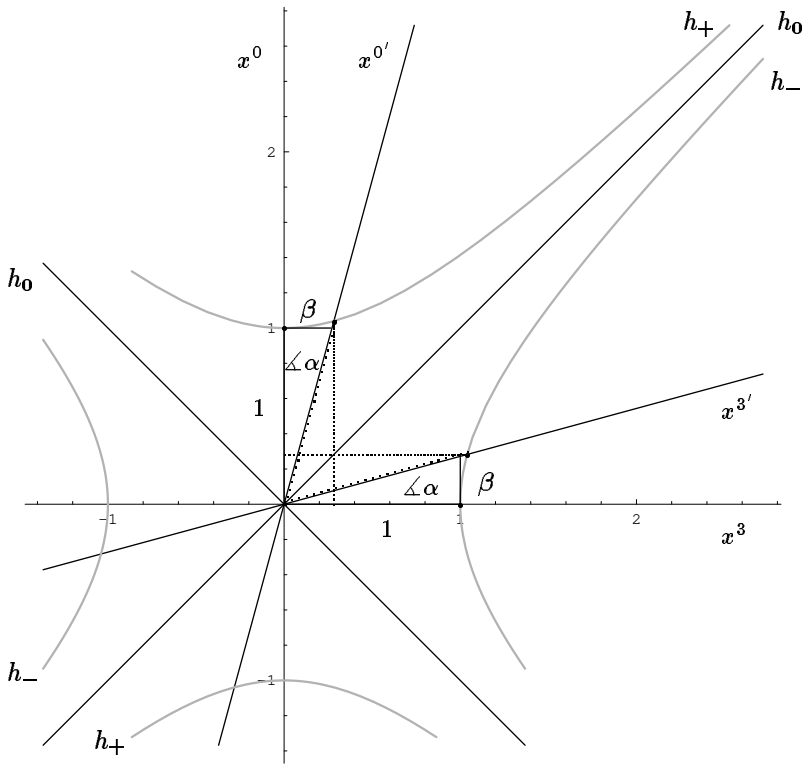


Abbildung D.1: Minkowski-Diagramm: Allgemeiner Lorentz-Boost. Sei I Inertialsystem mit Achsen x^0, x^3. Relativ zu I und gemessen in I bewege sich gleichförmig mit Geschwindigkeit $\beta \in [0,1)$ in positive x^3-Richtung das Bezugsystem I', das ergo auch Inertialsystem ist. Seine Achsen $x^{0'}$, $x^{3'}$ besitzen dann bezüglich der Achse x^3 Steigung β^{-1} bzw. β: Sie sind hineingedreht in den 1. Quadranten um den Winkel $-\alpha$ bzw. α mit Definition $\tan\alpha := \beta$. Die Einsen der Achsen folgen als deren Schnittpunkte mit den zeit- bzw. raumartigen Hyperboloiden [h_+ bzw. h_-, grau]: Der Eins-Abschnitt auf $x^{0'}$ ist größer als der auf x^0 – Zeitdilatation, der Eins-Abschnitt auf $x^{3'}$ ist größer bzgl. x^3 – Längenkontraktion [weit vs. eng punktiert]. Für $\beta \to 1$ folgt $\alpha \to 45°$, das heißt die Achsen approximieren simultan die erste Winkelhalbierende – den „Lichtkegel" h_0 –, und ihre Einsen gemessen in I gehen gegen Unendlich. Umkehrung der Boost-Richtung in negative x^3-Richtung geschieht durch Substitution $\beta \to -\beta$, so daß $\alpha \to -\alpha$. Vgl. Text und Fußn. D.4.

Die $x^{3'}$-Achse ist charakterisiert durch verschwindende Zeitkomponente in I': $x^{0'} \stackrel{!}{=} 0$, das heißt $x^0(x^3) = \beta\, x^3$, entsprechend die $x^{0'}$-Achse durch $x^{3'} \stackrel{!}{=} 0$, das heißt $x^0(x^3) = \beta^{-1}\, x^3$. Im Minkowski-Diagramm mit x^0- der vertikalen und x^3- der horizontalen Achse – vgl. Abb. D.1 – sind dies Geraden der Steigung β und β^{-1}, die gegenüber den Achsen x^0 und x^3 verdreht sind in den ersten Quadranten, um den Winkel $-\alpha$ beziehungsweise α, der definiert ist durch

$$\tan\alpha := \beta \tag{D.6}$$

mit $\alpha \in [0, \pi/4)$ für $\beta \in [0,1)$. Für wachsende Boost-Geschwindigkeit: $\beta \to 1$, gilt $\alpha \to 45°$, das heißt die positiven Abschnitte der Achsen $x^{0'}$ und $x^{3'}$ nähern sich simultan an dem positiven Abschnitt der ersten Winkelhalbierenden.[D.4] Der Grenzwert selbst ist daher singulär.

[D.4] Zur Umkehrung des Boosts in negative x^3-Richtung ist zu substituieren $\beta \to -\beta$, folglich $\alpha \to -\alpha$: Die Achsen $x^{0'}$ und $x^{3'}$ sind hineingedreht in den 2. bzw. 4. Quadranten; für $\beta \to 1$ nähern sich so ihre positiven Abschnitte simultan an dem positiven bzw. negativen Abschnitt der zweiten Winkelhalbierenden.

Werde $x \equiv (x^\mu) \equiv (x^{\bar\mu})$ aufgefaßt als Differenzvektor von Ereignissen in $(x^0, x^3) \simeq (x^{0'}, x^{3'})$ und $(0,0)$. Dann ist sein Lorentz-Quadrat invariant *per definitionem*:

$$(x^0)^2 - (x^3)^2 \;=\; (x^{0'})^2 - (x^{3'})^2 \;=:\; c \tag{D.7}$$

Sei betrachtet x^0 als Funktion von x^3, das heißt: $x^0(x^3) = \pm\sqrt{c + (x^3)^2}$. Das Vorzeichen der Invarianten c bestimmt drei Klassen von Ereignissen bezüglich $(0,0)$. Seien entsprechend für $c = +1,\ -1$ und 0 definiert die Hyperboloide:

$$h_+(x^3) \;:=\; \pm\sqrt{+1 + (x^3)^2} \tag{D.8}$$

$$h_-(x^3) \;:=\; \pm\sqrt{-1 + (x^3)^2} \tag{D.8'}$$

$$h_{\mathbf{0}}(x^3) \;:=\; \pm\sqrt{0 + (x^3)^2} \;=\; \pm\,|x^3| \tag{D.8''}$$

Dann liegen die von $(0,0)$ mit „Abstand Eins" separierten Weltpunkte $x/\sqrt{|c|}$ auf h_+ bei zeitartiger, auf h_- bei raumartiger Separation [$c>0$ bzw. $c<0$]; die mit „Abstand Null" – lichtartig – separierten Weltpunkte liegen auf $h_{\mathbf{0}}$ [$c=0$]. Die Einsen der $x^{0'}$- und $x^{3'}$-Achsen sind folglich gegeben als deren Schnittpunkte mit h_+ beziehungsweise h_-. Konsequenz sind *Zeitdilatation* und *Längenkontraktion* in einem relativ bewegten Bezugsystem, vgl. Abb. D.1: Die Eins-Abschnitte von $x^{0'}$ und $x^{3'}$ in I' sind länger als Eins in I für alle $\beta > 0$ [vgl. die vertikale bzw. horizontale *eng* versus entsprechende *weit* gepunktete Strecke im Sinne achsenparalleler Projektionen]. – Dabei heißt Längenmessung *per definitionem* Bestimmung der Endpunke *zu derselben Zeit*, das heißt: $x^0 = const.$ in I und $x^{0'} = const.$ in I'.

Neben der graphischen Darstellung von Lorentz-Boosts im Minkowski-Diagramm ist von Vorteil ihre Formulierung in Lichtkegelkoordinaten. Gl. (D.1) schreibt sich äquivalent:

$$x^{\bar\mu'} \;=\; \Lambda^{\bar\mu}{}_{\bar\nu}\, x^{\bar\nu} \qquad \bar\mu,\ \bar\nu \in \{+,-,1,2\} \tag{D.9}$$

Die Komponenten der Matrix $\bar\Lambda \equiv (\Lambda^{\bar\mu}{}_{\bar\nu})$, $\bar\mu, \bar\nu \in \{+,-,1,2\}$, werden berechnet wie folgt:

$$x^{\pm'} \;=\; \alpha\left(x^{0'} \pm x^{3'}\right) \;=\; \alpha\left(\gamma(x^0 - \beta\, x^3) \;\pm\; \gamma(-\beta\, x^0 + x^3)\right) \tag{D.10}$$

$$\;=\; \gamma(1 \mp \beta)\cdot \alpha\left(x^0 \pm x^3\right) \tag{D.10'}$$

$$\;=\; \gamma(1 \mp \beta)\cdot x^{\pm} \;=\; \exp \mp\psi \cdot x^{\pm} \tag{D.10''}$$

die letzte Identiät aufgrund $\gamma(1\mp\beta) = \left[(1+\beta)/(1-\beta)\right]^{\mp 1/2}$ und Definition:

$$\psi \;:=\; \frac{1}{2}\,\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \;=\; \operatorname{artanh}\beta \tag{D.11}$$

$$\text{d.h.} \qquad \beta \;=\; \tanh\,\psi \quad = \mathrm{i}\,\tan -\mathrm{i}\psi \tag{D.11'}$$

mit $\psi \in [0, +\infty)$ für $\beta \in [0,1)$. In Hinblick auf Gl. (D.6) wird ψ bezeichnet als der *hyperbolische Winkel* des Lorentz-Boosts. Aus $\beta = \tanh\psi$ folgt, vgl. Gl. (D.3):

$$\gamma \quad = 1/\sqrt{1-\beta^2} \;=\; [1 - \tanh^2\psi]^{-1/2} \;=\; \cosh\psi \tag{D.12}$$

folglich:

$$\gamma\,\beta \;=\; \cosh\psi\,\tanh\psi \qquad\qquad = \sinh\psi \tag{D.13}$$

Zusammenfassend gilt:

$$\bar\Lambda \;\equiv\; (\Lambda^{\bar\mu}{}_{\bar\nu}) \;=\; \begin{pmatrix} \gamma(1-\beta) & 0 \\ 0 & \gamma(1+\beta) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} \exp -\psi & 0 \\ 0 & \exp +\psi \end{pmatrix} \tag{D.14}$$

Die Matrix $\bar\Lambda \equiv (\Lambda^{\bar\mu}{}_{\bar\nu})$ ist diagonal – insofern Lorentz-Boosts besonders einfach in Lichtkegelkoordinaten. Unter Umkehrung der Boost-Richtung, $\beta \to -\beta$, vertauschen x^+ und x^- ihre Rollen. Mit $\det\bar\Lambda = 0$ für $\pm\beta = 1$ ist dokumentiert die Singularität des Grenzwerts.

D.2 Aktive versus passive Transformation

Der soweit diskutierten *passiven* Auffassung von Lorentz-Transformationen steht gegenüber die *aktive* Auffassung, die unserer Diskussion im Haupttext zugrunde liegt. Wir konfrontieren beide Auffassungen, beziehen uns dabei weiterhin o.E.d.A. auf Vierer-Vektoren.

Sei $\{e_{(\mu)}\}$ eine orthogonale Basis des Minkowski-Raumes, das heißt ihre Vektoren normiert gemäß:

$$e_{(\mu)} \cdot e_{(\nu)} \;=\; g_{\mu\nu} \qquad \mu,\, \nu \in \{0,1,2,3\} \tag{D.15}$$

mit $\left(g_{\mu\nu}\right) = \mathrm{diag}[+1,-1,-1,-1]$ dem metrischen Tensor, vgl. die Gln. (A.4), (A.10).

Passive Transformation heißt – wir rekapitulieren Gl. (D.1) –, ein und denselben Vektor x zu betrachten bezüglich zweier Inertialsysteme I und I'. Bezüglich deren Basen $\{e_{(\mu)}\}$ und $\{e'_{(\mu)}\}$ besitze er Komponenten x^μ beziehungsweise $x^{\mu'}$, wir schreiben: $x \equiv (x^\mu) \equiv (x^{\bar{\mu}})$. Es gilt:

$$x \;=\; x^\mu\, e_{(\mu)} \;\stackrel{!}{=}\; x^{\mu'}\, e'_{(\mu)} \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu\, e'_{(\mu)} \tag{D.16}$$

mit der letzten Identität aufgrund $x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$, vgl. Gl. (D.1). Folglich:

$$e_{(\nu)} \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\, e'_{(\mu)} \tag{D.17}$$

Sei die Matrix $\left(\Lambda_\mu{}^\nu\right)$ definiert durch die hierzu inverse Relation:

$$e'_{(\mu)} \;=:\; \Lambda_\mu{}^\nu\, e_{(\nu)} \tag{D.18}$$

Aus den Gln. (D.17), (D.18) folgt unmittelbar:

$$\Lambda^\mu{}_\rho\, \Lambda_\nu{}^\rho \;=\; \Lambda_\rho{}^\mu\, \Lambda^\rho{}_\nu \;=\; \delta^\mu_\nu \tag{D.19}$$

das heißt die Matrizen $\left(\Lambda^\mu{}_\nu\right)$ und $\left(\Lambda_\mu{}^\nu\right)$ sind kontragredient – die eine die transponierte Inverse der anderen.

Aktive Transformation heißt die Abbildung des gesamten Minkowski-Raums in sich unter Erhaltung des Vierer-Skalarprodukts:[D.5]

$$x \;\longrightarrow\; x' \;=\; \Lambda\, x \qquad \text{unter} \qquad x'^2 \;=\; x^2 \tag{D.20}$$

Dies impliziert die Abbildung der Vektoren der Basis $\{e_{(\mu)}\}$ wie folgt:

$$e_{(\mu)} \;\longrightarrow\; e'_{(\mu)} \;=\; \Lambda\, e_{(\mu)} \tag{D.21}$$

mit $e'_{(\mu)} \cdot e'_{(\nu)} = e_{(\mu)} \cdot e_{(\nu)} = g_{\mu\nu}$, vgl. Gl. (D.15): Die so-definierten $e'_{(\mu)}$ bilden zum einen eine Basis $\{e'_{(\mu)}\}$ und besitzen zum anderen eine Zerlegung bezüglich der alten Basis:

$$e'_{(\mu)} \;=\; \Lambda_\mu{}^\nu\, e_{(\nu)} \tag{D.22}$$

vgl. Gl. (D.18). Folglich gilt:

$$x' \;=\; \Lambda\, x \;=\; \Lambda\, x^\mu\, e_{(\mu)} \;=\; x^\mu\, \Lambda\, e_{(\mu)} \;=\; x^\mu\, \Lambda_\mu{}^\nu\, e_{(\nu)} \;\stackrel{!}{=}\; x'^\mu\, e_{(\mu)} \tag{D.23}$$

mit der vorletzten Identität aufgrund der Gln. (D.21), (D.22). Für die Komponenten von x' bezüglich der alten Basis $\{e_{(\mu)}\}$ folgt daher:

$$x'^\mu \;=\; \Lambda_\nu{}^\mu\, x^\nu \tag{D.24}$$

und invertiert:

$$x^\mu \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\, x'^\nu \tag{D.25}$$

[D.5] In Gl. (D.16) ändern sich die Komponenten desselben Vektors, in Gl. (D.20) der Vektor selbst; entsprechend steht der Strich zur Notation.

Gl. (D.24) steht in direktem Kontrast zu Gl. (D.1): Die *passive* Transformation wird vermittelt durch $\Lambda \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu)$, die *aktive* Transformation durch die transponierte inverse Matrix: $\Lambda^{-1\,t} \equiv (\Lambda^\mu{}_\nu)$. De facto dreht die Boost-Geschwindigkeit gerade ihr Vorzeichen um. Es gilt, vgl. Gl. (D.4) und die Gln. (D.12), (D.13):

$$x'^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu \, x^\nu \tag{D.26}$$

$$\text{mit} \qquad (\Lambda_\mu{}^\nu) = \begin{pmatrix} \gamma & +\gamma\beta \\ +\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \equiv \Lambda^{-1\,t} \tag{D.26'}$$

äquivalent in Lichtkegelkoordinaten, vgl. Gl. (D.14):

$$x'^{\bar\mu} = \Lambda_{\bar\nu}{}^{\bar\mu} \, x^{\bar\nu} \tag{D.27}$$

$$\text{mit} \qquad (\Lambda_{\bar\mu}{}^{\bar\nu}) = \begin{pmatrix} \exp+\psi & 0 \\ 0 & \exp-\psi \end{pmatrix} \equiv \bar\Lambda^{-1\,t} \tag{D.27'}$$

mit Definition $\tanh\psi := \beta$ nach Gl. (D.11).

D.3 Streuung im Bild aktiver Lorentz-Boosts

Wir formulieren Streuung auf Basis aktiver Lorentz-Boosts. Dies führt auf Koordinaten, die formal vereinfachen und interpretatorisch suggestiv sind.

Das zugrundeliegende Bild sei zunächst grob umrissen. Wir betrachten zwei Teilchen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ – „pus“ und „minus“ – unter simultanen aktiven Lorentz-Boosts head-to-head. Das heißt sie ruhen in Inertialsystemen $I_\mathfrak{p}$ und $I_\mathfrak{m}$, die sich mit Geschwindigkeit $\beta_\mathfrak{p}$ in positive beziehungsweise mit $\beta_\mathfrak{m}$ in negative x^3-Richtung aufeinander zu bewegen: Ihre Weltlinien $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{C}_\mathfrak{m}$ liegen auf deren Zeitachsen.[D.6] Die invariante Schwerpunktenergie der Streuung $\sqrt{s}$ ist Funktion der Boost-Parameter $\beta_\mathfrak{p}$, $\beta_\mathfrak{m}$; dabei gilt $\sqrt{s} \to \infty$, falls $\beta_\mathfrak{p} \to 1$ und/oder $\beta_\mathfrak{m} \to 1$. Es folgt $\beta_\mathfrak{m}$ als Funktion von $\beta_\mathfrak{p}$ durch die Forderung, daß der Schwerpunkt beider Teilchen ruht in einem Inertialsystem $I_\mathbf{0}$ – vor wie nach den Boosts. Seien $I_{\mathbf{0}\mathfrak{p}}$ und $I_{\mathbf{0}\mathfrak{m}}$ die entsprechenden Ruhsysteme vor den Boosts. Dann nehmen wir o.E.d.A. an: $I_\mathbf{0} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{p}} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{m}}$, das heißt, daß die Boosts erfolgen „aus der gemeinsamen Ruhe bzgl. x^3“, das heißt die longitudinalen Projektionen ihrer initialen Weltlinien $\mathcal{C}_{\mathbf{0}\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathbf{0}\mathfrak{m}}$ liegen gemeinsam auf der Zeitachse von $I_\mathbf{0}$. Vgl. Abb. D.2. Wir formalisieren dieses Bild wie folgt.

Seien $P_\imath \equiv (P_\imath^\mu)$ mit $\imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ die Vierer-Impulse der Teilchen in den ursprünglichen Inertialsystemen $I_{\mathbf{0}\mathfrak{p}}$, $I_{\mathbf{0}\mathfrak{m}}$:

$$P_\mathfrak{p} \equiv (P_\mathfrak{p}^\mu) = \begin{pmatrix} P_\mathfrak{p}^0 \\ \mathbf{P} \\ P^3 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} P_\mathfrak{p}^0 \\ \mathbf{P} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad P_\mathfrak{m} \equiv (P_\mathfrak{m}^\mu) = \begin{pmatrix} P_\mathfrak{m}^0 \\ -\mathbf{P} \\ -P^3 \end{pmatrix} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} P_\mathfrak{m}^0 \\ -\mathbf{P} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{D.28}$$

$$\text{mit} \qquad P_\imath^0 = \sqrt{M_\imath^2 + \mathbf{P}^2 + (P^3)^2} \overset{(*)}{=} \sqrt{M_\imath^2 + \mathbf{P}^2} \qquad M_\imath^2 > 0 \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.29}$$

äquivalent $\bar P_\imath \equiv (P_\mathfrak{p}^{\bar\mu})$ in Lichtkegelkoordinaten:

$$\bar P_\mathfrak{p} \equiv (P_\mathfrak{p}^{\bar\mu}) = \begin{pmatrix} P_\mathfrak{p}^+ \\ P_\mathfrak{p}^- \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \bar P_\mathfrak{m} \equiv (P_\mathfrak{m}^{\bar\mu}) = \begin{pmatrix} P_\mathfrak{m}^+ \\ P_\mathfrak{m}^- \\ -\mathbf{P} \end{pmatrix} \tag{D.30}$$

$$\text{mit} \qquad P_\imath^\pm = \alpha\,(P_\imath^0 \pm P_\imath^3) \overset{(*)}{=} \alpha\, P_\imath^0 \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.31}$$

vgl. Gl. (A.17) und (A.18), (A.18′). Dabei gelten die Identitäten $(*)$ aufgrund Identifizierung

[D.6] Wir betrachten physikalische Teilchen mit nichtverschwindenden Massequadraten: $M_\mathfrak{p}^2, M_\mathfrak{m}^2 > 0$, deren Weltlinien folglich innerhalb des Lichtkegels liegen, so daß garantiert ist die Existenz (momentaner) inertialer Ruhsysteme, wie sie unsere Konstruktion voraussetzt.

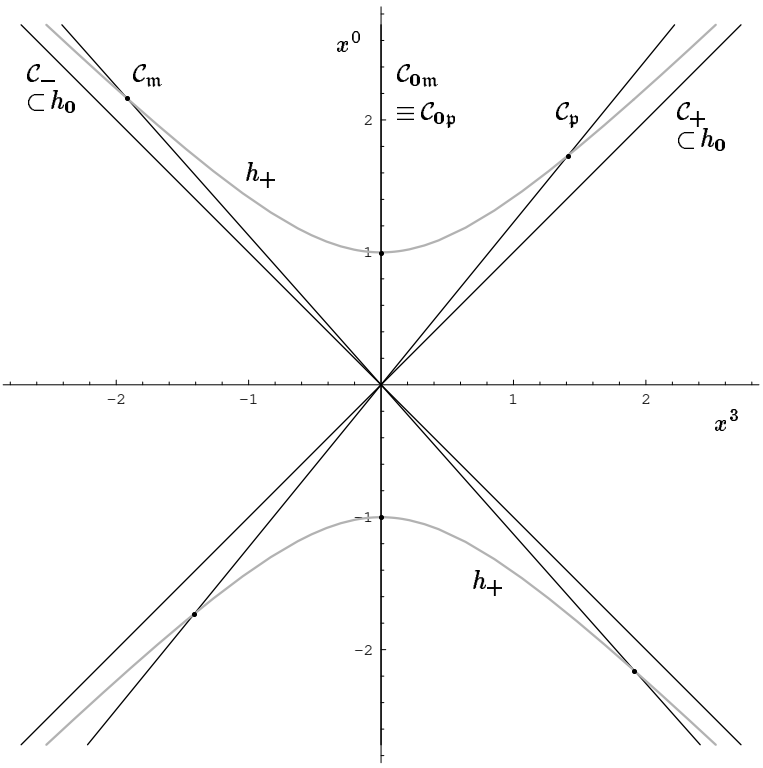


Abbildung D.2: Minkowski-Diagramm: Weltlinien unter aktiven Lorentz-Boosts – head-to-head. Teilchen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ seien zunächst gemeinsam in Ruhe bzgl. $I_0 \equiv I_{0\mathfrak{p}} \equiv I_{0\mathfrak{m}}$: ihre initialen Weltlinien $\mathcal{C}_{0\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{0\mathfrak{m}}$ liegen auf der Achse x^0 von I_0 [vgl. Identitäten $(*)$]. Werde Teilchen $\mathfrak{p}$ aktiv geboostet mit $\beta_\mathfrak{p}$, Teilchen $\mathfrak{m}$ mit $-\beta_\mathfrak{m}$ in x^3-Richtung; $\beta_\mathfrak{p}, \beta_\mathfrak{m} \in [0,1)$. Dann ruhen sie in Inertialsystemen $I_\mathfrak{p}$, $I_\mathfrak{m}$, die sich aufeinander zu bewegen mit Geschwindigkeit $\beta_\mathfrak{p}$ in positive bzw. mit $-\beta_\mathfrak{m}$ in negative x^3-Richtung relativ zu I_0. Ihre Weltlinien $\mathcal{C}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{C}_\mathfrak{m}$ fallen zusammen mit den Zeitachsen von $I_\mathfrak{p}$, $I_\mathfrak{m}$. Für $\beta_\mathfrak{p}, \beta_\mathfrak{m} \to 1$ gehen diese über in $\mathcal{C}_+$, $\mathcal{C}_-$, die auf dem Lichtkegel h_0 liegen; ihre Längen [vgl. die Abschnitte zwischen den Schnittpunkten mit h_+] wachsen gemessen in I_0 im Sinne der Zeitdilatation an gegen Unendlich.

der Systeme: $I_0 \equiv I_{0\mathfrak{p}} \equiv I_{0\mathfrak{m}}$, im Sinne eines *gemeinsamen* initialen Ruhsystems.

Es gilt für $s_0 = (P_\mathfrak{p} + P_\mathfrak{m})^2$, das Quadrat der initialen invarianten Schwerpunktenergie:

$$s_0 = M_\mathfrak{p}^2 + M_\mathfrak{m}^2 + 2\left\{P_\mathfrak{p}^0 P_\mathfrak{m}^0 + \mathbf{P}^2 + (P^3)^2\right\} \tag{D.32}$$

$$= M_\mathfrak{p}^2 + M_\mathfrak{m}^2 + 2\left\{g_{+-}\left[P_\mathfrak{p}^+ P_\mathfrak{m}^- + P_\mathfrak{p}^- P_\mathfrak{m}^+\right] + \mathbf{P}^2\right\} \tag{D.32'}$$

mit $g_{+-} = 1/2\alpha^2$ nach Gl. (A.21).

Die aktiv transformierten Vierer-Impulse $P_\imath' \equiv (P_\imath'^\nu)$ und $\bar{P}_\imath' \equiv (P_\imath'^{\bar{\nu}})$ für $\imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ folgen mithilfe der Gln. (D.26), (D.26′) bzw. (D.27), (D.27′):

$$P_\imath'^\mu = (\Lambda_\imath)_\nu{}^\mu \; P_\imath^\nu \qquad \mu, \nu \in \{0,1,2,3\} \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.33}$$

$$\text{mit} \quad \left((\Lambda_\mathfrak{p})_\mu{}^\nu\right) = \begin{pmatrix} \gamma_\mathfrak{p} & +\gamma_\mathfrak{p}\,\beta_\mathfrak{p} \\ +\gamma_\mathfrak{p}\,\beta_\mathfrak{p} & \gamma_\mathfrak{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi_\mathfrak{p} & +\sinh\psi_\mathfrak{p} \\ +\sinh\psi_\mathfrak{p} & \cosh\psi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \tag{D.33'}$$

$$\left((\Lambda_\mathfrak{m})_\mu{}^\nu\right) = \begin{pmatrix} \gamma_\mathfrak{m} & -\gamma_\mathfrak{m}\,\beta_\mathfrak{m} \\ -\gamma_\mathfrak{m}\,\beta_\mathfrak{m} & \gamma_\mathfrak{m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi_\mathfrak{m} & -\sinh\psi_\mathfrak{m} \\ -\sinh\psi_\mathfrak{m} & \cosh\psi_\mathfrak{m} \end{pmatrix}$$

und

$$\gamma_\imath \equiv \gamma(\beta_\imath) = 1/\sqrt{1-\beta_\imath^2} \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.34}$$

vgl. Gl. (D.3) – und äquivalent in Lichtkegelkoordinaten:

$$P_\imath'^{\bar\mu} = (\Lambda_\imath)_{\bar\nu}{}^{\bar\mu}\, P_\imath^{\bar\nu} \qquad \bar\mu, \bar\nu \in \{+, -, 1, 2\} \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.35}$$

$$\text{mit} \qquad \big((\Lambda_\mathfrak{p})_{\bar\mu}{}^{\bar\nu}\big) = \begin{pmatrix} \exp+\psi_\mathfrak{p} & 0 \\ 0 & \exp-\psi_\mathfrak{p} \end{pmatrix} \tag{D.35'}$$

$$\big((\Lambda_\mathfrak{m})_{\bar\mu}{}^{\bar\nu}\big) = \begin{pmatrix} \exp-\psi_\mathfrak{m} & 0 \\ 0 & \exp+\psi_\mathfrak{m} \end{pmatrix}$$

und Definition

$$\tanh\psi_\imath = \beta_\imath \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.36}$$

so daß $\psi_\imath \in [0, +\infty)$ wegen $\beta_\imath \in [0, 1)$ für $\imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$ *per definitionem*, vgl. Gl. (D.11).

Es gilt für $s = (P_\mathfrak{p}' + P_\mathfrak{m}')^2$, das Quadrat der invarianten Schwerpunktenergie nach der aktiven Transformation:

$$\begin{aligned} s &= s_\mathbf{0} + 2\Big\{\big(\gamma_\mathfrak{p}\gamma_\mathfrak{m}\,(1+\beta_\mathfrak{p}\beta_\mathfrak{m})-1\big)\,\big[P_\mathfrak{p}^0 P_\mathfrak{m}^0 + (P^3)^2\big] \\ &\qquad + \gamma_\mathfrak{p}\gamma_\mathfrak{m}\,(\beta_\mathfrak{p}+\beta_\mathfrak{m})\,\big[P_\mathfrak{p}^0 + P_\mathfrak{m}^0\big]P^3\Big\} \end{aligned} \tag{D.37}$$

$$= s_\mathbf{0} + \frac{1}{\alpha^2}\Big\{\big(\mathrm{e}^{\psi}-1\big)\,P_\mathfrak{p}^+ P_\mathfrak{m}^- + \big(\mathrm{e}^{-\psi}-1\big)\,P_\mathfrak{p}^- P_\mathfrak{m}^+\Big\} \tag{D.37'}$$

$$\begin{aligned} &= s_\mathbf{0} + \frac{1}{\alpha^2}\Big\{\big(\cosh\psi - 1\big)\,\big[P_\mathfrak{p}^+ P_\mathfrak{m}^- + P_\mathfrak{p}^- P_\mathfrak{m}^+\big] \\ &\qquad + \sinh\psi\,\big[P_\mathfrak{p}^+ P_\mathfrak{m}^- - P_\mathfrak{p}^- P_\mathfrak{m}^+\big]P^3\Big\} \end{aligned} \tag{D.37''}$$

unter Definition

$$\psi := \psi_\mathfrak{p} + \psi_\mathfrak{m} \tag{D.38}$$

mit $\psi \in [0, +\infty)$ nach Gl. (D.36); bzgl. $s_\mathbf{0}$ vgl. die Gln. (D.32), (D.32′). Unter Identifizierung der initialen Systeme: $I_\mathbf{0} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{p}} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{m}}$, das heißt Boost aus dem gemeinsamen Ruhsystem – die Identitäten $(*)$ –, vereinfacht sich Gl. (D.37) und (D.37″) respektive wie folgt:

$$s = s_\mathbf{0} + 2\,\big(\gamma_\mathfrak{p}\gamma_\mathfrak{m}\,(1+\beta_\mathfrak{p}\beta_\mathfrak{m})-1\big)\,P_\mathfrak{p}^0 P_\mathfrak{m}^0 \tag{D.39}$$

$$= s_\mathbf{0} + 2\,\big(\cosh\psi - 1\big)\,P_\mathfrak{p}^0 P_\mathfrak{m}^0 \tag{D.39'}$$

mit $s_\mathbf{0} = (P_\mathfrak{p}^0 + P_\mathfrak{m}^0)^2$ und $P_\imath^0 = \sqrt{M_\imath^2 + \mathbf{P}^2}$. [Gesetzt $\beta_\mathfrak{p} \stackrel{!}{=} 0$ und $\beta_\mathfrak{m} \stackrel{!}{=} 0$, folgt wieder $s = s_\mathbf{0}$.]

Der Schwerpunkt des Systems beider Teilchen ruhe in $I_\mathbf{0}$ *nach wie vor* den Boosts, das heißt sie geschehen in dieser Weise *simultan*. Dadurch ist $\beta_\mathfrak{m}$ determiniert als Funktion von $\beta_\mathfrak{p}$. Wir beschränken uns darauf den Zusammnehang zu bestimmen unter Identifizierung der initialen Systeme: $I_\mathbf{0} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{p}} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{m}}$; auf Basis der Identitäten $(*)$ wird gefordert:

$$P_\mathfrak{p}'^3 + P_\mathfrak{m}'^3 \stackrel{!}{=} 0 \tag{D.40}$$

$$\text{d.h.} \qquad \gamma_\mathfrak{p}\,\beta_\mathfrak{p}\,P_\mathfrak{p}^0 + \gamma_\mathfrak{m}\,\beta_\mathfrak{m}\,P_\mathfrak{m}^0 \stackrel{!}{=} 0 \tag{D.40'}$$

vgl. die Gln. (D.33), (D.33′) und (D.34). Daraus folgt unmittelbar:

$$\beta_\mathfrak{m}^2 = \frac{(1-\beta_\mathfrak{p}^2)}{(1-\beta_\mathfrak{p}^2) + \mu\,\beta_\mathfrak{p}^2} \qquad \text{und} \qquad 1 - \beta_\mathfrak{m}^2 = \frac{\mu\,\beta_\mathfrak{p}^2}{(1-\beta_\mathfrak{p}^2) + \mu\,\beta_\mathfrak{p}^2} \tag{D.41}$$

mit

$$\mu := (P_\mathfrak{p}^0)^2/(P_\mathfrak{m}^0)^2 \tag{D.42}$$

Und daraus:

$$\beta_{\mathfrak{m}} \;=\; \beta_{\mathfrak{p}} \cdot \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{(1-\beta_{\mathfrak{p}}^2)+\mu\,\beta_{\mathfrak{p}}^2}} \tag{D.43}$$

$$\gamma_{\mathfrak{m}} \;=\; \gamma_{\mathfrak{p}} \cdot \sqrt{(1-\beta_{\mathfrak{p}}^2)+\mu\,\beta_{\mathfrak{p}}^2} \tag{D.43$'$}$$

Aus $\tanh\psi_{\imath}=\beta_{\imath}$ für $\imath=\mathfrak{p},\mathfrak{m}$, vgl. Gl. (D.36), folgt unmittelbar:

$$\gamma_{\imath} \;=\; \cosh\psi_{\imath} \tag{D.44}$$

$$\gamma_{\imath}\beta_{\imath} \;=\; \sinh\psi_{\imath} \qquad \imath=\mathfrak{p},\mathfrak{m} \tag{D.45}$$

vgl. die Gln. (D.12), (D.13), und die Gln. (D.43), (D.43$'$) nehmen die einfache Form an:

$$\beta_{\mathfrak{m}} \;=\; \frac{\sqrt{\mu}\,\sinh^2\psi_{\mathfrak{p}}}{\sqrt{1+\mu\,\sinh^2\psi_{\mathfrak{p}}}} \;\stackrel{!}{=}\; \tanh\psi_{\mathfrak{m}} \tag{D.46}$$

$$\gamma_{\mathfrak{m}} \;=\; \sqrt{1+\mu\,\sinh^2\psi_{\mathfrak{p}}} \;\stackrel{!}{=}\; \cosh\psi_{\mathfrak{m}} \tag{D.46$'$}$$

Aus dem Additionstheorem für hyperbolische Funktionen folgt die Zerlegung:

$$\cosh\psi \;=\; \cosh(\psi_{\mathfrak{p}}+\psi_{\mathfrak{m}}) \tag{D.47}$$

$$\;=\; \cosh\psi_{\mathfrak{p}}\,\cosh\psi_{\mathfrak{m}} \;+\; \sinh\psi_{\mathfrak{p}}\,\sinh\psi_{\mathfrak{m}} \tag{D.47$'$}$$

$$\;=\; \big(\cosh\psi_{\mathfrak{p}} \;+\; \sinh\psi_{\mathfrak{p}}\,\tanh\psi_{\mathfrak{m}}\big)\,\cosh\psi_{\mathfrak{m}} \tag{D.47$''$}$$

$$\;=\; \cosh\psi_{\mathfrak{p}}\cdot\sqrt{1+\mu\,\sinh^2\psi_{\mathfrak{p}}} \;+\; \sinh\psi_{\mathfrak{p}}\cdot\sqrt{\mu}\,\sinh\psi_{\mathfrak{p}} \tag{D.47$'''$}$$

mit der letzten Identität aufgrund der Gln. (D.46), (D.46$'$).

Der Zusammenhang zwischen s und $\cosh\psi$ nach Gl. (D.39$'$) ist damit ein Zusammenhang zwischen s und $\cosh\psi_{\mathfrak{p}}$. Zusammengefasst gilt:[D.7]

$$s \;=\; s_{\mathbf{0}} \;+\; 2\,\big(\cosh\psi-1\big)\,P_{\mathfrak{p}}^0 P_{\mathfrak{m}}^0 \tag{D.48}$$

$$\text{mit} \qquad \cosh\psi \;=\; \cosh\psi_{\mathfrak{p}}\cdot\sqrt{1+\mu\,\big(\cosh^2\psi_{\mathfrak{p}}-1\big)} \;+\; \sqrt{\mu}\,\big(\cosh^2\psi_{\mathfrak{p}}-1\big) \tag{D.48$'$}$$

und invertiert:[D.7]

$$\cosh\psi_{\mathfrak{p}} \;=\; \left[1 \;-\; \frac{\cosh^2\psi-1}{(\cosh\psi+\sqrt{\mu})^2}\right]^{-1/2} \tag{D.49}$$

$$\text{mit} \qquad \cosh\psi \;=\; 1 \;+\; \frac{s-s_{\mathbf{0}}}{2\,P_{\mathfrak{p}}^0 P_{\mathfrak{m}}^0} \tag{D.49$'$}$$

Dabei ist $s_{\mathbf{0}}=M_{\mathfrak{p}}^2+M_{\mathfrak{m}}^2+2(P_{\mathfrak{p}}^0 P_{\mathfrak{m}}^0+\mathbf{P}^2)$ und $\mu=(P_{\mathfrak{p}}^0)^2/(P_{\mathfrak{m}}^0)^2$ mit $P_{\imath}^0=\sqrt{M_{\imath}^2+\mathbf{P}^2}$, $M_{\imath}^2>0$, für $\imath=\mathfrak{p},\mathfrak{m}$. Die Parameter dieser Relationen: $M_{\mathfrak{p}}^2$, $M_{\mathfrak{m}}^2$ und $\mathbf{P}^2$ [mit $\mathbf{P}\equiv\mathbf{P}_{\mathfrak{p}}\equiv-\mathbf{P}_{\mathfrak{m}}$ per def.], sind Teilchen-spezifisch beziehungsweise subsumieren deren transversale Kinematik.

Über die angegebenen Relationen stehen s und $\beta_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}}$ in eineindeutigem Zusammenhang. Es ist daher äquivalent, zwei aufeinander zu laufende Teilchen im Schwerpunktsystem zu betrachten in Termen des Quadrats ihrer invarianten Schwerpunktenergie s oder in Termen der Beta-Parameter $\beta_{\mathfrak{p}}$ und $\beta_{\mathfrak{m}}$ entsprechender aktiver Lorentz-Boosts.

Wir gehen den zweiten Weg und definieren auf Basis von $\beta_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}}$ beziehungsweise $\psi_{\mathfrak{p}}$, $\psi_{\mathfrak{m}}$ geeignete longitudinale Koordinaten $x^{\mathfrak{p}}$, $x^{\mathfrak{m}}$. Der Limes $s\to\infty$ wird äquivalent betrachtet in Form $\beta_{\mathfrak{p}},\beta_{\mathfrak{m}}\to 1$ beziehungsweise $\psi_{\mathfrak{p}},\psi_{\mathfrak{m}}\to\infty$.[D.8]

[D.7] Wir drücken diese Relationen aus durch nur eine hyperbolische Funktion, vgl. die Gln. (D.47$'''$), (D.48$'$).

[D.8] Für $s\to\infty$ folgt $\psi,\psi_{\mathfrak{p}}\to\infty$, aus Gl. (D.48$'$) die Asymptotik: $\cosh\psi\sim\sqrt{\mu}[2\cosh^2\psi_{\mathfrak{p}}-1]=\sqrt{\mu}\,\cosh 2\psi_{\mathfrak{p}}$, und – hiermit konsistent – aus Gl. (D.49) die Asymptotik: $\cosh\psi_{\mathfrak{p}}\sim(2\sqrt{\mu})^{-1/2}\sqrt{\cosh\psi+1}=\mu^{-1/4}\,\cosh\psi/2$.

D.4 Minkowskische Koordinaten: $\{e_{(\tilde{\mu})}, x^{\tilde{\mu}}\}$; – versus $\{e_{(\bar{\mu})}, x^{\bar{\mu}}\}$ und $\{e_{(\mu)}, x^{\mu}\}$ [D.9]

Koordinatenlinien $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. Seien für feste $\beta_{\mathfrak{p}}$, $\beta_{\mathfrak{m}}$ beziehungsweise $\psi_{\mathfrak{p}}, \psi_{\mathfrak{m}}$[D.10] betrachtet die Inertialsysteme $I_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{m}}$, die folgen aus dem initialen System $I_{\mathbf{0}}$ durch aktiven Lorentz-Boosts mit $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ beziehungsweise $\Lambda_{\mathfrak{m}}$. Seien $e_{(\mu)} \equiv \left(e_{(\mu)}{}^{\nu}\right)$, $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$, die (karthesischen) Basisvektoren von $I_{\mathbf{0}}$, für die gilt:

$$e_{(\mu)} \cdot e_{(\mu)} \;=\; g_{\mu\nu} \tag{D.50}$$

$$\text{mit} \qquad e_{(\mu)}{}^{\nu} \;=\; g_{\mu}{}^{\nu} \;=\; \delta_{\mu}^{\nu} \qquad \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{D.50'}$$

Unter den aktiven Boosts geht diese Basis $\{e_{(\mu)}\}$ über in die Basen $\{e'_{(\mu)}\}$, $\{e''_{(\mu)}\}$ der Systeme $I_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{m}}$; deren Vektoren besitzen Zerlegungen nach der alten Basis, vgl. Gl. (D.22):

$$e'_{(\mu)} \;=\; (\Lambda_{\mathfrak{p}})_{\mu}{}^{\nu}\; e_{(\nu)} \tag{D.51}$$

$$e''_{(\mu)} \;=\; (\Lambda_{\mathfrak{m}})_{\mu}{}^{\nu}\, e_{(\nu)} \qquad \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{D.51'}$$

im Sinne der Zerlegung

$$x \;=\; x^{\mu}\, e_{(\mu)} \qquad \mu \in \{0, 1, 2, 3\} \tag{D.52}$$

des beliebigen Lorentz-Vektors x in Komponenten x^{μ} entlang der Achsen $e_{(\mu)}$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$, von $I_{\mathbf{0}}$. Die Zeitachsen $e'_{(0)}$, $e''_{(0)}$ der Systeme $I_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{m}}$ sind explizit gegeben durch:

$$e'_{(0)} \;=\; \gamma_{\mathfrak{p}}\, \left(e_{(0)} \;+\; \beta_{\mathfrak{p}}\, e_{(3)}\right) \tag{D.53}$$

$$e''_{(0)} \;=\; \gamma_{\mathfrak{m}}\, \left(e_{(0)} \;-\; \beta_{\mathfrak{m}}\, e_{(3)}\right) \tag{D.53'}$$

vgl. die Gln. (D.51), (D.51′) und (D.33′).

Dann ist ein Koordinatensystem definiert durch die Lorentz-Vektoren:

$$e_{(\mathfrak{p})} \;:=\; \varrho \;\cdot \gamma_{\mathfrak{p}}\, \left(e_{(0)} \;+\; \beta_{\mathfrak{p}}\, e_{(3)}\right) \tag{D.54}$$

$$e_{(\mathfrak{m})} \;:=\; \varrho \;\cdot \gamma_{\mathfrak{m}}\, \left(e_{(0)} \;-\; \beta_{\mathfrak{m}}\, e_{(3)}\right) \tag{D.54'}$$

$$\text{und} \qquad e_{(\tilde{i})} \;:=\; e_{(i)} \qquad i \in \{1, 2\} \tag{D.54''}$$

mit $\varrho \in \mathbb{R}^{+}$ einer geeignet zu wählenden Konstanten. Die Vektoren $e_{(\mathfrak{p})}$, $e_{(\mathfrak{m})}$ sind definiert bis auf die Konstante ϱ genau als die Zeitachsen $e'_{(0)}$, $e''_{(0)}$ der Systeme $I_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{m}}$. Die Weltlinien $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$ der Teilchen $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{m}$ – vgl. Abb. D.2 – besitzen folglich longitudinal nur eine $x^{\mathfrak{p}}$- beziehungsweise $x^{\mathfrak{m}}$-Komponente entsprechend der Zerlegung

$$x \;=\; x^{\tilde{\mu}}\, e_{(\tilde{\mu})} \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\} \tag{D.55}$$

im Sinne von Gl. (D.52).

Für nichtverschwindende Boosts: $\beta_{\mathfrak{p}}, \beta_{\mathfrak{m}} > 0$, sind die Vektoren $e_{(\tilde{\mu})}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ linear unabhängig, $\{e_{(\tilde{\mu})}\}$ Basis des Minkowski-Raumes und die Zerlegung entsprechend Gl. (D.55) wohldefiniert. In Termen der Vektoren $e_{(\tilde{\mu})}$ und den Komponenten $x^{\tilde{\mu}}$ mit $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ geschieht im Haupttext die Auswertung und analytische Fortsetzung der T-Streuamplitude.

Wir formalisieren für den beliebigen Lorentz-Vektor x den Zusammenhang zwischen dem Koordinatensystem $I_{\mathbf{0}}$ mit Komponenten x^{μ} bezüglich der Basis $\{e_{(\mu)}\}$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$ nach Gl. (A.10)ff., zwischen Lichtkegelkomponenten $x^{\bar{\mu}}$ bezüglich der Basis $\{e_{(\bar{\mu})}\}$, $\bar{\mu} \in \{+, -, 1, 2\}$

[D.9] Seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ Lorentz-Indizes, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ dagegen Notation der Teilchen und deren (momentanen) Ruhsysteme.
[D.10] Aufgefaßt $\beta_{\mathfrak{p}}$ und $\beta_{\mathfrak{m}} \equiv \beta_{\mathfrak{m}}(\beta_{\mathfrak{p}})$ als die Funktionswerte für festes s.

nach Gl. (A.26)ff. und dem Koordinatensystem mit Komponenten $x^{\tilde{\mu}}$ bezüglich der Basis $\{e_{(\tilde{\mu})}\}$, $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ nach Gl. (D.54)-(D.54″). Wir schreiben in diesem Sinne für ein und denselben Vektor bezüglich der verschiedenen Basen: $x\equiv(x^{\mu})$, $\bar{x}\equiv(x^{\bar{\mu}})$ und $\tilde{x}\equiv(x^{\tilde{\mu}})$.

Primäres Interesse gilt dem Hochenergielimes $s\to\infty$, das heißt $\beta_{\mathfrak{p}},\beta_{\mathfrak{m}}\to 1$ beziehungsweise $\psi_{\mathfrak{p}},\psi_{\mathfrak{m}}\to\infty$, in dem die physikalischen Weltlinien $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$ übergehen in $\mathcal{C}_{+}$, $\mathcal{C}_{-}$ und die Zeitachsen $e'_{(0)}$, $e''_{(0)}$, ergo die Vektoren $e_{(\mathfrak{p})}$, $e_{(\mathfrak{m})}$ zeigen in Richtung $e_{(+)}$, $e_{(-)}$. Wir legen daher Betonung auf den Zusammenhang der Systeme $\{x^{\tilde{\mu}},e_{(\tilde{\mu})}\}$, $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$, und $\{x^{\bar{\mu}},e_{(\bar{\mu})}\}$, $\bar{\mu}\in\{+,-,1,2\}$; Konventionen werden getroffen in Hinblick eines einfachen Übergangs.

Wir betrachten die Vektoren $e_{(\tilde{\mu})}$, $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ nach den Gln. (D.54)-(D.54″). In Gegenüberstellung mit Gl. (D.52) lesen wir wie folgt ab die Komponenten von $e_{(\mathfrak{p})}$, $e_{(\mathfrak{m})}$ bezüglich der Basis $\{e_{(\mu)}\}$, $\mu\in\{0,1,2,3\}$:

$$e_{(\mathfrak{p})}{}^{0} \;=\; \varrho\cdot\gamma_{\mathfrak{p}} \qquad\quad =\; \varrho\cdot\cosh\psi_{\mathfrak{p}} \tag{D.56}$$

$$e_{(\mathfrak{p})}{}^{3} \;=\; \varrho\cdot\gamma_{\mathfrak{p}}\beta_{\mathfrak{p}} \qquad =\; \varrho\cdot\sinh\psi_{\mathfrak{p}} \tag{D.56′}$$

und:

$$e_{(\mathfrak{m})}{}^{0} \;=\; \varrho\cdot\gamma_{\mathfrak{m}} \qquad\quad =\; \varrho\cdot\cosh\psi_{\mathfrak{m}} \tag{D.57}$$

$$e_{(\mathfrak{m})}{}^{3} \;=\; \varrho\cdot\gamma_{\mathfrak{p}}\,(-\beta_{\mathfrak{m}}) \;=\; \varrho\cdot(-\sinh\psi_{\mathfrak{m}}) \tag{D.57′}$$

Gemäß $x^{\pm}=\alpha\,(x^{0}\pm x^{3})$, vgl. Gln (A.18), folgen die Lichtkegelkomponenten:

$$e_{(\mathfrak{p})}{}^{\pm} \;=\varrho\alpha\,\big(\cosh\psi_{\mathfrak{p}}\pm\sinh\psi_{\mathfrak{p}}\big) \;=\varrho\alpha\,\mathrm{e}^{\pm\psi_{\mathfrak{p}}} \tag{D.58}$$

$$e_{(\mathfrak{m})}{}^{\pm} \;=\varrho\alpha\,\big(\cosh\psi_{\mathfrak{m}}\mp\sinh\psi_{\mathfrak{m}}\big) \;=\varrho\alpha\,\mathrm{e}^{\mp\psi_{\mathfrak{m}}} \tag{D.58′}$$

Die Vektoren der Basis $\{e_{(\bar{\mu})}\}$, $\bar{\mu}\in\{+,-,1,2\}$ zeigen in Richtung der Lichtkegel-Koordinatenlinien; sie erfüllen:

$$e_{(\bar{\mu})}\cdot e_{(\bar{\nu})} \;=\; g_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \tag{D.59}$$

$$\text{mit}\qquad e_{(\bar{\mu})}{}^{\bar{\nu}} \;=\; g_{\bar{\mu}}{}^{\bar{\nu}} \;=\; \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\mu}} \qquad \bar{\mu},\bar{\nu}\in\{+,-,1,2\} \tag{D.59′}$$

vgl. die Gln. (A.26), (A.27) und (A.21), (A.21′). Die Zerlegung

$$x \;=\; x^{\bar{\mu}}\,e_{(\bar{\mu})} \qquad \bar{\mu}\in\{+,-,1,2\} \tag{D.60}$$

im Sinne der Gln. (D.52), (D.55) lautet für die Vektoren $e_{(\tilde{\mu})}$, $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$:

$$e_{(\mathfrak{p})} \;:=\quad \varrho\alpha\,\big(\mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{p}}}\,e_{(+)}\;+\;\mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{p}}}\,e_{(-)}\big) \tag{D.61}$$

$$e_{(\mathfrak{m})} \;:=\varrho\alpha\,\big(\mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}}\,e_{(+)}\;+\quad\mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{m}}}\,e_{(-)}\big) \tag{D.61′}$$

$$\text{und}\qquad e_{(\tilde{\imath})} \;:=\; e_{(\bar{\imath})} \qquad i\in\{1,2\} \tag{D.61″}$$

vgl. die Gln. (D.54)-(D.54″). Im Limes $\psi_{\mathfrak{p}},\psi_{\mathfrak{m}}\to\infty$ zeigen $e_{(\mathfrak{p})}$, $e_{(\mathfrak{m})}$ in Richtung $e_{(+)}$, $e_{(-)}$.

Basisvektoren $e^{(\tilde{\mu})}$, $e_{(\tilde{\mu})}$ und induzierte Metrik $\tilde{g}\equiv(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}})$, $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$. Die Gln. (D.61)-(D.61″) lauten in Matrixform:[D.11]

$$e_{(\tilde{\mu})} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\,e_{(\bar{\nu})} \qquad \tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\},\;\;\bar{\nu}\in\{+,-,1,2\} \tag{D.62}$$

vgl. die Gln. (D.22) und (D.51), (D.51′); es ist:

$$\big(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\big) \;=\; \varrho\alpha\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{p}}} & \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{p}}}\\ \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}} & \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{m}}}\end{pmatrix} \tag{D.63}$$

$$\text{mit}\qquad \det\big(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\big) \;=\; (g_{+-})^{-1}\,\varrho^{2}\,\sinh\psi \tag{D.63′}$$

[D.11] Explizit ausgeschrieben seien nur die nichttrivialen longitudinalen Komponenten, vgl. Fußn. D.3.

ferner:

$$2\alpha^2 \;=\; g^{+-} \;=\; (g_{+-})^{-1} \;=\; -\det \mathbb{L} \tag{D.64}$$

$$\text{und} \qquad g_{+-} \;=\; \sqrt{-\det \bar{g}} \tag{D.64'}$$

mit $\mathbb{L} \equiv \left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\nu}\right)$ und $\bar{g} \equiv \left(g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\right)$; vgl. die Gln. (A.21), (A.23) bzw. $\det g = -(g_{+-})^2$.

Die $e_{(\tilde{\mu})}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ repräsentieren Koordinatenlinien, die induzieren einen metrischen Tensor $\tilde{g} \equiv \left(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)$ durch

$$e_{(\tilde{\mu})} \cdot e_{(\tilde{\nu})} \;=\; g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \tag{D.65}$$

$$\text{mit} \qquad e_{(\tilde{\mu})}{}^{\tilde{\nu}} \;=\; g_{\tilde{\mu}}{}^{\tilde{\nu}} \;=\; \delta^{\tilde{\nu}}_{\tilde{\mu}} \qquad \tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\} \tag{D.65'}$$

vgl. die Gln. (D.50) (D.50') und (D.59), (D.59'). Für dessen Komponenten $g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$ folgt aus

$$e_{(\tilde{\mu})} \cdot e_{(\tilde{\nu})} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\alpha}}\, \mathbb{S}_{\tilde{\nu}}{}^{\bar{\beta}}\, e_{(\bar{\alpha})} \cdot e_{(\bar{\beta})} \tag{D.66}$$

vgl. Gln (D.62), mithilfe der Gln. (D.59), (D.65) unmittelbar:

$$g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\alpha}}\, \mathbb{S}_{\tilde{\nu}}{}^{\bar{\beta}}\, g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} \tag{D.67}$$

In Form $g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = g_{+-}\left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{+}\, \mathbb{S}_{\tilde{\nu}}{}^{-} + \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{-}\, \mathbb{S}_{\tilde{\nu}}{}^{+}\right)$ folgt aus der expliziten Gestalt der Matrix $\left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right)$, vgl. Gl. (D.63):

$$g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;=\; g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;=\; \varrho^2 \tag{D.68}$$

$$g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \;=\; g_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}} \;=\; \varrho^2 \cdot \cosh\psi \tag{D.68'}$$

$$\text{und} \qquad g_{\tilde{i}\tilde{j}} \;=\; g_{\bar{i}\bar{j}} \;=\; -\delta_{ij} \qquad i \in \{1, 2\} \tag{D.68''}$$

mit $\psi = \psi_{\mathfrak{p}} + \psi_{\mathfrak{m}}$, vgl. Gl. (D.38).

Dies impliziert $\det \tilde{g} = -(\varrho^2 \sinh\psi)^2$ für die Determinante des metrischen Tensors und umgekehrt:

$$\varrho^2 \sinh\psi \;=\; \sqrt{-\det \tilde{g}} \tag{D.69}$$

Wir nehmen im folgenden an, die Lorentz-Boosts seien nichttrivial: $\psi_{\mathfrak{p}}, \psi_{\mathfrak{m}} > 0$, so daß die inverse Metrik $\tilde{g}^{-1} \equiv \left(g^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)$ existiert. Für diese folgt unmittelbar:

$$g^{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;=\; g^{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;=\; \;\; g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \,/\, \det \tilde{g} \tag{D.70}$$

$$g^{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \;=\; g^{\mathfrak{m}\mathfrak{p}} \;=\; -\, g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \,/\, \det \tilde{g} \tag{D.70'}$$

$$\text{und} \qquad g^{\tilde{i}\tilde{j}} \;=\; g^{\bar{i}\bar{j}} \;=\; -\delta^{ij} \qquad i \in \{1, 2\} \tag{D.70''}$$

und explizite Ausdrücke mithilfe der Gln. (D.68), (D.68').

Seien definiert Lorentz-Vektoren $e^{(\tilde{\mu})}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ durch:

$$e^{(\tilde{\mu})} \;:=\; g^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, e_{(\tilde{\nu})} \tag{D.71}$$

$$\Longrightarrow \qquad e_{(\tilde{\mu})} \;=\; g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, e^{(\tilde{\nu})} \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\} \tag{D.71'}$$

vgl. Gl. (A.11) und (A.28). Dann gilt:

$$e^{(\tilde{\mu})} \;=\; \mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\, e^{(\bar{\nu})} \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\},\;\; \bar{\nu} \in \{+, -, 1, 2\} \tag{D.72}$$

unter Definition

$$\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}} \;:=\; g^{\tilde{\mu}\tilde{\rho}}\; \mathbb{S}_{\tilde{\rho}}{}^{\bar{\sigma}}\; g_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \tag{D.73}$$

vgl. die Gln. (D.62) und (D.63), (D.63').

Die Matrix $\left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right)$ wird bestimmt wie folgt. Kontraktion von Gl. (D.73) mit $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\mu}}$ ergibt mithilfe von Gl. (D.67) [Umbenenung $\alpha \to \mu$]:

$$g_{\tilde{\mu}\tilde{\rho}}\, \mathbb{S}^{\tilde{\rho}}{}_{\bar{\nu}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\sigma}}\, g_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \tag{D.74}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\sigma}}\, \mathbb{S}_{\tilde{\rho}}{}^{\bar{\beta}}\, \mathbb{S}^{\tilde{\rho}}{}_{\bar{\nu}}\, g_{\bar{\sigma}\bar{\beta}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\sigma}}\, g_{\bar{\sigma}\bar{\nu}} \qquad \text{d.h.} \qquad \mathbb{S}_{\tilde{\rho}}{}^{\bar{\beta}}\, \mathbb{S}^{\tilde{\rho}}{}_{\bar{\nu}} \;=\; \delta^{\beta}_{\nu} \tag{D.74$'$}$$

und weiter $\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\beta}}\, \mathbb{S}_{\tilde{\rho}}{}^{\bar{\beta}} = \delta^{\beta}_{\nu}$ durch Kontraktion mit $\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\beta}}$. Zusammenfassend:

$$\mathbb{S}_{\tilde{\rho}}{}^{\bar{\mu}}\, \mathbb{S}^{\tilde{\rho}}{}_{\bar{\nu}} \;=\; \delta^{\bar{\mu}}_{\bar{\nu}} \qquad \mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\rho}}\, \mathbb{S}_{\tilde{\nu}}{}^{\bar{\rho}} \;=\; \delta^{\tilde{\mu}}_{\tilde{\nu}} \tag{D.75}$$

$$\text{d.h.} \qquad \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right)^{-1} \;=\; \left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right)^{t} \tag{D.75$'$}$$

Die Matrizen $\left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right)$ und $\left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right)$ sind *kontragredient*: die eine die transponierte Inverse der anderen. Wir bezeichnen:

$$\mathbb{S} \;\equiv\; \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right) \tag{D.76}$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right) \;\equiv\; \mathbb{S}^{-1\,t} \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\},\;\; \bar{\nu} \in \{+, -, 1, 2\} \tag{D.76$'$}$$

Durch Kontraktion von Gl.(D.74) mit $\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\rho}}$ folgt mithilfe von Gl. (D.75):

$$g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, \mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\rho}}\, \mathbb{S}^{\tilde{\nu}}{}_{\bar{\sigma}} \;=\; g_{\bar{\rho}\bar{\sigma}} \qquad \text{d.h.} \qquad \mathbb{S}^{\,t}\, \tilde{g}\, \mathbb{S} \;=\; \bar{g} \tag{D.77}$$

das heißt $\mathbb{S} \equiv \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right)$ ist *pseudo-orthogonal*. – Vgl. die Matrizen $\Lambda \equiv \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right)$ und $\Lambda^{-1\,t} \equiv \left(\Lambda_{\mu}{}^{\nu}\right)$ für Lorentz-Boosts, Gl. (D.19), und die Matrizen $\mathbb{L} \equiv \left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\nu}\right)$ und $\mathbb{L}^{-1\,t} \equiv \left(\mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\nu}\right)$ für die Transformation auf Lichtkegelkoordinaten, Gl. (D.19). Gl. (D.75$'$) impliziert ferner:

$$\det \mathbb{S} \equiv \det\left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right) \;=\; \left[\det\left(\mathbb{S}^{-1\,t}\right)\right]^{-1} \;\equiv\; \left[\det\left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right)\right]^{-1} \tag{D.78}$$

$$= g_{+-}\, [\varrho^2 \sinh\psi]^{-1} \;=\; [-\det \mathbb{L} \cdot \varrho^2 \sinh\psi]^{-1} \;=\; \sqrt{-\det \bar{g}}\, \Big/ \sqrt{-\det \tilde{g}}$$

vgl. Gl. (D.63$'$), bzgl. der letzten Identität die Gln. (D.64), (D.64$'$) und (D.69).

