

INAUGURAL-DISSERTATION

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen

Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Dipl.-Phys. Joachim Holk

aus Hildesheim

Tag der mündlichen Prüfung: 28.01.2004

**EIN NEUER ANSATZ
FÜR DEN
ENERGIE-IMPULS-TENSOR
AUF DEM GITTER**

Gutachter:

Prof. Dr. Heinz-Jürgen Rothe

Prof. Dr. Ion-Olimpiu Stamatescu

EIN NEUER ANSATZ FÜR DEN ENERGIE-IMPULS-TENSOR AUF DEM GITTER

In dieser Arbeit wird ein neues Modell für den Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ des reinen Eichsektors auf dem Gitter entwickelt, das durch D-dimensionale Selbstähnlichkeitsbetrachtungen bezüglich Raum, Raumzeit, multidimensionaler Thermodynamik und des Vierbein-Kalküls innerhalb der Allgemeinen Relativitätstheorie motiviert wird. Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Gitter-Modellen für $\Theta_{\mu\nu}$ arbeitet das hier präsentierte neue Modell explizit mit halbzahligen Potenzen der Plakettenvariablen und kann simultan die Forderungen nach einem einheitlichen Konstruktionsprinzip und nach Wilson'scher Gestalt für die Hamilton-Komponente Θ_{44} und auch für die Struktur der Spuranomalie erfüllen. Zur Messung der Erwartungswerte von $\Theta_{\mu\nu}$ und euklidischen Korrelatoren sind auf einem 10×4 -Gitter und für die Eichgruppe SU(2) Monte-Carlo-Simulationen durchgeführt worden. Die Ergebnisse werden mit denjenigen für die bisherigen Modelle verglichen. Die numerischen Ergebnisse für die Erwartungswerte des Energie-Impuls-Tensors demonstrieren nichttrivialen Einfluß durch das Bauprinzip des zugrundeliegenden Modells, wohingegen die Messung der Korrelatoren effektiv von statistischen Fehlern dominiert wird. Als ein Nebenprodukt bei der Entwicklung des gitter-regularisierten Ansatzes für den Energie-Impuls-Tensor konkretisieren wir eine quadratische Entsprechung von (ict)-euklidischer Version des Riemann-Tensors und SO(4)-Feldstärketensor in einer auf Vierbein-Kalkül basierenden Variante.

A NOVEL ANSATZ FOR THE ENERGY-MOMENTUM TENSOR ON THE LATTICE

In this paper, a novel model for the energy-momentum tensor $\Theta_{\mu\nu}$ of the pure gauge sector on the lattice is developed, motivated by D-dimensional self-similarity considerations regarding space, spacetime, multidimensional thermodynamics, and vierbein calculus within general relativity. In contrast to the hitherto introduced lattice models for $\Theta_{\mu\nu}$, the new model presented here is explicitly working with half powers of plaquette variables and can simultaneously fulfil the demands for a uniform construction principle and for a Wilson form of the Hamiltonian component Θ_{44} as well as for the structure of the trace anomaly. Monte Carlo simulations on a 10×4 lattice using the gauge group SU(2) have been performed for the expectation values of $\Theta_{\mu\nu}$ and Euclidean correlators. The results are compared with the hitherto existing models. The numerical results for the expectation values of the energy-momentum tensor are shown to be sensitive to the construction principle of the underlying model whereas the measurement of the correlators turns out to be dominated by statistical errors. As a designing by-product of the lattice regularized ansatz for the energy-momentum tensor, we demonstrate a quadratic equivalence of the (ict)-Euclidean representation of the Riemann tensor and an SO(4) field strength tensor supplied by vierbein calculus.

