Universität Heidelberg

Germanistisches Seminar

Bachelorarbeit

Erstgutachter: Prof. Dr. Ekkehard Felder

Zweitgutachter: Prof. Dr. Vahram Atayan

Die (Fach-) Sprache der Mathematik

Eine linguistische Analyse von Perspektivierungen in Einführungen der Analysis

Vorgelegt von: Anne Kollmar

anne.kollmar@stud.uni-heidelberg.de

Germanistik und Mathematik, Bachelor

Abgabetermin: 10. März 2025

Abstract

Mathematik erweist sich für das Verständnis von Technik aber auch zur Lösung von gesellschaftlichen Problemen wie dem Klimawandel und der Digitalisierung als notwendig. Dabei kommt der Sprache eine maßgebliche Rolle zu, da mathematisches Wissen durch diese instruiert, hinterfragt und perspektiviert wird. Diese Perspektivierung steht im Kontrast zu der vermeintlichen Objektivität von mathematischem Wissen. Die vorliegende Arbeit geht der Frage nach, wie mathematisches Wissen in Lehrbüchern zu Einführungen der Analysis konstituiert und perspektiviert wird und inwiefern es von der, aufgrund des Untersuchungsgegenstandes erwarteten, Objektivität abweicht. Mathematisches Wissen wird durch Anknüpfungen an Alltagsvorstellungen und Relevanzzuschreibungen evoziert und Vorstellungen teilweise durch Grafiken unterstützt.

Stichwörter: *Fachsprache, Mathematik, Sprache Mathematik, Objektivität, Perspektivierung*

Abstract (English)

Mathematics is necessary not only for understanding technology but also for solving societal problems such as climate change and digitalization. In this context, language plays a significant role as it instructs, questions and gives perspective to mathematical knowledge. This contextualization stands in contrast to the supposed objectivity of mathematical knowledge. This paper investigates how mathematical knowledge is presented and contextualized in course books on introductions to analysis, and the extent to which it deviates from the objectivity due to the subject matter. Mathematical knowledge is evoked through the connection to everyday concepts and attributed relevance, with graphics often serving to reinforce these concepts.

Keywords: *technical language, mathematics, mathematical language, objectivity, contextualization*

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

„Sprache und Mathematik sind nahezu gleichursprüngliche und gleichermaßen universelle Hervorbringungen und Träger menschlicher Kultur“, konstatiert Nickel (2023: 9). Die ersten historischen Funde, die auf die Beschäftigung der Menschen mit der Mathematik hindeuten, sind älter als entsprechende schriftsprachliche (vgl. Nickel 2023: 9). Somit kommt der Mathematik neben der Sprache – als grundlegendes Mittel der Kommunikation – schon lange eine große Bedeutung zu. Die Welt ist vor allem im Bereich der Technik und der Naturwissenschaften von Mathematik durchdrungen und insofern von ihr geprägt und zutiefst bedingt (vgl. Atayan/Metten/Schmidt 2015: 411). Folglich bedarf es Experten[1], die sich mit mathematischen Sachverhalten auseinandersetzen (vgl. Becker 2024).

Bereits in der Schule zeigen sich jedoch erhebliche Probleme mit dem Fach Mathematik, was die schlechten Ergebnisse des Leistungstests Mathematik der vierten Klassen in Baden-Württemberg genau wie die des PISA-Tests 2022 offenlegen (vgl. Becker 2024; Otte 2025). Baden-Württembergs Ministerpräsident Kretschmann (2025, zit. nach Otte 2025) äußert, dass es „einen gesellschaftlichen Mentalitätenwechsel in Bezug auf Mathematik“ geben müsste und über Schwächen im Fach Mathematik nicht so „flapsig“ gesprochen werden sollte. Da mathematische Kenntnisse jedoch maßgeblich für die erfolgreiche Vermittlung des Faches und die Auseinandersetzung mit gesellschaftlichen Problemen wie dem Klimawandel oder der Digitalisierung sind, benötigt es Studierende, die die Fachsprache der Mathematik[2] erlernen (vgl. Becker 2024). Dueck (2008: 206), ein Professor für Mathematik, stellt dabei fest: „Rücksichtslos sprechen alle Eingeweihten Mathematik zu Verzweifelten“ und führt gehäufte Studienabbrüche auf fehlende Unterstützung zurück (vgl. Dueck 2008: 209). Ein erstes Verständnis für mathematische Sachverhalte soll in Einführungen, beispielsweise in die Analysis, vermittelt werden. Neben Vorlesungen sind dabei vor allem Lehrbücher relevant, die Studierende dazu befähigen, sich eigenständig Wissen anzueignen. Der Sprache kommt eine maßgebliche Rolle zu, da nur durch sie mathematisches Wissen instruiert werden kann.

Dementsprechend ergeben sich die folgenden Untersuchungsfragen: Wie wird Mathematik und im Besonderen der mathematische Sachverhalt ‚Folgen und Konvergenz‘ in Einführungen der Analysis konstituiert und perspektiviert? Inwiefern weicht die Fachsprache der Mathematik von der allgemeinen Erwartungshaltung der Objektivität ab?

[1] Im Nachfolgenden werden, wenn möglich, genderneutrale Bezeichnungen verwendet. Bewusst davon abgewichen, wird bei den Instanzen „Experten“ und „Laien“, da diese Pluralformen sich in der Linguistik als grundlegende Konzepte etabliert haben. Sollte es an einzelnen Stellen zu Abweichungen kommen, sollen die verwendeten Formen für alle Menschen gleichermaßen gelten.

[2] Im Folgenden soll die Fachsprache Mathematik von der Sprache der Mathematik unterschieden werden. Letztere begreift Mathematik als Sprache (vgl. Nickel 2023: 10). Diese Vorstellung wird in Kapitel 2.2 näher thematisiert.

Mathematik basiert auf Grundannahmen, aus denen mithilfe von Logik und unter Bewahrung der Widerspruchsfreiheit Aussagen hergeleitet werden (vgl. Pittioni 2008: 363; Maier/Schweiger 2008: 14). Die Entstehung von mathematischen Sachverhalten aus der Logik suggeriert Objektivität. Dies wird jedoch von der grundsätzlichen Perspektivierung der Sprache, ohne die Mathematik nicht vermittelt werden kann, kontrastiert (vgl. Bremer/Müller 2021: 50–53). Grundsätzlich ist der Zusammenhang von Sprache und Mathematik Inhalt von einigen linguistischen Forschungen[3], doch lässt sich gerade in der sprachlichen Analyse der Vermittlung von Mathematik ein Forschungsdesiderat feststellen, das auch in der Notwendigkeit von linguistischem und mathematischem Wissen für eine Analyse der mathematischen Fachsprache begründet sein kann (vgl. Jacob 2023: 384).

Die folgende Analyse kann in der Fachsprachenforschung verortet werden, wobei die Fragestellung durchaus einen Bezug zur Diskursanalyse aufweist, da mit dieser die Perspektivierung von Wissen aufgezeigt werden kann (vgl. Felder 2013: 15). Im Nachfolgenden soll zunächst eine Definition von Fachsprache und Mathematik erfolgen. Daraufhin werden die Charakteristika der mathematischen Fachsprache und eine semiotische Perspektive auf die Mathematik herausgearbeitet. Im Anschluss soll Sprache definiert und mit der Frage konfrontiert werden, ob Mathematik als Sprache verstanden werden kann. Des Weiteren werden (ausgehend von Erkenntnissen zum Spracherwerb) Parallelen und Unterschiede beim Erlernen von Sprache und Mathematik dargelegt. Das allgemeine Verständnis von Wissen und Wissenserwerb wird zunächst mit der Konstruktion von Wirklichkeit und Objektivität verknüpft. Anschließend erfolgt die Thematisierung des Wissens innerhalb der Mathematik. Die Analyse soll daran anschließend zunächst allgemeine Auffälligkeiten von Lehrbüchern zu Einführungen in die Analysis und deren thematischen Einstieg aufdecken. Daran schließt sich die konkrete Analyse von zentralen Konzepten[4] des Subthemas ‚Folgen und Konvergenz' an. Hierbei soll aufgezeigt werden, wie Schlüsselwörter perspektiviert und eingeführt werden.

---

[3] Siehe zum Beispiel „Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik" (Atayan/Metten/Schmidt 2023) oder „Grade der Fachlichkeit in Textsorten zum Themenbereich Mathematik (Schmidt 2003)

[4] Nachfolgend soll angelehnt an Felder (2015: 92 f.) der sprachliche Ausdruck von dem Begriff, auf den er referiert, unterschieden werden. Da es sich bei mathematischen Gegenständen um abstrakte Objekte handelt, werden Begriff und Konzept synonym verwendet. Entsprechend werden auch die von Felder (2015: 94) vorgeschlagenen Notationskonventionen (metasprachlich Begriffe/Konzepte in spitze Klammern, Ausdrücke kursiv) verwendet. Themen – die Konzepten übergeordnet sind und teilweise mehrere vereinen – werden durch einfache Anführungszeichen gekennzeichnet.

2 Theoretische Vorüberlegungen

2.1 Fachsprache und Mathematik

2.1.1 Fachsprache

Zur sprachlichen Erfahrungswelt der Menschen gehört es, dass die Sprache, die sie verwenden und der sie begegnen, von ihrer Umgebung abhängig ist. Schon das Kompositum Fachsprache deutet an, dass diese Sprache in Relation zu einem Fach steht. Auch die vielfach zitierte Definition Hoffmanns (1985: 53) veranschaulicht dies: Eine *Fachsprache* „ist die Gesamtheit aller sprachlichen Mittel, die in einem fachlichen begrenzbaren Kommunikationsbereich verwendet werden“. Ein *Fach* ist als „ein spezialisierter menschlicher Tätigkeitsbereich aufzufassen“ (Roelcke 2020: 14). Obwohl Fächer nicht immer eindeutig unterschieden werden können, haben sich historisch gesehen verschiedene, wie Mathematik, etabliert (vgl. Roelcke 2020: 44–47).
Fachsprachen können folglich als Varietät verstanden werden, deren Gebundenheit an ein Fach ihr distinktives Merkmal ist (vgl. Adamzik 2018: 89). Unter einer *Varietät* ist eine Zusammenfassung „sprachlicher Varianten“ (Adamzik 2018: 55), die eine Korrelation zu einem „außersprachlichen Faktor“ (Adamzik 2018: 55) aufweisen, zu verstehen. Fachsprachen ermöglichen es, Wissen von Individuen in Bezug auf ein Fach anzugleichen (vgl. Drumm 2018: 22) und dienen somit der „Konstruktion von Welten“, wie der Untertitel der Monografie Adamziks (2018) verdeutlicht. Innerhalb von Fachsprachen können vertikale Gliederungen motiviert werden, die sie anhand ihrer unterschiedlichen kommunikativen Situation, ihrer Abstraktion und der sprachlich Handelnden untergliedern (vgl. Hoffmann 1985: 65; Roelcke 2020: 49). Horizontale Gliederungen von (schon identifizierten) Fachsprachen sind anhand der Distanz ihres Fachwortschatzes zur Literatur möglich, wobei beispielsweise Mathematik am entgegengesetzten Pol verortet werden kann (vgl. Hoffmann 1985: 58). Zusammenfassend ist *Fachsprache* eine Varietät, die durch ihren Bezug auf ein konkretes Fach definiert ist.

2.1.2 Mathematik

„Mathematik ist die Wissenschaft formaler Systeme“, so Jäger (1993: 10) und ergänzt, dass auch die Entwicklung von einer dem System angepassten Sprache bedeutend ist (vgl. Jäger 1993: 10). Definitionen von *Mathematik* müssen als vorläufige, historisch abhängige Näherung betrachtet werden (vgl. Davis/Hersh 1985: 4). Beutelspacher (2016: 13 f.) erläutert, es bestehe die Möglichkeit *Mathematik* als ein vom Menschen gemachtes Konstrukt verstehen, sie über ihre Objekte, ihre Methode oder ihren Blick auf die Welt zu definieren.
Mathematik kann dementsprechend als eine „reine geistige Schöpfung des Menschen“ (Nickel 2023: 11) verstanden werden. Genau wie Sprache zeigt sie sich demzufolge auch in der gesellschaftlichen Kultur (Nickel 2023: 9).

Die Objekte, auf die sich die Mathematik bezieht, näher zu charakterisieren, erscheint herausfordernd. Betrachtet werden ausschließlich abstrakte Gegenstände (vgl. Schmidt 2009: 454), die nach Platon unabhängig von äußeren Umständen sind (vgl. Dörfler 2015: 42). Diese Objekte werden „innermathematisch motiviert“ (Nickel 2023: 16) oder von der Wirklichkeit abstrahiert (vgl. Nickel 2023: 15). Grundsätzlich lassen sich anhand der Objektbestimmung Parallelen zur Philosophie ziehen, da auch deren Gegenstände grundsätzlich nur dem Denken vorbehalten sind (vgl. Nickel 2023: 12). Doch beschreibt Platon als Ziel der Philosophie im Gegensatz zu dem der Mathematik anfängliche Annahmen zu hinterfragen (vgl. Nickel 2023: 12).

In der Mathematik hingegen werden aus „Grundwahrheiten“ (Arens et al. 2021: 3), die sich aus Definitionen und Axiomen zusammensetzen, mathematische Resultate mittels logischer Schlussfolgerung hergeleitet (vgl. Pittioni 2008: 362). Die Widerspruchsfreiheit der gefolgerten Aussagen ist unverzichtbar, somit folgt Mathematik einer bivalenten Logik (vgl. Nickel 2023: 16; Maier/Schweiger 2008: 14). Über mathematisch untersuchte Objekte müssen demnach Wahrheitsaussagen getroffen werden können (vgl. Nickel 2023: 46). Von Interesse ist es, Strukturen und ihre „Muster“ (Steinmetz 2018: 199) aufzudecken. Einer widerspruchsfreien Argumentation kann nicht widersprochen werden (vgl. Nickel 2023: 48), demnach „kann Kritik innerhalb der Mathematik nur noch durch Disziplin-Differenzierung reagieren“ (Nickel 2023: 48).

Dass Mathematik in der Moderne zunächst oft losgelöst von Anwendungen betrachtet wird, verhindert keine „Deutung mit Blick auf realweltliche Strukturen“ (vgl. Illi 2017: 222). Insbesondere dient Mathematik auch als „Hilfswissenschaft“ (Liebert 2023: 279) für Naturwissenschaften. Im Nachfolgenden soll Mathematik als ein Konstrukt betrachtet werden, welches aus Grundannahmen unter Beachtung der Widerspruchsfreiheit Aussagen logisch folgert.

2.1.3 Fachsprache Mathematik

2.1.3.1 Charakteristika

Die meisten Menschen erkennen die Fachsprache Mathematik – auch ohne ein Verständnis der Materie – an der „Verflechtung von verbalem und formalen Text“ (Rautenberg 1965: 722), können aber ohne Vorwissen keine Erkenntnisse aus ihr ziehen (vgl. Eisenreich 1998: 1222). Formeln sind als eine „Aneinanderreihung von Symbolen“ (Rautenberg 1965: 728) zu verstehen, die Relationen herstellen und zu Termen oder Behauptungen verknüpft werden (vgl. Horacek 2023: 248). Dadurch gelingt eine dichte Übermittlung der mathematischen Sachverhalte (vgl. Eisenreich 1998: 1229), wobei sich inhaltlich eine Beschränkung auf Wesentliches abzeichnet (vgl. Jäger 1993: 21). Die mathematische Fachsprache ist „meist einfach gebaut“ (Eisenreich 1998: 1222) und wirkt „standardisiert und zum Teil bewusst normiert“ (Schmidt 2023b: 424).

Dementsprechend kann auf eine geringe sprachliche Interpretationsvielfalt geschlossen werden (vgl. Maier/Schweiger 2008: 50).

„Es ist klar, dass der Gegenstand auch die ihn beschreibende Sprache mitbestimmt" erläutert Jäger (1993: 16). Dementsprechend ist die mathematische Fachsprache durch eine abstrakte Darstellung des Wissens gekennzeichnet (vgl. Stolze 2023: 223). Mathematik kann vertikal einerseits in verschiedene Fachlichkeitsgrade, wie die theoretische und angewandte Mathematik, und zum anderen, wie jede andere Fachsprache, in unterschiedliche Kommunikationssituationen gegliedert werden (vgl. Schmidt 2023b: 425/432). Diese Faktoren beeinflussen sprachliche Äußerungen. So weist die mathematische Fachsprache in der Regel eine hohe Präzision auf, von der in der mündlichen fachsprachlichen Kommunikation oder beim Verweisen auf Sachverhalte abgewichen wird (vgl. Horacek 2023: 242 f.). Auch die schon seit Jahrzehnten vorherrschende Dominanz des Englischen hat Auswirkungen auf die Fachsprache der Mathematik (vgl. Eisenreich 1998: 1222; Szurawitzki 2023: 502 f.).

Für mathematische Texte kann ein typisch triadisches Grundmuster, bestehend aus Definition, Satz und Beweis, auch „Landaustil" genannt, identifiziert werden (vgl. Jäger 1993: 19; Eisenreich 1998: 1222). Die Häufigkeit des Vorkommens der Struktur ist abhängig von der zugrundeliegenden Textsorte und insbesondere in Texten mit hohem Fachlichkeitsgrad größer (vgl. Gerisch 1988: 53). Die drei Teile des Musters können – wie etwa durch sprachliche Rahmungen – deutlich voneinander unterschieden werden (vgl. Nickel 2023: 48).

Eine *Definition* charakterisiert bislang unbekannte Begriffe meist knapp und mit einer einfachen Syntax (vgl. Gerisch 1988: 54), wobei schon Descartes forderte, nur vorher definierte Ausdrücke zu verwenden (vgl. Krüger 1992: 120). Fachtermini sind der Gemeinsprache mit gleicher oder anderer Bedeutung entnommen oder entstammen ihr nicht (vgl. Maier/Schweiger 2008: 20). Konkret heißt dies, dass bei neuen Begriffen „Benennungsfreiheit" (Gerisch 1988: 55) besteht. Die Terminologie ist aber „historisch bedingt" (Eisenreich 1998: 1227) und kontextabhängig, da die gleichen Begriffe in unterschiedlichen Zusammenhängen disparat verwendet werden (vgl. Eisenreich 1998: 1222). Diese sind einem Präzisierungsprozess unterworfen, bei dem die grundlegende Vorstellung von Eigenschaften der zugrundeliegenden Objekte zunehmend konkretisiert wird (vgl. Rautenberg 1965: 735).

Sätze – auch *Theoreme* genannt – sind Aussagen über mathematische Begriffe, die sprachlich meist eine einfache Bauweise aufweisen (vgl. Gerisch 1988: 55 f.). Je nach Relevanz kann ihre Bezeichnung abweichen (vgl. Gerisch 1988: 55 f.). Namen von Sätzen, insbesondere nach Personen benannte, sind nicht immer übersprachlich verständlich (vgl. Eisenreich 1998: 1223).

Ein *Beweis* ermöglicht die Anerkennung eines Satzes, da mit logischen Schlüssen dessen Wahrheit gefolgert werden kann (vgl. Gerisch 1988: 56). Die Vorstellung von lückenlosen Beweisen ist jedoch idealisiert (vgl. Schmidt 2003: 252). In Beweisen sind Voraussetzungen und Folgerungen sprachlich, zum Beispiel durch die Verwendung des Konjunktivs I bei Voraussetzungen, unterscheidbar (vgl. Gerisch 1988: 56 f.). Das Ende eines Beweises wird oft durch ein quadratisches Symbol oder die Abkürzung q.e.d. (quod erat demonstrandum) gekennzeichnet (vgl. Eisenreich 1998: 1223 f.).

In mathematischen Fachtexten überwiegen die Pronomen „man“ und „wir“ und die am häufigsten in der Gemeinsprache verwendeten Verben „sein“ und „werden“ (vgl. Kruse 2023: 474). Eine komplexe Syntax ist – abgesehen von Kausal- und Konsekutivsätzen – selten (vgl. Gerrisch 1988: 62). Bei ihrer Verwendung folgen verwendete Konjunktionen innerhalb der Fachsprache strengeren Regeln als in der Gemeinsprache (vgl. Kruse 2023: 476). In der Mathematik existiert die Vorstellung, dass „mathematische Gegenstände selbst wie Subjekte handeln“ (Maier/Schweiger 2008: 22), daher erscheint es nicht verwunderlich, dass mathematische Gegenstände häufig Subjekt oder Akkusativobjekt sind (vgl. Gerisch 1988: 61).

2.1.3.2 Semiotische Perspektive

Mathematik ist ohne den Gebrauch von Zeichen nicht denkbar (vgl. Dörfler 2012: 367). *Zeichen* sind „‚Stellvertreter‘ für konkrete oder abstrakte Konzepte“ (Bremer/Müller 2021: 6 f.). Grundsätzlich können zwei Betrachtungsweisen der Relation von Denken und Zeichen unterschieden werden. Nach der von Platon vertretenen instrumentalistischen Semiotik repräsentieren Zeichen das Denken des sprechenden Individuums (vgl. Keller 2018: 55 f./99). Peirce nimmt sogar an, dass Gedanken zeichenhaft sind (vgl. Nöth 2000: 61). Daran anschließend äußert Rotman die Vorstellung, dass „mathematisches Denken […] durch Zeichen am Papier“ (Dörfler 2012: 368) erfolgt. Dementgegen steht die auf Aristoteles‘ Überlegungen beruhende repräsentationistische Auffassung, die nur das Objekt, auf das sich das Zeichen bezieht, als dessen Bedeutung begreift (vgl. Keller 2018: 54 ff./100). Auch Brouwer widerspricht der Auffassung der Zeichenabhängigkeit des mathematischen Denkens und verortet ihre Relevanz allein in der Kommunikation (vgl. Dörfler 2012: 368). Diese beiden Standpunkte widersprechen jedoch nicht der Bedeutung, die Zeichen in der mathematischen Kommunikation zukommen.

Schon seit der Antike werden Zeichenträger, Bedeutung und Referenzobjekt unterschieden (vgl. Nöth 2000: 139). Anhand der Relation von Zeichen und Referenzobjekt werden nach Peirce ikonische, symbolische und indexikalische Zeichen abgegrenzt (vgl. Bierwisch 2008: 327). *Symbole* beruhen auf gesellschaftlichen Konventionen (vgl. Bierwisch 2008: 327 f.). *Ikone*

weisen eine Ähnlichkeit zwischen Zeichen und Bezeichnetem auf, wohingegen *indexikalische Zeichen* über eine (beispielsweise kausale) Relation zwischen diesen verfügen.
Aufbauend auf Peirce werden „Token“ und „Type“ „zur Unterscheidung zwischen einer einzelnen Erscheinung (Vorkommnis) und den allgemeinen Erscheinungstypen“ (Brunner 2012: 26) verwendet. In Bezug auf Mathematik können mit einem einzelnen Token verschiedene Typen, wie beispielsweise ein Zahlsymbol mit Konzepten wie „natürlichen Zahlen“ oder „Teilbarkeit durch zwei“, verknüpft werden (vgl. Brunner 2012: 27).
Diagramme werden als Ikone definiert, die auch symbolische und indexikalische Zeichen beinhalten, und aus einer mathematisch festgelegten Kombination verschiedener Token bestehen (vgl. Brunner 2012: 28). Das von ihnen repräsentierte Objekt kann erdacht sein, wonach auch mathematische Strukturen – wie Formeln – von Diagrammen dargestellt werden (vgl. Brunner 2012: 28 ff.). Die Anwendung mathematischer Regeln ermöglicht die Modifikation oder Verallgemeinerung von Diagrammen (vgl. Brunner 2012: 32). Diese „symbolische[n] Manipulationen [können] in der Regel kontextfrei“ (Metzger/Riegler 2024: 152) durchgeführt werden. So ist es möglich, mathematische Erkenntnisse verkürzt darzulegen und viele Zwischenschritte nicht zu explizieren (vgl. Brunner 2012: 32–34). Zwei unterschiedliche Diagramme können bisweilen durch Umformungen in die gleiche Darstellung umgewandelt werden, woraus teilweise auf die Existenz von mathematischen Objekten geschlossen wird (vgl. Dörfler 2015: 37). Dörfler (2015: 40 f.) merkt an, dass es sowohl darstellungsabhängige als auch darstellungsunabhängige Eigenschaften von mathematischen Objekten gibt. Demnach ist Mathematik auch als kreative Wissenschaft zu verstehen, die durch variierende Darstellungen andere Erkenntnisse erzielen kann (vgl. Dörfler 2015: 48).
Diagramme sind dabei einer historischen Entwicklung unterworfen. Operative Zeichen wie das Pluszeichen finden in Deutschland erst seit dem 15. Jahrhundert Anwendung (vgl. Jäger 1993: 27ff.). Neue mathematische Theorien gehen dabei oft mit sprachlichen Innovationen einher (vgl. Kvasz 2015: 51 f.). So führte der zunehmende Formalismus der Neuzeit zu grundlegenden neuen algebraischen Erkenntnissen (vgl. Illi 2017: 191 ff.). Dies deutet auch ein Interdependenzverhältnis von Sprache und Mathematik an.

2.2 Mathematik und Sprache

2.2.1 Sprache

Sprache kann als „Zeichensystem“ (Bierwisch 2008: 326) verstanden werden. Auch wenn diese Definition weit verbreitet ist (vgl. Busse 2024: 37; Bußmann 2024: 643f.), repräsentiert sie nur eine Facette der Sprache. *Sprache* dient der Kommunikation und Verständigung einer Gesellschaft und ist als solche höchst relevant (vgl. Schmidt 2018: 104). Dementsprechend kann

Sprache auch als „[a]uf kognitiven Prozessen basierendes, gesellschaftlich bedingtes, historisches Mittel zum […] Austausch von Gedanken“ (Bußmann 2008: 643) definiert werden. Sie versprachlicht mentale Prozesse von Individuen und ermöglicht somit einen überindividuellen Zugriff auf Sachverhalte (vgl. Glück 2024: 606). Ohne Sprache ist keine Erkenntnis möglich. Sie prägt nicht nur unser Denken, sondern perspektiviert auch die Wahrnehmung der Wirklichkeit (vgl. Warnke 2013: 76 f.).