Die Matrix $\mathbb{S} \equiv \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right)$ folgt aus $\mathbb{S}^{-1\,t} \equiv \left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right)$ in Form von Gl. (D.63) durch Invertieren und Tranponieren oder äquivalent durch Ausmultiplizieren von Gl. (D.73) in Form:

$$\left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right) \;=\; \frac{1}{\det \tilde{g}} \begin{pmatrix} g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} & -g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \\ -g_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}} & g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \cdot \varrho\alpha \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{p}}} & \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{p}}} \\ \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}} & \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{m}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & g_{+-} \\ g_{-+} & 0 \end{pmatrix} \tag{D.79}$$

mithilfe der Relationen:

$$\mathrm{e}^{\pm\psi_{\mathfrak{p}}} \;-\; \mathrm{e}^{\mp\psi_{\mathfrak{m}}} \cosh\psi \;= \pm\, \mathrm{e}^{\mp\psi_{\mathfrak{m}}} \sinh\psi \tag{D.80}$$

$$\mathrm{e}^{\pm\psi_{\mathfrak{m}}} \;-\; \mathrm{e}^{\mp\psi_{\mathfrak{p}}} \cosh\psi \;= \pm\, \mathrm{e}^{\mp\psi_{\mathfrak{p}}} \sinh\psi \qquad \psi = \psi_{\mathfrak{p}} + \psi_{\mathfrak{m}} \tag{D.80$'$}$$

In Gl. (D.79) ist $\tilde{g}^{-1} \equiv \left(g^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)$ im Sinne der Inversen ausgedrückt durch die Komponenten des metrischen Tensors $\tilde{g} \equiv \left(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)$, vgl. die Gln. (D.70)-(D.70$''$). Wir haben:

$$\mathbb{S} \qquad \equiv \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right) \;=\; \det \mathbb{S} \cdot \varrho\alpha \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{m}}} & -\mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}} \\ -\mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{p}}} & \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{p}}} \end{pmatrix} \tag{D.81}$$

$$\mathbb{S}^{-1\,t} \;\equiv \left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right) \;=\; \varrho\alpha \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{p}}} & \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{p}}} \\ \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}} & \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{m}}} \end{pmatrix} \tag{D.81$'$}$$

vgl. Gl. (D.63), mit $\det \mathbb{S} \equiv \det\left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right)$, explizit nach Gl. (D.78).

Komponenten $x^{\tilde{\mu}}$, $x_{\tilde{\mu}}$ mit $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. Für einen beliebigen Lorentz-Vektor x sind die Komponenten $x^{\tilde{\mu}}$, $x_{\tilde{\mu}}$ bezüglich der Vektoren $e^{(\tilde{\mu})}$, $e_{(\tilde{\mu})}$ mit $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ genau die Projektionen im Sinne des Skalarprodukts – vgl. die Gln. (A.14), (A.32):

$$x^{\tilde{\mu}} \;=\; x \cdot e^{(\tilde{\mu})} \tag{D.82}$$

$$\text{und} \qquad x_{\tilde{\mu}} \;=\; x \cdot e_{(\tilde{\mu})} \qquad \mu \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\} \tag{D.82$'$}$$

Eingesetzt die Gln. (D.62), (D.72) folgt unmittelbar für kontravariante Komponenten:

$$x^{\tilde{\mu}} \;=\; \mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\, x^{\bar{\nu}} \tag{D.83}$$

$$\text{mit} \qquad \mathbb{S} \;\equiv\; \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right) \;=\; \det\mathbb{S}\cdot\varrho\alpha \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{m}}} & -\mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}} \\ -\mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{p}}} & \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{p}}} \end{pmatrix} \tag{D.83$'$}$$

und $\det\mathbb{S}$ nach Gl. (D.78) – und für kovariante Komponenten:

$$x_{\tilde{\mu}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\, x_{\bar{\nu}} \tag{D.84}$$

$$\text{mit} \qquad \mathbb{S}^{-1\,t} \;\equiv\; \left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right) \;=\; \varrho\alpha \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{p}}} & \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{p}}} \\ \mathrm{e}^{-\psi_{\mathfrak{m}}} & \mathrm{e}^{\psi_{\mathfrak{m}}} \end{pmatrix} \tag{D.84$'$}$$

vgl. die Gln. (D.81), (D.81′).

Für Vollständigkeit halten wir fest den entsprechenden Zusammenhang mit den konventionellen karthesischen Koodinaten; er lautet für kontravariante Komponenten:

$$x^{\tilde{\mu}} \;=\; \mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\rho}}\,\mathbb{L}^{\bar{\rho}}{}_{\nu}\, x^{\nu} \;=\; (\mathbb{S}\,\mathbb{L})^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\, x^{\nu} \tag{D.85}$$

$$\text{mit} \quad \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\rho}}\,\mathbb{L}^{\bar{\rho}}{}_{\nu}\right) = \mathbb{S}\,\mathbb{L} \equiv \left((\mathbb{S}\,\mathbb{L})^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right) \tag{D.85$'$}$$

$$= \det\mathbb{S}\,\det\mathbb{L}\cdot(-\varrho) \begin{pmatrix} \sinh\psi_{\mathfrak{m}} & \cosh\psi_{\mathfrak{m}} \\ \sinh\psi_{\mathfrak{p}} & -\cosh\psi_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix}$$

und für kovariante Komponenten:

$$x_{\tilde{\mu}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\rho}}\,\mathbb{L}_{\bar{\rho}}{}^{\nu}\, x_{\nu} \;=\; (\mathbb{S}\,\mathbb{L})_{\tilde{\mu}}{}^{\nu}\, x_{\nu} \tag{D.86}$$

$$\text{mit} \quad \left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\rho}}\,\mathbb{L}_{\bar{\rho}}{}^{\nu}\right) = \mathbb{S}^{-1\,t}\,\mathbb{L}^{-1\,t} = \left(\mathbb{L}^{-1}\mathbb{S}^{-1}\right)^{t} = (\mathbb{S}\,\mathbb{L})^{-1\,t} \equiv \left((\mathbb{S}\,\mathbb{L})_{\tilde{\mu}}{}^{\nu}\right) \tag{D.86$'$}$$

$$= \varrho \begin{pmatrix} \cosh\psi_{\mathfrak{p}} & \sinh\psi_{\mathfrak{p}} \\ \cosh\psi_{\mathfrak{m}} & -\sinh\psi_{\mathfrak{m}} \end{pmatrix}$$

Bzgl. der Determinanten $\det\mathbb{S}$, $\det\mathbb{L}$ vgl. Gl. (D.78) beziehungsweise:

$$\det\mathbb{L} \equiv \det\left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\nu}\right) \;=\; \left[\det\left(\mathbb{L}^{-1\,t}\right)\right]^{-1} \equiv \left[\det\left(\mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\nu}\right)\right]^{-1} \tag{D.87}$$

$$= \left[-\,g_{+-}\right]^{-1} \;=\; -\,g^{+-} \;=\; -\,2\alpha^{2}$$

vgl. Gl. (A.18′) und die Gln. (A.21), (A.23). Wir verfügen mit den Gln. (D.85), (D.85′) und (D.86), (D.86′) über die allgemeinen Transformationsformeln für kontra- beziehungsweise kovariante Lorentz-Tensorkomponenten.

Epsilon-Pseudotensor $\tilde{\epsilon} \equiv \left(\epsilon^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\right)$ mit $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. Der Epsilon-Pseudotensor: $\tilde{\epsilon} \equiv \left(\epsilon^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\right)$ mit $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$, ist definiert durch seine kontravarianten Komponenten. Diese folgen aus den Gln. (D.83), (D.83′) mithilfe der Leibnitz'schen Determinantenformel und den Gln. (A.24), (A.24′):

$$\epsilon^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \;=\; \mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\alpha}}\,\mathbb{S}^{\tilde{\nu}}{}_{\bar{\beta}}\,\mathbb{S}^{\tilde{\rho}}{}_{\bar{\gamma}}\,\mathbb{S}^{\tilde{\sigma}}{}_{\bar{\delta}}\,\epsilon^{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} \tag{D.88}$$

$$= \det\left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\alpha}}\right)\det\left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\right)\cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mu} & \tilde{\nu} & \tilde{\rho} & \tilde{\sigma} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{m} & 1 & 2 \end{pmatrix} \epsilon^{0123} \tag{D.89}$$

entsprechend die kovarianten Komponenten mithilfe der Gln. (A.25), (A.25′):

$$\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\alpha}}\,\mathbb{S}_{\tilde{\nu}}{}^{\bar{\beta}}\,\mathbb{S}_{\tilde{\rho}}{}^{\bar{\gamma}}\,\mathbb{S}_{\tilde{\sigma}}{}^{\bar{\delta}}\,\epsilon_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} \tag{D.90}$$

$$= \det\left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\alpha}}\right)\det\left(\mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\alpha}\right)\cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mu} & \tilde{\nu} & \tilde{\rho} & \tilde{\sigma} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{m} & 1 & 2 \end{pmatrix} \epsilon_{0123} \tag{D.91}$$

bzgl. der Determinanten $\det\left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\alpha}}\right)$, $\det\left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\alpha}}\right)$ und $\det\left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\alpha}\right)$, $\det\left(\mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\alpha}\right)$ sei verwiesen auf Gl. (D.78) bzw. (D.87). Unsere Konvention für $\epsilon \equiv \left(\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\right)$ ist

$$\epsilon^{0123} \;\equiv\; +1 \qquad \Longrightarrow \qquad \epsilon_{0123} \;=\; -1 \tag{D.92}$$

vgl. Gl. (A.7′). Das Signum der Indexpermutation $(\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\rho},\tilde{\sigma})\to(\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2)$ ist notiert durch das Klammersymbol entsprechend Gl. (A.8).

Fixierung von ϱ. Die positiv-reelle Konstante ϱ wird bestimmt durch die Forderung von *Längentreue* der Abbildung zwischen den Koordinaten $\bar{\mu}$ und $\tilde{\mu}$, daß sie ergo die Determinante der Metrik invariant läßt oder äquivalent – vgl. Gl. (D.78) – die Determinante der Transformationsmatrix identisch Eins ist:

$$\det\tilde{g} \;\equiv\; \det\bigl(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\bigr) \;\stackrel{!}{=}\; \det\bar{g} \;\equiv\; \det\bigl(g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\bigr) \tag{D.93}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \det\mathbb{S} \;\equiv\; \det\bigl(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\bigr) \;\stackrel{!}{=}\; 1 \qquad \text{für alle } \psi\in(0,\infty) \tag{D.93′}$$

Dann impliziert Gl. (D.63′) für $\varrho\in\mathbb{R}^+$, mit $\psi\in(0,\infty)$:

$$\varrho^2 \;=\; g_{+-}\,\sinh^{-1}\psi \tag{D.94}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \varrho \;\equiv\; \varrho(\psi) \;=\; \bigl(g_{+-}\,\sinh^{-1}\psi\bigr)^{1/2} \tag{D.94′}$$

Für die Komponenten des metrischen Tensors $\tilde{g}\equiv\bigl(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\bigr)$ folgt:

$$g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;\equiv\; g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;=\; \varrho^2 \;=\; g_{+-}\,\sinh^{-1}\psi \tag{D.95}$$

$$\longrightarrow\; g_{++} \;\equiv\; g_{--} \;\equiv\; 0 \qquad \text{für } \psi\to\infty \tag{D.95′}$$

$$g_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \;\equiv\; g_{\mathfrak{m}\mathfrak{p}} \;=\; \varrho^2\,\cosh\psi \;=\; g_{+-}\,\tanh^{-1}\psi \tag{D.96}$$

$$\longrightarrow\; g_{+-} \;\equiv\; g_{-+} \qquad \text{für } \psi\to\infty \tag{D.96′}$$

vgl. Gl. (D.68) bzw. (D.68′).

Im Hochenergielimes: $\psi_{\mathfrak{p}},\psi_{\mathfrak{m}}\to\infty\Rightarrow\psi\to\infty$, gehen *per constructionem* die Koordinatenlinien ineinander über entsprechend $\mathfrak{p}\to+$, $\mathfrak{m}\to-$, – entsprechend die Metriken

$$\tilde{g} \;\equiv\; \bigl(g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\bigr) \;\longrightarrow\; \bar{g} \;\equiv\; \bigl(g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}\bigr) \qquad \text{für } \psi\to\infty \tag{D.97}$$

wie verifiziert durch die Gln. (D.95′), (D.96′). Die Diskrepanz zwischen Hochenergielimes und endlichen Lorentz-Boosts: $\psi_{\mathfrak{p}},\psi_{\mathfrak{m}}<\infty\Rightarrow\psi<\infty$, ist subsumiert in Faktoren hyperbolischer Funktionen und im Nichtverschwinden der *Diagonalelemente* $g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}$, $g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}$ der Metrik.

„Längen" der Weltlinien $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$: Eigenzeiten $T_{\mathfrak{p}}$, $T_{\mathfrak{m}}$. Die „Längen" der Weltlinien $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}}$ – die Eigenzeiten $T_{\mathfrak{p}}$, $T_{\mathfrak{m}}$ der Propagation der Teilchen $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ in den Systemen $I_{\mathfrak{p}}$, $I_{\mathfrak{m}}$ – hängen ab von den Lorentz-Boosts, das heißt deren Parameter $\psi_{\mathfrak{p}}$, $\psi_{\mathfrak{m}}$.

Wir betrachten das geboostete Teilchen $\mathfrak{p}$, im System $I_{\mathfrak{p}}$. Es propagiert nach Konstruktion – vgl. Abb. D.2 – mit konstanter Geschwindigkeit über die Eigenzeit $\Delta\tau=T_{\mathfrak{p}}$, so daß seine Weltlinie $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}$ genau die geradlinige Verbindung sei zwischen den Weltpunkten $-\tilde{\zeta}$ und $\tilde{\zeta}$ mit $\pm\tilde{\zeta}\equiv(\pm\zeta^{\tilde{\mu}})=(\pm\zeta^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}},0,0,0)^t$. Wir haben die explizite Parametrisierung:[D.12]

$$\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \;\equiv\; \mathcal{C}_{\mathfrak{p}}(\lambda) \;=\; \bigl\{\tilde{\zeta}\bigm|\; \tilde{\zeta}(\lambda)=\zeta^{\tilde{\mu}}(\lambda)\,e_{(\tilde{\mu})}=(2\lambda-1)\,\zeta^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}}\,e_{(\mathfrak{p})},\;\; \lambda\colon 0\to 1\bigr\} \tag{D.98}$$

mit λ dem Kurvenparameter. Wir berechnen den Zusammenhang von Eigenzeit $T_{\mathfrak{p}}$ und Parameter $\zeta_{\mathfrak{p}}$ der Weltlinien-Endpunkte. Aus Gl. (D.98) folgt unmittelbar:

$$\frac{d\zeta^{\tilde{\mu}}}{d\lambda}(\lambda) \;=\; \delta^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}\;2\,\zeta^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}} \tag{D.99}$$

und hiermit für die Eigenzeit – dem invarianten Linienelement entlang der Weltlinie:

$$T_{\mathfrak{p}} \;=\; \int_0^{T_{\mathfrak{p}}} d\tau \;\equiv\; \int_{\mathcal{C}_{\mathfrak{p}}} ds \;=\; \int_0^1 d\lambda\,\frac{ds}{d\lambda} \;=\; \int_0^1 d\lambda\,\sqrt{g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\,\frac{d\zeta^{\tilde{\mu}}}{d\lambda}\,\frac{d\zeta^{\tilde{\nu}}}{d\lambda}} \tag{D.100}$$

$$=\; \int_0^1 d\lambda\,\sqrt{g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}\,(2\,\zeta^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}})^2} \;=\; \sqrt{g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}}\cdot 2\,\zeta^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}} \tag{D.100′}$$

[D.12] Seien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ Lorentz-Indizes, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ Notation der Teilchen und deren Ruhsysteme, vgl. Fußn. D.9. Seien ferner in diesem Paragraphen o.E.d.A. die konstanten Koordinaten identisch Null gesetzt.

umgekehrt die Weltlinien-Endpunkte als Funktion der Eigenzeit der Propagation:[D.13]

$$\zeta^{\mathfrak{p}}_{\mathfrak{p}} \;=\; 1/\sqrt{g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}}}\cdot T_{\mathfrak{p}}/2 \tag{D.101}$$

$$\zeta^{\mathfrak{m}}_{\mathfrak{m}} \;=\; 1/\sqrt{g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}}}\cdot T_{\mathfrak{m}}/2 \tag{D.101'}$$

$$\text{mit}\qquad g_{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;=\; g_{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;=\; \varrho^2 \;=\; g_{+-}\,\sinh^{-1}\psi \tag{D.102}$$

vgl. die Gln. (D.68), (D.94). Gemessen im gemeinsamen initialen Ruhsystem $I_{\mathbf{0}} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{p}} \equiv I_{\mathbf{0}\mathfrak{m}}$ wandern die Weltlinien-Endpunkte $(\pm\zeta_{\mathfrak{p}}, 0, 0, 0)^t$, $(0, \pm\zeta_{\mathfrak{m}}, 0, 0)^t$ der geboosteten Teilchen im Sinne der Zeitdilatation wie $\sim\sinh^{1/2}\psi$ ins Unendliche. Analog folgt:

$$T_{\mathbf{0}} \;=\; \sqrt{g_{00}}\cdot 2\,\zeta^0_{\mathbf{0}} \tag{D.103}$$

$$\Longleftrightarrow\qquad \zeta^0_{\mathbf{0}} \;=\; 1/\sqrt{g_{00}}\cdot T_{\mathbf{0}}/2 \qquad\qquad \text{mit}\qquad g_{00}\equiv 1 \tag{D.104}$$

für $T_{\mathbf{0}}$ die Eigenzeit der „Propagation“ in $I_{\mathbf{0}}$ und $(\pm\zeta^0_{\mathbf{0}}, 0, 0, 0)^t$ die Weltlinien-Endpunkte.

D.5 Euklidische Koordinaten: $\{e_{\mathrm{E}(\tilde{\mu})}, x^{\tilde{\mu}}_{\mathrm{E}}\}$; – versus $\{e_{\mathrm{E}(\mu)}, x^{\mu}_{\mathrm{E}}\}$ [D.9]

Analog wie auf der physikalischen Minkowskischen Raumzeit werden definiert Koordinaten auf deren Analytischen Fortsetzung ins Euklidische. Wir entwickeln diese Definitionen.

D.5.1 Analytische Fortsetzung: $\{e_{\mathrm{E}(\mu)}, x^{\mu}_{\mathrm{E}}\}$ nach $\{e_{(\mu)}, x^{\mu}\}$ [D.14]

Analytische Fortsetzung der Minkowski-Raumzeit in eine Euklidische sei verstanden als formale Substitution der pseudo-Riemannschen Metrik durch eine Riemannsche im Sinne:

$$g \;\equiv\; (g_{\mu\nu}) \;=\; \mathrm{diag}[+1,-1,-1,-1] \tag{D.105}$$
$$\overset{!}{\longrightarrow}\; \mathrm{diag}[-1,-1,-1,-1] \;=\; -(\delta_{\mathrm{E}\mu\nu}) \;\equiv\; -\delta_{\mathrm{E}} \;\equiv\; g_{\mathrm{E}}$$

Für zeitartige Lorentz-Komponeneten impliziert dies Konsequenzen, die folgen aus der Forderung von Invarianz des Vierer-Skalarprodukts beliebiger Vektoren a, b:[D.15]

$$a\cdot b \;=\; g_{\mu\nu}\,a^{\mu}\,b^{\nu} \;=\; a^0\,b^0 - \delta_{ij}\,a^i\,b^j \;=\; -\,\delta_{00}\,(\mathrm{i}a^0)\,(\mathrm{i}b^0) - \delta_{ij}\;a^i\;b^j \tag{D.106}$$
$$\overset{!}{\longrightarrow}\; a_{\mathrm{E}}\cdot b_{\mathrm{E}} \;=\; g_{\mathrm{E}\mu\nu}\,a^{\mu}_{\mathrm{E}}\,b^{\nu}_{\mathrm{E}} \;=\; -\,\delta_{\mathrm{E}\mu\nu}\,a^{\mu}_{\mathrm{E}}\,b^{\nu}_{\mathrm{E}}$$
$$=\; -\,\delta_{\mathrm{E}44}\,a^4_{\mathrm{E}}\,b^4_{\mathrm{E}} - \delta_{\mathrm{E}ij}\;a^i_{\mathrm{E}}\;b^j_{\mathrm{E}}$$

vgl. Gl. (A.20). – Bezogen auf Weltpunkte x impliziert Substitution der Metrik $g\to g_{\mathrm{E}}=-\delta_{\mathrm{E}}$ bei Forderung von Invarianz des Skalarprodukts – vgl. die Gln. (D.105), (D.106):

$$\mathrm{i}x^0 \;\longrightarrow\; x^4_{\mathrm{E}} \tag{D.107}$$

$$x^i \;\longrightarrow\; x^i_{\mathrm{E}} \qquad i\in\{1,2,3\} \tag{D.107'}$$

das heißt Identifizierung von x^4_{E} mit $\mathrm{i}x^0$ und trivial von x^i_{E} mit x^i für $i\in\{1,2,3\}$.

Durch Gl. (D.106) ist das Vierer-Skalarprodukt definiert als *negativ definit*:

$$a_{\mathrm{E}}\cdot a_{\mathrm{E}} \;=\; -\,a^{\mu}_{\mathrm{E}}\,a^{\mu}_{\mathrm{E}} \;\leq\; 0 \tag{D.108}$$

Kovariante Komponenten seien allgemein definiert durch:

$$a_{\mathrm{E}\mu} \;:=\; g_{\mathrm{E}\mu\nu}\,a^{\nu}_{\mathrm{E}} \;=\; -\delta_{\mathrm{E}\mu\nu}\,a^{\nu}_{\mathrm{E}} \tag{D.109}$$

Sie differieren durch ein *Signum* von den kontravarianten Komponenten: $a_{\mathrm{E}\mu}=-a^{\mu}_{\mathrm{E}}$. Es sind daher auch bezüglich Euklidischer Größen streng zu unterscheiden kontra- und kovariante

[D.13] Der Zusammenhang für Teilchen $\mathfrak{m}$ folgt in vollständiger Analogie durch Substitution $\mathfrak{p}\to\mathfrak{m}$ und $\mathrm{p}\to\mathrm{m}$.

[D.14] Das Skript „E“ stellt klar den Raumzeit-Index μ als Euklidisch: $\mu\in\{1,2,3,4\}$ statt $\in\{0,1,2,3\}$.

[D.15] Unsere Konvention sei: $+\mathrm{i}x^0\to x^4_{\mathrm{E}}$; Euklidische Größen tragen konsequent das Skript „E“, ihre (Lorentz)Indizes μ beziehen sich dann auf die Werte $\in\{1,2,3,4\}$.

(Lorentz-)Tensorkomponenten. – Diese Konventionen geschehen in vollständiger Analogie zum Minkowskischen; sie reduzieren unsere explizite Rechnung auf ein Minimum.

Der Euklidische Epsilon-Pseudotensor $\epsilon_{\mathrm{E}} \equiv (\epsilon_{\mathrm{E}}^{\mu\nu\rho\sigma})$ sei definiert als das Signum der Permutation seiner Indizes – durch seine kontravrianten Komponenten wie folgt:

$$\epsilon_{\mathrm{E}}^{\mu_1 \cdots \mu_4} \equiv \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_4 \\ 1 & \cdots & 4 \end{pmatrix} \epsilon^{1234} \tag{D.110}$$

$$\textit{per definitionem:} \qquad \epsilon_{\mathrm{E}}^{1234} \equiv +1 \tag{D.110'}$$

und *folglich:* $\epsilon_{\mathrm{E}1234} = g_{\mathrm{E}1\mu}\, g_{\mathrm{E}2\nu}\, g_{\mathrm{E}3\rho}\, g_{\mathrm{E}4\sigma}\, \epsilon_{\mathrm{E}}^{\mu\nu\rho\sigma} = (-1)^4\, \epsilon_{\mathrm{E}}^{1234} \equiv +1$; vgl. die Gln. (A.7), (A.8).

Mit $\epsilon_{0123} \equiv -1$ folgt durch Permutation der Indizes:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{pmatrix} \mu & \nu & \rho & \sigma \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \epsilon_{0123} = (-1)^{1+3} \begin{pmatrix} \mu & \nu & \rho & \sigma \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{D.111}$$

und damit für beliebige Lorentz-Vektoren a, b, c, d:

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\, a^\mu\, b^\nu\, c^\rho\, d^\sigma = -\mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} \mu & \nu & \rho & \sigma \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{i} \cdot a^\mu\, b^\nu\, c^\rho\, d^\sigma \tag{D.112}$$

$$\longrightarrow -\mathrm{i} \cdot \begin{pmatrix} \mu & \nu & \rho & \sigma \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} a_{\mathrm{E}}^\mu\, b_{\mathrm{E}}^\nu\, c_{\mathrm{E}}^\rho\, d_{\mathrm{E}}^\sigma = -\mathrm{i} \cdot \epsilon_{\mathrm{E}\mu\nu\rho\sigma}\, a_{\mathrm{E}}^\mu\, b_{\mathrm{E}}^\nu\, c_{\mathrm{E}}^\rho\, d_{\mathrm{E}}^\sigma$$

aufgrund der Gln. (D.107), (D.107'), da genau ein Index den Wert „0“ annimmt.

Lorentz-Tensorgleichungen involvieren o.E. Vektorfunktionen $a^\mu(x)$, den metrischen Tensor g und den Epsilon-Pseudotensor ϵ; es folgt als allgemeine Substitutionsvorschrift für den Übergang von Minkowskischer zu Euklidischer Raumzeit – vgl. die Gln. (D.106), (D.112):

$$a^\mu(x) \longrightarrow a_{\mathrm{E}}^\mu(x_{\mathrm{E}}) \tag{D.113}$$

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow g_{\mathrm{E}\mu\nu} = -\delta_{\mathrm{E}\mu\nu} \tag{D.113'}$$

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \longrightarrow -\mathrm{i}\, \epsilon_{\mathrm{E}\mu\nu\rho\sigma} \tag{D.113''}$$

mit Euklidischen Vektor-Komponenten a_{E}^μ im Sinne der Gln. (D.107), (D.107').

Die zugehörigen Basisvektoren $e_{\mathrm{E}(\mu)} \equiv (e_{\mathrm{E}(\mu)}{}^\nu)$ sind analog definiert wie im Minkowskischen, vgl. die Gln. (D.50), (D.50'):

$$e_{\mathrm{E}(\mu)} \cdot e_{\mathrm{E}(\mu)} = g_{\mathrm{E}\mu\nu} \tag{D.114}$$

$$\text{mit} \qquad e_{\mathrm{E}(\mu)}{}^\nu = g_{\mathrm{E}\mu}{}^\nu = \delta_{\mathrm{E}\mu}^\nu \qquad \mu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{D.114'}$$

Analog gelten die weiteren Relationen von Anh. A.1.1 – unter Anbringung des Skripts „E“ für „Euklidisch“ und Bezug der (Lorentz)Indizes auf die Werte $\in \{1, 2, 3, 4\}$.

D.5.2 $O(4)$-Drehungen: $\{e_{\mathrm{E}(\tilde{\mu})}, x_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}}\}$ versus $\{e_{(\tilde{\mu})}, x^{\tilde{\mu}}\}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$

Die Konstruktion des Koordinatensystems $\{e_{\mathrm{E}(\tilde{\mu})}, x_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}}\}$ im Euklidischen wie folgt geschieht in vollständiger Analogie zu der von $\{e_{(\tilde{\mu})}, x^{\tilde{\mu}}\}$ im Minkowskischen, vgl. Abschn. D.4. Sei zunächst der Zusammenhang hergestellt zwischen $O(4)$-Drehungen und Lorentz-Boosts.

(Aktive) $O(4)$-Drehungen versus (aktive) Lorentz-Boosts. Wir betrachten nach Abbildung D.3 die $O(4)$-Drehung in der $x_{\mathrm{E}}^4 x_{\mathrm{E}}^3$-Ebene um den Winkel $0 < \theta < \pi/4$. Für x_{E} ein beliebiger Vektor der Raumzeit gilt in *passiver* Auffassung, vgl. oben Seite 244:[D.16]

$$x_{\mathrm{E}}^{\mu'} = \Lambda_{\mathrm{E}}{}^\mu{}_\nu\, x_{\mathrm{E}}^\nu \qquad \mu, \nu \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{D.115}$$

$$\text{mit} \qquad \Lambda_{\mathrm{E}} \equiv (\Lambda_{\mathrm{E}}{}^\mu{}_\nu) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{D.115'}$$

[D.16] Wir schreiben aus nur die nichttrivialen longitudinalen Komponenten, vgl. Fußn. D.3 und D.11, – für Kommensurabilität die Vier- vor der Drei-Komponente: $(0,3)_{\mathrm{M}} \leftrightarrow (+,-)_{\mathrm{M}} \leftrightarrow (\mathfrak{p}, \mathfrak{m})_{\mathrm{M}}$ versus $(4,3)_{\mathrm{E}} \leftrightarrow (\mathfrak{p}, \mathfrak{m})_{\mathrm{E}}$.

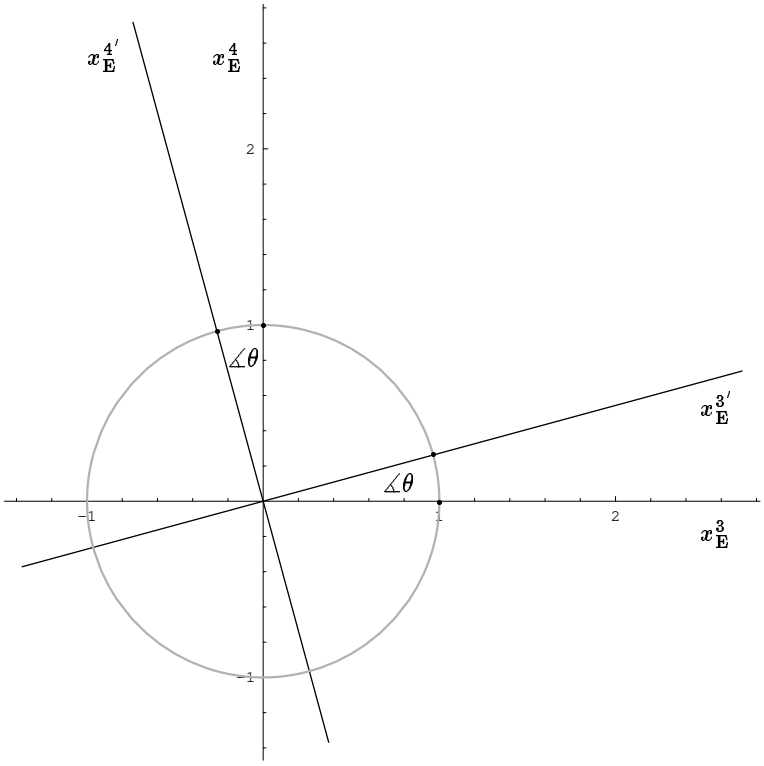


Abbildung D.3: Euklidische Raumzeit: Allgemeine $O(4)$-Drehung. Seien x^4_{E}, x^3_{E} die karthesischen Achsen des Euklidischen Bezugsystems I_{E}. Das System I'_{E} mit Achsen $x^{4'}_{\mathrm{E}}$, $x^{3'}_{\mathrm{E}}$ geht hervor aus I_{E} wie dargestellt durch eine $O(4)$-Drehung mit Winkel θ mit $0 \leq |\theta| < \pi/4$. Die Einsen der Achsen bei definiter Metrik sind bestimmt durch eine Sphäre – statt durch Hyperboloide bei indefiniter Metrik. Vgl. Abb. D.1.

explizit:

$$\begin{pmatrix} x^{4'}_{\mathrm{E}} \\ x^{3'}_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{4}_{\mathrm{E}} \\ x^{3}_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \tag{D.116}$$

Die Gleichung der $x^{4'}_{\mathrm{E}}$-Achse: $x^{3'}_{\mathrm{E}} = 0$, ist gegeben durch $x^4_{\mathrm{E}} = -[\tan\theta]^{-1}\, x^3_{\mathrm{E}}$, die der $x^{3'}_{\mathrm{E}}$-Achse: $x^{4'}_{\mathrm{E}} = 0$, entsprechend durch $x^4_{\mathrm{E}} = \tan\theta\, x^3_{\mathrm{E}}$. Mit

$$\cosh z = \cos(-\mathrm{i}z) \iff \cos z' = \cosh(\mathrm{i}z') \tag{D.117}$$

$$\sinh z = \mathrm{i}\sin(-\mathrm{i}z) \iff \sin z' = -\mathrm{i}\sinh(\mathrm{i}z') \qquad \forall z, z' \in \mathbb{C} \tag{D.117'}$$

folgt aus Gl. (D.116) unmittelbar:

$$\begin{pmatrix} x^{4'}_{\mathrm{E}} \\ x^{3'}_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \mathrm{i}\theta & \mathrm{i}\sinh \mathrm{i}\theta \\ -\mathrm{i}\sinh \mathrm{i}\theta & \cosh \mathrm{i}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{4}_{\mathrm{E}} \\ x^{3}_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \tag{D.118}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{i}\cosh \mathrm{i}\theta & \mathrm{i}\sinh \mathrm{i}\theta \\ \sinh \mathrm{i}\theta & \cosh \mathrm{i}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\, x^{4}_{\mathrm{E}} \\ x^{3}_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \tag{D.118'}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit dem Faktor $-\mathrm{i}$ ergibt weiter:

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\, x^{4'}_{\mathrm{E}} \\ x^{3'}_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \mathrm{i}\theta & \sinh \mathrm{i}\theta \\ \sinh \mathrm{i}\theta & \cosh \mathrm{i}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\, x^{4}_{\mathrm{E}} \\ x^{3}_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \tag{D.119}$$

In Konfrontation mit

$$\begin{pmatrix} x^{0'} \\ x^{3'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & -\sinh\psi \\ -\sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{D.120}$$

vgl. die Gln. (D.1), (D.4), – folgt mit $\mathrm{i}x^0 \leftrightarrow x^4_{\mathrm{E}}$ und $x^i \leftrightarrow x^i_{\mathrm{E}}$, $i \in \{1,2,3\}$, vgl. die Gln. (D.107), (D.107′), und $\cosh z = \cosh -z$, $\sinh z = -\sinh -z$, $\forall z \in \mathbb{C}$, der Zusammenhang: $-\mathrm{i}\,\theta \leftrightarrow \psi$.

Es gilt anlog in *aktiver* Auffassung, vgl. oben Seite 244:

$$x'^{\mu}_{\mathrm{E}} = \Lambda_{\mathrm{E}\nu}{}^{\mu}\, x^{\nu}_{\mathrm{E}} \qquad \mu, \nu \in \{1,2,3,4\} \tag{D.121}$$

$$\text{mit} \qquad \Lambda^{-1\,t}_{\mathrm{E}} \equiv \left(\Lambda_{\mathrm{E}\nu}{}^{\mu}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{D.121′}$$

explizit:

$$\begin{pmatrix} x'^4_{\mathrm{E}} \\ x'^3_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^4_{\mathrm{E}} \\ x^3_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \tag{D.122}$$

An Stelle von Gl. (D.119) tritt:[D.17]

$$\begin{pmatrix} -\mathrm{i}\,x'^4_{\mathrm{E}} \\ x'^3_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\ -\mathrm{i}\theta & \sinh\ -\mathrm{i}\theta \\ \sinh\ -\mathrm{i}\theta & \cosh\ -\mathrm{i}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\mathrm{i}\,x^4_{\mathrm{E}} \\ x^3_{\mathrm{E}} \end{pmatrix} \tag{D.123}$$

In Konfrontation mit

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\psi & \sinh\psi \\ \sinh\psi & \cosh\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^3 \end{pmatrix} \tag{D.124}$$

vgl. die Gln. (D.26), (D.26′), – folgt wie oben der Zusammenhang: $-\mathrm{i}\,\theta \leftrightarrow \psi$.

Koordinatenlinien $\tilde{\mu}_{\mathrm{E}} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. Im Minkowskischen werden betrachtet aktive Lorentz-Boosts $\Lambda_{\mathfrak{p}}$, $\Lambda_{\mathfrak{m}}$ gegeneinander, die induzieren Basisvektoren $e'_{(\mu)} = (\Lambda_{\mathfrak{p}})_{\mu}{}^{\nu}\, e_{(\nu)}$ und $e''_{(\mu)} = (\Lambda_{\mathfrak{m}})_{\mu}{}^{\nu}\, e_{(\nu)}$, mit $\mu, \nu \in \{0,1,2,3\}$, vgl. die Gln. (D.51), (D.51′) und Gl. (D.33′). Im Euklidischen treten an ihre Stelle respektive: aktiv zu verstehende $O(4)$-Drehungen $\Lambda_{\mathfrak{p}\,\mathrm{E}}$, $\Lambda_{\mathfrak{m}\,\mathrm{E}}$ und Vektoren $e'_{\mathrm{E}(\mu)}$, $e''_{\mathrm{E}(\mu)}$ wie folgt:

$$e'_{\mathrm{E}(\mu)} = (\Lambda_{\mathfrak{p}\,\mathrm{E}})_{\mu}{}^{\nu}\, e_{\mathrm{E}(\nu)} \qquad \mu, \nu \in \{1,2,3,4\} \tag{D.125}$$

$$\text{mit} \qquad \left((\Lambda_{\mathfrak{p}\,\mathrm{E}})_{\mu}{}^{\nu}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathfrak{p}} & -\sin\theta_{\mathfrak{p}} \\ \sin\theta_{\mathfrak{p}} & \cos\theta_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \tag{D.125′}$$

und

$$e''_{\mathrm{E}(\mu)} = (\Lambda_{\mathfrak{m}\,\mathrm{E}})_{\mu}{}^{\nu}\, e_{\mathrm{E}(\nu)} \qquad \mu, \nu \in \{1,2,3,4\} \tag{D.126}$$

$$\text{mit} \qquad \left((\Lambda_{\mathfrak{m}\,\mathrm{E}})_{\mu}{}^{\nu}\right) = \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathfrak{m}} & \sin\theta_{\mathfrak{m}} \\ -\sin\theta_{\mathfrak{m}} & \cos\theta_{\mathfrak{m}} \end{pmatrix} \tag{D.126′}$$

Seien analog diese Drehungen aufgefaßt im Sinne *nichtverschwindender $O(4)$-Transformationen gegeneinander*, die Drehwinkel definiert als *positiv*:[D.18]

$$0 < \theta_{\imath} < \pi/4 \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.127}$$

Dann gilt, vgl. oben:

$$-\mathrm{i}\,\theta_{\imath} \longleftrightarrow \psi_{\imath} \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{D.128}$$

als Zusammenhang im Sinne analytischer Fortsetzung mit $0 < \psi_{\imath} < \infty$, $\imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$, den hyperbolischen Winkeln der Lorentz-Boosts; vgl. Gl. (D.36). Wir merken an den Zusammenhang

[D.17] Substitution $\theta \to -\theta$

[D.18] Mit der Vorzeichenkonvention der Gln. (D.125′), (D.126′) vermitteln $\Lambda_{\mathfrak{p}\,\mathrm{E}}$, $\Lambda_{\mathfrak{m}\,\mathrm{E}}$ bzgl. Abb. D.3 Drehungen ergo in *mathematisch positiven* bzw. *negativen* Sinne; die Darstellung der Weltlinien im Euklidischen ist gegeben durch Abb. D.2 unter Substitution der Achsen $x^0 \to x^4_{\mathrm{E}}$, $x^3 \to x^3_{\mathrm{E}}$ und Trajektorien $\mathcal{C}_{\mathfrak{m}} \to \mathcal{C}_{\mathfrak{p}\,\mathrm{E}}$, $\mathcal{C}_{\mathfrak{p}} \to \mathcal{C}_{\mathfrak{m}\,\mathrm{E}}$. Notation der Vier- vor der Drei-Komponente, vgl. Fußn. D.16, entspricht einem *Linkssystem*.

der Drehwinkel θ_i im Euklidischen und α, $\tan\alpha := \beta$, im Minkowskischen; es gilt $0<\alpha<\pi/4$ für $0<\beta<1$ und $\alpha\to\pi/4$ im Limes $\beta\to 1$. Vgl. die Gln. (D.6), (D.11′) und Abb. D.1.

Es werden longitudinale Koordinaten definiert bezüglich der Richtungen der transformierten Weltlinien, ergo bezüglich der Zeit-, das heißt der Vier-Achsen $e'_{\mathbf{E}(4)}$, $e''_{\mathbf{E}(4)}$:

$$e_{\mathbf{E}(\mathfrak{p})} := \varrho_{\mathbf{E}}\left(\cos\theta_{\mathfrak{p}}\; e_{\mathbf{E}(4)} - \sin\theta_{\mathfrak{p}}\; e_{\mathbf{E}(3)}\right) \tag{D.129}$$

$$e_{\mathbf{E}(\mathfrak{m})} := \varrho_{\mathbf{E}}\left(\cos\theta_{\mathfrak{m}}\; e_{\mathbf{E}(4)} + \sin\theta_{\mathfrak{m}}\; e_{\mathbf{E}(3)}\right) \tag{D.129′}$$

$$\text{und} \qquad e_{\mathbf{E}(\tilde i)} := e_{\mathbf{E}(i)} \qquad i\in\{1,2\} \tag{D.129″}$$

mit $\varrho_{\mathbf{E}}\in\mathbb{R}^+$ einer geeignet zu wählenden Konstanten; vgl. die Gln. (D.54)-(D.54″).

Die Vektoren $e_{\mathbf{E}(\tilde\mu)}$, $\tilde\mu\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$, repräsentieren Koordinatenlinien, diebezüglich induziert wird ein metrischer Tensor $\tilde g_{\mathbf{E}}\equiv\left(g_{\mathbf{E}\tilde\mu\tilde\nu}\right)$ durch:

$$e_{\mathbf{E}(\tilde\mu)}\cdot e_{\mathbf{E}(\tilde\nu)} = g_{\mathbf{E}\tilde\mu\tilde\nu} \tag{D.130}$$

$$\text{mit} \qquad e_{\mathbf{E}(\tilde\mu)}{}^{\tilde\nu} = g_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{\tilde\nu} = \delta_{\mathbf{E}\tilde\mu}^{\tilde\nu} \qquad \tilde\mu,\tilde\nu\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\} \tag{D.130′}$$

vgl. die Vektoren $e_{(\tilde\mu)}$, $\tilde\mu\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ im Minkowskischen, die Gln. (D.65), (D.65′).

Basisvektoren $e^{(\tilde\mu)}_{\mathbf{E}}$, $e_{\mathbf{E}(\tilde\mu)}$ und induzierte Metrik $\tilde g_{\mathbf{E}}\equiv\left(g_{\mathbf{E}\tilde\mu\tilde\nu}\right)$, $\tilde\mu_{\mathbf{E}}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$. Die Gln. (D.129)-(D.129″) lauten in Matrixform:[D.19]

$$e_{\mathbf{E}(\tilde\mu)} = \mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{\nu}\, e_{\mathbf{E}(\nu)} \qquad \tilde\mu\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\},\;\; \nu\in\{1,2,3,4\} \tag{D.131}$$

dabei ist

$$\left(\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{\nu}\right) = \varrho_{\mathbf{E}}\begin{pmatrix}\cos\theta_{\mathfrak{p}} & -\sin\theta_{\mathfrak{p}}\\ \cos\theta_{\mathfrak{m}} & \sin\theta_{\mathfrak{m}}\end{pmatrix} \tag{D.132}$$

$$\text{mit} \qquad \det\left(\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{\nu}\right) = \varrho_{\mathbf{E}}^2\,\sin\theta \tag{D.132′}$$

unter Definition

$$\theta := \theta_{\mathfrak{p}} + \theta_{\mathfrak{m}} \tag{D.133}$$

entsprechend $\psi=\psi_{\mathfrak{p}}+\psi_{\mathfrak{m}}$ nach Gl. (D.38).

Analog zu Gl. (D.66) im Minkowskischen gilt für die Transformation des (Vierer)Skalarprodukts der Basisvektoren:

$$e_{\mathbf{E}(\tilde\mu)}\cdot e_{\mathbf{E}(\tilde\nu)} = \mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{\alpha}\,\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\nu}{}^{\beta}\; e_{\mathbf{E}(\alpha)}\cdot e_{\mathbf{E}(\beta)} \tag{D.134}$$

Mithilfe von Gl. (D.114) und (D.130) gilt daher:

$$g_{\mathbf{E}\tilde\mu\tilde\nu} = \mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{\alpha}\,\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\nu}{}^{\beta}\; g_{\mathbf{E}\alpha\beta} \tag{D.135}$$

In Form $g_{\mathbf{E}\tilde\mu\tilde\nu}=-\left(\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{4}\,\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\nu}{}^{4}+\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{3}\,\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\nu}{}^{3}\right)$ folgen aus der expliziten Gestalt der Matrix $\left(\mathbb{SL}_{\mathbf{E}\tilde\mu}{}^{\nu}\right)$ nach Gl. (D.132) die Komponeneten $g_{\mathbf{E}\tilde\mu\tilde\nu}$ des Metrischen Tensors::

$$g_{\mathbf{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}} = g_{\mathbf{E}\mathfrak{m}\mathfrak{m}} = -\varrho_{\mathbf{E}}^2 \tag{D.136}$$

$$g_{\mathbf{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}} = g_{\mathbf{E}\mathfrak{m}\mathfrak{p}} = -\varrho_{\mathbf{E}}^2\cdot\cos\theta \tag{D.136′}$$

$$\text{und} \qquad g_{\mathbf{E}\tilde i\tilde j} = g_{\mathbf{E}ij} = -\delta_{ij} \qquad i\in\{1,2\} \tag{D.136″}$$

Vgl. die Gln. (D.68)-(D.68″) im Minkowskischen. Als die Determinante des metrischen Tensors folgt:

$$\det\tilde g_{\mathbf{E}} = \left(\varrho_{\mathbf{E}}^2\,\sin\theta\right)^2 \tag{D.137}$$

und umgekehrt: $\varrho_{\mathbf{E}}^2\,\sin\theta=\sqrt{\det\tilde g_{\mathbf{E}}}$; vgl. Gl. (D.69). Die inverse Metrik $\tilde g_{\mathbf{E}}^{-1}\equiv\left(g_{\mathbf{E}}^{\tilde\mu\tilde\nu}\right)$ existiert, falls nicht beide Drehwinkel verschwinden, wie bereits angenommen ist mit Gl. (D.127). Wir

[D.19] Im Minkowskischen geschieht die Transformation über Lichtkegelkoordinaten: zunächst $\mathbb{L}$, dann $\mathbb{S}$; sei hier die Matrix der unmittelbaren Transformation suggestiv bezeichnet mit beiden Buchstaben: $\mathbb{SL}_{\mathbf{E}}\equiv(\mathbb{SL})_{\mathbf{E}}$.

finden dann:

$$g_{\mathrm{E}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;=\; g_{\mathrm{E}}^{\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;=\; \quad g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \,/\, \det \tilde{g}_{\mathrm{E}} \tag{D.138}$$

$$g_{\mathrm{E}}^{\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \;=\; g_{\mathrm{E}}^{\mathfrak{m}\mathfrak{p}} \;=\; -\, g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \,/\, \det \tilde{g}_{\mathrm{E}} \tag{D.138$'$}$$

$$\text{und} \qquad g_{\mathrm{E}}^{\tilde{i}\tilde{j}} \;=\; g_{\mathrm{E}}^{ij} \;=\; -\delta^{ij} \qquad i \in \{1,2\} \tag{D.138$''$}$$

vgl. die Gln. (D.70), (D.70′).

Analog zu den Lorentz-Vektoren $e^{(\tilde{\mu})}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$ im Minkowskischen – vgl. die Gln. (D.71), (D.71′) – seien definiert im Euklidischen die Vektoren $e_{\mathrm{E}}^{(\tilde{\mu})}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$, durch:

$$e_{\mathrm{E}}^{(\tilde{\mu})} \;:=\; g_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\; e_{\mathrm{E}(\tilde{\nu})} \tag{D.139}$$

$$\Longrightarrow \qquad e_{\mathrm{E}(\tilde{\mu})} \;=\; g_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\; e_{\mathrm{E}}^{(\tilde{\nu})} \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\} \tag{D.139$'$}$$

Dann gilt:

$$e_{\mathrm{E}}^{(\tilde{\mu})} \;=\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\; e_{\mathrm{E}}^{(\nu)} \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\},\;\; \nu \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{D.140}$$

unter Definition

$$\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu} \;:=\; g_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}\tilde{\rho}}\;\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\rho}}{}^{\sigma}\;\; g_{\mathrm{E}\sigma\nu} \tag{D.141}$$

vgl. die Gln. (D.72), (D.73).

In vollständiger Analogie zum Minkowskischen – diskutieren wir und geben wir explizit an die Transformationsmatrix $\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right)$. Kontraktion von Gl. (D.141) mit $g_{\mathrm{E}\tilde{\alpha}\tilde{\mu}}$ ergibt [Umbenennung $\alpha \to \mu$]:

$$g_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\rho}}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\rho}}{}_{\nu} \;=\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\sigma}\; g_{\mathrm{E}\sigma\nu} \tag{D.142}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\sigma}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\rho}}{}^{\beta}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\rho}}{}_{\nu}\; g_{\mathrm{E}\sigma\beta} \;=\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\sigma}\; g_{\mathrm{E}\sigma\nu} \tag{D.142$'$}$$

$$\text{d.h.} \qquad \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\rho}}{}^{\beta}\; \mathbb{S}^{\tilde{\rho}}{}_{\nu} \;=\; \delta_{\mathrm{E}\nu}^{\beta}$$

und weiter $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\beta}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\rho}}{}^{\beta} = \delta_{\mathrm{E}\nu}^{\beta}$ durch Kontraktion mit $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\beta}}$. Zusammenfassend:

$$\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\rho}}{}^{\mu}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\rho}}{}_{\nu} \;=\; \delta_{\mathrm{E}\nu}^{\mu} \qquad \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\rho}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\nu}}{}^{\rho} \;=\; \delta_{\mathrm{E}\tilde{\nu}}^{\tilde{\mu}} \tag{D.143}$$

$$\text{d.h.} \qquad \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right)^{-1} \;=\; \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\nu}\right)^{t} \tag{D.143$'$}$$

Die Matrizen $\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right)$ und $\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\nu}\right)$ sind *kontragredient*: die eine die transponierte Inverse der anderen. Wir bezeichnen:

$$\mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right) \tag{D.144}$$

$$\Longrightarrow \qquad \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\nu}\right) \;\equiv\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{-1\,t} \qquad \tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\},\;\; \bar{\nu} \in \{1, 2, 3, 4\} \tag{D.144$'$}$$

Durch Kontraktion von Gl.(D.142) mit $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\rho}$ folgt mithilfe von Gl. (D.75):

$$g_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\rho}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\nu}}{}_{\sigma} \;=\; g_{\mathrm{E}\rho\sigma} \qquad \text{d.h.} \qquad \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}^{\,t}\; \tilde{g}_{\mathrm{E}}\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \;=\; g_{\mathrm{E}} \tag{D.145}$$

das heißt $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \equiv \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right)$ ist *pseudo-orthogonal*. – Vgl. die Matrizen $\mathbb{S} \equiv \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right)$, $\mathbb{S}^{-1\,t} \equiv \left(\mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\right)$ und $\mathbb{L} \equiv \left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\nu}\right)$, $\mathbb{L}^{-1\,t} \equiv \left(\mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\nu}\right)$ – folglich $\mathbb{SL} \equiv \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\rho}}\, \mathbb{L}^{\bar{\rho}}{}_{\nu}\right)$,... – im Minkowskischen.

Für die Determinante von $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}$ impliziert Gl. (D.143′) ferner:

$$\det \mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \equiv \det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\alpha}\right) \;=\; \left[\det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{-1\,t}\right) \equiv \det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\alpha}\right)\right]^{-1} \tag{D.146}$$

$$= \left[\varrho_{\mathrm{E}}^{2}\, \sin\theta\right]^{-1} \;=\; \sqrt{\det g_{\mathrm{E}}} \,\Big/\, \sqrt{\det \tilde{g}_{\mathrm{E}}} \qquad\qquad \det g_{\mathrm{E}} \equiv 1$$

vgl. Gl. (D.132′) bzw. (D.137). Die Matrix $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \equiv \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right)$ folgt durch explizites Invertieren und Transponieren von $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}^{-1\,t} \equiv \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\nu}\right)$ nach Gl. (D.132). Äquivalent durch explizites

Ausmultiplizieren von Gl. (D.141) in Form:

$$\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\tilde{\nu}}\right) = \frac{1}{\det \tilde{g}_{\mathrm{E}}} \begin{pmatrix} g_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{m}} & -g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \\ -g_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{p}} & g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \cdot \varrho_{\mathrm{E}} \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathfrak{p}} & -\sin\theta_{\mathfrak{p}} \\ \cos\theta_{\mathfrak{m}} & \sin\theta_{\mathfrak{m}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_{\mathrm{E}44} & 0 \\ 0 & g_{\mathrm{E}33} \end{pmatrix} \tag{D.147}$$

analog zu Gl. (D.79) im Minkowskischen. Durch Addition und Subtraktion der Relationen von Gl. (D.80) folgt mithilfe der Gln. (D.117), (D.117′):

$$\cos\theta_{\mathfrak{p}} - \cos\theta_{\mathfrak{m}} \cos\theta = \sin\theta_{\mathfrak{m}} \sin\theta \tag{D.148}$$

$$\sin\theta_{\mathfrak{p}} + \sin\theta_{\mathfrak{m}} \cos\theta = \cos\theta_{\mathfrak{m}} \sin\theta \qquad \theta = \theta_{\mathfrak{p}} + \theta_{\mathfrak{m}} \tag{D.148′}$$

analog $\mathfrak{p} \leftrightarrow \mathfrak{m}$ aus Gl. (D.80′). Mithilfe dieser Relationen führt Gl. (D.147) auf einen expliziten Ausdruck für die Matrix $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \equiv \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right)$. Zusammen mit Gl. (D.132) gilt:

$$\mathbb{SL}_{\mathrm{E}} = \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right) = \det \mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \cdot \varrho_{\mathrm{E}} \begin{pmatrix} \sin\theta_{\mathfrak{m}} & -\cos\theta_{\mathfrak{m}} \\ \sin\theta_{\mathfrak{p}} & \cos\theta_{\mathfrak{p}} \end{pmatrix} \tag{D.149}$$

$$\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{-1}\, t = \left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\nu}\right) = \varrho_{\mathrm{E}} \begin{pmatrix} \cos\theta_{\mathfrak{p}} & -\sin\theta_{\mathfrak{p}} \\ \cos\theta_{\mathfrak{m}} & \sin\theta_{\mathfrak{m}} \end{pmatrix} \tag{D.149′}$$

Sei verwiesen auf Gl. (D.78) und die Gln. (D.81), (D.81′) im MInkowskischen.

Komponenten $x_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}}$, $x_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}$ mit $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. Das Vierer-Skalarprodukt eines beliebigen Vektors x_{E} mit $e_{\mathrm{E}(\mu)}$, $e_{\mathrm{E}}{}^{(\mu)}$ oder $e_{\mathrm{E}(\mu)}$, $e_{\mathrm{E}}{}^{(\mu)}$ ist genau die Projektion auf dessen entsprechende ko- beziehungsweise kontravariante Komponente:

$$x_{\mathrm{E}}^{\mu} = x_{\mathrm{E}} \cdot e_{\mathrm{E}}^{(\mu)} \tag{D.150}$$

$$\text{und} \qquad x_{\mathrm{E}\mu} = x_{\mathrm{E}} \cdot e_{\mathrm{E}(\mu)} \qquad \mu \in \{1, 2, 3, 4\}$$

beziehungsweise:

$$x_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}} = x_{\mathrm{E}} \cdot e_{\mathrm{E}}^{(\tilde{\mu})} \tag{D.151}$$

$$\text{und} \qquad x_{\mathrm{E}\tilde{\mu}} = x_{\mathrm{E}} \cdot e_{\mathrm{E}(\tilde{\mu})} \qquad \mu \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$$

vgl. die Gln. (D.82), (D.82′). Das Skalarprodukt von x_{E} mit den Gln. (D.131), (D.140) stellt daher unmittelbar dar die Transformationsformeln für die Komponenten. Für kontravariante Komponenten:

$$x_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}} = \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\, x_{\mathrm{E}}^{\nu} \tag{D.152}$$

für kovariante Komponenten:

$$x_{\mathrm{E}\tilde{\mu}} = \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\nu}\, x_{\mathrm{E}\nu} \tag{D.153}$$

bzgl. der Matrixelemente $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}$, $\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\nu}$ vgl. die Gln. (D.149), (D.149′). Wir verfügen mit den Gln. (D.152), (D.153) über die allgemeinen Transformationsformeln für kontra- und kovariante (Lorentz-)Tensorkomponenten im Euklidischen; sie sind zu kontrastieren mit den Minkowskischen Formeln, vgl. die Gln. (D.85), (D.85′) bzw. (D.86), (D.86′).

Epsilon-Pseudotensor $\tilde{\epsilon}_{\mathrm{E}} \equiv \left(\epsilon_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\right)$ mit $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$. Der Epsilon-Pseudotensor auf der ins Euklidische fortgesetzten Raumzeit: $\tilde{\epsilon}_{\mathrm{E}} \equiv \left(\epsilon_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\right)$, $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$, wird berechnet in vollständiger Analogie wie auf der Minkowskischen. Wir finden für seine kontravarianten Komponenten – vgl. die Gln. (D.88)-(D.88″):

$$\epsilon_{\mathrm{E}}^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} = \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\alpha}\, \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\nu}}{}_{\beta}\, \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\rho}}{}_{\gamma}\, \mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\sigma}}{}_{\delta}\, \epsilon_{\mathrm{E}}^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{D.154}$$

$$= \det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\alpha}\right) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mu} & \tilde{\nu} & \tilde{\rho} & \tilde{\sigma} \\ \mathfrak{p} & \mathfrak{m} & 1 & 2 \end{pmatrix} \epsilon_{\mathrm{E}}^{1234} \tag{D.155}$$

und für seine kovarianten Komponenten – vgl. die Gln. (D.90)-(D.90″):

$$\epsilon_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\nu}\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \;=\; \mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\alpha}\,\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\nu}}{}^{\beta}\,\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\rho}}{}^{\gamma}\,\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\sigma}}{}^{\delta}\,\epsilon_{\mathrm{E}\alpha\beta\gamma\delta} \tag{D.156}$$

$$= \det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\alpha}\right)\cdot\begin{pmatrix}\tilde{\mu} & \tilde{\nu} & \tilde{\rho} & \tilde{\sigma}\\ \mathfrak{p} & \mathfrak{m} & 1 & 2\end{pmatrix}\,\epsilon_{\mathrm{E}1234} \tag{D.157}$$

bzgl. der Determinanten $\det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\alpha}\right)$ und $\det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}\tilde{\mu}}{}^{\alpha}\right)$ vgl. die Gln. (D.146), (D.146′). Unsere Konvention für $\epsilon_{\mathrm{E}}\equiv\left(\epsilon_{\mathrm{E}}^{\mu\nu\rho\sigma}\right)$ ist

$$\epsilon_{\mathrm{E}}^{1234} \;\equiv\; +1 \qquad\Longrightarrow\qquad \epsilon_{\mathrm{E}1234} \;=\; +1 \tag{D.158}$$

vgl. Gl. (D.110′). Das Signum der Indexpermutation $(\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\rho},\tilde{\sigma})\rightarrow(\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2)$ ist notiert durch das Klammersymbol entsprechend Gl. (A.8).