Inhaltsverzeichnis

1	EINLEITUNG & MOTIVATION DER ARBEIT	5
2	SKIZZIERUNG DER HAUPTIDEE	9
3	D-DIMENSIONALE KONTINUUMSBETRACHTUNGEN UND DER ENERGIE-IMPULS-TENSOR	25
3.1	Selbstähnlichkeit zwischen Raum und Raumzeit	25
3.2	Noether-Theoreme und allgemeinrelativistisch reinterpretierte Skalentransformationen	38
3.3	Der Einfluß der Raumzeit-Metrik auf fermionische Variations-Prozesse	48
3.4	Das thermodynamische Bindeglied zwischen dimensioneller Regularisierung und Gitter-Summenregeln	51

4	THEMATISCH RELEVANTES PROFIL DER GRUPPE $U(1)$	65
4.1	$U(1)$ als ein anschauliches Spielzeug-Modell für das Auftreten magnetischer Ladungen auf dem Gitter	65
4.2	Bewegungsgleichungen auf dem Gitter	69
5	THEMATISCH RELEVANTES PROFIL DER GRUPPE $SO(4)$	74
5.1	Die Idee der $SO(4)$ -Herleitung des Halbwinkel-Modells	74
5.2	Analyse und Transfer höherer geometrodynamischer Symmetriestrukturen in die Gitterphysik	84
6	THEMATISCH RELEVANTES PROFIL DER GRUPPE $SU(2)$	97
6.1	Halbzahlige Matrix-Potenzen und Implementierung von Rotationsinvarianz auf dem Gitter	97
6.2	Vergleich mit $U(1)$ -Konzepten und symbolische Generalisierungen	109

7	GITTER-MODELLE FÜR DEN SYMMETRISCHEN ENERGIE-IMPULS-TENSOR	114
7.1	Bisher existierende Modelle	114
7.2	Ein alternatives Modell	122
8	MONTE-CARLO-SIMULATIONEN	125
8.1	Theoretische Vorhersagen	125
8.2	Simulations-Daten	129
9	ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION	196
 APPENDIX		
Nr. 1 :	SPUR-ANOMALIE	201
Nr. 2 :	MONTE-CARLO-PROGRAMM	229
	LITERATURVERZEICHNIS	297
	DANKSAGUNG	301

Kapitel 1

EINLEITUNG & MOTIVATION DER ARBEIT

Die vorliegende Arbeit wurde durch die zweite Auflage (1997) der Monographie Lattice Gauge Theories meines Tutors Professor H. J. Rothe in Heidelberg motiviert.

Die Erstauflage (1992) dieses Werkes ging aus einer Vorlesungsreihe des Autors beim "Autumn College on Techniques in Many-Body Problems" in Lahore, Pakistan (November 1987) hervor und avancierte zu einer Standardmonographie über Gitter-Physik.

Die Gitter-Regularisierung der Quantenchromodynamik, wie sie von Kenneth Wilson 1974 vorgeschlagen ([60]) wurde, ermöglicht die Berechnung nicht-perturbativer Größen mit Hilfe von statistischen numerischen Verfahren, die aus der statistischen Mechanik ausgeborgt werden (Beispiele: Massen, Zerfallskonstanten, Phasenübergänge, Plasma-Eigenschaften). Im Gegensatz zu der üblichen Kontinuums-Störungsrechnung, wo die Regularisierung der Theorie auf der Ebene der Feynman-Graphen erfolgt, wird die Theorie hier schon auf der Ebene des erzeugenden Funktionals regularisiert, und zwar durch die Einführung eines Gitterabstandes. Zur Berechnung von Observablen ist die Konstruktion entsprechender gitter-regularisierter Operatoren erforderlich, deren Erwartungswerte dann mit Hilfe von statistischen Methoden berechnet werden können.

Eine Observable, die bisher nur wenig Beachtung gefunden hat, ist der Energie-Impuls-Tensor. Die Frage nach der Gestalt des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter kann als Vollständigkeitslücke in der Gitter-Physik angesehen werden, wie sich im Laufe angeregter Diskussionen inner-

halb der Gittergruppe des Institutes für Theoretische Physik in Heidelberg herausstellte. Als Vorlage stand ein sehr interessantes Modell von Karsch und Wyld ([28]) zur Verfügung, das andere Vorzüge und Nachteile im Vergleich zu einem Konkurrenz-Modell der Gitter-Gruppe in Pisa ([4], [5]), Italien, besitzt.