Die Definitionen von *Sprache* als Zeichensystem oder als kommunikatives Mittel schließen sich nicht aus. Folglich ist sie ein vernetztes Konstrukt von Aussagen und Zeichen (vgl. Konerding 2024: 12). *Sprache* ist sowohl als Tätigkeit des Menschen als auch als Fähigkeit zu verstehen (vgl. Bußmann 2008: 643), die das distinktive Merkmal zur Unterscheidung der Menschen von anderen Lebewesen ist (vgl. Glück 2024: 607) und als solches auch Bedingung für die Ausbildung der Kultur und Gesellschaft (vgl. Bierwisch 2008: 323). Sprache (beziehungsweise eine Einzelsprache) wird im Prozess des Spracherwerbs individuell erlernt (vgl. Bremer/Müller 2021: 13; Bußmann 2008: 644). *Sprache* wird im Nachfolgenden als System verstanden, welches aus Zeichen besteht und der Kommunikation dient.

2.2.2 Mathematik als Sprache

„Im Deutschen ist es lediglich eine kurze Vorsilbe, die das Erzählen vom Zählen trennt“, beobachtet Liebing (2017: 23). Auch wenn diese Relation auf einen engen Zusammenhang von Mathematik und Sprache hindeutet, ist im Alltag die Auffassung von Mathematik als einer Sprache eher unpopulär. Dabei weist Mathematik durchaus Merkmale der Sprache auf. So wird Mathematik genau wie Sprache als „Zeichensystem“ (Bierwisch 2008: 326; Bremer/Müller 2021: 6) verstanden. Sowohl Mathematik als auch Sprache haben eine „kommunikative […] und kognitive Funktion“ (Maier/Schweiger 2008: 11) und dienen der individuellen Wissenskonstruktion (vgl. Maier/Schweiger 2008: 11). Genau wie Sprache, beziehungsweise eine Einzelsprache, hat sich die Sprache der Mathematik immer weiterentwickelt und je nach Kontext unterschiedliche Kommunikationsebenen ausgebildet (vgl. Eisenreich 1998: 1222; Bremer/Müller 2021:34 ff.). Analog zu der mathematischen Untersuchung von Mathematik (vgl. Mehrtens 1990: 140), kann auch Sprache selbstreflexiv sein. Mathematische Aussagen lassen sich voneinander ableiten (vgl. Steinmetz 2018: 199). Somit muss ein logischer Zusammenhang erkennbar sein. Auch innerhalb der Sprache werden Aussagen durch Kohärenz und Kohäsionsmittel inhaltlich beziehungsweise an der Textoberfläche verknüpft (vgl. Bremer/Müller 2021: 190–199). Die „starke Kontextabhängigkeit mathematischer Formulierungen“ (Eisenreich 1998: 1222) ist – wie die Pragmatik veranschaulicht – auch an der Sprache ersichtlich (vgl. Bremer/Müller 2021: 25), wobei in der Regel die Bedeutung von sprachlichen Einheiten stabiler ist (vgl. Metzger/Riegler 2024: 159). Sprachelemente werden nicht willkürlich verknüpft, sondern folgen einer „Mehrstufigkeit der Zeichenorganisation“ (Bremer/Müller 2021: 12), worunter zum Beispiel grammatische Regeln verstanden werden (vgl. Bremer/Müller 2021: 12). Die Mathematik ist in ihrer konkreten Umsetzung ebenfalls Regeln unterworfen (vgl. Mehrtens 1990: 449).

Lorenzen (1955: 185) postuliert, dass Mathematik im Gegensatz zur Sprache keine konkreten Objekte beschreibt. Dem lässt sich aber entgegenhalten, dass sich auch Sprache auf abstrakte Objekte, wie gesellschaftliche Konstrukte oder Gefühle, beziehen kann. Dennoch lässt sich durchaus auch eine Diskrepanz zwischen Sprache und Mathematik feststellen. Ziel der Mathematik ist es, ihre Objekte näher zu charakterisieren und geschaffene Strukturen zu untersuchen (vgl. Steinmetz 2018: 199). Die Mathematik argumentiert mit rein logischen Folgerungen (vgl. Pittioni 2008: 362 f.) und bildet Wahrheiten ab (vgl. Nickel 2023: 19). Mathematik ist präziser als Sprache, so gibt es [in der Sprache] keine „Reformulierungen wie in der Mathematik, die gleichbedeutend sind“ (Schmidt 2024: 272). Absolute Synonyme existieren in der Sprache nicht (vgl. Bremer/Müller 2021: 121f.), da Sprache Inhalte immer perspektiviert (vgl. Drumm 2018: 18). Nach dem „Expressibilitätsprinzip“ von Searle kann sie alle Gedanken versprachlichen (vgl. Bierwisch 2008: 337). Grundsätzlich ist es möglich mathematische Sachverhalte als sprachliche Einheiten zu formulieren. Umgekehrt erscheint dies nur eingeschränkt durchführbar (vgl. Heringer 1972: 46–51). Mathematische Ausdrücke sind von einer Einzelsprache abhängig, da Diagramme von sprachlichen Elementen umgeben sind. So können bei Übersetzungen nur Diagramme oder Grafiken ohne weitere Bearbeitung übernommen werden (vgl. Stolze 2023: 224). Im Vergleich zu einer Einzelsprache hat Mathematik, abgesehen von speziellen Lehnwörtern, keine neuen Phoneme ausgebildet (vgl. Maier/Schweiger 2008: 9).

Snow stellt die „mathematisch-naturwissenschaftliche und technische Welt […] der geisteswissenschaftlich-literarischen Welt“ (Atayan/Metten/Schmidt 2015: 413) gegenüber. Die Kommunikation zwischen diesen Welten sei aufgrund von unterschiedlichen Vorstellungen nicht möglich (vgl. Atayan/Metten/Schmidt 2015: 414). Somit würde eine linguistische Untersuchung der Welt der Mathematik, Naturwissenschaft und Technik eine Verbindung zu der anderen Welt herstellen (vgl. Atayan/Metten/Schmidt 2015: 413). Beutelspacher (2016: 26), argumentiert, dass Mathematik selbst der Status einer Geisteswissenschaft zugesprochen werden könnte, weil sie im Gegensatz zu anderen Naturwissenschaften nicht experimentiert (vgl. Beutelspacher 2016: 26). Obwohl die Auffassungen gegensätzlich sind, scheinen sie jeweils Mathematik zu charakterisieren. Zwar ähnelt die Fachsprache eher einer Naturwissenschaft oder einer technischen Disziplin, weil auch diese sich mathematischen Formeln bedienen, doch ist ihr Vorgehen vom Grundsatz her ein sprachliches Hypothesenformulieren und -beweisen, was die Mathematik näher an den Sprachwissenschaften verortet. Mathematik und Sprachwissenschaft vereint „Sprachreflexion und Schreibpraxis“ (Schmidt 2024: 268). Mathematik weist zwar viele Merkmale einer Sprache auf, wird gleichwohl im Allgemeinen nicht als Sprache betrachtet. Einen möglichen, aber umstrittenen Ausweg böte ihre Charakterisierung als künstliche Sprache an. Dutilh Novaes (2012: 48) plädiert jedoch dafür, die Dichotomie zwischen natürlicher Sprache und künstlicher Sprache (als die auch Mathematik kategorisiert werden kann) aufzuheben, da sie nicht hilfreich erscheine. Zusammenfassend kann Mathematik unter Einschränkungen als Sprache aufgefasst werden. Ihre Struktur erinnert an eine Sprache, auch wenn sie nicht alle Eigenschaften mit ihr teilt. Genau wie Sprache muss Mathematik erworben werden.

2.2.3 Spracherwerb Mathematik

2.2.3.1 Spracherwerb

Der Spracherwerb der Erstsprache eines Kindes basiert auf dessen genetischen Anlagen, dessen Entwicklung sowie der Sozialisierung (vgl. Bremer/Müller 2021: 14). Entscheidend ist, dass ein Kind Objekte erkennen und kategorisieren kann, um sie richtig zu benennen (vgl. Bremer/Müller 2021: 14). Es lernt nicht nur Phoneme, Morpheme und Lexeme, sondern auch die Syntax und Grammatik der Sprache kennen (vgl. Bremer/Müller 2021: 14). Das Kind eignet sich die Sprache unbewusst und ohne große Anstrengung an (vgl. Bremer/Müller 2021: 10). Damit einher geht das Zurechtfinden innerhalb der Gesellschaft, in der das Kind zunehmend aktiver teilnehmen kann (vgl. Bremer/Müller 2021: 14).

Während Kinder problemlos eine Erst- und gegebenenfalls eine Zweitsprache lernen, ist der Erwerb einer Fremdsprache mit Mühen verbunden (vgl. Bremer/Müller 2021: 14/265). Korrespondierend zu anvisierten Zielen beim Erwerb einer Fremdsprache entwickelten sich verschiedene Modelle von Lernprozessen (vgl. Roche 2020: 15–18). So fokussieren sich behavioristische Verfahren auf die Imitation von Gehörtem (vgl. Roche 2020: 18), wohingegen kognitivistische Verfahren als „Prozess der Informationsverarbeitung […] über die Stufen Wahrnehmen, Erkennen/Identifizieren, Sortieren, Klassifizieren, Verstehen, Behalten und Automatisieren“ (Roche 2020: 21, im Original hervorgehoben) verstanden werden. Der Konstruktivismus versteht Informationsaufnahme als das Konstruieren von mentalen Strukturen, was ein kulturelles Umfeld der Zielsprache zum Erlernen dieser erstrebenswert erscheinen lässt (vgl. Roche 2020: 23 f.). Sprachlernende knüpfen die Fremdsprache an bereits gelernte (erst-) sprachliche Strukturen an, auch wenn sich diese oft als nicht zutreffend erweisen (vgl. Roche 2020: 69 ff.).

2.2.3.2 Mathematik erlernen

„Als Experte kommt man nicht auf die Welt, man wird dazu in einem mehr oder weniger langen Prozess“, so konstatiert Adamzik (2018: 34). Der Spracherwerb der Mathematik ist ein solcher Prozess. Mathematische Grundfähigkeiten wie Zählen und Ordnen können auch „ohne gezielte Instruktion“ (Maier/Schweiger 2008: 53) erlernt werden. Doch schon Rechnen muss genau wie Lesen intentional instruiert werden (vgl. Maier/Schweiger 2008: 53). Nur wer Fähigkeiten hat, die über das mathematische Grundwissen herausreichen, kann die Sprache der Mathematik verstehen und an ihr teilhaben. Im Gegensatz zum Erst- und zum nicht-instruierten Fremdspracherwerb (vgl. Steinmetz 2018: 199) muss der mathematische Erwerb planvoll erfolgen.

Lernende müssen – korrespondierend zum Erstspracherwerb (vgl. Bremer/Müller 2021: 14) – mathematische Objekte, wie beispielsweise Brüche, erkennen und einer Kategorie zuordnen, um sie korrekt zu benennen. Darstellungen dieser ermöglichen das Anwenden von mathematischen Regeln, sind dabei aber keineswegs intuitiv und müssen wie beispielsweise Veranschaulichungen erlernt werden (vgl. Dörfler 2012: 371). Zunächst werden sie in konkreten Kontexten angewendet, wobei das Ziel eine Abstraktion dieser ist (vgl. Kvasz 2015: 64). Ähnliches lässt sich auch für das Erlernen grammatischer Strukturen feststellen (vgl. Bremer/Müller 2021: 17 f.). Zu den Regeln innerhalb des mathematischen Spracherwerbs zählen auch Konventionen wie die Benennung von unbekannten Objekten mit dem Buchstaben „x“ (weiterführend zu Metzger/Riegler 2024: 154). Diese Konventionen ermöglichen, unterschiedliche Konzepte einfacher zu vergegenwärtigen. Als eine vergleichbare sprachliche Konvention kann Groß- und Kleinschreibung in der schriftlichen Sprache betrachtet werden (weiterführend zu Metzger/Riegler 2024: 154).

Der mathematische Spracherwerb ist eng an Bildungseinrichtungen gekoppelt. Dass in der Universität der Sprachgebrauch nicht ausreichend hinterfragt und gelehrt wird, kritisiert Dueck (2008: 206). Gemäß dem Paradigma des Konstruktivismus versuchen Studierende folglich durch Kontakt mit dem Fach Mathematik, dessen Sprache zu erlernen und scheitern daran jedoch häufig (vgl. Dueck 2008: 206). Es ist empirisch belegt, dass Beweise für viele Studierende eine Herausforderung darstellen (vgl. Hein 2021: 3). Das Lesen eines mathematischen Fachtextes ist selbst für Fortgeschrittene „oft ein langsamer, langwieriger und mühsamer Prozeß“ (Davis/Hersh 1985: 294). Entsprechende Probleme lassen sich beim Erstspracherwerb nicht feststellen. Für den erfolgreichen mathematischen Spracherwerb ist eine stetige sprachliche Auseinandersetzung notwendig, die geplant sein sollte (vgl. Metzger/Riegler 2024: 161; Schmidt 2023b: 436). Zum Erlernen der Sprache der Mathematik ist folglich die individuelle Generierung mathematischen Wissens unerlässlich.

2.3 Wissen und Mathematik

2.3.1 Wissen und Wissenserwerb

„Wissen ist sprachlich verfasst“ (Atayan/Metten/Schmidt 2015: 416) und dementsprechend von Sprache limitiert und beeinflusst (vgl. Felder 2009: 15 f.). *Wissen* ist ein individuelles mentales Konstrukt, welches auf begründeten Annahmen über die Wirklichkeit beruht und sich aus historischen Gründen, Erfahrungen oder den „Zusammenhänge[n] ideeller Gegenstände“ (Kirchner et al. 2013: 737) und deren Natur zusammensetzt (vgl. Müller 2024: 729). Daraus folgert Konerding (2009: 81), dass *Wissen* auf überindividuell akzeptierten Annahmen basiert. Demnach muss individuelles von gesellschaftlich verfügbarem Wissen unterschieden werden. Des Weiteren lässt sich prozedurales Wissen – eine praktische, handlungsbezogene Fähigkeit – von deklarativem Wissen, welches Orientierung für Handlungen anbietet, abgrenzen (vgl. Konerding 2015: 61 ff.).

Wissen ist zeitlich bedingt und beruht auf Daten sowie deren Deutungen – den Fakten (vgl. Felder 2013: 13 f.). Diese Deutungen werden gesellschaftlich in Diskursen ausgehandelt und manifestieren sich in im Konflikt stehenden Konzepten, den sogenannten „agonalen Zentren“ (Felder 2021: 58). Unter „semantischen Kämpfen“ wird das Bestreben aufgefasst, „in einer Wissensdomäne bestimmte sprachliche Formen als Ausdruck spezifischer, interessensgeleiteter und handlungsleitender Denkmuster durchzusetzen“ (Felder 2006: 14). Sprachliches Handeln von Diskursteilnehmenden kann in die Typen „Sachverhaltskonstitution“, „Sachverhaltsverknüpfung“ und „Sachverhaltsbewertung“ unterteilt werden (vgl. Felder 2013: 23 f.).

Sprache ist das „Medium der Wissensvermittlung“ (Atayan/Metten/Schmidt 2015: 416). Experten und Laien sind als entgegengesetzte und thematisch abhängige Konzepte einer Skala zu verstehen (vgl. Spitzmüller 2021: 2). Experten besitzen ein spezifisches, dem Laien fehlendes, Wissen und haben einen „komplexen […] diskursiven Prozess [durchlaufen], in dem unter anderem Verhandlungen von Deutungsansprüchen“ (Spitzmüller 2021: 1 f.) entscheidend sind. Laien beschäftigen sich in einer anderen sozialen Stellung mit den gleichen Sachverhalten wie Experten (vgl. Spitzmüller 2021: 4 f.). Diese üben im Rahmen der Wissensvermittlung durch die Perspektivierung von Sachverhalten Macht aus, während Laien ihr eigenes Verständnis gewährleisten müssen (vgl. Felder 2021: 53f.). Folglich sind beide Instanzen für eine erfolgreiche Wissensvermittlung verantwortlich (vgl. Felder 2021: 54). Das Ausmaß des übermittelten Wissens kann divergieren, wobei ein nicht perspektivierter Zugang zu Wissen aufgrund der Abhängigkeit von Sprache unmöglich erscheint (vgl. Felder 2021: 54; 61). Folglich ist Objektivität idealisiert und kaum herstellbar.

2.3.2 Objektivität und Wirklichkeit

Wahrnehmungen über die Wirklichkeit können nur sprachlich geäußert werden und sind daher immer perspektiviert (vgl. Felder/Gardt 2015: 4; Felder 2013: 15 f.). Dem Konstruktivismus, also der Vorstellung, dass die Verarbeitung der Wirklichkeit nur mittels Sprache erfolgen kann, steht der Realismus gegenüber, wonach das Erfassen der Wirklichkeit unabhängig von Sprache ist und die Versprachlichung zuletzt erfolgt (vgl. Gardt 2018: 1/16). Der folgenden Arbeit liegt die konstruktivistische Vorstellung zugrunde, die zurzeit größere Resonanz erfährt (vgl. Felder/Gardt 2015: 4). Sprechende setzen sprachliche Einheiten funktional ein, sodass diese eine bestimmte Wirkung erfüllen (vgl. Felder/Gardt 2015: 18). Durch die sprachliche Form werden Sachverhalte perspektiviert und gedeutet (vgl. Felder/Gardt 2015: 14; Felder 2009: 20). So beschreibt Felder (2013: 21), dass „[d]ie Durchsetzung von bestimmten Perspektiven auf Sachverhalte […] sprachlicher Mittel [bedarf], welche den jeweiligen Geltungsbereich ausdrücken“ (Felder 2013: 21).

Grundsätzlich müssen Realität und Wirklichkeit unterschieden werden. Die *Wirklichkeit* ist Menschen unmittelbar zugänglich, folglich durch Sinne wahrnehmbar, und die *Realität* wird durch Referenzen daraus konstruiert (vgl. Felder 2018: 392). Sprechende versuchen auf die Wirklichkeit zu referieren und diese durch geeignete Aussagen überindividuell zur Verfügung zu stellen (vgl. Jäger 2018: 314). Nach Peirce kann so das „immediate object“ als „das vom Zeichen repräsentierte Objekt“ (Gardt 2018: 25) von dem „dynamical object“ – „das Objekt in der Wirklichkeit selbst“ (Gardt 2018: 25) – unterschieden werden. Dass diese Dichotomie nicht immer evident ist, zeigen abstrakte Objekte, wie die Objekte der Mathematik.

Obwohl die Beurteilung des Wahrheitsgehaltes kein Teil von linguistischen Untersuchungen ist, können Aussagen kritisch hinterfragt werden (vgl. Schmidt 2024: 266). So ist es möglich, vermeintliche Wahrheiten als individuelle Überzeugungen zu dekuvrieren (vgl. Gardt 2018: 10). Wenn jedes Individuum nur ein Abbild der Wirklichkeit konstruiert, kann keine objektive Darstellung dieser existieren (vgl. Gardt 2018: 32). Schmidt (2018: 110) wendet ein, dass sprachliches Handeln darauf abzielt, wirklich betrachtete Schlussfolgerungen und nicht die Wirklichkeit an sich abzubilden. Diese ist nicht vollständig begreifbar und ein „unmittelbarer Wirklichkeitskontakt[…] mit den Objekten out-there bereits im Rahmen der Forschungsparadigmen der Naturwissenschaft problematisch geworden“ (Jäger 2018: 303). Kollektiv wird niemand zum Finden der Wahrheit legitimiert (vgl. Felder 2018: 371 f.), doch gerade zur Orientierung von Individuen in der Welt ist objektives – von subjektiven Eindrücken unberührtes – Wissen erstrebenswert. Sprachliche Einheiten sind zwar nicht frei von subjektiven Einflüssen, doch mit einer gemeinsamen Wirklichkeit (und somit zumindest dem Ideal der Objektivität) untrennbar verbunden (vgl. Attig 2018: 340). Eine Möglichkeit zur Annäherung an Objektivität ist die multiperspektivische Betrachtung eines Sachverhaltes durch Offenlegung von Perspektiven (vgl. Felder 2013: 16 f.).

2.3.3 Wissen in der Mathematik

„Wissen hat definitiv kein logisch oder mathematisch gesichertes Fundament“, stellt Konerding (2015: 77) fest. Doch auch mathematisches Wissen ist nicht absolut und muss erst hergestellt werden. So veranschaulicht Lakatos (1979: 1 ff.) in einem fiktiven Dialog zum mathematischen Wissenserwerb, dass es in der Mathematik nicht ausreicht, dass eine Vermutung für eine große Anzahl an Beispielen wahr ist. Jede Vermutung muss bewiesen werden (vgl. Lakatos 1979: 2 f.). Der Dialog demonstriert die Entstehung und den Beweis einer mathematischen Formel (vgl. Schmidt 2009: 457). Einzelne Schritte des Beweises werden hinterfragt (vgl. Lakatos 1979: 3 f.). Es ist nicht nur entscheidend, möglichst klare Ausdrücke zu verwenden, sondern auch Aussagen gegebenenfalls geeignet umzuformulieren (vgl. Lakatos 1979: 99/107). Nach Lakatos folgt daraus, dass Mathematik eine quasi-empirische Arbeit ist, die im Diskurs entsteht und an Vorwissen angeknüpft ist (vgl. Schmidt 2009: 457–460). Beweise sind somit ein Produkt von Irrtümern und daraus resultierendem Hinterfragen von Beweisschritten (vgl. Schmidt 2009: 457). Sie ermöglichen Konsens und Kohärenz, also die „kognitive Einheit“ (Heintz 2000: 19) der mathematischen Theorie. Schmidt (2009: 459) folgert aus seinen Betrachtungen, dass „sich in Lakatos‘ Dialog sehr wohl semantische Kämpfe erkennen“ lassen. Ziel dieser sei jedoch nicht Machterwerb, sondern Mathematik überindividuell verständlich zu machen (vgl. Schmidt 2009: 459). Auch in der Mathematik lassen sich Sachverhaltskonstitutionen identifizieren (vgl. Schmidt 2009: 459). Diese werden verknüpft und bewertet, wonach die Klassifikation der Sprachhandlungstypen auch im mathematischen Diskurs erkennbar ist. Mathematisches Wissen lässt sich sowohl als prozedural oder als deklarativ nachvollziehen (vgl. Jacob 2023: 389 f.).
Obwohl das Wissen der Mathematik im Studium zunächst festgelegt scheint, werden in der Forschung sehr wohl Forschungsdesiderate offensichtlich (vgl. Schmidt 2024: 268), die „über Jahrhunderte bleiben [können], bis mathematische Konzepte für deren Lösung einen wissenschaftlichen Durchbruch erlauben“ (Schmidt 2023b: 439). Diese werden anhand ihrer Widerspruchsfreiheit gemessen (vgl. Nickel 2023: 30). Heintz – eine Soziologin, die durch Hospitationen versuchte, einen Einblick in die Mathematik zu erhalten (vgl. Schmidt 2009: 460) – ergänzt, dass mathematische Beweise an ihre Entstehungszeit gekoppelt sind und somit nicht die absolute Wahrheit, sondern einen „Geltungsanspruch“ (Heintz 2000: 72) äußern. Diese Fähigkeit zum Konsens hebt Mathematik von anderen Wissenschaften ab, die oftmals zwei unvereinbare diskursive Pole vorweisen (vgl. Heintz 2000: 272; Schmidt 2009: 460).

Sprache ist für mathematisches Wissen „erkenntniskonstitutiv“ (Atayan/Metten/Schmidt 2015: 417). Um dieses überindividuell und somit als Teil des wissenschaftlichen Diskurses verfügbar zu machen, wird das Wissen schriftlich veröffentlicht und dementsprechend sprachlich perspektiviert (vgl. Schmidt 2023b: 423; Atayan/Metten/Schmidt 2015: 411). Schon der gewählten Textsorte kommt diesbezüglich Bedeutung zu, da abhängig von dieser Wissen erzeugt, dargestellt oder vermittelt werden kann (vgl. Schmidt 2023b: 430 ff.). Die Sprachabhängigkeit veranschaulicht, dass auch Mathematik als „harte[…] Wissenschaft[…] bis zu einem bestimmten Grade weich ist“ (Atayan/Metten/Schmidt 2015: 415). Dennoch sind Popularisierungen von mathematischen Theorien erschwert, da zum Verständnis dieser oft grundlegende Kenntnisse von Nöten sind und sie kaum abstrahiert werden können (vgl. Schmidt 2003: 24 f.).[5] Bei Lernenden erweist sich die Sprache auch als Indiz für ihr Verständnis, da sich falsche Vorstellungen in widersprüchlich verwendeter Sprache äußern können (vgl. Metzger/Riegler 2024: 157).

Nach Hyland (1998: 85) lassen sich fünf Ebenen von Wissen unterscheiden, die sich auf dessen Sicherheit beziehen. Dabei werden Aussagen, die als wahr oder falsch gelten, als Fakten klassifiziert (vgl. Hyland 1998: 85). In Bezug auf mathematisches Wissen wären bewiesene Aussagen Fakten, obgleich berücksichtigt werden muss, dass mathematisches Wissen im Gegensatz zu naturwissenschaftlichem, aber auch zu sprachlichem Wissen, nicht auf Daten basiert. Insofern besteht mathematisches Wissen – im Gegensatz zu allgemeinen Vorstellungen – ausschließlich aus als konsensuell betrachteten Aussagen. Vermutungen, denen nach ihrem Beweis ein faktischer Charakter zukommt, erweitern dieses Wissen dann. Vor der Führung eines Beweises können Aussagen weder als Fakten noch als Teil des mathematischen Wissens klassifiziert werden, weil das Erhalten der Widerspruchsfreiheit der Mathematik nicht sichergestellt ist. Mathematisches Wissen basiert auf Denken „und ist insofern durch Erfahrungen nicht widerlegbar“ (Heintz 2000: 52) und gilt daher als „sicheres Wissen“ (Heintz 2000: 53). Mathematische Objekte „sind von vornherein auf eine gemeinsame, objektive Orientierung zugeschnitten“ (Nickel 2023: 30). Ihre Konstruktion durch Menschen erlaubt es, genauere Aussagen über sie als über reale Gegenstände zu treffen (vgl. Nickel 2023: 17). Mathematik knüpft dabei teilweise an die wahrgenommene Wirklichkeit an und abstrahiert diese (vgl. Schmidt 2009: 454).

