Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Autor: **Alfred Pringsheim** (1850–1941)

Titel: **Über Wert und angeblichen Unwert der Mathematik.**
Festrede, gehalten in der öffentlichen Sitzung der kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München am 14. März 1904.

Quelle: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.
Band 13 (1904)
Seite 357 – 382.
Signatur UB Heidelberg: L 22::13

Digitale Ausgabe
erstellt von
Gabriele Dörflinger
2024

Alfred Pringsheim
* 2. September 1850 in Ohlau
† 25. Juni 1941 in Zürich

Alfred Pringsheim begann sein Mathematik-Studium im WS 1868/69 in Berlin. Er immatrikulierte sich am 24. April 1869 in Heidelberg und wurde am 29. Februar 1872 ohne Vorlage einer schriftlichen Arbeit promoviert.

1877 habilitierte er sich in München und wurde dort 1886 zum Professor ernannt. Er arbeitete vor allem über Funktionentheorie. Daneben war er ein vorzüglicher Pianist, der Richard Wagner hoch schätzte, und ein exzellenter Kunstkenner. Bekannt ist er auch in Nichtmathematiker-Kreisen als Schwiegervater Thomas Manns.

1898 wurde er zum ordentlichen Mitglied der Bayerischen Akademie der Wissenschaften gewählt. Er publizierte von 1892 bis 1933 fünfundvierzig Artikel in den Sitzungsberichten der Akademie. 1938 wurde er als Jude von der Akademie ausgeschlossen.

Er emigrierte in letzter Minute 1939 in die Schweiz, wo er 1941 verstarb.

Der Text wurde durch ein Texterkennungsverfahren wiedergewonnen; die Seitenzählung des Originals ist am Seitenrand angegeben.

Der Mathematiker, dem die hohe Ehre zuteil wird, von dieser Stelle aus über seine Wissenschaft zu sprechen, befindet sich, wenn er auch diese Ehre vollkommen zu würdigen weiß, in einer keineswegs beneidenswerten Lage. Er gleicht einem Ausländer, der allenfalls in seiner Muttersprache mancherlei Erträgliches zu sagen wüßte, doch, nur mühsam und unvollkommen dies und jenes in gebrochenem Deutsch auszudrücken vermag und dabei noch Gefahr läuft, von seinen Landsleuten für recht trivial, gehalten zu werden. Man hat zwar die Mathematik, weil ihr ganzer Inhalt auf einer geringen Zahl, allgemein verständlicher Grundsätze durch rein logische Deduktion, sich aufbaut, nicht unzutreffend als die Wissenschaft vom *Selbstverständlichen* bezeichnet. Das ändert aber nichts an der Erfahrungstatsache, daß sie bis heute für die Überzahl der Gebildeten ja sogar der Gelehrten, die Wissenschaft vom *Unverständlichen* geblieben ist. Mit der schon von Euklid behaupteten Unmöglichkeit eines *Königsweges* zur Mathematik scheint es leider sine Richtigkeit zu haben, wenn auch der Bologneser Pietro Mengoli[1] allen Ernstes das Gegenteil behauptet und durch, die Tat zu beweisen versucht hat. Seine der Königin Christine von Schweden dedizierte „Via regia ad mathematicas“ erweist sich, bei näherer Betrachtung lediglich als eine Sammlung höchst schauderhafter lateinischer Disticha, vermittelst deren die Elemente der Arithmetik, Algebra und Planimetrie in einer — wohl nur nach des Verfassers Meinung — besonders einfachen, und eindringlichen Art gelehrt werden sollen. Aber auch der ganz anders ernsthaft zu nehmenden Behauptung des 1873 verstorbenen Mathematikers Hermann Hankel[2], daß mit der sogenannten *projektiven Geometrie* der *Königsweg* zur Mathematik gefunden, zu sein scheine, wird, man doch kaum anders als äußerst skeptisch gegenüberstehen können. Im übrigen, wie dem auch sei: so viel darf wohl als feststehend betrachtet werden, daß in den weitesten Kreisen die Mathematik sich einer glänzenden Unpopularität erfreut. Bedürfte es hierfür noch irgend eines äußeren Beleges, so könnte man vielleicht auf den Umstand hinweisen, daß, ohne Übertreibung, das *mathematische* Wissensgebiet wohl das einzige ist, dessen unser sonst allwissender Journalismus noch in keiner Weise sich bemächtigt hat. In allzu respektvoller Entfernung verharrend, bringt zwar die Majorität der Gebildeten der Mathematik eine gewisse Hochachtung entgegen: zumeist freilich wohl wegen des anerkannten *Nutzens*, den sie den *Naturwissenschaften* und vor allem, der mächtig emporgewachsenen, in alle Zweige des menschlichen Lebens eingreifenden *Technik* gebracht hat. Das verhindert dann keineswegs, daß gar viele den „reinen“ Mathematiker, wenn auch nicht geradezu als „reinen Toren“, so doch zum mindesten als ziemlich überflüssigen Vertreter einer eingebildeten und abstrusen Brahminenweisheit ansehen. Andere, die bei ihrer Schätzung der Mathematik vielleicht mehr durch das Gefühl, als durch verstandesmäßigen Erwägungen sich leiten lassen, erblicken in ihr eine ihnen zwar unbegreifliche, aber doch wohl bewundernswürdige Äußerung menschlicher Geisteskraft und sind allenfalls geneigt, die Mathematik

(357) (358)

[1] Via regia ad mathematicas per arithmeticam, algebram et planimetricam. A Petro Mengolo. Bononiae 1655.

[2] Hermama Hankel, Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten. Antrittsrede. Tübingen 1869 (2. Aufl. 1884).

eher zu hoch als zu niedrig zu bewerten. Ein interessantes literarisches Beispiel dieses Typus in seiner höchsten Potenz bietet der Romantiker Novalis, dessen Aussprüche über Mathematik einen kaum minder religiös-schwärmerischen Charakter tragen als seine Dichtungen: „Das Leben der Götter ist Mathematik. Alle göttlichen Gesandten müssen Mathematiker sein. Reine Mathematik ist Religion. Die Mathematiker sind die einzig Glücklichen. Der Mathematiker weiß alles. Er könnte es, wenn er es nicht wüßte." Usf.[3]) — Man wird einigermaßen erstaunt sein, die nach der landläufigen Meinung so „trockene" Mathematik hier im trautesten Verein mit der „blauen Blume der Romantik" zu finden. Des Rätsels Lösung ist nicht so schwierig, wie es auf den ersten Blick vielleicht scheint. Das gemeinsame Band bildet die wunderreiche Zahlenwelt, deren mystische Geheimnisse den religiösen Schwärmer nicht weniger in ihren Bann ziehen, wie eben auch den forschenden Mathematiker. Und das *geheimnisvolle Wissen*, welches *nur dieser* durch die Zauberkraft seiner Methoden erwirbt, das gerade ist es, was jenes anderen überschwängliche Bewunderung hervorruft.

Im übrigen ist dafür gesorgt, daß die Bäume der so „einzig glücklich" gepriesenen Mathematiker nicht in den Himmel wachsen. Denn auch an Feinden hat es der Mathematik bis auf den heutigen Tag nicht gefehlt, ja an völligen Verächtern, die ihr jeden Wert absprechen, soweit sie nicht bloßen Nützlichkeitszwecken dient Meine Absicht, zu einer angemesseneren Wertschätzung der Mathematik mein bescheidenes Teil beizutragen, glaube ich am besten dadurch zu erreichen, daß ich zunächst die wesentlichsten gegen sie erhobenen Vorwürfe zu entkräften versuche und, daran anschließend, einige allgemeine Bemerkungen über Ziel und Zweck des mathematischen Schulunterrichts und der mathematischen Wissenschaft folgen lasse.

Mit ganz besonderer Schärfe hat sich bekanntlich Schopenhauer an verschiedenen Stellen seiner Schriften gegen die Mathematik gewendet. Das ist nun zwar schon ziemlich lange her: trotzdem sind seine Ausführungen meines Wissens niemals widerlegt worden, vielleicht nur deshalb, weil ihre Widerlegung, als gar zu einfach, den Mathematikern nicht der Mühe wert schien. Da aber bis in die neueste Zeit, namentlich in Schriften und Aufsätzen, die einer Einschränkung des mathematischen Unterrichts an den Mittelschulen das Wort reden, mit fast unfehlbarer Regelmäßigkeit versucht wird, Schopenhauers Autorität als eine besonders gewichtige in die Wagschale zu werfen, so scheint es mir dringend wünschenswert, die Schopenhauerischen Argumente, die wissenschaftliche Legitimation ihres Autors und seine, wie ich nachweisen werde, keineswegs ganz
(359) sauberen Praktiken einmal einer öffentlichen Prüfung zu unterziehen.

Was Schopenhauer über die *Elementar-Geometrie* sagt[4], kommt für unsere Zwecke nur insofern in Betracht, als schon bei dieser Gelegenheit sein Mangel an jeder tieferen mathematischen Einsicht deutlich zum Ausdruck gelangt.

[3] Novalis Schriften, herausg. von K. Heilborn (Berlin 1901). Teil II, erste Hälfte, S. 223.

[4] Über die vierfache Wurzel des Satzes vom zureichenden Grunde, § 39 = Werke, herausg. von J. Frauenstädt, I, S. 135–139. Die Welt als Wille und Vorstellung, I, § 14 = Werke II, S. 82–87.

Kann man auch die von ihm hervorgehobene *didaktische* Unzweckmäßigkeit der Euklidischen Beweismethoden ihm ohne weiteres zugestehen, so liegen doch die weitaus wesentlicheren Mängel des Euklidischen Lehrgebäudes sehr viel tiefer, nämlich in den grundlegenden Definitionen und Axiomen: und gerade hierfür hat Schopenhauer nicht das geringste Verständnis, macht sich vielmehr über die von den Mathematikern in dieser Hinsicht geäußerten Bedenken in recht billiger Weise lustig.[5] Will man aber mit Schopenhauer jene Fundamente beibehalten, so bleiben Euklids Elemente auch heute noch ein in seiner Art bewundernswürdiges Werk von hoher Vollkommenheit Und bei den meisten Euklidischen Beweisen ist das, was dem Lernenden die Einsicht erschwert, keineswegs der *Inhalt*, sondern lediglich die *rein synthetische* Form des Vortrages, welche von jedem geschickten Lehrer mit Leichtigkeit durch eine mehr analytisch-genetische und zugleich geometrisch anschaulichere ersetzt werden kann. Ein schlagendes Beispiel hierfür bietet gerade der von Schopenhauer als „stelzbeinig, ja hinterlistig“ charakterisierte Euklidische Beweis des Pythagoreischen Lehrsatzes, welcher bei unerheblicher Änderung der Darstellungsform geradezu als glänzendes Muster eines tadellosen elementar-geometrischen Beweises erscheint, während das, was Schopenhauer als Ersatz zu bieten wagt, gelinde gesagt, als äußerst naiv bezeichnet werden muß. Und nicht einmal an dem armseligen Spezialfall[6], auf den sein ganzer Beweis sich beschränkt, gelingt ihm dasjenige, (360) was er eigentlich prätendiert: nämlich anstatt des beim Euklidischen „Mausefallenbeweises“ lediglich zum Vorschein kommenden *Erkenntnisgrundes* den angeblich existierenden wahren *Seinsgrund*[7] aufzudecken. Jeder Sachkundige sieht, unmittelbar, daß Schopenhauer in Wahrheit um kein Haar mehr gibt als Euklid: nämlich den *Erkenntnisgrund*.[8]

Zum Kapitel *„Arithmetik“* äußert sich Schopenhauer folgendermaßen[9]: „Daß die niedrigste aller Geistestätigkeiten die *arithmetische* sei, wird dadurch belegt, daß sie die einzige ist, welche auch durch eine Maschine ausgeführt werden kann: wie denn jetzt in England dergleichen Rechenmaschinen bequemlichkeitshalber schon in häufigem Gebrauch sind. Nun läuft alle analysis finitorum et infinitorum im Grunde doch auf *Rechnen* zurück. Danach bemesse man den *„mathematischen Tiefsinn“*, über welchen schon Lichtenberg sich lustig macht,

[5]Welt als Wille etc. IL Kap. 13 = Werke III, S. 142, — Die Mathematiker haben in Wahrheit sehr schwerwiegende Gründe gegen die von Schopenhauer als Evangelium angesehene Kantische Transzendentalität der Raumanschauung. Vgl. Gauss, Werke (1876). II, S. 177. — Riemann, Werke (1876), S. 254. — Helmholtz, Wissensch. Abhandlungen II (1883), S. 610; 618, — P. Stäckel und Fr. Engel, Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauß. Leipzig 1895. — D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. 2. Auflage. Leipzig 1903.

[6]Siehe Anhang A

[7]Trotz allen Herumredens (Vierf. Wurzel des Satzes etc. § 36–39) gelingt es Schopenhauer überhaupt garnicht, eine scharfe and brauchbare *Definition* des nach seiner Ansicht existierenden, spezifisch mathematischen *Seinsgrundes* aufzustellen.