Fixierung von ϱ_{E}. Analog zu ϱ im Minkowskischen wird die positiv-reelle Konstante ϱ_{E} bestimmt durch die Forderung, daß die Determinante der Metrik invariant ist unter der Transformation, oder äquivalent – vgl. Gl. (D.146) – die Determinante der Transformationsmatrix identisch Eins ist:

$$\det\tilde{g}_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \det\left(g_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right) \;\stackrel{!}{=}\; \det g_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \det\left(g_{\mathrm{E}\mu\nu}\right) \tag{D.159}$$

$$\Longleftrightarrow\qquad \det\mathbb{SL}_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \det\left(\mathbb{SL}_{\mathrm{E}}{}^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right) \;\stackrel{!}{=}\; 1 \qquad \text{für alle } \theta\in(0,\pi/2) \tag{D.159′}$$

Dann impliziert Gl. (D.132′) für $\varrho\in\mathbb{R}^{+}$, mit $\psi\in(0,\infty)$:

$$\varrho_{\mathrm{E}}^{2} \;=\; \sin^{-1}\theta \tag{D.160}$$

$$\Longleftrightarrow\qquad \varrho_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \varrho_{\mathrm{E}}(\theta) \;=\; \sin^{-1/2}\theta \tag{D.160′}$$

Für die Komponenten des metrischen Tensors $\tilde{g}_{\mathrm{E}}\equiv\left(g_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right)$ folgt:

$$g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{p}} \;=\; g_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{m}} \;=\; -\,\varrho_{\mathrm{E}}^{2} \;=\; -\,\sin^{-1}\theta \tag{D.161}$$

$$\longrightarrow\quad g_{\mathrm{E}44} \;=\; g_{\mathrm{E}33} \;\equiv\; -\,1 \qquad \text{für } \theta\rightarrow\pi/2 \tag{D.161′}$$

$$g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}} \;=\; g_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{p}} \;=\; -\,\varrho_{\mathrm{E}}^{2}\cos\theta \;=\; -\,\tan^{-1}\theta \tag{D.162}$$

$$\longrightarrow\quad g_{\mathrm{E}43} \;=\; g_{\mathrm{E}34} \;\equiv\; 0 \qquad \text{für } \theta\rightarrow\pi/2 \tag{D.162′}$$

vgl. Gl. (D.136) bzw. (D.136′).

Im Hochenergielimes – realisiert durch die maximalen Drehwinkel: $\theta_{\mathfrak{p}},\theta_{\mathfrak{m}}\rightarrow\pi/4\Rightarrow\theta\rightarrow\pi/2$, vgl. Fußn. D.18, – sind *per constructionem* die Koordinatenlinien $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ orthogonal wie die Linien **4**, **3** [diese sind nur gedreht um $+\pi/4$]; dies imliziert für die Metriken

$$\tilde{g}_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \left(g_{\mathrm{E}\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\right) \;\longrightarrow\; \bar{g}_{\mathrm{E}} \;\equiv\; \left(g_{\mathrm{E}\bar{\mu}\bar{\nu}}\right) \qquad \text{für } \theta\rightarrow\pi/2 \tag{D.163}$$

wie verifiziert durch die Gln. (D.161′), (D.162′). Die Diskrepanz zwischen Hochenergielimes und endlichen $O(4)$-Drehungen: $\theta_{\mathfrak{p}},\theta_{\mathfrak{m}}<\pi/4\Rightarrow\theta<\pi/2$, ist subsumiert in simplen Faktoren von Winkelfunktionen, insbesondere in den nichtverschwindenden *Außerdiagonalelementen* $g_{\mathrm{E}\mathfrak{p}\mathfrak{m}}$, $g_{\mathrm{E}\mathfrak{m}\mathfrak{p}}$ der Metrik.

Wir verfügen über die formalen wie interpretatorischen Zusammenhänge, um die Diskussion der T-Amplitude im Haupttext – ihre Auswertung in Minkowskischer und ihre analytische Fortsetzung in Euklidische Raumzeit – konzise und prägnant durchzuführen. Wir schließen mit einem Kompendium ferner benötigter Zusammenhänge, die – die analytische Fortsetzung der Korrelationsfunktionen und die Lorentz-induzierte Wahl der Raumzeit-Parameter von Lichtkegelwellenfunktionen – respektive in unmittelbarer und mittelbarer Beziehung stehen zu dem entwickelten Formalismus.

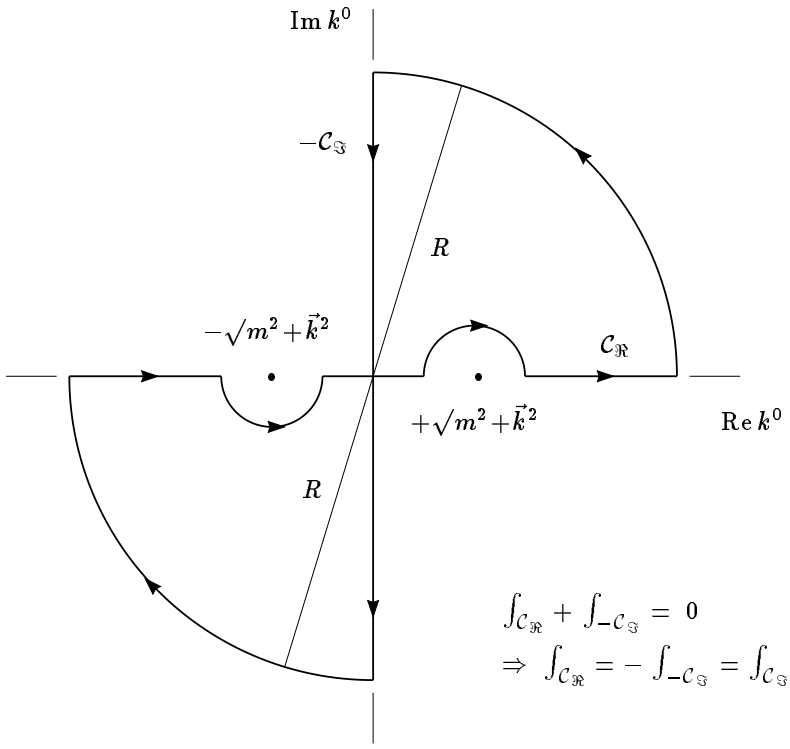


Abbildung D.4: Wick-Drehung in komplexer k^0-Ebene. Eine Funktion von $k^0 \in \mathbb{C}$ sei zu integrieren über die reelle Achse; sei gegeben eine Epsilon-Vorschrift, die im dargestellten Sinne definiert die Behandlung der Pole bei $k^0 = \pm\sqrt{m^2+\vec{k}^2}$, und besitze die Funktion keine weiteren Pole im 1. und 3. Quadranten. Dann verschwindet identisch ihr Integral entlang der dargestellten geschlossenen Kurve. Falle sie ferner genügend schnell ab für großen Absolutbetrag von k^0, so daß die Beiträge über die Kreisbögen mit Radius R verschwinden im Limes $R \to \infty$. Dann ist ihr Integral über die reelle Achse gleich dem über die imaginäre: Der Übergang von $\mathcal{C}_{\Re}$ zu $\mathcal{C}_{\Im}$ als Integrationsweg wird bezeichnet als Wick-Drehung.

D.6 Kompendium

D.6.1 Wick-Drehung der Korrelationsfunktionen [D.20]

Die Korrelationsfunktionen im Minkowskischen – D_C, D_{NC} bzw. F^C, F^{NC} – sind konstruiert mithilfe des *„ν-verallgemeinerten“* Feynman-Propagators D_ν, mit $\Delta_F \equiv D_1|_{\lambda_1 \equiv 1}$ dem *konventionellen*; vgl. Kap. 1.3 auf Seite 38ff., insbes. Anh. F. Sie zeigen *per constructionem* dasselbe Verhalten in der komplexen k^0-Ebene in Bezug auf Position von Singularitäten, assoziierter Epsilon-Vorschrift $\epsilon \to 0+$ und Abfall für $|k^0| \to \infty$; sei daher summarisch diskutiert

$$F(\xi^2) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot\xi}\ \tilde{F}(k^2) \qquad F \equiv D_\nu, \Delta_F, \ldots \tag{D.164}$$

$$= \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\xi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^0}{2\pi}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^0\xi^0}\ \tilde{F}\big((k^0)^2 - \vec{k}^2\big) \right\} \tag{D.164'}$$

explizit die geschweifte Klammer in der Form

$$f\big((\xi^0)^2\big) \equiv \int_{\mathcal{C}_{\Re}} \frac{dk^0}{2\pi}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^0\xi^0}\ \tilde{f}\big((k^0)^2\big) \qquad k^0 \in \mathbb{C} \tag{D.165}$$

[D.20] Bzgl. der expliziten Darstellungen der Korrelationsfunktionen sei verwiesen auf Anhang F.

mit $\tilde{f}\big((k^0)^2\big) := \tilde{F}\big((k^0)^2 - \vec{k}^2\big)$. Aufgrund der Eigenschaften der Funktion $\tilde{F}$ bezüglich der Singularitäten bei $k^0 = \pm\sqrt{m^2+\vec{k}^2}$ mit der assoziierten Epsilon-Vorschrift und dem Abfallverhalten für $|k^0| \to \infty$ kann bekanntermaßen – vgl. Abb. D.4 – die Integration über die *reelle* k^0-Achse ersetzt werden durch die Integration über die *imaginäre* k^0-Achse, $\mathcal{C}_{\mathbb{R}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{I}}$:

$$f\big((\xi^0)^2\big) \;=\; \int_{\mathcal{C}_{\mathbb{I}}} \frac{dk^0}{2\pi}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^0\xi^0}\;\; \tilde{f}_{\mathrm{E}}\big((k^0)^2\big) \tag{D.166}$$

$$\;=\; \int_{-\mathrm{i}\infty}^{\mathrm{i}\infty} \frac{dk^0}{2\pi}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k^0\xi^0}\;\; \tilde{f}_{\mathrm{E}}\big((k^0)^2\big) \tag{D.166$'$}$$

Die Funktion unter dem Integral mit Argument auf der imaginären k^0-Achse ist insofern die analytische Fortsetzung der Funktion $\tilde{f}$ und daher mit dem Skript „E“ indiziert: $\tilde{f}_{\mathrm{E}}$. Unter Substitution $\mathrm{i}k^0 \to k^4_{\mathrm{E}} = \mathrm{i}k^0$ – vgl. Gl. (D.107) – ergo: $dk^0 = -\mathrm{i}dk^4_{\mathrm{E}}$, folgt:

$$f\big((\xi^0)^2\big) \;=\; -\mathrm{i}\cdot\int_{\infty}^{-\infty} \frac{dk^4_{\mathrm{E}}}{2\pi}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^4_{\mathrm{E}}(\mathrm{i}\xi^0)}\;\; \tilde{f}_{\mathrm{E}}\big((-\mathrm{i}k^4_{\mathrm{E}})^2\big) \tag{D.167}$$

$$\;=\; \mathrm{i}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^4_{\mathrm{E}}}{2\pi}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^4_{\mathrm{E}}(\mathrm{i}\xi^0)}\;\; \tilde{f}_{\mathrm{E}}\big(-(k^4_{\mathrm{E}})^2\big) \tag{D.167$'$}$$

Mit $\tilde{f}_{\mathrm{E}}\big(-(k^4_{\mathrm{E}})^2\big) = \tilde{F}_{\mathrm{E}}\big(-(k^4_{\mathrm{E}})^2 - \vec{k}^2\big)$ folgt für $F(\xi^2)$ nach Gl. (D.164$'$):

$$F(\xi^2) \;=\; \int \frac{d^3\vec{k}_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^3}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{\xi}} \left\{ \mathrm{i}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^4_{\mathrm{E}}}{2\pi}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^4_{\mathrm{E}}(\mathrm{i}\xi^0)}\;\; \tilde{F}_{\mathrm{E}}\big(-(k^4_{\mathrm{E}})^2 - \vec{k}^2\big) \right\} \tag{D.168}$$

Übergang gemäß $k^i \to k^i_{\mathrm{E}}$ und $\mathrm{i}\xi^0 \to \xi^4_{\mathrm{E}}$, $\xi^i \to \xi^i_{\mathrm{E}}$ zu den analytisch fortgesetzten Komponenten – vgl. die Gln. (D.107), (D.107$'$) – führt unmittelbar auf:

$$F(\xi^2 \to \xi^2_{\mathrm{E}}) \;=\; \mathrm{i}\cdot\int \frac{d^4k_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}k^\mu_{\mathrm{E}}\xi^\mu_{\mathrm{E}}}\;\; \tilde{F}_{\mathrm{E}}(-k^\nu_{\mathrm{E}}k^\nu_{\mathrm{E}}) \tag{D.169}$$

$$\;=\; \mathrm{i}\cdot\int \frac{d^4k_{\mathrm{E}}}{(2\pi)^4}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k_{\mathrm{E}}\cdot\xi_{\mathrm{E}}}\;\; \tilde{F}_{\mathrm{E}}(k^2_{\mathrm{E}}) \qquad \equiv\; \mathrm{i}\cdot F_{\mathrm{E}}(\xi^2_{\mathrm{E}}) \tag{D.169$'$}$$

die zweite Zeile mit $k^2_{\mathrm{E}} = k_{\mathrm{E}}\cdot k_{\mathrm{E}} = -k^\mu_{\mathrm{E}}k^\mu_{\mathrm{E}}$ negativ definit und $k_{\mathrm{E}}\cdot\xi_{\mathrm{E}} = -k^\mu_{\mathrm{E}}\xi^\mu_{\mathrm{E}}$ nach Gl. (D.108) und Identifizierung der Fourier-Transformierten in die Euklidische Raumzeit. Es gilt:[D.21]

$$F_{\mathrm{E}}(\xi^2_{\mathrm{E}}) \;=\; -\mathrm{i}\cdot F\big(\xi^2 \to \xi^2_{\mathrm{E}}\big) \tag{D.170}$$

Für respektive $F \equiv D_C, D_{NC}, F^C, F^{NC}$ ist dies genau die Vorschrift zur Fortsetzung der Korrelationsfunktionen von Minkowskischer zu Euklidischer Raumzeit.

D.6.2 Raumzeit-Parameter $\{z, \mathbf{k}\}$ der Lichtkegelwellenfunktionen unter speziellen orthochronen Lorentz-Transformationen

Unsere Arbeit wesentlich zugrunde liegt das Konzept hadronischer Lichtkegelwellenfunktionen. Behauptung ist[D.22], daß diese bei Abhängigkeit *longitudinal* von z, dem Anteil des Quarks am gesamten Lichtkegelimpuls [$\bar{z} \equiv 1-z$ der des Antiquarks], – ferner nur abhängen von dem *transversalen* Vektor $\mathbf{k}$. Die Definition dieses Vektors $\mathbf{k}$ hat in der Weise zu erfolgen, daß unter beliebigen speziellen orthochronen Lorentz-Transformationen Λ garantiert ist Kovarianz der involvierten Raumzeit-Parameter.[D.23]

[D.21] Derselbe Zusammenhang folgt bei analytischer Fortsetzung $\mathrm{i}x^0 \to -x^4_{\mathrm{E}}$ mit *umgekehrtem* Vorzeichen.

[D.22] Wir beziehen uns in Notation auf Abschnitt 2.3.1.

[D.23] In expliziter Diskussion von speziell-orthochronen Lorentz-Boosts $\Lambda(\vec{\beta})$ und reinen Drehungen $\Lambda(\vec{\alpha})$ zeigen wir darüberhinaus: Es existiert keine Transformation Λ – da darstellbar als $\Lambda(\vec{\alpha})\circ\Lambda(\vec{\beta})$ oder $\Lambda(\vec{\beta})\circ\Lambda(\vec{\alpha})$ mit geeignetem Boost- und Drehvektor –, für die eine beliebig andere Definition von $\mathbf{k}$ nicht im Widerspruch stünde mit Lorentz-Kovarianz.

Sei betrachtet[D.24]

$$p^+ \;=\; z\,P^+ \tag{D.171}$$

$$\mathbf{p} \;=\; (z+\lambda)\,\mathbf{P}+\mathbf{k} \tag{D.172}$$

mit p^+, P^+ *groß* und formal $k^\pm \equiv 0$. Gefordert $\mathbf{p}+\bar{\mathbf{p}}=\mathbf{P}$, impliziert Gl. (D.172):

$$\mathbf{k} \;=\; \frac{1}{2}\,(\mathbf{p}-\bar{\mathbf{p}}) + \Big(\frac{1}{2}-(z+\lambda)\Big)\,\mathbf{P} \tag{D.173}$$

Für $\lambda \neq 1/2-z$ differiert $2\mathbf{k}$ von $(\mathbf{p}-\bar{\mathbf{p}})$, dem Relativimpuls der Quarks. Wir zeigen:

$$\lambda \;\equiv\; 0 \tag{D.174}$$

folgt notwendig aus der Forderung von Lorentz-Kovarianz; insbes. also $\lambda \neq 1/2-z$, vgl. Nachtmann in Ref. [148].

Spezielle orthochrone Lorentz-Transformationen werden vermittelt durch Matrizen:

$$\Lambda \;\equiv\; \big(\Lambda^\mu{}_\nu\big) \qquad \mu,\nu \in \{0,1,2,3\} \tag{D.175}$$

$$\text{mit} \qquad \Lambda^0{}_0 \;>\; 0 \quad [\textit{orthochron}] \qquad \det\Lambda \;\equiv\; +1 \quad [\textit{speziell}] \tag{D.175$'$}$$

$$\Lambda^t\, g\, \Lambda \;=\; g \qquad \text{d.h.} \quad g_{\mu\nu}\,\Lambda^\mu{}_\rho\,\Lambda^\nu{}_\sigma \;=\; g_{\rho\sigma} \quad [\textit{pseudo-orthogonal}]$$

Sei $\Lambda \equiv \big(\Lambda^\mu{}_\nu\big)$ verstanden als Lorentz-Boost oder Drehung, zunächst aber nicht weiter explizit gemacht. Wir betrachten für den beliebigen Lorentz-Vektor $x \equiv (x^\mu)$, $\mu \in \{0,1,2,3\}$, die – o.E.d.A. passive – Transformation:

$$x^{\mu'} \;=\; \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{D.176}$$

in Lichtkegelkoordinaten:

$$x^{\bar{\mu}'} \;=\; \Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\, x^{\bar{\nu}} \tag{D.177}$$

$$\bar{\Lambda} \;\equiv\; \big(\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\big) \qquad \bar{\mu},\bar{\nu} \in \{+,-,1,2\} \tag{D.177$'$}$$

Wir beziehen diese Transformationsformeln auf die Vektorkomponenten $p^+ \to p^{+'} = \Lambda^+{}_{\bar{\mu}} p^{\bar{\mu}}$ und $p^i \to p^{i'} = \Lambda^i{}_{\bar{\mu}} p^{\bar{\mu}}$, vgl. die Gln. (D.171), (D.172). Es gilt für $p^{+'}$, mit $i,j \in \{1,2\}$:

$$p^{+'} \;=\; \Lambda^+{}_+\, p^+ + \Lambda^+{}_-\, p^- + \Lambda^+{}_i\, p^i \tag{D.178}$$

$$\sim\; \Lambda^+{}_+\, p^+ + \Lambda^+{}_i\, p^i \tag{D.178$'$}$$

$$=\; z\,\big[\Lambda^+{}_+\, P^+ + \Lambda^+{}_i\, P^i\big] + \Lambda^+{}_i\, k^i \;+\lambda\,\Lambda^+{}_i\, P^i \tag{D.178$''$}$$

$$\sim\; z\,\big[\Lambda^+{}_+\, P^+ + \Lambda^+{}_-\, P^- + \Lambda^+{}_i\, P^i\big] + \Lambda^+{}_i\, k^i \;+\lambda\,\Lambda^+{}_i\, P^i \tag{D.178$'''$}$$

ergo:

$$p^{+'} \;\sim\; \big(z\,P^{+'} + k^{+'}\big) \;+\lambda\,\Lambda^+{}_i\, P^i \qquad i \in \{1,2\} \tag{D.179}$$

mit $k^{+'} = \Lambda^+{}_{\bar{\mu}}\, k^{\bar{\mu}} = \Lambda^+{}_i\, k^i$ wegen $k^\pm \equiv 0$. Es folgt die dritte Zeile – Gl. (D.178$''$) – mithilfe Gl. (D.172). Approximative Geichheit „$\sim$“ ist zu verstehen unter Vernachlässigung der initialen kleinen Komponenten p^- und P^-, explizit:

$$p^- = 1/p^+ \;\sim\; 0 \qquad \text{und} \qquad P^- = 1/P^+ \;\sim\; 0 \tag{D.180}$$

Es gilt für $p^{i'}$ analog zu Gl. (D.178): $p^{i'} = \Lambda^i{}_+\, p^+ + \Lambda^i{}_-\, p^- + \Lambda^i{}_j\, p^j$, ergo – analog den Gln. (D.178$'$)-(D.178$'''$):

$$p^{i'} \;\sim\; \big(z\,P^{i'} + k^{i'}\big) \;+\lambda\,\Lambda^i{}_j\, P^j \qquad i,j \in \{1,2\} \tag{D.181}$$

mit $k^{i'} = \Lambda^i{}_{\bar{\mu}}\, k^{\bar{\mu}} = \Lambda^i{}_j\, k^j$ wegen $k^\pm \equiv 0$. Allgemein sind $\Lambda^+{}_i P^i$ und $\Lambda^i{}_j P^j$, $i,j \in \{1,2\}$, nicht (simultan) Null für $\mathbf{P} \neq \mathbf{0}$ und beliebige Matrix $\bar{\Lambda} \equiv \big(\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\big)$ – dies bereits, ohne für $\Lambda \equiv \big(\Lambda^\mu{}_\nu\big)$

[D.24] o.E.d.A. ein *Quark* mit Geschwindigkeit $\beta \to 1$ in *positive* x^3-Richtung. – Gefordert $\mathbf{p}+\bar{\mathbf{p}}=\mathbf{P}$, folgt das *Antiquark* durch $p \to \bar{p}$, $z \to \bar{z}$, $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ und $\lambda \to -\lambda$, entsprechend in *negative* x^3-Richtung durch $+ \leftrightarrow -$ bzgl. Lorentz-Indizes. Gl. (D.172) ist die allgemeinste Definition des Vektors $\mathbf{k}$ bis auf Vielfache: $\mathbf{k}' = c\,\mathbf{k}$, $c \in \mathbb{R}$.

zu fordern die Relationen nach Gl. (D.175′). In Konfrontation der Gln.(D.179),(D.181) mit (D.171), (D.172) konstatieren wir, daß Kovarianz bezüglich *Lorentz-Transformationen im weitesten Sinne* unmittelbar fordert Gl. (D.174): $\lambda \equiv 0$. Quod erat demonstrandum.

Für Vollständigkeit – und in Hinblick auf Fußnote D.23 – betrachten wir explizit *Lorentz-Boosts* $\Lambda \equiv \Lambda(\vec{\beta})$ und *reine Drehungen* $\Lambda \equiv \Lambda(\vec{\alpha})$ mit $\vec{\beta}$ der (Dreier-)Boost-Geschwindigkeit respektive $\vec{\alpha}$ dem (Dreier-)Drehvektor. Als Verkettung $\Lambda(\vec{\beta}) \circ \Lambda(\vec{\alpha})$ oder $\Lambda(\vec{\alpha}) \circ \Lambda(\vec{\beta})$ mit geeigenten Boost- und Drehvektoren ist darstellbar eine beliebige spezielle orthochrone Lorentz-Transformation.

In vollständiger Analogie zu den Gln.(D.10)-(D.10″) – unmittelbar durch $x^{\pm} = \alpha(x^0 \pm x^3)$ und $x_{\pm} = g_{+-}\alpha(x^0 \mp x^3)$ mit $g_{+-}\alpha = 1/2\alpha$ – werden die Komponenten $\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}$, $\bar{\mu}, \bar{\nu} \in \{+, -, 1, 2\}$ der Transformationsmatrix ausgedrückt durch die Komponenten $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, $\mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$:

$$\Lambda^{\pm}{}_{+} = \frac{1}{2}\left(\left(\Lambda^0{}_0 \pm \Lambda^3{}_0\right) + \left(\Lambda^0{}_3 \pm \Lambda^3{}_3\right)\right) \tag{D.182}$$

$$\Lambda^{\pm}{}_{-} = \frac{1}{2}\left(\left(\Lambda^0{}_0 \pm \Lambda^3{}_0\right) - \left(\Lambda^0{}_3 \pm \Lambda^3{}_3\right)\right) \tag{D.182′}$$

$$\Lambda^{\pm}{}_{\bar{i}} = \alpha\left(\Lambda^0{}_i \pm \Lambda^3{}_i\right) \tag{D.182″}$$

und

$$\Lambda^{\bar{i}}{}_{\pm} = \frac{1}{2\alpha}\left(\Lambda^i{}_0 \pm \Lambda^i{}_3\right) \tag{D.183}$$

$$\Lambda^{\bar{i}}{}_{\bar{j}} = \Lambda^i{}_j \tag{D.183′}$$

mit α der Normierung der Lichtkegelkoordinaten, vgl. die Gln. (A.18), (A.18′).

Lorentz-Boosts sind vollständig bestimmt durch den Boost-(Dreier)Vektor

$$\vec{\beta} =: \beta\hat{\beta} \qquad \text{mit} \qquad |\hat{\beta}| \equiv \hat{\beta}^i\hat{\beta}^i = 1 \quad i \in \{1, 2, 3\} \tag{D.184}$$

Es sind β und $\hat{\beta}$ respektive Betrag und Richtung der Boost-Geschwindigkeit. Lorentz-Boosts werden vermittelt durch Matrizen $\Lambda(\vec{\beta}) \equiv \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right)$. Diese sind explizit gegeben durch Gl. (D.2) – vgl. etwa Ref. [188]. Wir rekapitulieren in Komponenten:

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \tag{D.185}$$

$$\Lambda^i{}_0 = -\gamma\beta\,\hat{\beta}^i \tag{D.185′}$$

$$\Lambda^0{}_j = -\gamma\beta\,\hat{\beta}^j \tag{D.185″}$$

$$\Lambda^i{}_j = \delta^i_j + (\gamma - 1)\,\hat{\beta}^i\,\hat{\beta}^j \tag{D.185‴}$$

die letzte Zeile mit der Identität $\gamma^2\beta^2/(\gamma^2 - 1) = \gamma - 1$.

Umgekehrt für gegebene Boost-Transformationsmatrix $\Lambda \equiv \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right)$, die charakterisiert ist durch Gl. (D.175′), folgt aus den Relationen

$$\mathrm{tr}\,\Lambda = \Lambda^{\mu}{}_{\mu} = 2(\gamma + 1) \tag{D.186}$$

$$\hat{\beta}^i = -\frac{1}{\gamma\beta}\,\Lambda^i{}_0 \tag{D.186′}$$

zunächst *Betrag* β, dann *Richtung* $\hat{\beta}$ des Boosts.

In Hinblick auf Gl. (D.179) und (D.181) definieren wir durch die Komponenten

$$n^{\bar{\mu}} = \Lambda^{\bar{\mu}}{}_i\,P^i \qquad \bar{\mu} \in \{+, -, 1, 2\} \tag{D.187}$$

den Vierer-Vektor $\bar{n} = \bar{n}[\mathbf{P}] \equiv (n^{\bar{\mu}}[\mathbf{P}])$ als Funktion von $\mathbf{P} = (P^1, P^2)^t$. Falls für nichtverschwindenden Vektor $\mathbf{P}$ simultan gilt $n^+[\mathbf{P}] = 0$ und $\mathbf{n}[\mathbf{P}] = 0$, mit $\mathbf{n} = (n^1, n^2)^t$, ist Ko-

varianz verträglich mit $\lambda \neq 0$ – für die Transformation Λ, die vermittelt wird durch die Komponenten $\left(\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right)$. Wir zeigen, daß dies für keine Transformation Λ der Fall ist.

Es ist $\Lambda^{+}{}_{i}$, $i \in \{1,2\}$, explizit gegeben durch:

$$\Lambda^{+}{}_{i} \;=\; \alpha \left[-\gamma\beta + (\gamma-1)\,\hat{\beta}^3 \right] \hat{\beta}^i \qquad i \in \{1,2\} \tag{D.188}$$

vgl. Gl. (D.182″) und (D.185″), (D.185‴).

Wir diskutieren das Verschwinden von $n^{+}[\mathbf{P}] = \Lambda^{+}{}_{i} P^i$. Es gilt $n^{+}[\mathbf{P}] = 0$, falls *(i)* die eckige Klammer in Gl. (D.188) identisch verschwindet. Für $\hat{\beta}^3 = \gamma\beta/(\gamma-1) = [(\gamma+1)/(\gamma-1)]^{1/2}$ ist dies formal der Fall, – steht aber, da größer Eins, im Widerspruch dazu, daß $\hat{\beta}$ Einheitsvektor ist. Da die eckige Klammer in Gl. (D.188) ergo ungleich Null ist, verschwindet $n^{+}[\mathbf{P}]$ genau dann, wenn *(ii)* gilt: $\hat{\beta}^i P^i = 0$ [etwa wenn $\hat{\beta}^i \equiv 0$ für $i \in \{1,2\}$, das heißt $\hat{\beta}$ vollständig longitudinal ist: $\hat{\beta}^3 \equiv 1$].

Für $\Lambda^{i}{}_{j}$, $i,j \in \{1,2\}$, folgt der explizite Ausdruck, vgl. die Gln. (D.183′), (D.185‴):

$$\Lambda^{i}{}_{j} \;=\; \delta^i_j + (\gamma-1)\,\hat{\beta}^i\,\hat{\beta}^j \qquad i,j \in \{1,2\} \tag{D.189}$$

Wir diskutieren das simultane Verschwinden von $n^{+} = \Lambda^{+}{}_{i} P^i$ und des transversalen Vektors $\mathbf{n} \equiv (n^i) = \left(\Lambda^{i}{}_{j} P^j\right)$, mit $i,j \in \{1,2\}$. Es bleibt nichts zu zeigen für *(i)*. Für *(ii)* folgt aus $\hat{\beta}^i P^i = 0$ unmittelbar $\mathbf{n}[\mathbf{P}] = \mathbf{P} \neq \mathbf{0}$.

Zusammen: Für nichtverschwindenden Vektor $\mathbf{P}$ kann simultan *nicht* erreicht werden sowohl $n^{+}[\mathbf{P}] = \Lambda^{+}{}_{i} P^i = 0$ als auch $\mathbf{n}[\mathbf{P}] = \left(\Lambda^{i}{}_{j} P^j\right) = \mathbf{0}$, mit $i,j \in \{1,2\}$. – Es existiert *kein* speziell-orthochroner Lorentz-Boost $\Lambda(\vec{\beta})$, für den Kovarianz verträglich wäre mit $\lambda \neq 0$.

Reine Drehungen sind vollständig bestimmt durch den (Dreier)Drehvektor

$$\vec{\alpha} \;=:\; \alpha\,\hat{\alpha} \qquad \text{mit} \qquad |\hat{\alpha}| \;\equiv \hat{\beta}^i\,\hat{\beta}^i \;=\; 1 \quad i \in \{1,2,3\} \tag{D.190}$$

Es sind $\alpha = |\vec{\alpha}| < \pi$ und $\hat{\alpha}$ respektive Winkel und orientierte Achse der Drehung. Reine Drehungen werden vermittelt durch Matrizen $\Lambda(\vec{\alpha}) \equiv \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right)$ – vgl. etwa Ref. [188]:

$$\Lambda(\vec{\alpha}) \;\equiv \left(\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^{\,t} \\ \vec{0} & R \end{pmatrix} \tag{D.191}$$

$$\text{mit} \qquad R \;\equiv \left(R^{i}{}_{j}\right) \quad i,j \in \{1,2,3\} \qquad \textit{orthogonal} \tag{D.191′}$$

Explizit in Komponenten, mit $i,j \in \{1,2,3\}$:

$$\Lambda^{0}{}_{0} \;=\; 1 \tag{D.192}$$

$$\Lambda^{i}{}_{0} \;=\; 0 \tag{D.192′}$$

$$\Lambda^{0}{}_{j} \;=\; 0 \tag{D.192″}$$

$$\Lambda^{i}{}_{j} \;=\; R^{i}{}_{j} \;=\; \hat{\alpha}^i\,\hat{\alpha}^j + \left(\delta^i_j - \hat{\alpha}^i\,\hat{\alpha}^j\right) \cos\alpha + \epsilon^{ijk}\,\hat{\alpha}^k \,\sin\alpha \tag{D.192‴}$$

Durch $R^{i}{}_{j}\,R^{k}{}_{j} = \delta^i_k$ ist garantiert $RR^t = R^t R = \mathbb{1}$, das heißt Orthogonalität von $R \equiv \left(R^{i}{}_{j}\right)$.

Umgekehrt für vorgegebene orthogonale Matrix $R \equiv \left(R^{i}{}_{j}\right)$, $i,j \in \{1,2,3\}$, gelten die Relationen

$$\mathrm{tr}\,R \;=\; R^{i}{}_{i} \;=\; 1 + 2\cos\alpha \tag{D.193}$$

$$\hat{\alpha}^i \;=\; \frac{1}{2\sin\alpha}\,\epsilon^{ijk}\,R^{j}{}_{k} \tag{D.193′}$$

aus denen folgt zunächst der *Betrag* α, dann im Sinne der orientierten Achse die *Richtung* $\hat{\alpha}$ der Drehung.

Es ist $\Lambda^+{}_i$, $i\in\{1,2\}$, explizit gegeben durch, vgl. Gl. (D.182''):

$$\Lambda^+{}_i \;=\; \alpha\,\big[\hat\alpha^3\,\hat\alpha^i\,(1-\cos\alpha)+\hat\alpha^i_\perp\,\sin\alpha\big] \qquad i\in\{1,2\} \tag{D.194}$$

vgl. Gl. (D.182'') und (D.192''), (D.192'''). Die globale Konstante α ist die Normierung der Lichtkegelkoordinaten. Es ist ferner definiert der Zweier-Vektor $\hat\alpha_\perp\equiv(\hat\alpha^i_\perp)$, $i\in\{1,2\}$ durch:

$$\hat\alpha^i_\perp := \epsilon^{3ik}\,\hat\alpha^k \qquad \text{d.h.} \qquad \hat\alpha_\perp \;=\; \begin{pmatrix}\hat\alpha^2\\ -\hat\alpha^1\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\hat\alpha^1\\ \hat\alpha^2\end{pmatrix} \tag{D.195}$$

das heißt $\hat\alpha_\perp$ ist *per construktionem* orthogonal zum transversalen Anteil $(\hat\alpha^1,\hat\alpha^2)^t$ von $\hat\alpha$ und Einheitsvektor: $1=\hat\alpha^i_\perp\hat\alpha^i_\perp=\hat\alpha^i\hat\alpha^i$, genau dann, wenn $\hat\alpha^3\equiv0$.

Wir diskutieren das Verschwinden von $n^+[\mathbf{P}]=\Lambda^+{}_iP^i$ in Unterscheidung der folgenden Fälle. Sei *(i)* die Drehachse vollständig longitudinal: $\hat\alpha^3\equiv1$, $\hat\alpha^i,\hat\alpha^i_\perp\equiv0$ für $i\in\{1,2\}$. Dann folgt unmittelbar $n^+[\mathbf{P}]=0$ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{P}$. Sei umgekehrt *(ii)* die Drehachse vollständig transversal: $\hat\alpha^3\equiv0$, $\hat\alpha^i,\hat\alpha^i_\perp\neq0$ für mindestens einen Index $i\in\{1,2\}$. Dann verschwindet $n^+[\mathbf{P}]=\alpha\,\hat\alpha^i_\perp P^i\sin\alpha$ genau dann, wenn $\mathbf{P}$ orthogonal ist zu $\hat\alpha_\perp$, das heißt (anti)parallel ist zur Drehachse $\hat\alpha$, folglich: $P^i=\pm|\mathbf{P}|\hat\alpha^i$. Sei schließlich *(iii)* der Drehvektor nicht vollständig longitudinal, das heißt $\hat\alpha^3\neq0$ und $\hat\alpha^i\neq0$ für mindestens einen Index $i\in\{1,2\}$. Dann sind die transversalen Vektoren $(\hat\alpha^1,\hat\alpha^2)^t$ und $(\hat\alpha^2,-\hat\alpha^1)^t$ nichtverschwindend orthogonal, insbesondere linear unabhängig; es folgt unmittelbar $n^+[\mathbf{P}]\neq0$ für einen beliebigen Vektor $\mathbf{P}$.

Für $\Lambda^i{}_j$, $i,j\in\{1,2\}$, folgt der explizite Ausdruck, vgl. die Gln. (D.183'), (D.192'''):

$$\Lambda^i{}_j \;=\; \hat\alpha^i\,\hat\alpha^j+\big(\delta^i_j-\hat\alpha^i\,\hat\alpha^j\big)\,\cos\alpha+\epsilon^{ij3}\,\hat\alpha^3\,\sin\alpha \qquad i,j\in\{1,2\} \tag{D.196}$$

Wir diskutieren das simultane Verschwinden von $n^+=\Lambda^+{}_iP^i$ und des transversalen Vektors $\mathbf{n}\equiv(n^i)=\big(\Lambda^i{}_jP^j\big)$, mit $i,j\in\{1,2\}$. Es folgt, *(i)*, für vollständig longitudinalen Drehvektor: $n^i[\mathbf{P}]=\epsilon^{ij3}P^j\hat\alpha^3\sin\alpha\neq0$. Es folgt, *(ii)*, für vollständig transversalen Drehvektor aus $P^i=\pm|\mathbf{P}|\hat\alpha^i$ unmittelbar $\mathbf{n}[\mathbf{P}]=\mathbf{P}\neq\mathbf{0}$. Für *(iii)* bleibt nichts zu zeigen.

Zusammen: Es existiert *keine* reine Drehung $\Lambda(\vec\alpha)$, für die simultan identisch Null wären $n^+=\Lambda^+{}_iP^i$ und $n^i=\Lambda^i{}_jP^j$, mit $i\in\{1,2\}$, – das heißt für die Kovarianz nicht im Widerspruch stünde mit $\lambda\neq0$.

Wir schließen den Anhang mit der Feststellung, daß für *jede nichttriviale* spezielle orthochrone Lorentz-Transformation – da darstellbar als Verkettung von Lorentz-Boosts und reinen Drehungen – die Forderung $\lambda\neq0$ im Widerspruch steht mit Kovarianz der Raumzeit-Parameter nach den Gln. (D.171), (D.172). Es ist daher zu fordern Gl. (D.174): $\lambda\equiv0$.

Anhang E

Integration

Wir geben an unsere Konventionen bezüglich Integration auf allgemeinen (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die unter anderem bezogen werden auf die Minkowskische Raumzeit und die Koordinatenlinien $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$, wie definiert in Anhang D. Auf Basis dieses Formalismus geschieht im Haupttext etwa die explizite Auswertung der zentralen Funktionen $\tilde{\chi}^{C}_{\imath\jmath}$, $\tilde{\chi}^{NC}_{\imath\jmath}$, $\imath, \jmath \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}\}$; formalere Schritte dieser Auswertung sind festgehalten hier.

E.1 Integration auf (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Sei $G \equiv G_{d,\sigma}$ eine (pseudo-)Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension $d \equiv \zeta + \rho$ und Signatur $\sigma \equiv \zeta - \rho$ mit ζ der Anzahl zeitartiger und ρ der Anzahl raumartiger Dimensionen.[E.1]

Der metrische Tensor $g \equiv (g_{\mu\nu})$ von G hängt allgemein ab vom Weltpunkt x: $g \equiv g(x)$; es existiert lokal eine Basis, in der er Diagonalform besitzt, o.E.d.A.

$$g \;\equiv\; (g_{\mu\nu}) \;=\; \mathrm{diag}[+1, \ldots, +1, -1, \ldots, -1] \tag{E.1}$$

mit den ζ ersten Einträge $+1$, den ρ übrigen -1. Unter allgemeiner Lorentz-Transformation $\Lambda \equiv (\Lambda^{\mu}{}_{\nu})$ gilt $g'_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} \Lambda_{\nu}{}^{\sigma} g_{\rho\sigma}$, ergo $\det g' = \det g / [\det \Lambda]^2$ und $\mathrm{sign}(\det g') \equiv (-1)^{\rho}$.

Der Epsilon-Pseudotensor $\epsilon \equiv (\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d})$ ist definiert durch seine kontravarianten Komponenten

$$\epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \;\equiv\; \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_d \\ 1 & \cdots & d \end{pmatrix} \epsilon^{1 \cdots d} \qquad \textit{per def.:} \qquad \epsilon^{1 \cdots d} \;\equiv\; 1/\sqrt{(-1)^{\rho} \det g} \tag{E.2}$$

vgl. Gl. (A.7); seine kovarianten Komponenten folgen durch

$$\epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_d} \;=\; (-1)^{\rho} \det g \;\; \epsilon^{\mu_1 \cdots \mu_d} \tag{E.3}$$

Sei definiert für $s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq s \leq d$ das verallgemeinerte Kronecker-Symbol $\delta^{\mu_1 \cdots \mu_s}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$ als die Determinante konventioneller Kroneckersymbole:[E.2]

$$\delta^{\mu_1 \cdots \mu_s}_{\nu_1 \cdots \nu_s} \;=\; \det\left(\delta^{\mu_i}_{\nu_j}\right) \;\equiv\; \det \begin{pmatrix} \delta^{\mu_1}_{\nu_1} & \cdots & \delta^{\mu_1}_{\nu_s} \\ \vdots & & \vdots \\ \delta^{\mu_s}_{\nu_1} & \cdots & \delta^{\mu_s}_{\nu_s} \end{pmatrix} \qquad i, j \in \{1, 2, \ldots, s\} \tag{E.4}$$

[E.1] G heißt Riemannsch, falls $\zeta \equiv 0$ oder $\rho \equiv 0$, pseudo-Riemannsch sonst. Es ist $G_{4,-2}$ – mit $\zeta \equiv (d+\sigma)/2 = 1$ und $\rho \equiv (d-\sigma)/2 = 3$ – *lokal isomorph* zum Minkowski-Raum, $G_{n,-n}$ zum gewöhnlichen Euklidischen $\mathbb{R}^n$.

[E.2] Das konventionelle Kronecker-Symbol δ^{μ}_{ν} transformiert wie ein $(1,1)$-Tensor, das heißt wie ein Tensor zweiter Stufe mit einem kontra- und einem kovarianten Index, – folglich $\delta^{\mu_1 \cdots \mu_s}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$ wie ein (s,s)-Tensor.

mithilfe der Leibnitz'schen Determinantenformel:

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} \;=\; \sum_{\sigma\in S_s}\; \mathrm{sign}(\sigma)\;\; \delta^{\mu_1}_{\nu_{\sigma(1)}}\;\cdots\;\delta^{\mu_s}_{\nu_{\sigma(s)}} \tag{E.5}$$

Diese Definition impliziert vollständige Antisymmetrie:

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} \;=\; \delta^{[\mu_1\cdots\mu_s]}_{\nu_1\cdots\nu_s} \;=\; \delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{[\nu_1\cdots\nu_s]} \tag{E.6}$$

bzgl. der Notation vgl. Gl. (A.9). Es ist ferner $\delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s}$ gleich dem Signum der Indexpermutation $\sigma^\star\colon \mu_i\to\nu_i$, für alle $i\in\{1,2,\ldots,s\}$, und kann daher – vgl. Gl. (E.2) – ausgedrückt werden durch die Komponenten des Epsilon-Pseudotensors:

$$\delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s} \;=\; \begin{pmatrix}\mu_1 & \cdots & \mu_s\\ \nu_1 & \cdots & \nu_s\end{pmatrix} \tag{E.7}$$

$$\;=\; \frac{(-1)^\rho}{(d-s)!}\;\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_s\rho_1\cdots\rho_{d-s}}\;\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_s\rho_1\cdots\rho_{d-s}} \tag{E.7$'$}$$

Kontraktion mit dem verallgemeinerten Kronecker-Symbol bewirkt vollständige Antisymmetrisierung bezüglich der kontrahierten Indizes, vgl. Gl. (A.9′) und (E.5):

$$\frac{1}{s!}\;\delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s}\;\;T^{\nu_1\cdots\nu_s\rho_1\cdots\rho_r} \;=\; T^{[\mu_1\cdots\mu_s]\rho_1\cdots\rho_r} \tag{E.8}$$

Wir betrachten $G_s\subset G$, eine Untermannigfaltigkeit von G der Dimension s mit $1\le s\le d$. Seien d_ix – mit $i=1,\ldots s$ – s linear unabhängige Differentiale auf G_s und sei

$$d_ix \;=\; \frac{\partial x}{\partial u_i}\;du_i \qquad \textit{nicht} \text{ summiert über } i \tag{E.9}$$

eine Parameterdarstellung. Dann definieren wir ein s-dimensionales Volumenelement dV auf G_s, durch seine kontravarianten Komponenten:

$$dV^{\mu_1\cdots\mu_s} \;\equiv\; \delta^{\mu_1\cdots\mu_s}_{\nu_1\cdots\nu_s}\;\;d_1x^{\nu_1}\cdots d_sx^{\nu_1} \tag{E.10}$$

$$\;=\; d_1x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge d_sx^{\mu_s} \tag{E.10$'$}$$

wobei Gl. (E.10′) verknüpft mit dem Kalkül alternierender Differentialformen. Das Volumenelement dV nach Gl. (E.10) folgt in Standardform mithilfe Gl. (E.4):

$$dV^{\mu_1\cdots\mu_s} \;=\; \det\left(\delta^{\mu_i}_{\nu_j}\right)\;\;\frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial u_1}\cdots\frac{\partial x^{\nu_s}}{\partial u_s}\;\;du_1\cdots du_s \tag{E.11}$$

$$\;=\; \det\left(\frac{dx^{\mu_i}}{du_j}\right)\;\;du_1\cdots du_s \tag{E.11$'$}$$

$$\;=\; \frac{\partial(x^{\mu_1},\ldots x^{\mu_s})}{\partial(u_1,\ldots u_s)}\;\;du_1\cdots du_s \tag{E.11$''$}$$

mit der konventionellen Jacobi-Determinante in der letzten Zeile.

Wir formulieren den **Stokes'schen Satz** für eine $(s-1)$-Form ω auf G im Kalkül alternierender Differentialformen:

$$\int_{G_s} d\wedge\omega \;=\; \int_{\partial G_s}\omega \tag{E.12}$$

und äquivalent für einen Tensor T der Stufe $(s-1)$ im Tensorkalkül:

$$\int_{G_s} T_{\mu_1\cdots\mu_{s-1};\rho}\;dV^{\rho\mu_1\cdots\mu_{s-1}} \;=\; \int_{\partial G_s} T_{\mu_1\cdots\mu_{s-1}}\;dV^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}} \tag{E.13}$$

Wir arbeiten in der Standard-Kommanotation, in der „;ρ“steht für die kovariante Ableitung nach dem Index μ; sie ist identisch „,ρ“, der partiellen Ableitung, unter der vollständigen

Antisymmetrisierung, wie sie gegeben ist unter Kontraktion mit dem Volumenelement; vgl. Gl. (E.8).

Im folgenden geben wir die Formulierung dieses Satzes in Termen dualer Tensoren an. Wir definieren zunächst **Dualität** in G: Sei T ein beliebiger Tensor s-ter Stufe. Dann folgt der zu T duale Tensor $\tilde{T}$ der Stufe $(d-s)$ durch Anwenden des Dualitätsoperators:[E.3]

$$\tilde{T}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \;=\; d_{(d-s)\,\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s}\; T^{\mu_1\cdots\mu_s} \tag{E.14}$$

Der Dualitätsoperator $d_{(d-s)}$ ist per definitionem Dualität proportional dem Epsilon-Pseudotensor, die Proportionalitätskonstante hängt ab von dem Index $d-s$ (der Zahl freier Indizes nach Dualisieren):

$$d_{(d-s)\,\mu_1\cdots\mu_d} \;=\; c_{(d-s)}\;\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d} \tag{E.15}$$

Wir lassen $c_{(d-s)}$ zunächst offen. Aus der Kontraktion von Gl. (E.14) mit $\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_s\rho_1\cdots\rho_{d-s}}$ folgt mithilfe Gl. (E.7):

$$(-1)^\rho\, T^{\mu_1\cdots\mu_s} \;=\; \frac{1}{c_{(d-s)}\cdot s!(d-s)!}\;\epsilon^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s}\;\tilde{T}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \tag{E.16}$$

Andererseits führt zweifaches Dualisieren – bis auf das definierte Vorzeichen $(-1)^\rho$ – zurück auf den ursprünglichen Tensor; wir haben:

$$\tilde{\tilde{T}}^{\mu_1\cdots\mu_s} \;=\; (-1)^\rho\, T^{\mu_1\cdots\mu_s} \tag{E.17}$$

Damit ist Gl. (E.16), analog zu Gl. (E.14), zu lesen im Sinne

$$\tilde{\tilde{T}}^{\mu_1\cdots\mu_s} \;=\; \tilde{d}_{(s)}{}^{\mu_1\cdots\mu_s\nu_1\cdots\nu_{d-s}}\;\tilde{T}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \tag{E.18}$$

Der hierdurch definierte Dualitätsoperator $\tilde{d}_{(s)}$ trägt eine Tilde zur kennzeichnung, daß er auf duale Tensoren wirkt. Analog zu Gl. (E.15) schreiben wir:

$$\tilde{d}_{(s)}{}^{\mu_1\cdots\mu_d} \;=\; \tilde{c}_{(s)}\;\epsilon^{\mu_1\cdots\mu_d} \tag{E.19}$$

dabei folgt die Konstante $\tilde{c}_{(s)}$ in Abhängigkeit von $c_{(d-s)}$ aus den Gln. (E.16)-(E.19):

$$\tilde{c}_{(s)} \;=\; \frac{\mathrm{sgn}_d(s)}{c_{(d-s)}\cdot s!(d-s)!} \qquad \text{mit} \qquad \mathrm{sgn}_d(s) \;=\; (-1)^{s(d-s)} \tag{E.20}$$

Dabei ist das Signum genau das Signum der Permutation der s Indizes μ_i vorbei an den $d-s$ Indizes ν_j im Epsilon-Pseudotensor in Gl. (E.16). Wir werden sehen, daß die symmetrische Definition: $c_{(s)} \equiv \tilde{c}_{(s)} \equiv (-1)^s/s!$, *nicht* die günstigste ist.

Aus Gl. (E.14) folgt explizit für das zu dV, vgl. Gl. (E.10), duale Volumenelement:

$$d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \;=\; c_{(d-s)}\;\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s}\;dV^{\mu_1\cdots\mu_s} \tag{E.21}$$

$$\;=\; s!\,c_{(d-s)}\;\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s}\;d_1x^{\mu_1}\cdots d_sx^{\mu_s} \tag{E.21$'$}$$

Als Verknüpfung mit dem Differentialformenkalkül ist

$$d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \;=\; c_{(d-s)}\;\epsilon_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s}\;d_1x^{\mu_1}\wedge\cdots\wedge d_sx^{\mu_s} \tag{E.22}$$

das Pendant zu Gl. (E.10′).

[E.3] Durch Kontraktion mit Metriken, hier explizit mit: $g_{\rho_1\mu_1}\cdots g_{\rho_s\mu_s}$, folgen alle Relationen mit kovarianten durch kontravariante Indizes ersetzt, und umgekehrt. Aufgrund der allgemeinen Identitäten $g_{\mu\nu;\rho}\equiv 0$ und $\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d;\rho}\equiv 0$ gilt dies weiter, wenn kovariante Ableitungen involviert sind.

Wir betrachten die bezüglich allgemeiner Koordinatentransformationen skalaren Integranden im Stokes'schen Satz nach Gl. (E.13). Wir haben:

$$T_{\mu_1\cdots\mu_{s-1};\rho}\, dV^{\rho\mu_1\cdots\mu_{s-1}} \tag{E.23}$$
$$= (-1)^{\rho}\ (s-1)!\,(d-(s-1))!\ \tilde{c}_{(s-1)}\ \cdot\ \tilde{c}_{(s)}\,(-1)^{d-1}\ \tilde{T}^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}{}_{;\rho}\ d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\mu_{d-s}}$$

$$T_{\mu_1\cdots\mu_{s-1}}\, dV^{\mu_1\cdots\mu_{s-1}} \tag{E.23$'$}$$
$$= (-1)^{\rho}\ (s-1)!\,(d-(s-1))!\ \tilde{c}_{(s-1)}\ \cdot\ \tilde{c}_{(s-1)}\ \tilde{T}^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}\ d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\mu_{d-s}\rho}$$

Aus Gl. (E.20) folgt die Identität

$$(-1)^{d-1}\,\mathrm{sgn}_d(s) \;=\; \mathrm{sgn}_d(s-1) \tag{E.24}$$

Division der Integranden der Gln. (E.23), (E.23$'$) durch den Ausdruck vor den Punkten und Multiplikation mit $\mathrm{sgn}_d(s-1)$ ergibt mithilfe von Gl. (E.13) den Stokes'schen Satz in seiner dualen Formulierung:

$$\tilde{c}_{(s)}\,\mathrm{sgn}_d(s)\int_{G_s}\tilde{T}^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}{}_{;\rho}\ d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \tag{E.25}$$
$$= \tilde{c}_{(s-1)}\,\mathrm{sgn}_d(s-1)\int_{\partial G_s}\tilde{T}^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}\ d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}$$

indem wir benutzen die (kovariante) Divergenzfreiheit von metrischem Tensor und Epsilon-Pseudotensor: $g_{\mu\nu;\rho}\equiv 0$ und $\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d;\rho}\equiv 0$. Der Faktor $\mathrm{sgn}_d(s)$ kürzt gerade das in $\tilde{c}_{(s)}$ explizit definierte Vorzeichen, vgl. Gl. (E.20).

Für den Fall $s\equiv d$ wird Gl. (E.25) zu

$$\tilde{c}_{(d)}\,\mathrm{sgn}_d(d)\int_{G_d}\tilde{T}^{\rho}{}_{;\rho}\,d\tilde{V} \;=\; \tilde{c}_{(d-1)}\,\mathrm{sgn}_d(d-1)\int_{\partial G_d}\tilde{T}^{\rho}\,d\tilde{V}_{\rho} \tag{E.26}$$

$$\text{mit}\qquad d\tilde{V} \;=\; d!\,c_{(0)}\ \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d}\ d_1x^{\mu_1}\cdots d_dx^{\mu_d} \tag{E.26$'$}$$

$$d\tilde{V}_{\rho} \;=\; (d-1)!\,c_{(1)}\ \epsilon_{\rho\mu_1\cdots\mu_{d-1}}\ d_1x^{\mu_1}\cdots d_{d-1}x^{\mu_{d-1}} \tag{E.26$''$}$$

Die Faktoren vor den Integralen in den Gln. (E.25) und (E.26) werden zu Eins – und dies genau sei unsere Wahl –, wenn die Konstanten $c_{(s)}$ gesetzt werden wie folgt:

$$c_{(s)} \;=\; \frac{1}{s!(d-s)!} \tag{E.27}$$

Denn dies impliziert $\tilde{c}_{(s)}\equiv\mathrm{sgn}_d(s)$. Die definierenden Gleichungen bezüglich Dualität – die Gln. (E.14) und (E.18) – lauten in dieser Konvention:

$$\tilde{T}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \;=\; \frac{1}{s!(d-s)!}\ \epsilon_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s}\ T^{\mu_1\cdots\mu_s} \tag{E.28}$$

beziehungsweise:

$$T^{\mu_1\cdots\mu_s} \;=\; (-1)^{\rho}\,\mathrm{sgn}_d(s)\ \epsilon^{\mu_1\cdots\mu_s\nu_1\cdots\nu_{d-s}}\ \tilde{T}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \tag{E.29}$$
$$= (-1)^{\rho}\ \tilde{T}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}}\ \epsilon^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s} \tag{E.29$'$}$$

Speziell für das duale Volumenelement:

$$d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \;=\; \frac{1}{(d-s)!}\ \epsilon_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\mu_1\cdots\mu_s}\ d_1x^{\mu_1}\cdots d_sx^{\mu_s} \tag{E.30}$$

das also impliziert Division durch die Fakultät der Anzahl freier Indizes.

Den diese Konvention bezüglichen Stokes'schen Satz in seiner dualen Formulierung halten wir fest wie folgt – vgl. Gl. (E.25):

$$\tilde{c}_{(s)}\ \mathrm{sgn}_d(s)\ \int_{G_s} \tilde{T}^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}{}_{;\rho}\ d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}} \tag{E.31}$$

$$=\ \tilde{c}_{(s-1)}\ \mathrm{sgn}_d(s-1)\ \int_{\partial G_s} \tilde{T}^{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}\ d\tilde{V}_{\nu_1\cdots\nu_{d-s}\rho}$$

Für den Fall $s\equiv d$ gilt – vgl. die Gln. (E.26)-(E.26″):

$$\tilde{c}_{(d)}\ \mathrm{sgn}_d(d)\ \int_{G_d} \tilde{T}^{\rho}{}_{;\rho}\ d\tilde{V}\ =\ \tilde{c}_{(d-1)}\ \mathrm{sgn}_d(d-1)\ \int_{\partial G_d} \tilde{T}^{\rho}\ d\tilde{V}_\rho \tag{E.32}$$

$$\text{mit}\qquad d\tilde{V}\ =\ \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_d}\ d_1x^{\mu_1}\cdots d_dx^{\mu_d} \tag{E.32′}$$

$$d\tilde{V}_\rho\ =\ \epsilon_{\rho\mu_1\cdots\mu_{d-1}}\ d_1x^{\mu_1}\cdots d_{d-1}x^{\mu_{d-1}} \tag{E.32″}$$

E.2 Integration der Funktionen $\tilde{\chi}^C$, $\tilde{\chi}^{NC}$

Wir führen explizit durch formale Schritte in Zusammenhang mit der Integration der Funktionen $\tilde{\chi}^C$, $\tilde{\chi}^{NC}$, die im Haupttext nur zitiert werden können.

E.2.1 Integration der longitudinalen Parameter $u_\mathfrak{p}$, $u_\mathfrak{m}$: Funktional $I_L[F]$

Die Integration der paralleltransportierten Feldstärken über die Mantelflächen $S_\mathfrak{p}$, $S_\mathfrak{m}$ der Pyramiden $P_\mathfrak{p}$, $P_\mathfrak{m}$ impliziert Integrale der Form – vgl. die Gln. (2.195), (2.195′):[E.4]

$$I_L[F]\ =\ \int_{V_\mathfrak{p}\vee L_\mathfrak{p}} d\sigma^\mathfrak{p}_\mathfrak{p}(\tilde{x}_\mathfrak{p})\ \int_{V_\mathfrak{m}\vee L_\mathfrak{m}} d\sigma^\mathfrak{m}_\mathfrak{m}(\tilde{x}_\mathfrak{m})\ \ F(\tilde{x}^2) \tag{E.33}$$

$$=\ \int_{-T_\mathfrak{p}/2}^{T_\mathfrak{p}/2} \frac{\partial x^\mathfrak{p}_\mathfrak{p}}{\partial u_\mathfrak{p}}\, du_\mathfrak{p}\ \int_{-T_\mathfrak{m}/2}^{T_\mathfrak{m}/2} \frac{\partial x^\mathfrak{m}_\mathfrak{m}}{\partial u_\mathfrak{m}}\, du_\mathfrak{m}\ \ F(\tilde{x}^2) \tag{E.33′}$$

mit $d\sigma^{\tilde{\mu}}_\imath(\tilde{x}_\imath)\equiv dx^{\tilde{\mu}}_\imath$ für $\imath=\mathfrak{p},\mathfrak{m},\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$, vgl. Gl. (2.193), und definierten Funktionen F.

