Nicht-kommutative Integration auf endlich-dimensionalen von Neumann-Algebren

Diplomarbeit von
Klaus Werner

Betreuer:
Prof. Dr. M. Leinert

Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik

Juli 1993

Inhaltsverzeichnis

0 Einleitung

Die Theorie der nicht-kommutativen L^p-Räume – dem Analogon zu den Lebesgue-L^p-Räumen mit einer nicht-kommutativen von Neumann-Algebra in der Rolle des L^∞ – wurde zuerst von J. Dixmier für halbendliche von Neumann-Algebren entwickelt ([Di]). U. Haagerup definierte L^p-Räume ausgehend von nicht notwendig halbendlichen von Neumann-Algebren ([Ha]). M. Hilsum stellte diese Räume als Räume von (i. a. unbeschränkten) Operatoren auf dem Hilbertraum dar, auf welchem die von Neumann-Algebra operiert ([Hi]). H. Kosaki ging das Problem anders an. Wenn φ ein treues normales Gewicht auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ ist, kann man $\mathcal{A}$ injektiv nach $\mathcal{A}_*$, dem Prädual von $\mathcal{A}$, durch $A \to A \cdot \varphi$ abbilden. Damit ist die komplexe Interpolationsmethode anwendbar. Kosaki zeigte, daß die zugehörigen Interpolationsräume alle Eigenschaften haben, die man normalerweise von L^p-Räumen erwartet und daß sie isomorph zu Haagerups L^p-Räumen sind ([Ko]).
(Nach M. Terp in der Einleitung von [Te].)

Ziel dieser Arbeit ist, die p-Norm bezüglich eines halbendlichen treuen normalen Gewichtes auf der von Neumann-Algebra aller beschränkten linearen Operatoren auf einem endlich-dimensionalen Hilbertraum über $\mathbb{C}$ zu berechnen, wie sie in [L2] definiert ist.

Ein endlich-dimensionaler Hilbertraum über $\mathbb{C}$ ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}^n$. Die linearen Operatoren hierauf sind beschränkt und werden mit den $n \times n$-Matrizen $M_n(\mathbb{C})$ identifiziert.

Die Integration bezüglich einer halbendlichen treuen normalen Spur τ wird vorgestellt, der Arbeit von M. Leinert [L1] folgend. Auf den $n \times n$-Matrizen existiert (bis auf Vielfache) genau eine solche Spur. Der L^p bezüglich dieser Spur ist (als Menge) gleich $M_n(\mathbb{C})$. Die p-Norm von $A \in M_n(\mathbb{C})$ berechnet sich wie folgt:

$$\|A\|_{p,\tau} = \tau(|A|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

J. Bergh/J. Löfström zeigen in [BL], daß ein Lebesgue-L^p-Raum ein Interpolationsraum von L^1 und L^∞ ist. In [L1] zeigt M. Leinert, daß die analoge Aussage für den Spur-L^p mit $L^\infty = \mathcal{A}$ gilt.

[L2] behandelt die Integration bezüglich eines Gewichtes φ auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{A}$. Die Abschwächung der Bedingungen an φ (Gewicht statt Spur) macht einen „Umweg“ erforderlich: Die 1-Norm wird von einem isometrischen Isomorphismus zu $\mathcal{A}_*$ transportiert, und L^p wird als Interpolationsraum von L^1 und L^∞ definiert, so daß bei einer Spur beide Vorgehensweisen ([L1] und [L2]) zum selben Ergebnis führen.

Sei τ die Spur auf $M_n(\mathbb{C}) =: \mathcal{A}$. Auf $\mathcal{A}$ läßt sich jedes halbendliche Gewicht φ darstellen durch $\varphi(A) = \tau(AT_\varphi)\ \forall A \in \mathcal{A}$ mit einem positiven Operator $T_\varphi \in \mathcal{A}$. Diese Darstellung ermöglicht, die p-Norm bezüglich φ auf die p-Norm bezüglich τ zurückzuführen. Da diese in expliziter Form bekannt ist, ergibt sich eine explizite Darstellung der gesuchten Norm. Der Operator T_φ spielt hierbei eine wesentliche Rolle.

Es stellt sich heraus, daß T_φ die räumliche Ableitung von φ bezüglich eines treuen halbendlichen normalen Gewichtes auf der Kommutante von $\mathcal{A}$ (im Sinne von [Co]) ist. Die p-Norm kann unabhängig von τ, mit Termen, die nur von φ und der räumlichen Ableitung abhängen, dargestellt werden. Dies ist erstrebenswert, da – im Gegensatz zu einer Spur – eine räumliche Ableitung eines halbendlichen normalen Gewichtes auf einer beliebigen von Neumann-Algebra stets existiert und daher eine Verallgemeinerung des Ergebnisses in der von τ unabhängigen Form möglich scheint.

An dieser Stelle möchte ich Professor Leinert für die hervorragende Betreuung und das stets vorhandene Interesse an dieser Arbeit danken. Für die Hilfe bei der Fehlerkorrektur danke ich Alvar Wenzel und meiner Schwester Doris.

1 Grundlagen

Sei $\mathcal{H}$ im folgenden ein komplexer Hilbertraum, d. h. ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, der mit der Norm $\|x\|_{\mathcal{H}} = \langle x,x\rangle^{\frac{1}{2}}$ für $x \in \mathcal{H}$ vollständig (also ein Banachraum) ist. Sei $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum aller beschränkten linearen Operatoren $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$. $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit der Hintereinanderausführung als Multiplikation und der Norm

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathcal{H}} \frac{\|Ax\|_{\mathcal{H}}}{\|x\|_{\mathcal{H}}} = \sup_{\|x\|_{\mathcal{H}} \leq 1} \|Ax\|_{\mathcal{H}}, \qquad A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

bildet eine normierte Algebra über $\mathbb{C}$.
$\mathcal{B}$(H) ist nicht kommutativ, falls $\dim \mathcal{H} > 1$.

1.1 Von Neumann-Algebren

Definition 1.1.1 Sei $\mathcal{A}$ ein Banachraum über $\mathbb{C}$. Falls $\mathcal{A}$ eine Algebra über $\mathbb{C}$ ist, deren Multiplikation

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\| \qquad \forall A, B \in \mathcal{A}$$

erfüllt, heißt $\mathcal{A}$ *Banachalgebra*.
$\mathcal{A}$ heißt *involutive Banachalgebra*, wenn es zusätzlich eine Abbildung (Involution) $A \to A^*$ gibt, mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{ll}
(i) & (A^*)^* = A, \\
(ii) & (A+B)^* = A^* + B^*, \\
(iii) & (\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*, \\
(iv) & (AB)^* = B^* A^*, \\
(v) & \|A^*\| = \|A\|
\end{array}$$

$\forall A, B \in \mathcal{A}, \alpha \in \mathbb{C}$.
Falls außerdem

$$(vi) \qquad \|A^*A\| = \|A\|\|A^*\|$$

$\forall A \in \mathcal{A}$, so heißt $\mathcal{A}$ *C^*-Algebra.*

Defintion 1.1.2 Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ eine Menge. $\mathcal{M}'$ bezeichne die Menge aller Operatoren aus $\mathcal{B}$(H), die mit jedem Operator aus $\mathcal{M}$ kommutieren. $\mathcal{M}'$ heißt *Kommutante von $\mathcal{M}$.*

Definition 1.1.3 Eine Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ heißt $*$-*Unteralgebra*, wenn

$$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^* \in \mathcal{A},$$

wobei A^* den zu A adjungierten Operator bezeichnet, der definiert ist durch $\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{H}$.

Definition 1.1.4 Eine $*$-Unteralgebra $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, die gleich ihrer Bikommutante ist, d. h.

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}')',$$

heißt *von Neumann-Algebra auf* $\mathcal{H}$.

Eine von Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ ist insbesondere eine C^*-Algebra, denn für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\|AB\| = \sup_{x, Bx \neq 0} \frac{\|ABx\|}{\|x\|} = \sup_{x, Bx \neq 0} \frac{\|A(Bx)\|}{\|Bx\|} \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \leq \|A\| \|B\|, \tag{1}$$

dabei sei $B \neq 0$. Für $B = 0$ ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. $A \to A^*$ ist eine Involution und

$$\begin{aligned} \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*Ax, x \rangle &\overset{\substack{\text{Cauchy-} \\ \text{Schwarz}}}{\leq} \|A^*Ax\| \|x\| \\ &\leq \|A^*A\| \|x\|^2 \end{aligned}$$

zeigt, daß $\|A^*\| \|A\| = \|A\|^2 \leq \|A^*A\|$. Aus (1) folgt die umgekehrte Ungleichung.

Beispiele für von Neumann-Algebren sind $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ selbst und $\mathcal{B}(\mathcal{H})'$, das Zentrum von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Die Kommutante einer $*$-invarianten Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist ebenfalls eine von Neumann-Algebra, da stets $\mathcal{M}' = \mathcal{M}'''$.

1.2 Das Prädual einer von Neumann-Algebra

Definition 1.2.1 Die *schwache Topologie* auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ ist die gröbste Topologie, bezüglich derer alle Abbildungen

$$f_{x,y} : \mathcal{A} \to \mathbb{C} \qquad f_{x,y}(A) = \langle Ax, y \rangle \tag{2}$$

für $x, y \in \mathcal{H}$ stetig sind. Die *ultraschwache Topologie* auf $\mathcal{A}$ ist die gröbste Topologie, bezüglich derer alle Abbildungen

$$A \to \sum_{j=1}^{\infty} \langle Ax_j, y_j \rangle \tag{3}$$

stetig sind $\forall x_j, y_j \in \mathcal{H}$ mit $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2, \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^2 < \infty$.

Die (ultra-)schwache Topologie auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ induziert die (ultra-)schwache Topologie auf der von Neumann-Algebra $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ ist in $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (ultra-)schwach abgeschlossen und damit auch abgeschlossen in der Norm-Topologie, denn sei $B \in \mathcal{A}'$

und $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $A_\lambda \in \mathcal{A}$ ein Netz, das schwach gegen $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ konvergiert, dann gilt

$$\begin{aligned}\langle BA_\lambda x, y\rangle &= \langle A_\lambda x, B^*y\rangle \\ &\to \langle Ax, B^*y\rangle = \langle BAx, y\rangle.\end{aligned}$$

B und A_λ kommutieren $\forall\lambda \in \Lambda$.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \quad \langle BA_\lambda x, y\rangle = \langle A_\lambda Bx, y\rangle \to \langle ABx, y\rangle \\ &\Rightarrow \quad \langle ABx, y\rangle = \langle BAx, y\rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{H} \\ &\Rightarrow \quad AB = BA, \text{ also } A \in \mathcal{A}'' = \mathcal{A}.\end{aligned}$$

Die Normtopologie ist feiner als die (ultra-)schwache, da (2) und (3) stetig in der Norm sind.

Definition 1.2.2 Das *Prädual* eines ultra-schwach abgeschlossenen Teilraumes $\mathcal{M}$ von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist der Raum aller ultra-schwach stetigen linearen Funktionale auf $\mathcal{M}$ und wird mit $\mathcal{M}_*$ bezeichnet. Die Elemente von $\mathcal{M}_*$ heißen auch *normale* Funktionale.

Proposition 1.2.3 *Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ultra-schwach abgeschlossen und φ ein lineares Funktional auf $\mathcal{M}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) φ *ist ultra-schwach stetig*

(ii) $\varphi = \sum_{j=1}^{\infty} \omega_{x_j,y_j}$, *wobei* $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^2, \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^2 < \infty$
$\omega_{x_j,y_j}(A) = \langle Ax_j, y_j\rangle$.

Beweis: Siehe [Ta], chapter II, theorem 2.6.

Ein ultra-schwach stetiges Funktional φ ist insbesondere stetig in der Normtopologie. Folglich ist $\mathcal{M}_*$ ein normierter Vektorraum mit der üblichen Funktionalnorm

$$\|\varphi\| = \sup_{0\neq A\in\mathcal{M}} \frac{|\varphi(A)|}{\|A\|}, \qquad \varphi \in \mathcal{M}_*.$$

Der ultra-schwach abgeschlossene Teilraum $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ läßt sich mit dem topologischen Dualraum von $\mathcal{M}_*$ identifizieren, vermöge der Abbildung

$$A \to f_A; \quad f_A(\varphi) = \varphi(A)$$

für $A \in \mathcal{M}$, $\varphi \in \mathcal{M}_*$, daher die Bezeichnung „Prädual“.

1.3 Der Funktionenkalkül

Der Funktionenkalkül liefert eine Verallgemeinerung der komplexwertigen Funktionen auf einer Teilmenge der komplexen Zahlen. Deren Definitionsbereich kann unter gewissen Voraussetzungen auf C^*-Algebren erweitert werden. Hierbei wird jedoch meist nicht die Veränderung einer festen Funktion in Abhängigkeit ihrer Variablen betrachtet, sondern die Veränderung der Funktionswerte bei festem Argument in Abhängigkeit der sich verändernden Funktionen.

Definition 1.3.1 Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra mit I (neutrales Element der Multiplikation). Für ein $A \in \mathcal{A}$ heißt

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (A - \lambda) \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{A}\}^1$$

das *Spektrum von A in $\mathcal{A}$.*

Falls $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ist, so ist das Spektrum jedes Elementes kompakt in $\mathbb{C}$.[2]

Definition 1.3.2 Sei $\mathcal{A}$ eine involutive Banachalgebra. $A \in \mathcal{A}$ heißt *selbstadjungiert* oder *hermitesch*, falls $A = A^*$, *normal*, falls $A^*A = AA^*$, *unitär*, falls $\mathcal{A}$ eine Eins I besitzt und $A^*A = AA^* = I$. Die Menge der hermiteschen Elemente von $\mathcal{A}$ wird mit $\mathcal{A}_h$ bezeichnet. A heißt *Projektion*, wenn $A \in \mathcal{A}_h$ und $A^2 = A$.

Proposition 1.3.3 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit I und $A \in \mathcal{A}_h$. Dann gilt $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$, und folgende Aussagen sind äquivalent:*

$$\begin{array}{lll} (i) & \sigma(A) \subset [0, \infty), & \\ (ii) & A = B^*B & \text{für ein } B \in \mathcal{A}, \\ (iii) & A = C^2 & \text{für ein } C \in \mathcal{A}_h. \end{array}$$

In diesem Fall heißt A *positiv.*

Beweis: Siehe [Ta], chapter I, proposition 4.3 und theorem 6.1.

Satz 1.3.4 *Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit I und $A \in \mathcal{A}$ selbstadjungiert. Sei $C(\sigma(A))$ die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf $\sigma(A)$. Es gibt eine eindeutig bestimmte Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} C(\sigma(A)) & \to & \mathcal{A} \\ f & \to & f(A) \end{array}$$

[1]Hierbei wird $\lambda \in \mathbb{C}$ identifiziert mit $\lambda I \in \mathcal{A}$, d. h. $\mathbb{C}$ wird eingebettet in $\mathcal{A}$ durch Multiplikation mit der Eins der Algebra.

[2]Siehe [Ta], chapter I, proposition 2.3.

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f(A)=a_0I+\sum_{j=1}^{n}a_jA^j$, *falls* $f(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$, $a_j\in\mathbb{C}$, $j=1,\ldots,n$ *ein Polynom auf* $\sigma(A)$ *ist,*

(ii) $\|f(A)\|=\|f\|_\infty=\sup_{x\in\sigma(A)}|f(x)|$,

(iii) $(af+bg)(A)=af(A)+bg(A)$,

(iv) $fg(A)=f(A)g(A)$,

(v) $\overline{f}(A)=(f(A))^*$, *wobei* $\overline{f}$ *durch* $\overline{f}(x)=\overline{f(x)}$ *definiert sei,*

(vi) $f(A)$ *ist normal,*

(vii) $f(A)B=Bf(A)$, *wenn* $B\in\mathcal{A}$ *und* $AB=BA$,

(viii) $\sigma(f(A))=\{f(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(A)\}$

für $a,b\in\mathbb{C}$, $f,g\in C(\sigma(A))$.