[8]Mit Hilfe der schließlich auf den *Axiomen* beruhenden *Kongruenz* gewisser Dreiecke wird bewiesen, daß die betreffenden Figuren der *Definition* der Gleichheit („Zerschneidungsgleichheit“) genügen. — Vgl auch: Wilhelm Wundt, Logik, 2. Auflage (Stuttgart 1893) I, S. 569–571.

[9]Parerga II, § 35 = Werke VI, S. 52.

indem et sagt: „ „Es ist fast mit der Mathematik, wie mit der Theologie. So wie die der letzteren Beflissenen, zumal wenn sie in Ämtern stehen. Anspruch auf einen besonderen Kredit von Heiligkeit and eine nähere Verwandschaft mit Gott machen, obgleich sehr viele darunter wahre Taugenichtse sind, so verlangt sehr oft der sogenannte Mathematiker für einen tiefen Denker gehalten zu werden, ob es gleich darunter die größten Plunderköpfe gibt, die man nur finden kann,
(361) untauglich zu irgend einem Geschäft, das Nachdenken erfordert wenn es nicht unmittelbar durch jene leichte Verbindung von Zeichen geschehen kann, die mehr das Werk der Routine als des Denkens ist.“ “ (S. Lichtenbergs vermischte Schriften, Göttingen 1801. Bd. 8. 287 ff.)“

Nochmals kurz zusammengefaßt: *Nur die arithmetische* Geistestätigkeit kann durch Maschinen ausgeführt werden, folglich ist sie die *allerniedrigste.* Alle *Analyse* läuft aber auf *Rechnen* hinaus, folglich hat Lichtenberg ganz recht, wenn er die *Mathematiker* für Plunderköpfe erklärt. Ein wundervoller Schluß vom besonderen zum allgemeinen, der die herrlichsten Perspektiven eröffnet. Z. B.: Stanley Jevons hat eine Maschine konstruiert[10], mittels deren man gewisse *logische Schlußformen* auf rein mechanischem Wege erzeugen kann. Damit wäre vor allem belegt, daß die *logische* Geistestätigkeit der *arithmetischen* an Niedrigkeit nichts nachgibt. Nun läuft aber alles vernünftige *Denken* im Grunde doch auf *logisches Schließen* zurück. Man bemese danach den *„philosophischen Tiefsinn“* der sogenannten Denker usf.

Jene ganze Schopenhauersche Schlußweise beruht auf dem Mißbrauche, welcher mit dem Wort *arithmetische* Tätigkeit getrieben wird. In Wahrheit handelt es sich hier doch ausschließlich um das gewöhnliche *numerische Rechnen*, d. h. um die Ausführung der *vier Spezies* an gegebenen *Zahlen.* Will man diese, allerdings ziemlich untergeordnete, geistige Tätigkeit mit dem pompösen Namen einer *arithmetischen* beehren, so ist dagegen vom rein etymologischen Standpunkte kaum etwas einzuwenden. In der Tat findet man den entsprechenden Lehrgegenstand auf den Lehrplänen der bayerischen Gymnasien nach altem scholastischen Brauch schlechthin als *„Arithmetik“* bezeichnet. Doch scheint mir dieser einigermaßen luxuriöse Usus wenig empfehlenswert: einmal schon deshalb, weil nicht recht abzusehen ist, warum man ungefähr dasselbe Gericht[11], welches auf den Volksschulen weit bescheidener und zweckmäßiger als *„Rechnen“* dargeboten wird, den gymnasialen oberen Zehntausend unter einem so viel feineren,

[10]Vgl. *„On the mechanical performance of logical inference“*: Lond. Philos. Transactions, Vol. 160 (1870), S. 497–518.

[11]Es ist mir natürlich nicht unbekannt, daß der Rechenunterricht an den Mittelschulen ein etwas höheres Ziel verfolgt, als auf den Volksschulen: er soll zugleich als Vorbereitung für den Unterricht in der wirklichen („allgemeinen“) *Arithmetik* dienen. Aber abgesehen davon, daß diese Tendenz in den *ersten zwei*, ja sogar *drei* Klassen auf die Gestaltung des Rechenunterrichts einen kaum merklichen Einfluß übt, so ist doch schließlich eine *„arithmetische Propädeutik“* noch keine *„Arithmetik“*. Überhaupt sollte man sich entschließen, die von den wissenschaftlichen Mathematikern jetzt allgemein akzeptierte Terminologie auch auf den Mittelschulen einzuführen und danach die *„Buchstabenrechnung“*, d. h. die Lehre vom Rechnen mit *allgemeinen Zahlen*, nicht mehr *„Algebra“*, sondern *„Arithmetik“* zu nennen, dagegen die Bezeichnung *„Algebra“* für die Lehre von des *Gleichungen* zu reservieren.

weit größere Erwartungen erregenden Namen serviert: sodann aber, weil man auf diese Weise die an sich schon äußerst dunklen Vorstellungen, welche in weiteren Kreisen über Wesen und Inhalt der Mathematik herrschen, nur noch verdunkeln hilft. Die *Arithmetik*, auch die elementare, ist eine *Wissenschaft*; sie lehrt, gewisse allgemeine Gesetze in systematischer Form aufzustellen und logisch zu begründen. Das *Rechnen* ist im wesentlichen ein *Können, kein Wissen* — eine in der Hauptsache *rein technische Fertigkeit*, deren Ziel und Zweck in der *zahlenmäßigen Anwendung* eines verhältnismäßig sehr geringen Bestandes von zumeist nur notdürftig erklärten und unzulänglich bewiesenen arithmetischen (362)
Regeln besteht. Usurpiert man hierfür die viel zu anspruchsvolle Benennung *Arithmetik* (die älteren Lehrbücher sagen in diesem Zusammenhange wenigstens *„gemeine“* Arithmetik), so bringt man damit die *Arithmetik* in einen gänzlich falschen Gegensatz zur *„eigentlichen Mathematik“* oder man erweckt den irrigen Glauben, daß die *Mathematik*, abgesehen von der reinen *Geometrie*, dem numerischen *Rechnen* eng verwandt oder gar im wesentlichen damit identisch sei. So ungefähr scheint auch Schopenhauer sich die Sache vorgestellt zu haben. Und doch involviert sein Ausspruch, daß die gesamte *Analysis* auf ein der Tätigkeit einer Rechenmaschine vergleichbares *Rechnen* hinauslaufe, eine vollendete petitio principii, welche unwiderleglich zeigt, daß er von den Methoden und dem Inhalte jener Wissenschaft auch nicht die leiseste Ahnung besitzt.

Hiervon werden wir uns im folgenden alsbald noch des genaueren überzeugen. Zuvor aber wollen wir noch feststellen, daß jenes Lichtenberg-Zitat, durch welches Schopenhauer die Lacher auf seine Seite zu ziehen und seine fadenscheinige Argumentation zu stützen sucht, bei näherer Betrachtung als eine vollkommen bewußte, recht plumpe und bösartige *Fälschung* sich erweist. Der fragliche Ausspruch Lichtenbergs beginnt nämlich in Wahrheit mit den Worten: *„Die Mathematik ist eine gar herrliche Wissenschaft*, aber die *Mathematiker* taugen oft den Henker nicht.“ Schopenhauer, der ja gerade die *geistige Minderwertigkeit der Mathematik* zu beweisen wünscht, entblödet sich nicht, diesen *einen*, das völlige Gegenteil besagenden Satz kurzweg zu *unterschlagen*[12], um so im Leser die irrige Meinung hervorzurufen, als habe Lichtenberg durch seinen Ausfall auf *gewisse Mathematiker* die *Mathematik* selbst treffen wollen. Im übrigen kann für jeden, der mit der Geschichte der Mathematik einigermaßen vertraut ist, kaum ein Zweifel darüber bestehen, auf *welche* Mathematiker jener Angriff gemünzt ist. Es handelt sich dabei offenbar um die Anhänger der, heute fast völliger Vergessenheit anheimgefallenen sogenannten *kombinatorischen Schule*, welche gegen Ende des 18. und Anfang des 19. Jahrhunderts fast alle mathematischen Lehrstühle an den deutschen Universitäten okkupierten und deren weitschweifige, zumeist in ödesten Formalismus sich verlierende Produktionen einem geistreichen Kopfe wie Lichtenberg, der ja überdies als Professor der Physik

[12] Der fragliche Ausspruch Lichtenbergs findet sich innerhalb einer Reihe von aphoristischen Bemerkungen, deren jede von der vorangehenden durch einen breiten Zwischenraum und drei Sternchen typographisch getrennt ist. Damit erscheint also *jede* Möglichkeit ausgeschlossen, daß etwa *Schopenhauer* jenen *einen* Satz *übersehen* haben könnte: es handelt sich daher ganz unzweifelhaft, wie im Texte bemerkt, um eine vollkommen *bewußte* Fälschung.

in Göttingen mathematisch selbst wohlbewandert war, nur höchstes Mißbehagen verursachen konnten.

Doch kehren wir wieder zu SCHOPENHAUER zurück! Um seine völlige Unkenntnis des Wesens der Analysis zu charakterisieren, führe ich zunächst die folgende Stelle an[13]: „Will man von den räumlichen Verhältnissen abstrakte Erkenntnis haben, so müssen sie erst in zeitliche Verhältnisse d. h. in Zahlen übertragen werden. . . . Diese Notwendigkeit, daß der Raum, mit seinen drei
(363) Dimensionen, in die Zeit, welche nur eine Dimension hat, übersetzt werden muß, wenn man eine abstrakte Erkenntnis seiner Verhältnisse haben will, diese Notwendigkeit ist es, welche die Mathematik so schwierig macht.[14] Dies wird sehr deutlich, wenn wir die Anschauung der Kurven vergleichen mit der analytischen Berechnung derselben, oder auch nur die Tafeln der Logarithmen der trigonometrischen Funktionen mit der Anschauung der wechselnden Verhältnisse der Teile des Dreiecks, welche durch jene ausgedrückt werden: was hier die Anschauung in einem Blick, vollkommen und mit äußerster Genauigkeit auffaßt, nämlich wie der Kosinus abnimmt, indem der Sinus wächst, wie der Kosinus des einen Winkels der Sinus des anderen ist, das umgekehrte Verhältnis der Ab- und Zunahme beider Winkel u. s. f., *welches ungeheure Gewebe von Zahlen, welche mühsälige Rechnung* bedurfte es nicht, um dies in abstracto auszudrücken!“

Ohne auf die groben, einem einigermaßen mathematisch gebildeten Leser unmittelbar ersichtlichen Ungereimtheiten einzugehen, die *jeder einzelne* dieser Sätze darbietet, will ich mich nur an das *Endergebnis* halten: danach soll der Mathematiker, um eine einfache geometrische Beziehung in abstracto auszudrücken, eines nur durch „mühsäligste“ Rechnung zu gewinnenden „ungeheuren Zahlengewebes“ bedürfen. Ach nein! Das leistet er mit Hilfe einer einzigen *Formel.* Und noch mehr: diese *ersetzt* ihm nicht nur die Anschauung, sondern sie *präzisiert* mit absoluter Genauigkeit, was jene nur in grobem Umrisse zeigt. Auch enthält eine einzige Formel *unendlich viel mehr* als sämtliche Logarithmentafeln der Erde: denn sie umfaßt die *unbegrenzte* Mannigfaltigkeit *aller überhaupt denkbaren Fälle*, während jene Logarithmentafeln, mögen sie noch so zahlreich und noch so dick sein, immer nur auf eine *begrenzte* Anzahl von *bestimmten* Fällen sich erstrecken können. Von der wahren Bedeutung und der wunderbaren Kraft einer *analytischen Formel* hat SCHOPENHAUER gar keine Vorstellung. Die *Analysis*, die nach seiner Meinung nur mit Hilfe „ungeheurer Zahlengewebe“, d. h. *Tabellen* sich verständlich macht, besitzt dazu ein unendlich viel ausdrucksvolleres und kürzeres Hilfsmittel: die *Funktion*, gewissermaßen eine auf den minimalen Umfang von wenigen Zeichen reduzierte Tabelle von unbegrenzter Feinheit. Die Analysis begnügt sich nicht, wie die *Algebra*, zu fragen: „Wie *berechnet* man

[13]Welt als Wille etc. I, § 12 = Werke II, S. 64, 65.