Die Kenntnis von Korrelatoren des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter sollte es im Prinzip erlauben, über Transportkoeffizienten wie etwa Schubmodul, Kompressionsmodul und Wärmeleitfähigkeit eines chromodynamischen Farbleiters (Quagmas) die Entropie-Erzeugungsrate für ein expandierendes primordiales Quark-Gluon-Plasma durch Simulation funktionell einzugrenzen ([28]). Ist der Gitterabstand für die Ermittlung der betrachteten Größe klein genug, so sollte die Wahl der Regularisierung keine Rolle spielen. Kleine Gitterabstände sind jedoch nur schwer numerisch zugänglich, wobei die Anforderungen an die Feinheit des Gitters bei der Berechnung von Transportkoeffizienten empfindlich hoch sind. Es erhebt sich somit die Frage, ob bei endlichen Gitterabständen, bei denen Simulationen durchgeführt werden, sich die in den verschiedenen Modellen berechneten Größen durch Gitterartefakte wesentlich unterscheiden. In Zusammenhang mit den sonstigen Konvergenzeigenschaften relevanter Meßreihen sind daher Kriterien zu artikulieren, wann und inwieweit Monte-Carlo-Meßreihen der zur Debatte stehenden Größen bei den bisherigen Werten der Kopplungskonstanten signifikant sind. Wie im Laufe der Arbeit aufgezeigt wird, verdrängt diese Grundregel numerischer Zuverlässigkeit die Evaluation von Transportkoeffizienten aus dem Blickwinkel ergiebiger Praxisarbeit und gibt Anlaß dazu, den Schwerpunkt der Arbeit statt dessen auf das Verständnis des Energie-Impuls-Tensors als solchem zu fokussieren.

Als Leihgebilde aus der Allgemeinen Relativitätstheorie gehorcht der symmetrische Energie-Impuls-Tensor - insbesondere im Hinblick auf die dimensionelle Regularisierung seiner Spur - in der Kontinuumsdarstellung raumzeitmetrischen Variationsverfahren, deren Einfluß bei den Möglichkeiten einer Gitterübertragung analytisch und numerisch von Interesse ist. Bei den Diskussionen innerhalb der Gittergruppe konnte keine klare Evidenz für eine direkte Überlegenheit des Bielefeld-Ansatzes gegenüber dem Pisa-Ansatz oder umgekehrt diagnostiziert werden. Diese Null-Aussage basierte auf reiflicher Überlegung.

Wie sich bei meiner Einarbeitung in den Stoff herausstellte, ließ sich keine geschlossene Darstellung über die Applikation von Noether-Theoremen zur Ermittlung der Spuranomalie des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors $\Theta_{\mu\nu}$ im Kontinuumsfall finden. Andere Zugänge zu dieser Größe ließen keine systematische Vorgehensweise erkennen - die konkrete Gestalt der Spuranomalie wurde anhand von Plausibilitätsüberlegungen mehr oder minder durch Raten kombinationsmäßig erschlossen. Mit Appendix Nr. 1 dieser Ar-

beit wird in diesem Punkt Abhilfe geschaffen.

Anschließend ergab sich die Möglichkeit, diese Erkenntnisse thermodynamisch zu reinterpretieren und nach konkreten Gesichtspunkten für die Ermittlung eines noch nicht gefundenen, sondern ausschließlich postulierten optionalen $\Theta_{\mu\nu}$ auf dem Gitter zu suchen. Mich störte die Tatsache, daß das Pendant zum Quadrat des Feldstärketensors im Eichteil der Kontinuums-Lagrangedichte auf dem Gitter in Gestalt der Plakettenvariablen $U_{\mu\nu}$ nur noch erste Potenz ist und daher die Frage erschwert, wie die Nichtdiagonalkomponenten von $\Theta_{\mu\nu}$ dort eigentlich auszusehen haben. In großer Verlegenheit bastelte ich mit $SO(4)$ -Konstruktionen herum, weil sie den Vorteil besitzen, daß ihre Matrixkomponenten über Vierbeintransformations-Matrizen in Raumzeit-Indizes konvertiert werden können. Es entstanden die in Kapitel 5 beschriebenen Schemata, welche besagen, daß in grober Vereinfachung und bei Bezug auf assoziierbare Lagrangedichten die $SO(4)$ -Formulierung der Maxwell'schen Gleichungen eine Art Quadrierung der klassischen allgemein-relativistischen Einsteinschen Feldgleichungen ist.

