Beiträge zur Theorie und Anwendung der Daniell-Stone-Integration ohne Verbandsbedingung

Diplomarbeit
von
Cornel Leinenkugel

Betreuer:
Prof. M. Leinert

Universität Heidelberg
Fakultät für Mathematik
März 1989

Inhaltsverzeichnis

(0) Inhaltsübersicht

(1) Daniell-Stone-Integration ohne Verbandsbedingung

(1.1) Daniell-Integrale auf Funktionenvektorräumen 5
(1.2) Das Integral auf $\mathcal{L}^1$ und seine Eigenschaften 13
(1.3) Integrierbare und meßbare Mengen 28
(1.4) Maße auf Ringen und der zugehörige $\mathcal{L}^1$ 31

(2) Produkträume

(2.1) Einführung des Produktraums 34
(2.2) Klassische Produktraum-Bildung 38
(2.3) Vergleich von Produkträumen 40
(2.4) Eine Verallgemeinerung von Fubinis Theorem 51

(3) Anwendungen der allgemeinen Theorie

(3.1) Vorbereitungen 61
(3.2) Der Raum $\mathcal{L}^1_\omega$ 66
(3.3) Einige Beispiele 79
(3.4) Lebesgue-Singularitäten 84

(4) Faltungen, Distributionen, Fourier-Reihen und Fourier-Transformationen über $\mathcal{L}^1_\omega$

(4.1) Faltungen 90
(4.2) $\mathcal{L}^1_\omega$-Funktionen als Distributionen 98
(4.3) Fourier-Reihen über $\mathcal{L}^1_\omega$ 109
(4.4) Fourier-Transformationen über $\mathcal{L}^1_\omega$ 129

(5) Integral-Erweiterungen im Vergleich

(5.1) Vergleich von $\mathcal{L}^1_\omega$ mit dem Perron-Integral 152
(5.2) Das Denjoy-Integral im engeren Sinne (Denjoy-Perron-Integral) 157
(5.3) Die Lage von $\mathcal{L}^1_\omega$ in der Denjoy-Kette

(6) Ein Daniell-Zugang zum Denjoy-Integral

(6.1) AC-, VB-, ACG- und VBG-Funktionen 177
(6.2) Das Denjoy-Integral 186
(6.3) Diagonale Ableitungen 191
(6.4) Eine neue Darstellung des Denjoy-Integrals 205

Bibliographie
Einige verwendete Zeichen

(0) Inhaltsübersicht

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einem von Leinert und König im Jahre 1982 vorgestellten erweiterten Zugang zur Integrationstheorie nach Daniell (siehe [**1**] , [**3**]).

Zu Grunde liegt der Daniellschen Vorgehensweise stets ein reeller Funktionenvektorraum $\mathcal{E}$ von Funktionen $X \to \mathbf{R}$, sowie ein positives, lineares Funktional $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$, das zu der Situation gehörende Daniell-Integral; dabei ist der Grundraum X eine nicht-leere Menge und "I positiv" bedeutet

$$I(f) \geq 0 \qquad \forall f \in \mathcal{E}^+ \ .$$

Üblicherweise wird darüber hinaus von $\mathcal{E}$ die Verbandseigenschaft gefordert, d.h. $\mathcal{E}$ soll abgeschlossen sein gegenüber der (punktweisen) Bildung von Maximum und Minimum:

$$f, g \in \mathcal{E} \Rightarrow f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{E} \ .$$

Genau diese Verbandseigenschaft ist es, die dann üblicherweise das Wohlverhalten von I und seinen Fortsetzungen sichert und den Aufbau einer vernünftigen Integrationstheorie gewährleistet. Diese Verbandseigenschaft ist es aber auch, die in den in [**1**] und [**3**] dargestellten Ansätzen eben nicht mehr postuliert wird, wodurch eine viel größere Freiheit für die Auswahl möglicher Grundräume $\mathcal{E}$ gewonnen wird. Es ist klar, daß der Wegfall dieser in der üblichen Theorie so wichtigen Verbandseigendschaft durch eine andere zusätzliche Forderung, in diesem Falle an das Funktional I, bezahlt werden muß: Hier verzweigen sich die Wege von Leinert und König leicht, da die in [**1**] geforderte Stetigkeitsbedingung an I (Stetigkeit von unten) nicht zu der Stetigkeitsbedingung (+) aus [**3**] äquivalent ist. Letztere ist echt stärker, d.h. alle $(\mathcal{E}, I)$ die (+) erfüllen genügen auch den Leinertschen Bedingungen, es existieren jedoch $(\mathcal{E}, I)$ die zwar den Leinertschen, nicht jedoch den Königschen Forderungen gerecht werden. Diese Arbeit folgt weitgehend dem Ansatz von Leinert, geht aber in Kapitel (1) an geeigneten Stellen noch ausführlicher auf die Beziehung zwischen den beiden Ansätzen ein.

Der Inhalt des ersten Kapitels ist eine ausführliche Einführung in die Daniell-Stone-Integration ohne Verbandsbedingung, wobei wir im wesentlichen einer im SS 1987 von Professor Leinert an der Universität Heidelberg gehaltenen Vorlesung folgen, in der er u.a. eine noch etwas verallgemeinerte Fassung von [**1**] vortrug. Hinzu kommen verschiedene Beispiele und Gegenbeispiele, sowie all diejenigen Begriffe und Sätze der allgemeinen Theorie, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden.

In Kapitel (2) wird untersucht, in wieweit die Theorie der Produktraum-Bildung abzuändern ist, um ausgehend von Grundräumen X, Y und zugehörigen (verallgemeinert) integrierbaren Funktionen, auch auf $X \times Y$ Integrationstheorie betreiben

Typeset by $\mathcal{A}_{\mathcal{M}}\mathcal{S}$-TEX

zu können. Hierbei ist es unser Ziel, eine möglichst große Menge über $X \times Y$ integrierbarer Funktionen zu erhalten. Die Tatsache, daß in der in Kapitel (1) entwickelten verallgemeinerten Integrationstheorie integrierbare Funktionen mit unendlicher Norm auftreten, bereitet hierbei erhebliche Probleme, die dazu zwingen, auch für die Produktraum-Theorie einen allgemeineren Ansatz zu suchen. Untersucht werden dann vor allem diejenigen Bedingungen, die an die Ausgangssituation zu stellen sind, um über dem Produktraum gewisse wünschenswerte Resultate zu erhalten. Als ein Hauptergebniss wird eine Familie von Bedingungen herausgearbeitet, die sich bei jeder Produktraumbildung "vererben": Sind die Bedingungen über X, Y respektive erfüllt, so gelten sie auch über $X \times Y$. Dies erlaubt dann den Prozeß der Produktbildung zu iterieren, ohne daß man befürchten muß dabei Eigenschaften zu verlieren, wenn diese Eigenschaften nur über jedem einzelnen Konstituenden des Produkts erfüllt sind. In der Tat wird sich erweisen, daß alle in der weiteren Arbeit vorgestellten relevanten Anwendungsbeispiele diese besagten Bedingungen erfüllen, so daß sie alle der in Kapitel (2) entwickelten Theorie ohne Einschränkung zugänglich sind.

Neben einem Vergleich mit der klassischen Produktraumbildung beschäftigt sich Kapitel (2) des weiteren mit dem bekannten Satz von Fubini, der erfreulicherweise auch in unserer verallgemeinerten Situation ohne Abstriche erhalten bleibt. Dies gilt erwartungsgemäß nicht für den Beweis dieses Theorems, so daß sich der größte Teil von Abschnitt (2.4) hiermit beschäftigt.

In Kapitel (3) werden dann endlich die ersten relevanten Beispiele und Anwendungen der allgemeinen Theorie eingeführt und genau untersucht. Diese Anwendungen spielen sich alle über dem Grundraum $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen ab, wobei die Beziehungen zwischen Differentiation und Integration sehr deutlich hervortreten. Natürlich wird das Verhältnis der eingeführten Beispiele untereinander und zum gewöhnlichen Lebesgue-Integral eingehend beleuchtet. Dabei zeigt sich, daß durch das verallgemeinerte Konzept aus Kapitel (1) insbesondere solche Funktionen integrierbar werden, die häufig vorkommen, für die man auch eine naheliegende Idee der Integration hat, die aber im Lebesgueschen Sinne eben nicht integrierbar sind, z.B. uneigentlich Lebesgue-integrierbare Funktionen; es werden aber durch die neue Integrationsmethode nicht nur solche naheliegenden, sondern auch wesentlich subtilere Funktionen erfaßt, wie an Beispielen demonstriert wird.

In Kapitel (4) wird noch einmal das wichtigste Anwendungsbeispiel des dritten Kapitels betrachtet und untersucht, was in verschiedenen klassischen Gebieten der reellen Analysis abzuändern ist, wenn man dort an möglichst vielen Stellen das Lebesgue-Integral durch das Integral des Haupt-Beispiels aus Kapitel (3) ersetzen will. Wir betrachten dabei die folgenden vier Gebiete:
(a) Faltungen: Es stellt sich heraus, daß es i.A. nicht mehr sinnvoll ist, zwei im verallgemeinerten Sinne integrierbare Funktionen zu falten. Stattdessen sind Faltungen möglich, wenn eine der in der Faltung auftretenden Funktionen stetig differenzierbar ist und einen kompakten Träger besitzt.
(b) Distributionen: Verallgemeinert integrierbare Funktionen lassen sich in kanonischer Weise als Distributionen höchstens erster Ordnung auffassen. Dabei stellt

sich ein interessanter Zusammenhang zwischen den Integrierbarkeits-Eigenschaften der Funktion und ihrer Ordnung als Distribution heraus. Schließlich wird noch erklärt, wie man eine im verallgemeinerten Sinne integrierbare Funktion mit einer Lebesgue-integrierbaren Funktion falten kann und hieraus eine Distribution erhält, wobei nicht vorausgesetzt wird, daß eine der beiden Funktionen (aufgefaßt als Distribution) einen kompakten Träger besitzen muß.
(c) Fourier-Reihen: Genau wie für Lebesgue-integrierbare Funktionen kann man auch für verallgemeinert integrierbare Funktionen die Fourier-Koeffizienten bilden und die zugehörigen Fourier-Reihen oder Cesàro-Summen studieren. Eben dies geschieht in dem entsprechenden Abschnitt des vierten Kapitels, wobei wir unsere Untersuchungen sogleich in dem allgemeineren Rahmen der sog. singulären Integrale durchführen.
(d) Fourier-Transformationen: Auch viele verallgemeinert integrierbare Funktionen lassen sich Fourier-transformieren, wenn man Fourier-Transformierbarkeit eben nicht in einer zunächst scheinbar naheliegenden Weise definiert, sondern einer Definition den Vorzug gibt, in der der sog. Schwartzsche Raum der rapide abfallenden, unendlich glatten Funktionen eine große Rolle spielt. Obwohl diese Definition dann ihrer Natur nach Parallelen zur Theorie der Fourier-Transformation temperierter Distributionen aufweist, interessieren wir uns weiterhin nur für diejenigen Funktionen, deren Fourier-Transformierte wiederum eine echte Funktion ist (und nicht etwa "nur" eine temperierte Distribution). Dabei erhalten wir das überraschende Ergebnis, daß es sich hierbei um eine recht große Klasse von Funktionen handelt, die überdies durch die von uns definierte Fourier-Transformation bijektiv, linear und in einem gewissen Sinne stetig in sich überführt wird.

Das fünfte Kapitel beschäftigt sich dann mit einem Vergleich des Haupt-Beispiels aus Kapitel (3) mit dem Denjoy-Perron-Integral, einer bereits wohlbekannten Verallgemeinerung des Lebesgue-Integrals. Zu diesem Denjoy-Perron Integral existieren zwei verschiedene Zugänge[1] von Denjoy und Perron, deren Äquivalenz 1924 von P. Alexandroff gezeigt wurde (siehe [**18**]). Dabei arbeitet der Zugang von Denjoy ("konstruktiver Zugang") mit einer ganzen Kette von Erweiterungen des Denjoy-Integrals, indiziert mit den Ordinalzahlen unterhalb Ω (der kleinsten Ordinalzahl zu einer überabzählbaren Menge). Kapitel (5) endet mit einer genauen Beschreibung der Beziehung zwischen besagter Kette von Integral-Erweiterungen und dem Hauptbeispiel aus Kapitel (3), wobei auch die Diskussion eines weiteren relativ abstrakten Konzepts von Integral-Erweiterungen einfließt.

Das sechste und letzte Kapitel ist ohne Zweifel das Hauptergebnis dieser Arbeit. Es beschäftigt sich mit dem allgemeinen Denjoy-Integral, der wohl allgemeinsten Erweiterung des Lebesgue-Integrals über $\mathbf{R}$. Nach einer kurzen Skizzierung des Denjoy-Integrals mit Hilfe seiner "deskriptiven Beschreibung" durch ACG-Funktionen, erbringen wir den Nachweis, daß dieses Integral auch in einer nichttrivialen, vernünftigen Weise mit Hilfe der verallgemeinerten Daniell-Integration aus Kapitel (1) beschrieben werden kann. Um dies zu bewerkstelligen, führen wir

[1]Es existiert sogar noch ein dritter Zugang, die sog. "deskriptive Beschreibung" des Perron-Integrals durch ACG_*-Funktionen.

einen unseres Wissens völlig neuen Differenzierbarkeitsbegriff ein ("diagonale Differenzierbarkeit"), wobei es sich um eine globale Definition von Differenzierbarkeit handelt: Es wird erklärt, wann eine Funktion als ganzes diagonal differenzierbar heißen soll, nicht jedoch, was diagonale Differenzierbarkeit in einem bestimmten Punkt bedeutet.

Eine ursprünglich geplante kleine historische Übersicht über die Entwicklung des Integral-Begriffs wurde nachträglich verworfen, da hierzu hervorragend geeignete Literatur zur Verfügung steht. Dem interessierten Leser sei besonders das Werk "Classical and modern integration theories" von I. Pesin empfohlen (siehe [**24**]).

(1) Daniell-Stone-Integration ohne Verbandsbedingung

(1.1) Daniell-Integrale auf Funktionenvektorräumen

Wie schon in der Einleitung erwähnt, stammen die ersten Bemühungen um eine Daniell-Stone-Integration ohne Verbandsbedingung von Leinert und König ([**1**] , [**3**]). Im SS 1987 hielt Prof. Leinert an der Universität Heidelberg eine Vorlesung über Maß und Integration, in deren Verlauf er eine überarbeitete Fassung von [**1**] vortrug. In Kapitel (1) sollen nun die Grundzüge dieser Theorie entwickelt werden, vermehrt um einige Definitionen und Sätze die in dieser Arbeit noch benötigt werden.

(1.1.1) DEFINITION. *Sei X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{E}$ ein reeller Vektorraum von Funktionen $X \to \mathbf{R}$.*

(i) *$\mathcal{E}$ heißt ein Verband, wenn mit $f, g \in \mathcal{E}$ stets auch $f \vee g := \max\{f, g\}$ und $f \wedge g := \min\{f, g\}$ in $\mathcal{E}$ liegen.*

(ii) *$\mathcal{E}$ heißt ein Stonescher Verband, wenn $\mathcal{E}$ ein Verband ist und wenn mit $f \in \mathcal{E}$ stets auch $f \wedge 1 \in \mathcal{E}$.*

Der Begriff des Daniell-Integrals soll nun nicht nur für Verbände sondern allgemeiner für Funktionenvektorräume $\mathcal{E}$ eingeführt werden.

(1.1.2) DEFINITION. *Sei X eine nicht-leere Menge und $\mathcal{E}$ ein Funktionenvektorraum von Funktionen $X \to \mathbf{R}$, sowie $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ eine Abbildung.*

(i) *Gilt für alle $f, g \in \mathcal{E}$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ stets*

$$I(\alpha f + \beta g) = \alpha I(f) + \beta I(g) \ ,$$

so heißt I linear oder ein lineares Funktional.

(ii) *I heißt positiv, wenn für alle $f \in \mathcal{E}$ gilt:*

$$f \geq 0 \ \Rightarrow \ I(f) \geq 0 \ .$$

(iii) *I heißt stetig von unten, wenn für $f_n \in \mathcal{E}^+$, $f \in \mathcal{E}$ stets gilt:*

$$\sum_1^\infty f_n \geq f \ \Rightarrow \ \sum_1^\infty I(f_n) \geq I(f) \ .$$

Dabei ist $+\infty$ als Summenwert durchaus zugelassen.

Ein Funktional I das (i)-(iii) erfüllt heißt ein Daniell-Integral.

Natürlich folgt (ii) bereits aus (i) und (iii). Wie wir noch sehen werden, besteht die Bedeutung von (iii) gerade darin, ein gewisses Wohlverhalten von I und seinen Fortsetzungen zu sichern, was üblicherweise u.a. durch die Verbandsbedingung an $\mathcal{E}$ garantiert wird, auf die wir ja nun verzichten wollen. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, sei im Folgenden stets $\mathcal{E}$ ein Funktionenvektorraum reeller Funktionen $X \to \mathbf{R}$ und I ein Daniell-Integral auf $\mathcal{E}$.

(1.1.3) DEFINITION. *Seien $\mathcal{E}$,I gegeben. Man nennt $\mathcal{E}$ einen I-approximativen Verband, wenn es für alle $f, g \in \mathcal{E}$ und $\epsilon > 0$ immer $h, k \in \mathcal{E}$ gibt, so daß $h \leq f \vee g \leq k$ und $I(k-h) < \epsilon$.*

Die nachstehenden Beispiele sollen die eingeführten Begriffsbildungen erläutern.

(1.1.4) BEISPIEL. *Sei $X = [0,1]$ und $\mathcal{E}$ die Menge aller Polynome auf X. Durch die Vorschrift*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \mapsto a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \cdots + \frac{1}{n+1} a_n$$

wird ein Daniell-Integral $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ erklärt.

BEWEIS: Offensichtlich ist I linear. I ist aber auch positiv: Sei $p \in \mathcal{E}^+$ ein Polynom und P die Stammfunktion von p mit $P(0) = 0$. Da $P' = p \geq 0$, ist P monoton steigend, also ist $I(p) = P(1) \geq 0$.

Wir zeigen, daß I sogar ein Daniell-Integral ist. Seien dazu $p \in \mathcal{E}, p_n \in \mathcal{E}^+$ und $\sum_1^\infty p_n \geq p$. Mit einem Satz-von-Dini-Argument folgt leicht, daß zu $\epsilon > 0$ bereits $\sum_1^N p_n \geq p - \epsilon$ für ein geeignetes N. Ist dann Q die Stammfunktion von $\sum_1^N p_n - p + \epsilon$ für die $Q(0) = 0$, so ist $Q' \geq 0$ und daher Q monoton steigend. Aus $Q(1) \geq 0$ schließt man nun wieder

$$\sum_1^N I(p_n) \geq I(p) - \epsilon \,.$$

Erst recht ist $\sum_1^\infty I(p_n) \geq I(p) - \epsilon$, woraus nun die Behauptung folgt, da $\epsilon > 0$ beliebig war $\diamondsuit$

Man beachte, daß obiges $\mathcal{E}$ offensichtlich kein Verband ist, sehr wohl aber ein I-approximativer Verband, wie man sich mit Hilfe des Weierstraßschen Approximationssatzes sofort überlegt.

(1.1.5) BEISPIEL. *Daniell-Integrale über lokalkompakten Hausdorffräumen.*

ERKLÄRUNG: Sei $(X, \mathcal{O})$ ein lokalkompakter Hausdorff-Raum ($\mathcal{O}$ ist die Topologie), und sei

$$\mathcal{E} := \mathcal{C}_c(X) := \{f : X \to \mathbf{R} \mid f \text{ ist stetig und } Tr(f) \text{ ist kompakt}\}$$

wobei $Tr(f)$ der Abschluß der Menge $\{f \neq 0\}$. Man sieht leicht ein, daß $\mathcal{E}$ ein Stonescher Verband ist. Man kann zeigen (vergl. [**4**] , §9): Ist $I : \mathcal{E} \mapsto \mathbf{R}$ ein positives, linearesFunktional (in diesem Zusammenhang häufig Radon-Maß genannt), so ist I automatisch ein Daniell-Integral. Besonders interessant ist der Fall, wo X eine lokalkompakte topologische Gruppe ist: Dann ist die Existenz eines nicht-trivialen, translationsinvarianten I gesichert (Haarsches Funktional), daß dann sogar bis auf eine positive Konstante eindeutig bestimmt ist. Für Einzelheiten verweise ich auf [**5**] .

Wir vereinbaren folgende Notierung: Ist $X = \mathbf{R}^n$ oder $X = J$ mit einem Intervall $J \subset \mathbf{R}$ und ist I das gewöhnliche Riemann-Integral, so schreiben wir I_L für I und $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_L(\mathbf{R}^n), \mathcal{E}_L(J)$ für $\mathcal{C}_c, \mathcal{C}_c(\mathbf{R}^n), \mathcal{C}_c(J)$. Der Index L soll natürlich an den Namen Lebesgue erinnern.

Wir fahren nun mit der allgemeinen Theorie fort.

(1.1.6) DEFINITION. *Für eine Funktion $f : X \to [0, \infty]$ definiert man*

$$\overline{I}(f) := \inf\{\sum_1^\infty I(f_n) \mid f_n \in \mathcal{E}^+, \sum_1^\infty f_n \geq f\} .$$

Dabei setzt man der üblichen Konvention folgend $\inf \emptyset := \infty$.

(1.1.7) SATZ. *Für $f_n, f, g : X \to [0, \infty]$ gilt:*

(i) $f \leq g \Rightarrow \overline{I}(f) \leq \overline{I}(g)$ *(Isotonie).*

(ii) $0 \leq \alpha < \infty \Rightarrow \overline{I}(\alpha f) = \alpha \overline{I}(f)$ *(Positive Homogenität).*

(iii) $\overline{I}(\sum_1^\infty f_n) \leq \sum_1^\infty \overline{I}(f_n)$ *(Abzählbare Subadditivität).*

(iv) $\sum_1^\infty f_n \geq f \Rightarrow \sum_1^\infty \overline{I}(f_n) \geq \overline{I}(f)$ *(Stetigkeit von unten).*

(v) *Für $f \in \mathcal{E}^+$ gilt $\overline{I}(f) = I(f)$.*

BEWEIS: Wir übergehen die einfachen Beweise von (i) und (ii). Zu (iii): Wir können $\sum_1^\infty \overline{I}(f_n) < \infty$ annehmen, sonst ist nichts zu zeigen. Wähle dann zu $\epsilon > 0$

Funktionen $h_{nk} \in \mathcal{E}^+$ mit $\sum_k h_{nk} \geq f_n$ und $\sum_k I(h_{nk}) < \overline{I}(f_n) + \frac{\epsilon}{2^n}$. Es folgt $\sum_n f_n \leq \sum_{k,n} h_{nk}$ und daher

$$\overline{I}(\sum_n f_n) \leq \sum_{k,n} I(h_{nk}) < \sum_n \overline{I}(f_n) + \epsilon \, .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt (iii).

Die Kombination von (i) und (iii) ergibt leicht Behauptung (iv).

Zu (v): Für $f \in \mathcal{E}^+$ gilt natürlich $\overline{I}(f) \leq I(f)$. Umgekehrt folgt $I(f) \leq \overline{I}(f)$ aus der Stetigkeit von unten von I. Damit ist alles gezeigt $\diamondsuit$

(1.1.8) DEFINITION. *Für ein beliebiges $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ heißt*

$$\|f\| := \overline{I}(|f|)$$

die (I-) Norm von f. Ist $\|f\| = 0$, so heißt f eine Nullfunktion. Eine Menge $N \subset X$ heißt (I-) Nullmenge, falls ihre charakteristische Funktion χ_N eine Nullfunktion ist.

Wie üblich benutzen wir folgende Sprechweise: Eine Aussage $Q(x)$ über Punkte $x \in X$ gilt f.ü. (fast überall), wenn die Menge $\{x \in X |\ Q(x)$ ist falsch$\}$ eine Nullmenge ist.

(1.1.9) SATZ. *Es gilt:*

(i) *Teilmengen von Nullmengen und abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wiederum Nullmengen.*

Sind $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ Funktionen so gilt:

(ii) *f Nullfunktion $\Leftrightarrow$ $\{f \neq 0\}$ ist Nullmenge.*

(iii) *$f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $\|f\| = \|g\|$.*

(iv) *$\|f\| < \infty \Rightarrow |f| < \infty$ f.ü.*

BEWEIS: Punkt (i) beweist man leicht mit Hilfe von Isotonie und abzählbarer Subadditivität von $\overline{I}$.

Zu (ii): Sei f eine Nullfunktion und $N := \{f \neq 0\}$. Dann ist $\chi_N \leq \sum_1^\infty |f|$ also $\overline{I}(\chi_N) \leq \sum_1^\infty \overline{I}(|f|) = 0$ und somit ist N Nullmenge. Ist umgekehrt N eine Nullmenge, so ist $|f| \leq \sum_1^\infty \chi_N$ also $\overline{I}(|f|) \leq \sum_1^\infty \overline{I}(\chi_N) = 0$, f ist Nullfunktion.

Zu (iii): Sei $N := \{f \neq g\}$ und $M := X \setminus N$. Dann ist $|f| \leq |f\chi_M| + \sum_1^\infty \chi_N \Rightarrow$ $\overline{I}(|f|) \leq \overline{I}(|f\chi_M|)$. Andererseits ist $\overline{I}(|f\chi_M|) \leq \overline{I}(|g|)$, also insgesamt $\|f\| \leq \|g\|$. Da die umgekehrte Ungleichung analog richtig ist folgt (iii).

Zu (iv): Ist $\|f\| < \infty$ und $N := \{|f| = \infty\}$ so ist $\chi_N \leq \epsilon|f|$ also $\overline{I}(\chi_N) \leq \epsilon|f|$ für alle $\epsilon > 0$. Daher ist notwendig $\overline{I}(\chi_N) = 0$ und N ist eine Nullmenge $\diamondsuit$

Wir sind jetzt in der Lage eine Definition der Integrierbarkeit zu geben. Der in der folgenden Definition angegebene Begriff der Integrierbarkeit im engeren Sinne entspricht dem ursprünglichen Ansatz von Leinert in [**1**] . Dabei setzt man

$$\tilde{\mathcal{E}} := \{f \in \mathcal{E} \mid \|f\| < \infty\} .$$

(1.1.10) DEFINITION. *Eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ heißt integrierbar (integrierbar im engeren Sinne), wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $g \in \mathcal{E}$ ($g \in \tilde{\mathcal{E}}$) gibt mit $\|f - g\| < \epsilon$. Die Menge der integrierbaren Funktionen (im engeren Sinne integriebaren Funktionen) wird mit $\mathcal{L}^1$ oder $\mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}, I)$ (mit $\tilde{\mathcal{L}}^1$ oder $\tilde{\mathcal{L}}^1(X, \mathcal{E}, I)$) bezeichnet.*

Per definitionem ist also $\tilde{\mathcal{L}}^1 \subset \mathcal{L}^1$.

SATZ (1.1.11). *Seien $f_n, f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ Funktionen.*

(i) *Ist $f \in \mathcal{L}^1$, so ist $|f| < \infty$ f.ü.*

(ii) *$f \in \mathcal{L}^1$ ($f \in \tilde{\mathcal{L}}^1$) und $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $g \in \mathcal{L}^1$ ($g \in \tilde{\mathcal{L}}^1$) .*

(iii) *Sind die f_n reellwertige Funktionen aus $\mathcal{L}^1$ (aus $\tilde{\mathcal{L}}^1$) und gilt $\|f - f_n\| \to 0$, so ist auch $f \in \mathcal{L}^1$ ($f \in \tilde{\mathcal{L}}^1$).*

BEWEIS: Zu (i): Sei $f \in \mathcal{L}^1$ und $N := \{|f| = \infty\}$. Zu $\epsilon > 0$ wähle man $g \in \mathcal{E}$ mit $\|f - g\| < \epsilon$. Da g reellwertig, ist $\chi_N \leq |f - g|$ also $\|\chi_N\| \leq \|f - g\| < \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war muß N eine Nullmenge sein.

Behauptung (ii) folgt leicht aus (1.1.9),(iii).

Zu (iii): Sei $\epsilon > 0$ gegeben und n so groß ,daß $\|f - f_n\| < \epsilon$. Da $f_n \in \mathcal{L}^1$ gibt es ein $g \in \mathcal{E}$ mit $\|f_n - g\| < \epsilon$ so daß $\|f - g\| < 2\epsilon$. Dies zeigt $f \in \mathcal{L}^1$.

Analoge Überlegungen gelten für $\tilde{\mathcal{L}}^1$ $\diamondsuit$

Die Punkte (i) und (ii) fassen wir zusammen:

(1.1.12) COROLLAR. *Ist $f \in \mathcal{L}^1$ ($f \in \tilde{\mathcal{L}}^1$), so gibt es stets ein reellwertiges $g \in \mathcal{L}^1$ ($g \in \tilde{\mathcal{L}}^1$) mit $f = g$ f.ü.*

Es ist übliche Konvention zwei Funktionen aus $\mathcal{L}^1$ als gleich zu betrachten, wenn sie f.ü. gleich sind, und so wollen auch wir es halten. Wegen (1.1.9),(iii) und (1.1.11),(ii) ist dies mit den bisherigen Begriffsbildungen verträglich. Ferner sind wir nun in der Lage zwei beliebige Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1$ durch die Vorschrift

$$(f+g)(x) := \begin{cases} f(x)+g(x) & \text{falls definiert} \\ \text{beliebieg} & \text{sonst} \end{cases}$$

zu addieren und die Summe $f+g$ liegt wider in $\mathcal{L}^1$. Dasselbe gilt natürlich auch für $\tilde{\mathcal{L}}^1$ an Stelle von $\mathcal{L}^1$.

In diesem Sinne können wir nun $\mathcal{L}^1, \tilde{\mathcal{L}}^1$ als reelle Vektorräume auffassen. Die Norm $\| \ \|$ ist dann eine Pseudo-Norm auf $\mathcal{L}^1$, d.h. sie hat dieselben Eigenschaften wie eine Norm, kann aber den Wert ∞ annehmen. Die Pseudo-Norm-Eigenschaften leitet man dabei leicht aus (1.1.7),(ii) und (iii) sowie aus (1.1.9),(ii) ab. Wir werden häufig ausnutzen, daß die Norm $\| \ \|$ gemäß (1.1.7),(iii) sogar abzählbar subadditiv ist, d.h. es gilt

$$\|\sum_1^\infty f_n\| \le \sum_1^\infty \|f_n\| \qquad (\text{falls } \sum_1^\infty f_n \text{ in } \overline{\mathbf{R}} \text{ definiert ist}) .$$

Denn wenn die Summe $\sum_1^\infty f_n$ punktweise sinnvoll ist, so gilt sicherlich $|\sum_1^\infty f_n| \le \sum_1^\infty |f_n|$. Isotonie und abzählbare Subadditivität von $\overline{I}$ ergeben dann die abzählbare Subadditivität der Norm.

Man beachte ferner, daß ein $f \in \mathcal{L}^1$ bereits dann mit dem Nullelement von $\mathcal{L}^1$ identifiziert wird, wenn $f = 0$ f.ü. gilt.

Auf $\tilde{\mathcal{L}}^1$ eingeschränkt ist $\| \ \|$ sogar eine richtige Norm: Ist $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1$ so findet man ein $g \in \tilde{\mathcal{E}}$ mit $\|f-g\| < 1$; also ist $\|f\| \le \|f-g\| + \|g\| < 1 + \|g\| < \infty$. Wir fassen zusammen:

(1.1.13) SATZ. *Mit der Norm $\| \ \|$ ist $\mathcal{L}^1$ ($\tilde{\mathcal{L}}^1$) in der angegebenen Weise ein pseudo-normierter (normierter) reeller Vektorraum.*

Es sei daran erinnert, daß auf einem pseudo-normierten Raum, völlig analog wie auf einem normierten Raum, eine kanonische Topologie sowie die Begriffe Konvergenz, Cauchy-Folge und Vollständigkeit definiert sind.

Auf pseudo-normierten Räumen gilt bekanntlich:

(1.1.14) SATZ. *Genau dann ist der pseudo-normierte Raum $(Z, \| \ \|)$ vollständig, wenn für jede Folge (z_n) aus Z gilt:*

$$\sum_1^\infty \|z_n\| < \infty \ \Rightarrow \ \sum_1^\infty z_n \quad \text{konvergiert in } Z .$$

(1.1.15) THEOREM. *Es gilt:*

(i) $\mathcal{L}^1$ *ist ein vollständiger pseudo-normierter Raum.*

(ii) $\tilde{\mathcal{L}}^1$ *ist ein Banachraum.*

BEWEIS: Seien $f_n \in \mathcal{L}^1$ ohne Einschränkung reellwertig und sei $\sum \|f_n\| < \infty$. Sei $F := \sum |f_n|$. Dann ist $\|F\| \leq \sum \|f_n\| < \infty$ also $|F| < \infty$ f.ü. Es folgt, daß $\sum f_n$ f.ü. (absolut) konvergiert. Setzt man daher

$$f(x) := \begin{cases} \sum f_n(x) & \text{falls die Summe in } \mathbf{R} \text{ konvergiert} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

so hat man

$$\|f - \sum_1^N f_n\| \leq \| \sum_{N+1}^{\infty} |f_n| \| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \|f_n\| \to 0 \,,$$

für $N \to \infty$. Nach (1.1.11),(iii) ist $f \in \mathcal{L}^1$.

Dieselbe Überlegung gilt auch über $\tilde{\mathcal{L}}^1$ $\diamondsuit$

Im allgemeinen braucht weder $\mathcal{L}^1$ noch $\tilde{\mathcal{L}}^1$ ein Verband zu sein. Es gilt jedoch:

(1.1.16) SATZ. *Ist $\mathcal{E}$ ein Verband oder ein I-approximativer Verband, so gilt $\mathcal{E} = \tilde{\mathcal{E}}, \mathcal{L}^1 = \tilde{\mathcal{L}}^1$ und $\mathcal{L}^1$ ist ein Verband; ist $\mathcal{E}$ sogar ein Stonescher Verband, so auch $\mathcal{L}^1$.*

Wir verzichten auf den Beweis.

(1.1.17) LEMMA. *Für $f \in \mathcal{E}$ ist $|I(f)| \leq \|f\|$.*

BEWEIS: Wir können $\|f\| < \infty$ annehmen. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und seien $g_n \in \mathcal{E}^+$ mit $|f| \leq \sum g_n$ und $\sum I(g_n) < \|f\| + \epsilon$. Dann ist $-f, f \leq \sum g_n$ und wegen der Stetigkeit von unten von I ist

$$-I(f), I(f) \leq \sum I(g_n) \;\Rightarrow\; |I(f)| \leq \sum I(g_n) < \|f\| + \epsilon \,.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt die Behauptung $\diamondsuit$

(1.1.18) LEMMA. *Sei f eine Funktion und seien f_n reelle Funktionen, dann gilt:*

$$\|f - f_n\| \to 0 \;\Rightarrow\; \|f_n\| \to \|f\| \,.$$

BEWEIS: Es gilt

(1) $\quad \|f_n\| \leq \|f - f_n\| + \|f\| \,,$

(2) $\quad \|f\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n\| \,.$

Ist dann $\|f\| < \infty$ so folgt aus (1), daß auch f_n reell ab einem gewissen Index n_0. Für $n \geq n_0$ gilt dann $| \|f\| - \|f_n\| | \leq \|f - f_n\|$, als Zusammenfassung von (1) und (2). Es folgt $\|f_n\| \to \|f\|$.

Ist hingegen $\|f\| = \infty$ so folgt aus (2), daß auch $\|f_n\| = \infty$ ab einem gewissen Index n_0. Also gilt auch in diesem Fall $\|f_n\| \to \|f\|$ ◇

(1.1.19) SATZ. *Ist $f \in \mathcal{L}^1$ so gibt es eine Folge (f_n) aus $\mathcal{E}$ mit $f_n \to f$ f.ü.*

BEWEIS: Sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{E}$ mit $\|f - f_n\| \to 0$. Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß $\|f_{n+1} - f_n\| < \frac{1}{2^n}$. Für die Funktion $F := \sum |f_{n+1} - f_n|$ gilt dann $\|F\| \leq \sum \|f_{n+1} - f_n\| < \sum \frac{1}{2^n} < \infty$. Nach (1.1.9),(iv) muß dann der Limes $\lim_{n\to\infty} f_n = f_1 + \sum_1^\infty (f_{n+1} - f_n)$ f.ü. (in $\mathbf{R}$) existieren. Der Limes möge etwa außerhalb einer Nullmenge M existieren. Setze dann $f'_n := f_n \chi_{X\setminus M}$ und $f' := \lim_{n\to\infty} f'_n$. Man hat dann

$$\|f' - f'_N\| \leq \sum_N^\infty \|f'_{n+1} - f'_n\| \leq \sum_N^\infty \|f_{n+1} - f_n\| \to 0 \,,$$

für $N \to \infty$. Ferner gilt nach (1.1.9),(iii) $\|f - f'_n\| = \|f - f_n\| \to 0$, für $N \to \infty$, also auch $\|f - f'\| \leq \|f - f'_N\| + \|f' - f'_N\| \to 0$. Somit gilt notwendig $\|f - f'\| = 0$. Nach (1.1.9),(ii) ist $f = f'$ f.ü. und es ist $f' = \lim_{n\to\infty} f_n$ f.ü.; es folgt $f = \lim_{n\to\infty} f_n$ f.ü. ◇

(1.2) Das Integral auf $\mathcal{L}^1$ und seine Eigenschaften

(1.2.1) DEFINITION. *Sei $f \in \mathcal{L}^1$ und seien $f_n \in \mathcal{E}$ mit $\|f - f_n\| \to 0$. Der reelle Wert*

$$\int_X f\,dI := \lim_{n\to\infty} I(f_n)$$

heißt das Integral von f über X.

Oftmals schreibt man auch lediglich

$$\int f\,dI\,,\ \int_X f\,,\ \text{oder}\ \int f\ \text{statt}\ \int_X f\,dI\,.$$

Ist $E \subset X$ und $f : E \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion, so heißt f über E integrierbar, wenn die triviale Fortsetzung (Null außerhalb E) von f in $\mathcal{L}^1$ liegt. Ist $\tilde{f}$ diese triviale Fortsetzung so setzt man wie gewohnt

$$\int_E f\,dI := \int_X \tilde{f}\,dI\,.$$

Wir müssen jetzt noch zeigen, daß (1.2.1) überhaupt eine sinnvolle Definition ist.

Ist $f \in \mathcal{L}^1$ und sind $f_n, g_n \in \mathcal{E}$ mit $\|f_n - f\| \to 0$ und $\|g_n - f\| \to 0$, so gilt erstens

$$|I(f_n) - I(f_m)| = |I(f_n - f_m)| \le \|f_n - f_m\| \le \|f - f_n\| + \|f - f_m\| \to 0\,,$$

für $n, m \to \infty$; also ist $(I(f_n))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbf{R}$ und $\lim_{n\to\infty} I(f_n)$ existiert. Zweitens ist

$$|I(f_n) - I(g_n)| = |I(f_n - g_n)| \le \|f_n - g_n\| \le \|f - f_n\| + \|g - g_n\| \to 0\,,$$

für $n \to \infty$, so daß der Limes nicht von der Wahl der approximierenden Folge (f_n) abhängt. Bei diesen Überlegungen wurde mehrfach (1.1.7) benutzt.

(1.2.2) SATZ. *Das Integral $\int$ ist ein stetiges, positives, lineares Funktional $\mathcal{L}^1 \to \mathbf{R}$. Für alle $f \in \mathcal{L}^1$ gilt $|\int f\,dI| \le \|f\|$.*

BEWEIS: Die Linearität des Integrals ist unmittelbar klar.

Ist nun $f \in \mathcal{L}^1$ und f_n eine Folge aus $\mathcal{E}$ mit $\|f - f_n\| \to 0$, so hat man mit Hilfe von (1.1.18):

$$|\int f| = |\lim_{n\to\infty} I(f_n)| = \lim_{n\to\infty} |I(f_n)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = \|f\| .$$

Insbesondere ist das Integral (gleichmäßig) stetig.

Zur Positivität: Sei $f \in \mathcal{L}^1, f \geq 0$. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $g \in \mathcal{E}$, so daß $\|f - g\| < \epsilon$ und $|\int f - I(g)| < \epsilon$. Seien $g_n \in \mathcal{E}^+$ mit $|f - g| \leq \sum g_n$ und $\sum I(g_n) < \epsilon$. Dann ist $0 \leq f \leq g + \sum g_n$ und die Stetigkeit von unten von I liefert

$$0 \leq I(g) + \sum I(g_n) < I(g) + \epsilon \Rightarrow$$
$$\int f > I(g) - \epsilon > -2\epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war muß $\int f \geq 0$ sein $\diamondsuit$

Im Folgenden wird es eine wichtige Rolle spielen, ob für alle $f \in (\mathcal{L}^1)^+$ stets $\overline{I}(f) = \int f$ gilt oder nicht. Trifft dieser Sachverhalt zu, so sagen wir einfach es gelte $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$. Man beachte, daß die Ungleichung $\int f = |\int f| \leq \|f\| = \overline{I}(f)$ immer erfüllt ist. Das Interesse richtet sich also auf die umgekehrte Ungleichung $\overline{I}(f) \leq \int f$.

Man kann zeigen:

(1.2.3) SATZ. *Es gilt:*

(i) *Genau dann ist* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$, *wenn*

$$\overline{I}(g^+) \leq I(g) + \overline{I}(g^-) \qquad \forall g \in \mathcal{E} .$$

(ii) *Ist* $\mathcal{E}$ *ein Verband oder ein* I*-approximativer Verband, so ist* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$.

BEWEIS: Zu (i): Sei zunächst $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$ und $g \in \mathcal{E}$ beliebig. Wir müssen

$$(*) \qquad \overline{I}(g^+) \leq I(g) + \overline{I}(g^-)$$

zeigen. Dies ist sicher richtig, wenn $\overline{I}(g^-) = \infty$ ist. Sei also $\overline{I}(g^-) < \infty$. Wir finden dann zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ geeignete $p_n \in \mathcal{E}^+$ so daß

$$g^- \leq \sum p_n \ , \ \sum I(p_n) < \overline{I}(g^-) + \epsilon .$$

Wegen $\|(g + \sum g_n) - (g + \sum_1^N g_n)\| \leq \sum_{N+1}^{\infty} I(g_n) \to 0 \ (N \to \infty)$ gilt

$$g + \sum p_n \in (\mathcal{L}^1)^+ \ , \ \int \left(g + \sum p_n\right) = I(g) + \sum I(p_n) .$$

Wegen $g^+ = g + g^- \leq g + \sum p_n$ folgt

$$\begin{aligned}\overline{I}(g^+) &\leq \overline{I}(g + \sum p_n) = \int \left(g + \sum p_n\right) \\ &= I(g) + \sum I(p_n) < I(g) + \overline{I}(g^-) + \epsilon \,.\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt (*).

Gelte umgekehrt (*) für alle $g \in \mathcal{E}$ und sei $f \in (\mathcal{L}^1)^+$. Wir wollen $\overline{I}(f) = \int f$ zeigen, wozu es gemäß der Bemerkung vor Beginn dieses Satzes genügt, $\overline{I}(f) \leq \int f$ nachzuweisen. Sei hierzu $\epsilon > 0$ beliebig und $g \in \mathcal{E}$ so gewählt, daß

$$\left| \int f - I(g) \right| < \epsilon \,, \quad \|f - g\| < \epsilon \,.$$

Letzteres bedeutet: Es gibt $g_n \in \mathcal{E}^+$ mit

$$|f - g| \leq \sum g_n \,, \quad \sum I(g_n) < \epsilon \,.$$

Wie man sich überzeugt, ist $f \leq g^+ + \sum g_n$ und folglich, wegen der Gültigkeit der Ungleichung (*):

$$\begin{aligned}\overline{I}(f) &\leq \overline{I}(g^+) + \sum I(g_n) \\ &\leq I(g) + \overline{I}(g^-) + \sum I(g_n) \\ &< \int f + \epsilon + \overline{I}(g^-) + \epsilon \,.\end{aligned}$$

Wegen $f \geq 0$ ist aber $g^- \leq |f - g|$ und daher

$$\overline{I}(f) < \int f + \overline{I}(|f - g|) + 2\epsilon < \int f + 3\epsilon \,.$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt hieraus die gewünschte Ungleichung $\overline{I}(f) \leq \int f$.

Zu (ii): Ist $\mathcal{E}$ ein I-approximativer Verband (und hierunter fallen trivialerweise alle Verbände), so müssen wir gemnäß (i) nur die Ungleichung (*) zeigen, für ein beliebiges $g \in \mathcal{E}$. Sei hierzu $\epsilon > 0$ beliebig. Es existieren dann $h_1, h_2, g_1, g_2 \in \mathcal{E}$, so daß gilt:

$$\begin{aligned}h_1 \leq g^+ \leq k_1 \,, \quad I(k_1) - I(h_1) < \epsilon \,, \\ h_2 \leq g^- \leq k_2 \,, \quad I(k_2) - I(h_2) < \epsilon \,.\end{aligned}$$

Wir können nun abschätzen:

$$\begin{aligned}\overline{I}(g^+) &\leq I(k_1) < I(h_1) + \epsilon \\ &= I(h_1 - k_2) + I(k_2) + \epsilon \,,\end{aligned}$$

und wegen $h_1 - k_2 \leq g^+ - g^- = g$ gilt:

$$\overline{I}(g^+) < I(g) + I(k_2) + \epsilon \,. \tag{1}$$

Nun ist aber offenbar $k_2 \leq g^- + (k_2 - h_2)$ und folglich

$$\begin{aligned} I(k_2) = \overline{I}(k_2) &\leq \overline{I}(g^-) + \overline{I}(k_2 - h_2) \\ &= \overline{I}(g^-) + I(k_2 - h_2) < \overline{I}(g^-) + \epsilon \,. \end{aligned}$$

Setzt man dies in (1) ein, so erhält man

$$\overline{I}(g^+) < I(g) + \overline{I}(g^-) + 2\epsilon \,,$$

woraus (*) folgt, da $\epsilon > 0$ beliebig war $\diamondsuit$

An dieser Stelle sei bemerkt, daß die in (1.2.3),(i) vorkommende Bedingung

$$(\text{-}) \qquad \overline{I}(g^+) \leq I(g) + \overline{I}(g^-) \qquad \forall g \in \mathcal{E}$$

genau die Bedingung ist, die König in [**3**] an seine Daniell-Integrale $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ (neben Linearität und Positivität) stellt; sie ist aquivalent zu jeder der Bedingungen

$$\begin{aligned} \overline{I}(g^+) &\geq I(g) + \overline{I}(g^-) \qquad \forall g \in \mathcal{E} \,, \\ \overline{I}(g^+) &= I(g) + \overline{I}(g^-) \qquad \forall g \in \mathcal{E} \,, \end{aligned}$$

wie man sich leicht überzeugt. Man weist leicht nach, daß z.B. aus der ersten dieser beiden Bedingungen sofort die Stetigkeit von unten von I folgt. Wegen (1.2.3),(i) haben wir also

$$(\text{-}) \;\Leftrightarrow\; I \text{ stetig von unten und } \overline{I} = \int \text{ auf } (\mathcal{L}^1)^+ \,.$$

(1.2.4) BEISPIEL. *Es gibt Fälle, wo* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$ *und sogar auf* $(\tilde{\mathcal{L}}^1)^+$ *nicht erfüllt ist.*

BEWEIS: Sei $X = (-1, 1)$ und seien

$$\begin{aligned} J_1 &:= [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ J_n &:= [-1 + \frac{1}{n+1}, -1 + \frac{1}{n}) \cup (1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n+1}] \qquad (n \geq 2) \,. \end{aligned}$$

Sei ψ die Identität auf X und sei $\chi_n := \chi_{J_n}$. Der Raum $\mathcal{E}$ bestehe aus allen endlichen Linearkombinationen der Funktionen χ_n, ψ; I sei das gewöhnliche Riemann- oder Lebesgue-Integral auf $\mathcal{E}$. Sei $f := 1 + \psi$. Wir behaupten: Es ist $f \in (\mathcal{L}^1)^+$

und $\int f = 2$. Ist nämlich $g_N := \psi + \sum_1^N \chi_n$ so ist $I(g_N) = 2(1 - \frac{1}{N+1})$. Da $|f - g_N| \leq \sum_{N+1}^{\infty} \chi_n$ hat man

$$\|f - g_N\| \leq \sum_{N+1}^{\infty} I(\chi_n) = \frac{2}{N+1} \to 0 ,$$

für $N \to \infty$. Da offenbar $g_N \in \tilde{\mathcal{E}}$, folgt $f \in (\tilde{\mathcal{L}}^1)^+$ und $\int f = \lim_{N\to\infty} I(g_N) = 2$.

Sei nun $p = \alpha\psi + \sum_1^M \alpha_n \chi_n \in \mathcal{E}^+$. Indem man p etwa an den Stellen $\pm(1 - \frac{1}{M+2})$ auswertet findet man, daß $\alpha \geq 0$ und $\alpha \leq 0$, also $\alpha = 0$ sein muß. Dann müssen aber alle $\alpha_n \geq 0$ sein.

Seien jetzt $p_k \in \mathcal{E}^+$ und sei $p := \sum p_k \geq f$. Nach dem eben gesagten hat p notwendig die Form $p = \sum \alpha_n \chi_n$ mit Koeffizienten $\alpha_n \in [0, \infty]$. Man überlegt sich, daß $\sum_k I(p_k) = \sum_n \alpha_n I(\chi_n)$. Vergleicht man die Werte von f und p im äußersten rechten Punkt eines jeden J_n, so sieht man wegen $p \geq f$, daß $\alpha_n \geq 2 - \frac{1}{n+1}$. Eine elementare Rechnung zeigt, daß dann bereits $\alpha_1 I(\chi_1) + \alpha_2 I(\chi_2) \geq \frac{37}{18}$. Erst recht gilt daher

$$\sum_k I(p_k) = \sum_n \alpha_n I(\chi_n) \geq \frac{37}{18} > 2 .$$

Folglich gilt $\overline{I}(f) \geq \frac{37}{18} > 2 = \int f$, d.h. es ist nicht eimal $\overline{I} = \int$ auf $(\tilde{\mathcal{L}}^1)^+$ $\diamondsuit$

Beispiel (1.2.4) ist aus [**1**] adaptiert.

Wir kehren zur allgemeinen Theorie zurück. Der Satz über die monotone Konvergenz bleibt in der folgenden Form gültig:

(1.2.5) THEOREM. *(Monotone Konvergenz) Sei $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$. Sei (f_n) eine aufsteigende Folge aus $\mathcal{L}^1$ und $f = \lim_{n\to\infty} f_n$. Bleibt die Folge der Integrale $\int f_n$ beschränkt, so ist auch $f \in \mathcal{L}^1$ und es gilt*

$$\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n .$$

Analoges gilt für monoton fallende Folgen.

BEWEIS: Ohne Einschränkung sind alle f_n reellwertig. Man hat

$$\begin{aligned} \|f - f_N\| &= \|\sum_N^\infty (f_{n+1} - f_n)\| \leq \sum_N^\infty \|f_{n+1} - f_n\| \\ &= \sum_N^\infty \bar{I}(f_{n+1} - f_n) = \sum_N^\infty \int (f_{n+1} - f_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \int f_n - \int f_N \to 0 \,, \end{aligned}$$

für $N \to \infty$. Nach (1.1.11),(iii) ist $f \in \mathcal{L}^1$ und nach (1.2.2) ist $\int f = \lim_{n\to\infty} \int f_n$ $\diamondsuit$

Sind sogar alle f_n aus $\tilde{\mathcal{L}}^1$, so ist auch $f \in \tilde{\mathcal{L}}^1$, da $\tilde{\mathcal{L}}^1$ vollständig, also auch abgeschlossen in $\mathcal{L}^1$. In der klassischen Integrationstheorie ist der Satz über die monotone Konvergenz und die Verbandseigenschaft von $\mathcal{L}^1$ der Schlüssel zum Beweis des Lemmas von Fatou und des Satzes von H. Lebesgue über die majorisierte Konvergenz. Daher gilt:

(1.2.6) SATZ. *Wenn die beiden Bedingungen*

(i) $\bar{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$

(ii) $\mathcal{L}^1$ *ist ein Veband*

erfüllt sind, so gelten weiterhin das Lemma von Fatou und der Satz über die majorisierte Konvergenz. Insbesondere ist dies der Fall, wenn $\mathcal{E}$ *ein Verband oder ein I-approximativer Verband ist (siehe (1.1.16) und (1.2.3)).*

Es sei noch bemerkt, daß es i.A. nicht einfach ist nachzuprüfen, ob in einer gegebenen Situation $\bar{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$ erfüllt ist oder nicht. Der Zugang von König in [**3**] arbeitet mit anderen Bedingungen die dann ebenfalls die Gültigkeit des wichtigen Satzes über die monotone Konvergenz sichern, aber auch diese sind meist nicht weniger schwer nachprüfbar.

(1.2.7) SATZ. *Es gilt:*

(i) *Ist* $\bar{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$, *so ist das Integral stetig von unten: Sind* $f \in \mathcal{L}^1$ *sowie* $f_n \in (\mathcal{L}^1)^+$ *so gilt:*

$$\sum f_n \geq f \Rightarrow \sum \int f_n \geq \int f \,.$$

(ii) *Es gibt Funktionenvektorräume* $\mathcal{E}$ *mit einem Daniell-Integral* $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$, *so daß das zugehörige Integral* $\int dI$ *nicht stetig von unten ist.*

BEWEIS: Zu (i): Ist $\sum \int f_n = \infty$ so ist nichts zu zeigen. Andernfalls folgt aber aus dem Satz über die monotone Konvergenz und wegen der Isotonie des Integrals

$$\sum f_n \in \mathcal{L}^1 \text{ und } \sum \int f_n = \int \sum f_n \geq \int f \, .$$

Zu (ii): Definiere

$$X := (-1, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 1) \, .$$

Wähle dann Zahlen $a_n, b_n \in (-1,1)$ $(n \in \mathbf{N})$ so daß gilt:

$$-1 < \cdots < a_n < \cdots < a_2 < a_1 = -\frac{1}{2} \, , \; a_n \downarrow -1 \, ,$$
$$\frac{1}{2} = b_1 < b_2 < \cdots < b_n < \cdots < 1 \, , \; b_n \uparrow 1 \, .$$

Setze dann

$$J_n := (a_{n+1}, a_n] \cup [b_n, b_{n+1}) \, , \; \chi_n := \chi_{J_n} \; (n = 1, 2, \ldots) \, .$$

Des weiteren wählen wir zu jedem festen $n \in \mathbf{N}$ Punkte $a_{n,k}, b_{n,k} \in J_n$ mit den Eigenschaften

$$a_{n+1} < \cdots < a_{n,k} < \cdots < a_{n,2} < a_{n,1} = a_n \, , \; a_{n,k} \downarrow a_{n+1} \; (k \to \infty) \, ,$$
$$b_n = b_{n,1} < b_{n,2} < \cdots < b_{n,k} < \cdots < b_{n+1} \, , \; b_{n,k} \uparrow b_{n+1} \; (k \to \infty)$$

und wir setzen, nachdem dies geschehen ist,

$$J_{n,k} := (a_{n,k+1}, a_{n,k}] \cup [b_{n,k}, b_{n,k+1}) \, ,$$
$$\chi_{n,k} := \chi_{J_{n,k}} \qquad (n, k = 1, 2, \ldots) \, .$$

Damit ist also

$$X = \bigcup_1^\infty J_n \, , \; J_n = \bigcup_{k=1}^\infty J_{n,k} \; (n = 1, 2, \ldots) \, ,$$

und alle diese Vereinigungen sind sogar disjunkte Vereinigungen.
Seien jetzt noch reelle Zahlen $K_n > 0$ so groß gewählt, daß

$$(1) \qquad K_n(b_{n,2} - b_{n,1}) \geq 1 \, , \; K_n(a_{n,1} - a_{n,2}) \geq 1 \; (n = 1, 2, \ldots) \, .$$

Wir definieren nun eine Reihe von Funktionen. Für $n \in \mathbf{N}$ sei $\psi_n : X \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$\psi_n(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \in J_n \backslash \{b_{n,1}\} \\ K_n & \text{für } x = b_{n,1} = b_n \\ 0 & \text{für } x \notin J_n \, . \end{cases}$$

Außerdem sei $\psi : X \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$\psi(x) := \begin{cases} x & \text{für } x \notin \{a_1, a_2, \ldots\} \cup \{b_1, b_2, \ldots\} \\ K_n & \text{für } x = b_n = b_{n,1} \ (n = 1, 2, \ldots) \\ -K_n & \text{für } x = a_n = a_{n,1} \ (n = 1, 2, \ldots) \ . \end{cases}$$

Der Leser möge sich unbedingt eine Skizze über den Verlauf der angegebenen Funktionen machen, um die nachfolgende Argumentation anschaulich zu verstehen. Es bestehe $\mathcal{E}$ aus allen möglichen (endlichen) Linearkombinationen der Funktionen

$$\psi \ , \ \psi_n \ , \ \chi_{n,k} \ (n, k = 1, 2, \ldots) \ .$$

Wir setzen das angestrebte Daniell-Integral I zunächst auf diesen Funktionen fest; es sei wie gewohnt

$$I(\psi_n) := \int \psi_n \, dI_L \ ,$$

$$I(\chi_{n,k}) := \int \chi_{n,k} \, dI_L \quad (n, k = 1, 2, \ldots) \ ,$$

aber hiervon abweichend sei

$$I(\psi) := 3 \ .$$

Ist dann etwa

$$f = \alpha\psi + \sum_n \alpha_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta_{n,k} \chi_{n,k} \in \mathcal{E} \ ,$$

so sei $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ definiert durch

$$I(f) := \alpha I(\psi) + \sum_n \alpha_n I(\psi_n) + \sum_{n,k} \beta_{n,k} I(\chi_{n,k}) \ .$$

Dadurch ist I wohldefiniert. Sind nämlich

$$\begin{aligned} f &= \alpha\psi + \sum_n \alpha_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta_{n,k} \chi_{n,k} \\ &= \alpha'\psi + \sum_n \alpha'_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta'_{n,k} \chi_{n,k} \end{aligned} \tag{2}$$

zwei Darstellungen von $f \in \mathcal{E}$, so ergibt die Auswertung von f z.B. an einer hinreichend weit rechts gelegenen Stelle $x \in X$ (beachte, daß die Summen in (2) endlich sind): $f(x) = \alpha = \alpha'$ und folglich

$$\alpha I(\psi) = \alpha' I(\psi) \ . \tag{3}$$

Aus $\alpha = \alpha'$ und Gleichung (2) folgt überdies

$$\sum_n \alpha_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta_{n,k} \chi_{n,k} = \sum_n \alpha'_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta'_{n,k} \chi_{n,k} \ .$$

Wenn wir dies mit $\int dI_L$ überintegrieren folgt

$$(4) \qquad \sum_n \alpha_n I(\psi_n) + \sum_{n,k} \beta_{n,k} I(\chi_{n,k}) = \sum_n \alpha'_n I(\psi_n) + \sum_{n,k} \beta_{n,k} I(\chi_{n,k}) \ .$$

Die Addition von (3) und (4) ergibt nun gerade die gewünschte Wohldefiniertheit von $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$.
Offensichtlich ist I linear.

Nun sollen die Funktionen $f \in \mathcal{E}^+$ untersucht werden. Sei dazu $f \in \mathcal{E}^+$, etwa

$$f = \alpha\psi + \sum_n \alpha_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta_{n,k} \chi_{n,k} \geq 0$$

(mit endlichen Summen). Auswertung von f an einer hinreichend weit rechts (links) gelegenen Stelle ergibt $\alpha \geq 0$ ($\alpha \leq 0$), also muß $\alpha = 0$ sein. Ganz analog ergibt die Auswertung von f an einer hinreichend weit rechts (links) gelegenen Stelle von J_n, daß $\alpha_n \geq 0$ ($\alpha_n \leq 0$), also $\alpha_n = 0$. Da die $J_{n,k}$ paarweise disjunkt sind können wir nun noch $\beta_{n,k} \geq 0$ schließen und erhalten

$$\mathcal{E}^+ = \{ \sum_{(n,k) \in S} \beta_{n,k} \chi_{n,k} |\ S \subset \mathbf{N} \times \mathbf{N} \text{ endlich }, \ \beta_{n,k} \geq 0 \} \ .$$

Nun ist die Stetigkeit von unten von I nachzuweisen. Seien dazu

$$f = \alpha\psi + \sum_n \alpha_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta_{n,k} \chi_{n,k} \in \mathcal{E} \ ,$$

$$f^i = \sum_{(n,k) \in S_i} \beta^i_{n,k} \chi_{n,k} \in \mathcal{E}^+ \quad (i = 1, 2, \ldots) \ ,$$

und es gelte

$$(5) \qquad \begin{aligned} \sum_i f^i &= \sum_i \left(\sum_{(n,k) \in S_i} \beta^i_{n,k} \chi_{n,k} \right) \\ &\geq \alpha\psi + \sum_n \alpha_n \psi_n + \sum_{n,k} \beta_{n,k} \chi_{n,k} = f \ . \end{aligned}$$

Wir haben $\sum_i I(f^i) \geq I(f)$ zu zeigen und unterscheiden hierzu zwei Fälle.

1. Fall: Es ist $\alpha = 0$.
Wir können $\sum_i I(f^i) < \infty$ annehmen, sonst sind wir fertig. Dann gilt aber mit dem Satz über die monotone Konvergenz für das Lebesgue-Integral:

$$\begin{aligned} \sum_i I(f^i) &= \sum_i \int f^i \, dI_L \\ &= \int \left(\sum_i f^i \right) dI_L \\ &\geq \int f \, dI_L = I(f) \ . \end{aligned}$$

2. Fall: Es ist $\alpha \neq 0$.
Es sei dann etwa $\alpha > 0$ (der Fall $\alpha < 0$ geht völlig analog). Wähle ein $n_0 \in \mathbf{N}$ so groß, daß $\alpha_n = 0, \beta_n = 0$ für $n > n_0$ und alle k. Für solche $n > n_0$ ergibt dann die Auswertung von (5) an den Stellen $b_n = b_{n,1}$:

$$\sum_i \beta^i_{n,1} \geq \alpha\psi(b_n) = \alpha K_n \Rightarrow$$

$$\sum_i \beta^i_{n,1} I(\chi_{n,1}) \geq \alpha K_n I(\chi_{n,1}) \qquad (n > n_0) .$$

Daraus schließen wir nun

$$\begin{aligned} \sum_i I(f^i) &\geq \sum_i \left[\sum_{n>n_0} \beta^i_{n,1} I(\chi_{n,1}) \right] \\ &= \sum_{n>n_0} \left[\sum_i \beta^i_{n,1} I(\chi_{n,1}) \right] \\ &\geq \alpha \sum_{n>n_0} K_n I(\chi_{n,1}) \end{aligned}$$

was wegen $I(\chi_{n,1}) = (b_{n,2} - b_{n,1}) + (a_{n,1} - a_{n,2})$

$$= \alpha \sum_{n>n_0} ((b_{n,2} - b_{n,1})K_n + (a_{n,1} - a_{n,2})K_n) ,$$

dies ist aber gemäß der Wahl der K_n nach (1)

$$\geq \alpha \sum_{n>n_0} 2 = \infty > I(f) .$$

Damit ist die Stetigkeit von unten von I gezeigt. Hieraus folgt zusammen mit der Linearität auch noch die Positivität von I, so daß $I : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ insgesamt ein Daniell-Integral ist.
Wir wollen nun sehen, warum das zugehörige Integral $\int dI$ nicht stetig von unten ist. Wir definieren dazu

$$f_n := \chi_n + \psi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots) .$$

Es ist $f_n \geq 0$. Es gilt aber auch $f_n \in \mathcal{L}^1$: Definiert man nämlich

$$g_{n,K} := \psi_n + \sum_{k=1}^{K} \chi_{n,k} \in \mathcal{E} \qquad (n, K \in \mathbf{N}) ,$$

so prüft man leicht nach, daß

$$\lim_{K \to \infty} \|f_n - g_{n,K}\|_I = 0 ;$$

wir haben also $f_n \in (\mathcal{L}^1)^+$. Wegen $g_{n,K} \uparrow f_n$ $(K \to \infty)$ gilt mit monotoner Konvergenz überdies

$$\begin{aligned}\int f_n \, dI &= \lim_{K\to\infty} I(g_{n,K}) \\ &= \lim_{K\to\infty} \int g_{n,K} \, dI_L \\ &= \int \left(\lim_{K\to\infty} g_{n,K}\right) dI_L = \int f_n \, dI_L \ .\end{aligned}$$

Per constructionem ist aber auch, wie man leicht nachprüft

$$\sum_1^\infty f_n \geq \psi \in \mathcal{E} \subset \mathcal{L}^1 \ ;$$

es gilt jedoch (wieder mit Hilfe des Satzes über die monotone Konvergenz):

$$\begin{aligned}\sum_1^\infty \int f_n \, dI &= \sum_1^\infty \int f_n \, dI_L \\ &= \int \left(\sum_1^\infty f_n\right) dI_L \\ &< \int_{-1}^{1} (1+x)\, dx = 2 < 3 = I(\psi) = \int \psi \, dI \ ,\end{aligned}$$

d.h. aber $\int dI$ ist nicht stetig von unten $\diamondsuit$

Zum Schluss wollen wir noch ein wichtiges Kriterium für Integrierbarkeit kennenlernen.

Wir definieren $\overline{\mathcal{E}}$ als die Menge aller $f : X \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$ zu denen es eine aufsteigende Folge (f_n) aus $\mathcal{E}$ gibt mit $f_n \uparrow f$. Durch

$$I(f) := \lim_{n\to\infty} I(f_n)$$

wird I auf ganz $\overline{\mathcal{E}} \supset \mathcal{E}$ fortgesetzt. In der Tat ist I auf $\overline{\mathcal{E}}$ wohldefiniert: Sind $(f_n), (g_n)$ zwei Folgen aus $\mathcal{E}$ mit $f_n \uparrow f$ und $g_n \uparrow f$ so hat man für festes m

$$\begin{aligned}&\sum_1^\infty (f_{n+1} - f_n) = f - f_1 \geq g_m - f_1 \Rightarrow \\ &\lim_{n\to\infty} I(f_n) - I(f_1) \geq I(g_m) - I(f_1) \ ,\end{aligned}$$

da I stetig von unten ist. Weil m beliebig war folgt $\lim_{n\to\infty} I(f_n) \geq \lim_{m\to\infty} I(g_m)$ und völlig analog gilt auch die umgekehrte Ungleichung.

Ähnlich definiert man $\underline{\mathcal{E}}$ als die Menge aller monoton fallenden Limiten von Folgen aus $\mathcal{E}$, sowie eine Fortsetzung I auf $\underline{\mathcal{E}}$ die ebenfalls mit I bezeichnet wird.

(1.2.8) SATZ. *I ist eine isotone Abbildung $\overline{\mathcal{E}} \to \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Sind $f, g \in \overline{\mathcal{E}}, c \geq 0$ so sind auch $f+g, cf \in \overline{\mathcal{E}}$ und es ist $I(f+g) = I(f) + I(g), I(cf) = cI(f)$. Eine analoge Aussage gilt für $\underline{\mathcal{E}}$.*
Es ist $\overline{\mathcal{E}} = -\underline{\mathcal{E}}$ und für $f \in \overline{\mathcal{E}}$ gilt $I(f) = -I(-f)$. Ist $f \in \overline{\mathcal{E}}, g \in \underline{\mathcal{E}}$ und $g \leq f$ so ist $I(g) \leq I(f)$.

Da die Beweise einfach sind zeigen wir nur die letzte Behauptung: Ist $I(f) = \infty$ oder $I(g) = -\infty$ so ist nichts zu zeigen. Andernfalls sind beide Werte reell und wegen $-g \in \overline{\mathcal{E}}, f - g \geq 0$ gilt

$$I(f) - I(g) = I(f) + I(-g) = I(f-g) \geq 0 .$$

Dabei wurde die im Satz behauptete Isotonie und Additivität von I auf $\overline{\mathcal{E}}$ bereits ausgenutzt.

(1.2.9) DEFINITION. *Für $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ sei*

$$I^*(f) := \inf\{I(h) |\ h \geq f, h \in \overline{\mathcal{E}}\}$$
$$I_*(f) := \sup\{I(h) |\ h \leq f, h \in \underline{\mathcal{E}}\} .$$

Natürlich gilt auch in diesem Falle wieder die Übereinkunft $\inf \emptyset := \infty$ und $\sup \emptyset := -\infty$.

1.2.10) SATZ. *Seien $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ Funktionen. Dann gilt:*
(i) *$I_*(f) \leq I^*(f)$.*
(ii) *Für $c \geq 0$ ist $I_*(cf) = cI_*(f), I^*(cf) = cI^*(f)$, ferner gilt $I_*(f) = -I^*(-f)$.*
(iii) *Sind $f+g, I^*(f) + I^*(g)$ bzw. $I_*(f) + I_*(g)$ definiert, so gelten die Ungleichungen $I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g)$ bzw. $I_*(f+g) \geq I_*(f) + I_*(g)$.*

Wir verzichten auf die einfachen Beweise. Das angekündigte Integrationskriterium lautet nun:

(1.2.11) THEOREM. *Betrachte eine Funktion $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ sowie folgende Aussage:*
(*) *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es $u \in \underline{\mathcal{E}}, v \in \overline{\mathcal{E}}$ mit*

$$u \leq f \leq v\ ,\ I(u), I(v) \in \mathbf{R}\ ,\ I(v) - I(u) < \epsilon .$$

Dann gilt:

(i) *Ist* $f \in \mathcal{L}^1$, *so erfüllt* f *die Aussage* (*).

(ii) *Ist* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$ *so gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1 \Leftrightarrow f \text{ erfüllt } (*) .$$

BEWEIS: Zu (i): Sei $f \in \mathcal{L}^1$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle ein $g \in \mathcal{E}$ mit $\|f - g\| < \frac{\epsilon}{2}$. Dann existieren also $g_n \in \mathcal{E}^+$ mit

$$|f - g| \leq \sum g_n \ , \ \sum I(g_n) < \frac{\epsilon}{2} .$$

Setzt man nun

$$u := g - \sum g_n \ , \ v := g + \sum g_n \ ,$$

so erfüllen u und v offenbar alle Forderungen aus (*).