[14]Dieser tiefsinnige Unsinn klingt so wunderschön, daß selbst HEGEL nichts Vollkommeneres dieser Art hätte zustande bringen können. Bekanntlich liegt gerade die prinzipielle Hauptschwierigkeit der Analysis in der Schöpfung des *eindimensionalen* Zahlenkontinuums, nicht aber in dessen Verwertung zum Studium der Beziehungen im *dreidimensionalen* Raume, da ja hierzu *keineswegs*, wie SCHOPENHAUER offenbar annimmt, eine *stetige Abbildung* des dreidimensionalen Kontinuums auf das eindimensionale, sondern lediglich die Hinzunahme des Koordinatenbegriffes erforderlich ist.

aus einer *Gleichung*, die neben gewissen *gegebenen* Zahlen eine *unbekannte Zahl* y enthält, *dieses* unbekannte y?“ Vielmehr nimmt sie ihren Ausgang von der folgenden weit allgemeineren Fragestellung (in welcher offenbar die ebengenannte als spezieller Fall enthalten ist): „Welche *Folge von Zahlenwerten* durchläuft jenes y, wenn die betreffende Gleichung außer den *fest gegebenen* Zahlen noch eine sogenannte *veränderliche* Zahl enthält, d. h. einen Buchstaben x, an dessen Stelle man sich successive eine Menge *verschiedener* Zahlen, z. B. *jede überhaupt mögliche Zahl* gesetzt denkt?“ Einen derartigen Zusammenhang zwischen zwei *gleichzeitig* miteinander *veränderlichen* Zahlen x und y, wobei also gerade wie in (364)
einer *Tabelle* mit zwei, x und y überschriebenen Kolonnen, jedem Zahlenwerte x immer wieder ein gewisser Zahlenwert y zugehört (eventuell auch deren mehrere), bezeichnet der Mathematiker mit dem Ausdruck: es sei y eine *Funktion* von x.

Der Nutzen und die Wichtigkeit des soeben *rein arithmetisch* definierten *Funktions*-Begriffes dürfte einigermaßen deutlich werden, wenn wir auf seinen *geometrischen* Ursprung und damit zugleich auf eine seiner fruchtbarsten Anwendungen in Kürze eingehen, nämlich auf den Grundgedanken der sogenannten *analytischen Geometrie*, deren Erfindung durch Cartesius (Descartes 1637) und Fermat (ungefähr gleichzeitig) den vollständigen Bruch mit der bis dahin allein herrschenden geometrischen Tradition der Griechen und den Beginn einer ganz neuen mathematischen Ära bezeichnet. Man denke sich auf einem Blatte quadratisch liniierten Papieres, wie es die Anfänger zum Rechnen benutzen, die Vertikal-, wie auch die Horizontal-Linien mit den Nummern 0, 1, 2 ... u. s. f. versehen. Dann ist durch die Aussage: „es liege ein Punkt in einer bestimmten Vertikale, z. B. Nr. 3. und einer bestimmten Horizontale, z. B. Nr. 5“ —, offenbar ein *einziger Punkt* vollständig bestimmt. Das hierbei auftretende *Zahlenpaar* (3, 5) kann also dazu dienen, einen bestimmten *Punkt* eindeutig zu charakterisieren. Denkt man sich jetzt neue Vertikalen und Horizontalen gezogen, welche die bisher vorhandenen Zwischenräume gerade *halbieren*, und numeriert dieselben demgemäß mit 1/2, 1 1/2, 2 1/2 ... u. s. f., so ist ohne weiteres klar, daß jetzt, auch *Zahlenpaare*, wie: (3 1/2, 5), (8, 5 1/2), (3 1/2, 5 1/2), je einen bestimmten *Punkt* charakterisieren. Durch Fortsetzung dieser Schlußweise und Heranziehung gewisser Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs (auf die ich hier nicht eingehe) gelangt man zu dem Resultate: Man kann jedem *Punkte* einer Ebene ein ganz bestimmtes *Zahlenpaar* (x, y) zuordnen, welches man als seine *Koordinaten* bezeichnet, und *umgekehrt* entspricht dann auch jedem *Zahlenpaare* (x, y) *ein* und *nur* ein *bestimmter Punkt*.

Ist jetzt in der fraglichen Ebene irgend eine *Kurve*, d. h. eine beliebige krumme Linie verzeichnet, so können wir auf Grund des eben Gesagten die Gesamtheit ihrer *Punkte* ersetzen durch einen Komplex von unendlich vielen *Zahlenpaaren* (x, y). Zu jeder hierbei vorkommenden Zahl x gehört also (mindestens) eine bestimmte Zahl y; das ist aber genau dasselbe, was wir oben durch den Ausdruck bezeichneten: y ist eine *Funktion* von x. Mit anderen Worten: es findet eine funktionale Beziehung, d. h. eine *Gleichung* zwischen den beiden *Veränderlichen* x und y statt, welche gewissermaßen als das *arithmetische Abbild* jener *Kurve* er-

scheint und schlechthin die *Gleichung der Kurve* genannt wird. Umgekehrt wird man in entsprechender Weise für eine *Gleichung* zwischen x and y eine gewisse *Kurve* als *geometrisches* Abbild erhalten. Diese Wechselbeziehung zwischen *Kurven* und *Gleichungen* gestattet dem Mathematiker, die Eigenschaften der Kurven an ihren Gleichungen zu studieren, und auf *arithmetischem* Wege gewonnene Erkenntnisse in *geometrische* Anschauung umzusetzen. Gleichwie der Musiker imstande ist, aus dem bloßen Anblicke einer Partitur sich eine akustische Vorstellung von dem Eindrucke eines nie zuvor gehörten Tonstückes zu bilden, so liefert dem Mathematiker die Gleichung einer Kurve, die er nie gese-
(365) hen, ein vollkommenes Bild ihres Verlaufes. Ja noch mehr: wie dem Musiker die Partitur oft Feinheiten enthüllt, die seinem Ohre bei der Komplikation und dem raschen Wechsel der Gehöreindrücke entgehen würden, so ist die Einsicht, die der Mathematiker der Gleichung einer Kurve entnimmt, eine viel tiefere als die durch bloße Anschauung vermittelte. Denn abgesehen von der schon oben kurz hervorgehobenen, an und für sich viel größeren Präzision der *arithmetischen Darstellung* gegenüber der bloßen *Anschauung*, besitzt der Mathematiker in dem von Newton und Leibniz (1675) erfundenen *Infinitesimal-Kalkül* ein mit gleichsam mikroskopischer Schärfe arbeitendes Instrument der rechnerischen Analyse.

Diese Betrachtungen lassen sich auch leicht von der Ebene auf den *Raum* übertragen. Und ähnliche Dienste wie der *Geometrie* leistet die Einführung des *Funktions-Begriffs* der *Mechanik*. Wie *Lage*, also die *Koordinaten* eines *beweglichen* Punktes erscheinen hier als *Funktionen* einer neuen Veränderlichen, der *Zeit* (die man sich, von einem bestimmten Momente an nach irgend einer *Zeiteinheit* gemessenen, als bloße *Zahl* vorzustellen hat); und die Differentialrechnung gibt die nötigen Mittel an die Hand, um auch Begriffe, wie *Geschwindigkeit*, *Beschleunigung* analytisch zu formulieren, d. h. in Funktionsbegriffe umzusetzen. Die Auffindung von Bewegungsgesetzen wird auf diese Weise wieder auf das Stadium gewisser Funktionalbeziehungen (Integration von Differentialgleichungen), also auf *„Analysis“* zurückgeführt.

Für Schopenhauer, nach dessen Meinung *„die Mathematik, wie sie von* Eukleides *als Wissenschaft aufgestellt wurde, bis auf den heutigen Tag geblieben ist“*[15], existiert das alles nicht. „Rechnungen“, sagt er[16], „haben bloß Wert für die Praxis, nicht für die Theorie. Sogar kann man sagen, *wo das Rechnen anfängt, hört das Verstehen auf*. Denn der mit Zahlen beschäftigte Kopf ist, während er rechnet, dem kausalen Zusammenhang des physischen Hergangs gänzlich entfremdet: er steckt in lauter abstrakten Zahlbegriffen. Das Resultat besagt nie mehr als *Wieviel*, nie *Was*.“

Und an einer anderen Stelle[17]: „Sie hören nicht auf, die Zuverlässigkeit und Gewißheit der Mathematik zu rühmen. Aber was hilft es mir, noch so gewiß und zuverlässig etwas zu wissen, daran mir gar nichts gelegen ist — das *Wieviel*.“

Ich hoffe, die zuvor gegebenen, freilich recht unvollkommenen Andeutungen

[15] Welt als Wille etc., I, § 15 = Werke II, S. 82.

[16] Über die vierfache Wurzel etc. = Werke I, S. 77. Eine Variante der im Text zitierten Stelle: Parerga II § 35. Fußnote = Werke VI, S. 52, 53.

[17] Nachlaß, herausg, von Frauenstaedt, S. 329.

werden immerhin erkennen lassenn, daß die auf dem Funktionsbegriff aufgebaute *Analysis* eben *nicht* bloß auf die Frage *Wieviel*, sondern ganz wesentlich auf die Frage *Was* antwortet.[18] Sie zeigt (wenn wir des leichteren Verständnisses halber von der reinen *Funktionslehre* absehend, uns auf deren *Anwendungen* beschränken) z. B. nicht nur, wie man etwa die *Länge* eines Kurvenbogens, den (366)
Inhalt eines irgendwie begrenzten Flächenstückes berechnet, sondern sie gibt Auskunft über die *allgemeinen Eigenschaften* und *Lagenverhältnisse* geometrischer Gebilde. Sie erfindet dem Astronomen und Physiker nicht bloß die Formeln zur Berechnung irgendwelcher Entfernungen, Zeiten, Geschwindigkeiten, physikalischen Konstanten; sie verschafft ihm vielmehr Einsicht in die Gesetze der Bewegungsvorgänge, lehrt ihn aus gewonnenen Erfahrungen zukünftige voraussagen und liefert ihm die Hilfsmittel zu naturwissenschaftlicher Erkenntnis, d. h. zur Zurückführung ganzer Gruppen verschiedener oft äußerst heterogener Erscheinungen auf ein Minimum einfacher Grundgesetze.

Daß der Mathematiker, *solange er rechnet*, dem kausalen Zusammenhange eines Vorganges mehr oder weniger entfremdet ist, darf zugegeben werden: liegt doch gerade darin die erstaunliche Kraft der Analysis, daß die ihr eigentümliche Zeichensprache gestattet, verwickelte Gedankenreihen durch einfache Zeichenoperationen zu ersetzen, ohne daß derjenige, welcher sich ihrer zu bedienen versteht, genötigt ist, den gedanklichen Inhalt dieser Operationen immer wieder in alten Einzelheiten nachzuprüfen. Es wird doch auch niemandem einfallen, allemal, wenn ihm eine tadellose Reichsbanknote in Zahlung gegeben wird, nach Berlin zu reisen, um sich zu überzeugen, ob die Reichsbank-Hauptkasse ihm, wie geschrieben steht, den Betrag bar ausbezahlt. Wesentlich ist eben nur, daß jede analytische Zeichenoperation in ihrer Anwendung auf Größenbeziehungen einen bestimmten Gedankeninhalt repräsentiert und daß zwar nicht bloß „Rechnen“ an sich, d. h. das mechanische Operieren mit gewissen Symbolen, wohl aber die Auflösung jener Operationen in ihren Gedankeninhalt auch wirkliche Einsicht in das Zustandekommen des Endergebnisses verschafft. Es wäre nicht schwierig, das an einfacheren Fällen vollständig durchzuführen. Andrerseits soll nicht geleugnet weiden, daß mit zunehmender Komplikation der Probleme die Schwierigkeit und Weitläufigkeit der gedanklichen Analyse ins Ungemessene wächst. Das Gebiet, über welches die Sprache der Analysis ihre Macht erstreckt, ist zwar ein relativ begrenztes: doch innerhalb desselben ist sie der gewöhnlichen Sprache so unendlich überlegen, daß diese schon nach wenigen Schritten es aufgeben muß, ihr bis ans Ziel zu folgen. Der Mathematiker aber, der in jener wunderbar kondensierten Sprache zu *denken* versteht, ist vom mechanischen Rechner himmelweit verschieden.

Es kann nach dem bisher Gesagten nicht wundernehmen. daß SCHOPEN-

[18]Hieran wäre noch generell zu bemerken, daß manches, das unsere Sinne als ein *„Was“* empfinden, in Wahrheit lediglich anf einem *„Wieviel“* beruht; mit anderen Worten, daß Unterschiede, die uns *subjektiv* als *qualitative* erscheinen, *objektiv* nur *quantitative* sind, z. B. *Tonhöhe* = Schwingungszahl der Luftwellen; *Klangfarbe* = Anzahl and Intensität der dem Grundtone beigemischten Obertöne; *Farbe* = Schwingungszahl der Lichtwellen bezw. Mischungsverhältnis von Lichtstrahlen verschiedener Schwingungszahl.