Von dieser Erkenntnis aus wurde ich schnell auf die Idee von Hauptwertwurzeln aus unitären Matrizen geführt. Nachdem ich zeigen konnte, daß sich daraus eine eichinvariante neue Darstellung für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor auf dem Gitter konstruieren läßt, empfahl mein Mentor mir eine numerische Umsetzung auf einem 10^4 -Gitter mit Datenauslagerungen auf externe Magnetbänder. Die experimentellen und theoretischen Konsequenzen dieses Projektes bilden das Substrat für die nachfolgenden Kapitel, bei denen ich hoffe, daß ich wenigstens einen Funken der Begeisterung, die ich bei der Verwirklichung der geschilderten Ideen verspürte, an die geneigte Leserin oder den geneigten Leser der nachstehenden Darstellungen weitergeben kann.

Der Aufbau der Arbeit ist folgender. Das sich anschließende Kapitel 2 dient der Herstellung eines "roten Leitfadens" quer durch die gesamte Arbeit, der sehr wichtig ist, da angesichts der intensiveren Vorbereitungen zu den relevanten Teilthemen nur allzu leicht der Bezug zum eigentlichen Hintergrund-Kontext der wissenschaftlichen Fragestellung verlorengeht. Kapitel 3 widmet sich den für die Aufgabenstellung der Arbeit wichtigen Anknüpfungspunkten aus der Kontinuumsphysik, wozu insbesondere nicht-Mandelbrot'sche ([16], [43]) Selbstähnlichkeitsklassifikationen, seltenere Applikationen des Noether-Theorems und thermodynamische Transferargumente zählen. In den Kapiteln 4 bis 6 werden im Zuge der Arbeit ausgenutzte Spezialaspekte der Eichgruppen $U(1)$, $SO(4)$ und $SU(2)$ präsentiert und eingehend durchleuchtet. Kapitel 7 vergleicht bisher bekannte Gitter-Modelle für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor mit dem in dieser Arbeit neu vorgeschlagenen Modell. In Kapitel 8 erfolgt die numerische Auswertung, und in Kapitel 9 werden die Ergebnisse analytischer und numerischer Entwicklungsarbeit dis-

kutiert. Detail-Herleitungen zu den in Kapitel 3 behandelten Versionen des Noether-Theorems und die Dokumentation des für die Messungen benutzten Monte-Carlo-Programms sind in Appendizes ausgegliedert, mit denen die Arbeit inhaltlich abgeschlossen wird.

Abschließend noch ein grundsätzlicher Hinweis:



Eine Vielzahl komplexgestaltiger und nicht standardisierter Operatoren mit mehreren Indizes-Ebenen verlangt nach deutlichen Formel-Symbolen und würde bei subtilen Bedeutungs-Konventionen sehr viel Verwirrung stiften. Aus diesem doppelt relevanten Grunde wird hiermit festgelegt, daß **IM RAHMEN DIESER ARBEIT DIE UMSCHALTUNG AUF FETTDRUCK (bold-face) INNERHALB VON FORMELN GRUNDSÄTZLICH KEINE PHYSIKALISCH SIGNIFIKANTE BEDEUTUNG (wie etwa die Zuordnung eines Dreier-Vektors zu seinem eigenen Betrag - was zum Beispiel ansonsten in der Literatur sehr häufig verwendet wird; hier dagegen werden allenfalls Pfeile dafür benutzt) HAT SONDERN AUSSCHLIESSLICH DER VERBESSERUNG DER OPTISCHEN QUALITÄT DER I. A. TIEF VERSCHACHTELTEN SYMBOLE DIENT.**