Zu (ii): Ist $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$ so müssen wir wegen (i) nur noch zeigen, daß ein f das (*) erfüllt auch in $\mathcal{L}^1$ liegt. Wähle hierzu $\epsilon > 0$ beliebig und $u \in \underline{\mathcal{E}}, v \in \overline{\mathcal{E}}$, so daß (*) erfüllt ist. Mit (1.2.5) folgt sofort

$$u, v \in \mathcal{L}^1 \ , \ \int u = I(u) \ , \ \int v = I(v) .$$

Seien etwa $v_n \in \mathcal{E}$ mit $v_n \uparrow v$. Sei jetzt n so groß gewählt, daß $I(v) - I(v_n) < \epsilon$. Wir behaupten, daß

$$|f - v_n| \leq (v - v_n) + (v - u) .$$

Sei nämlich $x \in X$ beliebig; ist dann $f(x) \geq v_n(x)$ so ist

$$|f(x) - v_n(x)| = f(x) - v_n(x) \leq v(x) - v_n(x) .$$

Ist hingegen $f(x) \leq v_n(x)$ so hat man

$$|f(x) - v_n(x)| = v_n(x) - f(x) \leq v(x) - f(x) \leq v(x) - u(x) .$$

In jedem Falle gilt $|f - v_n| \leq (v - v_n) + (v - u)$ und daher

$$\begin{aligned} \overline{I}(|f - v_n|) &\leq \overline{I}(v - v_n) + \overline{I}(v - u) \\ &= \int (v - v_n) + \int (v - u) \\ &= (I(v) - I(v_n)) + (I(v) - I(u)) < 2\epsilon . \end{aligned}$$

Da $v_n \in \mathcal{E}$ und da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $f \in \mathcal{L}^1$ $\diamondsuit$

(1.2.12) COROLLAR. *Sei* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$. *Dann ist für ein* $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ *äquivalent:*

(i) $f \in \mathcal{L}^1$.

(ii) $I_*(f) = I^*(f) \in \mathbf{R}$.

In diesem Falle ist $I^*(f) = I_*(f) = \int f$.

Wie man aus (1.2.11),(i) erkennt, ist die Aussage (i)⇒(ii) immer richtig, d.h. auch dann, wenn nicht $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$.

Bei (1.2.12) handelt es sich um ein Integrationskriterium: Man will die Elemente von $\mathcal{L}^1$ bestimmen. Andererseits hat das Kriterium nur Gültigkeit unter der Bedingung $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$, d.h. man muß zumindest die nicht-negativen integrierbaren Funktionen bereits kennen, um das Kriterium überhaupt anwenden zu können. Dies ist natürlich eine unangenehme Situation, aus der man sich aber sofort mit Hilfe von (1.2.3),(i) befreit: Dort wird ja angegeben, wie man alleine aus der Kenntnis von $\mathcal{E}$ entscheiden kann, ob $\overline{I} = \int$ erfüllt ist oder nicht.

Aber nun zum

BEWEIS: Die Äquivalenz von (i) und (ii) folgt unmittelbar aus (1.2.11). Ist nun $f \in \mathcal{L}^1$ und $\epsilon > 0$, so wähle man $u \in \overline{\mathcal{E}}, v \in \underline{\mathcal{E}}$ so daß (*) von (1.2.11) erfüllt ist. Wir haben wieder $u, v \in \mathcal{L}^1$ (wegen (1.2.5)) und $I(u) = \int u \leq \int f \leq \int v = I(v)$, also

$$I^*(f) \leq I(v) = \int f + (I(v) - \int f)$$
$$\leq \int f + (I(v) - I(u)) < \int f + \epsilon ,$$

und analog gilt $I_*(f) > \int f - \epsilon$. Daraus folgt

$$I^*(f) - \epsilon < \int f < I_*(f) + \epsilon .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war und da immer $I_*(f) \leq I^*(f)$ erhalten wir hieraus notwendig $I_*(f) = I^*(f) = \int f$ ◇

Die folgenden Sätze sollen das Verhältnis zwischen $\overline{I}$ und I^* bzw. I_* beleuchten.

(1.2.13) SATZ). *Sei* $f : X \to [0, \infty]$ *eine Funktion.*
(i) *Es ist* $I^*(f) \leq \overline{I}(f)$.
(ii) *Ist* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$, *so ist* $I^*(f) = \overline{I}(f)$.

BEWEIS: Zu (i): Wir können $\overline{I}(f) < \infty$ annehmen, sonst ist nichts zu zeigen. Wähle zu $\epsilon > 0$ Funktionen $g_n \in \mathcal{E}^+$ mit

$$f \leq \sum g_n \quad \text{und} \quad \sum I(g_n) < \overline{I}(f) + \epsilon .$$

Es ist $\sum g_n \in \overline{\mathcal{E}}$ und daher

$$I^*(f) \leq \sum I(g_n) < \overline{I}(f) + \epsilon .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt (i).

Zu (ii): Wir müssen nur noch $\overline{I}(f) \leq I^*(f)$ zeigen und können hierzu $I^*(f) < \infty$ annehmen. Zu $\epsilon > 0$ existiert dann ein $g \in \overline{\mathcal{E}}$ mit $g \geq f$ und $I(g) < I^*(f) + \epsilon$. Man kann g in der Form $g = g_0 + \sum g_n$ schreiben, wobei $g_0 \in \mathcal{E}, g_n \in \mathcal{E}^+$. Dann ist also

$$I(g) = I(g_0) + \sum I(g_n) < I^*(f) + \epsilon \ .$$

Nach dem Satz über die monotone Konvergenz ist $g \in \mathcal{L}^1$. Da außerdem $g \geq f \geq 0$ hat man wegen $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$

$$\overline{I}(f) \leq \overline{I}(g) = \int g = \int g_0 + \sum \int g_n = I(g_0) + \sum I(g_n) < I^*(f) + \epsilon \ .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $\overline{I}(f) \leq I^*(f)$ wie gewünscht $\diamondsuit$

(1.2.14) COROLLAR. *Für ein beliebiges $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ gilt*

$$|I^*(f)| \leq \overline{I}(|f|) \ , \ |I_*(f)| \leq \overline{I}(|f|) \ .$$

BEWEIS: Es ist $-|f| \leq f \leq |f|$. Da I^* isoton ist gilt $-I_*(|f|) \leq I^*(f) \leq I^*(|f|)$. Es folgt mit Hilfe von (i) des letzten Satzes

$$|I^*(f)| \leq \max\{I^*(|f|), I_*(|f|)\} = I^*(|f|) \leq \overline{I}(|f|) \ .$$

Die erste Ungleichung ist somit gezeigt, die zweite folgt sofort wegen der Beziehung $I_*(f) = -I^*(-f)$ $\diamondsuit$

(1.2.15) COROLLAR. *Sind $f, g : X \to \overline{\mathbf{R}}$ Funktionen mit $f = g$ f.ü., so gilt*

$$I^*(f) = I^*(g) \ , \ I_*(f) = I_*(g) \ .$$

BEWEIS: Wir müssen nur die erste Gleichung zeigen und aus Symmetriegründen auch nur die Ungleichung $I^*(f) \leq I^*(g)$. Dazu können wir $I^*(g) < \infty$ annehmen. Sei dann $c > I^*(g)$ beliebig. Man findet ein $h \in \overline{\mathcal{E}}$ mit $g \leq h$ und $I(h) < c$. Sei $N := \{f \neq g\}$. Dann ist χ_N eine Nullfunktion und es gilt $f \leq h + \sum_1^\infty \chi_N$ folglich

$$I^*(f) \leq I^*(h) + I^*(\sum_1^\infty \chi_N) \ .$$

Nun ist sicher $I^*(h) \leq I(h)$ und wegen (1.2.13),(i) gilt

$$I^*(\sum_1^\infty \chi_N) \leq \overline{I}(\sum_1^\infty \chi_N) \leq \sum_1^\infty \overline{I}(\chi_N) = 0 \ .$$

Es folgt daher $I^*(f) \leq I(h) < c$. Da $c > I^*(g)$ beliebig war muß $I^*(f) \leq I^*(g)$ gelten, wie behauptet $\diamondsuit$

(1.3) Integrierbare und meßbare Mengen

Es sei unverändert $\mathcal{E}$ ein Funktionenvektorraum, I ein Daniell-Integral auf $\mathcal{E}$ und $\mathcal{L}^1$ der zugehörige Raum der integrierbaren Funktionen.

(1.3.1) DEFINITION. *Sei* $A \subset X$.

(i) *A heißt integrierbar, wenn* $\chi_A \in \mathcal{L}^1$.

(ii) *A heißt meßbar, wenn $A \cap B$ integrierbar ist, für alle integrierbaren Mengen* $B \subset X$.

Die Menge der integriebaren Teilmengen von X wird mit $\mathcal{I}$, die der meßbaren mit $\mathcal{M}$ notiert.

Wir wollen eine besonders wichtige Sorte von Räumen $\mathcal{L}^1$ auszeichnen.

(1.3.2) DEFINITION. *Der Raum $\mathcal{L}^1$ heißt normal, wenn gilt:*

(i) *Es ist* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+$.

(ii) *Die integrierbaren Mengen $\mathcal{I}$ sind stabil gegenüber Bildung endlicher Durchschnitte:* $A, B \in \mathcal{I} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{I}$.

Äquivalent zu (ii) wäre z.B. auch die Forderung nach Stabilität von $\mathcal{I}$ gegenüber endlicher Vereinigungen oder mengentheoretischer Differenzen.

Auf der Menge $\mathcal{M}$ der meßbaren Mengen wird in kanonischer Weise eine Abbildung $\iota : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ definiert durch die Vorschrift

$$\iota(A) := \begin{cases} \int \chi_A & \text{falls } A \in \mathcal{I} \\ \infty & \text{sonst .} \end{cases}$$

Ist der Raum $\mathcal{L}^1$ normal, so haben $\mathcal{M}$ und ι schöne Eigenschaften:

(1.3.3) SATZ. *Ist $\mathcal{L}^1$ normal, so ist $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{I}$ st ist ein Ring, $\mathcal{M}$ ist eine σ-Algebra und ι ist ein Maß auf $\mathcal{M}$.*

BEWEIS: Es ist klar daß $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ wegen der Stabilität von $\mathcal{I}$ gegenüber endlichen Durchschnitten.

Sind nun $A, B \in \mathcal{I}$, so ist auch $A \cap B \in \mathcal{I}$ und man hat

$$\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B} \in \mathcal{L}^1,$$
$$\chi_{A \setminus B} = \chi_A - \chi_{A \cap B} \in \mathcal{L}^1,$$

so daß auch $A \cup B$ und $A \setminus B$ in $\mathcal{I}$ liegen; also ist $\mathcal{I}$ ein Ring.

Wir zeigen nun daß $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra ist. Natürlich sind $\emptyset, X \in \mathcal{M}$. Liegt A in $\mathcal{M}$ so auch $X \setminus A$: Ist nämlich $B \in \mathcal{I}$ beliebig, so hat man

$$(X \setminus A) \cap B = B \setminus (A \cap B) \in \mathcal{I} ,$$

da $\mathcal{I}$ ein Ring ist. Sind schließlich $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ so ist auch $A := \bigcup A_n \in \mathcal{M}$. Um dies zu zeigen sei $B \in \mathcal{I}$ beliebig vorgegeben. Dann ist zunächst für alle N

$$C_N := \left(\bigcup_1^N A_n \right) \cap B = \bigcup_1^N (A_n \cap B) \in \mathcal{I} .$$

Nun gilt aber $\chi_{C_N} \uparrow \chi_{A \cap B}$ und mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt, daß $\chi_{A \cap B}$ integrierbar, also $A \cap B \in \mathcal{I}$.

Zuletzt zeigen wir, daß ι ein Maß auf $\mathcal{M}$ ist. Natürlich ist $\iota(\emptyset) = 0$. Seien nun $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{M}$ paarweise disjunkt und sei $A := \bigcup A_n$. Es ist $\iota(A) = \sum \iota(A_n)$ zu zeigen. Ist nun $\sum \iota(A_n) < \infty$ so sind alle A_n integrierbar und nach dem Satz über die monotone Konvergenz ist auch A integrierbar wobei

$$\iota(A) = \int \chi_A = \sum \int \chi_{A_n} = \sum \iota(A_n) .$$

Ist hingegen $\sum \iota(A_n) = \infty$ so kann nicht $\iota(A) < \infty$ sein: Sonst wäre A integrierbar also auch alle $A_n = A \cap A_n$ und man hätte

$$\sum_1^N \iota(A_n) = \int \sum_1^N \chi_{A_n} \leq \int \chi_A = \iota(A) < \infty ,$$

für alle N und daher $\sum_1^\infty \iota(A_n) < \infty$, ein Widerspruch. Also ist auch in diesem Falle $\iota(A) = \sum \iota(A_n)$, ι ist ein Maß $\diamondsuit$

Zum Schluss dieses Abschnitts wollen wir noch eine praktische Schreibweise einführen.

Sei I ein Daniell-Integral auf einem Funktionenvektorraum $\mathcal{E}$ und seien $\mathcal{L}^1$, $\int$ von $\mathcal{E}$ und I herkommend. Wir sagen dann kurz $\mathcal{L}^1$ und I entstünden durch die Prozedur

$$\mathcal{E}, I \to \mathcal{L}^1, \int .$$

Ähnlich sagen wir $\mathcal{M}$ und ι entstünden durch die Prozedur

$$\mathcal{E}, I \to \mathcal{L}^1, \int \to \mathcal{M}, \iota .$$

Von solchen Diagrammen und dem Begriff der Prozedur wollen wir im Folgenden, auch bei anderen Gelegenheiten, zwanglosen Gebrauch machen.

Endlich halten wir noch fest:

(1.3.4) SATZ. *Ist $\mathcal{E}$ ein Verband oder ein I-approximativer Verband, so ist $\mathcal{L}^1$ normal.*

BEWEIS: Jedenfalls ist $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+$ nach (1.2.3). Nach (1.1.16) ist $\mathcal{L}^1$ ein Verband, woraus sofort folgt, daß die integrierbaren Mengen I stabil gegenüber endlichen Durchschnitten sind $\diamondsuit$

Von (1.3.4) wird noch oft stillschweigend Gebrauch gemacht werden.

(1.4) Maße auf Ringen und der zugehörige $\mathcal{L}^1$

Sei $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}(X)$ (=Potenzmenge von X) ein Ring und $\mu : \mathcal{Y} \to [0, \infty]$ ein Maß. Will man von hier aus startend eine Integrationstheorie aufbauen, so geht man üblicherweise etwa so vor: Mit der Fortstzungsmethode von Carathéodory verschafft man sich zunächst eine σ-Algebra $\mathcal{M}' \supset \mathcal{Y}$ und ein Maß $\mu' : \mathcal{M}' \to [0, \infty]$ das μ fortsetzt. Sodann kann man Maß- und Integrationstheorie im klassischen Sinne betreiben.

Für uns bietet sich jedoch ein anderer Weg an, der die bisher entwickelte Theorie ausnutzt. Wir werden diesen Weg skizzieren und verweisen für die Einzelheiten auf [**6**] .

Als erstes führen wir das Mengensystem

$$\mathcal{Y}_e := \{A \in \mathcal{Y} |\ \mu(A) < \infty\}$$

ein. Offenbar ist mit $\mathcal{Y}$ auch $\mathcal{Y}_e$ ein Ring. Der Raum $\mathcal{E}_\mu$ bestehe nun aus allen Funktionen der Form $\sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n}$ mit reellen Koeffizienten α_n und paarweise disjunkten $A_n \in \mathcal{Y}_e$. Man zeigt leicht, daß $\mathcal{E}_\mu$ ein Funktionenvektorraum ist. Mit einem f der angegebenen Gestalt wird durch

$$I_\mu(f) := \sum_1^N \alpha_n \mu(A_n)$$

eine Abbildung $I_\mu : \mathcal{E}_\mu \to \mathbf{R}$ (wohl-) definiert. Es gilt (vergl. [**6**] , II):

(1.4.1) SATZ. *$\mathcal{E}_\mu$ ist ein Stonescher Verband und I_μ ist ein Daniell-Integral.*

Der zu einer solchen Situation gehörende $\mathcal{L}^1$ wird mit dem besonderen Symbol

$$\mathcal{L}^1[\mu] := \mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}_\mu, I_\mu)$$

notiert.

Ist nun $\mathcal{Y}$ sogar eine σ-Algebra, so kann man auch klassisch vorgehen (vergl. etwa [**4**] , [**6**] , [**7**]): Man führt den Begriff der meßbaren Funktionen ein und erklärt zunächst ein Integral $\int f\, d\mu$ für meßbare $f \geq 0$. Sodann definiert man $\mathcal{L}^1(\mu)$ als den Raum aller meßbaren Funktionen f für die $\int f^+\, d\mu, \int f^-\, d\mu < \infty$ und setzt $\int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu$. Wir wollen diese wohlbekannte Theorie hier natürlich nicht entwickeln, müssen aber für später auf die Zusammenhänge zwischen $\mathcal{L}^1(\mu)$ und $\mathcal{L}^1[\mu]$ eingehen, wenn $\mathcal{Y}$ eine σ-Algebra ist. In [**6**] , II wird gezeigt:

(1.4.2) SATZ. *Sei $\mathcal{Y}$ eine σ-Algebra und μ ein Maß auf $\mathcal{Y}$.*

(i) *Es ist $\mathcal{L}^1(\mu) \subset \mathcal{L}^1[\mu]$ und*

$$\int f\,d\mu = \int f\,dI_\mu \qquad \forall f \in \mathcal{L}^1(\mu)\ .$$

(ii) *Dann und nur dann ist $\mathcal{L}^1(\mu) = \mathcal{L}^1[\mu]$ wenn μ vollständig ist.*

Zur Erinnerung: Das Maß μ heißt vollständig, wenn für alle $A \in \mathcal{Y}$ gilt:

$$\mu(A) = 0 \Rightarrow B \in \mathcal{Y}\ ,\ \forall B \subset A\ .$$

(1.4.3) COROLLAR. *Sei I ein Daniell-Integral auf $\mathcal{E}$. Betrachte die Prozedur*

$$\mathcal{E}, I \to \mathcal{L}^1, \int \to \mathcal{M}, \iota\ .$$

Ist $\mathcal{L}^1$ normal, so ist ι vollständig und $\mathcal{L}^1(\iota) = \mathcal{L}^1[\iota]$.

BEWEIS: Nach (1.3.3) ist jedenfalls $\mathcal{M}$ eine σ-Algebra und ι ein Maß. Sei nun $A \in \mathcal{M}$ und $\iota(A) = 0$. Dann ist A integrierbar und $\overline{I}(\chi_A) = \int \chi_A = 0$. Für $B \subset A$ ist dann erst recht

$$\|\chi_B - 0\| = \overline{I}(\chi_B) \leq \overline{I}(\chi_A) = 0\ .$$

Dies zeigt $\chi_B \in \mathcal{L}^1$ (und $\int \chi_B = 0$) also $B \in \mathcal{I} \subset \mathcal{M}$; somit ist ι vollständig und nach dem letzten Satz muß $\mathcal{L}^1(\iota) = \mathcal{L}^1[\iota]$ sein $\diamond$

In welchem Verhältnis stehen nun aber $\mathcal{L}^1$ und $\mathcal{L}^1[\iota]$? Diese Frage beantwortet folgender Satz.

(1.4.4) THEOREM. *Sei I ein Daniell-Integral auf $\mathcal{E}$. Betrachte die Prozedur*

$$\mathcal{E}, I \to \mathcal{L}^1, \int \to \mathcal{M}, \iota\ .$$

Ist $\mathcal{L}^1$ normal, so gilt:

(i) *$\mathcal{L}^1[\iota] \subset \mathcal{L}^1$ und für alle $f \in \mathcal{L}^1[\iota]$ gilt: $\int f\,dI_\iota = \int f$.*

(ii) *Dann und nur dann ist $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1[\iota]$, wenn $\mathcal{L}^1$ die Stonesche Bedingung erfüllt: $f \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow f \wedge 1 \in \mathcal{L}^1$.*

Für einen Beweis sei auf [**6**] , II verwiesen. Die Voraussetzungen sind dort zwar nicht genau dieselben, die Beweise bleiben jedoch auch in unserem Fall gültig.

Sei zum Schluß noch einmal $\mathcal{Y}$ ein Ring und μ ein Maß auf $\mathcal{Y}$. Zu $\mathcal{Y}$ und μ gehört der Raum $\mathcal{L}^1[\mu]$ der sicherlich normal ist (vergl. (1.4.1), (1.2.3) und (1.1.16)). Von $\mathcal{L}^1[\mu]$ ausgehend erhält man die zugehörigen meßbaren Mengen sowie das kanonische Maß auf diesen, welche man in dieser speziellen Situation stets mit $\mathcal{M}_\mu$ bzw. mit $\overline{\mu}$ notiert.

(1.4.5) SATZ. *Betrachte die Prozedur*

$$\mathcal{Y}, \mu \to \mathcal{E}_\mu, I_\mu \to \mathcal{L}^1[\mu], \int dI_\mu \to \mathcal{M}_\mu, \overline{\mu}$$

ausgehend von einem Ring $\mathcal{Y}$ und einem Maß μ. Dann gilt: $\mathcal{M}_\mu \supset \mathcal{Y}$, $\overline{\mu}$ ist ein vollständiges Maß und setzt μ fort.

Der Beweis findet sich in [**6**] , II. Als Konsequenz aus (1.4.4) und (1.4.3) hat man noch (da $\mathcal{L}^1[\mu]$ ein Stonescher Verband und da $\overline{\mu}$ vollständig):

(1.4.6) SATZ. *In der Situation von (1.4.5) gilt*

$$\mathcal{L}^1[\mu] = \mathcal{L}^1[\overline{\mu}] = \mathcal{L}^1(\overline{\mu})$$

und die Integrale stimmen überein.

(2) Produkträume

(2.1) Einführung des Produktraums

Gegeben seien zwei nicht leere Mengen X, Y, dazu zwei Funktionenvektorräume $\mathcal{E}(X), \mathcal{E}(Y)$ und auf diesen zwei Daniell-Integrale

$$I : \mathcal{E}(X) \to \mathbf{R} \ , \ J : \mathcal{E}(Y) \to \mathbf{R} \ .$$

Durch die in (1.2) besprochene Prozedur erhält man hieraus die Räume

$$\mathcal{L}^1(X) = \mathcal{L}^1(X, \mathcal{E}(X), I) \ , \ \mathcal{L}^1(Y) = \mathcal{L}^1(Y, \mathcal{E}(Y), J) \ .$$

Um nun Integrationstheorie auf $X \times Y$ betreiben zu können bietet sich zunächst folgender Weg an: Als Grundraum $\mathcal{E}_0(X \times Y)$ nimmt man alle Linearkombinationen von Funktionen der Gestalt $f \otimes g$ mit $f \in \mathcal{E}(X), g \in \mathcal{E}(Y)$. Dabei ist

$$f \otimes g(x, y) := f(x)g(y) \qquad (x \in X, y \in Y).$$

Sodann definiert man ein Daniell-Integral $I \otimes J$ auf $\mathcal{E}(X \times Y)$ durch die Vorschrift

$$I \otimes J(\sum_1^N \alpha_n f_n \otimes g_n) := \sum_1^N \alpha_n I(f_n) J(g_n) \ .$$

Diese Vorgehensweise hat jedoch einen entscheidenden Nachteil, der letztlich daher rührt, daß in unserem Ansatz $\mathcal{E}$-Funktionen eine unendliche Norm haben können: Hat man $f \in \mathcal{L}^1(X), g \in \mathcal{L}^1(Y)$ so würde man es gerne sehen, wenn $f \otimes g \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$ wäre. Aber wie soll man $f \otimes g$ durch Elemente aus $\mathcal{E}_0(X \times Y)$ approximieren? Der a priori einzig plausible Ansatz wäre die Approximation $f' \otimes g'$, wenn $f' \in \mathcal{E}(X), g' \in \mathcal{E}(Y)$ so gewählt sind, daß sie f bzw. g Norm-approximieren. Nun nützt aber offenbar die an dieser Stelle übliche Abschätzung

$$|f \otimes g - f' \otimes g'| \leq |f| \otimes |g - g'| + |f - f'| \otimes |g'|$$

nichts mehr, da sowohl $\|f\|$ als auch $\|g'\|$ unendlich sein können.

Um dieses Problem im Ansatz zu vermeiden gehen wir anders vor.

(2.1.1) DEFINITION. *Es sei*

$$\mathcal{E}(X \times Y) := \{\sum_1^N f_n \otimes g_n | \ f_n \in \mathcal{L}^1_e(X), g_n \in \mathcal{L}^1_e(Y), N \in \mathbf{N} \} \ .$$

Die Abbildung $I \otimes J : \mathcal{E}(X \times Y) \to \mathbf{R}$ *wird durch*

$$I \otimes J(\sum_1^N f_n \otimes g_n) := \sum_1^N \int f_n \int g_n$$

erklärt.

Zur Erinnerung: Ist $\mathcal{F}$ eine Menge von $\overline{\mathbf{R}}$-wertigen Funktionen, so bezeichnet $\mathcal{F}_e$ ("e" wie "endlichwertig") die Menge der reellwertigen $f \in \mathcal{F}$. Um Mißverständnissen vorzubeugen: In der Definition von $\mathcal{E}(X \times Y)$ werden in den Räumen $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ f.ü. gleiche Funktionen ausnahmsweise nicht identifiziert, so daß sich in dieser Hinsicht keine Wohldefiniertheits-Fragen an $\mathcal{E}(X \times Y)$ ergeben.

Die Abbildung $I \otimes J$ ist wohldefiniert: Ist $f \in \mathcal{E}(X \times Y)$ und hat f die Darstellungen

$$f = \sum_1^N f_n \otimes g_n = \sum_1^M f'_m \otimes g'_m \qquad (f_n, f'_m \in \mathcal{L}^1_e(X)\ ,\ g_n, g'_m \in \mathcal{L}^1_e(Y)\ ),$$

so gilt

$$\sum_1^N f_n g_n(y) = \sum_1^M f'_m g'_m(y) \qquad \forall y \in Y \Rightarrow$$

$$\sum_1^N (\int f_n) g_n(y) = \sum_1^M (\int f'_m) g'_m(y) \qquad \forall y \in Y \Rightarrow$$

$$\sum_1^N (\int f_n) g_n = \sum_1^M (\int f'_m) g'_m \Rightarrow$$

$$\sum_1^N (\int f_n)(\int g_n) = \sum_1^M (\int f'_m)(\int g'_m)\ .$$

Dies zeigt die Unabhängigkeit von $I \otimes J(f)$ von der Darstellung von f.

Für eine Funktion $f : X \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ und $y \in Y$ erklären wir die Funktion $f^y : X \to \overline{\mathbf{R}}$ durch $f^y(x) := f(x, y)$. Man beachte folgenden Sachverhalt: Ist $f \in \mathcal{E}(X \times Y)$ und $y \in Y$ so ist $f^y \in \mathcal{L}^1_e(X)$ und die durch $y \mapsto \int f^y \, dI$ definierte Funktion liegt ihrerseits in $\mathcal{L}^1_e(Y)$; diese Funktion werden wir oft einfach (etwas schlampig aber suggestiv) mit $\int f^y \, dI$ bezeichnen. Für ein $f \in \mathcal{E}(X \times Y)$ gilt dann offensichtlich

$$I \otimes J(f) = \int \left(\int f^y \, dI \right) dJ\ .$$

(2.1.2) SATZ. *Der Raum* $\mathcal{E}(X \times Y)$ *ist ein Funktionenvektorraum und* $I \otimes J$ *ist ein positives lineares Funktional. Gilt* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ *und* $\overline{J} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$, *so ist* $I \otimes J$ *sogar ein Daniell-Integral.*

BEWEIS: Offenbar ist $\mathcal{E}(X \times Y)$ abgeschlossen unter der Bildung endlicher Summen. Ist $f = \sum_1^N f_n \otimes g_n \in \mathcal{E}(X \times Y)$ und $\alpha \in \mathbf{R}$ so ist

$$\alpha f = \sum_1^N \alpha(f_n \otimes g_n) = \sum_1^N (\alpha f_n) \otimes g_n \in \mathcal{E}(X \times Y) .$$

Also ist $\mathcal{E}(X \times Y)$ ein Funktionenvektorraum.

Natürlich ist $I \otimes J$ ein lineares Funktional. Es ist aber auch positiv: Ist nämlich $h \in \mathcal{E}^+(X \times Y)$ so ist

$$\begin{aligned} &0 \leq h^y \in \mathcal{L}^1_e(X) \qquad \forall y \in Y \Rightarrow \\ &0 \leq \int h^y \, dI \in \mathcal{L}^1_e(Y) \Rightarrow \\ &0 \leq \int \left(\int h^y \, dI \right) dJ = I \otimes J(h) . \end{aligned}$$

Sei nun überdies $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ und $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$. Seien weiter $h_n \in \mathcal{E}^+(X \times Y), h \in \mathcal{E}(X \times Y)$ und $\sum h_n \geq h$. Nach (1.2.7) sind $\int dI$ und $\int dJ$ stetig von unten; man schließt daher:

$$\begin{aligned} \sum h_n^y &\geq h^y \qquad \forall y \in Y \Rightarrow \\ \sum \int h_n^y \, dI &\geq \int h^y \, dI \Rightarrow \\ \sum \int \left(\int h_n^y \, dI \right) dJ &\geq \int \left(\int h^y \, dI \right) dJ \Rightarrow \\ \sum I \otimes J(h_n) &\geq I \otimes J(h) . \end{aligned}$$

Dies zeigt die Stetigkeit von unten von $I \otimes J$ $\diamondsuit$

Hier zeigte sich eine leichte Schwäche unseres Ansatzes aus (2.1.1): Wäre man von dem am Anfang dieses Kapitels eingeführten $\mathcal{E}_0(X \times Y)$ ausgegangen, so hätte es der Zusatzannahme $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ und $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$ nicht bedurft. Wir wollen dennoch den eingeschlagenen Weg weitergehen, aus mehreren Gründen. Zum einen ist die übliche Theorie, ausgehend von $\mathcal{E}_0(X \times Y)$, zumindest für den Fall, daß $\mathcal{E}(X), \mathcal{E}(Y)$ Verbände sind, so gut bekannt, daß ein erneuter Aufbau dieser Theorie auf unseren Grundannahmen nur auf eine Adaption des Bekannten hinausliefe. Zum anderen erhalten wir durch den nun eingeschlagenen Weg einen viel größeren Produkt-$\mathcal{L}^1$, der die wichtige Eigenschaft

$$f \in \mathcal{L}^1_e(X), g \in \mathcal{L}^1_e(Y) \Rightarrow f \otimes g \in \mathcal{L}^1_e(X \times Y)$$

besitzt, auf die wir auf keinen Fall verzichten wollen. Dabei ist der Index "e" gar keine Einschränkung, siehe (1.1.12). Endlich ist auch die Zusatzannahme

$$\overline{I} = \int \text{ auf } (\mathcal{L}^1)^+(X) \,, \; \overline{J} = \int \text{ auf } (\mathcal{L}^1)^+(Y)$$

gar keine so schwere Einschränkung: Wie wir in den Kapiteln (3) und (6) sehen werden, ist sie in allen uns interessierenden Fällen erfüllt.

(2.2) Klassische Produktraum-Bildung

Wir geben nun den Abriß einer klassichen Methode den Produktraum zu bilden. Für Einzelheiten sei wieder auf [**6**] , II verwiesen.

Wir gehen aus von zwei nicht-leeren Mengen X, Y und Ringen $\mathcal{Y}(X), \mathcal{Y}(Y)$ über diesen Mengen sowie Maßen

$$\mu : \mathcal{Y}(X) \to [0, \infty] \ , \ \nu : \mathcal{Y}(Y) :\to [0, \infty] \ .$$

Gemäß Abschnitt (1.4) gehören hierzu Prozeduren

$$\mathcal{Y}(X), \mu \to \mathcal{E}_\mu, I_\mu \to \mathcal{L}^1[\mu], \int dI_\mu \ ,$$

$$\mathcal{Y}(Y), \nu \to \mathcal{E}_\nu, I_\nu \to \mathcal{L}^1[\nu], \int dI_\nu \ .$$

Nun definieren wir

$$\mathcal{Y}(X \times Y) := \{ \bigcup_1^N A_n \times B_n \mid A_n \in \mathcal{Y}_e(X), B_n \in \mathcal{Y}_e(Y),$$

$$N \in \mathbf{N}, A_n \times B_n \text{ paarweise disjunkt } \} \ .$$

Der Index "e" zeichnet wieder die Mengen endlichen Maßes aus. Wir definieren nun hierauf eine Abbildung $\mu \otimes \nu : \mathcal{Y}(X \times Y) \to [0, \infty)$ durch

$$\mu \otimes \nu(\bigcup_1^N A_n \times B_n) := \sum_1^N \mu(A_n)\nu(B_n) \ .$$

Man kann zeigen, daß $\mu \otimes \nu$ dadurch wohldefiniert ist und daß gilt:

(2.2.1) SATZ. *$\mathcal{Y}(X \times Y)$ ist ein Ring und $\mu \otimes \nu$ ist ein Maß.*

Beim Beweis der Wohldefiniertheit und der Maßeigenschaft von $\mu \otimes \nu$ ist folgende Feststellung sehr nützlich:

(2.2.2) LEMMA. *Für ein $E \in \mathcal{Y}(X \times Y)$ ist $I_\mu(\chi_E^y)$ (als Funktion von y) in $\mathcal{E}_\nu(Y)$ und es gilt*

$$\mu \otimes \nu(E) = I_\nu(I_\mu(\chi_E^y)) \ .$$

Dieses Lemma gestattet an entscheidenden Stellen das über I_μ und I_ν bereits Bekannte auszunutzen. Nun kann man im Sinne von Abschnitt (1.4) wieder $\mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}$ und $I_{\mu\otimes\nu}$ bilden und man weist ohne Mühe nach:

(2.2.3) SATZ. *Jedes* $f \in \mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}$ *hat die Gestalt*

$$f = \sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n \times B_n} \qquad N \in \mathbf{N}, \alpha_n \in \mathbf{R}, A_n \in \mathcal{Y}_e(X), B_n \in \mathcal{Y}_e(Y)$$

und für ein solches f *ist*

$$I_{\mu\otimes\nu}(f) = \sum_1^N \alpha_n \mu(A_n)\nu(B_n) \ .$$

Ferner ist für festes $y \in Y$ *stets* $f^y \in \mathcal{E}_\mu$, *und* $I_\mu(f^y)$ *liegt (als Funktion von* y*) in* $\mathcal{E}_\nu$. *Es gilt dann die Formel*

$$I_{\mu\otimes\nu}(f) = I_\nu(I_\mu(f^y)) \ .$$

Wir haben nun eine Prozedur

$$\mathcal{Y}(X \times Y), \mu \otimes \nu \to \mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}, I_{\mu\otimes\nu} \to \mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu], \int dI_{\mu\otimes\nu} \to \mathcal{M}_{\mu\otimes\nu}, \overline{\mu \otimes \nu}$$

vorliegen. Das Maß $\overline{\mu \otimes \nu}$ erhält die besondere Bezeichnug $\pi := \overline{\mu \otimes \nu}$ und wird als das Produktmaß von μ und ν bezeichnet. Satz (1.4.6) liefert uns jetzt noch:

(2.2.4) SATZ. *In der angegebenen Situation ist stets*

$$\mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu] = \mathcal{L}^1[\pi] = \mathcal{L}^1(\pi)$$

bei Übereinstimmung aller Integrale.

(2.3) Vergleich von Produkträumen

In diesem Abschnitt gehen wir wieder von $\mathcal{E}(X), I$ und $\mathcal{E}(Y), J$ wie in (2.1) aus. Sind dann $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ normal, so erhalten wir durch Prozeduren

$$\mathcal{L}^1(X), \int dI \to \mathcal{M}(X), \iota$$

$$\mathcal{L}^1(Y), \int dJ \to \mathcal{M}(Y), \rho$$

die σ-Algebren $\mathcal{M}(X), \mathcal{M}(Y)$ der meßbaren Mengen und die kanonischen Maße ι, ρ auf ihnen. Wie in Abschnitt (2.1) erklärt, führt dies auf

$$\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}, I_{\iota\otimes\rho} \text{ und } \mathcal{L}^1[\iota\otimes\rho], \int dI_{\iota\otimes\rho} .$$

In welchem Verhältnis stehen nun $\mathcal{L}^1[\iota\otimes\rho]$ und der in (2.1) eingeführte Raum

$$\mathcal{L}^1(X\times Y) := \mathcal{L}^1(X\times Y, \mathcal{E}(X\times Y), I\otimes J)$$

zueinander? Eine erste Antwort gibt folgender Satz.

(2.3.1) SATZ. *Seien $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ normal.*

(i) *Es ist $\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho} \subset \mathcal{E}(X\times Y)$ und es gilt*

$$I_{\iota\otimes\rho}(f) = I\otimes J(f) \qquad \forall f \in \mathcal{E}_{\iota\otimes\rho} .$$

(ii) *Für alle $f : X \to [0,\infty]$ ist*

$$\overline{I\otimes J}(f) \le \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f) .$$

(iii) *Es ist $\mathcal{L}^1[\iota\otimes\rho] \subset \mathcal{L}^1(X\times Y)$ und*

$$\int f\, dI_{\iota\otimes\rho} = \int f\, dI\otimes J \qquad \forall f \in \mathcal{L}^1[\iota\otimes\rho] .$$

BEWEIS: Zu (i): Ist $f \in \mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}$ so hat f nach der Bemerkung in (2.2.3) die Gestalt $f = \sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n\times B_n}$, mit geeigneten $\alpha_n \in \mathbf{R}, A_n \in \mathcal{M}_e(X), B_n \in \mathcal{M}_e(Y)$. Nun sind aber $\mathcal{M}_e(X), \mathcal{M}_e(Y)$ gerade die integrierbaren Teilmengen von X bzw. Y. Es gilt daher

$$\chi_{A_n} \in \mathcal{L}^1_e(X), \chi_{B_n} \in \mathcal{L}^1_e(Y) \Rightarrow$$

$$f = \sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n\times B_n} = \sum_1^N (\alpha_n \chi_{A_n})\otimes \chi_{B_n} \in \mathcal{E}(X\times Y) .$$

Ferner ist (siehe (2.2.3)):

$$I_{\iota\otimes\rho}(f) = \sum_1^N \alpha_n \iota(A_n)\rho(B_n) = \sum_1^N \alpha_n \int \chi_{A_n} \int \chi_{B_n}$$
$$= \sum_1^N \int \alpha_n \chi_{A_n} \int \chi_{B_n} = I \otimes J(f) \, .$$

Damit ist (i) gezeigt. Insbesondere gilt $\mathcal{E}^+_{\iota\otimes\rho} \subset \mathcal{E}^+(X\times Y)$, woraus sofort (ii) folgt.

Zu (iii): Sei $f \in \mathcal{L}^1[\iota\otimes\rho]$. Wähle eine Folge (f_n) aus $\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}$ mit $\overline{I}_{\iota\otimes\rho}(|f-f_n|) \to 0$. Nach (i) sind alle f_n auch in $\mathcal{E}(X\times Y)$ und nach (ii) gilt ebenfalls

$$\overline{I\otimes J}(|f - f_n|) \to 0 \, .$$

Es folgt $f \in \mathcal{L}^1(X\times Y)$ und überdies mit Hilfe von (i):

$$\int f \, dI_{\iota\otimes\rho} = \lim_{n\to\infty} I_{\iota\otimes\rho}(f_n) = \lim_{n\to\infty} I\otimes J(f_n) = \int f \, dI\otimes J \; \diamond$$

Folgende Begriffsbildung wird sich als nützlich erweisen.

(2.3.2) DEFINITION. *Sei $\mathcal{E}$ ein Funktionenvektorraum über einer nicht-leeren Menge Z, $K : \mathcal{E} \to \mathbf{R}$ ein Daniell-Integral und sei $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1(Z,\mathcal{E},K)$ normal. Betrachte die Prozedur*

$$\mathcal{E}, K \to \mathcal{L}^1, \int \to \mathcal{M}, \rho \, ,$$

wobei $\mathcal{M}$ die meßbaren Mengen und ρ das kanonische Maß auf $\mathcal{M}$. Der Raum $\mathcal{L}^1$ heißt meßbar, wenn jedes $f \in \mathcal{E}$ bzgl. $\mathcal{M}$ meßbar ist.

(2.3.3) SATZ. *(Bezeichnungen wie in (2.3.2)) Sei $\mathcal{L}^1$ normal und meßbar. Dann ist jedes $f \in \mathcal{L}^1$ meßbar bzgl. $\mathcal{M}$.*

BEWEIS: Nach (1.1.19) existiert eine Folge (f_n) aus $\mathcal{E}$ mit $f_n \to f$ f.ü., d.h. für die Menge N auf der nicht $f_n \to f$ hat man $\overline{K}(\chi_N) = 0$. Wegen

$$\overline{K}(|\chi_N - 0|) = \overline{K}(\chi_N) = 0$$

folgt: N ist integrierbar (also auch in $\mathcal{M}$) und es ist

$$\rho(N) = \int \chi_N \, dK = 0 \, .$$

N ist also auch bzgl. $\mathcal{M}, \rho$ eine Nullmenge, d.h. $f_n \to f$ f.ü. auch bzgl. $\mathcal{M}, \rho$. Nun ist aber ρ vollständig (vergl. (1.4.3)) und alle f_n sind voraussetzungsgemäß $\mathcal{M}$-meßbar. Wegen $f_n \to f$ f.ü. bzgl. $\mathcal{M}$ folgt hieraus bekanntlich, daß auch f $\mathcal{M}$-meßbar ist $\diamondsuit$

(2.3.4) SATZ. *(Bezeichnungen wie in (2.3.2)) Sei $\mathcal{L}^1$ normal und meßbar. Ist Z σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}$ und ρ so ist $(\mathcal{L}^1)^+[\rho] = (\mathcal{L}^1)^+$ und die zugehörigen Integrale stimmen überein.*

BEWEIS: Jedenfalls ist $\mathcal{L}^1[\rho] \subset \mathcal{L}^1$ bei Übereinstimmung der Integrale (vergl. (1.4.4),(i)), so daß wir nur noch $(\mathcal{L}^1)^+ \subset (\mathcal{L}^1)^+[\rho]$ zeigen müssen. Sei dazu $f \in (\mathcal{L}^1)^+$ gegeben. Da $\mathcal{L}^1$ meßbar, ist f nach dem letzten Satze $\mathcal{M}$-meßbar. In der klassischen Maßtheorie wird gezeigt, daß sich f in der Form

$$f = \sum_1^\infty \alpha_n \chi_{A_n} \qquad \alpha_n > 0, A_n \in \mathcal{M}$$

schreiben läßt. Da Z σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}$ und ρ ist, können wir annehmen, daß $\rho(A_n) < \infty$, d.h. A_n ist integrierbar für alle n. Dann ist $\chi_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\rho)$ und

$$\int \chi_{A_n} \, d\rho = \rho(A_n) = \int \chi_{A_n} \, dK \Rightarrow$$

$$\sum_1^N \alpha_n \int \chi_{A_n} \, d\rho = \sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n} \, dK \leq \int f \, dK < \infty \, ,$$

für alle natürlichen N, also

$$\sum_1^\infty \alpha_n \int \chi_{A_n} \, d\rho \leq \int f \, dK < \infty \, .$$

Nach dem klassischen Satz über die monotone Konvergenz (für $\mathcal{L}^1(\rho)$) ist dann $f = \sum_1^\infty \alpha_n \chi_{A_n} \in \mathcal{L}^1(\rho)$. Nach (1.4.2),(ii) ist aber $\mathcal{L}^1(\rho) = \mathcal{L}^1[\rho]$ also $f \in \mathcal{L}^1[\rho]$ wie behauptet $\diamondsuit$

(2.3.5) SATZ. *(Bezeichnungen wie in (2.3.2)) Sei $\mathcal{L}^1$ normal und meßbar und sei Z σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}, \rho$. Sind dann*

$$f_0 \in \mathcal{L}_e^1, f_n \in (\mathcal{L}^1)^+ \text{ und } f := f_0 + \sum_1^\infty f_n \geq 0$$

so gilt

$$\int f\,d\rho = \int f_0\,dK + \sum_1^\infty \int f_n\,dK\ .$$

Dabei ist $\int f\,d\rho$ das klassische Integral für nicht-negative, meßbare Funktionen (das auch ∞ werden kann).

BEWEIS: Als Limes $\mathcal{M}$-meßbarer Funktionen ist jedenfalls f selbst wieder $\mathcal{M}$-meßbar. Ist $\int f\,d\rho < \infty$, so ist $f \in \mathcal{L}^1(\rho)$. Wegen (1.4.2) und (1.4.4),(i) ist $\mathcal{L}^1(\rho) = \mathcal{L}^1[\rho] \subset \mathcal{L}^1$ bei Übereinstimmung der Integrale, so daß $f \in \mathcal{L}^1$ und $\int f\,d\rho = \int f\,dK$. Nach dem Satz über die monotone Konvergenz ist endlich $\int f\,dK = \int f_0\,dK + \sum_1^\infty \int f_n\,dK$. Für $\int f\,d\rho < \infty$ ist also alles erfüllt.

Sei nun $\int f\,d\rho = \infty$. Da f $\mathcal{M}$-meßbar ist, gibt es $\alpha_n \geq 0$ und Mengen $A_n \in \mathcal{M}$ mit $f = \sum \alpha_n \chi_{A_n}$. Da Z σ-endlich ist dürfen wir für alle A_n annehmen, daß $\rho(A_n) < \infty$, d.h. alle A_n sind integrierbar. Für jedes natürliche N gilt dann

$$\sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n} \leq f_0 + \sum_1^\infty f_n = f \Rightarrow$$

$$\sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n} - f_0 \leq \sum_1^\infty f_n\ .$$

Da $\int dK$ stetig von unten ist hat man

$$(1) \qquad \sum_1^N \alpha_n \int \chi_{A_n}\,dK - \int f_0\,dK \leq \sum_1^\infty \int f_n\,dK \qquad \forall N\ .$$

Nun gilt jedoch

$$\lim_{N\to\infty} \sum_1^N \alpha_n \int \chi_{A_n} = \lim_{N\to\infty} \sum_1^N \alpha_n \rho(A_n) = \int f\,d\rho = \infty\ .$$

Macht man daher in (1) den Grenzübergang $N \to \infty$ so erhält man notwendig $\sum_1^\infty \int f_n\,dK = \infty$ also auch $\int f_0\,dK + \sum_1^\infty \int f_n\,dK = \infty$, wie gewünscht $\diamondsuit$

Alle Bemühungen den Satz (2.3.5) ohne die Voraussetzung der σ-Endlichkeit zu beweisen sind fehlgeschlagen. Man kann vermutlich nicht einmal dann auf die σ-Endlichkeit von Z verzichten, wenn $\sum_1^\infty \int f_n\,dK < \infty$ angenommen wird: Selbst unter dieser Vorrausetzung ist nicht klar, warum dann $\int f\,d\rho < \infty$ folgen

sollte (womit man dann wie im ersten Teil des Beweises von (2.3.5) hätte zu Ende argumentieren können).

Wir kehren nun zu der Situation von vor Definition (2.3.2) zurück, d.h. zu normalen Räumen $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ und den Prozeduren

$$\mathcal{L}^1(X), \int dI \to \mathcal{M}(X), \iota \to \mathcal{L}^1[\iota], \int dI_\iota \text{ und } \mathcal{L}^1(\iota), \int d\iota$$

$$\mathcal{L}^1(Y), \int dJ \to \mathcal{M}(Y), \rho \to \mathcal{L}^1[\rho], \int dI_\rho \text{ und } \mathcal{L}^1(\rho), \int d\rho$$

Sowie zu den Produkt-Prozeduren

$$\mathcal{E}(X \times Y), I \otimes J \to \mathcal{L}^1(X \times Y), \int dI \otimes J$$

$$\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}, I_{\iota\otimes\rho} \to \mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho], \int dI_{\iota\otimes\rho} \to \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}, \pi := \overline{\iota \otimes \rho} .$$

Wir erinnern an folgenden wichtigen Satz (vergl. etwa [**6**]):

(2.3.6) THEOREM. *(Tonelli) Sei $f : X \times Y \to [0, \infty]$ eine $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbare Funktion. Es gelte:*

(i) *$\{f \neq 0\}$ ist σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}, \pi$.*
(ii) *f^y ist $\mathcal{M}_\iota$-meßbar, $\forall y \in Y$.*
(iii) *Aufgefaßt als Funktion von y ist $\int f^y \, d\iota$ meßbar bzgl. $\mathcal{M}_\rho$.*
(iv) *Es ist $\int \left(\int f^y \, d\iota \right) d\rho < \infty$.*

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\pi)$ und es ist

$$\int f \, d\pi = \int \left(\int f^y \, d\iota \right) d\rho .$$

(2.3.7) LEMMA. *Seien $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ normal und X, Y σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}(X), \iota$ bzw. $\mathcal{M}(Y), \rho$. Dann gilt:*

$$A \in \mathcal{M}(X), B \in \mathcal{M}(Y) \Rightarrow A \times B \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho} .$$

BEWEIS: Da X, Y σ-endlich sind gibt es $A_n \in \mathcal{M}(X), B_n \in \mathcal{M}(Y)$ mit $A_n \uparrow A, B_n \uparrow B$ und $\iota(A_n), \rho(B_n) < \infty$, d.h. die A_n, B_n sind sogar integrierbar. Es folgt $\chi_{A_n \times B_n} \in \mathcal{E}_{\iota\otimes\rho} \subset \mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$. Die $A_n \times B_n$ sind also integrierbar bzgl. $\mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$ und liegen deshalb in $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$. Da $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$ eine σ-Algebra ist gilt auch

$$A \times B = \bigcup_1^\infty A_n \times B_n \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho} \; \diamondsuit$$

(2.3.8) SATZ. *Seien $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ normal und X, Y σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}(X), \iota$ bzw. $\mathcal{M}(Y), \rho$. Ist dann*

$$f : X \to \overline{\mathbf{R}} \quad \mathcal{M}(X)\text{-meßbar},$$
$$g : Y \to \overline{\mathbf{R}} \quad \mathcal{M}(Y)\text{-meßbar},$$

so ist $f \otimes g$ $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbar.

BEWEIS: Sei $c \geq 0$ gegeben. Wir zeigen zunächst, daß

$$\{f \otimes g > c\} \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho} .$$

Sei (r_n) eine Durchnummerierung der positiven rationalen Zahlen. Dann behaupten wir:

$$\{(x,y)|\ f(x)g(y) > c\} = \bigcup_{n,m:r_n r_m > c} \{f > r_n\} \times \{g > r_m\} \cup \bigcup_{n,m:r_n r_m > c} \{f < -r_n\} \times \{g < -r_m\} . \tag{1}$$

Es ist klar, daß rechte Seite $\subset$ linke Seite.

Für die umgekehrte Inklusion sei $(x,y) \in$ linke Seite, also $(x,y) \in X \times Y$ und $f(x)g(y) > c$. Wir behandeln nun zunächst die Fälle $|f(x)| = \infty$ oder $|g(y)| = \infty$. Sei exemplarisch $f(x) = +\infty$. Wegen $f(x)g(y) > c \geq 0$ muß dann $g(y) > 0$ sein, etwa $g(y) > r_m > 0$. Wählt man nun noch irgendein r_n mit $r_n r_m > c$ so ist in der Tat

$$(x,y) \in \{f > r_n\} \times \{g > r_m\} \subset \text{ rechte Seite.}$$

Ganz ähnlich argumentiert man in den Fällen $f(x) = -\infty$ oder $g(y) = \pm\infty$.

Wir können daher ab jetzt $f(x), g(y) \in \mathbf{R}$ annehmen. Wegen $f(x)g(y) > c \geq 0$ sind nur die Fälle

$$f(x) > 0, g(y) > 0 \text{ oder } f(x) < 0, g(y) < 0$$

denkbar. Sei etwa $f(x) > 0, g(y) > 0$. Wähle dann ein rationales $r > 0$ mit $f(x)g(y) > r > c \geq 0$ also

$$f(x) > \frac{r}{g(y)} > 0 .$$

Finde nun ein rationales $r_n > 0$ mit

$$f(x) > r_n > \frac{r}{g(y)} > 0 .$$

Dann ist $f(x) > r_n$ und $g(y) > r_m := \frac{r}{r_n}$ und überdies ist $r_n r_m = r > c$. Also hat man

$$(x,y) \in \{f > r_n\} \times \{g > r_m\} \subset \text{ rechte Seite .}$$

Analoges gilt im Fall $f(x) < 0, g(y) < 0$. Damit ist aber linke Seite $\subset$ rechte Seite gezeigt, also linke Seite = rechte Seite. Nach dem letzten Lemma sind alle in der rechten Seite von (1) vorkommenden Mengen $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbar, also auch die ganze rechte Seite, da $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$ eine σ-Algebra ist. Wir haben also insgesamt

$$\text{linke Seite} = \text{rechte Seite} \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho} ,$$

wie gewünscht. Für $c \geq 0$ ist damit $\{f \otimes g > c\} \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$ gezeigt. Dann muß aber auch

$$\{f \otimes g < -c\} = \{(-f) \otimes g > c\} \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$$

gelten. Für $c < 0$ gilt deswegen und da $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$ abgeschlossen unter abzählbaren Durchschnitten ist, daß $\{f \otimes g \leq c\} \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$: Wählt man nämlich ein natürliches N so, daß $0 < \frac{1}{N} < |c|$ so ist

$$\{f \otimes g \leq c\} = \bigcap_{N}^{\infty} \{f \otimes g < c + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho} ,$$

da jede im Durchschnitt auftretende Menge gemäß obiger Bemerkung in $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$ liegt. Wieder weil $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$ eine σ-Algebra ist liegt auch das Komplement dieser Menge, also $\{f \otimes g > c\}$ in $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$. Damit ist gezeigt, daß $\{f \otimes g > c\} \in \mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$ für alle $c \in \mathbf{R}$, d.h. $f \otimes g$ ist $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbar $\diamondsuit$

Wir können hieraus sofort eine wichtige Konsequenz ziehen.

(2.3.9) SATZ. *Seien $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ normal, meßbar und seien X, Y σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}(X), \iota$ bzw. $\mathcal{M}(Y), \rho$. Dann gilt:*
(i) *$\mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$ ist normal und meßbar.*
(ii) *Alle $f \in \mathcal{E}(X \times Y)$ sind $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbar.*

BEWEIS: Natürlich ist $\mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$ normal, da es von dem Stoneschen Verband $\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}$ herkommt. Sei jetzt $f \in \mathcal{E}(X \times Y)$. Dann hat f die Form $f = \sum_{1}^{N} h_n \otimes g_n$ mit Funktionen $h_n \in \mathcal{L}^1_e(X), g_n \in \mathcal{L}^1_e(Y)$. Nach (2.3.3) sind die h_n $\mathcal{M}(X)$- und die g_n $\mathcal{M}(Y)$-meßbar. Nach dem letzten Satz sind alle $h_n \otimes g_n$ $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$- meßbar, also ist auch f selbst $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbar. Dies zeigt (ii) und der Rest von (i) folgt aus (ii), da $\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho} \subset \mathcal{E}(X \times Y)$ (siehe (2.3.1),(i)) $\diamondsuit$

(2.3.10) SATZ. *Seien $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ normal, meßbar und seien X, Y σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}(X), \iota$ bzw. $\mathcal{M}(Y), \rho$. Seien $f_0 \in \mathcal{E}(X \times Y), f_n \in \mathcal{E}^+(X \times Y)$ so daß*

$$f := f_0 + \sum_{1}^{\infty} f_n \geq 0 \text{ und } \sum_{1}^{\infty} I \otimes J(f_n) < \infty .$$

Dann ist $f \in \mathcal{L}^1(\pi)$ *und es gilt*

$$\int f\,d\pi = I \otimes J(f_0) + \sum_1^\infty I \otimes J(f_n)\ .$$

BEWEIS: Da $f_0, f_n \in \mathcal{E}(X \times Y)$, sind für $y \in Y$ die $f_0^y, f_n^y \in \mathcal{L}_e^1(X)$ und daher $\mathcal{M}(X)$-meßbar gemäß (2.3.3). Dann ist auch f^y als Limes von $\mathcal{M}(X)$-meßbaren Funktionen selbst $\mathcal{M}(X)$-meßbar. Nach Satz (2.3.5) erhalten wir die Gleichung

$$\int f^y\,d\iota = \int f_0^y\,dI + \sum_1^\infty \int f_n^y\,dI \qquad \forall y \in Y\ .$$

Nun sind aber die $\int f_0^y\,dI, \int f_n^y\,dI$ (als Funktionen von y) ihrerseits in $\mathcal{L}_e^1(Y)$ und die erneute Anwendung von (2.3.5) ergibt

$$\begin{aligned}\int \left(\int f^y\,d\iota\right) d\rho &= \int \left(\int f_0^y\,dI\right) dJ + \sum_1^\infty \int \left(\int f_n^y\,dI\right) dJ \\ &= I \otimes J(f_0) + \sum_1^\infty I \otimes J(f_n) < \infty\ .\end{aligned}$$

Außerdem ist f als Limes der gemäß (2.3.9),(ii) $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbaren Funktionen $f_0 + \sum_1^N f_n \in \mathcal{E}(X \times Y)$ selber $\mathcal{M}_{\iota\otimes\rho}$-meßbar. Daher kann das Theorem (2.3.6) von Tonelli angewandt werden: Man erhält $f \in \mathcal{L}^1(\pi)$ und

$$\begin{aligned}\int f\,d\pi &= \int \left(\int f^y\,d\iota\right) d\pi \\ &= I \otimes J(f_0) + I \otimes J(f_n)\ \diamondsuit\end{aligned}$$

Wir sind nun in der Lage eine Antwort auf die Frage zu geben, unter welchen Umständen auf $(\mathcal{L}^1)^+(X \times Y)$ wieder $\overline{I \otimes J} = \int$ gilt. Wie wir in den Kapiteln (3) und (6) sehen werden sind diese Voraussetzungen in allen relevanten Fällen erfüllt.

(2.3.11) THEOREM. *Seien* $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ *normal, meßbar und* X, Y σ*-endlich bzgl.* $\mathcal{M}(X), \iota$ *bzw.* $\mathcal{M}(Y), \rho$.

(i) *Es ist* $\overline{I \otimes J} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+(X \times Y)$.

(ii) *Es gilt*

$$(\mathcal{L}^1)^+(X \times Y) = (\mathcal{L}^1)^+[\iota \otimes \rho] = (\mathcal{L}^1)^+(\pi)$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

(iii) *Die von* $\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}$ *bzw.* $\mathcal{E}(X \times Y)$ *herrührenden Normen sind gleich.*

BEWEIS: Gemäß der Bemerkung nach (1.2.2) ist jedenfalls $\int \leq \overline{I \otimes J}$ so daß wir für (i) nur noch die umgekehrte Ungleichung zu zeigen haben. Sei dazu $f \in (\mathcal{L}^1)^+(X \times Y)$. Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ wähle man nun $f_0 \in \mathcal{E}(X \times Y)$, $f_n \in (\mathcal{E})^+(X \times Y)$ so daß

$$|f - f_0| \leq \sum_1^\infty f_n \ , \ \sum_1^\infty I \otimes J(f_n) < \epsilon,$$

$$|\int f \, dI \otimes J - I \otimes J(f_0)| < \epsilon \ .$$

Dann ist $0 \leq f \leq f' := f_0 + \sum_1^\infty f_n$. Nach dem letzten Satz ist $f' \in \mathcal{L}^1(\pi)$ $(= \mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$, siehe (2.2.4)) und es ist

$$\int f' \, dI_{\iota\otimes\rho} = \int f' \, d\pi = I \otimes J(f_0) + \sum_1^\infty I \otimes J(f_n) \ .$$

$\mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$ kommt von dem Verband $\mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}$ her, ist also sicher normal. Insbesondere ist $\overline{I}_{\iota\otimes\rho} = \int dI_{\iota\otimes\rho}$ auf $(\mathcal{L}^1)^+[\iota \otimes \rho]$, also

$$\overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f') = \int f' \, dI_{\iota\otimes\rho} = I \otimes J(f_0) + \sum_1^\infty I \otimes J(f_n) \ .$$

Da $\overline{I \otimes J} \leq \overline{I}_{\iota\otimes\rho}$ (siehe (2.3.1),(ii)) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \overline{I \otimes J}(f) &\leq \overline{I \otimes J}(f') \leq \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f') \\ &= \int f' \, dI_{\iota\otimes\rho} = I \otimes J(f_0) + \sum_1^\infty I \otimes J(f_n) \\ &< \int f \, dI \otimes J + \epsilon + \epsilon \ . \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $\overline{I \otimes J}(f) \leq \int f \, dI_{\iota\otimes\rho}$ wie gewünscht.

Zu (iii): Nach (2.3.1),(ii) müssen wir nur $\overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f) \leq \overline{I \otimes J}(f)$ zeigen, für ein beliebiges $f : X \times Y \to [0, \infty]$. Dazu können wir $\overline{I \otimes J}(f) < \infty$ annehmen. Sei dann $\epsilon > 0$ beliebig. Wähle $f_n \in \mathcal{E}^+(X \times Y)$ mit

$$f \leq \sum f_n \ , \ \sum I \otimes J(f_n) < \overline{I \otimes J}(f) + \epsilon \ .$$

Jetzt zieht man wieder den letzten Satz heran und erhält

$$f' := \sum f_n \in \mathcal{L}^1(\pi) = \mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho] \text{ und}$$

$$\int f' \, dI_{\iota\otimes\rho} = \int f' \, d\pi = \sum I \otimes J(f_n) \Rightarrow$$

$$\overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f) \leq \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f') = \int f' \, dI_{\iota\otimes\rho} = \sum I \otimes J(f_n) < \overline{I \otimes J}(f) + \epsilon \ .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war muß $\overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f) \leq \overline{I \otimes J}(f)$ gelten, wie gewünscht.

Es bleibt (ii) zu zeigen. Wegen (2.3.1),(iii) ist nur noch die Inklusion $(\mathcal{L}^1)^+(X \times Y) \subset (\mathcal{L}^1)^+[\iota \otimes \rho]$ zu zeigen. Sei hierzu $f \in (\mathcal{L}^1)^+(X \times Y)$ ohne Einschränkung reellwertig und $\epsilon > 0$. Wähle $f_0 \in \mathcal{E}(X \times Y), f_n \in (\mathcal{E})^+(X \times Y)$ mit

$$|f - f_0| \leq \sum_1^\infty f_n \ , \ \sum_1^\infty I \otimes J(f_n) < \epsilon \ .$$

Wiederum mit Hilfe des letzten Satzes schließt man leicht, daß

$$f' := f_0 + \sum_1^\infty f_n \in \mathcal{L}^1(\pi) = \mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$$

(beachte (2.2.4) für die letzte Gleichheit), und mit Hilfe des bereits bewiesenen Punkt (iii) erhält man weiter:

$$\begin{aligned} \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(|f - f'|) &\leq \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(|f - f_0|) + \sum_1^\infty \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f_n) \\ &\leq 2\sum_1^\infty \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(f_n) = 2\sum_1^\infty \overline{I \otimes J}(f_n) < 2\epsilon \ . \end{aligned}$$

Wegen $f' \in \mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$ kann man nun noch ein $g \in \mathcal{E}_{\iota\otimes\rho}$ mit $\overline{I}_{\iota\otimes\rho}(|f' - g|) < \epsilon$ finden. Dann ist insgesamt

$$\overline{I}_{\iota\otimes\rho}(|f - g|) \leq \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(|f - f'|) + \overline{I}_{\iota\otimes\rho}(|f' - g|) < 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon \ .$$

Dies zeigt $f \in \mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$.

Damit haben wir $(\mathcal{L}^1)^+(X \times Y) = (\mathcal{L}^1)^+[\iota \otimes \rho]$ gezeigt. Endlich ist noch $(\mathcal{L}^1)^+[\iota \otimes \rho] = (\mathcal{L}^1)^+(\pi)$ gemäß (2.2.4). Damit ist (ii) gezeigt und wir sind fertig $\diamondsuit$

(2.3.12) COROLLAR. *(Voraussetzungen wie in (2.3.11) Der Raum $\mathcal{L}^1(X \times Y)$ ist normal.*

BEWEIS: Wir haben gerade gezeigt, daß $\overline{I \otimes J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X \times Y)$. Wir müssen noch zeigen: Sind A, B integriebare Teilmengen von $X \times Y$, so auch $A \cap B$. Nun ist aber nach dem letzten Satz

$$\chi_A, \chi_B \in (\mathcal{L}^1)^+(X \times Y) = (\mathcal{L}^1)^+[\iota \otimes \rho]$$

und $\mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$ ist ein (Stonescher) Verband. Also ist auch

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \wedge \chi_B \in (\mathcal{L}^1)^+[\iota \otimes \rho] = (\mathcal{L}^1)^+(X \times Y) \ ,$$

d.h. $A \cap B$ ist integrierbar $\diamondsuit$

Wir können jetzt also auch zu $\mathcal{L}^1(X \times Y)$ die σ-Algebra $\mathcal{M}(X \times Y)$ der meßbaren Mengen und hierauf das kanonische Maß bilden, welches wir mit τ bezeichnen wollen. Wir haben also eine Prozedur

$$\mathcal{L}^1(X \times Y), \int dI_\iota \otimes I_\tau \to \mathcal{M}(X \times Y), \tau \ .$$

In der Tat haben wir dadurch aber nichts grundlegend Neues gewonnen:

(2.3.13) COROLLAR. *Seien $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ normal, meßbar und seien X, Y σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}(X), \iota$ bzw. $\mathcal{M}(Y), \rho$. Dann gilt:*

(i) *Es ist $\mathcal{M}(X \times Y) = \mathcal{M}_{\iota \otimes \rho}$ und $\pi = \tau$.*
(ii) *$\mathcal{L}^1(X \times Y)$ ist normal und meßbar.*
(iii) *$X \times Y$ ist σ-endlich bzgl. $\mathcal{M}(X \times Y), \tau$.*

BEWEIS: Wegen (2.3.11),(ii) sind die bzgl. $\mathcal{L}^1(X \times Y)$ integrierbaren Teilmengen von $X \times Y$ dieselben wie die bzgl. $\mathcal{L}^1[\iota \otimes \rho]$ integrierbaren Teilmengen; auf diesen stimmen aber τ und π überein, wegen der Übereinstimmung der Integrale in (2.3.11),(ii). Daraus folgt sofort (i).

Zu (ii): Wir haben schon gezeigt, daß $\mathcal{L}^1(X \times Y)$ normal ist. In (2.3.9),(ii) wurde gezeigt, daß alle $f \in \mathcal{E}(X \times Y)$ $\mathcal{M}_{\iota \otimes \rho}$-meßbar, also nach (i) auch $\mathcal{M}(X \times Y)$-meßbar sind. Dies zeigt, daß $\mathcal{L}^1(X \times Y)$ meßbar ist.

Schließlich ist (iii) eine triviale Konsequenz aus (i), da $X \times Y$ natürlich bzgl. $\mathcal{M}_{\iota \otimes \rho}$ und π σ-endlich ist $\diamondsuit$

Die Bedeutung von (2.3.13) liegt insbesondere darin, daß wir nun eine Satz von Bedingungen an Räume $\mathcal{L}^1$ gefunden haben, bei deren Erfülltsein der Prozeß der Produktbildung iteriert werden kann: Sind $\mathcal{L}^1(X_n)$ normale, meßbare Räume mit zugehörigen meßbaren Mengen $\mathcal{M}(X_n)$ und kanonischen Maßen ι_n und sind die X_n bzgl. $\mathcal{M}(X_n), \iota_n$ σ-endlich, so kann man gemäß (2.3.13) nacheinander

$$\mathcal{L}^1(X_1 \times X_2) \ , \ \mathcal{L}^1((X_1 \times X_2) \times X_3) \ , \ \mathcal{L}^1(((X_1 \times X_2) \times X_3) \times X_4) \ , \ \ldots$$

bilden, da sich die Eigenschaften "normal, meßbar, σ-endlich" bei jeder Produktbildung weitervererben.

(2.4) Eine Verallgemeinerung von Fubinis Theorem

Wir wollen nun zusehen, inwieweit der bekannte Satz von Fubini in unserer Theorie seine Gültigkeit bewahrt. Für die Räume $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ setzen wir dabei nichts weiter voraus, als $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ und $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$.

Wir beginnen mit einigen Vorbereitungen.

(2.4.1) LEMMA. *Sei $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$. Dann gilt für alle $f : X \to \overline{\mathbf{R}}$ und für $g \in \mathcal{L}^1_e(X)$:*

$$I^*(f+g) = I^*(f) + \int g \, .$$

BEWEIS: Nach (1.2.12) ist $I_*(g) = I^*(g) = \int g$. Da I^* subadditiv ist haben wir (vergl. (1.2.10)):

$$\begin{aligned} I^*(f+g) \leq I^*(f) + I^*(g) &= I^*(f) + \int g \, , \\ I^*(f) = I^*((f+g)+(-g)) &\leq I^*(f+g) + I^*(-g) \\ &= I^*(f+g) - I_*(g) = I^*(f+g) - \int g \, . \end{aligned}$$

Aus beiden Ungleichungen folgt die behauptete Gleichung ◇

(2.4.2) LEMMA. *Sei $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ und $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$. Erklärt man für ein $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$ auf Y die Funktion $\phi(y) := I^*(f^y)$, so ist $\{|\phi| = \infty\}$ eine Nullmenge von Y.*

BEWEIS: Sei $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$. Wähle dann zu $\epsilon > 0$ Funktionen $g \in \mathcal{E}(X \times Y)$, $g_n \in \mathcal{E}^+(X \times Y)$ mit

$$|f - g| \leq \sum g_n \, , \; \sum I \otimes J(g_n) < \epsilon \, .$$

Da $\int g^y \, dI$ reell ist, ist

$$\begin{aligned} |\phi(y)| = |I^*(f^y)| = \infty \; &\Leftrightarrow \\ |I^*(f^y) - \int g^y \, dI| = \infty \, &. \end{aligned}$$

Nach dem letzten Lemma ist dies aber genau dann der Fall, wenn

$$|I^*(f^y - g^y)| = \infty \, .$$

Mit $N := \{|\phi| = \infty\} \subset Y$ gilt daher

$$\chi_N(y) \leq |I^*(f^y - g^y)| \qquad (y \in Y) .$$

Nach (1.2.14) können wir daher schließen

$$\begin{aligned} \chi_N(y) &\leq |I^*(f^y - g^y)| \leq \overline{I}(|f^y - g^y|) \\ &\leq \overline{I}\left(\sum g_n^y\right) \leq \sum \overline{I}(g_n^y) = \sum \int g_n^y \, dI , \end{aligned}$$

da $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$. Es folgt

$$\overline{J}(\chi_N) \leq \sum \overline{J}\left(\int g_n^y \, dI\right) = \sum \int \left(\int g_n^y \, dI\right) dJ ,$$

da $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$. Da aber

$$\int \left(\int g_n^y \, dI\right) dJ = I \otimes J(g_n)$$

folgt $\overline{J}(\chi_N) < \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war ist $\overline{J}(\chi_N) = 0$, N ist eine Nullmenge $\diamondsuit$

Wir definieren nun

$$\mathcal{H}(Y) := \{\phi : Y \to \overline{\mathbf{R}} |\ |\phi| < \infty \text{ f.ü. } \} .$$

Indem man in $\mathcal{H}(Y)$ f.ü. gleiche Funktionen identifiziert wird $\mathcal{H}(Y)$ zu einem reellen Vektorraum (vergl. auch die Bemerkungen vor (1.1.13)); durch die von $\mathcal{E}(Y), J$ herrührende Norm wird $\mathcal{H}(Y)$ zu einem pseudo-normierten reellen Vektorraum, da die Norm für f.ü. gleiche Funktionen übereinstimmt (siehe (1.1.9),(iii)).