Beweis: Siehe [Ta], chapter 1, definition 4.7.

Korollar 1.3.5 *Mit den Voraussetzungen des letzten Satzes gilt: Zu* $f\in C(\sigma(A))$ *gibt es eine Folge von Polynomen* p_n, *so daß*

$$\|p_n(A)-f(A)\|\to 0,\quad (n\to\infty).$$

Beweis: Nach Proposition 1.3.3 gilt, daß $\sigma(A)$ eine kompakte Teilmenge der reellen Zahlen ist. Der Satz von Stone-Weierstraß[3] besagt, daß sich jede stetige komplexwertige Funktion f auf einer kompakten Teilmenge von $\mathbb{R}$ gleichmäßig, also in der ∞-Norm durch Polynome p_n approximieren läßt (betrachte Real- und Imaginärteil getrennt). Aus Satz 1.3.4 (*ii*) folgt

$$\|p_n(A)-f(A)\|=\|(p_n-f)(A)\|\overset{(ii)}{=}\|p_n-f\|_\infty\to 0\quad(n\to\infty).$$

□

Korollar 1.3.6 *Seien* $\mathcal{A}$, A *und* f *wie im Satz,* $U\in\mathcal{A}$ *unitär.*

$$\Longrightarrow\quad f(U^*AU)=U^*f(A)U.$$

Beweis: $\sigma(A)=\sigma(U^*AU)$, da

$$\begin{array}{rll} & A-\lambda & \text{invertierbar}\\ \Longleftrightarrow & U^*(A-\lambda)U & \text{invertierbar}\\ \Longleftrightarrow & U^*AU-U^*\lambda U & \text{invertierbar}\\ \Longleftrightarrow & U^*AU-\lambda U^*U & \text{invertierbar}\\ \Longleftrightarrow & U^*AU-\lambda & \text{invertierbar.}\end{array}$$

[3] Siehe [Sc], II.4.3, Satz 3.

Für Polynome gilt die Behauptung, da

$$(U^*AU)^n = U^*A\underbrace{UU^*}_{=I}AU\cdots U^*AU = U^*A^nU.$$

Sei p_n eine Folge von Polynomen, die auf $\sigma(A)$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Aus dem letzten Korollar folgt

$$\begin{array}{rrcl} & \|p_n(U^*AU) - f(U^*AU)\| & \to & 0 \qquad (n\to\infty) \\ \Longrightarrow & \|U^*p_n(A)U - f(U^*AU)\| & \to & 0 \qquad (n\to\infty). \end{array}$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \|U^*p_n(A)U - U^*f(A)U\| &= \|U^*(p_n(A)-f(A))U\| \\ &\le \|U^*\|\|p_n(A)-f(A)\|\|U\| \\ &= \|p_n(A)-f(A)\| \to 0 \qquad (n\to\infty). \end{aligned}$$

$U^*p_n(A)U$ konvergiert sowohl gegen $f(U^*AU)$ als auch gegen $U^*f(A)U$, also müssen beide Grenzwerte übereinstimmen.

□

1.4 Holomorphe Funktionen

Sei $\mathcal{B}$ ein Banachraum und $\mathcal{O}$ eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Definition 1.4.1 Eine Abbildung $f:\mathcal{O}\to\mathcal{B}$ heißt *holomorph*, wenn sie in jedem Punkt $z_0\in\mathcal{O}$ komplex differenzierbar ist, also der Normlimes $f'(z_0)\in\mathcal{B}$ des Differenzenquotienten existiert:

$$\left\|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right\|_{\mathcal{B}} \to 0 \qquad (z\to z_0).$$

Sei φ ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{B}$ und $f:\mathcal{O}\to\mathcal{B}$ holomorph. Dann ist $\varphi\circ f:\mathcal{O}\to\mathbb{C}$ holomorph im ursprünglichen Sinn, denn

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0}\frac{\varphi(f(z))-\varphi(f(z_0))}{z-z_0} &= \lim_{z\to z_0}\varphi\left(\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right) \\ &\overset{\varphi\ \text{stetig}}{=} \varphi\left(\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right) \\ &= \varphi(f'(z_0)). \end{aligned}$$

Die Umkehrung gilt ebenfalls:

Satz 1.4.2 *$f:\mathcal{O}\to\mathcal{B}$ ist holomorph, wenn $\varphi\circ f$ holomorph ist für alle stetigen linearen Funktionale φ auf $\mathcal{B}$.*

Beweis: Siehe [He], Kapitel XIII, Satz 97.2.

1.5 Polarzerlegung von Operatoren auf Hilberträumen

Eine komplexe Zahl z läßt sich darstellen durch ihren Betrag multipliziert mit einer Zahl vom Betrag 1, also einer unitären 1×1-Matrix. Dieses Produkt heißt Polardarstellung von z. Eine analoge Darstellung existiert für beschränkte Operatoren auf Hilberträumen.

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum.

Proposition 1.5.1 $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist *positiv* (schreibe $A \geq 0$) genau dann, wenn A selbstadjungiert ist und

$$\langle Ax, x\rangle \geq 0 \qquad \forall x \in \mathcal{H}.$$

Beweis: Siehe [Ne],IV,§21.

Sei $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $f(y) = y^{\frac{1}{2}}$ und A positiv. Dann ist $A^{\frac{1}{2}} := f(A)$ wegen Satz 1.3.4 (*viii*) und Proposition 1.3.3 ebenfalls positiv. Für beliebiges $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist A^*A positiv:

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 \geq 0.$$

Setze $|A| := (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ für $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Definition 1.5.2 Ein linearer Operator V, der einen abgeschlossenen Teilraum E eines Hilbertraumes $\mathcal{H}$ isometrisch in einen Teilraum F eines Hilbertraumes $\mathcal{K}$ und $E^\perp$ nach 0 abbildet, heißt *partielle Isometrie*.

Ein Operator V auf einem Hilbertraum ist genau dann eine partielle Isometrie, wenn V^*V eine Projektion ist. VV^* ist dann ebenfalls eine Projektion.[4]

Satz 1.5.3 *Sei A ein beschränkter linearer Operator von einem Hilbertraum $\mathcal{H}$ in einen Hilbertraum $\mathcal{K}$. Es gibt eine partielle Isometrie $V : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$, mit $A = V|A|$.*

Beweis: Siehe [Ne],IV,§21.

Definition 1.5.4 Mit den Bezeichnungen von Satz 1.5.3 heißt $V|A|$ *Polarzerlegung von A*.

Ebenso existiert eine Polarzerlegung für konjugiert-lineare Abbildungen eines Hilbertraumes in einen anderen.

Definition 1.5.5 Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume. $A : \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ heißt *konjugiert-linear*, wenn

$$\begin{array}{lll} (i) & A(x+y) = Ax + Ay, & x, y \in \mathcal{H}, \\ (ii) & A(\alpha x) = \overline{\alpha} Ax, & x \in \mathcal{H}, \alpha \in \mathbb{C}. \end{array}$$

[4] Siehe [Kl], proposition 6.1.1.

Eine konjugiert-lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{K}$ läßt sich auffassen als lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\overline{\mathcal{K}}$, dem zu $\mathcal{K}$ konjugierten Hilbertraum, der aus denselben Elementen wie $\mathcal{K}$ besteht und dessen Multiplikation und Skalarprodukt definiert sind durch

$$\alpha \underbrace{x}_{\in\overline{\mathcal{K}}} = \overline{\alpha} \underbrace{x}_{\in\mathcal{K}}, \quad \langle x,y\rangle_{\overline{\mathcal{K}}} = \langle y,x\rangle_{\mathcal{K}}.$$

Eine beschränkte lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\overline{\mathcal{K}}$ besitzt eine Polarzerlegung $V|A|$, wobei V eine lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\overline{\mathcal{K}}$ ist, also eine konjugiert-lineare Abbildung von $\mathcal{H}$ nach $\mathcal{K}$.

1.6 Spur und Gewicht

Sei $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}_h$ die Menge der selbstadjungierten und $\mathcal{A}^+$ die Menge der positiven Elemente von $\mathcal{A}$. Für $A,B \in \mathcal{A}^+, \alpha \geq 0$ gilt

$$A+B \in \mathcal{A}^+, \qquad \alpha A \in \mathcal{A}^+$$

Proposition 1.6.1 *$\mathcal{A}^+$ spannt $\mathcal{A}$ linear auf.*

Beweis: 1. $\mathcal{A}_h$ spannt $\mathcal{A}$ auf:

$A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A = \frac{1}{2}(A+A^*) + \frac{1}{2}i(\frac{1}{i}(A-A^*))$.

$A + A*$ und $\frac{1}{i}(A-A^*)$ sind Elemente von $\mathcal{A}_h$, da $\mathcal{A}$ eine $*$-Unteralgebra ist.

2. $\mathcal{A}^+$ spannt $\mathcal{A}_h$ auf:

$A \in \mathcal{A}_h \Longrightarrow A = \frac{1}{2}(|A|+A) - \frac{1}{2}(|A|-A)$

$|A|+A$ und $|A|-A$ sind positiv.[5]

$|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ ist Normlimes von Polynomen in A^*A (siehe Korollar 1.3.5). $\mathcal{A}$ ist abgeschlossen bezüglich der Norm, deshalb ist $|A| \in \mathcal{A}$ und damit sind auch $|A|+A, |A|-A \in \mathcal{A}$. □

Definition 1.6.2 Ein *Gewicht* auf $\mathcal{A}$ ist eine Funktion $\varphi : \mathcal{A}^+ \to [0,\infty]$, die folgende Bedingungen erfüllt:

$$\begin{array}{lll} (i) & \varphi(A+B) = \varphi(A)+\varphi(B) & \forall A,B \in \mathcal{A}^+, \\ (ii) & \varphi(\alpha A) = \alpha\varphi(A) & \forall \alpha \geq 0, A \in \mathcal{A}^+. \end{array}$$

Gilt zusätzlich

$$\begin{array}{lll} (iii) & \varphi(A^*A) = \varphi(AA^*) & \forall A \in \mathcal{A}, \end{array}$$

so heißt φ *Spur* auf $\mathcal{A}$.

Ist φ ein Gewicht auf $\mathcal{A}$ und sind $A,B \in \mathcal{A}^+$ mit

$$A \geq B :\Longleftrightarrow A-B \geq 0 :\Longleftrightarrow A-B \in \mathcal{A}^+,$$

[5] Siehe [Ta], chapter I, definition 4.7.

dann gilt $\varphi(A) \geq \varphi(B)$, denn

$$\varphi(A) = \varphi(A - B + B) = \varphi(A - B) + \varphi(B). \qquad (4)$$

$$\varphi(A - B) \geq 0 \Rightarrow \varphi(A) = \infty, \text{ falls } \varphi(B) = \infty.$$

$$0 \leq \varphi(A - B) \stackrel{(4)}{=} \varphi(A) - \varphi(B), \text{ falls } \varphi(B) < \infty.$$

$$\Longrightarrow \quad \varphi(A) \geq \varphi(B). \qquad (5)$$

Einem Gewicht φ werden zugeordnet

$$\begin{aligned} N_\varphi &:= \{A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A^*A) < \infty\}, \\ M_\varphi &:= \operatorname{Lin}\{A^*B \mid A, B \in N_\varphi\}. \end{aligned}$$

Definition 1.6.3 Ein Gewicht φ auf einer von Neumann-Algebra $\mathcal{A}$ heißt *treu*, wenn

$$A \in \mathcal{A}^+, \varphi(A) = 0 \Longrightarrow A = 0.$$

φ heißt *normal*, wenn es eine Familie $\{\varphi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ von positiven $(\varphi_\lambda(A^*A) \geq 0)$ normalen Funktionalen auf $\mathcal{A}$ gibt, so daß

$$\varphi(A) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda(A) \qquad \forall A \in \mathcal{A}^+.$$

φ heißt *halbendlich*, wenn M_φ schwach dicht in $\mathcal{A}$ ist, und *endlich*, wenn für die identische Abbildung I auf $\mathcal{H}$ gilt $\varphi(I) < \infty$.

Bemerkung: $I \in \mathcal{A}$, da I Zentrumselement von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ist und die Kommutante einer beliebigen Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ das Zentrum von $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ enthält; speziell $\mathcal{A} = (\mathcal{A}')'$.

Falls φ ein endliches Funktional ist, gilt $\varphi(A) < \infty \; \forall A \in \mathcal{A}^+$, denn

$$\langle Ax, x\rangle \leq \|Ax\|\|x\| \leq \|A\|\|x\|\|x\| = \|A\|\langle x, x\rangle = \langle \|A\| I x, x\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad A \leq \|A\| I$$

$$\stackrel{(5)}{\Longrightarrow} \quad \varphi(A) \leq \varphi(\|A\| I) = \|A\|\varphi(I) < \infty.$$

Wegen $\operatorname{Lin}(\mathcal{A}^+) = \mathcal{A}$, läßt sich ein endliches Gewicht eindeutig zu einem positiven linearen Funktional auf $\mathcal{A}$ fortsetzen.

Proposition 1.6.4 *Mit den Bezeichnungen von oben gilt für ein beliebiges Gewicht φ: Es existiert eine eindeutig bestimmte Fortsetzung von φ eingeschränkt auf $\{A \in \mathcal{A}^+ \mid \varphi(A) < \infty\}$ zu einem linearen Funktional auf M_φ.*

Beweis: Siehe [K2], lemma 7.5.2.

1.7 Abgeschlossene Operatoren und Formen

Seien $\mathcal{H}$ und $\mathcal{K}$ Hilberträume. Sei $T : D(T) \to \mathcal{K}$ eine lineare Abbildung, wobei $D(T)$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ ist.

Definition 1.7.1 Falls der Abschluß des Graphen von T in $\mathcal{H} \oplus \mathcal{K}$ wiederum Graph einer linearen Abbildung $\overline{T}$ ist, so heißt T *abschließbar* und $\overline{T}$ der *Abschluß* von T. T heißt *abgeschlossen*, wenn der Graph von T bereits abgeschlossen ist.

Sei $t : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ eine Sesquilinearform mit Definitionsbereich $D(t) \times D(t)$. $t(u) := t(u,u)$.

$$\Theta(t) := \{t(u) \mid u \in D(t), \|u\| = 1\}.$$

Definition 1.7.2 t heißt *sektoriell*, wenn es ein reelles γ und ein $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ gibt, so daß

$$\Theta(t) \subset \{\xi \in \mathbb{C} \; : \; |\arg(\xi - \gamma)| \leq \theta\}.$$

Positive Formen sind sektoriell: Wähle $\gamma = \theta = 0$.

Definition 1.7.3 Sei t sektoriell. Eine Folge $\{u_n\}$ von Vektoren aus $\mathcal{H}$ heißt *t-konvergent (gegen $u \in \mathcal{H}$)*, (schreibe $u_n \xrightarrow{t} u$), wenn $u_n \in D(t)$, $u_n \longrightarrow u$ und $t(u_n - u_m) \longrightarrow 0$ für $n, m \to \infty$. t heißt *abgeschlossen*, wenn aus $u_n \xrightarrow{t} u$ folgt: $u \in D(T)$ und $t(u_n - u) \longrightarrow 0$.

2 Interpolationsräume

(Nach [BL],[Tr].)
Die Interpolation zweier Räume liefert einen Raum, der in gewissem Sinne „zwischen" den beiden ursprünglichen Räumen liegt. Der Banachraum L^p als Interpolationsraum von L^1 und L^∞ ist das für das Folgende interessante Beispiel.

2.1 Verträgliche Paare

Seien A_0 und A_1 topologische Vektorräume.

Definition 2.1.1 A_0 und A_1 heißen (miteinander) *verträglich*, oder das Paar (A_0, A_1) heißt *verträglich*, wenn es einen Hausdorffschen topologischen Vektorraum A gibt, so daß A_0 und A_1 Teilräume von A mit stetigen Inklusionsabbildungen sind.