HAUER von dem allgemeinen Bildungswert der Mathematik eine überaus geringe Meinung hat. Im Anschlusse an eine Abhandlung des schottischen Philosophen HAMILTON[19], auf die wir noch zurückkommen werden, gelangt er zu dem folgenden, für die Mathematik nicht eben schmeichelhaften Endergebnis[20]: „Der
(367) einzige unmittelbare Nutzen, welcher der Mathematik gelassen wird, ist, daß sie unstäte und flatterhafte Köpfe gewöhnen kann, ihre Aufmerksamkeit zu fixieren. Sogar CARTESIUS, der doch selbst als Mathematiker berühmt war, urteilt ebenso über die Mathematik. In der Vie de Descartes par Baillet 1693 heißt es. Liv. II, ch. 6, p. 54: Seine eigene Erfahrung hatte ihn von dem geringen Nutzen der Mathematik überzeugt, zumal wenn man sie nur wegen ihrer selbst treibt. . . . Nichts erschien ihm zweckloser, als mit bloßen Zahlen und eingebildeten Figuren sich zu beschäftigen u. s. f.“[21]

Ich kann nicht verhehlen, daß ein so vernichtendes Urteil gerade aus dem Munde eines bahnbrechenden Mathematikers und auch sonst so vielseitigen und tiefen Denkers wie DESCARTES seinerzeit einen großen Eindruck auf mich machte. Es war mir daher ein wahrer Trost, als ich gelegentlich entdeckte, daß auch dieses SCHOPENHAUERsche Zitat auf einer Fälschung beruht. Durch Verstümmelung des Zusammenhanges hat es SCHOPENHAUER wahrhaftig fertig gebracht, den wahren Sinn von DESCARTES' Urteil in das vollkommene Gegenteil zu verwandeln. *Zwischen* den beiden von SCHOPENHAUER zitierten Sätzen steht in BAILLETS DESCARTES-Biographie die Bemerknng, daß zu einer gewissen Zeit, nämlich 1623, DESCARTES aufhörte, sich mit Mathematik zu beschäftigen.[22] Zur Motivie-
(368) rung dieser Tatsache folgt dann der zweite von SCHOPENHAUER angeführte Satz: „Nichts erschien ihm zweckloser, als mit bloßen Zahlen und eingebildeten Figuren sich zu beschäftigen“, aber mit dem von SCHOPENHAUER unterdrückten Zusatze: *„ohne seine Blicke weiter zu richten“*, einer Einschränkung, durch welche jener Hauptsatz schon an und für sich eine ganz andere Bedeutung bekommt. Sodann, nach einer Bemerkung des Inhalts, daß DESCARTES die mathematischen Beweise — wohl gemerkt die mathematischen Beweise jener Zeit — *oberflächlich* und *unzulänglich* fand, heißt es weiter: „Aber man darf sagen, daß er das Spezialstudium der Arithmetik und Geometrie nur aufgab, um sich ganz der Beschäftigung mit jener allgemeinen, aber wahren und unfehlbaren Wissenschaft hinzugeben, die von den Griechen scharfsinnig *Mathesis* (d. h. „Wissenschaft“ überhaupt) genannt wurde, und die alle mathematischen Disziplinen als Teile enthält. Er be-

[19] WILLIAM HAMILTON (1788–1856), seit 1836 Professor der Logik und Metaphysik an der Universität Edinburg. Die fragliche Abhandlung in Form einer Rezension der WHEWELLschen Schrift: „Thoughts on the study of mathematics as part of a liberal education“ (1836) erschien zunächst anonym in der EDINBURGH REVIEW, Vol. 62 (1836), p. 409–455; später in einer Sammlung von Abhandlungen des genannten Verfassers. Deutsche Übersetznug (gleicfalls anonym) unter dem Titel: „Über den Wert und Unwert der Mathematik“ (Kassel 1836).

[20] Welt als Willee etc., II, § 13 = Werke III, S 144.

[21] Wörtliche Übersetzung des von SCHOPENHAUER in der Ursprache zitierten französischen Originals.

[22] Voller Korrektheit zuliebe teile ich die ganze fragliche Stelle aus BAILLETS *Vie de Descartes* (nach der von SCHOPENHAUER benutzten, abgekürzten Ausgabe von 1693) hier mit. Siehe Anhang B.

hauptete, daß diese Spezialkenntnisse sich mit Verhältnissen, Proportionen und Maßbeziehungen beschäftigen müßten, wenn sie den Namen Mathematik verdienen sollten. Und er schloß daraus, daß es eine allgemeine Wissenschaft gebe, zur Aufklärung aller Fragen, die man in bezug auf Verhältnisse, Proportionen und Maßbeziehungen stellen könnte, sofern man diese als losgelöst von jeder Materie betrachtet; und daß diese allgemeine Wissenschaft, mit vollem Rechte den Namen *Mathesis* oder *Allgemeine Mathematik* tragen dürfte, weil sie alles in sich enthält, was innerhalb unserer sonstigen Kenntnisse den Namen Wissenschaft und Mathematik verdient.

Hierin liegt die Lösung der 8ehwierigkeit, welche man darin finden müßte, anzunehmen, daß DESCARTES gänzlich auf die Mathematik verzichtet haben sollte — zu einer Zeit, wo es ihm nicht mehr frei stand, darin unwissend zu sein.“

Mit dieser auf das Jahr 1623 bezüglichen Aussage vergleiche man nun die Tatsache, daß DESCARTES im Jahre 1637 seine berühmte *Geometrie* publizierte, jenes Wert, welches eben die früher erwähnten Fundamente der analytischen Geometrie enthält und eine der wichtigsten Grundlagen unserer modernen Mathematik bildet. Wie sehr DESCARTES der Neuheit und Tragweite seiner Erfindung sich bewußt war, beweist folgende Stelle aus einem seiner Briefe (an Pater MERSENNE)[23] „Es ist mir recht peinlich, mich selbst loben zu müssen. Aber da nur wenige Leute fähig sind, meine Geometrie zu verstehen, und da Sie mich danach fragen, was ich von ihr halte, so scheint es mir angemessen. Ihnen zu sagen: *Sie ist genau so, daß ich nichts mehr wünsche.* In meiner *Dioptrik* und der Schrift über die *Meteore* habe ich wohl den Leser zu überzeugen versucht, daß meine Methode besser sei als die bisher übliche; aber ich behaupte, durch meine *Geometrie* das wirklich *bewiesen* zu haben.“ (369)

Und nachdem er hervorgehoben, daß die Tragweite seiner Methode alles frühere weit übertreffe. fügt er nach Erwähnung der hauptsächlichsten zeitgenössischen Produktionen hinzu: „Keiner dieser Modernen hat etwas zustande gebracht, was nicht schon die Alten gekannt haben.“[24]

Überhaupt richtet sich alles, was er gelegentlich an der Mathematik auszusetzen *scheint*, niemals gegen diese selbst, sondern immer nur gegen ihre mangelhafte Behandlung. *Arithmetik* und *Geometrie* erklärt er ausdrücklich für die *einzigen* Wissenschaften, die nichts Falsches oder Ungewisses enthalten[25]: nur an den *Au-*

[23] DESCARTES, Lettres (Paris 1667), T. III, p. 427.

[24] Dieser Vorwurf erscheint übrigens nicht ganz berechtigt gegenüber der von DESCARTES a. a. O. auch erwähnten FERMATschen Abhandlung: *„De Maximis et Minimis“* (abgedruckt in P. DE FERMAT, *Varia opera mathematica*, Tolosae 1679, S. 63–73: jedoch schon aus dem Jahre 1629 stammend, wie ein Brief an ROBERVAL vom 29. September 1636 beweist, der gleichfalls in den Op. math. S. 136 sich abgedruckt findet). — FERMATS Grundlagen der analvtisichen Geometrie sind enthalten in der Abhandlung: *„Ad locos planos et solidos isagoge“* (Op. math S. 1–11); die Zeit der Abfassung ist nicht genau bekannt.

[25] Ähnlich äußert sich zwar auch SCHOPENHAUER über die *Arithmetik* (Vierf. Wurzel des Satzes etc., § 46 = Werke, I, S. 151), wie er auch in der *„Mathematik in jeder Hinsicht Wissenschaft“* erblickt (Welt als Wille etc., I, § 14 = Werke, II, S. 75) Nur verhindert ihn leider seine völlige Unkenntnis jener Wissenschaft, sie auch richtig zu schätzen.

toren, die sich damit befaßt hätten, sei mancherlei auszusetzen und nur *sie* treffe die Schuld, wenn gerade viele gut beanlagte Geister diese Wissenschaften als leere und kindliche Spielereien verachtet oder nach wenigen Anfangsversuchen wieder aufgegeben hätten.[26]

Daß SCHOPENHAUER trotz alledem gewagt hat, diesen großen Mathematiker als einen seiner Eideshelfer für den Unwert der Mathematik zu zitieren, muß nach dem Gesagten als eine unerhörte und nichtswürdige Geschichtsfälschung bezeichnet werden.

Charakteristisch für das unglaublich niedrige Niveau, auf welches SCHOPENHAUER bei seinem Feldzuge gegen die Mathematik herabsteigt, ist der Umstand, daß er die oben erwähnte HAMILTONsche Abhandlung als „eine sehr gründliche und kenntnisreiche“ dringend empfiehlt. Das Ergebnis derselben, nämlich, daß die Mathematik der allgemeinen Ausbildung des Geistes keineswegs förderlich, ja sogar entschieden hinderlich sei, werde *„nicht nur durch gründliche dianoiologische Untersuchungen der mathematischen Geistestätigkeit dargetan, sondern auch durch eine sehr gelehrte Anhäufung von Beispielen und Autoritäten befestigt.“* — Ich kann es mir, um den Geist der so dringend empfohlenen Schrift zu kennzeichnen, nicht versagen, einen großen Teil jener *„Autoritäten“* wenigstens
(370) zu nennen: ARISTO VON CHIOS; PHILOPONUS; FRACASTORIUS; KLUMPP; KENELM DIGBY; SORBIÈRE; POIRET; BUDDEUS; BARBEYRAC; SALAT; KIRWAN: MONBODDO; GUNDLING u. s. f. Ich muß zu meiner Schande gestehen, daß ich vor der Lektüre der HAMILTONschen Abhandlung keine einzige dieser glänzenden Autoritäten auch nur dem Namen nach kannte; zu meiner Entschuldigung dient vielleicht der Umstand, daß ich einzelne von ihnen sogar nicht einmal a posteriori in den Adreßbüchern der Wissenschaft ausfindig machen konnte. Freilich wird auch eine Anzahl bekannterer Namen ins Treffen geführt: zunächst natürlich, wie es für einem gründlichen Philosophen sich ziemt, die Vor-Euklidiker SOKRATES, PLATO, ARISTOTELES; dann CICERO, SENECA. PLINIUS; ALBERTUS MAGNUS; der Mystiker and Kabbalist PICO VON MIRANDULA; der Dichter COLERIDGE; der Historiker GIBBON; Frau v. STAËL; der Memoirenschriftsteller WALPOLE; die Philologen WOLF und BERNHARDI u. s. f. — lauter Leute, die keinesfalls durch ein Übermaß mathematischer Kenntnisse daran verhindert waren, über den Wert der Mathematik sich ein maßgebendes Urteil zu bilden. Als besonders schwerwiegend erscheinen dann noch der hl. AUGUSTINUS, der die Mathematik „als von Gott abwendend“, der hl. HIERONYMUS, der sie als „nicht die Frömmigkeit lehrend“ erwähnt, während der hl. AMBROSIUS erklärt: „Sich mit Astronomie und Geometrie beschäftigen, heiße die Sache der Erlösung verlassen und die des Irrtums ergreifen.“ Fast noch Schlimmeres freilich läßt uns HAMILTON durch den Mund des Mystikers POIRET, „eines der tiefsten Denker seiner Zeit“, vernehmen: „Der mathematische Genius pflegt die Gemüter seiner allzu heftigen Anhänger mit den bösartigsten Neigungen zu erfüllen. Denn er infiziert sie mit Fatalismus, religiöser Gleichgültigkeit, Unglauben, Roheit und einem nahezu unheilbaren Hochmut.“ — Sapienti sat! Und ferne sei es von mir, den Frankfurter Philosophen um solche Bundesgenossen beneiden zu wollen.

[26] La vie de Descartes, Gr. Ausgabe von 1691, II S. 481.

Wenn HAMILTON der Mathematik vorwirft[27], daß ihr intensives Studium den Geist für anderweitige Betätigung, wie sie z. B. die Philosophie und das Leben erfordern, unfähig macht, so meine ich, der erste Teil dieses Vorwurfs dürfte dahin zu berichtigen sein, daß allerdings die Mathematiker für nebelhafte und haltlose metaphysische Spekulationen wenig Sinn und Neigung zu besitzen pflegen. Und wenn sie es demnach zumeist für nützlicher hielten, mathematische Werte zu schaffen, statt den Wust blühenden Unsinns, den zahlreiche Metaphysiker im Laufe der Jahrhunderte angehäuft haben, vermehren zu helfen, so kann ich darin allenfalls nur ein Verdienst, sicherlich aber kein Zeichen eines geistigen Defektes erblicken. Andrerseits genügt es wohl, die Namen DESCARTES und LEIBNIZ zu nennen, um nachzuweisen, daß führende Mathematiker auch führende Philosophen sein können.