(2.4.3) LEMMA. *Sei* $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ *und* $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$.*Die Abbildung*

$$\Phi^* : \mathcal{L}^1(X \times Y) \to \mathcal{H}(Y) \quad , \quad f \mapsto I^*(f^y)$$

($I^*(f^y)$ aufgefaßt als Funktion von y) ist stetig.

BEWEIS: Jedenfalls bildet Φ^* nach dem letzten Lemma wirklich in $\mathcal{H}(Y)$ ab. Da wir nicht wissen ob Φ^* linear ist müssen wir wie folgt vorgehen.

Sei $\epsilon > 0$ beliebig und seien $f, g \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$ mit $\overline{I \otimes J}(|f - g|) < \epsilon$. Es gibt dann $h_n \in \mathcal{E}^+(X \times Y)$ mit

$$|f - g| \leq \sum h_n \ , \ \sum I \otimes J(h_n) < \epsilon .$$

Ferner existieren wegen $f, g \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$ Funktionen $f_0, g_0 \in \mathcal{E}(X \times Y)$ sowie $p_n, q_n \in \mathcal{E}^+(X \times Y)$ mit

$$|f - f_0| \leq \sum p_n \ , \ \sum I \otimes J(p_n) < \epsilon \ \text{ und}$$
$$|g - g_0| \leq \sum q_n \ , \ \sum I \otimes J(q_n) < \epsilon \ .$$

Dann gilt für fast alle $y \in Y$ (nämlich zumindest für diejenigen wo $I^*(f^y), I^*(g^y)$ reell sind):

$$|I^*(f^y) - I^*(g^y)| = |(I^*(f^y) - \int f_0^y \, dI) - (I^*(g^y) - \int g_0^y \, dI) + \int (f_0^y - g_0^y) \, dI|$$
$$\leq |I^*(f^y) - \int f_0^y \, dI| + |I^*(g^y) - \int g_0^y \, dI| + |\int (f_0^y - g_0^y) \, dI| \ .$$

Wegen (2.4.1) gilt daher weiter

$$|I^*(f^y) - I^*(g^y)| \leq |I^*(f^y - f_0^y)| + |I^*(g^y - g_0^y)| + |\int (f_0^y - g_0^y) \, dI| \ .$$

Wendet man (1.2.14) auf die beiden ersten und (1.2.2) auf den letzten Summanden an, so bleibt

(1) $$|I^*(f^y) - I^*(g^y)| \leq \bar{I}(|f^y - f_0^y|) + \bar{I}(|g^y - g_0^y|) + \bar{I}(|f_0^y - g_0^y|) \ .$$

Es gilt $|f - f_0| \leq \sum p_n, |g - g_0| \leq \sum q_n$; überdies gilt

$$|f_0 - g_0| \leq \sum (p_n + q_n + h_n) \ .$$

Die letzte Ungleichung sieht man so: Sind f, g (an einer bestimmten Stelle) beide reell so folgt die Ungleichung sofort aus der Abschätzung

$$|f_0 - g_0| \leq |f_0 - f| + |f - g| + |g - g_0| \leq \sum p_n + \sum h_n + \sum q_n \ .$$

Ist hingegen $|f|$ oder $|g|$ an einer Stelle unendlich, so folgt aus f_0, g_0=reell und $|f - f_0| \leq \sum p_n, |g - g_0| \leq \sum q_n$, daß auch eine der rechter Hand vorkommenden Summen unendlich ist, so daß auch in diesem Falle die Ungleichung sicher richtig ist. Beachtet man all dies, sowie die abzählbare Subadditivität von $\bar{I}$ in Ungleichung (1), so erhält man

$$|I^*(f^y) - I^*(g^y)| \leq 2 \sum (\bar{I}(p_n^y) + \bar{I}(q_n^y)) + \sum \bar{I}(h_n^y)$$
$$= 2 \sum (\int p_n^y \, dI + \int q_n^y \, dI) + \sum \int h_n^y \, dI \ ,$$

wobei zuletzt $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ ausgenutzt wurde. Jetzt kann man hierauf $\overline{J}$ anwenden und abschätzen

$$\begin{aligned}\overline{J}(|I^*(f^y) - I^*(g^y)|) &\leq 2\sum\left(\overline{J}\left(\int p_n^y\,dI\right) + \overline{J}\left(\int q_n^y\,dI\right)\right) + \sum\overline{J}\left(\int h_n^y\,dI\right)\\ &= 2\sum\left(\int\left(\int p_n^y\,dI\right)dJ + \int\left(\int q_n^y\,dI\right)dJ\right)\\ &\qquad + \sum\int\left(\int h_n^y\,dI\right)dJ\\ &= 2\sum(I\otimes J(p_n) + I\otimes J(q_n)) + \sum I\otimes J(h_n)\\ &< 5\epsilon\,.\end{aligned}$$

Mit anderen Worten: Es gilt

$$\overline{I\otimes J}(|f-g|) < \epsilon \Rightarrow \overline{J}(|\Phi^*(f) - \Phi^*(g)|) < 5\epsilon \qquad \forall f,g\in\mathcal{L}^1(X\times Y)\,,$$

d.h. Φ^* ist (gleichmäßig) stetig $\diamondsuit$

Der Beweis hat gezeigt, daß Φ^* wirklich "Repräsentanten-unabhängig" ist, d.h. es gilt für $f, g \in \mathcal{L}^1(X\times Y)$:

$$f = g \text{ f.ü.} \Rightarrow \Phi^*(f) = \Phi^*(g) \text{ f.ü.}$$

In der Tat bedeutet $f = g$ f.ü. in $\mathcal{L}^1(X\times Y)$ gerade $\overline{I\otimes J}(|f-g|) < \epsilon$ für jedes $\epsilon > 0$; der vorangegangene Beweis lehrte, daß dann $\overline{J}(|\Phi^*(f) - \Phi^*(g)|) < 5\epsilon$, woraus man $\Phi^*(f) = \Phi^*(g)$ in $\mathcal{H}(Y)$ schließt, da $\epsilon > 0$ beliebig war.

(2.4.4) COROLLAR. *Sei* $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ *und* $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$. *Die Abbildung*

$$\Phi_* : \mathcal{L}^1(X\times Y) \to \mathcal{H}(Y) \quad , \quad f \mapsto I_*(f^y)$$

ist (gleichmäßig) stetig.

Das ist nun klar, da

$$\Phi_*(f) = I_*(f^y) = -I^*(-f^y) = -I^*((-f)^y) = -\Phi^*(-f)\,.$$

Wir betrachten nun $\overline{\mathbf{R}}$ als topologischen Raum, versehen mit der kanonischen Topologie.

(2.4.5) LEMMA. *Die Abbildungen*

$$J^* : \mathcal{H}(Y) \to \overline{\mathbf{R}}\,,\ f \mapsto J^*(f)\,,$$
$$J_* : \mathcal{H}(Y) \to \overline{\mathbf{R}}\,,\ f \mapsto J_*(f)$$

sind stetig.

BEWEIS: Wir brauchen nur die Stetigkeit von J^* zu zeigen. Seien dazu $\epsilon > 0$ und $f, g \in \mathcal{H}(Y)$ (ohne Einschränkung reellwertig) mit $\overline{J}(|f-g|) < \epsilon$. Dann ist nach (1.2.14) und (1.2.13)

$$|J^*(f-g)|, |J^*(g-f)| \leq J^*(|f-g|) \leq \overline{J}(|f-g|) < \epsilon \, .$$

Daher sind jedenfalls die Summen $J^*(f-g)+J^*(g), J^*(g-f)+J^*(f)$ definiert, so daß gilt

$$J^*(f) \leq J^*(f-g)+J^*(g) \leq \epsilon + J^*(g) \Rightarrow$$

(1) $\qquad J^*(f) \leq J^*(g)+\epsilon \quad$ und analog

(2) $\qquad J^*(g) \leq J^*(f)+\epsilon \, .$

Ist daher $J^*(f)$ reell, so muß wegen (1) und (2) auch $J^*(g)$ reell sein und überdies ist $|J^*(f)-J^*(g)| < \epsilon$. Ist hingegen $J^*(f) = \infty$ so muß wegen (1) auch $J^*(g) = \infty$ sein; ist $J^*(g) = -\infty$ so muß wegen (2) auch $J^*(g) = -\infty$ sein. Damit ist die Stetigkeit von J^* gezeigt $\diamondsuit$

Für den Beweis des folgenden Theorems erinnern wir noch an folgende Tatsache. Ist $(Z, \| \|)$ ein pseudo-normierter Vektorraum und sind $S, S_1, S_2 : Z \to \overline{\mathbf{R}}$ stetige Abbildungen und ist $\alpha \in \overline{\mathbf{R}}$, so sind (wie man leicht sieht) die Mengen $\{S_1 = S_2\}, \{S = \alpha\}$ abgeschlossene Teilmengen von Z. Ferner sind Addition und Subtraktion stetige Operationen $Z \times Z \to Z$ (was für die Skalarmultiplikation $\mathbf{R} \times Z \to Z$ nicht richtig sein muß).

Wir werden nun zeigen, daß der Satz von Fubini in seiner größtmöglichen Allgemeinheit gültig bleibt: An die Räume $\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y)$ wird nur die Forderung $\overline{I} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ und $\overline{J} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$ gestellt, diese Forderungen sind aber ohnehin unumgänglich damit $I \otimes J$ überhaupt wieder ein Daniell-Integral wird (siehe (2.1.2)).

(2.4.6) THEOREM. *(Verallgemeinertes Theorem von Fubini) Sei* $\overline{I} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+(X)$ *und* $\overline{J} = \int$ *auf* $(\mathcal{L}^1)^+(Y)$. *Dann gilt für jedes* $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$: *Es gibt eine Nullmenge* $N \subset Y$ *so daß* $f^y \in \mathcal{L}^1(X)$ *für alle* $y \in Y \setminus N$. *Ist* H *eine Funktion mit*

$$H(y) = \int f^y \, dI \qquad \text{für fast alle } y \in Y \setminus N,$$

so ist $H \in \mathcal{L}^1(Y)$ *und es gilt die Formel*

$$\int H \, dJ = \int f \, dI \otimes J \, .$$

Nicht völlig korrekt, aber suggestiv:

$$\int \left(\int f^y \, dI \right) dJ = \int f \, dI \otimes J \, .$$

BEWEIS: Sei $\mathcal{S}$ die Menge aller $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$ für die folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

(1) $$\overline{J}(I^*(f^y) - I_*(f^y)) = 0$$

(2) $$J^*(I^*(f^y)) = J_*(I^*(f^y))$$

(3) $$\int f \, dI \otimes J = J^*(I^*(f^y)) \, .$$

BEHAUPTUNG I. *Ist $f \in \mathcal{S}$ so gilt für f die Aussage des Satzes.*

Zunächst ist nämlich nach (2.4.2) $I^*(f^y)$ für fast alle $y \in Y$ reell. $I^*(f^y) - I_*(f^y)$ kann daher in $\mathcal{H}(Y)$ gebildet weden und wegen $I_* \leq I^*$ als nich-negative Funktion aus $\mathcal{H}(Y)$ aufgefaßt werden. Dann kann auch $\overline{J}(I^*(f^y) - I_*(f^y))$ gebildet werden. Da dieser Ausdruck nach (1) verschwindet haben wir (siehe (1.1.9),(ii)):

$$I_*(f^y) = I^*(f^y) \in \mathbf{R} \qquad \text{für fast alle } y \in Y \, ,$$

etwa für alle y außerhalb einer Nullmenge $N \subset Y$. Nach (1.2.12) bedeutet dies

$$f^y \in \mathcal{L}^1(X) \, , \int f^y \, dI = I^*(f^y) \qquad \forall y \in Y \setminus N \, .$$

Wegen (3) ist $J^*(I^*(f^y)) = \int f \, dI \otimes J$ reell; wegen (2) folgt dann erneut mit Hilfe von (1.2.12):

$$I^*(f^y) \in \mathcal{L}^1(Y) \, , \int I^*(f^y) \, dJ = J^*(I^*(f^y)) = \int f \, dI \otimes J \, .$$

Ist nun $H(y) = I^*(f^y)$ f.ü. auf Y, so ist bekanntlich auch $H \in \mathcal{L}^1(Y)$ und es gilt

$$\int H \, dJ = \int I^*(f^y) \, dJ = \int f dI \otimes J \, .$$

Damit ist Behauptung I gezeigt.

BEHAUPTUNG II. *$\mathcal{S}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathcal{L}^1(X \times Y)$.*

Nach (1.2.13),(ii) ist $\overline{J}(\phi) = J^*(\phi)$ für jedes $\phi : Y \to [0, \infty]$. Somit ist (1) äquivalent zu der Aussage

(1') $$J^*(I^*(f^y) - I_*(f^y)) = 0 \, .$$

Die Menge aller $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$ die (1) erfüllen kann man daher schreiben als

$$\mathcal{S}_1 := \{f |\ J^* \circ (\Phi^* - \Phi_*)(f) = 0\} .$$

Die Abbildung $J^* \circ (\Phi^* - \Phi_*)$ ist aber als Kompositum stetiger Abbildungen (siehe (2.4.2), (2.4.4), (2.4.5)) selber stetig, so daß $\mathcal{S}_1$ abgeschlossen ist. Analog sind die Mengen der f die (2) und (3) erfüllen, also

$$\mathcal{S}_2 := \{f |\ J^* \circ \Phi^*(f) = J_* \circ \Phi^*(f)\},$$

$$\mathcal{S}_3 := \{f |\ \int f\, dI \otimes J = J^* \circ \Phi^*(f)\}$$

abgeschlossen. Zur Menge $\mathcal{S}_3$ ist noch anzumerken, daß das Integral $\int dI \otimes J$ natürlich auch eine stetige Abbildung $\mathcal{L}^1(X \times Y) \to \mathbf{R} \hookrightarrow \overline{\mathbf{R}}$ ist.

Darum ist auch

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{S}_3$$

abgeschlossen in $\mathcal{L}^1(X \times Y)$, Behauptung II ist gezeigt.

Nun kann man zu Ende schließen: Ganz offensichtlich ist $\mathcal{E}(X \times Y) \subset \mathcal{S}$, also gilt

$$\mathcal{L}^1(X \times Y) = \overline{\mathcal{E}(X \times Y)} \subset \overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1(X \times Y) \Rightarrow$$
$$\mathcal{S} = \mathcal{L}^1(X \times Y)$$

und wir sind fertig wegen Behauptung I $\diamondsuit$

Zum Schluß wollen wir noch zeigen, daß unsere Produktraumbildung im klassischen Fall dasselbe Resultat liefert wie die übliche Vorgehensweise.

Wir gehen dazu wieder von nicht-leeren Mengen X, Y, Ringen $\mathcal{Y}(X), \mathcal{Y}(Y)$ und Maßen μ, ν hierauf aus. Über die Prozeduren

$$\mathcal{Y}(X), \mu \to \mathcal{E}_\mu, I_\mu \to \mathcal{L}^1[\mu], \int dI_\mu$$

$$\mathcal{Y}(Y), \nu \to \mathcal{E}_\nu, I_\nu \to \mathcal{L}^1[\nu], \int dI_\nu$$

erhalten wir die zugehörigen $\mathcal{L}^1$-Räume

$$\mathcal{L}^1(X) := \mathcal{L}^1[\mu] \ , \ \mathcal{L}^1(Y) := \mathcal{L}^1[\nu] \ .$$

Da $\mathcal{E}_\mu, \mathcal{E}_\nu$ Verbände sind, sind die Bedingungen

$$\overline{I}_\mu = \int \text{ auf } (\mathcal{L}^1)^+(X) \ , \ \overline{I}_\nu = \int \text{ auf } (\mathcal{L}^1)^+(Y)$$

erfüllt. Wir können deshalb in der in (2.1) gezeigten Weise die Produktprozedur

$$\mathcal{L}^1(X), \mathcal{L}^1(Y) \to \mathcal{E}(X \times Y), I_\mu \otimes I_\nu \to \mathcal{L}^1(X \times Y), \int dI_\mu \otimes I_\nu$$

durchführen. Wir können aber auch die klassische Prozedur

$$\mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}, I_{\mu\otimes\nu} \to \mathcal{L}^1[\mu\otimes\nu], \int dI_{\mu\otimes\nu}$$

gemäß Abschnitt (2.2) betrachten. Wir wollen natürlich zeigen, daß in diesem Falle die so gewonnen Produkträume übereinstimmen, d.h. daß die von uns eingeführte Methode der Produktraum-Konstruktion im klassischen Fall das Übliche liefert. Zunächst brauchen wir jedoch einige Vorbereitungen.

(2.4.7) LEMMA. *Es gilt:*

(i) *Es ist* $\mathcal{E}_{\mu\otimes\nu} \subset \mathcal{E}(X\times Y)$ *und*

$$I_{\mu\otimes\nu}(f) = I_\mu \otimes I_\nu(f) \qquad \forall f \in \mathcal{E}_{\mu\otimes\nu} .$$

(ii) *Für* $f : X\times Y \to [0,\infty]$ *ist* $\overline{I_\mu \otimes I_\nu}(f) \le \overline{I}_{\mu\otimes\nu}(f)$.

(iii) *Es ist* $\mathcal{L}^1[\mu\otimes\nu] \subset \mathcal{L}^1(X\times Y)$ *und*

$$\int f\, dI_{\mu\otimes\nu} = \int f\, dI_\mu \otimes I_\nu \qquad \forall f \in \mathcal{L}^1[\mu\otimes\nu] .$$

BEWEIS: Zu (i): Ist $f \in \mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}$ so hat f die Gestalt $f = \sum_1^N \alpha_n \chi_{A_n\times B_n}$ mit geeigneten $\alpha_n \in \mathbf{R}, A_n \in \mathcal{Y}_e(X), B_n \in \mathcal{Y}_e(Y)$. Nun sind aber $\chi_{A_n} \in \mathcal{E}_\mu \subset \mathcal{L}^1_e(X)$, $\chi_{B_n} \in \mathcal{E}_\nu \subset \mathcal{L}^1_e(Y)$. Da man f auch als $f = \sum_1^N (\alpha_n \chi_{A_n}) \otimes \chi_{B_n}$ schreiben kann, folgt $f \in \mathcal{E}(X\times Y)$. Ferner ist für ein f der angegebenen Gestalt

$$\begin{aligned} I_{\mu\otimes\nu}(f) &= \sum_1^N \alpha_n \mu(A_n)\nu(B_n) \\ &= \sum_1^N \alpha_n \int \chi_{A_n}\, dI_\mu \int \chi_{B_n}\, dI_\nu = I_\mu \otimes I_\nu(f) , \end{aligned}$$

womit (i) gezeigt ist.

Völlig analog wie beim Beweis von (2.3.1) folgen hieraus nun die Punkte (ii) und (iii) ◇

(2.4.8) LEMMA. *Es gilt:*

(i) *Es ist* $\mathcal{E}(X\times Y) \subset \mathcal{L}^1[\mu\otimes\nu]$ *und*

$$I_\mu \otimes I_\nu(f) = \int f\, dI_{\mu\otimes\nu} \qquad \forall f \in \mathcal{E}(X\times Y) .$$

(ii) *Für ein* $f : X\times Y \to [0,\infty]$ *ist* $\overline{I}_{\mu\otimes\nu}(f) = \overline{I_\mu \otimes I_\nu}(f)$.

BEWEIS: Zu (i): Seien zunächst $f \in \mathcal{L}_e^1(X) = \mathcal{L}_e^1[\mu]$ und $g \in \mathcal{L}_e^1(Y) = \mathcal{L}_e^1[\nu]$ vorgegeben. Da $\mathcal{E}_\mu, \mathcal{E}_\nu$ Verbände sind gilt sicher $\overline{I}_\mu(|f|), \overline{I}_\nu(|g|) < \infty$. Zu einem festen $c > \max\{\overline{I}_\mu(|f|), \overline{I}_\nu(|g|)\}$ findet man daher $p_n \in \mathcal{E}_\mu^+, q_n \in \mathcal{E}_\nu^+$ so daß

$$|f| \leq \sum p_n, \sum I_\mu(p_n) < c \text{ und } |g| \leq \sum q_m, \sum I_\nu(q_m) < c \ .$$

Zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ wähle man nun $f_0 \in \mathcal{E}_\mu, f_n \in \mathcal{E}_\mu^+, g_0 \in \mathcal{E}_\nu, g_n \in \mathcal{E}_\nu^+$ mit

$$|f - f_0| \leq \sum f_n, \sum I_\mu(f_n) < \epsilon \text{ und } |g - g_0| \leq \sum g_n, \sum I_\nu(g_n) < \epsilon \ .$$

Für f_0 gilt dann

$$|f_0| \leq |f_0 - f| + |f| \leq \sum (f_n + p_n) \ .$$

Jetzt hat man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |f \otimes g - f_0 \otimes g_0| &\leq |f - f_0| \otimes |g| + |f_0| \otimes |g - g_0| \\ &\leq \Big(\sum f_n\Big) \otimes \Big(\sum q_m\Big) + \Big(\sum (p_n + f_n)\Big) \otimes \Big(\sum g_m\Big) \\ &\leq \sum_{n,m} (f_n \otimes q_m + p_n \otimes g_m + f_n \otimes g_m) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

Die Summanden der letzten Summe aus (1) liegen offensichtlich in $\mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}^+$ und es ist z.B.

$$I_{\mu\otimes\nu}(f_n \otimes q_m) = I_\mu(f_n) I_\nu(q_m) \ ,$$

analoges gilt für die anderen Summanden. Aus (1) können wir daher schließen:

$$\begin{aligned} \overline{I}_{\mu\otimes\nu}(|f \otimes g - f_0 \otimes g_0|) &\leq \sum_{n,m} (I_\mu(f_n) I_\nu(q_m) + \ldots) \\ &< \epsilon c + c\epsilon + \epsilon^2 \ . \end{aligned}$$

Da c nur von f und g abhängt, da $\epsilon > 0$ beliebig war und $f_0 \otimes g_0 \in \mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}$ folgt $f \otimes g \in \mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu]$. Dann liegen aber auch endliche Summen von Funktionen dieser Gestalt in $\mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu]$, d.h. es gilt $\mathcal{E}(X \times Y) \subset \mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu]$. Wegen (iii) des letzten Lemmas gilt überdies für ein $f \in \mathcal{E}(X \times Y)$:

$$I_\mu \otimes I_\nu(f) = \int f \, dI_\mu \otimes I_\nu = \int f \, dI_{\mu\otimes\nu} \ .$$

Damit ist (i) bewiesen.

Zu (ii): Wegen Punkt (ii) des letzten Lemmas brauchen wir nur noch die Beziehung $\overline{I}_{\mu\otimes\nu}(f) \leq \overline{I_\mu \otimes I_\nu}(f)$ zu zeigen, für ein beliebiges $f : X \times Y \to [0, \infty]$. Dazu können wir $\overline{I_\mu \otimes I_\nu}(f) < \infty$ annehmen. Dann finden wir zu $\epsilon > 0$ Funktionen $f_n \in \mathcal{E}^+(X \times Y)$ mit

$$f \leq \sum f_n \ , \ \sum I_\mu \otimes I_\nu(f_n) < \overline{I_\mu \otimes I_\nu}(f) + \epsilon \ .$$

Nun ist aber sicher $\overline{I}_{\mu\otimes\nu} = \int$ auf $(\mathcal{L}^1)^+[\mu\otimes\nu]$ (da $\mathcal{E}_{\mu\otimes\nu}$ ein Verband ist) so daß mit Teil (i) gilt:

$$\begin{aligned}\overline{I}_{\mu\otimes\nu}(f) &\leq \sum \overline{I}_{\mu\otimes\nu}(f_n) = \sum \int f_n \, dI_{\mu\otimes\nu} \\ &= \sum I_\mu \otimes I_\nu(f_n) < \overline{I_\mu \otimes I_\nu}(f) + \epsilon \, .\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $\overline{I}_{\mu\otimes\nu}(f) \leq \overline{I_\mu \otimes I_\nu}(f)$ und damit (ii) $\diamondsuit$

Jetzt sind wir in der Lage, die angestrebte Übereinstimmung der Produkträume im klassischen Fall zu beweisen.

(2.4.9) SATZ. *Es ist* $\mathcal{L}^1(X \times Y) = \mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu]$ *bei Übereinstimmung der zugehörigen Integrale und Normen.*

BEWEIS: Im Hinblick auf (2.4.7),(iii) und (2.4.8),(ii) ist nur noch die Inklusion $\mathcal{L}^1(X \times Y) \subset \mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu]$ zu zeigen. Sei hierzu $f \in \mathcal{L}^1(X \times Y)$. Sei (f_n) eine Folge aus $\mathcal{E}(X \times Y)$ mit

$$\overline{I_\mu \otimes I_\nu}(|f - f_n|) \to 0 \, .$$

Da alle f_n in $\mathcal{E}(X \times Y) \subset \mathcal{L}^1_e[\mu \otimes \nu]$ liegen (siehe (i) des letzten Lemmas), und da nach (ii) des letzten Lemmas

$$\overline{I}_{\mu\otimes\nu}(|f - f_n|) = \overline{I_\mu \otimes I_\nu}(|f - f_n|) \to 0 \, ,$$

folgt $f \in \mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu]$ mit Hilfe von (1.1.11),(iii) $\diamondsuit$

Wenn man jetzt noch (2.5.6) und (2.4.9) verbindet hat man sofort:

(2.4.10) COROLLAR. *(Klassisches Theorem von Fubini) Sei* $f \in \mathcal{L}^1[\mu \otimes \nu]$. *Dann existiert eine* I_ν*-Nullmenge* $N \subset Y$, *so daß* $f^y \in \mathcal{L}^1[\mu], \forall y \in Y \setminus N$. *Ist* $H : Y \to \overline{\mathbf{R}}$ *eine Funktion mit* $H(y) = \int f^y \, dI_\mu$ *für fast alle* $y \in Y \setminus N$, *so ist* $H \in \mathcal{L}^1[\nu]$ *und es gilt die Formel*

$$\int H \, dI_\nu = \int f \, dI_{\mu\otimes\nu} \, .$$

Natürlich kann man (2.4.10) auch dadurch erhalten, daß man den Beweis von (2.4.6) (samt Vorbereitungen) nachahmt: Er bleibt (bis auf Umbenennungen) wort-wörtlich gültig.

(3) Anwendungen der allgemeinen Theorie

(3.1) Vorbereitungen

Leinert und König hatten bei der Entwicklung der Integrationstheorie ohne Verbandsbedingung jederzeit auch konkrete Anwendungen im Auge: Auf den Artikel [**1**] von Leinert folgte 1984 der Artikel [**2**] , in dem er die in [**1**] entwickelte Theorie für einen einfachen Beweis von Plancherels Theorem (über lokalkompakten abelschen Gruppen) benutzte.

König schreibt in der Einleitung zu [**3**] , daß seine Überlegungen durch einen Problemkreis aus der abstrakten Theorie der analytischen Funktionen inspiriert wurde.

In dieser Arbeit werden wir auf die genannten Aspekte nicht weiter eingehen, sondern neue Anwendungsgebiete einführen und genauer untersuchen. Am Anfang stehen dabei einige Grundbegriffe und Sätze, die wir sehr häufig benutzen werden und die nun vorgestellt werden sollen.

(3.1.1) DEFINITION. *Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ und F eine reelle Funktion.*

(i) *Ist F in einer rechtsseitigen Umgebung von x_0 definiert, so heißen*

$$D^+F(x_0) := \overline{\lim_{x \downarrow x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \downarrow 0} \sup_{0<x-x_0<h} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} ,$$

$$D_+F(x_0) := \underline{\lim_{x \downarrow x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \downarrow 0} \inf_{0<x-x_0<h} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

die rechte obere bzw. rechte untere (Dini-) Ableitung von F in x_0. Ist F in einer linksseitigen Umgebung von x_0 definiert, so heißen

$$D^-F(x_0) := \overline{\lim_{x \uparrow x_0}} \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} = \lim_{h \downarrow 0} \sup_{0<x_0-x<h} \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} ,$$

$$D_-F(x_0) := \underline{\lim_{x \uparrow x_0}} \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x} = \lim_{h \downarrow 0} \inf_{0<x_0-x<h} \frac{F(x_0) - F(x)}{x_0 - x}$$

die linke obere bzw. linke untere (Dini-) Ableitung von F in x_0.

(ii) *Ist F in einer Umgebung von x_0 definiert, so heißen*

$$\overline{D}F(x_0) := \overline{\lim_{x \to x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \downarrow 0} \sup_{0<|x-x_0|<h} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} ,$$

$$\underline{D}F(x_0) := \underline{\lim_{x \to x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \downarrow 0} \inf_{0<|x-x_0|<h} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$$

die obere bzw. untere Ableitung von F in x_0.

Man beachte, daß all diese Limiten in $\overline{\mathbf{R}}$ wirklich existieren, da es monotone Limiten sind.

Die Begriffe der Ableitung und der rechts- und linksseitigen Ableitung von F in x_0 $(F'(x_0), F'_+(x_0), F'_-(x_0))$ benutzen wir in ihrer üblichen Bedeutung, wobei es sich im Gegensatz zu den in (3.1.1) definierten Ableitungen hier immer um reelle Zahlen handeln soll.

Wir fassen die Eigenschaften der eingeführten Ableitungen in einem Satz zusammen, auf dessen einfachen Beweis wir verzichten.

(3.1.2) SATZ. *Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ und seien F, G reelle Funktionen.*

(i) *Sind F, G in einer rechtsseitigen Umgebung von x_0 definiert, so gilt*

$$D^+(F+G)(x_0) \leq D^+F(x_0) + D^+G(x_0) ,$$
$$D_+(F+G)(x_0) \geq D_+F(x_0) + D_+G(x_0) ,$$

falls die Summen rechter Hand in $\overline{\mathbf{R}}$ definiert sind. Existiert die reelle Zahl $G'_+(x_0)$, so gilt

$$D^+(F+G)(x_0) = D^+F(x_0) + G'_+(x_0) ,$$
$$D_+(F+G)(x_0) = D_+F(x_0) + G'_+(x_0) .$$

Genau dann existiert $F'_+(x_0)$, wenn

$$D_+F(x_0) = D^+F(x_0) \in \mathbf{R} .$$

In diesem Falle ist $F'_+(x_0) = D_+F(x_0) = D^+f(x_0)$.
Für $0 \leq c < \infty$ ist

$$D^+(cF)(x_0) = cD^+F(x_0) , \; D_+(cF)(x_0) = cD_+F(x_0) ,$$

ferner gilt

$$D^+(-F)(x_0) = -D_+F(x_0) , \; D_+(-F)(x_0) = -D^+F(x_0) .$$

(ii) *Sind F, G in einer linksseitigen Umgebung von x_0 definiert, so bleibt (i) richtig, wenn man in den Ableitungsindices überall $+$ durch $-$ ersetzt.*

(iii) *Sind F, G in einer Umgebung von x_0 definiert, so gilt*

$$\overline{D}(F+G)(x_0) \leq \overline{D}F(x_0) + \overline{D}G(x_0) ,$$
$$\underline{D}(F+G)(x_0) \geq \underline{D}F(x_0) + \underline{D}G(x_0) ,$$

falls die summen rechter Hand definiert sind. Existiert die reelle Zahl $G'(x_0)$, *so gilt*

$$\overline{D}(F+G)(x_0) = \overline{D}F(x_0) + G'(x_0) \ ,$$
$$\underline{D}(F+G)(x_0) = \underline{D}F(x_0) + G'(x_0) \ .$$

Genau dann existiert $F'(x_0)$, *wenn*

$$\underline{D}F(x_0) = \overline{D}F(x_0) \in \mathbf{R} \ .$$

In diesem Falle ist $F'(x_0) = \underline{D}F(x_0) = \overline{D}F(x_0)$.
Für $0 \leq c < \infty$ *gilt*

$$\overline{D}(cF)(x_0) = c\overline{D}F(x_0) \ , \ \underline{D}(cF)(x_0) = c\underline{D}F(x_0) \ ,$$

ferner gilt

$$\overline{D}(-F)(x_0) = -\underline{D}F(x_0) \ , \ \underline{D}(-F)(x_0) = -\overline{D}F(x_0) \ .$$

Wir werden die Tatsachen aus (3.1.2) häufig und meist ohne besonderen Hinweis benutzen.

Im Zusammenhang mit den verschiedenen eingeführten Ableitungsbegriffen sei auf [**9**] verwiesen: Das Werk beschäftigt sich intensiv mit vielen Differenzierbarkeitsfragen, u.a. auch mit den in (3.1.1) eingeführten Ableitungen. Man findet in diesem Buch auch viele Hinweise auf die bisher in diesem Gebiet geleistete Arbeit. In [**10**] wird ebenfalls eine Übersicht über die verschiedenen Differenzierbarkeitsbegriffe gegeben. Auch wir werden später noch einige dieser Begriffe kennenlernen.

(3.1.3) SATZ. *(A. Zygmund) Sei* $J \subset \mathbf{R}$ *ein Intervall und* $F : J \to \mathbf{R}$ *stetig. Sei*

$$E := \{x \in \overset{\circ}{J} \mid D^+F(x) \leq 0\} \ .$$

Enthält $F(E)$ *kein nicht-entartetes Intervall, so ist* F *monoton steigend.*

Unter einem entarteten Intervall versteht man dabei ein Intervall der Form $[a,a]$, das nur aus einem Punkt a besteht.

BEWEIS: Angenommen F sei nicht monoton steigend. Dann gibt es $c < d$ aus J mit $F(c) > F(d)$. Sei $y_0 \in (F(d), F(c))$ beliebig und

$$x_0 := \sup\{x \in [c,d] \mid F(x) \geq y_0\} \ .$$

Wegen der Stetigkeit von F gilt offenbar $c < x_0 < d$ und $F(x_0) = y_0$. Für ein $x \in (x_0, d]$ ist $F(x) < F(x_0)$ und daher $D^+F(x_0) \leq 0$. Da $y_0 \in (F(d), F(c))$ beliebig war, muß $F(E) \supset (F(d), F(c))$ gelten, im Widerspruch zur Voraussetzung, daß

$F(E)$ kein nicht-entartetes Intervall enthalten sollte. Also muß F doch monoton steigen $\diamondsuit$

Eine Verallgemeinerung dieses Satzes findet sich z.B. in [**11**] . Monotoniefragen im Zusammenhang mit Ableitungen werden auch ausführlich in [**9**] , Kapitel XI besprochen.

Während der gesamten Arbeit werden wir gute Kenntnisse der klassischen Maß- und Integrationstheorie voraussetzen müssen, was insbesondere das Lebesguesche Maß und Integral betrifft. Wir wollen deshalb an dieser Stelle nur die wichtigsten und am häufigsten benötigten Tatsachen zusammenstellen.

Ist $J \subset \mathbf{R}$ irgendein (offenes, halboffenes, abgeschlossenes, endliches oder unendliches) Intervall, so erhält man durch die Prozedur

$$\mathcal{E}_L, I_L \to \mathcal{L}^1_L, \int dI_L$$

den Raum $\mathcal{L}^1_L = \mathcal{L}^1_L(J)$ der über J Lebesgue-integrierbaren Funktionen (siehe Beispiel (1.1.5)). Zur Erinnerung: $\mathcal{E}_L = \mathcal{C}_c$ besteht aus allen stetigen Funktionen $f : J \to \mathbf{R}$ die (relativ zu J) einen kompakten Träger besitzen; I_L ist dabei das gewöhnliche Riemann- oder Lebesgue-Integral. Ist insbesondere J kompakt, so ist $\mathcal{E}_L = \mathcal{C}$, die Menge aller stetigen $f : J \to \mathbf{R}$.

Da $\mathcal{E}_L$ ein Verband ist, ist $\mathcal{L}^1_L$ normal. Wir erhalten daher über die Prozedur

$$\mathcal{L}^1_L, \int dI_L \to \mathcal{M}_\lambda, \lambda$$

die σ-Algebra $\mathcal{M}_\lambda$ der Lebesgue-meßbaren Mengen, sowie hierauf das Lebesgue-Maß λ (vergl. (1.3)). Wir vereinbaren, das Symbol $\mathcal{M}_\lambda$ für die Lebesgue-meßbaren Mengen und das Symbol λ für das Lebesgue-Maß zu reservieren.

Da $\mathcal{L}^1_L$ ein Stonescher Verband ist und da λ vollständig ist hat man

$$\mathcal{L}^1_L = \mathcal{L}^1[\lambda] = \mathcal{L}^1(\lambda) \ ,$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

Für Lebesgue-Integrale gibt es verschiedene Schreibweisen, die sich aber allesamt von selbst verstehen. Ist etwa $f \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$, so schreibt man oft $\int_a^b f(t)\,dt$ anstatt $\int_{[a,b]} f\,dI_L$.

Dem Leser sollten Begriffe wie absolute Stetigkeit, Variation (Schwankung), unbestimmtes Integral u.s.w. vertraut sein. Begriffe wie f.ü. (fast überall), Nullmenge, meßbar u.s.w. beziehen sich, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, stets auf die Lebesgue-meßbaren Mengen und das Lebesgue-Maß.

(3.1.4) SATZ. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *Genau dann ist F von beschränkter Variation, wenn sich F als Differenz zweier monoton steigender Funktionen schreiben läßt.*

(ii) *Ist F von beschränkter Variation, so ist F f.ü. differenzierbar und F' ist Lebesgue-integrierbar. Ist F überdies monoton steigend, so gilt*

$$\int_a^b F'(t)\,dt \leq F(b) - F(a)\ .$$

(iii) *Ist F absolut stetig, so ist F f.ü. differenzierbar und F' ist Lebesgue-integrierbar. In diesem Falle gilt*

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)\ .$$

(iv) *Ist F unbestimmtes Integral einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f : [a,b] \to \mathbf{R}$, so ist F absolut stetig, f.ü. differenzierbar und es gilt $F' = f$ f.ü.*

Die Beweise findet man z.B. in [**4**] , Kapitel V. Die Aussagen (ii),(iii),(iv) gehen auf H. Lebesgue zurück.

Da wir es oft mit höchstens abzählbaren Ausnahmemengen zu tun haben werden, definieren wir in Anlehnung an den Begriff "fast überall":

(3.1.5) DEFINITION. *Sei M eine Menge und $Q = Q(x)$ eine Aussage über Punkte $x \in M$. Ist die Menge*

$$\{x \in M |\ Q(x) \text{ ist falsch } \}$$

höchstens abzählbar, so sagen wir Q gilt b.ü. (beinahe überall) auf M.

(3.2) Der Raum $\mathcal{L}^1_\omega$

In diesem Abschnitt sei stets $J \subset \mathbf{R}$ ein offenes, halboffenes, abgeschlossenes, endliches oder unendliches Intervall. Insbesondere kann $J = \mathbf{R}$ sein.

(3.2.1) LEMMA. *Sei $F : J \to \mathbf{R}$ stetig und b.ü. differenzierbar. Dann gilt:*

$$F' \geq 0 \text{ b.ü.} \Rightarrow F \text{ wächst monoton .}$$

BEWEIS: Sei $E \subset J$ eine höchstens abzählbare Menge, so daß F differenzierbar und $F' \geq 0$ außerhalb E. Definiere zu $\epsilon > 0$ auf J die Funktion $G(x) := F(x) + \epsilon x$. Außerhalb von E ist $D^+G = G' = F' + \epsilon \geq \epsilon > 0$, so daß $\{D^+G \leq 0\} \subset E$. Da $F(E)$ als höchstens abzählbare Menge keine echten Intervalle enthält, muß G gemäß (3.1.3) monoton steigen. Da aber $\epsilon > 0$ beliebig war muß auch F monoton steigen $\diamondsuit$

(3.2.2) COROLLAR. *Ist $F : J \to \mathbf{R}$ stetig, b.ü. differenzierbar mit $F' = 0$ b.ü., so ist F eine Konstante.*

BEWEIS: Da $F' = (-F)' = 0$ b.ü. müssen nach dem letzten Lemma sowohl F als auch $-F$ monoton steigen. Man sieht leicht ein, daß dies nur möglich ist, wenn F eine Konstante ist. $\diamondsuit$

Sind a, b die Ecken von J $(a, b \in \overline{\mathbf{R}})$, so schreiben wir

$$J =< a, b >$$

und lassen damit offen, ob a oder b zu J gehören oder nicht.

Ist $F : J \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion und ist c eine der Ecken von J, so sagen wir daß $F(c)$ existiert, wenn der Limes von $F(x)$ für $x \to c$ existiert und reell ist. In diesem Falle setzen wir

$$F(c) := \lim_{\substack{x \in J \\ x \to c}} F(x) \ .$$

Wenn wir sagen, daß $F : J \to \mathbf{R}$ differenzierbar ist, so ist damit in den zu J gehörenden Ecken von J natürlich nur die entsprechende einseitige Differenzierbarkeit gefordert.

(3.2.3) DEFINITION. *Sei $J =< a, b >$, $f : J \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion, es sei $F : J \to \mathbf{R}$ stetig und $F(a), F(b)$ mögen existieren.*

(i) *F heißt ein ω-Stamm von f, wenn F b.ü. differenzierbar und $F' = f$ b.ü.*

(ii) *F heißt ein f-Stamm von f ("f" wie "finit"), wenn F in allen bis auf endlich vielen Punkten differenzierbar und $F' = f$ in allen bis auf endlich vielen Punkten.*

(iii) *F heißt ein N-Stamm von f ("N" wie "Newton"), wenn F differenzierbar und $F' = f$.*

(3.2.4) DEFINITION. *Es sei*

$$\mathcal{E}_\omega = \mathcal{E}_\omega(J) := \{f : J \to \mathbf{R} |\ f \text{ hat einen } \omega\text{-Stamm } \} .$$

Ist $J =< a, b >$ und $f \in \mathcal{E}_\omega$ so definiert man

$$I_\omega(f) := F(b) - F(a) ,$$

wenn F ein ω-Stamm von f ist.
Analog werden $\mathcal{E}_f, I_f$ und $\mathcal{E}_N, I_N$ definiert.

I_ω ist dadurch wohldefiniert: Sind F_1, F_2 zwei ω-Stämme der Funktion f, so ist $(F_1 - F_2)' = f - f = 0$ b.ü., so daß sich F_1 und F_2 nach (3.2.2) nur um eine Konstante unterscheiden können.

Natürlich könnte man z.B. auch noch den Fall derjenigen $f :< a, b >\to \overline{\mathbf{R}}$ betrachten, zu denen es ein $F :< a, b >\to \mathbf{R}$ gibt, für das $F(a), F(b)$ existieren und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in (a, b)$, d.h. $F' = f$ ist höchstens in den Ecken des Intervalls nicht erfüllt. Bezeichnen wir die Menge derartiger f für den Moment mit $\mathcal{E}_0$, so gilt offenbar

$$\mathcal{E}_N \subset \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_f .$$

In der Tat kann man zeigen, daß beide Inklusionen echt sind (benutze hierfür Beispiel (3.3.2) unten). Da jedoch eine Theorie über $\mathcal{E}_0$ um nichts einfacher wäre als die (nachfolgende) Theorie über $\mathcal{E}_f$, ist es nicht nötig diesen Fall gesondert zu betrachten.

Es ist klar worauf wir jetzt hinauswollen:

(3.2.5) SATZ. *$\mathcal{E}_\omega$ ist ein Funktionenvektorraum und $I_\omega : \mathcal{E}_\omega \to \mathbf{R}$ ist ein Daniell-Integral. Dasselbe gilt für f oder N an Stelle von ω.*

BEWEIS: Ganz offensichtlich ist $\mathcal{E}_\omega$ ein Funktionenvektorraum und I_ω ist linear.

Sei $f \geq 0$ aus $\mathcal{E}_\omega$ und F ein ω-Stamm von f. Wegen $F' = f \geq 0$ b.ü. ist F monoton steigend nach (3.2.1). Daher ist $I_\omega(f) = F(b) - F(a) \geq 0$ und es ist gezeigt, daß I_ω positiv ist.

Es bleibt die Stetigkeit von unten von I_ω zu beweisen. Seien hierzu $f \in \mathcal{E}_\omega$, $f_n \in \mathcal{E}_\omega^+$ und $\sum f_n \geq f$. Mit F, F_n bezeichnen wir die zugehörigen ω-Stämme.

Ist $J =< a, b >$ so können wir dabei ohne Einschränkung annehmen, daß $F(a) = F_n(a) = 0$. Wegen $F_n' = f_n \geq 0$ b.ü. sind alle F_n monoton steigend, insbesondere gilt $\|F_n\|_\infty = f_n(b)$. Wir müssen zeigen, daß

$$\sum F_n(b) = \sum I_\omega(f_n) \geq I_\omega(f) = F(b) .$$

Ist $\sum F_n(b) = \infty$ so ist nichts zu zeigen. Wir dürfen aus diesem Grunde sofort $\sum \|F_n\|_\infty = \sum F_n(b) < \infty$ annehmen. Sei $G := \sum F_n$. Als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist G selbst stetig. Wie man leicht nachprüft existieren auch $G(0) = 0$ und $G(b) = \sum F_n(b)$. Für ein natürliches N hat man dann

$$\begin{aligned} D_+G &= D_+\left(\sum_1^N F_n + \sum_{N+1}^\infty F_n\right) \\ &\geq \sum_1^N D_+F_n + D_+\left(\sum_{N+1}^\infty F_n\right) \\ &= \sum_1^N F_n' + D_+\left(\sum_{N+1}^\infty F_n\right) \\ &\geq \sum_1^N F_n' = \sum_1^N f_n \end{aligned}$$

b.ü., denn $\sum\limits_{N+1}^\infty F_n$ wächst monoton so daß $D_+(\sum\limits_{N+1}^\infty F_n) \geq 0$. Da dies für alle natürlichen N richtig ist muß

$$D_+G \geq \sum_1^\infty f_n \geq f \qquad \text{b.ü.}$$

gelten. Für $G - F$ gilt daher

$$(1) \qquad D^+(G-F) \geq D_+(G-F) = D_+G - F' = D_+G - f \geq 0 \qquad \text{b.ü.}$$

Definiert man nun für $\epsilon > 0$ auf J die Funktion $H(x) := G(x) - F(x) + \epsilon x$, so ist $E := \{D^+H \leq 0\}$ höchstens abzählbar, da wegen (1)

$$D^+H = D^+(G-F) + \epsilon \geq \epsilon > 0 \qquad \text{b.ü.}$$

Also ist auch $H(E)$ höchstens abzählbar und enthält kein echtes Intervall. Nach (3.2.1) steigt H monoton; dasselbe gilt dann für $G - F$, da $\epsilon > 0$ beliebig war. Es folgt

$$\sum F_n(b) - F(b) = G(b) - F(b) \geq G(a) - F(a) = 0 .$$

Damit ist für $\mathcal{E}_\omega, I_\omega$ alles gezeigt.

Da $\mathcal{E}_N \subset \mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}_\omega$ und da I_N, I_f nur Einschränkungen von I_ω sind, gilt die Behauptung des Satzes auch für $\mathcal{E}_n, I_N$ und $\mathcal{E}_f, I_f$ $\diamond$

Das entscheidende Hilfsmittel des Beweises war das Monotoniekriterium (3.2.1) von Zygmund, dessen Beweis aber war elementar. Es sei dennoch darauf hingewiesen, daß für die Fälle I_f und I_N auch Beweise möglich sind, in denen lediglich der Mittelwertsatz der Differentialrechnung sowie Kompaktheitsargumente zur Anwendung kommen.

Nun sind wir also in der Lage die Prozedur

$$\mathcal{E}_\omega, I_\omega \to \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_\omega, I_\omega), \int dI_\omega$$

auszuführen. Zur Abkürzung setzen wir

$$\mathcal{L}^1_\omega = \mathcal{L}^1_\omega(J) = \mathcal{L}^1_\omega(J, \mathcal{E}_\omega, I_\omega) .$$

Ganz analog sind $\mathcal{L}^1_f$ und $\mathcal{L}^1_N$ definiert.

Wir weisen an dieser Stelle darauf hin, daß $\mathcal{E}_L \subset \mathcal{E}_N$, wie man sich sofort mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung überlegt.

Für ein $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$ hat man die Pseudo-Norm

$$\|f\|_\omega := \inf \left\{ \sum I_\omega(f_n) \mid f_n \in \mathcal{E}^+_\omega, \sum f_n \geq |f| \right\} .$$

Analog sind die Pseudo-Normen $\| \ \|_f, \| \ \|_N$ und $\| \ \|_L$ definiert.

(3.2.6) SATZ. *Es ist* $\| \ \|_\omega = \| \ \|_f = \| \ \|_N = \| \ \|_L$.

BEWEIS: Wegen der Inklusionen $\mathcal{E}_L \subset \mathcal{E}_N \subset \mathcal{E}_f \subset \mathcal{E}_\omega$ hat man unmittelbar $\| \ \|_\omega \leq \| \ \|_f \leq \| \ \|_N \leq \| \ \|_L$. Es genügt daher $\|f\|_L \leq \|f\|_\omega$ zu zeigen, für ein beliebiges $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$. Dazu können wir $\|f\|_\omega < \infty$ annehmen. Sei dann $\epsilon > 0$ beliebig. Seien $f_n \in \mathcal{E}^+_\omega$ mit

$$\sum f_n \geq f \text{ und } \sum I_\omega(f_n) < \|f\|_\omega + \epsilon .$$

Seien F_n ω-Stämme der f_n. Wegen $F'_n = f_n \geq 0$ f.ü. sind die F_n monoton wachsend. Ist etwa $J =< a, b >$ und $[c, d] \subset < a, b >$ kompakt, so folgt nach (3.1.4),(ii): Jedes f_n ist Lebesgue-integrierbar über $[c, d]$ und es ist

$$\int_c^d f_n(t)\, dt = \int_c^d F'_n(t)\, dt \leq F_n(d) - F_n(c) .$$

Mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt leicht $f_n \in \mathcal{L}_L^1(J)$ und

$$\int_J f_n(t)\,dt \leq F_n(b) - F_n(a) = I_\omega(f_n)\ .$$

Da $\overline{I}_L = \int$ auf $(\mathcal{L}_L^1)^+$ hat man

$$\begin{aligned} \|f\|_L = \overline{I}_L(|f|) &\leq \sum \overline{I}_L(f_n) \\ &= \sum \int_J f_n(t)\,dt \leq \sum I_\omega(f_n) < \|f\|_\omega + \epsilon\ . \end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $\|f\|_L \leq \|f\|_\omega$, wie gewünscht $\diamondsuit$

Wegen der gezeigten Übereinstimmung der Normen schreiben wir in Zukunft oft nur $\|\ \|$ für jede der Normen $\|\ \|_\omega, \|\ \|_f, \|\ \|_N, \|\ \|_L$.

(3.2.7) COROLLAR. *Es ist*

$$\mathcal{L}_L^1 \subset \mathcal{L}_N^1 \subset \mathcal{L}_f^1 \subset \mathcal{L}_\omega^1$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

Wir werden später sehen, daß alle Inklusionen sogar echt sind.

BEWEIS: Wir zeigen exemplarisch $\mathcal{L}_L^1 \subset \mathcal{L}_N^1$. Sei hierzu $f \in \mathcal{L}_L^1$ gegeben. Man findet Funktionen $f_n \in \mathcal{E}_L$ mit $\|f - f_n\| \to 0$. Da alle f_n auch in $\mathcal{E}_N \supset \mathcal{E}_L$ liegen folgt $f \in \mathcal{L}_N^1$ und es ist

$$\int f\,dI_L = \lim_{n\to\infty} I_L(f_n) = \lim_{n\to\infty} I_N(f_n) = \int f\,dI_N\ \diamondsuit$$

(3.2.8) SATZ. *Alle $f \in \mathcal{E}_\omega$ sind Borel-meßbar.*

BEWEIS: Sei F ein ω-Stamm von $f \in \mathcal{E}_\omega$ und A die höchstens abzählbare Ausnahmemenge über der F nicht differenzierbar oder $F' \neq f$. Wir denken uns F gegebenenfalls über die rechte Ecke von J hinaus stetig konstant fortgesetzt. Da A höchstens abzählbar ist, ist $J - A$ eine Borel-Menge also χ_{J-A} Borel-meßbar. Sei

$$G_n(x) := n(F(x + \frac{1}{n}) - F(x)) \qquad (x \in J).$$

Die G_n sind stetig, also Borel-meßbar. Dann sind auch alle $G_n\chi_{J-A}$ Borel-meßbar, als Produkte Borel-meßbarer Funktionen. Als Limes Borel-meßbarer Funktionen ist dann

$$f\chi_{J-a} = \lim_{n\to\infty} G_n\chi_{J-A}$$

Borel-meßbar. Für ein $c \in \mathbf{R}$ unterscheidet sich jedoch die Menge $\{f > c\}$ von der Borel-Menge $\{f\chi_{J-a} > c\}$ nur um eine höchstens abzählbare Menge, d.h. um eine Borel-Menge. Daher ist $\{f > c\}$ selbst eine Borel-Menge und f ist ebenfalls Borel-meßbar ◇

(3.2.9) COROLLAR. *Für alle $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ gilt:*

(i) *f ist Lebesgue-meßbar.*
(ii) $f \in \mathcal{L}^1_L \Leftrightarrow \|f\| < \infty$.

BEWEIS: Zu (i): Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ so gibt es gemäß (1.1.19) Funktionen $f_n \in \mathcal{E}_\omega$ mit $f_n \to f$ f.ü. bzgl. $\| \|_\omega$. Da $\| \|_\omega = \| \| = \| \|_L$ geht auch $f_n \to f$ f.ü. im Lebesgueschen Sinne. Da alle f_n Borel- erst recht also Lebesgue-meßbar sind folgt (bekanntlich): f ist Lebesgue-meßbar.

Zu (ii): Ist $f \in \mathcal{L}^1_L$ so ist natürlich $\|f\| < \infty$, da $\mathcal{E}_L$ein Verband ist. Ist umgekehrt $\|f\| < \infty$, so folgt für das Lebesgue-meßbare f: $\int |f|\, d\lambda = \|f\| < \infty \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\lambda) = \mathcal{L}^1_L$ ◇

(3.2.10) COROLLAR. *Dann und nur dann ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega$, wenn es eine Zerlegung*

$$f = g + h \quad \text{mit } g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L$$

gibt. In diesem Falle kann man $\|h\| < \epsilon$ erreichen, für jedes beliebige $\epsilon > 0$. Dasselbe gilt für f oder N an Stelle von ω.

BEWEIS: Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ gegeben. Zu $\epsilon > 0$ gibt es dann ein $g \in \mathcal{E}_\omega$ mit $\|f - g\| < \epsilon$. Sei $h := f - g$. Wegen $h \in \mathcal{L}^1_\omega$ und (ii) des letzten Satzes folgt $h \in \mathcal{L}^1_L$; $f = g + h$ ist dann die gewünschte Zerlegung und außerdem hat man $\|h\| = \|f - g\| < \epsilon$ erreicht.

Ist umgekehrt $f = g + h$ ($g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L$), so ist natürlich $f \in \mathcal{L}^1_\omega$, da $\mathcal{E}_\omega, \mathcal{L}^1_L \subset \mathcal{L}^1_\omega$.

All dies bleibt richtig, wenn man f oder N an Stelle von ω schreibt ◇

(3.2.11) THEOREM. *Es gilt*

$$(\mathcal{L}^1_L)^+ = (\mathcal{L}^1_N)^+ = (\mathcal{L}^1_f)^+ = (\mathcal{L}^1_\omega)^+ ,$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

BEWEIS: Aus (3.2.7) folgt jedenfalls

$$(\mathcal{L}^1_L)^+ \subset (\mathcal{L}^1_N)^+ \subset (\mathcal{L}^1_f)^+ \subset (\mathcal{L}^1_\omega)^+ ,$$

bei Übereinstimmung der Integrale. Wir sind daher fertig, wenn wir die Inklusion $(\mathcal{L}^1_\omega)^+ \subset (\mathcal{L}^1_L)^+$ zeigen können.

Sei hierzu $f \in (\mathcal{L}^1_\omega)^+$ gegeben. Da f Lebesgue-meßbar ist gibt es eine Folge (f_n) Lebesgue-integrierbarer Funktionen mit $f_n \uparrow f$, z.B.

$$f_n := (f\chi_{J\cap[-n,n]}) \wedge n .$$

Wegen $\mathcal{L}^1_L \subset \mathcal{L}^1_\omega$ ist dann jedenfalls

$$\int f_n \, dI_L = \int f_n \, dI_\omega \leq \int f \, dI_\omega < \infty .$$

Aus dem Satz über die monotone Konvergenz (für $\mathcal{L}^1_L$) folgt nun $f \in \mathcal{L}^1_L$, wie gewünscht ◇

(3.2.12) COROLLAR. *Es gilt:*

(i) *$\mathcal{L}^1_\omega$ ist normal, insbesondere ist $\overline{I}_\omega = \int$ auf $(\mathcal{L}^1_\omega)^+$.*

(ii) *Die von $\mathcal{L}^1_\omega$ herrührenden meßbaren Mengen sind genau die Lebesgue-meßbaren Mengen $\mathcal{M}_\lambda$, das zugehörige Maß ist das Lebesgue-Maß λ.*

(iii) *$\mathcal{L}^1_\omega$ ist meßbar (im Sinne von (2.3.2)).*

Diese Aussagen bleiben gültig, wenn man überall ω durch N oder f ersetzt.

BEWEIS: Zu (i): Nach (3.2.11) ist $(\mathcal{L}^1_\omega)^+ = (\mathcal{L}^1_L)^+$ und auf $(\mathcal{L}^1_L)^+$ gilt $\overline{I}_L = \int$. Für ein $f \in (\mathcal{L}^1_\omega)^+$ gilt daher:

$$\overline{I}_\omega(f) = \|f\| = \overline{I}_L(f) = \int f \, dI_L = \int f \, dI_\omega .$$

Daß die integrierbaren Mengen $\cap$-stabil sind folgt dann sofort aus $(\mathcal{L}^1_\omega)^+ = (\mathcal{L}^1_L)^+$. Also ist $\mathcal{L}^1_\omega$ normal.

Behauptung (ii) folgt ebenfalls unmittelbar aus $(\mathcal{L}^1_\omega)^+ = (\mathcal{L}^1_L)^+$.

Zu (iii): Sei $f \in \mathcal{E}_\omega$. Nach (3.2.8) ist f Borel-meßbar, erst recht also Lebesgue-meßbar. Nach Teil (ii) ist f also meßbar bzgl. den zu $\mathcal{L}^1_\omega$ gehörenden meßbaren Mengen. Dies zeigt (iii).

Natürlich bleibt das Gesagte wort-wörtlich richtig, wenn man überall ω durch f oder N erstetzt ◇

Hier zeigt sich, wie sich die in Kapitel (2) eingeführten Begriffe bewähren: Wegen (3.2.12) und da ein Intervall J stets σ-endlich ist, kann Kapitel (2), Abschnitt (2.3) in vollem Umfang auf die Räume $\mathcal{L}^1_\omega, \mathcal{L}^1_f, \mathcal{L}^1_N$ (und natürlich $\mathcal{L}^1_L$) angewendet werden.

Um die Formulierungen nicht zu schwerfällig zu gestalten, treffen wir nun noch einige Vereinbarungen.

Ist $J =< a, b >$ und wollen wir festlegen, daß b (nicht) zu J gehören soll, dann schreiben wir $J =< a, b]$ ($J =< a, b)$). Analog verfährt man in der linken Ecke.

Ist $J =< a, b >$ so schreiben wir oft $\mathcal{L}^1_\omega < a, b >$ anstatt $\mathcal{L}^1_\omega(J)$, analog für f oder N an Stelle von ω.

Mit dem Unterschied zwischen Funktionen und deren Einschränkungen werden wir es an einigen Stellen nicht allzu genau nehmen: Ist z.B. f auf einer Obermenge des Intervalls J definiert, so schreiben wir $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$ und meinen damit $f|J \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$.

Auch werden wir manchmal der Einfachheit halber Sätze nur für gewisse Intervalltypen J formulieren, selbst wenn der Satz in abgewandelter Form für beliebige Intervalle richtig ist.

Ist schließlich $J =< a, b >$, so schreiben wir meist

$$\int_a^b \quad \text{anstatt} \quad \int_J .$$

Ernsthafte Einbußen an Verständlichkeit oder Allgemeingültigkeit sind dadurch natürlich nicht zu befürchten, vielmehr wird ein Gewinn an Lesbarkeit und Suggestivkraft erzielt, was genauso für alle anderen Vereinbarungen zur Schreibweise gilt.

(3.2.13) SATZ. *Seien $a < c < b$ aus $\overline{\mathbf{R}}$. Für eine Funktion $f :< a, b > \to \overline{\mathbf{R}}$ gilt dann:*

$$f \in \mathcal{L}^1_\omega < a, b > \Leftrightarrow \; f \in \mathcal{L}^1_\omega < a, c > \cap \mathcal{L}^1_\omega < c, b > \; .$$

In diesem Falle ist

$$\int_a^b f \, dI_\omega = \int_a^c f \, dI_\omega + \int_c^b f \, dI_\omega \; .$$

Dasselbe gilt wenn man ω durch f oder L ersetzt.

Vorsicht: Der Satz ist für N statt ω i.A. falsch. Er gilt jedoch auch für N, wenn man speziell $< a, c >=< a, c]$ und $< c, b >= [c, b >$ hat, wobei dann im zweiten Teil des nachstehenden Beweises eine naheliegende Änderung durchgeführt werden muß.

BEWEIS: Für L an Stelle von ω ist der Satz wohlbekannt.

Wir zeigen nun zuerst die Richtung $\Rightarrow$ und die Formel für die Integrale. Sei dazu $f \in \mathcal{L}^1_\omega < a,b >$. Wähle ein $g \in \mathcal{E}_\omega < a,b >$ sowie ein $h \in \mathcal{L}^1_L < a,b >$ mit $f = g + h$ (siehe (3.2.10)). Für alle auftretenden Funktionen bedeute der Index 1 die Einschränkung auf $< a,c >$, der Index 2 die Einschränkung auf $< c,b >$. Sei G ein ω-Stamm von g. Dann ist G_i ein ω-Stamm von g_i $(i = 1,2)$ so daß $g_1 \in \mathcal{E}_\omega < a,c >, g_2 \in \mathcal{E}_\omega < c,b >$ und ferner

$$\begin{aligned} I_\omega(g) &= G(b) - G(a) = G(b) - G(c) + G(c) - G(a) \\ &= I_\omega(g_1) + I_\omega(g_2) \ . \end{aligned}$$

Die h_i sind Lebesgue-integrierbar. Aus der Darstellung $f_i = g_i + h_i$ $(i = 1,2)$ folgt nun $f_1 \in \mathcal{L}^1_\omega < a,c >, f_2 \in \mathcal{L}^1_\omega < c,b >$, wegen (3.2.10). Für die Integrale hat man

$$\begin{aligned} \int_a^b f\, dI_\omega &= \int_a^b h\, dI_L + I_\omega(g) \\ &= \int_a^c h_1\, dI_L + \int_c^b h_2\, dI_L + I_\omega(g_1) + I_\omega(g_2) \\ &= \int_a^c (h_1 + g_1)\, dI_\omega + \int_c^b (h_2 + g_2)\, dI_\omega = \int_a^c f\, dI_\omega + \int_c^b f\, dI_\omega \ . \end{aligned}$$

Für die nun noch fehlende Richtung $\Leftarrow$ können wir uns wohl kurz fassen: Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega < a,c > \cap \mathcal{L}^1_\omega < c,b >$ so seien $f_i = g_i + h_i$ $(i = 1,2)$ Darstellungen gemäß (3.2.10) über $< a,c >$ und $< c,b >$. Entstehen dann g, h auf $< a,b >$ durch Zusammensetzen der entsprechenden Funktionen mit Index, so ist natürlich $h \in \mathcal{L}^1_L < a,b >$, aber auch $g \in \mathcal{E}_\omega < a,b >$: Sind nämlich G_1, G_2 ω-Stämme der g_1, g_2 so können wir ohne Einschränkung $G_1(c) = G_2(c)$ annehmen. Die Zusammensetzung G von G_1 und G_2 ist dann ein ω-Stamm von G. Wegen $f = g+h$ und (3.2.10) folgt $f \in \mathcal{L}^1_\omega < a,b >$.

Dies alles bleibt gültig, wenn man überall ω durch f ersetzt$\diamondsuit$

(3.2.14) SATZ. *Sei $J =< a,b >$ und $f : \overline{J} \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion. Die Richtigkeit der Aussage $f \in \mathcal{L}^1_\omega < a,b >$ sowie der Wert des Integrals von f hängen nicht davon ab, welche der Ecken a, b zu J gehören und welche nicht.*
Dasselbe gilt für f und L an Stelle von ω.

Wir verzichten auf den einfachen Beweis, machen aber darauf aufmerksam, daß dieser Satz für N an Stelle von ω falsch ist. Wir werden dafür später ein Beispiel geben.

(3.2.15) SATZ. *Seien J_0, J Intervalle mit $J_0 \subset J$. Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$ so gilt $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J_0), f\chi_{J_0} \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$ und*

$$\int_J f\chi_{J_0}\, dI_\omega = \int_{J_0} f\, dI_\omega \ .$$

Dasselbe gilt für f, N, L an Stelle von ω.

BEWEIS: Für L an Stelle von ω ist der Satz wohlbekannt. Wir beweisen ihn für N an Stelle von ω, für f und ω geht alles analog, sogar an einer Stelle noch einfacher.

Seien $J =< c, b >, J_0 =< c, d >$. Wir nehmen $a < c, d < b$ an: Ist $a = c$ oder $d = b$ so modifiziert sich der Beweis entsprtechend. Sei nun $f \in \mathcal{L}^1_N < a, b >$ und sei $f = g + h$ mit $g \in \mathcal{E}_N < a, b >, h \in \mathcal{L}^1_L < a, b >$; sei G ein N-Stamm von g. Für alle Funktionen bedeute der Index 0 die Einschränkung auf $< c, d >$, der Index 1 die Einschränkung auf $< a, c >$ und der Index 2 diejenige auf $< d, b >$, wobei $< a, c >$ und $< d, b >$ genau die Komplementärintervalle von J_0 in J sein sollen. G_0 ist gewiß ein ω-Stamm von g_0 und h_0 ist Lebesgue-integrierbar. Mit $f_0 = g_0 + h_0$ und (3.2.10) folgt bereits: $f_0 \in \mathcal{L}^1_N < c, d >= \mathcal{L}^1_N(J_0)$.

Man konstruiert nun eine auf ganz $< a, b >$ differenzierbare Funktion P mit den Eigenschaften

(1) $P_0 = G_0$ $(\Rightarrow P_0' = G_0' = g_0)$,
(2) $P_1 \in \mathcal{C}^1_c < a, c >, P_2 \in \mathcal{C}^1_c < d, b >$ $(\Rightarrow P_1' \in \mathcal{L}^1_L < a, c >, P_2' \in \mathcal{L}^1_L < d, b >)$.

Sei q diejenige Funktion auf $< a, b >$ mit $q_0 = h_0, q_1 = -P_1', q_2 = -P_2'$. Dann gilt:

$$f\chi_{J_0} = P' + q \quad \text{und} \quad P' \in \mathcal{E}_N < a, b >, q \in \mathcal{L}^1_L < a, b > \ .$$

Nach (3.2.10) gilt $f\chi_{J_0} \in \mathcal{L}^1_N < a, b >$. Für die Integrale erhält man:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f\chi_{J_0}\, dI_N &= I_N(P') + \int_a^b q\, dI_L \\
&= P(b) - P(a) - (P(c) - P(a)) + \int_c^d h_0\, dI_L - (P(b) - P(d)) \\
&= P(d) - P(c) + \int_c^d h_0\, dI_L \\
&= G_0(d) - G_0(c) + \int_c^d h_0\, dI_L \\
&= \int_c^d g_0\, dI_N + \int_c^d h_0\, dI_L = \int_c^d f\, dI_N \ \diamondsuit
\end{aligned}$$

Der folgende Satz gilt nur noch für $\mathcal{L}^1_\omega$.

(3.2.16) SATZ. *Seien $J =< a, b >$ und $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$ gegeben. Gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1_\omega < a, c] \qquad \forall c \text{ mit } a < c < b$$

und existiert in $\mathbf{R}$ der Grenzwert

$$A := \lim_{c \uparrow b} \int_a^c f \, dI_\omega \ ,$$

so ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega < a, b >$ und es gilt

$$\int_a^b f \, dI_\omega = A \ .$$

Analoges gilt in der linken Ecke.