[5] Doch auch gesellschaftliche Wahrnehmungen können die Popularisierung beeinflussen. In den von Schmidt (2023a: 130–138) zusammengestellten Auszügen aus Zeitungsartikeln wird eine ambivalente Charakterisierung der Mathematik innerhalb der Gesellschaft ersichtlich. Mathematik wird einerseits als schweres Fach, dessen Erlernen nur wenigen gelingt und welches die Wirklichkeit niemals abbilden kann, dargestellt (vgl. Schmidt 2023a: 130–138). Andererseits wird sie als Möglichkeit verstanden, abstrakte Welten zu kreieren (vgl. Schmidt 2023a: 130–138). Der journalistische Querschnitt zeigt, dass das Fach Mathematik mit vielen Vorurteilen verknüpft ist, die die Popularisierung zusätzlich erschweren können.

Die Mathematikgeschichte kann „als Geschichte zunehmender Autonomie beschrieben werden“ (Nickel 2023: 17). Kvasz (2008: 8 f.) stellt fest, dass sich drei Ebenen von linguistischen Neuerungen in der Sprache der Mathematik unterscheiden lassen. Regeländerungen oder neue Schreibweisen bezeichnet er als „re-codings“, unter „relativizations“ werden neue Interpretationen ohne äußere Sprachveränderungen verstanden, wohingegen „reformulations“ die Grundannahmen einer mathematischen Theorie neu formulieren (vgl. Kvasz 2008: 8 f.).
Je nach den für wahr gehaltenen Annahmen kann die Gültigkeit mathematischer Aussagen variieren. So ist beispielsweise das Wurzelziehen von einer negativen Zahl wie -1 im sogenannten Körper der reellen Zahlen nicht möglich, wohingegen dem Körper der komplexen Zahlen deren Definition zugrunde liegt. Die Mögliche-Welten-Semantik bildete sich als Antwort der Änderung von Wahrheitswerten von Aussagen abhängig von ihrem Äußerungskontext heraus (vgl. Löbner 2015: 425 f.). Ihr entspringt die Idee, dass eine mögliche Welt ein Modell der Sprache ist, welches auf Informationen basiert, die es ermöglichen, Aussagen einen Wahrheitswert zuzuweisen (vgl. Löbner 2015: 426). „[D]ie Menge von Zustandsbeschreibungen [definiert] eine Menge von möglichen Universen“ (Lyons 1980: 175). Somit besteht eine mögliche Welt aus allen möglichen sie beeinflussenden Faktoren und stimmt genau dann mit der Realität überein, wenn alle Fakten jenen der realen Welt entsprechen (vgl. Löbner 2015: 426). Schmidt (2018: 108) beobachtet, dass Menschen „in einer Vielzahl von ‚Welten‘ leben“, wobei die Gültigkeit dieser diskursiv ausgehandelt wird. Einfache Aussagen können in der einen Welt wahr, in der anderen Welt falsch sein, je nachdem, wie die mögliche Welt konstruiert wird (vgl. Löbner 2015: 426). Eine Aussage selbst legt nicht ihren Wahrheitswert fest, da dieser abhängig vom Äußerungskontext und somit von der zugrundeliegenden Welt ist (vgl. Kupffer 2005: 217). Kupffer (2005: 221 f.) behauptet, dass grundsätzlich alle mathematisch wahren Aussagen in allen möglichen Welten wahr sind. Doch diese beruhen auf Vorannahmen, die sich unterscheiden können. Demnach ist nicht jede mathematische Aussage in jeder mathematisch möglichen Welt richtig. Insofern gilt Kupffers Behauptung nur eingeschränkt und basiert wohl auf Alltagsvorstellungen von Mathematik wie Grundrechenarten (zum Beispiel Addition). Die Annahme gilt nur, solange entsprechende mathematische Grundannahmen, die den Grundrechenarten zugrunde liegen (wie die Addition der natürlichen Zahlen), gelten. Insofern ist auch Mathematik vom Äußerungskontext abhängig und die Theorie der möglichen Welten eignet sich besonders gut, um die unterschiedlichen Subdisziplinen der Mathematik zu veranschaulichen.
Zusammenfassend ist mathematisches Wissen sprachlich verankert. Somit bieten sprachliche Analysen Einblicke in dessen Perspektivierung.

3 Empirische Untersuchung der Fragestellung

3.1 Vorüberlegungen

3.1.1 Datengrundlage

„Textsorten wie Lehrbuch und Handbuch haben für die Darstellung und Organisation des Wissens eine Schlüsselrolle“, erläutert Schmidt (2023b: 430). Ihr didaktisches Ziel erleichtert Studierenden das Erlernen des jeweiligen Stoffes und dient der Darstellung von unstrittigem Wissen (vgl. Schmidt 2023b: 431). Zudem werden Lehrbücher oft als Grundlage von Vorlesungen angesetzt und repräsentieren das in der Universität dargestellte Wissen. Als Untersuchungsgrundlage für die Analyse der Perspektivierung und Objektivitätsbeurteilung von mathematischen Sachverhalten dienen im Folgenden sechs Lehrbücher zur Einführung in die Analysis[6], die in den letzten vier Jahren erschienen sind. Für viele Studierende stellen Analysis und Lineare Algebra den ersten Kontakt mit der mathematischen Sprache dar, weswegen entsprechende Lehrbücher in diese einführen müssen. Die folgende Beschränkung auf Einführungen der Analysis, die primär auf Mathematikstudierende ausgerichtet sind, dient der besseren Vergleichbarkeit der Texte. Dementsprechend erscheint die Korpusauswahl sinnvoll, um die Perspektivierung neuer Sachverhalte zu untersuchen. Zur Ergänzung des beschriebenen Korpus sollen an einzelnen Stellen Transkripte von Videos zu Vorlesungen der Analysis[7] herangezogen werden. Zwar ist offensichtlich, dass der Modus der Vorlesung Auswirkungen auf sprachliche Phänomene hat, doch erscheint vereinzelt eine Betrachtung dieser sinnvoll, da sie oft den Ursprung des Wissenserwerbs für viele Studierende darstellen. Die untersuchten Lehrbücher unterscheiden sich nicht nur im Aufbau, sondern auch in ihrer Gestaltung (etwa die Farbauswahl in E, die teilweise, wie Einschübe zu kennzeichnen, funktionalen Hintergrund hat (vgl. E 56)).
Im Rahmen der Analyse sollen grundlegende Auffälligkeiten, die in das Fach und das Themengebiet der Analysis einführen, untersucht werden. Damit eine thematische Vergleichbarkeit gewährleistet ist, soll sich die darauffolgende Analyse auf Kapitel des Themas ‚Folgen und Konvergenz‘ beschränken. Dazu wurde aus den sechs Lehrbüchern ein Subkorpus[8] erstellt, das nur die thematisch passenden Kapitel (-teile) berücksichtigt. Hierbei konnten keine klaren Grenzen gezogen werden, weswegen auch thematisch passende Aussagen aus anderen Kapiteln im Folgenden heranzuziehen sind.[9]

---

[6] Die einzelnen Lehrbücher sind im Anhang (I Primärliteratur) aufgeführt. Zur besseren Lesbarkeit wird im Folgenden auf die einzelnen Lehrbücher mit Buchstaben verwiesen; ihre Entsprechung ist dort ebenfalls nachlesbar.
[7] Die Transkripte der ausgewählten Vorlesungen (basierend auf Videos) sind im Anhang (IV Transkripte) aufgeführt. Auf diese wird durch das in der entsprechenden Überschrift genannte Kürzel verwiesen.
[8] Die im Subkorpus berücksichtigten Auszüge sind im Anhang (I Primärliteratur) hervorgehoben.
[9] Dies hat keine erkennbaren Auswirkungen auf die gewählten Ausdrücke und wird im Folgenden vernachlässigt.

3.1.2 Methodik

Um aufzuzeigen, wie in den Lehrbüchern zur Einführung in die Analysis Wissen perspektiviert wird, bietet es sich an, auf die Methodik der Diskursanalyse zurückzugreifen (vgl. Felder 2013: 15). Unter *Diskurs* ist „die Gesamtheit vernetzter Aussagen zu verstehen“ (Warnke 2015: 224). Da sich alle gewählten Lehrbücher auf Analysis beziehen, sind sie thematisch vernetzt. Bei konkreten Diskursanalysen kann immer nur ein Teil des Diskurses, in Form eines Korpus, berücksichtigt werden (vgl. Warnke 2013: 86 f.). Diese ermöglichen anhand von Texten eine Aufdeckung „von divergenten und konvergenten Konzeptualisierungen“ (Felder 2013: 20), um die zugrunde liegende Perspektivität des dargestellten Wissens zu analysieren. Quantitative Verfahren erweisen sich bei der Identifikation der zu analysierenden Begriffe als hilfreich.

Obwohl grundsätzlich keine agonalen Zentren zu erwarten sind, bietet die von Felder (2015: 96 ff.) darauf bezogene Analyse der sprachlichen Oberfläche, unter der auch Bilder verstanden werden, und der Sprachhandlungstypen erste Ansatzpunkte. Die Sachverhaltskonstitution ist insbesondere in Definitionen und Sätzen zu erwarten. Von Interesse scheint deren Bewertung und Verknüpfung zu sein, weswegen sich die folgende Arbeit auf diese Aspekte fokussiert. Auch Grafiken sollen miteinbezogen werden, da bildliche und sprachliche Einheiten Interdependenzen aufweisen (vgl. Klug/Stöckl 2015: 249).

Die Perspektivierung und Hinführung zum Themengebiet der Analysis soll durch die Analyse der Titel, der Inhaltsverzeichnisse und des gewählten Einstieges der Lehrbücher erfolgen. Im Anschluss soll die Einführung des Subthemas ‚Folgen und Konvergenz‘ analysiert werden. Da zentrale Lexeme auf grundlegende mathematische Konzepte verweisen, soll ihre entsprechende sprachliche Einführung hinsichtlich ihrer Objektivität beziehungsweise Perspektivität analysiert werden. Dabei werden vor allem Verstöße gegen diese vermeintliche Objektivität hervorgehoben werden, was an vielen Stellen mathematische Beweise und Definitionen ausschließt.

Zur Herleitung der zentralen Lexeme des Subkorpus‘ zu ‚Folgen und Konvergenz‘ wird das digitale Tool Sketch Engine hinzugezogen. Zunächst wurde das Korpus ‚Analysis‘ konzipiert, welches die gesamten Lehrbücher enthält. Das anschließend erstellte Subkorpus berücksichtigt thematisch nur ‚Folgen und Konvergenz‘. Zunächst wurde mithilfe des Programms eine Tabelle erstellt, die die absolute Häufigkeit der Substantive innerhalb des Subkorpus abbildet. Da Substantive oft zentrale Objekte der Mathematik benennen,[10] konnte die Auswertung auf diese beschränkt werden. Aus dieser wurde nun eine gekürzte Tabelle erstellt, die nur mathematisch relevante Schlüsselwörter mit Bezug zu ‚Folgen und Konvergenz‘ berücksichtigt (vgl. Tabelle

[10] Ein Hinweis hierauf ist ihr gehäuftes Vorkommen in mathematischen Texten (vgl. Kruse 2023: 472); zudem sind Fachwörter meistens Substantive (weiterführend zu Gerisch 1988: 54f.).

1). Im Anschluss erfolgte die Erstellung einer Liste aller zwei- bis vierwertigen N-Gramme. Auch diese wurde auf mathematisch relevante und statistisch signifikante beschränkt, so wurden N-Gramme mit Artikel ausgeschlossen (vgl. Tabelle 2). Zuletzt wurden die Keywords des Subkorpus im Vergleich zum Gesamtkorpus ausgewertet. Diese stellen für das Subkorpus relevante Lexeme heraus, die im Korpus ‚Analysis' seltener sind. Analog ließ sich auch hier eine auf wesentliche Schlüsselwörter reduzierte Tabelle erstellen (vgl. Tabelle 3). Basierend auf der Liste der absoluten Häufigkeit der Substantive, ergänzt durch die anderen beiden Tabellen und durch Zusammenfassen mehrerer Lexeme, konnten so die wichtigsten identifiziert werden, die im Folgenden analysiert werden: Folgen, Konvergenz, Konvergenzregeln, Divergenz, Beschränktheit, Einschließungssatz, Teilfolge, Häufungspunkt, Satz von Bolzano-Weierstraß und Cauchy-Folge (vgl. Tabelle 4).[11]

3.1.3 Thematische Einordnung

Zur besseren Verständlichkeit sollen die gefundenen Untersuchungslexeme kurz eingeordnet werden. Dies kann selbstverständlich nicht unabhängig von Sprache erfolgen, wobei dieser Aspekt im Folgenden vernachlässigt werden soll. Um mögliche Beobachtungen, die aus der Analyse der zu untersuchenden Lehrbücher resultieren, nicht vorwegzugreifen, wird zur Erläuterung ein anderes Lehrbuch sowie ein Wörterbuch der Mathematik hinzugezogen. Bei der Erklärung wird bewusst von der mathematischen Fachsprache abgewichen.

Die *Analysis*, die sich als Fachgebiet der Mathematik mit Differential- und Integralrechnung auseinandersetzt, beschäftigt sich unter anderem mit ‚Folgen und Konvergenz' (vgl. Hoffmann 2017: 67). Eine *Folge* ordnet jeder natürlichen Zahl eine (reelle) Zahl zu (vgl. Angermann/Mulansky 2022: 65). Wenn sich eine ›Folge‹ einem Wert immer weiter annähert, nennt man diesen *Grenzwert* und die ›Folge‹ *konvergent* (vgl. Angermann/Mulansky 2022: 67). *Divergent* heißt demgegenüber eine ›Folge‹, die nicht konvergiert (vgl. Angermann/Mulansky 2022: 67). Zur Beurteilung von ›Konvergenz‹ dienen „Konvergenzregeln“. Eine spezielle Konvergenzregel ist der „Einschließungssatz“. Demnach konvergiert eine dritte ›Folge‹, die von zwei anderen ›Folgen‹ gleichen ›Grenzwerts‹ eingeschlossen ist, auch mit diesem (vgl. Angermann/Mulansky 2022: 73). Wenn eine ›Folge‹ *beschränkt* ist, dann sind die angenommenen Werte nach oben oder unten limitiert (vgl. Angermann/Mulansky 2022: 67). Eine *Teilfolge* betrachtet nur einen Teil der ›Folgenglieder‹ einer ›Folge‹; sollte diese ›Teilfolge‹ gegen einen bestimmten Wert konvergieren, nennt man diesen *Häufungspunkt* der ursprünglichen ›Folge‹ (vgl. Angermann/Mulansky 2022: 78). Der „Satz von Bolzano-Weierstraß“ besagt, dass eine beschränkte

[11] Die ausgewählten Lexeme sind von allgemeineren Konzepten bis zu speziellen Sätzen der Mathematik sortiert.

›Folge‹ mindestens einen ›Häufungspunkt‹ aufweist (vgl. Walz 2017: 244). Eine *Cauchy-Folge* ist eine Folge, deren ›Folgenglieder‹ einen immer geringeren Abstand vorweisen (vgl. Walz 2017: 295).

3.2 Hinführung zur Analysis

3.2.1 Titel und Inhaltsverzeichnis

Schon bei den Titeln der einzelnen Lehrbücher lassen sich Unterschiede feststellen. Während nur zwei der Bücher den Titel „Analysis“ ohne Zusatz beziehungsweise nur mit der Nennung der Ausgabe tragen (C, F), ergänzt B diesen um eine römische Eins. Dadurch wird verdeutlicht, dass das Buch nicht den gesamten Stoff der Analysis abbildet, sondern lediglich einen Teil. Auch die Lehrbücher A sowie D spielen auf diese Tatsache mithilfe der Zahl eins an. Zusätzlich werden sie jedoch ergänzt. Der Untertitel „Ein zuverlässiger und verständlicher Begleiter für Studium und Prüfung“ (A) bezieht sich ausschließlich auf die Güte und Verständlichkeit des Buches und auf seine Zielgruppe der Studierenden, wohingegen „Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen“ (D) auf eine inhaltliche Beschreibung abzielt. Der Titel „Analysis. Fokussiert und farbig“ (E) erscheint erklärungsbedürftig. Friedl beschreibt in einer Einleitung, dass sich „fokussiert“ auf die Darstellung von wichtigem, nicht zu detailreichem, Stoff, und „farbig“ auf die grafische Darstellung bezieht (vgl. E: 1). Bereits die gewählten Titel variieren in ihrer Darstellung der Analysis und setzen das Buch in einen bestimmten Rahmen.

Der Umfang der einzelnen Lehrbücher variiert stark und liegt zwischen 227 (E) und 699 Seiten (B). Dementsprechend erscheint eine Variation des Umfangs des dargestellten Inhalts unausweichlich. Dieser unterscheidet sich schon in der Auswahl der Kapitel. So ist „Vollständige Induktion“ das erste Kapitel des Lehrbuchs D, wohingegen Lehrbuch A das Thema als zweites Kapitel verortet. Die Lehrbücher C, E und F weisen dem Thema lediglich den Status eines Unterkapitels zu, während B das Thema nicht im Inhaltsverzeichnis aufführt, aber ebenfalls behandelt (vgl. B 42). Durch die Relevanzsetzung von einzelnen Themen mithilfe der abweichenden Benennung innerhalb des Inhaltsverzeichnisses variiert deren Bedeutung in unterschiedlichen Lehrbüchern. Auffällig ist, dass die Lehrbücher verschiedene Einstiege in das Gebiet der Analysis wählen. So überschneiden sich zwar die gewählten ersten Kapitel thematisch, aber keines der ersten Kapitel fokussiert sich auf dasselbe Thema wie eines der anderen. Dementsprechend unterscheidet sich die jeweilige Sachverhaltskonstitution des Einstiegs in die Analysis. Da dieser nun mittels sprachlicher Mittel begründet, verarbeitet oder mit anderen Themen – im Rahmen der Sachverhaltskontextualisierung – verknüpft werden muss, kommt dieser Wahl Bedeutung zu, die insbesondere die individuelle Konzeptualisierung der Analysis der Rezipierenden beeinflusst.

3.2.2 Vorwort

Jedes der untersuchten Lehrbücher hat ein Vorwort, welches teilweise von weiteren Vorworten für spätere Auflagen ergänzt wird (vgl. A V–VIII; B VII–XI; C v–viii; D V–XIII; E 1f.; F V–VIII). Bei der Analyse stellt sich das erste Vorwort eines jeden Buches als das aussagekräftigste heraus, da die darauffolgenden oft nur Neuerungen erläutern. Grundsätzlich wird in jeder Einführung ein inhaltlicher Überblick gegeben und die Entstehungsgeschichte (unterschiedlich ausführlich und persönlich) des Buches erläutert. Oft endet das Vorwort mit einem Dank.

Teilweise wird bereits in das Gebiet der Mathematik oder im Speziellen in das Teilgebiet der Analysis eingeführt. So bezeichnet das Lehrbuch A Analysis als „eine der tragenden Säulen der Mathematik“ (A V) und führt diese Metapher mit „‚Wissensgebäude‘ der Mathematik“ (A V) fort. Dadurch wird die Relevanz des Faches hervorgehoben, das schon zu Beginn wertend mit „wunderschön[…]“ (A V) bezeichnet wird. Gleichzeitig impliziert dies eine gewisse Beständigkeit. Auch B verarbeitet eine auf Materialität bezogene Metapher und nennt „Erkenntnisse der Analysis […] ästhetische Denkmale“ (B VIII). Damit wird die Analysis zunächst positiv konnotiert, vor allem aber auch ihre historische Relevanz und somit ihre Unverrückbarkeit betont. Des Weiteren wird Mathematik als „Suche nach Struktur“ (B IX) verstanden. Diesen prozesshaften Charakter verdeutlicht auch A, welches die historische Entwicklung von Mathematik als einen „komplexe[n] und interaktive[n] Prozess“ (A VI) beschreibt, bei dem „die Kluft zwischen Bekanntem und Unbekanntem“ (A VI) zu überwinden versucht wird. Diese Wortwahl perspektiviert Mathematik bereits als Wissenschaft, bei der Wissen absolut zu verstehen ist.

Dem Vorwort von B vorangestellt ist ein Zitat Gauß‘: „Wahrlich ist es nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Erben, nicht das Da-Sein, sondern das Hinkommen was den größten Genuss gewährt“ (B VI). Dieses scheint in Bezug zu Mathematik zu stehen, das Buch weicht schon hier von der erwarteten Objektivität ab. Das Zitat ist eher philosophisch und trägt im engeren Sinne nicht zum Verständnis von Mathematik bei. Als erstrebenswert wird nicht das Wissen an sich, sondern das „Hinkommen“ beschrieben. Dieses kann sich auf neue Erkenntnisse beziehen, die individuell oder fachwissenschaftlich erfolgen können und bisherige Vorstellungen erweitern oder relativieren können. Damit dient das Buch im engeren Sinne auch dem Lernen, welches Vergnügen bereitet.

C eröffnet keine Vorstellung von Mathematik, äußert aber dem Buch zugrundeliegende Paradigmen, die die Kürze betonen sowie die Wichtigkeit, dessen, was verschwiegen wird und die erläutern, dass „[d]ie beste Motivation für einen mathematischen Sachverhalt […] ein klarer und einfacher Beweis“ (C v) ist. Die Auswahl der Themen erscheint folglich reflektiert erfolgt zu sein. Das Lehrbuch D möchte „konkreten mathematischen Inhalt […] einem großen abstrakten Begriffsapparat“ (D V) vorziehen, wodurch die als agonalen Zentren identifizierbaren Konzepte ›Konkretion‹ und ›Abstraktion‹ herausgestellt und ›Konkretion‹ als wünschenswert hervorgehoben wird. Des Weiteren betont D ebenfalls die Wichtigkeit der Kürze, aber auch die von Beispielen (vgl. D V), wobei auch das Lehrbuch F (VII) dem beipflichtet. Somit werden sprachliche Einordnungen als überflüssig angesehen. Die geäußerten Vorstellungen und Einordnungen von Mathematik können die Erwartungshaltung und das Leseverhalten beeinflussen.

3.2.3 Sachverhaltskonstitution

Grundsätzlich sind bei der Sachverhaltskonstitution der Analysis zwei Tendenzen zu beobachten. Die Lehrbücher A, B und C erläutern ihr Verständnis von Mathematik, wohingegen die Lehrbücher D, E und F ohne einleitende Worte einen mathematischen Sachverhalt thematisieren. So ist die Tendenz des Vorwortes von A und B, Mathematik als solches einzuordnen, auch im thematischen Einstieg erkennbar (vgl. A 1 f.; B 3 f.).

Lehrbuch A erläutert: „In der Mathematik befassen wir uns mit Aussagen“ (A 1) und erklärt dann mithilfe von Beispielen wichtige Begriffe wie ›Aussage‹ oder ›Beweis‹ (vgl. A 2). In den darauffolgenden Kapiteln wird näher auf deren Verknüpfung und ihre Formulierung mittels Quantoren (Symbole, die eine Kurzschreibweise ermöglichen) eingegangen (vgl. A 4–10). Auch B beschreibt Mathematik näher und stellt zunächst die „widerspruchsfreie Objektivität“ (B 3) heraus, die auf „den Errungenschaften der mathematischen Logik und der Mengenlehre“ (B 3) basiert. Für diese Teilbereiche sei es das Ziel, zunächst ein Verständnis zu entwickeln, wobei B problematisiert, dass dies oft in entsprechenden Vorlesungen ausgelassen werde (vgl. B 3). Mathematik wird als „deduktive Wissenschaft“ (B 3) beschrieben und das allgemeine Vorgehen näher erläutert, wobei wesentliche Begriffe wie ›Beweis‹ vorausgesetzt werden oder nur implizit herleitbar sind. Auch C äußert, dass Mathematik sich damit beschäftigt „aus bekannten wahren Aussagen neue wahre Aussagen zu gewinnen“ (C 3). Dabei erläutert C den Grundbegriff ›Aussage‹ anhand eines Beispiels (vgl. C 3), wohingegen der Begriff ›Beweis‹ nicht konkretisiert wird (vgl. C 3). Somit knüpfen die Lehrbücher A, B und C ihre Vorstellung von Mathematik eng an Logik, wobei B dies am stärksten expliziert.

Das Lehrbuch D hingegen führt direkt thematisch das Verfahren der Vollständigen Induktion ein (vgl. D 1). Auch E bietet keinen generellen Einstieg, möchte aber an einige Notationserklärungen „erinnern“ (E 3) und setzt diese damit als bekannt voraus. Insbesondere wird der Begriff der ›Aussage‹ nicht ausgeführt (vgl. E 4). Lehrbuch F erläutert direkt Grundbegriffe und verweist insbesondere auf die Vorlesung „Lineare Algebra“, da in dieser „Begriffe ausführlicher […] behandelt [werden], weshalb hier zuweilen ein naiver Standpunkt eingenommen werden kann“ (F 1). In einer zugehörigen Fußnote wird darauf verwiesen, dass die grundlegende

Vorgehensweise zu zeitintensiv wäre und „mehr Verwirrung stiften als Nutzen bringen“ (F 1) würde. Hier wird also bewusst gegen Konventionen verstoßen und dies metareflexiv thematisiert. Da sich das Buch vor allem an Studierende des ersten Semesters richtet, wird das zunächst nicht offensichtlich sein. Bereits an den Einstiegen der Bücher wird deutlich, dass diese von unterschiedlichem Vorwissen der Lesenden ausgehen und entsprechend daran anknüpfen. Der Einstieg scheint nicht objektiv wählbar zu sein. Das Vorgehen wird in den Lehrbüchern B, C, E und F thematisiert, wodurch eine gewisse Transparenz entsteht (vgl. B 3; C 3; E 3; F 1).