Wird aber den Mathematikern nachgesagt, daß ihre Wissenschaft sie den Forderungen des praktischen Lebens entfremde, so trifft dieser Vorwurf, soweit er berechtigt ist, die *Mathematiker* nicht mehr als die *Gelehrten* überhaupt. Um sich zu überzeugen, daß die *Mathematik an sich* hieran völlig unschuldig ist, braucht man nur den Blick zu unseren westlichen Nachbarn zu wenden, bei denen seit dem 18. Jahrhundert gerade die *Mathematiker* eine ganz hervorragende Rolle im öffentlichen Leben gespielt haben, nicht etwa bloße Auch-Mathematiker, sondern zum Teil produktive mathematische Geister hohen und höchsten Ranges. Um nur (371)
die bedeutendsten zu nennen: GASPARD MONGE (1746 bis 1818), den Schöpfer der Géométrie déskriptive (1799) und Verfasser der Applications de l'analyse à la géométrie (1801), zweier klassischer Werke, deren Einfluß bis auf die heutige Zeit reicht, finden wir 1792 als Marineminister; im folgenden Jahre leistet er geradezu Märchenhaftes in der Herbeischaffung von Kriegsmaterial für die Landesverteidigung, gründet 1794 die Ecole polytechnique, begleitet 1798 seinen Freund NAPOLEON BONAPARTE nach Ägypten, führt dort ein kriegerisches, an Gefahren und Entbehrungen überreiches Leben und ist dabei zugleich die Seele der wissenschaftlichen Untersuchungen zur Erforschung der ägyptischen Altertümer. LAZARE CARNOT (1753–1823), des Konvents und später BONAPARTES genialer Kriegsminister, schreibt mitten in seiner erfolgreichen politischen Wirksamkeit seine vielgenannten Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal und seine die Entwicklung der neueren Geometrie vorbereitende Géométrie de position. JOSEPH FOURIER (1768 bis 1830), der unsterbliche Schöpfer der Théorie analytique de la chaleur, gehörte auch zu den Teilnehmern der NAPOLEONischen Expedition nach Ägypten. Als Kommissär beim ägyptischen Divan entfaltet er eine geradezu glänzende diplomatische Tätigkeit, unterdrückt mit höchster Umsicht und Unerschrockenheit einen Aufstand der Bewohner von Kairo, publiziert bei alledem eine Anzahl mathematischer Abhandlungen und ist zugleich auch eifriger Mitarbeiter an der archäologischen Description de l'Egypte. Später (1802) wird er Präfekt des Isère-Departements und vollbringt die lange angestrebte Austrocknung der Sümpfe von Bourgoin.[28] FRANÇOIS ARAGO (1786–1853), der Erbe

[27] A. a. O. S. 424 = Übers.. S. 28.

[28] Sehr ausführliche und interessante Biographien von MONGE, CARNOT und FOURIER aus der Feder ARAGOS findet man in dessen *Oeuvres complètes* (Paris 1854–1862), T. I, II auch

von MONGES geometrischem Lehrstuhl, bekannter durch seine hervorragenden physikalischen und astronomischen Leistungen, seit 1830 beständiger Sekretär der Akademie und als solcher „unerreicht und ohnegleichen“, war zugleich unter dem Juli-Königtum als Deputierter der gefürchtete Redner der Opposition. Bei der provisorischen Regierung von 1848 finden wir ihn als Minister des Krieges und der Marine, später als energisches und durch persönliche Tapferkeit ausgezeichnetes Mitglied der Exekutivkommission. JEAN VICTOR PONCELET[29] macht 1812 als Leutnant den russischen Feldzug mit, wird in der Schlacht bei Krasnoi (18. November 1812) verwundet und gefangen, nach Saratow an der Wolga geschleppt und entwirft dort in der Gefangenschaft, von allen wissenschaftlichen Hilfsmitteln entblößt, die Grundlagen seines epochemachenden Werkes: Traité des proprietés projectives des figures, das ihm, als dem Begründer der projektiven Geometrie, einen hervorragenden Platz unter den Geometern aller Zeiten sichert. Nach Frankreich zurückgekehrt (1814), tritt er wieder in die Armee ein, entwickelt später, trotz gleichzeitiger Fortsetzung seiner rein geometrischen Ar-
(372) beiten, eine umfangreiche Tätigkeit als Genie-Offizier, wird 1848 General, in welcher Eigenschaft er noch 1852 die vereinigten Nationalgarden kommandiert. Schließlich noch **einen Namen**, der zwar nicht die wissenschaftliche Bedeutung der bisher genannten, dafür aber den Vorzug der Aktualität besitzt: FREYCINET, welcher als Minister und Ministerpräsident durch seine verständige and friedliche Politik sich auch in Deutschland einen guten Namen gemacht hat, ist Mathematiker und ein keineswegs unbedeutender Mathematiker: er hat außer einem zweibändigen Traité de mécanique rationelle zwei beachtenswerte Bücher über die philosophischen Grundlagen der Infinitesimal-Analysis und der Mechanik publiziert.[30] Die vorstehenden Beispiele, die sich leicht vermehren ließen, dürften für unseren Zweck genügen Wenn in Deutschland die Göttin Justitia nicht die leidige Gewohnheit hätte, die Ministerportefeuilles nur ihren eigenen Sprößlingen in die Wiege zu legen, wer weiß, ob nicht schon mancher deutsche Mathematiker einen trefflichen Minister abgegeben hätte!

Ohne auf weitere Einzelheiten der HAMILTONschen Abhandlung einzugehen, möchte ich nur, an eine besonders prägnante und auf den ersten Blick verblüffend annehmbar erscheinende Stelle anknüpfend, nunmehr versuchen, festzustellen, welchen Bildungswert wir der Mathematik etwa beimessen können, soweit sie als Lehrgegenstand der höheren Schulen, insbesondere der humanistischen Gymnasien, in Betracht kommt. Selbst ihre Verächter pflegen in diesem Zusammenhange meist zuzugestehen, daß sie als eine Art praktische Schule der Logik vor allen anderen Wissenschaften geeignet sei, die *formale* Verstandesbildung wesentlich zu fördern: in der Tat verdankte sie ja zunächst hauptsächlich diesem Umstande ihre Aufnahme in die Lehrpläne der Gelehrtenschulen. Hiergegen bemerkt

deutsch von W. G. HANKEL, Leipzig 1854–1862, Bd. I, II).

[29] Vgl. die Vorrede zum ersten Bande des *„Traité des propriétés projectives des figures“* (1892, auch abgedruckt in der zweiten Auflage von 1865); ferner die Vorreden zu den zwei Banden: „Applications d'analyse et de géométrie etc.“ (Paris 1862–1864).

[30] CHARLES DE FREYCINET, De l'analyse infinitésimale. Etude sur la métaphysique du haut calcul. Paris 1860 (2. éd. 1881). — Essais sur la Philosophie des Sciences: Analyse, Mécanique. Paris 1896 (2. éd. 1900).

nun Hamilton[31]: „Die Kunst, richtig zu schließen, wird sicherlich nicht durch ein Verfahren gelehrt, bei welchem es kein *unrichtiges* Schließen gibt. Durch Vorübung in einem Bassin voll *Quecksilber* lernen wir nicht im *Wasser* schwimmen, Wenn also die *Mathematik* empfohlen wird, um unserer natürlichen Neigung zum Irrtum entgegenzuwirken, warum schlägt man nicht auch das *Quecksilber* vor, um unsere natürliche Neigung zum Untersinken zu beseitigen?“

Nun, darauf wäre zu erwidern: Man schlagt es in Wahrheit nicht bloß vor, sondern man wendet es sogar konsequent an — Notabene, nachdem man es von den ihm anhaftenden metaphysischen Schlacken gründlich gereinigt hat. Der Metaphysiker Hamilton übersieht nämlich, daß das spezifische Gewicht des Quecksilbers dreizehnmal so groß ist als das des Menschen, so daß der letztere überhaupt nicht in der Lage wäre, tief genug einzutauchen, um darin Schwimmbewegungen auszuführen Und das wäre doch erforderlich, wenn das angewendete Bild überhaupt einen Sinn haben soll — denn *logische* Schwimmbewegungen, d. h. Schlüsse werden ja wirklich in der Mathematik ausgeführt. Hamilton will also in Wahrheit nur sagen, der Mensch könne nicht die Fertigkeit erwerben, im *Wasser* zu schwimmen, wenn er seine Übungen in einer Flüssigkeit anstellt, die spezifisch so schwer sei, daß er darin *nicht untersinken könne.* Und nun sage ich: der Kulturmensch pflegt wirklich in einem solchen Quasi-Quecksilber seine Schwimmstudien zu machen, nachdem Archimedes, der glücklicherweise ein (373)
Mathematiker und kein Metaphysiker war, ihn gelehrt hat, wie er sich eine solche Flüssigkeit aus gewöhnlichem Wasser in der denkbar einfachsten und billigsten Weise herstellen kann; nämlich, indem er, statt die Flüssigkeit spezifisch *schwerer* zu machen, sich selbst in ein spezifisch *leichteres* Wesen verwandelt Er bindet sich eben einfach einen Schwimmgürtel um und erlernt sodann die *Technik* des Schwimmens, nicht *obgleich*, sondern gerade *weil* er nunmehr gegen das Untersinken gesichert ist. Und wenn er dann diese Technik vollständig beherrscht, so hält sie ihn schließlich auch ohne Schwimmgürtel über Wasser, zumal wenn durch allmähliche Abschwächung seiner Wirkung er sich nach and nach davon entwöhnt. In ganz analoger Weise wirkt auch ein richtig geleiteter mathematischer Schulunterricht. Nur die Anfangsgründe der Geometrie sind von der Art, daß sie, bei genügender Präzisierung der zugrunde gelegten Axiome, die Möglichkeit logischer Irrtümer so ziemlich ausschließen. Das gilt aber nicht einmal in gleichem Maße von den Elementen der Arithmetik und Algebra. Und wenn nun gar der Schüler beginnt, die erlernten Sätze zur Lösung von geometrischen und algebraisch-geometrischen Aufgaben zu verwerten, geometrische und algebraische Erkenntnisse auf physikalische Probleme anzuwenden, konkrete Fragen mannigfacher Art in die abstrakte Form der mathematischen Zeichensprache, z. B. in algebraische Gleichungen, zu übersetzen, so wird er zu Irrtümern und Fehlschlüssen ausreichende Gelegenheit finden, um allmählich auch ohne Euklidischen Schwimmgürtel schwimmen zu lernen. Im übrigen schätzt man die Einwirkung der Mathematik auf die formale Verständnisbildung von vornherein viel zu niedrig ein, wenn man, wie häufig geschieht, lediglich annimmt, sie sei nur eine nützliche Übung für die Kunst, *logisch* zu *schließen*, d. h. aus *gegebenen*

[31] A. a. O. S. 427 = Übers. S. 33.

Prämissen richtige Schlußfolgerungen zu ziehen. Denn schon bei zweckmäßiger Unterweisung in den Hauptsätzen der Elementar-Geometrie besteht der bei weitem schwierigere Teil der Verstandestätigkeit *nicht* in der *Schlußbildung* selbst, sondern gerade in der *Auffindung* der zur Fortführung des Schlußverfahrens tauglichen, durch genaue Beobachtung des Sachverhaltes und geschickte Heranziehung schon erworbener Erkenntnisse zn gewinnenden *Prämissen*. Und der weitere Verlauf eines guten mathematischen Unterrichts bietet reiches Material, um den Schüler nicht bloß im richtigem Beobachten and Schließen, sondern vor allem zu *logischem* und *selbttätigem Denken* anzuleiten. Zugleich wird ihm eine unvergleichliche Gelegenheit gegeben, an scharfe und genaue Begriffsbestimmungen sich zu gewöhnen, sowie Klarheit and Präzision des *sprachlichen Ausdrucks* sich anzueignen — eine Gelegenheit, die freilich bei weitem nicht genügend ausgenützt zu werden scheint, wenigstens so weit meine bei Studenten gemachten Erfahrungen reichen. Fügt man hierzu noch die von der Geometrie, insbesondere von deren stereometrischem Teile dargebotene Übung zur Ausbildung des *Anschauungsvermögens*, so wird man die *formalen* Bildungsmöglichkeiten, welche dem mathematischen Schulunterrichte innewohnen, als überaus reichhaltige und wesentliche anerkennen müssen.

Fassen wir ferner die Mathematik, wie sie auf den Gymnasien gelehrt wird oder doch gelehrt werden sollte, dem *Inhalte* nach ins Auge, so wird man ihren Nutzen für die allgemeine geistige Ausbildung der Schüler vor allem darin zu
(374) suchen haben, daß sie unter den Lehrgegenständen der einzige ist, welcher ihnen das Beispiel einer wirklichen Wissenschaft, als eines Inbegriffs wohlerworbener and systematisch verknüpfter Erkenntnisse gibt. *Zweitens* erweist sie sich als unentbehrlich für den Unterricht in der Physik und den Elementen der Astronomie (der sogenannten mathematischem Geographie), soll dieser, statt wirkliche Einsicht auch nur in die einfacheren, physikalischen und astronomischen Erscheinungen zu verschaffen, nicht zu einer bloßen Mitteilung empirischer Tatsachen herabsinken. Und *drittens* gestattet sie zahlreiche und nützliche Anwendungen auf mannigfache Fragen des praktischen Lebens (sogenannte Textgleichungen, Zinseszins- and Rentenrechnung. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Feldmeßkunde).