BEWEIS: Wir nehmen zur Vereinfachung $< a, b >= [a, b)$ an, was wegen (3.2.13) und (3.2.14) keine Einschränkung ist. Sei dann $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < b$ eine unendliche Unterteilung von $[a, b)$ mit $c_n \uparrow b$. Dann ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega [c_{n-1}, c_n]$, für alle natürlichen n. Nach (3.2.10) existieren $g_n \in \mathcal{E}_\omega [c_{n-1}, c_n], h_n \in \mathcal{L}^1_L [c_{n-1}, c_n]$ mit

$$f = g_n + h_n \text{ auf } [c_{n-1}, c_n] \text{ und } \|h_n\| < \frac{1}{2^n} \ .$$

Seien G_n ω-Stämme zu den g_n. Wir können dann $G_n(c_n) = G_{n+1}(c_n)$ für alle n annehmen. Sei dann $G : [a, b) \to \mathbf{R}$ diejenige stetige Funktion die man durch Zusammensetzen aller G_n erhält. G ist stetig und b.ü. differenzierbar auf $[a, b)$. Ist $g = G'$ b.ü., so ist $g = g_n$ b.ü. auf $[c_{n-1}, c_n]$. Sei $h : [a, b) \to \mathbf{R}$ diejenige Funktion die man durch Zusammensetzen aller h_n erhält (der Wert von h in den c_n ist uninteressant). Wegen $\|h_n\| < \frac{1}{2^n}$ ist $h \in \mathcal{L}^1_L [a, b)$ (benutze den Satz über die majorisierte Konvergenz). Wir haben $f = g + h$ b.ü., insbesondere f.ü. auf $[a, b)$. Seien nun $a \leq x < y < b$, etwa $x \in [c_{n-1}, c_n], y \in [c_{m-1}, c_m], n \leq m$. Sicher ist $g \in \mathcal{E}_\omega [x, y]$ (denn $G|[x, y]$ ist ein ω-Stamm) so daß wir abschätzen können:

$$|G(y) - G(x)| = |\int_x^y g \, dI_\omega \leq |\int_x^y f \, dI_\omega| + |\int_x^y h \, dI_L|$$

$$\leq |\int_x^y f \, dI_\omega| + \sum_{k=n}^{m} \frac{1}{2^k} \to 0 \ ,$$

für $x, y \uparrow b$, da $\lim_{c \uparrow b} \int_a^c f\, dI_\omega$ existiert. Diese Überlegung zeigt, daß $G(b)$ existiert und daß folglich $g \in \mathcal{E}_\omega[a,b)$. Wegen $f = g + h$ f.ü., $g \in \mathcal{E}_\omega[a,b), h \in \mathcal{L}^1_L[a,b)$ hat man $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b)$ nach (3.2.10). Ferner ist für $a \leq c < b$

$$\left|\int_a^b f\, dI_\omega - \int_a^c f\, dI_\omega\right| = \left|\int_c^b f\, dI_\omega\right| \leq \left|\int_c^b g\, dI_\omega\right| + \left|\int_c^b h\, dI_\omega\right|$$

$$= |G(b) - G(c)| + \left|\int_c^b h\, dI_L\right| \to 0\,,$$

für $c \uparrow b$. Dies zeigt die angegebene Integralformel und wir sind fertig ◇

Der Satz zeigt insbesondere,daß $\mathcal{L}^1_\omega(J)$ alle über J uneigentlich Lebesgue-integrierbaren Funktionen enthält.

Wir widmen uns nun noch den uneigentlichen Integralen.

(3.2.17) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$ und*

$$F(x) := \int_a^x f\, dI_\omega \qquad (x \in [a,b])\,.$$

Dann ist F stetig, f.ü. differenzierbar und es ist $F' = f$ f.ü.
Dasselbe gilt für f, N an Stelle von ω.

BEWEIS: Zerlege f gemäß (3.2.10) in

$$f = g + h \quad \text{mit} \quad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L\,.$$

Die Funktion $H(x) := \int_a^x h\, dI_L$ ist absolut stetig, f.ü. differenzierbar und es ist $H' = h$ f.ü. (siehe (3.1.4),(iv)). Ist dann G der (b.ü. differenzierbare!) ω-Stamm von g mit $G(a) = 0$, so ist $F = G + H$ woraus die Behauptung folgt ◇

(3.2.18) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$ und sei*

$$F(x) := \int_a^x f\, dI_\omega \qquad (x \in [a,b])\,.$$

Dann ist äquivalent:

(i) $f \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$.
(ii) *F ist von beschränkter Variation.*
(iii) *F ist absolut stetig.*

Dasselbe gilt für f und N an Stelle von ω.

BEWEIS: Satz (3.1.4),(iv) liefert (i)⇒(iii). Bekanntlich (siehe etwa [**4**] , Theorem (18.12)) folgt (ii) aus (iii).

Aus (ii) folgt (i): Nach (3.1.4),(ii) ist $F' \in \mathcal{L}^1_L$. Nach dem letzten Satz ist aber auch $F' = f$ f.ü., also $f \in \mathcal{L}^1_L$ ◇

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, daß es durchaus (sogar stetige, monoton steigende) $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ gibt, die zwar von beschränkter Variation, aber nicht absolut stetig sind. Satz (3.2.18) besagt also u.a., daß derartige F nicht als unbestimmte Integrale eines $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$ vorkommen können.

(3.3) Einige Beispiele

Unser nächstes Anliegen ist es, die Echtheit der Inklusionen

$$\mathcal{L}^1_L \subset \mathcal{L}^1_N \subset \mathcal{L}^1_f \subset \mathcal{L}^1_\omega$$

aufzuzeigen. Die Echtheit der ersten Inklusion macht dabei am wenigsten Mühe.

(3.3.1) BEISPIEL. *Für jedes nicht zu einem Punkt entartete Intervall J gilt:*

$$\mathcal{L}^1_N(J) \setminus \mathcal{L}^1_L(J) \neq \emptyset \, .$$

BEWEIS: Wir können ohne Einschränkung $J = [0,1]$ annehmen (für andere Intervalle modifiziert man das Beispiel entsprechend). Definiere auf $[0,1]$ die Funktion

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \, . \end{cases}$$

Man überzeugt sich, daß F (auch in 0) differenzierbar ist, so daß $f := F' \in \mathcal{E}_N[0,1]$. Wir haben außerdem

$$F(x) = \int_0^x f \, dI_N \qquad (x \in [0,1]) \, .$$

Nun rechnet man nach, daß

$$\sum_{k=1}^{n} |F(\frac{1}{\sqrt{k}}) - F(\frac{1}{\sqrt{k+1}})| = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right) \to \infty \, ,$$

für $n \to \infty$. F ist daher nicht von beschränkter Variation so daß $f \notin \mathcal{L}^1_L$, gemäß (3.2.18). Also gilt $f \in \mathcal{L}^1_N \setminus \mathcal{L}^1_L$, wie gewünscht $\diamondsuit$

Die anderen Inklusionen sind nicht ganz so einfach zu behandeln. Wir benötigen ein Hilfsmittel:

(3.3.2) BEISPIEL. *Sei $J =< a,b >$ ein Intervall und $c \in J$, so daß J mindestens eine rechtsseitige Umgebung von c ist. Dann existiert eine stetige Funktion $F : J \to \mathbf{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *F ist überall außer in c differenzierbar.*
(ii) *Es ist $F(c) = 0$ und $F(a), F(b)$ existieren.*

(iii) *Ist $g \in \mathcal{E}_\omega(J)$ und G ein ω-Stamm von g der in c differenzierbar ist, so ist*

$$\|(F' - g)|[c, c+\delta]\| = \infty \qquad \forall \delta > 0 \, .$$

BEWEIS: Wir nehmen ohne Einschränkung $J = [0,1], c = 0$ an: Für ein beliebiges J geht alles analog. Definiere nun

$$F(x) := \begin{cases} \sqrt{x} \cos \frac{\pi}{x} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \, . \end{cases}$$

Für dieses F sind die Punkte (i) und (ii) sicherlich erfüllt. Sei nun G der ω-Stamm eines $g \in \mathcal{E}_\omega[0,1]$ mit der Eigenschaft, daß G in 0 (rechtsseitig) differenzierbar ist. Sei $0 < \delta \leq 1$ beliebig. Wir wollen die Behauptung

$$\|(F' - g)|[0,\delta]\| < \infty \tag{B}$$

zum Widerspruch führen. Für $x \in [0,1]$ seien

$$\tilde{g}(x) := g(x) - G'(0) \, , \; \tilde{G}(x) := G(x) - G'(0)x \, .$$

Dann ist $\tilde{G}$ ω-Stamm von $\tilde{g}$ und weiterhin

$$\|(F' - \tilde{g})|[0,\delta]\| < \infty \, . \tag{B'}$$

Zusätzlich haben wir jedoch $\tilde{G}'(0) = 0$. Sei nun $p := (F' - \tilde{g})|[0,\delta]$. Da $(F - \tilde{G})|[0,\delta]$ ein ω-Stamm von p ist gilt $p \in \mathcal{E}_\omega[0,\delta]$. Da $\|p\| < \infty$ folgt nach (3.2.9),(ii): $p \in \mathcal{L}^1_L[0,\delta]$. Man hat also über $\mathcal{L}^1_\omega[0,\delta]$ die Zerlegung

$$F' = \tilde{g} + p \qquad \tilde{g} \in \mathcal{E}_\omega, p \in \mathcal{L}^1_L \, .$$

Integration von 0 bis $h \in (0,\delta]$ ergibt

$$F(h) - F(0) = \tilde{G}(h) - \tilde{G}(0) + \int_0^h p(t)\, dt \Rightarrow$$

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} - \frac{1}{h} \int_0^h p(t)\, dt = \frac{\tilde{G}(h) - \tilde{G}(0)}{h} \, .$$

Wegen $\tilde{G}'(0) = 0$ existiert ein $h_0 \in (0,\delta]$ mit

$$\left| \frac{F(h) - F(0)}{h} - \frac{1}{h} \int_0^h p(t)\, dt \right| \leq 1 \qquad \text{für } 0 < h \leq h_0 \, .$$

Setzt man nun

$$P(h) := \int_0^h p(t)\,dt \qquad (h \in [0,\delta]) ,$$

so folgt nach Einsetzen der Formel für F und Multiplikation mit h:

$$|\sqrt{h}\cos\frac{\pi}{h} - P(h)| \leq h \qquad \text{für } 0 < h \leq h_0 .$$

Für ein $n_0 \in \mathbf{N}$ mit $\frac{1}{n_0} \leq h_0$ hat man daher

$$(1) \qquad |(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - P(\frac{1}{n})| \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n \geq n_0 .$$

Dies bedeutet insbesondere

$$P(\frac{1}{n}) \geq (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} ,$$

also mit $2m$ an Stelle von n

$$(2) \qquad P(\frac{1}{2m}) \geq \frac{1}{\sqrt{2m}} - \frac{1}{2m} \qquad \text{für } 2m \geq n_0 .$$

Aus (1) erhält man aber auch

$$P(\frac{1}{n}) \leq (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} ,$$

also mit $2m+1$ an Stelle von n

$$(3) \qquad P(\frac{1}{2m+1}) \leq -\frac{1}{\sqrt{2m+1}} + \frac{1}{2m+1} \qquad \text{für } 2m+1 \geq n_0 .$$

Sei nun $m_0 \geq 2$ so groß, daß $2m_0 \geq n_0$ gilt. Aus (2) und (3) erhält man dann

$$(4) \qquad \left|P(\frac{1}{2m}) - P(\frac{1}{2m+1})\right| \geq \frac{1}{\sqrt{2m}} + \frac{1}{\sqrt{2m+1}} - \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m+1} \qquad \forall m \geq m_0 .$$

Für $k \geq 4$ gilt $\sqrt{k} - 1 \geq \frac{1}{2}\sqrt{k}$ also

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}} .$$

Wenden wir dies an, so erhalten wir aus (4)

$$\left|P(\frac{1}{2m}) - P(\frac{1}{2m+1})\right| \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2m}} + \frac{1}{\sqrt{2m+1}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \qquad \forall m \geq m_0 .$$

Da jedoch

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2m+1}} = \infty$$

schließt man hieraus, daß P nicht von beschränkter Schwankung ist. Da P unbestimmtes Integral einer Lebesgue-integrierbaren Funktion ist, müßte dies aber gemäß (3.2.18) der Fall sein. Damit ist Annahme (B) endgültig zum Widerspruch geführt und wir sind fertig $\diamondsuit$

Wir sehen an diesem Beispiel, daß zwar $F' \in \mathcal{E}_f[0,1]$ aber sicher nicht $F' \in \mathcal{L}^1_N[0,1]$, da es ja kein auf ganz $[0,1]$ differenzierbares G geben kann, das $\|F' - G'\| < \infty$ erfüllt. Damit ist nun auch

$$\mathcal{L}^1_f(J) \setminus \mathcal{L}^1_N(J) \neq \emptyset$$

gezeigt, zunächst für $J = [0,1]$ aber analog auch für jedes, nicht zu einem Punkt entartete Intervall J.

Wie gerade dargelegt, ist $F' \notin \mathcal{L}^1_N[0,1]$, obwohl doch $F' \in \mathcal{E}_N(0,1] \subset \mathcal{L}^1_N(0,1]$, womit wir auch ein Beispiel für die Bemerkung im Anschluß an (3.2.14) gefunden haben.

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß die Inklusion $\mathcal{L}^1_f \subset \mathcal{L}^1_\omega$ echt ist.

(3.3.3) BEISPIEL. *Ist J ein nicht zu inem Punkt entartetes Intervall so gibt es stets ein $f \in \mathcal{E}_\omega(J) \setminus \mathcal{L}^1_f(J)$.*

BEWEIS: Wir werden uns ein wenig kurz fassen, da die Beweisidee recht klar ist.

Sei etwa $J =< a, b >$ und seien $x_n \in \overset{\circ}{J}$ mit $x_n \downarrow a$. Wähle dann Zahlen $0 < \delta_n < 1$ für die gilt:

(1) $x_1 + \delta_1 < b$, $x_{n+1} + \delta_{n+1} < x_n$,
(2) $\|F|[0, \delta_n]\|_\infty < \frac{1}{2^n}$,

wobei F wieder die Funktion aus Beispiel (3.3.2) sei. Nun definieren wir Funktionen $F_n : J \to \mathbf{R}$ durch

$$F_n(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x < x_n \\ F(x - x_n) & \text{für } x_n \leq x \leq x_n + \delta_n \\ F(\delta_n) & \text{für } x > x_n + \delta_n \ . \end{cases}$$

Die F_n sind stetig und mit Ausnahme der Punkte $x_n, x_n + \delta_n$ überall differenzierbar. Es ist $\|F_n\|_\infty < \frac{1}{2^n}$ wegen (2) und $F_n(a) = 0, F_n(b) = F(\delta_n)$ existieren. Somit ist auch

$$F_0 := \sum_1^\infty F_n$$

stetig (als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen) und $F_0(a) = 0, F_0(b)$ existieren. Wir haben es so eingerichtet, daß F_0 b.ü. differenzierbar ist: F_0 ist höchstens in a sowie in den $x_n, x_n + \delta_n$ nicht differenzierbar, denn in allen anderen Punkten gibt es eine Umgebung, über der entweder F_0 konstant ist, oder aber bis auf eine additive Konstante mit einem der F_n übereinstimmt. F_0 ist also ω-Stamm einer Funktion $f \in \mathcal{E}_\omega$ so daß $F_0' = f$ b.ü. Insbesondere stimmt F_0 über jedem $[x_n, x_n + \delta_n]$ bis auf eine additive Konstante mit F_n überein, also

$$f = F_0' = F_n' \qquad \text{b.ü. auf } [x_n, x_n + \delta_n] \ .$$

Angenommen $f \in \mathcal{L}_f^1$. Dann gibt es ein $g \in \mathcal{E}_f$ mit $\|f - g\| < 1$. Ist G ein f-Stamm zu g, so muß G in einem der x_n differenzierbar sein. Nach Beispiel (3.3.2) ist jedoch

$$\|(f-g)|[x_n, x_n + \delta_n]\| = \|(F_n' - G')|[x_n, x_n + \delta_n]\| = \infty \ ,$$

da $f = F_0' = F_n'$ für $x_n \leq x \leq x_n + \delta_n$ und da F_n in diesem Bereich nur ein Translat von F ist. Erst recht ist dann $\|f - g\| = \infty$, ein Widerspruch. Es kann also doch nicht $f \in \mathcal{L}_f^1$ sein, d.h. $f \in \mathcal{E}_\omega \setminus \mathcal{L}_f^1$, wie gewünscht $\diamondsuit$

Damit ist nun endgültig gezeigt, daß die Inklusionkette

$$\mathcal{L}_L^1 \subset \mathcal{L}_N^1 \subset \mathcal{L}_f^1 \subset \mathcal{L}_\omega^1$$

echt ist.

(3.3.4) BEISPIEL. *$\mathcal{L}_\omega^1, \mathcal{L}_f^1, \mathcal{L}_N^1$ sind keine Verbände. Die Grundräume $\mathcal{E}_\omega, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_N$ sind nicht einmal I-approximative Verbände.*

BEWEIS: Wir nehmen hierzu wieder ohne Einschränkung $J = [0,1]$ an und betrachten noch einmal das F aus Beispiel (3.3.1):

$$F(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \ . \end{cases}$$

F ist differenzierbar so daß $f := F' \in \mathcal{E}_N$. Angenommen es gelte $|f| \in (\mathcal{L}_L^1)^+$. Dann wäre $\|f\| < \infty$ also $f \in \mathcal{L}_L^1$ nach (3.2.9),(ii). In (3.3.1) hatten wir jedoch gesehen, daß $f \notin \mathcal{L}_L^1$. Also ist auch

$$|f| \notin (\mathcal{L}_L^1)^+ = (\mathcal{L}_N^1)^+ = (\mathcal{L}_f^1)^+ = (\mathcal{L}_\omega^1)^+ \ .$$

Damit ist gezeigt, daß der Schluß

$$f \in \mathcal{L}_T^1 \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}_T^1 \qquad (T = N, f, \omega)$$

i.A. falsch ist, weshalb $\mathcal{L}_\omega^1, \mathcal{L}_f^1, \mathcal{L}_N^1$ keine Verbände sein können. Wegen (1.1.16) können dann $\mathcal{E}_\omega, \mathcal{E}_f, \mathcal{E}_N$ nicht einmal I-approximative Verbände sein (was natürlich auch anhand konkreter Gegenbeispiele hätte nachgewiesen werden können) $\diamondsuit$

(3.4) Lebesgue-Singularitäten

Wir wollen in diesem Abschnitt diejenigen Punkte einer Funktion untersuchen, wo sie sich in jeder noch so kleinen Umgebung als nicht Lebesgue-integrierbar erweist.

(3.4.1) DEFINITION. *Sei $J \subset \mathbf{R}$ ein Intervall und $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion. Ein Punkt $x \in J$ heißt eine Lebesgue-Singularität von f, wenn*

$$f \notin \mathcal{L}^1_L(J \cap [x-\delta, x+\delta]) \qquad \forall \delta > 0 \, .$$

Die Menge der Lebesgue-Singularitäten von f wird mit $S_L(f;J)$, manchmal auch nur mit $S_L(f)$ oder S_L notiert.

Die folgende Bemerkung ist trivial aber sehr nützlich.

(3.4.2) LEMMA. *Ist J ein Intervall, $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion und $g \in \mathcal{L}^1_L(J)$, so ist*

$$S_L(f;J) = S_L(f+g;J) \, .$$

Wir beschränken uns im Folgenden auf abgeschlossene J, was wegen (3.2.14) keine wesentliche Einschränkung ist.

(3.4.3) THEOREM. *Sei J ein abgeschlossenes Intervall und $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$. Dann ist $S_L(f;J)$ abgeschlossen und nirgends dicht.*

BEWEIS: Anhand der Definition von S_L überlegt man sich sofort, daß $J \setminus S_L$ offen ist (relativ zu J), also ist S_L abgeschlossen relativ zu J, damit aber auch abgeschlossen in $\mathbf{R}$, da J abgeschlossen ist.

Wir können ohne Einschränkung $f \in \mathcal{E}_\omega$ annehmen: Sonst gibt es eine Zerlegung

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L$$

und wir könnten wegen (3.4.2) auch $S_L(g) = S_L(f)$ untersuchen.

Sei also $f \in \mathcal{E}_\omega$ und F ein ω-Stamm von f den wir uns über die rechte Ecke von J hinaus stetig fortgesetzt denken. Angenommen nun S_L wäre nicht nirgends-dicht, also $\overset{\circ}{S}_L \neq \emptyset$. Dann existiert ein, sagen wir kompaktes, nicht-entartetes $J_0 \subset S_L$. Sei

$$A := \{x \in J_0 |\ F'(x) \text{ existiert nicht oder } F'(x) \neq f(x)\} \, .$$

A ist höchstens abzählbar. Definiere ferner für natürliche m, n:

$$M_{m,n} := \bigcap_{k=m}^{\infty} \left\{ x \in J_0 \mid \left| \frac{F(x+\frac{1}{k}) - F(x)}{\frac{1}{k}} \right| \leq n \right\} .$$

Da F stetig und da der Durchschnitt abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen ist, ist jedes $M_{m,n}$ abgeschlossen. Wir haben ferner die abzählbare Vereinigung

$$J_0 = \bigcup_{m,n} M_{m,n} \cup \bigcup_{a \in A} \{a\} . \tag{1}$$

Ist nämlich $x \in J_0$ und $x \notin A$, so existiert $F'(x) = f(x)$. Ist etwa $|f(x)| \leq n-1$ so gilt offenbar $x \in M_{m,n}$ für ein hinreichend großes m.

Auf den vollständigen metrischen Raum J_0 können wir nun wegen (1) den Baireschen Kategoriensatz anwenden (siehe z.B. [**12**] , Kapitel I, §4): Es gibt ein nicht-entartetes Intervall $J_1 \subset J_0$ und Indices m, n mit $J_1 \subset M_{m,n}$. Daraus folgt

$$|f(x)| = |F'(x)| \leq n \quad \text{b.ü. auf } J_1 .$$

Da f meßbar (siehe (3.2.8)) und auf J_1 b.ü. durch n beschränkt ist, gilt sicher $f \in \mathcal{L}^1_L(J)$. Ist daher $x \in \overset{\circ}{J}_1 \subset J_0 \subset S_L$ so ist x sicher keine Lebesgue-Singularität von f, ein Widerspruch zu $x \in S_L$. Also kann S_L doch kein nicht-entartetes Intervall enthalten: $\overset{\circ}{S}_L = \emptyset$, wie gewünscht $\diamondsuit$

In den in (3.3) angegebenen Beispielen war S_L stets höchstens abzählbar. Der letzte Satz hat nun gezeigt, daß $S_L(f)$ $(f \in \mathcal{L}^1_\omega)$ im topologischen Sinne immer eine "dünne" Menge sein muß. Im Maß-theoretischen Sinne ist das ganz anders, wie Beispiel (3.4.6) zeigen wird. Hierfür brauchen wir aber noch einige Vorbereitungen.

(3.4.4) LEMMA. *Seien $a < b$ aus $\mathbf{R}$. Es gibt eine stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *F ist differenzierbar, sogar stetig differenzierbar auf $[a,b]$.*
(ii) $F(b) = F'(b) = 0$.
(iii) $S_L(F'; [a,b]) = \{a\}$.
(iv) $|F(x)| \leq (x-a)^2 \qquad \forall x \in [a,b]$.

BEWEIS: Sei ohne Einschränkung $[a,b] = [0,1]$. Sei wieder wie in (3.3.1)

$$F_0(x) := \begin{cases} x^2 \cos \frac{\pi}{x^2} & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases} .$$

Für F_0 sind sicher (i) und (iv) erfüllt. Bekanntlich gibt es ein stetig differenzierbares $\psi : [0,1] \to \mathbf{R}$ mit $0 \leq \psi \leq 1, \psi = 1$ in einer Umgebung von 0 und $\psi = 0$ in

einer Umgebung von 1. Für $F := F_0\psi$ gelten dann offenbar (i),(ii) und (iv). Da F über $(0,1]$ stetig differenzierbar ist, gehören sicher keine $x \in (0,1]$ zu $S_L(F',[0,1])$. Wäre nun $F' \in \mathcal{L}^1_L[0,\delta]$ für ein $\delta > 0$ so wäre

$$F(x) = \int_0^x F'\, dI_N \qquad (x \in [0,\delta])$$

von Beschränkter Variation (siehe (3.2.18). Dies ist indessen nicht der Fall, wie wir in (3.3.1) gesehen haben. Daher ist notwendig 0 eine Lebesgue-Singularität von F und es gilt genau $S_L(F',[0,1]) = \{0\}$. Dies zeigt (iii) und wir sind fertig ◇

(3.4.5) COROLLAR. *Seien $a < b$ aus $\mathbf{R}$. Dann existiert eine stetige Funktion $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(i) *F ist differenzierbar, sogar stetig differenzierbar auf (a,b).*
(ii) $S_L(F',[a,b]) = \{a,b\}$.
(iii) $|F(x)| \leq \min\{(x-a)^2,(x-b)^2\} \qquad \forall x \in [a,b]$.

BEWEIS: Sei $c := \frac{1}{2}(a+b)$. Mit Hilfe des letzten Lemmas verschafft man sich leicht stetige $F_1 : [a,c] \to \mathbf{R}, F_2 : [c,b] \to \mathbf{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) F_1 (F_2) ist differenzierbar, sogar stetig differenzierbar auf $(a,c]$ (auf $[c,b)$).
(2) $F_1(c) = F_2(c) = 0$, $F_1'(c) = F_2'(c) = 0$.
(3) $S_L(F_1';[a,c]) = \{a\}$, $S_L(F_2',[c,b]) = \{b\}$.
(4) $|F_1(x)| \leq (x-a)^2$ $(x \in [a,c])$, $|F_2(x)| \leq (x-b)^2$ $(x \in [c,b])$.

Dann leistet offensichtlich

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x) & \text{für } x \in [a,c] \\ F_2(x) & \text{für } x \in [c,b] \end{cases}$$

das gewünschte ◇

(3.4.6) SATZ. *Sei $0 < \epsilon < 1$. Dann existiert eine Funktion $f \in \mathcal{E}_N[0,1]$ mit*

$$\lambda(S_L(f;[0,1])) = 1 - \epsilon\ .$$

BEWEIS: Sei $K \subset [0,1]$ eine Cantor-Menge von positivem Maß $\lambda(K) = 1-\epsilon$. Ihr Komplement $[0,1] \setminus K$ zerfällt dann in abzählbar viele, paarweise disjunkte, offene Intervalle $J_n = (a_n, b_n)$. Wir definieren nun den N-Stamm F des gesuchten $f \in \mathcal{E}_N[0,1]$. Seien hierzu $F_n : [a_n,b_n] \to \mathbf{R}$ so gewählt, daß sie die Eigenschaften (3.4.5),(i),(ii),(iii) mit a_n, b_n an Stelle von a, b besitzen. Setze

$$F(x) := \begin{cases} F_n(x) & \text{für } x \in [a_n,b_n] \\ 0 & \text{für } x \in K \quad . \end{cases}$$

Über jedem (a_n, b_n) ist $F = F_n$ differenzierbar.

Sei nun $x \in K \setminus \{1\}$ und $h > 0$. Wir behaupten zunächst,daß

$$|F(x+h)| \leq h^2 \ . \tag{1}$$

Dies ist klar falls $x + h \in K$, da dann $F(x + h) = 0$. Ansonsten ist $x + h \in J_n$ für ein n und wir haben $x \leq a_n < x + h < b_n$. Wegen (3.4.5),(iii) ist aber

$$|F(x+h)| = |F_n(x+h)| \leq (x + h - a_n)^2 \leq h^2 \ ,$$

wie gewünscht. Wegen $F(x) = 0$ folgt daher aus (1)

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| \leq h$$

für $h > 0$, also $F'_+(x) = 0$, $\forall x \in K \setminus \{1\}$. Analog zeigt man $F'_-(x) = 0$, $\forall x \in K \setminus \{0\}$. Damit ist gezeigt, daß F auf ganz $[0,1]$ differenzierbar, insbesondere also auch stetig ist. Sei $f := F' \in \mathcal{E}_N[0,1]$. Nach (3.4.5),(ii) ist $S_L(f;[a_n,b_n]) = S_L(F'_n,[a_n,b_n]) = \{a_n, b_n\}$, woraus man leicht $S_L(f;[0,1]) = K$ schließt: Die Inklusion $S_L \subset K$ ist klar, da keine Punkte der J_n zu S_L gehören können; umgekehrt gehören alle a_n, b_n zu S_L, also ganz K, da S_L abgeschlossen und die a_n, b_n (per constructionem der Cantor-Menge) dicht in K liegen.
Damit ist alles gezeigt $\diamondsuit$

Mit einem Kompaktheitsargument kann man für kompakte Intervalle J leicht schließen:

$$S_L(f;J) = \emptyset \ \Rightarrow \ f \in \mathcal{L}^1_L(J) \ .$$

Man beachte daß dies nicht mehr unbedingt gilt, wenn J nicht kompakt ist: Dann kann sehr wohl $S_L(f;J) = \emptyset$ gelten, aber f kann in einer nicht zu J gehörenden Ecke ein uneigentliches Verhalten haben, so daß$f \notin \mathcal{L}^1_L(J)$.

Der nun folgende Satz erscheint zunächst klar; eine genauere Untersuchung des Problems zeigt jedoch, daß er alles andere als trivial ist. Wir werden diesen Satz später noch benötigen.

(3.4.7) SATZ. *Sei J ein abgeschlossenes Intervall und $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J) \setminus \mathcal{L}^1_L(J)$. Dann gilt für $S_L := S_L(f;J)$:*

$$\int\limits_{J \setminus S_L} |f| \, d\lambda = \infty \ .$$

BEWEIS: Beachte zunächst, daß f meßbar ist, und daß $\|f\| = \infty$ (siehe (3.2.9)). Ist nun $S_L = \emptyset$ so haben wir sofort die Behauptung, da dann

$$\int\limits_{J \setminus S_L} |f| \, d\lambda = \int\limits_J |f| \, d\lambda = \|f\| = \infty \ .$$

Sei also $S_L \neq \emptyset$. Wir wissen schon, daß S_L abgeschlossen ist. Wir nehmen an, daß

$$\text{(A)} \qquad \int_{J \setminus S_L} |f| \, d\lambda < \infty$$

und werden diese Annahme zum Widerspruch führen.

Zunächst zeigen wir, daß S_L perfekt ist, d.h. keine isolierten Punkte enthält. Wäre nämlich $c \in S_L$ ein isolierter Punkt von S_L, so wäre $[c-\delta, c+\delta] \cap S_L = \{c\}$ für ein geeignetes $\delta > 0$. In diesem Falle wäre

$$\int_{[c-\delta,c+\delta]\cap J} |f| \, d\lambda \leq \int_{J \setminus S_L} |f| \, d\lambda < \infty \Rightarrow$$

$$f \in \mathcal{L}^1_L[c-\delta, c+\delta] \, ,$$

ein Widerspruch zu $c \in S_L$; also ist S_L perfekt.

Wir können nun wieder $f \in \mathcal{E}_\omega$ annehmen, mit derselben Begründung wie im Beweis von (3.4.3). Ist nun F ein ω-Stamm von f so bilden wir wie dort das abzählbare

$$A := \{x \in S_L |\ F'(x) \text{ existiert nicht oder } F'(x) \neq f(x)\}$$

sowie die Mengen

$$M_{m,n} := \bigcap_{k=m}^{\infty} \left\{ x \in S_L |\ \left| \frac{F(x+\frac{1}{k}) - F(x)}{\frac{1}{k}} \right| \leq n \right\} \, .$$

Mit völlig analogen Argumenten wie im Beweis von (3.4.3) zeigt man die Abgeschlossenheit der $M_{m,n}$ und die Beziehung

$$\text{(1)} \qquad S_L = \bigcup_{m,n} M_{m,n} \cup \bigcup_{a \in A} \{a\} \, .$$

Wendet man nun den Baireschen Kategoriensatz auf den vollständigen metrischen Raum S_L an, so erhalten wir die Existenz von $\alpha < \beta$ aus J mit

$$\text{(2)} \qquad \emptyset \neq (\alpha, \beta) \cap S_L \subset M_{m,n}$$

für geeignete m, n, oder aber

$$\emptyset \neq (\alpha, \beta) \cap S_L \subset \{a\}$$

für ein $a \in A$; letzteres ist jedoch unmöglich, da S_L, wie oben gezeigt, keine isolierten Punkte enthält. Also gilt (2). Auf $(\alpha, \beta) \cap S_L$ ist dann aber sicher $|f(x)| = |F'(x)| \leq n$ b.ü. Ist daher $c \in (\alpha, \beta) \cap S_L$ so hat man

$$\int_\alpha^\beta |f| \, d\lambda = \int_{[\alpha,\beta]\cap S_L} |f| \, d\lambda + \int_{[\alpha,\beta]\setminus S_L} |f| \, d\lambda$$

$$\leq n(\beta - \alpha) + \int_{J \setminus S_L} |f| \, d\lambda < \infty$$

gemäß Annahme (A). Dann wäre aber $f \in \mathcal{L}_L^1[\alpha, \beta]$, ein Widerspruch zu $c \in S_L$. Daher muß die Ausgangsannahme (A) falsch sein und wir sind fertig $\diamondsuit$

(4) Faltungen, Distributionen, Fourier-Reihen und Fourier-Transformationen über $\mathcal{L}^1_\omega$

(4.1) Faltungen

Ist eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ gegeben, für welche Funktionen g ist dann wieder $fg \in \mathcal{L}^1_\omega$?

Wir wollen diese Frage nicht eingehender untersuchen, sondern nur eine für unser Vorhaben ausreichende Teilantwort geben. Der an weiteren Einzelheiten interessierte Leser sei auf [**14**] , besonders jedoch auf [**13**] verwiesen, wo diese Frage im allgemeineren Zusammenhang mit dem Denjoy-Integral besprochen wird.

Wir machen von nun an ohne besonderen Hinweis oft von (3.2.9) und (3.2.10) Gebrauch.

(4.1.1) LEMMA. *Sei J ein Intervall und $g \in \mathcal{C}^1_c(J)$.*

(i) *Ist $f \in \mathcal{E}_\omega(J)$ und F ein ω-Stamm f, so ist $fg \in \mathcal{E}_\omega(J)$ und mit einem $c \in J$ ist*

$$H(x) := F(x)g(x) - \int_c^x F(t)g'(t)\,dt \qquad (x \in J)$$

ein ω-Stamm von fg.

(ii) *Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$ so auch fg.*

BEWEIS: Für (i) ist wirklich nur nachzuprüfen, daß H ein ω-Stamm von fg ist, was unter den gegebenen Voraussetzungen keinerlei Schwierigkeiten macht.

Für (ii) betrachte man eine Zerlegung

$$f = g_0 + h \qquad g_0 \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L \ .$$

Bekanntlich ist dann $hg \in \mathcal{L}^1_L$; nach Teil (i) ist $g_0 g \in \mathcal{E}_\omega$ also insgesamt

$$fg = g_0 g + hg \in \mathcal{L}^1_\omega \quad \diamond$$

Im Folgenden sei nun stets $J = \mathbf{R}$. Bevor wir sogleich Faltungen definieren und untersuchen, wollen wir uns davon überzeugen, daß es i.**A**. nicht mehr sinnvoll ist zwei beliebige Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^1_\omega$ zu falten.

(4.1.2) BEISPIEL. *Es gibt Funktionen aus $\mathcal{L}^1_\omega$ für die eine Faltung nicht mehr sinnvoll ist.*

NACHWEIS: Definiere $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & n-1 \le x < n \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}.$$

Man mache sich den Verlauf von f klar. Offenbar ist f uneigentlich über $\mathbf{R}$ integrierbar und dasselbe gilt für $g(x) := f(-x)$. Nach (3.2.16) sind $f, g \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R})$. Vernünftigerweise wird man nun für die Existenz des Faltungsproduktes $f * g$ fordern, daß die Funktion

$$h_y(x) := f(x)g(y-x) = f(x)f(x-y)$$

zumindest für, sagen wir fast alle $y \in \mathbf{R}$ integrierbar ist, also etwa

$$h_y \in \mathcal{L}^1_\omega \quad \text{für fast alle } y \in \mathbf{R}\,.$$

Nun zeigt aber eine elementare Rechnung, daß z.B. für $y \in [0, \frac{1}{4}]$ gilt: $h_y(x) = 0$, für $x < 0$ und

$$\begin{aligned} \int_0^n h_y(t)\,dt &= (1-y)(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \\ &\quad - y(\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{(n-1)n}}) \\ &\ge (1-y)(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) \\ &\quad - y(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}) \\ &\ge \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}) \to \infty\,, \end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Mit Blick auf (3.2.16) bedeutet dies aber $h_y \notin \mathcal{L}^1_\omega$, für $y \in [0, \frac{1}{4}]$ $\diamondsuit$

Wir wollen uns aus diesen Gründen auf eine unproblematische Art von Faltungen beschränken, werden später jedoch noch Faltungen zwischen Funktionen aus $\mathcal{L}^1_\omega$ und $\mathcal{L}^1_L$ erklären (Abschnitt (4.2)).

Es wird praktisch sein, nun auch die Schreibweise

$$\int f(t)\,dI_\omega(t) := \int f\,dI_\omega \qquad (f \in \mathcal{L}^1_\omega)$$

zuzulassen, um die Integrationsvariable hervorzuheben.

(4.1.3) DEFINITION. *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}), g \in \mathcal{C}^1_c(\mathbf{R})$, *so ist die Faltung* $f * g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *erklärt durch*

$$f * g(x) := \int f(y)g(x-y)\, dI_\omega(y) \qquad (x \in \mathbf{R}) .$$

Nach (4.1.1),(ii) ist diese Definition sinnvoll, da mit g für jedes x auch $y \mapsto g(x-y)$ eine Funktion aus $\mathcal{C}^1_c$ darstellt.

Bekanntlich folgt aus $f, g \in \mathcal{L}^1_L$ auch $f * g \in \mathcal{L}^1_L$ (siehe etwa [**16**] , §7). In unserem Falle haben wir:

(4.1.4) SATZ. *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}), g \in \mathcal{C}^1_c(\mathbf{R})$, *so ist* $f * g$ *stetig und liegt in* $\mathcal{E}_N(\mathbf{R})$.

BEWEIS: Wir zerlegen f in

$$f = u + h \qquad u \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L ,$$

und betrachten dann u und h getrennt.

Zunächst zu h. Wir können ohne Einschränkung h reellwertig annehmen. Betrachte dann

$$h * g(x) = \int h(y)g(x-y)\, dy .$$

Sei $x_0 \in \mathbf{R}$ und (x_n) eine Folge mit $x_n \to x_0$. Sei

$$u_n(y) := h(y)g(x_n - y) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Dann gilt $u_n \in \mathcal{L}^1_L$ (siehe z.B. [**16**] , §6). Da $u_n \to u_0$ und da $|u_n| \leq |h| \cdot \|g\|_\infty$ folgt mit dem Satz über die majorisierte Konvergenz:

$$h * g(x_n) = \int u_n(y)\, dy \to \int u_0(y)\, dy = h * g(x_0) ,$$

für $n \to \infty$. Dies zeigt die Stetigkeit von $h * g$. Somit muß

$$T_1(x) := \int_0^x h * g(t)\, dt$$

(stetig) differenzierbar sein mit $T_1' = h * g$. Wie bereits oben bemerkt ist $h * g \in \mathcal{L}^1_L$ (da $h, g \in \mathcal{L}^1_L$) so daß

$$T_1(\infty) = \int_0^\infty h * g(t)\, dt = \lim_{K \to \infty} \int_0^K h * g(t)\, dt$$

existiert. Analog existiert $T_1(-\infty)$; also ist T_1 ein N-Stamm von $h * g$ so daß $h * g \in \mathcal{E}_N$.

Nun müssen wir

$$u * g(x) = \int u(y)g(x-y)\, dI_\omega(y)$$

betrachten. Nach (4.1.1) ist die Funktion $y \mapsto u(y)g(x-y)$ aus $\mathcal{E}_\omega$ und hat den ω-Stamm

$$H_x(y) := U(y)g(x-y) + \int_0^y U(t)g'(x-t)\, dt\ ,$$

wenn U ein ω-Stamm zu u ist. Also ist

$$u * g(x) = H_x(\infty) - H_x(-\infty) = \int U(t)g'(x-t)\, dt\ .$$

Wir zeigen, daß auch $u*g$ stetig ist. Da $U(\infty), U(-\infty)$ existieren, muß $\|U\|_\infty < \infty$ sein. Der kompakte Träger von g und g' möge in einem Intervall der Länge L enthalten sein. Da g' gleichmäßig stetig ist, gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so daß für $x, x_0 \in \mathbf{R}$ gilt:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |g'(x) - g'(x_0)| < \epsilon_0 := \frac{\epsilon}{\|U\|_\infty (L+1) + 1}\ .$$

Für $|x - x_0| < \min\{\delta, 1\}$ ist dann aber offenbar

$$\begin{aligned} |u * g(x) - u * g(x_0)| &\le \int |U(t)| \cdot |g'(x-t) - g'(x_0 - t)|\, dt \\ &\le \|U\|_\infty \int |g'(x-t) - g'(x_0-t)|\, dt \\ &\le \|U\|_\infty (L+1)\epsilon_0 \le \epsilon\ . \end{aligned}$$

Also ist $u * g$ stetig und

$$T_2(x) := \int_0^x u * g(t)\, dt$$

ist (stetig) differenzierbar mit $T_2' = u * g$. Ist etwa $Tr(g) \subset [-R, R]$, so beachte man, daß $U(t)g'(x-t)$ für $x \in [0, K]$ und $|t| > K + R$ verschwindet. Für die Berechnung von

$$T_2(K) = \int_0^K \left[\int U(t)g'(x-t)\, dt \right] dx$$

wird also eigentlich nur über das Rechteck

$$(x, t) \in [0, K] \times [-(K+R), K+R]$$

integriert. Wir können daher auf den stetigen Integranden getrost den Satz von Fubini anwenden und erhalten

$$T_2(K) = \int U(t) \left[\int_0^K g'(x-t)\, dx \right] dt$$
$$= \int U(t) g(K-t)\, dt - \int U(t) g(-t)\, dt \ .$$

Der zweite Term ist eine Konstante und der erste geht, wegen der Existenz von $U(\infty)$, gegen

$$U(\infty) \int g(-t)\, dt = U(\infty) \int g(t)\, dt \ ,$$

für $K \to \infty$, wie man sich sehr leicht überlegt. Also existiert $T_2(\infty)$ und analog auch $T_2(-\infty)$. Es folgt also auch in diesem Falle $u * g = T_2' \in \mathcal{E}_N$ und wir sind fertig $\diamondsuit$

Für eine Funktion $f : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}$ und $\lambda > 0$ definiert man f_λ durch

$$f_\lambda(x) := \frac{1}{\lambda} f(\frac{x}{\lambda}) \ .$$

Ist $f \in \mathcal{L}_L^1$ und $\lambda > 0$ so ist auch $f_\lambda \in \mathcal{L}_L^1$ und es gilt

$$\int f_\lambda(x)\, dx = \int f(x)\, dx \ .$$

Man kann zeigen (siehe z.B. [**16**] , §10, Satz 4 und §12, Lemma 1):

(4.1.5) SATZ. *Sei $p \in \mathcal{L}_L^1(\mathbf{R})$ und $\int p(x)\, dx = 1$.*
(i) *Für alle $f \in \mathcal{L}_L^1(\mathbf{R})$ gilt*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|f - f * p_\lambda\| = 0 \ .$$

(ii) *Für alle $f \in \mathcal{L}_L^1(\mathbf{R})$ gibt es eine Folge (λ_n) mit $\lambda_n \downarrow 0$ und*

$$\lim_{n \to \infty} f * p_{\lambda_n}(x) = f(x) \qquad \text{f.ü.}$$

(4.1.6) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{E}_\omega(\mathbf{R})$ ($f \in \mathcal{L}_L^1(\mathbf{R})$), F ein ω-Stamm (ein unbestimmtes Integral) von f sowie $p \in \mathcal{C}_c^1(\mathbf{R})$ mit $\int p(x)\, dx = 1$. Dann gilt*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} f * p_\lambda(x) = f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbf{R} \text{ wo } F'(x) = f(x) \ .$$

Diese Beziehung gilt somit b.ü. (f.ü.) auf $\mathbf{R}$.

BEWEIS: Wir zeigen zunächst, daß in jedem Falle ($f \in \mathcal{E}_\omega$ oder $f \in \mathcal{L}^1_L$) die Formel

$$\text{(A)} \qquad f * p_\lambda(x) = \int F(x-t)p'_\lambda(t)\,dt \qquad (x \in \mathbf{R})$$

gültig ist. Ist nämlich $f \in \mathcal{E}_\omega$, so ist nach (4.1.1),(i) die Funktion $y \mapsto f(y)p_\lambda(x-y)$ in $\mathcal{E}_\omega$ und hat den ω-Stamm

$$H_x(y) := F(y)p_\lambda(x-y) + \int_0^y F(t)p'_\lambda(x-t)\,dt\,,$$

so daß

$$\begin{aligned} f * p_\lambda(x) = H_x(\infty) - H_x(-\infty) &= \int F(t)p'_\lambda(x-t)\,dt \\ &= \int F(x-t)p'_\lambda(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Ist hingegen $f \in \mathcal{L}^1_L$, so ist wohlbekannt, daß für $a < b$ aus $\mathbf{R}$

$$\int_a^b f(t)p_\lambda(x-t)\,dt = F(b)p_\lambda(x-b) - F(a)p_\lambda(x-a) + \int_a^b F(t)p'_\lambda(x-t)\,dt\,,$$

siehe etwa [**4**] , Theorem (18.19). Da p_λ kompakten Träger hat folgt dann für $a \to -\infty, b \to \infty$:

$$\begin{aligned} f * p_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)p_\lambda(x-t)\,dt &= \int F(t)p'_\lambda(x-t)\,dt \\ &= \int F(x-t)p_\lambda(t)\,dt\,. \end{aligned}$$

Also gilt auch in diesem Falle (A).
Ab jetzt können wir die Fälle $f \in \mathcal{E}_\omega$ und $f \in \mathcal{L}^1_L$ simultan behandeln. Sei dann also $x \in \mathbf{R}$ und F differenzierbar in x mit $F'(x) = f(x)$. Für $t \in \mathbf{R}$ sei

$$\psi(t) := \begin{cases} \frac{F(x)-F(x-t)}{t} - f(x) & t \neq 0 \\ 0 & t = 0 \end{cases}\,.$$

Da $F'(x) = f(x)$ ist ψ stetig auf ganz $\mathbf{R}$. Da $F(\infty)$ und $F(-\infty)$ existieren ist ψ offenbar auch beschränkt: $\|\psi\|_\infty < \infty$. Außerdem gilt:

$$F(x-t) = F(x) + (-t)(f(x) + \psi(t)) \qquad \forall t \in \mathbf{R}\,.$$

Setzt man dies in die Darstellung (A) von $f * p_\lambda$ ein, so erhält man

$$
\begin{aligned}
f * p_\lambda(x) &= T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) \qquad \text{mit} \\
T_1(x) &= F(x) \int p'_\lambda(t)\, dt\,, \\
T_2(x) &= f(x) \int (-t) p'_\lambda(t)\, dt\,, \\
T_3(x) &= \int (-t)\psi(t) p'_\lambda(t)\, dt\,.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Offenbar ist $T_1(x) = 0$. Für $T_2(x)$ erhält man mit partieller Integration

$$
\begin{aligned}
T_2(x) &= -f(x) \int_{-\infty}^{\infty} t p'_\lambda(t)\, dt \\
&= -f(x) \left\{ [t p_\lambda(t)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} p_\lambda(t)\, dt \right\} \\
&= f(x)\,,
\end{aligned}
$$

da der erste Term in der Klammer verschwindet und da $\int p_\lambda(t)\, dt = \int p(t)\, dt = 1$. Sei $q(x) := xp'(x)$. Man rechnet leicht nach, daß $tp'_\lambda(t) = q_\lambda(t)$ so daß für $T_3(x)$ gilt:

$$
T_3(x) = -\int \psi(t) t p'_\lambda(t)\, dt = -\int \psi(t) q_\lambda(t)\, dt\,.
$$

Ist etwa $Tr(q) \subset [-K, K]$ $(K > 0)$, so ist offenbar $Tr(q_\lambda) \subset [-\lambda K, \lambda K]$, also

$$
\begin{aligned}
|T_3(x)| &= \left| \int_{-\lambda K}^{\lambda K} \psi(t) q_\lambda(t)\, dt \right| \\
&\leq \sup_{-\lambda K \leq t \leq \lambda K} |\psi(t)| \cdot \int |q_\lambda(t)|\, dt\,,
\end{aligned}
$$

Wegen $|q_\lambda| = |q|_\lambda$ bedeutet dies

$$
|T_3(x)| \leq \sup_{-\lambda K \leq t \leq \lambda K} |\psi(t)| \cdot \int |q(t)|\, dt\,.
$$

Da $\psi(0) = 0$ und da ψ stetig in 0 folgt für $\lambda \downarrow 0$:

$$
\sup_{-\lambda K \leq t \leq \lambda K} |\psi(t)| \to 0 \;\Rightarrow\; T_3(x) \to 0\,.
$$

Faßt man die Ergebnisse für $T_1(x), T_2(x), T_3(x)$ in (1) zusammen so erhält man also

$$f * p_\lambda(x) = T_1(x) + T_2(x) + T_3(x) \to f(x) ,$$

für $\lambda \downarrow 0$. Da $F'(x) = f(x)$ b.ü. (f.ü.), gilt dies dann b.ü. (f.ü.) auf $\mathbf{R}$ $\diamondsuit$

Da man jedes $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ in

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L$$

zerlegen kann, hat man als Konsequenz des letzten Satzes

(4.1.7) COROLLAR. *Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R})$ und $p \in \mathcal{C}^1_c(\mathbf{R})$ mit $\int p(x)\,dx = 1$, so gilt:*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} f * p_\lambda(x) = f(x) \qquad \text{für fast alle } x \in \mathbf{R} .$$

Man beachte den Unterschied zu (4.1.5),(ii), der letztendlich von der Glattheitsforderung an p herrührt.

Wie aber sieht es mit einem Analogon zu (4.1.5),(i) aus? Wir wollen uns kurz fassen. Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega \setminus \mathcal{L}^1_L$ so unterscheiden wir zwei Fälle.

1. FALL. $S_L(f;\mathbf{R}) \neq \emptyset$.

Dann gibt es $a < b$ aus $\mathbf{R}$, so daß (a,b) wenigstens eine Lebesgue-Singularität von f enthält, d.h. $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b] - \mathcal{L}^1_L[a,b]$. Nach (4.1.4) ist $f * p_\lambda$ stetig, also in $\mathcal{L}^1_L[a,b]$. Daher ist notwendig $f - f * p_\lambda \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b] - \mathcal{L}^1_L[a,b]$ und folglich

$$\|f - f * p_\lambda\| = \infty ,$$

also gilt nicht $\|f - f * p_\lambda\| \to 0$.

2. FALL. $S_L(f;\mathbf{R}) = \emptyset$.

Dann ist f lokal Lebesgue-integrierbar und man findet in $\mathcal{L}^1_\omega - \mathcal{L}^1_L$ sowohl Funktionen f für die

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \|f - f * p_\lambda\| = 0 ,$$

als auch solche für die

$$\|f - f * p_\lambda\| = \infty \qquad \forall \lambda > 0 .$$

Wir wollen es bei dieser Mitteilung belassen und auf die Angabe von Beispielen verzichten.

(4.2) $\mathcal{L}^1_\omega$-Funktionen als Distributionen

Für das Verständniss dieses Abschnittes sind Kenntnisse aus der Theorie der Distributionen wünschenswert. Den adäquaten funktional-analytischen Zugang zu der Materie findet man z.B. in [**8**]. Mit weniger Vorkenntnissen kommt die ausführliche Einführung [**15**] aus. Für eine Abriß der wichtigsten Grundlagen der Theorie, siehe etwa [**16**] , §17.

Wir wollen kurz die für uns wichtigsten Tatsachen zusammenstellen. Wenn nichts anderes gesagt wird, ist das zugrunde liegende Intervall in diesem Abschnitt stets $J = \mathbf{R}$.

Der Raum der Testfunktionen über $\mathbf{R}$ ist nichts anderes als der wohlbekannte Raum $\mathcal{C}_c^\infty = \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$ der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, der aber im Zusammenhang mit Distributionen, aus historischen Gründen, mit $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R})$ notiert wird. Auf $\mathcal{D}$ wird nun -auf nicht ganz einfach zu beschreibende Weise- eine Topologie τ eingeführt, bzgl. der sich $\mathcal{D}$ als ein lokalkonvexer, topologischer Vektorraum erweist (siehe [**8**] , 6.3, 6.4). Mit $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ wird der Dualraum von $\mathcal{D}$ bezeichnet, d.h. die Menge der (bzgl. τ) stetigen linearen Abbildungen

$$\Lambda : \mathcal{D} \to \mathbf{R} \ .$$

Die Elemente von $\mathcal{D}'$ nennt man Distributionen oder verallgemeinerte Funktionen. Durch die Definition

$$\|\phi\|_n := \max\{\|\phi^{(i)}\|_\infty |\ i = 0, 1, \ldots, n\} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

wird ein Satz von Normen für Testfunktionen $\phi \in \mathcal{D}$ erklärt (dabei ist $\phi^{(i)}$ die i-te Ableitung von ϕ und $\phi^{(0)} := \phi$). Mit Hilfe dieser Normen läßt sich nun eine wichtige Charakterisierung der Distributionen angeben (siehe etwa [**8**] , 6.8):

(4.2.1) SATZ. *Für ein lineares Funktional $\Lambda : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ ist äquivalent:*

(i) *Λ ist stetig, d.h. $\Lambda \in \mathcal{D}'$.*

(ii) *Zu jedem $K > 0$ gibt es ein $C > 0$ und ein $n \geq 0$ so daßfür alle $\phi \in \mathcal{D}$ gilt:*

$$Tr(\phi) \subset [-K, K] \Rightarrow |\Lambda(\phi)| \leq C\|\phi\|_n \ .$$

Wenn es möglich ist ein von K unabhängiges n zu finden, so daß die Bedingung aus (ii) gilt, dann heißt das kleinste n mit dieser Eigenschaft die Ordnung von Λ und Λ heißt eine Distribution dieser Ordnung (beachte, daß hierbei C nach wie vor von K abhängen darf).

(4.2.2) BEISPIEL. *Jeder lokal Lebesgue-integrierbaren Funktion kann in kanonischer Weise eine Distribution 0-ter Ordnung zugeordnet werden.*

Wir notieren den Raum der lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen mit $\mathcal{L}^1_{L,loc} = \mathcal{L}^1_{L,loc}(\mathbf{R})$.

KONSTRUKTION: Ist $f \in \mathcal{L}^1_{L,loc}$ gegeben, so sei für $\phi \in \mathcal{D}$

$$\Lambda_f(\phi) := \int f(t)\phi(t)\,dt\ .$$

Dadurch wird sicherlich eine lineare Abbildung $\Lambda_f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ definiert. Eine einfache Abschätzung ergibt überdies, daß für alle $\phi \in \mathcal{D}$ gilt:

$$Tr(\phi) \subset [-K, K] \Rightarrow |\Lambda_f(\phi)| \leq \|f|\chi_{[-K,K]}\| \cdot \|\phi\|_0\ ,$$

so daß Λ_f eine Distribution 0-ter Ordnung ist $\diamondsuit$

Analog zu diesem Beispiel wollen wir nun $\mathcal{L}^1_\omega$-Funktionen als Distributionen auffassen.

(4.2.3) DEFINITION. *Für jedes $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ wird durch*

$$\Lambda_f(\phi) := \int f(t)\phi(t)\,dI_\omega(t) \qquad (\phi \in \mathcal{D})$$

eine Distribution $\Lambda_f \in \mathcal{D}$ erklärt.

Nach (4.1.1),(ii) ist Λ_f jedenfalls wohldefiniert. In der Tat ist Λ_f stetig, wir wollen sogar noch ein wenig mehr zeigen:

(4.2.4) SATZ. *Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega$, so ist Λ_f eine Distribution höchstens erster Ordnung.*

BEWEIS: Wir zerlegen f in

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L\ .$$

Dann ist $\Lambda_f = \Lambda_g + \Lambda_h$ und mit Blick auf (4.2.2) genügt es zu zeigen, daß Λ_g von höchstens erster Ordnung ist. Nach (4.1.1),(i) ist $\phi g \in \mathcal{E}_\omega$ und

$$H(x) := G(x)\phi(x) - \int_0^x G(t)\phi'(t)\,dt$$

ist ein ω-Stamm von $g\phi$, wenn G ein ω-Stamm von g ist. Ist nun etwa $K > 0$ so daß $Tr(\phi) \subset [-K, K]$, so hat man

$$\begin{aligned} |\Lambda_g(\phi)| &= \left|\int g(t)\phi(t)\,dt\right| = |H(\infty) - H(-\infty)| \\ &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} G(t)\phi'(t)\,dt\right| \leq \|G\|_\infty \cdot 2K \cdot \|\phi\|_1\ , \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt ◇

Unser Ziel ist es nun diesen Satz wesentlich zu präzisieren.

(4.2.5) THEOREM. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega$. Dann gilt:*
(i) Λ_f *ist von nullter Ordnung* $\Leftrightarrow$ $f \in \mathcal{L}^1_{L,loc}$.
(ii) Λ_f *ist von erster Ordnung* $\Leftrightarrow$ $f \notin \mathcal{L}^1_{L,loc}$.

BEWEIS: Da jedes Λ_f nach (4.2.4) von höchstens erster Ordnung ist, ist (i) eine einfache Konsequenz aus (ii). Es genügt daher (ii) zu zeigen. Wegen (4.2.2) ist hierbei jedoch die Richtung $\Rightarrow$ klar, so daß nur die Richtung $\Leftarrow$ von (ii) zu zeigen bleibt.

Wir geben uns hierfür ein $f \in \mathcal{L}^1_\omega \setminus \mathcal{L}^1_{L,loc}$ vor und müssen zeigen, daß f von erster Ordnung ist.

Wir nehmen an dies sei falsch. Dann muß Λ_f von nullter Ordnung sein, denn es ist ja von höchstens erster Ordnung gemäß (4.2.4). Da $f \notin \mathcal{L}^1_{L,loc}$ muß $S_L = S_L(f;\mathbf{R}) \neq \emptyset$ sein: Wäre nämlich $S_L = \emptyset$ so zeigt ein leichtes Kompaktheitsargument, daß $f \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$, für alle $a < b$ aus $\mathbf{R}$, d.h. doch $f \in \mathcal{L}^1_{L,loc}$. Sei dann $K > 0$ so groß, daß $S_L(f,(-K,K)) = S_L \cap (-K,K) \neq \emptyset$. Da Λ_f von nullter Ordnung ist (Annahme) gibt es ein $C > 0$ so daß für alle $\phi \in \mathcal{D}$ gilt:

$$(1) \qquad Tr(\phi) \subset [-K,K] \Rightarrow |\Lambda_f(\phi)| = \left| \int_{-K}^{K} f(t)\phi(t)\, dI_\omega(t) \right| \leq C\|\phi\|_0 \ .$$

Da f Lebesgue-Singularitäten in (-K,K) besitzt, gilt $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-K,K] \setminus \mathcal{L}^1_L[-K,K]$. Definiert man

$$U := (-K,K) - S_L \ ,$$

so ist U offen und

$$\int_U f^- \, d\lambda + \int_U f^+ \, d\lambda = \int_U |f| \, d\lambda = \infty \ ,$$

nach (3.4.7). Sei etwa $\int_U f^+ \, d\lambda = \infty$ (in Wirklichkeit sind $\int_U f^+ \, d\lambda, \int_U f^- \, d\lambda$ beide $= \infty$ wie man sich leicht überlegt). Da f meßbar ist, ist $M := \{x \in U |\ f(x) \geq 0\}$ eine meßbare Menge. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes λ gibt es eine aufsteigende Folge von Kompakta $L_m \subset M$ mit $\lambda(L_m) \uparrow \lambda(M)$. Sei $E := \bigcup_1^\infty L_m$. Da $f \geq 0$ auf M folgt mit dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\int_{L_m} f \, d\lambda \uparrow \int_E f \, d\lambda = \int_M f \, d\lambda = \int_U f^+ \, d\lambda = \infty$$

(beachte, daß $M \setminus E$ eine Nullmenge ist). Für ein geignetes m und $L := L_m$ gilt daher

$$\int_L f\,d\lambda > C + 2\,. \tag{2}$$

Wegen der Regularität von λ existiert eine absteigende Folge offener Mengen $V_k \supset L$ mit $\lambda(V_k) \downarrow \lambda(L)$. Dabei dürfen wir natürlich $V_k \subset U$ annehmen, sonst gehen wir zu $V_k \cap U$ über. Da das kompakte $L \subset U$ einen positiven Abstand zum Komplement von U hat überlegt man sich leicht, daß man sogar $\overline{V}_1 \subset U$ annehmen kann. In U liegen keine Lebesgue-Singularitäten von f, erst recht also nicht in $\overline{V}_1$. Zu jedem $x \in \overline{V}_1$ gibt es daher eine Umgebung U_x, so daß $f\chi_{U_x} \in \mathcal{L}^1_L$, insbesondere also $\|f\chi_{U_x}\| < \infty$. Bereits endlich viele solcher $U_i := U_{x_i}$ überdecken das kompakte $\overline{V}_1$ so daß

$$\| |f|\chi_{\overline{V}_1} \| \leq \sum_i \|f\chi_{U_i}\| < \infty\,.$$

Da $f\chi_{\overline{V}_1}$ meßbar ist gilt $f\chi_{\overline{V}_1} \in \mathcal{L}^1_L$. Dann sind aber auch die meßbaren $|f|\chi_{V_k \setminus L} \leq |f|\chi_{\overline{V}_1}$ alle in $\mathcal{L}^1_L$. Da mit $H := \bigcap_1^\infty V_k$ die Menge $H \setminus L$ eine Nullmenge ist, folgt mit dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\lim_{k\to\infty} \int |f|\chi_{V_k \setminus L}\,d\lambda = \int |f|\chi_{H\setminus L}\,d\lambda = 0\,.$$

Für ein hinreichend großes k und $V := V_k$ gilt also:

$$\int_{V\setminus L} |f|\,d\lambda < 1\,. \tag{3}$$

Sei nun $\phi \in \mathcal{D}$ so gewählt daß gilt:

$$0 \leq \phi \leq 1\,,\ \phi|L = 1\,,\ Tr(\phi) \subset V\,.$$

Solche ϕ existieren in der Tat, siehe etwa [**16**] , §3. Wir haben jetzt mit den

Ungleichungen (2) und (3):

$$\int_L f\phi\, d\lambda = \int_L f\, d\lambda > C+2 \quad \text{und}$$

$$\left|\int_{V\setminus L} f\phi\, d\lambda\right| \leq \int_{V\setminus L} |f|\, d\lambda < 1 \quad \Rightarrow$$

$$|\Lambda_f(\phi)| = \left|\int_V f\phi\, d\lambda\right|$$

$$= \left|\int_L f\phi\, d\lambda + \int_{V\setminus L} f\phi\, d\lambda\right|$$

$$\geq \left|\int_L f\phi\, d\lambda\right| - \left|\int_{V\setminus L} f\phi\, d\lambda\right|$$

$$> (C+2) - 1 = C+1 = (C+1)\|\phi\|_0\ ,$$

im Widerspruch zu (1). Also muß Λ_f doch von erster Ordung sein und wir sind fertig $\diamondsuit$

Wie im Anschluß an (4.1.2) versprochen, wollen wir nun ein Faltungsprodukt $*$ auf $\mathcal{L}^1_\omega \times \mathcal{L}^1_L$ definieren, wobei wir allerdings als Resultat Distributionen erhalten werden.

Wir benötigen einige Vorbereitungen. Ist $f \in \mathcal{E}_\omega$ und $u \in \mathcal{C}^1_c$, so ist wegen (4.1.1) die Funktion

$$H(y) := F(y)u(x-y) + \int_0^y f(t)u'(x-t)\, dt$$

ein ω-Stamm zu $y \mapsto f(y)u(x-y)$, wenn F ein ω-Stamm zu F ist. Man hat daher

$$f * u(x) = \int f(y)u(x-y)\, dI_\omega(y) = H(\infty) - H(-\infty)$$

$$= \int F(t)u'(x-t)\, dt$$

wovon wir im Folgenden, auch in den folgenden Abschnitten, noch oft Gebrauch machen werden.

(4.2.6) LEMMA. *Seien* $u, v \in \mathcal{C}_c^1$.

(i) *Ist* $f \in \mathcal{L}_L^1$ *so gilt*

$$\left| \int f * u(x)v(x)\,dx \right| \leq \|f\| \cdot \|u\| \cdot \|v\|_\infty \ .$$

(ii) *Zu* $f \in \mathcal{E}_\omega$ *gibt es ein* $C > 0$ *(das nur von* f *abhängt) so daß*

$$\left| \int f * u(x)v(x)\,dx \right| \leq C\|u\| \cdot \|v'\| \ .$$

BEWEIS: Beachte, daß $f * u$ stetig ist (siehe (4.1.4).

Zu (i): Allgemein gilt $\|f * g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ für $f, g \in \mathcal{L}_L^1$ (siehe etwa [**16**] , §7). In unserem Fall bedeutet das

$$\begin{aligned} \left| \int f * u(x)v(x)\,dx \right| &\leq \|v\|_\infty \int |f * u(x)|\,dx \\ &= \|v\|_\infty \|f * u\| \leq \|v\|_\infty \|f\| \cdot \|u\| \ . \end{aligned}$$

Zu (ii): Ist F ein ω-Stamm zu f, so ist, wie bereits unten bemerkt,

$$f * u(x) = \int F(y)u'(x-y)\,dy \ .$$

Es folgt

$$\left| \int f * u(x)v(x)\,dx \right| = \left| \int \left[\int F(y)u'(x-y)\,dy \right] v(x)\,dx \right| \ .$$

Ist nun etwa $L > 0$ so groß, daß $Tr(u), Tr(v) \subset [-L, L]$, so sieht man, daß im letzten Integral eigentlich nur über das Rechteck

$$(x, y) \in [-L, L] \times [-2L, 2L]$$

integriert wird. Da der Integrand stetig ist, kann man bedenkenlos Fubinis Satz anwenden und weiter schreiben

$$\left| \int f * u(x)v(x)\,dx \right| = \left| \int F(y) \left[\int u'(x-y)v(x)\,dx \right] dy \right| \ ;$$

mit partieller Integration kann man das innere Integral umschreiben und erhält

$$= \left| \int F(y) \left[\int u(x-y)v'(x)\,dx \right] dy \right|$$

und indem man abermals Fubinis Satz anwendet ist dies

$$\begin{aligned} &= \left| \int \left[\int u(x-y)F(y)\,dy \right] v'(x)\,dx \right| \\ &\leq \|F\|_\infty \int \left[\int |u(x-y)|\,dy \right] |v'(x)|\,dx \\ &= \|F\|_\infty \|u\| \cdot \|v'\| \ , \end{aligned}$$

so daß mit $C := \|F\|_\infty$ die Behauptung folgt $\diamondsuit$

Ist q lokal Lebesgue-integrierbar oder ist $q \in \mathcal{L}^1_\omega$, so schreiben wir in Zukunft einfach $q(\phi)$ anstatt $\Lambda_q(\phi)$ und q anstatt Λ_q. Mißverständnisse sind durch diese Doppelbedeutungen nicht zu befürchten.

(4.2.7) COROLLAR. *Seien* $u \in \mathcal{C}^1_c, \phi \in \mathcal{D}$.
(i) *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_L$ *so gilt* $|f(\phi)| \leq \|f\| \cdot \|u\| \cdot \|\phi\|_0$.
(ii) *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ *so gibt es ein* $C = C(f,\phi)$ *mit* $|f * u(\phi)| \leq C\|u\|$.

BEWEIS: Aussage (i) ist nur eine Umformulierung und Spezialisierung von (4.2.6),(i).

Zu (ii): Da $f * u$ stetig ist (siehe (4.1.4)) kann es jedenfalls als Distributuion aufgefaßt werden. Sei nun etwa

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L \ .$$

Wegen des letzten Lemmas gibt es ein $C_1 = C_1(g) > 0$ so daß

$$\begin{aligned} |f * u(\phi)| &\leq |g * u(\phi)| + |h * u(\phi)| \\ &\leq C_1(g)\|u\| \cdot \|\phi'\| + \|h\| \cdot \|u\| \cdot \|\phi\|_0 \\ &= (C_1(g)\|\phi'\| + \|h\| \cdot \|\phi\|_0)\|u\| \ ; \end{aligned}$$

also ist die Behauptung richtig mit

$$C = C(f,\phi) := C_1(g)\|\phi'\| + \|h\| \cdot \|\phi\|_0 \quad \diamondsuit$$

Auch auf dem Raum $\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ hat man eine kanonische Topologie, die von $\mathcal{D}$ induzierte schwach-$*$-Topologie τ': Eine Subbasis für τ' besteht aus der Mengenfamilie

$$U(P;\epsilon,\phi) := \{\Lambda \in \mathcal{D}' \mid |P(\phi) - \Lambda(\phi)| < \epsilon\} \ ,$$
$$P \in \mathcal{D}', \phi \in \mathcal{D}, \epsilon > 0 \ .$$

Man kann zeigen, daß $\mathcal{D}'$ durch τ' zu einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum wird (siehe z.B. [**8**]).

Wichtig ist folgender Satz (siehe etwa [8] , 6.17):

(4.2.8) SATZ. *Sei (Λ_n) eine Folge von Distributionen so daß die Folge $(\Lambda_n(\phi))$ in $\mathbf{R}$ konvergiert, für alle $\phi \in \mathcal{D}$. Dann ist auch die durch*

$$\Lambda(\phi) := \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{D})$$

definierte lineare Abbildung eine Distribution und es gilt

$$\Lambda_n \to \Lambda \quad \text{in } \mathcal{D}' .$$

(4.2.9) LEMMA. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega, g \in \mathcal{L}^1_L$ und sei (g_n) eine Folge aus $\mathcal{C}^1_c$ für die $\|g - g_n\| \to 0$. Dann existiert der Limes*

$$\Lambda(\phi) := \lim_{n\to\infty} f * g_n(\phi)$$

für alle $\phi \in \mathcal{D}$. Für die so definierte Abbildung Λ gilt: $\Lambda \in \mathcal{D}'$ und $f * g_n \to \Lambda$ in $\mathcal{D}'$. Dabei hängt Λ nicht von der Folge (g_n) ab solange nur $\|g - g_n\| \to 0$.