In diesem Fall existiert deren Summe

$$A_0 + A_1 = \{a \in A \mid \exists a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1 : a = a_0 + a_1\}$$

und deren Durchschnitt $A_0 \cap A_1$.

Lemma 2.1.2 *Seien A_0 und A_1 verträgliche normierte Vektorräume. Dann ist $A_0 \cap A_1$ mit folgender Norm ein normierter Vektorraum:*

$$\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max\left(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\right), \qquad a \in A_0 \cap A_1.$$

Ebenso ist $A_0 + A_1$ ein normierter Vektorraum mit

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf\left\{\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1} \mid a = a_0 + a_1;\ a_0 \in A_0,\ a_1 \in A_1\right\}, \quad a \in A_0+A_1.$$

Falls A_0 und A_1 vollständig sind, so auch $A_0 \cap A_1$ und $A_0 + A_1$.

Beweis: Siehe [BL], lemma 2.3.1.

Die normierten Vektorräume mit den beschränkten linearen Abbildungen als Morphismen bilden eine Kategorie $\mathcal{N}$. Sei $\mathcal{C}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{N}$. $\mathcal{C}_1$ sei die Kategorie aller verträglichen Paare $\overline{A} = (A_0, A_1)$, $A_0, A_1 \in \mathcal{C}$, so daß $A_0 \cap A_1$ und $A_0 + A_1$ in $\mathcal{C}$ liegen.
Die Morphismen $T : (A_0, A_1) \to (B_0, B_1)$ von $\mathcal{C}_1$ sind die beschränkten linearen Abbildungen von $A_0 + A_1$ nach $B_0 + B_1$, so daß

$$T|_{A_0} : A_0 \to B_0\,, \quad T|_{A_1} : A_1 \to B_1$$

Morphismen in $\mathcal{C}$ sind.
Die Funktoren Σ und $\cap$ von $\mathcal{C}_1$ nach $\mathcal{C}$ seien definiert durch

$$\cap(\overline{A}) = A_0 \cap A_1, \qquad \cap(T) = T|_{A_0 \cap A_1},$$
$$\Sigma(\overline{A}) = A_0 + A_1, \qquad \Sigma(T) = T.$$

Beispiel: Die Kategorie $\mathcal{C}$ aller Banachalgebren ist eine Unterkategorie von $\mathcal{N}$. $\mathcal{C}_1$ besteht aus allen verträglichen Paaren (A_0, A_1), so daß A_0, A_1 und $A_0 + A_1$ mit derselben Multiplikation Banachalgebren sind.[6]

2.2 Definition von Interpolationsräumen

Sei $\mathcal{C}$ eine unter Summen- und Durchschnittsbildung abgeschlossene Unterkategorie von $\mathcal{N}$. Sei $\mathcal{C}_1$ die Kategorie aller verträglichen Paare $\overline{A}$ von Elementen aus $\mathcal{C}$.

Definition 2.2.1 Sei $\overline{A} = (A_0, A_1) \in \mathcal{C}_1$ Ein Raum $A \in \mathcal{C}$ heißt *Zwischen-Raum von A_0 und A_1* (oder *bezüglich $\overline{A}$*), wenn

$$\cap(\overline{A}) \subset A \subset \Sigma(\overline{A})$$

mit stetigen Inklusionen. Gilt zusätzlich für Morphismen T

$$T : \overline{A} \to \overline{A} \quad \Longrightarrow \quad T|_A : A \to A,$$

so heißt A *Interpolationsraum von A_0 und A_1* (oder *bezüglich $\overline{A}$*).
Sind $\overline{A}$ und $\overline{B}$ zwei Paare aus $\mathcal{C}_1$, so heißen A und B *Interpolationsräume bezüglich $\overline{A}$ und $\overline{B}$*, wenn A bzw. B Zwischen-Räume bezüglich $\overline{A}$ bzw. $\overline{B}$ sind und für Morphismen T gilt

$$T : \overline{A} \to \overline{B} \quad \Longrightarrow \quad T|_A : A \to B.$$[7]

Seien A und B Interpolationsräume bezüglich $\overline{A}$ und $\overline{B}$. Die Norm eines Morphismus $T : A \to B$ werde bezeichnet mit

$$\|T\|_{A,B} = \sup_{\substack{a \in A \\ a \neq 0}} \frac{\|Ta\|_B}{\|a\|_A}.$$

Definition 2.2.2 A und B heißen *exakte Interpolationsräume*, wenn für alle Morphismen $T : \overline{A} \to \overline{B}$ gilt

$$\|T\|_{A,B} \leq \max\left(\|T\|_{A_0,B_0}, \|T\|_{A_1,B_1}\right),$$

und *exakt vom Exponenten θ* $(0 \leq \theta \leq 1)$, wenn

$$\|T\|_{A,B} \leq \|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta}.$$

---

[6] $A_0 \cap A_1$ ist dann ebenfalls eine Banachalgebra.

[7] Daraus folgt nicht notwendig, daß A bzw. B Interpolationsräume bezüglich $\overline{A}$ bzw. $\overline{B}$ sind!

Definition 2.2.3 Ein *Interpolationsfunktor* (oder eine *Interpolationsmethode*) *auf* $\mathcal{C}$ ist ein Funktor F von $\mathcal{C}_1$ nach $\mathcal{C}$, so daß $F(\overline{A})$ und $F(\overline{B})$ Interpolationsräume bezüglich $\overline{A}$ und $\overline{B}$ sind und

$$F(T) = T \qquad \forall\, \overline{A}, \overline{B} \in \mathcal{C}_1,\ T : \overline{A} \to \overline{B}\ \in \mathcal{C}_1.$$

F ist ein *exakter Interpolationsfunktor (vom Exponenten θ)*, falls $F(\overline{A})$ und $F(\overline{B})$ bezüglich $\overline{A}$ und $\overline{B}$ exakt (vom Exponenten θ) sind.

Beispiel: $\cap$ und Σ sind exakte Interpolationsfunktoren.

2.3 Die komplexe Interpolationsmethode

Die komplexe Interpolationsmethode hat gegenüber den reellen Methoden den Vorteil, daß im Fall der L^p-Räume die Interpolationsnorm und die L^p-Norm identisch sind. Bei reeller Interpolation erhält man lediglich äquivalente Normen. Die Aussage, daß zwei Normen äquivalent sind, ist jedoch auf der (endlichdimensionalen) Matrixalgebra $M_n(\mathbb{C})$ redundant, da alle Normen auf $M_n(\mathbb{C})$ äquivalent sind.

Seien

$$S := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 \le Re\, z \le 1\}$$

$$S_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < Re\, z < 1\}$$

Das folgende Lemma liefert eine Abschätzung für Funktionen auf S.

Lemma 2.3.1 *Sei $F : S \to \mathbb{C}$ holomorph auf S_0 und stetig und beschränkt auf S. Dann gilt*

$$|F(z)| \le \sup_{t \in \mathbb{R}}\{|F(it)|, |F(1+it)|\} \quad \forall z \in S.$$

Beweis: Die Behauptung folgt aus [BL], lemma 1.1.2.

Korollar 2.3.2 *Sei B ein Banachraum und $F : S \to B$ holomorph auf S_0 und stetig und beschränkt auf S. Dann gilt*

$$\|F(z)\| \le \sup_{t \in \mathbb{R}}\{\|F(it)\|, \|F(1+it)\|\} \ \forall z \in S.$$

Beweis: Sei $z \in S$. Zu $F(z)$ existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein lineares Funktional φ auf B, mit $\varphi(F(z)) = \|F(z)\|$ und $\|\varphi\| = 1$. Nach Satz 1.4.2 ist $\varphi \circ F$ holomorph. Aus Lemma 2.3.1 folgt

$$\begin{aligned}\|F(z)\| = |\varphi \circ F(z)| &\le \sup_{t \in \mathbb{R}}\{|\varphi \circ F(it)|, |\varphi \circ F(1+it)|\} \\ &\le \sup_{t \in \mathbb{R}}\{\|\varphi\|\|F(it)\|, \|\varphi\|\|F(1+it)\|\} \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}}\{\|F(it)\|, \|F(1+it)\|\}.\end{aligned}$$

□

Die komplexe Interpolationsmethode basiert auf der Betrachtung holomorpher Funktionen mit Werten in Banachräumen. Sei $\mathcal{B}$ die Kategorie der Banachräume. $\mathcal{B}$ ist eine Unterkategorie von $\mathcal{N}$, die unter Summen- und Durchschnittsbildung abgeschlossen ist (Lemma 2.1.2). $\mathcal{B}_1$ sei die Kategorie aller verträglichen Paare von Banachräumen. Sei $\overline{A} = (A_0, A_1) \in \mathcal{B}_1$. Mit $\mathcal{F}(\overline{A})$ werde der Raum aller Funktionen $f : S \to \Sigma(\overline{A})$ bezeichnet, die folgenden Bedingungen genügen:

(*i*) f ist beschränkt und stetig auf S,

(*ii*) f ist holomorph auf dem Inneren S_0 von S,

(*iii*) $t \to f(j + it)$ sind stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach A_j für $j = 0, 1$ und $\lim_{|t|\to\infty} f(j + it) = 0$.

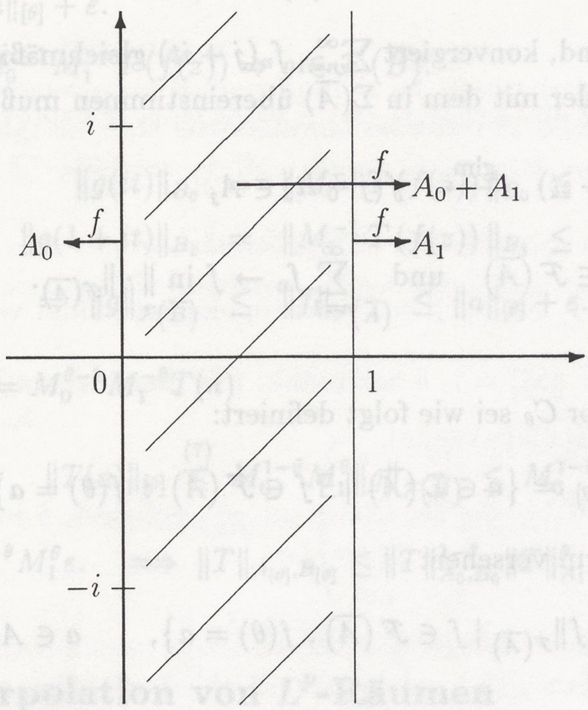

Abb. 1: $f \in \mathcal{F}(\overline{A})$

Mit der üblichen Addition und skalaren Multiplikation ist $\mathcal{F}(\overline{A})$ ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

Lemma 2.3.3 *$\mathcal{F}(\overline{A})$ mit der Norm*

$$\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} := \max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(it)\|_{A_0}, \sup_{t\in\mathbb{R}} \|f(1+it)\|_{A_1}\right), \qquad f \in \mathcal{F}(\overline{A})$$

ist ein Banachraum.

Beweis: Seien $f_n \in \mathcal{F}(\overline{A})$ $n = 1, 2, \ldots$, mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} < \infty$.

f_n ist beschränkt in $\Sigma(\overline{A})$: Aus Korollar 2.3.2 folgt

$$\|f_n(z)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leq \max\left(\sup_{t\in\mathbb{R}}\|f_n(it)\|_{\Sigma(\overline{A})}, \sup_{t\in\mathbb{R}}\|f_n(1+it)\|_{\Sigma(\overline{A})}\right) \quad \forall z \in S.$$

$$\Longrightarrow \|f_n(z)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leq \|f_n\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \qquad (6)$$

nach Definition der beiden Normen.

Da $\Sigma(\overline{A})$ ein Banachraum ist, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ auf S gleichmäßig gegen eine Funktion f mit Werten in $\Sigma(\overline{A})$. Deshalb ist f beschränkt und stetig auf S und holomorph auf S_0. Außerdem gilt

$$\|f_n(j+it)\|_{A_j} \leq \|f_n\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \qquad j = 0, 1.$$

Da die A_j vollständig sind, konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j+it)$ gleichmäßig in t gegen einen Grenzwert in A_j, der mit dem in $\Sigma(\overline{A})$ übereinstimmen muß, d. h.

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(j+it) \xrightarrow{\text{glm.}} f(j+it) \in A_j$$

$$\Longrightarrow \quad f \in \mathcal{F}(\overline{A}) \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n \to f \text{ in } \|\cdot\|_{\mathcal{F}(\overline{A})}.$$

□

Der Interpolationsfunktor C_θ sei wie folgt definiert:

$$C_\theta(\overline{A}) := A_{[\theta]} := \{a \in \Sigma(\overline{A}) \mid \exists f \in \mathcal{F}(\overline{A}) \,:\, f(\theta) = a\}.$$

A_θ sei mit folgender Norm versehen:

$$\|a\|_{[\theta]} = \inf\{\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \mid f \in \mathcal{F}(\overline{A}), f(\theta) = a\}, \qquad a \in A_{[\theta]}.$$

Satz 2.3.4 *$A_{[\theta]}$ ist ein Banachraum und ein Zwischen-Raum bezüglich $\overline{A}$. C_θ ist ein exakter Interpolationsfunktor vom Exponenten θ.*

Beweis: (6) zeigt, daß die Abbildung $f \to f(\theta)$ von $\mathcal{F}(\overline{A})$ nach $\Sigma(\overline{A})$ stetig ist. Der Kern

$$N_\theta = \{f \in \mathcal{F}(\overline{A}) \mid f(\theta) = 0\}$$

dieser Abbildung ist abgeschlossen in $\mathcal{F}(\overline{A})$, deshalb ist $\mathcal{F}(\overline{A})/N_\theta$ ein Banachraum. $A_{[\theta]}$ ist isometrisch isomorph zu $\mathcal{F}(\overline{A})/N_\theta$ und somit ebenfalls ein Banachraum. $A_{[\theta]} \subset \Sigma(\overline{A})$ mit stetiger Inklusion, weil aus (6) für $f \in \mathcal{F}(\overline{A})$ mit $f(\theta) = a \in A_{[\theta]}$ folgt

$$\|a\|_{\Sigma(\overline{A})} = \|f(\theta)\|_{\Sigma(\overline{A})} \leq \|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})}.$$

Zu $a \in \cap(\overline{A})$ sei $f_a(z) = \exp(\delta(z-\theta)^2)a$ für ein $\delta > 0$.
$\Longrightarrow f_a \in \mathcal{F}(\overline{A})$, $f_a(\theta) = a$.

$$\begin{aligned} \|f_a\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} &\le \max\left(\exp(\delta)\|a\|_{A_0}, \exp(\delta)\|a\|_{A_1}\right) \\ \Longrightarrow \quad \|a\|_{[\theta]} &\le \|a\|_{\cap(\overline{A})} \\ \Longrightarrow \quad \cap(\overline{A}) &\subset A_{[\theta]} \quad \text{mit stetiger Inklusion.} \end{aligned}$$

Somit ist $A_{[\theta]}$ ein Zwischen-Raum bezüglich $\overline{A}$. Es bleibt zu zeigen, daß C_θ exakt vom Exponenten θ ist.
Seien $\overline{A} = (A_0, A_1)$, $\overline{B} = (B_0, B_1) \in \mathcal{B}_1$, T ein Morphismus von $\overline{A}$ nach $\overline{B}$, der A_j nach B_j mit der Norm M_j abbildet (j=0,1).
Zu $a \in A_{[\theta]}$ und beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $f \in \mathcal{F}(\overline{A})$, so daß $f(\theta) = a$ und $\|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \le \|a\|_{[\theta]} + \varepsilon$.
Sei $g(z) := M_0^{z-1} M_1^{-z} T(f(z)) \Rightarrow g \in \mathcal{F}(\overline{B})$.
Sei $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \|g(it)\|_{B_0} &= \|M_0^{-1} T(f(z))\|_{B_0} \le \|f(z)\|_{A_0} \\ \|g(1+it)\|_{B_1} &= \|M_1^{-1} T(f(z))\|_{B_1} \le \|f(z)\|_{A_1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \|g\|_{\mathcal{F}(\overline{B})} \le \|f\|_{\mathcal{F}(\overline{A})} \le \|a\|_{[\theta]} + \varepsilon. \tag{7}$$

Nun ist $g(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} T(a)$

$$\Longrightarrow \quad \|T(a)\|_{[\theta]} \stackrel{(7)}{\le} M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|g\|_{\mathcal{F}(\overline{B})} \le M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|a\|_{[\theta]} + \varepsilon'$$

mit $\varepsilon' = M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \varepsilon$. $\quad \Longrightarrow \|T\|_{A_{[\theta]}, B_{[\theta]}} \le \|T\|_{A_0,B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1,B_1}^{\theta}$.