Kapitel 2

SKIZZIERUNG DER HAUPTIDEE

Dieses Kapitel soll die Zusammenhänge zwischen den in dieser Arbeit behandelten Teilthematiken herstellen, ohne diese detaillierter zu erläutern. Das wird in den Kapiteln 3 bis 7 geschehen, wo dann zwangsläufig der Nachteil auftritt, daß der Bezug auf die wechselseitigen Verflechtungen in den Hintergrund tritt. Eine simultane Realisierung beider Anliegen hingegen würde zu absoluter Unübersichtlichkeit führen, womit angesichts der zu präsentierenden diffizilen und subtilen Inhalte für die vorliegende Arbeit vergleichsweise am wenigsten erreicht werden würde.

Die vorliegende Arbeit entwickelt neue Konzepte für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor auf dem Gitter. Bevor das gesamte Gebilde auf das Gitter gesetzt wird, soll kurz analysiert werden, welche Probleme bereits auftreten, wenn für $\Theta_{\mu\nu}$ im Kontinuum mit der abelschen Eichgruppe $U(1)$ gestartet wird.

Die physikalisch am meisten interessierenden Größen wären auch dann die Hamilton-Dichte Θ_{44} und als Quanteneffekt die Spur-Anomalie Θ_{μ}^{μ} . Dabei taucht folgendes Problem auf:

Betrachtet man die Grundgleichungen der Magnetostatik

$$\begin{array}{llll} \operatorname{div} \mathbf{B} = 0 & \curvearrowright & \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} & : \quad \mathbf{Magnetfeld-Darstellung} \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mathbf{j} & \curvearrowright & \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 & : \quad \mathbf{Kontinuitätsgleichung} \\ \mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} & \curvearrowright & \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0 & : \quad \mathbf{Lorentz-Kraft-Struktur} \end{array}$$

und geht anschließend von 3 Ortsraum-Dimensionen auf 4 Raumzeit-Dimensionen über ($\overset{t}{\cdot}$ = Transposition)

$$\vec{x} = \overset{t}{(}x_1, x_2, x_3) \quad \longmapsto \quad x = \overset{t}{(}\overset{t}{x}, x_4 = i c t)$$

$$(dt)^2 \quad \longmapsto \quad \left(\frac{dx}{ic}\right)^2, \quad ,$$

so avanciert der Winkelgeschwindigkeits-Pseudovektor \mathbf{B} (bezüglich der Rotation des Geschwindigkeitsvektors \mathbf{v} selbst) zum 4-dimensionalen Magnetfeld \mathbf{B} , das als Winkelgeschwindigkeits-Pseudotensor der Rotation der Vierergeschwindigkeit die maximale Anzahl unabhängiger momentaner Drehebene als Tensor-Rang haben muß. Für 4 Dimensionen ist dieser Tensor-Rang 2, und das 4-dimensionale Magnetfeld \mathbf{B} entpuppt sich als der duale Feldstärketensor. Wie unten gezeigt wird, können alle magnetostatischen Beziehungen OHNE Modifikationen auf die Dimensionalität 4 übertragen werden, wenn die Differentialformen streng analog definiert werden.

Die Magnetostatik in 4 Raumzeit-Dimensionen ist EXAKT der Elektromagnetismus. Es liegt also eine PERFEKTE Selbstähnlichkeit zwischen den Dimensionalitäten des Ortsraums ($D = 3$) und der Raumzeit ($D = 4$) vor, wenn magnetische Systeme betrachtet werden.