Aus dem *Zusammenwirken* von *Form* und *Inhalt* der Mathematik erwächst schließlich dem Schüler die Bekanntschaft mit Methoden, welche ihn befähigen, innerhalb gewisser, wenn auch bescheidener Grenzen selbständig zu produzieren und durch eigenes Nachdenken seine Erkenntnis zu erweitern. Die mit dieser Art der Betätigung verbundene Steigerung des geistigen Kraftgefühls und das allmähliche Erwachen geistiger Selbständigkeit darf wohl als das schönste und höchste Resultat der mathematischen Erziehung bezeichnet werden.

Obschon ich von der Richtigkeit der vorstehenden Darstellungen aufs tiefste überzeugt bin, so kann ich mir nicht verhehlen, daß dieselben manches enthalten, was *sein sollte* und wohl auch *sein könnte*, aber im allgemeinen *nicht ist*. Denn es wäre abgeschmackt, leugnen zu wollen, daß bei einein großen, ja sogar bei dem größeren Teile der Schüler die Früchte des mathematischen Unterrichts recht kümmerliche sind. Man hat zur Erklärung dieser Tatsache das Märchen erfunden, daß die Fähigkeit, das mathematische Schulpensum zu bewältigen, eine ganz spezielle *mathematische* Begabung erfordere[32]; und gewisse, glücklicherweise allmählich seltener werdende Schulphilologen, namentlich aber mitleidige Eltern unternormal oder anormal begabter, oft aber auch nur schlechthin fauler Schüler haben redlich dazu beigetragen, jenem Märchen in den weitesten Kreisen Glauben zu verschaffen. Wenn zur Unterstützung dieses Glaubens häufig angeführt wird, mit der relativen Seltenheit der *mathematischen Begabung* verhalte es sich ähnlich, wie etwa bei der *musikalischen*, so kann man dieser Analogie zustimmen, aber gerade um daraus die entgegengesetzten Konsequenzen zu ziehen. Gewiß ist derjenige Grad von musikalischer Begabung, welcher erforderlich ist, um mit Erfolg sich der Musik zu widmen oder gar schaffender Musiker zu werden, ein relativ seltener. Aber ein gewisses Maß von musikalischer Begabung, welches dazu befähigt, Freude an der Musik zu empfinden und bei richtiger Anleitung auch mehr oder weniger wirkliches Verständnis dafür zu gewinnen, darf doch geradezu als *Regel* angesehen werden. Wie wollte man sonst die dominierende Rolle erklären, welche heutzutage die Musik nicht bloß innerhalb des eigentlichen Kunstlebens, sondern im gesamten Kulturleben des Volkes spielt? — So besitzt nach der Meinung aller Einsichtigen auch jeder *normal* begabte Schaler ein genügendes Maß geistiger Fähigkeiten, um dem mathematischen Unterrichte das nötige Verständnis entgegenzubringen. „Den Gedankengang eines Platonischen (375) Dialogs, einer Horazischen Epistel scharf und genau darstellen, die Idee eines Shakespearischen Dramas, den Charakter einer seiner Personen entwickeln, einer Dichtung Goethes in alle ihre Beziehungen folgen, das sind Übungen, die eine Kraft und Beweglichkeit der Intelligenz hervorzubringen geeignet sind, der auch die Schwierigkeit mathematischer und physikalischer Begriffe und Methoden nicht unüberwindlich sein wird" — sagt Friedrich Paulsen[33], freilich mit einer ganz anderen Tendenz, als die hier vorliegende: nämlich, um zu beweisen, daß die humanistischen Fächer für die logische Verstandesausbildung mindestens dasselbe leisten was die Mathematik. Nun, ohne meinerseits diese nämliche Folgerung an das obige Diktum knüpfen zu wollen, sein *Inhalt* erscheint mir in wesentlichen zutreffend, nämlich, daß Schüler, die in den humanistischen Fächern *wirklich Tüchtiges* leisten, auch für die Mathematik ausreichende Begabung haben dürften. Zugleich wird man aber zugeben müssen, daß ein ganz ansehnlicher Teil der Gymnasialabiturienten auch von all den schönen Dingen, welche Paulsen anführt, recht wenig vermag: Leute, welche es allenfalls dazu bringen, über einen gewissen Vorrat gedächtnismäßig eingeprägter Sprachkenntnisse und historischer Daten zu verfügen und nach bewährtem Rezepte, mit dem nötigen Aufwande klassischer Zitate, moralischer Gemeinplätze und patriotischer Phrasen, einen sogenannten deutschen Aufsatz anzufertigen. Für *deren* mathematische Begabung einzustehen, fühle ich mich in keiner Weise berufen.

Aber selbst, wenn man von dieser letzteren Kategorie absieht, so bleibt immerhin die Tatsache bestehen, daß gar mancher unter den besseren Schülern

[32] „Daß die Anlage zur Mathematik seltener sei als zu anderen Studien, ist bloßer Schein, der von verspäteten und vernachlässigten Anfängen herrührt" — sagt schon Herbart: Werke, herausg. von Hartenstein, Bd. 10, S. 103.

[33] Das Realgymnasium und die humanistische Bildung (Berlin 1889), S. 34.

nur notdürftige Kenntnisse in der Mathematik erwirbt, ja daß nur eine verhältnismäßig geringe Anzahl von Schülern aus dem mathematischen Schulunterrichte sichtlichen und nachhaltigen Gewinn zieht. Ich will auch nicht verschweigen, daß ein sehr angesehener mathematischer Kollege (Professor M. Pasch[34] in Gießen) zur Erklärung dieser Erscheinung die Hypothese aufgestellt hat, daß der menschlichen Natur das mathematische Denken im Grunde zuwiderlaufen müsse. Ich kann mich dieser pessimistischen Auffassung nicht anschließen und bin vielmehr geneigt, den Hauptgrund für die wenig günstigen Ergebnisse des mathematischen Schulunterrichts in seiner Unvollkommenheit zu erblicken. Daß heutzutage nicht wenige rein als Broterwerb den mathematischen Lehrerberuf ergreifen, die dazu in *keiner Weise* veranlagt sind, erwähne ich nur nebenbei. Nachdrücklich möchte ich jedoch hervorheben, daß nach meinem Dafürhalten die Ausbildung der Lehrer gerade in bezug auf denjenigen Punkt, der mir der wichtigste erscheint, nicht bloß *viel*, sondern geradezu *alles* zu wünschen übrig läßt. *Lehren* ist eine schwere *Kunst* und das Lehren der mathematischen Anfangsgründe der schwersten eine. Nun wird man ja niemals darauf rechnen dürfen, durch Unterweisung *Künstler* zu erziehen. Aber das *Können*, welches die Grundlage jeder Kunst bildet, wird doch wohl am besten durch Unterweisung erworben, ja es kann von jemandem, der nicht ein Genie oder wenigstens ein hervorragendes Talent ist, überhaupt auf keinem anderen Wege gründlich erlernt werden. In dieser Richtung bietet
(376) das Universitätsstudium dem zukünftigen Lehrer der Mathematik nicht die geringste Handhabe, was um so schwerer ins Gewicht fällt, als in keinem anderen Lehrfache die Divergenz zwischen dem Inhalt der meisten Universitätsvorlesungen and den Lehrgegenständen der Schule eine so vollständige ist, wie gerade in der Mathematik. Ich möchte diese Bemerkung nicht etwa in dem Sinne verstanden wissen, daß ich die mit jenen Universitätsvorlesungen bezweckte *höhere* wissenschaftliche Ausbildung der Lehrer für überflüssig halte: Im Gegenteil! Aber ebenso notwendig, ja noch notwendiger wäre doch eine systematische Ausbildung in der Kunst, Elementarmathematik zu lehren. Daß das in Preußen eingeführte und, wie ich höre, auch für Bayern in Aussicht genommene sogenannte Probejahr der Lehramtskandidaten diesen Zweck nicht erfüllen kann, liegt auf der Hand und wird durch die Praxis bestätigt. Überdies will mir das gewohnheitsmäßige und bewußte Experimentieren an Schülern der Unterklassen quasi in corpore vili vom ethischen Standpunkte äußerst bedenklich erscheinen.

Was in Wahrheit not täte, das sind Universitätsvorlesungen und Seminarübungen aus dem Gebiete der *mathematischen Pädagogik*, welche sich auf alle einzelnen in den Mittelschulen zu lehrenden Disziplinen zu erstrecken hätten. Inwieweit dis jetzigen Vertreter der Universitätsmathematik für einen derartigen Zuwachs an Tätigkeit etwa noch Zeit, Neigung und — worauf es offenbar ganz wesentlich ankommt, — auch praktische Schulerfahrung besitzen, entzieht sich meiner Beurteilung. Aber, ohne etwa von mir auf andere schließen zu wollen, so würde aller Wahrscheinlichkeit nach die Durchführung jenen Planes die Errichtung besonderer Lehrstühle für *mathematische Pädagogik* erfordern. Damit greift dann freilich diese ganze Erörterung in jenes Gebiet hinüber, in welchem

[34] *Über den Bildungswert der Mathematik.* Akad. Festrede (Gießen 1894), S. 7.

bekanntlich die Gemütlichkeit aufhört: sie dürfte daher in unserer für höhere Kulturzwecke so äußerst geldknappen Zeit zunächst wenig Aussicht haben, aus dem Stadium mathematischer Idealisierung heraustretend, reale Gestalt zu gewinnen.

Etwas leichter realisierbare, wenn auch nicht allzu sanguinische Hoffnungen ließen sich vielleicht an die Bemerkung knüpfen, daß die Mathematik innerhalb des Lehrplanes der bayerischen humanistischen Gymnasien noch keineswegs denjenigen Platz entnimmt, welcher erforderlich wäre, um die in ihr enthaltenen, eben geschilderten Bildungsmöglichkeiten zu voller Entwicklung zu bringen. Zwar wird man es als einen Fortschritt begrüßen müssen, daß man neuerdings an Stelle der sphärischen Trigonometrie die Elemente der *analytischen Geometrie* eingeführt hat — vorausgesetzt, daß dabei weniger auf eine möglichst große Anzahl formaler Einzelkenntnisse, als auf die Herausarbeitung des Funktionsbegriffes und seiner graphischen Darstellung, so wie auf die Herleitung der für die Naturwissenschaften unentbehrlichen Haupteigenschaften der Kegelschnitte Gewicht gelegt und durch Behandlung des Tangentenproblems, etwa an der Parabel, ein Ausblick auf die Differentialrechnung geschaffen wird. Dagegen scheint mir das *arithmetisch-algebraische* Pensum noch einer mäßigen Abrundung nach oben zu bedürfen, wenn dasselbe einigermaßen den Charakter wissenschaftlicher Geschlossenheit und den durchaus wünschenswerten Kontakt mit den unteren Grenzen der höheren Mathematik erlangen soll.[35] (Ohne hier auf Einzelheiten einzugehen[36], möchte ich nur, um jedes Mißverständnis auszuschließen, bemer- (377)
ken, daß ich mit dem Gesagten nicht etwa die Einführung der Elemente der Differentialrechnung befürworten will.) Schließlich müßte noch für etwas reichlichere, das mathematische Interesse der Schüler anregende und an sich nützliche *Anwendungen* etwas mehr Platz geschaffen werden. Diese Forderungen dürften manchem als äußerst anspruchsvoll und verwerflich erscheinen. Demgegenüber möchte ich hervorheben, daß ja die *Mathematik* auf den humanistischen Gymnasien offiziell neben Deutsch und Latein als eines der *drei Hauptfächer* gilt. Wie reimt sich hiermit die Tatsache zusammen, daß in der Oberklasse, also dort, wo der Geist der Schüler am reifsten ist oder doch sein soll, von 27 obligatorischen Wochenstunden im ganzen 4, sage *vier*, nicht etwa auf *Mathematik*, nein auf *Mathematik, Physik* und *mathematische Geographie* entfallen, also zirka ein Siebentel aller Unterrichtsstunden gegen 12 Stunden Latein und Griechisch? In der siebenten und achten Klasse gibt es allerdings je 5 Stunden Mathematik und

[35] Gerade weil das humanistische Gymnasium keine Fachschule sein soll, so müßte es doch auch diejenigen, die später Mathematik oder Physik studieren wollen, soweit fördern, daß sie im *ersten* Studiensemester mit genügendem Verständnis einer Universitätsvorlesung über Differentialrechnung folgen können. Das ist, nach den von mir gemachten Erfahrungen, bei dem jetzigen Zustande im allgemeinen nicht der Fall.