□

2.4 Interpolation von L^p-Räumen

Sei μ ein positives Maß auf einer σ-Algebra des Raumes X. Zwei Funktionen auf X heißen äquivalent, wenn ihre Funktionswerte μ–fast überall übereinstimmen. L^∞ sei der Raum aller Äquivalenzklassen von meßbaren Funktionen, die eine beschränkte Funktion enthalten. L^p sei der Raum aller Äquivalenzklassen von meßbaren Funktionen f, für die

$$\|f\|_p^p = \int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) < \infty.$$

Satz 2.4.1 *Seien p_0, $p_1 \ge 1$ und $0 < \theta < 1$. Dann ist*

$$\left(L^{p_0}, L^{p_1}\right)_{[\theta]} = L^p \qquad \textit{mit gleicher Norm,}$$

wobei $\frac{1}{p} := \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. *Dabei sei der Wert* ∞ *für* p_j $(j = 0,1)$ *zugelassen und* $\frac{\theta}{p_j} = 0$ *für* $p_j = \infty$, $0 < \theta < 1$.

Bemerkung: Die Interpolationstheorie ist auf (L^{p_0}, L^{p_1}) anwendbar, denn die Summe beider Räume läßt sich auf die übliche Art – durch punktweise Addition der Funktionen – bilden und wird mit der Summennorm ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum, der L^{p_0} und L^{p_1} stetig enthält.

Beweis (Satz 2.4.1): Es genügt zu zeigen, daß die Normen für beschränkte Funktionen a mit μ-endlichem Träger gleich sind, da diese dicht in L^p liegen.
Œ $\|a\|_p = 1$. Sei $\varepsilon > 0$; $f : S \to \Sigma(L^{p_0}, L^{p_1})$:

$$f(z) := \exp(\varepsilon z^2 - \varepsilon\theta^2)|a|^{\frac{p}{p(z)}} \frac{a}{|a|},$$

wobei $\frac{1}{p(z)} := \frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}$.
Dann ist $f \in \mathcal{F}(L^{p_0}, L^{p_1})$ und $\|f\|_{\mathcal{F}(L^{p_0}, L^{p_1})} \leq \exp(\varepsilon)\|a\|_p = \exp(\varepsilon)$.

$$\begin{aligned} f(\theta) = a \implies \|a\|_{[\theta]} &\leq \exp(\varepsilon) \\ \implies \|a\|_{[\theta]} &\leq \|a\|_p. \end{aligned} \tag{8}$$

Umgekehrt: Sei $\|a\|_{[\theta]} = 1$. Sei $(L^p)' = L^q$ das topologische Dual von L^p.

$\|a\|_p = \sup\{|\langle a, b\rangle| \; : \; \|b\|_q = 1,\; b$ beschränkt mit μ-endlichem Träger$\}$,
wobei $\langle a, b\rangle = \int_X \overline{b(x)} a(x)\, d\mu(x)$.

Seien $\frac{1}{q_j} := 1 - \frac{1}{p_j}$ $(j = 0,1)$, $\frac{1}{q(z)}$ sei analog zu $\frac{1}{p(z)}$ definiert, b sei beschränkt mit μ-endlichem Träger. Sei $g : S \to \Sigma(L^{q_0}, L^{q_1})$,

$$g(z) := \exp(\varepsilon z^2 - \varepsilon\theta^2)|b|^{\frac{q}{q(z)}} \frac{b}{|b|}.$$

$F : S \to \mathbb{C}$, $F(z) := \langle f(z), g(z)\rangle$.

$$\begin{aligned} |F(it)| &\leq \exp(\varepsilon) \\ |F(1+it)| &\leq \exp(2\varepsilon). \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.3.1 folgt

$$|\langle a, b\rangle| = |F(\theta)| \leq \exp(2\varepsilon).$$

D. h. $\|a\|_p \leq \|a\|_{[\theta]}$.
Zusammen mit (8) ergibt sich die Behauptung.

□

3 Der Spezialfall $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$

In diesem Abschnitt werden einige Besonderheiten der endlich-dimensionalen Hilberträume und der von Neumann-Algebren auf diesen Räumen untersucht.

3.1 Die von Neumann-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$

Sei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Standard-Skalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$:

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} \overline{y_j} x_j \quad \text{für } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n.$$

$(\mathbb{C}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist ein Hilbertraum.

Jeder n-dimensionale Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist isometrisch isomorph zu $\mathbb{C}^n$, denn jede Abbildung, die eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ bijektiv auf eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^n$ abbildet, ergibt – linear fortgesetzt – einen isometrischen Isomorphismus.

$\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ ist eine von Neumann-Algebra und läßt sich mit $M_n(\mathbb{C})$, der Algebra aller $n \times n$-Matrizen, identifizieren. Diese Identifikation wird im folgenden benutzt.

Bezeichnungen: $\mathcal{A} := \mathcal{B}(\mathbb{C}^n) = M_n(\mathbb{C})$.

Sei $A \in \mathcal{A}$,

$$A = (a_{jk})_{jk} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Indizes geben in der Reihenfolge Zeilen- und Spaltennummer an, in denen der betreffende Eintrag steht. $(A)_{jk}$ stehe für den Eintrag in der j-ten Zeile und k-ten Spalte der Matrix A; mit obiger Bezeichnung: $(A)_{jk} = a_{jk}$.

Diagonalmatrizen werden durch Angabe ihrer Diagonalelemente erklärt.

$$\operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) := (a_{jk})_{jk}, \text{ mit } a_{jk} = \begin{cases} \alpha_j & \text{für } j = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$E_{jk} \in \mathcal{A}$ sei die Matrix mit dem Eintrag 1 an der Stelle jk und 0 an allen anderen Stellen. Analog sei $e_j \in \mathbb{C}^n$ definiert.

$E_{jj} \in \mathcal{A}^+$ für $j = 1, \ldots, n$, denn $\langle E_{jj}x, x\rangle = |x_j|^2 \geq 0$.

Proposition 3.1.1 *$\mathcal{A}'$, die Kommutante von $\mathcal{A}$, besteht aus den Vielfachen der Einheitsmatrix.*

Beweis: Sei $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathcal{A}'$.

$$\begin{array}{rrcl} \Longrightarrow & AE_{jk} & = & E_{jk}A \quad 1 \le j,k \le n. \\ \Longrightarrow & \sum_{l=1}^{n} a_{lj}E_{lk} & = & \sum_{m=1}^{n} a_{km}E_{jm} \\ l=j,\, m=k \Longrightarrow & a_{jj} & = & a_{kk}, \\ l \ne j \Longrightarrow & a_{lj} & = & 0, \end{array}$$

weil die E_{jk} linear unabhängig sind.

□

3.2 Spur und halbendliche Gewichte auf $\mathcal{A}$

Lemma 3.2.1 *Ein halbendliches Gewicht auf $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ ist endlich.*

Beweis: Sei φ ein halbendliches Gewicht auf $\mathcal{A}$, also M_φ schwach dicht in $\mathcal{A}$. Ein schwach dichter Teilraum von $\mathcal{A}$ muß bereits $\mathcal{A}$ selbst sein:
Sei $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, $A_\lambda = (a^\lambda_{jk})_{jk} \in \mathcal{A}$ ein gegen $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathcal{A}$ schwach konvergentes Netz.

$$a^\lambda_{jk} = \langle A_\lambda e_k, e_j\rangle \to \langle Ae_k, e_j\rangle = a_{jk}.$$

Also konvergiert $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ sogar in der Maximumnorm:

$$\|A\|_{\max} := \max_{j,k=1,\dots,n} \{|a_{jk}|\}.$$

Somit ist die schwache Topologie auf $\mathcal{A}$ feiner als die Topologie, die von der Maximumnorm oder jeder anderen Norm auf $\mathcal{A}$ induziert wird. Da jeder endlichdimensionale Teilraum eines normierten Raumes abgeschlossen ist[8], ist jeder Teilraum von $\mathcal{A}$ auch schwach abgeschlossen. Deshalb gilt $I \in M_\varphi$, und daher ist $\varphi(I) < \infty$.

□

Die Standard-Spur auf $\mathcal{A}$ ist die Funktion, die ein $A \in \mathcal{A}$ auf die Summe seiner Diagonalelemente abbildet; sie werde mit τ bezeichnet.

$$\tau(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} \qquad \text{für } A = (a_{jk})_{jk} \in \mathcal{A}.$$

τ ist eine Spur im Sinne der Definition 1.6.2. (Man denke sich τ eingeschränkt auf $\mathcal{A}^+$ und linear fortgesetzt auf $\mathcal{A}$; dies ist möglich, da τ endlich ist.)
Die Linearität ist klar.

[8]Siehe [He], Kapitel II, Satz 11.4.

Seien $A, B \in \mathcal{A}$.

$$\begin{aligned} \tau(AB) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{jk} \\ &= \tau(BA). \end{aligned} \tag{9}$$

Positivität: Die Diagonalelemente einer positiven Matrix sind positiv: $a_{jj} = \langle Ae_j, e_j\rangle \geq 0$ für $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathcal{A}^+$.

Mit Hilfe von τ lassen sich alle halbendlichen Gewichte auf $\mathcal{A}$ beschreiben. Es besteht eine bijektive Beziehung zwischen $\mathcal{A}^+$ und den halbendlichen Gewichten.

Satz 3.2.2 *Zu einem halbendlichen Gewicht auf* $\mathcal{A}$ *existiert eine eindeutig bestimmte Matrix* $T_\varphi \in \mathcal{A}^+$ *mit*

$$\varphi(A) = \tau(AT_\varphi) \qquad \forall A \in \mathcal{A}^{(+)}.$$

Umgekehrt wird durch $\varphi_T(A) := \tau(AT)$ *für* $T \in \mathcal{A}^+$ *ein halbendliches Gewicht* φ_T *definiert.*

Bemerkung: Aus diesem Satz folgt, daß τ bis auf Vielfache die einzige endliche Spur auf $\mathcal{A}$ ist: Sei ψ eine beliebige endliche Spur auf $\mathcal{A}$. Es existiert also ein $T \in \mathcal{A}^+$, mit $\psi(A) = \tau(AT)$ für $A \in \mathcal{A}$. Da ψ eine Spur ist, gilt für alle $1 \leq j, k \leq n$

$$\begin{aligned} \psi(E_{jj}) = \psi(E_{jk}E_{kj}) &= \psi(E_{kj}E_{jk}) = \psi(E_{kk}) \\ \Longleftrightarrow \quad \tau(E_{jj}T) &= \tau(E_{kk}T) \\ \Longleftrightarrow \quad (T)_{jj} &= (T)_{kk}. \end{aligned} \tag{10}$$

Für $j \neq k$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \psi(0) = \psi(E_{jj}E_{kj}) = \psi(E_{kj}E_{jj}) \\ &= \psi(E_{kj}) = \tau(E_{kj}T) \\ &= (T)_{jk}. \end{aligned} \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt, daß T ein Vielfaches der Einheitsmatrix und damit ψ ein Vielfaches von τ ist.

Beweis (Satz 3.2.2): Zunächst wird der zweite Teil bewiesen.
Seien $T \in \mathcal{A}^+$, φ_T wie im Satz, $A, B \in \mathcal{A}^+, \alpha \geq 0$.
Linearität:

$$\begin{aligned} \varphi_T(A+B) &= \tau((A+B)T) = \tau(AT+BT) \\ &= \tau(AT) + \tau(BT) = \varphi_T(A) + \varphi_T(B), \end{aligned}$$

$$\varphi_T(\alpha A) = \tau(\alpha AT) = \alpha\tau(AT) = \alpha\varphi_T(A).$$

Positivität: T läßt sich nach dem Spektralsatz für Matrizen durch Transformation mit einer unitären Matrix U auf Diagonalgestalt bringen.

$$U^*TU = \operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Dabei bleibt die Positivität erhalten, denn für $x \in \mathbb{C}^n$ gilt

$$\langle U^*TUx, x\rangle = \langle TUx, Ux\rangle \overset{y=Ux}{=} \langle Ty, y\rangle \geq 0.$$

Deshalb sind $\alpha_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n$. U^*AU ist ebenfalls positiv, da $A \in \mathcal{A}^+$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \varphi_T(A) &= \tau(AT) \\
&= \tau(A\underbrace{UU^*}_{=I}T\underbrace{UU^*}_{=I}) \\
&\overset{(9)}{=} \tau(U^*AUU^*TU) \\
&= \tau(U^*AU\operatorname{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(U^*AU)_{jj}}_{\geq 0} \underbrace{\alpha_j}_{\geq 0} \geq 0.
\end{aligned}$$

φ_T ist endlich, speziell halbendlich, denn

$$\varphi_T(I) = \tau(IT) = \tau(T) = \sum_{j=1}^{n} t_{jj} < \infty.$$

Sei nun φ ein beliebiges halbendliches Gewicht auf $\mathcal{A}$. φ ist endlich (Lemma 3.2.1) und läßt sich somit zu einem linearen Funktional auf $\mathcal{A}$ fortsetzen.

$\mathcal{A}$ ist als Vektorraum isomorph zu $\mathbb{C}^{n^2}$. Nach dem Satz von Riesz gibt es zur Linearform φ auf $\mathbb{C}^{n^2}$ ein eindeutig bestimmtes $S = (s_{jk})_{jk} \in \mathbb{C}^{n^2}$, mit

$$\varphi(A) = \langle A, S\rangle_{\mathbb{C}^{n^2}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \overline{s_{jk}} a_{jk}.$$

Setze $T := S^* = (\overline{s_{kj}})_{jk}$ (aufgefaßt als Element von $\mathcal{A}$).

$$\Longrightarrow \quad \varphi(A) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} t_{kj} = \tau(AT).$$

T ist positiv: Sei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ beliebig. $A := (x_j \overline{x_k})_{jk}$ ist positiv (s. u.).

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad 0 \ \leq \ \varphi(A) &= \tau(AT) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \overline{x_k} t_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{kj} x_j \overline{x_k} \\
&= \langle Tx, x\rangle.
\end{aligned}$$

Aus dieser Ungleichung folgt auch, daß T selbstadjungiert ist. Dies resultiert aus folgender Darstellung des Skalarprodukts:[9]

$$\begin{aligned}
\langle Tx, y\rangle &= \sum_{m=0}^{3} i^m \underbrace{\langle T(x+i^m y), x+i^m y\rangle}_{\geq 0} \\
&= \sum_{m=0}^{3} i^m \overline{\langle T(x+i^m y), x+i^m y\rangle} \\
&= \sum_{m=0}^{3} i^m \langle x+i^m y, T(x+i^m y)\rangle \\
&= \langle x, Ty\rangle.
\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, daß A positiv ist. A ist offensichtlich selbstadjungiert.
Sei $y \in \mathbb{C}^n$.

$$\langle Ay, y\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k \overline{y_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \overline{x_k} y_k \overline{y_j}.$$

Setze $z_j := x_j \overline{y_j},\ j = 1, \ldots, n$.