BEWEIS: Für ein festes $\phi \in \mathcal{D}$ ist mit einem geeigneten $C = C(f,\phi) > 0$ nach (4.2.7),(ii)

$$\begin{aligned} |f * g_n(\phi) - f * g_m(\phi)| &= |f * (g_n - g_m)(\phi)| \\ &\le C\|g_n - g_m\| \to 0 , \end{aligned}$$

für $n, m \to \infty$. Also ist $(f * g_n(\phi))$ eine Cauchy-Folge in $\mathbf{R}$ und

$$\Lambda(\phi) := \lim_{n\to\infty} f * g_n(\phi)$$

existiert. Nach (4.2.8) ist das so für alle $\phi \in \mathcal{D}$ definierte Λ tatsächlich eine Distribution und es gilt $f * g_n \to \Lambda$ in $\mathcal{D}'$.

Ist (h_n) eine weitere Folge aus $\mathcal{C}^1_c$ mit $\|h_n - g\| \to 0$, so gilt $\|g_n - h_n\| \to 0$. Mit (4.2.7) gilt für ein festes $\phi \in \mathcal{D}$ und $C = C(f,\phi) > 0$:

$$|f * (h_n - g_n)(\phi)| \le C\|g_n - h_n\| \to 0 ,$$

für $n \to \infty$. Mit (4.2.8) schließt man, daß $f * (h_n - g_n)$ in $\mathcal{D}'$ gegen die Null-Distribution konvergiert, so daß

$$f * h_n = f * g_n + f * (h_n - g_n) \to \Lambda \text{ in } \mathcal{D}' .$$

Λ hängt also nicht von der Folge (g_n) ab $\diamond$

(4.2.10) DEFINITION. *Seien* $f \in \mathcal{L}^1_\omega, g \in \mathcal{L}^1_L$. *Das* Λ *aus (4.2.9) heißt die Faltung* $f * g$ *von* f *und* g.

In der Tat ist $f * g$ dadurch wohldefiniert, da es zu jedem $g \in \mathcal{L}^1_L$ eine Folge (g_n) aus $\mathcal{C}^1_c$ gibt mit $\|g - g_n\| \to 0$ (siehe z.B. [**16**] , §10), und da andereseits, wie oben gezeigt, $\Lambda = f * g$ nicht von der Wahl dieser Folge abhängt.

(4.2.11) THEOREM. *Die Faltung*

$$* : \mathcal{L}^1_\omega \times \mathcal{L}^1_L \to \mathcal{D}'$$

ist eine stetige, bilineare Abbildung.

Dabei sind natürlich $\mathcal{L}^1_\omega, \mathcal{L}^1_L$ mit der Lebesgue-Norm $\|\ \|$ versehen.

BEWEIS: Wir verzichten auf den einfachen Nachweis der Bilinearität von $*$.

Da für die schwach-$*$-Topologie τ' auf $\mathcal{D}'$ die Mengen der Form

$$U(P;\epsilon,\phi) = \{\Lambda \in \mathcal{D}' |\ |P(\phi) - \Lambda(\phi)| < \epsilon\} \qquad (P \in \mathcal{D}', \phi \in \mathcal{D}, \epsilon > 0)$$

eine Subbasis bilden, genügt es offenbar folgendes zu zeigen:
Zu $f_0 \in \mathcal{L}^1_\omega, g_0 \in \mathcal{L}^1_L, \phi \in \mathcal{D}$ und $\epsilon > 0$ gibt es stets eine Umgebung W von $(f_0, g_0) \in \mathcal{L}^1_\omega \times \mathcal{L}^1_L$ so daß

$$|f_0 * g_0(\phi) - f * g(\phi)| < \epsilon \qquad \forall (f,g) \in W \subset \mathcal{L}^1_\omega \times \mathcal{L}^1_L\ .$$

Sei hierzu $C = C(f_0, \phi) > 0$ die Konstante aus (4.2.7),(ii) für die gilt

$$|f_0 * u(\phi)| \leq C\|u\| \qquad \forall \phi \in \mathcal{C}^1_c\ . \tag{1}$$

Definiere nun

$$\delta := \min\left\{1, \frac{\epsilon}{2(\|g_0\|+1)(\|\phi\|_0+1)}, \frac{\epsilon}{2C}\right\}$$

und

$$W := \{(f,g) \in \mathcal{L}^1_\omega \times \mathcal{L}^1_L |\ \|f - f_0\| < \delta, \|g - g_0\| < \delta\}\ .$$

Sei dann $(f,g) \in W$. Seien sodann $(g_n), (g_{0n})$ Folgen aus $\mathcal{C}^1_c$ mit $\|g - g_n\| \to 0$, $\|g_0 - g_{0n}\| \to 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f * g(\phi) - f_0 * g_0(\phi)| &\leq |(f - f_0) * g(\phi)| + |f_0 * (g - g_0)(\phi)| \\ &= \lim_{n\to\infty} |(f - f_0) * g_n(\phi)| + \lim_{n\to\infty} |f_0 * (g_n - g_{0n})(\phi)|\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Da $\|g - g_0\| < \delta \leq 1$ und $\|g_n - g\| \to 0$ gilt $\|g_n\| \leq \|g_0\| + \|g - g_0\| < \|g_0\| + 1$, für hinreichend große n. Da $\|f - f_0\| < \delta < \infty$ ist $f - f_0 \in \mathcal{L}^1_L$ und mit (4.2.8),(i) gilt

$$\|(f - f_0) * g_n(\phi)| \leq \|f - f_0\| \cdot \|g_n\| \cdot \|\phi\|_0\ ,$$

was für hinreichend große n

$$\leq \|f - f_0\|(\|g_0\| + 1)\|\phi\|_0$$
$$\leq \delta(\|g_0\| + 1)\|\phi\|_0 < \frac{\epsilon}{2} ,$$

woraus nun folgt:

$$\lim_{n\to\infty} |(f - f_0) * g_n(\phi)| \leq \frac{\epsilon}{2} . \tag{3}$$

Wegen $\|g - g_n\| < \delta$ bleibt auch $\|g_0 - g_{0n}\| < \delta$, für hinreichend große n. Nach (1) gilt

$$|f_0 * (g_n - g_{0n})(\phi)\| \leq C\|g_n - g_{0n}\|$$
$$< C\delta \leq \frac{\epsilon}{2} ,$$

für große n, d.h. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} |f_0 * (g_n - g_{0n})(\phi)| < \frac{\epsilon}{2} . \tag{4}$$

Einsetzen von (3) und (4) in (2) liefert nun

$$|f * g(\phi) - f_0 * g_0(\phi)| < \epsilon .$$

Da $(f, g) \in W$ beliebig war gilt dies für alle $(f, g) \in W$, wie gewünscht $\diamondsuit$

Wir beschließen diesen Abschnitt mit einigen Anmerkungen.

Wir haben gesehen, wie wir Funktionen $f \in \mathcal{L}^1_\omega, g \in \mathcal{L}^1_L$ zu einer Distribution falten können. Nun ist auch zwischen Distributionen eine Faltung definiert (siehe z.B. [**8**] , 6.36), wobei allerdings verlangt wird, daß wenigstens eine der Distributionen einen kompakten Träger hat: Eine Distribution Λ hat einen kompakten Träger, wenn es ein $K > 0$ gibt, so daß für alle $\phi \in \mathcal{D}$ gilt:

$$Tr(\phi) \cap [-K, K] = \emptyset \Rightarrow \Lambda(\phi) = 0 .$$

Man beachte, das wir eine Einschränkung dieser Art in Definition (4.2.10) nicht haben, was ein Hauptgrund für die Ausarbeitung dieser Überlegungen war. Man überzeugt sich ferner, was wir hier nicht mehr beweisen wollen, daß für $f \in \mathcal{L}^1_\omega$, $g \in \mathcal{L}^1_L$ unsere Faltung $f * g$ mit der Faltung von f und g, aufgefaßt als Distributionen, übereinstimmt, wenn wenigstens eine der Distributionen f, g einen kompakten Träger hat, d.h. wenn f oder g außerhalb eines Kompaktums f.ü. verschwindet.

Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß sich jedes $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ genauso gut als temperierte Distribution (siehe z.B. [**8**]) auffassen läßt, wobei sich alle angegebenen Sätze in naheliegender Weise übertragen. In diesem Sinne kann man dann auch jedes $f \in \mathcal{L}^1_\omega$, als temperierte Distribution, Fourier-transformieren, wobei sich dann natürlich alles über $\mathbf{C}$ statt über $\mathbf{R}$ abspielt. Die Frage, welche der

$f \in \mathcal{L}^1_\omega$ sich in eine Funktion Fourier-transformieren lassen, d.h. für welche f das Integral

$$\int f(t)e^{-ixt}\, dI_\omega(t)\ , \tag{1}$$

sagen wir zumindest für fast alle $x \in \mathbf{R}$ existiert, erwies sich als sehr schwierig. Mit relativ wenig Mühe kann man jedoch zeigen, daß es (sogar für alle x) existiert, wenn f nicht Lebesgue-singulär im Unendlichen ist, d.h. wenn es ein $K > 0$ gibt mit $f\chi_{\mathbf{R}-[-K,K]} \in \mathcal{L}^1_L$.

Wir werden in Abschnitt (4.4) noch auf die Fourier-Transformierbarkeit von $\mathcal{L}^1_\omega$-Funktionen eingehen. Dabei wird sich zeigen, daß ein Abweichen von der zunächst naheliegenden Definition (1) der Fourier-Transformation, eine sehr homogene und befriedigende Theorie liefern wird.

(4.3) Fourier-Reihen über $\mathcal{L}^1_\omega$

In der klassischen Theorie der Fourier-Reihen betrachtet man etwa Funktionen $f \in \mathcal{L}^1_L[-\pi,\pi]$, bildet die Fourier-Koeffizienten

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\ ,$$

$$b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

und untersucht für $x \in [-\pi,\pi]$ das Verhalten der Reihe

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_1^\infty (a_n\cos nx + b_n \sin nx)\ .$$

Wir wollen nun zusehen was geschieht, wenn wir hierbei $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ zulassen. Dabei werden wir unsere Untersuchungen gleich im Rahmen des allgemeineren Konzepts der sogenannten singulären Integrale durchführen.

Der Leser sei noch einmal auf Lemma (4.1.1) hingewiesen, das wir dauernd und oft ohne besonderen Hinweis benutzen werden. Ferner wird es manchmal praktisch sein die Schreibweise $f(x)$ für eine Funktion zuzulassen, und zwar auch dann, wenn damit nicht ein bestimmter Funktionswert gemeint ist sondern die Funktion f; Mißverständnisse sind dadurch natürlich nicht zu befürchten, vielmehr wird eine Schwerfälligkeit in der Schreibweise vermieden.

Als Standard-Referenz wird uns in diesem Abschnitt das Werk [**17**] von I.P.Natanson dienen.

Als eine Konsequenz aus (4.1.1),(ii) halten wir zunächst einmal fest:

(4.3.1) LEMMA. *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$, *so gilt auch*

$$f(x)\cos nx, f(x)\sin nx \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi] \quad (n = 0,1,2,\ldots)\ .$$

(4.3.2) DEFINITION. *Ist* $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$ *so heißen*

$$a_n = a_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dI_\omega(t)\ ,$$

$$b_n = b_n(f) := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

die Fourier-Koeffizienten von f.

(4.3.3) LEMMA. *Ist $f \in \mathcal{E}_\omega[-\pi,\pi]$ und F ein ω-Stamm von f, so gilt für alle $n = 0,1,2,\ldots$:*

$$a_n(f) = (F(\pi) - F(-\pi))\frac{\cos n\pi}{\pi} + \frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin nt\,dt\ ,$$

$$b_n(f) = -\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt\ .$$

BEWEIS: Es ist etwa $f(x)\cos nx \in \mathcal{E}_\omega$ und

$$H(x) := F(x)\cos nx + n\int_0^x F(t)\sin nt\,dt$$

ein ω-Stamm dazu. Berechnet man hiermit

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}(H(\pi) - H(-\pi))\ ,$$

so erhält man das angegebene Ergebnis. Analoges gilt für die $b_n(f)$ $\diamond$

(4.3.4) LEMMA. *(Lebesgue) Seien $\phi_n \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$. Es gebe ein $K \geq 0$ mit $|\phi_n| \leq K$ für alle n. Ferner gelte*

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^c \phi_n(t)\,dt = 0 \qquad \forall c \in [a,b]\ .$$

Dann gilt für alle $f \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \phi_n(t)f(t)\,dt = 0\ .$$

Ein Beweis findet sich z.B. in [**17**] , X, §1. Unsere Version dieses Satzes lautet:

(4.3.5) LEMMA. *Seien $\phi_n \in \mathcal{C}^1[a,b]$. Die ϕ_n seien monoton fallende Funktionen und es gebe ein $K \geq 0$ mit $|\phi_n| \leq K$ für alle n. Ferner gelte*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c \phi_n(t)\,dt = 0 \qquad \forall c \in [a,b] .$$

Dann gilt für alle $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \phi_n(t) f(t)\,dt = 0 .$$

BEWEIS: Wegen (4.1.1),(ii) ist die Behauptung jedenfalls sinnvoll.
Sei nun $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ gegeben. Wir zerlegen f in

$$f = g + h \qquad f \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L .$$

Indem wir eine geeignete Konstante zu g addieren (und bei h subtrahieren) können wir annehmen, daß $I_\omega(g) = 0$. Für $h \in \mathcal{L}^1_L$ trifft die Behauptung jedenfalls zu, da dies dann nur ein Spezialfall des letzten Lemmas ist. Wir können daher überhaupt $f \in \mathcal{E}_\omega$ und $I_\omega(f) = 0$ annehmen. Sei dann F der ω-Stamm von f mit $F(a) = 0$. Wegen $I_\omega(f) = F(b) - F(a) = 0$ muß dann auch $F(b) = 0$ sein. Nun ist

$$H(x) = F(x)\phi_n(x) - \int_a^x F(t)\phi_n'(t)\,dt$$

ein ω-Stamm zu $f\phi_n \in \mathcal{E}_\omega$. Es folgt

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(t)\phi_n(t)\,dI_\omega(t)\right| &= |H(b) - H(a)| \\ &= \left|-\int_a^b F(t)\phi_n'(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_a^b |F(t)|(-\phi_n'(t))\,dt ,\end{aligned}$$

wobei zuletzt benutzt wurde, daß die ϕ_n monoton fallen, d.h. $\phi_n' \leq 0$. Wegen $F(a) = F(b) = 0$ konstruiert man nun leicht ein $G \in \mathcal{C}^1[a,b]$ mit $G \geq |F|$ und

$G(a), G(b) < \epsilon$, wobei $\epsilon > 0$ beliebig vorgegeben sei. Damit können wir oben weiter abschätzen

$$\leq \int_a^b G(t)(-\phi_n'(t))\,dt\ ,$$

und dies ist mit Hilfe partieller Integration

$$= G(a)\phi_n(a) - G(b)\phi_n(b) + \int_a^b G'(t)\phi_n(t)\,dt$$

$$\leq 2K\epsilon + \int_a^b G'(t)\phi_n(t)\,dt\ .$$

Nach dem letzten Lemma gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b G'(t)\phi_n(t)\,dt = 0\ ,$$

so daß

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^b f(t)\phi_n(t)\,dI_\omega(t) \right| \leq 2K\epsilon\ .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt nun die Behauptung $\diamondsuit$

(4.3.6) LEMMA. *Sei $f \in \mathcal{L}_L^1[a,b]$ und sei*

$$M := \sup_{o<h\leq b-a} \frac{1}{h} \left| \int_a^{a+h} f(t)\,dt \right| < \infty\ .$$

Ist dann $g : [a,b] \to [0,\infty)$ eine nicht-negative, monoton fallende Funktion, so gilt

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\,dt \right| \leq M \int_a^b g(t)\,dt\ .$$

Man beachte: Als monotone Funktion ist g meßbar. Da g beschränkt ist (durch $g(a)$), ist $g \in \mathcal{L}_L^1[a,b]$. Es gilt dann auch $fg \in \mathcal{L}_L^1[a,b]$, da das Produkt zweier $\mathcal{L}_L^1$-Funktionen bekanntlich sicher dann wieder in $\mathcal{L}_L^1$ liegt, wenn wenigstens eine der beiden Funktionen beschränkt ist.

Lemma (4.2.6) geht auf I.P. Natanson zurück, siehe [**17**] , X, §2.
Für unser Vorhaben benötigen wir folgende Fassung dieses Satzes:

(4.3.7) LEMMA. *Sei* $f \in \mathcal{E}_\omega[a,b]$ *und sei*

$$M := \sup_{0<h\leq b-a} \frac{1}{h} \left| \int_a^{a+h} f(t)\, dI_\omega(t) \right| < \infty .$$

Ist dann $g \in \mathcal{C}^1[a,b]$ *nicht-negativ und monoton fallend, so gilt*

$$\left| \int_a^b f(t)g(t)\, dI_\omega(t) \right| \leq M \int_a^b g(t)\, dt .$$

BEWEIS: Sei F der ω-Stamm von f mit $F(a) = 0$. Es ist $fg \in \mathcal{E}_\omega$ und

$$H(x) := F(x)g(x) - \int_a^x F(t)g'(t)\, dt$$

ist ein ω-Stamm zu fg. Sei

$$A := \int_a^b f(t)g(t)\, dI_\omega(t) = H(b) - H(a) .$$

Wir wollen zwei Fälle unterscheiden.

1. FALL. *Es ist* $g(b) = 0$.

Dann haben wir mit $F(a) = g(b) = 0$

$$A = H(b) - H(a) = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\, dt$$

$$= -\int_a^b F(t)g'(t)\, dt \qquad \Rightarrow$$

$$|A| \leq \int_a^b |F(t)|(-g'(t))\, dt ,$$

wobei benutzt wurde, daß g monoton fällt, d.h. $g' \leq 0$. Nun ist voraussetzungsgemäß

$$|F(t)| = |F(t) - F(a)| = \left| \int_a^t f(u)\, dI_\omega(u) \right| \qquad \text{also}$$

$$|F(t)| \leq M(t-a) \qquad (t \in [a,b]) \ .$$

Setzen wir dies in die Abschätzung für A ein, so erhalten wir

$$|A| \leq M \int_a^b (t-a)(-g'(t))\, dt$$

was mit partieller Integration

$$= M \int_a^b g(t)\, dt - M(b-a)g(b)$$

$$= M \int_a^b g(t)\, dt \ ,$$

da $g(b) = 0$. Im Falle $g(b) = 0$ ist die Behauptung des Satzes also gzeigt.

2. FALL. *Es ist* $g(b) \geq 0$ *beliebig.*

Dann ist

$$|A| = \left| g(b) \int_a^b f(t)\, dI_\omega(t) + \int_a^b (g(t) - g(b)) f(t)\, dI_\omega(t) \right|$$

$$\leq g(b)|F(b) - F(a)| + M \int_a^b (g(t) - g(b))\, dt \ ,$$

wobei der zweite Term gemäß dem ersten Fall abgeschätzt wurde. Da

$$|F(b) - F(a)| = \left| \int_a^b f(t)\, dI_\omega(t) \right| \leq M(b-a)$$

kann man $|A|$ weiter abschätzen zu

$$|A| \leq M \left[g(b)(b-a) + \int_a^b (g(t) - g(b))\, dt \right]$$

$$= M \int_a^b g(t)\, dt \ ,$$

womit die Behauptung auch im allgemeinen Fall bewiesen wäre ◇

Wir werden nun zeigen, wie das Konzept von Kernen und singulären Integralen für $\mathcal{L}^1_\omega[a,b]$ umzudefinieren ist. Für die herkömmliche Behandlung dieser Dinge siehe [**17**] , X.

(4.3.8) DEFINITION. *Eine Familie* (Φ_n) *von Abbildungen*

$$\Phi_n : [a,b] \times (a,b) \to \mathbf{R} \qquad (n \in \mathbf{N})$$

heißt ein glatter Kern, wenn gilt:

(i) *Für jedes feste* $x \in (a,b)$ *und für alle* n *ist*

$$(t \mapsto \Phi_n(t,x)) \in \mathcal{C}^1[a,b] \ .$$

(ii) *Für jedes feste* $x \in (a,b)$ *und für alle* α, β *mit* $a \leq \alpha < x < \beta \leq b$ *gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \Phi_n(t,x)\, dt = 1 \ .$$

Man prüft beispielsweise nach, daß durch

$$\Phi_n(t,x) := \frac{n}{\pi} \frac{1}{1+n^2(t-x)^2}$$

ein glatter Kern definiert wird, und zwar für beliebige Intervalle $[a,b]$. Wir werden benutzen, daß für einen glatten Kern (Φ_n) und $a \leq \alpha < x < \beta \leq b$ stets

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\alpha \Phi_n(t,x)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_\beta^b \Phi_n(t,x)\, dt = 0 \ ,$$

denn es ist ja z.B.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\alpha \Phi_n(t,x)\, dt = \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \Phi_n(t,x)\, dt - \int_\alpha^b \Phi_n(t,x)\, dt \right) = 1 - 1 = 0 \ ,$$

gemäß (ii) der vorangegangenen Definition.

(4.3.9) THEOREM. *Sei* (Φ_n) *ein glatter Kern über* $[a,b] \times (a,b)$. *Es seien alle* $\Phi_n \geq 0$ *und für alle* $x \in (a,b)$ *und alle* n *gelte:*

$$t \mapsto \Phi_n(t,x) \text{ ist } \begin{cases} \text{monoton steigend} & \text{auf } [a,x] \\ \text{monoton fallend} & \text{auf } [x,b] \ . \end{cases}$$

Ist dann $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$, *so gilt*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(t,x) f(t)\, dI_\omega(t) \ ,$$

für fast alle $x \in [a,b]$.

BEWEIS: Der Beweis lehnt sich eng an den Beweis des entsprechenden Satzes in [**17**] , X, §2 an.

Da (Φ_n) ein glatter Kern ist gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(t,x)\, dt = 1 \qquad (x \in (a,b)) \ .$$

Es genügt daher zu zeigen, daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \Phi_n(t,x)(f(t) - f(x))\, dI_\omega(t) = 0 \ , \tag{1}$$

für fast alle $x \in (a,b)$. Dazu zerlegen wir f in

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L$$

und betrachten die unbestimmten Integrale

$$G(x) := \int_a^x g(t)\, dI_\omega(t) \ , \ H(x) := \int_a^x h(t)\, dt$$

(dabei ist natürlich G nichts anderes als ein ω-Stamm von g). Etwa nach (3.2.17) gibt es eine Nullmenge N so daß

$$G'(x) = g(x) \ , \ H'(x) = h(x) \qquad \forall x \in (a,b) \setminus N \ . \tag{2}$$

Wir sind daher fertig, wenn wir (1) für alle $x \in (a,b) \setminus N$ zeigen können.

Sei also $x \in (a,b) \setminus N$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen (2) finden wir ein $\delta > 0$ so daß

$$\frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (g(t) - g(x)\, dI_\omega(t) \right| < \epsilon \text{ und}$$

$$\frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (h(t) - h(x))\, dt \right| < \epsilon \ , \quad \text{für } 0 < h \leq \delta \ .$$

Nach (4.3.6) und (4.3.7) können wir daher abschätzen:

$$\left| \int_x^{x+\delta} (f(t) - f(x))\, dI_\omega(t) \right|$$

$$\leq \left| \int_x^{x+\delta} (g(t) - g(x))\Phi_n(t,x)\, dI_\omega(t) \right| + \left| \int_x^{x+\delta} (h(t) - h(x))\Phi_n(t,x)\, dt \right|$$

$$\leq 2\epsilon \int_x^{x+\delta} \Phi_n(t,x)\, dt \leq 2\epsilon \int_a^b \Phi_n(t,x)\, dt \ ;$$

da $\int_a^b \Phi_n(t,x)\, dt \to 1$, gibt es ein nur von x abhängiges $K(x) > 0$ mit

$$\int_a^b \Phi_n(t,x)\, dt \leq K(x) \qquad \forall n \ .$$

Es folgt

$$\left| \int_x^{x+\delta} (f(t) - f(x))\Phi_n(t,x)\, dI_\omega(t) \right| \leq 2\epsilon K(x) \ . \tag{3}$$

Sei nun $x + \delta \leq t \leq b$. Dann gilt

$$\Phi_n(t,x) \leq \Phi_n(x+\delta, x) \leq \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} \Phi_n(t,x)\, dt \leq \frac{K(x)}{\delta} \ ,$$

wegen dem angegebenen Monotonieverhalten von $t \mapsto \Phi_n(t,x)$. Da außerdem für ein beliebiges β mit $x + \delta \leq \beta \leq b$

$$\int_{x+\delta}^{\beta} \Phi_n(t,x)\, dt = \int_{x+\delta}^{b} \Phi_n(t,x)\, dt - \int_{\beta}^{b} \Phi_n(t,x)\, dt \to 0 - 0 = 0 \ ,$$

für $n \to \infty$, sind für $\phi_n(t) := \Phi_n(t,x)$ $(t \in [x+\delta, b])$ die Vorraussetzungen von (4.3.5) erfüllt, also

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x+\delta}^{b} \Phi_n(t,x)(f(t) - f(x))\, dI_\omega(t) = 0 \ . \tag{4}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war ergibt die Kombination von (3) und (4)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_x^b \Phi_n(t,x)(f(t)-f(x))\, dI_\omega(t) \right| = 0 \,.$$

Da man völlig analog

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_a^x \Phi_n(t,x)(f(t)-f(x))\, dI_\omega(t) \right| = 0$$

zeigen kann folgt (1) und wir sind fertig $\diamondsuit$

Zur Erinnerung: Ist $h \geq 0$ meßbar, so ist $\int h\, d\lambda$ immer erklärt (im Sinne der klassischen Maßtheorie), kann aber $= \infty$ werden. Wir werden für ein derartiges Integral auch $\int h(t)\, d\lambda(t)$ schreiben. Im Sinne von Natanson definieren wir nun:

(4.3.10) DEFINITION. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$. Ein Punkt $x \in (a,b)$ heißt Lebesgue-Punkt von f, falls*

$$\lim_{h\downarrow 0} \int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\, d\lambda(t) = \lim_{h\downarrow 0} \int_{x-h}^{x} |h(t)-h(x)|\, d\lambda(t) = 0 \,.$$

(4.3.11) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$ und $S_L := S_L(f;[a,b])$. Dann sind fast alle $x \in (a,b) - S_L$ Lebesgue-Punkte von f.*

BEWEIS: Da S_L abgeschlossen ist, ist $(a,b) \setminus S_L$ offen und daher

$$(a,b) \setminus S_L = \bigcup (a_n, b_n) \,,$$

mit geeigneten paarweise disjunkten, offenen Intervallen (a_n, b_n). Jedes (a_n, b_n) kann man seinerseits schreiben als

$$(a_n, b_n) = \bigcup_k J_{nk} \,, \; J_{nk} := [a_n + \frac{1}{k}, b_n - \frac{1}{k}] \,.$$

Seien dann n, k fest gewählt. Da J_{nk} keine Punkte aus S_L enthält, zeigt ein Kompaktheitsargument, daß $f \in \mathcal{L}^1_L(J_{nk})$. Dann gilt aber z.B. gemäß [**4**] , (18.4):

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\, dt = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} |f(t)-f(x)|\, dt = 0 \,,$$

für fast alle $x \in J_{nk}$. Fast alle $x \in J_{nk}$ sind also Lebesgue-Punkte von f. Da $(a,b) \setminus S_L$ die abzählbare Vereinigung der J_{nk} ist, sind auch fast alle $x \in (a,b) \setminus S_L$ Lebesgue-Punkte von f $\diamondsuit$

(4.3.12) DEFINITION. *Seien $\Phi, \Psi : [a,b] \times (a,b) \to \mathbf{R}$ gegeben. Ψ heißt eine glatte, konvexe Majorante von Φ, wenn gilt:*

(i) $\Psi \geq |\Phi|$.

(ii) *Für jedes $x \in (a,b)$ ist*

$$(t \mapsto \Psi(t,x)) \in \mathcal{C}^1[a,b] \ .$$

(iii) *Für jedes $x \in (a,b)$ gilt*

$$t \mapsto \Psi(t,x) \text{ ist } \begin{cases} \text{monoton steigend} & \text{auf } [a,x] \\ \text{monoton fallend} & \text{auf } [x,b] \ . \end{cases}$$

(4.3.13) SATZ. *Sei (Φ_n) ein glatter Kern über $(a,b) \times [a,b]$. Es existiere eine Familie (Ψ_n) von glatten, konvexen Majoranten Ψ_n zu Φ_n, derart, daß es zu jedem $x \in (a,b)$ ein $K(x) > 0$ gibt mit*

$$\int_a^b \Psi_n(t,x)\, dt \leq K(x) \qquad \forall n \in \mathbf{N} \ .$$

Ist dann $f \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$ und $x \in (a,b)$ ein Lebesgue-Punkt von f, so gilt

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \int_a^b \Phi_n(t,x) f(t)\, dI_\omega(t) \ .$$

BEWEIS: Da (Φ_n) ein glatter Kern ist genügt es wieder

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \Phi_n(t,x)(f(t) - f(x))\, dI_\omega(t) = 0 \tag{1}$$

zu zeigen (vergl. den Beweis zu (4.3.9)). Sei dazu $\epsilon > 0$ vorgegeben. Da x Lebesgue-Punkt ist gibt es ein $\delta > 0$ so daß

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} |f(t) - f(x)| d\lambda(t) < \epsilon \qquad \text{für } 0 < h \leq \delta \ .$$

Insbesondere muß also der meßbare Integrand über $[x, x+\delta]$ Lebesgue-integrierbar sein, da seine Lebesgue-Nom $< \infty$ bleibt. Nun gilt

$$\left| \int_x^{x+\delta} (f(t) - f(x))\Phi_n(t,x)\, dt \right|$$
$$\leq \int_x^{x+\delta} |f(t) - f(x)|\Psi_n(t,x)\, dt \ ,$$

was wegen Lemma (4.3.6)

$$\leq \epsilon \int_x^{x+\delta} \Psi_n(t,x)\, dt \leq \epsilon K(x)$$

bleibt.

Andererseits hat man für $x + \delta \leq x \leq b$

$$|\Phi_n(t,x)| \leq \Psi_n(t,x) \leq \Psi_n(x+\delta, x)$$
$$\leq \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} \Psi_n(t,x)\, dt \leq \frac{K(x)}{\delta} \ ,$$

wegen dem Monotonieverhalten von $t \mapsto \Psi_n(t,x)$. Nun schließt man wort-wörtlich wie im Beweis von (4.3.9), daß

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x+\delta}^{b} (f(t) - f(x))\Phi_n(t,x)\, dI_\omega(t) = 0$$

so daß insgesamt

$$\left| \int_x^b (f(t) - f(x))\Phi_n(t,x)\, dI_\omega(t) \right| \leq \left| \int_x^{x+\delta} (\ldots) \right| + \left| \int_{x+\delta}^{b} (\ldots) \right|$$
$$\leq K(x)\epsilon + \epsilon \ ,$$

für alle hinreichend großen n. Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^b (f(t) - f(x))\Phi_n(t,x)\, dI_\omega(t) = 0 \tag{2}$$

und völlig analog gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x (f(t) - f(x))\Phi_n(t,x)\, dI_\omega(t) = 0 \ . \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) ergeben nun die gewünschte Beziehung (1) und wir sind fertig $\diamondsuit$

Betrachte nun eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$ und deren Fourier-Koeffizienten

$$a_k = a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt\, dI_\omega(t) \ ,$$

$$b_k = b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt\, dI_\omega(t) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots) \ ,$$

sowie die n-ten Partialsummen der zu f gehörenden Fourier-Reihe

$$S_n(x) = S_n(f;x) := \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \ .$$

In Beispiel (4.3.16) werden wir zeigen, daß es ("viele") $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$ gibt, für die $\lim\limits_{k\to\infty} a_k(f)$ oder $\lim\limits_{k\to\infty} b_k(f)$ nicht existiert oder $\neq 0$ ist. Bilde nun für ein solches f die Partialsummen S_n und setze

$$H := \{x \in [a,b] \,|\, \lim_{n\to\infty} S_n(x) \text{ existiert (in } \mathbf{R}) \} \ .$$

Nun konvergiert $(S_n(x))$ genau dann, wenn es eine Cauchy-Folge ist, d.h.

$$x \in H \ \Leftrightarrow \ \forall k\, \exists l\, \forall m,n \geq l : |S_m(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{k} \ , \text{ also}$$

$$H = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} \bigcap_{m,n\geq l} \{x \in [a,b] \,|\, |S_m(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{k}\} \ .$$

Als stetige Funktionen sind alle S_n meßbar; die vorangegangene Darstellung von H zeigt, daß damit auch H meßbar ist, da alle in der Darstellung von H vorkommenden Mengen meßbar sind.

Angenommen $\lambda(H) > 0$. Dann gilt für alle x einer Menge positiven Maßes

$$\lim_{k\to\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = 0 \ ,$$

da die Fourier-Reihe von f für $x \in H$ konvergiert. Aus dieser Tatsache folgt aber gemäß [**17**] , X, §4, Theorem 4:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0 \ ,$$

was aber voraussetzungsgemäß nicht der Fall sein sollte. Wir halten diese interessante Ergebnis für später fest:

(4.3.14) LEMMA. *Sei* $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$. *Ist einer der Limiten*

$$\lim_{k\to\infty} a_k(f) \ , \ \lim_{k\to\infty} b_k(f)$$

nicht existent oder existent aber $\neq 0$, *so divergiert die zu* f *gehörende Fourier-Reihe fast überall.*

Ein befriedigenderes Verhalten zeigen die $\mathcal{L}^1_\omega$-Funktionen bzgl. eines anderen Summations-Verfahrens, der sogenannten Cesàro-Methode: Statt der Partialsummen $S_n(x)$ betrachtet man hier die arithmetischen Mittel

$$\sigma_n(x) := \frac{1}{n}\left(S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_{n-1}(x)\right)$$

zu einem gegebenen $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$ (n-te Cesàro-Summe). Leichte Umformungen ergeben (vergl. [**17**] , X, §3):

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t,x) f(t)\, dI_\omega(t) \ ,$$

mit dem Fejér-Kern

$$\Phi_n(t,x) := \frac{1}{2n\pi}\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^2 \ ,$$

wobei für $t = x$

$$\Phi_n(t,x) := \frac{1}{2n\pi}\cdot n^2 = \frac{n}{2\pi}$$

gesetzt wird. Man kann zeigen (ebenfalls [**17**] , X, §3): Der Fejér-Kern (Φ_n) ist ein glatter Kern und Φ_n hat die glatte, konvexe Majorante

$$\Psi_n(t,x) := \frac{n\pi}{n^2(t-x)^2 + 4} \ .$$

Unabhängig von n und x bleibt

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(t,x)\, dt \le \frac{\pi^2}{2} \ .$$

Damit erfüllen (Φ_n) und (Ψ_n) alle Voraussetzungen von Satz (4.3.13) und wir haben:

(4.3.15) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$, (Φ_n) der Fejér-Kern und seien σ_n die n-ten Cesàro-Summen zu f. Dann gilt für jeden Lebesgue-Punkt x von f:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(t,x) f(t)\, dI_\omega(t) \ .$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$ so ist $S_L = S_L(f;[-\pi,\pi])$ eine abgeschlossene und nirgends dichte Menge (vergl. (3.4.3)). Nach (4.3.11) sind fast alle Punkte $x \in (-\pi,\pi) \setminus S_L$ Lebesgue-Punkte von f, insbesondere liegen die Lebesgue-Punkte dicht in $(-\pi,\pi) \setminus S_L$ und haben das gleiche Maß wie $(-\pi,\pi) \setminus S_L$. Da nun endlich $(-\pi,\pi) \setminus S_L$ dicht in $(-\pi,\pi)$ liegt, kann man zusammenfassend feststellen:
Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$, so bilden die Lebesgue-Punkte von f eine dichte, meßbare Menge positiven Maßes.

Im Lichte dieser Bemerkung ist (4.3.15) ein um so erfreulicheres Ergebnis.

In [**4**] , Theorem (18.28) wird gezeigt, daß

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \sigma_n\| = 0 \ ,$$

für alle $f \in \mathcal{L}^1_L[-\pi,\pi]$. Ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$, so gilt diese Formel genau dann, wenn $f \in \mathcal{L}^1_L[-\pi,\pi]$:
Ist $f \in \mathcal{L}^1_L[-\pi,\pi]$ so gilt, wie gesagt, die Formel. Gilt umgekehrt die genannte Formel, so ist $\|f - \sigma_n\| < 1$ für ein geeignetes n. Da $\|\sigma_n\| < \infty$ für das stetige σ_n, gilt dann auch

$$\|f\| \le \|f - \sigma_n\| + \|\sigma_n\| < \infty \ ,$$

d.h. aber $f \in \mathcal{L}^1_L[-\pi,\pi]$.

Sei $\phi_n(x) := \cos nx$ $(x \in [-\pi,\pi])$. Für ein $c \in [-\pi,\pi]$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{c} \cos nt\, dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sin nc = 0 \ .$$

Ist daher $f \in \mathcal{L}^1_L[-\pi,\pi]$ so besagt Lemma (4.3.4):

$$\lim_{n\to\infty} a_n(f) = 0 \text{ und analog } \lim_{n\to\infty} b_n(f) = 0 \ .$$

Wir wollen nun zeigen, daß dieses, unter dem Namen Riemann-Lebesgue-Lemma bekannte Ergebnis, für $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$ i.A. falsch ist.

(4.3.16) BEISPIEL. *Seien $C_k \geq 0$ gegeben. Dann existiert ein $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi, \pi]$ und eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen (m_k) mit*

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin m_k t \, dI_\omega(t) - C_k \right| = 0 \, .$$

BEWEIS: Sei $\epsilon_k := \frac{1}{k}$ und $s_k := \pi(1 - \frac{1}{2^k})$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Wir setzen $f = 0$ auf $[-\pi, s_1)$ und werden f sukzessive auf $[s_1, s_2), [s_2, s_3), \ldots$ fortsetzen.

Wähle nun zunächst ein $n_1 > 3$ so daß

$$(') \qquad \frac{C_1 \cdot 2 \cdot \pi}{2^{n_1}} \leq \frac{1}{2} \, .$$

Das Intervall $[s_1, s_2)$ werde nun in gleichlange Teilintervalle unterteilt (wegen $s_2 - s_1 = \frac{\pi}{4}$, sind dies $\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{2^{n_1}} = 2^{n_1-2}$ Stück). Auf diesen Teilintervallen, die wir links offen und rechts abgeschlossen nehmen, wird f abwechselnd konstant zu $\pm 2C_1$ festgesetzt, links mit $+2C_1$ beginnend. Es gilt:

$$(1') \qquad \int_{-\pi}^{s_1} f(t) \sin 2^{n_1} t \, dt = 0 < \epsilon_1 \, .$$

$$(2') \qquad \int_{s_1}^{s_2} f(t) \sin 2^{n_1} t \, dt = C_1 \, .$$

$$(3') \qquad \text{Für } s_1 \leq \alpha \leq \beta \leq s_2 \text{ ist } \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \, dt \right| \leq \frac{1}{2} \, .$$

Erläuterung zu (1'): Klar, da $f = 0$ auf $[-\pi, s_1)$.

Erläuterung zu (2'): Die Funktion $f(t) \sin 2^{n_1} t$ besteht auf $[s_1, s_2)$ aus $\frac{\pi}{4} : \frac{\pi}{2^{n_1}}$ gleichlangen Sinus-Bäuchen der Höhe $+2C_1$. Jeder Bauch liefert zu dem Integral in (2') den

$$\text{Bauchbeitrag} = \int_0^{\frac{\pi}{2^{n_1}}} 2C_1 \sin 2^{n_1} t \, dt = \frac{4C_1}{2^{n_1}}$$

und damit berechnet man

$$\int_{s_1}^{s_2} f(t) \sin 2^{n_1} t \, dt = (\text{Bauchbeitrag}) \cdot (\text{Anzahl der Bäuche})$$

$$= \frac{4C_1}{2^{n_1}} \cdot 2^{n_1-2} = C_1 \, .$$

Erläuterung zu (3'): Auf $[s_1, s_2)$ springt f nach jedem Teilintervall der Länge $\frac{\pi}{2^{n_1}}$ von $+2C_1$ nach $-2C_1$ oder umgekehrt. Daher bleibt für $s_1 \leq \alpha \leq \beta \leq s_2$

$$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \right| \leq \frac{\pi}{2^{n_1}} \cdot 2C_1 \leq \frac{1}{2} ,$$

letzteres wegen Ungleichung (').

Wir denken uns nun f bereits über $[s_1, s_2), [s_2, s_3), \ldots, [s_{k-1}, s_k)$ (als Treppenfunktion) definiert, und gehen über $[s_k, s_{k+1})$ folgendermaßen vor: Wähle ein natürliches n_k so groß, daß

(I) $$n_k > \max\{k+2, n_{k-1}\} .$$

(II) $$\frac{C_k \cdot 2^k \cdot \pi}{2^{n_k}} \leq \frac{1}{2^k} .$$

(III) $$\left| \int_{-\pi}^{s_k} f(t) \sin 2^{n_k} t\, dt \right| < \epsilon_k .$$

Dabei läßt sich (III) so erreichen: Das bisher auf $[-\pi, s_k)$ erklärte f ist sicher Lebesgue-integrierbar. Denkt man es sich daher -für den Moment!- auf $[s_k, \pi]$ zu 0 fortgesetz, so kann auf dieses f das Riemann-Lebesgue-Lemma angewendet werden (siehe die Bemerkung vor Beginn von (4.3.16)), so daß (III) richtig ist für ein hinreichend großes n_k.

Nun unterteilt man wieder $[s_k, s_{k+1})$ in gleichlange (links abgeschlossene, rechts offene) Intervalle der Länge $\frac{\pi}{2^{n_k}}$. Da $s_{k+1} - s_k = \frac{\pi}{2^{k+1}}$ ist, sind dies genau $\frac{\pi}{2^{k+1}} : \frac{\pi}{2^{n_k}} = 2^{n_k-(k+1)}$ Stück. Auf diesen Teilintervallen setzen wir f abwechselnd konstant zu $\pm 2^k C_k$ fest, links mit $+2^k C_k$ beginnend. Es gilt:

(1) $$\left| \int_{-\pi}^{s_k} f(t) \sin 2^{n_k} t\, dt \right| < \epsilon_k .$$

(2) $$\int_{s_k}^{s_{k+1}} f(t) \sin 2^{n_k} t\, dt = C_k .$$

(3) Ist $s_k \leq \alpha \leq \beta \leq s_{k+1}$ so ist $$\left| \int_\alpha^\beta f(t)\, dt \right| \leq \frac{1}{2^k} .$$

Hierbei ist (1) dasselbe wie (III). Die Begründung zu (2) ist der Erläuterung zu (2') analog, wobei man beachte, daß $\sin 2^{n_k} t$ in $s_k = \pi(1 - \frac{1}{2^k})$ wirklich "einen neuen Bauch anfängt", da $2^{n_k} s_k = (2^{n_k} - 2^{n_k-k})\pi$ und $n_k > k$ nach (I). Die Begründung von (3) ist der Erläuterung zu (3') analog, wobei nun (II) ausgenutzt wird.

So fortfahrend wird f auf allen $[s_k, s_{k+1})$ und damit auf $[-\pi, \pi]$ definiert ($f(\pi) := 0$). Dabei bleiben die Aussagen

$$(\mathrm{I})\ ,\ (1)\ ,\ (2)\ ,\ (3)$$

für alle natürlichen k gültig.

Betrachte nun ein festes k und dazu diejenigen l mit $k+1 \leq l \leq n_k - 2$ (wegen (I) ist $k+1 \leq n_k - 2$). Die Länge eines Bauches der Funktion $\sin 2^{n_k} t$ ist $\frac{\pi}{2^{n_k}}$. Die Länge eines $[s_l, s_{l+1})$ ist $\frac{\pi}{2^{l+1}}$. Daher gehen in $[s_l, s_{l+1})$ genau $\frac{\pi}{2^{l+1}} : \frac{\pi}{2^{n_k}}$ das sind $2^{n_k-(l+1)}$ Bäuche auf, und das ist eine natürliche Zahl, da $l \leq n_k - 2$ (außerdem prüft man wieder nach, daß $\sin 2^{n_k} t$ in s_l wirklich "einen neuen Bauch anfängt"). Wegen (I) ist (n_m) eine echt aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Wegen $l \geq k+1$ ist daher $n_l \geq n_{k+1} > n_k$.

Die Länge eines Konstanz-Intervalls von f über $[s_l, s_{l+1})$ ist konstruktionsgemäß $\frac{\pi}{2^{n_l}}$; die Länge eines $\sin 2^{n_k} t$-Bauches ist $\frac{\pi}{2^{n_k}}$. Also gehen in einer Bauchlänge die gerade (!) Anzahl $\frac{\pi}{2^{n_k}} : \frac{\pi}{2^{n_l}} = 2^{n_l - n_k}$ Konstanzintervalle von f auf. Da f auf diesen abwechselnd $= \pm 2^k C_k$ ist, gilt aus Symmetriegründen für irgendein Bauchintervall B von $\sin 2^{n_k} t$:

$$\int_B f(t) \sin 2^{n_k} t \, dt = 0 \ ,$$

und da eine natürliche Anzahl von Bauchlängen in $[s_l, s_{l+1})$ aufgeht folgt

$$\int_{s_l}^{s_{l+1}} f(t) \sin 2^{n_k} t \, dt = 0 \quad (k+1 \leq l \leq n_k - 2) \ .$$

Summiert man nun über die l mit $k+1 \leq l \leq n_k - 2$ so erhält man

$$(*) \qquad \int_{s_{k+1}}^{s_{n_k-1}} f(t) \sin 2^{n_k} t \, dt = 0 \ .$$

Beachte daß $n_k - 1 \geq k+1$ wegen (I), also $s_{n_k-1} \geq s_{k+1}$. Aus (3) folgt leicht, daß f über $[-\pi, \pi]$ uneigentlich Lebesgue-integrierbar ist, also ist $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi, \pi]$, gemäß (3.2.16). Wir finden daher $g \in \mathcal{E}_\omega[-\pi, \pi], h \in \mathcal{L}^1_L[-\pi, \pi]$ mit $f = g + h$. Sei G der ω-Stamm von g mit $G(\pi) = 0$. Für festes k schätzen wir nun ab:

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin 2^{n_k} t \, dI_\omega(t) - C_k \right|$$

$$= \left| \int_{-\pi}^{s_k} + \int_{s_k}^{s_{k+1}} + \int_{s_{k+1}}^{s_{n_k-1}} + \int_{s_{n_k-1}}^{\pi} - C_k \right| \ ;$$

wegen (2) hebt sich das zweite Integral mit C_k weg, so daß dies weiter

$$\leq \left| \int_{-\pi}^{s_k} \right| + \left| \int_{s_{k+1}}^{s_{n_k-1}} \right| + \left| \int_{s_{n_k-1}}^{\pi} \right|$$

$$\leq \epsilon_k + \left| \int_{s_{n_k-1}}^{\pi} \right| ,$$

denn das zweite Integral verschwindet ja gemäß (*). Mit $f = g + h$ haben wir also

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin 2^{n_k} t \, dI_\omega(t) - C_k \right| \leq \epsilon_k + \int_{s_{n_k-1}}^{\pi} |h(t)| \, dt + |A_k| ,$$

(**)

$$A_k := \int_{s_{n_k-1}}^{\pi} g(t) \sin 2^{n_k} t \, dI_\omega(t) .$$

Nach (4.1.1),(i) ist

$$P(x) := G(x) \sin 2^{n_k} t - \int_0^x G(t) 2^{n_k} \cos 2^{n_k} t \, dt$$

ein ω-Stamm zu $g(x) \sin 2^{n_k} x$. Also ist

$$A_k = P(\pi) - P(s_{n_k-1})$$

$$= -G(s_{n_k-1}) \sin 2^{n_k} s_{n_k-1} - 2^{n_k} \int_{s_{n_k-1}}^{\pi} G(t) \cos 2^{n_k} t \, dt ,$$

wobei $G(\pi) = 0$ ausgenutzt wurde. Beachtet man $\pi - s_{n_k-1} = \frac{\pi}{2^{n_k}}$, so ergibt eine elementare Abschätzung

$$|A_k| \leq |G(s_{n_k-1})| + 2^{n_k} \cdot \frac{\pi}{2^{n_k}} \cdot \sup_{s_{n_k-1} \leq t \leq \pi} |G(t)| .$$

Da (n_k) echt aufsteigend ist (siehe (I)) gilt $n_k \uparrow \pi$. Wegen der Stetigkeit von G und $G(\pi) = 0$ bedeutet dies

$$|A_k| \to 0 , \text{ für } k \to \infty .$$

Außerdem gilt für das Lebesgue-integrierbare h sicher

$$\int_{s_{n_k-1}}^{\pi} |h(t)| \, dt \to 0 , \text{ für } k \to \infty .$$

Setzt man beide Ergebnisse in (**) ein, so hat man

$$\lim_{k\to\infty} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin 2^{n_k} t \, dI_\omega(t) - C_k \right| = 0 \, .$$

Setzt man nun noch $m_k := 2^{n_k}$ so erhält man die Behauptung $\diamondsuit$

Zusammen mit Lemma (4.3.14) besagt dieses Beispiel:

(4.3.17) COROLLAR. *Es gibt Funktionen $f \in \mathcal{L}^1_\omega[-\pi,\pi]$ für die die zugehörige Fourier-Reihe fast überall divergiert.*

Dies ist natürlich nicht völlig neu: Schon Kolmogorov zeigte, daß es sogar Funktionen $f \in \mathcal{L}^1_L[-\pi,\pi]$ gibt, deren Fourier-Reihe f.ü. divergiert (siehe [**23**]). Das von Kolmogorov angegebene Beispiel ist allerdings recht kompliziert. Im folgenden Abschnitt (4.4) werden wir noch von diesem Beispiel von Kolmogoroff Gebrauch machen.

(4.4) Fourier-Transformationen über $\mathcal{L}^1_\omega$

Um eine vernünftige Theorie der Fourier-Transformationen über $\mathcal{L}^1_\omega$ aufzubauen, ist es zunächst unumgänglich, aus der reellen eine komplexe Integrationstheorie zu machen. Es ist klar wie dies zu geschehen hat:

(4.4.1) DEFINITION. *Sei $J \subset \mathbf{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : J \to \mathbf{C}$ heißt (I_ω-) integrierbar, wenn der Real- und Imaginärteil von f in $\mathcal{L}^1_\omega$ liegen: $\Re(f), \Im(f) \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$. Die Menge der integrierbaren Funktionen $J \to \mathbf{C}$ wird mit $\mathcal{L}^1_\omega(J, \mathbf{C})$ bezeichnet. Für $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J, \mathbf{C})$ heißt*

$$\int_J f \, dI_\omega := \int_J \Re(f) \, dI_\omega + i \int_J \Im(f) \, dI_\omega$$

das (I_ω-) Integral von f über J.

Für $J =< a, b >$ schreibt man meist wieder $\int_a^b$ statt $\int_J$, für $J = \mathbf{R}$ schreibt man einfach nur $\int$.

Man prüft leicht nach, daß $\mathcal{L}^1_\omega(J, \mathbf{C})$ ein $\mathbf{C}$-Vektorraum ist und daß

$$\int_J dI_\omega : \mathcal{L}^1_\omega(J, \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$$

eine $\mathbf{C}$-lineare Abbildung ist.

Wir wollen nun nicht daran gehen, sämtliche entwickelten Begriffe und Sätze aus der Integrationstheorie auf den komplexen Fall umzuschreiben, dies um so weniger, als sich das meiste ohnehin von selbst übersetzt. Stattdessen wollen wir nur einige, für unser Vorhaben besonders nützliche Sätze ins Komplexe übertragen.

(4.4.2) LEMMA. *Sei $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ eine Funktion für die gilt:*

(i) *$f \in \mathcal{L}^1_\omega([a, b], \mathbf{C})$, für alle $a < b$ aus $\mathbf{R}$.*

(ii) *In $\mathbf{C}$ existiert der Limes*

$$A := \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f \, dI_\omega \, .$$

Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ und es ist

$$\int f \, dI_\omega = A \, .$$

Das ist eine unmittelbare Folgerung aus Satz (3.2.16).

Für eine Funktion $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J, \mathbf{C})$ ist der Begriff des unbestimmten Integrals wie gewohnt definiert: Jede Funktion der Gestalt

$$F(x) = \int_c^x f \, dI_\omega$$

mit einem festen $c \in J$ nennt man ein unbestimmtes Integral von f.

(4.4.3) LEMMA. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega([a,b], \mathbf{C})$, F ein unbestimmtes Integral von f sowie $g \in \mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{C})$. Dann ist auch $fg \in \mathcal{L}^1_\omega([a,b], \mathbf{C})$ und es gilt*

$$\int_a^b fg \, dI_\omega = F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(t)g'(t)\, dt \; .$$

BEWEIS: Offenbar kann man den komplexen Fall sofort durch Zerlegung in Real- und Imaginärteile auf den reellen Fall zurückspielen. Es genügt daher reellwertige f, g zu betrachten.

Nach Lemma (4.1.1),(ii) ist dann jedenfalls $fg \in \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$. Betrachte nun für f eine Zerlegung

$$f = h + k \qquad h \in \mathcal{E}_\omega, k \in \mathcal{L}^1_L \; .$$

Wir zeigen die Behauptung getrennt für h und k an Stelle von f; für $h \in \mathcal{E}_\omega$ folgt sie aber sofort aus (4.1.1),(i) und für $k \in \mathcal{L}^1_L$ ist sie bekanntlich richtig (vergl. etwa [**4**] , §18) $\diamondsuit$

Wie nun sollen wir über $\mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ die Fourier-Transformation definieren? Zunächst scheint sich folgendes anzubieten:
Die Funktion $f \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ heiße Fourier-transformierbar, falls

$$(x \mapsto f(x)e^{-itx}) \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \quad \text{für fast alle } t \in \mathbf{R} \; .$$

In diesem Falle heiße die durch

$$\Phi(f)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-itx} \, dI_\omega(x)$$

f.ü. definierte Funktion $\Phi(f)$ die Fourier-Transformierte von f.

Die weiteren Untersuchungen haben aber eine weitgehende Unfruchtbarkeit diese Konzepts ergeben. Der Hauptgrund hierfür liegt unseres Erachtens darin, daß die bloße Existenz (f.ü.) der Fourier-Integrale eine zu schwache Bedingung ist, um weitere Aussagen über die in diesem Sinne Fourier-transformierbaren $f \in \mathcal{L}^1_\omega$

und deren Fourier-Transformierte zu machen. Wir wollen nicht weiter auf die enormen Schwierigkeiten eingehen, die sich einer in diesem Sinne aufgezogenen Fourier-Theorie entgegenstellen, sondern auf die weiter unten folgende, sehr befriedigende und homogene Theorie verweisen.

Eine Frage wollen wir zuvor noch untersuchen: Sind im obigen Sinne alle $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ Fourier-transformierbar? Die Antwort lautet "nein". Es gilt sogar:

(4.4.4) BEISPIEL. *Es existiert eine Funktion* $f \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ *so daß*

$$(x \mapsto f(x)e^{-itx}) \notin \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C}) ,$$

für fast alle $t \in \mathbf{R}$.

BEWEIS: Zum Beweis benötigen wir ein anderes sehr wichtiges Gegenbeispiel aus der Theorie der Fourier-Reihen: Kolmogorov hat 1923 in der Orginalarbeit [**23**] die Existenz einer reellen Funktion $h \in \mathcal{L}^1_L[-\pi, \pi]$ gezeigt, deren Fourier-Reihe f.ü. divergiert. Seien also a_n, b_n die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion h und $M \subset \mathbf{R}$ eine geeignete Nullmenge, so daß

$$(1) \qquad \sum_1^\infty (a_n \cos nt + b_n \sin nt) \text{ divergiert, } \forall t \in \mathbf{R} \setminus M .$$

Nach dem Riemann-Lebesgue-Lemma (siehe etwa [**17**] , X) gilt aber jedenfalls

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 .$$

Definiere nun über $\mathbf{R}$

$$T_1 := \sum_1^\infty a_n \chi_{[n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})} , \quad T_2 := \sum_1^\infty b_n \chi_{[n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2})} .$$

Man findet nun leicht Funktionen F_1, F_2 die T_1, T_2 glatt interpolieren, und zwar so, daß sich F_i von T_i nur an den Sprungstellen ein wenig unterscheidet $(i = 1, 2)$. Genauer soll gelten:

(3) $F_i \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R})$.

(4) F_i verschwindet auf $(-\infty, 0]$ und es ist

$$\lim_{x\to\infty} F_i(x) = 0 .$$

(5) $G_i := F_i - T_i \in \mathcal{L}^1_L(\mathbf{R})$.

Wegen (3) und (4) gilt $F_1', F_2' \in \mathcal{E}_N \subset \mathcal{E}_\omega$ und daher ist

$$f := F_1' + iF_2' \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C}) .$$

Betrachte nun die Funktion

$$g_t(x) := f(x)e^{-itx} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

für ein $t \in \mathbf{R}$. Ist $g_t \in \mathcal{L}^1_\omega$ so existiert der Limes

$$\begin{aligned} A := \int g_t(x)\, dI_\omega(x) &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{N+\frac{1}{2}} g_t(x)\, dI_\omega(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \int_0^{N+\frac{1}{2}} f(x)e^{-itx}\, dI_\omega(x) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[F(N+\frac{1}{2})e^{-it(N+\frac{1}{2})} + it \int_0^{N+\frac{1}{2}} F(x)e^{-itx}\, dx \right] , \end{aligned}$$

und wegen $F(N+\frac{1}{2}) \to 0$ (siehe (4)) existiert

$$\begin{aligned} A &= \lim_{N\to\infty} it \int_0^{N+\frac{1}{2}} F(x)e^{-itx}\, dx \\ &= \lim_{N\to\infty} it \int_0^{N+\frac{1}{2}} \left((T_1(x) + G_1(x)) + i(T_2(x) + G_2(x)) \right) e^{-itx}\, dx . \end{aligned}$$

Wegen $G_1, G_2 \in \mathcal{L}^1_L$ existiert dieser Limes aber genau dann, wenn der Limes

$$A^* := \lim_{N\to\infty} it \int_0^{N+\frac{1}{2}} (T_1(x) + iT_2(x))e^{-itx}\, dx$$

existiert. Mit der Definition von T_1, T_2 rechnet man leicht nach, daß

$$\begin{aligned} \Im(A^*) &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n \left[\sin(n+\frac{1}{2})t - \sin(n-\frac{1}{2})t \right] \\ &\quad - \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} b_n \left[\cos(n+\frac{1}{2})t - \cos(n-\frac{1}{2})t \right] \\ &= \lim_{N\to\infty} 2\sin\frac{t}{2} \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) . \end{aligned}$$

Wenn dieser Limes existieren soll, gilt entweder $t \in 2\pi\mathbf{Z}$ ($\Leftrightarrow \sin\frac{t}{2} = 0$) oder aber es muß $t \in M$ sein, gemäß (1). Damit ist gezeigt, daß $g_t \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ höchstens für die t aus der Nullmenge $M \cup 2\pi\mathbf{Z}$ richtig sein kann, d.h.

$$(x \mapsto f(x)e^{-itx}) \notin \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C}) ,$$

für fast alle $t \in \mathbf{R}$ $\diamondsuit$

Wir wollen nun die nötigen Vorbereitungen für die von uns angestrebte "bessere" Definition der Fourier-Transformation zusammenstellen. Mit $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbf{R})$ bezeichnen wir den Raum der "schnell abfallenden" Funktionen $\mathbf{R} \to \mathbf{C}$; genauer:

(4.4.5) DEFINITION. *Es sei*

$$\mathcal{S} := \{\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C}) | \sup_{x \in \mathbf{R}} (1 + x^2)^m |\psi^{(m)}(x)| < \infty, \ \forall n, m = 0, 1, 2, \dots \} .$$

Wir setzen voraus, daß der Leser mit dem sogenannten Schwartzschen Raum $\mathcal{S}$ und der Fourier-Transformation auf $\mathcal{S}$ einigermaßen vertraut ist. $\mathcal{S}$ ist ein $\mathbf{C}$-Vektorraum der abgeschlossen ist gegenüber Multiplikation, Multiplikation mit Polynomen, Differentiation, Konjugation, Faltungen sowie den Operationen $\psi \mapsto \check{\psi}$ und der Fourier-Transformation $\psi \mapsto \hat{\psi}$. Dabei ist für eine beliebige Funktion $g : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ die Funktion $\check{g}$ durch die Vorschrift $\check{g}(x) := g(-x)$ erklärt; ist $\psi \in \mathcal{S}$ so definiert man die Fourier-Transformierte $\hat{\psi} \in \mathcal{S}$ durch die Vorschrift

$$\hat{\psi}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \psi(x)e^{-itx}\, dx \qquad (t \in \mathbf{R}) .$$

Wir fassen die für uns wichtigsten Eigenschaften der Fourier-Transformation in folgendem Satz zusammen und verweisen für Einzelheiten auf [**8**] .

(4.4.6) SATZ. *Die Fourier-Transformation ist eine bijektive, $\mathbf{C}$-lineare Abbildung von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}$. Für alle $\phi, \psi \in \mathcal{S}$ gilt:*

(i) $(x\psi)\hat{} = i\hat{\psi}'$.
(ii) $(\hat{\psi})\hat{} = \check{\psi}$.
(iii) $(\psi * \phi)\hat{} = \sqrt{2\pi}\hat{\psi}\hat{\phi}$.
(iv) $\sqrt{2\pi}(\psi\phi)\hat{} = \hat{\psi} * \hat{\phi}$.

Dabei steht in (i) $x\psi$ natürlich nur abkürzend für die Funktion $x \mapsto x\psi(x)$.

(4.4.7) DEFINITION. *Eine Funktion $F : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ heißt polynomial beschränkt, wenn es ein $M \geq 0$ und ein $m \in \{0, 1, 2, \dots\}$ gibt, so daß*

$$|F(x)| \leq M(1 + x^2)^m \qquad \forall x \in \mathbf{R} .$$

Mit $\mathcal{P}_\omega = \mathcal{P}_\omega(\mathbf{R})$ *bezeichnen wir die Menge aller* $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ *für die gilt*

(i) $f \in \mathcal{L}^1_\omega(J, \mathbf{C})$, *für jedes kompakte Intervall* $J \subset \mathbf{R}$.

(ii) *Ist* F *ein unbestimmtes Integral von* f, *so ist* F *polynomial beschränkt.*

Da sich zwei unbestimmte Integrale von $f \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ höchstens um eine komplexe Konstante unterscheiden können, hängt das Erfülltsein von (ii) nicht von der Wahl von F ab. Man macht sich ferner leicht klar: Ist $G : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ polynomial beschränkt und etwa stetig, so ist $G\psi$ Lebesgue-integrierbar, für alle $\psi \in \mathcal{S}$. Wir werden dies im weiteren Verlauf häufig und manchmal ohne besonderen Hinweis ausnutzen.

Offenbar ist das oben definierte $\mathcal{P}_\omega$ ein $\mathbf{C}$-Vektorraum und es gilt

$$\mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \subset \mathcal{P}_\omega \ .$$

Das nächste Lemma ist von höchster praktischer Wichtigkeit.

(4.4.8) LEMMA. *Seien* $f \in \mathcal{P}_\omega, \psi \in \mathcal{S}$ *und* F *ein unbestimmtes Integral von* f. *Dann hat man*

$$f\psi \in \mathcal{L}^1_\omega(\mathbf{R}, \mathbf{C}) \ , \ F\psi' \in \mathcal{L}^1_L(\mathbf{R}, \mathbf{C})$$

und es gilt die Formel

$$\int f\psi \, dI_\omega = -\int F(x)\psi'(x)\, dx \quad \text{(Partielle Integration)} \ .$$

BEWEIS: Wegen der polynomialen Beschränktheit von F ist $F\psi'$ Lebesgue-integrierbar. Für $a \leq b$ aus $\mathbf{R}$ gilt nach Lemma (4.4.3): $f\psi \in \mathcal{L}^1_\omega([a,b], \mathbf{R})$ und

$$\int_a^b f\psi \, dI_\omega = F(b)\psi(b) - F(a)\psi(a) - \int_a^b F(x)\psi'(x)\, dx \ .$$

Da F polynomial beschränkt ist und da $\psi \in \mathcal{S}$ ist gilt aber

$$\lim_{a \to -\infty} F(a)\psi(a) = \lim_{b \to \infty} F(b)\psi(b) = 0 \ .$$

Also existiert der Grenzwert

$$A := \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \int_a^b f\psi \, dI_\omega = -\int F(x)\psi'(x)\, dx$$

und die Behauptung folgt aus Lemma (4.4.2) $\diamond$

Insbesondere ist daher für alle $f \in \mathcal{P}_\omega, \psi \in \mathcal{S}$ die Faltung $f * \psi$ durch

$$f * \psi(t) := \int f(x)\psi(t-x)\, dI_\omega(x) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

erklärt. Man beachte ferner: Ist $f \in \mathcal{P}_\omega$ und F ein unbestimmtes Integral von f, so gilt wegen Satz (3.2.17) die Beziehung $F' = f$ f.ü.

(4.4.9) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{P}_\omega$, F ein unbestimmtes Integral von f und $x \in \mathbf{R}$ ein Punkt in dem $F'(x) = f(x)$. Sei ferner $\psi \in \mathcal{S}$ mit $\int \psi(x)\, dx = 1$. Dann gilt*

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} f * \psi_\lambda(x) = f(x)\ ,$$

d.h. dies gilt für fast alle $x \in \mathbf{R}$.

BEWEIS: Nach Lemma (4.4.8) gilt

$$\begin{aligned} f * \psi_\lambda(x) &= \int f(t)\psi_\lambda(x-t)\, dI_\omega(t) \\ &= \int F(x)\psi'_\lambda(x-t)\, dt \end{aligned}$$

und somit nach Substitution $x - t = u$

$$f * \psi_\lambda(x) = \int F(x-u)\psi'_\lambda(u)\, du\ . \tag{1}$$

Nun ist aber F in x differenzierbar. Definiert man daher

$$\chi(u) := \begin{cases} \frac{F(x)-F(x-u)}{u} - f(x) & \text{für } u \neq 0 \\ 0 & \text{für } u = 0 \end{cases}$$

so ist χ stetig, es ist $\chi(0) = 0$ und χ ist (wie man sich leicht überlegt) polynomial beschränkt, da F polynomial beschränkt ist. Man hat

$$F(x-u) = F(x) - u(f(x) + \chi(u)) \qquad \forall u \in \mathbf{R}\ .$$

Setzt man dies in (1) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &f * \psi_\lambda(x) = A(\lambda) + B(\lambda) + C(\lambda) \quad \text{mit} \\ &A(\lambda) := F(x) \int \psi'_\lambda(u)\, du\ , \\ &B(\lambda) := -f(x) \int u\psi'_\lambda(u)\, du\ , \\ &C(\lambda) := -\int u\chi(u)\psi'_\lambda(u)\, du\ . \end{aligned} \tag{2}$$

Natürlich ist

$$A(\lambda) = 0 \,. \tag{3}$$

Durch partielle Integration findet man leicht

$$\begin{aligned} \int u\psi'_\lambda(u)\,du &= -\int \psi_\lambda(u)\,du \\ &= -\int \frac{1}{\lambda}\psi\left(\frac{u}{\lambda}\right) du = -\int \psi(v)\,dv = -1 \,, \end{aligned}$$

und somit gilt

$$B(\lambda) = f(x) \,. \tag{4}$$

Zur Berechnung von $C(\lambda)$ definieren wir zunächst $\phi \in \mathcal{S}$ durch $\phi(x) := x\psi'(x)$. Man überprüft, daß $x\psi'_\lambda(x) = \phi_\lambda(x)$ und somit

$$\begin{aligned} C(\lambda) &= -\int \chi(u)\phi_\lambda(u)\,du \\ &= -\left[\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} + \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} + \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \chi(u)\phi_\lambda(u)\,du\right] . \end{aligned} \tag{5}$$

Nun ist etwa

$$\begin{aligned} \left|\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} \chi(u)\phi_\lambda(u)\,du\right| &\le \sup_{|u|\le\sqrt{\lambda}} |\chi(u)| \cdot \int |\phi_\lambda(u)|\,du \\ &= \sup_{|u|\le\sqrt{\lambda}} |\chi(u)| \cdot \int |\phi(u)|\,du \to 0 \,, \end{aligned}$$

für $\lambda \to 0$, da χ stetig und $\chi(0) = 0$. Wie oben bemerkt, ist χ polynomial beschränkt, also etwa

$$|\chi(u)| \le M(1+u^2)^m \qquad (u \in \mathbf{R}) \,,$$

für geeignete M, m. Daraus folgt, etwa für $0 < \lambda \le 1$

$$\left|\int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \chi(u)\phi_\lambda(u)\,du\right| \le \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} M(1+u^2)^m |\phi_\lambda(u)|\,du \,,$$

was nach Substitution $y = \frac{u}{\lambda}$ übergeht in

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{\infty} M(1+\lambda^2 y^2)^m |\phi(y)|\, dy$$

$$\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}^{\infty} M(1+y^2)^m |\phi(y)|\, dy\ .$$

Hier steht jedoch im Integranden eine gewöhnliche Lebesgue-integrierbare Funktion. Da $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \to \infty$ für $\lambda \to 0$ folgt hieraus

$$\left| \int_{\sqrt{\lambda}}^{\infty} \chi(u)\phi_\lambda(u)\, du \right| \to 0$$

und ganz analog gilt

$$\left| \int_{-\infty}^{-\sqrt{\lambda}} \chi(u)\phi_\lambda(u)\, du \right| \to 0\ .$$

Beachtet man all dies in (5) so erhält man

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} C(\lambda) = 0\ . \tag{6}$$

Einsetzen von (3),(4) und (6) in (2) ergibt jetzt die Behauptung des Satzes ◇

Spezielle Funktionen aus $\mathcal{S}$ sind die Funktionen

$$x \mapsto e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 \pm ixt} \qquad (\lambda > 0, t \in \mathbf{R})\ .$$

Im Hinblick auf (4.4.8) ist daher folgende Definition sinnvoll:

(4.4.10) DEFINITION. *Für $\lambda > 0$ und $f \in \mathcal{P}_\omega$ definiert man*

$$\Phi_\lambda(f), \overline{\Phi}_\lambda(f) : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$$

durch die Vorschriften

$$\Phi_\lambda(f)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt}\, dI_\omega(x)\ ,$$

$$\overline{\Phi}_\lambda(f)(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 + ixt}\, dI_\omega(x) \qquad (t \in \mathbf{R})\ .$$

(4.4.11) SATZ. *Für $f \in \mathcal{P}_\omega$ und $\lambda > 0$ ist*

$$\Phi_\lambda(f), \overline{\Phi}_\lambda(f) \in \mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{P}_\omega \ .$$

BEWEIS: Nach Lemma (4.4.8) ist für $t \in \mathbf{R}$ z.B.