Zum Vergleich sollen nun Transkripte zweier Vorlesungen herangezogen werden. Dass bei einer solchen Kontrastierung die unterschiedliche Medialität berücksichtigt werden muss, ist evident. Beide betrachteten Transkripte erarbeiten Definitionsversuche der Analysis, wobei auch Unterschiede ersichtlich sind. So erläutert Vorlesung 1:

> Was sind unsere Ziele? Wie erreichen wir die und was eigentlich bedeutet Vorlesung? Was werden wir da machen? Gut. Was ist Analysis? Analysis ist ein Gebiet von Mathematik, wo wir uns mit Untersuchung von Funktionen, von differenzierbaren Abbildungen beschäftigen und was das wirklich bedeutet, ich möchte mit einem Beispiel oder mehreren, zwei Beispielen zeigen [sic!]. (VL 1: 2–6)

Durch die rhetorischen Fragen wird sich dem Definitionsversuch des Begriffs ›Analysis‹ angenähert. Zunächst soll dies mithilfe von bisher unbekannten Fachwörtern geschehen. Da diese keine nähere Beschreibung von ›Analysis‹ zulassen, sollen Beispiele das bessere Verständnis fördern und deren tatsächliche Bedeutung erläutern. Dieses Vorgehen widerspricht dem später erläuterten mathematischen Vorgehen, aus Grundannahmen wahre Aussagen zu folgern (vgl. VL 1: 16–22).

Die zweite Vorlesung erläutert das Ziel dem schon vorhandenen, naturwissenschaftlichen Wissen über Funktionen, das teilweise länger besteht als Analysis selbst, „einen theoretischen Unterbau zu verleihen“ (VL 2: 10). Auch hier wird analog zu den schon analysierten Vorworten mit einer (schon verblassten) Gebäudemetapher gearbeitet.

Der grundlegende Begriff ›Konvergenz‹ wird an die reale Welt gekoppelt, in der Messungen als eine Annäherung an den tatsächlichen Wert zu verstehen sind (vgl. 12–17). Dieser Bezug motivert das Thema auf den Bezug zur Wirklichkeit. Weiter beschreibt die Vorlesung: „Und insbesondere wollen wir verstehen, warum, wie und wann solche Methoden funktionieren“ (VL 2: 26f.). Eine rhetorische Frage leitet nähere Erläuterungen zu den Fragewörtern ein (vgl. VL 2: 27f.). „Warum“ soll auf das Erhalten einer „Intuition“ (VL 2: 28) anspielen. „Wie“ drückt das Ziel des Rechnens aus (vgl. VL 2: 29) und „wann“ wird als typisch für die Mathematik herausgestellt und deutet die Frage an, „unter welchen Annahmen unsere Methode überhaupt funktioniert“ (VL 2: 34). Die Wortwahl perspektiviert das mathematische Vorgehen als subjektiv, für das eine individuelle Vorstellung notwendig ist, was aber an objektiv verifizierbare Methoden anknüpfen kann. Diese sollen durch Beweise logisch geschlussfolgert werden (vgl. VL

2: 40f.), wobei gleichermaßen „die Grenzen unserer Methode oder […] die Grenzen in der Aufweichbarkeit von Voraussetzungen“ (VL 2: 43 f.) aufzuzeigen sind. Beweise dienen demnach auch der Elaboration von mathematischem Wissen, was durch die Metapher „Aufweichbarkeit“ hervorgehoben wird und Grenzen werden nicht als starr perspektiviert. Beweise könnten unter anderem darauf zurückgehen, dass einer „Intuition geglaubt“ (VL 2: 39) wurde.[12] Auch dies veranschaulicht, dass die Motivation eines Beweises nicht absolut wählbar ist.

3.3 Folgen und Konvergenz

3.3.1 Einstieg

Alle Kapitel der Lehrbücher zu ‚Folgen und Konvergenz‘ beginnen mit einem kurzen Ausblick. B legt eine vereinfachte Definition von ›Folgen‹ (die anschließend formalisiert wird) dar und verknüpft diese mit ›Grenzwerten‹, die relevant für die gesamte Analysis seien (vgl. B 71). Auch Lehrbuch F betont die Verbindung dieser beiden mathematischen Konzepte und bezeichnet den Grenzwert als „fundamentale[n] und für die Analysis charakteristische[n] Begriff“ (F 27), wohingegen ‚Folgen‘ (und ‚Reihen‘) das „eigentliche[…] Thema“ (F 27) des Kapitels seien. Die Eigentlichkeitspräsupposition betont zunächst die Fokussierung auf das zugrundeliegende Thema, deutet zugleich aber an, dass auch die „Einübung des Limesbegriffs“ (F 27) bedeutend ist. Die Betonung der Relevanz des Begriffes ›Folgen‹ lässt sich außerdem bei D feststellen: „Wir kommen jetzt zu einem der zentralen Begriffe der Analysis, dem des Grenzwerts einer Folge“ (D 53). Durch die Verwendung des Genitivs wird die Abhängigkeit beider Konzepte stärker betont als in Lehrbuch A (vgl. A 81). So betont A zwar die Relevanz des ›Grenzwertes‹, verweist aber auf ›Folgen‹ nur in Zusammenhang mit einem Beispiel (vgl. A 81). Besonders auffällig erscheinen in A die Worte „Damit erhalten wir eine *Folge*, nämlich die Folge der Sekantensteigungen […] und hoffen, dass diese Folge ‚gegen einen Grenzwert strebt‘“ (A 81). Das Lexem „hoffen“ verstößt zwar gegen die vermeintliche Objektivität der Mathematik, zeigt aber, dass in der Mathematik Erwartungen existieren, die mithilfe von Logik bestätigt werden können. Auch E verweist auf die Konzepte ›Folgen‹ und ›Reihen‹ und äußert, das Interesse „deren ‚Konvergenzverhalten‘ [zu] studieren“ (E 25). Noch unbekannte Konzepte werden mit Anführungsstrichen gekennzeichnet, aber nicht näher erläutert. Der Satz „[d]iese Begriffe werden uns durch die ganze Analysis begleiten“ (E 25) stellt deren Wichtigkeit auch für spätere Erkenntnisse heraus.

[12] Vergleiche dazu auch Peirce‘ Wahrnehmungskategorien und seine Annahme, dass zunächst eine „Kategorie des unreflektierten Gefühls“ (Nöth 2000: 61) existiert, die dann mit Fakten in Relation gesetzt und anschließend vermittelt werden kann (vgl. Nöth 2000: 61).

Einzig Lehrbuch C verzichtet in der Einführung auf die Wörter „Folge“, „Grenzwert“ oder „Konvergenzverhalten“ (vgl. C 45) und äußert, dass das Ziel der „sauber[e]“ (C 45) Umgang mit dem Konzept der ›Annäherung‹ sei. Diese Wortwahl knüpft an eine vorwissenschaftliche Vorstellung an, stellt aber gleichzeitig die Relevanz von mathematischer Genauigkeit heraus. Abhängig von den betrachteten Lehrbüchern werden die erwähnten mathematischen Konzepte unterschiedlich konstituiert, verknüpft und bewertet. So wird vor allem deren Relevanz perspektiviert, die zusätzlich auch an der Wahl der sprachlichen Mittel sichtbar ist.

3.3.2 Folgen

Mit Ausnahme von Lehrbuch E, in dem ›Folgen‹ erst nach den Bemerkungen zur Notation eingeführt werden (vgl. E 26), schließt sich in den anderen Lehrbüchern die Einführung dieser unmittelbar an den Einstieg an (vgl. A 82; B 71; C 45; D 53; F 27). In den Lehrbüchern A, B, C und E ist diese mit „Definition“ (A 82; B 71; C 45; E 26) überschrieben. In D ist sie nur durch einen Absatz vom Einstieg abgetrennt (vgl. D 53). Diese Herangehensweise erscheint für das jeweilige Lehrbuch charakteristisch und Teil der Gestaltung zu sein.

Inhaltlich unterscheiden sich die einzelnen Definitionen kaum. Die Lehrbücher A und B führen ›Folgen‹ allgemein ein, bevor sie sich auf ›reelle Folgen‹ konzentrieren, wohingegen die restlichen Lehrbücher direkt auf diese referieren. Dadurch entsteht jedoch kein inhaltlicher Widerspruch, sondern ›Folgen‹ werden allgemeiner beziehungsweise konkreter (jedoch für die nachfolgenden Konzepte ausreichend generalisiert) eingeführt. Somit ist inhaltlich Objektivität im Sinne der Multiperspektivität gegeben. Sprachlich ist dies unter anderem an den gewählten Verben erkennbar.[13] So kann bei den Lehrbüchern C und E das Schema „eine Folge […] ist eine Abbildung“ (C 45; E 26) beobachtet werden. A vertauscht Prädikativ und Subjekt und nutzt folglich die Worte „[e]ine Abbildung von ℕ nach M heißt Folge“ (A 82). Dadurch entsteht eine unterschiedliche Fokussierung auf das Konzept der ›Folge‹. Durch die Kombination mit den jeweiligen Verben „sein“ beziehungsweise „heißen“ ist der dadurch erzeugte Bedeutungsunterschied jedoch marginal. Bei beiden Formulierungen wird die Objektivität auch durch das gewählte Subjekt – was einem mathematischen Objekt entspricht – verdeutlicht. Die Lehrbücher D und E arbeiten mit dem Schema „[u]nter einer *Folge* […] versteht man eine Abbildung“ (D 53; vgl. F 27). Das Personalpronomen „man“ betont die Unabhängigkeit der Definition von konkreten Individuen. Einzig B verwendet mit „[w]ir bezeichnen die Abbildungen von ℕ in X

[13] Grundsätzlich spiegeln auch die gewählten Verben, die in Bezug auf die, im weiteren Verlauf der Arbeit analysierten, Begriffe verwendet werden, diese Objektivität wider. In dieser Arbeit sollen insbesondere Perspektivierungen im Sinne von Auffälligkeiten analysiert werden, daher wird im Folgenden auf diesen Befund nicht näher eingegangen. Dieser ist an der Tabelle der am häufigsten verwendeten Verben des Subkorpus ersichtlich (vgl. Tabelle 5). Bei dieser ist das Verb „sein“ mit großem Abstand auf Platz eins.

als *Folgen*“ (B 71) das Personalpronomen „wir“. Dies kann ebenfalls als Neutralitätsmarker verstanden werden, da die Referenz auf eine konkrete Personengruppe vage bleibt. Der Verfasser könnte das Personalpronomen aber auch zum Schaffen eines gemeinsamen Erkenntnisraums mit den Lesenden verwenden, den er durch das Einführen von ›Folgen‹ erweitert.

Im Anschluss an die Definition der Folge definieren A, B, C und E den Begriff ›Folgenglieder‹ (vgl. A 82; B 71; C 45; E 26). Diesen verwenden die Lehrbücher D und F zwar auch, führen ihn jedoch nicht formal ein (vgl. D 53–55; F 27 f.). Die Lehrbücher D und F scheinen insgesamt weniger formal als die restlichen Lehrbücher (wie auch an der fehlenden Bezeichnung „Definition“ erkennbar) zu arbeiten. Inwieweit dieser Eindruck absolut ist, kann ebenso wie die Frage, ob dies das Verständnis und das Erlernen der Sprache der Mathematik erleichtert oder erschwert, an dieser Stelle nicht näher analysiert werden.

Alle untersuchten Bücher veranschaulichen mit Beispielen das Konzept ›Folgen‹, wobei F zunächst den Begriff des ›Grenzwerts‹ einführt, bevor das Buch diese darlegt (vgl. A 83; B 72; C 46; D 53 f.; E 27; F 27 f.). B stellt im Rahmen der Beispiele weiterführende Konzepte, wie die ›rekursive Definition von Folgen‹, heraus (vgl. B 72). Auch A und D erwähnen dies, erläutern den Begriff aber nicht näher (vgl. A 83; D 54). A und D setzen somit ein höheres Vorwissen voraus, was bei dessen Mangel den mathematischen Spracherwerb erschweren kann.

Die Lehrbücher A und C veranschaulichen die Beispiele zusätzlich mit Grafiken. Während Lehrbuch A jedes der Beispiele anhand einer Darstellung veranschaulicht (vgl. Abbildung 1; Abbildung 2), geschieht dies in C nur vereinzelt (vgl. Abbildung 3). Die Grafiken in Lehrbuch A liefern weniger Informationen als das entsprechende Beispiel, stellen jedoch einzelne Informationen, wie dass die einzelnen Punkte unverbunden sind, anschaulicher dar (vgl. Abbildung 1; Abbildung 2). Das Lehrbuch C stellt anhand eines Punktschemas den Wert einzelner ›Folgenglieder‹ heraus und veranschaulicht die im Text vorkommenden Begriffe ›Quadratzahlen‹ und ›Dreieckszahlen‹ (vgl. Abbildung 3). Die entsprechenden Informationen bleiben deutlich hinter der sprachlichen Einheit zurück, begründen aber die Bezeichnung der Begriffe. Da die Grafik in den Text integriert ist, erscheint ein isoliertes Betrachten dieser unmöglich.

Das Lehrbuch E leitet zu den Beispielen mit den folgenden Worten über:

> Wir betrachten jetzt eine ganze Liste von Folgen, damit wir ein Gefühl dafür bekommen, wie Folgen aussehen können. Wir wollen dabei auch „qualitativ“ beschreiben, wie sich die jeweilige Folge verhält. (E 26)

Die Erwähnung des Wortes „Gefühl“ assoziiert die Entwicklung eines Verständnisses.[14] Folglich soll durch die genannten Beispiele dieses nicht nur erleichtert werden, sondern eine grundlegende Vorstellung der Konzeption von ›Folgen‹ ausgebildet werden. Die Verknüpfung mit

[14] Vgl. „Gefühl“, bereitgestellt durch das Digitale Wörterbuch der deutschen Sprache, https://www.dwds.de/wb/Gef%C3%BChl, konsultiert am 11.05.2025 und siehe Fußnote 12 zu Peirce Wahrnehmungskategorien.

dem Personalpronomen „wir“ betont das gemeinsame Ziel. Durch die Erwähnung des Wortes „Gefühl“ sollen folglich nähere Erklärungen, die intersubjektiv kommuniziert werden müssten, ersetzt werden. Dass im Folgenden das Wort „qualitativ“ in Anführungsstriche geschrieben ist, betont dessen fehlende Definition.

3.3.3 Konvergenz

3.3.3.1 Konvergenz und Grenzwert

Die Definitionen von ›Konvergenz‹ unterscheiden sich inhaltlich nicht. Auch die Wortwahl ist ähnlich, so verwenden die Lehrbücher B, C, D und F das Schema „[e]ine Folge heißt konvergent, wenn…“ (vgl. B 72; C 46; D 54; F 27), was den grundsätzlichen Konsens der Definition betont. Dies wird auch mit der Subjektsetzung von ›Folge‹ betont. Das Lehrbuch E fällt durch die eingesetzten Quantoren aus diesem Muster (vgl. Abbildung 4). Diese spezielle, der Mathematik eigene Symbolik, wurde jedoch erst zu Beginn des Kapitels eingeführt (vgl. E 25). Somit ist ihr Mehrwert hinterfragbar und die Definition erscheint bei bloßer Ansicht komplizierter. Da die Lehrbücher B, D und F die Konzepte ›Grenzwert‹ und ›Konvergenz‹ unmittelbar hintereinander und E sogar innerhalb eines Satzes einführen, wird ein enger inhaltlicher Zusammenhang durch die sprachliche Reihenfolge verdeutlicht, wobei ›Konvergenz‹ hier jeweils ›Grenzwert‹ vorauszugehen scheint (vgl. B 72; D 54; E 28; F 27). Auch A führt die Begriffe unmittelbar hintereinander, allerdings mit umgekehrter Reihenfolge und somit einer Vertauschung des scheinbaren Kausalitätszusammenhangs, ein (vgl. A 83).
C definiert erst nach Feststellen der „Eindeutigkeit des Limes“ (C 47)[15] den Begriff ›Grenzwert‹. F folgert die Eindeutigkeit des ›Grenzwertes‹ unmittelbar nach dem Einführen des Begriffes aus den bisherigen Annahmen (vgl. F 27). D führt diesen Beweis später, bemerkt allerdings, dass durch diesen, die gewählte Schreibweise erst „sinnvoll“ (D 59) sei. Lehrbuch B stellt fest, dass „[d]ie Definition des Grenzwerts […] darauf hin[deutet], dass eine konvergente Folge nur einen Grenzwert haben kann“ (B 73). Diese Beobachtung wird nicht näher begründet und erscheint so selbstverständlich. Jedoch wird sie anschließend als Aussage umformuliert und bewiesen (vgl. B 73). Vergleichbar legt Lehrbuch A vor dem Beweis des Satzes die Intuition dar, nach der die Eindeutigkeit des Grenzwertes schon erwartbar ist (vgl. A 85). Diese ist ebenfalls schwer objektivierbar und ihre Grundlage bleibt unklar. E äußert analog: „Der Ausdruck *der Grenzwert* legt natürlich nahe, dass, wenn es einen Grenzwert gibt, dieser eindeutig ist“ (E 29). Die ontologische Eigentlichkeitspräsupposition „natürlich“ wirkt irritierend, da Sicherheit erst nach einem Beweis besteht und die Referenz auf den bestimmten Artikel auf eine

[15] *Limes* bedeutet so viel wie ›Grenzwert‹, wie C im Nachfolgenden ebenfalls erläutert (vgl. C 47).

individuell gesetzte Konvention anspielt, aus der nichts folgern kann, weil die Argumentation sonst zirkulär wäre. Dieser Eindruck wird durch das gewählte Verb „nahelegen“ abgeschwächt. Der Verweis auf den Gebrauch des bestimmten Artikels, auf dem die Beobachtung zu beruhen scheint, ist auch im Lehrbuch A zu finden (vgl. A 85), wobei diese Überlegung erst nach dem Beweis des entsprechenden Satzes stattfindet und somit die logische Reihenfolge einhält. So perspektivieren die entsprechenden Lehrbücher die Relevanz des richtigen Sprachgebrauchs in der Analysis und somit innerhalb der Mathematik.

Der Begriff der ›Konvergenz‹ wird von den Lehrbüchern C, D und F ohne weitere einleitende Worte eingeführt (vgl. C 46; D 54; F 27). E hingegen perspektiviert die folgende Definition mit den Worten „deutlich interessanteren“ (E 27), „eine der wichtigsten“ (E 27) und „leider auch am Anfang eine der am schwersten zu verdauenden Definitionen“ (E 27). Die Wertung der Definition im Vergleich zur vorhergehenden betont zusätzlich ihre Bedeutung im gesamten Bereich der Analysis. Auch die wiederholte Relevanzsetzung spiegelt diesen Eindruck wider. Im Anschluss wird sie zu dem Verdauungssystem metaphorisch in Bezug gesetzt, wodurch die Schwierigkeit ihres Verständnisses betont wird. Dieses scheint folglich einen prozesshaften Charakter vorzuweisen. Ziel der Definition soll es sein, die Beobachtung, „dass viele der Folgen ‚gegen einen Wert streben‘ […] mathematisch präzise [zu] formulieren“ (E 27). Somit wird die Notwendigkeit von sprachlichen Ausdrücken zur Beschreibung einer (vorwissenschaftlichen) Beobachtung herausgestellt. Auch A führt nach Vorüberlegungen anhand eines Beispiels aus:

> Wie kann man das präzise fassen? Der entscheidende Trick ist, nicht aus dem Blickwinkel der Folgeglieder zu schauen. Wir wechseln die Perspektive und betrachten die Situation vom Punkt 0 als vermutetem Grenzwert aus. (A 83)

Die einleitende rhetorische Frage spielt auf einen „Trick“ an, der einen Perspektivwechsel motiviert. Hierbei wird ein „Blickwinkel“ bereits als zuvor eingenommen angesetzt, womit Lesende diesen somit identifizieren müssen. Mathematikverständnis kann folglich durch unterschiedliche Betrachtungsweisen gefördert werden. Nach einer mathematisch konkreteren Ausführung der Überlegungen erläutert das Lehrbuch, dass daraus „der Grenzwertbegriff, so wie er sich im 19. Jahrhundert durchgesetzt hat und seither verwendet wird“ (A 83), entstand. Diese Worte perspektivieren die historische Abhängigkeit von gewählten Definitionen und damit einhergehend auch die Geltungsbedingungen von Wissen (vgl. A 83). A fasst die Definition von Konvergenz und ihren „springende[n] Punkt“ (A 84) anschließend zusammen, wodurch der relevant erscheinende Sachverhalt betont wird.

Auch B leitet mit einem kurzen, inhaltlich nicht weiter relevanten, Satz zur Definition von ›Konvergenz‹ über (vgl. B 72), wobei in Klammern auf eine vorausgehende Grafik (vgl. Abbildung 5) verwiesen wird. Der visuell dargestellte Sachverhalt wird kurz erläutert, wobei noch nicht definierte Fachwörter verwendet werden. Somit soll das Verständnis der anschließenden Definition begünstigt werden. D schließt eine grafische Interpretation (vgl. Abbildung 6) der Definition an. Die Visualisierung wird im nachfolgenden Textbaustein sehr ausführlich erläutert und konstituiert weitreichend Wissen über ›Konvergenz‹ (vgl. D 55). Auch in Lehrbuch F folgt die gewählte Grafik (vgl. Abbildung 7) auf die Definition von ›Konvergenz‹ und wird wenig später erläutert. Während die gewählten Grafiken von D einzelne ›Folgenglieder‹ visualisieren (ähnlich wie die von B verwendete Abbildung 5), die sich in Nähe des Grenzwertes verdichten (vgl. Abbildung 6), markiert F den Bereich, in dem sich fast alle ›Folgenglieder‹ befinden (vgl. Abbildung 7). Die gewählte Veranschaulichung wird aller Voraussicht nach von Lernenden nicht hinterfragt. Entsprechende Implikationen der anderen (und mathematisch genauso richtigen) Grafik müssen selbstständig hergestellt werden. Lehrbücher A und C stellen bereits ›Folgen‹ grafisch dar, wiederholen dies aber nicht erneut für ›Konvergenz‹. A veranschaulicht die betrachteten Folgen in einem Koordinatensystem (vgl. Abbildung 1; Abbildung 2), wohingegen B, D und F anhand eines Zahlenstrahls den Abstand zum ›Grenzwert‹ visualisieren (vgl. Abbildung 5; Abbildung 6; Abbildung 7). Lehrbuch E stellt als einziges der untersuchten Lehrbücher beide Möglichkeiten in Bezug auf ›Konvergenz‹ nebeneinander (vgl. Abbildung 8; Abbildung 9) und erläutert die jeweiligen Vor- und Nachteile (vgl. E 28). Dieses Vorgehen ist das transparenteste und perspektiviert die Abhängigkeit der gewählten Grafiken von äußeren Faktoren. E reflektiert in Bezug zu den grafischen Darstellungen: „Wir werden Bilder nie verwenden, um Aussagen zu beweisen. Bilder können jedoch hilfreich sein, um ein Gefühl für Folgen zu erhalten und um Ideen für Beweise zu erarbeiten." (E 28). Bilder seien als Hilfsmittel zur Entstehung eines approximativen Verständnisses zu verstehen. Diese Einordnung versprachlicht die Relevanz von Bildern, grenzt sie aber zugleich von mathematisch Fundiertem ab.