Diesem Phänomen ist in der bisherigen Literatur wenig Beachtung geschenkt worden, da die Sprachen der 3-dimensionalen Vektoranalysis und des Tensor-Kalküls für die Raumzeit äußerlich völlig verschieden aussehen. Rein formal (aber nicht unbedingt nach Gesichtspunkten der Selbstähnlichkeit) können der Rotation des 3-dimensionalen Raumes (2. von 3 Differentialformen) in 4 Dimensionen je nach Definition des Sprungpunktes von Tangential- zu Normal-Differenzialelementen die zweite oder die dritte Differentialform zugeordnet werden. Die Literatur definiert im allgemeinen den tensoriellen Rotor als die zweite Differentialform in 4 Dimensionen und VERBAUT damit den Zugang zu dem genannten Selbstähnlichkeitsschema. Deshalb der kurze Exkurs (Details später).

Also ist der Elektromagnetismus eine reine Wirbelkraft, deren mathematische Beziehungen in ihrer fundamentalsten Form durch vierdimensionale Kreuzprodukte (antisymmetrische trilineare Abbildungen von 3 Vektoren oder einem Vektor/Nabla-Operator und einer antisymmetrischen Dyade) auszudrücken sind (Details später). Dies entspricht der Tatsache, daß es beim Kalkül äußerer Ableitungen für den Elektromagnetismus nur eine Basis (nämlich die Differenzialelemente) geben kann. Bei der Allgemeinen Relativitätstheorie hingegen gibt es bei äußeren Ableitungen zwei verschiedene

Basen-Typen: Differentialelemente und variable Cartansche Basisvektoren.

Werden dort beide Basen bei der äußeren Ableitung simultan analogen Transformationen unterworfen, so entstehen symmetrische Tensoren 2. Ranges, die innerhalb des äußeren Kalküls beim Elektromagnetismus gar nicht erzeugt werden können. Alle Tensoren 2. Ranges, die beim Elektromagnetismus aus äußeren Ableitungen hervorgehen, sind antisymmetrisch. Wie eine spätere eingehende Diskussion der nichtabelschen Verallgemeinerung der Maxwell'schen Beziehungen sehr eindrucksvoll zeigen wird, ist der symmetrische Energie-Impuls-Tensor innerhalb dieser Domäne als ein artfremdes Leih-Gebilde aus der Allgemeinen Relativitätstheorie anzusehen. Das hat folgende einschneidende Konsequenz.

Über das einfachste Noether-Theorem, nämlich das Translations-Noether-Theorem, kann bereits der symmetrische Energie-Impuls-Tensor erhalten werden. Man erhält ihn über den explizit durch das Noether-Theorem bestimmten kanonischen Energie-Impuls-Tensor durch das Hinzuaddieren eines Zusatzterms, der ein Hilfsfeld $\Sigma^{\mu\nu\lambda}$ enthält, welches zunächst einmal unbekannt ist, für 4 Dimensionen jedoch geeignet an die Symmetrieforderung $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}$ angepaßt werden kann:

$$\exists \quad \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} = g^{\mu\nu} \mathcal{L} - g^{\mu\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi^{ab}} \partial_\lambda \varphi^{ab} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}$$

mit Erfüllung der weiteren Forderungen

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \quad (\text{Erhaltung in Abwesenheit äußerer Ströme})$$

$$P^\mu = \int_{x_D = \text{const}} \Theta^{\mu\nu} d^{D-1} \mathcal{O}_\nu \Big|^{D=4} \quad (\text{Impuls-Zuweisung})$$

Über diesen Zugang fehlt jedoch die Zusatzinformation, wie das Hilfsfeld für nichtganzzahlige Raumzeit-Dimensionalitäten zu substituieren ist, wenn für Renormierungsbetrachtungen eine dimensionelle Regularisierung der Spur von $\Theta_{\mu\nu}$ erforderlich wird, um den Anomaliebeitrag eindeutig zu fixieren.