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(f)(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt}\, dI_\omega(x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(x)(\lambda x + it) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt}\, dx \ .\end{aligned}$$

Mit bekannten Sätzen über die Differenzierbarkeit Parameter-abhängiger Integrale (siehe etwa [**16**] , §11) schließt man aus dieser Darstellung leicht, daß $\Phi_\lambda(f) \in \mathcal{C}^\infty$, wobei natürlich die polynamiale Beschränktheit von F ausgenutzt wird. Ferner folgt aus dieser Darstellung

$$\begin{aligned}|\Phi_\lambda(f)(t)| &\leq C_1 + C_2 t \qquad \text{wobei} \\ C_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \lambda |xF(x)| e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\, dx \ , \\ C_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int |F(x)| e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\, dx \ .\end{aligned}$$

Hieraus folgt sofort die polynomiale Beschränktheit der unbestimmten Integrale von $\Phi_\lambda(f)$. Analog verfährt man mit $\overline{\Phi}_\lambda(f)$ $\diamond$

Als nächstes ordnen wir jedem $\psi \in \mathcal{S}$ ein lineares Funktional $\Lambda_\psi : \mathcal{P}_\omega \to \mathbf{C}$ zu, durch die Vorschrift

$$\Lambda_\psi(f) := \int f\psi\, dI_\omega \ .$$

Offenbar ist dann

$$\tilde{\mathcal{S}} := \{\Lambda_\psi \mid \psi \in \mathcal{S}\}$$

ein $\mathbf{C}$-Vektorraum. $\tilde{\mathcal{S}}$ erweist sich als punktetrennend auf $\mathcal{P}_\omega$, d.h. sind $f, g \in \mathcal{P}_\omega$ und ist nicht $f = g$ f.ü. (fast überall gleiche Funktionen aus $\mathcal{P}_\omega$ werden wieder identifiziert), so gibt es ein $\Lambda_\psi \in \tilde{\mathcal{S}}$ mit $\Lambda_\psi(f) \neq \Lambda_\psi(g)$. Aus Linearitätsgründen müssen wir zum Beweis lediglich zeigen:

(4.4.12) LEMMA. *Ist $f \in \mathcal{P}_\omega$ und ist nicht $f = 0$ f.ü., so gibt es ein $\Lambda_\psi \in \tilde{\mathcal{S}}$ mit $\Lambda_\psi(f) \neq 0$.*

BEWEIS: Sei $A := \{f \neq 0\}$ so daß $\lambda(A) > 0$. Nach Satz (4.4.9) gilt für ein $\phi \in \mathcal{S}$ mit $\int \phi(x)\, dx = 1$

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} f * \phi_\lambda(x) = f(x) \ ,$$

für fast alle $x \in \mathbf{R}$. Wegen $\lambda(A) > 0$ gilt dies dann aber auch für ein $x_0 \in A$:

$$f * \phi_\lambda(x_0) \to f(x_0) \neq 0 .$$

Für ein hinreichend kleines λ_0 ist daher

$$\int f(t)\phi_{\lambda_0}(x_0 - t)\, dI_\omega(t) = f * \phi_{\lambda_0}(x_0) \neq 0 .$$

Definiert man daher $\psi \in \mathcal{S}$ durch

$$\psi(x) := \phi_{\lambda_0}(x_0 - x) \qquad (x \in \mathbf{R}) ,$$

so gilt $\Lambda_\psi(f) \neq 0$ $\diamond$

Der Raum $\tilde{\mathcal{S}}$ induziert nun (als punktetrennender Vektorraum linearer Funktionale) bekanntlich eine schwache Topologie auf $\mathcal{P}_\omega$. Wir können auf Einzelheiten dieser Konstruktion hier natürlich nicht eingehen und verweisen z.B. auf [8] ,Theorem 3.10 . Statdessen stellen wir nur zusammen, was die allgemeinen Resultate der Funktional-Analysis für unsere konkrete Situation bedeuten:

(1) Die Familie der Mengen

$$U_\epsilon(g;\psi) := \{f \in \mathcal{P}_\omega \mid |\Lambda_\psi(f - g)| < \epsilon\}$$
$$(\epsilon > 0, g \in \mathcal{P}_\omega, \psi \in \mathcal{S})$$

bildet die Subbasis einer Topologie auf $\mathcal{P}_\omega$, die wir die $\mathcal{S}$-Topologie von $\mathcal{P}_\omega$ nennen wollen.

(2) Hierdurch wird $\mathcal{P}_\omega$ zu einem lokal-konvexen topologischen Vektorraum, dessen Dualraum gerade $\tilde{\mathcal{S}}$ ist.

Der Terminus "topologischer Vektorraum" impliziert dabei immer "Hausdorffraum". Wichtig ist ferner die Charakterisierung der Konvergenz in $\mathcal{P}_\omega$:

(3) Sind $f_n, f \in \mathcal{P}_\omega$ so gilt $f_n \to f$ (bzgl. der $\mathcal{S}$-Topologie) genau dann, wenn

$$\Lambda_\psi(f_n) \to \Lambda_\psi(f) \qquad \forall \psi \in \mathcal{S} .$$

Gilt $f_n \to f$ in der $\mathcal{S}$-Topologie von $\mathcal{P}_\omega$, so werden wir hierfür oft

$$f_n \to f \ (\mathcal{S}) \text{ oder } f = \mathcal{S} - \lim_{n\to\infty} f_n$$

schreiben. Ähnlich schreiben wir

$$f_\lambda \to f \ (\mathcal{S}) \text{ oder } f = \mathcal{S} - \lim_{\lambda \downarrow 0} f_\lambda$$

wenn $f_\lambda \to f$ in der $\mathcal{S}$-Topologie für $\lambda \downarrow 0$. Natürlich ist dies genau dann der Fall, wenn

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \Lambda_\psi(f_n) = \Lambda_\psi(f) \qquad \forall \psi \in \mathcal{S} \ .$$

Die angestrebte Definition der Fourier-Transformation lautet nun:

(4.4.13) DEFINITION. *$f \in \mathcal{P}_\omega$ heißt (schwach) Fourier-transformierbar, falls*

$$\Phi(f) := \mathcal{S} - \lim_{\lambda \downarrow 0} \Phi_\lambda(f)$$

in $\mathcal{P}_\omega$ existiert. In diesem Falle heißt $\Phi(f) \in \mathcal{P}_\omega$ die (schwache) Fourier-Transformierte von f. Die Menge der (schwach) Fourier-transformierbaren Funktionen aus $\mathcal{P}_\omega$ wird mit $\mathcal{F}_\omega$ notiert.

Nach (4.4.11) ist für $f \in \mathcal{P}_\omega$ und $\lambda > 0$ stets $\Phi_\lambda(f) \in \mathcal{P}_\omega$, die Definition ist also sinnvoll. Ganz offensichtlich ist $\mathcal{F}_\omega$ ein $\mathbf{C}$-Vektorraum und

$$\Phi : \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{P}_\omega \ , \ f \mapsto \Phi(f)$$

ist eine $\mathbf{C}$-lineare Abbildung.

(4.4.14) LEMMA. *Die Räume $\mathcal{L}^1_\omega, \mathcal{P}_\omega, \mathcal{F}_\omega$ sind abgeschlossen gegenüber der Operation $g \mapsto \check{g}$. Speziell für $g \in \mathcal{L}^1_\omega$ gilt stets*

$$\int g \, dI_\omega = \int \check{g} \, dI_\omega \ .$$

Wir werden dieses Lemma ab und zu benutzen, wollen aber den einfachen Beweis hier übergehen.

(4.4.15) LEMMA. *Ist $f \in \mathcal{F}_\omega$ so gilt*

$$(\Phi(f))^\vee = \mathcal{S} - \lim_{\lambda \downarrow 0} \overline{\Phi}_\lambda(f) \ .$$

BEWEIS: Wegen dem letzten Lemma haben wir für beliebiges $\psi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
\Lambda_\psi(\overline{\Phi}_\lambda(f)) &= \int \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 + ixt} \, dI_\omega(x) \right] \psi(t) \, dI_\omega(t) \\
&= \int \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt} \, dI_\omega(x) \right] \psi(-t) \, dI_\omega(t) \\
&= \int \Phi_\lambda(f)(t) \check{\psi}(t) \, dI_\omega(t) \ .
\end{aligned}$$

Wegen $\Phi_\lambda(f) \to \Phi(f)$ $(\mathcal{S})$ folgt

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \Lambda_\psi(\overline{\Phi}_\lambda(f)) = \int \Phi(f)(t)\check{\psi}(t)\, dI_\omega(t)$$

und dies ist nach (4.4.14)

$$= \int (\Phi(f))^\vee(t)\psi(t)\, dI_\omega(t)$$
$$= \Lambda_\psi((\Phi(f))^\vee) .$$

Da dies für alle $\psi \in \mathcal{S}$ richtig ist, bedeutet das gerade die Behauptung des Satzes $\diamondsuit$

Nach Lemma (4.4.15) ist folgende Definition sinnvoll:

(4.4.16) DEFINITION. *Durch die Vorschrift*

$$\overline{\Phi}(f) := \mathcal{S} - \lim_{\lambda \downarrow 0} \overline{\Phi}_\lambda(f) \qquad (f \in \mathcal{F}_\omega)$$

wird die (schwache) Fourier-Rücktransformation

$$\overline{\Phi} : \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{P}_\omega$$

definiert. Bemerkung: Es gilt hierbei

$$\overline{\Phi}(f) = (\Phi(f))^\vee \qquad (f \in \mathcal{F}_\omega) .$$

Versieht man $\mathcal{P}_\omega$ mit der $\mathcal{S}$-Topologie, so ist, wie man leicht nachprüft, die Konjugation $g \mapsto \overline{g}$ eine stetige Abbildung, was wir noch an einigen Stellen benutzen werden. Die Konjugation führt nicht aus $\mathcal{F}_\omega \subset \mathcal{P}_\omega$ heraus:

(4.4.17) SATZ. *Ist $f \in \mathcal{F}_\omega$ so sind auch $\overline{f}, \Re(f), \Im(f) \in \mathcal{F}_\omega$ und es gelten die Formeln*

$$\Phi(\overline{f}) = \overline{(\Phi(f))^\vee} = \overline{\overline{\Phi}(f)} , \quad \overline{\Phi(f)} = \overline{\Phi}(\overline{f}) .$$

BEWEIS: Nach (4.4.16) gilt (in $\mathcal{P}_\omega$ bzgl. der $\mathcal{S}$-Topologie)

(1) $$\overline{\Phi}_\lambda(f) \to \overline{\Phi}(f) = (\Phi(f))^\vee .$$

Nun prüft man leicht nach, daß für $\lambda > 0$

(2) $$\Phi_\lambda(\overline{f}) = \overline{\overline{\Phi}_\lambda(f)} .$$

Mit der oben bemerkten Stetigkeit der Konjugation ergeben (1) und (2)

$$\Phi_\lambda(\overline{f}) = \overline{\overline{\Phi}_\lambda(f)} \to \overline{\overline{\Phi}(f)} = \overline{(\Phi(f))^\vee} \in \mathcal{P}_\omega \ .$$

Daher ist $\overline{f} \in \mathcal{F}_\omega$ und die erste der angegebenen Formeln ist richtig; die zweite erhält man sofort aus der ersten, wenn man $\overline{f}$ an Stelle von f schreibt und anschließend konjugiert.

Nun sind natürlich mit $f \in \mathcal{F}_\omega$ auch

$$\Re(f) = \frac{1}{2}(f + \overline{f}) \in \mathcal{F}_\omega \ , \ \Im(f) = \frac{1}{2i}(f - \overline{f}) \in \mathcal{F}_\omega \ ,$$

da $\mathcal{F}_\omega$ ein $\mathbf{C}$-Vektorraum ist $\diamondsuit$

(4.4.18) LEMMA. *Sind $f \in \mathcal{P}_\omega, \psi \in \mathcal{S}$ so gilt:*

(i) $f * \psi \in \mathcal{C}^\infty \cap \mathcal{P}_\omega$.

(ii) $f * \psi$ *ist polynomial beschränkt.*

BEWEIS: Für $t \in \mathbf{R}$ ist nach Lemma (4.4.8)

$$\begin{aligned} f * \psi(t) &= \int f(x)\psi(t-x)\, dI_\omega(x) \\ &= \int F(x)\psi'(t-x)\, dx \ , \end{aligned} \tag{1}$$

wobei F ein unbestimmtes Integral von f ist. Da F polynomial beschränkt ist und da $\psi' \in \mathcal{S}$, schließt man leicht mit Hilfe einschlägiger Sätze über parameterabhängige Integrale, daß $f * \psi \in \mathcal{C}^\infty$. Daher ist gewiß $f * \psi \in \mathcal{L}^1_\omega(J)$, für jedes kompakte Intervall $J \subset \mathbf{R}$.

Nun ist F polynomial beschränkt, etwa

$$|F(x)| \leq M(1 + x^2)^m \qquad (x \in \mathbf{R}) \ ,$$

für geeignete M, m. Aus der Darstellung (1) erhalten wir mit geeigneten $a_{kl} \geq 0$ und für alle $t \in \mathbf{R}$

$$\begin{aligned} |f * \psi(t)| &\leq \int |F(x)| \cdot |\psi'(t-x)|\, dx \\ &= \int |F(t-x)| \cdot |\psi'(x)|\, dx \\ &\leq \int \sum_{k,l=0}^{2m} a_{k,l}|t|^k|x|^l|\psi'(x)|\, dx \\ &= \sum_{k,l=0}^{2m} |t|^k a_{kl} \int |x|^l|\psi'(x)|\, dx \ , \end{aligned}$$

woraus man sofort auf die polynomiale Beschränktheit von $f * \psi$ schließt. Dann ist natürlich auch jedes unbestimmte Integral von $f * \psi$ polynomial beschränkt und der Rest von (1) ist ebenfalls gezeigt $\diamondsuit$

(4.4.19) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{P}_\omega$ und $\phi \in \mathcal{S}$ mit $\int \phi(x)\,dx = 1$. Dann gilt*

$$f = \mathcal{S} - \lim_{\lambda \downarrow 0} f * \phi_\lambda \ .$$

BEWEIS: Nach Lemma (4.4.8) ist für $t \in \mathbf{R}$

$$f * \phi_\lambda(t) = \int F(x)\phi'_\lambda(t-x)\,dx \ ,$$

wenn F ein unbestimmtes Integral von f ist. Nach dem letzten Satz ist jedes $f * \phi_\lambda$ polynomial beschränkt (und stetig), so daß $(f * \phi_\lambda)\psi$ Lebesgue-integrierbar, für alle $\psi \in \mathcal{S}$. Für solche ψ ist also

$$\Lambda_\psi(f * \phi_\lambda) = \int \left[\int F(x)\phi'_\lambda(t-x)\,dx \right] \psi(t)\,dt \ .$$

Da F polynomial beschränkt ist und da $\psi, \phi_\lambda \in \mathcal{S}$, ist sicher

$$u_\lambda(x,t) := F(x)\phi'_\lambda(t-x)\psi(t) \qquad ((x,t) \in \mathbf{R}^2)$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$. Wir können deshalb Fubini anwenden und bekommen

$$\Lambda_\psi(f * \phi_\lambda) = \int F(x) \left[\int \phi'_\lambda(t-x)\psi(t)\,dt \right] dx \ ,$$

was nach partieller Integration des inneren Integrals

$$= -\int F(x) \left[\int \phi_\lambda(t-x)\psi'(t)\,dt \right] dx$$

$$= -\int F(x) \left[\int \phi_\lambda(y)\psi'(x+y)\,dy \right] dx$$

was nach einem erneuten Fubini-Argument

$$= \int \left[-\int F(x)\psi'(x+y)\,dx \right] \phi_\lambda(y)\,dy$$

und dies ist gemäß (4.4.8)

$$= \int \left[\int f(x)\psi'(x+y)\, dI_\omega(x) \right] \phi_\lambda(y)\, dy$$
$$= \int \left[\int f(x)\psi(x-y)\, dI_\omega(x) \right] \phi_\lambda(-y)\, dy$$
$$= \int f * \check{\psi}(y)\phi_\lambda(0-y)\, dy$$
$$= (f * \check{\psi}) * \phi_\lambda(0) \ .$$

Nach dem letzten Lemma ist $f * \check{\psi}$ stetig und in $\mathcal{P}_\omega$. Dann ist jedes unbestimmte Integral von $f * \check{\psi}$ überall differenzierbar und hat $f * \check{\psi}$ zur Ableitung. Die Anwendung von (4.4.9) ergibt daher für $\lambda \downarrow 0$

$$(f * \check{\psi}) * \phi_\lambda(0) \to f * \check{\psi}(0) = \int f(x)\psi(x)\, dI_\omega(x) = \Lambda_\psi(f) \ .$$

Das bedeutet aber nach dem oben gezeigten

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \Lambda_\psi(f * \phi_\lambda) = \lim_{\lambda \downarrow 0} (f * \check{\psi}) * \phi_\lambda(0) = \Lambda_\psi(f) \ ,$$

für unser beliebiges $\psi \in \mathcal{S}$; also gilt

$$f * \psi_\lambda \to f \ (\mathcal{S}) \ ,$$

wie behauptet $\diamond$

(4.4.20) SATZ. *Sei $\phi \in \mathcal{S}$ definiert durch*

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad (x \in \mathbf{R}) \ .$$

Dann gilt für alle $f \in \mathcal{F}_\omega$ und $\lambda > 0$

$$\Phi_\lambda(\overline{\Phi}(f)) = f * \phi_{\sqrt{\lambda}} \ .$$

BEWEIS: Für $t \in \mathbf{R}$ ist

$$\Phi_\lambda(\overline{\Phi}(f))(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \overline{\Phi}(f)(u) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - iut}\, dI_\omega(u) \ .$$

Nun liegt der hier auftretende e-Faktor, als Funktion von u, sicherlich in $\mathcal{S}$. Da $\overline{\Phi}_\mu(f) \to \overline{\Phi}(f)$ $(\mathcal{S})$ für $\mu \downarrow 0$, erhalten wir

$$\Phi_\lambda(\overline{\Phi}(f))(t) = \lim_{\mu \downarrow 0} A_\mu(t) \quad \text{mit}$$

(1)
$$A_\mu(t) := \frac{1}{2\pi} \int \left[\int f(x) e^{-\frac{\mu}{2}x^2 + ixt}\, dI_\omega(x) \right] e^{-\frac{\lambda}{2}u^2 - iut}\, dI_\omega(u) \ ,$$

und mit Lemma (4.4.8) gilt

$$A_\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int \left[\int F(x)(\mu x - iu) e^{-\frac{\mu}{2}x^2 + iux}\, dx \right] e^{-\frac{\lambda}{2}u^2 - iut}\, dI_\omega(u) \ .$$

Wegen der polynomialen Beschränktheit von F ist

$$h_t(x,u) := F(x)(\mu x - iu) e^{-\frac{\mu}{2}x^2 + iux} e^{-\frac{\lambda}{2}u^2 - iut} \qquad ((x,u) \in \mathbf{R}^2)$$

sicher eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$. Nach Fubini ist aus diesem Grunde

$$A_\mu(t) = \frac{1}{2\pi} \int F(x) e^{-\frac{\mu}{2}x^2} \left[\int (\mu x - iu) e^{-\frac{\lambda}{2}u^2 - iu(t-x)}\, du \right] dx \ .$$

Nach der etwas mühsamen aber elementaren Berechnung des inneren Integrals erhält man

$$A_\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int F(x) e^{-\frac{\mu}{2}x^2} (\mu x - \frac{t-x}{\lambda}) e^{-\frac{(t-x)^2}{2\lambda}}\, dx \ .$$

Der Betrag des Integranden bleibt, etwa für $0 < \mu \leq 1$, durch die Lebesgue-integrierbare Funktion

$$g_t(x) := |F(x)| \left(|x| + \left| \frac{t-x}{\lambda} \right| \right) e^{-\frac{(t-x)^2}{2\lambda}} \qquad (x \in \mathbf{R})$$

beschränkt. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz ist deshalb

$$\lim_{\mu \downarrow 0} A_\mu(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int F(x) \left(-\frac{t-x}{\lambda} \right) e^{-\frac{(t-x)^2}{2\lambda}}\, dx \ ,$$

was mit dem im Satz angegebenen ϕ

$$\begin{aligned} &= -\int F(x) \phi'_{\sqrt{\lambda}}(t-x)\, dx \\ &= \int f(x) \phi_{\sqrt{\lambda}}(t-x)\, dI_\omega(x) \\ &= f * \phi_{\sqrt{\lambda}}(t) \ . \end{aligned}$$

Das Einsetzen dieser Beziehung in (1) ergibt nun die Behauptung des Satzes $\diamondsuit$

(4.4.21) SATZ. *Ist $f \in \mathcal{F}_\omega$ so sind auch $\Phi(f), \overline{\Phi}(f) \in \mathcal{F}_\omega$ und es gilt*

$$\Phi(\overline{\Phi}(f)) = \overline{\Phi}(\Phi(f)) = f \qquad \forall f \in \mathcal{F}_\omega \ .$$

BEWEIS: Sei $f \in \mathcal{F}_\omega$ gegeben. Nach dem letzten Satz ist

$$\Phi_\lambda(\overline{\Phi}(f)) = f * \phi_{\sqrt{\lambda}} \qquad (\lambda > 0)$$

wobei

$$\phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} .$$

Bekanntlich ist $\int \phi(x)\, dx = 1$. Mit (4.4.20) und (4.4.19) folgt für $\lambda \downarrow 0$

$$\Phi_\lambda(\overline{\Phi}(f)) = f * \phi_{\sqrt{\lambda}} \to f \ (\mathcal{S}) .$$

Das bedeutet aber nichts anderes als

(1) $$\overline{\Phi}(f) \in \mathcal{F}_\omega \ , \ \Phi(\overline{\Phi}(f)) = f \ .$$

Nach Satz (4.4.17) ist auch $\overline{f} \in \mathcal{F}_\omega$, nach dem eben gezeigten ist also auch $\overline{\Phi}(\overline{f}) \in \mathcal{F}_\omega$. Anwendung der Formel aus (4.4.17) ergibt unter Beachtung von (1)

$$\Phi(f) = \Phi(\overline{\overline{f}}) = \overline{\overline{\Phi}(\overline{f})} \in \mathcal{F}_\omega \ ,$$

da $\mathcal{F}_\omega$ abgeschlossen unter Konjugation ist. Anwendung der Formeln aus (4.4.17) ergibt nun

$$\overline{\Phi}(\Phi(f)) = \overline{\Phi(\overline{\Phi}(f))} = \overline{\Phi(\overline{\Phi}(\overline{f}))} \ ,$$

was aber wegen (1)

$$= \overline{\overline{f}} = f \ ,$$

womit alles gezeigt ist $\diamond$

Wir haben damit gezeigt, daß $\Phi, \overline{\Phi}$ bijektive, lineare Abbildungen von $\mathcal{F}_\omega$ auf sich sind und daß $\Phi^{-1} = \overline{\Phi}$, so wie wir es nach der klassischen Fourier-Theorie erwarteten.

Wir wollen nun zeigen, daß Φ und $\overline{\Phi}$ auch stetig sind (bzgl. der auf $\mathcal{F}_\omega$ induzierten $\mathcal{S}$-Topologie). Als Vorbereitung brauchen wir den folgenden, auch an sich interessanten Satz.

(4.4.22) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{F}_\omega, \psi \in \mathcal{S}$. Dann gilt*

$$\Lambda_\psi(\Phi(f)) = \Lambda_{\hat{\psi}}(f) \ .$$

BEWEIS: Da $\Phi(f) = \mathcal{S} - \lim_{\lambda \downarrow 0} \Phi_\lambda(f)$ ist, gilt

$$\begin{aligned} \Lambda_\psi(\Phi(f)) &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \Lambda_\psi(\Phi_\lambda(f)) \\ &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \int \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt}\, dI_\omega(x) \right] \psi(t)\, dI_\omega(t) \end{aligned}$$

was nach Lemma (4.4.8)

$$= \lim_{\lambda \downarrow 0} \int \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(x)(\lambda x + it) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt}\, dx \right] \psi(t)\, dI_\omega(t) \ ,$$

wobei F ein unbestimmtes Integral von f ist. Da F polynomial beschränkt ist, ist

$$g_\lambda(x,t) := F(x)(\lambda x + it) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt} \psi(t) \quad ((x,t) \in \mathbf{R}^2)$$

eine gewöhnliche, Lebesgue-integrierbare Funktion $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$. Daher darf man Fubini anwenden und erhält

$$\Lambda_\psi(\Phi(f)) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int F(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int (\lambda x + it)\psi(t) e^{-ixt}\, dt \right] dx \ ,$$

und somit ist unter Beachtung von (4.4.6),(i)

$$\Lambda_\psi(\Phi(f)) = \lim_{\lambda \downarrow 0} \int F(x) \left[\lambda x \hat{\psi}(x) - \hat{\psi}'(x) \right] e^{-\frac{\lambda}{2}x^2}\, dx \ . \tag{1}$$

Da F polynomial beschränkt ist, läßt sich der Betrag des Integranden, etwa für $0 < \lambda \leq 1$, durch die Lebesgue-integrierbare Funktion

$$h(x) := |F(x)|(|x| \cdot |\hat{\psi}(x)| + |\hat{\psi}'(x)|)$$

abschätzen. Man darf daher den Satz über die majorisierte Konvergenz anwenden und erhält in (1)

$$\begin{aligned} \Lambda_\psi(\Phi(f)) &= -\int F(x)\hat{\psi}'(x)\, dx \\ &= \int f(x)\hat{\psi}(x)\, dI_\omega(x) \\ &= \Lambda_{\hat{\psi}}(f) \ , \end{aligned}$$

wie gewünscht, wobei wieder Lemma (4.4.8) angewendet wurde $\diamondsuit$

Nun ist es ein Leichtes, die Stetigkeit von Φ und $\overline{\Phi}$ zu zeigen:
Sind etwa $f_n, f \in \mathcal{F}_\omega$ und gilt $f_n \to f$ $(\mathcal{S})$, so gilt für ein beliebiges $\psi \in \mathcal{S}$

$$\Lambda_\psi(\Phi(f_n)) = \Lambda_{\hat{\psi}}(f_n) \to \Lambda_{\hat{\psi}}(f) = \Lambda_\psi(\Phi(f)) \ ,$$

gemäß dem letzten Satz. Dies zeigt die Stetigkeit von Φ. Die von $\overline{\Phi}$ folgt nun leicht aus (4.4.17) durch

$$\overline{\Phi}(f) = \overline{\Phi(\overline{f})} \qquad \forall f \in \mathcal{F}_\omega \ ,$$

da, wie bereits erwähnt, die Konjugation $\mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$ stetig ist (und nach (4.4.17) in der Tat nicht aus $\mathcal{F}_\omega$ hinausführt).

Wir fassen unsere bisherigen Resultate zum Hauptergebnis dieses Abschnittes zusammen:

(4.4.23) THEOREM. *Betrachte $\mathcal{F}_\omega$ mit der von $\mathcal{P}_\omega$ induzierten $\mathcal{S}$-Topologie. Es gilt:*

(i) *Die (schwache) Fourier-Transformation ist eine stetige, bijektive, lineare Abbildung $\Phi : \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$.*

(ii) *Die Umkehrabbildung von Φ ist die (schwache) Fourier-Rücktransformation $\overline{\Phi} : \mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$, die ebenfalls stetig ist.*

(iii) *Für alle $f \in \mathcal{F}_\omega$ ist $\Phi^2(f) = \check{f}$, also $\Phi^4(f) = f$.*

BEWEIS: Es ist nur noch (iii) zu zeigen. Für beliebiges $\psi \in \mathcal{S}$ ist nach (4.4.22) und (4.4.6),(ii)

$$\Lambda_\psi(\Phi^2(f)) = \Lambda_{\hat{\psi}}(\Phi(f)) = \Lambda_{(\hat{\psi})^\vee}(f) = \Lambda_{\check{\psi}}(f) \ ,$$

was wegen (4.4.14)

$$= \Lambda_\psi(\check{f}) \ .$$

Da dies für alle $\psi \in \mathcal{S}$ richtig ist, und da $\mathcal{F}_\omega$ mit der induzierten $\mathcal{S}$-Topologie ein Hausdorff-Raum ist, gilt notwendig $\Phi^2(f) = \check{f}$ $\diamond$

Wir wollen an dieser Stelle einen Moment verweilen, um die genaue Bedeutung von Theorem (4.4.23) zu beleuchten.

In den Schlußbemerkungen zu Abschnitt (4.2) haben wir bereits angedeutet, daß sich jedes $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ auch als temperierte Distribution auffassen läßt (zum Begriff der temperierten Distribution siehe etwa [8]). Man prüft mit Hilfe von Lemma (4.4.8) leicht nach, daß man sogar alle $f \in \mathcal{P}_\omega$ als temperierte Distributionen auffassen kann. Als temperierte Distributionen sind daher alle $f \in \mathcal{P}_\omega$ Fourier-transformierbar und man kann zeigen, daß für alle $f \in \mathcal{F}_\omega$ die Fourier-Transformation als temperierte Distribution in kanonischer Weise mit der von uns definierten (schwachen) Fourier-Transformation übereinstimmt. Die von uns herausgearbeitete Bedeutung von $\mathcal{F}_\omega$ läßt sich so beschreiben:

(1) Die (schwachen) Fourier-Transformierten von Funktionen aus $\mathcal{F}_\omega$ sind wiederum Funktionen (und nicht etwa "nur" temperierte Distributionen).

(2) Der Raum $\mathcal{F}_\omega \subset \mathcal{P}_\omega$ ist invariant unter der Fourier-Transformation Φ, mehr noch, Φ vermittelt einen linearen Homöomorphismus $\mathcal{F}_\omega \to \mathcal{F}_\omega$.

Wir wollen noch einige weitere Bemerkungen anschließen.

Sicherlich ist $\mathcal{F}_\omega \neq \mathcal{P}_\omega$, da z.B. die konstante Funktion 1 nicht in $\mathcal{F}_\omega$ liegt. Wir wollen auf den genauen Beweis verzichten, sondern nur darauf verweisen, daß die Fourier-Transformierte der temperierten Distribution 1 gerade die δ-Distribution

ist, wodurch plausibel wird, daß 1 nicht zu einer Funktion Fourier-transformierbar ist. Die Frage ob $\mathcal{L}^1_\omega \subset \mathcal{F}_\omega$ gilt, konnte nicht geklärt werden, viele "Indizien" sprachen jedoch gegen das Bestehen dieser Inklusion.

Nun wollen wir noch zeigen, daß das für Fourier-Transformationen typische Verhalten bzgl. Produkten und Faltungen (siehe (4.4.6)) im naheliegenden Rahmen gültig bleibt.

(4.4.24) SATZ. *Seien $f \in \mathcal{F}_\omega, \psi \in \mathcal{S}$. Dann ist auch $f * \psi \in \mathcal{F}_\omega$ und es gilt*

$$\Phi(f * \psi) = \sqrt{2\pi}\Phi(f)\hat{\psi} \ .$$

BEWEIS: Nach (4.4.18) ist jedenfalls $f * \psi \in \mathcal{P}_\omega$, d.h. $\Phi_\lambda(f * \psi)$ ist bildbar und nach (4.4.11) ebenfalls in $\mathcal{P}_\omega$. Für ein beliebiges $\phi \in \mathcal{S}$ hat man

$$\Lambda_\phi(\Phi_\lambda(f * \psi)) = \int \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f * \psi(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt}\, dI_\omega(x)\right] \phi(t)\, dI_\omega(t) \ .$$

Nach (4.4.18),(i) ist $f * \psi$ polynomial beschränkt und daher ist der Integrand

$$h(x,t) := f * \psi(x,t) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2 - ixt}\phi(t) \qquad ((x,t) \in \mathbf{R}^2)$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$. Man darf deshalb Fubini anwenden und die t-Integration zuerst ausführen. Das Ergebnis ist

$$\Lambda_\phi(\Phi_\lambda(f * \psi)) = \int f * \psi(x) e^{-\frac{\lambda}{2}x^2} \hat{\phi}(x)\, dx \ .$$

Wiederum wegen der polynomialen Beschränktheit von $f * \psi$ wird der Betrag des Integranden für alle $\lambda > 0$ durch die Lebesgue-integrierbare Funktion

$$g(x) := |f * \psi(x)| \cdot |\hat{\phi}(x)| \qquad (x \in \mathbf{R})$$

abgeschätzt. Der Satz über die majorisierte Konvergenz liefert daher

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda \downarrow 0} \Lambda_\phi(\Phi_\lambda(f * \psi)) &= \int f * \psi(x)\hat{\phi}(x)\, dx \\
&= \int \left[\int f(u)\psi(x-u)\, dI_\omega(u)\right] \hat{\phi}(x)\, dx \\
&= \int \left[\int F(u)\psi'(x-u)\, du\right] \hat{\phi}(x)\, dx \ ,
\end{aligned}$$

gemäß (4.4.8), wenn F ein unbestimmtes Integral von f ist. Wegen der polynomialen Beschränktheit von F ist

$$H(u,x) := F(u)\psi'(x-u)\hat{\phi}(u) \qquad ((u,x) \in \mathbf{R}^2)$$

eine Lebesgue-integrierbare Funktion $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{C}$. Wir dürfen daher den Satz von Fubini anwenden und erhalten

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \Lambda_\phi(\Phi_\lambda(f * \psi)) = \int F(u) \left[\int \psi'(x-u)\hat{\phi}(x)\, dx \right] du$$
$$= \int F(u)\hat{\phi} * (\psi')^\vee(u)\, du \ ,$$

und wegen $(\psi')^\vee = -(\check{\psi})'$ ist dies

$$= -\int F(u)\hat{\phi} * (\check{\psi})'(u)\, du \ .$$

Nun ist bekanntlich für beliebige $s, t \in \mathcal{S}$ wieder $s * t \in \mathcal{S}$ und $(s * t)' = s * t'$. Also können wir weiterschreiben

$$= -\int F(u)(\hat{\phi} * \check{\psi})'(u)\, du$$
$$= \int f(u)\hat{\phi} * \check{\psi}(u)\, dI_\omega(u) \ ,$$

gemäß (4.4.8). Wegen (4.4.6),(ii) ist dies

$$= \int f(u)\hat{\phi} * (\hat{\psi})\hat{}(u)\, dI_\omega(u)$$
$$= \sqrt{2\pi} \int f(u)(\phi\hat{\psi})\hat{}(u)\, dI_\omega(u) \ ,$$

letzteres nach (4.4.6),(iv). Nach (4.4.22) ist der letzte Ausdruck jedoch

$$= \sqrt{2\pi} \int \Phi(f)(u)(\phi\hat{\psi})(u)\, dI_\omega(u)$$
$$= \Lambda_\phi(\sqrt{2\pi}\Phi(f)\hat{\psi}) \ .$$

Da $\phi \in \mathcal{S}$ beliebig war und da nach (4.4.8)

$$\Phi(f)\hat{\psi} \in \mathcal{L}^1_\omega \subset \mathcal{P}_\omega$$

haben wir gezeigt, daß

$$\sqrt{2\pi}\Phi(f)\hat{\psi} = \mathcal{S} - \lim_{\lambda \downarrow 0} \Phi_\lambda(f * \psi) \ .$$

Daraus folgt $f * \psi \in \mathcal{F}_\omega$ und

$$\Phi(f * \psi) = \sqrt{2\pi}\Phi(f)\hat{\psi} \ ,$$

wie gewünscht ◇

Als nächstes wollen wir die zu (4.4.6),(iv) analoge Formel angeben.

(4.4.25) SATZ. *Ist $f \in \mathcal{F}_\omega, \psi \in \mathcal{S}$ so ist $f\psi \in \mathcal{F}_\omega$ und es gilt*

$$\sqrt{2\pi}\Phi(f\psi) = \Phi(f) * \hat{\psi} \ .$$

BEWEIS: Nach dem letzten Satz gilt jedenfalls $\Phi(f) * \hat{\psi} \in \mathcal{F}_\omega$ und man hat

$$\Phi(\Phi(f) * \hat{\psi}) = \sqrt{2\pi}\Phi^2(f)(\hat{\psi})\hat{} \ ,$$

was nach (4.4.23),(iii) und (4.4.6),(ii)

$$= \sqrt{2\pi}\check{f}\check{\psi} = \sqrt{2\pi}(f\psi)\check{} \ .$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}(f\psi) &= (\Phi(\Phi(f) * \hat{\psi}))\check{} \\ &= \overline{\Phi}(\Phi(f) * \hat{\psi}) \in \mathcal{F}_\omega \ ,\end{aligned}$$

wobei zuletzt die Bemerkung aus (4.4.16) benutzt wurde. Anwendung von Φ liefert nun wegen $\overline{\Phi} = \Phi^{-1}$ die gewünschte Formel ◇

Zuletzt wollen wir noch ein praktisch nützliches Kriterium für die Zugehörigkeit zu $\mathcal{F}_\omega$ und die Berechnung der (schwachen) Fourier-Transformierten geben.

(4.4.26) SATZ. *Sei $f \in \mathcal{L}^1_\omega$. Es gebe ein $K > 0$ so daß*

$$f\chi_{(-\infty,-K]}, f\chi_{[K,\infty)} \in \mathcal{L}^1_L(\mathbf{R})$$

(d.h. f hat keine "Lebesgue-Singularität im Unenedlichen"). Dann gilt:

(i) $f \in \mathcal{F}_\omega$.

(ii) *Es ist*

$$(x \mapsto f(x)e^{-ixt}) \in \mathcal{L}^1_\omega \qquad \forall t \in \mathbf{R} \ .$$

(iii) *Die (schwache) Fourier-Transformierte berechnet sich zu*

$$\Phi(f)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)e^{-ixt}\, dI_\omega(x) \qquad \forall t \in \mathbf{R} \ .$$

Wir wollen es bei dieser Mitteilung belassen und auf den unproblematischen Beweis verzichten. Dieser Satz garantiert insbesondere, daß unsere (schwache) Fourier-Transformation Φ auf den Räumen $\mathcal{L}^1_L$ und $\mathcal{S}$ mit der dort wie üblich definierten Fourier-Transformation übereinstimmt und das

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}^1_L \subset \mathcal{F}_\omega \ .$$

(5) Integral-Erweiterungen im Vergleich

(5.1) Vergleich von $\mathcal{L}^1_\omega$ mit dem Perron-Integral

Die bekanntesten Erweiterungen des Lebesgue-Integrals sind wohl das Perron-Integral, das Denjoy-Integral im engeren Sinne (auch Denjoy-Perron-Integral genannt) und das Denjoy-Integral im weiteren Sinne. Mit allen drei Integral-Begriffen werden wir es im Verlaufe dieser Arbeit noch zu tun haben.

An dieser Stelle geben wir nun einen kurzen Abriß des Perron-Integrals, um es mit unserem $\mathcal{L}^1_\omega$ vergleichen zu können. Einzelheiten finden sich z.B. in [**11**] und [**17**] .

(5.1.1) DEFINITION. *Sei $J =< a, b >$ ein Intervall und $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion.*

(i) *Eine stetige Funktion $\psi : J \to \mathbf{R}$ heißt Oberfunktion von f,wenn gilt:*

(1) $\psi(a), \psi(b)$ existieren und es ist $\psi(a) = 0$.

(2) $\underline{D}(\psi) \geq f$ und $\underline{D}(\psi) > -\infty$ auf ganz J.

(ii) *Eine stetige Funktion $\phi : J \to \mathbf{R}$ heißt Unterfunktion, wenn gilt:*

(1) $\phi(a), \phi(b)$ existieren und es ist $\phi(a) = 0$.

(2) $\overline{D}(\phi) \leq f$ und $\overline{D}(\phi) < \infty$ auf ganz J.

Die Bedingungen für die oberen und unteren Ableitungen sind in den zu J gehörenden Ecken natürlich nur einseitig zu verstehen.

Sind ψ/ϕ Ober-/Unterfunktion zu $f :< a, b >\to \overline{\mathbf{R}}$, so gilt auf $< a, b)$

$$D^+(\psi - \phi) \geq D_+(\psi - \phi) \geq \underline{D}(\psi - \phi) \geq \underline{D}\psi - \overline{D}\phi \geq 0 \,,$$

da $\overline{D}\phi \leq f \leq \underline{D}\psi$; beachte, daß $\underline{D}\psi - \overline{D}\phi$ wirklich überall definiert ist, da $\underline{D}\psi > -\infty, \overline{D}\phi < \infty$. Mit Hilfe von (3.1.3) schließt man leicht, daß zunächst einmal $\psi(x) - \phi(x) + \epsilon x$ für beliebiges $\epsilon > 0$ monoton steigt, also auch $\psi - \phi$; wir werden dies gleich benutzen.

Man definiert nun für ein beliebiges f die Perron- Ober-/Unterintegrale

$$(P)\overline{\int} f := \inf\{\psi(b)|\ \psi \text{ ist Oberfunktion von } f\} \,,$$

$$(P)\underline{\int} f := \sup\{\phi(b)|\ \phi \text{ ist Unterfunktion von } f\} \,.$$

Wie wir oben sahen, ist für Ober-/Unterfunktionen ψ/ϕ von f stets $\psi - \phi$ monoton steigend, also $\psi(b) \geq \phi(b)$. Daraus folgt, daß stets

$$(P)\int f \leq (P)\overline{\int} f$$

gilt (der Fall wo keine Ober- oder Unterfunktion existiert ist trivial, wegen $\inf \emptyset = \infty, \sup \emptyset = -\infty$).

(5.1.2) DEFINITION. *Sei $J =< a, b >$ ein Intervall. Eine Funktion $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$ heißt Perron-integrierbar (kurz: P-integrierbar), wenn*

$$(P)\underline{\int}(f) = (P)\overline{\int}(f) \in \mathbf{R} .$$

In diesem Falle heißt der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral das Perron-Integral von f über J und wird mit

$$(P)\int f \ , \ (P)\int_J f \text{ oder } (P)\int_a^b f$$

notiert. Die Menge der über $J =< a, b >$ P-integrierbaren Funktionen bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1_P(J)$ oder $\mathcal{L}^1_P < a, b >$.

Natürlich entpuppen sich $\mathcal{L}^1_P < a, b >$ als reeller Vektorraum (in dem man f.ü. gleiche Funktionen identifiziert) und

$$(P)\int_a^b : \mathcal{L}^1_P < a, b > \to \mathbf{R}$$

als ein positives, lineares Funktional. Es gilt sogar (vergl. etwa [**17**] , XVI):

(5.1.3) SATZ. *Ist $J =< a, b >$ ein Intervall, so gilt:*

(i) $\mathcal{L}^1_L < a, b > \subset \mathcal{L}^1_P < a, b >$ *und für* $f \in \mathcal{L}^1_P < a, b >$ *ist* $\int_a^b f \, dI_L = (P)\int_a^b f$.

(ii) $(\mathcal{L}^1_L)^+ < a, b > = (\mathcal{L}^1_P)^+ < a, b >$.

(iii) *Ist $a < c < b$ so gilt für eine Funktion f:*

$$f \in \mathcal{L}^1_P < a, b > \Leftrightarrow \ f \in \mathcal{L}^1_P < a, c] \cap \mathcal{L}^1_P [c, b >$$

und in diesem Falle ist

$$(P)\int_a^b f = (P)\int_a^c f + (P)\int_c^b f \ .$$

In [**17**] sind die Beweise dieser Tatsachen zwar nur für kompakte Intervalle $< a,b >= [a,b]$ durchgeführt, sie bleiben aber unter allfälligen Modifikationen auch im allgemeinen Fall richtig.

Wir wollen nun zeigen, daß $\mathcal{L}^1_\omega < a,b > \subset \mathcal{L}^1_P < a,b >$ und das die Integrale übereinstimmen. Dazu brauchen wir aber noch einige Vorbereitungen.

(5.1.4) LEMMA. *Sei $J =< a,b >$ ein Intervall, $F : J \to \mathbf{R}$ stetig, $x_0 \in J$ und $\epsilon > 0$. Dann existiert ein stetiges, monoton steigendes $\psi : J \to \mathbf{R}$ mit*

$$\|\psi\|_\infty \leq \epsilon \text{ und } \underline{D}(F+\psi)(x_0) = \infty \ .$$

BEWEIS: Sei ohne Einschränkung $x_0 = 0$ und $F(0) = 0$. Definiere auf J

$$\psi(x) := \begin{cases} (\sqrt{x} + \sup\limits_{0\leq t\leq x} |F(t)|) \wedge \frac{\epsilon}{2} & \text{für } x \in J, x \geq 0 \\ (-\sqrt{x} - \sup\limits_{x\leq t\leq 0} |F(t)|) \vee (-\frac{\epsilon}{2}) & \text{für } x \in J, x \leq 0 \ . \end{cases}$$

Offensichtlich ist ψ stetig, monoton steigend und es ist $\|\psi\|_\infty \leq \epsilon$. Da $\psi(0) = 0$, gilt für ein geeignetes $\delta > 0$ offenbar

$$\psi(x) = \sqrt{x} + \sup_{0\leq t\leq x} |F(t)| \qquad \text{für } 0 \leq x < \delta \ .$$

Für $0 < h < \delta$ ist daher (beachte $(F+\psi)(0) = 0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}\left[(F+\psi)(h) - (F+\psi)(0)\right] &= \frac{1}{h}\left[F(h) + \sup_{0\leq t\leq h} |F(t)| + \sqrt{h}\right] \\ &\geq \frac{1}{h}\sqrt{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \ , \end{aligned}$$

woraus sofort $D_+(F+\psi)(0) = \infty$ folgt. Analog ist $D_-(F+\psi)(0) = \infty$ also $\underline{D}(F+\psi)(0) = \infty$, wie gewünscht $\diamondsuit$

(5.1.5) LEMMA. *Sei $J =< a,b >$, $F : J \to \mathbf{R}$ stetig, $\epsilon > 0$ und seien $x_1, x_2, \ldots$ höchstens abzählbar viele Punkte aus J. Dann existiert ein stetiges, monoton steigendes $\psi : J \to \mathbf{R}$ mit*

$$\|\psi\|_\infty \leq \epsilon \text{ und } \underline{D}(F+\psi)(x_n) = \infty \ \forall n \ .$$

BEWEIS: Gemäß dem letzten Lemma wählen wir stetige, monoton steigende $\psi_n : J \to \mathbf{R}$ mit $\|\psi_n\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2^n}$ und $\underline{D}(F + \psi_n)(x_n) = \infty$. Als gleichmäßiger Limes stetiger Funktionen ist dann auch

$$\psi := \sum_1^\infty \psi_n$$

stetig und natürlich monoton steigend. Für jedes n ist auch

$$\psi - \psi_n = \sum_{k \neq n} \psi_k$$

monoton steigend, so daß $\underline{D}(\psi - \psi_n) \geq 0$. Es folgt für ein beliebiges n

$$\begin{aligned} \underline{D}(F + \psi)(x_n) &= \underline{D}((F + \psi_n) + (\psi - \psi_n))(x_n) \\ &\geq \underline{D}(F + \psi_n)(x_n) + \underline{D}(\psi - \psi_n)(x_n) \\ &\geq \infty + 0 = \infty \end{aligned}$$

und wir sind fertig ◇

(5.1.6) SATZ. *Ist $J =< a, b >$ ein Intervall, so ist*

$$\mathcal{L}^1_\omega < a, b > \subset \mathcal{L}^1_P < a, b > ,$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

BEWEIS: Da wir jedes $f \in \mathcal{L}^1_\omega$ in

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}^1_L$$

aufspalten können, genügt es im Hinblick auf (5.1.3),(i) gleich $f \in \mathcal{E}_\omega$ anzunehmen. Sei dann F der ω-Stamm von f mit $F(a) = 0$. Für alle x außerhalb einer höchstens abzählbaren Ausnahmemenge $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ ist F differenzierbar und es ist $F'(x) = f(x)$. Wähle zu $\epsilon > 0$ und den $x_1, x_2, \ldots$ ein ψ wie im vorangegangenen Lemma. Ohne Einschränkung ist auch $\psi(a) = 0$. Dann gilt für $x \in A$

$$\underline{D}(F + \psi)(x) = \infty \geq f(x) \text{ und } > -\infty ,$$

und für $x \in J \setminus A$ gilt

$$\underline{D}(F + \psi)(x) = F'(x) + \underline{D}\psi(x) \geq F'(x) = f(x) > -\infty .$$

Also ist $F + \psi$ eine Oberfunktion von f. Analog findet man ein stetiges ϕ mit $\|\phi\|_\infty \leq \epsilon$ so daß $F - \phi$ Unterfunktion von f ist (betrachte hierzu $-f$ statt f im vorigen Lemma). Da

$$|(F+\psi)(b) - (F-\psi)(b)| \leq |\psi(b)| + |\phi(b)| \leq 2\epsilon$$

und da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt notwendig (beachte, daß auf jeden Fall die Ungleichung $(P)\underline{\int} f \leq (P)\overline{\int} f$ gilt):

$$(P)\underline{\int} f = (P)\overline{\int} f = F(b) \qquad \Rightarrow$$

$$f \in \mathcal{L}_P^1 < a,b > \text{ und } (P)\int f = F(b) = I_\omega(f) = \int_a^b f\, dI_\omega \ \diamondsuit$$

Später werden wir noch sehen, daß die Inklusion aus Satz (5.1.6) echt ist (siehe (5.3.1) und (5.3.7)).

Noch eine Anmerkung über unbestimmte P-Integrale. Man kann zeigen:

(5.1.7) SATZ. *Ist f P-integrierbar über $[a,b]$, dann auch über jedes Teilintervall. Setzt man dann etwa*

$$F(x) := (P)\int_a^x f \qquad (x \in [a,b]) \ ,$$

so ist F stetig, f.ü. differenzierbar und es gilt $F' = f$ f.ü.

(5.2) Das Denjoy-Integral im engeren Sinne (Denjoy-Perron-Integral)

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß der Leser mit den grundlegenden Tatsachen aus der Theorie der Ordinalzahlen vertraut ist. In [**17**] , XIV wird eine sehr schöne Einführung in diese Theorie geboten, die auch alles umfaßt, was wir benötigen werden.

Wir wollen kurz die wichtigsten Dinge zusammenstellen.

Sind A, A' wohlgeordnete Mengen mit Wohlordnungen $\leq, \leq'$, so nennt man $\phi : A \to A'$ eine Ordnungsbijektion, falls ϕ bijektiv ist und falls für alle $a, b \in A$ gilt:

$$a \leq b \Rightarrow \phi(a) \leq' \phi(b) \ .$$

Offenbar ist dann auch ϕ^{-1} eine Ordnungsbijektion. Existiert zwischen den wohlgeordneten A, A' eine solche Ordnungsbijektion, so schreibt man $A \sim A'$. Offenbar ist $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf der Gesamtheit $\mathcal{W}$ der wohlgeordneten Mengen (das Wort "Menge" sollte für $\mathcal{W}$ nicht verwendet werden, da dies in der axiomatischen Mengenlehre zu Widersprüchen führen kann). Ordinalzahlen sind dann per definitionem nichts anderes als Äquivalenzklassen modulo $\sim$, also die Mitglieder von $\mathcal{W}/\sim$. Man schreibt Ordinalzahlen meist mit kleinen griechischen Buchstaben, vorzüglich mit α, β, η, ξ. Ist α eine Ordinalzahl und A eine wohlgeordnete Menge so schreibt man $\alpha = \overline{A}$ falls $A \in \alpha$. Die zu den Mengen

$$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \ldots, \{1, \ldots, n\}, \ldots$$

(mit der natürlichen Ordnung versehen) gehörenden Ordinalzahlen schreibt man

$$0, 1, 2, \ldots, n, \ldots \ .$$

Die zu den natürlichen Zahlen gehörige Ordinalzahl wird mit ω notiert.

Sei $\alpha = \overline{A}$ und ohne Einschränkung $1 \notin A$. Per definitionem ist $\alpha + 1$ diejenige Ordinalzahl, die zu der Menge $A \cup \{1\}$ gehört, wenn diese Menge mit folgender Ordnung $\leq$ versehen ist: Eingeschränkt auf A sei $\leq$ die alte Ordnung von A; für alle $x \in A \cup \{1\}$ gelte $x \leq 1$.

Ist A eine wohlgeordnete Menge und $a \in A$ so nennt man

$$A_a := \{x \in A |\ x \leq a\}$$

einen Anfangsabschnitt von A. Sind $\alpha = \overline{A}, \beta = \overline{B}$ zwei Ordinalzahlen, so schreibt man $\alpha \leq \beta$, wenn es ein $b \in B$ gibt, so daß $A \sim B_b$, d.h. $\overline{A} = \overline{B_b}$. Natürlich hängt $\leq$ nicht von der Wahl der Repräsentation von α, β durch $\alpha = \overline{A}, \beta = \overline{B}$ ab. Man kann zeigen, daß durch $\leq$ eine Wohlordnung auf den Ordinalzahlen definiert wird. Ist daher Φ die Gesamtheit der Ordinalzahlen $\alpha = \overline{A}$ zu überabzählbaren A, so hat Φ ein eindeutig bestimmtes kleinstes Element das mit Ω bezeichnet wird.

Man sagt die Ordinalzahl α sei vom ersten Typ, wenn sie einen unmittelbaren Vorgänger besitzt: Es gibt eine Ordinalzahl β so daß $\alpha = \beta + 1$.

Ist die Ordinalzahl α nicht vom ersten Typ, so heißt sie vom zweiten Typ. Es gilt der wichtige Satz:

(5.2.1) SATZ. *Ist $\alpha < \Omega$ vom 2. Typ, so gibt es abzählbar viele Ordinalzahlen $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha$ so daß $\alpha = \min\{\beta | \ \beta > \alpha_n$ für alle $n\}$.*

Wir führen nun das wichtige Prinzip der transfiniten Induktion ein.

(5.2.2) SATZ. *(Transfinite Induktion) Sei $P = P(\alpha)$ eine Aussage über Ordinalzahlen α. Gilt dann*

(i) *$P(0)$ ist wahr,*

(ii) *Für eine Ordinalzahl γ impliziert die Wahrheit der Aussagen $P(\beta)$ $(0 \leq \beta < \gamma)$ die Wahrheit der Aussage $P(\gamma)$,*

so ist $P(\alpha)$ für alle α wahr.

Als weitere Vorbereitung auf das Denjoy-Perron-Integral stellen wir nun eine recht allgemeine Methode der Integralerweiterung vor. Für alle nicht bewiesenen Aussagen verweisen wir auf [**17**] , XVI.

Sei $\mathcal{T}$ eine Familie von nicht-leeren Funktionenmengen $\mathcal{T}[a,b]$ $(a \leq b$ aus $\mathbf{R})$ die ihrerseits aus Funktionen $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ bestehen; sei ferner T eine Familie von Abbildungen $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}} : \mathcal{T}[a,b] \to \mathbf{R}$. Dann heißt $(\mathcal{T}, T)$ ein Integralsystem, wenn gilt:

(IS1) $\mathcal{T}$ ist zulässig: Sind $a \leq c \leq b$ aus $\mathbf{R}$ so gilt für eine Funktion $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$:

$$f \in \mathcal{T}[a,b] \ \Leftrightarrow \ f \in \mathcal{T}[a,c] \cap \mathcal{T}[c,b] \ .$$

(IS2) T ist additiv: Sind $a \leq c \leq b$ aus $\mathbf{R}$, so gilt für ein $f \in \mathcal{T}[a,b]$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{T}}}(f) \ .$$

(IS3) T hat die Stetigkeitseigenschaft: Sind $a \leq c \leq b$ aus $\mathbf{R}$ und $f \in \mathcal{T}[a,b]$ so gilt

$$\lim_{\substack{x \in [a,b] \\ x \to c}} \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) \ .$$

Nun ist klar, was wir z.B. mit den Integralsystemen $(\mathcal{L}^1_L, \int dI_L), (\mathcal{L}^1_\omega, \int dI_\omega)$ meinen. Natürlich handelt es sich hierbei tatsächlich um Integralsysteme im Sinne der angegebenen Definition (vergl. etwa (3.2.13), (3.2.17)). Auch zum Perron-Integral gehört ein Integral-System, daß wir $(\mathcal{L}^1_P, (P)\int)$ schreiben.

Beachte, daß in (IS1)-(IS3) auch $a = b$ zugelassen ist. So besteht z.B. $\mathcal{L}^1_L[a,a]$ aus allen "Funktionen" $f : \{a\} \to \overline{\mathbf{R}}$ und das Integral einer solchen Funktion ist 0. So muß es auch sein, denn aus (IS2) folgt insbesonder für $f \in \mathcal{T}[a,a]$

$$\overset{a}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) = \overset{a}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) + \overset{a}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) \Rightarrow \overset{a}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) = 0 \,.$$

Ist $f \in \mathcal{T}[a,b]$ so sagen wir oft f sei T-integrierbar über $[a,b]$. Manchmal werden wir den Sprachgebrauch jedoch naheliegend abändern: Ist etwa $f \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$ so sagen wir natürlich f sei L-integrierbar (statt $\int dI_L$-integrierbar) über $[a,b]$. Auch bei anderen Gelegenheiten werden wir manchmal Sprechweisen leicht abändern, aber stets so, daß unmittelbar klar ist, wie die Abänderung zu verstehen ist.

(5.2.3) DEFINITION. *Sei $(\mathcal{T},T)$ ein Integral-System und $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion. Ein Punkt $x_0 \in [a,b]$ heißt eine T-Singularität von f, wenn*

$$f \notin \mathcal{T}([a,b] \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \qquad \forall \delta > 0 \,.$$

Die Menge der T-Singularitäten von f über $[a,b]$ wird mit $S_T(f;[a,b])$ notiert.

Wir haben es also mit einer Verallgemeinerung von Definition (3.4.1) zu tun.

(5.2.4) SATZ. *Für ein Integralsystem $(\mathcal{T},T)$ und eine Funktion $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ gilt:*

$$f \in \mathcal{T}[a,b] \;\Leftrightarrow\; S_T(f;[a,b]) = \emptyset \,.$$

Wir verzichten auf den einfachen Beweis, der ein Kompaktheitsargument und die Eigenschaft (IS1) von Integral-Systemen benutzt.

(5.2.5) SATZ. *Ist $(\mathcal{T},T)$ ein Integralsystem und $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion, so ist $S_T(f;[a,b])$ abgeschlossen.*

Das ist klar, da $[a,b] \setminus S_T(f;[a,b])$ (relativ zu $[a,b]$) offen ist, wie man leicht aus der Definition von $S_T(f;[a,b])$ ersieht.

Das Integral-System $(\mathcal{T},T)$ heißt allgemeiner als das Integral-System $(\mathcal{S},S)$, wenn für alle $a \le b$ aus $\mathbf{R}$ gilt:

$$\mathcal{S}[a,b] \subset \mathcal{T}[a,b] \text{ und } \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{S}}}(f) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}(f) \quad \forall f \in \mathcal{S}[a,b] \,.$$

Ausgehend von einem Integral-System $(\mathcal{T},T)$ soll nun in ganz allgemeiner Manier ein allgemeineres Integralsystem $(\mathcal{T}_*,T_*)$ definiert werden. Für $a \le b$ aus $\mathbf{R}$ bestehe $\mathcal{T}_*[a,b]$ aus allen Funktionen $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$, für die gilt:

(E1) $S_T = S_T(f;[a,b])$ ist eine nirgends dichte Menge und f ist Lebesgue-integrierbar über S_T.

(E2) Besteht das offene $(a,b) \setminus S_T$ aus den (höchstens abzählbar vielen) paarweise disjunkten Intervallen (a_n, b_n) (den Wegkomponenten von $(a,b) \setminus S_T$), so existiere für alle n der Limes

$$I_n := \lim_{\substack{\alpha \downarrow a_n \\ \beta \uparrow b_n}} \overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f) \in \mathbf{R} .$$

(E3) Für die Zahlen

$$W_n := \sup_{a_n < \alpha \leq \beta < b_n} |\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{T}}}(f)|$$

gelte $\sum W_n < \infty$.

Für ein f das (E1)-(E3) erfüllt definiert man

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{T}}}_*(f) := \sum I_n + \int_{S_T} f d\lambda .$$

Diese Summe existiert, da $|I_n| \leq W_n$ und $\sum W_n < \infty$. In [**17**] wird gezeigt:

(5.2.6) SATZ. *Ist $(\mathcal{T}, T)$ ein Integral-System, so auch $(\mathcal{T}_*, T_*)$ und $(\mathcal{T}_*, T_*)$ ist algemeiner als $(\mathcal{T}, T)$.*

Wir können nun daran gehen, das Denjoy-Perron-Integral zu definieren. Das Integral-System $(\mathcal{D}_0, D_0)$ soll einfach das Lebesgue-System sein:

$$\mathcal{D}_0[a,b] := \mathcal{L}^1_L[a,b] ,$$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_0(f) := \int_a^b f \, dI_L \qquad (-\infty < a \leq b < \infty) .$$

Das Integral-System $(\mathcal{D}_1, D_1)$ wird durch

$$\mathcal{D}_1 := (\mathcal{D}_0)_* , \; D_1 := (D_0)_*$$

definiert. Allgemein definieren wir induktiv

$$\mathcal{D}_{n+1} := (\mathcal{D}_n)_* , \; D_{n+1} := (D_n)_* \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) .$$

Ist dann $(\mathcal{D}_n, D_n)$ für alle $n = 0, 1, 2, \ldots$ definiert, so definiert ma für $a \leq b$ aus $\mathbf{R}$

$$\mathcal{D}_\omega[a,b] := \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{D}_n[a,b]$$

und für $f \in \mathcal{D}_\omega[a,b]$ setzt man

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_\omega(f) := \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_n(f) \text{ falls } f \in \mathcal{D}_n[a,b] .$$

Da für $n \geq m$ stets $(\mathcal{D}_n, D_n)$ allgemeiner ist als $(\mathcal{D}_m, D_m)$ prüft man leicht nach, daß die $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_\omega$ dadurch tatsächlich wohldefinert sind. Offenbar ist auch $(\mathcal{D}_\omega, D_\omega)$ ein Integral-System. Seiner induktiven Definition analog definieren wir nun "transfinit-induktiv" das Integral-System $(\mathcal{D}_\alpha, D_\alpha)$ für jede Ordinalzahl $\alpha \leq \Omega$, unter der Annahme, daß die Integral-Systeme $(\mathcal{D}_\beta, D_\beta)$ für $\beta < \alpha$ bereits definiert sind. Dabei unterscheiden wir zwei Fälle:

1. FALL. *α ist vom 1. Typ.*

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Ordinalzahl $\gamma < \alpha$ (den unmittelbaren Vorgänger von α) für die $\alpha = \gamma + 1$. Wir setzen dann

$$\mathcal{D}_\alpha := (\mathcal{D}_\gamma)_* , \quad D_\alpha := (D_\gamma)_* .$$

2. FALL. *α ist vom 2. Typ.*

Für $a \leq b$ aus $\mathbf{R}$ sei dann

$$\mathcal{D}_\alpha[a,b] := \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{D}_\beta[a,b]$$

und für $f \in \mathcal{D}_\alpha[a,b]$ setzen wir

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_\alpha(f) := \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_\beta(f) \text{ falls } \beta < \alpha, f \in \mathcal{D}_\beta[a,b] .$$

Man überzeugt sich, daß im 2. Fall $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_\alpha$ wohldefiniert ist und daß $(\mathcal{D}_\alpha, D_\alpha)$ wirklich ein Integralsystem ist. Nachdem so $(\mathcal{D}_\alpha, D_\alpha)$ für $\alpha \leq \Omega$ erklärt ist können wir endlich definieren:

(5.2.7) DEFINITION. *Für $a \leq b$ aus $\mathbf{R}$ sei*

$$\mathcal{L}^1_{D_*}[a,b] := \mathcal{D}_\Omega[a,b] , \quad (D_*)\int_a^b := \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_\Omega .$$

Ist $f \in \mathcal{L}^1_{D_*}[a,b]$ so sagen wir f sei Denjoy-Perron-integrierbar (oder Denjoy-integrierbar im engeren Sinne oder kurz D_*-integrierbar) über $[a,b]$.

Man kann leicht zeigen, daß Ω eine Ordinalzahl vom 2.Typ ist, so daß gemäß unserer Konstruktion

$$\mathcal{L}^1_{D_*}[a,b] = \mathcal{D}_\Omega[a,b] = \bigcup_{\alpha<\Omega} \mathcal{D}_\alpha[a,b] .$$

Warum wurde der Fortsetzungsprozeß ausgerechnet bei Ω abgebrochen? Man kann in der Tat zeigen (was beispielsweise in [**17**] , XVI, §7 getan wird), daß man für $\alpha > \Omega$ gar keine echten Erweiterungen mehr erhält, sondern immer wieder nur das System $(\mathcal{D}_\Omega, D_\Omega)$.

Wir wollen noch einige Sprachregelungen treffen. Ist $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ gegeben und $\alpha < \Omega$, so schreiben wir $S_\alpha(f;[a,b])$ anstatt $S_{D_\alpha}(f;[a,b])$. Demnach ist z.B. $S_0(f;[a,b])$ nichts anderes als die Menge der Lebesgue-Singularitäten von f über $[a,b]$. Ist $f \in \mathcal{D}_\alpha[a,b]$, so schreiben wir

$$(D_\alpha)\int_a^b f \text{ statt } \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{D}}}_\alpha(f) .$$

Die Familie

$$\{(\mathcal{D}_\alpha, (D_\alpha)\textstyle\int) \mid \alpha < \Omega\}$$

nennen wir die Denjoy Kette. Der nächste Abschnitt wird sich ausführlich mit der "Lage" von $\mathcal{L}^1_\omega$ in der Denjoy-Kette beschäftigen.

Es gilt folgender Satz.

(5.2.8) SATZ. *Für $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1_{D_*}[a,b] \Leftrightarrow \bigcap_{\alpha<\Omega} S_\alpha(f;[a,b]) = \emptyset .$$

Der Beweis ist nicht-trivial und benutzt das sogenannte Stationaritäts-Prinzip von Cantor und Baire. Man kann dies z.B. in [**17**] , XVI, §7 nachlesen.

Von großer Bedeutung ist das folgende, schon recht tief liegende Theorem, das auf Arbeiten von H. Hake (1921), P.S. Alexandroff (1924) und H. Looman (1925) zurückgeht (siehe hierzu die Orginalarbeiten [**18**] , [**19**] , [**20**]). Es bezeichne $(\mathcal{L}^1_P, (P)\int)$ das zum Perron-Integral gehörende Integral-System.

(5.2.9) THEOREM. *Die Integralsysteme*

$$(\mathcal{L}^1_{D_*}, (D_*)\int) \text{ und } (\mathcal{L}^1_P, (P)\int)$$

sind gleich: Für $a \leq b$ *aus* $\mathbf{R}$ *und eine Funktion* $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ *gilt*

$$f \in \mathcal{L}^1_{D_*}[a,b] \Leftrightarrow f \in \mathcal{L}^1_P[a,b] ,$$

und in diesem Falle ist

$$(D_*)\int_a^b f = (P)\int_a^b f .$$

Ein Beweis findet sich z.B. in [**17**] , XVI, §§8,9.

Damit haben wir nun zwei völlig verschiedene Zugänge zum Perron-Integral gefunden. In der Tat gibt es noch einen dritten Zugang, die sogenannte deskriptive Beschreibung des Perron-Integrals mit Hilfe von ACG_*-Funktionen, den man z.B. in [**11**] nachlesen kann.

(5.3) Die Lage von $\mathcal{L}^1_\omega$ in der Denjoy-Kette

Der folgende Satz ist lediglich die Kombination von Satz (5.1.6) mit Theorem (5.2.9).

(5.3.1) SATZ. *Für $a \leq b$ aus $\mathbf{R}$ gilt*

$$\mathcal{L}^1_\omega[a,b] \subset \mathcal{L}^1_P[a,b] = \mathcal{L}^1_{D_*}[a,b] \ ,$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

Aber wie genau liegt nun $\mathcal{L}^1_\omega$ in $\mathcal{L}^1_{D_*}$? Ist etwa bereits $\mathcal{L}^1_\omega = \mathcal{L}^1_{D_*}$ oder ist im Gegenteil $\mathcal{L}^1_\omega$ "klein" und vielleicht schon $\mathcal{L}^1_\omega = \mathcal{D}_1$? Wir wollen dies näher untersuchen und treffen dafür zunächst umfangreiche Vorbereitungen.

Für den Rest dieses Abschnitts sei $[a,b]$ ein beliebiges, kompaktes, nichtentartetes Intervall.

(5.3.2) LEMMA. *Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es eine Funktion $f \in \mathcal{E}_\omega[a,b]$ für die gilt:*

(i) *Für $a < \alpha \leq \beta < b$ ist f Lebesgue-integrierbar über $[a,b]$.*

(ii) $W := \sup\limits_{a<\alpha\leq\beta<b} \left| \int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt \right| < \epsilon$.

(iii) $I := \lim\limits_{\substack{\alpha \downarrow a \\ \beta \uparrow b}} \int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$.

(iv) $S_L(f;[a,b]) = \{a,b\}$.

BEWEIS: Betrachte das stetige F aus (3.4.5) und setze $f := F'$. Ohne Einschränkung kann dabei $\|F\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ genommen werden, sonst multipliziert man F mit einer geeigneten Konstanten. Für $a < \alpha \leq \beta < b$ ist f stetig auf $[\alpha,\beta]$ (siehe (3.4.5),(i)), also auch Lebesgue-integrierbar und es gilt

$$(*) \qquad \int\limits_\alpha^\beta f(t)\,dt = F(\beta) - F(\alpha) \qquad (a < \alpha \leq \beta < b) \ .$$

Mit $\|F\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ folgt hieraus sofort (ii). Wegen (3.4.5),(iii) ist $F(a) = F(b) = 0$ so daß mit (*) Behauptung (iii) folgt. Endlich ist (iv) dasselbe wie (3.4.5),(ii) $\diamondsuit$

Wir vereinbaren folgende Sprechweise: Seien $\epsilon > 0, \mu \in \mathbf{R}$ und $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ gegeben. Wir sagen f sei vom Typ $([a,b], W < \epsilon, I = \mu)$, wenn gilt:

(1) Für $a < \alpha \leq \beta < b$ ist $f \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$.