Es ist $\tilde{x}$ der Differenzvektor der Weltpunkte $\tilde{x}_\mathfrak{p}$, $\tilde{x}_\mathfrak{m}$, die Elemente sind entweder der Volumina $V_\mathfrak{p}$, $V_\mathfrak{m}$ oder der Grundflächen $L_\mathfrak{p}$, $L_\mathfrak{m}$ der Pyramiden. Im Sinne der expliziten Parametrisierungen der Gln. (2.154), (2.155) seien die „$\mathfrak{p}$"-Mannigfaltigkeiten *longitudinal*, das heißt in Richtung $e_{(\mathfrak{p})}$, parametrisiert mit $u_\mathfrak{p}: -T_\mathfrak{p}/2\to T_\mathfrak{p}/2$; entsprechend die „$\mathfrak{m}$"-Mannigfaltigkeiten in Richtung $e_{(\mathfrak{m})}$ mit $u_\mathfrak{m}: -T_\mathfrak{m}/2\to T_\mathfrak{m}/2$. Dann gilt – ohne Bezug zu nehmen auf die Parametrisierungen der Gln. (2.154), (2.155):[E.4]

$$\tilde{x}\ =\ \tilde{x}_\mathfrak{p}(u_\mathfrak{p})-\tilde{x}_\mathfrak{m}(u_\mathfrak{m}) \tag{E.34}$$

$$=\ \frac{\partial x^\mathfrak{p}_\mathfrak{p}}{\partial u_\mathfrak{p}}\,u_\mathfrak{p}\ e_{(\mathfrak{p})}\ -\ \frac{\partial x^\mathfrak{m}_\mathfrak{m}}{\partial u_\mathfrak{m}}\,u_\mathfrak{m}\ e_{(\mathfrak{m})}\ +\ (x^i_\mathfrak{p}-x^i_\mathfrak{m})\,e_{(i)} \tag{E.34′}$$

$$\text{mit}\qquad \tilde{x}_\mathfrak{p}\ \in\ V_\mathfrak{p}\vee L_\mathfrak{p}\qquad \tilde{x}_\mathfrak{m}\ \in\ V_\mathfrak{m}\vee L_\mathfrak{m} \tag{E.35}$$

Dabei impliziert Gl. (E.34′) bereits die Forderung von *Planarität* der Pyramiden $P_\mathfrak{p}$, $P_\mathfrak{m}$ bezüglich ihrer respektiven longitudinalen Richtung $e_{(\mathfrak{p})}$, $e_{(\mathfrak{m})}$ – und o.E.d.A. *Linearität* der

[E.4] Seien $\mathfrak{p},\mathfrak{m}$ Lorentz-Indizes, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{m}$ dagegen Notation der Pyramiden und Teilchen; vgl. Fußn. D.9. Bzgl. der Koordinatenlinien $\tilde{\mu}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ als der Richtungen der (Anti)Quark-Weltlinien vgl. Anh. D.4. Aus dem Zusammenhang geht hervor, ob sich Größen dieses Abschnitts, die versehen sind mit einer Tilde, beziehen auf diese Koordinatenlinien – oder auf die Fourier-Transformierte im Impulsraum.

Parametrisierung, das heißt konstante Parameter-Geschwindigkeiten:

$$\frac{\partial x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}} \;,\; \frac{\partial x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}} \qquad \text{konstant bzgl.} \quad u_{\mathfrak{p}}, u_{\mathfrak{m}} \tag{E.36}$$

mit explizit $s_{\mathfrak{p}}\varrho^{-1}$, $s_{\mathfrak{m}}\varrho^{-1}$ für die Volumina $V_{\mathfrak{p}}$, $V_{\mathfrak{m}}$ und ϱ^{-1} für die Grundflächen $L_{\mathfrak{p}}$, $L_{\mathfrak{m}}$ im Falle der Parametrisierungen der Gln. (2.154), (2.155). Diese Faktoren können als konstant aus den Integralen herausgezogen werden. Übergang zur Fourier-Transformierten $\tilde{F}(k^2)$ von $F(\tilde{x}^2 \equiv x^2)$ ergibt dann unter Vertauschung der Integrationen:

$$I_L[F] \;=\; \int \frac{dk}{(2\pi)^4}\; \tilde{F}(k^2)\; \frac{\partial x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, \frac{\partial x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}} \int_{-T_{\mathfrak{p}}/2}^{T_{\mathfrak{p}}/2} du_{\mathfrak{p}} \int_{-T_{\mathfrak{m}}/2}^{T_{\mathfrak{m}}/2} du_{\mathfrak{m}}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\cdot x} \tag{E.37}$$

$$\text{mit} \qquad k\cdot x \;=\; \tilde{k}\cdot\tilde{x} \;=\; k_{\mathfrak{p}}\, \frac{\partial x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, u_{\mathfrak{p}} \;-\; k_{\mathfrak{m}}\, \frac{\partial x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}}\, u_{\mathfrak{m}} \;+\; k_i\, x^i \tag{E.38}$$

vgl. $\tilde{k}\cdot\tilde{x} = k_{\tilde{\mu}} x^{\tilde{\mu}} = \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}} \mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\rho}}\, k_{\bar{\nu}} x^{\bar{\rho}} = \delta^{\bar{\nu}}_{\bar{\rho}}\, k_{\bar{\nu}} x^{\bar{\rho}} = k_{\bar{\mu}} x^{\bar{\mu}} = \bar{k}\cdot\bar{x} \stackrel{!}{=} \mathbb{L}_{\bar{\mu}}{}^{\nu} \mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\rho}\, k_\nu x^\rho = \delta^\nu_\rho\, k_\nu x^\rho = k_\mu x^\mu = k\cdot x$.

Im Limes $T_{\mathfrak{p}}$, $T_{\mathfrak{m}} \to \infty$ gehen die $u_{\mathfrak{p}}$-,$u_{\mathfrak{m}}$-Integrale wie

$$\lim_{T_\imath\to\infty} \int_{-T_\imath/2}^{T_\imath/2} du_\imath\; \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z_\imath u_\imath} \;=\; 2\pi\,\delta(z_\imath) \qquad z_\imath = k_\imath\, \frac{\partial x_\imath^\imath}{\partial u_\imath} \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{E.39}$$

über in Delta-Distributionen. Nachtmann diskutiert in Ref. [146] – vgl. den Begriff des „Femto-Universums“ –, daß sich auf der Zeitskala der Streuung der Zusatnd der Partonen qualitativ nicht ändert: Parton-Annihilations- und -Produktionsprozesse können vernachlässigt werden, so daß die Propagation geschieht auf geradlinigen Trajektorien, deren Längen, das heißt die Eigenzeiten $T_{\mathfrak{p}}$, $T_{\mathfrak{m}}$ der Propagation, im Vergleich zu den sonst involvierten Skalen approximiert werden können als unendlich. In diesem Sinne wird durchgeführt der formale Übergang $T_{\mathfrak{p}}, T_{\mathfrak{m}} \to \infty$[E.5]; für $I_L[F]$ nach Gl. (E.37) folgt mithilfe von Gl. (E.39):

$$I_L[F] \;=\; \int \frac{dk}{(2\pi)^2}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_i\,x^i}\;\; \tilde{F}(k^2)\;\; \frac{\partial x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\, \delta\!\left(k_{\mathfrak{p}}\, \frac{\partial x_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{p}}}{\partial u_{\mathfrak{p}}}\right)\; \frac{\partial x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}}\, \delta\!\left(k_{\mathfrak{m}}\, \frac{\partial x_{\mathfrak{m}}^{\mathfrak{m}}}{\partial u_{\mathfrak{m}}}\right) \tag{E.40}$$

und mithilfe $|\alpha|\delta(z\alpha) = \delta(z)$ unmittelbar:

$$I_L[F] \;=\; \int \frac{dk}{(2\pi)^2}\; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k_i\,x^i}\;\; \delta(k_{\mathfrak{p}})\,\delta(k_{\mathfrak{m}})\;\; \tilde{F}(k^2) \tag{E.41}$$

Es liegt nahe, auch im Lorentz-invarianten Vier-Integrationsmaß dk von den Komponenten k_μ, $\mu \in \{0,1,2,3\}$, überzugehen zu den Komponenten $k_{\tilde{\mu}}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$:

$$k_{\tilde{\mu}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\nu}}\, k_{\bar{\nu}} \;=\; \mathbb{S}_{\tilde{\mu}}{}^{\bar{\rho}} \mathbb{L}_{\bar{\rho}}{}^{\nu}\, k_\nu \;\equiv\; (\mathbb{S}\mathbb{L})_{\tilde{\mu}}{}^{\nu}\, k_\nu \tag{E.42}$$

Bzgl. dieses Übergangs – über Lichtkegelkomponenten $k_{\bar{\mu}}$, $\bar{\mu} \in \{+,-,1,2\}$ – vgl. Anh. D.4, die Gln. (D.86), (D.86′). Für die Jacobi-Determinante der Transformation folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(k_0,k_1,k_2,k_3)}{\partial(k_{\mathfrak{p}},k_{\mathfrak{m}},k_1,k_2)} \;&=\; \left[\frac{\partial(k_{\mathfrak{p}},k_{\mathfrak{m}},k_1,k_2)}{\partial(k_0,k_1,k_2,k_3)}\right]^{-1} \\ &=\; \left[\,\det\!\left((\mathbb{S}\mathbb{L})_{\tilde{\mu}}{}^{\nu}\right)\right]^{-1} \;=\; \det\!\left((\mathbb{S}\mathbb{L})^{\tilde{\mu}}{}_{\nu}\right) \;=\; \det\mathbb{S}\mathbb{L} \qquad \mathbb{S} \equiv \left(\mathbb{S}^{\tilde{\mu}}{}_{\bar{\nu}}\right),\, \mathbb{L} \equiv \left(\mathbb{L}^{\bar{\mu}}{}_{\nu}\right) \end{aligned} \tag{E.43}$$

ergo:[E.6]

$$dk \;\equiv\; dk^0\, dk^3\, d^2\mathbf{k} \;=\; -\,\det\mathbb{S}\mathbb{L}\; dk_{\mathfrak{p}}\, dk_{\mathfrak{m}}\, d^2\mathbf{k} \tag{E.44}$$

mit $d^2\mathbf{k} \equiv dk^1 dk^2 = dk_1 dk_2$.

[E.5] cum grano salis $\varrho^{-1}T_{\mathfrak{p}}, \varrho^{-1}T_{\mathfrak{m}} \to \infty$ – das heißt *ausschließlich* des Anstiegs gegen Unendlich, der Konsequenz ist der aktiven Boosts mit $\beta_{\mathfrak{p}}, \beta_{\mathfrak{m}} \to 1$; bzgl. der eigentlichen Entsprechung $\varrho^{-1}T_{\mathfrak{p}}, \varrho^{-1}T_{\mathfrak{m}} \leftrightarrow T_0$, vgl. die Gln. (D.101), (D.101′) und (D.104).

[E.6] Das explizite Vorzeichen, das folgt aus dem Übergang von kontra- zu kovarianten Komponenten, kürzt das $\det\mathbb{L}$-implizite Vorzeichen, das ausdrückt die Orientierungsumkehr des Übergangs $(k^0, k^3) \to (k^+, k^-)$.

Für Gl. (E.41) folgt:

$$I_L[F] \;=\; -\det\mathbb{SL}\int\frac{dk^1dk^2}{(2\pi)^2}\;\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,k^i\,x^i}\int dk_{\mathfrak{p}}\,\delta(k_{\mathfrak{p}})\int dk_{\mathfrak{m}}\,\delta(k_{\mathfrak{m}})\;\;\tilde{F}(k^2) \tag{E.45}$$

$$\;=\; -\det\mathbb{SL}\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\;\;\tilde{F}(-\mathbf{k}^2) \tag{E.45$'$}$$

Sei im Sinne der letzten Relationen ein Operator $\tilde{F}$ definiert durch

$$\tilde{F}[f](|\mathbf{x}|)\;:=\;\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\;\;\tilde{f}(k)\Big|_{k^0,k^3\equiv 0} \tag{E.46}$$

Zusammenfassend gilt:

$$I_L[F] \;=\; -\det\mathbb{SL}\cdot\tilde{F}[F] \tag{E.47}$$

$$\text{mit}\qquad \tilde{F}[F](|\mathbf{x}|)\;=\;\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\;\;\tilde{F}(-\mathbf{k}^2)$$

vgl. Gl.(E.45$'$), – mit $\tilde{F}$ nach Gl. (E.46).

Wir halten in Worte fest die Wirkung des Operators $\tilde{F}$: Es ist $\tilde{F}[f](|\mathbf{x}|)$ die Funktion, die folgt aus einer Funktion $f(x)$ der Raumzeit auf Basis – in d Dimensionen:

$$\tilde{f}(k)\;=\;\int d^dx\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,k\cdot x}\;\;f(x) \tag{E.48}$$

$$f(x)\;=\;\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\;\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot x}\;\;\tilde{f}(k) \tag{E.48$'$}$$

durch sukzessive *Fourier-Transformation* in den Impulsraum, *Identisch-Null-Setzen* der longitudinalen Komponenten k^0, k^3 und *Fourier-Rück-Transformation*, vgl. Gl. (E.47).

Das Funktional $\tilde{F}[F]$ – und daher $I_L[F]$ – hängt ab nur von $|\mathbf{x}|$, dem Betrag des transversalen Differenzvektors der integrierten Feldstärken, vgl. die Gln.(E.34)-(E.35).

E.2.2 Integration bezüglich der transversalen Projektionen $S_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, $S_{\mathfrak{m}}^{\perp}$: Funktional $I_T[F]$

In Abschnitt 2.4.4 wird die konfinierende Funktion $\tilde{\chi}^C$ ausgedrückt durch das transversale Integation repräsentierende Funktional I_T – vgl. die Gln. (2.227), (2.228):

$$\tilde{\chi}^C\;=\;-\det\mathbb{SL}\,g_{\mathfrak{pm}}\;\cdot\;\mathrm{i}\,\frac{1}{12}\;\;I_T[F] \tag{E.49}$$

unter Definition:[E.7]

$$I_T[F]\;=\;-g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\int_{\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}}dx_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}}\int_{\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}}dx_{\mathfrak{m}}^{\tilde{\nu}}\;\;\partial_{\tilde{\rho}}\big[x^{\tilde{\rho}}F(\tilde{x}^2)\big] \tag{E.50}$$

mit $\partial_{\tilde{\mu}}\equiv\partial/\partial x^{\tilde{\mu}}$ und $\tilde{x}\equiv(x^{\tilde{\mu}})$, $x^{\tilde{\mu}}=x_{\mathfrak{p}}^{\tilde{\mu}}-x_{\mathfrak{m}}^{\tilde{\mu}}$, – $\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\rho},\ldots\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$.

Wir werten I_T aus für die allgemeine Lorentz-skalare Funktion $F\equiv F(\tilde{x}^2)$, die lediglich insofern eingeschränkt sei, als sie im Sinn $F\equiv F(|\mathbf{x}|)$ abhänge nur vom – Betrag des – transversalen Vektors $\mathbf{x}\equiv(x^1,x^2)^t$, und die *in praxi* zu identifizieren ist wie

$$F(|\mathbf{x}|)\;\equiv\;\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|)\;\equiv\;-\frac{1}{|\mathbf{x}|}\frac{d}{d|\mathbf{x}|}\;\;\tilde{F}[F^C](|\mathbf{x}|)\qquad|\mathbf{x}|\equiv\sqrt{\mathbf{x}^2},\;\;\mathbf{x}^2\equiv x^ix^i \tag{E.51}$$

mit F^C die fundamentale konfinierende Korrelationsfunktion, vgl. die Gln. (2.231), (2.232).

Wir betrachten I_T nach Gl. (E.50) als das Integral der einen paralleltransportierten

[E.7] In Abschnitt E.1 ist ausgeführt der Formalismus von Integration auf (pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeiten; für unmittelbare Anknüpfung fassen wir die Transversalprojektionen $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$ auf als Untermannigfaltigkeiten der Minkowski-Raumzeit und summieren im Sinne $\tilde{\mu},\tilde{\nu},\tilde{\rho}\in\{\mathfrak{p},\mathfrak{m},1,2\}$ über den gesamten Indexbereich – *o.E.d.A.*, da *identisch verschwinden* longitudinale Komponenten der $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$-, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$-Flächenelemente.

Feldstärke über $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, der anderen über $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp$. Deren Positionen sind gegeben durch

$$\tilde{x}_\imath \equiv \left(0,\, 0,\, \mathbf{x}_\imath^t\right)^t \qquad \imath = \mathfrak{p}, \mathfrak{m} \tag{E.52}$$

$$\text{mit} \qquad \tilde{x}_\imath \equiv \tilde{x}_\imath(s_\imath) \qquad \mathbf{x}_\imath \equiv \mathbf{x}_\imath(s_\imath) \qquad s_\imath\colon\, 0 \to 1 \tag{E.52'}$$

deren Differenzvektor durch:

$$\tilde{x} \equiv \tilde{x}_\mathfrak{p} - \tilde{x}_\mathfrak{m} \tag{E.53}$$

$$\tilde{x}(s_\mathfrak{p}, s_\mathfrak{m}) \equiv \tilde{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) - \tilde{x}_\mathfrak{m}(s_\mathfrak{m}) \qquad \mathbf{x}(s_\mathfrak{p}, s_\mathfrak{m}) \equiv \mathbf{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) - \mathbf{x}_\mathfrak{m}(s_\mathfrak{m}) \tag{E.53'}$$

vgl. Gl. (2.147). Es sind $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp$ zu verstehen als *abschnittweise parametrisiert* bezüglich ihres Quark- und Antiquark-Abschnitts: $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp\big|_Q$, $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp\big|_{AQ}$ bzw. $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp\big|_Q$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp\big|_{AQ}$; diese verlaufen für Parameter $s_\mathfrak{p}, s_\mathfrak{m}\colon 0 \to 1$ von ω zum Quark beziehungsweise von ω zum Antiquark – wobei *nicht* a priori gefordert werde *abschnittweise Geradlinigkeit*:[E.8]

$$\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp|_Q(s_\mathfrak{p}\colon 0 \to 1)\colon \qquad \textit{Apex}\colon\ x_\mathfrak{p}(0) = \omega \quad \longrightarrow \quad Q\colon\ \tilde{x}_\mathfrak{p}(1) = x \tag{E.54}$$

$$\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp|_{AQ}(s_\mathfrak{p}\colon 0 \to 1)\colon \qquad \textit{Apex}\colon\ x_\mathfrak{p}(0) = \omega \quad \longrightarrow \quad AQ\colon\ \tilde{x}_\mathfrak{m}(1) = \bar{x} \tag{E.54'}$$

Es sind x, $\bar{x}$ die Positionen des (Anti)Quarks, explizit:[E.9]

$$\mathbf{x} = \omega + \left(\bar{z}_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2\right) = \omega + \mathbf{r}_\mathfrak{p}^Q \tag{E.55}$$

$$\bar{\mathbf{x}} = \omega + \left(-z_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2\right) = \omega + \mathbf{r}_\mathfrak{p}^{AQ} \tag{E.55'}$$

und ω der gemeinsame Apex der *verallgemeinerten* Pyramiden $P_\mathfrak{p}$, $P_\mathfrak{m}$ – über den Wegner-Wilson-Loops $W_\mathfrak{p}$, $W_\mathfrak{m}$ –, der identifiziert wird mit dem gemeinsamen Referenzpunkt x_0, der wiederum gewählt wird – „im Sinne höchster Symmetrie", vgl. Fußn. 2.31 auf Seite 76 – als die Mitte des transversalen Impaktvektors $\mathbf{b}$.[E.10]

Das Funktional I_T nach Gl. (E.50) involviert die Differentiale $dx_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}$, $dx_\mathfrak{m}^{\tilde{\mu}}$ bezüglich $\tilde{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p})$, $\tilde{x}_\mathfrak{m}(s_\mathfrak{m})$: bezüglich der $\mathfrak{p}$-,$\mathfrak{m}$-Koordinatenlinien entlang $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp$. Dann sind durch

$$d_\mathfrak{p} x^{\tilde{\mu}}(s_\mathfrak{p}) \equiv \frac{dx^{\tilde{\mu}}}{ds_\mathfrak{p}}(s_\mathfrak{p})\ ds_\mathfrak{p} = \frac{dx_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}}{ds_\mathfrak{p}}(s_\mathfrak{p})\ ds_\mathfrak{p} \equiv dx_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}(s_\mathfrak{p}) \tag{E.56}$$

$\mathfrak{p}$-Koordinatenlinien

$$d_\mathfrak{m} x^{\tilde{\mu}}(s_\mathfrak{m}) \equiv \frac{dx^{\tilde{\mu}}}{ds_\mathfrak{m}}(s_\mathfrak{m})\ ds_\mathfrak{m} = -\frac{dx_\mathfrak{m}^{\tilde{\mu}}}{ds_\mathfrak{m}}(s_\mathfrak{m})\ ds_\mathfrak{m} \equiv -dx_\mathfrak{m}^{\tilde{\mu}}(s_\mathfrak{m}) \tag{E.56'}$$

$\mathfrak{m}$-Koordinatenlinien

gegeben die Differentiale $d_\imath \tilde{x} \equiv (d_\imath x^{\tilde{\mu}})$, $\imath \equiv \mathfrak{p}, \mathfrak{m}$, $\tilde{\mu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$, in der Konvention von Abschnitt E.1, Gl. (E.9), die also anknüpfen an den dort entwickelten Formalismus.

Im Haupttext werden gewählt die Flächen $\mathcal{S}_\mathfrak{p}$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}$ als die Mantelflächen planer Pyramiden $P_\mathfrak{p}$, $P_\mathfrak{m}$ und auf dieser Basis angegeben für die transversalen Projektionen $\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp$, $\mathcal{S}_\mathfrak{m}^\perp$ explizite Parametrisierungen, vgl. Kap. 2.4.2; wir rekapitulieren Gl. (2.157) in Form:[E.8]

$$\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp \equiv \mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp\big|_Q \circ \left(\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp\big|_{AQ}\right)^{-1} \tag{E.57}$$

$$\text{mit} \qquad \mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp\big|_Q = \left\{ \tilde{x}_\mathfrak{p} \equiv (x_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}) \,\middle|\, \tilde{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) = \left(\omega^i + s_\mathfrak{p}\, r_\mathfrak{p}^{Qi}\right) \tilde{e}_{(i)} \right\} \tag{E.57'}$$

$$\mathcal{S}_\mathfrak{p}^\perp\big|_{AQ} = \left\{ \tilde{x}_\mathfrak{p} \equiv (x_\mathfrak{p}^{\tilde{\mu}}) \,\middle|\, \tilde{x}_\mathfrak{p}(s_\mathfrak{p}) = \left(\omega^i + s_\mathfrak{p}\, r_\mathfrak{p}^{AQi}\right) \tilde{e}_{(i)} \right\}$$

[E.8] Für Kürze geben wir explizit nur Größen an der „p"-Pyramide $P_\mathfrak{p}$; bezüglich der „m"-Pyramide $P_\mathfrak{m}$ ist konsequent zu ersetzen $z_1 \to z_2$, $X \to Y$ und $b \to -b$, vgl. Gl. (2.170').

[E.9] Der Zusammenhang stellt klar, ob $\mathbf{x} \equiv (x^1, x^2)^t$ – vgl. Gl. (E.53) vs. (E.55) – identisch $\mathbf{x}_\mathfrak{p} - \mathbf{x}_\mathfrak{m}$, dem Differenzvektor der paralleltransportierten Feldstärken auf den Pyramiden $P_\mathfrak{p}$, $P_\mathfrak{m}$, oder identisch $\omega + \bar{z}_1 \mathbf{X} + \mathbf{b}/2 = \omega + \mathbf{r}_\mathfrak{p}^Q$, der Position des mit $P_\mathfrak{p}$ assoziierten Quarks Q; vgl. Fußn. 2.27 auf Seite 74.

[E.10] Im Falle *planer* Pyramiden – vgl. die expliziten Parametrisierungen in Kap. 2.4.2 auf Seite 76 – sind die Verbindungen Apex-Basis geradlinig und ihre transversalen Projektionen respektive gegeben durch $r_\mathfrak{p}^Q$, $r_\mathfrak{p}^{AQ}$ und $r_\mathfrak{m}^Q$, $r_\mathfrak{m}^{AQ}$ – und suggestiv die zweite Darstellung der Gln. (E.55),(E.55').

und abschnittweise

$$s_{\mathfrak{p}}:\ 0 \to 1 \tag{E.58}$$

bezüglich $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_Q$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_{AQ}$. Vgl. $r^Q_{\mathfrak{p}} = \bar{z}_1 X + b/2$, $r^{AQ}_{\mathfrak{p}} = -z_1 X + b/2$ – die Gln. (E.55), (E.55′).

Wir zerlegen $I_T[F]$ nach Gl. (E.50) in vier Summanden bezüglich der Kombinationen von (Anti)Quark-Abschnitten (I,J) – $I,J \in \{Q, AQ\}$:

$$I_T[F] \;=\; \sum\nolimits_{I,J \equiv Q,AQ} \mathrm{sign}_{I,J} \quad I_T[F]\Big|_{(I,J)} \tag{E.59}$$

$$\text{mit} \qquad I_T[F]\Big|_{(I,J)} \;=\; -\,g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}|_I} dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}|_J} dx^{\tilde{\nu}}_{\mathfrak{m}} \;\partial_{\tilde{\rho}}\big[x^{\tilde{\rho}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\Big|_{(I,J)} \tag{E.60}$$

Orientierungsumkehr der Antiquark-Abschnitte – vgl. Gl. (E.57) – ist dabei absorbiert im Signum $\mathrm{sign}_{I,J} = (-1)^{I+J}$, das definiert ist durch Zuweisen der Zahlenwerte $Q \equiv 0$, $AQ \equiv 1$; vgl. Gl. (2.204) bzgl. der nicht-konfinierenden Tensorstruktur. Für $I_T[F]\big|_{(I,J)}$ folgt

$$I_T[F]\Big|_{(I,J)} \;=\; g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}|_I} d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}|_J} d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\nu}} \;\partial_{\tilde{\rho}}\big[x^{\tilde{\rho}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\Big|_{(I,J)} \tag{E.61}$$

in Termen der Differentiale $d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}}$, $d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\mu}}$, vgl. die Gln. (E.56), (E.56′); explizit:

$$\begin{aligned} &I_T[F]\Big|_{(I,J)} \\ &= -\,g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}|_I} ds_{\mathfrak{p}} \left.\frac{dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}}{ds_{\mathfrak{p}}}\right|_I \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}|_J} ds_{\mathfrak{m}} \left.\frac{dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{m}}}{ds_{\mathfrak{m}}}\right|_J \partial_{\tilde{\rho}}\big[x^{\tilde{\rho}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\Big|_{(I,J)} \qquad \text{(E.62)} \\ &= -\,\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}|_I} ds_{\mathfrak{p}} \left.\frac{dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}}{ds_{\mathfrak{p}}}\right|_I \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}|_J} ds_{\mathfrak{m}} \left.\frac{dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{m}}}{ds_{\mathfrak{m}}}\right|_J R\,\Big|_{(I,J)}\, \partial_{\tilde{\rho}}\big[x^{\tilde{\rho}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\Big|_{(I,J)} \qquad \text{(E.62′)} \end{aligned}$$

zu lesen: $x^{\tilde{\mu}} F(\tilde{x}^2) \equiv x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})\; F\big(\tilde{x}^2(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})\big)$, mit $x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}}) \equiv x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}}) - x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{m}}(s_{\mathfrak{m}})$, vgl. die Gln. (E.53), (E.53′), – und wieder in Termen von $d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}}$, $d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\mu}}$:

$$I_T[F]\Big|_{(I,J)} \;=\; \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}|_I} d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}|_J} d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\nu}} \;R\,\Big|_{(I,J)}\, \partial_{\tilde{\rho}}\big[x^{\tilde{\rho}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\Big|_{(I,J)} \tag{E.63}$$

Für die Komponenten des Epsilon-Pseudotensors des Transversalraums gilt: $\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \overset{!}{=} \epsilon_{\mathfrak{p}\mathfrak{m}\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$, ergo: $\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} = \epsilon^{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \equiv \delta^{\tilde{\mu}}_1 \delta^{\tilde{\nu}}_2 - \delta^{\tilde{\nu}}_2 \delta^{\tilde{\mu}}_1$. Der metrische Tensor in Gl. (E.61) geht über in Gl. (E.63) in den Epsilon-Pseudotensor: $g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \to \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}$; dabei tritt auf die – auf (I,J), $I,J \in \{Q, AQ\}$ zu beziehende – Funktion $R \equiv R(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$, definiert wie[E.11]

$$\begin{aligned} R \;&\equiv\; g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}}\, d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\nu}} \;\Big/\; \epsilon_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}}\, d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\rho}}\, d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\sigma}} \qquad \text{(E.64)} \\ &=\; R(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}}) \;\equiv\; \left[\, g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \frac{dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}}{ds_{\mathfrak{p}}}(s_{\mathfrak{p}}) \frac{dx^{\tilde{\nu}}_{\mathfrak{m}}}{ds_{\mathfrak{m}}}(s_{\mathfrak{m}}) \,\right] \Big/ \left[\, \epsilon_{\tilde{\rho}\tilde{\sigma}} \frac{dx^{\tilde{\rho}}_{\mathfrak{p}}}{ds_{\mathfrak{p}}}(s_{\mathfrak{p}}) \frac{dx^{\tilde{\sigma}}_{\mathfrak{m}}}{ds_{\mathfrak{m}}}(s_{\mathfrak{m}}) \,\right] \qquad \text{(E.64′)} \end{aligned}$$

durch die Tangentialvektoren der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}$, vgl. die Gln. (E.56), (E.56′).

Es ist definiert das duale Flächenelement $d\tilde{V} \equiv d\tilde{V}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$ – in der Konvention von Abschn. E.1, Gl. (E.32′):

$$\begin{aligned} d\tilde{V} \;&=\; \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}}\, d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\nu}} \;=\; -\,\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}\, dx^{\tilde{\nu}}_{\mathfrak{m}} \qquad \text{(E.65)} \\ \equiv\; d\tilde{V}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}}) \;&=\; \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \frac{dx^{\tilde{\mu}}}{ds_{\mathfrak{p}}}(s_{\mathfrak{p}}) \frac{dx^{\tilde{\nu}}}{ds_{\mathfrak{m}}}(s_{\mathfrak{m}})\, ds_{\mathfrak{p}}\, ds_{\mathfrak{m}} \qquad \text{(E.65′)} \\ &=\; -\,\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \frac{dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}}{ds_{\mathfrak{p}}}(s_{\mathfrak{p}}) \frac{dx^{\tilde{\nu}}_{\mathfrak{m}}}{ds_{\mathfrak{m}}}(s_{\mathfrak{m}})\, ds_{\mathfrak{p}}\, ds_{\mathfrak{m}} \end{aligned}$$

Dies ist genau das Element in $I_T[F]\big|_{(I,J)}$.

[E.11] die erste Zeile in suggestiver Schreibweise in Hinblick auf die Gln. (E.61), (E.63)

(Anti)Quark-Abschnitte
$I, J \in \{Q, AQ\}$:

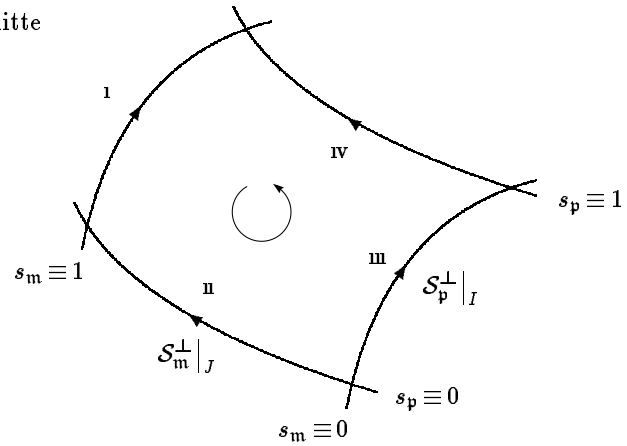


Abbildung E.1: Der duale Stokes'sche Satz reduziert die Integration über das direkte Produkt $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J$ der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I$ und $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J$ – mit $I, J \in \{Q, AQ\}$ – auf deren Rand $\partial\big(\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J\big)$. Die Pfeile geben an die Orientierung der Faktormannigfaltigkeiten für $s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}} : 0 \to 1$, der Kreispfeil die der Produktmannigfaltigkeit und deren Randes.

Das Funktional $I_T[F]\big|_{(I,J)}$ ist gegeben in Form von Gl. (E.61) als direktes Produkt von Linienintegralen entlang der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J$ – und in Form

$$I_T[F]\Big|_{(I,J)} \;=\; \iint_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J} d\tilde{V}\;\; R\;\; \partial_{\tilde{\mu}}\big[x^{\tilde{\mu}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\;\Big|_{(I,J)} \tag{E.66}$$

als Flächenintegral über deren (nichttriviales) direkte Produkt $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J$.

Die Funktion $R(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$ ist konstant bezüglich (I, J):

$$R\big|_{(I,J)} \;=\; -\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}} \;\Big/\; \big[\vec{r}^{\,I}_{\mathfrak{p}} \times \vec{r}^{\,J}_{\mathfrak{m}}\big]^3 \tag{E.67}$$

mit dem Skalarprodukt der transversalen Vektoren im Zähler: $\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}} = \delta_{ij}\, r^{Ii}_{\mathfrak{p}}\, r^{Jj}_{\mathfrak{m}}$, $i, j \in \{1, 2\}$, und der dritten Komponente des Vektorprodukts – als Maß des transversalen Flächenelements – im Nenner: $\big[\vec{r}^{\,I}_{\mathfrak{p}} \times \vec{r}^{\,J}_{\mathfrak{m}}\big]^3 = \epsilon_{ij3}\, r^{Ii}_{\mathfrak{p}}\, r^{Jj}_{\mathfrak{m}} \equiv \epsilon_{ij}\, r^{Ii}_{\mathfrak{p}}\, r^{Jj}_{\mathfrak{m}}$, $i, j \in \{1, 2\}$.

Die Konstante $R\big|_{(I,J)}$ wird in die eckige Klammer gezogen. Das Flächenintegral über die Direkte-Produkt-Mannigfaltigkeit wird reduziert auf das Linienintegral über deren Rand

$$I_T[F]\Big|_{(I,J)} \;=\; \iint_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J} d\tilde{V}\;\; \partial_{\tilde{\mu}}\big[R\;\; x^{\tilde{\mu}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\;\Big|_{(I,J)} \tag{E.68}$$

$$\;=\; \oint_{\partial\left(\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J\right)} d\tilde{V}_{\tilde{\mu}}\;\; \big[R\;\; x^{\tilde{\mu}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\;\Big|_{(I,J)} \tag{E.68$'$}$$

mithilfe des *Stokes'schen Satzes* in seiner *dualen Formulierung*, vgl. die Gln. (E.31), (E.32)-(E.32″), – und dem dualen Linienelement $d\tilde{V}_{\tilde{\mu}} \equiv d\tilde{V}_{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$ für die $\mathfrak{p}$- und $\mathfrak{m}$-Koordinatenlinien [$s_{\mathfrak{m}}$ bzw. $s_{\mathfrak{p}} = const.$] – in der Konvention von Abschn. E.1, Gl. (E.32″):

$$d\tilde{V}_{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}}) \;=\; \begin{cases} \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\; d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\nu}}(s_{\mathfrak{p}}) & \mathfrak{p}\text{-Koordinatenlinien} \\ \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\; d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\nu}}(s_{\mathfrak{m}}) & \mathfrak{m}\text{-Koordinatenlinien} \end{cases} \tag{E.69}$$

bzgl. $d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}) \equiv dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}})$, $d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{m}}) \equiv -dx^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{m}}(s_{\mathfrak{m}})$ vgl. die Gln. (E.56), (E.56′).

Die Orientierung der Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J$, $\partial(\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}\big|_J)$ ist bestimmt wie folgt: Definition des dualen Flächenelements wie $d\tilde{V}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}}) \equiv \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}})\, d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\nu}}(s_{\mathfrak{m}})$ – vgl. die Gln. (E.65), (E.65′) – bestimmt $\big(d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}})\big) \times \big(d_{\mathfrak{m}} x^{\tilde{\nu}}(s_{\mathfrak{m}})\big)$ als *Rechtssystem* und die Orientierung des Randes entsprechend der *Rechtsschrauben-Regel* wie in Abbildung E.1.

In Termen der dort bezeichneten Abschnitte ı, ıı, ım und ıv schreibt sich $I_T[F]|_{(I,J)}$ nach Gl. (E.68′) explizit

$$I_T[F]\Big|_{(I,J)} = \left[\int_{\text{ı}\circlearrowleft} + \int_{\text{ıı}\circlearrowleft} + \int_{\text{ım}\circlearrowleft} + \int_{\text{ıv}\circlearrowleft}\right] d\tilde{V}_{\tilde{\mu}} \left[R\ x^{\tilde{\mu}} F(\tilde{x}^2)\right] \Big|_{(I,J)} \tag{E.70}$$

Die Kreispfeile sind zu verstehen im Sinne des Kreispfeils in Abbildung E.1.

In der Summe $I_T[F] = \sum_{I,J} \mathrm{sign}_{I,J} I_T[F]\big|_{(I,J)}$ treten die Integrale über die „inneren Linien“ – das heißt über die Abschnitte ıı$\circlearrowleft$ und ım$\circlearrowleft$, charakterisiert respektive durch $s_{\mathfrak{p}} \equiv 0$ und $s_{\mathfrak{m}} \equiv 0$ *const.* – zweimal auf mit jeweils entgegengesetzter Orientierung. Sie kürzen sich; übrig bleiben die Integrale über ı$\circlearrowleft$ und ıv$\circlearrowleft$:

$$I_T[F] = \sum\nolimits_{I,J \equiv Q, AQ} \mathrm{sign}_{I,J} \left[\int_{\text{ı}\circlearrowleft} + \int_{\text{ıv}\circlearrowleft}\right] d\tilde{V}_{\tilde{\mu}} \left[R\ x^{\tilde{\mu}} F(\tilde{x}^2)\right] \Big|_{(I,J)} \tag{E.71}$$

Die *orientierten Abschnitte* ı$\circlearrowleft$ und ıv$\circlearrowleft$ sind charakterisiert bezüglich der Parameter $s_{\mathfrak{p}}$, $s_{\mathfrak{m}}$ respektive durch $\{s_{\mathfrak{p}}\colon 1 \to 0,\ s_{\mathfrak{m}} \equiv 1\}$ und durch $\{s_{\mathfrak{p}} \equiv 1,\ s_{\mathfrak{m}}\colon 0 \to 1\}$; vgl. Abb. E.1.

Bezüglich der Kombination (I,J) von (Anti)Quark-Abschnitten $I, J \in \{Q, AQ\}$ gilt für die dualen Linienelemente $d\tilde{V}_{\tilde{\mu}} \equiv d\tilde{V}_{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$ – vgl. Gl. (E.69):

$$d\tilde{V}_{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})\Big|_{(I,J)} \tag{E.72}$$
$$= \begin{cases} \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \dfrac{dx^{\tilde{\nu}}_{\mathfrak{p}}}{ds_{\mathfrak{p}}}(s_{\mathfrak{p}})\Big|_I ds_{\mathfrak{p}} = \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\ r_{\mathfrak{p}}^{I\tilde{\nu}}\ ds_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{p}\text{-Koordinatenlinien} \\ -\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \dfrac{dx^{\tilde{\nu}}_{\mathfrak{m}}}{ds_{\mathfrak{m}}}(s_{\mathfrak{m}})\Big|_J ds_{\mathfrak{m}} = -\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\ r_{\mathfrak{m}}^{J\tilde{\nu}}\ ds_{\mathfrak{m}} & \mathfrak{m}\text{-Koordinatenlinien} \end{cases}$$

und für $x^{\tilde{\mu}} \equiv x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$ – vgl. die Gln. (E.53), (E.53′) und (E.57), (E.57′):

$$x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})\Big|_{(I,J)} = x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}(s_{\mathfrak{p}})\big|_I - x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{m}}(s_{\mathfrak{m}})\big|_J \tag{E.73}$$
$$= \left(\omega^{\tilde{\mu}} + s_{\mathfrak{p}}\, r_{\mathfrak{p}}^{I\tilde{\mu}}\right) - \left(\omega^{\tilde{\mu}} + s_{\mathfrak{m}}\, r_{\mathfrak{m}}^{J\tilde{\mu}}\right) = s_{\mathfrak{p}}\, r_{\mathfrak{p}}^{I\tilde{\mu}} - s_{\mathfrak{m}}\, r_{\mathfrak{m}}^{J\tilde{\mu}}$$

Die Ausdrücke der Gln. (E.72), (E.73) sind zu kontrahieren. Es gilt:[E.12]

$$\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\ x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})\Big|_{(I,J)} \frac{dx^{\tilde{\nu}}_{\mathfrak{p}}}{ds_{\mathfrak{p}}}(s_{\mathfrak{p}})\Big|_I \tag{E.74}$$
$$= \epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \left[s_{\mathfrak{p}}\, r_{\mathfrak{p}}^{I\tilde{\mu}} - s_{\mathfrak{m}}\, r_{\mathfrak{m}}^{J\tilde{\mu}}\right] r_{\mathfrak{p}}^{I\tilde{\nu}}\, ds_{\mathfrak{p}} = -\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}}\, r_{\mathfrak{p}}^{I\tilde{\nu}}\, r_{\mathfrak{m}}^{J\tilde{\mu}}\ s_{\mathfrak{m}}\, ds_{\mathfrak{p}} = +\left[\vec{r}_{\mathfrak{p}}^{\,I} \times \vec{r}_{\mathfrak{m}}^{\,J}\right]^3 s_{\mathfrak{m}}\, ds_{\mathfrak{p}}$$

für die $\mathfrak{p}$- und analog $-\left[\vec{r}_{\mathfrak{p}}^{\,I} \times \vec{r}_{\mathfrak{m}}^{\,J}\right]^3 s_{\mathfrak{p}}\, ds_{\mathfrak{m}}$ für die $\mathfrak{m}$-Koordinatenlinien; dabei ist identifiziert: $\epsilon_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} r_{\mathfrak{p}}^{I\tilde{\mu}} r_{\mathfrak{m}}^{J\tilde{\nu}} \equiv \epsilon_{ij3}\, r_{\mathfrak{p}}^{Ii}\, r_{\mathfrak{m}}^{Jj} = \left[\vec{r}_{\mathfrak{p}}^{\,I} \times \vec{r}_{\mathfrak{m}}^{\,J}\right]^3$, $\tilde{\mu}, \tilde{\nu} \in \{\mathfrak{p}, \mathfrak{m}, 1, 2\}$, $i, j \in \{1, 2\}$, die dritte Komponente des Vektorprodukts von $r_{\mathfrak{p}}^I$, $r_{\mathfrak{m}}^J$ – wie bereits im Nenner von $R\big|_{(I,J)}$, vgl. Gl. (E.67). Es folgt:

$$d\tilde{V}_{\tilde{\mu}} x^{\tilde{\mu}}(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})\Big|_{(I,J)} = \begin{cases} +\left[\vec{r}_{\mathfrak{p}}^{\,I} \times \vec{r}_{\mathfrak{m}}^{\,J}\right]^3 s_{\mathfrak{m}}\, ds_{\mathfrak{p}} & \mathfrak{p}\text{-Koordinatenlinien} \\ -\left[\vec{r}_{\mathfrak{p}}^{\,I} \times \vec{r}_{\mathfrak{m}}^{\,J}\right]^3 s_{\mathfrak{p}}\, ds_{\mathfrak{m}} & \mathfrak{m}\text{-Koordinatenlinien} \end{cases} \tag{E.75}$$

und hiermit für I_T nach Gl. (E.71):

$$I_T[F] = \sum\nolimits_{I,J \equiv Q, AQ} \mathrm{sign}_{I,J}\ R\big|_{(I,J)}\ \left[\vec{r}_{\mathfrak{p}}^{\,I} \times \vec{r}_{\mathfrak{m}}^{\,J}\right]^3 \tag{E.76}$$
$$\times \left\{ \int_1^0 1 \cdot ds_{\mathfrak{p}}\ F\left(\left|s_{\mathfrak{p}}\, \mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I - 1 \cdot \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J\right|\right) - \int_0^1 1 \cdot ds_{\mathfrak{m}}\ F\left(\left|1 \cdot \mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I - s_{\mathfrak{m}}\, \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J\right|\right) \right\}$$

Es ist hier eingesetzt $\mathbf{x}\big|_{(I,J)} \equiv s_{\mathfrak{p}}\, \mathbf{r}_{\mathfrak{p}}^I - s_{\mathfrak{m}}\, \mathbf{r}_{\mathfrak{m}}^J$, vgl. Gl. (E.73), als das Argument der Funktion $F \equiv F(|\mathbf{x}|)$ – und für die orientierten Abschnitte ı$\circlearrowleft$ und ıv$\circlearrowleft$ respektive $\{s_{\mathfrak{p}}\colon 1 \to 0,\ s_{\mathfrak{m}} \equiv 1\}$

[E.12] Je einer der Vektoren $r_{\mathfrak{p}}^I$, $r_{\mathfrak{m}}^J$ folgt als Tangentialvektor der Faktor-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}_{\mathfrak{p}}^{\perp}$, $\mathcal{S}_{\mathfrak{m}}^{\perp}$; sind diese nicht geradlinig, bleibt a priori stehen die Summe zweier nichttrivialer Terme.

und $\{s_{\mathfrak{p}} \equiv 1,\ s_{\mathfrak{m}}\colon 0 \to 1\}$.

Ferner eingesetzt $R\big|_{(I,J)} \equiv -\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}} / \big[\vec{r}^{\,I}_{\mathfrak{p}} \times \vec{r}^{\,J}_{\mathfrak{m}}\big]^3$, vgl. Gl. (E.67), kürzt sich das Vektor- und bleibt stehen das Skalarprodukt. Für $I_T[F]$ folgt abschließend:

$$I_T[F] \tag{E.77}$$
$$= \sum\nolimits_{I,J \equiv Q,AQ} \mathrm{sign}_{I,J} \quad \mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}} \quad \int_0^1 ds \, \Big\{ F\big(\big|s\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}}\big|\big) \;+\; F\big(\big|\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - s\,\mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}}\big|\big) \Big\}$$

Es gilt für das relevante Parameterintegral – vgl. die Gln. (E.59)-(E.62) versus (E.77):[E.13]

$$\int_0^1 ds_{\mathfrak{p}} \int_0^1 ds_{\mathfrak{m}} \;\; \partial_i \big[x^i F(|\mathbf{x}|)\big] \;\Big|_{\mathbf{x} \equiv s_{\mathfrak{p}}\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - s_{\mathfrak{m}}\,\mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}}} \tag{E.78}$$
$$= \int_0^1 ds \, \Big\{ F\big(\big|s\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}}\big|\big) \;+\; F\big(\big|\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - s\,\mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}}\big|\big) \Big\}$$

Für $\tilde{\chi}^C$ folgt abschließend – vgl. die Gln. (E.49), (E.77):

$$\tilde{\chi}^C \;=\; -\det \mathbb{SL}\, g_{\mathfrak{pm}} \;\cdot \mathrm{i}\, \frac{1}{12} \tag{E.79}$$
$$\times \sum\nolimits_{I,J \equiv Q,AQ} \mathrm{sign}_{I,J} \quad \mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}} \quad \int_0^1 ds \, \Big\{ F\big(\big|s\,\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - \mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}}\big|\big) \;+\; F\big(\big|\mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} - s\,\mathbf{r}^J_{\mathfrak{m}}\big|\big) \Big\}$$

Wie betont, ist wie $F(|\mathbf{x}|) \equiv \tilde{F}^{(1)}[F^C](|\mathbf{x}|)$ zu identifizieren mit der fundamentalen Korrelationsfunktion F^C, vgl. Gl. (E.51). Im Haupttext werden zitiert Gl. (E.77) und (E.79).

Wir schließen diesen Anhang mit den folgenden Bemerkungen bezüglich der Gültigkeit der Darstellung von $I_T[F]$ durch Gl. (E.77) – und folglich von $\tilde{\chi}^C$ durch Gl. (E.79).

Zum einen basiert die Herleitung von $I_T[F]$ entsprechend Gl. (E.77) wesentlich auf der Anwendbarkeit des (dualen) Stokes'schen Satzes – vgl. Gl. (E.68) versus (E.68′). Dies setzt offenbar voraus – vgl. Gl. (E.66 versus (E.68) – Konstanz der Funktion $R(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$ bezüglich der Kombinationen (I,J) von (Anti)Quark-Abschnitten $I, J \in \{Q, AQ\}$, vgl. Gl.), das heißt Geradlinigkeit der Faktor-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}$. Wir sehen leicht, daß diese Annahme allerdings nicht notwendig ist: Bei Nicht-Geradlinigkeit werden $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}$ zerlegt in infinitesimal kleine Abschnitte I_i beziehungsweise J_j; dann ist $R(s_{\mathfrak{p}}, s_{\mathfrak{m}})$ konstant bezüglich der Kombinationen (I_i, J_j) von Abschnitten; es folgt $I_T[F]\big|_{(I_i,J_j)}$ in der Form von Gl. (E.68) und auf Basis des Stokes'schen Satzes in der Form von Gl. (E.68′). In der Summe $I_T[F] = \sum_{I_i,J_j} \mathrm{sign}_{I_i,J_j} I_T[F]\big|_{(I_i,J_j)}$ kürzen sich paarweise die Integrale über die inneren Linien und es folgt Gl. (E.71), bezogen auf den – nicht-geradlinigen – Rand $\partial(\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}} \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}})$.

Zum anderen basiert $I_T[F]$ entsprechend Gl. (E.77) wesentlich auf der Nicht-Trivialität der Direkten-Produkt-Mannigfaltigkeit $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}} \otimes \mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}$, die fordert lineare Unabhängigkeit der Faktor-Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}$. Sie ist gültig für die Funktion $\tilde{\chi}^C \equiv \tilde{\chi}^C_{\mathfrak{pm}} (\equiv \tilde{\chi}^C_{\mathfrak{mp}})$. Sie ist nicht gültig für die Funktionen $\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{pp}}$, $\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{mm}}$ – die subsumieren Integration beider paralleltransportierter Feldstärken über dieselbe Pyramiden-Mantelfläche: Es ist Bezug zu nehmen auf die Gln. (E.59), (E.62) und entsprechend zu substituieren die Mannigfaltigkeiten $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}$, $\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{m}}$. So gilt für $\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{pp}} \propto -\det \mathbb{SL} g_{\mathfrak{pp}}$ – mit $x^{\tilde{\mu}}(s,s')\big|_{(I,J)} = x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}(s)\big|_I - x^{\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}(s')\big|_J = s\, r^{I\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}} - s'\, r^{J\tilde{\mu}}_{\mathfrak{p}}$:

$$I_T[F]\Big|_{(I,J)} \;=\; g_{\tilde{\mu}\tilde{\nu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_I} d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\mu}} \int_{\mathcal{S}^{\perp}_{\mathfrak{p}}\big|_J} d_{\mathfrak{p}} x^{\tilde{\nu}} \;\; \partial_{\tilde{\rho}} \big[x^{\tilde{\rho}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\Big|_{(I,J)} \tag{E.80}$$
$$= \mathbf{r}^I_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{r}^J_{\mathfrak{p}} \int_0^1 ds \int_0^1 ds' \;\; \partial_{\tilde{\rho}} \big[x^{\tilde{\rho}} F(\tilde{x}^2)\big] \;\Big|_{(I,J)} \tag{E.80′}$$

und für $\tilde{\chi}^C_{\mathfrak{mm}}$ analog: $g_{\mathfrak{pp}} \to g_{\mathfrak{mm}}$ und $r_{\mathfrak{p}} \to r_{\mathfrak{m}}$.

[E.13] Diese Formel ist äquivalent zu Gl. (4.29) in Ref. [124], die wir dort nur zitieren.

Anhang F

Korrelationsfunktionen

Im Haupttext wird gemacht ein Ansatz für die konfinierende C- und die nicht-konfinierende NC-Struktur des Lorentz-Korrelationstensors im Impulsraum. Auf dieser Basis werden berechnet die streu-relevanten Funktionen $\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|)$, $\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|)$ und $\tilde{F}[F^{NC}](|\boldsymbol{\xi}|)$.

Wesentlicher Schritt ist die Fourier-Transformation in den Ortsraum einer durch den Ansatz definierten Funktion $\tilde{D}_\nu(k^2, m^2)$. Wir verifizieren simultan im Haupttext zitierte Relationen wie die Darstellung des Korrelationstensors im Ortsraum durch nur eine unabhängige Korrelationsfunktion, indem wir diese Transformation durchführen in dem verallgemeinerten Minkowski-Raum $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ mit Dimension d und Signatur σ, oder äquivalent: $\zeta \equiv (d+\sigma)/2$ der Anzahl zeitartiger und $\rho \equiv (d-\sigma)/2$ der Anzahl raumartiger Dimensionen.[F.1]

F.1 $\tilde{D}_\nu(k^2, m^2)$, $D_\nu(\xi^2, m^2)$ – „ν-verallgemeinerter“ Feynman-Propagator in $\mathcal{M}_{d,\sigma}$

In Kapitel 1.3, Gl. (1.78) und (1.81) wird gemacht der Ansatz[F.2]

$$\tilde{D}(k^2) \equiv \tilde{D}_C(k^2) \equiv -\frac{1}{2} k^2 \tilde{D}'_{NC}(k^2) \tag{F.1}$$
$$\stackrel{!}{=} 6\mathrm{i}\, A_\nu \cdot \lambda_\nu^2(-k^2)\ \tilde{D}_\nu(k^2, m^2)\ \Big|_\star \qquad \text{mit} \quad \star\colon\ m^2 \equiv 1$$

hier in Termen des „ν-verallgemeinerten“ Feynman-Propagators $\tilde{D}_\nu$, der definiert ist im Impulsraum durch:[F.3]

$$\tilde{D}_\nu(k^2, m^2) = \lambda_\nu^d \frac{1}{(\lambda_\nu^2 k^2 - m^2 + \mathrm{i}\,\epsilon)^\nu} \qquad \lambda_\nu, m \in \mathbb{R}^+,\ \ \nu \in \mathbb{C} \tag{F.2}$$

Es folgt im Ortsraum:

$$\tilde{D}_\nu(\xi^2, m^2) \equiv \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k\cdot\xi}\ \tilde{D}_\nu(k^2, m^2) \tag{F.3}$$

mit dem entsprechenden (Lorentz-)invarianten (d, ζ)-Skalarprodukt

$$k\cdot\xi \equiv g_{\mu\nu} k^\mu \xi^\nu = \sum_{i=1}^{\zeta} k^i \xi^i - \sum_{i=\zeta+1}^{d} k^i \xi^i \tag{F.4}$$

[F.1] Es ist $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ der Raum, zu dem der in Anhang E.1 definierte (pseudo-)Riemannsche Raum $G_{d,\sigma}$ lokal isoporph ist im Sinne des metrischen Tensors $g \equiv (g_{\mu\nu}) \equiv \mathrm{diag}[+1, \ldots, +1, -1, \ldots, -1]$ nach Gl. (E.1); der gewöhnliche Minkowski-Raum ist $\mathcal{M} \equiv \mathcal{M}_{4,-2}$ mit $\zeta \equiv 1$, $\rho \equiv 3$. Wir beziehen uns in diesem Anhang generell auf $\mathcal{M}_{d,\sigma}$, arbeiten o.E.d.A. in den korrespondierenden kartesischen Koordinaten $\mu \in \{1, 2, \ldots, d\}$ mit den ζ ersten zeit-, den ρ übrigen raumartig und präferieren i.a. den Satz von Indizes (d, ζ), in praxi: $(4, 1)$.

[F.2] Der Index ν wird in praxi – *physikalisch* suggeriert – identisch Vier gewählt.

[F.3] Der konventionelle Feynman-Propagator folgt für $\nu \equiv 1$, $\lambda_1 \equiv 1$, ist ergo gegeben durch $\tilde{\Delta}_F \equiv \tilde{D}_1\,|_{\lambda_1 \equiv 1}$.

Bzgl. der zugrundeliegenden Konventionen vgl. die Gln. (E.48), (E.48′) und Fußn. F.1.

Aus der $\tilde{D}_\nu$ definierenden Gl. (F.2) lesen wir ab:

$$-\frac{1}{\lambda_\nu^2}\frac{d}{dk^2}\;\tilde{D}_\nu(k^2,m^2) \;=\; \frac{d}{dm^2}\;\tilde{D}_\nu(k^2,m^2) \tag{F.5}$$

Durch n-fache Differentiation folgt ferner:[F.4]

$$\left(\frac{d}{dm^2}\right)^n\;\tilde{D}_\nu(k^2,m^2) \;=\; \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}\;\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu+n}}\right)^d\;\tilde{D}_{\nu+n}\big((\lambda_\nu/\lambda_{\nu+n}\cdot k)^2,m^2\big) \tag{F.6}$$

$$\Longleftrightarrow\quad \tilde{D}_\nu(k^2,m^2) \;=\; \frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(\nu)}\;\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-n}}\right)^d\;\left(\frac{d}{dm^2}\right)^n\;\tilde{D}_{\nu-n}\big((\lambda_\nu/\lambda_{\nu-n}\cdot k)^2,m^2\big) \tag{F.6′}$$

die gestrichene Gleichung durch Auflösen nach $\tilde{D}_{\nu+n}$, Umbenennung $(\lambda_\nu/\lambda_{\nu+n}\,k)\equiv\tilde{k}\to k$ und abschließenden Übergang $\nu\to(\nu-n)$, – in Termen von Ableitungen d/dk^2:

$$\tilde{D}_\nu(k^2,m^2) \;=\; \frac{\Gamma(\nu-n)}{\Gamma(\nu)}\;\left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-n}}\right)^d\;\left(-\frac{1}{\lambda_{\nu-n}^2}\frac{d}{dk^2}\right)^n\;\tilde{D}_{\nu-n}\big((\lambda_\nu/\lambda_{\nu-n}\cdot k)^2,m^2\big) \tag{F.7}$$

vgl. Gl. (F.5).

Analog gilt im Ortsraum:[F.5]

$$D_\nu(\xi^2,m^2) \;=\; \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}\;\left(-\,4\,\lambda_\nu^2\,\frac{d}{d\xi^2}\right)^n\;D_{\nu+n}\big((\lambda_{\nu+n}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2,m^2\big) \tag{F.8}$$

$$\Longleftrightarrow\quad D_{\nu-n}\big((\lambda_{\nu-n}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2,m^2\big) \;=\; \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-n)}\;\left(-\,4\,\lambda_\nu^2\,\frac{d}{d\xi^2}\right)^n\;D_\nu\big(\xi^2,m^2\big) \tag{F.8′}$$

die gestrichene Gleichung durch Umbenennung $(\lambda_{\nu+n}/\lambda_\nu\cdot\xi)\equiv\tilde{\xi}\to\xi$ und wieder abschließenden Übergang $\nu\to(\nu-n)$.

F.2 *C*- und *NC*-Korrelationsfunktionen

Der Zusammenhang des Korrelationstensors in Orts- und Impulsraum – vgl. Gl. (1.68) versus (1.74) – ist gegeben für die C- und NC-Tensorstruktur respektive durch

$$\partial^2\;F^C(\xi^2)\;\stackrel{!}{=}\;D_C(\xi^2)\;\equiv\;\int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot\xi}\;\tilde{D}_C(k^2) \tag{F.9}$$

und[F.6]

$$\partial_\mu\,\partial_\nu\;F^{NC}(\xi^2) \tag{F.10}$$
$$\stackrel{!}{=}\;\partial_\mu\,\partial_\nu\;\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\xi^2}du\;D_{NC}(u) \;=\; \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot\xi}\;\left[-\,\frac{1}{2}\,k_\mu\,k_\nu\;\frac{d}{dk^2}\,\tilde{D}_{NC}(k^2)\right]$$

mit $\partial_\mu\equiv\partial/\partial\xi^\mu$ und Definition der eigentlich relevanten Funktionen F^C, F^{NC} entsprechend der ersten Identitäten; vgl. Kap. 2.4.3, Gl. (2.181) und Kap. 2.4.4, Gl. (2.211).

F.2.1 Zusammenhang $\tilde{D}_C(k^2), F^C(\xi^2) \leftrightarrow \tilde{D}_\nu(k^2,m^2), D_\nu(\xi^2,m^2)$

Bezüglich der C-Tensorstruktur schreibt sich Gl. (F.1):

$$\tilde{D}_C(k^2) \;=\; 6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2(-k^2)\;\tilde{D}_\nu(k^2,m^2)\;\Big|_\star \tag{F.11}$$

[F.4] Im folgenden unterdrücken wir jede Bemerkung bezüglich der Gültigkeit der angegebenden Relationen, wenn diese – wie hier – allein bestimmt ist durch die Nicht-Singularität der Eulerschen Gamma-Funktion.

[F.5] Die Herleitung ist *straight-forward* aus der definierenden Gl. (F.2); sie sei hier nicht weiter ausgeführt.

[F.6] die zweite Identität unter der Annahme, die Randterme verschwinden unter partieller Integration $\partial/\partial k^\mu$

Daraus folgt im Ortsraum:

$$D_C(\xi^2) \equiv \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{-i\,k\cdot\xi}\ \tilde{D}_C(k^2) \tag{F.12}$$

$$= \partial^2\ \left[6i\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2 \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{-i\,k\cdot\xi}\ \tilde{D}_\nu(k^2,m^2)\right]\ \Big|_\star \tag{F.12'}$$

$$= \partial^2\ \left[6i\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ D_\nu(\xi^2,m^2)\right]\ \Big|_\star \tag{F.12''}$$

und für die Funktion F^C:

$$F^C(\xi^2) = 6i\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ D_\nu(\xi^2,m^2)\ \Big|_\star \tag{F.13}$$

vgl. die Gln. (F.9), (F.12″).