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow \quad \langle Ay, y\rangle &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_j \overline{z_k} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{z_k}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{n} z_j\right)\left(\overline{\sum_{j=1}^{n} z_j}\right) \\
&= \left|\sum_{j=1}^{n} z_j\right|^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2.3 *Ein endliches, auf ganz* $\mathcal{A}$ *fortgesetztes Gewicht* φ *ist ein positives normales lineares Funktional, somit ist insbesondere* φ *als Gewicht normal.*

Beweis: Es ist zu zeigen, daß φ als Funktional auf ganz $\mathcal{A}$ ultra-schwach stetig ist.
Nach Satz 3.2.2 gibt es ein $T \in \mathcal{A}^+$ mit

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \tau(AT) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk} t_{kj}
\end{aligned}$$

[9] Siehe [Ta]: Polarization identity.

$$\overset{t_j := Te_j}{=} \sum_{j=1}^{n} \langle At_j, e_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \omega_{t_j, e_j}(A) \quad \forall A \in \mathcal{A},$$

wobei t_j, die j-te Spalte von T, als Element von $\mathbb{C}^n$ aufgefaßt wird. Nach Proposition 1.2.3 ist φ ultra-schwach stetig.

□

Die treuen endlichen Gewichte auf $\mathcal{A}$ sind mittels der Spurdarstellung ebenfalls einfach zu charakterisieren. Zu diesem Zweck wird zunächst folgendes Lemma benötigt:

Lemma 3.2.4 *Sei $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathcal{A}^+$, mit $a_{jj} = 0$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist $A = 0$.*

Beweis: Annahme: Es gibt Indizes j, k, so daß $a_{jk} = \overline{a_{kj}} \neq 0$.
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ beliebig.

$$A(\alpha e_j + e_k) = \begin{pmatrix} \alpha a_{1j} + a_{1k} \\ \vdots \\ \alpha a_{nj} + a_{nk} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle A(\alpha e_j + e_k), \alpha e_j + e_k \rangle &= \overline{\alpha}(\alpha \underbrace{a_{jj}}_{=0} + a_{jk}) + \alpha a_{kj} + \underbrace{a_{kk}}_{=0} \\ &= \overline{\alpha} a_{jk} + \alpha a_{kj} \\ &= 2\,Re\,(\alpha a_{kj}) = -2 \quad \text{für } \alpha = -\tfrac{1}{a_{kj}}. \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Positivität von A.

□

Satz 3.2.5 *Sei φ ein endliches Gewicht auf $\mathcal{A}$, $T \in \mathcal{A}^+$ mit $\varphi(A) = \tau(AT)$ für $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt*

$$\varphi \text{ ist treu} \iff T \text{ ist nichtsingulär.}$$

Beweis:

„$\Longrightarrow$“: Sei T singulär, d. h. die Spalten $t_1, \ldots, t_n$ von T sind linear abhängig, spannen also $\mathbb{C}^n$ nicht auf. Sei A die Projektion auf das orthogonale Komplement von $\mathrm{Lin}\{t_1, \ldots, t_n\}$. $0 \neq A \in \mathcal{A}^+$.
Aus dem Beweis des Satzes 3.2.3 folgt

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\langle At_j, e_j \rangle}_{=0} = 0.$$

$\Rightarrow \varphi$ ist nicht treu.

„$\Longleftarrow$": Sei T nichtsingulär und U unitär, so daß

$$U^*TU = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Bei dieser Transformation bleiben Positivität und Nichtsingularität erhalten, deshalb sind alle α_j echt größer als 0.
Sei $0 \neq A \in \mathcal{A}^+$.

$$\begin{aligned}
\varphi(A) &= \tau(AT) = \tau(AUU^*TUU^*) \\
&= \tau(U^*AU \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \underbrace{(U^*AU)_{jj}}_{\substack{>0 \text{ für ein } j \\ \text{nach Lemma 3.2.4}}} \underbrace{\alpha_j}_{>0} > 0.
\end{aligned}$$

□

4 Die räumliche Ableitung eines Gewichtes

Der Operator T_φ, der ein Gewicht φ auf der Matrixalgebra durch

$$\varphi(A) = \tau(AT_\varphi) \tag{12}$$

definiert, erinnert an eine Radon-Nikodym-Ableitung. Wären φ und τ lineare Funktionale/Maße auf einem Funktionenraum $\mathcal{F}$, so wäre die Radon-Nikodym-Ableitung T_φ (falls sie existierte) bestimmt durch:

$$\varphi(A) = \int A\, d\varphi = \int AT_\varphi\, d\tau = \tau(AT_\varphi) \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

Diese Gleichung entspricht formal der Gleichung (12). In der Tat ist T_φ die räumliche Ableitung von φ, jedoch nicht bezüglich τ, sondern bezüglich eines Gewichtes auf der Kommutante der Matrixalgebra im Sinne von [Co] (s. u.).

4.1 Definition der räumlichen Ableitung

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$ und ψ ein treues halbendliches normales Gewicht auf $\mathcal{A}'$. $\mathcal{H}_\psi$ sei die Vervollständigung von N_ψ in bezug auf das Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle = \langle A, B\rangle_{\mathcal{H}_\psi} = \psi(B^*A).$$

Dies ist ein Skalarprodukt, da ψ treu ist.[10] Sei i die kanonische Injektion von N_ψ in $\mathcal{H}_\psi$.

Definition 4.1.1 $x \in \mathcal{H}$ heißt *ψ-beschränkt*, wenn es ein $C > 0$ gibt, so daß

$$\|Ax\| \leq C\|i(A)\|_{\mathcal{H}_\psi} \qquad \forall A \in N_\psi.$$

$D = D(\mathcal{H}, \psi)$ sei der Raum der ψ-beschränkten Vektoren von $\mathcal{H}$. Zu $x \in D$ existiert ein eindeutig bestimmter beschränkter Operator $R^\psi(x)$ von $\mathcal{H}_\psi$ nach $\mathcal{H}$ mit

$$R^\psi(x)\, i(A) = Ax \qquad \forall A \in N_\psi.$$

Der adjungierte Operator $T^\psi(x) = (R^\psi(x))^* : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_\psi$ ist bestimmt durch die Gleichung

$$\langle T^\psi(x)y, i(A)\rangle_{\mathcal{H}_\psi} = \langle y, Ax\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall y \in \mathcal{H}.$$

Proposition 4.1.2 *Seien $\mathcal{H}$, $\mathcal{A}$ und ψ wie oben. Dann sind die Operatoren*

$$\theta^\psi(x, y) := R^\psi(x)T^\psi(y) \in \mathcal{A}, \qquad x, y \in D.$$

[10] Siehe [T] oder [K1]: Gelfand-Naimark-Segal Konstruktion.

Beweis: Zu $A \in \mathcal{A}'$ sei L_A der Operator auf $\mathcal{H}_\psi$, der auf N_ψ der Linksmultiplikation mit A entspricht:

$$L_A(B) = AB \quad \text{für } B \in N_\psi.$$

Offenbar gilt

$$\begin{aligned} R^\psi(x)L_A &= AR^\psi(x) \qquad \forall A \in \mathcal{A}', x \in \mathcal{H} \qquad (13) \\ \Rightarrow \quad L_A^*(R^\psi(x))^* &= (R^\psi(x))^* A^* \\ \Rightarrow \quad L_{A^*}T^\psi(x) &= T^\psi(x)A^* \qquad \forall A \in \mathcal{A}', x \in \mathcal{H}. \qquad (14) \end{aligned}$$

$$R^\psi(x)T^\psi(y)A \overset{(14)}{=} R^\psi(x)L_A T^\psi(y) \overset{(13)}{=} AR^\psi(x)T^\psi(y)$$

$$\Longrightarrow \theta^\psi(x,y) \in \mathcal{A}''.$$

□

Sei φ ein halbendliches normales Gewicht auf $\mathcal{A}$, ψ ein treues halbendliches normales Gewicht auf $\mathcal{A}'$.

Definition 4.1.3 Die *räumliche Ableitung* $d\varphi/d\psi$ ist der größte positive Operator T, für den gilt

$$\langle Tx, x\rangle = \varphi(\theta^\psi(x,x)) \qquad \forall x \in D(\mathcal{H}, \psi).$$

4.2 Die räumliche Ableitung eines Gewichtes auf $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$

Sei $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$ und $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$.
$\mathcal{A}' = \{aI \mid a \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}$ (Siehe Abschnitt 3).
$\psi : \mathcal{A}' \to \mathbb{C}$ sei definiert durch

$$\psi(aI) = a.$$

ψ (eingeschränkt auf $(\mathcal{A}')^+$) ist ein treues halbendliches Gewicht. In diesem Fall gilt $\mathcal{H}_\psi \cong \mathbb{C} \cong \mathcal{A}'$. Die Elemente von $\mathcal{A}'$, $\mathcal{H}_\psi$ und $\mathbb{C}$ können also miteinander identifiziert werden. Da ψ endlich ist, gilt damit $N_\psi = \mathcal{H}_\psi = \mathcal{A}'$.

$$\Longrightarrow \quad R^\psi(x)a = ax \qquad \text{für } x \in \mathcal{H}, a \in N_\psi = \mathbb{C}.$$

Lemma 4.2.1 *Sei* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. *Dann ist*

$$\theta^\psi(x,x) = (x_j \overline{x_k})_{jk}.$$

Beweis: $T^\psi(x)$ ist durch folgende Gleichung bestimmt:

$$\begin{array}{rrcll} & \langle R^\psi(x)a, y\rangle_\mathcal{H} &=& \langle a, T^\psi(x)y\rangle_{\mathcal{H}_\psi} & \forall a \in \mathbb{C}, y \in \mathcal{H} \\ \Longleftrightarrow & \langle ax, y\rangle_\mathcal{H} &=& \psi((T^\psi(x)y)^* a) & \\ \Longleftrightarrow & a\langle x, y\rangle_\mathcal{H} &=& \overline{T^\psi(x)y}\, a & \\ a \neq 0 \Longrightarrow & \langle x, y\rangle_\mathcal{H} &=& \overline{T^\psi(x)y} & \\ \Longrightarrow & T^\psi(x)y &=& \langle y, x\rangle_\mathcal{H}. & \end{array}$$

Für $\theta^\psi(x,x)$ ergibt sich

$$\begin{array}{rrcll} & \theta^\psi(x,x)y &=& R^\psi(x)T^\psi(x)y & \\ & &=& R^\psi(x)\langle y, x\rangle_\mathcal{H} & \\ & &=& \langle y, x\rangle_\mathcal{H}\, x & \\ & &=& \Big(\sum_{j=1}^n \overline{x_j} y_j\Big) x & \\ & &=& \big(x_j \overline{x_k}\big)_{jk}\, y & \forall y \in \mathcal{H}. \\ \Longrightarrow & \theta^\psi(x,x) &=& \big(x_j\overline{x_k}\big)_{jk}. & \end{array}$$

□

Satz 4.2.2 *Sei φ ein halbendliches Gewicht auf $\mathcal{A}$. (φ ist normal nach Satz 3.2.3.) Sei T_φ die positive Matrix, für die $\varphi(A) = \tau(AT_\varphi)\ \forall A \in \mathcal{A}$, und sei ψ wie oben. Dann ist*

$$\frac{d\varphi}{d\psi} = T_\varphi.$$

Beweis:

$$\begin{array}{rcll} \left\langle \frac{d\varphi}{d\psi} x, x \right\rangle &=& \varphi(\theta^\psi(x,x)) & \\ &=& \tau(\theta^\psi(x,x)T_\varphi) & \\ &=& \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x_j \overline{x_k} (T_\varphi)_{kj} & \\ &=& \sum_{k=1}^n \overline{x_k} \sum_{j=1}^n (T_\varphi)_{kj} x_j & \\ &=& \sum_{k=1}^n \overline{x_k} (T_\varphi x)_k & \\ &=& \langle T_\varphi x, x\rangle & \forall x \in D(\mathcal{H}, \psi) = \mathcal{H}. \end{array}$$

Da für $T \in \mathcal{A}$ gilt

$$\langle Tx, y\rangle = \sum_{m=0}^3 i^m \langle T(x + i^m y), x + i^m y\rangle \qquad \forall x, y \in \mathcal{H}$$

und die Werte von $\langle Tx, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathcal{H}$ den Operator T eindeutig bestimmen, wird T bereits durch die Werte von $\langle Tx, x\rangle$ für alle $x \in \mathcal{H}$ bestimmt. Also ist $d\varphi/d\psi = T_\varphi$.

□

5 Integration bezüglich einer Spur

(5.1/5.2 nach [L1], Beweise siehe dort.)
Ähnlich wie Integrale auf Funktionenräumen bezüglich linearer Funktionale definiert man Integrale auf Operatoren, ausgehend von Spuren auf von Neumann-Algebren.

5.1 Das Oberintegral

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum und $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$.

$T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ für einen linearen Operator T bedeute $T : D(T) \to \mathcal{H}$, wobei $D(T)$, der Definitionsbereich von T, ein linearer Teilraum von $\mathcal{H}$ ist.

Definition 5.1.1 Ein linearer Operator $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ heißt *affiliiert mit* $\mathcal{A}$, wenn $TU = UT$ für alle unitären $U \in \mathcal{A}'$

Sei φ eine treue halbendliche normale Spur auf $\mathcal{A}$. Sei $\mathcal{B}$ die Menge aller dicht definierten ($D(T)$ dicht in $\mathcal{H}$) abgeschlossenen linearen Operatoren, die mit $\mathcal{A}$ affiliiert sind. Auf $\mathcal{B}^+$, der Menge der positiven Elemente von $\mathcal{B}$, sei das Oberintegral $\overline{\varphi}$ definiert durch:

$$\overline{\varphi}(T) = \inf\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \;\middle|\; A_n \in \mathcal{A}^+, \sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq T \right\},$$

wobei $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq T$ bedeute: $\sum_{n=1}^{\infty} \langle A_n x, x\rangle \geq \langle Tx, x\rangle \quad \forall x \in D(T)$.

Proposition 5.1.2 $\varphi = \overline{\varphi}$ *auf* $\mathcal{A}^+$

Definition 5.1.3 Ein Unterraum $\mathcal{S}$ von $\mathcal{H}$ heißt *φ-dicht*, wenn es für alle $\varepsilon > 0$ eine Projektion $P \in \mathcal{A}$ gibt, mit $P\mathcal{H} \subset \mathcal{S}$ und $\varphi(I - P) < \varepsilon$.

Ein φ-dichter Teilraum ist normdicht, da φ treu ist.

5.2 L^1 und L^p

$\mathcal{M}$ sei die Menge aller $T \in \mathcal{B}$, so daß $D(T)$ φ-dicht ist. Für $1 \leq p < \infty$ wird $L^p = L^p_\varphi$ folgendermaßen definiert:

$$L^p = \{T \in \mathcal{M} \mid \overline{\varphi}(|T|^p) < \infty\},$$
$$\|T\|_p = \overline{\varphi}(|T|^p)^{\frac{1}{p}} \text{ für } T \in L^p.$$

$\overline{\varphi}$ läßt sich auf L^1 zu einem linearen Funktional fortsetzen. L^1 ist ein $\mathcal{A}$-Modul, und es gilt

$$\|T\|_1 = \sup\{\overline{\varphi}(ST) \mid S \in \mathcal{A}, \|S\| \leq 1\} \quad \text{für } T \in L^1. \tag{15}$$

Satz 5.2.1 *L^1 ist vollständig.*

Satz 5.2.2 *Die Abbildung $T \to \varphi_T$, wobei $\varphi_T(A) = \overline{\varphi}(AT)$ für $A \in \mathcal{A}$, ist ein isometrischer Isomorphismus von L^1 nach $\mathcal{A}_*$, dem Prädual von $\mathcal{A}$.*

Um L^p mit einem Interpolationsraum von L^1 und $\mathcal{A} =: L^\infty$ zu identifizieren, müssen L^1 und $\mathcal{A}$ ein verträgliches Paar bilden, also stetige Einbettungen von L^1 und $\mathcal{A}$ in einen Hausdorffschen topologischen Vektorraum existieren.

$$\text{Sei} \quad N(\varepsilon) = \{\, T \in \mathcal{M} \mid \exists \text{ Projektion } P \in \mathcal{A} : P\mathcal{H} \subset D(T), \|TP\| < \varepsilon, \varphi(I-P) < \varepsilon \}.$$

Die Topologie, die durch die Nullumgebungsbasis $\{N(\varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$ definiert ist, macht $\mathcal{M}$ zu einem Hausdorffschen topologischen Vektorraum. L^1 und $\mathcal{A}$ sind nach Definition in $\mathcal{M}$ enthalten. Die Inklusionen sind stetig.