Auch zwei der betrachteten Vorlesungen thematisieren Grenzwerte. Die Beobachtungen sind selbstverständlich vom betrachteten Format der Vorlesung abhängig, dennoch zeigen sie sprachliche Auffälligkeiten, die auch unter Berücksichtigung dessen aussagekräftig erscheinen. Vorlesung 3 urteilt über die Definition von ›Grenzwerten‹: „Diese Definition sieht ja ein wenig künstlich aus, […] das müssen wir ja ein bisschen mit Leben füllen" (VL 3: 15 f.). Gerade das Wort „künstlich" zeigt, dass die reine Definition zunächst unverständlich erscheint und fern von wirklichkeitsnahen Vorstellungen ist. Es erscheint somit notwendig, ein besseres Verständnis für diese herzustellen und sie zu veranschaulichen. Dies wird durch die Worte „mit Leben füllen" betont, was die Definition an sich aber auch als eher nüchtern charakterisiert, die erst durch Ausführungen konkrete Vorstellungen evoziert. Zur besseren Veranschaulichung wird sich den verwendeten Worten „für alle ε gibt es ein n" (VL3: 19 f.) mit der Metapher „[f]ür jeden Topf

gibt es einen Deckel“ (VL 3: 21) angenähert. Weiter urteilt Vorlesung 3 „[d]ann ist die Frage, was ist der Topf, ein bisschen seltsam“ (VL 3: 21 f.). Auch im weiteren Verlauf der Vorlesung wird diese Metapher erneut aufgegriffen „[d]as heißt nicht, dass es irgendwie den besten Deckel gibt, oder den Mr. Big Deckel, sondern es gibt nur irgendeinen“ (VL3: 46 f.) und weiter ausgebaut (vgl. VL 3: 101 f.). Die bewusste Abweichung von mathematischem Vokabular sowie die Anknüpfung an ein Sprichwort soll dem besseren Verständnis dienen. Dazu ist es notwendig den gemeinsamen Sachverhalt der Mathematik und des Sprichworts nachzuvollziehen. Durch diese Metapher soll den Studierenden die Möglichkeit geschaffen werden, sich die Sprechweise zu merken und sie anhand ihres Alltagsverständnisses zu begründen. Das mehrfache Verwenden der Metapher evoziert einen Common-Ground, auf dem die Metapher dann interferieren kann. Ob die Metapher wirklich wohldurchdacht ist, kann angezweifelt werden, da sie nicht kontextlos zu verstehen ist. Die illustrierte mathematische Sprechweise an sich erscheint nicht komplex, wird aber durch die zusätzliche Veranschaulichung als komplex markiert. Die Verwendung von „Mr. Big Deckel“ soll sich anscheinend der Sprache der Studierenden annähern, inwieweit dies aber tatsächlich geschieht, bleibt vage.
Auch die Existenz einer passenden Epsilon-Umgebung, die ebenfalls Teil der Definition eines ›Grenzwertes‹ ist, wird durch eine Metapher erläutert (vgl. VL 3: 58–84). Dabei wird das ›Konvergenzverhalten‹ einer Folge mit den Bewegungen eines Menschen gleichgesetzt (vgl. VL 3: 58 ff.). Diese Person befindet sich zuerst auf Weltreise und schränkt sich mit zunehmendem Alter immer weiter auf kleinere Umgebungen ein, somit findet man für jede gewählte Umgebung einen Zeitpunkt, ab der dieser Mensch sie nicht mehr verlässt (vgl. VL 3: 60–74). Die Vorlesung erläutert: „Natürlich sind alle diese Veranschaulichungen und Geschichten ein bisschen ausgedacht, weil sie einzig und allein in unserem Kopf bestehen“ (VL 3: 81 f.). Schon diese Relativierung zeigt, dass die Geschichte sehr konstruiert ist. Die Geschichte verknüpft die einzelnen Elemente mit mathematischen Begriffen, geht aber in vielen Details deutlich über diese hinaus (vgl. z.B. VL 3: 63 f.). Sie wird zudem sehr detailreich erzählt und muss daher zum Verständnis zunächst auf Wesentliches reduziert werden. Diese Erzählung folgt nur durch einen kurzen Einschub auf die vorherige Metaphorik zu „Topf und Deckel“ (vgl. VL 3: 48–58). Es ist zu bezweifeln, dass Studierende bei der Dichte dieser Metaphern noch den wesentlichen mathematischen Sachverhalt benennen können. Auch diese Erzählung soll an Alltagserfahrungen anknüpfen und wird im weiteren Verlauf der Vorlesung ausgebaut (vgl. VL 3: 143 ff.).
Zum besseren Verständnis der Bedingung und der Relevanz des Überprüfens der Existenzaussage und des Angebens dieser wird ebenso eine Metapher verwendet (vgl. VL 3: 91–97). Diese erläutert, dass es leichter ist, den Besitz eines Hauses zu beweisen als zu zeigen, dass es einem

nicht gehört. Wie schon am vorhergehenden Beispiel ersichtlich, wird durch die Andeutung von Aussagen in direkter Rede versucht, die Geschichte lebendiger zu gestalten (vgl. VL 3: 94 f.). Ob es nicht gewinnbringender wäre, mathematische Sachverhalte zu erklären, anstatt sie mit teilweise willkürlichen Metaphern zu verknüpfen, ist zumindest in Erwägung zu ziehen. Deutlich ist, dass die große Abweichung von der mathematischen Fachsprache auf das Format der Vorlesung zurückzuführen ist. Diese wurde scheinbar für Studierende der Ingenieurwissenschaften konzipiert. Auch dies könnte ebenso wie die Lehrperson Auswirkungen auf die sprachliche Gestaltung haben. Die thematisch vergleichbare Vorlesung 4 bedient sich nicht vermehrt Metaphern. Durch eine rhetorische Frage thematisiert sie die Verwendung des bestimmten Artikels von ›Grenzwert‹: „Die erste naheliegende Frage ist, ist es denn richtig, irgendwie von dem Grenzwert zu reden oder kann es da mehrere geben?“ (VL 4: 2–4). Das Wort „irgendwie“ veranschaulicht die Unsicherheit, die zu diesem Kenntnisstand noch zum Gebrauch des betrachteten Artikels besteht. So leitet sie auf den Beweis zum Satz der „Eindeutigkeit des Grenzwertes“ (VL 4: 3–10) über. Diese Konzeption und die Reflexion des mathematischen Sprachgebrauchs weisen Parallelen zu den Lehrbüchern auf.

3.3.3.2 Konvergenzregeln

Je nach Lehrbuch werden die „Konvergenzregeln“ (vgl. F 28 f.) auch als „Rechenregeln für Grenzwerte“ (vgl. A 87) beziehungsweise „Grenzwertregeln“ (vgl. E 30 ff.) bezeichnet und variieren in ihrem Umfang. Die Benennung perspektiviert das konkrete Berechnen von ›Grenzwerten‹ im Vergleich zur Beurteilung von ›Konvergenz‹. Durch die gemeinsame Bezeichnung der einzelnen Aussagen werden diese als mögliches Hilfsmittel zur Bestimmung von ›Grenzwerten‹ perspektiviert. Des Weiteren verweist dies auch auf grundlegende Gemeinsamkeiten. In den Lehrbüchern B, C und D erhalten sie hingegen keinen expliziten Namen (vgl. B 75; C 50 ff.; D: 59–62). In B, E und F werden die Aussagen zu einem Aussagenkomplex, wenn auch mit variierendem Umfang, zusammengefasst (vgl. B 75; E 30; F 28). In den anderen Lehrbüchern folgen die Aussagen größtenteils getrennt aufeinander (vgl. A 87 ff.; C 50ff.; D 59–62). Durch die Entscheidung der Zusammenfassung der Aussagen wird eine stärkere Verknüpfung zwischen den Aussagen hergestellt.

Laut B seien die Regeln eine Möglichkeit, das Anwenden der Definition zu vermeiden und stattdessen auf „bereits bekannte Grenzwerte zurück[zugreifen]“ (B 74). F äußert noch konkreter, dass die Untersuchung der Grenzwerte mittels ihrer Definition möglich, aber „viel zu aufwendig“ (F 28) sei und „im weiteren Verlauf stillschweigend benutzte Regeln“ (F 28) deshalb bewiesen werden. Hier wird auf das mathematische Prinzip verwiesen, nur überindividuell Zugängliches, also Bewiesenes, zu verwenden. Dennoch wird angedeutet, dass ein expliziter

Verweis auf einzelne Regeln später überflüssig erscheint, wodurch eine gewisse Nachvollziehbarkeit verloren geht. F betont gleichzeitig die Wichtigkeit des Konzepts ›Grenzwert‹, auf dem die Regeln basieren (vgl. F 28). Die einleitenden Worte des Lehrbuchs E (30) bezeichnen die Rechenregeln als „hilfreich[…]“. Diese Wertung wird bei D nicht expliziert, das Lehrbuch beschreibt:

> Häufig benutzt man bei der Untersuchung der Konvergenz von Folgen nicht direkt die Definition, sondern führt die Konvergenz nach gewissen Regeln auf schon bekannte Folgen zurück. (D 59)

Diese Beobachtung erläutert ebenfalls den Sinn der Grenzwertregeln. Etwas verwunderlich scheint der Gebrauch des Wortes „häufig“, welches keinen Aufschluss über die konkrete Anwendung zulässt. Ähnlich unpräzise ist die auf den Beweis der Summen- und Produktregel folgende Bemerkung, dass der benannte mathematische „Trick […] öfter“ (D 60) anzuwenden sei, wobei die Wortwahl auch auf ein geschicktes Vorgehen hindeutet. A vermeidet eine unmittelbare Einordung der Grenzwertregeln (vgl. A 87 ff.). Jedoch wird im vorherigen Unterkapitel auf die Resultate mit den Worten „[w]ir wollen im Folgenden eine ‚Werkzeugkiste‘ zusammenstellen, deren Inhalt verschiedene Methoden zur Grenzwertbestimmung ist [sic!]“ (A 86) verwiesen. Diese Metapher verdeutlicht, dass Grenzwertregeln die Bestimmung von ›Grenzwerten‹ erleichtern können und passgenau verwendet werden müssen.

Der Beweis der Konvergenzregeln von E wird von farblich abgesetzten Kommentaren begleitet (vgl. E 30 ff.). Diese thematisieren die Benennung von Grenzwerten und bezeichnen sie als „gute Idee“ (E 30), wobei es „weise“ (E 30) sei, die in der Definition von ›Grenzwerten‹ vorkommenden „ε“ verschieden zu benennen. Durch diese metareflexiven Kommentare wird die konkrete Benennung der mathematischen Symbole als arbiträr perspektiviert, die sich bei geeigneter Wahl als hilfreich erweisen könnte (vgl. E 30). Im weiteren Verlauf des Beweises werden durch Worte wie „‚unter Kontrolle‘ bringen“ (E 31) und „in den Griff kriegen“ (E 31) in Bezug auf mathematische Formulierungen, Probleme in dem jeweiligen Beweis thematisiert. Somit wird die Möglichkeit, die gewählten Formulierungen durch Individuen zu adaptieren, angesprochen. Die Worte „[d]ieser Fall erfordert aber etwas mehr Fantasie“ (E 31) betonen die Kreativität, die bei Beweisen von Nöten ist und stellen das Abstraktionsvermögen heraus.

3.3.3.3 Divergenz

›Divergenz‹ wird in allen Lehrbüchern in Abgrenzung zu ›Konvergenz‹ (als dessen Gegenteil) definiert. In diesem Zusammenhang ist die Frage nach weiterführenden Termini relevant. Alle Bücher betrachten hierfür den Fall, dass die Folge ins Unendliche strebt (vgl. z.B. A 92 f.). Dieser spezielle Fall wird unterschiedlich perspektiviert. So bezeichnet A eine solche Folge als „uneigentlich konvergent“ (A 93, im Original fett gedruckt) und bemerkt: „Wir müssen uns aber im Klaren sein, dass uneigentliche Konvergenz ein Spezialfall von Divergenz ist“ (A 93). Somit wird das mit ›Konvergenz‹ verknüpfte Konzept auch zu ›Divergenz‹ in ein Verhältnis gesetzt. Dem entgegengesetzt steht die sprachliche Wahl von B, C, D und E, die die oben beschriebene Folge als „bestimmt divergent“ bezeichnen (vgl. B 77; C 66; D 66; E 34). Somit binden diese Lehrbücher den mathematischen Sachverhalt sprachlich näher an ›Divergenz‹.

E eröffnet nach der formalen Einführung mit den Worten „wenn es zu jeder ‚Schranke‘ $K \in \mathbb{R}$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass ab N alle Folgenglieder größer als K sind“ (E 34) die Möglichkeit, diese an die Alltagsvorstellung einer Schranke[16] anzuknüpfen. Die Vorstellung verdeutlicht E daraufhin mittels einer Grafik (vgl. Abbildung 10). Daraus wird die konkrete mathematische Vorstellung ersichtlich, die durchaus an die alltägliche anknüpft. Die Grafik veranschaulicht einen schon konstituierten Sachverhalt und enthält darüber hinaus kaum neue Informationen.

D bezeichnet im Unterschied zu den anderen Lehrbüchern ›uneigentliche Konvergenz‹ als mögliches Synonym von ›bestimmter Divergenz‹ (vgl. D 67). Durch die Erwähnung beider Benennungsmöglichkeiten wird zum einen der sprachliche Ausdruck als unabhängig vom dahinterstehenden mathematischen Sachverhalt perspektiviert, zum anderen ist aber auch die Teilhabe an der Fachsprache Mathematik für Lernende erleichtert, da beide Bezeichnungen verstanden werden können. C erwähnt zumindest die Sprechweise „konvergiert gegen $+\infty$“ (C 48), welche inhaltlich dem Konzept von ›uneigentlicher Konvergenz‹ nahesteht. F verwendet keinen der beiden Ausdrücke, sondern bezeichnet den Sachverhalt als „Divergenz gegen unendlich“. Diese Bezeichnung ist zwar auch in anderen Lehrbüchern zu finden, resultiert jedoch im Gegensatz zu den anderen Möglichkeiten bereits aus der Definition von ›Divergenz‹ (vgl. F 41).

In Lehrbuch E werden die Konvergenzregeln später in Bezug zu ›bestimmter Divergenz‹ gesetzt und innerhalb des zugehörigen Beweises wird erläutert, dass „diese Aussage [… sich] fast schon ‚mechanisch‘“ (E 37) beweist und deshalb auf den Beweis der anderen Aussagen verzichtet wird. Hier wird also bewusst vom allgemeinen mathematischen Vorgehen mit der Begründung abgewichen, dass der Beweis nicht kompliziert beziehungsweise erkenntnisgewinnend erscheint, was durch das Wort „mechanisch“ verdeutlicht wird. Somit ist an den Beweis eine Erwartungshaltung geknüpft, die dieser nicht erfüllt. Die Zuschreibung der Trivialität von Beweisen ist aber immer an das jeweilige Individuum geknüpft und somit liefert eine Beurteilung immer auch eine Perspektivierung der angenommenen Schwierigkeit des Beweises.

[16] Der Begriff der Schranke ist in der Mathematik nicht unüblich. Die vorliegenden Bücher (A–F) führen ihn jedoch nicht formal ein.

3.3.4 Beschränktheit

Der Begriff der ›Beschränktheit von Folgen‹ wird in B als „wichtige Eigenschaft“ (B 73) und in D als „weitere[r] wichtige[r] Begriff“ (D 57) eingeführt. Auch Lehrbuch A veranschaulicht die Relevanz: „Als Vorbereitung [zu Methoden der Grenzwertbestimmung] formulieren wir ein Resultat, das von eigenständigem Interesse ist“ (A 86). Dies wird auch als Basis für späteres Wissen verstanden. Das Lehrbuch E relativiert die Relevanz des Begriffs: „Folgende Definition ist eigentlich nur ein Spezialfall [der Definition von Beschränktheit von Funktionen]“ (E 27), wobei die letztere nur als Beispiel zum besseren Verständnis für die Notation mit Hilfe von Quantoren eingeführt wurde (vgl. E 25) und ihr so insgesamt keine größere Bedeutung zukommt. Inhaltlich unterscheiden sich die Definitionen nur unwesentlich. Die Lehrbücher C, D und F führen zusätzlich die Begriffe nach oben sowie unten beschränkt ein, wodurch sich weitere Beschreibungsmöglichkeiten für Folgen ergeben (vgl. C 49; D 57; F 28).

Lehrbuch E erläutert in Bezug auf ein konkretes Beispiel „die Folge $(n^3)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 8, 27, 64, 125, \ldots)$ ist offensichtlich unbeschränkt“ (E 27). Was für ein Individuum „offensichtlich“ ist, ist subjektiv. Mathematisch kann nur durch einen konkreten Beweis Wissen objektiv verfügbar werden. Somit verstößt die Aussage gegen die suggerierte Objektivität.

Abgesehen von E, bei dem diese erst später erscheint (vgl. E 29), schließen die anderen Lehrbücher unmittelbar die Aussage „[j]ede konvergente Folge ist beschränkt“ (C 49; vgl. A 86; B 74; D 57; F 28) an. Die Lehrbücher A, B, C und D verweisen auf die Ungültigkeit der Folgerung von ›Beschränktheit‹ auf ›Konvergenz‹ (vgl. A 86; B 74; C 50; D 58), womit etwaigen Fragen, aber auch Fehlern vorgegriffen wird. A veranschaulicht die Aussage zusätzlich symbolisch durch grafisch hervorgehobene Implikationspfeile, welche inhaltlich nicht über den textlichen Bestandteil hinausgehen, das Merken der Aussage aber erleichtern können (vgl. Abbildung 11).

In Bezug auf den Beweis eines Satzes zu ›Beschränktheit‹ erklärt Vorlesung 3, dass Bilder in der Mathematik „der Schlüssel zu allem“ (VL 3: 153) und diese Vorstellungen zu Beginn relevant seien (vgl. VL 3: 156f.). Die Sachverhaltskonstitution vollzieht sich dementsprechend zunächst in Grafiken. Das beschriebene Vorgehen ist zwar analog zu dem Vorschlag von E mithilfe von Bildern „Beweise zu erarbeiten“ (E 28; siehe auch Kapitel 3.3.3.1), kann anhand des jeweiligen Vorgehens der Lehrbücher jedoch nicht verifiziert werden, da Bilder dort vor allem als Illustration verwendet werden. Dies kann möglicherweise der verschiedenen Medialität zugeschrieben werden. Im Rahmen einer Vorlesung kann es hilfreich sein, durch Bilder erste Vorstellungen zu entwickeln. Zum Nachschlagen eignen sich gleichwohl Definitionen besser und Bilder müssen somit sekundär behandelt werden.

Zur Weiterführung des Beweises eines betrachteten Satzes erläutert das Lehrbuch A:

> Eine übliche Sprechweise ist „fast alle“; damit ist in der Mathematik gemeint „alle bis auf höchstens endlich viele Ausnahmen“. Im Alltag kann diese Sprechweise verwirrend sein (so sind fast alle Leser dieses Buchs Seehunde), aber in der Mathematik ist sie praktisch: Gerade haben wir bewiesen, dass *fast alle* Folgeglieder im Intervall $[a-1, a+1]$ liegen (nämlich mindestens die mit Index $n \geq n_0$). (A 86, im Original „fast alle“ fett)

Grundsätzlich verweist das Buch auf die Tatsache, dass sich mathematische Begriffe – am Beispiel von „fast alle“ – von denen des Alltags unterscheiden. Diese Beobachtung wird zusätzlich durch die Worte „so sind fast alle Leser dieses Buchs Seehunde“ hervorgehoben. Zwar ist die Aussage in Klammern gesetzt, jedoch fällt sie durch das Abweichen vom mathematischen Vokabular – zugunsten des Erwähnens eines Tieres – auf, sodass Lesende gezwungen sind, sich mit ihr auseinanderzusetzen. Allen Lesenden ist bewusst, dass kein einziger Seehund dieses Buch liest, was im Gegensatz zu der Alltagsvorstellung, aber auch zu der praktischen Verwendung von „fast alle“ in der darauffolgenden mathematischen Aussage steht. Die Aussage ist demnach zunächst verwirrend und kann nur durch Abstraktion verstanden werden. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass in der Regel die Aussage auch mathematisch nur dann verwendet wird, wenn sie für ein betrachtetes Objekt gültig ist, da sonst eine irrelevante Aussage getroffen wird.

3.3.5 Einschließungssatz

Der Einschließungssatz wird von den einzelnen Lehrbüchern als unterschiedlich wichtig perspektiviert. Im Lehrbuch D wird der Satz (auch unter einem anderen Namen) nicht erwähnt. Inhaltlich kann er zwar aus dem Satz „Größenvergleich konvergenter Folgen“ sowie dem anschließenden Korollar hergeleitet werden (vgl. D 63), allerdings wird ihm durch das Vermeiden der expliziten Formulierung jegliche Relevanz abgesprochen. Auch im Lehrbuch F erhält der Satz keinen eigenen Namen, sondern ist eine der „Konvergenzregeln“ (vgl. F 29), womit er durch die Gleichstellung mit neun weiteren Regeln im Rahmen der Sachverhaltsverknüpfung keine besondere Wichtigkeit zugeschrieben bekommt. Das Resultat des Satzes kann indes nach Lektüre des Buches trotzdem als bekannt vorausgesetzt werden. A bezeichnet den Einschließungssatz als „nützliches Werkzeug für Konvergenzuntersuchungen“ (A 89) und knüpft so an die zuvor geäußerte Vorstellung der „Werkzeugkiste“ (A 86) in Bezug auf Grenzwertregeln an (siehe Kapitel 3.3.3.2). Auch B bezeichnet den Satz als „einfaches, aber sehr brauchbares Hilfsmittel zur Bestimmung von Grenzwerten“ (B 76). Somit wird die Wichtigkeit nicht nur durch entsprechende Adjektive betont, sondern auch auf dessen konkrete Verwendung verwiesen.

Neben der Relevanzsetzung variieren auch die Benennungen des Satzes. So ist die Bezeichnung von B „Einschließungssatz“, die von C hingegen „Einschließungskriterium“. Da ein Kriterium auf eine Eigenschaft zur Entscheidung verweist, deutet C die Verwendung stärker an. Auch A verwendet diesen Ausdruck, erläutert jedoch, dass er „manchmal auch als Sandwichkriterium bezeichnet“ (A 89) wird. E nennt den Satz ausschließlich „Sandwichsatz“ (E 33). Die Assoziation, die das Wort „Sandwich“ auslöst, wird durch die anschließende Bemerkung verstärkt:

> Die Merkregel ist in etwa wie folgt: Wenn die Folge y_n zwischen zwei Folgen a_n und b_n, wie in einem Sandwich, eingequetscht ist und wenn a_n und b_n gegen z konvergieren, dann konvergiert auch die „eingequetschte“ Folge y_n gegen z. (E 33)

Die Metapher, auf die schon die Bezeichnung „Sandwichsatz“ (E 33) anspielt, wird innerhalb dieser Bemerkung wieder aufgegriffen. Durch die konkrete Bezugnahme des mathematischen Sachverhalts auf das „Einquetschen“ des Sandwichs, wird den Lernenden ein leicht zu merkendes Bild vermittelt und der Name motiviert. Gleichzeitig eröffnet der Unsicherheitsmarker „in etwa“ (E 33) zu Beginn der Merkregel die Möglichkeit, von der mathematischen Präzision abzuweichen. Zur weiteren Veranschaulichung dient eine Grafik, die nicht mit dem Bild des Sandwichs in Beziehung gesetzt werden kann (vgl. Abbildung 12). Der in der Grafik ersichtliche Sachverhalt illustriert den Satz, liefert aber keine neuen Informationen, kann jedoch, ähnlich wie die Bemerkung, als Versuch verstanden werden, den Satz zu veranschaulichen und Lernenden so die Möglichkeit geben, sich diesen besser zu merken (vgl. Abbildung 12).

Beim Vergleich der jeweiligen Beweise fällt vor allem die unterschiedliche Länge auf (vgl. Abbildung 13; Abbildung 14; Abbildung 15; Abbildung 16; Abbildung 17). So begründet A: „Dies folgt unmittelbar, da für gegebenes ε für genügend großes n die Einschließung $a - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < a + \varepsilon$ gilt“ (Abbildung 13). Der grundsätzlichen Argumentation dieses Beweises folgen die anderen Lehrbücher. Dass jedoch A mit „unmittelbar“ impliziert, dass keine weiteren Ausführungen nötig sind, erscheint aufgrund der angeschlossenen Begründung fragwürdig. Zudem werden Leerstellen gelassen, die Lesende selbstständig unter Einbeziehung ihres Verständnisses des Sachverhalts füllen müssen. B und C folgen im Wesentlichen der Argumentation von A, führen diese aber weiter aus, sodass weniger eigenständige Erarbeitung für das Verständnis des Satzes notwendig ist (vgl. Abbildung 14; Abbildung 15). Der Beweis des Lehrbuchs F ist ähnlich kurz wie der Beweis in Lehrbuch A, enthält aber eine höhere Informationsdichte (vgl. Abbildung 17). In F werden abweichend zu den anderen Beweisen zwei Ungleichungsketten verwendet, deren Zusammenhang durch die Lesenden selbst hergestellt werden muss (vgl. Abbildung 17). E betrachtet die zu beweisenden mathematischen Sachverhalte anstelle von Ungleichungen mithilfe von Intervallen (der Angabe von Bereichen) und Quantoren (vgl. Abbildung 16). Diese Schreibweise erfordert größeres Vorwissen. Trotz der Kurzschreibweise ist der Beweis länger und es werden deutlich mehr Symbole benötigt als bei den vergleichbaren Beweisen, was das Verständnis beeinflussen kann (vgl. Abbildung 16).

Während die Lehrbücher A, C und E den jeweiligen Beweis ohne den Gebrauch von Pronomen führen, verwenden die Lehrbücher B und E das Personalpronomen „wir“, was anhand der folgenden Auszüge in B „[s]etzen wir $\mathrm{N} = \max\{\mathrm{N}_0, \mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2\}$“ (Abbildung 14) und „somit haben wir $|\mathrm{x}_\mathrm{n} - \mathrm{x}| < \varepsilon$“ (Abbildung 14) beziehungsweise in E „[w]ir nehmen an, dass“ (Abbildung 16), „wir müssen zeigen“ (Abbildung 16) sowie „[w]ir setzen jetzt also $\mathrm{M} \coloneqq \max\{\mathrm{N}_\mathrm{a}, \mathrm{N}_\mathrm{b}\}$“ (Abbildung 16) ersichtlich ist. Durch den Gebrauch von „wir“ wird eine Gemeinschaft zwischen den Lesenden und Verfassenden erschaffen (siehe hierfür auch Kapitel 3.3.2) und ihnen eine aktivere Rolle zugeschrieben. Der Beweis erscheint somit von den Menschen und nicht von den ihm zugrunde liegenden Objekten bestimmt zu sein. Einzig die Wortfolge „haben wir“ schreibt den Mathematikbetreibenden eine passivere Rolle zu, die das Manipulieren der mathematischen Objekte nicht grenzenlos zu erlauben scheint. Diese Perspektivierung ist auch anhand des gewählten Subjekts – einem mathematischen Objekt – von Aussagen ersichtlich, wie beispielsweise die Worte „[d]ie Ungleichungen […] ergeben“ (Abbildung 17) in Lehrbuch F explizieren. Des Weiteren verdeutlichen Formulierungen wie „[e]s gibt“ (Abbildung 16) oder „[d]as bedeutet“ (Abbildung 15) analog zur mathematischen Formelsprache die Tendenz mathematische Sachverhalte objektiv zu schildern.

3.3.6 Teilfolge

Der Begriff ›Teilfolge‹ lässt zunächst die auf der Alltagssprache basierende Vermutung zu, dass es sich hierbei um einen Teil einer Folge handelt. Auf dieser Assoziation beruht auch die erstmalige Erklärung des Begriffes im Lehrbuch B: „Diese Teilfolge entsteht durch Betrachtung eines bestimmten Teils der Folgenglieder – die übrigen werden ignoriert“ (B 89). Durch den Ausbau des vorhandenen Wissens wird den Lesenden der Zugang zu diesem Konzept erleichtert. A thematisiert die sukzessive Auswahl von ›Folgengliedern‹ und das Ignorieren der anderen (vgl. A 93). Obwohl diese nicht auf der direkten Wortassoziation beruht, kann sie mit dieser leicht verknüpft werden. C definiert ›Teilfolge‹ zunächst durch deren Entstehung, dem „Weglassen von Folgengliedern“ (C 58) und schließt eine formalere Definition, die den anderen Lehrbüchern entspricht, an (vgl. A 93; B 90; C 58; D 79; E 54; F 35). Dieses Weglassen von ›Folgengliedern‹ wird zusätzlich durch das Wegstreichen einzelner illustriert, wobei diese Visualisierung keine zusätzlichen Informationen bereitstellt, sondern kaum ohne die textliche Erklärung zu verstehen ist (vgl. Abbildung 18). Eine zusätzliche Schwierigkeit entsteht durch die Bezeichnung der ›Teilfolge‹ mit einem anderen Buchstaben, was sowohl in der Definition als auch anhand der Visualisierung erkennbar ist (vgl. C 58; Abbildung 18). Auf diese zusätzliche Bezeichnung verzichten die anderen Lehrbücher, womit die Definition von C, trotz ihres Bestrebens nach Verständlichkeit, umständlich wirkt.