F.2.2 Zusammenhang $\tilde{D}_{NC}(k^2), F^{NC}(\xi^2) \leftrightarrow \tilde{D}_\nu(k^2,m^2), D_\nu(\xi^2,m^2)$

Bezüglich der NC-Tensorstruktur schreibt sich Gl. (F.1):

$$-\frac{1}{2}\,k^2\,\tilde{D}'_{NC}(k^2) = 6i\,A_\nu\cdot\left[-\frac{1}{2}\,k^2\cdot 2\,\lambda_\nu^2\right]\ \tilde{D}_\nu(k^2,m^2)\ \Big|_\star \tag{F.14}$$

Es folgt aus Gl. (F.7), mit $n\equiv 1$:

$$\tilde{D}_\nu(k^2,m^2) = \frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}\ \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}}\right)^d\ \left(-\frac{1}{\lambda_\nu^2}\,\frac{d}{dk^2}\right)\ \tilde{D}_{\nu-1}\big((\lambda_\nu/\lambda_{\nu-1}\cdot k)^2,m^2\big) \tag{F.15}$$

und damit für die nicht-differenzierte Funktion o.E.d.A.:

$$\tilde{D}_{NC}(k^2) = 6i\,A_\nu\cdot\left[(-2)\,\frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}\right]\ \left(\frac{\lambda_\nu}{\lambda_{\nu-1}}\right)^d\ \tilde{D}_{\nu-1}\big((\lambda_\nu/\lambda_{\nu-1}\cdot k)^2,m^2\big)\ \Big|_\star \tag{F.16}$$

aus Gl. (F.14).

Es gilt daher im Ortsraum:

$$D_{NC}(\xi^2) \equiv \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\, e^{-i\,k\cdot\xi}\ \tilde{D}_{NC}(k^2) \tag{F.17}$$

$$= 6i\,A_\nu\cdot\left[(-2)\,\frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}\right]\ \int \frac{d^d\tilde{k}}{(2\pi)^d}\, e^{-i\,\tilde{k}\cdot(\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\,\xi)}\ \tilde{D}_{\nu-1}(\tilde{k}^2,m^2)\ \Big|_\star \tag{F.17'}$$

$$= 6i\,A_\nu\cdot\left[(-2)\,\frac{\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu)}\right]\ D_{\nu-1}\big((\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2,m^2\big)\ \Big|_\star \tag{F.17''}$$

die zweite Identität mit Gl. (F.16) unter Substitution $k\to\tilde{k}\equiv(\lambda_\nu/\lambda_{\nu-1}\cdot k)$ der Integrationsvariablen. Analog zu Gl. (F.15) folgt aus Gl. (F.8′), mit $n\equiv 1$:

$$D_{\nu-1}\big((\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\,\xi)^2,m^2\big) = (-4)\,\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-1)}\ \left(\lambda_\nu^2\,\frac{d}{d\xi^2}\right)\ D_\nu\big(\xi^2,m^2\big) \tag{F.18}$$

und daraus

$$D_{NC}(\xi^2) = 8\cdot 6i\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ \frac{d}{d\xi^2}\ D_\nu(\xi^2,m^2)\ \Big|_\star \tag{F.19}$$

aus Gl. (F.17″).

Die Funktion F^{NC} ist definiert durch:[F.7]

$$F^{NC}(\xi^2) = \frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\xi^2} du\ D_{NC}(u) \tag{F.20}$$

[F.7] In Ref. [124] bestimmen wir die untere Integrationsgrenze *a posteriori* zu $-\infty$ durch die Forderung, die Stammfunktion verschwinde identisch für diesen Wert.

vgl. die erste Identität der Gl. (F.10). Differenziert nach ξ^2 folgt

$$\frac{d}{d\xi^2}\ F^{NC}(\xi^2)\ =\ \frac{1}{8}\,D_{NC}(\xi^2) \tag{F.21}$$

Mit Gl. (F.19) o.E.d.A.:

$$F^{NC}(\xi^2)\ =\ 6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ \ D_\nu(\xi^2,m^2)\ \Big|_\star \tag{F.22}$$

Es ist – vgl. die Gln. (F.13), (F.22) –

$$F^{C}(\xi^2)\ \equiv\ F^{NC}(\xi^2)\ \equiv\ 6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ \ D_\nu(\xi^2,m^2)\ \Big|_\star \tag{F.23}$$

die eine unabhängige Korrelationsfunktionen beider Tensorstrukturen. Ihre Darstellung im Impulsraum ist – bis auf den Faktor $6\mathrm{i}\,A_\nu$ – gegeben durch die definierende Gl. (F.2) des „ν-verallgemeinerten" Feynman-Propagators $\tilde{D}_\nu(k^2,m^2)$, ihre Darstellung im Ortsraum durch dessen Fourier-Transformierte $D_\nu(x^2,m^2)$.

Für die Projektionen $\tilde{F}[F^C]\equiv\tilde{F}[F^{NC}]$ folgt – bzgl. des Operators $\tilde{F}$ vgl. Gl. (E.46), bzgl. $\tilde{D}_\nu$ Gl. (F.2):[F.8]

$$\begin{aligned}
\tilde{F}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|)\ &\equiv\ \tilde{F}[F^{NC}](|\boldsymbol{\xi}|)\\
&=\ 6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ \int\frac{d^{d-2}\mathbf{k}}{(2\pi)^{d-2}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\xi}}\ \lambda_\nu^d\,\frac{1}{(\lambda_\nu^2\mathbf{k}^2-m^2+\mathrm{i}\,\epsilon)^\nu}\ \Big|_\star && \text{(F.24)}\\
&=\ \lambda_\nu^2\ \cdot\ 6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ \ \Big(D_\nu(\xi^2,m^2)\,\Big|_{\star,\,\star\star}\Big) && \text{(F.24$'$)}\\
&=\ \delta A_\nu\ \lambda_\nu^2\ \cdot\ \Big(6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot\lambda_\nu^2\ \ D_\nu(\xi^2,m^2)\,\Big|_{\star,\,\star\star}\Big) \qquad \delta A_\nu\ \equiv\ \frac{A_\nu}{A_\nu|_{\star,\,\star\star}} && \text{(F.24$''$)}
\end{aligned}$$

mit $\quad\star:\quad m^2\equiv 1$ (F.25)

$\star\star:\quad d\to d'\equiv d-2\,,\quad \zeta\to\zeta'\equiv\zeta-1\,;\quad$ ergo: $\quad\xi\to\boldsymbol{\xi}$ (F.25$'$)

Die Wirkung der Projektion $\tilde{F}$ besteht darin, daß gegenüber vollständiger Fourier-Transformation die Integration reduziert ist um eine zeit- und eine raumartige Impulskomponente: $\zeta\to\zeta'\equiv\zeta-1$, $\rho\to\rho'\equiv\rho-1$, das heißt $d\to d'\equiv d-2$; die in diesem Sinne reduzierten – „transversale" – Vektoren sind notiert in (geradem) Fettdruck. Es folgt:[F.8]

$$\begin{aligned}
\tilde{F}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|)\ &\equiv\ \tilde{F}[F^{NC}](|\boldsymbol{\xi}|) && \text{(F.26)}\\
&=\ \delta A_\nu\ \lambda_\nu^2\ \cdot\ \Big(F^C(\xi^2)\,\Big|_{\star,\,\star\star}\Big)\ \equiv\ \delta A_\nu\ \lambda_\nu^2\ \cdot\ \Big(F^{NC}(\xi^2)\,\Big|_{\star,\,\star\star}\Big)
\end{aligned}$$

die neben $\tilde{F}[F^{NC}](|\boldsymbol{\xi}|)$ streu-relevanten Funktionen $\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|)$, $\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|)$ durch einbeziehungsweise zweifache Differentiation $-\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\frac{d}{d|\boldsymbol{\xi}|}$, vgl. Gl. (2.232).

Auf dieser Basis folgen explizite Darstellungen unmittelbar aus der expliziten Darstellung im Ortsraum des „ν-verallgemeinerten" Feynman-Propagators $D_\nu(\xi^2,m^2)$ im verallgemeinerten Minkowski-Raum $\mathcal{M}_{d,\sigma}$. Diese wird hergeleitet im folgenden Abschnitt.

F.3 $D_\nu(\xi^2,m^2)$: explizite Darstellung in $\mathcal{M}_{d,\sigma}$

Der „ν-verallgemeinerte" Feynman-Propagator $D_\nu(\xi^2,m^2)$ in $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ ist gegeben als die Fourier-Transformierte

$$D_\nu(\xi^2,m^2)\ =\ \int\frac{d^dk}{(2\pi)^d}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot\xi}\ \lambda_\nu^d\,\frac{1}{(\lambda_\nu^2k^2-m^2+\mathrm{i}\,\epsilon)^\nu} \tag{F.27}$$

[F.8] Gl. (F.24$''$) ist zu lesen wie folgt: Wir berechnen das Produkt $(6\mathrm{i}A_\nu\cdot D_\nu)$; da A_ν abhängt von d, ζ, ist zu multiplizieren mit δA_ν. Dagegen wird λ_ν behandelt als Parameter bezüglich der festen Werte d,ζ. Diese Konvention minimiert den expliziten Rechenaufwand und ermöglicht die suggestive Notation von Gl. (F.26).

von $\tilde{D}_\nu(k^2, m^2)$, vgl. die Gln. (F.2), (F.3). Unter Substitution $k \to k' \equiv \lambda_\nu k$ der Integrationsvariablen folgt unmittelbar

$$D_\nu\big((\lambda_\nu \xi')^2, m^2\big) \;=\; \int \frac{d^d k'}{(2\pi)^d}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, k'\cdot\xi'}\; \frac{1}{(\lambda_\nu^2 k'^2 - m^2 + \mathrm{i}\,\epsilon)^\nu} \tag{F.28}$$

$$\text{mit} \qquad \xi' \equiv \xi/\lambda_\nu \tag{F.28'}$$

Unter Definition

$$\lambda \;\equiv\; \xi'^2 \;=\; \textstyle\sum_{i=1}^{\zeta} \big(\xi'^i\big)^2 - \sum_{i=\zeta+1}^{d} \big(\xi'^i\big)^2 \tag{F.29}$$

vgl. Gl. (F.4), diskutieren wir die Fälle:[F.9]

$$\textbf{(i)}\quad \boldsymbol{\xi'}\ \textbf{zeitartig},\quad \lambda \equiv \xi'^2 > 0: \qquad \xi' = \big(\sqrt{\lambda},\, 0, \ldots 0\big)^t \tag{F.30}$$

$$\textbf{(ii)}\quad \boldsymbol{\xi'}\ \textbf{raumartig},\ \lambda \equiv \xi'^2 < 0: \qquad \xi' = \big(0, \ldots 0,\, \sqrt{-\lambda}\big)^t \tag{F.30'}$$

Nach geeigneter (d, ζ)-(Lorentz-)Transformation kann o.E.d.A. angenommen werden die Darstellung mit nur einer nichtverschwindenden Komponente in Termen der Invarianten λ.

F.3.1 Vorbereitung

Zur Auswertung der Fourier-Integrale in Gl. (F.28) benötigen wir zwei Typen elementarer Integrale, die wir – voranstellend – in geeigneter Form diskutieren. Durch diese wird dann konstruiert und ausgewertet das relevante multidimensionale Integral.

Integral Typ I: $\boldsymbol{I^I_{z,w}(a)}$. Sei definiert

$$I^I_{z,w}(a) \;\equiv\; \int_0^\infty dt\; \frac{t^{z-1}}{(a+t)^{z+w}} \qquad |\mathrm{Arg}\, a| < \pi,\quad \mathrm{Re}\, z, \mathrm{Re}\, w > 0 \tag{F.31}$$

d.h. a nicht reell-negativ. Dann folgt durch Substitution $t \to t' \equiv t/a$:

$$I^I_{z,w}(a) \;=\; a^{-w} \lim_{R\to\infty} I\big(\mathcal{C}_R(-\mathrm{Arg}\, a)\big) \tag{F.32}$$

$$\text{mit} \qquad I\big(\mathcal{C}_R(\varphi)\big) \equiv \int_{\mathcal{C}_R(\varphi)} dt'\, \frac{t'^{z-1}}{(1+t')^{z+w}} \qquad \mathcal{C}_R(\varphi) = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi},\ \ r: 0 \to R \tag{F.32'}$$

mit $I\big(\mathcal{C}_R(\varphi)\big)$ dem Linienintegral in der komplexen t'-Ebene entlang des Strahls $\mathcal{C}(-\mathrm{Arg}\, a)$, der charakterisiert ist durch konstante Phase $\varphi \equiv -\mathrm{Arg}\, a$ und sich erstreckt ins Unendliche im Limes $R \to \infty$; analog ist $I\big(\mathcal{C}_R(0)\big)$ das Linienintegral entlang der positiven reellen t'-Achse. Sei $I_{-\mathrm{Arg}\, a}(R)$ das entsprechende Integral über den Kreisbogen, der beide Strahlen verbindet zu einer geschlossenen Kontur. Dann gilt mithilfe des Residuensatzes:

$$I\big(\mathcal{C}_R(-\mathrm{Arg}\, a)\big) \;\equiv\; I\big(\mathcal{C}_R(0)\big) \;-\; I_{-\mathrm{Arg}\, a}(R) \tag{F.33}$$

Wir finden:[F.10]

$$I_\varphi(R) \;=\; w^{-1} R^{-w} \sum_{k=0}^{\infty} i_k\, R^{-k} \qquad i_k \;\equiv\; \frac{(z+w)_k\, (w)_k}{(w+1)_k}\, \frac{1}{k!} \Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(w+k)} - 1\Big] \tag{F.34}$$

$$= \; w^{-1} R^{-w} \Big[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi w} \cdot f(\varphi) - f(0)\Big] \qquad f(\varphi) \equiv {}_2\mathrm{F}_1\Big(z+w, w; w+1; -\frac{1}{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\Big) \tag{F.34'}$$

mit $(\zeta)_k \equiv \Gamma(\zeta+k)/\Gamma(\zeta)$, $(\zeta)_0 \equiv 1$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$, dem Pochhammer-Symbol und ${}_2\mathrm{F}_1(\alpha, \beta; \gamma; \zeta)$ der Gauß'schen Hypergeometrischen Funktion nach Ref. [2], Abramowitz 6.1.22 bzw. 15.1.1.

[F.9] Wir finden für zeit- und raumartigen Vektor ξ' identische Ausdrücke; dessen Limes $\lambda \equiv \xi'^2 \to 0\pm$ stellt dar den Fall (iii) lichtartigen Vektors ξ'.

[F.10] Entwicklung des Integranden in Binomialreihe, deren *normale* Konvergenz zuläßt Vertauschen der Limesbildung bezüglich Integration und Summation; i_k explizit und Gl. (F.34') nur für Vollständigkeit

Das Kreisbogen-Integral $I_{-\mathrm{Arg}\,a}$ ist nach Gl. (F.34) Null im Limes $R\to\infty$ für $\mathrm{Re}\,w>0$ [wie auch trivialerweise für $\mathrm{Arg}\,a\equiv 0$]; es folgt $I^I_{z,w}(a)=a^{-w}\lim_{R\to\infty} I\big(\mathcal{C}_R(0)\big)$ und explizit:

$$I^I_{z,w}(a) \equiv \int_0^\infty dt\ \frac{t^{z-1}}{(a+t)^{z+w}} = a^{-w}\int_0^\infty dt\ \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} \tag{F.35}$$
$$= a^{-w}\,\mathrm{B}(z,w) \qquad |\mathrm{Arg}\,a|<\pi,\ \ \mathrm{Re}\,z,\,\mathrm{Re}\,w>0$$

unter Identifizierung des Integralausdrucks für $\mathrm{Re}\,z>0$, $\mathrm{Re}\,w>0$ als die Eulersche Beta-Funktion $\mathrm{B}(z,w)\equiv\Gamma(z)\Gamma(w)/\Gamma(z+w)$; vgl. Ref. [2], Abramowitz 6.2.1.

Integral Typ II: $I^{II}_{\mu,\pm}(x,s)$. Sei definiert

$$I^{II}_{\mu,\pm}(x,s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}tx}}{(s^2+t^2)^{\mu+\frac12}} \tag{F.36}$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>-\frac12,\ x\in\mathbb{R}^+,\ |\mathrm{Arg}\,s|<\frac{\pi}{2}$$

d.h. s in der rechten Halbebene, s^2 nicht reell-negativ. Der Nenner ist gerade Funktion der Integrationsvariablen, das Integrationsintervall symmetrisch; es folgt:

$$I^{II}_{\mu,\pm}(x,s) \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}tx}}{(s^2+t^2)^{\mu+\frac12}} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{dt}{2\pi}\,\frac{\cos(tx)}{(s^2+t^2)^{\mu+\frac12}} \tag{F.37}$$
$$= \frac{(4\pi)^{-1/2}}{\Gamma\big(\mu+\frac12\big)}\,\frac{1}{(s^2)^\mu}\,\Big(\frac12\Big)^{\mu-1}(sx)^\mu\,\mathrm{K}_\mu(sx)$$
$$\mathrm{Re}\,\mu>-\frac12,\ x\in\mathbb{R}^+,\ |\mathrm{Arg}\,s|<\frac{\pi}{2}$$

$$\overset{\mathrm{Re}\,\mu>0}{=}\ (4\pi)^{-1/2}\frac{\Gamma(\mu)}{\Gamma\big(\mu+\frac12\big)}\,\frac{1}{(s^2)^\mu}\,\mathcal{K}_\mu(sx) \tag{F.37$'$}$$

Das letzte Integral in Gl. (F.37) ist angegeben in Ref. [2], Abamowitz 9.6.25; es ist $\mathrm{K}_\mu(z)$ die modifizierte Besselfunktion zweiter Art mit Index μ und $\mathcal{K}_\mu(z)=(\frac12)^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\,z^\mu\mathrm{K}_\mu(z)$, mit $\mathcal{K}_\mu(z)\to 1$ für $z\to 0$; vgl. Gl. (1.82) auf Seite 40. Herausziehen von $\Gamma(\mu)$ in Gl. (F.37$'$) erfordert Verschärfung der Forderung an μ. Insbesondere gilt $I^{II}_{\mu,+}\equiv I^{II}_{\mu,-}$, $\forall\mu\in\mathbb{C}$.

Multidimensionales Integral $I^{(d',\zeta')}_\nu(a)$. In Hinblick auf Gl. (F.28) sei definiert

$$I^{(d',\zeta')}_\nu(a) \equiv \Big(\prod_{i=1}^{d'}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk_i}{2\pi}\Big)\frac{1}{\big(a+k'^2\big)^\nu} \tag{F.38}$$
$$|\mathrm{Arg}\,a|<\pi,\ \ \mathrm{Re}\,\nu>0$$

$$\text{mit}\qquad k'^2 = \sum_{i=1}^{\zeta'}\big(k'^i\big)^2-\sum_{i=\zeta'+1}^{d'}\big(k'^i\big)^2 \tag{F.39}$$

d.h. ζ' Dimensionen zeit- und $\rho'\equiv(d'-\zeta')$ Dimensionen raumartig; vgl. Gl. (F.4) und (F.29). Substituiert $k'^i\to t_i\equiv(k'^i)^2$, folgt:

$$I^{(d,\zeta)}_\nu(a) = \frac{1}{(2\pi)^{d'}}\Big(\prod_{i=1}^{d'}\int_0^\infty dt_i\ t_i^{-1/2}\Big)\frac{1}{(a+t)^\nu} \tag{F.40}$$
$$|\mathrm{Arg}\,a|<\pi,\ \ \mathrm{Re}\,\nu>0$$

$$\text{mit}\qquad t = \sum_{i=1}^{\zeta'}t_i-\sum_{i=\zeta'+1}^{d'}t_i \tag{F.41}$$

Diese Integrale sind von Typ I:

$$\int_0^\infty dt\ \frac{t^{1/2-1}}{(\alpha+t)^\mu} \equiv I^I_{\frac12,\mu-\frac12}(\alpha) = \frac{1}{\alpha^{\mu-\frac12}}\,\mathrm{B}\Big(\frac12,\mu-\frac12\Big) \tag{F.42}$$
$$|\mathrm{Arg}\,\alpha|<\pi,\ \ \mathrm{Re}\Big(\mu-\frac12\Big)>0$$

vgl. Gl. (F.35), mit $\mu=\nu-\frac{i}{2}$, $i=1,2,\ldots d'$. Damit folgt unmittelbar für die ζ' zeitartigen Dimensionen:

$$I_\nu^{(d',\zeta')}(a) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{d'}}\Big[\prod_{i=1}^{\zeta'}\mathrm{B}\Big(\frac{1}{2},\nu-\frac{i}{2}\Big)\Big]\Big(\prod_{i=\zeta'+1}^{d'}\int_0^\infty dt_i\,t_i^{-1/2}\Big)\frac{1}{\big(a-t'\big)^{\nu-\frac{\zeta'}{2}}} \tag{F.43}$$

mit $-t'=-\sum_{i=\zeta'+1}^{d'}t_i$, vgl. Gl. (F.41). Es gilt:

$$\big(a-t'\big)^{-\left(\nu-\frac{\zeta'}{2}\right)} \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta'}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\;\cdot\;\big((-a)+t'\big)^{-\left(\nu-\frac{\zeta'}{2}\right)} \tag{F.44}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} &I_\nu^{(d',\zeta')}(a) \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (F.45)\\ &= \mathrm{e}^{-(\nu-\frac{\zeta'}{2})\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{d'}}\Big[\prod_{i=1}^{\zeta'}\mathrm{B}(\frac{1}{2},\nu-\frac{i}{2})\Big]\Big(\prod_{i=\zeta'+1}^{d'}\int_0^\infty dt_i\,t_i^{-1/2}\Big)\frac{1}{\big((-a)+t'\big)^{\nu-\frac{\zeta'}{2}}} \end{aligned}$$

und weiter mithilfe Gl. (F.42) für die $\rho'\equiv(d'-\zeta')$ übrigen raumartigen Dimensionen:

$$I_\nu^{(d',\zeta')}(a) \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta'}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{1}{(2\pi)^{d'}}\Big[\prod_{i=1}^{d'}\mathrm{B}(\frac{1}{2},\nu-\frac{i}{2})\Big]\frac{1}{(-a)^{\nu-\frac{\zeta'}{2}-\frac{(d'-\zeta')}{2}}} \tag{F.46}$$

Mit $\prod_{i=1}^{d'}\mathrm{B}(\frac{1}{2},\nu-\frac{i}{2})=\big(\Gamma(\frac{1}{2})\big)^{d'}\Gamma(\nu-\frac{d'}{2})/\Gamma(\nu)$ und $\Gamma(\frac{1}{2})\equiv\pi^{1/2}$ geben wir abschließend an für das multidimensionale Integral $I_\nu^{(d',\zeta')}(a)$ nach Gl. (F.38):

$$I_\nu^{(d',\zeta')}(a) \;=\; \mathrm{e}^{-(\nu-\frac{\zeta'}{2})\pi\mathrm{i}}\cdot(4\pi)^{-d'/2}\,\frac{\Gamma(\nu-\frac{d'}{2})}{\Gamma(\nu)}\;\frac{1}{\big(-a\big)^{\nu-\frac{d'}{2}}} \tag{F.47}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{(d'-\zeta')}{2}\pi\mathrm{i}}\cdot(4\pi)^{-d'/2}\,\frac{\Gamma(\nu-\frac{d'}{2})}{\Gamma(\nu)}\;\frac{1}{a^{\nu-\frac{d'}{2}}} \qquad |\mathrm{Arg}\,a|<\pi,\;\;\mathrm{Re}\Big(\nu-\frac{d'+1}{2}\Big)>0 \tag{F.47$'$}$$

bzgl. der Einschränkung für $\mathrm{Re}\,\nu$ vgl. Gl. (F.42). Es gilt – konsistent mit Gl. (F.44):

$$\big(-a\big)^{-\left(\nu-\frac{d'}{2}\right)} \;=\; \mathrm{e}^{+\left(\nu-\frac{d'}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\;\cdot\;a^{-\left(\nu-\frac{d'}{2}\right)} \tag{F.48}$$

so daß folgt aus der ersten Darstellung die zweite.[F.11]

Für definite Metrik können in Gl. (F.38) eingeführt werden sphärische Polarkoordinaten und verifiziert werden die Gln. (F.47), (F.47′).

Seien (1) sämtliche Dimensionen zeitartig: $\zeta'\equiv d'$. Es ist $\kappa'\equiv\sqrt{k'^2}$ der Betrag des d'-dimensionalen Radialvektors, $k'^2\equiv+\sum_{i=1}^{d'}\big(k'^i\big)^2$, vgl. Gl. (F.38′); für $I_\nu^{(d',d')}(a)$ gilt:

$$I_\nu^{(d',d')}(a) \;=\; \int\frac{d\Omega_{d'}}{(2\pi)^{d'}}\int_0^\infty d\kappa'\,\frac{\kappa'^{d'-1}}{\big(a+\kappa'^2\big)^\nu} \;=\; \frac{\omega_{d'}}{(2\pi)^{d'}}\int_0^\infty\frac{dt}{2}\,\frac{t^{d'/2-1}}{\big(a+t\big)^\nu} \tag{F.49}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\omega_{d'}}{(2\pi)^{d'}}\;\frac{1}{a^{\nu-\frac{d'}{2}}}\;\mathrm{B}\Big(\frac{d'}{2},\nu-\frac{d'}{2}\Big) \;=\; (4\pi)^{-d'/2}\,\frac{\Gamma\big(\nu-\frac{d'}{2}\big)}{\Gamma(\nu)}\;\frac{1}{a^{\nu-\frac{d'}{2}}}$$

$$\equiv \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta'}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\cdot(4\pi)^{-d'/2}\,\frac{\Gamma\big(\nu-\frac{d'}{2}\big)}{\Gamma(\nu)}\;\frac{1}{(-a)^{\nu-\frac{d'}{2}}} \tag{F.49$'$}$$

die zweite Identität unter Substitution $\kappa'\to t\equiv\kappa'^2$, die folgenden mit Gl. (F.42) und (F.48) und eingesetzt $\int d\Omega_{d'}\equiv\omega_{d'}\equiv 2\,\pi^{d'/2}/\Gamma(d'/2)$.[F.12]

[F.11] Je nach Vorzeichen von $\mathrm{Re}\,a$ ist zweckmäßig zu arbeiten mit Gl. (F.47) oder mit Gl. (F.47′).

[F.12] Es ist $\omega_{d'}\equiv d'\cdot v_{d'}$ und $v_{d'}=\pi^{d'/2}/\Gamma(d'/2+1)$ mit $\omega_{d'}$ der Oberfläche, $v_{d'}$ dem Volumen der d'-dimensionalen Einheitskugel; vgl. etwa Ref. [86], die Paragraphen 5.7 und 14.9.

Seien (2) sämtliche Dimensionen raumartig: $\zeta' \equiv 0$. Es ist $\kappa' \equiv \sqrt{-k'^2}$ der Betrag des d'-dimensionalen Radialvektors, $k'^2 \equiv -\sum_{i=1}^{d'} \left(k'^i\right)^2$, vgl. Gl. (F.38′); für $I_\nu^{(d',0)}(a)$ gilt analog:

$$I_\nu^{(d',0)}(a) \;=\; \mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}} \cdot \int \frac{d\Omega_{d'}}{(2\pi)^{d'}} \int_0^\infty d\kappa' \, \frac{{\kappa'}^{d'-1}}{\left((-a)+\kappa'^2\right)^\nu} \tag{F.50}$$

$$= \mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\omega_{d'}}{(2\pi)^{d'}} \, \frac{1}{(-a)^{\nu-\frac{d'}{2}}} \, \mathrm{B}\Big(\frac{d'}{2}, \nu - \frac{d'}{2}\Big)$$

$$\equiv \mathrm{e}^{-\nu\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{-d'/2} \, \frac{\Gamma\left(\nu-\frac{d'}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \, \frac{1}{(-a)^{\nu-\frac{d'}{2}}} \tag{F.50′}$$

Wir finden Konsistenz der Gln. (F.49′), (F.50′) mit Gl. (F.47) – und in nicht-trivialen Phasenfaktoren manifestiert die Indefinitheit von $\mathcal{M}_{d,\sigma}$.

F.3.2 Durchführung

Auf Basis der gezeigten Identitäten wird ausgedrückt und ausgewertet das Fourier-Integrale für $\tilde{D}_\nu\left((\lambda\xi')^2, m^2\right)$, vgl. Gl. (F.28).

Sei (i) der Vektor $\boldsymbol{\xi'}$ zeitartig: $\boldsymbol{\lambda \equiv \xi'^2 > 0}$. Dann gilt – mit $t \equiv \xi'^1$, vgl. Gl. (F.30), und dem multidimensionalen Integral $I_\nu^{(d',\zeta')}(a)$ nach Gl. (F.38):

$$D_\nu\left((\lambda_\nu \xi')^2, m^2\right) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \; \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\,x} \;\; I_\nu^{(d-1,\zeta-1)}(a) \tag{F.51}$$

$$\text{mit} \qquad x \;\equiv\; \sqrt{\lambda} \qquad\qquad a \;\equiv\; s^2 + t^2 \qquad\qquad -s^2 \;\equiv\; m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon \tag{F.52}$$

Für Indizes $d' \equiv d-1$, $\zeta' \equiv \zeta - 1$ gilt – vgl. Gl. (F.47′):

$$I_\nu^{(d-1,\zeta-1)}(a) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{(d-\zeta)}{2}\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{-(d-1)/2} \, \frac{\Gamma(\nu - \frac{d-1}{2})}{\Gamma(\nu)} \, \frac{1}{a^{\nu-\frac{d-1}{2}}} \tag{F.53}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{(d-\zeta)}{2}\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{-(d-1)/2} \, \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{d}{2})} \, \frac{1}{a^{\mu+\frac{1}{2}}} \tag{F.53′}$$

die zweite Identität unter Definition

$$\mu \;\equiv\; \nu - \frac{d}{2} \tag{F.54}$$

Zusammen folgt:

$$D_\nu\left((\lambda_\nu \xi')^2, m^2\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\frac{(d-\zeta)}{2}\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{-(d-1)/2} \, \frac{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu+\frac{d}{2})} \;\cdot\; I^{II}_{\mu,-}(x,s) \tag{F.55}$$

unter Identifizierung des resultierenden Integrals als von Typ II – vgl. Gl. (F.37):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{2\pi} \; \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,tx}}{(s^2+t^2)^{\mu+\frac{1}{2}}} \;\equiv\; I^{II}_{\mu,-}(x,s) \;=\; \frac{(4\pi)^{-1/2}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \, \frac{1}{\left(s^2\right)^\mu} \, \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\mu-1} (sx)^\mu \, \mathrm{K}_\mu(sx) \tag{F.56}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu > -\frac{1}{2}, \; x \in \mathbb{R}^+, \; |\mathrm{Arg}\,s| < \frac{\pi}{2}$$

mit s bestimmt durch s^2 und der Forderung an Arg s. Es folgt:

$$D_\nu\left((\lambda_\nu \xi')^2, m^2\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\mu + \frac{(d-\zeta)}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(\mu+\frac{d}{2})} \, \frac{1}{\left(-s^2\right)^\mu} \, \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\mu-1} (sx)^\mu \, \mathrm{K}_\mu(sx) \tag{F.57}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu > -\frac{1}{2}, \; x \in \mathbb{R}^+, \; |\mathrm{Arg}\,s| < \frac{\pi}{2}$$

umgeformt $(s^2)^{-\mu} \equiv \mathrm{e}^{-\mu\pi\mathrm{i}} \cdot (-s^2)^{-\mu}$, vgl. Gl. (F.48).

Als „natürlicher" Parameter ist zu identifizieren $\mu \equiv \nu - d/2$, vgl. Gl. (F.54), als „natürliche" Argumente s^2 und sx. Mit $s^2 \equiv -(m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon)$ und $x \equiv \sqrt{\lambda}$, vgl. Gl. (F.52), folgt:[F.13]

$$s^2 \;=\; -(m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon) \;\cong\; m^2\,(1 - \mathrm{i}\,\epsilon)\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} \;\cong\; m^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\epsilon}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} \;\cong\; m^2\,\mathrm{e}^{(1-\epsilon)\pi\mathrm{i}} \tag{F.58}$$

$$\Longrightarrow \qquad s \;\cong\; m\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\epsilon)\pi\mathrm{i}} \qquad \text{mit} \qquad |\mathrm{Arg}\; s| \equiv \left|\frac{1}{2}(1-\epsilon)\pi\right| < \frac{\pi}{2} \tag{F.58$'$}$$

ergo:[F.13]

$$sx \;=\; m\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(1-\epsilon)\pi\mathrm{i}}\sqrt{\lambda} \;=\; m\left[\lambda\,\mathrm{e}^{(1-\epsilon)\pi\mathrm{i}}\right]^{1/2} \;=\; m\left[-\lambda\,\mathrm{e}^{-\epsilon\pi\mathrm{i}}\right]^{1/2} \tag{F.59}$$

$$\cong\; m\left[-\lambda\,(1-\mathrm{i}\,\epsilon)\right]^{1/2} \;\cong\; m\left[-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon\right]^{1/2}$$

$$\Longrightarrow \qquad sx \;\cong\; m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon} \qquad \text{mit} \qquad |\mathrm{Arg}\; sx| \equiv |\mathrm{Arg}\; s| \tag{F.59$'$}$$

wobei benutzt ist $m \in \mathbb{R}^+$ in Gl. (F.58) und $\lambda \in \mathbb{R}^+$ in Gl. (F.59).

Sei für sx eingeführt die Notation

$$\zeta_m \;\equiv\; m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon} \;\equiv\; m\,\zeta \tag{F.60}$$

$$\text{und}^{\text{F.14}} \qquad \zeta \;\equiv\; \zeta_1 \;=\; \sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon} \tag{F.60$'$}$$

Mit $\lambda \equiv \xi'^2$, vgl. Gl. (F.29), folgt dann abschließend für den „ν-verallgemeinerten" Feynman-Propagator D_ν mit *zeitartigem* Argument ξ':

$$D_\nu\left((\lambda_\nu\xi')^2, m^2\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\mu+\frac{d-\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma\left(\mu+\frac{d}{2}\right)}\,\frac{1}{\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^\mu}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}(\zeta_m)^\mu\,\mathrm{K}_\mu(\zeta_m) \tag{F.61}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu > -\frac{1}{2} \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathrm{Re}\,\nu > \frac{d-1}{2}$$

Die Epsilon-Vorschrift $\epsilon \to 0+$ ist *essentiell*, vgl. Gl. (F.58$'$): Sie garantiert: $|\mathrm{Arg}\;\zeta_m| \equiv |\mathrm{Arg}\; s| \equiv \left|(1-\epsilon)\pi/2\right| < \pi/2$, das heißt ζ_m liegt in der rechten Halbebene, in der $\mathrm{K}_\mu(\zeta_m)$ gegen Null geht für $|\zeta_m| \to \infty$, vgl. Ref. [2], Abramowitz 9.6.1.

Sei (ii) der Vektor ξ' raumartig: $\lambda \equiv \xi'^2 < 0$. Dann gilt – mit $t \equiv \xi'^d$, vgl. Gl. (F.30$'$), und mit $I_\nu^{(d',\zeta')}(a)$ nach Gl. (F.38):

$$D_\nu\left((\lambda_\nu\xi')^2, m^2\right) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\;\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,t\,x}\;\; I_\nu^{(d-1,\zeta)}(a) \tag{F.62}$$

$$\text{mit} \qquad x \;\equiv\; \sqrt{\,-\lambda} \qquad -a \;\equiv\; s^2 + t^2 \qquad s^2 \;\equiv\; m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon \tag{F.63}$$

Für Indizes $d' \equiv d-1$, $\zeta' \equiv \zeta$ [ergo: $\rho' \equiv \rho - 1$] gilt – vgl. hier Gl. (F.47):

$$I_\nu^{(d-1,\zeta)}(a) \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{-(d-1)/2}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{d-1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}\,\frac{1}{\left(-a\right)^{\nu-\frac{d-1}{2}}} \tag{F.64}$$

$$\;=\; \mathrm{e}^{-\left(\mu+\frac{d-\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{-(d-1)/2}\,\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{d}{2}\right)}\,\frac{1}{\left(-a\right)^{\mu+\frac{1}{2}}} \tag{F.64$'$}$$

die zweite Identität wieder mit $\mu \equiv \nu - d/2$, vgl. Gl. (F.54). Die Gln. (F.62), (F.64$'$) zusammen, folgt unmittelbar:

$$D_\nu\left((\lambda_\nu\xi')^2, m^2\right) \;=\; \mathrm{e}^{-\left(\mu+\frac{d-\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{-(d-1)/2}\,\frac{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\mu+\frac{d}{2}\right)}\;\cdot\; I^{II}_{\mu,+}(x,s) \tag{F.65}$$

unter analoger Identifizierung des resultierenden Integrals als von Typ II. Für dieses wieder-

[F.13] Wir schreiben „$\cong$" für „gleich im Sinne der Epsilon-Vorschrift $\epsilon \to 0+$" unter Absorption von Faktoren $\in \mathbb{R}^+$ und verstehen die Notation „$\sqrt{}$" standardmäßig: $\sqrt[n]{z} \equiv z^{1/n}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

[F.14] in Hinblick auf die Korrelationsfunktionen, für die gilt $m^2 \equiv 1$, vgl. „$\star$" in Gl. (F.1)

um folgt – vgl. Gl. (F.37):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{2\pi}\;\frac{\mathrm{e}^{+\mathrm{i}tx}}{(s^2+t^2)^{\mu+\frac{1}{2}}}\;\equiv\;I^{II}_{\mu,+}(x,s)\;=\;\frac{(4\pi)^{-1/2}}{\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right)}\,\frac{1}{\left(s^2\right)^{\mu}}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}(sx)^{\mu}\,\mathrm{K}_{\mu}(sx)\qquad\text{(F.66)}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu>-\frac{1}{2},\;x\in\mathbb{R}^{+},\;|\mathrm{Arg}\,s|<\frac{\pi}{2}$$

mit s wieder bestimmt durch s^2 und der Forderung an Arg s. Es folgt:

$$D_{\nu}\left((\lambda_{\nu}\xi')^2,m^2\right)\;=\;\mathrm{e}^{-\left(\mu+\frac{d-\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(\mu+\frac{d}{2})}\,\frac{1}{\left(s^2\right)^{\mu}}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}(sx)^{\mu}\,\mathrm{K}_{\mu}(sx)\qquad\text{(F.67)}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu>-\frac{1}{2},\;x\in\mathbb{R}^{+},\;|\mathrm{Arg}\,s|<\frac{\pi}{2}$$

Da s^2 in Termen m^2 mit entgegengesetztem Vorzeichen definiert sind für zeit- und für raumartiges ξ' – vgl. Gl. (F.52) versus (F.63) – finden wir, daß sich die Darstellungen für D_{ν} – vgl. Gl. (F.57) versus (F.67) – unterscheiden nur in sx.

Mit $s^2\equiv+(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon)$ und $x\equiv\sqrt{-\lambda}$, vgl. Gl. (F.63), folgt für s und das „natürliche" Argument sx analog:[F.13]

$$s^2\;=\;m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\;\cong\;m^2\,(1-\mathrm{i}\,\epsilon)\;\cong\;m^2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\epsilon}\;\cong\;m^2\,\mathrm{e}^{-\epsilon\pi\mathrm{i}}\qquad\text{(F.68)}$$

$$\Longrightarrow\qquad s\;\cong\;m\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\epsilon\pi\mathrm{i}}\qquad\text{mit}\qquad|\mathrm{Arg}\,s|\;\equiv\left|-\frac{1}{2}\epsilon\pi\right|<\frac{\pi}{2}\qquad\text{(F.68$'$)}$$

ergo:

$$sx\;=\;m\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\epsilon\pi\mathrm{i}}\sqrt{-\lambda}\;=\;m\left[-\lambda\,\mathrm{e}^{-\epsilon\pi\mathrm{i}}\right]^{1/2}\;\cong\;m\left[-\lambda\,(1-\mathrm{i}\,\epsilon)\right]^{1/2}\qquad\text{(F.69)}$$

$$\cong\;m\left[-\lambda-\mathrm{i}\,\epsilon\right]^{1/2}\;\cong\;m\left[-\lambda\right]^{1/2}\;\cong\;m\left[-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon\right]^{1/2}$$

$$\Longrightarrow\qquad sx\;\cong\;m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon}\qquad\text{mit}\qquad|\mathrm{Arg}\,sx|\equiv|\mathrm{Arg}\,s|\qquad\text{(F.69$'$)}$$

wobei benutzt ist $m\in\mathbb{R}^{+}$ in Gl. (F.68) und $-\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ in Gl. (F.69). Aus Gl. (F.68′) lesen wir ab *Redundanz* der Epsilon-Vorschrift $\epsilon\to0+$; sie kann daher in Gl. (F.69) zunächst weggelassen, dann – für formale Übereinstimmung der $\zeta_m\equiv sx$ für $\lambda\gtrless0$, vgl. die Gln. (F.59′), (F.60) und (F.69′) – von Hand eingeführt werden mit umgekehrtem Vorzeichen.

In Termen von $\zeta_m\equiv m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon}$, vgl. Gl. (F.60), mit $\lambda\equiv{\xi'}^2$, vgl. Gl. (F.29), folgt dann abschließend für den „ν-verallgemeinerten" Feynman-Propagator D_{ν} mit *raumartigem* Argument ξ' – identisch Gl. (F.61):

$$D_{\nu}\left((\lambda_{\nu}\xi')^2,m^2\right)\;=\;\mathrm{e}^{-\left(\mu+\frac{d-\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma\left(\mu+\frac{d}{2}\right)}\,\frac{1}{\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{\mu}}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}(\zeta_m)^{\mu}\,\mathrm{K}_{\mu}(\zeta_m)\qquad\text{(F.70)}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu>-\frac{1}{2}\quad\Leftrightarrow\quad\mathrm{Re}\,\nu>\frac{d-1}{2}$$

Die Epsilon-Vorschrift $\epsilon\to0+$ ist *redundant* und eingeführt von Hand für formale Übereinstimmung der $\zeta_m\equiv sx$ für $\lambda\gtrless0$: Mit $|\mathrm{Arg}\,\zeta_m|\equiv|\mathrm{Arg}\,s|\equiv\left|-\epsilon\pi/2\right|\cong\epsilon<\pi/2$ liegt ζ_m immer in der rechten Halbebene, in der $\mathrm{K}_{\mu}(\zeta_m)$ gegen Null geht für $\left|\zeta_m\right|\to\infty$.

Sei (iii) der Vektor $\boldsymbol{\xi'}$ lichtartig: $\boldsymbol{\lambda\equiv{\xi'}^2=0}$. Dann ist der „$\nu$-verallgemeinerte" Feynman-Propagator $D_{\nu}\left((\lambda_{\nu}\xi')^2,m^2\right)$ gegeben als der identische Limes von Gl. (F.61) unter $\lambda\to0+$ und von Gl. (F.70) unter $\lambda\to0-$, vgl. Fußn. F.9. Dieser folgt explizit mit

$$\mathrm{K}_{\mu}(z)\;\underset{z\to0}{\sim}\;2^{\mu-1}\,\Gamma(\mu)\,z^{-\mu}\qquad\mathrm{Re}\,\mu>0\qquad\text{(F.71)}$$

mit $\mathrm{K}_{-\mu}\equiv\mathrm{K}_{\mu}$, $\forall\mu\in\mathbb{C}$, auch für $\mathrm{Re}\,\mu<0$; vgl. Ref [2], Abramowitz 9.6.6 bzw. 9.6.9.

Mit der Derivationsformel

$$\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{n}\left[z^{\mu}\,\mathrm{K}_{\mu}(z)\right]\;=\;z^{\mu-n}\,\mathrm{K}_{\mu-n}(z)\qquad\forall\mu\in\mathbb{C},\;\;n\in\mathbb{N}\qquad\text{(F.72)}$$

vgl. Ref. [2], Abramowitz 9.6.28, und mit

$$\zeta_m \equiv m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon} \qquad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{\zeta_m}\frac{d}{d\zeta_m} \equiv \frac{2}{m^2}\frac{d}{d\lambda} \tag{F.73}$$

folgt unmittelbar

$$(\zeta_m)^\mu \,\mathrm{K}_\mu(\zeta_m) = \left(\frac{2}{m^2}\frac{d}{d\lambda}\right)^n \left[(\zeta_m)^{\mu+n}\,\mathrm{K}_{\mu+n}(\zeta_m)\right] \qquad \forall\mu\in\mathbb{C} \tag{F.74}$$

Daraus – auf Basis der expliziten Darstellung von D_ν, vgl. die Gln. (F.61), (F.70):

$$D_\nu\left(\lambda_\nu^2\lambda, m^2\right) = \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}\left(-4\,\frac{d}{d\lambda}\right)^n D_{\nu+n}\left(\lambda_{\nu+n}^2\lambda, m^2\right) \tag{F.75}$$

da die Funktion $D_{\nu'}\left(\lambda_{\nu'}^2\, z, m^2\right)$ nicht abhängt von $\lambda_{\nu'}$ für alle $\nu'\in\mathbb{C}$; vgl. Gl. (F.28). In Termen von $\xi\equiv\lambda_\nu\xi'$, mit $\xi'^2\equiv\lambda$ gilt zum einen $D_\nu\left(\lambda_\nu^2\lambda, m^2\right)\equiv D_\nu\left((\lambda_\nu\xi')^2, m^2\right)\equiv D_\nu\left(\xi^2, m^2\right)$ und $D_{\nu+n}\left(\lambda_{\nu+n}^2\lambda, m^2\right)\equiv D_{\nu+n}\left((\lambda_{\nu+n}\xi')^2, m^2\right)\equiv D_{\nu+n}\left((\lambda_{\nu+n}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2, m^2\right)$ und zum anderen $d/d\lambda \equiv d/d\xi'^2 \equiv \lambda_\nu^{-2}d/d\xi^2$. – Aus Gl. (F.76) folgt also:

$$D_\nu(\xi^2,m^2) = \frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu)}\left(-4\,\lambda_\nu^2\,\frac{d}{d\xi^2}\right)^n D_{\nu+n}\left((\lambda_{\nu+n}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2, m^2\right) \tag{F.76}$$

Dies ist genau Gl. (F.8), die somit explizit verifiziert ist.

Ihre Herleitung basiert also wesentlich auf der Ableitungsformel für K_μ – vgl. Gl. (F.72) – die wiederum gültig ist ohne Einschränkung an den Index μ. Dies überträgt sich unmittelbar auf Gl. (F.76), die Ableitungsformel für D_ν – und zwar mit genau der Einschränkung, daß wohldefiniert ist der $z^\mu\mathrm{K}_\mu(z)$-multiplizierende Faktor, das heißt *cum grano salis* die Gamma-Funktion: $\Gamma\left(\mu+d/2\right)$. Die Gültigkeit der Darstellung für D_ν kann daher ausgedehnt werden auf $\mathrm{Re}\,\nu\equiv\mathrm{Re}\left(\mu+d/2\right)>0$.

Zusammenfassend ist der „ν-verallgemeinerte“ Feynman-Propagator D_ν für zeit-, licht- und raumartiges Argument ξ' – ergo ξ – geegben durch:

$$\begin{aligned} D_\nu\left(\xi^2,m^2\right) &\equiv D_\nu\left((\lambda_\nu\xi')^2,m^2\right) \\ &= \mathrm{e}^{-\left(\mu+\frac{(d-\zeta)}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma\left(\mu+\frac{d}{2}\right)}\,\frac{1}{\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^\mu}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}(\zeta_m)^\mu\,\mathrm{K}_\mu(\zeta_m) \end{aligned} \tag{F.77}$$

$$\mathrm{Re}\,\nu>0$$

$$\text{mit} \qquad \mu\equiv\nu-d/2, \qquad \zeta_m\equiv m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon}, \qquad \lambda\equiv\xi'^2\equiv\xi^2/\lambda_\nu^2$$

Wir rekapitulieren: Die Epsilon-Vorschrift $\epsilon\to 0+$ ist essentiell nur für zeitartiges Argument ξ', ξ: Für dieses, $\lambda>0$ garantiert sie – für $\lambda<0$ ist dies unmittelbar der Fall – daß ζ_m in der rechten Halbebene liegt, in der $\mathrm{K}_\mu(\zeta_m)$ gegen Null geht für $\left|\zeta_m\right|\to\infty$.

Wir verifizieren Gl. (F.77) für den konventionellen Feynman-Propagator im gewöhnlichen Minkowski-Raum. Es ist $\Delta_F\equiv D_1|_{\lambda_\nu\equiv 1}$, vgl. Fußn. F.3, und $d\equiv 4$, $\zeta\equiv 1$; mit $\mu\equiv -1$ folgt:

$$\Delta_F(\xi^2,m^2) \equiv \int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot\xi}\,\frac{1}{k^2-m^2+\mathrm{i}\,\epsilon} \tag{F.78}$$

$$= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{(4\pi)^{-2}}{\Gamma(1)}\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}(\zeta_m)^{-1}\,\mathrm{K}_{-1}(\zeta_m) = -\frac{\mathrm{i}\,m}{4\pi^2}\,\frac{\mathrm{K}_1(m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon})}{\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon}} \tag{F.78$'$}$$

$$\overset{\lambda\equiv\xi^2\to 0}{\sim} -\frac{\mathrm{i}}{4\pi^2}\left[\frac{1}{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon} + \frac{m^2}{2}\left(\ln\frac{m\surd}{2}+1\right) + m^2\,\mathcal{O}\left((m\surd)^2\right)\right] \tag{F.78$''$}$$

mit $\surd\equiv\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon}$, bzgl. $\mathrm{K}_{-1}\equiv\mathrm{K}_1$ vgl. die Bem. zu Gl. (F.71). Wir finden Übereinstimmung mit Ref. [28]; vgl. ebenda Kap. 18.3 und Anh. A.V.1&2, insbes. Gl. (18.19).[F.15]

[F.15] Bogoljubov, Širkov definieren die kausale Greenfunktion mit *umgekehrtem* Vorzeichen: $D^c\equiv-\Delta_F$.

F.4 Parameter A_ν, λ_ν: Fixierung in $\mathcal{M}_{d,\sigma}$

Die bisher freien Parameter A_ν, λ_ν werden fixiert als Konsequenz der Bedeutung der C- und NC-Funktionenen von physikalische *Korrelations*funktionen. Die Forderungen sind – vgl. Gl. (1.79):

$$1 \stackrel{!}{=} D\Big|_{\xi^2 \equiv 0} \qquad \text{und} \qquad 1 \stackrel{!}{=} \int_0^\infty du\, D(-u^2) \tag{F.79}$$

in Termen des kontrahierten Lorentz-Korrelationstensor $D(\xi^2) \equiv D_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}(\xi)$, vgl. Gl. (1.77). A priori auf dessen Fourier-Transformierte bezieht sich der Ansatz – vgl. Gl. (F.1):

$$\tilde{D}(k^2) \stackrel{!}{=} 6\mathrm{i}\, A_\nu \cdot \lambda_\nu^2(-k^2)\ \tilde{D}_\nu(k^2, m^2)\Big|_\star \tag{F.80}$$

$$\text{ergo:}^{\text{F.16}} \qquad D(\xi^2) \;=\; 6\mathrm{i}\, A_\nu \cdot \lambda_\nu^2 \partial^2\ D_\nu(\xi^2, m^2)\Big|_\star \tag{F.80'}$$

mit $\star$: $m^2 \equiv 1$.

F.4.1 $D \equiv D_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}$ – Kontrahierter Korrelations-Lorentztensor

Es ist D_ν explizit gegben in Gl. (F.77), aus der D explizit folgt durch Ausführen des d'Alembert-Operators ∂^2, das mit – vgl. $\lambda \equiv \xi'^2 \equiv \xi^2/\lambda_\nu^2$

$$\lambda_\nu^2 \partial^2 \;=\; \partial'^2 \;=\; \Big[d + \lambda\Big(2\,\frac{d}{d\lambda}\Big)\Big]\Big(2\,\frac{d}{d\lambda}\Big) \qquad \text{mit} \qquad d \equiv g^\mu{}_\mu = \dim(\mathcal{M}_{d,\sigma}) \tag{F.81}$$

zurückgeführt ist auf die Derivationsformel für D_ν, vgl. Gl. (F.75).

Die Wirkung von ∂^2 im Impulsraum besteht dagegen in der Multiplikation mit $(-k^2)$; wir gehen diesen Weg. Es ist:

$$\begin{aligned}
&\lambda_\nu^2 k^2\ \tilde{D}_\nu(k^2, m^2) \\
&\quad= \big[(\lambda_\nu^2 k^2 - m^2 + \mathrm{i}\,\epsilon) \;+\; (m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon)\big] \cdot \lambda_\nu^d\, \frac{1}{(\lambda_\nu^2 k^2 - m^2 + \mathrm{i}\,\epsilon)^\nu} && \text{(F.82)} \\
&\quad= \frac{\lambda_\nu^d}{\lambda_{\nu-1}^d} \cdot \lambda_{\nu-1}^d\, \frac{1}{\big(\lambda_{\nu-1}^2(\lambda_\nu/\lambda_{\nu-1}\cdot k)^2 - m^2 + \mathrm{i}\,\epsilon\big)^{\nu-1}} && \text{(F.82')} \\
&\qquad\qquad + \;(m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon) \cdot \lambda_\nu^d\, \frac{1}{(\lambda_\nu^2 k^2 - m^2 + \mathrm{i}\,\epsilon)^\nu}
\end{aligned}$$

zusammen:

$$\begin{aligned}
&\lambda_\nu^2 k^2\ \tilde{D}_\nu(k^2, m^2) && \text{(F.83)} \\
&\quad= \frac{\lambda_\nu^d}{\lambda_{\nu-1}^d} \cdot \tilde{D}_{\nu-1}\big((\lambda_\nu/\lambda_{\nu-1}\cdot k)^2, m^2\big) \;+\; (m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon) \cdot \tilde{D}_\nu(k^2, m^2)
\end{aligned}$$

Dies Relation ist Fourier-zu-transformieren bezüglich k. Im $\tilde{D}_{\nu-1}$-Integral wird unmittelbar substituiert $k \to \tilde{k} \equiv \lambda_\nu/\lambda_{\nu-1}\cdot k$; mit ergo $d^d\tilde{k} \equiv \lambda_\nu^d/\lambda_{\nu-1}^d \cdot d^d k$ wir absorbiert der Vorfaktor, abschließend umbenannt $\tilde{k} \to k$. Mit Notation $\tilde{\xi} \equiv \lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu \cdot \xi$ folgt:

$$\begin{aligned}
&-\lambda_\nu^2 \partial^2\ D_\nu(\xi^2, m^2) \\
&\quad= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot\xi}\ \lambda_\nu^2 k^2\ \tilde{D}_\nu(k^2, m^2) && \text{(F.84)} \\
&\quad= \int \frac{d^d \tilde{k}}{(2\pi)^d}\, \Big[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot\tilde{\xi}}\ \tilde{D}_{\nu-1}(k^2, m^2) \;+\; (m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon) \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\cdot\xi}\ \tilde{D}_\nu(k^2, m^2)\Big] && \text{(F.84')}
\end{aligned}$$

zusammen:

$$-\lambda_\nu^2 \partial^2\ D_\nu(\xi^2, m^2) \;=\; D_{\nu-1}(\tilde{\xi}^2, m^2) \;+\; (m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon)\ D_\nu(\xi^2, m^2) \tag{F.85}$$

[F.16] konsistent mit $D(\xi^2) = D_C(\xi^2) = \partial^2 F^C(\xi^2) = \partial^2\big[6\mathrm{i} A_\nu \cdot \lambda_\nu^2\, D_\nu(\xi^2, m^2)\big]\big|_\star$, vgl. Gl. (F.1), (F.9) und (F.23)

Diese Relation eingesetzt in Gl. (F.80′), folgt:

$$D(\xi^2) \;=\; -6\mathrm{i}\,A_\nu \cdot \left[D_{\nu-1}\big((\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2, m^2\big) \;+\; (m^2-\mathrm{i}\,\epsilon)\;\; D_\nu(\xi^2,m^2)\right]\;\Big|_\star \qquad \text{(F.86)}$$

Dies ist die geeignetste Darstellung für D – in Termen von Funktionen D_ν mit expliziter Darstellung nach Gl. (F.77) – zur Fixierung der Parameter A_ν, λ_ν im Sinne von Gl. (F.79).

F.4.2 Parameter A_ν

Der globale Faktor A_ν ist bestimmt durch Forderung der erste Relation in Gl. (F.79): Normierung auf Eins für verschwindende Raumzeit-Separation, das heißt maximale Korrelation.

In Hinblick auf die Darstellung von D in Termen von D_ν – vgl. Gl. (F.86) – benötigen wir formal deren Grenzwert unter $\xi^2 \to 0$.[F.17] Die Raumzeit-Abhängigkeit der Funktion D_ν ist subsumiert in der Funktion $z^\mu \mathrm{K}_\mu(z)$, mit $\mu \equiv \nu - d/2$ – vgl. Gl. (F.77). Wir betrachten daher deren Limes unter $z \to 0$, explizit Gl. (F.71) für μ, falls $\mathrm{Re}\,\mu > 0$, und für $-\mu$, falls $\mathrm{Re}\,\mu < 0$. Es gilt:

$$\mathrm{K}_\mu(z) \;\underset{z\to 0}{\sim}\; 2^{\sigma_\mu \mu - 1}\,\Gamma(\sigma_\mu\mu)\;\; z^{-\sigma_\mu \mu} \qquad \sigma_\mu \equiv \mathrm{sign}(\mathrm{Re}\,\mu),\;\; \mathrm{Re}\,\mu \gtrless 0 \qquad \text{(F.87)}$$

indem benutzt ist $\mathrm{K}_{-\mu} \equiv \mathrm{K}_\mu$, $\forall \mu \in \mathbb{C}$, im Falle $\mathrm{Re}\,\mu < 0$. Multiplikation mit z^μ ergibt unmittelbar:

$$z^\mu\,\mathrm{K}_\mu(z) \;\underset{z\to 0}{\sim}\; 2^{\sigma_\mu \mu - 1}\,\Gamma(\sigma_\mu\mu)\;\; z^{(1-\sigma_\mu)\mu} \qquad \sigma_\mu \equiv \mathrm{sign}(\mathrm{Re}\,\mu),\;\; \mathrm{Re}\,\mu \gtrless 0 \qquad \text{(F.88)}$$

für die D_ν-relevante Funktion.

Wir finden, daß $z^\mu \mathrm{K}_\mu(z)$ für $z \to 0$ geht gegen den endlichen Zahlenwert $2^{\mu-1}\,\Gamma(\mu)$ für $\mathrm{Re}\,\mu > 0$ und divergiert wie $z^{2\mu}$ für $\mathrm{Re}\,\mu < 0$. Normierbarkeit von D_ν für verschwindendes Raumzeit-Argument induziert also mit $\mu \equiv \nu - d/2$ wieder die Forderung $\mathrm{Re}\,\nu > d/2$.[F.18]

Aus Gl. (F.77) – mit Gl. (F.88) – folgt unmittelbar für D_ν:

$$D_\nu(\xi^2,m^2) \;\underset{\xi^2\to 0}{\sim}\; D_\nu\Big|_{\xi^2\equiv 0} \qquad \text{(F.89)}$$

$$\equiv\; \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{(4\pi)^{-d/2}}{\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{\nu-\frac{d}{2}}}\;\; \frac{1}{\Gamma(\nu)}\,\Gamma\left(\nu-\tfrac{d}{2}\right) \qquad \mathrm{Re}\,\nu > \frac{d}{2}$$

und in Termen von $D_\nu\big|_{\xi^2\equiv 0}$ für $D_{\nu-1}$:

$$D_{\nu-1}(\xi^2,m^2) \;\underset{\xi^2\to 0}{\sim}\; D_\nu\Big|_{\xi^2\equiv 0} \cdot\; \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} \cdot \left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)\;\; \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-1)}\,\frac{\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{d}{2}\right)} \qquad \text{(F.90)}$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > \frac{d}{2}+1$$

Es ist $\mathrm{Re}\,\nu > d/2$ zu fordern wegen $\mathrm{Re}\,\mu \overset{!}{>} 0$ und $\mathrm{Re}\,\nu > d/2+1$ wegen $\mathrm{Re}\,(\mu-1) \overset{!}{>} 0$. Für die relevante Summe gilt – für $\mathrm{Re}\,\nu > d/2+1$:

$$D_{\nu-1}\big((\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2,m^2\big) \;+\; (m^2-\mathrm{i}\,\epsilon)\;\; D_\nu(\xi^2,m^2) \qquad \text{(F.91)}$$

$$\underset{\xi^2\to 0}{\sim}\;\; D_\nu\Big|_{\xi^2\equiv 0} \cdot\; \left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)\left[(-1)\,(\nu-1) \;+\; \left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)\right]\frac{\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{d}{2}\right)}$$

[F.17] dies der in Zusammenhang mit Gl. (F.71) angesprochene Fall (iii) lichtartigen Vektors ξ

[F.18] Wir halten fest: Der „ν-verallgemeinerte" Feynman-Propagator D_ν nach Gl. (F.77) fordert $\mathrm{Re}\,\nu > 0$; aufgefaßt als *normierte* (Korrelations)Funktion verschärft $\mathrm{Re}\,\nu > d/2$. So ist der konventionelle Feynman-Propagator im gewöhnlichen Minkowski-Raum – vgl. Gl. (F.78″) – *wohldefiniert*, er mit $\nu \equiv 1 \not> d/2 \equiv 2$ aber *nicht normierbar* für lichtartiges Argument.