Hier rächt sich die Tatsache, daß das Translations-Noether-Theorem nur über Umwege an den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor heranführt, ohne den D-dimensionalen Erzeugungsmechanismus strukturell zu erfassen. Der tiefere Grund, warum die fraktaldimensionale Information für Renormierungsprozesse fehlt, führt - wie sich leicht zeigen läßt - wieder zum Ausgangspunkt zurück: symmetrische Tensoren zweiten Ranges wie etwa $\Theta_{\mu\nu}$ können nicht im Sinne eines wirklich fundamentalen Erzeugungsprinzips genuin aus D-dimensionalen Wirbelkraft-Mechanismen folgen (der Sinn der

anschließend eingeführten Größe d_{crit} wird sich erst über den Kontext selbst ergeben).

Zurück zu den Referenzgrößen Θ_{44} und Θ_μ^μ . Aus den erörterten Strukturprinzipien resultiert:

- $\alpha)$ $\Theta_{44} = \mathcal{H}$ ergibt sich über irgendeine gewählte Theorie direkt
- $\beta)$ $\Theta_\mu^\mu = (D - d_{crit}) \mathcal{L}$ ergibt sich auch für den Elektromagnetismus ($d_{crit} = 4$) nur über einen allgemeinrelativistischen Durchgang

Der allgemeinrelativistische Durchgang erfolgt durch eine Variation nach der Metrik. Ist diese konstant, so kann sie dennoch im Variationsstadium formal als unbekannte allgemeine Tensorvariable behandelt werden, der erst nach der Variation der Kronecker-Delta-Tensor der euklidischen Flachraum-Eichtheorie zugewiesen wird. Im Falle der Allgemeinen Relativitätstheorie selbst wird ebenfalls nach der Metrik variiert und teilweise sogar nach ihren Wurzeln (sog. Vierbein-Transformationen). d_{crit} ist dann dementsprechend die Wurzel 2 der elektromagnetischen kritischen Dimensionalität $d_{crit} = 4$ (Details später).

Würde man nun versuchen, ohne weiterführende Konzepte Θ_{44} und Θ_μ^μ auf das Gitter zu setzen, so würden Substitutionsmodelle, die beim Gitterübergang nicht auf die Metrik rückwirken, darunter leiden, daß für Θ_μ^μ der dimensionalitätsübergreifende Ausdruck $(D - 4)$ für Renormierungs-Fragen auf dem Gitter außerhalb seines eigenen Gültigkeitsbereiches extrapoliert werden müßte.

Ein wichtiger Beitrag zur Lösung dieses Problems wurde 1997 in Heidelberg von H. J. Rothe geleistet. In seiner Diskussion der verbesserten Michael-Summenregeln zeigt der Autor ([50]), daß für das statische Quark-Antiquark-Potential

$$\widehat{V}(\widehat{R}, \widehat{\beta}) = \eta_- \langle -\mathcal{P}'_\tau + \mathcal{P}'_s \rangle_{q\bar{q}-0} - \eta_+ \langle \mathcal{P}'_\tau + \mathcal{P}'_s \rangle_{q\bar{q}-0}$$

auf dem $(3+1)$ -Gitter mit subtraktiven Erwartungswerten über Zeit-Translationen total euklidischer temporaler (\mathcal{P}'_τ) und räumlicher (\mathcal{P}'_s , spatial) Plaketten und

$$\eta_\pm = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \widehat{\beta}_\tau}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \pm \left(\frac{\partial \widehat{\beta}_s}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \right]$$

(dabei sind $\hat{\beta}_\tau$ und $\hat{\beta}_s$ Kopplungen, ξ sei der Asymmetrieparameter) auf Summenregel-Ebene folgendes gilt.

Für den Prototyp eines Confinement-Potentials werden der η_- -Term und der η_+ -Term gleich stark. Kann der η_- -Term mit Θ_{44} verglichen werden, so stellt der η_+ -Term eine Gitterübersetzung von Θ_μ^μ dar, die über ein Differentiationsverfahren bezüglich des Gitterabstandes (Wirkungs-Summenregel) eine Abhängigkeit von der Renormierungs-Beta-Funktion auf dem Gitter erlangt, ohne daß dimensionell regularisiert werden mußte (Regularisierung durch Gitter-Abstand). Auf der anderen Seite wird durch ein Tunen des Asymmetrieparameters ξ um die 1 herum (Energie-Summenregel) der komplementäre Koeffizient η_- festgelegt. Interessant ist nun die Beobachtung des Autors, daß im Falle einer Zuordnungsmöglichkeit der η_+ - η_- -Dualismus nicht nur ein euklidisch statisches Schema