3.3.7 Häufungspunkt

Das mathematische Konzept des ›Häufungspunktes‹ wird von E nicht aufgegriffen und von C nur im Rahmen einer Übungsaufgabe eingeführt, aber später im Rahmen eines Lemmas ohne Einführung wieder aufgegriffen (vgl. C 69/177). Diese Einführung verkompliziert die (spätere) Lektüre und perspektiviert den Begriff als unwichtig.

Die Definitionen der Lehrbücher A, B, C und D folgen dem Muster „a heißt Häufungspunkt, wenn/ falls“ (vgl. A 94; B 89; C 69; D 80), somit wirkt diese Wortwahl objektiv. F weicht jedoch davon ab und bezeichnet das Konzept als „Häufungswert“ (F 36). Während A, D und F die Definition und damit den Sachverhalt an das Konzept der ›Teilfolge‹ anknüpfen, ist die entsprechende Definition von B und C unabhängig von diesem Begriff (vgl. A 94; B 89; C 69; D 80; F 36). Da die Definitionen trotzdem mathematisch äquivalent sind, betonen A, D und F die Interdependenz der Konzepte stärker als die weiteren Lehrbücher. Einzig B leitet die Definition sprachlich ein:

> Gewisse Folgen konvergieren nicht, kommen aber trotzdem einem oder mehreren Punkten immer wieder „beliebig nahe“ – z. B. konvergiert die Folge $\{(-1)^n\}_{n\geq 1}$ nicht, […] „besucht“ aber abwechselnd die Punkte ± 1 […]. Statt von einem Grenzwert spricht man in solchen Fällen von einem *Häufungswert*, der als Grenzwert einer *Teilfolge* auftaucht. (B 89)

Insgesamt knüpft diese Formulierung an die Assoziation von der Häufung von ›Folgengliedern‹ an einem Punkt an. Durch Anführungsstriche sind bereits Stellen markiert, an denen von der mathematischen Fachsprache abgewichen wird. Die Personifikation der ›Folgenglieder‹ durch die Verknüpfung mit dem Verb „besuchen“ veranschaulicht, dass die Folge abwechselnd die Werte 1 und -1 annimmt, aber bei keinem dieser Werte bleibt. Die Worte „beliebig nahe“ verbleiben zwar vage, dienen allerdings dem besseren Verständnis. Die Einleitung endet mit dem Hinweis auf die Sprechweise für das beschriebene Konzept. Die Worte „spricht man“ verdeutlichen den Rückgang zur mathematisch präzisen Sprache, die im Gegensatz zu den vorangestellten Vorstellungen stehen.

3.3.8 Satz von Bolzano-Weierstraß

Die Formulierung „[j]ede beschränkte Folge in ℝ hat eine konvergente Teilfolge“ (C 59) ist in leicht abgewandelter Form so auch in den Lehrbüchern A, D, E und F zu finden (vgl. A 95; D 79; E 55; F 36). B verweist in der Definition auf ›Häufungspunkte‹ anstatt auf ›Konvergenz‹ (vgl. B 90). F schließt der Definition die Beobachtung an, dass es „sogar einen größten und einen kleinsten Häufungswert“ (F 36) gibt, auch A weist auf diesen Zusammenhang hin (vgl. A 95). Dadurch binden A, B und F den Satz sprachlich näher an ›Häufungspunkte‹. Da D den Satz von Bolzano-Weierstraß vor dem Begriff des Häufungspunktes einführt, ist ein entsprechender Hinweis erst im Anschluss an diesen zu finden (vgl. D 80).

Der Satz wird als „grundlegender Satz der Analysis“ (A 95) bezeichnet oder als „Hauptresultat des Abschnitts“ (E 55). Dadurch wird dem Satz große Bedeutung zugesprochen. Lehrbuch B motiviert den Satz aus einem vorausgegangenen Beispiel, bei dem eine unbeschränkte Folge, die keinen Häufungspunkt hat, betrachtet wurde (vgl. B 89), und beschreibt: „Dieses Detail erweist sich als wesentlich“ (B 90), was die mathematische Relevanz von Voraussetzungen betont. Im Anschluss an den Beweis wird der Satz als „eine für Anwendungen sehr wertvolle Auswirkung des Vollständigkeitsaxioms“ (B 91) bezeichnet, womit auch hier seine Relevanz betont wird, gleichzeitig aber auch eine inhaltliche Einordung erfolgt. Das Lehrbuch F betont:

> Die Möglichkeit, Teilfolgen mit bestimmten Eigenschaften, welche die Gesamtfolge nicht unbedingt hat, auswählen zu können, spielt eine wichtige beweistechnische Rolle. *Übergang zu einer geeigneten Teilfolge* bedeutet *Ausdünnung* einer gegebenen Folge soweit, bis nur noch die gewünschte Eigenschaft […] übrigbleibt [sic!]. (F 36)

Mit diesen Worten wird ein Zusammenhang zu ›Teilfolgen‹ hergestellt. Das Wort „Ausdünnung“ evoziert die alltagssprachliche Verwendung und verweist auf das zuvor unkommentierte Konzept der ›Teilfolge‹. Dessen Bedeutung wird durch deren mögliche Eigenschaften herausgestellt. Dabei kommt Mathematikbetreibenden die Aufgabe zu, eine zu untersuchende Eigenschaft zu wählen. Somit sind Erkenntnisse im Rahmen der Sachverhaltskontextualisierung abhängig von vorher getätigten Entscheidungen.

Auffallend ist der direkt auf den Satz folgende Einschub der Biografien von Bolzano und Weierstraß (vgl. F 36). Der Satz wird folglich konkret an die Personen geknüpft, nach denen er benannt ist. Dieser Einschub beruht zwar auf Fakten, aber an Bezeichnungen wie „Vater der mathematischen Strenge“ (F 36, im Original kursiv) wird deutlich, dass es sich nicht nur um eine kurze biografische, objektive Beschreibung handelt, sondern wichtige mathematische Errungenschaften und den Lebensweg (kurz) nachgezeichnet und durch bildliche Sprache eingeordnet werden. Dies hebt sich demnach sprachlich von der mathematischen Fachsprache ab. Der Beweis des Satzes von Bolzano-Weierstraß beginnt in F mit den Worten „Es gibt dafür verschiedene Möglichkeiten“ (F 37), wodurch auf dessen Uneindeutigkeit verwiesen wird. Eine zugehörige Fußnote erläutert weiter: „Diese Bemerkung ist öfter angebracht: Die Auswahl der Beweismethode richtet sich in der Regel nach verschiedenen, als subjektiv einzustufenden und sich manchmal widersprechenden Kriterien“ (F 37). Anhand dieser Worte wird die Subjektivität von Beweisen herausgestellt, somit erscheinen mathematische Methoden und folglich auch Mathematik an sich von individuellen Entscheidungen geprägt zu sein.

Darüber hinaus wird im nachfolgenden Beispiel geäußert, dass „ganz *wilde* Folgen“ (F 37) existieren. Dieses Adjektiv kann in diesem Kontext auch mit „unbändig“ umschrieben werden[17]

[17] „wild“, bereitgestellt durch das Digitale Wörterbuch der deutschen Sprache, https://www.dwds.de/wb/wild, konsultiert am 11.05.2025.

und ist so im Sinne von Folgen, die viele Eigenschaften haben oder schwer vorstellbar sind, zu verstehen.

3.3.9 Cauchy-Folge

A bezeichnet die auf der Definition der ›Cauchy-Folge‹ beruhenden Aussagen als „wichtig[…]“ (A 98) und auch B betont die Relevanz des Konzepts als „ein notwendiges und hinreichendes Kriterium […], das entscheidet, ob eine reelle Zahlenfolge konvergent ist“ (B 92). Damit weist B schon auf einen konkreten Anwendungskontext hin, wodurch der Begriff auch inhaltlich motiviert wird. „Eine charakteristische Eigenschaft konvergenter Folgen, die formuliert werden kann, ohne auf den Grenzwert der Folge Bezug zu nehmen, wurde von Cauchy entdeckt“, so Lehrbuch D (D 71) und stellt somit inhaltliche Vorzüge der Einführung des Begriffs heraus. Des Weiteren setzt D diesen mit dem Begriff des ›Grenzwertes‹ in eine Interdependenz, wobei auch F diesen Gedanken zur weiteren Erläuterung der Definition aufgreift (vgl. F38). Das Wort „entdeckt“ (D 71) perspektiviert Mathematik als vom Menschen unabhängige Wissenschaft, in der Sachverhalte nicht erfunden und somit als Entdeckung bezeichnet werden. Auch A erwähnt Cauchy als Person explizit (vgl. A 98). Dadurch wird die Definition einer Cauchy-Folge enger an die historische Person gebunden. Die betrachtete transkribierte Vorlesung 4 äußert den Wunsch nicht mehr „raten“ (VL 4: 23) zu müssen, was ein möglicher Grenzwert sein könnte (vgl. VL 4: 18–26) und motiviert so das Konzept der ›Cauchy-Folge‹. Das Wort „raten“ wird zwar abwertend verwendet, gleichzeitig wird jedoch deutlich, dass dies teilweise zum Erkenntnisgewinn notwendig ist.

B, C und D erklären, dass bei einer Cauchy-Folge „der Abstand aller Folgenglieder untereinander beliebig klein ist, wenn deren Indizes nur hinreichend groß sind“ (B 93; vgl. C 54; vgl. D 72). Da D diese Aussage mit „[g]rob gesprochen“ (D 72) markiert, wird deutlich, dass es sich dabei um keine exakte Definition handelt. Davon abweichend charakterisiert E eine ›Cauchy-Folge‹ durch „Folgenglieder [, die sich] gegenseitig ‚beliebig nahe kommen‘“ (E 56). Hierbei ist eine Diskrepanz zum mathematisch exakten Sprachgebrauch wahrnehmbar, was auch durch die Worte „[a]nschaulich gesprochen“ (E 56) gekennzeichnet wird.

4 Fazit

Zusammenfassend ist eine Fachsprache durch ihre Gebundenheit an ein Fach definiert und somit auch von diesem bestimmt. Unter *Mathematik* kann das logische Ableiten von zentralen Aussagen aus Vorannahmen verstanden werden. Die mathematische Fachsprache ist vor allem durch die Verwendung von Formelsprache charakterisiert. Die Dreiteilung von Referenzobjekt, Bedeutung und Zeichen lässt sich auch bei den abstrakten Objekten der Mathematik anwenden. Aus semiotischer Perspektive können Diagramme, Ikone und deren Verknüpfung mit symbolischen und indexikalischen Zeichen identifiziert werden. Die Fachsprache Mathematik zeichnet sich ferner durch das wiederholte Vorkommen des Grundmusters Definition – Satz – Beweis aus.

Sprache kann sowohl als Zeichensystem als auch als Mittel der Kommunikation verstanden werden. Da diese beiden Zuschreibungen auch auf Mathematik zutreffen, kann sie als Sprache verstanden werden. Ihr Erwerb muss im Gegensatz zu einer Erstsprache instruiert erfolgen und ähnelt somit eher dem Fremdspracherwerb. Analog zu diesem muss beispielweise die Kategorisierung von Objekten und Regeln erlernt werden.

Solch ein Prozess dient dem Erlernen von Wissen, welches als mentales Konstrukt zu verstehen ist. Da es somit an Sprache gekoppelt ist und Sprache grundsätzlich perspektiviert, ist Wissen zunächst individuell und damit subjektiv. Der Objektivität kann sich durch Multiperspektivität und den Bezug auf eine gemeinsame Wirklichkeit angenähert werden. Die vermeintliche Objektivität der Fachsprache der Mathematik muss hinterfragt werden, da mathematische Sachverhalte und ihr Verständnis einem stetigen Diskurs unterworfen sind und von Menschen mittels Sprache erschaffen werden. Das mathematische Wissen besteht somit ausschließlich aus Fakten. Dabei bietet der Beweis eine Möglichkeit, allgemeinen Konsens herzustellen.

Die Diskrepanz zwischen der vermeintlichen Objektivität der Mathematik und ihrer tatsächlichen sprachlichen und damit perspektivierten Realisierung wurde im Rahmen einer Analyse, basierend auf sechs unterschiedlichen Lehrbüchern zu Einführungen in die Analysis sowie vereinzelt hinzugezogenen transkribierten Vorlesungen, thematisiert. Schon anhand der Vorworte können metaphorische Erläuterungen von Mathematik beobachtet werden, die diese als schön und beständig beschreiben. Daraufhin wurden durch die Einführung von ausgewählten Lexemen weitere sprachliche Auffälligkeiten analysiert. Allgemein kann – wie in der mathematischen Fachsprache erwartet – eine hohe Objektivität beobachtet werden, die sich in wiederkehrenden Mustern, der Subjektsetzung von mathematischen Objekten und den gewählten Pronomen zeigt. Dennoch sind Abweichungen feststellbar. Dabei fallen vor allem die einleitenden Worte zu grundlegenden Konzepten auf, die die Relevanz des jeweiligen Begriffes perspektivieren und diesen durch Anknüpfungen an die Alltagssprache veranschaulichen. Das Vorgehen wird teilweise sprachlich motiviert und durch Beobachtungen von konkreten Sachverhalten abstrahiert, um so allgemein das mathematische Vorgehen zu thematisieren. Entsprechende Verben und Personalpronomen charakterisieren die Mathematik als etwas von Menschen Hergestelltes. Grobe Abweichungen vom mathematischen Vokabular werden teilweise auch sprachlich entsprechend markiert. Was die einzelnen Lehrbücher hervorheben, variiert stark und ist auch anhand der unterschiedlichen Benennung von Aussagen ersichtlich.

Die Konzepte werden teilweise mit Grafiken verknüpft, wobei diese stets nur der Illustration oder Veranschaulichung dienen und keine über die im Text konstituierten Sachverhalte hinausführenden Informationen liefern. Obwohl Vorlesungen sich grundsätzlich medial stark von Lehrbüchern unterscheiden, können teilweise sprachliche Gemeinsamkeiten beobachtet werden.

Methodisch war das Vorgehen der durchgeführten Analyse grundsätzlich geeignet, um anhand der durch quantitative Verfahren gefundenen, zentralen Lexeme exemplarisch Auffälligkeiten der mathematischen Fachsprache aufzuzeigen. Alternativ könnte statt einer themenorientierten eine thesenorientierte Vorgehensweise gewählt werden. Da dort jedoch Einführungen in das Thema nicht ausreichend analysiert werden können, bot sich dies für die zugrundeliegende Fragestellung nicht wirklich an.

Weiterführend könnte eine Analyse von Einführungen in die Analysis erfolgen, die für Studierende von Natur-, Ingenieur- oder Wirtschaftswissenschaften konzipiert wurden, um weitere und möglicherweise abweichende Perspektivierungen aufzuzeigen.

Abschließend lässt sich festhalten, dass mathematisches Wissen in der heutigen Zeit unabdingbar für das Verständnis und somit die Lösung von aktuellen gesellschaftlichen Problemen wie dem Klimawandel oder der Digitalisierung ist. Die Analyse der Sprache der Mathematik ist damit äußerst relevant, um Lernenden den Zugriff auf diese zu erleichtern, Lehrende auf etwaige Schwierigkeiten hinzuweisen und ihre Popularisierung zu erleichtern.

5 Literaturverzeichnis

Adamzik, Kirsten (2018): *Fachsprachen. Die Konstruktion von Welten*. Tübingen: Narr Francke Attempto.

Angermann, Lutz/Mulansky, Bernd (2022): *Grundkurs Analysis und Lineare Algebra. Eine akzentuierte zweisemestrige Einführung*. Berlin: Springer Spektrum.

Arens, Tilo/Busam, Rolf/Hettlich, Frank/Karpfinger Christian/Stachel, Hellmuth (2021): *Grundwissen Mathematikstudium. Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen*. Berlin: Springer.

Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (2015): Sprache in Mathematik, Naturwissenschaft und Technik. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Handbuch Sprache und Wissen*. Berlin/Boston: De Gruyter, 411–434.

Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.) (2023): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter.

Attig, Matthias (2018): Begriffsrealismus als sprachwissenschaftliches Problem. Überlegungen zur kategorialen Eigenart von Termini. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Wirklichkeit oder Konstruktion?*. Berlin/Boston: De Gruyter, 324–343.

Becker, Lisa (2024): Aus Mathefrust muss Mathelust werden. 14.12.2024. Online unter: https://www.faz.net/aktuell/karriere-hochschule/hoersaal/warum-mathematik-unterricht-in-der-schule-dringend-besser-werden-muss-110168401.html?campID=MAIL-E2400000728 (konsultiert am 21.12.2024).

Beutelspacher, Albrecht (2016): *Albrecht Beutelspachers Kleines Mathematikum. Die 101 wichtigsten Fragen und Antworten zur Mathematik*. München: C.H. Beck.

Bierwisch, Manfred (2008): Bedeuten die Grenzen meiner Sprache die Grenzen meiner Welt?. In: Kämper, Heidrun/Eichinger, Ludwig M. (Hrsg.): *Sprache – Kognition – Kultur*. Berlin/New York: De Gruyter.

Bremer, Katharina/Müller, Marcus (2021): *Sprache, Wissen, Gesellschaft. Eine Einführung in die Linguistik des Deutschen*. Berlin/Boston: De Gruyter.

Brunner, Martin (2012): Kürze als Resultat mathematischer Darstellungs- und Verwendungsprinzipien. In: *Kodikas/Code – Ars Semeiotica. An international Journal of Semiotics* 35 (1–2), 25–39.

Busse, Dietrich (2024): Sprache – Texte – Wissensnetze. In: Attig, Matthias/Jacob, Katharina/Müller, Marcus/Vogel, Friedemann (Hrsg.): *Netz und Werk. Zur Gesellschaftlichkeit sprachlichen Handelns*. Berlin/Boston: De Gruyter, 27–38.

Bußmann, Hadumod (2008): *Lexikon der Sprachwissenschaft*. Stuttgart: Alfred Körner Verlag.

Davis, Philip J./Hersh, Reuben (1985): *Erfahrung Mathematik*. Basel/Boston/Stuttgart: Birkhäuser Verlag.

Dörfler, Willi (2012): Mathematik: Denken durch Schreiben. In: Blum, Werner/Ferri, Rita Borromeo/Maß, Katja (Hrsg.): *Mathematikunterricht im Kontext von Realität, Kultur und Lehrerprofessionalität. Festschrift für Gabriele Kaiser*. Wiesbaden: Springer, 367–375.

Dörfler, Willi (2015): Abstrakte Objekte in der Mathematik. In: Kadunz, Gert (Hrsg.): *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik*. Berlin/Heidelberg: Springer, 33–50.

Drumm, Sandra (2018): Grundlagen der Forschung an Fachsprachen. In: Roche, Jörg/Drumm, Sandra (Hrsg.): *Berufs-, Fach- und Wissenschaftssprachen. Didaktische Grundlagen*. Tübingen: Narr Francke Attempto, 17–52.

Dueck, Gunter (2008): Mathematik und Weltläufigkeit. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 16 (3), 206–209.

Dutilh Novaes, Catarina (2012): *Formal Language in Logic. A philosophical and cognitive analysis*. Cambridge/New York: Cambridge University Press.

DWDS – Digitales Wörterbuch der deutschen Sprache. Das Wortauskunftssystem zur deutschen Sprache in Geschichte und Gegenwart, hrsg. von der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften. Online unter: https://www.dwds.de/ (konsultiert am: 11.05.2025).

Eisenreich, Günther (1998): Die neuere Fachsprache der Mathematik seit Carl Friedrich Gauß. In: Hoffmann, Lothar/Kalverkämper, Hartwig/Wiegand, Herbert Ernst (Hrsg.): *Fachsprachen. Ein internationales Handbuch zur Fachsprachenforschung und Terminologiewissenschaft*. Berlin/New York: De Gruyter, 1222–1230.

Felder, Ekkehard (2006): Semantische Kämpfe in Wissensdomänen. Eine Einführung in Benennungs-, Bedeutungs- und Sachverhaltsfixierungs-Konkurrenzen. In: Felder, Ekkehard (Hrsg.): *Semantische Kämpfe. Macht und Sprache in den Wissenschaften*. Berlin/New York: De Gruyter.

Felder, Ekkehard (2009): Sprache – das Tor zur Welt!? Perspektiven und Tendenzen in sprachlichen Äußerungen. In: Felder, Ekkehard (Hrsg.): *Sprache*. Berlin/Heidelberg: Springer, 13–58.

Felder, Ekkehard (2013): Faktizitätsherstellung mittels handlungsleitender Konzepte und agonaler Zentren. Der diskursive Wettkampf um Geltungsansprüche. In: Felder, Ekkehard (Hrsg.): *Faktizitätsherstellung in Diskursen*. Die Macht des Deklarativen. Berlin/Boston: De Gruyter, 13–28.

Felder, Ekkehard (2015): Lexik und Grammatik der Agonalität in der linguistischen Diskursanalyse. In: Kämper, Heidrun/Warnke, Ingo H. (Hrsg.): *Diskurs – interdisziplinär. Zugänge, Gegenstände, Perspektiven*. Berlin/Boston: De Gruyter, 87–120.

Felder, Ekkehard (2018): Wahrheit und Wissen zwischen Wirklichkeit und Konstruktion: Freiheiten und Zwänge beim sprachlichen Handeln. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Wirklichkeit oder Konstruktion?*. Berlin/Boston: De Gruyter, 371–398.

Felder, Ekkehard (2021): Strukturelle Dialogizität zwischen Experten und Laien: Ideal und Wirklichkeit. In: Hoffmeister, Toke/Hundt, Markus/Naths, Saskia (Hrsg.): *Laien, Wissen, Sprache. Theoretische, methodische und domänenspezifische Perspektiven*. Berlin/Boston: De Gruyter, 49–70.

Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (2015): Sprache – Erkenntnis – Handeln. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Handbuch Sprache und Wissen*. Berlin/Boston: De Gruyter, 3–33.

Gardt, Andreas (2018): Wort und Welt. Konstruktivismus und Realismus in der Sprachtheorie. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Wirklichkeit oder Konstruktion?*. Berlin/Boston: De Gruyter, 1–44.

Gerisch, Peter (1988): Fachbedingte sprachliche Charakteristika mathematischer Texte (Walter Reinhardt zum Gedenken). In: *Fachsprache. Internationale Zeitschrift für Fachsprachenforschung, -didaktik und Terminologie* 10 (1–2), 50–65.

Glück, Helmut (2024): Sprache. In: Glück, Helmut/Rödel, Michael (Hrsg.): *Metzler Lexikon Sprache*. Berlin: J.B. Metzler, 606–608.

Hein, Kerstin (2021): *Logische Strukturen beim Beweisen und ihre Verbalisierung. Eine sprachintegrative Entwicklungsforschungsstudie zum fachlichen Lernen*. Wiesbaden: Springer.

Heintz, Bettina (2000): *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Wien/New York: Springer.

Heringer, Hans Jürgen (1972): *Formale Logik und Grammatik*. Tübingen: Max Niemeyer Verlag.

Hoffmann, Dieter (2017): Analysis. In: Walz, Guido (Hrsg.): *Lexikon der Mathematik: Band 1. A bis Eif*. Berlin: Springer Spektrum.

Hoffmann, Lothar (1985): *Kommunikationsmittel Fachsprache. Eine Einführung*. Tübingen: Gunter Narr Verlag.

Horacek, Helmut (2023): Texts in Mathematics and Natural Sciences Phenomena and Processing Methods. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 241–268.

Hyland, Ken (1998): *Hedging in Scientific Research Articles*. Amsterdam/Philadelphia: John Benjamins B.V..

Illi, Manuel (2017): *Sprache in Wissenschaft und Dichtung. Diskursive Formationen von Mathematik, Physik, Logik und Dichtung im 17. und 18. Jahrhundert*. Berlin/Boston: De Gruyter.

Jacob, Katharina (2023): Diskurs. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 381–404.

Jäger, Ludwig (2018): „Outthereness". Über das Problem des Wirklichkeitsbezugs von Zeichen. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Wirklichkeit oder Konstruktion?*. Berlin/Boston: De Gruyter, 301–323.

Jäger, Willi (1993): Die Sprache der Mathematik. In: Weingartner, Paul (Hrsg.): *Die Sprache in den Wissenschaften*. Freiburg/München: Verlag Karl Alber, 9–42.

Keller, Rudi (2018): *Zeichentheorie. Eine pragmatische Theorie semiotischen Wissens*. Tübingen: A. Francke Verlag.

Kirchner, Friedrich/Michaëlis, Carl/Hoffmeister, Johannes/Regenbogen, Arnim/Meyer, Uwe (Hrsg.) (2013): *Wörterbuch der philosophischen Begriffe*. Hamburg: Felix Meiner Verlag.

Klug, Nina-Maria/Stöckl, Hartmut (2015): Sprache im multimodeln Kontext. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Handbuch Sprache und Wissen*. Berlin/Boston: De Gruyter, 242–264.

Konerding, Klaus-Peter (2009): Sprache – Gegenstandskonstitution – Wissensbereiche. Überlegungen zu (Fach-)Kulturen, kollektiven Praxen, sozialen Transzendalien, Deklarativität und Bedingungen von Wissenstransfer. In: Felder, Ekkehard/Müller, Marcus (Hrsg.): *Wissen durch Sprache*. Berlin/New York: De Gruyter, 79–112.

Konerding, Klaus-Peter (2015): Sprache und Wissen. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Handbuch Sprache und Wissen*. Berlin/Boston: De Gruyter, 57–80.

Konerding, Klaus-Peter (2024): Sprache als Netz und Sprache als Werk – Überlegungen zu möglichen Grundzügen der Bestimmung und Verortung einer „Soziopragmatischen Linguistik“. In: Attig, Matthias/Jacob, Katharina/Müller, Marcus/Vogel, Friedemann (Hrsg.): *Netz und Werk. Zur Gesellschaftlichkeit sprachlichen Handelns*. Berlin/Boston: De Gruyter, 11–26.