Damit folgt aus Gl. (F.86):

$$D(\xi^2) \underset{\xi^2\to 0}{\sim} -6\mathrm{i}\,A_\nu \cdot D_\nu\Big|_{\xi^2\equiv 0} \cdot \left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)\left(-\frac{d}{2}\right)\frac{\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-\frac{d}{2}\right)}\Bigg|_\star \tag{F.92}$$

$$= 6\mathrm{i}\,A_\nu \cdot \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{(4\pi)^{-d/2}}{\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{\nu-1-\frac{d}{2}}} \cdot \frac{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\nu)}\Bigg|_\star \tag{F.92'}$$

bzgl. der letzten Identität vgl. Gl. (F.89). Dieser Ausdruck ist entsprechend der erstten Relation in Gl. (F.79) identisch Eins zu setzen; aufgelöst nach dem Faktor $(-6\mathrm{i}\,A_\nu)$ – vgl. etwa Gl. (F.86) –, folgt unmittelbar:

$$-6\mathrm{i}\,A_\nu = -\mathrm{e}^{\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{d/2}\,\frac{\Gamma(\nu)}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}\,\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{(\nu-1)-\frac{d}{2}}\Bigg|_\star \tag{F.93}$$

Und daraus – vgl. Gl. (F.24''):

$$\delta A_\nu \equiv \frac{A_\nu}{A_\nu\big|_{\star,\,\star\star}} = -\mathrm{i}\,4\pi \cdot \frac{d-2}{d}\,\frac{\Gamma\left(\nu-\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}\,\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{-1}\Bigg|_\star \tag{F.94}$$

Es gilt

$$\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\left(\nu-\frac{\zeta-1}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \tag{F.95}$$

und

$$\frac{\Gamma(\nu)}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)} = \Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}+1\right)\,\binom{\nu-1}{\frac{d}{2}+1} \tag{F.96}$$

$$\text{mit} \qquad \binom{\alpha}{\beta} \equiv \frac{\alpha!}{\beta!\,(\alpha-\beta)!} \equiv \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\,\Gamma\left((\alpha-\beta)+1\right)} \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{C} \tag{F.97}$$

dem Binomialkoeffizienten in Standard-Definition, vgl. Ref. [2], Abramowitz 6.1.21. Eingesetzt in Gl. (F.93') sukzessive die Gln. (F.95), (F.96), folgt – mit $\star$: $m^2\equiv 1$:

$$A_\nu = -\mathrm{e}^{\left(\nu-\frac{\zeta-1}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{d/2}\,\frac{1}{6}\,\frac{\Gamma(\nu)}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)} \tag{F.98}$$

$$= -\mathrm{e}^{\left(\nu-\frac{\zeta-1}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot (4\pi)^{d/2}\,\frac{1}{6}\,\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)\left(\frac{d}{2}+1\right)\,\binom{\nu-1}{\frac{d}{2}+1} \qquad \mathrm{Re}\,\nu > \frac{d}{2}+1 \tag{F.98'}$$

Und zusammenfassend im gewöhnlichen Minkowski-Raum mit $d\equiv 4$, $\zeta\equiv 1$:

$$A_\nu = -\mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{4\pi^2}{3}\,\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-3)} = -\mathrm{e}^{\nu\pi\mathrm{i}} \cdot 8\pi^2\,\binom{\nu-1}{3} \tag{F.99}$$

$$\delta A_\nu = -\mathrm{i}\,2\pi\cdot(\nu-3) \qquad \mathrm{Re}\,\nu > 3 \tag{F.99'}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (1.80).

F.4.3 Parameter λ_ν

Der Parameter λ_ν ist bestimmt durch Forderung der zweiten Relation in Gl. (F.79): Normierung auf Eins des Integrals raumartiger Raumzeit-Separationen ξ.

Zur Fixierung des Parameters λ_ν benötigen wir ein Integral, das wir bezeichnen als vom Typ III und voranstellen in Form

$$I^{III}_\mu(a) \equiv \int_0^\infty du\,(au)^\mu\,\mathrm{K}_\mu(au) = 2^{\mu-1}\,a^{-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu+\frac{1}{2}\right) \tag{F.100}$$

$$\mathrm{Re}\,\mu > -\frac{1}{2},\quad \mathrm{Re}\,a > 0$$

vgl. Ref. [96], Gradstein 6.561.16.

Sei D dargestellt nach Gl. (F.86). In Gl. (F.77) ist explizit gegeben $D_\nu(\xi^2,m^2)$:

$$D_\nu\left(\xi^2,m^2\right) = \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(\nu)}\,\frac{1}{\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^\mu}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}(\zeta_m)^\mu\,\mathrm{K}_\mu(\zeta_m) \tag{F.101}$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > 0$$

mit $\mu \equiv \nu - d/2$, $\zeta_m \equiv m\sqrt{-\lambda + \mathrm{i}\,\epsilon}$ und $\lambda \equiv \xi'^2 \equiv \xi^2/\lambda_\nu^2$. Aus Gl. (F.77) folgt analog explizit für $D_{\nu-1}$ mit Raumzeit-Argument $(\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu \cdot \xi)^2$:

$$D_{\nu-1}\big((\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2, m^2\big)$$

$$= \mathrm{e}^{-\left((\nu-1)-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(\nu-1)} \frac{1}{\big(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\big)^{\mu-1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-2} (\zeta_m)^{\mu-1}\,\mathrm{K}_{\mu-1}(\zeta_m) \quad \text{(F.102)}$$

$$= \mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}} \cdot \frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(\nu)} \frac{1}{\big(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\big)^{\mu}} \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1} \quad \text{(F.102')}$$

$$\times\ (-1)\cdot\frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-1)}\cdot\big(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\big)\cdot 2\cdot(\zeta_m)^{\mu-1}\,\mathrm{K}_{\mu-1}(\zeta_m)$$

$$\mathrm{Re}\,\nu > 1$$

die Gln. (F.102), (F.102′) ausgedrückt durch dieselben Parameter μ, ν wie Gl. (F.101), insbesondere durch *dasselbe Raumzeit-Argument* $\zeta_m \equiv m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon}$, $\lambda \equiv \xi^2/\lambda_\nu^2 \equiv (\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2/\lambda_{\nu-1}^2$; in Gl. (F.102′) herausgezogen derselbe Vorfaktor wie in Gl. (F.101).

Für die Funktion D nach Gl. (F.86) folgt:

$$D(\xi^2)$$

$$= -6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot\left[D_{\nu-1}\big((\lambda_{\nu-1}/\lambda_\nu\cdot\xi)^2, m^2\big) + \big(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\big)\ D_\nu(\xi^2, m^2)\right]\Big|_\star \quad \text{(F.103)}$$

$$= -6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot(-1)\,\mathrm{e}^{-\left(\nu-\frac{\zeta}{2}\right)\pi\mathrm{i}}\cdot\frac{(4\pi)^{-d/2}}{\Gamma(\nu)}\frac{1}{\big(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\big)^{\mu-1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1} \quad \text{(F.103')}$$

$$\times\left[2(\nu-1)\cdot(\zeta_m)^{\mu-1}\,\mathrm{K}_{\mu-1}(\zeta_m) - (\zeta_m)^{\mu}\,\mathrm{K}_{\mu}(\zeta_m)\right]\Big|_\star$$

$$= \frac{1}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}\left[2(\nu-1)\cdot(\zeta_m)^{\mu-1}\,\mathrm{K}_{\mu-1}(\zeta_m) - (\zeta_m)^{\mu}\,\mathrm{K}_{\mu}(\zeta_m)\right]\Big|_\star \quad \text{(F.103'')}$$

die letzte Identität eingesetzt $(-6\mathrm{i}\,A_\nu)$ nach Gl. (F.93).

Dieser Ausdruck ist zu integrieren entsprechend der zweiten Relation in Gl. (F.79), aus der wir unmittelbar ablesen bezüglich der Integrationsvariablen u:

$$-u^2 = \xi^2 \qquad \text{mit} \qquad u > 0 \quad \text{(F.104)}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad u^2/\lambda_\nu^2 = -\xi^2/\lambda_\nu^2 \equiv -\lambda > 0 \quad \text{(F.104')}$$

Mit $\zeta_m = m\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon} \cong \sqrt{-\lambda}\,\sqrt{m^2+\mathrm{i}\,\epsilon}$, vgl. $-\lambda$, $m^2 \in \mathbb{R}^+$, folgt:

$$\zeta_m = a\cdot u \qquad \text{mit}^{\text{F.19}} \qquad a \equiv \frac{1}{\lambda_\nu}\big(m^2+\mathrm{i}\,\epsilon\big)^{1/2} \cong \frac{m}{\lambda_\nu} \quad \text{(F.105)}$$

Die relevanten Integrale werden identifiziert als von Typ III:

$$1 \stackrel{!}{=} \frac{2^{-(\mu-1)}}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}\cdot\int_0^\infty du\,\left[2(\nu-1)\cdot(au)^{\mu-1}\,\mathrm{K}_{\mu-1}(au) - (au)^{\mu}\,\mathrm{K}_{\mu}(au)\right]\Big|_\star \quad \text{(F.106)}$$

$$= \frac{2^{-(\mu-1)}}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}\cdot\left[2(\nu-1)\cdot I^{III}_{\mu-1}(a) - I^{III}_{\mu}(a)\right]\Big|_\star \quad \text{(F.106')}$$

$$= \frac{2^{-(\mu-1)}}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}\cdot 2^{\mu-1}\,a^{-1}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\mu-1+\frac{1}{2}\right) \quad \text{(F.106'')}$$

$$\times\left[2(\nu-1)\cdot 2^{-1} - \left((\mu-1)+\frac{1}{2}\right)\right]\Big|_\star$$

bzgl. $I^{III}_{\mu-1}(a), I^{III}_{\mu}(a)$ vgl. Gl. (F.100).

F.19 Die Epsilon-Vorschrift $\epsilon \to 0+$ ist redundant für raumartiges ξ – vgl. die Bem. zu Gl. (F.70) – und kann o.E.d.A. weggelassen werden.

Für Existenz der Integale $I^{III}_{\mu-1}(a), I^{III}_{\mu}(a)$ ist nach Gl. (F.100) zu fordern $\mathrm{Re}(\mu-1)>-1/2$, mit $\mu\equiv\nu-d/2$, ergo $\mathrm{Re}\,\nu>(d+1)/2$; für Existenz der Gamma-Funktion im Nenner strenger $\mathrm{Re}\,\nu>d/2+1$.

Mit $\mu\equiv\nu-d/2$ wird ferner Gl. (F.106″) ausgedrückt durch ν, die eckige Klammer vereinfacht sich zu $(d-1)/2$; es folgt die λ_ν determinierende Forderung in Form:

$$1 \stackrel{!}{=} \lambda_\nu \cdot \left(m^2+\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{-1/2} \cdot \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) \frac{\frac{d-1}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d-1}{2}\right)}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)} \Bigg|_\star \tag{F.107}$$

Es folgt:

$$\lambda_\nu = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}{\frac{d-1}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d-1}{2}\right)} \cdot \left(m^2+\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{1/2} \Bigg|_\star \qquad \mathrm{Re}\,\nu > \frac{d}{2}+1 \tag{F.108}$$

und daraus im gewöhnlichen Minkowski-Raum mit $d\equiv 4$, $\zeta\equiv 1$:

$$\lambda_\nu = \frac{4}{3}\,\frac{\Gamma(\nu-3)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left((\nu-3)+\frac{1}{2}\right)} \qquad \mathrm{Re}\,\nu > 3 \tag{F.109}$$

in Übereinstimmung mit Gl. (1.80′) – mit $\Gamma(\frac{1}{2})\equiv\pi^{1/2}$, vgl. Ref. [2], Abramowitz 6.1.8. Für weitere Umformung geben wir an:

$$\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\frac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)} \qquad \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{-n}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)(2n-1)!! \tag{F.110}$$

für $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$. Vgl. Ref. [2], Abramowitz 6.1.18 und ebenda, die Fußn. zu 6.1.49 bzgl. der Doppel-Fakultät $(2n-1)!!\equiv\prod_{n'=1}^{n}(2n'-1)\equiv 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$.

F.5 Conclusio: *C*- und *NC*-Korrelationsfunktionen – explizite Darstellung

Der „ν-verallgemeinerte“ Feynman-Propagator $D_\nu(\xi^2,m^2)$ in $\mathcal{M}_{d,\sigma}$ ist explizit dargestellt, die Parameter A_λ, λ_ν fixiert. Auf dieser Basis geben wir an explizite Darstellungen der C- und NC-Korrelationsfunktionen in Termen der Funktionen

$$\mathcal{K}_{\mu'}(z) \equiv \left(\frac{1}{2}\right)^{\mu'-1}\frac{1}{\Gamma(\mu')}\,z^{\mu'}\,\mathrm{K}_{\mu'}(z) \underset{z\to 0}{\sim} 1 \qquad \mathrm{Re}\,\mu'>0,\ z\in\mathbb{C} \tag{F.111}$$

die *per constructionem* normiert sind auf Eins für verschwindendes Argument, vgl. Gl. (F.88). Wir rekapitulieren als die relevanten Größen:

$$\mu\equiv\nu-d/2, \qquad \zeta_m\equiv m\,\zeta, \qquad \zeta\equiv\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon}, \qquad \lambda\equiv\xi^2/\lambda_\nu^2 \tag{F.112}$$

bzgl. λ_ν vgl. Gl. (F.108).

Für den kontrahierten Korrelations-Lorentztensor $D(\xi^2)\equiv D_{\mu\nu}{}^{\mu\nu}(\xi^2)$ und die konfinierende Korrelationsfunktion $D_C(\xi^2)$ gilt – vgl. Gl. (F.103″) bzw. Gl. (F.1):

$$D(\xi^2) \equiv D_C(\xi^2) = \frac{\Gamma(\mu-1)}{\frac{d}{2}\,\Gamma\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)}\left[(\nu-1)\cdot\mathcal{K}_{\mu-1}(\zeta_m) - (\mu-1)\cdot\mathcal{K}_\mu(\zeta_m)\right]\Big|_\star \tag{F.113}$$

$$= \frac{2}{d}\,(\nu-1)\cdot\mathcal{K}_{\nu-1-\frac{d}{2}}(\zeta_m) - \frac{2}{d}\left(\nu-1-\frac{d}{2}\right)\cdot\mathcal{K}_{\nu-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\Big|_\star \tag{F.113′}$$

Wir verifizieren unmittelbar Normierung auf Eins für verschwindendes ξ^2.

Für die Funktion $6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot D_\nu$ gilt – vgl. die Gln. (F.77), (F.93):

$$6\mathrm{i}\,A_\nu\cdot D_\nu(\xi^2,m^2) = \frac{1}{\frac{d}{2}\,\Gamma(\mu-1)}\,\left(\frac{1}{2}\right)^{\mu-1}(\zeta_m)^\mu\,\mathrm{K}_\mu(\zeta_m)\cdot\left(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\right)^{-1} \tag{F.114}$$

ergo:

$$6\mathrm{i}\,A_\nu \cdot D_\nu\big(\xi^2, m^2\big) = \frac{2}{d}\Big(\nu{-}1{-}\frac{d}{2}\Big)\cdot \mathcal{K}_{\nu-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\ \cdot\ \big(m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon\big)^{-1} \tag{F.115}$$

Diese Formel für Index $\nu{-}1$ führt auf $6\mathrm{i}\,A_{\nu-1}{\cdot}D_{\nu-1}$, wohingegen in der Formel für D als Summe von $D_{\nu-1}$ und D_ν – vgl. Gl. (F.86) – eingeht als Summand $6\mathrm{i}\,A_\nu{\cdot}D_{\nu-1}$.

Für F^C, F^{NC} gilt – vgl. Gl. (F.23) und (F.115):

$$F^C(\xi^2) \ \equiv\ F^{NC}(\xi^2) \ =\ \lambda_\nu^2 \cdot \frac{2}{d}\Big(\nu{-}1{-}\frac{d}{2}\Big)\cdot \mathcal{K}_{\nu-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\ \cdot\ \big(m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon\big)^{-1}\ \Big|_\star \tag{F.116}$$

Daraus für die Projektionen $\tilde{F}[F^C]$, $\tilde{F}[F^{NC}]$ – vgl. Fußn. F.8 und die Gln. (F.26), (F.94):

$$\begin{aligned}
\tilde{F}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|) \ &\equiv\ \tilde{F}[F^{NC}](|\boldsymbol{\xi}|) \\
&= \delta A_\nu\ \lambda_\nu^4\ \cdot\ \frac{2}{d{-}2}\Big(\nu{-}1{-}\frac{d{-}2}{2}\Big)\cdot \mathcal{K}_{\nu-\frac{d-2}{2}}(\zeta_m)\ \cdot\ \big(m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon\big)^{-1}\ \Big|_\star && \text{(F.117)}\\
&= -\,\mathrm{i}\,2\pi\cdot\Big(\frac{2\lambda_\nu^2}{m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon}\Big)^2\ \frac{1}{d}\,\frac{\Gamma\big(\nu{+}1{-}\frac{d}{2}\big)}{\Gamma\big(\nu{-}1{-}\frac{d}{2}\big)}\cdot \mathcal{K}_{\nu+1-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\ \Big|_\star && \text{(F.117$'$)}
\end{aligned}$$

$$\text{mit}\qquad \zeta_m \equiv m\,\zeta, \qquad \zeta \equiv \sqrt{-\boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}\,\epsilon}, \qquad \boldsymbol{\lambda} \equiv \boldsymbol{\xi}^2/\lambda_\nu^2 \tag{F.118}$$

In (geradem) Fettdruck sind notiert die Größen nach Gl. (F.112), in denen die zwei ausintegrierten – „longitudinalen" [im gewöhnlichen Minkowski-Raum die 0- und 3-] – Komponenten gestrichen sind. Bezüglich $|\boldsymbol{\xi}|$ – vgl. $|\mathbf{x}|$ im Haupttext – ist daher zu identifizieren:

$$|\boldsymbol{\xi}| \ \equiv\ \sqrt{-\boldsymbol{\xi}^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -|\boldsymbol{\xi}|^2 \ \equiv\ \boldsymbol{\xi}^2 \tag{F.119}$$

$$\Longleftrightarrow \qquad \zeta_m \equiv m\,\zeta, \qquad \zeta \equiv \sqrt{-\boldsymbol{\lambda} + \mathrm{i}\,\epsilon}, \qquad \boldsymbol{\lambda} \equiv \boldsymbol{\xi}^2/\lambda_\nu^2 \equiv -|\boldsymbol{\xi}|^2/\lambda_\nu^2 \tag{F.119$''$}$$

Die streu-relevanten Projektionen $\tilde{F}^{(n)}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|)$ involvieren $n = 1, 2$ Ableitungen $-\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\frac{d}{d|\boldsymbol{\xi}|}$, vgl. Gl. (2.232), für die ergo gilt:

$$-\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\frac{d}{d|\boldsymbol{\xi}|} \ =\ 2\,\frac{d}{d\boldsymbol{\xi}^2} \ =\ 2\,\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{d\boldsymbol{\xi}^2}\cdot\frac{d\zeta_m}{d\boldsymbol{\lambda}}\cdot\frac{d}{d\zeta_m} \ =\ \frac{m^2}{\lambda_\nu^2}\left(-\frac{1}{\zeta_m}\frac{d}{d\zeta_m}\right) \tag{F.120}$$

die letzte Identität mit $d\boldsymbol{\lambda}/d\boldsymbol{\xi}^2 = \lambda_\nu^{-2}$ und $d\zeta_m/d\boldsymbol{\lambda} = -m^2/2\zeta_m$, vgl. Gl. (F.119$''$). Für die Funktionen $\mathcal{K}_\mu(z)$ nach Gl. (F.111) gilt ferner die Derivationsformel

$$\begin{aligned}
\Big(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big)^n\,\mathcal{K}_\mu(z) \ &=\ \Big(\frac{1}{2}\Big)^{\mu-1}\frac{1}{\Gamma(\mu)}\,\Big(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\Big)^n\,\big[z^\mu\,\mathrm{K}_\mu(z)\big] && \text{(F.121)}\\
&= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\,\frac{\Gamma(\mu{-}n)}{\Gamma(\mu)}\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^{(\mu-n)-1}\frac{1}{\Gamma(\mu{-}n)}\,z^{\mu-n}\,\mathrm{K}_{\mu-n}(z) && \text{(F.121$'$)}\\
= \Big(\frac{1}{2}\Big)^n\,\frac{\Gamma(\mu{-}n)}{\Gamma(\mu)}\cdot\mathcal{K}_{\mu-n}(z) \qquad & \forall \mathrm{Re}\,\mu > n \in \mathbb{N}_0 && \text{(F.121$''$)}
\end{aligned}$$

bzgl. der zweiten Identität vgl. Gl. (F.72): die Derivationsformel für die Funktionen $\mathrm{K}_\mu(z)$.

Es folgt unmittelbar – vgl. die Gln. (F.117$'$), (F.120) und (F.121$''$):

$$\begin{aligned}
\tilde{F}^{(n)}[F^C](|\boldsymbol{\xi}|) \ &\equiv\ \tilde{F}^{(n)}[F^{NC}](|\boldsymbol{\xi}|) \ =\ \left(-\frac{1}{|\boldsymbol{\xi}|}\frac{d}{d|\boldsymbol{\xi}|}\right)^n\ \tilde{F}[F^{NC}](|\boldsymbol{\xi}|) && \text{(F.122)}\\
&= -\,\mathrm{i}\,2\pi\cdot\Big(\frac{2\lambda_\nu^2}{m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon}\Big)^2\,\frac{1}{d}\,\frac{\Gamma\big(\nu{+}1{-}\frac{d}{2}\big)}{\Gamma\big(\nu{-}1{-}\frac{d}{2}\big)}\cdot\Big(\frac{m^2}{\lambda_\nu^2}\Big)^n\cdot\Big(-\frac{1}{\zeta_m}\frac{d}{d\zeta_m}\Big)^n\ \mathcal{K}_{\nu+1-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\ \Big|_\star && \text{(F.122$'$)}\\
&= -\,\mathrm{i}\,2\pi\cdot\Big(\frac{2\lambda_\nu^2}{m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon}\Big)^2\,\frac{1}{d}\,\frac{\Gamma\big(\nu{+}1{-}\frac{d}{2}\big)}{\Gamma\big(\nu{-}1{-}\frac{d}{2}\big)}\cdot\Big(\frac{m^2}{\lambda_\nu^2}\Big)^n\cdot\Big(\frac{1}{2}\Big)^n\,\frac{\Gamma\big(\nu{-}(n{-}1){-}\frac{d}{2}\big)}{\Gamma\big(\nu{+}1{-}\frac{d}{2}\big)}\cdot\mathcal{K}_{\nu-(n-1)-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\ \Big|_\star && \text{(F.122$''$)}\\
&\cong\ -\,\mathrm{i}\,2\pi\cdot\Big(\frac{2\lambda_\nu^2}{m^2 - \mathrm{i}\,\epsilon}\Big)^{2-n}\,\frac{1}{d}\,\frac{\Gamma\big(\nu{-}(n{-}1){-}\frac{d}{2}\big)}{\Gamma\big(\nu{-}1{-}\frac{d}{2}\big)}\cdot\mathcal{K}_{\nu-(n-1)-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\ \Big|_\star && \text{(F.122$'''$)}
\end{aligned}$$

Mit $n\equiv 0$ verifizieren wir Gl. (F.117′), mit $n\equiv 1,2$ folgt

$$\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\xi|) \;=\; -\mathrm{i}\,2\pi\cdot\lambda_\nu^2\;\frac{2}{d}\Big(\nu-1-\frac{d}{2}\Big)\cdot\mathcal{K}_{\nu-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\;\cdot\;\big(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\big)^{-1}\;\Big|_\star \tag{F.123}$$

$$\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\xi|) \;=\; -\mathrm{i}\,2\pi\qquad\cdot\frac{1}{d}\cdot\mathcal{K}_{\nu-1-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\;\Big|_\star \tag{F.124}$$

für die streu-relevanten konfinierenden Projektionen; vgl. Gl. (F.115) bzw. Gl. (F.127) unten.

Für Vollständigkeit geben wir an die nicht-konfinierende Korrelationsfunktion $D_{NC}(\xi^2)$. Analog zu Gl. (F.120) für $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\zeta}_m$ gilt für ξ, ζ_m:

$$2\,\frac{d}{d\xi^2} \;=\; \frac{m^2}{\lambda_\nu^2}\Big(-\frac{1}{\zeta_m}\frac{d}{d\zeta_m}\Big) \tag{F.125}$$

so daß unmittelbar folgt aus Gl. (F.21):

$$D_{NC}(\xi^2) \;=\; 8\,\frac{d}{d\xi^2}\;F^{NC}(\xi^2) \tag{F.126}$$

$$\;=\; 4\,\lambda_\nu^2\,\frac{2}{d}\Big(\nu-1-\frac{d}{2}\Big)\cdot\frac{m^2}{\lambda_\nu^2}\Big(-\frac{1}{\zeta_m}\frac{d}{d\zeta_m}\Big)\;\mathcal{K}_{\nu-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\;\cdot\;\big(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon\big)^{-1}\;\Big|_\star \tag{F.126′}$$

$$\;=\; 4\,\lambda_\nu^2\,\frac{2}{d}\Big(\nu-1-\frac{d}{2}\Big)\cdot\frac{1}{\lambda_\nu^2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\big(\nu-1-\frac{d}{2}\big)}{\Gamma\big(\nu-\frac{d}{2}\big)}\cdot\mathcal{K}_{\nu-1-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\;\Big|_\star \tag{F.126″}$$

die zweite Identität mit Gl. (F.116), die dritte mit Gl. (F.121″) unter Kürzung der Faktoren m^2 und $(m^2-\mathrm{i}\,\epsilon)^{-1}$. Wir haben daher abschließend:

$$D_{NC}(\xi^2) \;=\; \frac{4}{d}\cdot\mathcal{K}_{\nu-1-\frac{d}{2}}(\zeta_m)\;\Big|_\star \tag{F.127}$$

für die nicht-konfinierende D-Korrelationsfunktion.

Der gewöhnliche Minkowski-Raum $\mathcal{M}\equiv\mathcal{M}_{d,2\zeta-d}$ ist charakterisiert durch $d\equiv 4$, $\zeta\equiv 1$. Wir geben an die $\mathcal{M}$-bezüglichen F-Korrelationsfunktionen – vgl. die Gln. (F.116), (F.117′), (F.123) und (F.124):

$$F^C(\xi^2) \;\equiv\; F^{NC}(\xi^2) \;=\; \lambda_\nu^2\;\frac{1}{2}(\nu-3)\cdot\mathcal{K}_{\nu-2}(\zeta) \tag{F.128}$$

$$\tilde{F}[F^C](|\xi|) \;\equiv\; \tilde{F}[F^{NC}](|\xi|) \;=\; -\mathrm{i}\,2\pi\cdot\lambda_\nu^4\quad(\nu-3)(\nu-2)\cdot\mathcal{K}_{\nu-1}(\zeta) \tag{F.128′}$$

$$\tilde{F}^{(1)}[F^C](|\xi|) \;\equiv\; \tilde{F}^{(1)}[F^{NC}](|\xi|) \;=\; -\mathrm{i}\,2\pi\cdot\lambda_\nu^2\;\frac{1}{2}(\nu-3)\cdot\mathcal{K}_{\nu-2}(\zeta) \tag{F.128″}$$

$$\tilde{F}^{(2)}[F^C](|\xi|) \;\equiv\; \tilde{F}^{(2)}[F^{NC}](|\xi|) \;=\; -\mathrm{i}\,2\pi\qquad\cdot\frac{1}{4}\cdot\mathcal{K}_{\nu-3}(\zeta) \tag{F.128‴}$$

eingesetzt $\star$: $m^2\equiv 1$; bzgl. λ_ν vgl. Gl. (F.109), bzgl.

$$\zeta\equiv\sqrt{-\lambda+\mathrm{i}\,\epsilon},\qquad \lambda\equiv\xi^2/\lambda_4^2 \tag{F.129}$$

$$\boldsymbol{\zeta}\equiv\sqrt{-\boldsymbol{\lambda}+\mathrm{i}\,\epsilon},\qquad \boldsymbol{\lambda}\equiv\boldsymbol{\xi}^2/\lambda_\nu^2=-|\boldsymbol{\xi}|^2/\lambda_\nu^2,\qquad \text{mit}\quad -|\boldsymbol{\xi}|^2\equiv\boldsymbol{\xi}^2,\quad \boldsymbol{\xi}\equiv\xi\big|_{\star\star} \tag{F.129′}$$

Gl. (F.112) bzw. die Gln. (F.119), (F.119′).

Für Vollständigkeit geben wir ferner an bezüglich $\mathcal{M}$ den kontrahierten Korrelations-Lorentztensor und die D-Korrelationsfunktionen:

$$D(\xi^2)\equiv D_C(\xi^2) \;=\; \frac{1}{2}(\nu-1)\cdot\mathcal{K}_{\nu-3}(\zeta)\;-\;\frac{1}{2}(\nu-3)\cdot\mathcal{K}_{\nu-2}(\zeta) \tag{F.130}$$

$$D_{NC}(\xi^2) \;=\; \mathcal{K}_{\nu-3}(\zeta) \tag{F.130′}$$

vgl. Gl. (F.113′) bzw. (F.127).

Physikalisch suggeriert ist $\nu\equiv 4$. Im Haupttext wird für die Invariante ξ^2/λ_4^2 *nicht* benutzt die Notation λ, aber am Parameter $\lambda_{\nu\equiv 4}=8/3\pi$ *unterdrückt* das Skript.

Anhang G

Lichtkegelwellenfunktionen

Wir leiten her die Lichtkegelwellenfunktion des Photons zu niedrigster Ordnung in Lichtkegelstörungstheorie (LCPT) und skizzieren ihre Herleitung im Rahmen der kovarianten perturbativen Quantenfeldtheorie (PT). Nach ihr modelliert werden die Lichtkegelwellenfunktionen der $1S$-, $2S$-Vektormeson-Zustände $|1S\rangle$, $|2S\rangle$, vgl. Kap. 3 und/bzw. Kap. 4; wir fixieren deren Parameter.

Wir schließen den Anhang mit einem Kompendium diverser Relationen in Zusammenhang mit diesen Wellenfunktionen, die benutzt werden im Haupttext.

G.1 Photon-Lichtkegelwellenfunktion $\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r})$

Die Photon-Wellenfunktion im *infinite-momentum-frame* (imf, Bezugsystem, in dem das Photon unendlichen Impuls besitzt) wird diskutiert im Rahmen von LCPT in Ref. [26]. Wir folgen dieser Diskussion auf Basis der Vorschriften und Konventionen von Ref. [135].

Für ein Photon mit Vierer-Impuls $q=(q^+, q^- = -\alpha^2 Q^2/q^+, \mathbf{q}=\mathbf{0})^t$, $q^+ \to \infty$, [im folgenden $\alpha = 1/\sqrt{2}$, d.h. $q^\pm = (q^0 \pm q^3)/\sqrt{2}$, $g_{+-}=1$, vgl. Fußn. 3.12 auf Seite 130], werden multipliziert:

- der Colour-Faktor $\sqrt{N_c}$
- der Flavour-Anteil $e_f \delta_{f\bar{f}}$
- der Spinor-Term $\bar{u}(zq^+, \mathbf{k}, h, f)\, \gamma^\mu\, \varepsilon_\mu(q,\lambda)\, v(\bar{z}q^+, -\mathbf{k}, \bar{h}, \bar{f})$
- für die Quark- und Antiquark-Linien der Faktor $[\sqrt{2}zq^+]^{-1/2}\,[\sqrt{2}\bar{z}q^+]^{-1/2}$
- der Lichtkegel-Energienenner $-\sqrt{2}q^+\,[Q^2 + (\mathbf{k}^2+m_f^2)/z\bar{z}]^{-1}$

Der resultierende Ausdruck

$$\begin{aligned} &\tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{k}) \qquad\qquad (G.1)\\ &= \sqrt{N_c}\; e_f \delta_{f\bar{f}}\; \frac{[-\sqrt{z\bar{z}}]}{z\bar{z}Q^2 + m_f^2 + \mathbf{k}^2}\; \bar{u}(zq^+, \mathbf{k}, h, f)\, \gamma^\mu\, \varepsilon_\mu(q,\lambda)\, v(\bar{z}q^+, -\mathbf{k}, \bar{h}, \bar{f}) \end{aligned}$$

stellt dar die Wahrscheinlichkeitsamplitude dafür, daß das Photon mit Vierer-Impuls q, wie angegeben, mit Virtualität Q und fester Helizität $\lambda \equiv 0, \pm 1$ fluktuiert in ein Quark-Antiquark-Paar, das charakterisiert ist wie folgt: Das Quark besitzt Lichtkegelimpuls zq^+, transversalen Lichtkegel-Relativimpuls $\mathbf{k}$[G.1], Helizität h und Flavour f, das Antiquark entsprechend $\bar{z}q^+$, $-\mathbf{k}$, $\bar{h}$ und $\bar{f}$; mit m_f ist bezeichnet die laufende Quarkmasse. Dabei sind

[G.1] Vgl. Kap. 2.3.1, die Diskussion in Zusammenhang mit Gl. (2.44), – wie auch Anh. D.6.2.

die Helizitäts-Vierer-Eigenvektoren $\varepsilon(q,\lambda)=(\varepsilon^\mu(q,\lambda))$ für $\lambda\equiv 0,\pm 1$ definiert durch:

$$\varepsilon(q,0) \;=\; \big(q^+/Q,\, Q/2q^+,\quad \mathbf{0}\,\big)^t \tag{G.2}$$

$$\varepsilon(q,\pm 1) \;=\; -1/\sqrt{2}\big(\quad 0,\quad 0,1,\,\pm\mathrm{i}\,\big)^t \tag{G.2'}$$

das heißt $\varepsilon^{\mu *}(q,\lambda)\varepsilon_\mu(q,\lambda)$ ist normiert auf ± 1 für $\lambda\equiv 0$ beziehungsweise ± 1. Helizitäts-Dirac-Eigenspinoren $w(h\equiv\pm 1/2)$ im infinite-momentum-frame sind definiert durch:

$$w(1/2) \;=\; \big(1/\sqrt{2},\quad 0,-1/\sqrt{2},\quad 0\big) \tag{G.3}$$

$$w(-1/2) \;=\; \big(\quad 0,1/\sqrt{2},\quad 0,1/\sqrt{2}\big) \tag{G.3'}$$

vgl. Ref. [135]. Bezüglich dieser Zustände folgt für die Spinor-Matrixelemente:[G.2]

$$\bar u\,\gamma^+\,v \;=\; 2\sqrt{z\bar z}\,q^+\,\delta_{h,-\bar h} \tag{G.4}$$

$$\bar u\,\gamma^-\,v \;=\; -\frac{\mathbf{k}^2+m_f^2}{z\bar z\,q^+}\,\delta_{h,-\bar h} \tag{G.4'}$$

$$\bar u\,\gamma^i\,v \;=\; \frac{(1-2z)\,k^i \mp \mathrm{i}\,\varepsilon^{ij3}k^j}{z\bar z}\,\delta_{h,-\bar h} \;\mp\; m\,\frac{\delta^{i1}\mp\mathrm{i}\,\delta^{i2}}{z\bar z}\,\delta_{h,\bar h}$$

Dabei steht das obere Vorzeichen in der letzten Zeile für $h\equiv+1/2$ und das untere für $h\equiv-1/2$; wir schreiben diese Relation unmittelbar um in die prägnante Form:

$$\bar u\,\gamma^i\,v \;=\; \frac{(1-2z)\,k^i \mp \mathrm{i}\,\varepsilon^{ij3}k^j}{z\bar z}\,|\pm\mp| \;\mp\; m\,\frac{\delta^{i1}\mp\mathrm{i}\,\delta^{i2}}{z\bar z}\,|\pm\pm| \tag{G.4''}$$

die zu verstehen ist als *Summe bezüglich jeweils der oberen und der unteren Vorzeichen* mit

$$|\sigma\bar\sigma| \;\equiv\; \delta_{\sigma,\mathrm{sign}\,h}\;\delta_{\bar\sigma,\mathrm{sign}\,\bar h} \tag{G.5}$$

als abkürzende Notation für die Helizitäts-Konfigurationen der Quarks.

Zum einen, aus den Ausdrücken der Gln. (G.4), (G.4') folgt für longitudinale Polarisation, $\lambda\equiv 0$:

$$\bar u\,\gamma^\mu\,\varepsilon_\mu(q,0)\,v \;=\; \frac{z\bar z\,Q^2-(\mathbf{k}^2+m^2)}{\sqrt{z\bar z}\,Q}\,\delta_{h,-\bar h} \;=\; 2\sqrt{z\bar z}\,Q\,\delta_{h,-\bar h} \tag{G.6}$$

mit der zweiten Identität aufgrund der Relation $-Q^2\equiv q^2=(\mathbf{k}^2+m_f^2)/z\bar z$.[G.3] Dies eingesetzt in Gl. (G.1), folgt $\tilde\psi^{h,\bar h}_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv 0)}(z,\mathbf{k})$.

Zum anderen, aus dem Ausdruck von Gl.(G.4'') folgt für transversale Polarisation, $\lambda\equiv\pm 1$:

$$\begin{aligned}\bar u\,\gamma^\mu\,\varepsilon_\mu(q,\pm 1)\,v \;=\; -\frac{1}{\sqrt{z\bar z}}\,\Big\{&\sqrt{2}\,\Big[k\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\varphi_\mathbf{k}}\,\big(z\,|+-|-\bar z\,|-+|\big)\;+\;m_f\,|++|\Big]\cdot\delta^+_\lambda\\ &+\sqrt{2}\,\Big[k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi_\mathbf{k}}\,\big(z\,|-+|-\bar z\,|+-|\big)\;-\;m_f\,|--|\Big]\cdot\delta^-_\lambda\;\Big\}\end{aligned} \tag{G.6'}$$

mit k, $\varphi_\mathbf{k}$ Betrag und Azimut von $\mathbf{k}$. Dies eingesetzt in Gl. (G.1), folgt $\tilde\psi^{h,\bar h}_{\gamma(Q^2,\lambda\equiv\pm)}(z,\mathbf{k})$.

Zusammen für $\lambda\equiv 0,\pm 1$ gilt in kompakter Schreibweise:

$$\begin{aligned}&\tilde\psi^{h,\bar h}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{k})\\ &=\;\sqrt{N_\mathrm{c}}\,e_f\,\delta_{f\bar f}\,\Big\{-\,2z\bar z\,Q\;\;\delta_{h,-\bar h}\;\cdot\delta^0_\lambda\\ &\qquad+\;\sqrt{2}\,\Big[k\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi_\mathbf{k}}\,\big(z\,|\pm\mp|-\bar z\,|\mp\pm|\big)\;\pm\;m_f\,|\pm\pm|\Big]\cdot\delta^\pm_\lambda\;\Big\}\,\frac{1}{\varepsilon^2+k^2}\end{aligned} \tag{G.7}$$

[G.2] Seien Indizes und Argumente der Funktionen nur soweit explizit notiert, wie der Zusammenhang fordert.

[G.3] Diese ist Konsequenz der on-mass-shell-Forderungen an das Photon und die Quarks und der Addition derer Impulse zu dem des Photons.

mit den Vorzeichen wie in Gl. (G.6′) und der Definition: $\varepsilon = \sqrt{z\bar{z}Q^2 + m_f^2}$, vgl. Gl. (3.59).

Sei $\tilde{f}(\mathbf{k})$ eine Funktion mit den üblichen Integrationseigenschaften; dann sei ihre bezüglich des transversalen Impulses $\mathbf{k}$ Fourier-Transformierte $f(\mathbf{r})$ definiert durch:

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\ \tilde{f}(\mathbf{k}) \stackrel{!}{=} f(\mathbf{r}) \tag{G.8}$$

vgl. Gl. (E.48′). Daraus folgt:

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\ k\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi_\mathbf{k}}\ \tilde{f}(\mathbf{k}) \;=\; -\mathrm{i}\,(\partial_1 \pm \mathrm{i}\,\partial_2)\, f(\mathbf{r}) \;=\; -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi_\mathbf{r}}\,\partial_r\ f(r) \tag{G.8′}$$

mit der zweiten Identität für den Fall, daß $\tilde{f}$ abhängt nur vom Betrag k von $\mathbf{k}$ und f folglich nur vom Betrag r von $\mathbf{r}$; bezeichne $\varphi_\mathbf{r}$ den Azimutwinkel von $\mathbf{r}$.

Die bezüglich $\mathbf{k}$ Fourier-Transformierte von Gl. (G.7) folgt mithilfe der Gln. (G.8), (G.8′) unmittelbar zu:

$$\begin{aligned}
&\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r}) \qquad\qquad (\text{G.9})\\
&= \sqrt{N_\mathrm{c}}\ e_f \delta_{f\bar{f}} \Big\{ -\,2z\bar{z}\,Q\ \ \delta_{h,-\bar{h}}\ \cdot\delta^0_\lambda \\
&\qquad + \sqrt{2}\Big[\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi_\mathbf{r}}\ \big(z\,|{\pm}{\mp}| - \bar{z}\,|{\mp}{\pm}|\big)\,[-\partial_r]\ \pm\ m_f\,|{\pm}{\pm}|\Big]\cdot\delta^\pm_\lambda\ \Big\} \\
&\qquad\qquad \times \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\ \frac{1}{\varepsilon^2 + k^2}
\end{aligned}$$

Mithilfe

$$\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\ \frac{1}{\varepsilon^2+k^2} \;=\; \frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi} \tag{G.10}$$

und $-d/d\zeta\ \mathrm{K}_0(\zeta) = \mathrm{K}_1(\zeta)$, mit K_0, K_1 den modifizierten Besselfunktion zweiter Art in der Definition von Ref. [2], folgt aus Gl. (G.9) unmittelbar:

$$\begin{aligned}
&\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r}) \qquad\qquad (\text{G.11})\\
&= \sqrt{N_\mathrm{c}}\ e_f \delta_{f\bar{f}} \Big\{ -\,2z\bar{z}\,Q\ \ \delta_{h,-\bar{h}}\ \frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\cdot\delta^0_\lambda \\
&\qquad + \sqrt{2}\Big[\mathrm{i}\,\varepsilon\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\,\varphi_\mathbf{r}}\ \big(z\,|{\pm}{\mp}| - \bar{z}\,|{\mp}{\pm}|\big)\ \frac{\mathrm{K}_1(\varepsilon r)}{2\pi}\ \pm\ m_f\,|{\pm}{\pm}|\ \frac{\mathrm{K}_0(\varepsilon r)}{2\pi}\Big]\cdot\delta^\pm_\lambda\ \Big\}
\end{aligned}$$

Für Photon-Helizität $\lambda \equiv -1$ wird o.E.d.A. abschließend ein globales negatives Vorzeichen weggelassen und es folgt für $\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)}(z,\mathbf{r})$ genau die Darstellung der Gln. (3.58), (3.58′) im Haupttext.

Eine Photon-Wellenfunktion kann perturbativ hergeleitet werden auch im Rahmen der konventionellen, kovarianten Quantenfeldtheorie. Voraussetzung ist in der Darstellung durch Feynman-Graphen die Interpretation des Photon-Quark-Antiquark-Vertex in Termen einer Photon-Wellenfunktion im Sinne von Lichtkegelstörungstheorie. Dies ist möglich, wenn die Ordnung bezüglich x^+ eingeschränkt ist auf „Photon vor Quark-Antiquark“, und de facto der Fall im formalen Limes unendlichen Photon-Impulses in x^+-Richtung: $q^+ \to \infty$.

Zunächst ist auszuwerten der k^--Anteils des Quark-Loop-Integrals. Für asymptotische q^+ folgt, $dk^0 dk^3 = 1/(2\alpha^2) dk^+ dk^- = dk^+ dk^-$:

$$\begin{aligned}
&\frac{dk^+ d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk^-}{2\pi}\ \frac{N(k^+,k^-,\mathbf{k})}{(k^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\,\epsilon)([k-q]^2 - m_f^2 + \mathrm{i}\,\epsilon)} \qquad (\text{G.12})\\
&\underset{q^+\to\infty}{\sim} \frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\ \frac{\mathrm{i}\,N(k^+,k^-\equiv 0,\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 + m_f^2 - z\bar{z}q^2}
\end{aligned}$$

falls N endlich und ungleich Null für $k^- \equiv 0$. Für $N = \mathrm{i}(\not{k}+m_f)\,[-\mathrm{i}e\not{\varepsilon}(q,\lambda)]\,\mathrm{i}([\not{k}-\not{q}]+m_f)$ folgt explizit:

$$N = \mathrm{i}\,e\,\big\{k\cdot\varepsilon\,(2\not{k}-\not{q}) - k\cdot(k-q)\,\not{\varepsilon} + \mathrm{i}\,\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma^\mu k^\nu \varepsilon^\rho q^\sigma + m_f(2k\cdot\varepsilon - \not{\varepsilon}\not{q} + m_f\not{\varepsilon})\big\} \qquad \text{(G.13)}$$

$$\underset{q^+\to\infty}{\sim} \mathrm{i}\,e\,q^+\gamma^-\,\big\{\,\delta^0_\lambda\cdot[\mathbf{k}^2+m_f^2+z\bar{z}q^2]/Q + \delta^\pm_\lambda\cdot[(1-2z)\,k\cdot\varepsilon(q,\pm1) + \mathrm{i}\gamma_5\epsilon^{ij3}k^i\varepsilon^j(q,\pm1) + m_f\not{\varepsilon}(q,\pm1)]\,\big\}$$

Die Wellenfunktion folgt durch Bilden der Helizitäts-Matrixelemente $\bar{w}(h)\,[N/\sqrt{2}q^+]\,w(-\bar{h})$ mit den Helizitäts-Eigenspinoren $w(h\equiv\pm1/2)$ entsprechend den Gln. (G.3), (G.3′).

G.2 Vektormeson-Lichtkegelwellenfunktion $\psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r})$

Die Lichtkegelwellenfunktion des Vektormesons V wird *modelliert* entsprechend der des Photons. Ansatzpunkt ist Gl. (G.7). Wir übernehmen deren Helizitätsanteil (geschweifte Klammer) und ersetzen den Energienenner $[z\bar{z}Q^2+m_f^2+\mathbf{k}^2]^{-1}$ durch zunächst nicht spezifizierte skalare Funktion $\tilde{\psi}_{V(\lambda)}$ von z und $k\equiv|\mathbf{k}|$:

$$\tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{k}) = \Big\{4z\bar{z}\,\omega_{V,\lambda}\,\delta_{h,-\bar{h}}\cdot\delta^0_\lambda + \Big[k\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi_\mathbf{k}}\,\big(z\,|\pm\mp| - \bar{z}\,|\mp\pm|\big) \pm m_f\,|\pm\pm|\Big]\cdot\delta^\pm_\lambda\Big\}\;\tilde{\psi}_{V(\lambda)}(z,k) \qquad \text{(G.14)}$$

Geeignete Faktoren wie etwa $\omega_{V,\lambda}$ sind aus diesen Funktionen herausgezogen.

Eine Darstellung bezüglich des transversalen Ortsraums analog zu Gl. (G.9) folgt, indem Gl. (G.14) formal Fourier-transformiert wird bezüglich $\mathbf{k}$:

$$\psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r}) = \Big\{4z\bar{z}\,\omega_{V,\lambda}\,\delta_{h,-\bar{h}}\cdot\delta^0_\lambda + \Big[\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi_\mathbf{r}}\,\big(z\,|\pm\mp| - \bar{z}\,|\mp\pm|\big)\,[-\partial_r] \pm m_f\,|\pm\pm|\Big]\cdot\delta^\pm_\lambda\Big\}\;\psi_{V(\lambda)}(z,r) \qquad \text{(G.15)}$$

Dabei sind die skalaren Funktionen $\psi_{V(\lambda)}$ die Fourier-Transformierten von $\tilde{\psi}_{V(\lambda)}$:

$$\int\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\;\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\;\tilde{\psi}_{V(\lambda)}(z,k) \;\overset{!}{=}\; \psi_{V(\lambda)}(z,r) \qquad \text{(G.16)}$$

nach Gl. (G.8). In den folgenden Abschnitten G.2.1 und G.2.2 werden explizite Ansätze angegeben für die skalaren Funktionen $\tilde{\psi}_{V(\lambda)}$ für $V\equiv 1S, 2S$, die zu den Darstellungen im Haupttext führen.

Charakteristik. Seien zunächst diskutiert auf Basis der allegmeinen Darstellung durch Gl. (G.14) Charakteristika und Eigenschaften der Lichtkegelwellenfunktion $\tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{k})$. Ziel ist die Formulierung von Relationen für die skalaren Funktionen $\tilde{\psi}_{V(\lambda)}$, die es gestatten deren Parameter zu fixieren.

Wichtige Größe ist die Kopplung f_V des Vektormesons V an den elektromagnetischen Strom. Im folgenden Abschnitt wird sie formal definiert und hergeleitet ihr Zusammenhang mit der leptonischen Zerfallsbreite $\Gamma^{l^+l^-}_V$ von V; vgl. unten die Gln. (G.64), (G.67) bzw. deren Diskussion im Haupttext in Form der Gln. (3.66), (3.67). In Termen der skalaren Funktionen $\tilde{\psi}_{V(\lambda)}$ folgt aus Gl. (G.14) explizit für longitudinale und transversale Polarisation:

$$f_{V,L} = \hat{e}_V\sqrt{N_\mathrm{c}}\cdot 4\,\omega_{V,L}\int\frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\;4z\bar{z}\;\tilde{\psi}_{V(\lambda\equiv0)}(z,k) \qquad \text{(G.17)}$$

$$f_{V,T} = \hat{e}_V\sqrt{N_\mathrm{c}}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{M_V}\int\frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\;\frac{(z^2+\bar{z}^2)\,k^2+m_f^2}{4z\bar{z}}\;\tilde{\psi}_{V(\lambda\equiv\pm1)}(z,k) \qquad \text{(G.17′)}$$

Dabei ist $\hat{e}_V$ die effektive Quark-Ladung im Vektormeson V in Einheiten der Proton-Ladung e; sie ist determiniert durch dessen Flavour-Gehalt beziehungsweise Isospin, vgl. Gl. (3.61) und bzgl. expliziter Zahlenwerte Tabl. 3.1 auf Seite 135.

Die Vektormeson-Zustände $|1S\rangle$, $|2S\rangle$,... sind normiert gemäß:

$$\langle V(q',\lambda')|V(q,\lambda)\rangle \;=\; (2\pi)^3\, 2q^+\; \delta(q^+ - q'^+)\, \delta_{(2)}(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\; \delta_{\lambda\lambda'} \tag{G.18}$$

vgl. Gl. (2.50) und die Gln. (3.48), (3.48′). Diese Gleichung impliziert insgesamt *Orthonormalität* der Anregungszustände eines Vektormesons. Wir schreiben in diesem Sinne für die Lichtkegelwellenfunktion $\tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{k})$, mit $V, V' \equiv 1S, 2S, \ldots$ und $\lambda, \lambda' \equiv 0, \pm 1$ fest:

$$\delta_{VV'}\,\delta_{\lambda\lambda'} \;=\; \int \frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\; \sum_{h,\bar{h}}\, \tilde{\psi}^{h,\bar{h}\,\dagger}_{V'(\lambda')}(z,\mathbf{k})\, \tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{k}) \tag{G.19}$$

wobei Summation über die Quark-Helizitäten $h, \bar{h}$ impliziert ist. In Termen der skalaren Funktionen $\tilde{\psi}_{V(\lambda)}(z,k)$ lauten diese Relationen explizit bezüglich Normierung:

$$1 \;=\; 2\,\omega^2_{V,L}\; \int \frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\; \{4z\bar{z}\}^2\; \left|\tilde{\psi}_{V(\lambda\equiv 0)}(z,k)\right|^2 \tag{G.20}$$

$$1 \;=\; \int \frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\; \left\{(z^2+\bar{z}^2)\,k^2 + m_f^2\right\}\; \left|\tilde{\psi}_{V(\lambda\equiv\pm 1)}(z,k)\right|^2 \tag{G.20′}$$

und bezüglich Orthogonalität:

$$0 \;=\; \int \frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\; \{4z\bar{z}\}^2\; \tilde{\psi}^{\dagger}_{V'(\lambda)}(z,\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{k}) \qquad \lambda\equiv 0 \tag{G.21}$$

$$0 \;=\; \int \frac{dz}{4\pi}\frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\; \left\{(z^2+\bar{z}^2)\,k^2 + m_f^2\right\}\; \tilde{\psi}^{\dagger}_{V'(\lambda)}(z,\mathbf{k})\, \tilde{\psi}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{k}) \qquad \lambda\equiv\pm 1 \tag{G.21′}$$

Dabei sind in den Gln. (G.21), (G.21′) rechts konstante Faktoren weggelassen.

Sei weiter bezeichnet mit $\langle \mathbf{r}^2\rangle_{V,\lambda}$ für definiertes Vektormeson $V \equiv 1S, 2S, \ldots$ und fester Polarisation $\lambda \equiv L, T$ dessen transversaler rmsq-Radius. In Termen der Lichtkegelwellenfunktion $\psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r})$ nach Gl. (G.15) ist folglich definiert:

$$\langle \mathbf{r}^2\rangle_{V,\lambda} \;=\; \int \frac{dz}{4\pi}\, d^2\mathbf{r}\; \sum_{h,\bar{h}}\, \psi^{h,\bar{h}\,\dagger}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r})\, \mathbf{r}^2\, \psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r}) \tag{G.22}$$

vgl. Gl. (G.19).

Analog zum Haupttext, vgl. die Gln. (3.58), (4.22) und (3.60), (4.32), wird separiert Colour- und Flavour-Gehalt:

$$\psi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)} \;\stackrel{!}{=}\; \sqrt{N_c}\; e_f\,\delta_{f\bar{f}}\; \chi^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)} \qquad \tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)} \;\stackrel{!}{=}\; \sqrt{N_c}\; e_f\,\delta_{f\bar{f}}\; \tilde{\chi}^{h,\bar{h}}_{\gamma(Q^2,\lambda)} \tag{G.23}$$

$$\psi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)} \;\stackrel{!}{=}\; 1/\sqrt{N_c}\; i_{V,f}\; \chi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)} \qquad \tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)} \;\stackrel{!}{=}\; 1/\sqrt{N_c}\; i_{V,f}\; \tilde{\chi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)} \tag{G.23′}$$

bzgl. $i_{V,f}$ vgl. Gl. (3.61). Darstellungen der angegebenen Relationen in Termen der Funktionen $\chi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}$, $\tilde{\chi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}$ und skalarer Funktionen $\chi_{V(\lambda)}$, $\tilde{\chi}_{V(\lambda)}$ folgen unmittelbar.

G.2.1 1*S*-Vektormeson

Für die $1S$-Vektormeson im Sinne der Kapitel 3, 4 wird auf Niveau der skalaren Funktionen $\tilde{\chi}(z,k)$ folgender Ansatz gemacht, $V \equiv 1S$:

$$\tilde{\chi}_{V\equiv 1S(\lambda)}(z,k) = \mathcal{N}_{V,\lambda}\,\sqrt{z\bar{z}}\; \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M^2(z-1/2)^2}{\omega^2_{V,\lambda}}\right]\cdot\frac{2\pi}{\omega^2_{V,\lambda}}\; \exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega^{-2}_{V,\lambda}\,k^2\right] \tag{G.24}$$

$$= \; h_{,\lambda}(z)\cdot \tilde{g}_{V,\lambda}(k) \tag{G.24′}$$

mit $M \equiv M_{1S}$ und den Funktionen

$$\tilde{g}_{1S,\lambda}(k) \;=\; \frac{2\pi}{\omega_{1S,\lambda}^2}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega_{1S,\lambda}^{-2}\,k^2\right] \tag{G.25}$$

$$h_{1S,\lambda}(z) \;=\; \mathcal{N}_{1S,\lambda}\;[z\bar{z}]^{\tau_\lambda/2}\;\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M^2(z-1/2)^2}{\omega_{1S,\lambda}^2}\right] \qquad \text{mit} \qquad \tau_\lambda \equiv 1 \tag{G.26}$$

die für feste Polarisation $\lambda \equiv L, T$ des Vektormesons abhängen von den zwei Parametern $\omega_{V,\lambda}$, $\mathcal{N}_{V,\lambda}$; in Hinblick auf formale Umformungen sind Konstanten τ_L, τ_T eingeführt, die *in praxi* identisch Eins gesetzt werden.

Diese Parametrisierung wird vorgeschlagen von Wirbel, Stech, Bauer in Ref. [236]. Der longitudinale Anteil $h_{V,\lambda}(z)$, ist symmetrisch bezüglich des Austauschs von Quark und Antiquark: $z \leftrightarrow \bar{z}$ aufgrund $(z-1/2)^2 = 1/4 - z\bar{z}$, und gepeakt für den nicht-relativistischen Fall gleichverteilten Lichtkegelimpulses: $z = 1/2$. Der transversale Anteil $\tilde{g}_{V,\lambda}(k)$ ist die $1S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators im Impulsraum.[G.4]

Diese Wellenfunktion $\tilde{g}_{V,\lambda}$ Fourier-transformiert bezüglich $\mathbf{k}$ ergibt $g_{V,\lambda}$, die $1S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators im Ortsraum[G.4], vgl. Gl. (G.16):

$$\begin{aligned}\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\;\tilde{g}_{V,\lambda}(k) \;&=\; \int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\;\frac{2\pi}{\omega_{V,\lambda}^2}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega_{V,\lambda}^{-2}\,k^2\right] \\ &=\; \exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega_{V,\lambda}^2\,r^2\right] \;\stackrel{!}{=}\; g_{V,\lambda}(r)\end{aligned} \tag{G.27}$$

und für die Fourier-Transformierte $\chi_{1S(\lambda)}(z,r)$ von $\tilde{\chi}_{1S(\lambda)}(z,k)$ unmittelbar:

$$\chi_{V\equiv 1S(\lambda)}(z,r) \;=\; h_{V,\lambda}(z)\cdot g_{V,\lambda}(r) \tag{G.28}$$

Eingesetzt in Gl. (G.15) und ausgeführt die Ableitung ∂_r, folgt für die Lichtkegelwellenfunktionen des $1S$-Vektormesons V:

$$\chi_{1S(\lambda\equiv 0)} \;=\; 4z\bar{z}\;\;\omega_{1S,L}\;\;\delta_{h,-\bar{h}}\cdot g_{1S,L}(r)\;h_{1S,L}(z) \tag{G.29}$$

$$\chi_{1S(\lambda\equiv +1)} \;=\; \left[\mathrm{i}\,\omega_{1S,T}^2\,r\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\varphi}\;\left(z\,\delta_{h+,\bar{h}-} - \bar{z}\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) \;+\; m_{\mathrm{eff}}\;\delta_{h+,\bar{h}+}\right]\cdot g_{1S,T}(r)\;h_{1S,T}(z)$$

$$\chi_{1S(\lambda\equiv -1)} \;=\; \left[\mathrm{i}\,\omega_{1S,T}^2\,r\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}\;\left(\bar{z}\,\delta_{h+,\bar{h}-} - z\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) \;+\; m_{\mathrm{eff}}\;\delta_{h-,\bar{h}-}\right]\cdot g_{1S,T}(r)\;h_{1S,T}(z)$$

mit abkürzend $\chi_{V(\lambda)}$ für $\chi_{V(\lambda)}^{h,\bar{h}}(z,\mathbf{r})$ und identifiziert m_f mit der effektiven Quarkmasse $m_{\mathrm{eff}} \equiv m_{f,\mathrm{eff}}$. Dies ist genau die Darstellung im Haupttext, vgl. die Gln. (3.60), (4.33).

Fixierung der Parameter. Für feste Helizität $\lambda \equiv 0, \pm 1$ besitzt die so definierte Lichtkegelwellenfunktion des $1S$-Vektormesons die genannten zwei Parameter $\omega_{1S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{1S,\lambda}$. Diese werden fixiert durch die zwei Forderungen an den Zustand $|1S\rangle$: daß er die Kopplung f_V an den elektromagnetischen Strom reproduziert und normiert ist. Formal sind dies das System der zwei Gln. (G.17), (G.20) [bzw. (G.17′), (G.20′)]. Seine Lösung ergibt $\omega_{1S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{1S,\lambda}$ als Funktionen von M_{1S}, f_{1S}; diese Konstanten sind experimentell wohlbestimmt.