(2) $W := \sup\limits_{a<\alpha\leq\beta<b} \left|\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt\right| < \epsilon$.

(3) $I := \lim\limits_{\substack{\alpha\downarrow a\\ \beta\uparrow b}} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = \mu$.

(4) $S_L(f;[a,b]) = \{a,b\}$.

Die Aussage von Lemma (5.3.2) ist daher gerade, daß stets Funktionen vom Typ $([a,b], W < \epsilon, I = 0)$ existieren.

(5.3.3) LEMMA. *Es gibt eine Funktion* $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ *für die gilt:*

(i) $h \in \mathcal{D}_1[a,b] \setminus \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$.

(ii) $a, b \in S_L(h;[a,b])$.

(iii) $h = 0$ *auf* $S_L(h;[a,b])$.

(iv) $(D_1) \int\limits_a^b h = 0$.

BEWEIS: Wir unterteilen den Beweis in mehrere Behauptungen und Konstruktionsschritte. Zur Vereinfachung bezeichne $|J|$ die Länge eines Intervalls $J \subset \mathbf{R}$.

1. SCHRITT.

Seien $\epsilon_0 > \epsilon_1 > \epsilon_2 > \cdots > 0$ so gewählt, daß $\sum\limits_0^\infty \epsilon_n < \infty$. Aus dem Inneren von $[a,b]$ entnehmen wir nun im nullten Schritt ein offenes Intervall $J_{0,1}$ und zwar so, daß $[a,b] - J_{0,1}$ aus zwei kompakten Intervallen $K_{0,1}, K_{0,2}$ besteht, für deren Länge gilt:

$$0 < |K_{0,1}| < \epsilon_0 \ , \ 0 < |K_{0,2}| < \epsilon_0 \ .$$

Im nächsten Schritt entnehmen wir aus dem Inneren von $K_{0,1}, K_{0,2}$ je ein offenes Intervall $J_{1,1}, J_{1,2}$; dies geschehe so, daß $[a,b] - (J_{0,1} \cup J_{1,1} \cup J_{1,2})$ aus vier kompakten Intervallen $K_{1,k}$ besteht, für die gilt:

$$0 < |K_{1,k}| < \frac{\epsilon_1}{2} \qquad (k = 1,2,3,4) \ .$$

So fahren wir fort. Im n-ten Schritt liegen uns die nach dem $(n-1)$-ten Schritt verbliebenen abgeschlossenen Intervalle positiver Länge $K_{n-1,k}$ vor $(k = 1,\ldots,2^n)$, aus deren Inneren wir offene Intervalle $J_{n,k}$ $(k = 1, \ldots 2^n)$ entnehmen; diese nehmen wir so groß, daß hiernach

$$[a,b] \setminus \bigcup_{m=0}^{n} \left(\bigcup_{k=1}^{2^m} J_{m,k} \right)$$

aus 2^{n+1} kompakten Intervallen $K_{n,k}$ besteht, für die

$$0 < |K_{n,k}| < \frac{\epsilon_n}{2^n} \qquad (k = 1, \ldots, 2^{n+1}) \ .$$

Nachdem so für $n = 0, 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, 2^n$ alle $J_{n,k}$ definiert sind setzen wir

$$E := [a, b] \setminus \bigcup_{n=0}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k} \right] \ .$$

E ist eine Cantor-Menge, insbesondere also nirgends dicht, abgeschlossen und überabzählbar. Außerdem gilt $a, b \in E$ sowie folgende Feststellung:
Ist $x \in E \setminus \{b\}$ so gibt es zu jedem n_0 ein $n \geq n_0$ und ein k, so daß $J_{n,k}$ rechts von x liegt und von x einen Abstand $< \frac{\epsilon_n}{2^n}$ hat.
Wir verzichten auf den genauen Beweis dieser Feststellung, die sofort aus der Konstruktion von E folgt.

2. SCHRITT.

Wir definieren nun Funktionen $h_{n,k}$ auf den $\overline{J}_{n,k}$. Sei etwa $J_{n,k} = (a_{n,k}, b_{n,k})$. Nach dem letzten Lemma existieren Funktionen $p_{n,k}$ auf den $\overline{J}_{n,k}$ für die gilt:

(1) $$p_{n,k} \text{ ist vom Typ } (\overline{J}_{n,k}, W < \frac{\epsilon_n}{2^n}, I = 0) \ .$$

Ferner definieren wir auf $\overline{J}_{n,k}$:

(2) $$Q_{n,k}(x) := 4\frac{\epsilon_n}{2^n} \sin \lambda_{n,k}(x - a_{n,k}) \ ,$$

wobei wir die $\lambda_{n,k}$ gleich noch bestimmen werden. Wir bestimmen nämlich zuerst natürliche $N_{n,k} \in \mathbf{N}$ mit

(3) $$N_{n,k}\frac{\epsilon_n}{2^n} > n \qquad \forall n, k \ .$$

Nun wählen wir die $\lambda_{n,k}$ von der Form

$$\lambda_{n,k} = \frac{l_{n,k}\pi}{b_{n,k} - a_{n,k}} \qquad l_{n,k} \in \mathbf{N} \text{ groß} \ ,$$

so daß gilt

(4) $Q_{n,k}(a_{n,k}) = Q_{n,k}(b_{n,k}) = 0$ und $Q_{n,k}$ durchläuft in dem abgeschlossenen Intervall $[a_{n,k}, a_{n,k} + \frac{\epsilon_n}{2^n}] \cap \overline{J}_{n,k}$ mindestens $N_{n,k}$ volle Perioden.

Jetzt sei auf $\overline{J}_{n,k}$

$$q_{n,k} := Q'_{n,k} \text{ und } h_{n,k} := p_{n,k} + q_{n,k} \,. \tag{5}$$

Beachte daß für $[\alpha, \beta] \subset \overline{J}_{n,k}$ stets $q_{n,k} \in \mathcal{L}^1_L[\alpha, \beta]$ und

$$\left| \int_\alpha^\beta q_{n,k}(t)\, dt \right| = |Q_{n,k}(\beta) - Q_{n,k}(\alpha)| \leq 8\frac{\epsilon_n}{2^n} \,.$$

Da außerdem $\int_a^b q_{n,k}(t)\, dt = Q_{n,k}(b) - Q_{n,k}(a) = 0$ bekommt man mit Blick auf Gleichung (1):

$$h_{n,k} \text{ ist vom Typ } (\overline{J}_{n,k}, W < 9\frac{\epsilon_n}{2^n}, I = 0) \,. \tag{6}$$

3. SCHRITT.

Wir definieren nun h durch

$$h := \begin{cases} h_{n,k} & \text{auf } J_{n,k} \text{ , für alle } n, k \\ 0 & \text{auf } E \end{cases}$$

BEHAUPTUNG I. *Es gilt*

$$h \in \mathcal{D}_1[a, b] \,,\ a, b \in S_L(h; [a, b]) \,,\ (D_1) \int h = 0 \,.$$

BEWEIS HIERZU: Wir bestimmen zunächst $S_L = S_L(h; [a, b])$. Per constructionem hat $h_{n,k}$ keine L-Singularitäten in $J_{n,k}$ (siehe (6)). Wegen $h|J_{n,k} = h_{n,k}$ gilt dasselbe für h, also: $S_L \subset E$.

Angenommen $a_{n,k} \notin S_L$ für ein $a_{n,k}$. Dann wäre h in einer Umgebung von $a_{n,k}$ L-integrierbar. Erst recht wäre $h_{n,k}$ in einer rechtsseitigen Umgebung von $a_{n,k}$ Lebesgue-integrierbar, da es auf einer solchen mit h übereinstimmt. Dies widerspricht aber $a_{n,k} \in S_L(h_{n,k}, \overline{J}_{n,k})$, was wegen (6) der Fall ist. Also sind doch alle $a_{n,k} \in S_L$ und analog sind alle $b_{n,k} \in S_L$. Wir haben

$$A := \{a_{n,k}, b_{n,k} |\ n = 0, 1, 2, \ldots, k = 1, \ldots, 2^n\} \subset S_L \,.$$

Da S_L abgeschlossen ist gilt dann aber auch

$$\overline{E} = \overline{A} \subset S_L \,.$$

Insgesamt haben wir damit $E = S_L$ gezeigt, insbesondere sind $a, b \in S_L$.

$E = S_L$ ist nirgends dicht und h ist Lebesgue-integrierbar über S_L, da es dort verschwindet. Nach (6) gilt überdies für alle n, k:

$$h \in \mathcal{L}_L^1[\alpha, \beta] \text{ für } a_{n,k} < \alpha \leq \beta < b_{n,k} ,$$

$$W_{n,k} := \sup_{a_{n,k} < \alpha \leq \beta < b_{n,k}} \left| \int_\alpha^\beta h(t)\, dt \right| < 9\frac{\epsilon_n}{2^n} ,$$

$$I_{n,k} := \lim_{\substack{\alpha \downarrow a_{n,k} \\ \beta \uparrow b_{n,k}}} \int_\alpha^\beta h(t)\, dt = 0 .$$

Wegen der Abschätzung

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{2^n} W_{n,k} \right) < \sum_{n=0}^{\infty} \left(2^n \cdot 9\frac{\epsilon_n}{2^n} \right) = 9 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n < \infty$$

ist $h \in \mathcal{D}_1[a, b]$ und

$$(D_1) \int h = \int_{S_L} h\, d\lambda + \sum_{n,k} I_{n,k} = 0 .$$

Jetzt ist nur noch Pumkt (i) zu beweisen, was aber auch am schwierigsten ist.

BEHAUPTUNG II. $h \notin \mathcal{L}_\omega^1[a, b]$.

BEWEIS HIERZU: Wir nehmen das Gegenteil an:

(*) Annahme: $h \in \mathcal{L}_\omega^1[a, b]$.

Wir zerlegen dann h in

$$h = g + p \qquad g \in \mathcal{E}_\omega, h \in \mathcal{L}_L^1 .$$

Sei G ein ω-Stamm von g. Da E überabzählbar ist, gibt es ein $c \in E \setminus \{b\}$ in dem G differenzierbar ist. Wir dürfen $G'(c) = 0$ annehmen, sonst müßten wir nur g und p um eine Konstante (nämlich $G'(c)$) abändern. Da $(\mathcal{D}_1, (D_1) \int)$ ein Integralsystem ist, gilt $h \in \mathcal{D}_1[c, x], \forall x \in [c, b]$ (gemäß Forderung (IS1) für Integralsysteme). Wir können daher

$$H(x) := (D_1) \int h \qquad (x \in [c, b])$$

bilden. Ferner definieren wir

$$P(x) := \int_c^x p(t)\,dt \qquad (x \in [c,b]) \ .$$

Es gilt

$$\mathcal{L}^1_L[c,x], \mathcal{L}^1_\omega[c,x], \mathcal{D}_1[c,x] \subset \mathcal{L}^1_{D_*}[c,x] \ ,$$

bei Übereinstimmung sämtlicher Integrale (siehe z.B. (5.1.6) und (5.2.9)). Wir können daher die Gleichung $h = g + p$ etwa in $\mathcal{L}^1_{D_*}[c,x]$ überintegrieren und erhalten mit den Definitionen von H und P $(x \in [c,b])$:

$$\begin{aligned} H(x) = G(x) - G(c) + P(x) \Rightarrow \\ |H(x) - P(x)| = |G(x) - G(c)| \ ; \end{aligned}$$

wegen $G'(c) = 0$ existiert daher ein h_0 mit $0 < h_0 < b - c$ und

$$|H(x) - P(x)| \leq x - c \text{ für } 0 \leq x - c \leq h_0 \ . \tag{7}$$

Sei jetzt $n_0 \in \mathbf{N}$ beliebig vorgegeben. Wähle zunächst ein $n_1 \geq n_0$ so groß daß

$$\frac{\epsilon_{n_1}}{2^{n_1}} < \frac{h_0}{2} \ .$$

Gemäß der Feststellung am Schluß des 1. Schrittes finden wir n, k mit $n \geq n_1, [a_{n,k}, b_{n,k}] \subset [c,b]$ und $0 \leq a_{n,k} - c < \frac{\epsilon_n}{2^n}$. Für den Rest dieses Beweises sind diese n, k fest. Wegen $n \geq n_1$ gilt erst recht $\frac{\epsilon_n}{2^n} < \frac{h_0}{2}$. Sei

$$U := (a_{n,k}, a_{n,k} + \frac{\epsilon_n}{2^n}) \cap J_{n,k} \ .$$

Für alle $x \in U$ ist dann

$$0 \leq x - c = (x - a_{n,k}) + (a_{n,k} - c) < \frac{\epsilon_n}{2^n} + \frac{\epsilon_n}{2^n} < h_0 \ ;$$

Für alle $x \in U$ gilt also (7) und überdies $x - c < 2\frac{\epsilon_n}{2^n}$ und folglich

$$\begin{aligned} |H(x) - P(x)| < 2\frac{\epsilon_n}{2^n} \Rightarrow \\ -2\frac{\epsilon_n}{2^n} + H(x) \leq P(x) \leq 2\frac{\epsilon_n}{2^n} + H(x) \quad \forall x \in U \end{aligned}$$

so daß

$$P(y) - P(x) \leq 4\frac{\epsilon_n}{2^n} + (H(y) - H(x)) \quad \forall x, y \in U \ .$$

Sind $x \leq y$ aus U, so ist $[x,y] \subset U \subset J_{n,k}$ kompakt und $h_{n,k}, p_{n,k}, q_{n,k}$ sind L-integrierbar über $[x,y]$. Da $h|J_{n,k} = h_{n,k}$ gilt also

$$H(y) - H(x) = \int_x^y h_{n,k}(t)\,dt = \int_x^y p_{n,k}(t)\,dt + \int_x^y q_{n,k}(t)\,dt \ .$$

Gemäß (1) bleibt dabei

$$\left| \int_x^y p_{n,k}(t)\,dt \right| < \frac{\epsilon_n}{2^n} \Rightarrow$$

$$H(y) - H(x) < \frac{\epsilon_n}{2^n} + \int_x^y q_{n,k}(t)\,dt$$

$$= \frac{\epsilon_n}{2^n} + Q_{n,k}(y) - Q_{n,k}(x) \ .$$

Setzen wir dies in (8) ein so erhalten wir

$$(9) \qquad P(y) - P(x) \leq 5\frac{\epsilon_n}{2^n} + (Q_{n,k}(y) - Q_{n,k}(x)) \qquad \forall x \leq y \text{ aus } U \ .$$

Wir erinnern uns nun an Punkt (4) aus dem 2. Schritt: Er besagte gerade daß $Q_{n,k}$ in U mindestens $N_{n,k}$ volle Perioden durchläuft. Da $Q_{n,k}$ die Amplitude $4\frac{\epsilon_n}{2^n}$ hat finden wir

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{N_{n,k}} < y_{N_{n,k}} \text{ aus } U$$

(nämlich die Täler- und Gipfelpunkte von $Q_{n,k}$) so daß

$$Q_{n,k}(y_l) - Q_{n,k}(x_l) = -8\frac{\epsilon_n}{2^n} \qquad (l = 1, \ldots, N_{n,k}) \ .$$

Setzt man dies in (9) ein so hat man

$$P(y_l) - P(x_l) \leq -3\frac{\epsilon_n}{2^n} \qquad (l = 1, \ldots, N_{n,k}) \ ,$$

so daß mit (3) aus dem 2. Schritt folgt:

$$\sum_{l=1}^{N_{n,k}} |P(y_l) - P(x_l)| \geq 3N_{n,k}\frac{\epsilon_n}{2^n} > 3n \geq 3n_0 \ .$$

Da $n_0 \in \mathbf{N}$ beliebig war folgt daraus, daß P von unbeschränkter Schwankung ist, ein Widerspruh dazu, daß P als unbestimmtes Integral einer Lebesgue-integrierbaren Funktion gemäß (3.2.18) von Beschränkter Schwankung sein müßte. Damit hat sich Annahme (*) als falsch erwiesen, Behauptung II ist gezeigt.

Behauptung I und II ergeben nun zusammen gerade die Behauptung des Lemmas und wir sind fertig ◇

(5.3.4) LEMMA. *Es gibt eine Funktion* $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ *für die gilt:*

(i) $h \in \big(\mathcal{D}_1[a,b] \setminus \mathcal{L}^1_L[a,b]\big) \cap \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$.
(ii) $S_L(h;[a,b]) = \{a\}$.
(iii) $(D_1)\int h = 0$.

BEWEIS: Betrachte das F aus Lemma (3.4.4) und setze $h := F'$. Natürlich ist $h \in \mathcal{E}_N \subset \mathcal{E}_\omega \subset \mathcal{L}^1_\omega$. Wegen (3.4.4),(iii) ist $S_L(h;[a,b]) = \{a\}$, insbesondere also $h \notin \mathcal{L}^1_L[a,b]$. Trivialerweise ist $h \in \mathcal{D}_1[a,b]$ und

$$(D_1)\int h = \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^b h = \lim_{\alpha \downarrow a}(F(b) - F(\alpha)) = 0 \ ,$$

denn es ist $F(b) = 0$ nach (3.4.4),(ii) und $F(a) = 0$ nach (3.4.4),(iv). Damit ist alles gezeigt ◇

Ist $\eta < \Omega$ eine Ordinalzahl vom 2. Typ (d.h. ohne unmittelbaren Vorgänger), so gibt es gemäß (5.2.1) Ordinalzahlen $\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta$, so daß η die kleinste Ordinalzahl ist die größer ist als alle η_n. Daher ist insbesondere

$$\mathcal{D}_\eta[a,b] = \bigcup_{\xi<\eta} \mathcal{D}_\xi[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{D}_{\eta_n}[a,b] \ .$$

Wir werden diese Tatsache im Verlauf des nächsten Beweises benutzen.

(5.3.5) LEMMA. *Sei* $\eta < \Omega$ *eine Ordinalzahl. Es existiert eine Funktion* $h : [a,b] \to \mathbf{R}$ *für die gilt:*

(i) $h \in (\mathcal{D}_{\eta+1}[a,b] \setminus \mathcal{D}_\eta[a,b]) \cap \mathcal{L}^1_\omega[a,b]$.
(ii) $S_\eta(h;[a,b]) = \{a\}$.
(iii) $(D_{\eta+1})\int h = 0$.

BEWEIS: Wir beweisen das Lemma durch transfinite Induktion nach η.

Für $\eta = 0$ ist die Behauptung bereits durch das letzte Lemma bewiesen. Sei nun $0 < \eta < \Omega$ und das Lemma sei bereits für alle $\xi < \eta$ bewiesen. Wir zeigen, daß es auch für η richtig ist und unterscheiden hierbei zwei Fälle.

1. FALL. *η ist vom 1. Typ.*

Dann besitzt η einen unmittelbaren Vorgänger ξ: $\eta = \xi + 1, \mathcal{D}_\eta = (\mathcal{D}_\xi)_*$. Wähle nun $c_n \in \mathbf{R}$ mit

$$b = c_1 > c_2 > \cdots > a \text{ und } c_n \downarrow a .$$

Nach Induktionsvoraussetzung existieren Funktionen $h_n : [c_{n+1}, c_n] \to \mathbf{R}$ für die gilt:

(1) $h_n \in (\mathcal{D}_\eta[c_{n+1}, c_n] - \mathcal{D}_\xi[c_{n+1}, c_n]) \cap \mathcal{L}^1_\omega[c_{n+1}, c_n]$.
(2) $S_\xi(h_n; [c_{n+1}, c_n]) = \{c_{n+1}\}$.
(3) $(D_\eta) \int_{c_{n+1}}^{c_n} h_n = 0$.

Da $h_n \in (\mathcal{D}_\xi)_*[c_{n+1}, c_n]$ und $S_\xi(h_n; [c_{n+1}, c_n]) = \{c_{n+1}\}$ gilt:

$$W_n := \sup_{c_{n+1} < \alpha \leq c_n} \left| (D_\xi) \int_\alpha^{c_n} h_n \right| < \infty .$$

Andererseits ist $W_n > 0$. Sonst wäre $W_n = 0$, also (unter Beachtung von (3)):

$$H_n(x) := (D_\eta) \int_{c_{n+1}}^{x} h_n = -(D_\eta) \int_x^{c_n} h_n = -(D_\xi) \int_x^{c_n} h_n = 0 \quad (x \in (c_{n+1}, c_n]) .$$

Es ist aber auch $h_n \in \mathcal{L}^1_\omega[c_{n+1}, c_n]$, also

$$H_n(x) = \int_{c_{n+1}}^{x} h_n \, dI_\omega = 0 ,$$

und damit $H_n' = h_n = 0$ f.ü. nach (3.2.17), was aber z.B. Aussage (2) widerspricht. Damit haben wir $0 < W_n < \infty$, für alle n. Indem wir nötigenfalls h_n mit einer geeigneten Konstanten multiplizieren können wir

$$\frac{1}{2n} < W_n < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \tag{4}$$

annehmen. Sei nun $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ diejenige Funktion mit $h = h_n$ auf $(c_{n+1}, c_n]$ und etwa $h(a) = 0$. Es gilt:

$$h \in \mathcal{D}_\eta[\alpha, b] , \; h \in \mathcal{L}^1_\omega[\alpha, b] \qquad \text{für } a < \alpha \leq b . \tag{5}$$

Denn ist etwa $c_{n+1} \leq \alpha \leq c_n$ so ist

$$h \in \mathcal{D}_\eta[\alpha, c_n] \cap \mathcal{D}_\eta[c_n, c_{n-1}] \cap \cdots \cap \mathcal{D}_\eta[c_2, c_1] \Rightarrow$$
$$h \in \mathcal{D}_\eta[\alpha, b]$$

(siehe Forderung (IS1) für Integralsysteme). Analog zeigt man $h \in \mathcal{L}^1_\omega[\alpha, b]$. Mit Beachtung von (5.3.1) ist

$$\int_{c_{n+1}}^{c_n} h\, dI_\omega = (D_\eta) \int_{c_{n+1}}^{c_n} h = (D_\eta) \int_{c_{n+1}}^{c_n} = 0 \quad \forall n \in \mathbf{N} .$$

Für $\alpha \in (c_{n+1}, c_n]$ ist $S_\xi(h_n; [\alpha, c_n]) = \emptyset$, siehe (2). Nach (5.2.4) ist $h_n \in \mathcal{D}_\xi[\alpha, c_n]$ und folglich

$$(7) \qquad \left| (D_\eta) \int_\alpha^{c_n} h \right| = \left| (D_\eta) \int_\alpha^{c_n} h_n \right| = \left| (D_\xi) \int_\alpha^{c_n} h_n \right| \leq W_n < \frac{1}{n}$$

$$(\alpha \in (c_{n+1}, c_n])$$

mit Hilfe von (4). Nun ist

$$(D_\eta) \int_\alpha^b h = (D_\eta) \int_\alpha^{c_n} h + \sum_{l=1}^{n-1} (\mathcal{D}_\eta) \int_{c_{l+1}}^{c_l} h$$

woraus wir mit (6) und (7) schließen:

$$(8) \qquad \left| (D_\eta) \int_\alpha^b h \right| < \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbf{N}, \alpha \in (c_{n+1}, c_n]) .$$

Insbesondere erhalten wir (beachte wieder (5.3.1)):

$$(9) \qquad \int_\alpha^b h\, dI_\omega = (D_\eta) \int_\alpha^b h \to 0 , \text{ für } \alpha \downarrow a .$$

Aus Satz (3.2.16) folgt wegen (5) und (9)

$$(10) \qquad f \in \mathcal{L}^1_\omega[a, b] .$$

Als nächstes zeigen wir

$$(11) \qquad S_\eta(h; [a, b]) = \{a\} \text{ und } h \notin \mathcal{D}_\eta[a, b] .$$

Wegen (5) können jedenfalls keine Punkte aus $(a, b]$ in $S_\eta = S_\eta(h; [a, b])$ liegen: $S_\eta \subset \{a\}$. Wäre nun $S_\eta \neq \{a\}$ so bliebe nur $S_\eta = \emptyset$. Nach (5.2.4) wäre dann $h \in \mathcal{D}_\eta[a, b]$. Wegen (2) gilt

$$S_\xi(h; [a, b]) \cap [a, b] = \{c_1, c_2, \ldots\} \Rightarrow$$

$$(a, b) \setminus S_\xi(h; [a, b]) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_{n+1}, c_n) .$$

Nach (4) ist jedoch

$$\sum_1^\infty \left[\sup_{c_{n+1}<\alpha\leq\beta<c_n} \left| (D_\xi) \int_\alpha^\beta h \right| \right] \geq \sum_1^\infty \frac{1}{2n} = \infty ,$$

was unvereinbar mit $h \in \mathcal{D}_\eta[a,b] = (\mathcal{D}_\xi)_*[a,b]$ ist. Also ist doch $S_\eta = \{a\}$ und damit natürlich $h \notin \mathcal{D}_\eta[a,b]$, (11) ist gezeigt.

Aus (8),(9) und (11) folgt sofort

$$h \in \mathcal{D}_{\eta+1}[a,b] \ , \ (D_{\eta+1}) \int h = 0 \ . \tag{12}$$

Mit (10),(11) und (12) sind alle Behauptungen des Lemmas gezeigt, der 1.Fall ist erledigt.

2. FALL. *η ist vom 2. Typ.*

Gemäß der Bemerkung vor Beginn dieses Lemmas gibt es geeignete Ordinalzahlen $\eta_1 < \eta_2 < \cdots < \eta$ so daß

$$\mathcal{D}_\eta[a,b] = \bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{D}_{\eta_n}[a,b] \ .$$

Wir wählen wieder $c_n \in \mathbf{R}$ wie im ersten Fall. Nach Induktionsvoraussetzung existieren $h_n : [c_{n+1}, c_n] \to \mathbf{R}$ für die gilt:

(1') $h_n \in (\mathcal{D}_{\eta_n+1}[c_{n+1}, c_n] \setminus \mathcal{D}_{\eta_n}[c_{n+1}, c_n]) \cap \mathcal{L}^1_\omega[c_{n+1}, c_n]$.

(2') $S_{\eta_n}(h_n; [c_{n+1}, c_n]) = \{c_{n+1}\}$.

(3') $(D_{\eta_n+1}) \int_{c_{n+1}}^{c_n} h_n = 0$.

Dabei können wir es einrichten, daß (siehe 1. Fall)

$$W_n := \sup_{c_{n+1}<\alpha\leq c_n} \left| (D_{\eta_n}) \int_\alpha^{c_n} h_n \right| < \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \ . \tag{4'}$$

Durch Zusammensetzen der h_n erhält man wieder eine Funktion $h : [a,b] \to \mathbf{R}$. Wegen $\eta_n < \eta_{n+1}$ gilt $\eta_n + 1 \leq \eta_{n+1}$ und daher

$$h_n \in \mathcal{D}_{\eta_n+1}[c_{n+1}, c_n] \subset \mathcal{D}_{\eta_{n+1}}[c_{n+1}, c_n] \subset \mathcal{D}_\eta[c_{n+1}, c_n] \ .$$

Beachtet man dies, so folgt wieder Aussage (5) wie im 1. Fall. Auch (6) bleibt offenbar richtig. Aussage (7) bleibt gültig, wenn man in ihr und ihrer Begründung

ξ durch η_n ersetzt. Die Aussagen (8),(9),(10) bleiben mit Begründung gültig. Der Beweis von (11) ändert sich ein wenig:

(11) $$S_\eta(h;[a,b]) = \{a\} \text{ und } h \notin \mathcal{D}_\eta[a,b] \ .$$

Wegen (5) können nämlich keine Punkte von $(a,b]$ zu $S_\eta = S_\eta(h;[a,b])$ gehören: $S_\eta \subset \{a\}$. Wäre nun $S_\eta \neq \{a\}$, so bliebe nur $S_\eta = \emptyset$. Nach (4.2.5) wäre dann $h \in \mathcal{D}_\eta[a,b]$ und damit in einem $\mathcal{D}_{\eta_n}[a,b]$ enthalten. Erst recht wäre

$$h_n = h|[c_{n+1}, c_n] \in \mathcal{D}_{\eta_n}[c_{n+1}, c_n] \ ,$$

was aber wegen (1') nicht der Fall ist. Also ist doch $S_\eta = \{a\}$ und damit natürlich $h \notin \mathcal{D}_\eta[a,b]$.

Jetzt erhält man wieder Aussage (12) wie im ersten Fall und ist fertig.

Damit ist das Lemma bewiesen $\diamondsuit$

(5.3.6) LEMMA. *Für alle $\eta < \Omega$ ist*

$$(\mathcal{D}_{\eta+1}[a,b] \setminus \mathcal{D}_\eta[a,b]) \setminus \mathcal{L}^1_\omega[a,b] \neq \emptyset \ .$$

BEWEIS: Sei $\eta < \Omega$ und $c \in [a,b]$. Nach (5.3.3) gibt es ein $h : [a,c] \to \mathbf{R}$ für das gilt

$$h \in \mathcal{D}_1[a,c] \ , \ h \notin \mathcal{L}^1_\omega[a,c] \ .$$

Lemma (5.3.5) sichert insbesondere die Existenz einer Funktion g mit

$$g \in \mathcal{D}_{\eta+1}[c,b] \ , \ g \notin \mathcal{D}_\eta[c,b] \ .$$

Indem wir gegebenenfalls noch zu h eine geeignete Konstante addieren, können wir $h(c) = g(c)$ annehmen. Wir definieren dann f auf $[a,b]$ durch

$$f := \begin{cases} h & \text{auf } [a,c] \\ g & \text{auf } [c,b] \end{cases} \ .$$

Aus $h \in \mathcal{D}_1[a,c] \subset \mathcal{D}_{\eta+1}[a,c]$, $g \in \mathcal{D}_{\eta+1}[c,b]$ folgt

(1) $$f \in \mathcal{D}_{\eta+1}[a,b] \ ,$$

siehe Forderung (IS1) für Integralsysteme. Sicher ist

(2) $$f \notin \mathcal{D}_\eta[a,b] \ ,$$

da sonst erst recht $g = f|[c,b] \in \mathcal{D}_\eta[c,b]$ wäre; analog ist

(3) $$f \notin \mathcal{L}^1_\omega[a,b] \ ,$$

sonst wäre $h = f|[a,c] \in \mathcal{L}^1_\omega[a,c]$. Die Aussagen (1),(2) und (3) sind aber gerade die Behauptung des Lemmas $\diamondsuit$

Nun haben wir einen guten Überblick über die "Lage" von $\mathcal{L}^1_\omega[a,b]$ innerhalb der Kette

$$(\mathcal{D}_\eta[a,b])_{\eta<\Omega}$$

gewonnen. Wir wollen die Ergebnisse aus (5.3.5),(i) und (5.3.6) zum Hauptergebnis diesem Abschnitts zusammen:

(5.3.7) THEOREM. *Sei $[a,b]$ ein kompaktes, nicht zu einem Punkt entartetes Intervall. Dann gilt:*

(i) *Für jede Ordinalzahl $\eta < \Omega$ ist*

$$(\mathcal{D}_{\eta+1}[a,b] \setminus \mathcal{D}_\eta[a,b]) \setminus \mathcal{L}^1_\omega[a,b] \neq \emptyset\ .$$

(ii) *Für jede Ordinalzahl $\eta < \Omega$ ist*

$$(\mathcal{D}_{\eta+1}[a,b] \setminus \mathcal{D}_\eta[a,b]) \cap \mathcal{L}^1_\omega[a,b] \neq \emptyset\ .$$

Insbesondere ist also $\mathcal{D}_{\eta+1}[a,b]$ stets eine echte Erweiterung von $\mathcal{D}_\eta[a,b]$.

Wir haben die Denjoy-Kette $(\mathcal{D}_\eta, (D_\eta)\int)_{\eta<\Omega}$ studiert, bei der mit $\mathcal{D}_0 = \mathcal{L}^1_L$ begonnen wurde. Was aber passiert, wenn man denselben Prozeß mit $\mathcal{D}'_o := \mathcal{L}^1_\omega$ startet? Wir wollen diese Frage nicht mehr ausführlich diskutieren, dennoch können wir aus dem bisher gezeigeten schon etwas aussagen. Es muß z.B.

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_1[a,b] := (\mathcal{L}^1_\omega)_*[a,b] &\supset \mathcal{L}^1_\omega[a,b] = \mathcal{D}'_0[a,b] \\ (\mathcal{L}^1_\omega)_*[a,b] &\neq \mathcal{L}^1_\omega[a,b] \end{aligned}$$

gelten, denn in $\mathcal{D}'_1$ liegen ja sicher alle Funktionen aus $\mathcal{D}_1$, insbesondere also solche, die ihrerseits nicht in $\mathcal{L}^1_\omega$ liegen (siehe (5.3.3),(i)).

Wie auch immer dieser Fortsetzungsprozeß weitergehen würde, wir kämen mit ihm niemals über das Denjoy-Perron-Integral hinaus:
Das Denjoy-Perron-System

$$\left(\mathcal{D}_*, (D_*)\int\right) = \left(\mathcal{L}^1_P, (P)\int\right)$$

ist, z.B. gemäß (5.1.6), allgemeiner als das System $(\mathcal{L}^1_\omega, \int dI_\omega)$. Nun kann man aber zeigen: Ist $(\mathcal{L}^1_P, (P)\int)$ allgemeiner als das Integral-System $(\mathcal{T}, T)$, so ist es auch allgemeiner als das System $(\mathcal{T}_*, T_*)$.

Der Beweis der letztgenannten Tatsache, mit der wir diesen Abschnitt beschließen wollen, findet sich z.B. in [**17**] , XVI, §8.

(6) Ein Daniell-Zugang zum Denjoy-Integral

(6.1) AC-, VB-, ACG- und VBG-Funktionen

Wir kommen in diesem Abschnitt auf einen weiteren Integral-Begriff zu sprechen: Das Denjoy-Integral. So wie zum Perron-Integral gibt es auch zum Denjoy-Integral mehrere äquivalente Zugänge. Zum einen existiert ein "konstruktiver" Zugang, der dem Zugang zum Denjoy-Perron-Integral über die Kette der Denjoy-Erweiterungen sehr ähnlich ist (siehe etwa [**17**] , XVI oder [**11**]). Wir werden hingegen den sogenannten deskriptiven Zugang mit Hilfe von ACG-Funktionen kurz beschreiben um sodann zu zeigen, daß auch ein vernünftiger Zugang über die Fortsetzung von Daniell-Integralen (im Sinne von Kapitel (1)) existiert. In der Tat sind mehrere solcher Zugänge vorstellbar, viele sind jedoch trivial oder "unhandlich" und demnach zu verwerfen.

Wir wollen nun zunächst einige wichtige Begriffe und Sätze einführen. Viele Definitionen und Sätze werden dabei nicht in der größtmöglichen Allgemeinheit formuliert oder bewiesen, sondern nur in dem von uns benötigten Umfang. Der Verlust an Allgemeinheit wird dabei durch einen Gewinn an Übersichtlichkeit und Lesbarkeit, sowie durch vereinfachte Beweise aufgewogen. Wir werden insbesondere für den Begriff der approximativen Differenzierbarkeit eine sehr pragmatische Definition wählen, die aber der ursprünglichen Definition völlig äquivalent ist (siehe [**11**] , VII, §3).

Die Beweise aller Sätze dieses Abschnitts (6.1) finden sich auch in [**11**] . Wenn hier dennoch Sätze bewiesen werden, so hat dies zwei Gründe: Erstens brauchen wir manche Sätze nur in abgeschwächter Form, so daß wir hier vereinfachte Beweise angeben können; zweitens waren wir der Meinung, daß sich die Beweise aus [**11**] an einigen Stellen übersichtlicher gestalten ließen, was wir denn auch versucht haben.

Wir vereinbaren einige Schreib- und Sprechweisen die sehr praktisch sind.

Ist $E \subset \mathbf{R}$ eine Menge, $F : E \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion sowie $a, b \in E$ und $I = [a, b]$, dann schreiben wir häufig $F[I]$ statt $F(b) - F(a)$. Für das Bild der Menge E unter F schreiben wir weiterhin $F(E)$ (Vorsicht: In [**11**] ist die Bedeutung von eckigen und runden Klammern genau umgekehrt).

Sei $[a, b]$ ein kompaktes Intervall und $E \subset [a, b]$. Wir sagen, eine endliche Familie $\{I_k\}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_k = [a_k, b_k]$ sei eine E-Familie, wenn gilt:

(1) $a_k, b_k \in E$ für alle k (d.h. die Ecken der I_k liegen in E).

(2) Die I_k sind nicht-überlappend, d.h.

$$(a_k, b_k) \cap (a_l, b_l) = \emptyset \qquad \text{für } k \neq l \ .$$

Das (äußere) Lebesgue-Maß einerMenge $E \subset \mathbf{R}$ schreiben wir häufig einfach $|E|$. Haben wir insbesondere ein Intervall $I = [a, b]$ vorliegen, so bedeutet $|I| = b - a$

seine Länge. Ist noch $F : I \to \mathbf{R}$ eine Funktion, so bedeutet also
$|F(I)|$ das (äußere) Lebesgue-Maß von $F(I)$, aber
$|F[I]|$ den Betrag von $F(b) - F(a)$.

(6.1.1) DEFINITION. *Sei $E \subset [a,b]$ und $F : E \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion. Die Schwankung oder Variation von F auf E wird definiert durch*

$$V(F,E) := \sup \left\{ \sum |F[I_k]| \mid \{I_k\} \text{ ist eine } E\text{-Familie} \right\} .$$

Ist $E = [a,b]$ so stimmt dies offensichtlich mit der üblichen Schwankung von F auf E überein.

(6.1.2) DEFINITION. *Sei $E \subset [a,b]$ und $F : E \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *F heißt VB (von beschränkter Variation) auf E, wenn $V(F,E) < \infty$.*

(ii) *F heißt VBG (von verallg. beschr. Variation) auf E, wenn es höchstens abzählbar viele $E_1, E_2, \cdots \subset E$ gibt, so daß $E = \bigcup E_n$ und F ist VB auf jedem E_n.*

(iii) *F heißt AC (absolut stetig) auf E, wenn es für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß für jede E-Familie $\{I_k\}$ gilt:*

$$\sum |I_k| < \delta \Rightarrow \sum |F[I_k]| < \epsilon .$$

(iv) *F heißt ACG (verallg. absolut stetig) auf E, wenn F auf E stetig ist und wenn es höchstens abzählbar viele $E_1, E_2, \cdots \subset E$ gibt, so daß $E = \bigcup E_n$ und F ist AC auf jedem E_n.*

Ist E ein Intervall, so bedeutet "F ist AC auf E" offenbar die übliche Definition der absoluten Stetigkeit.

Die vorkommenden Kürzel stammen aus dem Französischen. Die Abkürzung VBG bedeutet z.B. "variation bornée generalisée". Offenbar bilden die Mengen aller (VB-, AC-, VBG-) ACG-Funktionen über einer Menge E einen reellen Vektorraum.

(6.1.3) LEMMA. *Sei $E \subset [a,b]$. Ist $F : E \to \mathbf{R}$ AC auf E, so auch VB.*

BEWEIS: Sei $\delta > 0$ so gewählt, daß $\sum |F[I_k]| < 1$ für jede E-Familie $\{I_k\}$ mit $\sum |I_k| < \delta$. Sei

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$$

eine Unterteilung von $[a,b]$ mit $a_l - a_{l-1} < \delta$ und sei $J_l := [a_{l-1}, a_l]$ $(l = 1, \ldots, p)$. F ist dann offensichtlich beschränkt auf jedem $J_l \cap E$ und damit auch auf ganz E:

$M := \|F\|_\infty < \infty$. Sei nun $\{I_k\}_{k\in K}$ eine beliebige E-Familie (in der ohne Einschränkung keine zu einem Punkt entarteten Intervalle vorkommen). Definiere die Index-Mengen

$$K' := \{k \in K |\ a_l \in I_k \text{ für ein } l \in \{0,1,\dots,p\}\ \}$$
$$K_l := \{k \in K |\ I_k \subset \mathring{J}_l\} \qquad (l = 1,\dots,p)\ .$$

Dann enthält K' höchstens $2p$ Indices und K ist die disjunkte Vereinigung von K' und den K_l. Daraus folgt

$$\begin{aligned}\sum |F[I_k]| &= \sum_{k\in K'} |F[I_k]| + \sum_{l=1}^{p} \sum_{k\in K_l} |F[I_k]| \\ &\le 2p \cdot 2M + p \cdot 1 \qquad \Rightarrow \\ V(F,E) &\le 2p \cdot 2M + p < \infty \qquad \diamondsuit\end{aligned}$$

(6.1.4) LEMMA. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig und $E \subset [a,b]$. Ist F AC (VB) auf E, so auch auf $\overline{E}$.*

BEWEIS: Sei F *AC* auf E. Zu $\epsilon > 0$ existiert dann ein gewisses $\delta > 0$ so daß $\sum |F[I_k]| < \epsilon$ für jede E-Familie $\{I_k\}$ mit $\sum |I_k| < \delta$. Sei nun $\{I_k\} = \{I_1,\dots,I_n\}$ eine $\overline{E}$-Familie mit $\sum |I_k| < \delta$. Wir zeigen, daß dann $\sum |F[I_k]| < 4\epsilon$ bleibt.

Sei etwa $I_k = [a_k, b_k]$. Indem man diejenigen I_k mit $a_k = b_k$ aussondert (sie spielen keine Rolle) und hiernach sortiert, kann man annehmen, daß

$$a_1 < b_1 \le a_2 < b_2 \le \cdots \le a_n < b_n$$

und daher

$$\begin{aligned}&a_1 < b_1 < a_3 < b_3 < \cdots < a_{2k-1} < b_{2k-1} < \dots \\ &a_2 < b_2 < a_4 < b_4 < \cdots < a_{2k} < b_{2k} < \dots\end{aligned}\ .$$

Da die a_k, b_k aus $\overline{E}$ sind und da F stetig ist, findet man leicht Punkte $a'_k \in E$ (nahe bei a_k) und $b'_k \in E$ (nahe bei b_k) so daß gilt:

$$\begin{aligned}&a'_1 < b'_1 < a'_3 < b'_3 < \dots \\ &a'_2 < b'_2 < a'_4 < b'_4 < \dots \\ &|F(a'_k) - F(a_k)| < \frac{\epsilon}{n}\ ,\ |F(b'_k) - F(b_k)| < \frac{\epsilon}{n} \quad (k = 1,\dots,n)\ ,\end{aligned}$$

und dabei können wir es sogar so einrichten, daß

$$\sum (b'_k - a'_k) < \delta$$

und daher

$$\sum |F(b'_{2k-1}) - F(a'_{2k-1})| < \epsilon \ , \ \sum |F(b'_{2k}) - F(a'_{2k})| < \epsilon \ .$$

Wir können nun abschätzen:

$$\begin{aligned}\sum |F[I_k]| &= \sum |F(b_k) - F(a_k)| \\ &\leq \sum |F(b'_k) - F(b_k)| + \sum |F(a'_k) - F(a_k)| \\ &\quad + \sum |F(b'_{2k-1}) - F(a'_{2k-1})| + \sum |F(b'_{2k}) - F(a'_{2k})| \\ &< n\frac{\epsilon}{n} + n\frac{\epsilon}{n} + \epsilon + \epsilon = 4\epsilon \ ,\end{aligned}$$

wie gewünscht. Dies zeigt, daß F AC auf $\overline{E}$. Für den Beweis von

$$F \ VB \text{ auf } E \Rightarrow F \ VB \text{ auf } \overline{E}$$

geht man ähnlich vor $\diamondsuit$

Der folgende Satz ist sehr wichtig.

(6.1.5) SATZ. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig und $E \subset [a,b]$ abgeschlossen. Dann ist äquivalent:*

(i) *F ist ACG auf E.*

(ii) *Zu jeder nicht-leeren, abgeschlossenen Teilmenge E' von E gibt es $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, so daß $(\alpha,\beta) \cap E' \neq \emptyset$ und F ist AC auf E'.*

BEWEIS: Zu (i)⇒(ii): F ist ACG auf E, also auch auf dem nicht-leeren, abgeschlossenen $E' \subset E$. Es gibt daher $E'_1, E'_2, \cdots \subset E'$ mit $E' = \bigcup E'_n$ und F ist AC auf jedem E'_n. Wegen dem letzten Lemma dürfen wir alle E'_n abgeschlossen annehmen. E' ist abgeschlossen und daher als metrischer Raum vollständig. Wir können somit den Kategorien-Satz von Baire auf E' anwenden und erhalten: Es gibt ein n und $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ so daß

$$\emptyset \neq (\alpha,\beta) \cap E' \subset E'_n \ ;$$

F ist AC auf E'_n, also auch auf $(\alpha,\beta) \cap E'$.

Zu (ii)⇒(i): Die Bedingung aus (ii) sei erfüllt. Es bezeichne $\{I_n\}$ die Menge aller offenen Intervalle mit rationalen Endpunkten für die gilt: F ist ACG auf $I_n \cap E$. Sei

$$Q := \left(\bigcup I_n\right) \cap E = \bigcup (I_n \cap E) \ .$$

Natürlich ist dann F ACG auf $Q \subset E$. Angenommen $E' := E \setminus Q \neq \emptyset$. Offensichtlich ist E' abgeschlossen. Voraussetzungsgemäß gibt es nun ein offenes Intervall

$I = (\alpha, \beta)$ mit $I \cap E' \neq \emptyset$ und F ist AC auf $I \cap E'$. Dabei können wir natürlich ohne Einschränkung (durch eventuelles Verkleinern von I) die Endpunkte von I rational wählen, so daß $I = I_m$ für ein m. Dann haben wir aber den Widerspruch

$$\emptyset \neq E' \cap I_m \subset E' \cap \left(\bigcup I_n \right) = \emptyset ,$$

so daß doch $E' = \emptyset$ also $Q = E$ gelten muß. Da F ACG auf $Q = E$ folgt (i) $\diamondsuit$

Der Satz und der Beweis bleiben wort-wörtlich gültig, wenn man überall AC duch VB ersetzt. Sei $[a, b]$ ein Intervall und $E \subset [a, b]$ abgeschlossen. Dann ist $(a, b) \setminus E$ offen und besteht aus höchstens abzählbar vielen disjunkten Intervallen (a_k, b_k) (den Wegkomponenten von $(a, b) - E$). In diesem Falle nennen wir die Familie $\{[a_k, b_k]\}$ die in $[a, b]$ an E anliegenden Intervalle.

Gilt $a, b \in E \subset \mathbf{R}$ und ist $F : E \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion, so können wir eine Funktion $F_1 : [a, b] \to \mathbf{R}$ durch die Vorschrift

$$F_1(x) := \begin{cases} F(x) \text{ für } x \in E \\ \text{linear stetig interpoliert auf den } [a_k, b_k] \end{cases}$$

definieren. Dies ist so zu verstehen, daß F_1 über jedem $[a_k, b_k]$ die Punkte $(a_k, F(a_k)), (b_k, F(b_k))$ linear verbindet.

(6.1.6) LEMMA. *Sei $E \subset [a, b]$ eine abgeschlossene Menge mit $a, b \in E$ und Seien $\{I_k\}$ die in $[a, b]$ an E anliegenden Intervalle. Sei $F : E \to \mathbf{R}$ eine Funktion und sei*

$$F_1(x) := \begin{cases} F(x) \text{ für } x \in E \\ \text{linear stetig interpoliert auf den } I_k . \end{cases}$$

Ist dann F AC (VB) auf E, so ist F_1 AC (VB) auf $[a, b]$.

BEWEIS: Sei F AC auf E. Nach (6.1.3) ist F auch VB auf E, so daß insbesondere

$$\sum |F[I_k]| < \infty . \tag{1}$$

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Sei $\delta_1 > 0$ so gewählt, daß für jede E-Familie $\{J_n\}$ gilt:

$$\sum |J_n| < \delta_1 \Rightarrow \sum |F[J_n]| < \epsilon . \tag{2}$$

Wähle ferner k_0 so groß, daß

$$\sum_{k > k_0} |F[I_k]| < \epsilon . \tag{3}$$

Das ist möglich wegen (1). F_1 ist linear auf allen I_k und daher sicher AC auf $I_1 \cup \cdots \cup I_{k_0}$. Wir finden deshalb ein $\delta_2 > 0$ so daß

$$\sum |F_1[J_n]| < \epsilon \,, \tag{4}$$

für jede $I_1 \cup \cdots \cup I_{k_0}$-Familie $\{J_n\}$ mit $\sum |J_n| < \delta_2$. Sei nun

$$\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$$

und $\{J_n\}$ eine $[a,b]$-Familie mit $\sum |J_n| < \delta$. Wir zerlegen jedes J_n in höchstens drei abgeschlossene Intervalle J_n^1, J_n^2, J_n^3, und zwar stets so, daß J_n^1, J_n^3 in geeigneten I_k, I_l enthalten (oder leer) sind und J_n^2 Ecken in E hat (oder leer ist). Ist z.B. $J_n = [\alpha, \beta]$ und gilt $\alpha \in \overset{\circ}{\mathrm{I}}_k = (a_k, b_k)$ und $\beta \in \overset{\circ}{\mathrm{I}}_l = (a_l, b_l)$, so werden wir

$$J_n^1 := [\alpha, b_k] \,,\ J_n^2 := [b_k, a_l] \,,\ J_n^3 := [a_l, \beta]$$

setzen. Ist hingegen $\alpha \in E, \beta \in \overset{\circ}{\mathrm{I}}_l = (a_l, b_l)$, so werden wir

$$J_n^1 := \emptyset \ (|F[J_n^1]| := 0) \,,\ J_n^2 := [\alpha, a_l] \,,\ J_n^3 := [a_l, \beta]$$

setzen; analog verfährt man in den anderen möglichen Fällen. Nun gilt

$$\sum |F_1[J_n]| \le \sum \left(|F_1[J_n^1]| + |F_1[J_n^2]| + |F_1[J_n^3]| \right) \,. \tag{5}$$

$\{J_n^2\}$ ist eine E-Familie mit

$$\sum |J_n^2| \le \sum |J_n| < \delta \le \delta_1$$

so daß wegen (2) gilt:

$$\sum |F_1[J_n^2]| = \sum |F[J_n^2]| < \epsilon \,. \tag{6}$$

Für die J_n^1 gilt

$$\sum |J_n^1| \le \sum |J_n| < \delta \le \delta_2 \,;$$

wegen (4) gilt daher

$$\sum_{k=1}^{k_0} \sum_{n:\, J_n^1 \subset I_k} |F_1[J_n^1]| < \epsilon \,.$$

Wegen der Linearität von F_1 auf den I_k erhält man zusammen mit (3)

$$\sum_{k>k_0} \left[\sum_{n:\, J_n^1 \subset I_k} |F_1[J_n^1]| \right] \le \sum_{k>k_0} |F_1[I_k]| = \sum_{k>k_0} |F[I_k]| < \epsilon \,,$$

so daß insgesamt

$$\sum |F_1[J_n^1]| < 2\epsilon \,. \tag{7}$$

Ganz analog gilt

$$\sum |F_1[J_n^3]| < 2\epsilon \,. \tag{8}$$

Setzt man (6), (7) und (8) in (5) ein, so hat man

$$\sum |F_1[J_n]| < 5\epsilon \,.$$

Dies zeigt, daß F_1 AC auf $[a,b]$. der Beweis von

$$F \text{ ist } VB \text{ auf } E \Rightarrow F_1 \text{ ist } VB \text{ auf } [a,b]$$

geht ganz ähnlich und kann daher unterbleiben $\diamondsuit$

Folgendes Kriterium ist sehr nützlich um festzustellen, ob eine gegebene Funktiuon ACG ist.

(6.1.7) SATZ. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine stetige Funktion und $E \subset [a,b]$.*

(i) *Gibt es ein $M \geq 0$ so daß*

$$D^+F(x) \leq M \,,\; D_-F(x) \geq -M \quad \forall x \in E \cap [a,b] \,,$$

so ist F ACG auf E.

(ii) *Gilt $D^+F(x) < \infty$ und $D_-F(x) > -\infty$ b.ü. auf $(a,b) \cap E$, so ist die Funktion F ACG auf E.*

BEWEIS: Wir können $E \subset (a,b)$ annehmen.

Zu (i): Da $D_+F(x) \leq M, D_-F(x) \geq -M$ für alle $x \in E$ gibt es zu jedem $x \in E$ ein $n \in \mathbf{N}$ so daß für alle $t \in [a,b]$ gilt:

$$0 \leq t - x \leq \frac{1}{n} \Rightarrow F(t) - F(x) \leq (M+1)(t-x) \,,$$
$$0 \leq x - t \leq \frac{1}{n} \Rightarrow F(x) - F(t) \geq -(M+1)(x-t) \,;$$

zusammengefaßt bedeutet dies

$$|t - x| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow F(t) - F(x) \leq (M+1)|t-x| \,.$$

Setzt man daher

$$E_n := \{x \in E |\ F(t) - F(x) \leq (M+1)|t-x| \quad \text{für alle } t \in [a,b] \text{ mit } |t-x| \leq \frac{1}{n}\}$$

so ist $E = \bigcup E_n$. Sei dann

$$E_n^i := E_n \cap \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \qquad (i \in \mathbf{Z}) \ .$$

Sind $x_1, x_2 \in E_n^i$ so gilt $|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{n}$ und $x_1, x_2 \in E_n$, so daß gemäß der Definition von E_n

$$F(x_1) - F(x_2) \leq (M+1)|x_1 - x_2| \text{ und } F(x_2) - F(x_1) \leq (M+1)|x_2 - x_1| \Rightarrow$$
$$|F(x_1) - F(x_2)| \leq (M+1)|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in E_n^i \ .$$

Daraus folgt nun sofort, daß F AC auf jedem E_n^i, also ACG auf $E = \bigcup\limits_{n,i} E_n^i$. Damit ist (i) gezeigt.

Wir verzichten auf den einfachen Beweis von (ii), der sofort aus (i) folgt $\diamondsuit$

(6.1.8) DEFINITION. *Sei $E \subset \mathbf{R}$. Eine Funktion $F : E \to \mathbf{R}$ heißt Nullfunktion, wenn für jede Nullmenge $N \subset E$ auch $F(N)$ eine Nullmenge ist.*

(6.1.9) SATZ. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig und $E \subset [a,b]$. Ist F AC oder ACG auf E, so ist F eine Nullfunktion.*

BEWEIS: Sei F AC auf E. Nach (6.1.4) ist F auch AC auf $\overline{E}$, so daß wir ohne Einschränkung E abgeschlossen annehmen dürfen. Sei dann $N \subset E$ eine beliebige Nullmenge. Sei $\epsilon > 0$ beliebig und $\delta > 0$ so klein, daß $\sum |F[I_k]| < \epsilon$, für jede E-Familie $\{I_k\}$ mit $\sum |I_k| < \delta$. Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes gibt es ein offenes $U \supset N$ mit $\lambda(U) < \delta$. Das offene U ist die Vereinigung höchstens abzählbar vieler, paarweise disjunkter, offener Intervalle (a_k, b_k), so daß

$$N \subset \bigcup [a_k, b_k] \ , \ \sum (b_k - a_k) = \lambda(U) < \delta \ .$$

Hierbei können wir uns natürlich alle $[a_k, b_k]$ mit $[a_k, b_k] \cap N = \emptyset$ ausgesondert denken. Wähle nun abgeschlossene Intervalle $I_k' \subset [a_k, b_k]$ so, daß das stetige F auf dem abgeschlossenen $[a_k, b_k] \cap E$ in den Ecken von I_k' seine Extrema annimmt. Dann gilt

$$|F(N \cap [a_k, b_k])| \leq |F(E \cap [a_k, b_k])| \leq |F[I_k']| \ .$$

Da $\sum |I'_k| \leq \sum (b_k - a_k) < \delta$ hat man

$$|F(N)| \leq \sum |F(N \cap [a_k, b_k])| \leq \sum |F[I'_k]| \leq \epsilon \, .$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt $|F(N)| = 0$, was zu zeigen war.

Ist F ACG auf E so zerlegen wir E in $E = \bigcup E_n$ derart, daß F AC auf jedem E_n. Dann ist F, nach dem bereits Gezeigten, Nullfunktion auf jedem E_n. Für eine Nullmenge $N \subset E$ ist in diesem Falle

$$|F(N)| = |\bigcup F(E_n \cap N)| \leq \sum |F(E_n \cap N)| = 0 \, ,$$

also ist F auch dann eine Nullfunktion $\diamondsuit$

(6.2) Das Denjoy-Integral

Wir wollen nun das allgemeine Denjoy-Integral einführen, das allgemeiner ist als alle bisher eingeführten Integral-Begriffe. Für eine ausführliche Diskussion des Denjoy-Integrals sei auf [**11**] verwiesen.

Wir steuern sogleich auf den zentralen Begriff der Theorie zu, die approximative Ableitung.

(6.2.1) DEFINITION. *Sei $E \subset \mathbf{R}$ eine meßbare Menge. Ein Punkt $x \in \mathbf{R}$ heißt Dichtepunkt von E, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß gilt:*
Ist I ein abgeschlossenes Intervall mit $x \in I$ und $|I| < \delta$ so ist $|E \cap I| \geq (1-\epsilon)|I|$.

Man beachte, daß die Eigenschaft eines Punktes x Dichtepunkt von E zu sein, nur von der lokalen Beschaffenheit von E in der Nähe von x abhängt.

Die folgende Bemerkung ist trivial.

(6.2.2) LEMMA. *Ist x Dichtepunkt des meßbaren $E \subset \mathbf{R}$, so ist x beidseitiger Häufungspunkt von E.*

(6.2.3) SATZ. *Fast alle Punkte einer meßbaren Menge $E \subset \mathbf{R}$ sind Dichtepunkte von E.*

BEWEIS: Wir nehmen zunächst an, daß E beschränkt ist, etwa $E \subset [a,b]$. Dann ist $\chi_E \in \mathcal{L}^1_L[a,b]$. Sei

$$F(x) := \int_a^x \chi_E(t)\,dt \qquad (x \in [a,b]) \ .$$

Nach (3.1.4),(iv) ist

(1) $$F'(x) = \chi_E(x) = 1 \text{ für fast alle } x \in E \ .$$

Sei $x \in E$ ein Punkt mit $F'(x) = 1$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$ so daß für $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ gilt:

$$x \leq \beta < x + \delta \Rightarrow |E \cap [x,\beta]| = F(\beta) - F(x) \geq (1-\epsilon)(\beta - x) \ ,$$
$$x - \delta < \alpha \leq x \Rightarrow |E \cap [\alpha, x]| = F(x) - F(\alpha)| \geq (1-\epsilon)(x - \alpha) \ .$$

Für ein Intervall $I = [\alpha,\beta]$ mit $x \in I$ und $|I| < \delta$ gilt daher:

$$|E \cap I| = |E \cap [\alpha, x]| + |E \cap [x,\beta]| \geq (1-\epsilon)(\beta - \alpha) = (1-\epsilon)|I| \ .$$

Dies zeigt, daß x Dichtepunkt von E ist. Wegen (1) sind also fast alle Punkte von E Dichtepunkte von E, wie behauptet.

Ist endlich das meßbare E beliebig, so ist $E = \bigcup E_n$, mit den beschränkten, meßbaren $E_n := E \cap [-n, n]$. Fast alle Punkte von E_n sind Dichtepunkte von E_n, erst recht also von E. Wegen $E = \bigcup E_n$ sind daher fast alle $x \in E$ Dichtepunkte von E $\diamondsuit$

(6.2.4) DEFINITION. *Sei $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und $x_0 \in [a, b]$. F heißt approximativ differenzierbar in x_0, wenn ein $A \in \mathbf{R}$ existiert, so daß x_0 für alle $\epsilon > 0$ Dichtepunkt der Menge*

$$\{x \in (a, b) - \{x_0\} |\ A - \epsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq A + \epsilon\}$$

ist. In diesem Falle nennt man

$$F'_{ap}(x_0) := A$$

die approximative Ableitung von F in x_0.

Dieses A ist wirklich eindeutig bestimmt: Seien A_1, A_2 zwei verschiedene Zahlen mit denselben Eigenschaften wie A, etwa $A_1 < A_2$. Sei dann $\sigma := \frac{1}{3}(A_2 - A_1) > 0$, so daß $A_1 + \sigma < A_2 - \sigma$. Dann sind die Mengen

$$M_i := \{x \in (a, b) - \{x_0\} |\ A_i - \sigma \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq A_i + \sigma\} \quad (i = 1, 2)$$

paarweise disjunkt. Andererseits ist x_0 Dichtepunkt beider Mengen. Es existiert also ein $\delta > 0$ mit

$$|M_i \cap I| \geq \frac{3}{4}|I| \qquad (i = 1, 2)$$

für alle abgeschlossenen I mit $x_0 \in I$ und $|I| < \delta$. Für jedes solche I ist dann stets

$$|I| \geq |(M_1 \cup M_2) \cap I| = |M_1 \cap I| + |M_2 \cap I| \geq \frac{3}{2}|I| \ ,$$

was nicht möglich ist; also gilt doch $A_1 = A_2$, d.h. das A aus der vorangegangenen Definition ist eindeutig bestimmt.

Die approximative Ableitung verhält sich linear: Sind F, G approximativ differenzierbar in x_0 und sind $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, so ist auch $\alpha F + \beta G$ in x_0 approximativ differenzierbar und es gilt

$$(\alpha F + \beta G)'_{ap}(x_0) = \alpha F'_{ap}(x_0) + \beta G'_{ap}(x_0) \ .$$

Der Nachweis ist nicht schwer. Ferner ist klar, daß $F'_{ap}(x_0) = F'(x_0)$ an Stellen x_0 wo F differenzierbar ist.

(6.2.5) SATZ. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig, $E \subset [a,b]$ meßbar und $x_0 \in E$ ein Dichtepunkt von E. Existiert der Grenzwert*

$$F'_E(x_0) := \lim_{\substack{x \in E \\ x \to x_0}} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \in \mathbf{R} ,$$

so ist F in x_0 approximativ differenzierbar und es ist

$$F'_{ap}(x_0) = F'_E(x_0) .$$

BEWEIS: Da x_0 Dichtepunkt von E ist muß $x_0 \in (a,b)$ sein. Sei $A := F'_{ap}(x_0)$ und sei $\epsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $\delta > 0$, so daß

$$U := \{x \in E |\ 0 < |x - x_0| < \delta\}$$
$$\subset M := \left\{ x \in (a,b) - \{x_0\} |\ A - \epsilon \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \right\} .$$

Nun ist x_0 Dichtepunkt von E, also auch von U und damit erst recht von M, was die Behauptung zeigt ◇

(6.2.6) THEOREM. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig und VBG (auf ganz $[a,b]$). Dann ist F f.ü. approximativ differenzierbar.*

BEWEIS: Sei etwa $[a,b] = \bigcup E_n$ und F sei VB auf jedem E_n. Nach (6.1.4) ist F dann auch VB auf jedem $\overline{E}_n$. Es genügt daher folgendes zu zeigen: Ist $E = E_n \subset [a,b]$ abgeschlossen und F VB auf E, so ist F in fast allen $x \in E$ approximativ differenzierbar.
Sei hierzu I das kleinste abgeschlossene Intervall daß E enthält und seien $\{I_k\}$ die in I an E anliegenden Intervalle (diejenigen $E = E_n$ die nur aus einem Punkt bestehen können unbeachtet bleiben, da sie in ihrer Gesamtheit nur eine Nullmenge bilden). Definiert man auf I

$$F_1(x) := \begin{cases} F(x) \text{ für } x \in E \\ \text{linear stetig interpoliert auf den } I_k \end{cases} ,$$

So ist F_1 VB auf I, gemäß (6.1.6). Nach (3.1.4),(ii) ist F_1 f.ü. auf I differenzierbar. Sei dann $x \in E$ ein Dichtepunkt von E in dem $F'_1(x)$ existiert. Dann ist x insbesondere Häufungspunkt von E und $F'_E(x)$ existiert, da $F|E = F_1|E$. Nach dem letzten Satz ist F in diesem x approximativ differenzierbar. Da fast alle $x \in E$ Dichtepunkte von E sind (siehe (6.2.3)) und da F_1 f.ü. differenzierbar ist, folgt: F ist f.ü. approximativ differenzierbar auf E, wie gewünscht ◇

(6.2.7) THEOREM. *Die Funktion $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ sei ACG auf $[a,b]$. Dann gilt:*

(i) *F ist f.ü. approximativ differenzierbar.*
(ii) *Ist $F'_{ap}(x) \geq 0$ f.ü., so ist F monoton steigend.*
(iii) *Ist $F'_{ap}(x) = 0$ f.ü., so ist F eine Konstante.*

BEWEIS: Zu (i): Ist F ACG auf $[a,b]$ so auch VBG, gemäß (6.1.3). Da F außerdem stetig ist (das ist in der ACG-Definition mit enthalten), ist F nach dem vorangegangenen Theorem f.ü. approximativ differenzierbar.

Zu (ii): sei x ein Punkt in dem $F'_{ap}(x) \geq 0$; ist dann $\epsilon > 0$ beliebig, so ist x Dichtepunkt von

$$\{y \in (a,b) - \{x\} \mid -\epsilon \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x}\} ,$$

also auch beidseitiger Häufungspunkt dieser Menge. Daher ist notwendig $D^+F(x) \geq -\epsilon$, also $D^+F(x) \geq 0$, da $\epsilon > 0$ beliebig war. Also ist $D^+F \geq 0$ f.ü. Betrachte nun erneut ein beliebiges $\epsilon > 0$ und setze auf $[a,b]$

$$G(x) := F(x) + \epsilon x .$$

Dann ist $D^+G \geq \epsilon > 0$ f.ü., etwa $D^+G(x) > 0$ für alle x außerhalb einer Nullmenge $N \subset [a,b]$. Nach Satz (6.1.9) ist G eine Nullfunktion, da mit F auch G eine ACG-Funktion ist. Also ist $G(N)$ eine Nullmenge und enthält insbesondere keine echten Intervalle. Gemäß dem Monotoniekriterium (3.1.3) ist G monoton steigend, also auch F, da $\epsilon > 0$ beliebig war.

Aussage (iii) folgt nun sofort aus (ii) ◇

Mit Hilfe dieses Theorems können wir nun das Denjoy-Integral sinnvoll definieren.

(6.2.8) DEFINITION. *Sei $f : [a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion. f heißt Denjoy-integrierbar (kurz: D-integrierbar), wenn eine ACG-Funktion $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ existiert mit*

$$F'_{ap} = f \qquad \text{f.ü.}$$

Ein solches F heißt ein unbestimmtes D-Integral von f und

$$(D)\int_a^b f := F(b) - F(a)$$

heißt das bestimmte D-Integral von f über $[a,b]$. Die Menge der D-integrierbaren Funktionen $[a,b] \to \overline{\mathbf{R}}$ wird mit $\mathcal{L}^1_D[a,b]$ notiert.

Demnach sind D-integrierbare Funktionen f.ü. reellwertig: Ist F ein unbestimmtes D-Integral von $f \in \mathcal{L}^1_D[a,b]$, so gilt

$$f(x) = F'_{ap}(x) \in \mathbf{R} \text{ für fast alle } x \in [a,b] \ .$$

Sind $f, g \in \mathcal{L}^1_D[a,b]$ und F, G zugehörige unbestimmte D-Integrale, so gilt

$$f = g \text{ f.ü.} \Rightarrow F - G \text{ ist konstant} \ ,$$

denn es ist ja

$$(F-G)'_{ap} = F'_{ap} - G'_{ap} = f - g = 0 \qquad \text{f.ü.} \ ,$$

also $F - G$ konstant gemäß (iii) des letzten Lemmas. Daraus folgt nun (mit $f = g$) nicht nur die Wohldefiniertheit des bestimmten D-Integrals, sondern auch, daß wir in $\mathcal{L}^1_D[a,b]$ wie gewohnt f.ü. gleiche Funktionen identifizieren dürfen. $\mathcal{L}^1_D[a,b]$ wird damit in der üblichen Weise zu einem reellen Vektorraum und

$$(D)\int_a^b : \mathcal{L}^1_D[a,b] \to \mathbf{R}$$

ist ein (offensichtlich) lineares Funktional; es ist aber auch positiv, wie man leicht aus (ii) des letzten Lemmas ersieht.

Man kann zeigen, daß für $a < b$ stets $\mathcal{L}^1_D[a,b]$ eine echte Obermenge von $\mathcal{L}^1_P[a,b]$ ist, siehe etwa [**11**] , VII, §5. Selbstverständlich gilt hierbei

$$(P)\int_a^b f = (D)\int_a^b f \qquad \forall f \in \mathcal{L}^1_P[a,b] \ .$$

Außerdem weist man noch ohne Mühe nach, daß $(\mathcal{L}^1_D, (D)\int)$ ein Integral-System im Sinne von Abschnitt (5.2) ist. Wir können also sagen: Das Integral-System $(\mathcal{L}^1_D, (D)\int)$ ist (echt) allgemeiner als das System $(\mathcal{L}^1_P, (P)\int)$ und damit das allgemeinste Integral-System, das wir bisher kennengelernt haben. In der Tat fand sich auch beim Studium der einschlägigen Literatur kein noch allgemeineres System.

(6.3) Diagonale Ableitungen

Wir wollen nun einen Differenzierbarkeitsbegriff einführen, den wir für eine neue Charakterisierung des Denjoy-Integrals benötigen werden. In der Literatur war dieser neuartige Differenzierbarkeitsbegriff -trotz ausgiebiger Suche mit Hilfe der in [**9**] angegebenen Bibliographie- nicht aufzufinden. Lediglich bei Garg (siehe [**21**] und [**22**]) sind Ansätze zu finden, die dem unseren ein wenig ähneln, die aber nicht für die von uns angestrebten Anwendungen verwendet werden.

Wir beginnen mit den nötigen Vorbereitungen.