Krüger, Dagobert (1992): Anmerkungen zur Entstehung und Diskussion mathematischer Termini an Beispielen des 17. und 18. Jahrhunderts. In: Albrecht, Jörg/Baum, Richard (Hrsg.): *Fachsprache und Terminologie in Geschichte und Gegenwart*, 117–133.

Kruse, Theresa (2023): Vocabulary in Mathematics. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 469–488.

Kupffer, Manfred (2005): Bedeutung und Analyse. In: Spohn, Wolfgang/Schroeder-Heister, Peter/Olsson, Erik J. (Hrsg.): *Logik in der Philosophie*. Heidelberg: Synchron, 201–226.

Kvasz, Ladislav (2008): *Patterns of Change. Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics*. Basel/Boston/Berlin: Birkhäuser Verlag.

Kvasz, Ladislav (2015): Über die Konstitution der symbolischen Sprache der Mathematik. In: Kadunz, Gert (Hrsg.): *Semiotische Perspektiven auf das Lernen von Mathematik*. Berlin/Heidelberg: Springer, 51–70.

Lakatos, Imre (1979): *Beweise und Widerlegungen. Die Logik mathematischer Entdeckungen*. Braunschweig/Wiesbaden: Friedr. Vieweg & Sohn.

Liebert, Wolf-Andreas (2023): Kommunikative Strategien der Wissenschaftspopularisierung. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 271–290.

Liebing, Kevin (2017): Sprache und/oder Mathematik?. In: Maresch, Guenter/Fuchs, Karl/Borovcnik, Manfred/Plangg, Simon/ Zöggeler, Narion/Dominik, Alfred (Hrsg.): *Mathematik im Unterricht*. Salzburg: ohne Verlag, 43–48.

Löbner, Sebastian (2015): *Semantik. Eine Einführung. 2. Auflage*. Berlin/Boston: De Gruyter.

Lorenzen, Paul (1955): Ist Mathematik eine Sprache?. In: *Synthese* 10, 181–186.

Lyons, John (1980): *Semantik. Band I*. München: C.H. Beck.

Maier, Hermann/Schweiger, Fritz (2008): *Mathematik und Sprache*. Ohne Ort: ohne Verlag.

Mehrtens, Herbert (1990): *Moderne – Sprache – Mathematik*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Metzger, Christiane/Riegler, Peter (2024): Was häufig ungesagt bleibt… Ein linguistischer Blick auf Mathematik und Physik. In: Scharlau, Ingrid/Jenert, Tobias (Hrsg.): *Wissenschaftsdidaktik als kritische Kommunikationsanalyse. Ein Sammelband zur Weiterführung eines Gedankens von Ludwig Huber*. Opaladen/Berlin/Toronto: Verlag Barbara Budrich, 145–163.

Müller, Horst M. (2024): Wissen. In: Glück, Helmut/Rödel, Michael (Hrsg.): *Metzler Lexikon Sprache*. Berlin: J.B. Metzler, 729.

Nickel, Gregor (2023): Mathematik und Sprache. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 9–54.

Nöth, Winfried (2000): *Handbuch der Semiotik*. Stuttgart/Weimar: Verlag J. B. Metzler.

Otte, Henning (2025): Kretschmann pocht auf besseren Mathe-Unterricht an BW-Schulen. 18.2.2025. Online unter: https://www.swr.de/swraktuell/baden-wuerttemberg/kretschmann-mathe-unterricht-100.html (konsultiert am 19.02.2024).

Pittioni, Veit (2008): Mathematik. In: Prechtl, Peter/Burkard, Franz-Peter (Hrsg.): *Metzler Lexikon Philosophie*. Stuttgart/Weimar: J.B. Metzler, 362–363.

Rautenberg, Wolfgang (1965): Über den Sprachgebrauch in der Mathematik. In: *Deutsche Zeitschrift für Philosophie* 13 (6), 721–738.

Roche, Jörg (2020): *Fremdsprachenerwerb. Fremdsprachendidaktik*. Tübingen: Narr Francke Attempto.

Roelcke, Thorsten (2020): *Fachsprachen*. Berlin: Erich Schmidt Verlag.

Schmidt, Siegfried J. (2018): Wie wirklich ist die Wirklichkeit?. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Wirklichkeit oder Konstruktion?*. Berlin/Boston: De Gruyter, 102–117.

Schmidt, Vasco Alexander (2003): *Grade der Fachlichkeit in Textsorten zum Themenbereich Mathematik*. Berlin: Weidler.

Schmidt, Vasco Alexander (2009): Vernunft und Nützlichkeit der Mathematik. Wissenskonstitution in der Industriemathematik als Gegenstand der angewandten Linguistik. In: Felder, Ekkehard/Müller, Marcus (Hrsg.): *Wissen durch Sprache*. Berlin/New York: De Gruyter, 451–475.

Schmidt, Vasco Alexander (2023a): *Kurvendiskussion. Wörterbuch der populären Mathematik*. Norderstedt: Books on Demand.

Schmidt, Vasco Alexander (2023b): Textsorten des mathematischen und naturwissenschaftlichen Diskurses. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 423–444.

Schmidt, Vasco Alexander (2024): Linguistik der Wahrheitssuche – Inspirationen aus der Wissensdomäne Mathematik. In: Attig, Matthias/Jacob, Katharina/Müller, Marcus/Vogel, Friedemann (Hrsg.): *Netz und Werk. Zur Gesellschaftlichkeit sprachlichen Handelns*. Berlin/Boston: De Gruyter, 265–274.

Spitzmüller, Jürgen (2021): His Master’s Voice. Die soziale Konstruktion des ‚Laien‘ durch den ‚Experten‘. In: Hoffmeister, Toke/Hundt, Markus/Naths, Saskia (Hrsg.): *Laien, Wissen, Sprache. Theoretische, methodische und domänenspezifische Perspektiven*. Berlin/Boston: De Gruyter, 1–24.

Steinmetz, Maria (2018): Fachsprache Mathematik. In: Roche, Jörg/Drumm, Sandra (Hrsg.): *Berufs-, Fach- und Wissenschaftssprachen. Didaktische Grundlagen*. Tübingen: Narr Francke Attempto, 198–208.

Stolze, Radegundis (2023): Die Fachübersetzung in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 221–240.

Szurawitzki, Michael (2023): Deutsch als Sprache von Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. In: Atayan, Vahram/Metten, Thomas/Schmidt, Vasco Alexander (Hrsg.): *Handbuch Sprache in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik*. Berlin/Boston: De Gruyter, 489–508.

Walz, Guido (Hrsg.) (2017): *Lexikon der Mathematik: Band 1. A bis Eif*. Berlin: Springer Spektrum.

Warnke, Ingo H. (2013): Diskurslinguistik und die ‚wirklich gesagten Dinge' – Konzepte, Bezüge und Empirie der transtextuellen Sprachanalyse. In: Felder, Ekkehard (Hrsg.): *Faktizitätsherstellung in Diskursen*. Die Macht des Deklarativen. Berlin/Boston: De Gruyter, 75–98.

Warnke, Ingo H. (2015): Diskurs. In: Felder, Ekkehard/Gardt, Andreas (Hrsg.): *Handbuch Sprache und Wissen*. Berlin/Boston: De Gruyter, 221–241.

Anhang

I Primärliteratur

A) Brokate, Martin/Zimmer, Johannes/Lindemann, Florian (2023): Analysis 1. Ein zuverlässiger und verständlicher Begleiter für Studium und Prüfung. Berlin: Springer Spektrum.
Subkorpus: S. 81–104

B) Constantin, Adrian (2024): Analysis I. Berlin: Springer Spektrum.
Subkorpus: S. 71–94

C) Deitmar, Anton (2021): Analysis. 3. Auflage. Berlin: Springer Spektrum.
Subkorpus: S. 45–59

D) Forster, Otto/Lindemann, Florian (2023): Analysis 1. Differential- und Integralrechnung einer Veränderlichen. 13., überarbeitete und ergänzte Auflage. Wiesbaden: Springer Spektrum.
Subkorpus: S. 53–70

E) Friedl, Stefan (2023): Analysis. Fokussiert und farbig. Berlin: Springer Spektrum.
Subkorpus: S. 25–39

F) Steinmetz, Norbert (2024): Analysis. Berlin: Springer Spektrum.
Subkorpus: S. 27–41

II Tabellen- und Abbildungsverzeichnis

III Tabellen und Abbildungen

Tabelle 1: Schlüsselwörter basierend auf der absoluten Häufigkeit

Lexem (Substantiv)	Absolute Häufigkeit
Folge	725
Grenzwert	152
Teilfolge	68
Folgenglied	60
Konvergenz	57
lim	44
Nullfolge	41
Cauchyfolge	38
limes	36
Häufungspunkt	32
Häufungswert	27
Bolzano-Weierstraß	19
Glied	19
Schranke	18
Grenzwertregel	14
Konvergenzkrite-rium	14
Zahlenfolge	13
Intervallschachte-lung	13
Divergenz	12
Cauchy-Folge	11

Datengrundlage: Sketch Engine. Wordlist noun des Subkorpus‘.

Tabelle 2: Zwei- bis vierwertige N-Gramme

N-Gramme	Absolute Häufigkeit
reelle Folge	39
lim sup	37
konvergente Folgen	27
konvergente Folge	24
monoton wachsend	22
monoton fallend	22
streng monoton	20
beschränkte Folge	16
Reelle Folgen	16
Satz von Bolzano-Weierstraß	15
konvergente Teilfolge	12
uneigentlich konvergent	11
Limes superior	10
monoton wachsende	10
Folge von reellen Zahlen	9
divergiert bestimmt	9
divergiert bestimmt gegen	9
monoton steigend	8
nach oben beschränkt	8
oben beschränkt	8

Datengrundlage: Sketch Engine: N-Grams des Subkorpus‘.

Tabelle 3: Keywords des Subkorpus'

Lexem	Absolute Häufigkeit Subkorpus „Konvergenz und Folgen“	Absolute Häufigkeit im Subkorpus „Analysis“	Score (statistisches Maß von Sketch Engine, beruht unter anderem auf der relativen Häufigkeit)
Häufungswert	27	30	19,15
Einschließungssatz	4	5	14,43
Indexfolge	2	2	14,16
Konvergenzdefinition	2	2	14,16
Cauchyfolgen	2	2	14,16
Teilfolgen	3	4	12, 96
Summenfolge	3	4	12,96
Auswahlfolge	3	4	12,96
Grenzwertregeln	3	4	12,96
Potenzwachstum-Korollar	3	4	12,96
Stolz-Cesàro	3	4	12,96

Datengrundlage: Sketch Engine. Keywords Advanced. Focus subcorpus: Subkorpus. Reference corpus: Korpus der Lehrbücher zur Analysis.

Tabelle 4: Übersicht der zu untersuchenden Lexeme

Folgen	
Konvergenz	Konvergenz Konvergenzregeln Divergenz
Beschränktheit	
Einschließungssatz	
Teilfolge	
Häufungspunkt	
Satz von Bolzano-Weierstraß	
Cauchy-Folge	

Basierend auf: Tabelle 1; Tabelle 2; Tabelle 3

Tabelle 5: Häufigkeit der Verben des Subkorpus'

Verben	Absolute Häufigkeit	Relative Häufigkeit
sein	949	17405,18
gelten	352	6455,87
geben	165	3026,19
werden	154	2824,44
folgen	134	2457,63
können	104	1907,42
konvergieren	101	1852,40
zeigen	80	1467,24
haben	77	1412,22
heißen	64	1173,80

Datengrundlage: Sketch Engine: Wordlist verb des Subkorpus‘, gekürzt und adaptiert.

Abbildung 1: Darstellung von Folgen (A)

$\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ (links) und $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (rechts)

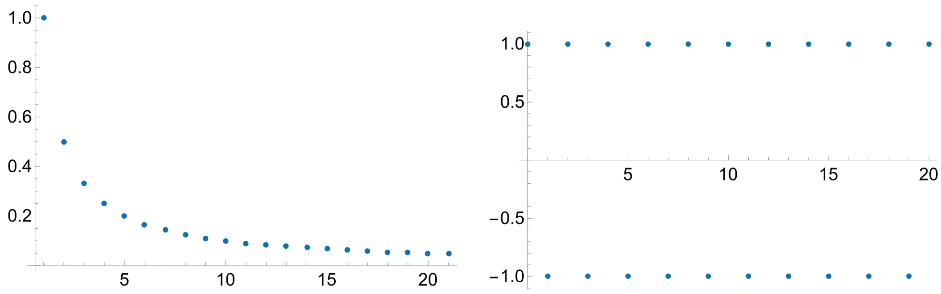


Abb. 8.2 Die ersten Folgenglieder für Beispiel 8.2 (i) (links), und Beispiel 8.2 (ii) (rechts)

(A 82 bzw. Brokate/Zimmer/Lindemann 2023: 82)

Abbildung 2: Darstellung der Fibonaccifolge (A)

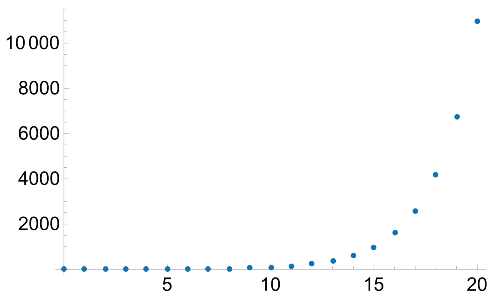
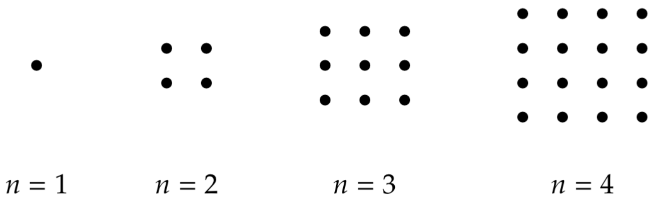


Abb. 8.3 Die ersten Folgenglieder der Fibonaccifolge, Beispiel 8.2 (iii)

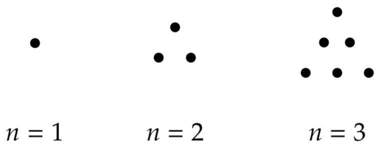
(A 85 bzw. Brokate/Zimmer/Lindemann 2023: 85)

Abbildung 3: Folge der Quadrat-/ Dreieckszahlen (C)

- Die Folge der Quadratzahlen $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Diese heißt so, weil sie die Größen von Quadraten mit ganzzahligen Seiten wiedergibt.



- Die Folge der *Dreieckszahlen*, die die Größe von entsprechenden Dreiecken wiedergeben:



(C 46 bzw. Deitmar 2021: 46)

Abbildung 4: Definition (E)

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert gegen den Grenzwert } a \;:\Longleftrightarrow\; \lim_{n\to\infty} a_n = a \;:\Longleftrightarrow\; \underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N}{\forall}\ \underbrace{|a_n - a| < \epsilon}_{\substack{\uparrow \\ \text{mit anderen Worten, es ist } a_n \in (a-\epsilon,\, a+\epsilon)}}.$$

(E 28 bzw. Friedl 2023: 28)

Abbildung 5: Visualisierung Grenzwert (B)

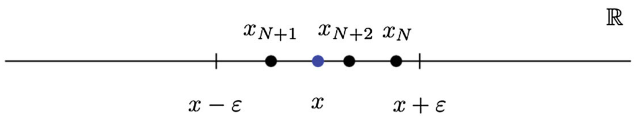


Abb. 3.1 Für $x_n \to x$ sind für $n \geq N$ alle Folgenglieder x_n ε-nahe am Grenzwert x

(B 72 bzw. Constantin 2024: 72)

Abbildung 6: Visualisierung Konvergenz (D)

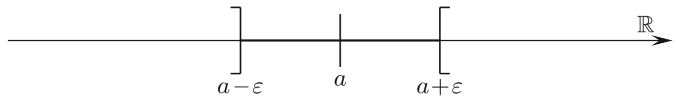


Abb. 4 A ε-Umgebung

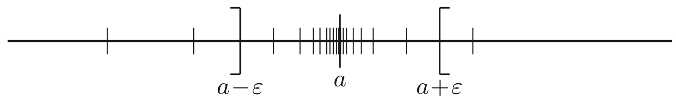
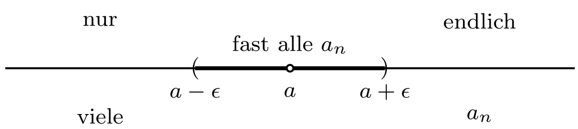


Abb. 4 B Konvergenz

(D 55 bzw. Forster/Lindemann 2023: 55)

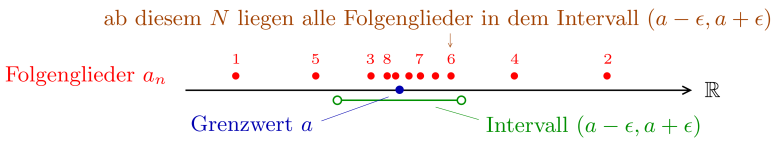
Abbildung 7: Verteilung der Folgenglieder um den Grenzwert (F)

Abb. 2.1 Verteilung der Folgenglieder a_n um den Grenzwert a



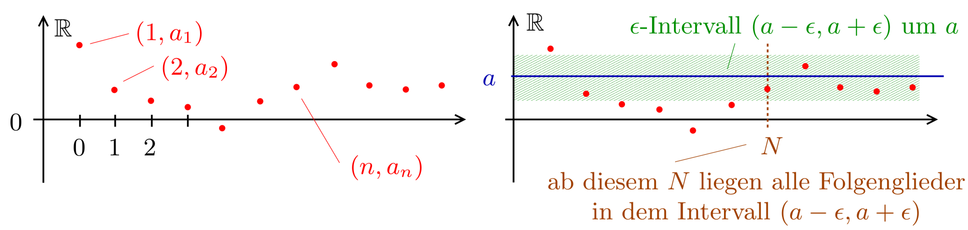
(F 28 bzw. Steinmetz 2024: 28)

Abbildung 8: Grafiken zu Folgen und Konvergenz I (E)



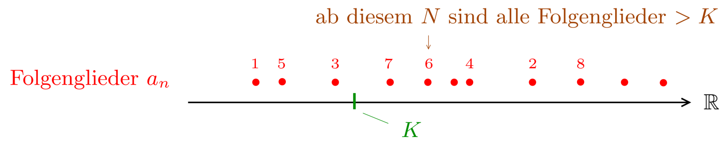
(E 28 bzw. Friedl 2023: 28)

Abbildung 9: Grafiken zu Folgen und Konvergenz II (E)



(E 28 bzw. Friedl 2023: 28)

Abbildung 10: Divergenz (E)



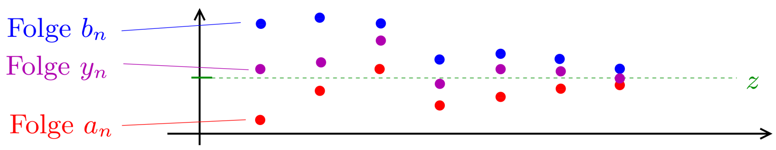
(E 34 bzw. Friedl 2023: 34)

Abbildung 11: Implikationspfeile konvergent und beschränkt (A)

konvergent $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ beschränkt.

(A 86 bzw. Brokate/Zimmer/Linnemann 2023: 86)

Abbildung 12: Sandwichsatz (E)



(E 33 bzw. Friedl 2023: 33)

Abbildung 13: Beweis Eingrenzungssatz (A)

Beweis Dies folgt unmittelbar, da für gegebenes ε für genügend großes n die Einschließung $a - \varepsilon < a_n \le b_n \le c_n < a + \varepsilon$ gilt. □

(A 90 bzw. Brokate/Zimmer/Linnemann 2023: 90)

Abbildung 14: Beweis des Einschließungssatzes (B)

Beweis Sei $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $x_n^- \le x_n \le x_n^+$ für alle $n \ge N_0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $x - \varepsilon < x_n^-$ für alle $n \ge N_1$ und ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $x_n^+ < x + \varepsilon$ für alle $n \ge N_2$. Setzen wir $N = \max\{N_0, N_1, N_2\}$, so gilt

$$x - \varepsilon < x_n^- \le x_n \le x_n^+ < x + \varepsilon \quad \text{für alle } n \ge \max\{N_0, N_1, N_2\}\,,$$

und somit haben wir $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \ge N$. □

(B 77 bzw. Constantin 2024: 76)

Abbildung 15: Beweis des Einschließungskriteriums (C)

Beweis. Zu gegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $n_1 \geq n_0$ so dass für jedes $n \geq n_1$ beide Ungleichungen $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ und $|b_n - \alpha| < \varepsilon$ erfüllt sind. Das bedeutet dann

$$-\varepsilon < a_n - \alpha \leq c_n - \alpha \leq b_n - \alpha < \varepsilon,$$

also auch $|c_n - \alpha| < \varepsilon$ für $n \geq n_1$. $\square$

(C 48 bzw. Deitmar 2021: 48)

Abbildung 16: Beweis des Sandwichsatzes (E)

Beweis des Sandwichsatzes 2.6. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von reellen Zahlen, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen $a_n \leq y_n \leq b_n$ gelten. Wir nehmen an, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den gleichen Grenzwert z konvergieren. Es gilt also:

(1) $\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N_a\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N_a}{\forall}\ a_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$ und (2) $\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{N_b\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq N_b}{\forall}\ b_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$

Wir müssen zeigen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = z$, d.h. wir müssen zeigen:

$$\underset{\epsilon>0}{\forall}\ \underset{M\in\mathbb{N}}{\exists}\ \underset{n\geq M}{\forall}\ y_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon).$$

Es sei also $\epsilon > 0$. Aus (1) und (2) folgt, dass es $N_a, N_b \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n \geq N_a$ gilt $a_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$ und für alle $n \geq N_b$ gilt $b_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$. Wir setzen jetzt also $M := \max\{N_a, N_b\}$. Für alle $n \geq M$ gilt dann $a_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$ und $b_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$. Da y_n zwischen a_n und b_n liegt, gilt also auch $y_n \in (z-\epsilon, z+\epsilon)$. $\blacksquare$

(E 34 bzw. Friedl 2023: 34)

Abbildung 17: Beweis einer Konvergenzregel (F)

a^r. Es bleibt k) zu beweisen: Die Ungleichungen $a - a_n < \epsilon$ und $b_n - b < \epsilon$ für $n \geq n_0$ ergeben mit $c = a = b$: $c - c_n \leq a - a_n < \epsilon$ und $c_n - c \leq b_n - b < \epsilon$, und damit die Behauptung $|c - c_n| < \epsilon$ für $n \geq n_0$.