Somit ist die Interpolationstheorie anwendbar. Wie bei den Funktionen-L^p-Räumen gilt folgende Gleichung:

Satz 5.2.3 $L^p = (\mathcal{A}, L^1)_{\left[\frac{1}{p}\right]}$ *mit gleicher Norm.*

Korollar 5.2.4 *L^p ist ein Vektorraum, $\|\cdot\|_p$ ist eine Norm, und L^p ist mit dieser Norm vollständig.*

5.3 Integration bezüglich τ

Sei $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$, τ die Spur auf $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{H}$ und $\mathcal{A}$ endlich-dimensional sind, gibt es keine echten dichten Teilräume. Außerdem sind alle Operatoren, die mit $\mathcal{A}$ affiliiert sind, bereits in $\mathcal{A}$ enthalten. Deshalb gilt hier: $\mathcal{A} = \mathcal{M} = \mathcal{B}$, wobei $\mathcal{M}$ bezüglich τ definiert sei. Da τ endlich ist, sind $\mathcal{A}$ und $L^1 = L^1_\tau$ als Mengen gleich. Nach Proposition 5.1.2 ist $\tau = \overline{\tau}$ auf $\mathcal{A}^+$ und damit $\tau = \overline{\tau}$ auf $\mathcal{A}$ bzw. L^1 als linear fortgesetztes Funktional. L^p hat als Interpolationsraum von zwei mengenmäßig gleichen Räumen ebenfalls die gleichen Elemente:

$$\mathcal{A} = \cap(\mathcal{A}, L^1) \subset L^p \subset \Sigma(\mathcal{A}, L^1) = \mathcal{A}.$$

Man sieht dies auch direkt:

$$T \in \mathcal{A} \Longrightarrow |T|^p \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{\tau}(|T|^p) = \tau(|T|^p) < \infty \Longrightarrow T \in L^p.$$

Die p-Norm läßt sich für alle $T \in L^p$ wie folgt schreiben:

$$\|T\|_p = \tau(|T|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Beispiele:

1. $\|I\|_p = \tau(I^p)^{\frac{1}{p}} = n^{\frac{1}{p}}$.

2. L^2 ist ein Hilbertraum[11] bezüglich des Skalarprodukts

$$\langle A, B\rangle_\tau = \tau(B^*A), \qquad A, B \in L^2.$$

Dieses Skalarprodukt – und damit auch die zugehörige Norm – entspricht dem des $\mathbb{C}^{n^2}$.

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle_\tau &= \tau(B^*A) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \overline{b_{kj}} a_{kj} = \langle A, B\rangle_{\mathbb{C}^{n^2}} \\ \|A\|_2 &= \tau(|A|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \tau(A^*A)^{\frac{1}{2}} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{jk}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

[11] Siehe [L1], (3.2).

6 Integration bezüglich eines Gewichtes

(Nach [L2], Beweise siehe dort.)
Im allgemeineren Fall des Gewichtes kann die p-Norm nicht analog zur p-Norm bezüglich einer Spur definiert werden. Die 1-Norm wird hier von einem Isomorphismus zum Prädual der von Neumann-Algebra transportiert und die p-Norm als Interpolationsnorm errechnet, so daß beide Definitionen im Spezialfall der Spur äquivalent sind.

6.1 Das Oberintegral

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum, $\mathcal{A}$ eine von Neumann-Algebra auf $\mathcal{H}$ und φ ein treues halbendliches normales Gewicht auf $\mathcal{A}$. Seien

$$\begin{aligned} N_\varphi &= \{A \in \mathcal{A} \mid \varphi(A^*A) < \infty\}, \\ M_\varphi &= \operatorname{Lin}\{A^*B \mid A, B \in N_\varphi\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_\varphi$ sei der zugehörige GNS-Hilbertraum[12], d. h. die Vervollständigung von N_φ in bezug auf das Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle = \langle A, B\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} = \varphi(B^*A).$$

Sei i die Inklusionsabbildung von N_φ in $\mathcal{H}_\varphi$.

Zu $A \in \mathcal{A}$ sei L_A der beschränkte Operator auf $\mathcal{H}_\varphi$, der auf N_φ der Linksmultiplikation mit A entspricht. Sei $J\Delta^{\frac{1}{2}}$ die Polarzerlegung des Abschlusses des Involutionsoperators Q auf $N_\varphi \cap N_\varphi^*$:

$$J\Delta^{\frac{1}{2}}(B) = Q(B) = B^* \qquad \text{für } B \in N_\varphi \cap N_\varphi^*.$$

Q ist konjugiert-linear und damit auch J. Für $S, T \in N_\varphi$ und $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\varphi_{S^*T}(A) = \langle i(T), JL_AJi(S)\rangle.$$

Die Abbildung $S^*T \to \varphi_{S^*T}$ läßt sich zu einem linearen $*$-Isomorphismus von M_φ nach $\mathcal{A}_*$ fortsetzen, der positive Elemente auf positive abbildet.
Für $T = T^* \in M_\varphi$ gilt:

$$\|\varphi_T\| = \inf\{\varphi(A) + \varphi(B) \mid T = A - B; A, B \in M_\varphi^+\},$$

wobei $\|\varphi_T\|$ die Prädualnorm (Funktionalnorm) bezeichnet. $D = D(\mathcal{H}, \varphi)$ sei der Vektorraum aller φ-beschränkten Vektoren. D liegt dicht in $\mathcal{H}$.

X sei der Vektorraum aller Sesquilinearformen auf $\mathcal{H}$, deren Definitionsbereich $D \times D$ umfaßt. $F \overset{D}{=} G$ für $F, G \in X$ bedeute $F(x,y) = G(x,y)\ \forall x, y \in D$.

[12] Siehe [T] oder [K1]: Gelfand-Naimark-Segal Konstruktion.

„$\stackrel{D}{=}$" definiert eine Äquivalenzrelation auf X. $X/\stackrel{D}{=}$ mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist ein Hausdorffscher topologischer Vektorraum. Die kanonische Abbildung von $\mathcal{A}$ nach $X/\stackrel{D}{=}$, $A \to [\langle A\cdot, \cdot\rangle]$ ist injektiv und stetig.

Sei T ein positiver Operator auf $\mathcal{H}$, der mit $\mathcal{A}$ affiliiert ist. Die zu T gehörige abgeschlossene positive Form $(x, y) \to \langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{\frac{1}{2}}y\rangle$ für $x, y \in D(T^{\frac{1}{2}})$ wird wieder mit T bezeichnet. Es sei $\langle Tx, y\rangle := \langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{\frac{1}{2}}y\rangle$ für $x, y \in D(T^{\frac{1}{2}})$. $\langle Tx, x\rangle := \infty$ für $x \notin D(T^{\frac{1}{2}})$. Das Oberintegral $\overline{\varphi}$ sei definiert durch

$$\overline{\varphi}(T) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) \;\middle|\; A_n \in M_\varphi^+, \sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq T\right\},$$

wobei $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq T$ bedeute: $\sum_{n=1}^{\infty} \langle A_n x, x\rangle \geq \langle Tx, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Proposition 6.1.1 *Sei T wie oben. Falls $\overline{\varphi}(T) < \infty$ gilt:*

(i) $D \subset D(T^{\frac{1}{2}})$.

(ii) *Es gibt $B_n \in M_\varphi^+$ mit $T = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ (punktweise als Formen) und $\overline{\varphi}(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)$.*

Für $T \in \mathcal{A}^+$ gilt $\overline{\varphi}(T) = \varphi(T)$.

6.2 L^1_φ und L^p_φ

Sei $L^1 = L^1_\varphi$ der Raum aller (Äquivalenzklassen von) Linearkombinationen von abgeschlossenen positiven Formen, die durch positive selbstadjungierte, mit $\mathcal{A}$ affiliierte Operatoren T mit $\overline{\varphi}(T) < \infty$ definiert sind ($(x, y) \to \langle T^{\frac{1}{2}}x, T^{\frac{1}{2}}y\rangle$).
Für $T \in L^1_h$ ($T \in L^1$ hermitesche Form) sei

$$\|T\|_1 = \inf\{\overline{\varphi}(A) + \overline{\varphi}(B) \mid A, B \text{ affiliiert mit } \mathcal{A}, A, B \geq 0, T \stackrel{D}{=} A - B\}.$$

Mit dieser Norm ist L^1_h ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$.

Proposition 6.2.1 *$(L^1_h, \|\cdot\|_1)$ ist vollständig.*

Proposition 6.2.2 *Seien $A_n, A \in M_\varphi^+$, $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \geq A$. Dann gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n} \geq \varphi_A$ punktweise auf M_φ^+. Wenn zusätzlich $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n}$ in der Norm konvergiert, so gilt die letzte Ungleichung auf ganz $\mathcal{A}^+$.*

Satz 6.2.3 *Seien $A_n, B_n \in \mathcal{A}^+$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} B_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$ $\left(= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(B_n)\right) < \infty$.*

$\Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{B_n}$ $(\in \mathcal{A}_*^+)$ *und die Abbildung*

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \to \varphi_A = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n}$$

ist positiv linear. $f : L_h^1 \to (\mathcal{A}_*)_h$,

$$f(A - B) = \varphi_{A-B} = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{A_n} - \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{B_n}$$

ist wohldefiniert und reell linear. f ist normverkleinernd und isometrisch auf

$$\left\{ A = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \,\middle|\, A_n \in \mathcal{A}^+, \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) < \infty \right\}.$$

Die Abbildung $\varphi_T \to T \in L_h^1$ (für $T \in (M_\varphi)_h$) ist ebenfalls normverkleinernd und kann fortgesetzt werden zu einer normverkleinernden Abbildung von $(\mathcal{A}_*)_h$ nach L_h^1, da L_h^1 vollständig ist. Auf $\{\varphi_T \mid T \in (M_\varphi)_h\}$ ist das die Inverse von f.

Also ist f ein isometrischer Isomorphismus. Dieser kann $\mathbb{C}$-linear zu einem Isomorphismus $F : L^1 \to \mathcal{A}_*$ fortgesetzt werden. Die 1-Norm wird folgendermaßen definiert:

$$\|T\|_1 := \|F(T)\|_{\mathcal{A}_*} \qquad \text{für } T \in L^1 .$$

Die Inklusionen von L^1 und $\mathcal{A}$ in $X/\overset{D}{=}$ sind stetig, deshalb läßt sich die komplexe Interpolationsmethode anwenden. Für $1 < p < \infty$ sei

$$L^p := (\mathcal{A}, L^1)_{[\frac{1}{p}]}.$$

7 Integration bezüglich eines Gewichtes auf $\mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$

Sei $\mathcal{H} = \mathbb{C}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{C}^n)$ und φ ein treues halbendliches Gewicht auf $\mathcal{A}$. Für diesen Fall sollen nun 1- und p-Norm berechnet werden, wie sie im letzten Abschnitt definiert wurden.

φ ist endlich (Lemma 3.2.1) und normal (Satz 3.2.3). φ besitzt eine Darstellung $\varphi(A) = \tau(AT_\varphi)$ mit einer positiven nichtsingulären Matrix T_φ (Satz 3.2.2). Offensichtlich sind in diesem Fall M_φ, N_φ, damit auch $N_\varphi^* \cap N_\varphi$ und $\mathcal{H}_\varphi$ mengenmäßig gleich $\mathcal{A}$. Die Inklusionsabbildung $i : N_\varphi \to \mathcal{H}_\varphi$ ist also bijektiv; $i(T)$ wird im folgenden wieder mit T bezeichnet.

7.1 Die Polarzerlegung des Involutionsoperators

Satz 7.1.1 *In der Polarzerlegung $J\Delta^{\frac{1}{2}}$ des Involutionsoperators ist*

$$\begin{aligned} J(B) &= T_\varphi^{\frac{1}{2}} B^* T_\varphi^{-\frac{1}{2}} \\ \Delta^{\frac{1}{2}}(B) &= T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}} \quad \text{für } B \in \mathcal{H}_\varphi. \end{aligned}$$

Beweis: Sei T_φ zunächst eine Diagonalmatrix, $T_\varphi = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_j > 0$, $j = 1, \ldots, n$. Also

$$\varphi(A) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j a_{jj} \quad \text{für } A = (a_{jk})_{jk}.$$

Der Involutionsoperator Q ist auf ganz $\mathcal{H}_\varphi$ definiert. Um die Polarzerlegung von Q zu berechnen, wird zunächst Q^* bestimmt. Q^* ist als konjugiert-linearer Operator durch folgende Gleichung definiert:

$$\langle Q\,A, B\rangle = \overline{\langle A, Q^*\,B\rangle} \quad \forall A, B \in \mathcal{H}_\varphi, \tag{16}$$

wobei $\langle A, B\rangle = \langle A, B\rangle_{\mathcal{H}_\varphi} = \varphi(B^*A)$ das Skalarprodukt auf $\mathcal{H}_\varphi$ bezeichne.

$$\langle Q\,A, B\rangle = \varphi(B^*(Q\,A)) = \varphi(B^*A^*).$$

Das j-te Diagonalelement von B^*A^* ist $\sum_{k=1}^{n} \overline{b_{kj} a_{jk}}$.

$$\Longrightarrow \quad \langle Q\,A, B\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{b_{kj} a_{jk}} \Big). \tag{17}$$

Zur Berechnung der rechten Seite von (16) setze $C = Q^*B$.

$$\begin{aligned}
\langle A, Q^* B\rangle &= \langle A, C\rangle \\
&= \varphi(C^* A) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Big(\sum_{k=1}^{n} \overline{c_{kj}} a_{kj} \Big). \qquad (18)
\end{aligned}$$

Wähle speziell $A = E_{jk}$ für feste $1 \leq j, k \leq n$. Einsetzen in (18) ergibt:

$$\begin{aligned}
\langle A, Q^* B\rangle &= \alpha_k \overline{c_{jk}} \\
\Longrightarrow \quad \overline{\langle A, Q^* B\rangle} &= \alpha_k c_{jk}.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $A = E_{jk}$ in (17):

$$\langle Q\, A, B\rangle = \alpha_j \overline{b_{kj}}.$$

Einsetzen in (16):

$$\begin{aligned}
\alpha_j \overline{b_{kj}} &= \alpha_k c_{jk} \\
\Longrightarrow \quad c_{jk} &= \frac{\alpha_j}{\alpha_k} \overline{b_{kj}} \\
\Longrightarrow \quad Q^* B &= \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k} \overline{b_{kj}} \right)_{jk} \\
\Longrightarrow \quad Q^* B^* &= \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k} b_{jk} \right)_{jk}.
\end{aligned}$$

Berechnung von $\Delta = Q^* Q$:

$$Q^* Q\, B = Q^* B^* = \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k} b_{jk} \right)_{jk}.$$

Also ist

$$\begin{aligned}
\Delta B &= \left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k} b_{jk} \right)_{jk} = T_\varphi B T_\varphi^{-1} \\
\Delta^{\frac{1}{2}} B &= \left(\left(\frac{\alpha_j}{\alpha_k} \right)^{\frac{1}{2}} b_{jk} \right)_{jk} = T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

denn der Operator $T_\varphi^{\frac{1}{2}}(\cdot)T_\varphi^{-\frac{1}{2}}$ ist eine Wurzel von $T_\varphi(\cdot)T_\varphi^{-1}$, und er ist selbstadjungiert und positiv: Seien $A, B \in \mathcal{H}_\varphi$.

$$\begin{aligned}
\langle T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2}}, B\rangle &= \varphi(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \tau(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2}} T_\varphi) \\
&= \tau(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}}) \\
&= \tau(T_\varphi^{\frac{1}{2}} B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A) \\
&= \tau(T_\varphi^{\frac{1}{2}} B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi T_\varphi^{-1})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \tau(T_\varphi^{-1} T_\varphi^{\frac{1}{2}} B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi) \\
&= \varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A) \\
&= \langle A, T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}} \rangle.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}}, B \rangle &= \tau(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{\frac{1}{2}}) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (\alpha_j \alpha_k)^{\frac{1}{2}} \overline{b_{kj}} b_{kj} \\
&\geq 0, \qquad (19)
\end{aligned}
$$

wobei mit $(\cdot)^{\frac{1}{2}}$ immer die positive Wurzel gemeint sei.