[36] Als wünschenswerte Ergänzungen würde ich etwa bezeichnen: Elemente der Kombinationslehre und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Binomischer Satz, auch für negative and gebrochene Exponenten, mit Übergang zu den Elementen der Reihenlehre, Exponentialfunktion und Logarithmus als Grenzwerte und unendliche Reihen. — Einige Hauptsätze aus der höheren Algebra: Begriff der Derivierten einer ganzen Funktion. Maxima und Minima ganzer Funktionen. Rollescher und Sturmscher Satz. Unterschied zwischen algebraischer und numerischerAuflösung algebraischer Gleichungen. Einiges über numerische Auflösung.

Physik, in der sechsten 4 Stunden (keine Physik); dagegen auf den preußischen Gymnasien, allerdings bei 28 Wochenstunden, je 4 Stunden Mathematik und 2 Stunden Physik in jeder der genannten *vier* oberen Klassen. Ich sollte meinen, es müßte zu ermöglichen sein, *ohne* Vermehrung der obligatorischen Schulstunden und ohne den Charakter des Gymnasiums, als eines *„humanistischen"* wesentlich zu beeinträchtigen, die Anzahl der Mathematik- und Physikstunden wenigstens in den *drei* oberen Klassen auf *sechs* zu erhöhen. Das könnte natürlich nur auf Kosten der klassischen Sprachen geschehen. Aber sollte wirklich die „humanistische" Seite der Bildung eine so merkliche Schädigung erleiden, wenn man sich entschlösse an der Klassikerlektüre einige Einsparungen zu machen? Von dem unechten Pathos und der geschwollenen, bis zur Widerwärtigkeit selbstgefälligen Rhetorik der *Ciceronischen* Reden dürften die Schüler schon durch Verabreichung ziemlich bescheidener Dosen einen ausreichenden Begriff bekommen, and es wäre lediglich ein Akt weiser und gerechter Ökonomie, wenn man ein reichlicheres Auskosten des Entzückens, welches ja die Latinisten beim Genusse der mehr wort- als inhaltreichen *Ciceronischen* Perioden erfahrungsgemäß empfinden sollen, dem Universitätsstudium der zukünftigen Philologen aufsparte. Und sollte wirklich die trostlos-öde Lektüre von *Ciceros* philosophischen Schriften ein so unentbehrliches Hilfsmittel allgemeiner Geistesbildung darbieten? Ja, ich kann mich sogar des ketzerischen Gedankens nicht erwehren, daß der geistige Gewinn, den jugendliche Köpfe aus der Beschäftigung mit der ermüdend weitläufigen
(378) Dialektik *Platonischer* Dialoge, trotz aller darin verborgenen Weisheit, etwa davontragen mögen, wohl wesentlich überschätzt wird; und daß das mühselige und zeitraubende Zusammenbuchstabieren *Sophokleischer* Chöre eher dazu beitragen dürfte, den Schülern die *Sophokles*-Lektüre zu verleiden, als bei ihnen wahre Liebe für den großen Tragiker zu erwecken und sein tieferes Verständnis zu fördern. Ich fürchte, daß diese Bemerkungen bei den klassischen Philologen ein mehr oder weniger allgemeines Schütteln des Kopfes hervorrufen werden. Aber gerade, weil ich ein aufrichtiger Verehrer des klassischen Altertums und, cum grano salis, auch der humanistischen Bildung bin, so hege ich die Meinung, daß die humanistischen Gymnasien noch zu gewissen Konzessionen in der angedeuteten Richtung sich entschließen sollten, auf daß sie nicht allmählich zu bloßen Fachschulen für *Philologen, Theologen* und (wer weiß wie lange noch?) *Juristen* herabsinken.

Habe ich mich bei der *Schulmathematik* etwas länger aufgehalten, weil die Frage nach ihrer angemessenen Wertschätzung noch immer viel umstritten wird and zugleich auch weitere Kreise lebhafter zu interessieren pflegt, so kann ich bezüglich des Nutzens der *Mathematik als Hilfswissenschaft* für naturwissenschaftliche Erkenntnis und verschiedenartige praktische Zwecke mich um so kürzer fassen, als dieser heutzutage kaum mehr ernstlich in Zweifel gezogen wird. Auch würde es die Grenzen dieses Vortrages weit überschreiten, wollte ich nur versuchen, in äußerster Kürze auseinanderzusetzen, was *Physik, Astronomie, Geodäsie, Geophysik* und *Ingenieur-Wissenschaften*, als die Hauptanwendungsgebiete der Mathematik, ihr verdanken. Wird doch selbst der Mathematiker, der, wie ich, den Anwendungen ferner steht, von Staunen erfüllt, wenn er beispielsweise aus der im Erscheinen begriffenen Encyklopädie der mathematischen

Wissenschaften (einschließlich der Disposition der noch nicht erschienenen Teile) einen Überblick gewinnt über die ungeheure Anzahl und Mannigfaltigkeit den genannten Wissenschaften angehöriger Einzelgebiete, welche die Dienste der Mathematik in Anspruch nehmen. Damit ist indessen ihre Anwendungsfähigkeit noch bei weitem nicht erschöpft: zeigt sich doch bei allen Disziplinen, in denen Quantitäten eine Rolle spielen, das Bestreben, sich der mathematischen Methoden zu bemächtigen — freilich mit verschiedenem Erfolge. Wir können heute nur darüber lächeln, wenn wir Kunde empfangen von einer „Nova medicinae methodus ex mathematica ratione morbos curandi“, die ein gewisser *Virdingus* 1532 veröffentlicht hat.[37] Auch *„Herrn George Sarganecks Versuch einer Anwendung der Mathematik in dem Artikel von der Größe der Sünden-Schulden“* (1749)[38] dürfte wohl nicht zu den besonders glücklichen Anwendungen der Mathematik gehören. Wenn aber selbst ein so enthusiastischer Verehrer der Mathematik, wie *Auguste Comte*[39], es für unwahrscheinlich gehalten hat, daß Chemie, Physiologie und Sozialwissenschaft zu Gegenständen mathematischer Behandlung (379)
werden könnten[40], so hat ihm die Entwicklung jener Wissenschaften unrecht gegeben: Die *Chemie* ist mit wachsendem Erfolge bestrebt, ihre Fundamente auf mathematisch-physikalischen Betrachtungen aufzubauen[41]; in die *Physiologie* haben mathematische Methoden erfolgreichen Eingang gefunden[42]; und den Versuchen, auch die *Nationalökonomie* teilweise auf mathematische Grundlage zu stellen[43], wird man zum mindesten ein theoretisches Interesse nicht absprechen können, mag auch ihre praktische Bedeutung zweifelhaft erscheinen. Unbestritten ist hingegen der Nutzen der Mathematik auf den Nachbargebieten der *Statistik*[44] und des *Versicherungswesens.*[45]

Bei Gelegenheit der Erwähnung *Comtes* scheint es vielleicht nicht uninteressant, an eine andere, seiner Vorausssagen zu erinnern, welche in noch viel drastischerer Weise durch die Macht der Tatsachen widerlegt worden ist und die ein überaus lehrreiches Beispiel dafür gibt, wie vorsichtig man in den ex-

---

[37] *Nova medicinae methodus* nunc primum et condita et aedita ex mathematica ratione morbos curandi. Joanne Hasfurto Virdungo, medico et astrologo doctissimo autore. Ettelingae 1532 — Natürlich läuft diese ganze mathematische Kuriermethode auf eine Anwendung der Astrologie hinaus.

[38] Als Anhang erschienen zu: Johann Jakob Schmidt, Biblischer Mathematikus. 2. Auflage, Züllichau 1749.

[39] Cours de philosophie positive (Paris 1830–1848), T. I, S. 114: „C’est la science mathématiqne qui doit constituer le véritable point de départ de toute éducation scientique rationelle, soit génerale, soit spéciale.“

[40] A. a. O. T. III S. 414–416.

[41] Vgl. das ausführliche Lehrbuch über: *Theoretische Chemie* von W. Nernst (4. Auflage, Stuttgart 1903).

[42] Hierhin gehören namentlich die Arbeiten über: *Physiologische Mechanik* (Mechanik der Gliederbewegung, des Blutumlaufes, der Atmung, etc), *Physiologische Optik* und *Akustik*.

[43] Eine kritische Übersicht der einschlägigen Literatur gibt V. Pareto in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. I, S. 1094–1120.

[44] Vgl. den Artikel von L. von Bortkiewicz in der Enzykl. d. mathem. Wissensch., Bd. I, S. 821–851.

[45] Ebendaselbst S. 852–917: G. Bohlmann, Lebensversicherungs-Mathematik. — Eine populäre Darstellung des Gebietes gibt: M. Cantor, Politische Arithmetik. Leipzig 1903.

akten Wissenschaften mit negativen Prophezeiungen sein muß. „Wir begreifen die Möglichkeit, Gestalt, Entfernung, Größe und Bewegungen der Gestirne zu bestimmen; aber niemals werden wir imstande sein, durch irgend ein Mittel ihre chemische Zusammensetzung zu studieren" — so schreibt *Comte*[46] im Jahre 1835; nur 24 Jahre später entdeckten *Kirchhoff* und *Bunsen* die Spektralanalyse[47], durch welche das für unmöglich Gehaltene zur Wirklichkeit wird. Und, was ich in dem hier vorliegenden Zusammenhange noch ganz besonders hervorheben möchte: die endgültige Berechtigung dazu, die Resultate von Spektralbeobachtungen auf die chemische Analyse der Sonnenatmosphäre und der Gestirne anzuwenden, beruht gerade auf den *mathematisch*-physikalischen Untersuchungen *Kirchhoffs.*[48]

Herbarts Versuch, auch die *Psychologie* mathematisch zu behandeln[49], darf zwar als mißlungen gelten, insofern er die fehlenden experimentellen Grundlagen durch Hypothesen zu ersetzen suchte: immerhin hat er die *Möglichkeit* dargetan, Mathematik auf Psychologie anzuwenden.[50] Der von Fechner betretene Weg
(380) des psychophysischen Experiments und die Weiterbildung der experimentellen Methoden, namentlich durch Wilhelm Wundt, hat dann in der Tat die nötigen Vorbedingungen geschaffen, um bestimmte Kategorien psychologischer Probleme einer exakten mathematischen Behandlung zugänglich zu machen[51].

Greift hiermit die Mathematik in das Gebiet der *Philosophie* hinüber, so wird man diesen Erfolg nicht allzu hoch anschlagen dürfen: es liegt in der Natur der Sache, daß die direkte Anwendungsfähigkeit der Mathematik hier immer eine eng begrenzte bleiben wird, auch wenn man zu den „philosophischen" Anwendungen der Mathematik noch den von George Boole begründeten *Logik-Kalkül*[52] rechnet.

Viel wesentlicher ist, daß die Bestrebungen der Mathematiker, namentlich der *modernen* Mathematiker, die *Grundlagen* ihrer Wissenschaft zu vertiefen, die Begriffe der Zahl, des Raumes, der Zeit und des Unendlichen zu erforschen und zu fixieren, zugleich einen wertvollen Zuwachs an *philosophischem* Wissen repräsentieren. Auch wird man nicht vergessen dürfen, daß die moderne Weltanschauung durchaus auf dem Boden der exakten mathematisch-naturwissenschaftlichen Forschung erwachsen ist, und daß die Philosophie diesem Einflusse nie mehr sich wird entziehen können. Was schon Leonardo da Vinci, eines jener merkwürdigen

[46]A. a. O. T. II S. 8.

[47]Grundlegende Publikation: G. Kirchhoff, Über die Frauenhoferschen Linien. Berl. Monatsber. 1859, S. 662 = Kirchhoff, Gesammelte Abhandlungen (Leipzig 1862), S. 564.

[48]Kirchhoff, Ges. Abh., S. 566–598. Vgl. auch; S. 633/634, 641; ferner: Rosenberger, Geschichte der Physik, III (Braunschweig 1887–1890). S. 691 ff.

[49]Herbart, Psychologie als Wissenschaft neu gegründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik. Ges. Werke, herausg. von Hartenstein, Bd. V, VI.

[50]M. W. Drobisch, Erste Grundlinien der mathematischen Psychologie (Leipzig 1860), Vorrede. Vgl. auch Wilhelm Wundt, Grundzüge der physiologischen Psychologie, I (5. Auflage, Leipzig 1902), S. 7.

[51]Wundt a. a. O., Kap. IX, S. 466 ff.

[52]Ausführliches Literaturverzeichnis in Ernst Schröders *Algebra der Logik,* I (Leipzig 1890), S. 700–715.