(6.3.1) SATZ. *(S. Banach) Sei* $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ *eine reelle Funktion. Dann gilt*

$$D_-F \leq D^+F \text{ b.ü. und } D_+F \leq D^-F \text{ b.ü.}$$

BEWEIS: Sei etwa

$$A := \{x \in (a,b) |\ D^+F(x) < D_-F(x)\} \ .$$

Ist $u \in A$ so ordnen wir u zunächst ein $r_u \in \mathbf{Q}$ zu, so daß $D^+F(u) < r_u < D_-F(u)$. Sodann finden wir $s_u < u, t_u > u$ aus $\mathbf{Q}$, so daß

$$\frac{F(v)-F(u)}{v-u} < r_u \text{ für } u < v < t_u \text{ und}$$
$$\frac{F(u)-F(v)}{u-v} > r_u \text{ für } s_u < v < u \ .$$

Kombiniert man beide Ungleichungen, so erhält man

(1) $$F(v) - F(u) < r_u(v-u) \text{ für } s_u < v < t_u, v \neq u \ .$$

Auf diese Weise wird jedem $u \in A$ ein Tripel $\phi(u) := (r_u; s_u, t_u) \in \mathbf{Q}^3$ zugeordnet, so daß (1) gilt. Angenommen die so definierte Abbildung

$$\phi : A \to \mathbf{Q}^3$$

wäre nicht injektiv. Dann gibt es $x < y$ aus A mit $\phi(x) = \phi(y)$ und es gilt

$$s_x = s_y < x < y < t_x = t_y \ , \ r_x = r_y \ .$$

Setzt man dann $u = x$ und $v = y$ in (1) so hat man

$$F(y) - F(x) < r_x(y-x) \ .$$

Setzt man aber $u = y$ und $v = x$ so erhält man

$$F(y) - F(x) < r_y(x - y) .$$

Wegen $r_x = r_y$ ergibt die Addition beider Ungleichungen $0 < 0$, einen Widerspruch. Also muß ϕ doch injektiv sein und A ist höchstens abzählbar. Damit ist

$$D_-F \leq D^+F \text{ b.ü.}$$

gezeigt. Also gilt auch $D_-(-F) \leq D^+(-F)$ b.ü. und daher

$$D_+F = -D^+(-F) \leq -D_-(-F) = D^-F \text{ b.ü. } \diamond$$

(6.3.2) DEFINITION. *Sei $J =< a, b >$ ein Intervall. Definiere*

$$\mathcal{G}^* = \mathcal{G}^*(J) := \{F : J \to \mathbf{R} |\ F \text{ stetig, } F(a) \text{ und } F(b) \text{ existieren,}$$
$$D_-F = D^+F \in \mathbf{R} \text{ b.ü. auf } (a, b)\} ,$$
$$\mathcal{G}_* = \mathcal{G}_*(J) := \{F : J \to \mathbf{R} |\ F \text{ stetig, } F(a) \text{ und } F(b) \text{ existieren,}$$
$$D_+F = D^-F \in \mathbf{R} \text{ b.ü. auf } (a, b)\} .$$

Wegen des letzten Satzes hätten wir z.B. bei der Definition von $\mathcal{G}^*$ eigentlich nur $D_-F \geq D^+F$ b.ü. fordern müssen.

Da für eine reelle Funktion $F : (a, b) \to \mathbf{R}$ stets die Beziehungen

$$D^+(-F) = -D_+F \ , \ D^-(-F) = -D_-F$$

gelten, erkennt man sofort, daß

$$\mathcal{G}_*(J) = -\mathcal{G}^*(J) .$$

(6.3.3) SATZ. *Seien $F_1, F_2, F :< a, b >\to \mathbf{R}$ stetig. Dann gilt:*

(i) $F \in \mathcal{G}^*$ $(F \in \mathcal{G}_*)$, $c \geq 0 \Rightarrow cF \in \mathcal{G}^*$ $(cF \in \mathcal{G}_*)$.

(ii) $F \in \mathcal{G}^*$ $(F \in \mathcal{G}_*)$, $c \leq 0 \Rightarrow cF \in \mathcal{G}_*$ $(cF \in \mathcal{G}^*)$.

(iii) $F_1, F_2 \in \mathcal{G}^* \Rightarrow F_1 + F_2 \in \mathcal{G}^*$ *und*

$$D_-F_1 + D_-F_2 = D_-(F_1 + F_2)$$
$$= D^+(F_1 + F_2) = D^+F_1 + D^+F_2 \text{ b.ü. auf } (a, b) .$$

(iv) $F_1, F_2 \in \mathcal{G}_* \Rightarrow F_1 + F_2 \in \mathcal{G}_*$ *und*

$$D_+F_1 + D_+F_2 = D_+(F_1 + F_2)$$
$$= D^-(F_1 + F_2) = D^-F_1 + D^-F_2 \text{ b.ü. auf } (a, b) .$$

BEWEIS: Die Aussagen (i) und (ii) prüft man leicht nach.
Zu (iii): Sind $F_1, F_2 \in \mathcal{G}^*$, so gilt

$$\begin{aligned} D_-F_1 + D_-F_2 &\leq D_-(F_1 + F_2) \\ &\leq D^+(F_1 + F_2) \leq D^+F_1 + D^+F_2 \text{ b.ü. auf } (a,b) , \end{aligned}$$

die mittlere Ungleichung wegen Satz (6.1.3). Da jedoch $D_-F_i = D^+F_i$ b.ü. gilt $(i = 1,2)$, muß in der obigen Ungleichungskette b.ü. Gleichheit bestehen. Daraus folgt $F_1 + F_2 \in \mathcal{G}^*$ und die behauptete Gleichung.
Analog zeigt man (iv) $\diamond$

(6.3.4) LEMMA. *Sei* $J =< a,b >$ *und seien*

$$F_1, G_1 \in \mathcal{G}^*(J) , \; F_2, G_2 \in \mathcal{G}_*(J) .$$

Ist $F_1 + F_2 = G_1 + G_2$, *so ist*

$$D^+F_1 + D^-F_2 = D^+G_1 + D^-G_2 \text{ b.ü. auf } (a,b) .$$

BEWEIS: Alle Ungleichungen des Beweises werden über (a,b) betrachtet. Da $F_1 \in \mathcal{G}^*$, gilt zunächst

$$\begin{aligned} D^+F_1 - D^-G_2 &= D_-F_1 - D^-G_2 \text{ b.ü.} \\ &= D_-F_1 + D_-(-G_2) ; \end{aligned}$$

da $F_1, -G_2 \in \mathcal{G}^*$, gilt gemäß (iii) des letzten Satzes weiter

$$\begin{aligned} &= D_-(F_1 - G_2) \text{ b.ü.} \\ &= D^+(F_1 - G_2) \text{ b.ü. ;} \end{aligned}$$

da $F_1 - G_2 = G_1 - F_2$ ist dies weiter

$$= D^+(G_1 - F_2)$$

und wegen $G_1, -F_2 \in \mathcal{G}^*$ ist dies gemäß (iii) des letzten Satzes

$$\begin{aligned} &= D^+G_1 + D^+(-F_2) \text{ b.ü.} \\ &= D^+G_1 - D_+F_2 \\ &= D^+G_1 - D^-F_2 \text{ b.ü.,} \end{aligned}$$

letzteres wegen $F_2 \in \mathcal{G}_*$ Der erste und der letzte Term der Gleichungskette bilden nun gerade die Behauptung (beachte, daß alle vorkommenden Ableitungen b.ü. reell sind) $\diamond$

Wir kommen nun zu dem angekündigten neuen Differenzierbarkeitsbegriff.

(6.3.5) DEFINITION. *Sei $J =< a, b >$ ein Intervall. Eine Funktion $F : J \to \mathbf{R}$ heißt diagonal differenzierbar (kurz: d-differenzierbar), wenn eine Zerlegung*

$$F = F_1 + F_2 \qquad F_1 \in \mathcal{G}^*, F_2 \in \mathcal{G}_*$$

existiert. In diesem Falle heißt die über (a, b) definierte Funktion

$$\hat{D}(F_1, F_2) := \begin{cases} D^+F_1 + D^-F_2 & \text{wo die Summe definiert ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

eine diagonale Ableitung (kurz: d-Ableitung) von F.
Die Menge aller d-differenzierbaren $F : J \to \mathbf{R}$ wird mit $\mathcal{G} = \mathcal{G}(J)$ notiert.

Mit Hilfe von (6.3.3) prüft man leicht nach, daß $\mathcal{G}(J)$ ein reeller Vektorraum ist.

Mit dem letzten Lemma haben wir: Sind

$$F = F_1 + F_2 = G_1 + G_2 \qquad F_1, G_1 \in \mathcal{G}^*, F_2, G_2 \in \mathcal{G}_*$$

zwei Zerlegungen von F, so ist

$$\hat{D}(F_1, F_2) = \hat{D}(G_1, G_2) \text{ b.ü.}$$

Zwei verschiedene diagonale Ableitungen eines $F \in \mathcal{G}$ stimmen also immer b.ü. überein. Außerdem gilt

$$\hat{D}(F_1, F_2) = D^+F_1 + D^-F_2 = D_-F_1 + D_+F_2 \text{ b.ü. ,}$$

da $F_1 \in \mathcal{G}^*$ und $F_2 \in \mathcal{G}_*$.

Die d-Differenzierbarkeit einer Funktion F hängt davon ab, ob F als ganzes geeignet zerlegt werden kann. Es wird also nur die d-Differenzierbarkeit einer Funktion, nicht jedoch die d-Differenzierbarkeit von F in einem Punkt x erklärt (es ist auch völlig unklar, wie dies zu geschehen hätte): Wir haben es mit einem "globalen" Differenzierbarkeitsbegriff zu tun.

Jede Zerlegung der Form

$$F = F_1 + F_2 \qquad F_1 \in \mathcal{G}^*, F_2 \in \mathcal{G}_*$$

nennen wir in Zukunft kurz eine $\mathcal{G}$-Zerlegung von F.

(6.3.6) SATZ. *Ist $F = F_1 + F_2$ eine $\mathcal{G}$-Zerlegung von $F \in \mathcal{G}(J)$ und gilt*

$$\hat{D}(F_1, F_2) \geq 0 \text{ b.ü.,}$$

so ist F monoton steigend.

BEWEIS: Zunächst haben wir

$$D^+F_1 = D^+(F - F_2) \leq D^+F + D^+(-F_2)$$
$$= D^+F - D_+F_2 = D^+F - D^-F_2 \text{ b.ü.},$$

letzteres wegen $F_2 \in \mathcal{G}_*$. Also ist

$$D^+F \geq D^+F_1 + D^-F_2 = \hat{D}(F_1, F_2) \geq 0 \text{ b.ü.}$$

Setzt man daher auf J für $\epsilon > 0$

$$G(x) := F(x) + \epsilon x \ ,$$

so gilt $D^+G \geq \epsilon > 0$ b.ü. Ist daher $A := \{x \in (a,b) |\ D^+G(x) \leq 0\}$, so ist A, also auch $G(A)$ höchstens abzählbar. $G(A)$ kann daher keine echten Intervalle enthalten und G ist monoton steigend, gemäß dem Monotonie-Kriterium (3.1.3). Da $\epsilon > 0$ beliebig war, steigt auch F monoton $\diamondsuit$

Wir stellen nun einen Zusammenhang zwischen der gewöhnlichen, der approximativen und der diagonalen Differenzierbarkeit her.

(6.3.7) SATZ. *Sei $J =< a, b >$ und $F = F_1 + F_2$ eine $\mathcal{G}$-Zerlegung von $F \in \mathcal{G}(J)$.*

(i) *Ist $J = [a,b]$, so ist F ACG auf $[a,b]$, f.ü. approximativ differenzierbar und es gilt*

$$\hat{D}(F_1, F_2) = F'_{ap} \text{ f.ü.}$$

(ii) *Definiert man (J ist nun wieder beliebig)*

$$D := \{x \in (a,b) |\ F'(x) \text{ existiert}\} \ ,$$

so gilt

$$\hat{D}(F_1, F_2) = F' \text{ b.ü. auf } D \ .$$

BEWEIS: Zu (i): Nach (6.1.7),(ii) sind alle $H \in \mathcal{G}^*$ ACG auf $[a,b]$, da ja

$$-\infty < D_-H = D^+H < \infty \text{ b.ü.}$$

Damit sind auch alle Funktionen aus $\mathcal{G}_* = -\mathcal{G}^*$ ACG-Funktionen. Als Summe zweier ACG-Funktionen ist daher auch F eine ACG-Funktion und als solche

f.ü. approximativ differenzierbar (gemäß (6.2.7),(i)). Daher liegen auch fast alle $x \in (a,b)$ in

$$A := \{x \in (a,b) |\ (F_1)'_{ap}, (F_2)'_{ap} \text{ existieren;}$$
$$D_-F_1(x) = D^+F_1(x) \in \mathbf{R}, D_+F_2(x) = D^-F_2(x) \in \mathbf{R}\} ,$$

da jede der Bedingungen f.ü. oder b.ü. erfüllt ist. Sei dann $x \in (a,b)$ und $\mu := (F_1)'_{ap}(x)$. Dann ist also x für jedes $\epsilon > 0$ Dichtepunkt der Menge

$$\{y \in (a,b) - \{x\} |\ \mu - \epsilon \leq \frac{F_1(y) - F_1(x)}{y - x} \leq \mu + \epsilon\} ;$$

Insbesondere ist x beidseitiger Häufungspunkt dieser Menge. Daraus folgt $D_-F_1(x) \leq \mu + \epsilon$, also $D_-F_1(x) \leq \mu$, da $\epsilon > 0$ beliebig ist. Analog ist $D^+F_1(x) \geq \mu$, so daß

$$D_-F_1(x) = D^+F_1(x) = \mu = (F_1)'_{ap}(x) \text{ und analog}$$
$$D_+F_2(x) = D^-F_2(x) = (F_2)'_{ap}(x) .$$

Es folgt nun

$$\hat{D}(F_1, F_2)(x) = D^+F_1(x) + D^-F_2(x) = (F_1)'_{ap}(x) + (F_2)'_{ap}(x) = F'_{ap}(x)$$

für $x \in A$. Da aber A fast alle x enthält folgt nun (i).

Zu (ii): Existiert $F'(x)$ für ein $x \in (a,b)$, so gilt

$$\begin{aligned} \hat{D}(F_1, F_2)(x) &= D^+F_1(x) + D^-F_2(x) \text{ b.ü.} \\ &= D^+(F - F_2)(x) + D^-F_2(x) \\ &= F'(x) + D^+(-F_2)(x) + D^-F_2(x) . \end{aligned}$$

Da aber $D^-F_2 = D_+F_2 = -D^+(-F_2)$ b.ü., folgt

$$\hat{D}(F_1, F_2) = F' \text{ b.ü. auf } D \ \diamondsuit$$

Die Kombination von (6.3.7),(i) und (6.2.7),(ii) zeigt, daß wir in (6.3.6) sogar "b.ü." durch "f.ü." ersetzen dürfen.

Dennoch wollen wir an der bestehenden Fassung von (6.3.6) festhalten, da wir den Abschnitt (6.3) absichtlich ganz unabhängig von der Denjoy-Theorie halten wollen. Auch (6.3.7),(i) wird in diesem Abschnitt nicht mehr benötigt werden.

(6.3.8) SATZ. *Sei $J =< a,b >$ ein Intervall.*

(i) *Ist $F : J \to \mathbf{R}$ stetig, so sind D^+F, D_+F, D^-F, D_-F Borel-meßbar auf (a,b).*

(ii) *Ist $F \in \mathcal{G}(J)$ und $F = F_1 + F_2$ eine $\mathcal{G}$-Zerlegung von F, sowie $f : J \to \overline{\mathbf{R}}$ eine Funktion mit*

$$\hat{D}(F_1, F_2) = f \text{ b.ü. auf } (a,b) ,$$

so ist auch f Borel-meßbar.

BEWEIS: Zu (i): Für $x \in (a,b)$ ist offensichtlich

$$D^+F(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x)\ ,\ g_n(x) := \sup_{0<t-x<\frac{1}{n}} \frac{F(t)-F(x)}{t-x}\ .$$

Wir zeigen zunächst, daß $\{g_n > c\}$ offen ist, für alle $c \in \mathbf{R}$ (d.h. g_n ist nach unten halbstetig). Ist nämlich $x \in (a,b)$ und $g_n(x) > c$, so gibt es ein t_0 mit

$$x < t_0 < x + \frac{1}{n} \text{ und } \frac{F(t_0)-F(x)}{t_0-x} > c\ .$$

Aus Stetigkeitsgründen findet man eine Umgebung U von x, so daß

$$y < t_0 < y + \frac{1}{n} \text{ und } \frac{F(t_0)-F(y)}{t_0-y} > c \qquad \forall y \in U\ .$$

Es folgt $g_n(y) > c$ für $y \in U$, womit gezeigt ist, daß $\{g_n > c\}$ offen ist. Also ist jedes g_n Borel-meßbar und damit auch D^+F, als Limes Borel-meßbarer Funktionen. Analog sind D_+F, D^-F, D_-F Borel-meßbar.

Behauptung (ii) folgt nun leicht aus (i), wenn man beachtet, daß abzählbare Mengen immer Borel-meßbar sind ◇

(6.3.9) DEFINITION. *Sei $J =< a,b >$ ein Intervall.*

(i) *Eine Funktion $F \in \mathcal{G}(J)$ heißt ein d-Stamm von $f : J \to \mathbf{R}$, wenn für eine (und damit für jede) $\mathcal{G}$-Zerlegung $F = F_1 + F_2$ gilt:*

$$f = \hat{D}(F_1, F_2) \text{ b.ü. auf } (a,b)\ .$$

(ii) *Wir setzen*

$$\mathcal{E}_d = \mathcal{E}_d(J) := \{f : J \to \mathbf{R} |\ f \text{ hat einen } d\text{-Stamm}\}\ .$$

Ist F ein d-Stamm von $f \in \mathcal{E}_d$, so sei

$$I_d(f) := F(b) - F(a)\ .$$

Zu (i) vergleiche man noch einmal mit der Bemerkung in Anschluß an Definition (6.3.5): Zwei verschiedene d-Ableitungen eines $F \in \mathcal{G}$ stimmen f.ü. überein.

Offensichtlich ist $\mathcal{E}_d$ ein Funktionenvektorraum der $\mathcal{E}_\omega$ und erst recht $\mathcal{E}_L$ umfaßt.

Da für $F \in \mathcal{G}^*$ oder $F \in \mathcal{G}_*$ definitionsgemäß $F(a), F(b)$ existieren, existieren diese Werte auch für jedes $F \in \mathcal{G}$. Mit Hilfe von (6.3.6) schließt man außerdem in gewohnter Weise, daß sich zwei d-Stämme eines $f \in \mathcal{E}_d$ höchstens um eine Konstante unterscheiden können. All dies zeigt, daß I_d wohldefiniert ist.

Natürlich wollen wir nun zeigen, daß I_d ein Daniell-Integral ist. Wir brauchen hierfür aber noch einige Vorbereitungen.

(6.3.10) LEMMA. *Sei $J =< a, b >$ ein Intervall, $u : J \to [0, \infty]$ nach unten halbstetig und Lebesgue-integrierbar. Setzt man dann*

$$U(x) := \int_a^x u(t)\, dt \qquad (x \in J) ,$$

so gilt $u \leq D_- U$ auf $(a, b >$.

BEWEIS: Da u nach unten halbstetig ist existieren (bekanntlich) Funktionen $v_n \in \mathcal{C}_c^+(J)$ mit $v_n \uparrow u$ (siehe z.B. [**16**] , §4). Wir setzen dann $u_1 := v_1$, $u_{n+1} := v_{n+1} - v_n$ $(n \in \mathbf{N})$ und haben

$$u_n \in \mathcal{C}_c^+ , \; u = \sum u_n .$$

Seien U_n die Stammfunktionen der u_n mit $U_n(a) = 0$. Es gilt $U_n' = u_n \geq 0$, die U_n sind monoton steigend. Mit dem Satz über die monotone Konvergenz gilt

$$U(x) = \int_a^x u(t)\, dt = \sum \int_a^x u_n(t)\, dt = \sum U_n(x) \qquad \forall x \in J .$$

Für ein beliebiges $N \in \mathbf{N}$ ist $\sum\limits_{n>N} U_n$ monoton steigend, also

$$D_- \left(\sum_{n>N} U_n \right) \geq 0 .$$

Auf $(a, b >$ haben wir daher

$$\sum_1^N u_n = \sum_1^N U_n' \leq \sum_1^N U_n' + D_- \left(\sum_{n>N} U_n \right) = D_- \left(\sum_1^\infty U_n \right) = D_- U ;$$

da dies für beliebiges $N \in \mathbf{N}$ richtig ist, folgt auf $(a, b >$

$$u = \sum_1^\infty u_n \leq D_- U ,$$

wie gewünscht $\diamondsuit$

(6.3.11) LEMMA. *Sei $J =< a, b >$ ein Intervall, $u : J \to [0, \infty]$ nach unten halbstetig und $f \in \mathcal{E}_d(J)$. Dann gilt:*

$$f \leq u \text{ b.ü.} \Rightarrow I_d(f) \leq \int_a^b u \, d\lambda \ .$$

BEWEIS: Sei $f \in \mathcal{E}_d$ und $f \leq u$ b.ü. Ist $\int u \, d\lambda = \infty$ so ist nichts zu zeigen. Sonst ist $\int u \, d\lambda < \infty$, also u Lebesgue-integrierbar, und wir können

$$U(x) := \int_a^x u(t) \, dt \qquad (x \in J)$$

bilden. Wegen $f \in \mathcal{E}_d$ gibt es ein $F \in \mathcal{G}$ und eine $\mathcal{G}$-Zerlegung $F = F_1 + F_2$ von F, so daß

$$\hat{D}(F_1, F_2) = D^+F_1 + D^-F_2 = f \text{ b.ü. auf } (a, b) \ .$$

Wir haben daher

$$u - D^+F_1 - D^-F_2 = u - f \geq 0 \text{ b.ü.}$$

Nach dem letzten Lemma ist $D_-U \geq u$ und folglich

$$D_-U - D^+F_1 - D^-F_2 \geq 0 \text{ b.ü.} \tag{1}$$

Sei nun

$$A := \{x \in (a, b) |\ D^+(U - F)(x) < 0\} \ .$$

Es gilt beinahe überall (nämlich sicher da, wo $D^-F_2 \in \mathbf{R}$)

$$\begin{aligned} D_-U - D^-F_2 &= D_-U + D_-(-F_2) \\ &\leq D_-(U - F_2) \end{aligned}$$

was nach Satz (6.3.1) beinahe überall

$$\begin{aligned} &\leq D^+(U - F_2) \\ &= D^+(U - F + F_1) \\ &\leq D^+(U - F) + D^+F_1 \ , \end{aligned}$$

letzteres ebenfalls beinahe überall (nämlich sicher da, wo $D^+F_1 \in \mathbf{R}$). Damit ist gezeigt, daß

$$D_-U - D^-F_2 \leq D^+(U - F) + D^+F_1 \text{ b.ü.}$$

Wegen $D^+(U - F) < 0$ auf A folgt hieraus

$$D_-U - D^-F_2 < D^+F_1 \text{ b.ü. auf } A \Rightarrow$$

(2) $$D_-U - D^+F_1 - D^-F_2 < 0 \text{ b.ü. auf } A .$$

Andererseits gilt wegen (1)

(3) $$D_-U - D^+F_1 - D^-F_2 \geq 0 \text{ b.ü. auf } A .$$

Aus (2) und (3) folgt, daß A höchstens abzählbar ist (denn die Menge über der $D_-U - D^+F_1 - D^-F_2$ nicht gebildet werden kann ist ebenfalls höchstens abzählbar); also haben wir

$$D^+(U - F) \geq 0 \text{ b.ü.}$$

Völlig analog wie z.B. im Beweis von (6.3.6) schließt man hieraus wieder, daß $U - F$ monoton steigt. Es folgt

$$U(b) - F(b) \geq U(a) - F(a) \Rightarrow$$

$$I_d(f) = F(b) - F(a) \leq U(b) - U(a) = \int_a^b u(t)\,dt \diamondsuit$$

Lemma (6.2.11) ist der Schlüssel für weitere Sätze, die alle das "Wohlverhalten" von I_d sichern.

(6.3.12) LEMMA. *Sei $J =< a, b >$ ein Intervall und sei $f \in \mathcal{E}_d(J)$. Dann gilt:*

(i) $I_d(f) \leq \int_a^b f^+\,d\lambda$.

(ii) *Ist $f \geq 0$ so ist* $I_d(f) = \int_a^b f\,d\lambda$.

BEWEIS: Jedenfalls ist f meßbar gemäß (6.3.8),(ii), so daß die Aussagen sinnvoll sind.

Zu (i): Ist $\int f^+\,d\lambda = \infty$ so ist nichts zu zeigen. Wir können daher f^+ Lebesgue-integrierbar annehmen. Bekanntlich existieren dann nach unten halbstetige Funktionen $u_n \geq f^+$ mit $u_n \in \mathcal{L}_L^1$ und

$$\int_a^b u_n(t)\,dt \downarrow \int_a^b f^+(t)\,dt \quad \text{für } n \to \infty ,$$

siehe etwa [**16**] , §6. Nach dem letzten Lemma ist

$$I_d(f) \leq \int_a^b u_n(t)\,dt \quad \forall n \Rightarrow$$

$$I_d(f) \leq \int_a^b f^+(t)\,dt .$$

Zu (ii): Sei nun sogar $f \geq 0$. Sei $F \in \mathcal{G}$ ein d-Stamm von f und $F = F_1 + F_2$ eine $\mathcal{G}$-Zerlegung von F so daß $\hat{D}(F_1, F_2) = f$ b.ü. Wegen $f \geq 0$ und (6.3.6) ist F monoton steigend. Nach (3.1.4),(ii) gilt: F ist f.ü. differenzierbar, $F' \in \mathcal{L}^1_L$ und

$$\int_a^b F'(t)\, dt \leq F(b) - F(a) = I_d(f) \ .$$

Nach (6.3.7),(ii) ist aber $F' = \hat{D}(F_1, F_2)$ f.ü. also auch $F' = f$ f.ü. Mithin ist $f \in \mathcal{L}^1_L$ und

$$\int_a^b f\, d\lambda = \int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b F'(t)\, dt \leq I_d(f) \ .$$

Umgekehrt ist nach Teil (i)

$$I_d(f) \leq \int_a^b f^+\, d\lambda = \int_a^b f\, d\lambda \ .$$

und (ii) folgt $\diamondsuit$

Aussage (ii) besagt insbesondere, daß $\mathcal{E}_d^+ \subset \mathcal{L}^1_L$. Über einem beliebigen Intervall J können wir nun zeigen:

(6.3.13) SATZ. *Die Abbildung $I_d : \mathcal{E}_d \to \mathbf{R}$ ist ein Daniell-Integral.*

BEWEIS: Sicherlich ist I_d linear. Z.B. aus (ii) des letzten Lemmas folgt, daß I_d auch positiv ist.

Es bleibt die Stetigkeit von unten von I_d zu zeigen. Seien hierzu $f \in \mathcal{E}_d$, $f_n \in \mathcal{E}_d^+$ mit $\sum f_n \geq f$. Zunächst folgt mit (ii) des letzten Lemmas

$$\sum I_d(f_n) = \sum \int f_n\, d\lambda \ ,$$

was mit dem Satz über die monotone Konvergenz

$$= \int \left(\sum f_n \right) d\lambda$$

$$\geq \int f^+\, d\lambda \geq I_d(f) \ ,$$

die letzte Ungleichung wegen (i) des letzten Lemmas $\diamondsuit$

Gemäß der allgemeinen Theorie aus Kapitel (1) können wir nun eine Prozedur

$$\mathcal{E}_d, I_d \to \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d), \int dI_d$$

durchführen und erhalten so die zu $\mathcal{E}_d, I_d$ zugehörigen integrierbaren Funktionen. Außerdem erhalten wir für ein $\overline{\mathbf{R}}$-wertiges f wieder die zu I_d gehörende Norm von f:

$$\|f\|_d := \inf\{\sum I_d(f_n) |\ f_n \in \mathcal{E}_d^+, \sum f_n \geq |f|\}\ .$$

Wenn wir mit $\|\ \|$ wieder die gewöhnliche Lebesgue-Norm bezeichnen finden wir:

(6.3.14) LEMMA. *Es ist* $\|\ \|_d = \|\ \|$.

BEWEIS: Wegen

$$\mathcal{C}_c = \mathcal{E}_L \subset \mathcal{E}_d\ ,\ I_d|\mathcal{E}_L = I_L$$

gilt sicherlich $\|\ \|_d \leq \|\ \|$. Wir haben also nur noch $\|f\| \leq \|f\|_d$ zu zeigen, für ein beliebiges $\overline{\mathbf{R}}$-wertiges f. Ist $\|f\|_d = \infty$ so ist nichts zu zeigen. Sei daher $\|f\|_d < \infty$. Zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ finden wir dann Funktionen $f_n \in \mathcal{E}_d^+$ mit

$$|f| \leq \sum f_n\ ,\ \sum I_d(f_n) < \|f\|_d + \epsilon\ .$$

Mit Hilfe von (6.3.12),(ii) erhalten wir

$$\begin{aligned}\|f\| \leq \sum \|f_n\| &= \sum \int f_n\, d\lambda \\ &= \sum I_d(f_n) < \|f\|_d + \epsilon\ .\end{aligned}$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt $\|f\| \leq \|f\|_d$, wie gewünscht $\diamondsuit$

(6.3.15) COROLLAR. *Über jedem Intervall J gilt*

$$\mathcal{L}_L^1 \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

BEWEIS: Sei $f \in \mathcal{L}_L^1$. Es gibt $f_n \in \mathcal{E}_L = \mathcal{C}_c$ mit $\|f - f_n\| \to 0$. Da $\|\ \| = \|\ \|_d$ und da $\mathcal{E}_L \subset \mathcal{E}_d$, gilt auch $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ und überdies ist

$$\int f\, dI_L = \lim_{n\to\infty} I_L(f_n) = \lim_{n\to\infty} I_d(f_n) = \int f\, dI_d\ \diamondsuit$$

Der nächste Satz ist das Analogon zu (3.2.9).

(6.3.16) SATZ. *Für alle* $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ *gilt :*

(i) f *ist Lebesgue-meßbar.*

(ii) $f \in \mathcal{L}^1_L \Leftrightarrow \|f\| < \infty$.

Wir verzichten auf den Beweis, der -unter Beachtung von (6.3.8),(ii)- dem Beweis von (3.2.9) völlig analog ist.

(6.3.17) SATZ. *Es ist*

$$(\mathcal{L}^1_L)^+ = (\mathcal{L}^1)^+(\mathcal{E}_d, I_d)$$

bei Übereinstimmung der Integrale.

BEWEIS: Im Hinblick auf (6.3.15) braucht nur noch $(\mathcal{L}^1)^+(\mathcal{E}_d, I_d) \subset (\mathcal{L}^1_L)^+$ gezeigt zu werden. Sei hierzu $f \in (\mathcal{L}^1)^+(\mathcal{E}_d, I_d)$ gegeben. Da f meßbar ist, gibt es eine Folge Lebesgue-integrierbarer $f_n \geq 0$ mit $f_n \uparrow f$. Ist etwa J das Grundintervall, so können wir z.B.

$$f_n := (f\chi_{J\cap[-n,n]}) \wedge n$$

setzen. Wegen $\mathcal{L}^1_L \subset \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ ist dann jedenfalls

$$\int f_n \, dI_L = \int f_n \, dI_d \leq \int f \, dI_d < \infty \quad \forall n \ .$$

Aus dem Satz über die monotone Konvergenz folgt nun

$$f = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{L}^1_L \ ,$$

wie gewünscht $\diamondsuit$

(6.3.18) SATZ. *Es gilt:* $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ $\Leftrightarrow$ *Es gibt eine Zerlegung*

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_d, h \in \mathcal{L}^1_L \ .$$

In diesem Falle kann man $\|h\| < \epsilon$ *erreichen, für ein beliebig vorgegebenes* $\epsilon > 0$.

Das ist natürlich das genaue Analogon zu (3.2.10) und wir können auf den ebenfalls analogen Beweis verzichten. Zuletzt folgt noch das Analogon zu (3.2.12), dessen Beweis ebenfalls von dort adaptiert werden kann:

(6.3.19) SATZ. *Es gilt:*

(i) $\mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ *ist normal, insbesondere ist*

$$\overline{I}_d = \int \text{ auf } (\mathcal{L}^1)^+(\mathcal{E}_d, I_d) \ .$$

(ii) *Die von* $\mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ *herrührenden meßbaren Mengen sind genau die Lebesgue-meßbaren Mengen* $\mathcal{M}_\lambda$, *das zugehörige kanonische Maß ist das Lebesgue-Maß* λ.

(iii) $\mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ *ist meßbar (im Sinne von (2.3.2)).*

Insbesondere sind also die Räume $\mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$ uneingeschränkt der in Kapitel (2) entwickelten Produktraum-Theorie zugänglich!

Im folgenden Abschnitt wollen wir nun zeigen, daß wir nur einen neuen Zugang zu Altbekanntem gefunden haben: Der Raum $\mathcal{L}^1(\mathcal{E}_D, I_d)$ wird sich gerade als die Menge der Denyoy-integrierbaren Funktionen $\mathcal{L}^1_D$ entpuppen.

(6.4) Eine neue Darstellung des Denjoy-Integrals

Im Folgenden spielt sich alles über einem kompakten Intervall $[a,b]$ ab. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, ist jede Funktionenmenge $\mathcal{F}$ als $\mathcal{F}[a,b]$ zu lesen.

(6.4.1) DEFINITION. *Eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ heißt zerlegbar, wenn es ein $G \in \mathcal{G}$ und ein absolut stetiges H gibt, so daß $F = G + H$.*

Insbesondere ist ein zerlegbares F stetig. Es wird sich herausstellen, daß die Zerlegbarkeit eine neue Charakterisierung der ACG-Eigenschaft ist. Bis dahin benötigen wir aber noch eine ganze Anzahl von Hilfssätzen.

(6.4.2) LEMMA. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ zerlegbar und $\epsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es ein absolut stetiges H, sowie $G_1 \in \mathcal{G}^*, G_2 \in \mathcal{G}_*$ mit*

$$F = G_1 + G_2 + H \ , \ \|H'\| < \epsilon \text{ und } H(a) = H(b) = 0 \ .$$

BEWEIS: Da F zerlegbar ist gibt es zunächst eine Zerlegung

$$F = U_1 + U_2 + V \quad U_1 \in \mathcal{G}^*, U_2 \in \mathcal{G}_*, V \text{ absolut stetig} \ .$$

Ohne Einschränkung sei $V(a) = 0$. V ist f.ü. differenzierbar und es ist $V' \in \mathcal{L}^1_L$ (siehe (3.1.4),(iii)). Daher gibt es ein stetiges t mit $\|V' - t\| < \frac{\epsilon}{2}$. Sei T das unbestimmte Integral von t mit $T(a) = 0$. T ist absolut stetig (siehe (3.1.4),(iv)) und mithin auch $H_0 := V - T$. Es gilt

$$\|H_0'\| = \|V' - T'\| = \|V' - t\| < \frac{\epsilon}{2} \text{ und } H_0(a) = 0 \ ,$$

woraus auch $\|H_0\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}$ folgt. Sei dann L diejenige lineare Funktion, die die Punkte $(a,0) = (a, H_0(a))$ und $(b, H_0(b))$ verbindet. Dann ist $L(b) = H_0(b)$ und

$$\|L'\| = |H_0(b)| \leq \|H_0\|_\infty < \frac{\epsilon}{2} \ .$$

Ist daher $H := H_0 - L = V - L - T$, so ist H absolut stetig, es ist $H(a) = H(b) = 0$ und

$$\|H'\| \leq \|H_0'\| + \|L'\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \ .$$

H erfüllt also die Forderungen des Satzes und wir haben überdies die Darstellung

$$F = G_1 + G_2 + H \quad G_1 := U_1 \in \mathcal{G}^*, G_2 := U_2 + T + L \in \mathcal{G}_* \ ,$$

letzteres, da $U_2 \in \mathcal{G}_*$ und T, L differenzierbar sind $\diamond$

(6.4.3) LEMMA. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ zerlegbar und $\epsilon > 0$. Dann existiert eine Zerlegung*

$$F = G_1 + G_2 + H \quad G_1 \in \mathcal{G}^*, G_2 \in \mathcal{G}_*, H \text{ absolut stetig} ,$$

so daß folgendes erfüllt ist

(i) $G_1(a) = G_1(b) = 0$, $G_2(a) = F(a)$, $G_2(b) = F(b)$, $H(a) = H(b) = 0$.
(ii) $\|H'\| < \epsilon$, $\|G_1\|_\infty < \epsilon$.
(iii) $\|G_1\|_\infty, \|G_2\|_\infty \leq 2\|F\|_\infty$.

BEWEIS: Ist $\|F\|_\infty = 0$, so ist $F = 0$ und mit $G_1, G_2, H := 0$ ist alles erfüllt. Sei also $\|F\|_\infty > 0$; definiere dann

$$\epsilon_0 := \min\{\epsilon, \frac{1}{2}\|F\|_\infty\} > 0 .$$

Nach dem letzten Lemma gibt es nun eine Zerlegung $F = U_1 + U_2 + H$ mit $U_1 \in \mathcal{G}^*$, $U_2 \in \mathcal{G}_*$ und einem absolut stetigen H, wobei $\|H'\| < \epsilon_0 \leq \epsilon, H(a) = H(b) = 0$. Da U_1 stetig ist, findet man leicht eine stückweise lineare Funktion S mit

$$S(a) = U_1(a) , \ S(b) = U_1(b) \text{ und } \|U_1 - S\|_\infty < \epsilon_0 .$$

Da $U_1 \in \mathcal{G}^*$ und S stückweise linear ist, ist auch $G_1 := U_1 - S \in \mathcal{G}^*$. Ferner ist konstruktionsgemäß

$$G_1(a) = G_1(b) = 0 \text{ und } \|G_1\|_\infty < \epsilon_0 \leq \epsilon$$

sowie auch

$$\|G_1\|_\infty < \epsilon_0 \leq \frac{1}{2}\|F\|_\infty \leq 2\|F\|_\infty .$$

G_1 erfüllt also alle Bedingungen.
Setzt man jetzt $G_2 := U_2 + S$, so ist gewiß $G_2 \in \mathcal{G}_*$ und

$$F = G_1 + G_2 + H .$$

Da G_1 und H in a und b verschwinden, muß

$$G_2(a) = F(a) , \ G_2(b) = F(b)$$

gelten. Außerdem hat man

$$\begin{aligned} \|G_2\|_\infty = \|F - G_1 - H\|_\infty &\leq \|F\|_\infty + \|G_1\|_\infty + \|H\|_\infty \\ &< \|F\|_\infty + \epsilon_0 + \epsilon_0 \leq 2\|F\|_\infty , \end{aligned}$$

denn wegen $H(a) = 0$ und $\|H'\| < \epsilon_0$ muß ja $\|H\|_\infty < \epsilon_0$ gelten. Damit erfüllen G_1, G_2 und H alle Forderungen $\diamondsuit$

(6.4.4) LEMMA. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ eine reelle Funktion.*

(i) *Ist $a < c < b$ und ist F zerlegbar über $[a,c]$ und über $[c,b]$, so ist F auch über $[a,b]$ zerlegbar.*

(ii) *Ist F stetig und für jedes $\alpha \in (a,b)$ über $[a,\alpha]$ (über $[\alpha,b]$) zerlegbar, so ist es auch über $[a,b]$ zerlegbar.*

BEWEIS: Aussage (i) überlegt man sich sehr leicht mit Hilfe von Aussage (i) des letzten Lemmas.

Zu (ii): Wähle Zahlen $\alpha_k \in (a,b)$ mit

$$a = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < b \text{ und } \alpha_k \uparrow b \, .$$

Offensichtlich ist F über jedem $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ zerlegbar. Nach dem letzten Lemma findet man Funktionen

$$G_1^k \in \mathcal{G}^*[\alpha_{k-1}, \alpha_k] \, , \; G_2^k \in \mathcal{G}_*[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$$

und absolut stetige $H^k : [\alpha_{k-1}, \alpha_k] \to \mathbf{R}$ $(k \in \mathbf{N})$, so daß für alle k gilt:

(1) $F = G_1^k + G_2^k + H^k$ (über $[\alpha_{k-1}, \alpha_k]$) .

(2) $G_1^k(\alpha_{k-1}) = G_1^k(\alpha_k) = 0$, $G_2^k(\alpha_{k-1}) = F(\alpha_{k-1})$,
$G_2^k(\alpha_k) = F(\alpha_k)$, $H^k(\alpha_{k-1}) = H^k(\alpha_k) = 0$.

(3) $\|G_1^k\|_\infty < \frac{1}{2^k}$, $\|(H^k)'\| < \frac{1}{2^k}$
$(\Rightarrow \|H^k\|_\infty < \frac{1}{2^k}$ da $H^k(\alpha_{k-1}) = 0)$.

Definiert man nun G_1, G_2 und H über $[a,b]$ kanonisch durch Zusammensetzen der G_1^k, G_2^k bzw. H^k $(G_1(b), H(b) := 0, G_2(b) := F(b))$, so gilt jedenfalls

$$F = G_1 + G_2 + H \, .$$

Mit Hilfe von (3) schließt man leicht auf die Stetigkeit von G_1 und H auf ganz $[a,b]$. Wegen der Stetigkeit von F muß dann auch $G_2 = F - G_1 - H$ stetig sein. Für G_1 gilt sicherlich $D_- G_1 = D^+ G_1 \in \mathbf{R}$ b.ü., da die abzählbar vielen G_1^k alle $\mathcal{G}^*$-Funktionen sind. Daher ist $G_1 \in \mathcal{G}^*$ und analog $G_2 \in \mathcal{G}_*$. Endlich zeigt eine leichte Überlegung, daß H absolut stetig ist, da alle H^k absolut stetig sind und da $\|(H^k)'\| < \frac{1}{2^k}$. Damit ist alles gezeigt $\diamondsuit$

(6.4.5) LEMMA. *Sei $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ stetig. Zu jedem $x \in [a,b]$ existiere ein $\delta > 0$, so daß F zerlegbar ist über $[a,b] \cap [x-\delta, x+\delta]$. dann ist F über ganz $[a,b]$ zerlegbar.*

BEWEIS: Sei

$$c_0 := \sup\{c \in [a,b] \,|\, F \text{ ist zerlegbar über } [a,c]\} \, .$$

Es ist $a < c_0 \leq b$. Angenommen $c_0 < b$. Seien dann α, β so gewählt, daß

(1) $a < \alpha < c_0 < \beta \leq b$.
(2) F ist zerlegbar über $[a, \alpha]$.
(3) F ist zerlegbar über $[\alpha, \beta]$.

Dies muß sich wegen der Definition von c_0 und wegen den Voraussetzungen des Satzes erreichen lassen. Nach (i) des letzten Lemmas ist F zerlegbar über $[a, \beta]$, was wegen $\beta > c_0$ und der Definition von c_0 ein Widerspruch ist. Also ist doch $c_0 = b$ und mit (ii) des letzten Lemmas schließt man nun noch, daß F über ganz $[a, b] = [a, c_0]$ zerlegbar ist $\diamondsuit$

(6.4.6) LEMMA. *Sei $F : [a, b] \to \mathbf{R}$ stetig und $F(a) = F(b) = 0$. Dann existiert eine stetige, b.ü. differenzierbare Funktion $W : [a, b] \to \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften*

$$W \geq |F| \ , \ \|W\|_\infty = \|F\|_\infty \ , \ W(a) = W(b) = 0 \ .$$

BEWEIS: Ist $F = 0$ so setzt man $W := 0$ und ist fertig.
Ansonsten ist $F \neq 0$, also $M := \|F\|_\infty > 0$. Setzt man

$$a' := \sup\{t \in [a, b] |\!|\ F = 0 \text{ auf } [a, t]\} \ ,$$
$$b' := \inf\{t \in [a, b] |\!|\ F = 0 \text{ auf } [t, b]\} \ ,$$

so dürfen wir ohne Einschränkung $a' = a, b' = b$ annehmen, sonst konstruiert man zunächst W auf $[a', b']$ und setzt hiernach $W = 0$ auf den Intervallen $[a, a'], [b', b]$. Nach dieser Feststellung kann man also ohne Einschränkung annehmen, daß es in jeder Umgebung von a (von b) noch ein $x > a$ (ein $x < b$) gibt, mit $F(x) \neq 0$. Definiere nun für $n = 1, 2, \ldots$

$$\alpha_n := \inf\{x \in [a, b] |\!|\ |F(x)| \geq \frac{1}{2^n} M\} \ ,$$
$$\beta_n := \sup\{x \in [a, b] |\!|\ |F(x)| \geq \frac{1}{2^n} M\} \ .$$

Dann gilt

$$a < \cdots < \alpha_3 < \alpha_2 < \alpha_1 < \beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \cdots < b \ , \ \alpha_n \downarrow a \ , \ \beta_n \uparrow b \ .$$

Definiere nun W durch $W(a) := W(b) := 0$ und durch die Vorschriften

(1) $W(\alpha_n) := W(\beta_n) := \frac{1}{2^{n-1}} M$.
(2) Auf den Intervallen $[\alpha_{n+1}, \alpha_n]$, $[\beta_n, \beta_{n+1}]$ $(n \in \mathbf{N})$ sowie auf $[\alpha_1, \beta_1]$ verbindet W die Funktionswerte in den Ecken linear.

Man prüft nun sofort nach, daß W das gewünschte leistet $\diamond$

Jetzt sind wir in der Lage die angekündigte neue Charakterisierung der ACG-Eigenschaft zu beweisen.

(6.4.7) THEOREM. *Für eine Funktion* $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ *gilt:*

$$F \text{ ist } ACG \text{ auf } [a,b] \Leftrightarrow F \text{ ist zerlegbar .}$$

BEWEIS: Wegen (6.3.7),(i) ist ein zerlegbares F die Summe einer ACG- und einer AC-Funktion, also sicher selbst eine ACG-Funktion, womit die Richtung $\Leftarrow$ gezeigt ist.

Wir brauchen also nur noch die Richtung $\Rightarrow$ zu zeigen.
Sei also F ACG auf $[a,b]$. Wir nennen einen Punkt $x \in [a,b]$ regulär, wenn es ein $\delta > 0$ gibt, so daß F zerlegbar über $[a,b] \cap [x-\delta, x+\delta]$. Sei dann

$$P := \{x \in [a,b] \mid\mid x \text{ ist nicht regulär}\} .$$

Sicher ist P abgeschlossen, da man die Menge der regulären Punkte aus $[a,b]$ sofort als offen (relativ zu $[a,b]$) erkennt. Angenommen $p \in P$ sei ein isolierter Punkt von P, ohne Einschränkung etwa $p \in (a,b)$. Es gibt dann ein $\rho > 0$, so daß alle Punkte aus $[p-\rho, p+\rho] - \{p\}$ regulär sind. Nach Lemma (6.4.5) ist F dann über alle $[p-\rho, \alpha]$, $[\beta, p+\rho]$ zerlegbar, wenn

$$p - \rho < \alpha < p < \beta < p + \rho ;$$

dann aber auch über $[p-\rho, p]$ und $[p, p+\rho]$ (siehe (6.4.4),(ii)), und daher auch über $[p-\rho, p+\rho]$ (siehe (6.4.4),(i)). Dann wäre p aber doch regulär, im Widerspruch zu $p \in P$.

Wir haben damit gezeigt, daß P perfekt ist, d.h. P ist abgeschlossen und enthält keine isolierten Punkte.

Ist nun $P = \emptyset$, so ist F nach Lemma (6.4.5) zerlegbar über $[a,b]$ und wir sind fertig. Wir müssen daher nur noch folgende Annahme zum Widerspruch führen:

(*) $$\text{Annahme: } P \neq \emptyset .$$

Da F ACG ist, gibt es gemäß (6.1.5) ein offenes Intervall (α, β) so daß $(\alpha,\beta) \cap P \neq \emptyset$ und F ist AC auf $(\alpha,\beta) \cap P$. Da P perfekt ist und da $(\alpha,\beta) \cap P \neq \emptyset$, muß $(\alpha,\beta) \cap P$ sogar unendlich viele Punkte enthalten. Eine einfache Überlegung zeigt überdies, daß F auch AC auf

$$P_0 := P \cap [\alpha, \beta] .$$

Sei nun $J := [a_0, b_0]$ das kleinste abgeschlossene Intervall, das P_0 enthält. Da $(\alpha,\beta) \cap P$ unendlich viele Elemente enthält, ist J nicht entartet, d.h. es ist $a_0 < b_0$.

Wenn wir nun zeigen könnten, daß F zerlegbar über J ist, so wäre jeder Punkt $p \in P \cap (\alpha, \beta) \neq \emptyset$ regulär, im Widerspruch zu $p \in P$. Wir zeigen also:

$$F \text{ ist zerlegbar über } J \ .$$

Seien hierzu $\{J_k\}$ die in J an P_0 anliegenden Intervalle. Mit Hilfe der Lemmata (6.4.5) und (6.4.4),(ii) folgt, daß F über jedem J_k zerlegbar ist (denn alle $x \in \overset{\circ}{J}_k$ sind regulär). Definiere nun F_1 auf J durch

$$F_1(x) := \begin{cases} F(x) \text{ auf } P_0 \\ \text{linear stetig interpoliert auf den } J_k \ . \end{cases}$$

Nach Lemma (6.1.6) ist F_1 AC auf J, da F AC auf P_0. Für die stetige Funktion $\tilde{F} := F - F_1$ gilt dann:

(1) $\tilde{F} = 0$ auf P_0 .
(2) $\tilde{F}$ ist zerlegbar auf jedem J_k .

Punkt (2) ist richtig, da F über jedem J_k zerlegbar ist, und da sich F und $\tilde{F}$ über einem J_k nur um eine lineare Funktion unterscheiden. Nach Lemma (6.4.3) finden wir für $k = 1, 2, 3, \ldots$ Funktionen

$$G_k^1 \in \mathcal{G}^*(J_k) \ , \ G_k^2 \in \mathcal{G}_* \ , \ H_k : J_k \to \mathbf{R} \text{ absolut stetig} \ ,$$

so daß folgendes gilt:

(3) $\tilde{F} = G_k^1 + G_k^2 + H_k$ auf J_k .
(4) $G_k^1(t) = G_k^2(t) = H_k(t) = 0$ in den Ecken t von J_k .
(5) $\|H_k'\| < \frac{1}{2^k}$.
(6) $\|G_k^1\|_\infty, \|G_k^2\|_\infty \leq 2\|\tilde{F}|J_k\|_\infty$.

Definiere dann für $i = 1, 2$

$$G^i(x) := \begin{cases} 0 & \text{auf } P_0 \\ G_k^i(x) & \text{auf } J_k \ (k = 1, 2, \ldots) \ , \end{cases}$$

sowie

$$H(x) := \begin{cases} 0 & \text{auf } P_0 \\ H_k(x) & \text{auf } J_k \ (k = 1, 2, \ldots) \ . \end{cases}$$

G^1 ist stetig auf ganz J. In den Punkten aus den $\overset{\circ}{J}_k$ ist das klar. Ist hingegen $x \in P_0$, so ist $G^1(x) = 0$ und wir unterscheiden zwei Fälle:
1. Fall: x ist nicht Eckpunkt eines der J_k.
Da $\tilde{F}$ stetig ist, ist es auch gleichmäßig stetig auf J. Da $|J_k| \to 0$ und da $\tilde{F}$ in den Ecken der J_k verschwindet, folgt hieraus $\|\tilde{F}|J_k\|_\infty \to 0$. Daher gilt auch $\|G^1|J_k\|_\infty = \|G_k^1\|_\infty \to 0$, nach (6). Wir finden also zu $\epsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbf{N}$, so daß

$$\|G^1|J_k\|_\infty < \epsilon \text{ für } k > k_0 \ .$$

Da x in keinem J_k liegt, gibt es eine δ-Umgebung U_δ von x, so daß $J_k \cap U_\delta = \emptyset$, für $k = 1, \ldots, k_0$. Ist dann $y \in U_\delta$, so ist entweder $y \in P_0$, also $G^1(y) = 0$ und daher $|G^1(x) - G^1(y)| = 0 < \epsilon$, oder aber y liegt in einem der J_k mit $k > k_0$ und wir haben

$$|G^1(x) - G^1(y)| = |G^1(y)| \leq \|G^1|J_k\|_\infty < \epsilon \, .$$

Damit ist die Stetigkeit von G^1 in x gezeigt.
2. Fall: x ist Eckpunkt eines J_k.
Ist etwa x linker Eckpunkt von J_k, so verfahren wir linksseitig wie im ersten Fall, rechtsseitig hingegen nutzen wir die Stetigkeit von $G^1|J_k = G_k^1$ aus.
G^1 ist also stetig und analog ist G^2 stetig.

Die Funktion H ist sogar absolut stetig. Um dies einzusehen, denken wir uns für den Moment jedes H_k zu Null stetig auf ganz J fortgesetzt. Dann gilt $H = \sum H_k$. Da jedes H_k absolut stetig ist und da $H_k(a_0) = 0$ ist, folgt:

$$H(x) = \sum \int_{a_0}^{x} H_k'(t)\, dt \qquad (x \in J) \, .$$

Mit (5) und dem Satz über die majorisierte Konvergenz ergibt sich $\sum H_k' \in \mathcal{L}_L^1(J)$ und

$$H(x) = \int_{a_0}^{x} \left(\sum H_k'(t) \right) \, dt \, .$$

Als unbestimmtes Integral einer Lebesgue-integrierbaren Funktion ist daher H absolut stetig (siehe (3.1.4),(iv)).

Wegen (3) und da $\tilde{F}, G^1, G^2, H = 0$ auf P_0, haben wir nun die Darstellung

$$\tilde{F} = G^1 + G^2 + H \, .$$

Wegen Lemma (6.4.6) gilt nun weiter: Es gibt stetige, b.ü. differenzierbare Funktionen $W_k : J_k = [a_k, b_k] \to \mathbf{R}$ für die gilt:

(7) $W_k(a_k) = W_k(b_k) = 0$.
(8) $W_k \geq |G_k^1| \vee |G_k^2|$.
(9) $\|W_k\|_\infty = \| \, |G_k^1| \vee |G_k^2| \, \|_\infty \; (\leq 2\|\tilde{F}|J_k\|_\infty$, siehe (6)) .

Setzt man dann auf J

$$W(x) := \begin{cases} 0 & \text{auf } P_0 \\ W_k(x) & \text{auf } J_k \; (k = 1, 2, \ldots) \, , \end{cases}$$

so überlegt man sich -völlig analog wie für G^1- die Stetigkeit von W. Betrachte nun die Funktion

$$S^1 := G^1 - W \, .$$

Es ist $S^1 = 0$ auf P_0 und $S^1 \leq 0$ auf ganz J wegen (8). Wegen $G_k^1 \in \mathcal{G}^*(J_k)$ und da W_k auf J_k b.ü. differenzierbar ist , gilt

$$S^1|J_k = G_k^1 - W_k \in \mathcal{G}^*(J_k) \ .$$

Dies zeigt, daß

$$D_-S^1 = D^+S_1 \in \mathbf{R} \text{ b.ü. auf } \bigcup \mathring{J}_k \ .$$

Mit Ausnahme der Punkte a_0, b_0 und der a_k, b_k sind alle Punkte von P_0 beidseitige Häufungspunkte von P_0: Da (wie bereits gezeigt) jeder Punkt von P_0 Häufungspunkt von P_0 ist, ist jeder einseitige Häufungspunkt von P_0 notwendig der Anfangs- oder Endpunkt eines der anliegenden Intervalle J_k, oder aber einer der Punkte a_0, b_0. Ist daher $x \in P_0 - \{a_k, b_k | \ k = 0, 1, 2 \ldots\}$, so gilt wegen $S^1 = 0$ auf P_0 und $S^1 \leq 0$ auf ganz J:

$$D_-S^1(x) = D^+S^1(x) = 0 \in \mathbf{R} \ .$$

Da dies also b.ü. auf P_0 gilt, haben wir insgesamt

$$\begin{aligned} D_-S^1 = D^+S^1 \in \mathbf{R} \text{ b.ü. auf } J \ &\Rightarrow \\ S^1 \in \mathcal{G}^*(J) \ . & \end{aligned}$$

Ganz analog ist $S^2 := G^2 + W \in \mathcal{G}_*(J)$. Wir haben jetzt die Darstellung

$$\begin{aligned} F - F_1 = \tilde{F} &= G^1 + G^2 + H \\ &= (G^1 - W) + (G^2 + W) + H \ \Rightarrow \\ F &= S^1 + S^2 + (F_1 + H) \ , \end{aligned}$$

mit $S^1 \in \mathcal{G}^*(J), S^2 \in \mathcal{G}_*(J)$ und den absolut stetigen $F_1, H : J \to \mathbf{R}$. Damit ist gezeigt, daß F über J zerlegbar ist, (*) ist endgültig zum Widerspruch geführt und wir sind fertig $\diamondsuit$

Daraus folgt nun aber sofort die versprochene neue Charakterisierung des Denjoy-Integrals:

(6.4.8) COROLLAR. *(Daniell-Charakterisierung des Denjoy-Integrals) Über jedem kompakten Intervall $[a, b] \subset \mathbf{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} &\mathcal{L}_D^1[a, b] = \mathcal{L}^1([a, b], \mathcal{E}_d, I_d) \ , \\ &(D)\int_a^b f = \int_a^b f \, dI_d \quad \forall f \in \mathcal{L}_D^1[a, b] \ . \end{aligned}$$

BEWEIS: Sei zunächst $f \in \mathcal{L}^1_D[a,b]$. Es gibt eine ACG-Funktion $F : [a,b] \to \mathbf{R}$ mit $F'_{ap} = f$ f.ü. Gemäß dem letzten Theorem ist F zerlegbar:

$$F = G_1 + G_2 + H \qquad G_1 \in \mathcal{G}^*, G_2 \in \mathcal{G}_*, H \text{ absolut stetig} .$$

Nach (6.3.7),(i) und (ii) ist

$$\begin{aligned} f = F'_{ap} &= (G_1 + G_2)'_{ap} + H'_{ap} \\ &= \hat{D}(G_1, G_2) + H' \text{ f.ü.} \end{aligned}$$

Wegen $\hat{D}(G_1, G_2) \in \mathcal{E}_d$ und $H' \in \mathcal{L}^1_L$ folgt nun mit Hilfe von (6.3.18): $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$.

Sei umgekehrt $f \in \mathcal{L}^1(\mathcal{E}_d, I_d)$. Wiederum nach (6.3.18) gibt es eine Zerlegung

$$f = g + h \qquad g \in \mathcal{E}_d, h \in \mathcal{L}^1_L .$$

Ist dann G ein d-Stamm von g und $G = G_1 + G_2$ eine $\mathcal{G}$-Zerlegung von G, sowie

$$H(x) := \int_a^x h(t)\, dt \qquad (x \in [a,b]) ,$$

so gilt für $F := G + H$ gemäß (6.3.7),(i) und (ii):

(1) F ist eine ACG-Funktion.

(2) $F'_{ap} = G'_{ap} + H'_{ap} = \hat{D}(G_1, G_2) + H' = g + h = f$ f.ü.

Also ist $f \in \mathcal{L}^1_D[a,b]$ und überdies

$$\begin{aligned} (D)\int_a^b f = F(b) - F(a) &= (G(b) - G(a)) + (H(b) - H(a)) \\ &= I_d(g) + \int_a^b h\, dI_L \\ &= \int_a^b g\, dI_d + \int_a^b h\, dI_L = \int_a^b f\, dI_d , \end{aligned}$$

wobei zuletzt natürlich (6.3.15) benutzt wurde ◇

Wir wollen nun auch den Nachweis erbringen, daß $\mathcal{G} = \mathcal{G}[a,b]$ eine wirklich kleinere Funktionenmenge ist als die Menge aller ACG-Funktionen auf $[a,b]$: Man kann also i.A. bei der Zerlegung einer ACG-Funktion F in

$$F = G + H \qquad G \in \mathcal{G}, H \text{ absolut stetig} ,$$

nicht $H = 0$ erreichen. Wir zeigen sogar:

(6.4.9) BEISPIEL. *Es gibt eine absolut stetige, monoton steigende Funktion* $H : [a, b] \to \mathbf{R}$ *mit* $H \notin \mathcal{G}$.

BEWEIS: Sei $N \subset [a, b]$ eine überabzählbare Nullmenge (etwa eine Cantor-Menge vom Maß 0). Wegen der Regularität des Lebesgue-Maßes λ finden wir offene Mengen $U_n \supset N$, derart daß

$$U_1 \supset U_2 \supset \cdots \supset N \ , \ \lambda(U_n) < \frac{1}{2^n} \ .$$

Dann ist

$$h := \sum_1^\infty \chi_{U_n} \in (\mathcal{L}_L^1)^+$$

und

$$H(x) := \int_a^x h(t)\, dt \qquad (x \in [a, b])$$

ist monoton steigend und absolut stetig.
Seien $x \in N$ und $n_0 \in \mathbf{N}$ beliebig. Sei $\delta > 0$ so klein, daß

$$[x, x + \delta] \subset U_{n_0} \subset U_{n_0 - 1} \subset \cdots \subset U_1 \ .$$

Dann gilt für $y \in (x, x + \delta]$:

$$H(y) - H(x) = \int_x^y h(t)\, dt \geq \int_x^y \sum_1^{n_0} \chi_{U_n}(t)\, dt = n_0(y - x) \ .$$

Hieraus schließen wir

$$\frac{H(y) - H(x)}{y - x} \geq n_0 \qquad \forall y \in (x, x + \delta] \ \Rightarrow$$
$$D_+ H(x) \geq n_0 \ .$$

Da $x \in N$ und $n_0 \in \mathbf{N}$ beliebig waren folgt

$$(1) \qquad D_+ H(x) = \infty \qquad \forall x \in N \ .$$

Angenommen es sei $H \in \mathcal{G}$. Sei dann $H = H_1 + H_2$ eine $\mathcal{G}$-Zerlegung von H. Da N überabzählbar ist gibt es ein $x \in N$, so daß

$$D_- H_1(x) = D^+ H_1(x) \in \mathbf{R} \text{ und } D_+ H_2(x) = D^- H_2(x) \in \mathbf{R} \ .$$

Wir erhalten jedoch

$$\begin{aligned} D_+H_2(x) &= D_+(H - H_1)(x) \\ &\geq D_+H(x) + D_+(-H_1)(x) \\ &= D_+H(x) - D^+H_1(x) = \infty \ , \end{aligned}$$

wegen (1) und da $D^+H_1(x) \in \mathbf{R}$. Dies ist ein Widerspruch zu $D_+H_2(x) \in \mathbf{R}$, also gilt $H \notin \mathcal{G}$ wie gewünscht $\diamondsuit$

Als Nebenergebnis aus dem Vorangegangenen kann man sich auch noch einen Daniell-Zugang zum Perron-Integral überlegen. Wir setzen dazu voraus, daß der Leser mit dem Zugang zum Perron-Integral über ACG_*-Funktionen vertraut ist (deskriptive Beschreibung des Perron-Integrals, siehe z.B. [**11**]). Setzt man dann

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_P[a,b] := \{ f \in \mathcal{E}_d[a,b] \mid\mid\ & f \text{ hat einen } d\text{-Stamm } F \\ & \text{der } ACG_* \text{ auf } [a,b] \text{ ist} \} \ , \end{aligned}$$

sowie $I_P := I_d|\mathcal{E}_P$, so ist sicherlich I_P ein Daniell-Integral auf dem Funktionenvektorraum $\mathcal{E}_P$. Es ist mit Hilfe der im Verlaufe von Kapitel (6) bewiesenen Sätze nicht schwer nachzuweisen, daß

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1_P[a,b] &= \mathcal{L}^1([a,b], \mathcal{E}_P, I_P) \ , \\ (P)\int_a^b f &= \int_a^b f \, dI_P \quad \forall f \in \mathcal{L}^1_P[a,b] \ . \end{aligned}$$

Wir wollen dies nicht näher ausführen, da die Beschreibung von $\mathcal{E}_P$ eben nicht so elegant ist wie die von $\mathcal{E}_d$. Dies wäre anders, wenn sich $\mathcal{E}_P$ -ebenso wie $\mathcal{E}_d$- allein durch eine bestimmte Differenzierbarkeits-Forderung an die zugehörigen Stammfunktionen charakterisieren ließe. Dahingehende Untersuchungen erwiesen sich aber als ergebnislos; wir wollen es deshalb mit dieser Mitteilung bewenden lassen.

Bibliographie

[1] M. Leinert: Daniell-Stone integration without the lattice condition (Arch. Math. Vol. 38), Basel, 1982.

[2] M. Leinert: Plancherel's Theorem and integration without the lattice condition (Arch. Math. Vol. 42), Basel, 1984.

[3] H. König: Integraltheorie ohne Verbandspostulat (Math. Ann. Vol. 258), Berlin, 1982.

[4] E. Hewitt, K. Stromberg: Real and Abstract Analysis, Berlin, 1965.

[5] D. Lutz: Topologische Gruppen, Zürich, 1976.

[6] M. Leinert: Maß und Integration (Vorlesungsskriptum), Universität des Saarlandes, 1979.

[7] W. Rudin: Real and Complex Analysis, New-York, 1966.

[8] W. Rudin: Functional analysis, New-York, 1973.

[9] A. Bruckner: Differentiation of Real Functions, Berlin, 1978.

[10] A. Bruckner, J. Leonard: Derivatives (Amer. Math. Monthly 73, Part II), Menasha, 1966.

[11] S. Saks: Theory of the integral, Warschau, 1937.

[12] F. Hirzebruch, W. Scharlau: Einführung in die Funktional-Analysis, Mannheim, 1971.

[13] R. Fleissner: On the product of derivatives (Fund. Math. 88), Warschau, 1975.

[14] J. Foran: On the product of derivatives (Fund. Math. 80), Warschau, 1973.

[15] F. Friedlander: An introduction to the theory of distributions, Cambridge, 1982.

[16] O. Forster: Analysis III, Braunschweig, 1981.

[17] I. Natanson: Theory of Functions of a real variable II, New-York, 1960.

[18] P. Alexandroff: Über die Äquivalenz des Perronschen und des Denjoyschen Integralbegriffs (Math. Zeitschr. 20), Berlin, 1924.

[19] H. Hake: Über de la Vallée Poussins Ober- und Unterfunktionen einfacher Integrale und die Integraldefinition von Perron (Math. Ann. 24), Berlin, 1921.

[20] H. Looman: Über die Perronsche Integraldefinition (Math. Ann. 93), Berlin, 1925.

[21] K. Garg: On bilateral derivatives and the derivative (Trans. Amer. Math. Soc. 210), Providence, 1976.

[22] K. Garg: On a new definition of derivative (Bull. Amer. Math. Soc. 82), Providence, 1976.

[23] K. Kolmogorov: Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout (Fund. Math. 4), Warschau, 1923.

[24] I. Pesin: Classical and modern integration theories, New-York, 1970.

Einige verwendete Zeichen

Mit den Symbolen

$$\mathbf{N}\ ,\ \mathbf{Z}\ ,\ \mathbf{Q}\ ,\ \mathbf{R}\ ,\ \mathbf{C}$$

bezeichnen wir respektive die Mengen der natürlichen, ganzen, rationalen, reellen bzw. komplexen Zahlen. Dabei gehört 0 nicht zu den natürlichen Zahlen. Das Zeichen $\overline{\mathbf{R}}$ steht für die erweiterten reellen Zahlen: $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.
Die leere Menge bezeichnen wir mit $\emptyset$.

Sei X eine nicht-leere Menge und seien f, g Funktionen $X \to \mathbf{R}$ oder $X \to \overline{\mathbf{R}}$. Wir schreiben dann

$$f \vee g := \max\{f, g\}\ ,\ f \wedge g := \min\{f, g\}$$

für das (punktweise genommene) Maximum bzw. Minimum von f und g. Wir bezeichnen mit

$$f^+ := f \vee 0\ ,\ f^- := (-f) \vee 0$$

den Positiv- bzw. Negativteil von f. Werden durch Funktionen gewisse Teilmengen von X ausgezeichnet, so verwenden wir manchmal abkürzende Schreibweisen, die sich aber stets von selbst verstehen. Wir schreiben z.B.

$$\{f \neq g\} \text{ für } \{x \in X |\ f(x) \neq g(x)\}\ ,$$

$$\{f \leq g\} \text{ für } \{x \in X |\ f(x) \leq g(x)\} \quad \text{u.s.w.}$$

Ist $\mathcal{F}$ eine Menge von Funktionen $X \to \mathbf{R}$ oder $X \to \overline{\mathbf{R}}$, so sei

$$\mathcal{F}^+ := \{f \in \mathcal{F} |\ f(x) \geq 0\ \forall x \in X\}\ .$$

Begriffe wie "monoton", "aufsteigend" u.s.f. werden stets im nicht-strengen Sinne benutzt, wenn nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird. So heißt etwa eine Folge reeller Zahlen (a_n) aufsteigend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$, für alle $n \in \mathbf{N}$. Ist a der Limes dieser Folge in $\overline{\mathbf{R}}$, so schreiben wir diese Tatsache kurz $a_n \uparrow a$. Analoges gilt für monoton Fallende Folgen. Ist X eine nicht-leere Menge und sind $f, f_n : X \to \overline{\mathbf{R}}$ Funktionen, so schreiben wir $f_n \uparrow f$, wenn $f_n(x) \uparrow f(x)$, für alle $x \in X$. Eine analoge Schreibweise wird für monoton fallende Folgen verwendet.

Ist die reelle Funktion F in einer rechtsseitigen Umgebung von $0 \in \mathbf{R}$ erklärt und ist $c \in \mathbf{R}$, so bedeutet die Schreibweise

$$\lim_{h \downarrow 0} F(h) = c$$

ausgeschrieben natürlich nichts anderes als

$$\forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall h \in \mathbf{R} :\ 0 < h < \delta \Rightarrow |F(h) - c| < \epsilon\ .$$

Ganz analog erklären sich Schreibweisen wie

$$\lim_{h \uparrow 0}\ ,\ \lim_{x \downarrow x_0}\ ,\ \lim_{x \uparrow x_0}\ ,\ \ldots\ .$$

Ist p eine komplexe Zahl oder eine komplexe Funktion, so bezeichnen $\Re(p)$, $\Im(p)$ den Real- bzw. Imaginärteil von p.

Mit $\diamondsuit$ ist das Ende eines Beweises gekennzeichnet.