Sei nun T_φ eine beliebige positive nichtsinguläre Matrix. Nach dem Spektralsatz für Matrizen existiert eine unitäre Matrix $U \in \mathcal{A}$, mit

$$U^* T_\varphi U = \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) =: T_\psi.$$

ψ sei das zu T_ψ gehörige Gewicht:

$$\psi(A) = \tau(A T_\psi) \qquad \forall A \in \mathcal{A}.$$

φ und ψ hängen wie folgt zusammen:

$$
\begin{aligned}
\varphi(A) &= \tau(A T_\varphi) \\
&= \tau(A U U^* T_\varphi U U^*) \\
&= \tau(A U T_\psi U^*) \\
&= \tau(U^* A U T_\psi) \\
&= \psi(U^* A U). \qquad (20)
\end{aligned}
$$

Seien Q_φ bzw. Q_ψ die Involutionsoperatoren auf $\mathcal{H}_\varphi$ bzw. $\mathcal{H}_\psi$. Q_ψ^* ist bekannt, da T_ψ eine Diagonalmatrix ist. Q_φ ist definiert durch

$$\varphi(B^* A^*) = \overline{\varphi((Q_\varphi^* B)^* A)} \qquad \forall A, B \in \mathcal{H}_\varphi.$$

Ersetze in dieser Gleichung A und B durch UAU^* und UBU^*:

$$
\begin{aligned}
& \varphi((UBU^*)^*(UAU^*)^*) = \overline{\varphi((Q_\varphi^*(UBU^*))^* UAU^*)} \\
\Longleftrightarrow\quad & \varphi(UB^*U^*UA^*U^*) = \overline{\varphi((Q_\varphi^*(UBU^*))^* UAU^*)} \\
\overset{(20)}{\Longleftrightarrow}\quad & \psi(U^*UB^*A^*U^*U) = \overline{\psi(U^*(Q_\varphi^*(UBU^*))^* UAU^*U)} \\
\Longleftrightarrow\quad & \psi(B^*A^*) = \overline{\psi(U^*(Q_\varphi^*(UBU^*))^* UA)}.
\end{aligned}
$$

Die linke Seite der letzten Gleichung ist

$$\begin{aligned}
\langle Q_\psi A, B\rangle_{\mathcal{H}_\psi} &= \overline{\langle A, Q_\psi^* B\rangle_{\mathcal{H}_\psi}} \\
&= \overline{\psi((Q_\psi^* B)^* A)}. \\
\Longrightarrow \quad \psi((Q_\psi^* B)^* A) &= \psi(U^*(Q_\varphi^*(UBU^*))^* UA) \qquad \forall A \in \mathcal{A} = \mathcal{H}_\psi \\
\Longleftrightarrow \quad \langle A, Q_\psi^* B\rangle_{\mathcal{H}_\psi} &= \langle A, U^* Q_\varphi^*(UBU^*)U\rangle_{\mathcal{H}_\psi} \qquad \forall A \in \mathcal{H}_\psi.
\end{aligned}$$

Da $\mathcal{H}_\psi$ ein Hilbertraum ist, folgt

$$\begin{aligned}
U^* Q_\varphi^*(UBU^*)U &= Q_\psi^* B \\
Q_\varphi^*(UBU^*) &= UQ_\psi^*(B)U^*.
\end{aligned}$$

Ersetze UBU^* wieder durch B, also B durch U^*BU:

$$\begin{aligned}
Q_\varphi^* B &= UQ_\psi^*(U^*BU)U^* \\
\Longrightarrow \quad Q_\varphi^* Q_\varphi B &= UQ_\psi^*(U^*B^*U)U^* \\
&= UQ_\psi^* Q_\psi(U^*BU)U^* \\
&= \underbrace{UT_\psi U^*}_{=T_\varphi} B \underbrace{UT_\psi^{-1}U^*}_{=T_\varphi^{-1}} \\
\Longrightarrow \quad (Q_\varphi^* Q_\varphi)^{\frac{1}{2}} &= T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}} \text{ wie im Diagonalfall.}
\end{aligned}$$

Der Operator $B \to T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}}$ ist positiv, da für $A, B \in \mathcal{H}_\varphi$ gilt:

$$\begin{aligned}
\langle T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2}}, B\rangle &= \varphi(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \tau(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2}} T_\varphi) \\
&= \tau(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi T_\varphi^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \tau(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} A T_\varphi) \\
&= \varphi((T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}})^* A) \\
&= \langle A, T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}}\rangle. \\
\langle T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}}, B\rangle &= \varphi(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}}) \\
&= \tau(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{-\frac{1}{2}} T_\varphi) \\
&= \tau(B^* T_\varphi^{\frac{1}{2}} B T_\varphi^{\frac{1}{2}}) \\
&= \tau(B^* U T_\psi^{\frac{1}{2}} U^* B U T_\psi^{\frac{1}{2}} U^*) \\
&= \tau((U^* B^* U) T_\psi^{\frac{1}{2}} (U^* B U) T_\psi^{\frac{1}{2}}) \\
&\overset{(19)}{\geq} 0.
\end{aligned}$$

Es bleibt noch J zu berechnen, das definiert ist durch $J\Delta^{\frac{1}{2}} = Q$.

$$\begin{aligned} J\Delta^{\frac{1}{2}} B &= Q B \\ \Longleftrightarrow \quad JT_{\varphi}^{\frac{1}{2}} B T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} &= B^*. \end{aligned}$$

Ersetze B durch $T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} B T_{\varphi}^{\frac{1}{2}}$:

$$\begin{aligned} JT_{\varphi}^{\frac{1}{2}} T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} B T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} &= (T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} B T_{\varphi}^{\frac{1}{2}})^* \\ \Longrightarrow \quad J B &= T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} B^* T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

7.2 Die 1-Norm

Da alle Operatoren, die mit $\mathcal{A}$ affiliiert sind, bereits zu $\mathcal{A}$ gehören, $\overline{\varphi} = \varphi$ auf $\mathcal{A}^+$ gilt und φ endlich ist, sind L^1 und $\mathcal{A}$ als Mengen gleich, wenn man die Formen mit den zugehörigen Operatoren identifiziert. Es genügt, die Funktionale φ_T für $T \in (M_{\varphi})_h$ $(= L^1_h)$ zu betrachten und $\mathbb{C}$-linear fortzusetzen, um die 1-Norm zu erhalten.
Seien $S, T, A \in \mathcal{A}$.

$$\varphi_{S^*T}(A) = \langle T, JL_A J S\rangle = \varphi((JL_A J S)^* T).$$

$$\begin{aligned} JL_A J S &= JL_A T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} \\ &= JAT_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} \\ &= T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} (AT_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}})^* T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} \\ &= T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} S T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} A^* T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} \\ &= S J A. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für obiges Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \varphi((JL_A J S)^* T) &= \varphi((S J A)^* T) \\ &= \varphi((JA)^* S^* T) \\ &= \varphi(T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} A T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T) \qquad (21) \\ &= \tau(T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} A T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T T_{\varphi}) \\ &= \tau(T_{\varphi} T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} A T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T) \\ &= \tau(T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} A T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T) \\ &= \tau(A T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} S^* T T_{\varphi}^{\frac{1}{2}}). \qquad (22) \end{aligned}$$

Mit T anstelle von S^*T gilt nach (21)

$$\varphi_T(A) = \varphi(T_{\varphi}^{-\frac{1}{2}} A T_{\varphi}^{\frac{1}{2}} T).$$

Sei $T \in L^1$ beliebig. $T = T_1 + iT_2$ mit $T_1, T_2 \in L^1_h$. Eine solche Zerlegung existiert nach Proposition 1.6.1, da hier $L^1 = \mathcal{A}$. Der isometrische Isomorphismus von L^1 auf $\mathcal{A}_*$ bildet T auf $\varphi_{T_1} + i\varphi_{T_2}$ ab.[13]

$$\begin{aligned}
(\varphi_{T_1} + i\varphi_{T_2})(A) &= \varphi_{T_1}(A) + i\varphi_{T_2}(A) \\
&= \varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} T_1) + i\varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} T_2) \\
&= \varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} T_1) + \varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} iT_2) \\
&= \varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} T_1 + T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} iT_2) \\
&= \varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} (T_1 + iT_2)) \\
&= \varphi(T_\varphi^{-\frac{1}{2}} A T_\varphi^{\frac{1}{2}} T) \\
&= \varphi_T(A).
\end{aligned}$$

Daher ist der Isomorphismus auf ganz L^1 definiert durch $T \to \varphi_T$.

Satz 7.2.1 *Für $T \in L^1$ ist*

$$\|T\|_1 = \|T_\varphi^{\frac{1}{2}} T T_\varphi^{\frac{1}{2}}\|_{1,\tau},$$

wobei $\|\cdot\|_{1,\tau}$ die 1-Norm bezüglich τ bezeichne.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\|T\|_1 &= \|\varphi_T\| \\
&= \sup\{|\varphi_T(A)| : A \in \mathcal{A}, \|A\| \le 1\} \\
&\overset{(22)}{=} \sup\{|\tau(A T_\varphi^{\frac{1}{2}} T T_\varphi^{\frac{1}{2}})| : A \in \mathcal{A}, \|A\| \le 1\} \\
&\overset{(15)}{=} \|T_\varphi^{\frac{1}{2}} T T_\varphi^{\frac{1}{2}}\|_{1,\tau}.
\end{aligned}$$

□

7.3 Die p-Norm

Die Norm auf $\mathcal{A}$ werde mit $\|\cdot\|_\infty$ bezeichnet, die Norm auf L^p_φ mit $\|\cdot\|_p$ und die Norm auf L^p_τ mit $\|\cdot\|_{p,\tau}$.

Lemma 7.3.1 *Seien $U, V \in \mathcal{A}$ partielle Isometrien und $A \in \mathcal{A}$ beliebig. Dann gilt:*

$$\begin{aligned}
(i) \quad & \|UAV\|_\infty \le \|A\|_\infty \\
& \|UAV\|_\infty = \|A\|_\infty, \quad \textit{falls } U \textit{ und } V \textit{ unitär sind.} \\
(ii) \quad & \|UAV\|_{1,\tau} \le \|A\|_{1,\tau} \\
& \|UAV\|_{1,\tau} = \|A\|_{1,\tau}, \quad \textit{falls } U \textit{ und } V \textit{ unitär sind.}
\end{aligned}$$

[13] Zur Erinnerung: Der Isomorphismus ist zunächst nur für hermitesche Elemente definiert und wird $\mathbb{C}$-linear fortgesetzt.

Beweis:
(i) :

$$\|UAV\|_\infty \le \underbrace{\|U\|_\infty}_{\le 1} \|A\|_\infty \underbrace{\|V\|_\infty}_{\le 1} \le \|A\|_\infty.$$

Falls U und V unitär sind, so auch U^* und V^*.

$$\Longrightarrow \quad \|A\|_\infty = \|U^*UAVV^*\|_\infty \le \|U^*\|_\infty \|UAV\|_\infty \|V^*\|_\infty = \|UAV\|_\infty.$$

(ii) :

$$\begin{aligned} \|UAV\|_{1,\tau} &\overset{(15)}{=} \sup\{|\tau(SUAV)| : \|S\|_\infty \le 1\} \\ &\overset{(9)}{=} \sup\{|\tau(VSUA)| : \|S\|_\infty \le 1\} \\ &\overset{(i)}{\le} \sup\{|\tau(SA)| : \|S\|_\infty \le 1\} \qquad (23) \\ &\overset{(15)}{=} \|A\|_{1,\tau}. \end{aligned}$$

(23) gilt, weil die Abbildung $S \to VSU$ die Einheitskugel von $\mathcal{A}$ in sich abbildet. Falls U und V unitär sind, ist diese Abbildung bijektiv. Die Umkehrabbildung ist $S \to V^*SU^*$, und die Norm bleibt erhalten wegen (i). Bei (23) steht in diesem Fall ein Gleichheitszeichen.

□

Im folgenden Satz wird die p-Norm mit Hilfe der (p,τ)-Norm dargestellt, wobei ausgenutzt wird, daß L^p_τ ein Interpolationsraum ist. Dazu zunächst folgendes Lemma:

Lemma 7.3.2 *Sei $B \in \mathcal{A}$ positiv, dann ist die Abbildung $z \longrightarrow B^z$ holomorph auf $S_0 = \{z \mid 0 < Re\, z < 1\}$. B^{it} ist eine partielle Isometrie für $t \in I\!R$ und unitär, falls B nichtsingulär ist.*
Für $f \in \mathcal{F}_\tau := \mathcal{F}(\mathcal{A}, L^1_\tau)$ $(= \mathcal{F}_\varphi := \mathcal{F}(\mathcal{A}, L^1_\varphi))$ ist $z \to B^z f(z) B^z \in \mathcal{F}_\tau$.