Wir formalisieren das Verfahren und verweisen den technisch weniger interessierten Leser auf den folgenden Unterabschnitt G.2.2.

Sei zunächst definiert das absolut konvergente bestimmte Integral:

$$I(T,Z) \;\stackrel{!}{=}\; \int_0^1 dz\;[z\bar{z}]^{T/2}\;\exp\left\{-Z/2(z-1/2)^2\right\} \qquad \text{für } \mathrm{Re}\,T > -2 \tag{G.30}$$

[G.4] bis auf deren Normierungsfaktor

das insofern von zentraler Bedeutung ist, als alle im folgenden angegebenen Relationen für die Lichtkegelwellenfunktion $|1S\rangle$, $|2S\rangle$ vereinfacht sind bis auf Integrale $I(T,Z)$.[G.5]

Wir haben diese Relationen zum Teil analytisch hergeleitet erst nach Veröffentlichung von Ref. [125], so daß wir hier Zusammenhänge exakt angeben, die dort nur approximiert werden konnten. Diese wiederum suggerieren ein einfaches Schema zur Fixierung der Parameter, das wir nun diskutieren; Abweichungen zu Ref. [125] werden hervorgehoben diskutiert. – So kann das dort numerisch approximierte Integral $I(T,Z)$ analytisch gelöst werden:

$$I(T,Z) \;=\; 2\exp\{-Z/8\}\cdot\int_0^{1/2} dz\;[z\bar{z}]^{T/2}\;\exp\{Z/2\cdot z\bar{z}\} \tag{G.31}$$

$$\;=\; 2^{1-T}\exp\{-Z/8\}\cdot J(T,Z/8) \tag{G.31$'$}$$

indem wir benutzen

$$(z-1/2)^2 \;=\; 1/4-z\bar{z} \tag{G.32}$$

und substituieren $\lambda = 4z\bar{z}$, $dz = d\lambda/\sqrt{1-\lambda}$. Dabei ist das Integral $J(T,\beta)$ in Gl. (G.31$'$) definiert durch:

$$J(T,\beta) \;\stackrel{!}{=}\; \int_0^1 d\lambda\;[1-\lambda]^{-1/2}\;\lambda^{T/2}\;\exp\{\beta\cdot\lambda\} \tag{G.33}$$

Für dieses folgt, vgl. Ref. [96], 3.383.1:

$$J(T,\beta) \;=\; \mathrm{B}(1/2,T/2+1)\;{}_1\mathrm{F}_1(T/2+1;T/2+3/2;\beta) \qquad \text{für } \mathrm{Re}\,T>-2 \tag{G.34}$$

mit $\mathrm{B}(a,b)\equiv\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$ der Eulerschen Beta-Funktion und ${}_1\mathrm{F}_1(a;b;z)\equiv\mathrm{M}(a,b,z)$ der verallgemeinerten Hypergeometrischen oder Kummer-Funktion, vgl. auch Ref. [2]. Zusammenfassend für $I(T,Z)$, $\mathrm{Re}\,T>-2$ folgt:

$$I(T,Z) \;=\; 2^{1-T}\exp\{-Z/8\}\cdot\mathrm{B}(1/2,T/2+1)\;{}_1\mathrm{F}_1(T/2+1;T/2+3/2;Z/8) \tag{G.35}$$

Differentiation nach Z führt auf die benötigte erste Ableitung, vgl. die Gln. (G.30), (G.32):

$$d/dZ\;\; I(T,Z) \;=\; (1/2)\,[I(T+2,Z)-(1/4)\,I(T,Z)] \tag{G.36}$$

das heißt auf Integrale desselben Typs.

Seien weiter definiert die dimensionslosen Größen:[G.6]

$$\zeta \;\equiv\; M^2/\omega^2_{1S,\lambda} \qquad \text{und} \qquad \mu \;\equiv\; m_f^2/M^2 \tag{G.37}$$

so daß $m_f^2/\omega^2_{1S,\lambda}=\mu\,\zeta$, also ζ die relevante Variable.

In die Gln. (G.17), (G.17$'$) und (G.20), (G.20$'$) werden eingesetzt die expliziten Ansätze für die skalaren Funktionen $\tilde{\psi}_{1S(\lambda)}(z,k)$; es werden analytisch ausgeführt die $\mathbf{k}$-Integrationen und die Integrationen bezüglich z ausgedrückt durch Integrale $I(T,Z)$. In Hinblick auf deren explizite Darstellung – vgl. Gl. (G.35) – gelangen wir zu den also vollständig analytischen Ausdrücken:

$$\left.\frac{f_{V,L}}{\hat{e}_V M_V}\right|_{V\equiv 1S} \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\mathcal{N}_{1S,L}\;\cdot\zeta^{-1/2}\;\cdot I(\tau_L,\zeta) \tag{G.38}$$

$$\left.\frac{f_{V,T}}{\hat{e}_V M_V}\right|_{V\equiv 1S} \;=\; \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\mathcal{N}_{1S,T}\;\cdot\zeta^{-1}\,\{-4\;\cdot I(\tau_T,\zeta)(2+\mu\,\zeta)\;\cdot I(\tau_T-2,\zeta)\} \tag{G.38$'$}$$

[G.5] Diese werden benötigt für Argumente $Z\in\mathbb{R}^+$ und Indizes $T\in\mathbb{N}$; zur Berechnung der Kopplungen f_V für transversale Polarisation zusätzlich für $T\equiv -1$. Der Parameter T wird korreliert sein mit den τ_λ, vgl. die Gln. (G.26), (G.45), so daß Konvergenz von $I(T,Z)$, $\mathrm{Re}\,T>-2$, induziert die Forderung $\mathrm{Re}\,\tau_\lambda>0$.

[G.6] Indizes sind unterdrückt, vgl. Fußnote G.2.

Und für die Gln. (G.20), (G.20′):

$$N_c \;=\; |\mathcal{N}_{1S,L}|^2 \;\cdot I(2\tau_L, 2\zeta) \tag{G.39}$$

$$N_c \;=\; |\mathcal{N}_{1S,T}|^2 \;\cdot \big\{ -2\cdot I(2\tau_T+2, 2\zeta)(1+\mu\,\zeta)\cdot I(2\tau_T, 2\zeta)\big\} \tag{G.39′}$$

Die Gln. (G.39), (G.39′) werden aufgelöst nach $\mathcal{N}_{1S,L}$, $\mathcal{N}_{1S,T}$, diese o.E.d.A. angenommen als reell positiv und eingesetzt in die Gln. (G.38), (G.38′). Es folgen implizite Gleichungen für ζ – das heißt für $\omega_{1S,L}$, $\omega_{1S,T}$, vgl. Gl. (G.37) – von der Form:

$$F(\zeta) = 0 \tag{G.40}$$

mit Funktionen $F = F_L, F_T$, die abhängen von $M, f_V, \hat{e}_V$ und für transversale Polarisation zusätzlich von m_f.[G.7] Der Fixpunkt $\zeta \equiv \zeta_\infty$ folgt durch Iteration auf Basis des quadratisch konvergenten *Newtonschen Approximationsverfahrens*, vgl. etwa die Refn. [2,85]:

$$\zeta_{n+1} \;=\; \zeta_n - F(\zeta_n)/F'(\zeta_n) \qquad \zeta_\infty \;=\; \lim_{n\to\infty} \zeta_n \tag{G.41}$$

mit ζ_0 einer approximierten Lösung als Anfangswert.

Praktisch, zur Fixierung der Parameter in Ref. [125], wird Gl. (G.41) noch analytisch berechnet in Termen der Integrale $I(T,Z)$; für die Ableitung F' wird benutzt Gl. (G.36). Die Iteration von Gl. (G.41) geschieht numerisch mit Anfangswert $\zeta_0 \cong M_V^2/(0.4\ \mathrm{GeV})^2$, vgl. Gl. (G.37). Die Auswertung der Integrale $I(T,Z)$ im Rahmen dieser Iteration geschieht numerisch mithilfe des Gauß'schen Integrationsverfahrens, vgl. die etwa Refn. [172, 173]. Eine Genauigkeit von 10^{-10} bezüglich des Fixpunktes ζ ist de facto erreicht nach $n = 3-4$ Iterationen.

Radius-Erwartungswerte $\langle \mathbf{r}^2\rangle_{1S,\lambda}$. Analog zu den angegebenen Gleichungen zur Fixierung der Parameter können auf Basis von Gl. (G.22) formale Relationen in Termen von Integralen $I(T,Z)$ angegeben werden für den Erwartungswert $\langle \mathbf{r}^2\rangle_{1S,\lambda}$, der definiert ist als der transversale rmsq-Radius des $1S$-Vektormesons für feste Polarisation $\lambda \equiv L, T$.

Eingesetzt in Gl. (G.22) die Ortsraum-Darstellungen $\psi^{h,\bar{h}}_{V\equiv 1S(\lambda)}(z,\mathbf{r})$, wie angegeben im Haupttext mit den Gln. (3.60), (4.32) bzw. (4.32), (4.33), lauten diese Relationen:

$$\langle \mathbf{r}^2\rangle_{1S,L} \;=\; \omega_{1S,L}^{-2} \tag{G.42}$$

$$\langle \mathbf{r}^2\rangle_{1S,T} \;=\; 2\omega_{1S,T}^{-2}\cdot\left\{1 - \frac{1}{2}\,\mu\,\zeta \,\Big/\left[(1+\mu\,\zeta) - 2\,\frac{I(2\tau_T+2,2\zeta)}{I(2\tau_T,2\zeta)}\right]\right\} \tag{G.42′}$$

Für den Fall verschwindender Quarkmasse, $\mu \equiv 0$, vereinfacht sich Gl. (G.42′) wesentlich.

G.2.2 $2S$-Vektormeson

Wir gehen analog vor für das $2S$-Vektormeson im Sinne von Kapitel 4. Es wird folgende Ansatz gemacht für die skalaren Funktionen $\tilde{\chi}_{V(\lambda)}$, $V \equiv 2S$:

$$\tilde{\chi}_{V\equiv 2S(\lambda)}(z,k) = \mathcal{N}_{V,\lambda}\,\sqrt{z\bar{z}}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M^2(z-1/2)^2}{\omega_{V,\lambda}^2}\right]\cdot\frac{2\pi}{\omega_{V,\lambda}^2}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega_{V,\lambda}^{-2}\,k^2\right] \times\left\{\left(z\bar{z}-A_\lambda\right) + B_\lambda\left(1-\omega_{2S,\lambda}^{-2}k^2\right)\right\} \tag{G.43}$$

$$= h_{V,\lambda}(z)\cdot\tilde{g}_{V,\lambda}(k)\cdot\left\{\left(z\bar{z}-A_\lambda\right) + B_\lambda\left(1-\omega_{2S,\lambda}^{-2}k^2\right)\right\} \tag{G.43′}$$

[G.7] Für Q^2 unterhalb einer Schwelle $Q^2_{f,0}$ ist $m_f \equiv m_{f,\mathrm{eff}}(Q^2)$ und hängt effektiv ab von der Virtualität Q des Photons. Dies beeinflußt die Parameter für transversale polarisation; vgl. die Diskussion im Haupttext.

mit $B_\lambda \equiv \sqrt{2}$; vgl. die Gln. (G.24), (G.24′). Dabei sind die Funktionen $\tilde{g}_{2S,\lambda}(r)$, $h_{2S,\lambda}(z)$ bezüglich ihrer funktionalen Abhängigkeit identisch den Funktionen $\tilde{g}_{1S,\lambda}(r)$, $h_{1S,\lambda}(z)$ nach den Gln. (G.25), (G.26) differieren aber von diesen durch ihre Parameter, $V \equiv 2S$:

$$\tilde{g}_{2S,\lambda}(k) \;=\; \frac{2\pi}{\omega^2_{2S,\lambda}} \exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega^{-2}_{2S,\lambda}\,k^2\right] \tag{G.44}$$

$$h_{2S,\lambda}(z) \;=\; \mathcal{N}_{2S,\lambda}\;\; [z\bar{z}]^{\tau'_\lambda/2}\;\; \exp\left[-\frac{1}{2}\,\frac{M^2(z-1/2)^2}{\omega^2_{2S,\lambda}}\right] \qquad \text{mit} \qquad \tau'_\lambda \equiv 1 \tag{G.45}$$

In Hinblick auf formale Umformungen sind wieder Konstanten τ'_λ eingeführt, die analog zu τ_λ in praxi identisch Eins gesetzt werden. Wir betonen, daß im „longitudinalen Exponential“ $h_{2S,\lambda}$ angesetzt ist mit $M \equiv M_{1S}$ die Masse des Vektormesons im Grundzustand.

Die Polynome im Ansatz von Gl. (G.43) stellen genau die funktionale Diskrepanz dar zum $1S$-Ansatz, vgl. Gl. (G.24′); sie vermitteln die „Knoten“ der Wellenfunktion. Der $2S$-Zustand aufgefaßt als *radiale* Anregung besitzt dabei „gleichberechtigt“ eine longitudinale und zwei transversale Moden. Das „transversale Polynom“ wird gewählt als das Polynom der $2S$-Wellenfunktion des transversalen Harmonischen Oszillators und gewichtet mit dem Faktor $B_\lambda \equiv \sqrt{2}$.[G.8] Das „longitudinale Polynom“ führt den zusätzlichen Parameter A_λ ein. Unser Ansatz für die $2S$-Lichtkegelwellenfunktion besitzt für feste Polarisation $\lambda \equiv L, T$ die drei Parameter $\omega_{2S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ.

Zur Fourier-Transformation des $2S$-Ansatzes bezüglich $\mathbf{k}$ wird benötigt die Transformation der $2S$-Wellenfunktion im Impulsraum [$\tilde{g}_{2S,\lambda}$ multipliziert mit dem Impulsraum-Polynom] in die $2S$-Wellenfunktion des Ortsraums, vgl. Fußnote G.4; diese lautet explizit, vgl. Gl. (G.27):

$$\begin{aligned}&\int \frac{d^2\mathbf{k}}{(2\pi)^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\;\; \frac{2\pi}{\omega^2_{V,\lambda}} \exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega^{-2}_{V,\lambda}\,k^2\right] \cdot \left(1-\omega^{-2}_{2S,\lambda}k^2\right) \\ &= \exp\left[-\frac{1}{2}\,\omega^2_{V,\lambda}\,r^2\right] \cdot \left(\omega^2_{2S,\lambda}r^2-1\right)\end{aligned} \tag{G.46}$$

mit Definition entsprechend Gl. (G.16).

Dies eingesetzt in Gl. (G.15) und ausgeführt die Ableitung ∂_r, folgt für die Lichtkegelwellenfunktionen des $2S$-Vektormesons V:

$$\begin{aligned}
\chi_{2S(\lambda\equiv 0)} \;&=\; 4z\bar{z}\;\; \omega_{2S,L}\;\; \delta_{h,-\bar{h}} \\
&\qquad \times \left\{\left(z\bar{z}-A_\lambda\right) + \sqrt{2}\,\left(\omega^2_{2S,\lambda}r^2-1\right)\right\} \cdot g_{2S,L}(r)\; h_{2S,L}(z) \\
\chi_{2S(\lambda\equiv +1)} \;&=\; \Big[\mathrm{i}\omega^2_{2S,T}\, r\, \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\,\varphi}\;\left(z\,\delta_{h+,\bar{h}-} - \bar{z}\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) \\
&\qquad \times \left\{\left(z\bar{z}-A_\lambda\right) + \sqrt{2}\,\left(\omega^2_{2S,\lambda}r^2-3\right)\right\} \\
&\quad +\; m_{\mathrm{eff}}\;\delta_{h+,\bar{h}+} \cdot \left\{\left(z\bar{z}-A_\lambda\right) + \sqrt{2}\,\left(\omega^2_{2S,\lambda}r^2-1\right)\right\}\Big] \cdot g_{2S,T}(r)\; h_{2S,T}(z) \\
\chi_{2S(\lambda\equiv -1)} \;&=\; \Big[\mathrm{i}\omega^2_{2S,T}\, r\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}\;\left(\bar{z}\,\delta_{h+,\bar{h}-} - z\,\delta_{h-,\bar{h}+}\right) \\
&\qquad \times \left\{\left(z\bar{z}-A_\lambda\right) + \sqrt{2}\,\left(\omega^2_{2S,\lambda}r^2-3\right)\right\} \\
&\quad +\; m_{\mathrm{eff}}\;\delta_{h-,\bar{h}-} \cdot \left\{\left(z\bar{z}-A_\lambda\right) + \sqrt{2}\,\left(\omega^2_{2S,\lambda}r^2-1\right)\right\}\Big] \cdot g_{2S,T}(r)\; h_{2S,T}(z)
\end{aligned} \tag{G.47}$$

mit abkürzend $\chi_{V(\lambda)}$ für $\chi^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z,\mathbf{r})$. Dies ist genau die Darstellung im Haupttext, vgl. Gl. (4.38).

[G.8] Die Konstante B_λ ist genau die Quadratwurzel der Anzahl transversaler gegenüber longitudinaler Freiheitsgrade; sie wird eingeführt in Hinblick auf formale Umformungen und in praxi identisch $\sqrt{2}$ gesetzt.

Fixierung der Parameter Wir strukturieren analog zu dem Fall des $1S$-Vektormesons: Der skizzenhaften Schilderung des Verfahrens folge seine explizite technische Formulierung.

Seien zunächst die Parameter $\omega_{1S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{1S,\lambda}$ des $1S$-Vektormesons $|1S\rangle$ fixiert wie diskutiert in G.2.1. Für feste Helizität $\lambda \equiv 0, \pm 1$ besitzt die so definierte Lichtkegelwellenfunktion des $2S$-Vektormesons die drei Parameter $\omega_{2S,\lambda}$, $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ.[G.8] Diese werden fixiert durch die drei Forderungen an den Zustand $|2S\rangle$: daß er die Kopplung f_{2S} reproduziert, normiert ist und orthogonal zu dem Zustand $|1S\rangle$; formal also, daß er erfüllt das System der drei Gln. (G.17), (G.20), (G.21) [bzw. (G.17′), (G.20′), (G.21′)].

Die Lösung dieses Systems hat anders zu erfolgen als im Fall des $1S$-Vektormesons: Eingegangen dort sind die experimentell wohldeterminierten Größen M_{1S}, f_{1S}. Die entsprechenden Größen M_{2S}, f_{2S} sind nicht bekannt aus zwei Gründen. Zunächst ist der Zustand $|2S\rangle$ nicht physikalisch. Darüberhinaus ist insbesondere die Kopplung f_{2S} nicht berechenbar aus denen der physikalischen Zustände $|\rho(1450)\rangle$, $|\rho(1700)\rangle$, da auch diese nicht bekannt sind.

Wir gehen folgendermaßen vor. In dem longitudinalen Anteil $h_{2S,\lambda}(z)$ nach Wirbel, Stech, Bauer ist bereits angesetzt die Masse $M \equiv M_{1S}$ des Grundzustandes. Dies geschieht im Sinne des Harmonischen Oszillators, in dem allen Zuständen gemeinsam ist derselbe exponentielle Anteil und der jeweilige Zustand bestimmt ist durch das damit multiplizierte Polynom. Konsequenterweise setzen wir daher in einem *ersten Schritt* die Oszillatorparameter des $2S$-Zustands an als identisch denen des $1S$-Zustands:

$$\text{Schritt Eins:} \qquad \omega_{2S,\lambda} \stackrel{!}{=} \omega_{1S,\lambda} \qquad \lambda \equiv L, T, \text{ fest} \tag{G.48}$$

Die verbleibenden zwei Parameter $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ werden bestimmt durch Forderung von Orthonormalität bezüglich des $1S$-Zustands, das heißt durch Lösen des Systems der zwei Gleichungen (G.20), (G.21) [bzw. (G.20′), (G.21′)]; $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ folgen in Abhängigkeit von $M \equiv M_{1S}$ und $\omega_{1S,\lambda}$, das heißt effektiv in Abhängigkeit von M_{1S}, f_{1S}.

Die zwei mal drei Parameter sind vollständig fixiert. Mithilfe der Gl. (G.17), (G.17′)] werden $f_{2S,\lambda}$ berechnet.[G.9] Die resultierenden Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ sind offensichtlich nicht identisch; dies wird aber gefordert in einem *zweiten Schritt* und realisiert durch Verrücken der Oszillatorparameter des $2S$-Zustands gegenüber denen des $1S$-Zustands, explizit:

$$\text{Schritt Zwei:} \qquad f_{2S,L} \stackrel{!}{=} f_{2S,T} \quad \Longrightarrow \quad \omega_{2S,\lambda} \neq \omega_{1S,\lambda} \qquad \lambda \equiv L, T, \text{ fest} \tag{G.49}$$

$$\omega_{2S,L} \stackrel{!}{=} \omega_{1S,L}(1-\Delta) \tag{G.49′}$$

$$\& \quad \omega_{2S,T} \stackrel{!}{=} \omega_{1S,T}(1+\Delta) \qquad |\Delta| \text{ minimal}$$

Dabei werden die relativen Verrückungen gefordert als *gleich* und *minimal*; Identität der Kopplungen wird erreicht für $\Delta > 0$, das heißt $\omega_{2S,L}$ ist kleiner, $\omega_{2S,T}$ größer zu wählen.

Auf Basis der so bestimmten Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ werden neu fixiert die Parameter $\mathcal{N}_{2S,\lambda}$, A_λ. Sie folgen in Abhängigkeit von M und $\omega_{2S,\lambda}$ anlog wie im ersten Schritt durch Lösen des Systems der zwei Gln. (G.20), (G.21) [bzw. (G.20′), (G.21′)]. Die resultierenden Lichtkegelwellenfunktionen $\tilde{\psi}^{h,\bar{h}}_{V(\lambda)}(z, \mathbf{r})$, mit $V \equiv 1S, 2S$, $\lambda \equiv L, T$ fest, sind daher zusammenfassend *orthonormiert* und liefern für longitudinale und transversale Polarisation identische Kopplungen f_V; dabei ist $f_{1S} \equiv f_{1S,\text{exp}}$ und f_{2S} Postulat.

Wir formalisieren das geschilderte Verfahren. Dies geschieht in Termen des Integrals $I(T, Z)$, vgl. Gl. (G.30), und der – analog zu ζ in Gl. (G.37) – dimensionslos definierten Größe:[G.6]

$$\zeta' \equiv M^2/\omega^2_{2S,\lambda} \tag{G.50}$$

[G.9] In Gl. (G.17′) für $f_{2S,T}$ geht explizit ein die Masse M_{2S} des nicht-physikalischen $2S$-Vektormesons, die wir im Sinne eines *educated guess* als $M_{2S} = 1.6$ GeV ansetzen.

mit $m_f^2/\omega_{2S,\lambda}^2 = \mu\,\zeta'$ wegen $\mu \equiv m_f^2/M^2$, vgl. Gl. (G.37); damit ist ζ' die relevante Variable.

Wie im Fall des $1S$-Vektormesons werden in die Gln. (G.17), (G.17′) und (G.20), (G.20′) zunächst eingesetzt die expliziten Ansätze für die skalaren Wellenfunktionen $\tilde{\psi}_{2S(\lambda)}(z,k)$, analytisch ausgeführt die $\mathbf{k}$-Integrationen, ausgedrückt durch Integrale $I(T,Z)$ die z-Integrationen. Es folgt, mit abkürzend[G.6] $i_k = I(\tau'_\lambda + k, \zeta')$:

$$\left.\frac{f_{V,L}}{\hat{e}_V M_V}\right|_{V\equiv 2S} = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\mathcal{N}_{2S,L}\;\cdot\zeta'^{\,-1/2}\left\{i_2 - (A_L{+}B_L)\cdot i_0\right\} \tag{G.51}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{f_{V,T}}{\hat{e}_V M_V}\right|_{V\equiv 2S} &= \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\mathcal{N}_{2S,T} \\ &\quad\times\zeta'^{\,-1}\left\{-4\cdot i_2 + [(2{+}\mu\,\zeta'){+}4(A_T{+}3B_T)]\cdot i_0\right. \\ &\qquad\left. -\,[A_T(2{+}\mu\,\zeta'){+}B_T(6{+}\mu\,\zeta')]\cdot i_{-2}\right\}\end{aligned} \tag{G.51′}$$

und, mit abkürzend[G.6] $i'_k \equiv I(2\tau'_\lambda{+}2k, 2\zeta')$:

$$N_{\rm c} = |\mathcal{N}_{2S,L}|^2\cdot\left\{i'_4 - 2A_L\cdot i'_2 + (A_L^2{+}B_L^2)\cdot i'_0\right\} \tag{G.52}$$

$$\begin{aligned}N_{\rm c} &= |\mathcal{N}_{2S,T}|^2\cdot\left\{-2\cdot i'_3 + [(1{+}\mu\,\zeta'){+}4(A_T{+}B_T)]\cdot i'_2\right. \\ &\qquad -2[A_T(1{+}\mu\,\zeta'){+}B_T(1{+}2A_T){+}(A_T^2{+}3B_T^2)]\cdot i'_1 \\ &\qquad\left. +\,[A_T^2(1{+}\mu\,\zeta'){+}B_T^2(3{+}\mu\,\zeta'){+}2A_TB_T]\cdot i'_0\right\}\end{aligned} \tag{G.52′}$$

vgl. die Gln. (G.38), (G.38′) bzw. (G.39), (G.39′). Analog führen die Gln. (G.21), (G.21′), mit abkürzend[G.6] $i''_k = I(\tau_\lambda{+}\tau'_\lambda{+}2k, \zeta{+}\zeta')$, auf:

$$0 = \mathcal{N}^*_{2S,L}\,\mathcal{N}_{1S,L}\;\cdot\left\{i''_1 - A_L\cdot i''_0\right\} \tag{G.53}$$

$$\begin{aligned}0 &= \mathcal{N}^*_{2S,T}\mathcal{N}_{1S,T} \\ &\quad\times\left\{-2\cdot i''_2 + \left[\left(1{+}\mu\,\sqrt{\zeta\zeta'}\right){+}2(A_T{+}B_T)\right]\cdot i''_1 - \left[A_T\left(1{+}\mu\,\sqrt{\zeta\zeta'}\right){+}B_T\right]\cdot i''_0\right\}\end{aligned} \tag{G.53′}$$

und daraus unmittelbar:

$$A_L = \frac{i''_1}{i''_0} \tag{G.54}$$

$$A_T = \frac{2\cdot i''_2 - \left[\left(1{+}\mu\,\sqrt{\zeta\zeta'}\right){+}2B_T\right]\cdot i''_1 + B_T\,i''_0}{2\cdot i''_1 - \left(1{+}\mu\,\sqrt{\zeta\zeta'}\right)\cdot i''_0} \tag{G.54′}$$

Für feste ζ, ζ', das heißt für feste Oszillatorparameter $\omega_{1S,\lambda}, \omega_{2S,\lambda}$, sind die A_λ vollständig bestimmt durch die Forderung von Orthogonalität der $1S$- und $2S$-Lichtkegelwellenfunktionen.

Diese Ausdrücke für A_λ eingesetzt in die Gln. (G.52), (G.52′), folgen unmittelbar die Normierungskonstanten $\mathcal{N}_{2S,L}$, $\mathcal{N}_{2S,T}$ in Abhängigkeit der $B_\lambda \equiv \sqrt{2}$ als Funktion der festen ζ, ζ'. Weiter mithilfe der Gln. (G.51), (G.51′) folgen schließlich die Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$.

In Ref. [125] werden die Parameter A_L, A_T numerisch approximiert; effektiv wird im Sinne der Gln. (G.53), (G.53′) implizit gesetzt $\zeta \to \zeta'$. Konsequenz ist, daß die Lichtkegelfunktion $|2S\rangle$ nur approximativ, nicht exakt orthogonal auf $|1S\rangle$ ist. Auf Basis der Relationen (G.54), (G.54′) und mithilfe des analytischen Ausdrucks für die Integrale $I(T,Z)$, vgl. Gl. (G.35), ist diese Näherung nicht mehr erforderlich; es folgen für A_L, A_T unmittelbar Zahlenwerte für beliebige nicht-identische ζ, ζ'. – Wir gelangen zu *exakter statt approximativer Orthogonalität*. Im Haupttext sind dokumentiert die Konsequenzen beider Ansätze; sei hier nur angemerkt, daß die numerische Diskrepanz marginal ist.

Orthonormalität und Reproduktion identischer Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$ nach dem diskutierten Verfahren hängen implizit ab über die effektive Quarkmasse $m_{\rm eff}$ von Q^2. Auf Basis exakter Orthogonalität für jedes Q^2 wird in Kapitel 4.2.3 quantitativ diskutiert: zum einen Fixieren der Oszillatorparameter $\omega_{2S,\lambda}$ für $Q^2 \equiv 0$ wie geschildert und Einfrieren auf diese Werte und zum anderen ihre laufende Anpassung mit Q^2; das heißt identische Kopplungen werden generiert nur für $Q^2 \equiv 0$ beziehungsweis für jedes Q^2.

In Tabelle G.1 sind angegeben Zahlenwerte für $\omega_{1S,T}(Q^2)$ und $\Delta(Q^2)$ in genügender Genauigkeit und für das gesamte Q^2-Intervall, in dem eine nichttriviale Abhängigkeit besteht; der Zahlenwert für den bezüglich Q^2 konstanten Parameter $\omega_{1S,L}$ ist angegeben in der Unterschrift. Die Oszillatorparameter folgen aus den Gln. (G.38), (G.38′) und (G.39), (G.39′), durch numerische Iteration auf Basis des Newtonschen Approximationsverfahrens, vgl. die Gln. (G.40),(G.41). Die Funktion $\Delta(Q^2)$, durch die determiniert ist die Verrückung der $\omega_{2S,\lambda}$ relativ zu den $\omega_{1S,\lambda}$, wird bestimmt durch Iteration von Hand in der Weise, daß für jedes Q^2 die Lichtkegelwellenfunktion $|2S\rangle$ erfüllt: Reproduktion identischer Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$, Normiertheit und Orthogonalität auf $|1S\rangle$, vgl. die Gln. (G.51), (G.51′), (G.52), (G.52′) bzw. (G.53), (G.53′). Wir gehen hierauf ausführlich ein im Haupttext in 4.2.3. Auf Basis von Tabelle G.1 reduziert sich die Bestimmung sämtlicher übriger Parameter auf das Auswerten der angegebenen Relationen in Termen des analytisch gelösten Integrals $I(T,Z)$, vgl. Gl. (G.35) – Fixpunkte impliziter Gleichungen sind nicht mehr zu bestimmen.

Radius-Erwartungswerte $\langle \mathbf{r}^2 \rangle_{2S,\lambda}$. Wir geben die formalen Relationen an für den transversalen rmsq-Radius $\langle \mathbf{r}^2 \rangle_{2S,\lambda}$ für feste Polarisation $\lambda \equiv L, T$:

Eingesetzt in Gl. (G.22) die Ortsraum-Darstellungen $\psi^{\hbar,\bar{\hbar}}_{V\equiv 2S(\lambda)}(z,\mathbf{r})$, wie angegeben im Haupttext mit den Gln. (4.32), (4.38), und abkürzend $i'_k = I(2\tau'_\lambda + 2k, 2\zeta')$ [wie in den Gln. (G.52), (G.52′)], lauten diese Relationen explizit:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}^2 \rangle_{2S,L} \;&=\; \omega_{1S,L}^{-2}\,|\mathcal{N}_{2S,L}|^2 \qquad\qquad (G.55)\\ &\quad\times\big\{i'_2 + 2(-A_L{+}B_L)\cdot i'_1 + B_L(-2A_L{+}3B_L)\cdot i'_0\big\}\\ \langle \mathbf{r}^2 \rangle_{2S,T} \;&=\; \omega_{1S,T}^{-2}\,|\mathcal{N}_{2S,T}|^2\cdot\big\{-4\cdot i'_3 + [(2{+}\mu\,\zeta'){+}8A_T]\cdot i'_2 \qquad (G.55')\\ &\qquad\qquad - 2[A_T(2{+}\mu\,\zeta'){+}2A_T^2 - B_T\,\mu\,\zeta'{+}6B_T^2]\cdot i'_1\\ &\qquad\qquad + [A_T^2(2{+}\mu\,\zeta') - 2A_T\,B_T\,\mu\,\zeta'{+}3B_T^2(2{+}\mu\,\zeta')]\cdot i'_0\big\}\end{aligned}$$

Für den Fall verschwindender Quarkmasse, $\mu \equiv 0$, vereinfacht sich Gl. (G.55′).

Der Modellierung der longitudinalen $2S$-Anregungsmode durch ein Polynom ersten Grades haftet eine gewisse Willkür an, so daß wir unsere Analyse vollständig neu durchführen für:

$$(z\bar{z} - A_\lambda) \;\longrightarrow\; z\bar{z}(z\bar{z} - A_\lambda) \qquad (G.56)$$

Die Resultate sind zusammenfassend sehr ähnlich. Daher beschränken wir uns in dieser Arbeit auf das Polynom ersten Grades. Für Vollständigkeit seien hier aber – ohne weiteren Kommentar – festgehalten die relevanten Relationen für das Polynom zweiten Grades.

Mit den Definitionen i_k, i'_k, i''_k wie eingeführt, gilt für die Kopplung an das Photon:

$$\begin{aligned}\left.\frac{f_{V,L}}{\hat{e}_V M_V}\right|_{V\equiv 2S} \;&=\; \frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\mathcal{N}_{2S,L}\cdot\zeta'^{-1/2}\,\big\{i_4 - A_L\cdot i_2 - B_L\cdot i_0\big\} \qquad (G.57)\\ \left.\frac{f_{V,T}}{\hat{e}_V M_V}\right|_{V\equiv 2S} \;&=\; \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{\pi}\,\mathcal{N}_{2S,T} \qquad (G.57')\\ &\quad\times\zeta'^{-1}\big\{-4\cdot i_4 + [2(1{+}2A_T){+}\mu\,\zeta']\cdot i_2\\ &\qquad + [2(6B_T - A_T) - A_T\,\mu\,\zeta']\cdot i_0 - B_T(6{+}\mu\,\zeta')\cdot i_{-2}\big\}\end{aligned}$$

Parameter $\omega_{1S,T}$, Δ [und resultierende $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$]				
Q^2 [GeV^2]	$\omega_{1S,T}$ [GeV]	Δ	$f_{2S,L}$ [GeV]	$f_{2S,T}$ [GeV]
0.00	0.212 9547 611	0.097 6137 4330	− 0.137 7811 726	− 0.137 7811 726
0.05	0.213 8661 612	0.098 9565 6500	− 0.137 5566 129	− 0.137 5566 129
0.10	0.214 6983 169	0.100 2242 9370	− 0.137 3445 901	− 0.137 3445 901
0.15	0.215 4476 720	0.101 4176 8150	− 0.137 1449 819	− 0.137 1449 819
0.20	0.216 1112 763	0.102 5377 6735	− 0.136 9576 179	− 0.136 9576 179
0.25	0.216 6869 190	0.103 5858 6818	− 0.136 7822 808	− 0.136 7822 808
0.30	0.217 1732 806	0.104 5635 6470	− 0.136 6187 090	− 0.136 6187 090
0.35	0.217 5701 003	0.105 4726 7800	− 0.136 4666 004	− 0.136 4666 004
0.40	0.217 8783 607	0.106 3152 3500	− 0.136 3256 183	− 0.136 3256 183
0.45	0.218 1004 851	0.107 0934 1830	− 0.136 1953 994	− 0.136 1953 994
0.50	0.218 2405 397	0.107 8094 9310	− 0.136 0755 668	− 0.136 0755 668
0.55	0.218 3044 271	0.108 4656 9840	− 0.135 9657 473	− 0.135 9657 473
0.60	0.218 3000 459	0.109 0640 9450	− 0.135 8655 976	− 0.135 8655 976
0.65	0.218 2373 841	0.109 6063 4830	− 0.135 7748 401	− 0.135 7748 401
0.70	0.218 1284 961	0.110 0934 6085	− 0.135 6933 085	− 0.135 6933 085
0.75	0.217 9873 072	0.110 5254 5573	− 0.135 6209 996	− 0.135 6209 996
0.80	0.217 8291 845	0.110 9010 9350	− 0.135 5581 221	− 0.135 5581 221
0.85	0.217 6702 266	0.111 2177 2335	− 0.135 5051 204	− 0.135 5051 204
0.90	0.217 5262 661	0.111 4714 1320	− 0.135 4626 535	− 0.135 4626 535
0.95	0.217 4116 374	0.111 6574 7315	− 0.135 4315 072	− 0.135 4315 072
1.00	0.217 3378 524	0.111 7713 5375	− 0.135 4124 433	− 0.135 4124 433
1.05	0.217 3123 918	0.111 8097 2285	− 0.135 4060 203	− 0.135 4060 203
1.10	0.217 3123 918	0.111 8097 2285	− 0.135 4060 203	− 0.135 4060 203

Tabelle G.1: Abhängigkeit von Q^2 der Parameter $\omega_{1S,T}$, Δ – und der resultierende Kopplungen $f_{2S,L}$, $f_{2S,T}$. Auf Basis dieser Zahlewerte für $\omega_{1S,T}(Q^2)$, $\Delta(Q^2)$ und des konstanten Zahlenwerts $\omega_{1S,L} \equiv 0.329\,9209\,590$ GeV können sämtliche Parameter der Lichtkegelwellenfunktionen $|1S\rangle, |2S\rangle$ berechnet werden ohne Fixpunkt-Gleichungen lösen zu müssen. Die *numerische* Genauigkeit sei dokumentiert durch die letzten Spalten, die Konstanz für $Q^2 \geq 1.05$ GeV^2 durch die letzte Zeile.

für Normierung:

$$N_c = |\mathcal{N}_{2S,L}|^2 \cdot \left\{ i'_4 - 2A_L \cdot i'_3 + A_L^2 \cdot i'_2 + B_L^2 \cdot i'_0 \right\} \tag{G.58}$$

$$N_c = |\mathcal{N}_{2S,T}|^2 \tag{G.58'}$$
$$\times \left\{ -2 \cdot i'_5 + (1+\mu\,\zeta' + 4A_T) \cdot i'_4 - 2[A_T(1+\mu\,\zeta') - 2B_T + A_T^2] \cdot i'_3 \right.$$
$$\left. + \left[A_T^2(1+\mu\,\zeta') - 2B_T(1+2A_T)\right] \cdot i'_2 + 2B_T(A_T - 3B_T) \cdot i'_1 + B_T^2(3+\mu\,\zeta') \cdot i'_0 \right\}$$

für Orthogonalität:

$$0 = \mathcal{N}^*_{2S,L}\,\mathcal{N}_{1S,L} \cdot \left\{ i''_2 - A_L \cdot i''_1 \right\} \tag{G.59}$$

$$0 = \mathcal{N}^*_{2S,T}\mathcal{N}_{1S,T} \tag{G.59'}$$
$$\times \left\{ -2 \cdot i'''_3 + \left[\left(1+\mu\sqrt{\zeta\zeta'}\right) + 2A_T\right] \cdot i''_2 + \left[2B_T - A_T\left(1+\mu\sqrt{\zeta\zeta'}\right)\right] \cdot i''_1 - B_T \cdot i''_0 \right\}$$

daraus unmittelbar:

$$A_L \;=\; \frac{i''_2}{i''_1} \tag{G.60}$$

$$A_T \;=\; \frac{2\cdot i''_3 - \left(1+\mu\sqrt{\zeta\zeta'}\right)\cdot i''_2 - B_T(2\cdot i''_1 - i''_0)}{2\cdot i''_2 - \left(1+\mu\sqrt{\zeta\zeta'}\right)\cdot i''_1} \tag{G.60'}$$

und für die Quadrate der transversalen rmsq-Radien:

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}^2\rangle_{2S,L} \;&=\; \omega_{1S,L}^{-2}\,|\mathcal{N}_{2S,L}|^2 \\ &\quad\times\left\{i'_4 - 2A_L\cdot i'_3 + (A_L^2+2B_L)\cdot i'_2 - 2A_LB_L\cdot i'_1 + 3B_L^2\cdot i'_0\right\}\end{aligned} \tag{G.61}$$

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r}^2\rangle_{2S,T} \;&=\; \omega_{1S,T}^{-2}\,|\mathcal{N}_{2S,T}|^2 \\ &\quad\times\Big\{-4\cdot i'_5 + [2(1+4A_T)+\mu\,\zeta']\cdot i'_4 - 2[2A_T(1+A_T)+A_T\;\mu\,\zeta']\cdot i'_3 \\ &\qquad + [2A_T^2+(A_T^2+2B_T)\mu\,\zeta']\cdot i'_2 \\ &\qquad - 2B_T(6B_T+A_T^2\mu\,\zeta')\cdot i'_1 + 3B_T^2(2+\mu\,\zeta')\cdot i'_0\Big\}\end{aligned} \tag{G.61'}$$

Die Relationen für transversale Polarisation hängen wieder explizit ab von der (effektiven) Quarkmasse.

G.3 Kompendium

Wir leiten diverse Relationen her, die im Haupttext benutzt werden; bzgl. der Konventionen und Notationen der folgenden beiden Abschnitte, vgl. Anh. A.2 und Nachtmann in Ref. [147].

G.3.1 Leptonische Zerfallsbreite $\Gamma_V^{l^+l^-}$

Die Leptonische Zerfallsbreite des Vektormesons V ist bestimmt durch das S-Matrixelement

$$S \;=\; \langle l^-(p,r)\,l^+(p',r')|S|V(q,\lambda)\rangle \tag{G.62}$$

Dabei bezeichnen p, p', q die Impulse, r, r', λ die Spins und Helizitäten des Leptonpaares. Für das T-Matrixelement, definiert durch $S =: \mathrm{i}\,(2\pi)^4\delta_4(p+p'-q)\;T$, folgt daraus:

$$T(s) \;=\; -e\,\bar u_r(p)\gamma^\mu v_{r'}(p')\;\frac{g_{\mu\nu}}{(p+p')^2+\mathrm{i}\,\varepsilon}\;\langle\Omega|J^\nu_{em}(0)|V(q,\lambda)\rangle \tag{G.63}$$

$$\;=\; -e^2\,\bar u_r(p)\gamma^\mu v_{r'}(p')\;\frac{1}{s}\;f_V M_V\,\varepsilon_\mu(q,\lambda) \tag{G.63'}$$

mit $s=(p+p')^2$ und f_V in der Definition:

$$\langle\Omega|J^\mu_{\mathrm{em}}(0)|V(q,\lambda)\rangle \;=\; e f_V\,M_V\,\varepsilon^\mu(q,\lambda) \tag{G.64}$$

Das Absolut-Quadrat von Gl. (G.63′) wird gemittelt über die einlaufenden Spins r, r' und summiert über die auslaufenden Helizitäten:

$$\sum{}'|T(s)|^2 \;=\; -\frac{e^4}{3}\left[\frac{f_V M_V}{s}\right]^2\;\sum_{r,r'}\;\mathrm{tr}\left[\gamma^\mu u_r(p)\bar u_r(p)\gamma_\mu v_{r'}(p')\bar v_{r'}(p')\right] \tag{G.65}$$

$$= +\frac{4e^4}{3}\left[\frac{f_V M_V}{s}\right]^2\;s\cdot\left[1+\frac{2m_l^2}{s}\right] \tag{G.65'}$$

mit m_l der Masse des Leptons. Die Zerfallsrate des Vektormesons in dessen Ruhesystem ist:

$$d\Gamma_V^{l^+l^-} \;=\; \frac{1}{2M_V}\,(2\pi)^4\delta_{(4)}(p+p'-q)\;d^Rp\,d^Rp'\;\;{\sum}'|T(s)|^2 \qquad s=M_V^2 \tag{G.66}$$

mit dem Lorentz-invarianten Maß $d^Rk \equiv d^3\vec{k}/(2\pi)^3 2k_{0+} = d^4k\,\theta(k_0)\,\delta(k^2-m^2)/(2\pi)^3$. Eingesetzt Gl. (G.65′) und ausgeführt die Phasenraum-Integrationen, folgt:[G.10]

$$\Gamma_V^{l^+l^-} \;=\; \frac{4\pi\alpha_{\rm em}^2}{3}\,\frac{f_V^2}{M_V}\cdot\left[1+\frac{2m_l^2}{M_V^2}\right]\sqrt{1-\frac{4m_l^2}{M_V^2}} \tag{G.67}$$

dabei ist $\alpha_{\rm em} = e^2/4\pi \cong 1/137.04$. Die Gln. (G.64), (G.67) werden explizite diskutiert im Haupttext, vgl. die Gln. (3.66), (3.67) auf Seite 134.

G.3.2 Photoproduktion und l^+l^--Annihilation in $\pi^+\pi^-$, $2\pi^+2\pi^-$

Der differentielle Wirkungsquerschnitt $d\sigma_{l^+l^-\to V}$ für die Produktion eines realen Vektormesons V in l^+l^--Annihilation wird berechnet auf Basis desselben S-Matrixelementes, vgl. Gl. (G.62); mit ${\sum}'|T(s)|^2$ nach Gl. (G.65′) gilt:

$$d\sigma_{l^+l^-\to V} \;=\; \frac{1}{2w(s,m_l^2,m_l^2)}\,(2\pi)^4\delta_{(4)}(p+p'-q)\;d^Rq\;\;{\sum}'|T(s)|^2 \tag{G.68}$$

mit $w(\alpha,\beta,\gamma) = [\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)]^{1/2} = [\alpha-(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})^2]^{1/2}[\alpha-(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})^2]^{1/2}$ der vollständig symmetrischen Källen-Funktion. Daraus folgt durch Ausführen der Phasenraum-Integrationen:[G.10]

$$\sigma_{l^+l^-\to V} \;=\; \frac{4\pi e^4}{3}\left[\frac{f_V}{M_V}\right]^2\delta(s-M_V^2)\cdot\left[1+\frac{2m_l^2}{M_V^2}\right]\Bigg/\sqrt{1-\frac{4m_l^2}{M_V^2}} \tag{G.69}$$

Die Berechnung der Rho-Kanal-Massenspektren für Photoproduktion und e^+e^--Annihilation in zwei und vier geladene Pionen geschieht durch Distribution der Zustände ρ,ρ',ρ'' $[\equiv\rho(770),\rho(1450),\rho(1700)]$, als einfache Breit-Wigner-Resonanzen:

$$T_M \;\stackrel{!}{=}\; T\cdot\frac{c_{V,f}\cdot\sqrt{M_V\Gamma_V^{tot}/\pi}}{M^2-M_V^2+{\rm i}\,M_V\Gamma_V^{tot}} \qquad f\equiv\pi^+\pi^-,2\pi^+2\pi^- \tag{G.70}$$

mit M der invarianten Masse des Endzustands f. Die Normierungskonstanten $c_{V,f}$ sind definiert über den Zusammenhang der T-Amplituden:

$$\int_{s_f}^{\infty} dM^2\,\left|T_M\right|^2 \;=\; \left|T\right|^2 \tag{G.71}$$

mit $s_f \equiv (2m_\pi)^2,(4m_\pi)^2$ den kinematischen Schwellen der Reaktionen. Eingesetzt T_M nach Gl. (G.70) in Gl. (G.71), kann der Faktor $|T|^2$ gekürzt werden; wir erhalten unmittelbar:

$$c_{V,f} \;=\; \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\,\arctan\frac{M_V^2-s_f}{M_V}\right]^{-1/2} \tag{G.72}$$

Bzgl. ihrer Abweichung von Eins vgl. Tabl. G.2. Für l^+l^--Annihilation in die Endzustände $f\equiv\pi^+\pi^-,2\pi^+2\pi^-$ folgt:

$$\sigma_f(M) \;=\; \frac{4\pi e^4}{3}\left|\sum_{V=\rho,\rho',\rho''}\frac{f_V}{M_V}\,\frac{c_{V,f}\cdot\sqrt{M_V\Gamma_V^{tot}/\pi}}{M^2-M_V^2+{\rm i}\,M_V\Gamma_V^{tot}}\,\sqrt{B_{V\to f}}\,\right|^2 \tag{G.73}$$

[G.10] Für Elektronen können die m_l-abhängigen Faktoren vernachlässigt werden.

Normierungsparameter der Breit-Wigner-Distributionen: Abweichung von Eins $[c_{V,f}-1]$			
	ρ $\equiv\rho(770)$	ρ' $\equiv\rho(1450)$	ρ'' $\equiv\rho(1700)$
$f\equiv\pi^+\pi^-$	3.743×10^{-2}	3.628×10^{-2}	2.325×10^{-2}
$f\equiv2\pi^+2\pi^-$	6.942×10^{-2}	4.102×10^{-2}	2.540×10^{-2}

Tabelle G.2: Normierungsparameter $c_{V,f}$ der Breit-Wigner-Distributionen nach Gl. (G.72); Abweichungen von Eins in Prozent $\times10^{-2}$. Für die Schwellen $s_f\equiv(2m_\pi)^2,(4m_\pi)^2$ liegen zugrunde für die Massen M_V der Vektormesonen die Zahlenwerte von Tabelle 4.2 auf Seite 177 und $m_\pi=0.139\,570$ GeV für die Masse des geladenen Pions, vgl. Ref. [165].

mit abkürzend $\sigma_f\equiv\sigma[l^+l^-\to V\to f]$. Die Verzweigungsverhältnisse $B_{V\to f}$ sind zusammen mit den Massen M_V und totalen Zerfallsbreiten Γ_V^{tot} angegeben in Tabl. 4.2. In dieser Formel wird die totale Zerfallsbreite des $\rho(770)$ parametrisierte in der Form:

$$\Gamma_\rho^{tot}\quad\longrightarrow\quad\Gamma_\rho^{tot}\cdot\left\{1+c\cdot\left[M^2/M_\rho^2-1\right]+c'\cdot\left[M^2/M_\rho^2-1\right]^2\right\} \tag{G.74}$$

mit Γ_ρ^{tot} dem experimentellen Zahlenwert, vgl. Tabl. 4.2, und ersetzt $c_{\rho,f}\to c''\cdot c_{\rho,f}$.[G.11] Die Parameter c, c', c'' werden adjustiert[G.12] durch die Forderung, daß Gl. (G.73) das experimentelle e^+e^--Annihilationspektrum in $\pi^+\pi^-$ reproduziert, vgl. Abb. 4.4 auf Seite 161.

Das Massenspektrum für Photoproduktion von $f\equiv\pi^+\pi^-,2\pi^+2\pi^-$ elastisch am Proton folgt analog, – dabei sind Γ_ρ^{tot}, $c_{\rho,f}$ *nicht* modifiziert:

$$\frac{1}{2M}\frac{d\sigma_{f,\lambda}}{dM}\Big|_{Q^2}(M) \tag{G.75}$$
$$=\int_{-\infty}^{0}dt\,\frac{1}{16\pi s^2}\left|\sum_{V=\rho,\rho',\rho''}\;T_{V,\lambda}(s,t)\;\frac{c_{V,f}\cdot\sqrt{M_V\Gamma_V^{tot}/\pi}}{M^2-M_V^2+\mathrm{i}\,M_V\Gamma_V^{tot}}\;\sqrt{B_{V\to f}}\;\right|^2$$

mit abkürzend $d\sigma_{f,\lambda}\equiv d\sigma_\lambda[\gamma^{(*)}p\to Vp]$ und $T_{V,\lambda}\equiv T_\lambda[\gamma^{(*)}p\to Vp]$ den entsprechenden T-Amplituden, die berechnet werden im Rahmen unseres Zugangs auf Basis des MSV.

G.3.3 Mischungswinkel Θ, Kopplung f_{2S}

Im Haupttext wird für die Vektormesonen ρ',ρ'' $[\equiv\rho(1450),\rho(1700)]$ der Ansatz gemacht: Sie setzen sich zusammen, bestimmt durch den Mischungswinkel Θ, aus zwei Komponenten, dem $2S$-Quark-Antiquark-Zustand und dem inerten Rest, vgl. die Gln. (4.31)-(4.31″). Es werden definiert die Verzweigungsverhältnisse $X_{V,1},X_{V,2},X_{V,3}$ für $V\equiv\rho',\rho''$ in den Gln. (4.42)-(4.42″). Wir stellen den folgenden Zusammenhang her.

Aus dem Ansatz für ρ',ρ'', vgl. die Gln. (4.31)-(4.31″), folgt für die Kopplungen:

$$f_{\rho'}\;=\;\cos\Theta\;f_{2S} \tag{G.76}$$
$$f_{\rho''}\;=\;-\sin\Theta\;f_{2S} \tag{G.76′}$$

das heißt mithilfe Gl. (G.67) gilt für die e^+e^--Zerfallsbreiten zum einen:

$$\Gamma_{\rho'}^{e^+e^-}\;=\;\frac{4\pi\alpha^2}{3}\;f_{2S}^2\;\frac{\cos^2\theta}{M_{\rho'}} \tag{G.77}$$

$$\Gamma_{\rho''}^{e^+e^-}\;=\;\frac{4\pi\alpha^2}{3}\;f_{2S}^2\;\frac{\sin^2\theta}{M_{\rho''}} \tag{G.77′}$$

[G.11] Da $B_{\rho,2\pi^+2\pi^-}=0$, vgl. Tabl. 4.2, betrifft diese Modifikation de facto nur den Zwei-Pion-Endzustand.
[G.12] auf die Zahlenwerte $c=-0.2954$, $c'=0.02286$, $c''=0.8512$

Zum anderen gilt in Termen der $X_{V,i}$, vgl. die Gln. (4.42)-(4.42''), für $V \equiv \rho', \rho''$:

$$\Gamma_V^{e^+e^-} \;=\; \Gamma_V^{tot} \cdot x_V \qquad \text{mit} \qquad x_V \;\equiv\; X_{V,1}(1+X_{V,2})/X_{V,3} \tag{G.78}$$

Gleichsetzen der Relationen (G.77), (G.77') und (G.78) führt auf:

$$\tan^2\Theta \;=\; M_{\rho'}\Gamma_{\rho'}^{tot}\, x_{\rho'} \;/\; M_{\rho''}\Gamma_{\rho''}^{tot}\, x_{\rho''} \tag{G.79}$$

$$f_{2S}^2 \;=\; \left[\frac{4\pi\alpha^2}{3}\right]^{-1} \left\{M_{\rho'}\Gamma_{\rho'}^{tot}\, x_{\rho'} \;+\; M_{\rho''}\Gamma_{\rho''}^{tot}\, x_{\rho''}\right\} \tag{G.80}$$

Eingesetzt für die $X_{V,i}$ die Zahlenwerte aus Tabelle 4.2 finden wir explizit:

$$\Theta \;=\; 0.229\,\pi \;=\; 41.2^\circ \tag{G.79'}$$

$$f_{2S} \;=\; -0.178\,\text{GeV} \tag{G.80'}$$

Die hier implizierte Phasenwahl von f_{2S} und die Wahl von Θ im ersten Quadranten geschieht dahingehend, das Vorzeichenmuster zu reproduzieren, das sich experimentell manifestiert im $\pi^+\pi^-$-Massespektrum für e^+e^--Annihilation, vgl. Abb. 4.4.

Die Kopplung f_{2S} nach (G.80') differiert augenscheinlich von dem Wert von -0.137 GeV, vgl. Tabl. 4.1 auf Seite 167, zu dem wir gelangen im Rahmen unseres expliziten Ansatzes für der Lichtkegelwellenfunktionen des $2S$-Zustandes. In Hinblick auf die nur geringe Genauigkeit der Zahlenwerte für die $X_{V,i}$, vgl. auch Donnachie, Mirzaie in Ref. [55], erscheint es uns legitim, unserer Analyse zugrundezulegen den Zahlenwert (G.79') für den Mischungswinkel Θ und den Wert von -0.137 GeV aus Tabelle 4.1 für die Kopplung f_{2S} – statt durch Fein-Adjustierung globale Übereinstimmung der Parameter zu erreichen.

Anhang H

$d\sigma_{\lambda\equiv L,T}/dt|_{Q^2}(\tau^2)$, $\rho(770)$-Produktion: Tabellen zu Abbildung 4.16

In Abbildung 4.16 ist aufgetragen als Funktion von $\tau^2 = -t+\delta t \cong -t$, vgl. Gl. (3.6), die im Quadrat des invarianten Impulstransfers $-t$ **differentiellen Wirkungsquerschnitte**:

$$\left.\frac{d\sigma_{V,\lambda}}{dt}\right|_{Q^2}(\tau^2) \qquad V \equiv \rho(770), 2S \qquad \lambda \equiv L, T \tag{H.1}$$

longitudinal und **transversal** für feste Werte $\boldsymbol{Q^2 \equiv 0,\ 0.25,\ 2,\ 10,\ 20\ \mathrm{GeV}^2}$.