(F 30 bzw. Steinmetz 2024: 30)

Abbildung 18: Weglassen von Folgengliedern (C)

$$(\cancel{a_1}, \underbrace{a_2}_{=b_1}, \cancel{a_2}, \cancel{a_3}, \underbrace{a_4}_{=b_2}, \dots).$$

(C 58 bzw. Deitmar 2021: 58)

IV Transkripte

Vorlesung 1 (VL 1)

Vorlesung der TU Dortmund: Einführung und Motivation in die Analysis

[…] Bevor wir wirklich anfangen durch dieses Buch zu gehen, möchte ich eine Motivation geben und zwar erklären was eigentlich Analysis ist. Was sind unsere Ziele? Wie erreichen wir die und was eigentlich bedeutet Vorlesung? Was werden wir da machen? Gut. Was ist Analysis? Analysis ist ein Gebiet von Mathematik, wo wir uns mit Untersuchung von Funktionen, von differenzierbaren Abbildungen beschäftigen und was das wirklich bedeutet, ich möchte mit einem Beispiel oder mehreren, zwei Beispielen zeigen. Es ist immer so, ein Beispiel kann man immer besser verstehen, worum geht‘s. Erstes Beispiel, wär‘ folgendes. Sagen wir mal wir haben eine Funktion, wir werden später definieren, was eine Funktion bedeutet, aber man kann denken, Funktion ist etwas, was für jeden, für einen Wert x wir kriegen ein Wert f(x). Das heißt, ich kann das zum Beispiel auf f(x) und man kann, ich kann das auf Graph zum Beispiel diese Funktion f beschreiben, das heißt es kann sein zum Beispiel, es kann sein, Temperatur in jedem Moment. Natürlich werden wir lieber nicht von x aber von t abhängig machen, t die time auf Englisch Zeit, also das ist so Temperatur, das ist Zeit. Normalerweise wird es so ein bisschen anders aussehen, aber man kann sagen ok, das hier ist Tag und das ist Nacht und das ist wieder Tag und so. Und eine Frage, welche wir fragen können, ist zum Beispiel sagen, ok wir wollen wissen, wann war die niedrigste Temperatur oder wann war die höchste. […] Wir werden meistens mit solcher Definition anfangen. Wir werden irgendwelche Objekte definieren mit irgendwelchen Eigenschaften. Natürlich machen wir meistens so, dass diese Eigenschaften nicht superstrikt sind. Das heißt man hat relativ viele Objekte, die diese Eigenschaften erfüllen und dann werden wir sagen, ok, für diese Objekte mit diesen Eigenschaften wissen wir, dass das, das, das und das gilt und das müssen wir natürlich dann beweisen. Das ist auch eine allgemeine Struktur, das heißt auch wenn man dieses Buch öffnet und guckt, dann sieht man ok ich öffne und da hat man Definitionen, Beispiele und dann Sätze oder Lemmas, was eigentlich so einfache Sätze sind. […]

Quelle des Videos: Analysis an der TU Dortmund (2020): Analysis 1 WS 20/21 Video 1.0 - Einführung und Motivation. 06.11. 2020. Online unter: https://www.youtube.com/watch?v=Rjms6JTS32I (konsultiert am: 20.02.2025). Transkribiert mit Whisper Transcription (leicht adaptiert)

Vorlesung 2 (VL 2)

Vorlesung der Universität Freiburg: Intro Analysis

[…] Zusammen wollen wir dieses Semester die wichtigsten Grundlagen der Analysis kennenlernen und da stellt sich wahrscheinlich Ihnen als erstes die Frage, worum geht‘s eigentlich in der Analysis. Und aus vielen Anwendungen aus Physik und Naturwissenschaften kennen die Leute schon seit Jahrzehnten, wenn nicht sogar Jahrhunderten, verschiedene Methoden, um Funktionen qualitativ und quantitativ zu verstehen. Und die Funktionen, um die es da geht, die kommen im Allgemeinen aus quantitativen Modellen, aus verschiedenen Bereichen, aus der Physik, der Statistik, Stochastik, der Biologie und auch der Chemie. […] Und diese Methoden in den verschiedenen Bereichen, die gab es oft schon länger, als es eigentlich die Analysis gibt. So, was hat die Analysis eigentlich dann als Ziel? In der Analysis, die entstand aus dieser Vielzahl von Methoden mit dem Ziel, diesen einen theoretischen Unterbau zu verleihen. Und insbesondere beschäftigt man sich mit dem Änderungsverhalten von Funktionen und auch mit den Approximationen von Lösungen, Funktionen. Das führt insbesondere auf den Begriff von Grenzprozessen, wo insbesondere der zentrale Begriff, den wir auch dieses Semester lernen werden, der Begriff der Konvergenz ist. Jetzt kann man sich natürlich überlegen, warum ist das relevant, Änderungsverhalten von Funktionen, Approximation von Lösungen. Wenn wir uns überlegen, in der realen Welt, da geht es oft um kontinuierliche Größen, also Größen, die kontinuierliche Werte annehmen können. Aber wenn wir eine Größe echt messen, dann können wir die natürlich nicht mit einer beliebigen Genauigkeit messen. Das heißt, der Messprozess selber ist schon eine Näherung, eine Approximation des Messwertes. Und dann möchte ich natürlich, wenn ich aus dem Messwert eigentlich jetzt über eine Funktion etwas ableite, was mich eigentlich interessiert, und da jetzt einen neuen Wert rauskriege, dass, wenn ich da schon mit einer Approximation reingehe, etwas, was nah an dem realen Wert, der zu messenden Größe ist, dann möchte ich natürlich das auch nach Anwenden der Funktion auf den Messwert, der ja nur eine Näherung darstellt, da auch irgendwas rauskommt, was nah ist an der Funktion, an der Stelle des realen Wertes. Und nicht nur das, eigentlich hätte ich auch gerne quantitative Informationen darüber, wie nah. Und das ist eine der Fragen, worum es in der Analysis geht. Und insbesondere wollen wir verstehen, warum, wie und wann solche Methoden funktionieren. Was meinen wir damit? Mit „warum“ meinen wir, wir würden gerne Intuition dafür haben, warum etwas funktioniert. Mit „wie“ meine ich jetzt hier, wir würden gerne rechnen können. Bis dahin ist es das, was man irgendwie auch als Physiker oder anderer Naturwissenschaftler gerne wissen möchte. Was für den Mathematiker oft dazukommt, oder für die Mathematiker immer dazukommt und für andere Bereiche eher nur in ausgewählten Situationen, ist die Frage des „Wanns“. Und

„Wann“ soll jetzt hier heißen, wir beschäftigen uns mit der Frage, unter welchen Voraussetzungen oder unter welchen Annahmen unsere Methode überhaupt funktioniert oder funktionieren kann. Und insbesondere wollen wir beweisen, dass die Methode in diesem gegebenen Rahmen, unter diesen gewissen Voraussetzungen richtig ist. Natürlich kann man sich jetzt fragen, wozu beweisen wir denn eigentlich Sachen? Zum einen ist es natürlich, um rauszukriegen, dass etwas stimmt. Es kann ja sein, dass unsere Methode, die kommt zum Beispiel daher, dass wir unserer Intuition geglaubt haben. Oder sie kommt daher, dass wir endlich viele Experimente durchgeführt haben und damit empirisch eine Vermutung dafür haben, was hier eigentlich passieren sollte. Und der mathematische Beweis ist eine logisch stringente Herleitung der Aussage aus Sachen, die wir schon wissen. Das ist ein Grund, warum wir beweisen, aber wir beweisen auch, um auszuloten, worin die Grenzen unserer Methode oder wo denn die Grenzen in der Aufweichbarkeit von Voraussetzungen für unsere Aussage liegen. Und idealerweise helfen dann das, was wir beim Beweisen gelernt haben, uns dabei neue Aussagen zu finden, neue Zusammenhänge zu erstellen oder neue Methoden uns auszudenken. Das wäre sozusagen das hehre Ziel für die Zukunft. […]

Quelle des Videos: Math Institut Freiburg (2020): 00 Intro Ana 1. 02.11. 2020. Online unter: https://www.youtube.com/watch?v=3WvCGw51-t8&list=PL9FO2mRN7U38u1i0Db5vCeN48-wqc2ix- (konsultiert am: 20.02.2025). Transkribiert mit Whisper Transcription (leicht adaptiert).

Vorlesung 3 (VL 3)

Vorlesung Technische Universität Braunschweig: Konvergenz

[…] Wir hatten gestern morgen die Grenzwertdefinition. Ich schreibe hier noch mal 1.2 auf, den Grenzwert. Und die Definition lautete, dass die Folge a_n, für n gleich 0 bis unendlich, ja da ist in dieser Schreibweise so ein bisschen kodiert, dass die Folgenglieder von 0 bis unendlich hindurchgezählt werden, sie konvergiert gegen a für n gegen unendlich, genau dann, wenn es für alle ε, und wir denken uns bei den ε, und seien sie noch so klein, für alle ε, und seien sie noch so klein, größer 0, natürlich ε ist in gewissem Sinne immer größer 0, aber wir schreiben es mathematisch korrekt dazu, ein Zeitpunkt existiert in der Abfolge, wenn wir uns die Folge als wirklich Abfolge von Werten a_n denken, ein N existiert, sodass der Abstand der Folgenglieder $a_n$von diesem Wert a, der dann, wenn es erfüllt ist, der Grenzwert sein wird, kleiner als ε ist, und zwar von diesem Zeitpunkt N ab. Das ist die Definition, so haben wir es definiert, und jetzt versuchen wir uns klarzumachen, dass diese Definition in irgendeinem Sinne sinnvoll ist, dass also Folgen, von denen wir den Eindruck haben, sie streben gegen a, auch im Sinne dieser Grenzwerte–Definition, konvergieren, also genau unter diese Definition fallen, und dass solche, die das nicht tun, die also nicht konvergieren, die das also nicht streben, auch tatsächlich nicht in diese Definition fallen. Diese Definition sieht ja ein wenig künstlich aus, wir haben zwar versucht, es kurz anzureißen, aber das müssen wir ja ein bisschen mit Leben füllen, und das machen wir jetzt, und wir testen das Ganze an einem Beispiel, und wir nehmen als Beispiel die Folge $a_n = \frac{1}{2^n}$, also diese Folge, die entsteht, wenn wir einen Käse, also was ist das ε? ε ist ein griechischer Buchstabe, meine Damen und Herren, Alpha, Beta, Gamma, Delta, ε, irgendwo kommt noch Eta, und das Ganze auswendig kann es nicht. Das ε ist eine Zahl, für alle ε gibt es ein n. Für jeden Topf gibt es einen Deckel. Dann ist die Frage, was ist der Topf, ein bisschen seltsam. Für jedes ε gibt es ein n, also egal wie wir das ε wählen, größer 0, gibt es so ein n, von dem n haben wir nichts gesagt, auch nicht, dass es zwingend eine natürliche Zahl sein muss. Wir können aber immer eine natürliche Zahl finden, und das ε ist also erstmal eine Zahl, größer als 0, und wir versuchen jetzt diese Definition und mit etwas Leben zu füllen. Wir malen uns diese Funktion auf, stellen sie uns vor, diese Funktion, diese Folge, und wir beginnen hier bei 0, und wir zeichnen die 0 nicht direkt an die Achse, damit wir sie relativ gut aufzeichnen können, hier ist die 1, und jetzt haben wir also bei $n = 0$ ist $a_0 = 1$, das ist a_1, das ist $\frac{1}{2}$, a_2 ist $\frac{1}{4}$, und jetzt stellen wir fest, diese Punkte wandern immer näher an die Achse. Die a_n sollten gegen 0 konvergieren, n gegen unendlich, $a_n = 0$. Da würde jeder sagen, ok, intuitiv scheint das zu stimmen. Dieses ist a und wir zeigen dieses jetzt anhand der Grenzwertdefinition. Es steht dort, für alle ε größer 0, also ganz egal, welches ε sie wählen. Wenn Sie irgendjemanden fragen nach einem ε größer 0, und der sagt Ihnen irgendeine Zahl, dann soll es solch ein großes n geben, was diese Eigenschaft, die hinter dem N, hat. Also zeichnen wir uns ein ε ein, irgendeins, das gegeben ist, zum Beispiel dieses, und dieses ε ist hier, dort ist ε, hier ist -ε, dort ist a = 0, auf der vertikalen Achse, wo wir zum Beispiel die a_n aufgetragen haben, und hier haben wir die n, die Indizes aufgetragen. Und jetzt ist die Forderung, dass $a_n - a$ kleiner als ε ist, also das, was hier drinsteht, das ist gerade erfüllt in dem Bereich von -ε bis ε, und wir schauen, ob wir tatsächlich ein N finden, ab dem das gilt, und dann haben wir hier, und so können wir unseren ε-Schlauch einzeichnen. Jetzt ist die Frage, wo ist das N, ab dem das gilt, und dann könnten wir sagen, das gilt ab hier. So, das könnte zum Beispiel ein N sein. Jetzt werden einige sagen, warum zeichnet er das zwischen 2 und 3, also so breit, wie der ε-Schlauch ist, das a_2 liegt ja auch schon im ε-Schlauch. Ja, das ist richtig, a_2 liegt auch schon im ε-Schlauch, aber wir sind ja gar nicht darauf verpflichtet, das kleinste n zu wählen. Das heißt nur, es gibt ein n. Zu jedem Topf gibt es einen Deckel, heißt nicht, dass wir genau einen Deckel brauchen. Es gibt nur irgendeinen Deckel. Zu jedem Topf finden Sie in dieser Küche einen Deckel. Das heißt nicht, dass es irgendwie den besten Deckel gibt, oder den Mr. Big Deckel, sondern es gibt nur irgendeinen.

Und das N ist eins, was wir hier gefunden haben. Natürlich könnten wir auch ein n wählen, was etwas kleiner ist, so dass a_2 auch da drin liegt. Meine Damen und Herren, der Wert von ε ist kein einzelner Wert. Für alle ε soll das gelten. Wir zeichnen jetzt also noch einen, ein ε ein. Wir nehmen ein anderes ε, wir fragen jemand anderen und dann nennt er uns vielleicht ein kleineres ε, und dieses ist jetzt das ε in braun. Das ist jetzt diese Umgebung, die geht von dort bis dort um die Null herum. Und bitte, zeichnen Sie nicht genau das Bild ab, zeichnen Sie Ihr eigenes Bild. Die Aufforderung ist, Ihr eigenes Bild zu zeichnen mit einem passenden ε. Und dazu wäre jetzt das gleiche n ein mögliches n. Sie könnten aber auch jedes spätere n wählen, und Sie haben den Eindruck, ganz egal wie klein Sie das ε machen, Sie schmiegen sich immer dichter an die horizontale Achse. Wenn Sie also jetzt ein ganz kleines ε wählen, hier in orange dort, dann müssten Sie möglicherweise ein N wählen, was noch später ist. Sie könnten sich vorstellen, diese Folge, die ist, sozusagen, Sie nehmen immer am 10. jedes Monats auf, wo sich dieser Mensch, der, um dem es geht, befindet. Wir nehmen einen unendlich lang lebenden Menschen, und in der Kindheit macht der irgendwas, in der Jugendzeit fährt er sonst wo auf der Welt herum, ist überall zu Besuch, und immer am 10. jeden des Morgens gucken Sie, wo er gerade ist. Manchmal ist er im Club, manchmal ist er im Bett, manchmal steht das Bett in Südamerika, manchmal steht es am Nordkap, und so läuft er immer weiter, fährt er herum. Und jetzt wird diesem Menschen möglicherweise, wenn er älter und fauler wird, so wie ich, das zu beschwerlich, und er sagt sich: „Ach, es gibt gute Kontinente, und es gibt Kontinente mit A, ich fahre nicht mehr weit weg“. Und das ist natürlich nur ein Joke hier, um zu erklären, natürlich sind alle Kontinente gleich gut. Und dann sagt er sich später: „Mmh, immer fremde Sprachen, ich bleibe in Deutschland“. Und irgendwann bleibt er in Niedersachsen, und dann bleibt er in der Lüneburger Heide, und irgendwann bleibt er in Egestorf, und dann bleibt er auch nur noch in seinem Garten. Und Sie finden ihn regelmäßig, am jeden 10. des Morgens, in dem Garten in Egestorf. Und irgendwann finden Sie ihn nur noch in seinem Lehnstuhl sitzen, er ist jetzt also sehr, sehr alt geworden. Jetzt könnten Sie sagen, ganz egal, wie klein Sie die Umgebung gewählt haben, in der Sie diesen Reisenden finden wollen, am jeweils 10. des Monats, wenn Sie nur lange genug warten, dann finden Sie um seinen Lehnstuhl herum, in dem Bauernhaus in E-gestorf, dort finden Sie einen Zeitpunkt, ab dem Sie ihn immer dort finden. Für alle Umgebungen, ganz egal, wie klein die Umgebung ist, finden Sie einen Zeitpunkt, ab dem unser Reisender diese Umgebung nicht mehr verlässt. In seiner Jugendzeit war er sonst wo, und an den seltsamsten Orten haben Sie ihn angetroffen. Das ist aber nicht wichtig für die Frage, dass Sie für jede Umgebung, so klein sie auch ist, einen Zeitpunkt finden, ab dem er die Umgebung nicht mehr verlässt. Natürlich sind alle diese Veranschaulichungen und Geschichten ein bisschen ausgedacht, weil sie einzig und allein in unserem Kopf bestehen. Sie sehen ja, niemand hat unendlich viele Zehnte des Monats, des jeweiligen Monats in seinem Leben. Also es handelt sich um reingedachte Objekte.

Und jetzt versuchen wir diese Bedingung nachzuprüfen, die dort steht. Wir versuchen also herauszufinden, ob wir tatsächlich zu jedem ε ein N finden können. Also egal wie wir das ε wählen, wir wollen das N finden, das N, ab dem $a_n - n$ kleiner als ε ist. Ab dem also die Folge a_n, die ε -Umgebung, diesen ε -Schlauch, um die Null nicht mehr verlässt. Sozusagen so wie unsere gedachte Person, die immer am 10. Juli des Monats irgendwo aufzufinden ist, finden wir tatsächlich einen Index N, ab dem diese Umgebung nicht mehr verlassen wird. Dazu gucken wir uns als erstes die Bedingung an, die im Inneren steht. […] Das heißt, wenn wir jetzt, und wir drehen das Ganze um, irgendein ε vorgeben, dann finden wir tatsächlich ein n, und wenn es eins gibt, das ist am sichersten, wenn Sie es angeben können, die Aussage „Beweisen Sie, dass Sie ein Haus in Monaco haben“, dann können Sie sagen: „Hier, Besitzurkunde, das ist das Haus, da sind die Fotos.“ Wenn Sie sagen wollen, beweisen Sie, dass Sie kein Haus in Monaco haben, weil zum Beispiel die Steuerbehörde denkt, Sie hätten eins, das wird relativ schwierig, schon rein formell, ganz ohne Mathematik. Und jetzt nehmen Sie als N diesen Wert, ab dem Sie in dem ε -Schlauch liegen. […] Also ist die Annahme falsch, das Prinzip des indirekten Beweises. Und wir haben also keinen Widerspruch, das heißt also, keinen Grenzwert. Das heißt, für alle ε aus den reellen Zahlen gibt es ein ε wir drehen das Ganze um. Wenn wir vorher die Aussage hatten, für alle, gibt es eins, für das es diese Aussage nicht gibt. Für jeden Topf gibt es einen Deckel. Die Verneinung davon ist, es gibt mindestens einen Topf, für den es keinen Deckel gibt. Also für alle b aus ℝ existiert ein ε, sodass kein n existiert, mit der Eigenschaft $b_n - b$ ist kleiner als ε, für alle n größer als n. […] Und jetzt beweisen wir einen Satz, quasi den ersten Satz, den wir hier in dieser Vorlesung ansprechen, und der Satz heißt: Eine konvergente Folge ist beschränkt. […] Wir wollen also beweisen, dass es der Fall ist und wir könnten dazu uns dies aufzeichnen, wie es der Folge geht. Die Folge hat einen Grenzwert hier, der Grenzwert, das könnten wir zum Beispiel a nennen und die Folge ist konvergent. Das heißt, für jedes beliebig kleine ε, und wir zeichnen das ε, wir geben dem ausdrücklich keinen wirklichen Namen, es ist auch keine wirkliche Größe, liegen die Folgen, die da irgendwann in dem ε-Schlauch, das ist die Aussage unserer Grenzwertdefinition. Wir beginnen irgendwo hier. Am Anfang ist die Folge ein Baby, und dann fährt die überall rum und guckt überall mal vorbei und zappelt und vielleicht ist sie auch hier noch ein paar Mal, dann zappelt sie noch mal hier hin und da hin und dann ab dem n, da bleibt sie aber in unserem ε-Schlauch. Jetzt wissen wir, dass wir hier hinten unendlich viele Folgenglieder haben, denn es geht immer weiter und weiter. Hier wäre es also durchaus angebracht, die Punkte noch mal, um das zu verdeutlichen, dort anzuzeichnen. Und hier vorn können wir sagen, es gibt ein größtes Element, das sind nämlich nur endlich viele, bis zu dem N sind es immer nur endlich viele. Wir hatten gestern das Hotel, das Hilbertsche Hotel, und das war unendlich groß, da konnte immer noch jemand einziehen, aber egal wie groß das Hotel ist, wenn jedes Bett belegt ist, ist es voll, also unendlich groß ist das Hotel nicht, also endlich viele, auch wenn es sehr viele sind, sind etwas ganz anderes als unendlich viele. Von denen können wir also das Maximum bilden. Und das machen wir jetzt, wir wissen, die Folge ist beschränkt. Das heißt, es existiert ein n, sogar in der Form $a_n - a$ ist kleiner als $\frac{1}{10}$, oder irgendein anderer Wert, das wählen wir jetzt ein ε, denn die Aussage, was gilt für alle ε, also gilt es auch für ε gleich $\frac{1}{10}$, und das gilt dann für alle n größer als N. Daraus folgt, a_n minus ähm $a - \frac{1}{10}$, gerade der Schlauch, $a - \frac{1}{10}$ ist kleiner als a_n, ist kleiner als $a + \frac{1}{10}$, für alle n größer als N. Und jetzt wählen wir als obere Schranke S, dann nehmen wir das Maximum von $a + \frac{1}{10}$, und allen a_n mit, a_n, n läuft von Null, mit n läuft von Null bis N. Bestenfalls eigentlich die ganze Zahl davor. Das heißt also, hier haben wir bei dem roten, die rote, obere Begrenzung unseres ε-Schlauches, und hier haben wir die orange Begrenzung unserer endlich vielen Punkte aus der Jugendzeit unserer Folge. Wir können also das, was wir vorher in dem Bild gesehen haben, danach in mathematische Formeln gießen und das u, die untere Schranke, ist demzufolge der minimale Wert aus $a - \frac{1}{10}$, das ist da, wo die unendlich vielen begrenzt werden, weil sie dann in dem ε-Schlauch liegen, und den a_n, die am Anfang liegen. Und wir haben jetzt eine obere Schranke und wir haben in u eine untere Schranke. Wir haben also bewiesen, dass eine konvergente Folge tatsächlich eine beschränkte Folge ist. Wir könnten das etwas genauer noch formulieren und sagen, wenn eine Folge konvergiert, dann ist sie auch beschränkt. Sie strebt für n gegen unendlich gegen diesen Grenzwert. Sie kann aus dem Schlauch nicht wieder raus, wenn sie einmal drin ist, egal wie klein der Schlauch ist. Und hier haben wir einen Schlauch ausgewählt und haben gesagt, okay, am Anfang, in ihrer Jugendzeit hat die Folge gemacht, was immer sie wollte, aber irgendwas war auch das Schlimmste, was sie gemacht hat, und dann haben wir sie eingefangen in den ε-Schlauch und da ist sie dann nicht wieder rausgekommen. Und damit ist sie beschränkt. Es ist nicht möglich gewesen, innerhalb dieser endlich langen Jugendzeit wirklich alle Grenzen einzureißen, irgendwas, was die Folge gemacht hat, war am größten und war am kleinsten. Das ist kein übermäßig spektakulärer Satz und wir betrachten dieses als Beweis. Etwas spannender, aber eigentlich auch nur, weil wir unsere Begriffe testen wollen, ist folgender Satz. Eine beschränkte und monoton wachsende Folge, die ist konvergent, die ist konvergent. Das heißt also, es hat schon nicht funktioniert, was wir eben vielleicht gedacht haben, wenn konvergente Folgen beschränkt sind, sind beschränkte auch konvergent. […] Wir können solche Folgerungen nicht wirklich umkehren. Alle Äpfel sind Obst, aber nicht alles Obst sind Äpfel. Eine ganz einfache Sache. Aber eben mit der zusätzlichen Eigenschaft, wenn sie monoton wachsend ist, dann ist sie auch konvergent. Dann gucken wir uns an, ob das stimmen könnte. Wir zeichnen eigentlich immer zuerst das Bild. Das ist der Schlüssel zu allem. Mathematik hin oder her, falls Sie einen Mathematiklehrerin oder Mathematiklehrer hatten, der tatsächlich dachte, die Bilder sind bloß irgendwie so eine Illustration am Ende. Nein, die Bilder sind der Anfang. Ihre Vorstellungen sind immer der Anfang von dem, was irgendwie nur Mathematik sein kann. Also zeichnen wir eine obere Schranke ein, zum Beispiel diese da. Die Folge ist ja beschränkt. Die untere, die spielt jetzt nicht so eine große Rolle, können wir natürlich auch einzeichnen. Meinetwegen machen wir auch. Das ist ja beschränkt, das ist die untere. Und jetzt zeichnen wir eine monoton wachsende Folge. Das heißt, wir haben hier Elemente der Folge und die wachsen. Die bleiben vielleicht mal so, wie sie sind, aber sie können nur nach oben. Nach unten können sie nicht. Und dann streben sie hier nach oben. Jetzt ist die Frage, wo gehen die denn hin? Wo können die denn hin? Die können ja nicht nach unten wieder. Die streben also irgendwie nach oben. Aber niemand zwingt sie da wirklich gegen dieses S zu konvergieren. Und das, diesen Satz, beweisen wir. […]

Quelle des Videos: Ingenieurmathematik Technische Uni Braunschweig (2022): IngMa A (Analysis) - Vorlesung 28.10.2021. 28.10. 2021. Online unter: https://www.youtube.com/watch?v=FcOHUsPhV_U&list=PL9FO2mRN7U38u1i0Db5vCeN48-wqc2ix-&index=10 (konsultiert am: 20.02.2025). Transkribiert mit Whisper Transcription (leicht adaptiert).

Vorlesung 4 (VL 4)

Vorlesung der Universität Freiburg: Folgen und Konvergenz

[…] Und jetzt ist natürlich so die Frage, was kann man so sagen über Grenzwerte von Folgen oder jetzt hier erst mal von rationalen Folgen oder über Konvergenz im Allgemeinen. Die erste naheliegende Frage ist, ist es denn richtig, irgendwie von dem Grenzwert zu reden oder kann es da mehrere geben? Also, dass die Frage ist, weiß, wenn ich weiß, dass eine Folge konvergiert, gibt es dann nur ein a, also nur einen Grenzwert, für den das gilt. Wenn das so wäre, ist der Grenzwert eindeutig und es ist korrekt, von dem Grenzwert zu reden, ansonsten müsste man von einem Grenzwert reden. Allein von der Anschauung, wie wir uns das hier vorgestellt haben, glaubt man schon, dass es irgendwie sein kann, dass die Folge zwei verschiedene a's annähert. Aber vielleicht ist unsere Vorstellung ja hier in diesem Bild gar nicht so richtig korrekt, deshalb beweisen wir das mal. Das ist der Satz 3.1.2, Eindeutigkeit des Grenzwertes. Das ist einfach genau das, was wir eben behauptet haben. Wenn wir schon wissen, dass die Folge a_n konvergent ist, dann ist der Grenzwert eindeutig. […] So, bis hierhin haben wir verschiedene Beispiele gesehen von Folgen, die konvergent waren, jetzt von einer Folge, die nicht konvergent war und was uns irgendwie auffällt, ist, dass wenn wir an unsere Grenzwertdefinition zurückdenken, da müssen wir schon wissen, was der Grenzwert ist. Das heißt, um zu überprüfen, ob eine Folge überhaupt konvergiert, ob die überhaupt irgendwas annähert, müssen wir im Prinzip schon eine Idee davon haben, was dieser, dieser Grenzwert sein soll. In der Definition war das das a. Das ist irgendwie ein bisschen unbefriedigend. Ja, es wäre irgendwie auch gut, mal angenommen wir haben mal eine Folge, von der wir noch nicht wissen, was der Grenzwert sein soll oder eine Folge, die wir benutzen wollen, um überhaupt zu sagen, welche Zahl da rauskommen soll, dass wir irgendwie anders herausfinden könnten, dass diese Folge überhaupt irgendwas annähert und dann erst überlegen, was das eigentlich sein soll, was die annähert. Weil so müssen wir im Prinzip mit diesem Wissen schon reingehen. Das heißt, wir müssen mindestens raten, was der Grenzwert sein soll. Wäre also gut, ein Kriterium zu haben, wo man ohne Wissen des Grenzwerts irgendwie rausfinden kann, dass die überhaupt konvergiert. Nun, das wird auf den Begriff der Cauchy-Folge führen. […]

Quelle des Videos: Math Institut Freiburg (2020): 08 Folgen und Konvergenz. 08.11. 2020. Online unter: https://www.youtube.com/watch?v=FcOHUsPhV_U&list=PL9FO2mRN7U38u1i0Db5vCeN48-wqc2ix-&index=10 (konsultiert am: 20.02.2025). Transkribiert mit Whisper Transcription (leicht adaptiert).