Universalgenies der Renaissance, vor 400 Jahren gesagt hat[53], gilt heute mehr denn je: „Wer die höchste Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung und wird niemals Schweigen auferlegen den Widersprüchen der sophistischen Wissenschaften, durch die man nur ein ewiges Geschrei erlernt.“

Der soeben gegebene kurze Überblick dürfte immerhin ausreichen, um deutlich zu machen, wie zahlreich und verschiedenartig die Gebiete sind, die alle an den Erfolgen der Mathematik ihren Anteil heischen. Und nun —

„Ganz spät, nachdem die Teilung längst geschehen, — Naht der Poet,“ — der *„reine“* Mathematiker, der die Mathematik nicht nur um ihrer selbst willen treibt, sondern noch obendrein behauptet, sie sei auch in erster Linie um ihrer selbst willen da. Sie verdanke ihre wahre Existenz einem rein idealistischen Bedürfnisse, welches dem Bedürfnisse nach Naturerkenntnis zwar *verwandt* und seiner Befriedigung in hohem Grade *förderlich* sei, aber *weder in ihm allein wurzle, noch jemals darin aufgehen wolle: gerade so wenig,* wie wir wiederum das Endziel aller *Erkenntnis* der Naturkräfte in deren *Beherrschung* zum Zwecke des praktischen Nutzens erblicken können. Es ist eine unbestreitbare Tatsache, daß ausgedehnte Gebiet der Mathematik, vor allem die sogenannte Zahlentheorie, der bei weitem größere Teil der höheren Algebra, der Funktionen-Theorie, ja sogar der Geometrie, bisher *keine* außermathematische Anwendung gefunden haben oder, wie eine stark euphemistische Ausdrucksweise lautet, „noch der Anwendung harren“. In Wahrheit „harren“ sie *überhaupt nicht* oder doch zumeist *vergebens!* Und es wäre gerade so irrig, ja ich möchte sagen, unaufrichtig, die Existenzberechtigung jener rein mathematischen Untersuchungen aus der entfernten Möglichkeit anderweitiger Anwendung herleiten zu wollen, wie wenn man etwa
die Forderung der nötigen Geldmittel für eine Polarexpedition damit motivieren (381)
wollte, es erscheine gar nicht ausgeschlossen, daß mit der Zeit sehr gewinnbringende Handelsbeziehungen daraus erwachsen könnten.

Nun darf man immerhin sagen, der endgültige Nutzen einer mathematischen Untersuchung lasse sich von vornherein keineswegs voraussehen; der dabei gewonnene rein mathematische Kraftvorrat komme vielleicht anderen, nützlicheren Untersuchungen zu statten; auch ergebe sich zuweilen zwischen scheinbar weit auseinander liegenden Untersuchungsgebieten plötzlich ein so überraschender Zusammenhang, daß man schon ans diesen Gründen jene rein theoretischen Forschungen nicht von der Hand weisen könne. Und wenn etwa die staatlich angestellten Mathematiker des 20. Jahrhunderts durch einen Erlaß angewiesen würden, nur *die* Dinge zu lehren und mit *solchen* Problemen sich zu beschäftigen, welche sichere Aussicht bieten, den Naturwissenschaften und womöglich der Technik dienlich zu sein, so würde man der mathematischen Forschung gleichzeitig mit ihrer Freiheit auch einen großen Teil ihrer nutzbringenden Kraft entziehen.[54] Das ist sicherlich richtig, trifft aber doch nicht den eigentlichen Kern der

[53] M. Herzfeld, Leonardo da Vinci (Leipzig 1904), S. 8, XXIII

[54] Allgemeine Betrachtungen über die Wechselwirkung zwischen der reinen Mathematik und ihren Anwendungen geben: William Spottiswoode, Die Mathematik in ihren Beziehungen zu den anderen Wissenschaften. Deutsch von H. Gretschel. Leipzig 1879. — H. Poincaré, Sur les rapports de l'analyse pure et de la physique mathématique. Acta mathematica, 21

Sache. Denn bei dieser Auffassung würde ein beträchtlicher Teil der Mathematik immer nur als eine Art notwendigen Übels erscheinen. *Wir* sehen vielmehr in dem tiefgreifenden Einflusse, welchen die Errungenschaften der Mathematik auf die Fortschritte der Naturwissenschaften und die Vervollkommnung der Lebensbedingungen ausüben, lediglich das charakteristische Symptom einer dem menschlichen Geiste zukommenden *höheren* Verpflichtung, die Gesetze und wechselseitigen Beziehungen der Zahl- und Raumgebilde in *ihrem weitesten Umfange* zu ergründen. Die mathematischen Erkenntnisse erscheinen uns daher, nicht nur soweit sie als Mittel für andere Zwecke dienen, sondern *an sich* als wertvoll, und wir erblicken zugleich in ihrem systematischen Auf- und Ausbau die vollendetste und reinste Form logischer Geistestätigkeit, die Verkörperung höchster Verstandes-Ästhetik.

In dem wahren Mathematiker steckt allemal ein gutes Stück vom Künstler: vom Architekten, ja vom Poeten. Außerhalb der *realen* Welt, doch in erkennbarem Zusammenhange mit ihr, haben die Mathematiker in schöpferischer Gedankenarbeit sich eine *ideale* erbaut, die sie zur vollkommensten aller Welten auszugestalten suchen und nach allen Richtungen durchforschen. Von dem Reichtum dieser Welt hat natürlich nur *der* eine Ahnung, der sie kennt: nur überhebliche Unwissenheit kann behaupten, daß der Mathematiker in einem engen Kreise sich bewege. Die *Wahrheit*, die er erstrebt, ist freilich, bei Lichte betrachtet, nicht mehr und nicht weniger als *Widerspruchslosigkeit*. Aber zeigt sich nicht vielleicht gerade in der Beschränkung auch hier der Meister? Letzte Fragen zu lösen, überläßt der Mathematiker neidlos anderen.

Vieles, was die überreiche mathematische Produktion hervorgebracht hat und
(382) hervorbringt, ist vergänglich. Aber aus der Menge des Geschaffenen scheidet sich ein kristallklarer Kern abstrakten Wissens ab, welcher allen Zeiten als ein glänzendes Denkmal menschlicher Geisteskraft erscheinen wird. Sollten diejenigen, die da, jeder nach seinen Kräften bemüht sind, an der Aufrichtung dieses Denkmals mitzuarbeiten, wirklich, wie die landläufige Meinung es will, nur einseitige und trockene Verstandesmenschen sein? Ich denke, hier hat doch der schon zu Anfang zitierte Novalis das Richtigere getroffen, wenn er sagt[55]:

„Der echte Mathematiker ist Enthusiast *per se*. Ohne Enthusiasmus keine Mathematik.“

(1897). — Walther Dyck, Über die wechselseitigen Beziehungen zwischen der reinen und angewandten Mathematik. Akad. Festrede. München 1897.

[55] A. a. O. (s. Note 1, S. 358).

Anhang A

Fussnote von S. 359

Es ist der Spezialfall des rechtwinklig-*gleichschenkeligen* Dreiecks, der die Richtigkeit des Satzes für ein *beliebiges* rechtwinkliges Dreieck *kaum vermuten* läßt, geschweige denn, wie SCHOPENHAUER behauptet, „ohne alles Gerede, von der Wahrheit des PYTHAGOREischen Lehrsatzes zwanzigmal mehr Überzeugung gibt, als der EUKLIDische Mausefallenbeweis“. Der fragliche Beweis selbst fin-

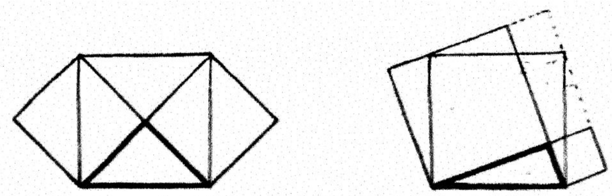

Fig. I. Fig. II.

det sich im wesentlichen schon bei PLATO: s. M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, Bd. l (1880), S. 186 (vgl. auch ebendaselbst, S. 623: desgl. Bd. II S. (1892, S. 277). Versucht man, jenen Beweis (s. Fig. I) auf den Fall eines beliebigen rechtwinkligen Dreiecks zu übertragen, wie es zuerst wohl ein Anonymus getan hat: Lond. Philos. Transactions. Vol. 13 [1683], S 673), so nimmt derselbe einen wesentlich weniger befriedigenden Charakter an: es gelingt auf diese Weise *nicht* beweisen, daß die betreffenden Figuren *„zerlegungsgleich“*, sondern nur, daß sie *„ergänzungsgleich“* sind (s. Fig. II). Im übrigen kannten schon im frühen Mittellalter die Inder und Arabar (vgl. CANTOR a. a. O. I, S. 557; 639) einen direkten *„Zerlegungs“*-Beweis, der auf der Doppelgleichung

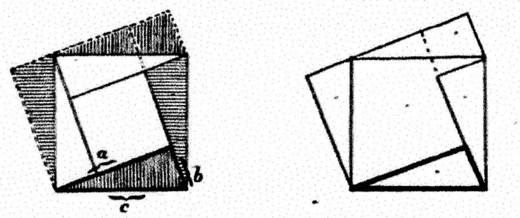

Fig. III. Fig. IV.

$c^2 = (a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$ beruht. Ordnet man die zur geometrischen Veranschaulichung dieser Doppelgleichung erforderliche Zerschneidung und Umlegung in der Weise an, wie es durch Fig. III angedeutet wird, so gelangt man, nach Weglassung der sich als überflüssig erweisenden Schnitte (s. Fig. IV), zu dem überaus einfachen und eleganten Zerschneidungsbeweise des AN-NAIRIZI (= ANARITIUS, um 900 n. Chr.; Vgl. TROPFKE, Geschichte der Elementar-Mathematik, II [Leipzig 1903], S. 73).

Anhang B

Fussnote von S. 367

Die beiden gesperrt [fett] gedruckten Sätze sind die einzigen, welche SCHOPENHAUER zitiert. A. a. O. S. 54 heißt es:

> „Il y avait déja longtemps que **sa propre expérience l'avait convaineu du peu d'utilité des Mathématiques, surtout lorsqu'on ne les cultive que pour elles-mêmes,** sans les appliquer à d'autres choses. Depuis l'an 1620 il avait entièrement négligé les règles de l'Arithmétique. Les attaches qu'il eut pour la Géométrie subsistèrent un peu plus longtemps dans son coeur, parceque les mathématiciens de Hollande et d'Allemagne qu'il avait vus pendant ses voyages avaient contribué à les rèsoudre. Mais on peut dire qu'elles étaient tombées dès l'an 1623, s'il et vrai qu'en 1638 *il y avait plus de quinze ans qu'il faisait profession de négliger la Géométrie, et de ne plus s'arréter jamais à la solution d'aucun problème qu'a la prière de quelque ami.*
>
> **Il ne voyait rien de moins solide que de s'occuper de nombres tout simples et des figures imaginaires,** sans porter ses vues au delà.[1] Il y trouvait même quelque chose de plus qu'inutile: et il croyait qu'il ètait dangereux de s'appliquer trop sérieusement à ces démontrations superficelles, que l'industrie et l'expérience fournissent moine souvet que le hazard; et qui sont plutôt du ressort des yeux et de l'immagination que de celui de l'entendement. Sa maxime était que cette application nous désaccoutume insensiblement de l'usage de notre raison, et nous expose à perdre la route que la lumière nous trace.[2]
>
> Mais on peut dire qu'il n'ababdonna l'étude particulière de l'Arithmétique et de la Géométrie, que pour se donner tout entier à la recherche de cette Science générale, mais vrais et infaillible, que les Grecs ont nommée judicieusement *Mathesis*, et dont toutes les Mathématiques ne sont que des parties. Il prétendait que ces connaissances particulières pour mériter le nom de Mathématiques devraient avoir des rapports, des proportions et des mesures pour objet. Delà il jugeait qu'il y avait une Science générale destiné à expliquer toutes

[1] In der großen Ausgabe der *Vie de Descartes* von 1691, I, S. 112 lautet dieser Nachsatz noch ausführlicher und prägnanter: „Comme si l'on devait s'en tenir à ces bagatelles sans porter sa vue au dela."

[2] Hier folgt in der großen Ausgabe noch eine längere Ausführung, die mit den Worten beginnt: „Voilà une partie des motifs qui le portèrent à renoncer aux Mathématiques vulgaires. Mais il parait que le respect qu'il témoignait pour les Anciens *l'empéche* depousser le mépris qu'il faisali de ces Sciences *au delà des temps et de lieux où il touvait de l'abus la maniére de les cultiver ou de les enseigner.*" Weiterhin heißt es: „Descartes ne fut pas le premier qui s'apercut du mauvais état où était cette Science des Anciens, et des abus qu'y avaient commis ceux qui l'avaient recue d'eux d'une manière toute unie et toute simple."

les questions que l'on pourrait faire touchant les rapports, les proportions et la mesures, en les considérant comme détachées de toute matière; et que cette Science générale pouvait à très-juste titre porter le nom *Mathesis* ou *Mathématique universelle*, puisqu'elle renferme tout ce qui peut faire mériter le nom de Science et de Mathématique particulière aux autres connaisances.

Voilà le dénouement de la difficulté qu'il y aurait à croire que M. Descartes cût absolument renoncé aux Mathématiques, en un temps oú il ne lui était plus libre de les ignorer.“