Die Auftragung dort ist logarithmisch über viele Dekaden. Für $\boldsymbol{\rho(770)}$-Produktion geben wir daher an – ohne weiteren Kommentar – Auszüge der C-Programm-Listen: Die erste Zahl ist τ^2 in $\mathbf{GeV^2}$, die zweite der zugehörige Produktionsquerschnitt in $\mathbf{mb\,GeV^{-2}}$.

```
0.000 8.32526488e-02
0.010 7.30326204e-02    0.210 9.24716585e-03    0.410 2.25940914e-03
0.020 6.42626102e-02    0.220 8.52334391e-03    0.420 2.12432030e-03
0.030 5.67156107e-02    0.230 7.86811011e-03    0.430 1.99843700e-03
0.040 5.02026816e-02    0.240 7.27377943e-03    0.440 1.88102714e-03
0.050 4.45662406e-02    0.250 6.73364588e-03    0.450 1.77142753e-03
0.060 3.96745811e-02    0.260 6.24184518e-03    0.460 1.66903645e-03
0.070 3.54173854e-02    0.270 5.79323818e-03    0.470 1.57330709e-03
0.080 3.17020481e-02    0.280 5.38331176e-03    0.480 1.48374174e-03
0.090 2.84506596e-02    0.290 5.00809437e-03    0.490 1.39988669e-03
0.100 2.55975254e-02    0.300 4.66408391e-03    0.500 1.32132770e-03
0.110 2.30871253e-02    0.310 4.34818610e-03    0.510 1.24768599e-03
0.120 2.08724292e-02    0.320 4.05766158e-03    0.520 1.17861469e-03
0.130 1.89135074e-02    0.330 3.79008052e-03    0.530 1.11379569e-03
0.140 1.71763793e-02    0.340 3.54328354e-03    0.540 1.05293681e-03
0.150 1.56320600e-02    0.350 3.31534799e-03    0.550 9.95769338e-04
0.160 1.42557684e-02    0.360 3.10455888e-03    0.560 9.42045745e-04
0.170 1.30262679e-02    0.370 2.90938365e-03    0.570 8.91537751e-04
0.180 1.19253175e-02    0.380 2.72845033e-03    0.580 8.44034520e-04
0.190 1.09372127e-02    0.390 2.56052856e-03    0.590 7.99341075e-04
0.200 1.00484023e-02    0.400 2.40451305e-03    0.600 7.57276879e-04
```

Tabelle H.1: $\boldsymbol{Q^2 \equiv 0}$, **Transversal** $\boldsymbol{T}$

0.000	4.98025289e-03				
0.010	4.49170663e-03	0.210	8.30663969e-04	0.410	2.50995152e-04
0.020	4.05918639e-03	0.220	7.75578113e-04	0.420	2.38127530e-04
0.030	3.67557249e-03	0.230	7.24993872e-04	0.430	2.26027614e-04
0.040	3.33471619e-03	0.240	6.78472225e-04	0.440	2.14640757e-04
0.050	3.03130020e-03	0.250	6.35622676e-04	0.450	2.03917020e-04
0.060	2.76072001e-03	0.260	5.96097403e-04	0.460	1.93810700e-04
0.070	2.51898287e-03	0.270	5.59586172e-04	0.470	1.84279914e-04
0.080	2.30262177e-03	0.280	5.25811885e-04	0.480	1.75286231e-04
0.090	2.10862200e-03	0.290	4.94526708e-04	0.490	1.66794335e-04
0.100	1.93435849e-03	0.300	4.65508674e-04	0.500	1.58771732e-04
0.110	1.77754218e-03	0.310	4.38558713e-04	0.510	1.51188482e-04
0.120	1.63617426e-03	0.320	4.13498048e-04	0.520	1.44016961e-04
0.130	1.50850683e-03	0.330	3.90165909e-04	0.530	1.37231649e-04
0.140	1.39300922e-03	0.340	3.68417524e-04	0.540	1.30808934e-04
0.150	1.28833914e-03	0.350	3.48122351e-04	0.550	1.24726945e-04
0.160	1.19331773e-03	0.360	3.29162525e-04	0.560	1.18965394e-04
0.170	1.10690826e-03	0.370	3.11431478e-04	0.570	1.13505439e-04
0.180	1.02819765e-03	0.380	2.94832731e-04	0.580	1.08329554e-04
0.190	9.56380553e-04	0.390	2.79278821e-04	0.590	1.03421422e-04
0.200	8.90745703e-04	0.400	2.64690352e-04	0.600	9.87658278e-05

Tabelle H.2: $\boldsymbol{Q^2 \equiv 0.25\ \mathrm{GeV}^2}$, **Longitudinal** $\boldsymbol{L}$

0.000	3.61895983e-02				
0.010	3.16946910e-02	0.210	3.93402359e-03	0.410	9.46853365e-04
0.020	2.78457868e-02	0.220	3.62330975e-03	0.420	8.89601204e-04
0.030	2.45402664e-02	0.230	3.34220837e-03	0.430	8.36287235e-04
0.040	2.16929956e-02	0.240	3.08738756e-03	0.440	7.86596236e-04
0.050	1.92331909e-02	0.250	2.85594206e-03	0.450	7.40242746e-04
0.060	1.71018689e-02	0.260	2.64533295e-03	0.460	6.96967845e-04
0.070	1.52497669e-02	0.270	2.45333652e-03	0.470	6.56536319e-04
0.080	1.36356452e-02	0.280	2.27800098e-03	0.480	6.18734158e-04
0.090	1.22248993e-02	0.290	2.11760949e-03	0.490	5.83366349e-04
0.100	1.09884224e-02	0.300	1.97064881e-03	0.500	5.50254916e-04
0.110	9.90167361e-03	0.310	1.83578235e-03	0.510	5.19237191e-04
0.120	8.94391117e-03	0.320	1.71182721e-03	0.520	4.90164279e-04
0.130	8.09756142e-03	0.330	1.59773447e-03	0.530	4.62899690e-04
0.140	7.34769845e-03	0.340	1.49257217e-03	0.540	4.37318135e-04
0.150	6.68161402e-03	0.350	1.39551074e-03	0.550	4.13304432e-04
0.160	6.08846154e-03	0.360	1.30581035e-03	0.560	3.90752550e-04
0.170	5.55896059e-03	0.370	1.22281004e-03	0.570	3.69564749e-04
0.180	5.08515145e-03	0.380	1.14591821e-03	0.580	3.49650809e-04
0.190	4.66019053e-03	0.390	1.07460445e-03	0.590	3.30927347e-04
0.200	4.27817972e-03	0.400	1.00839237e-03	0.600	3.13317195e-04

Tabelle H.3: $\boldsymbol{Q^2 \equiv 0.25\ \mathrm{GeV}^2}$, **Transversal** $\boldsymbol{T}$

0.000	1.39100961e-03				
0.010	1.26023403e-03	0.210	2.49519586e-04	0.410	7.88565475e-05
0.020	1.14390351e-03	0.220	2.33566311e-04	0.420	7.49733322e-05
0.030	1.04024477e-03	0.230	2.18877437e-04	0.430	7.13158835e-05
0.040	9.47718612e-04	0.240	2.05333176e-04	0.440	6.78684514e-05
0.050	8.64987305e-04	0.250	1.92826614e-04	0.450	6.46166135e-05
0.060	7.90886725e-04	0.260	1.81262193e-04	0.460	6.15471463e-05
0.070	7.24402493e-04	0.270	1.70554402e-04	0.470	5.86479098e-05
0.080	6.64649551e-04	0.280	1.60626615e-04	0.480	5.59077444e-05
0.090	6.10854649e-04	0.290	1.51410082e-04	0.490	5.33163784e-05
0.100	5.62341327e-04	0.300	1.42843038e-04	0.500	5.08643457e-05
0.110	5.18517004e-04	0.310	1.34869925e-04	0.510	4.85429106e-05
0.120	4.78861881e-04	0.320	1.27440703e-04	0.520	4.63440020e-05
0.130	4.42919391e-04	0.330	1.20510240e-04	0.530	4.42601524e-05
0.140	4.10287964e-04	0.340	1.14037788e-04	0.540	4.22844448e-05
0.150	3.80613924e-04	0.350	1.07986500e-04	0.550	4.04104633e-05
0.160	3.53585363e-04	0.360	1.02323023e-04	0.560	3.86322499e-05
0.170	3.28926830e-04	0.370	9.70171226e-05	0.570	3.69442646e-05
0.180	3.06394747e-04	0.380	9.20413595e-05	0.580	3.53413497e-05
0.190	2.85773431e-04	0.390	8.73707985e-05	0.590	3.38186981e-05
0.200	2.66871642e-04	0.400	8.29827511e-05	0.600	3.23718236e-05

Tabelle H.4: $Q^2 \equiv 2$ **GeV^2, Longitudinal** L

0.000	2.02129786e-03				
0.010	1.77090867e-03	0.210	2.22498737e-04	0.410	5.34890693e-05
0.020	1.55661544e-03	0.220	2.04968715e-04	0.420	5.02484194e-05
0.030	1.37263240e-03	0.230	1.89097499e-04	0.430	4.72315624e-05
0.040	1.21417300e-03	0.240	1.74700230e-04	0.440	4.44205744e-05
0.050	1.07726789e-03	0.250	1.61615548e-04	0.450	4.17992124e-05
0.060	9.58617294e-04	0.260	1.49702275e-04	0.460	3.93527340e-05
0.070	8.55471207e-04	0.270	1.38836609e-04	0.470	3.70677397e-05
0.080	7.65531970e-04	0.280	1.28909747e-04	0.480	3.49320322e-05
0.090	6.86874917e-04	0.290	1.19825852e-04	0.490	3.29344931e-05
0.100	6.17883635e-04	0.300	1.11500336e-04	0.500	3.10649727e-05
0.110	5.57197021e-04	0.310	1.03858381e-04	0.510	2.93141927e-05
0.120	5.03665934e-04	0.320	9.68336763e-05	0.520	2.76736598e-05
0.130	4.56317612e-04	0.330	9.03673387e-05	0.530	2.61355883e-05
0.140	4.14326408e-04	0.340	8.44069769e-05	0.540	2.46928321e-05
0.150	3.76989687e-04	0.350	7.89058907e-05	0.550	2.33388224e-05
0.160	3.43707906e-04	0.360	7.38223760e-05	0.560	2.20675141e-05
0.170	3.13968145e-04	0.370	6.91191245e-05	0.570	2.08733364e-05
0.180	2.87330439e-04	0.380	6.47627021e-05	0.580	1.97511493e-05
0.190	2.63416417e-04	0.390	6.07230961e-05	0.590	1.86962040e-05
0.200	2.41899848e-04	0.400	5.69733201e-05	0.600	1.77041082e-05

Tabelle H.5: $Q^2 \equiv 2$ **GeV^2, Transversal** T

0.000 6.16024923e-05		
0.010 5.60887190e-05	0.210 1.20053286e-05	0.410 4.01311705e-06
0.020 5.11587136e-05	0.220 1.12724006e-05	0.420 3.82584197e-06
0.030 4.67435602e-05	0.230 1.05955251e-05	0.430 3.64909662e-06
0.040 4.27831088e-05	0.240 9.96956199e-06	0.440 3.48216371e-06
0.050 3.92247972e-05	0.250 9.38990587e-06	0.450 3.32438505e-06
0.060 3.60226369e-05	0.260 8.85242576e-06	0.460 3.17515588e-06
0.070 3.31363419e-05	0.270 8.35341150e-06	0.470 3.03391990e-06
0.080 3.05305776e-05	0.280 7.88952688e-06	0.480 2.90016477e-06
0.090 2.81743137e-05	0.290 7.45776835e-06	0.490 2.77341802e-06
0.100 2.60402658e-05	0.300 7.05542854e-06	0.500 2.65324348e-06
0.110 2.41044131e-05	0.310 6.68006416e-06	0.510 2.53923798e-06
0.120 2.23455813e-05	0.320 6.32946760e-06	0.520 2.43102838e-06
0.130 2.07450819e-05	0.330 6.00164179e-06	0.530 2.32826895e-06
0.140 1.92863997e-05	0.340 5.69477797e-06	0.540 2.23063895e-06
0.150 1.79549213e-05	0.350 5.40723602e-06	0.550 2.13784048e-06
0.160 1.67377003e-05	0.360 5.13752689e-06	0.560 2.04959652e-06
0.170 1.56232520e-05	0.370 4.88429718e-06	0.570 1.96564916e-06
0.180 1.46013764e-05	0.380 4.64631521e-06	0.580 1.88575802e-06
0.190 1.36630025e-05	0.390 4.42245883e-06	0.590 1.80969876e-06
0.200 1.28000534e-05	0.400 4.21170439e-06	0.600 1.73726184e-06

Tabelle H.6: $\boldsymbol{Q^2 \equiv 10\ \mathrm{GeV}^2}$, **Longitudinal** $\boldsymbol{L}$

0.000 2.92440654e-05		
0.010 2.59554310e-05	0.210 3.78469324e-06	0.410 9.70203542e-07
0.020 2.30953945e-05	0.220 3.50098107e-06	0.420 9.13869085e-07
0.030 2.06019958e-05	0.230 3.24279016e-06	0.430 8.61294471e-07
0.040 1.84229203e-05	0.240 3.00742650e-06	0.440 8.12188287e-07
0.050 1.65139133e-05	0.250 2.79251859e-06	0.450 7.66285501e-07
0.060 1.48374659e-05	0.260 2.59597495e-06	0.460 7.23344736e-07
0.070 1.33617239e-05	0.270 2.41594761e-06	0.470 6.83145853e-07
0.080 1.20595821e-05	0.280 2.25080083e-06	0.480 6.45487815e-07
0.090 1.09079301e-05	0.290 2.09908408e-06	0.490 6.10186781e-07
0.100 9.88702368e-06	0.300 1.95950883e-06	0.500 5.77074413e-07
0.110 8.97996045e-06	0.310 1.83092844e-06	0.510 5.45996369e-07
0.120 8.17224132e-06	0.320 1.71232080e-06	0.520 5.16810959e-07
0.130 7.45140344e-06	0.330 1.60277326e-06	0.530 4.89387941e-07
0.140 6.80671240e-06	0.340 1.50146954e-06	0.540 4.63607458e-07
0.150 6.22890363e-06	0.350 1.40767839e-06	0.550 4.39359059e-07
0.160 5.70996488e-06	0.360 1.32074363e-06	0.560 4.16540856e-07
0.170 5.24295289e-06	0.370 1.24007555e-06	0.570 3.95058738e-07
0.180 4.82183861e-06	0.380 1.16514332e-06	0.580 3.74825686e-07
0.190 4.44137634e-06	0.390 1.09546840e-06	0.590 3.55761145e-07
0.200 4.09699284e-06	0.400 1.03061871e-06	0.600 3.37790464e-07

Tabelle H.7: $\boldsymbol{Q^2 \equiv 10\ \mathrm{GeV}^2}$, **Transversal** $\boldsymbol{T}$

0.000 1.11297837e-05		
0.010 1.01496441e-05	0.210 2.22881968e-06	0.410 7.59904389e-07
0.020 9.27187095e-06	0.220 2.09495961e-06	0.420 7.25145406e-07
0.030 8.48453016e-06	0.230 1.97121670e-06	0.430 6.92317783e-07
0.040 7.77718752e-06	0.240 1.85667284e-06	0.440 6.61290984e-07
0.050 7.14070954e-06	0.250 1.75050448e-06	0.450 6.31945138e-07
0.060 6.56709163e-06	0.260 1.65197204e-06	0.460 6.04170040e-07
0.070 6.04931011e-06	0.270 1.56041054e-06	0.470 5.77864252e-07
0.080 5.58119448e-06	0.280 1.47522137e-06	0.480 5.52934290e-07
0.090 5.15731719e-06	0.290 1.39586500e-06	0.490 5.29293904e-07
0.100 4.77289835e-06	0.300 1.32185463e-06	0.500 5.06863420e-07
0.110 4.42372321e-06	0.310 1.25275047e-06	0.510 4.85569154e-07
0.120 4.10607082e-06	0.320 1.18815477e-06	0.520 4.65342877e-07
0.130 3.81665212e-06	0.330 1.12770734e-06	0.530 4.46121341e-07
0.140 3.55255618e-06	0.340 1.07108167e-06	0.540 4.27845843e-07
0.150 3.31120360e-06	0.350 1.01798141e-06	0.550 4.10461835e-07
0.160 3.09030590e-06	0.360 9.68137260e-07	0.560 3.93918573e-07
0.170 2.88783022e-06	0.370 9.21304239e-07	0.570 3.78168795e-07
0.180 2.70196853e-06	0.380 8.77259219e-07	0.580 3.63168430e-07
0.190 2.53111084e-06	0.390 8.35798738e-07	0.590 3.48876341e-07
0.200 2.37382167e-06	0.400 7.96737050e-07	0.600 3.35254083e-07

Tabelle H.8: $Q^2 \equiv 20$ **GeV^2, Longitudinal** L

0.000 3.30935940e-06		
0.010 2.95953587e-06	0.210 4.74552183e-07	0.410 1.27583573e-07
0.020 2.65248305e-06	0.220 4.40283149e-07	0.420 1.20413987e-07
0.030 2.38241312e-06	0.230 4.08987403e-07	0.430 1.13709467e-07
0.040 2.14438024e-06	0.240 3.80362491e-07	0.440 1.07434867e-07
0.050 1.93415128e-06	0.250 3.54140738e-07	0.450 1.01558146e-07
0.060 1.74809723e-06	0.260 3.30084867e-07	0.460 9.60500567e-08
0.070 1.58310195e-06	0.270 3.07984209e-07	0.470 9.08838670e-08
0.080 1.43648518e-06	0.280 2.87651424e-07	0.480 8.60351113e-08
0.090 1.30593780e-06	0.290 2.68919649e-07	0.490 8.14813694e-08
0.100 1.18946704e-06	0.300 2.51640035e-07	0.500 7.72020699e-08
0.110 1.08535027e-06	0.310 2.35679592e-07	0.510 7.31783137e-08
0.120 9.92095832e-07	0.320 2.20919321e-07	0.520 6.93927169e-08
0.130 9.08409913e-07	0.330 2.07252576e-07	0.530 6.58292697e-08
0.140 8.33168357e-07	0.340 1.94583643e-07	0.540 6.24732109e-08
0.150 7.65392776e-07	0.350 1.82826488e-07	0.550 5.93109134e-08
0.160 7.04230190e-07	0.360 1.71903666e-07	0.560 5.63297834e-08
0.170 6.48935694e-07	0.370 1.61745361e-07	0.570 5.35181688e-08
0.180 5.98857660e-07	0.380 1.52288544e-07	0.580 5.08652767e-08
0.190 5.53425092e-07	0.390 1.43476232e-07	0.590 4.83610997e-08
0.200 5.12136813e-07	0.400 1.35256832e-07	0.600 4.59963483e-08

Tabelle H.9: $Q^2 \equiv 20$ **GeV^2, Transversal** T

Literaturverzeichnis

[1] Abers, E.S. und Lee, B.W., „Gauge theories“, Phys. Rep. **C9** (1973) 1.

[2] Abramowitz, M. und Stegun, I.A. (Hrsg.), „Pocketbook of mathematical functions, abridged edition of Handbook of mathematical functions“, Verlag Harri Deutsch, 1. Aufl., Thun und Frankfurt/Main 1984.

[3] Alvarez-Gaumé, L. und Hassan, S.F., [hep-th/9701069:] „Introduction to S-Duality in $\mathcal{N}=2$ supersymmetric gauge theory (A pedagogical review of the work of Seiberg and Witten)“, Fortsch. Phys. **45** (1997) 159.

[4] Alvarez-Gaumé, L., Marino, M. und Zamora, F., [hep-th/9703072 & hep-th/9707017:] „Softly broken $\mathcal{N}=2$ QCD with massive quark hypermultiplets, I & II“, Int. J. Mod. Phys. **A13** (1998) 403 & 1847.

[5] Alvarez-Gaumé, L. und Zamora, F., hep-th/9709180: „Duality in quantum field theory (and string theory)“, CERN Report TH-97-257.

[6] Alvarez-Gaumé, L., Vorlesung im *Graduiertenkolleg Physikalische Systeme mit vielen Freiheitsgraden*, Heidelberg Okt. 1997, unveröffentlicht.

[7] Amaldi, U. und Schubert, K.R., „Impact parameter interpretation of proton-proton scattering from a critical review of all ISR data“, Nucl. Phys. **B166** (1980) 301.

[8] Antonov, D.V. und Simonov, Y.A., [hep-th/9507254:] „Exact equations for vacuum correlators in field theory“, Phys. Atom. Nucl. **60** (1997) 478.

[9] Aref'eva, I.Y., „Non-Abelian Stokes formula“, Theor. Math. Phys. **43** (1980) 353.

[10] Aref'eva, I.Y., „Large-N QCD at high energies as two-dimensional field theory“, Phys. Lett. **B328** (1994) 411.

[11] OMEGA-SPS, CERN: Aston, D. et al., „Observation of the $\rho'(1600)$ in the channel $\gamma p \to \pi^+\pi^- p$“, Phys. Lett. **B92** (1980) 215.

[12] OMEGA-SPS, CERN: Aston, D. et al., „The reaction $\gamma p \to \pi^+\pi^-\pi^+\pi^- p$ for photon energies from 25 to 70 GeV“, Nucl. Phys. **B189** (1981) 15.

[13] OMEGA-SPS, CERN: Aston, D. et al., „Photoproduction of ρ^0 and ω on hydrogen at photon energies of 20 to 70 GeV“, Nucl. Phys. **B209** (1982) 56.

[14] OPC-Kollab.: Atkinson, M. et al., „Study of $\eta\pi^+\pi^-$ states in the $\rho'(1600)$ mass region photoproduced in the reaction $\gamma p \to \eta\pi^+\pi^- p$ at photon energies of 20 to 70 GeV“, Z. Phys. **C30** (1986) 531.

[15] OLYA- UND CMD-DETEKT. AM VEPP-2M-BECHL., NOVOSIBIRSK: BARKOV, L.M. ET AL., „Electromagnetic pion form factor in the timelike region", Nucl. Phys. **B256** (1985) 365.

[16] BECCHI, C., ROUET, A. UND STORA, R., „The Abelian Higgs Kibble model, unitarity of the S-operator", Phys. Lett. **B52** (1974) 344.

[17] BECCHI, C., ROUET, A. UND STORA, R., „Renormalization of gauge theories", Ann. Phys. **98** (1976) 287.

[18] BECCHI, C. UND IMBIMBO, C., in *BRS symmetry*, S. 265, Hrsg. M. Abe et al., Universal Acad. Press, Tokyo 1996.

[19] BEIGLBÖCK, W., „Differentialgeometrie für Physiker", Univ. Heidelberg, Kursvorlesung WS 1994/95, unveröffentlicht.

[20] BELAVIN, A.A., POLYAKOV, A.M., SCHWARTZ, A.S. AND TYUPKIN, Y.S., „Pseudoparticle solutions of the Yang-Mills-equations", Phys. Lett. **B59** (1975) 85.

[21] BERGER, E.R. UND NACHTMANN, O., [hep-ph/9808320:] „Differential cross sections for high energy elastic hadron-hadron scattering in nonperturbative QCD", Eur. Phys. J. **C7** (1999) 459.

[22] BERGSTRØM, L., SNELLMAN, H. UND TENGSTRAND, G., „On the decay of ψ mesons in charmonium modells", Phys. Lett. **B80** (1979) 242.

[23] BINKLEY, M. ET AL., „J/ψ photoproduction from 60 to 300 GeV/c", Phys. Rev. Lett. **48** (1982) 73.

[24] DM2-DETEKT., ORSAY: BISELLO, D. ET AL., ORSAY-Report LAL-85-15 (1985), zitiert von Donnachie, Mirzaie in Ref. [55].

[25] BJORKEN, J., „Asymptotic sum rules at infinite momentum", Phys. Rev. **179** (1969) 1547.

[26] BJORKEN, J.D., KOGUT, J.B. UND SOPER, D.E., „Quantum Electrodynamics at infinite momentum: Scattering from an external field", Phys. Rev. **D3** (1971) 1382.

[27] BLEULER, K., „Eine neue Methode zur Behandlung der longitudinalen und skalaren Photonen", Helv. Phys. Acta **23** (1950) 567.

[28] BOGOLJUBOV, N.N., ŠIRKOV, D.V., „Quantenfelder", Lizenzausgabe des Physik-Verlages, D-6940 Weinheim, VEB © Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1984.

[29] BOGOLUBOV, N.N., LOGUNOV, A.A., OKSAK, A.I. UND TODOROV, I.T., „General principles of quantum field theory", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Niederlande 1990.

[30] BRALIĆ, N.E., „Exact computation of loop averages in two-dimensional Yang-Mills theory", Phys. Rev. **D22** (1980) 3090.

[31] BRODSKY, S.J., HUANG, T. UND LEPAGE, G.P., „Hadronic wavefunctions and high momentum transfer interactions in Quantum Chromodynamics", in *Particles and fields 2* (Banff Summer Institute, Banff, Alberta, Kanada Aug. 1981), S. 143, Hrsg. A.Z. Capri et al., Plenum Press, New York und London 1981.

[32] BRODSKY, S.J. , FRANKFURT, L., GUNION, J.F., MUELLER, A.H. UND STRIKMAN, M., [hep-ph/9402283:] „Diffractive leptoproduction of vector mesons in QCD“, Phys. Rev. **D50** (1994) 3134.

[33] CALLAN, C.G. UND GROSS, D.J., „High-energy electroproduction and the constitution of the electric current“, Phys. Rev. Lett. **22** (1968) 156.

[34] CALLAN, C.G., DASHEN, R. UND GROSS, D.J., „Towards a theory of the strong interactions“, Phys. Rev. **D17** (1978) 2717.

[35] CAMPOSTRINI, M., DI GIACOMO, A., MAGGIORE, M., PANAGOPOULOS, H. UND VICARI, E., „Cooling and the string tension in lattice gauge theories“, Phys. Lett. **B225** (1989) 403.

[36] CARDELLI, F., GRACH, I.L., NARODETSKII, I.M., SALME, G. UND SIMULA, S., [hep-ph/9502360:] „Electromagnetic form factors of the ρ meson in a light-front constituent quark model“, Phys. Lett. **B349** (1995) 393.

[37] CHENG, H. UND WU, T.T., „Expanding protons: scattering at high energies“, MIT Press, Cambridge, Mass. 1987.

[38] CHENG, T.-P. UND LI, L.-F., „Gauge theory of elementary particle physics“, Oxford Univ. Press, 6. Aufl., Oxford 1994.

[39] CLEGG, A.B. UND DONNACHIE, A., „Higher vector meson states produced in electron-positron annihilation“, Z. Phys. **C62** (1994) 455.

[40] CLOSE, F.E. UND PAGE, P.R., [hep-ph/9411301:] „The production and decay of hybrid mesons by flux tube breaking“, Nucl. Phys. **B443** (1995) 233.

[41] CLOSE, F.E. UND PAGE, P.R., [hep-ph/9701425:] „Distinguishing hybrids from radial quarkonia“, Phys. Rev. **D56** (1997) 1584.

[42] COLEMAN, S. UND GROSS, D.J., „Price of asymptotic freedom“, Phys. Rev. Lett. **31** (1973) 851.

[43] DM1 ORSAY: CORDELIER, A. ET AL., „Study of the $e^+e^- \to \pi^+\pi^-\pi^+\pi^-$ reaction in the 1.4$-$2.18 GeV energy range“, Phys. Lett. **109B** (1982) 129.

[44] CVITANOVIĆ, P., „Group theory for Feynman diagrams in non-Abelian gauge theories“, Phys. Rev. **D14** (1976) 1536.

[45] DAVIER, M., hep-ph/9812370: „Evaluation of $\alpha(M_Z^2)$ and $(g-2)_\mu$“.

[46] D'ELIA, M., DI GIACOMO, A. UND MEGGIOLARO, E., [hep-lat/9705032:] „Field strength correlators in full QCD“, Phys. Lett. **B408** (1997) 315.

[47] D'ELIA, M., DI GIACOMO, A. UND MEGGIOLARO, E., „Gauge-invariant field strength correlators in full QCD“, in *QCD 97, Proc. QCD 97 euroconference* (Montpellier Jul. 1997), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **64** (1998) 316.

[48] D'ELIA, M., DI GIACOMO, A. UND MEGGIOLARO, E., [hep-lat/9709031:] „Field strength correlators in QCD with dynamical fermions“, in *Lattice 97, Proc. XVth International symposium on lattice field theory* (Edinburg Jul. 1997), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **63A-C** (1998) 465.

[49] DEWITT, B.S., „Dynamical theory of groups and fields“, S. 587, in *Relativity, groups, and topology: Lectures presented at the Les Houches summer school 64*, Hrsg. B.S. DeWitt, Gordon and Breach, New York 1965.

[50] DI GIACOMO, A., MAGGIORE, M. UND OLEJNIK, Š., „Evidence for flux tubes from cooled QCD configurations“, Phys. Lett. **B236** (1990) 199.

[51] DI GIACOMO, A. UND PANAGOPOULOS, H., „Field strength correlations in the QCD vacuum“, Phys. Lett. **B285** (1992) 133.

[52] DI GIACOMO, A., MEGGIOLARO, E. UND PANAGOPOULOS, H., hep-lat/9603017: „Field strength correlations in the QCD vacuum at short distances“, IFUP Univ. Pisa Report TH96-12.

[53] DIÓSI, L., „Comments on the non-Abelian Stokes theorem“, Phys. Rev. **D27** (1983) 2552.

[54] DONNACHIE, A. UND LANDSHOFF, P.V., „Exclusive rho production in deep inelastic scattering“, Phys. Lett. **B185** (1987) 403.

[55] DONNACHIE, A. UND MIRZAIE, H., „Evidence for two $\rho'(1600)$ resonances“, Z. Phys. **C33** (1987) 407.

[56] DONNACHIE, A. UND LANDSHOFF, P.V., [hep-ph/9209205:] „Total cross sections“, Phys. Lett. **B296** (1992) 227.

[57] DONNACHIE, A. UND LANDSHOFF, P.V., [hep-ph/9411368:] „Exclusive vector meson production at HERA“, Phys. Lett. **B348** (1995) 213.

[58] DONNACHIE, A. UND LANDSHOFF, P.V., [hep-ph/9806344:] „Small x: Two pomerons!“, Phys. Lett. **B437** (1998) 408.

[59] DONNACHIE, A. UND KALASHNIKOVA, Y.S., hep-ph/9901334: „Hunting the vector hybrid“.

[60] DOSCH, H.G., „Gluon condensate and effective linear potential“, Phys. Lett. **B190** (1987) 177.

[61] DOSCH, H.G. UND SIMONOV, Y.A., „The area law of the Wilson loop and vacuum field correlators“, Phys. Lett. **B205** (1988) 339.

[62] DOSCH, H.G., „Nonperturbative methods in Quantum Chromodynamics“, Progr. in Part. and Nucl. Phys. **33** (1994) 121.

[63] DOSCH, H.G., FERREIRA, E. UND KRÄMER, A., [hep-ph/9405237:] „Non-perturbative QCD treatment of high-energy hadron-hadron scattering“, Phys. Rev. **D50** (1994) 1992.

[64] DOSCH, H.G., NACHTMANN, O. UND RUETER, M., hep-ph/9503386:, „String formation in the Model of the Stochastic Vacuum and consistency with low energy theorems“.

[65] DOSCH, H.G., GOUSSET, T., KULZINGER, G. UND PIRNER, H.J., [hep-ph/9608203:] „Vector meson leptoproduction and nonperturbative gluon fluctuations in QCD“, Phys. Rev. **D55** (1997) 2602.

[66] DOSCH, H.G., GOUSSET, T. UND PIRNER, H.J., [hep-ph/9707264:] „Nonperturbative $\gamma^* p$ interaction in the diffractive regime“, Phys. Rev. **D57** (1998) 1666.

[67] DRELL, S.D., „Production of particle beams at very high energies“, Phys. Rev. Lett. **5** (1960) 278.

[68] DYAKONOV, D.I. UND PETROV, V.Y., „Instanton-based vacuum from the Feynman variational principle“, Nucl. Phys. **B245** (1984) 259.

[69] EUROPEAN MUON COLLAB. (EMC): AUBERT, J.J. ET AL., „Production of charmonium in 250 GeV μ^+-iron interactions“, Nucl. Phys. **B213** (1983) 1.

[70] FABBRICHESI, M., PETTORINO, R., VENEZIANO, G. UND VILKOVISKY, G.A., [hep-th/9309037:] „Planckian energy scattering and surface terms in the gravitational action“, Nucl. Phys. **B419** (1994) 147.

[71] FADDEEV, L.D. UND POPOV, V.N., „Feynman diagrams for the Yang-Mills field“, Phys. Lett. **B25** (1967) 29.

[72] FADDEEV, L.D., Theor. and Math. Phys. **1** (1969) 1.

[73] FERMILAB E665-KOLLAB.: ADAMS, M.R. ET AL., „Measurement of nuclear transparencies from exclusive ρ^0 meson production in muon-nucleus scattering at 470 GeV“, Phys. Rev. Lett. **74** (1995) 1525.

[74] SALGADO, C.W. für die FERMILAB E665-KOLLAB., „Nuclear effects in vector meson production off nuclei at Fermilab E-665“, Vortrag zu *CEBAF workshop on colour transparency*, CEBAF, Mai 1995.

[75] FERMILAB E665-KOLLAB.: ADAMS, M.R. ET AL., „Proton and deuteron structure functions in muon scattering at 470 GeV“, Phys. Rev. **D54** (1996) 3006.

[76] FERMILAB E665-KOLLAB.: ADAMS, M.R. ET AL., „Diffractive production of $\rho^0(770)$ mesons in muon-proton interactions at 470 GeV“, Z. Phys. **C74** (1997) 237.

[77] FERMILAB E687-KOLLAB.: LEBRUN, P. ET AL., in *Hadron 97, Proc. 7th International conference on hadron spectroscopy*, (Brookhaven National Laboratory, Upton, Long Island, New York Aug. 1997).

[78] FEYNMAN, R.P., „Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics“, Rev. Mod. Phys. **20** (1948) 367.

[79] FEYNMAN, R.P., „Mathematical formulation of the quantum theory of electromagnetic interaction“, Phys. Rev. **80** (1950) 440.

[80] FEYNMAN, R.P., in *The quantum theory of fields – The 12th Solvay conference*, Interscience, New York 1961.

[81] FEYNMAN, R.P., „Quantum theory of gravitation“, Acta Physica Polonica, **24** (1963) 697.

[82] FEYNMAN, R.P., „Very high-energy collisions of hadrons“, Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 1415.

[83] FIELD, R.D., *Frontiers in physics*: „Applications of perturbative QCD“, 3. Aufl., Addison-Wesley Publishing Company 1995.

[84] FISHBANE, P.M., GASIOROWICZ, S. UND KAUS, P., „Stokes's theorems for non-Abelian fields“, Phys. Rev. **D24** 2324.

[85] FORSTER, O., „Analysis 1 – Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen“, Friedr. Vieweg & Sohn, 4. Aufl., Braunschweig und Wiesbaden 1988.

[86] FORSTER, O., „Analysis 3 – Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$ mit Anwendungen“, Friedr. Vieweg & Sohn, 6. Aufl., Braunschweig und Wiesbaden 1996.

[87] FRADKIN, E.S., in Proc. *International winter school on theoretical physics*, (JINR, Dubna 1964), Acta Phys. Hung. **19** (1996) 175.

[88] GELL-MANN, M., „The eightfold way: A theory of strong interaction symmetry“, CalTech Synchroton Laboratory Report CTSL-20 (1961), unpubliziert.

[89] GELL-MANN, M. UND NE'EMAN, Y., „The eightfold way“, W.A. Benjamin, New York und Amsterdam 1964.

[90] GELL-MANN, M., „The symmetry group of vector and axial vector currents“, Physics **1** (1964) 63.

[91] GELL-MANN, M., „A schematic model of baryons and mesons“, Phys. Lett. **8** (1964) 214.

[92] GELL-MANN, M., „Current algebra: quarks and what else“, in Proc. *ICHEP, XVIth International conference on high energy physics*, **4** (1972) 135.

[93] GLASHOW, S.L., „Partial-symmetries of weak interactions“, Nucl. Phys. **22** (1961) 579.

[94] GODFREY, S. UND ISGUR, N., „Mesons in a relativized quark model with chromodynamics“, Phys. Rev. **D32** (1985) 189.

[95] GOLDSTONE, J., „Field theories with 'superconductor' solutions“, Nuovo Cimento **19** (1961) 154.

[96] GRADSTEIN, I.S. UND RYSHIK, I.M., „Summen-, Produkt- und Integral-TAFELN * TABLES of series, products, and integrals“, Bde. 1 und 2, Verlag Harri Deutsch, 1. Aufl., Thun und Frankfurt/Main 1981.

[97] GRAWERT, G., „Quantenmechanik“, Aula-Verlag 1989.

[98] GREEN, M.B., SCHWARZ, J.H. UND WITTEN, E., „Superstring theory, vol. 1 Introduction & vol. 2 Loop amplitudes, anomalies and phenomenology“ Cambridge Univ. Press, 9. Aufl., Cambridge 1995 & 1996.

[99] GRIBOV, V.N., „Quantization of non-Abelian gauge theories“, Nucl. Phys **B139** (1978) 1.

[100] GROSS, D.J. UND WILCZEK, F., „Ultraviolet behavior of non-Abelian gauge theories“, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1343.

[101] GROSS, D.J. UND WILCZEK, F., „Asymptotically free gauge theories, I & II“, Phys. Rev. **D8** (1973) 3633 und ebenda **D9** (1974) 980.

[102] GROSS, D.J. UND OOGURI, H., [hep-th/9805129:] „Aspects of large N gauge theory dynamics as seen by string theory“, Phys. Rev. **D58** (1998) 106002.

[103] GROSS, D.J., „Can string theory help to solve QCD?“, Vortrag zu *QCD 98, Proc. QCD 98 euroconference* (Montpellier Jul. 1998), unveröffentlicht.

[104] GROSS, D.J., [hep-th/9809060:] „Twenty five years of asymptotic freedom“, in *QCD 98, Proc. QCD 98 euroconference* (Montpellier Jul. 1998), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **74** (1999) 426.

[105] GUNION, J.F. UND SOPER, D.E., „Quark-counting and hadron-size effects for total cross sections“, Phys. Rev. **D15** (1977) 2617.

[106] GUPTA, S.N., „Theory of longitudinal photons in Quantum Electrodynamics“, Proc. Phys. Soc. London **A63** (1950) 681.

[107] GURALNIK, G.S., HAGEN, C.R. UND KIBBLE, T.W.B., „Global conservation laws and massless particles“, Phys. Rev. Lett. **13** (1965) 585.

[108] H1-KOLLAB., „Elastic ρ' electroproduction at high Q^2“, Report pa01-088, in Proc. *ICHEP 96, 28th International conference on high energy physics*, (Warschau, Polen Jul. 1996).

[109] HASERT, F.J. ET AL., siehe Ref. [147] unter *Hasert 1973a*, *Hasert 1973b* und *Hasert 1974*.

[110] HEISENBERG, W., „Über den Bau der Atomkerne. I.“, Z. Phys. **77** (1932) 1.

[111] HIGGS, P.W., „Broken symmetries, massless particles and gauge fields“, Phys. Lett. **12** (1964) 132.

[112] HIGGS, P.W., „Broken symmetries and the masses of gauge bosons“, Phys. Rev. Lett. **13** (1964) 508.

[113] HIGGS, P.W., „Spontaneous symmetry breakdown without massless bosons“, Phys. Rev. **145** (1966) 1156.

[114] ITZYKSON, C. UND ZUBER, J.-B., „Quantum field theory“, McGraw-Hill, 4. Aufl., New York 1988.

[115] KIBBLE, T.W.B., „Symmetry breaking in non-Abelian gauge theories“, Phys. Rev. **155** (1967) 1554.

[116] KLINGMANN, M., „Differentialgeometrie I & II“, Univ. Heidelberg, Kursvorlesung SS 1993 & WS 1993/94, unveröffentlicht.

[117] KLINGMANN, M., „Liegruppen“, Univ. Heidelberg, Kursvorlesung WS 1994/95, unveröffentlicht.

[118] KOPELIOVICH, B.Z. UND ZAKHAROV, B.G., „Quantum effects and color transparency in charmonium photoproduction on nuclei“, Phys. Rev. **D44** (1991) 3466.

[119] KOPELIOVICH, B.Z., NEMCHICK, J., NIKOLAEV, N.N. UND ZAKHAROV, B.G., [hep-ph/9305225:] „Novel color transparency effect: scanning the wave function of vector mesons“, Phys. Lett. **B309** (1993) 179.

[120] KORCHEMSKAYA, I.A. UND KORCHEMSKY, G.P., „High-energy scattering in QCD and cross singularities of Wilson-loops“, Nucl. Phys. **B437** (1995) 127.

[121] KORCHEMSKY, G.P., „On near-forward high-energy scattering in QCD“, Phys. Lett. **B325** (1994) 459.

[122] KRÄMER, A., „Nichtperturbative Effekte in elastischer Hadron-Hadron-Streuung“, Dissertation an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1991.

[123] KUGO, T., „Eichtheorie“, Springer, 1. Aufl., Berlin und Heidelberg 1997.

[124] KULZINGER, G., „Das Modell des Stochastischen Vakuums mit Blick auf nichtperturbative Streubeiträge“, Diplomarbeit an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1995.

[125] KULZINGER, G., DOSCH, H.G. UND PIRNER, H.J., [hep-ph/9806352:] „Diffractive photo- and leptoproduction of vector mesons ρ, ρ' and ρ''“, Eur. Phys. J. **C7** (1999) 73.

[126] KULZINGER, G., [hep-ph/9808440:] „Exclusive production of vector mesons ρ, ρ' and ρ'' by real and virtual photons“, in *QCD 98, Proc. QCD 98 euroconference* (Montpellier Jul. 1998), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **74** (1999) 91.

[127] KULZINGER, G., [hep-ph/9901313:] „Vector mesons ρ, ρ' and ρ'' diffractively photo- and leptoproduced“, in Proc. *Nuclear & particle physics with CEBAF at Jefferson Lab* (Dubrovnik, Kroatien Nov. 1998), Fizika **B8** (1999) 375.

[128] KULZINGER, G. UND DOSCH, H.G., „High-energy Wegner-Wilson loop scattering in the nonperturbative vacuum of QCD: analytical T-amplitude“, in Vorber.

[129] NOVOSIBIRSK: KURDADZE, L.M. ET AL., Novosibirsk-Report 79-69, zitiert von B. Delcourt in ISLEPHI, S. 205, Hrsg. W. Pfeil, Universität Bonn, 1981.

[130] LANDAU, L.D. UND POMERANCHUK, I., Dokl. Akad. Nauk. UdSSR **102** (1955) 489.

[131] LANDAU, L.D., in *Niels Bohr and the developement of physics*, S. 52, Hrsg. W. Pauli, Pergamon Press, London 1955.

[132] LANDAU, L.D. UND LIFSCHITZ, E.M., „Lehrbuch der Theoretischen Physik: III, Quantenmechanik“, Akademie-Verlag, Berlin 1986.

[133] LAVELLE, M. UND MCMULLAN, D., [hep-th/9509344:] „Constituent quarks from QCD“, Phys. Rep. **C279** (1997) 1.

[134] LEE, B.W. UND ZINN-JUSTIN, J., „Spontaneously broken gauge symmetries, I- IV“, Phys. Rev. **D5** (1972) 3121, 3137 & 3155 und ebenda **D7** (1973) 1049.

[135] LEPAGE, G.P. UND BRODSKY, S.J., „Exclusive processes in perturbative Quantum Chromodynamics“, Phys. Rev. **D22** (1980) 2157.

[136] LERCHE, W., [hep-th/9611190:] „Introduction to Seiberg-Witten theory and its stringy origin“, in *String theory, gauge theory and quantum gravity, Proc. Trieste spring school and workshop* (ICTP, Triest März 1996), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **55B** (1997) 83 und Fortsch. Phys. **45** (1997) 293.

[137] LIPATOV, L.N., in *Review in perturbative QCD*, Hrsg. A.H. Mueller, World Scientific, Singapur 1989.

[138] MALDACENA, J., [hep-th/9711200:] „The large N limit of superconformal field theories and supergravity“, Adv. Theor. Math. Phys. **2** (1998) 231.

[139] MARQUARD, U. UND DOSCH, H.G., „Potential sum rule approach in QCD“, Phys. Rev. **D35** (1987) 2238.

[140] MEGGIOLARO, E., [hep-th/9506043:] „A remark on the high-energy quark-quark scattering and the eikonal approximation“, Phys. Rev. **D53** (1996) 3835.

[141] MEGGIOLARO, E., [hep-th/9602104:] „The high-energy quark-quark scattering: from Minkowskian to Euclidean theory“, Z. Phys. **C76** (1997) 523.

[142] MEGGIOLARO, E., [hep-th/9702104:] „The analytic continuation of the high-energy quark-quark scattering amplitude“, Eur. Phys. J. **C4** (1998) 101.

[143] MEGGIOLARO, E., [hep-th/9709045:] „High-energy quark-quark scattering and the Eikonal approximation“, in *QCD 97, Proc. QCD 97 euroconference* (Montpellier Jul. 1997), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **64** (1998) 191.

[144] MORGUNOV, V.L., SHEVCHENKO, V.I. UND SIMONOV, Y.A., hep-ph/9704282: „The light-cone nonperturbative dynamics of meson wave functions“, ITEP-Report TH97-3, subm. an Phys. Rev. **D**.

[145] MUELLER, A.H. UND PATEL, B., [hep-ph/9403256:] „Single and double BFKL pomeron exchange and a dipole picture of high energy hard processes“, Nucl. Phys. **B425** (1994) 471.

[146] NACHTMANN, O., „Considerations concerning diffraction scattering in Quantum Chromodynamics“, Ann. Phys. **209** (1991) 436.

[147] NACHTMANN, O., „Phänomene und Konzepte der Elementarteilchenphysik“, Friedr. Vieweg & Sohn, 3. Aufl., Braunschweig und Wiesbaden 1992.

[148] NACHTMANN, O., hep-ph/9609365: „High energy collisions and nonperturbative QCD“, Vorlesungen zu *Topics in field theory* (Banz, Deutschland 1993) und *35. Internationale Universitätswochen für Kern- und Teilchenphysik 1996* (Schladming, Österreich 1996).

[149] NE'EMAN, Y., „Derivation of strong interactions from a gauge invariance“, Nucl. Phys **26** (1961) 222.

[150] NEMCHICK, J., NIKOLAEV, N.N. UND ZAKHAROV, B.G., [hep-ph/9405355:] „Scanning the BFKL pomeron in elastic production of vector mesons at HERA“, Phys. Lett. **B341** (1994) 228.

[151] NEMCHICK, J., NIKOLAEV, N.N. PREDAZZI, E. UND ZAKHAROV, B.G., [hep-ph/9604419:] „Color dipole systematics of diffractive photo- and leptoproduction of vector mesons“, Phys. Lett. **B374** (1996) 199.

[152] NEMCHICK, J., NIKOLAEV, N.N. PREDAZZI, E. UND ZAKHAROV, B.G., [hep-ph/9605231:] „Color dipole phenomenology of diffractive electroproduction of light vector mesons at HERA“, Z. Phys. **C75** (1997) 71.

[153] NIKOLAEV, N.N. UND ZAKHAROV, B.G., „Colour transparency and scaling properties of nuclear shadowing in deep inelastic scattering“, Z. Phys. **C49** (1991) 607.

[154] NIKOLAEV, N.N. UND ZAKHAROV, B.G., [hep-ph/9306230:] „The triple-pomeron regime and the structure function of the pomeron in the diffractive deep inelastic scattering at very small x“, Z. Phys. **C64** (1994) 631.

[155] NEMCHICK, J., NIKOLAEV, N.N. PREDAZZI, E., ZAKHAROV, B.G. UND ZOLLER, V.R., [hep-ph/9712469:] „The diffraction cone for exclusive vector meson production in deep inelastic scattering“, J. Exp. Theor. Phys. **86** (1998) 1054.

[156] THE NEW MUON COLLAB. (NMC): ARNEODO, M. ET AL., „Exclusive ρ^0 and ϕ muoproduction at large Q^2“, Nucl. Phys. **B429** (1994) 503.

[157] THE NEW MUON COLLAB. (NMC): ARNEODO, M. ET AL., „Quasielastic J/ψ muoproduction from hydrogen, deuterium, carbon and tin“, Phys. Lett. **B332** (1994) 195.

[158] THE NEW MUON COLLAB. (NMC): ARNEODO, M. ET AL., „Measurement of the proton and deuteron structure functions, F_2^p and F_2^d, and of the ratio σ_L/σ_T“, Nucl. Phys. **B483** (1997) 3.

[159] NOVIKOV, V.A., SHIFMAN, M.A., VAINSHTEIN, V.I. UND ZAKHAROV, V.I., „Operator expansion in Quantum Chromodynamics beyond perturbation theory“, Nucl. Phys. **B174** (1980) 378.

[160] NOVIKOV, V.A., SHIFMAN, M.A., VAINSHTEIN, V.I. UND ZAKHAROV, V.I., „Are all hadrons alike?“, Nucl. Phys. **B191** (1981) 301.

[161] NOVIKOV, V.A., SHIFMAN, M.A., VAINSHTEIN, V.I., VOLOSHIN, M.B. UND ZAKHAROV, V.I., „Use and misuse of QCD sum rules, factorization and related topics“, Nucl. Phys. **B237** (1984) 525.

[162] PAGE, P.R.; mit bestem Dank für die *private Kommunikation*. Vgl. auch: „(Hybrid) baryons: symmetries and masses“, in Proc. *Nuclear & particle physics with CEBAF at Jefferson Lab* (Dubrovnik, Kroatien Nov. 1998), Fizika **B8** (1999) 363.

[163] PASCUAL, P. UND TARRACH, R., *Lecture notes in physics*: „QCD: Renormalization for the practitioner“, 1. Aufl., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

[164] PARTICLE DATA GROUP, „Review of particle physics: Particle Data Group“, Eur. Phys. J. **C3** (1998) 1.

[165] PARTICLE DATA GROUP, „Review of particle physics: Particle Data Group“, Eur. Phys. J. **C15** (2000) 1.

[166] PESKIN, M.E. UND SCHROEDER, D.V., *The advanced book program*: „An introduction to quantum field theory“, 7. Aufl., Perseus Books, Reading, Massachusetts 1999.

[167] POKORSKI, S., *Cambridge monographs on mathematical physics*: „Gauge field theories“, 1. Aufl., Cambridge University Press, Cambridge London New York 1987.

[168] POLITZER, H.D., „Reliable perturbative results for strong interactions?“, Phys. Rev. Lett. **30** (1973) 1346.

[169] POLITZER, H.D., „Effective quark masses in the chiral limit“, Nucl. Phys. **B117** (1976) 397.

[170] POLYAKOV, A.M., „Gauge fields and strings“, Harwood Academic Publishers, 1. Aufl., Chur, Schweiz 1987.

[171] POVH, B. UND HÜFNER, J., „Geometric interpretation of hadron-proton total cross sections and a determination of hadronic radii“, Phys. Rev. Lett. **58** (1987) 1612.

[172] PRESS, W.H., FLANNERY, B.P., TEUKOLSKY, S.A. UND VETTERLING, W.T., „Numerical recipes – The art of scientific computing“, Cambridge Univ. Press, 1. Aufl., Cambridge, London, New York, 1986.

[173] PRESS, W.H., TEUKOLSKY, S.A., VETTERLING, W.T. UND FLANNERY, B.P., „Numerical recipes in C – The art of scientific computing“, Cambridge Univ. Press, 2. Aufl., New York, 1988.

[174] DM1-DETEKT., ORSAY: QUENZER, A. ET AL., „Pion form factor from 480 MeV to 1100 MeV“, Phys. Lett. **B76** (1978) 512.

[175] REGGE, T., „Introduction to complex orbital momenta“, Nuovo Cimento **14** (1959) 951.

[176] REGGE, T., „Bound states, shadow states and Mandelstam representation“, Nuovo Cimento **18** (1960) 947.

[177] ROSS, M, STODOLSKY, L., „Photon dissociation model for vector-meson photoproduction“, Phys. Rev. **149** (1966) 1172.

[178] RUETER, M., „Chromoelektrische Felder schwerer Quarks in einem Modell für das stochastischen Vakuums“, Diplomarbeit an der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, 1994.

[179] RUETER, M. UND DOSCH, H.G., [hep-ph/9409362:], „SU(3) flux tubes in a model of the stochastic vacuum“, Z. Phys. **C66** (1995) 245.

[180] RUETER, M. UND DOSCH, H.G., [hep-ph/9603214:] „Nucleon structure and high-energy scattering“, Phys. Lett. **B380** (1996) 177.

[181] RUETER, M., [hep-ph/9807448:] „Energy and Q^2 dependence of elastic vectormeson production and the proton structure function F_2“, Eur. Phys. J. **C7** (1999) 233.

[182] RYSKIN, M.G., „Diffractive J/ψ electroproduction in LLA QCD“, Z. Phys. **C57** (1993) 89.

[183] SALAM, A. UND WARD, J.C., „Electromagnetic and weak interactions", Phys. Lett. **13** (1964) 168.

[184] SALAM, A., in *Proc. 8th Nobel Symposium*, Hrsg. N. Svartholm, Almquist und Wiskell, Stockholm 1968.

[185] SALAM, A., „Unification of fundamental forces: The first of the 1988 Dirac memorial lectures", Cambridge Univ. Press, Cambridge 1990.

[186] SEIBERG, N. UND WITTEN, E., [hep-th/9407087:] „Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $\mathcal{N}=2$ supersymmetric Yang-Mills theory", Nucl. Phys. **B426** (1994) 19 und Erratum ebenda **B430** (1994) 485.

[187] SEIBERG, N. UND WITTEN, E., [hep-th/9407099:] „Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $\mathcal{N}=2$ supersymmetric QCD", Nucl. Phys. **B431** (1994) 484.

[188] SEXL, R.U. UND URBANTKE, H.K., „Relativität, Gruppen, Teilchen: Spezielle Relativitätstheorie als Grundlage der Feld- und Teilchenphysik", Springer, 3. Aufl., Wien und New York 1992.

[189] SEXL, R.U. UND URBANTKE, H.K., „Gravitation und Kosmologie: eine Einführung in die allgemeine Relativitätstheorie", Spektrum Akad. Verl., 4. Aufl., Heidelberg 1995.

[190] SHABANOV, S.V. UND KLAUDER, J.R., hep-th/9902017: „Towards a nonperturbative path integral in gauge theories", subm. an Phys. Lett. **B**.

[191] SHEVCHENKO, V.I. UND SIMONOV, Y.A., [hep-th/9701026:] „Relations between correlators in gauge field theory", Phys. Atom. Nucl. **60** (1997) 1201.

[192] SHEVCHENKO, V.I. UND SIMONOV, Y.A., [hep-th/9807157:] „Generalized coordinate gauge, nonabelian Stokes theorem and the dual QCD lagrangian", Phys. Lett. **B437** (1998) 146.

[193] SHIFMAN, M.A., VAINSHTEIN, V.I. AND ZAKHAROV, V.I., „QCD and resonance physics, I-III", Nucl. Phys. **B147** (1979) 385, 448 & 519.

[194] SHIFMAN, M., [hep-th/9704114:] „Non-perturbative dynamics in supersymmetric gauge theories", Prog. Part. Nucl. Phys. **39** (1997) 1.

[195] SHURYAK, E.V., „The role of instantons in Quantum Chromodynamics, I & II", Nucl. Phys. **B203** (1982) 93 & 116.

[196] SIMON, G.G., BORKOWSKI, F., SCHMITT, C. UND WALTHER, V.H., „The structure of the nucleons", Z. Naturforsch. **35a** (1980) 1.

[197] SIMONOV, Y.A., „Cluster expansion, nonabelian Stokes theorem and magnetic monopoles", Sov. J. Nucl. Phys. **50** (1989) 134.

[198] SIMONOV, Y.A., [hep-ph/9709344:] „Confinement", Phys. Usp. **39** (1996) 313 und Usp. Fiz. Nauk. **166** (1996) 337.

[199] SÖDING, P., „On the apparent shift of the rho meson mass in photoproduction", Phys. Lett. **19** (1966) 702.

[200] STEPHANI, H., „Allgemeine Relativitätstheorie: eine Einführung in die Theorie des Gravitationsfeldes“, Dt. Verl. d. Wiss., 4. Aufl., Berlin 1991.

[201] STORA, R., in *BRS symmetry*, S. 1 und 335, Hrsg. M. Abe et al., Universal Acad. Press, Tokyo 1996.

[202] STRAUMANN, N.: „Zum Ursprung der Eichtheorien bei Hermann Weyl“, Phys. Bl. **43** (1987) 414.

[203] STREATER, R.F. UND WIGHTMAN, A.S., „PCT, spin and statistics, and all that“, Addison-Wesley, 3. Aufl., New York und Amsterdam 1980.

[204] 'T HOOFT, G., „Renormalization of massless Yang-Mills-fields“, Nucl. Phys. **B33** (1971) 173.

[205] 'T HOOFT, G., „Renormalizable lagrangians for massive Yang-Mills-fields“, Nucl. Phys. **B35** (1971) 167.

[206] 'T HOOFT, G. UND VELTMAN, M., „Regularization and renormalization of gauge fields“, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189.

[207] 'T HOOFT, G. UND VELTMAN, M., „Combinatorics of gauge fields“, Nucl. Phys. **B50** (1972) 318.

[208] 'T HOOFT, Diskussion mit K. Symanzik bei einem Meeting organisiert von C.P. Korthals Altes (Marseille Juni 1972), unveröffentlicht.

[209] 'T HOOFT, G., „Computation of the quantum effects due to a four-dimensional pseudoparticle“, Phys. Rev. **D14** (1976) 3432.

[210] 'T HOOFT, G., „On the phase transition towards permanent quark confinement“, Nucl. Phys. **B138** 1.

[211] 'T HOOFT, G., „A property of electric and magnetic flux in non-Abelian gauge theories“, Nucl. Phys. **B153** (1979) 141.

[212] 'T HOOFT, G., [hep-th/9808154:] „When was asymptotic freedom discovered or The rehabilitation of quantum field theory“, in *QCD 98, Proc. QCD 98 euroconference* (Montpellier Jul. 1998), Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **74** (1999) 413.

[213] 'T HOOFT, G., hep-th/9812203: „The glorious days of physics: Renormalization of gauge theories“.

[214] TYUTIN, I.V., „Gauge invariance in field theory and in statistical physics in the operator formulation“, Lebedev Report 1975 FIAN-39 (Russisch), unveröffentlicht.

[215] UA1-KOLLAB.: ARNISON, G. ET AL., siehe Ref. [147] unter *Arnison 1983a* und *Arnison 1983c*.

[216] UA2-KOLLAB.: BANNER, M. ET AL., siehe Ref. [147] unter *Banner 1983*.

[217] UA2-KOLLAB.: BAGNAIA, P. ET AL., siehe Ref. [147] unter *Bagnaia 1983*.

[218] VAN KAMPEN, N.G., „A cumulant expansion for stochastic linear differential equations, I & II“, Physica **74** (1974) 215 & 239.

[219] VAN KAMPEN, N.G., „Stochastic differential equations“, Phys. Rep. **C24** (1976) 171.

[220] VELTMAN, M., „Diagrammatica, The Path to Feynman diagrams“, Cambridge Univ. Press, 1. Aufl., Cambridge 1994.

[221] VERLINDE, H. UND VERLINDE, E., [hep-th/9302104:] „QCD at high energies and two-dimensional field theory“, Princeton Univ., Report PUPT-1319 (überarbeitete Vers. Sept. 1993).

[222] WEGNER, F.J., „Duality in generalized Ising models and phase transitions without local order parameters“, J. Math. Phys. **12** (1971) 2259.

[223] WEINBERG, S.: „A model of leptons“, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264.

[224] WEINBERG, S., „The quantum theory of fields, vols. I & II“, Cambridge Univ. Press, 1. Aufl., Cambridge 1995 & 1996.

[225] WEYL, H., „Gravitation und Elektrizität“, Sitzungsber. Preuß. Akad. d. Wiss. Berlin (1918) 465.

[226] WEYL, H., „Reine Infinitesimalgeometrie“, Math. Z. (1918) 384.

[227] WEYL, H., „Raum, Zeit, Materie: Vorlesungen über allgemeine Relativitätstheorie“, Hrsg. J. Ehlers, Springer, 8. Aufl., Berlin und Heidelberg 1993.

[228] WEYL, H., „Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie“, Ann. Phys. **59** (1919) 101.

[229] WEYL, H., „Elektron und Gravitation, I“, Z. Phys. **56** (1929) 330.

[230] WEYL, H., „Gruppentheorie und Quantenmechanik“, Nachdr. d. 2. Aufl., Leipzig 1931, Wissenschaftl. Buchges., Darmstadt 1981.

[231] WEYL, H., „Geometrie und Physik“, Naturwissenschaften **19** (1931) 4.

[232] WILCZEK, F., [hep-th/9803075:] „Quantum field theory“, Rev. of Mod. Phys. **71** (1999) 85.

[233] WILSON, K.G., „Non-lagrangian models of current algebra“, Phys. Rev. **179** (1969) 1499.

[234] WILSON, K.G., „Renormalization group and strong interactions“, Phys. Rev. **D3** (1971) 1818.

[235] WILSON, K.G., „Confinement of quarks“, Phys. Rev. **D10** (1974) 2445.

[236] WIRBEL, M., STECH, B. UND BAUER, M., „Exclusive semileptonic decays of heavy mesons“, Z. Phys. **C29** (1985) 637.

[237] YANG, C.N. UND MILLS, R.L., „Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance“, Phys. Rev. **96** (1954) 191.

[238] ZEUS-KOLLAB.: DERRICK, M. ET AL., „Measurement of elastic ϕ photoproduction at HERA“, Phys. Lett. **B377** (1996) 259.

[239] ZEUS-KOLLAB.: DERRICK, M. ET AL., [hep-ex/9604008:] „Measurement of the reaction $\gamma^* p \to \phi p$ in deep inelastic $e^+ p$ scattering at HERA“, Phys. Lett. **B380** (1996) 220.

[240] ZINN-JUSTIN, J., „Quantum field theory and critical phenomena“, Oxford Univ. Press, 3. Aufl., New York 1996.

[241] ZWEIG, G., CERN Report TH-401 und TH-412 (1964), veröffentlicht in *Developments in the quark theory of hadrons, a reprint collection, vol. I: 1964-1978*, Hrsg. D.B. Lichtenberg et al., Hadronic Press, Nonamtum, Massachusetts 1980.

[242] ZWEIG, G., Erice-Vorlesung 1964, in *Symmetries in elementary particle physics*, Hrsg. A. Zichichi, Academic Press, New York und London 1965.

DANKSAGUNG

An erster Stelle möchte ich mich ganz herzlich bedanken bei Herrn Dosch. Für die Überlassung des interessanten Themas und an dem Interesse an der Entwicklung, die es über die Zeit erfahren hat. Für die schöne Zusammenarbeit, die sehr herzliche Betreuung. Für das stete Interesse zur Diskussion, in der ich sehr viel lernen konnte, von seiner phänomenologischen Intuition und seinem Gefühl für einfache Lösungen – was mich sicher sehr geprägt hat in meiner Entwicklung, an Fragen heranzugehen. Für seinen Einsatz, der es mir ermöglicht hat, Konferenzen zu besuchen und Vorträge zu halten. Nicht zuletzt möchte ich mich ganz herzlich bedanken für die sehr herzliche Atmosphäre weit über die wissenschaftliche Arbeit hinaus. Für die schönen Gespräche über Musik.

Ich danke Herrn Prof. Povh für die Übernahme des Korreferats (und die Übungsgruppe in meinem ersten Semester, in der er mich begeistert hat für Quarks, Gluonen und Confinement).

Ich danke Herrn Prof. Nachtmann, von dessen Arbeiten und Analytizität ich viel habe lernen können; ich danke für die interessierte Diskussion als Zweitbetreuer, die Begutachtung meiner Arbeiten und dafür, daß er als zweiter Theoretiker anwesend ist in der Disputation meiner Arbeit.

Ich danke Herrn Prof. Pirner für die Zusammenarbeit und die herzliche Atmosphäre.

Ich danke ferner Herrn Prof. Schmidt für die begeisternde Vorlesung über Quantenfeldtheorie, die ich bei ihm gehört habe, die Diskussion, die Gespräche und das stete Interesse –
und ich danke Prof. Donnachie für die Begutachtung meiner Arbeiten.

Für die finanzielle Unterstützung danke ich dem Graduiertenkolleg der DFG und meinen Eltern.

Wichtig für mein Verständnis war die ständige Diskussion mit Post-Docs, Doktoranden und Diplomanden; ich danke vor allen Edgar Berger, Bastian Bergerhoff, Boris Körs, Enrico Meggiolaro, Timo Paulus, Michael Rüter.

Ich möchte mich abschließend bedanken für die herzliche Atmosphäre in Arbeitszimmer und Institut überhaupt, die sich nicht an einzelnen Namen festmachen läßt.