Beweis: Es existiert ein unitäres $U \in \mathcal{A}$, mit

$$U^*BU = \operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n), \quad \beta_j \ge 0 \text{ für } j = 1, \ldots, n.$$

Für Polynome p gilt

$$p(\operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)) = \operatorname{diag}(p(\beta_1), \ldots, p(\beta_n)).$$

Aus Korollar 1.3.5 folgt für $f \in C(\sigma(B))$

$$f(\operatorname{diag}(\beta_1, \ldots, \beta_n)) = \operatorname{diag}(f(\beta_1), \ldots, f(\beta_n)).$$

Mit Korollar 1.3.6 ergibt sich

$$\begin{aligned} B^z &= (UU^*BUU^*)^z \\ &= U(U^*BU)^z U^* \\ &= U\mathrm{diag}(\beta_1^z,\ldots,\beta_n^z)U^*. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-z_0}(B^z - B^{z_0}) &= \frac{1}{z-z_0}(U\mathrm{diag}(\beta_1^z,\ldots,\beta_n^z)U^* - U\mathrm{diag}(\beta_1^{z_0},\ldots,\beta_n^{z_0})U^*) \\ &= \frac{1}{z-z_0}U\mathrm{diag}(\beta_1^z-\beta_1^{z_0},\ldots,\beta_n^z-\beta_n^{z_0})U^* \\ &= U\mathrm{diag}\left(\frac{\beta_1^z-\beta_1^{z_0}}{z-z_0},\ldots,\frac{\beta_n^z-\beta_n^{z_0}}{z-z_0}\right)U^* \\ &\to U\mathrm{diag}((\beta_1^z)'(z_0),\ldots,(\beta_n^z)'(z_0))U^* \qquad (z\to z_0) \end{aligned}$$

in jeder Norm, da alle Normen äquivalent sind. Also sind $z \to B^z$ und mit f auch $z \to B^z f(z) B^z$ holomorph.
Sei $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} B^{it} &= U\mathrm{diag}(\beta_1^{it},\ldots,\beta_n^{it})U^* \\ (B^{it})^*B^{it} &= U\mathrm{diag}(\beta_1^{-it},\ldots,\beta_n^{-it})U^*U\mathrm{diag}(\beta_1^{it},\ldots,\beta_n^{it})U^* \\ &= U\mathrm{diag}(\beta_1^{-it}\beta_1^{it},\ldots,\beta_n^{-it}\beta_n^{it})U^* \\ &= U\mathrm{diag}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)U^*, \end{aligned}$$

wobei $\gamma_j = \begin{cases} 0 & \text{falls } \beta_j = 0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad (j=1,\ldots,n).$

Somit ist B^{it} unitär, wenn alle β_j größer als 0 sind, d. h. wenn B nichtsingulär ist. ($(B^{it})^*B^{it} = B^{it}(B^{it})^*$ ist offenbar auch erfüllt.) Andernfalls ist der Operator $U\mathrm{diag}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)U^*$ eine Projektion und damit B^{it} eine partielle Isometrie. Für den letzten Teil der Behauptung ist noch zu zeigen, daß $B^z f(z) B^z$ in einer beliebigen Norm an den Rändern gegen 0 konvergiert, falls f dies tut.

$$\begin{aligned} \|B^{it}f(it)B^{it}\|_\infty &\overset{7.3.1}{\leq} \|f(it)\|_\infty \to 0 \quad (|t|\to\infty). \\ \|B^{1+it}f(1+it)B^{1+it}\|_\infty &\leq \|B\|_\infty\|f(1+it)\|_\infty\|B\|_\infty \to 0 \quad (|t|\to\infty). \end{aligned}$$

□

Satz 7.3.3 *Sei $A \in L^p\ (=\mathcal{A})$, dann ist $T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}} \in L_\tau^p\ (=\mathcal{A})$, und es gilt*

$$\|A\|_p = \|T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau}.$$

Beweis: Sei $\theta = \frac{1}{p}$, $\varepsilon > 0$ und $f \in \mathcal{F}_\tau$ mit

$$\begin{aligned} f(\theta) &= T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}} \\ \text{und} \quad \|f\|_{\mathcal{F}_\tau} &\leq \|T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Definiere $\tilde{f} \in \mathcal{F}_\varphi$ durch

$$\tilde{f}(z) := T_\varphi^{-\frac{z}{2}} f(z) T_\varphi^{-\frac{z}{2}}.$$

$\tilde{f} \in \mathcal{F}_\varphi$ nach Lemma 7.3.2.

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\theta) &= T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}} T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} \\ &= A. \end{aligned}$$

Um eine Abschätzung für $\|A\|_p$ zu erhalten, wird die $\mathcal{F}_\varphi$-Norm von $\tilde{f}$ berechnet. Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\|\tilde{f}(it)\|_\infty = \|T_\varphi^{-i\frac{t}{2}} f(it) T_\varphi^{-i\frac{t}{2}}\|_\infty = \|f(it)\|_\infty,$$

da $T_\varphi^{-i\frac{t}{2}}$ nach Lemma 7.3.2 unitär ist.

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}(1+it)\|_1 &\overset{\text{Satz 7.2.1}}{=} \|T_\varphi^{\frac{1}{2}} \tilde{f}(1+it) T_\varphi^{\frac{1}{2}}\|_{1,\tau} \\ &= \|T_\varphi^{\frac{1}{2}} T_\varphi^{-\frac{1}{2}-i\frac{t}{2}} f(1+it) T_\varphi^{-\frac{1}{2}-i\frac{t}{2}} T_\varphi^{\frac{1}{2}}\|_{1,\tau} \\ &= \|T_\varphi^{-i\frac{t}{2}} f(1+it) T_\varphi^{-i\frac{t}{2}}\|_{1,\tau} \\ &\overset{\text{Lemma 7.3.1}}{=} \|f(1+it)\|_{1,\tau}. \end{aligned}$$

Die $\mathcal{F}_\varphi$-Norm von $\tilde{f}$ ist gleich der $\mathcal{F}_\tau$-Norm von f, denn

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{\mathcal{F}_\varphi} &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{\|\tilde{f}(it)\|_\infty, \|\tilde{f}(1+it)\|_1\} \\ &= \sup_{t \in \mathbb{R}} \{\|f(it)\|_\infty, \|f(1+it)\|_{1,\tau}\} \\ &= \|f\|_{\mathcal{F}_\tau}. \end{aligned}$$

Also ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} \|\tilde{f}\|_{\mathcal{F}_\varphi} &\leq \|T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau} + \varepsilon \\ \Longrightarrow \quad \|A\|_p &\leq \|T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau}. \end{aligned} \tag{24}$$

Sei nun umgekehrt $f \in \mathcal{F}_\varphi$ mit

$$f(\theta) = T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2p}}$$

$$\|f\|_{\mathcal{F}_\varphi} \leq \|T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2p}}\|_p + \varepsilon.$$

Definiere $\tilde{f} \in \mathcal{F}_\tau$ durch

$$\tilde{f}(z) := T_\varphi^{\frac{z}{2}} f(z) T_\varphi^{\frac{z}{2}}.$$

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(\theta) &= T_\varphi^{\frac{1}{2p}} T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} T_\varphi^{\frac{1}{2p}} = A \\
\tilde{f}(it) &= T_\varphi^{i\frac{t}{2}} f(it) T_\varphi^{i\frac{t}{2}} \\
\Longrightarrow \quad \|\tilde{f}(it)\|_\infty &= \|f(it)\|_\infty .
\end{aligned}$$

Auf der Gerade $\{Re\, z = 1\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(1+it) &= T_\varphi^{\frac{1+it}{2}} f(1+it) T_\varphi^{\frac{1+it}{2}} \\
&= T_\varphi^{i\frac{t}{2}} T_\varphi^{\frac{1}{2}} f(1+it) T_\varphi^{\frac{1}{2}} T_\varphi^{i\frac{t}{2}} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\text{Lemma 7.3.1}}{\Longrightarrow} \quad \|\tilde{f}(1+it)\|_{1,\tau} &= \|T_\varphi^{\frac{1}{2}} f(1+it) T_\varphi^{\frac{1}{2}}\|_{1,\tau} \\
&= \|f(1+it)\|_1 .
\end{aligned}$$

Für die $\mathcal{F}_\tau$-Norm von $\tilde{f}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_{\mathcal{F}_\tau} &= \sup_{t\in\mathbb{R}} \{\|\tilde{f}(it)\|_\infty, \|\tilde{f}(1+it)\|_{1,\tau}\} \\
&= \sup_{t\in\mathbb{R}} \{\|f(it)\|_\infty, \|f(1+it)\|_1\} \\
&= \|f\|_{\mathcal{F}_\varphi} .
\end{aligned}$$

Also ist nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
\|\tilde{f}\|_{\mathcal{F}_\tau} &\leq \|T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau} + \varepsilon \\
\Longrightarrow \quad \|A\|_{p,\tau} &\leq \|T_\varphi^{-\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{-\frac{1}{2p}}\|_p \quad \forall A \in L_\tau^p .
\end{aligned}$$

Ersetze A durch $T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}}$

$$\Longrightarrow \quad \|T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau} \leq \|A\|_p ,$$

zusammen mit (24):

$$\|A\|_p = \|T_\varphi^{\frac{1}{2p}} A T_\varphi^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau} .$$

□

Beispiele:

1. Die p-Norm von I.

$$\begin{aligned}
\|I\|_p &= \|T_\varphi^{\frac{1}{2p}} I T_\varphi^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau} \\
&= \|T_\varphi^{\frac{1}{p}}\|_{p,\tau} \\
&= \tau(|T_\varphi^{\frac{1}{p}}|^p)^{\frac{1}{p}} \\
&= \tau(T_\varphi)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

2. Sei $T_\varphi = \mathrm{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ und $A = (a_{jk})_{jk} \in L^2$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad \|A\|_2 &= \|T_\varphi^{\frac{1}{4}} A T_\varphi^{\frac{1}{4}}\|_{2,\tau} \\ &= \Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\alpha_j \alpha_k} |a_{jk}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

7.4 Ergänzungen

Beim Beweis von Satz 7.3.3 wurde benutzt, daß die τ-Norm bereits bekannt ist, ohne eine explizite Funktion aus $\mathcal{F}_\varphi$ anzugeben, welche die gewünschten Eigenschaften hat. Die bei [L2] in der Schlußbemerkung für $p = 2$ angegebene Funktion ist in verallgemeinerter Form für $(\mathcal{A}, L^1)_{[\frac{1}{p}]}$, $1 < p < \infty$ geeignet.

Satz 7.4.1 *Sei φ ein treues halbendliches Gewicht auf $\mathcal{A}$, $A \in \mathcal{A}$, $c > 0$ und $1 < p < \infty$. Sei d ($= T_\varphi$) die räumliche Ableitung von φ wie in Abschnitt 4. Sei $u|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|$ die Polarzerlegung von $d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}$. Sei $f : S_0 \to \mathcal{A}$ definiert durch*

$$f(z) = c^{1-pz} d^{-\frac{z}{2}} u |d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{pz} d^{-\frac{z}{2}}.$$

Dann ist $f(\theta) = A$ für $\theta = \frac{1}{p}$ und $\|f\|_{\mathcal{F}_\varphi} \leq \|A\|_p$ bei geeigneter Wahl von c.

Bemerkung: f liegt allerdings nicht in $\mathcal{F}_\varphi$, da f an den Rändern nicht gegen 0 konvergiert. f ist jedoch beschränkt, so daß $\exp(\delta(\theta - z)^2) f(z)$ in $\mathcal{F}_\varphi$ liegt und die Abschätzungen um einen Faktor der Größenordnung $\exp(\delta)$ stört, der bei hinreichend kleinem δ beliebig nahe an 1 liegt.

Beweis (Satz 7.4.1):

$$\begin{aligned} f(\theta) &= c^{1-1} d^{-\frac{1}{2p}} u |d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^1 d^{-\frac{1}{2p}} \\ &= d^{-\frac{1}{2p}} d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}} d^{-\frac{1}{2p}} \\ &= A. \end{aligned}$$

Sei $t \in \mathbb{R}$ beliebig.

$$\begin{aligned} f(it) &= c^{1-ipt} d^{-\frac{it}{2}} u |d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{ipt} d^{-\frac{it}{2}} \\ \|f(it)\|_\infty &= |c| |c^{-ipt}| \, \|d^{-i\frac{t}{2}} u |d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{ipt} d^{-i\frac{t}{2}}\|_\infty \\ &= c \, \|u |d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{ipt}\|_\infty \\ &\leq c \, \|u\|_\infty \, \||d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{ipt}\|_\infty \\ &\leq c. \end{aligned}$$

Auf $\{Re\, z = 1\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(1+it) &= c^{1-p-ipt} d^{-\frac{1+it}{2}} u|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{p+pit} d^{-\frac{1+it}{2}} \\
\|f(1+it)\|_1 &= c^{1-p} \|d^{-\frac{1}{2}} d^{-\frac{it}{2}} u|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{p+pit} d^{-\frac{it}{2}} d^{-\frac{1}{2}}\|_1 \\
&= c^{1-p} \|d^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{1}{2}} d^{-\frac{it}{2}} u|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{p+pit} d^{-\frac{it}{2}} d^{-\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}\|_{1,\tau} \\
&= c^{1-p} \|u|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{p+pit}\|_{1,\tau} \\
&= c^{1-p} \|u|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{p} |d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{pit}\|_{1,\tau} \\
&\leq c^{1-p} \||d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^{p}\|_{1,\tau} \text{ nach Lemma 7.3.1 u. 7.3.2} \\
&= c^{1-p} \|A\|_p^p.
\end{aligned}$$

Für $c = \|A\|_p$ folgt

$$\begin{aligned}
\|f(it)\|_\infty &\leq \|A\|_p \\
\|f(1+it)\|_1 &\leq \|A\|_p^{1-p+p} = \|A\|_p \\
\Longrightarrow \quad \|f\|_{\mathcal{F}_\varphi} &\leq \|A\|_p.
\end{aligned}$$

□

Die Darstellung der Normen mit Hilfe einer Spur ist i. a. nicht möglich, da auf einer beliebigen von Neumann-Algebra nicht notwendigerweise eine Spur existiert. Es existieren jedoch stets treue halbendliche normale Gewichte auf einer von Neumann-Algebra und damit auch auf ihrer Kommutante. Also gibt es stets auch zugehörige räumliche Ableitungen.

Um eine Verallgemeinerung der Ergebnisse zu ermöglichen, müßten die Normen unabhängig von τ, mit Termen, die nur von φ abhängen, dargestellt werden. Nach Satz 7.3.3 ist für $A \in \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}
\|A\|_p &= \|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}\|_{p,\tau} \\
&= \tau(|d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^p)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned} \tag{25}$$

Für beliebiges $B \in \mathcal{A}$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(B) &= \tau(BT_\varphi) \\
&= \tau(Bd) \\
&= \tau(d^{\frac{1}{2}} B d^{\frac{1}{2}}) \\
\Longrightarrow \quad \varphi(d^{-\frac{1}{2}} B d^{-\frac{1}{2}}) &= \tau(d^{\frac{1}{2}} d^{-\frac{1}{2}} B d^{-\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}) \\
&= \tau(B).
\end{aligned}$$

Einsetzen in (25) ergibt die gewünschte Darstellung:

$$\|A\|_p = \varphi(d^{-\frac{1}{2}} |d^{\frac{1}{2p}} A d^{\frac{1}{2p}}|^p d^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{p}}.$$

Literaturverzeichnis

[BL] J. BERGH, J. LÖFSTRÖM, *Interpolation Spaces,* Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York, 1976.

[Di] J. DIXMIER, *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs,* Bulletin de la Société Mathématique de France 81 (1953), 9–39.

[Co] A. CONNES, *On the Spacial Theory of von Neumann-Algebras,* Journal of Functional Analysis 35 (1980), 153–164.

[Ha] U. HAAGERUP, *L^p-Spaces Associated with an Arbitrary von Neumann-Algebra,* Colloques internationaux du CNRS 274, Editions du CNRS, Paris, 1979, 175–184.

[He] H. HEUSER, *Funktionalanalysis,* B. G. Teubner, Stuttgart, 1986 (2. Aufl.).

[Hi] M. HILSUM, *Les espace L^p d'une algèbre de von Neumann définis par la dérivée spatiale,* Journal of Functional Analysis 40 (1981), 151–169.

[Ko] H. KOSAKI, *Application of the Complex Interpolation Method to a von Neumann-Algebra: Non-commutative L^p-Spaces,* Journal of Functional Analysis 56 (1984), 29–78.

[K1] R. V. KADISON, J. R. RINGROSE, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras,* Band 1, Academic Press, New York – London – Paris u. a. , 1983.

[K2] R. V. KADISON, J. R. RINGROSE, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras,* Band 2, Academic Press, Orlando – San Diego – New York u. a. , 1986.

[L1] M. LEINERT, *On Integration with Respect to a Trace,* Aspects of Functional Analysis, ed. Nagel u. a. , North Holland Mathematics Studies 122 (1986), 231–239.

[L2] M. LEINERT, *Integration with Respect to a Weight,* International Journal of Mathematics 2 (1991), no. 2, 177–182.

[Ne] M. A. NEUMARK, *Normierte Algebren,* Verlag Harri Deutsch, Thun – Frankfurt am Main, 1990.

[Sc] H. SCHUBERT, *Topologie,* B. G. Teubner, Stuttgart, 1964.

[Ta] M. TAKESAKI, *Theory of Operator Algebras I,* Springer-Verlag, New York – Heidelberg – Berlin, 1979.

[Te] M. TERP, *Interpolation Spaces between a von Neumann-Algebra and its Predual,* Journal of Operator Theory 8 (1982), 327–360.

[Tr] H. TRIEBEL, *Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators,* North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.