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \text{"kin"} + \text{"pot"} \propto E^2 + B^2 \\ \longleftrightarrow \quad \mathcal{H} &= -\text{"kin"} + \text{"pot"} \propto -E^2 + B^2 \end{aligned}$$

impliziert, sondern auch eine dazu korrelierte $\Theta_\mu^\mu \leftrightarrow \Theta_{44}$ -Klassifikation widerspiegelt!

Dieser Ansatz wurde für den Ausbau der Michael-Summenregeln konzipiert, wo seine Aussagekraft nicht weiter ausbaufähig sein kann. Für die ganz andersartige Diskussion direkter Erwartungswerte läßt sich ein numerisch definierter statischer thermodynamischer Übergang herauskristallisieren.

Das Set $\{\Theta_{44}, \Theta_\mu^\mu\}$ kann ohne Zuhilfenahme der Allgemeinen Relativitätstheorie à la

$$A \partial_A B \Big|_{C = const}$$

einheitlich thermodynamisch reinterpretiert (gilt nachfolgend jeweils einmal für alle linken und einmal für alle rechten Komponenten in den geschweiften Klammern, B sei in beiden Fällen gleich - sei D_s die Anzahl der involvierten Ortsraumdimensionen und D_τ die Anzahl der involvierten Zeitdimensionen mit $D_\tau = 1$ für Θ_{44} , x ein Ortsraumabstand, y ein Zeitintervall; dann gelte für die als Koordinaten aufzufassenden Einzel-Dimensionen:

$$1 \text{ Zeitdimension} = y, \quad 1 \text{ Raumdimension} * 1 \text{ Zeitdimension} = (x y),$$

Ortsraum = x^{D_s} , Raumzeit = $(x^{D_s} y^{D_\tau})$ - inverse Temperatur werde dabei im Sinne von Quantenfeldtheorie bei endlicher Temperatur als Zeit rein-

terpretiert) werden mit

$$A = \{ 1 \text{ Zeitdimension} , 1 \text{ Raumdimension} * 1 \text{ Zeitdimension} \}$$

$$B = \log(\text{Zustandssumme})$$

$$C = \{ \text{Ortsraum} , \text{Raumzeit} \} ,$$

was eine unmittelbare Gitterübertragung ermöglicht, ohne daß auch hier fraktale Grenzwertprozesse wie z.B. mit $(D - 4)$ behaftete Produkte über ihren eigentlichen Gültigkeitsbereich hinaus extrapoliert werden müssen:

$$A^{\text{Lattice}} \longrightarrow \{ \text{Anisotropie-Parameter } \xi , \text{Gitter-Abstand } a \}$$

$$B^{\text{Lattice}} \longrightarrow (3 + 1)\text{-Gitter-Wirkung}$$

$$C^{\text{Lattice}} \longrightarrow \{ a , \xi \}$$

Dieser Dualismus impliziert in der euklidischen Darstellung auf Erwartungswert-Ebene

$$\left(\Theta_{\mu}^{\mu} \right)^{\text{Lattice}} \xrightarrow{\infty} \mathcal{L}_{\text{WILSON}} = \mathcal{L}^{\text{spatial}} + \mathcal{L}^{\text{temporal}}$$

$$\left(\Theta_{44} \right)^{\text{Lattice}} \xrightarrow{\infty} \mathcal{H}_{\text{STANDARD}} = \mathcal{L}^{\text{spatial}} - \mathcal{L}^{\text{temporal}}$$

wobei ∞ anstelle eines im Kontinuum regularisierten $”(D - 4)”$ die Gitterversion der Renormierungs-Beta-Funktion enthält (Details später). Der Pfeil \longrightarrow soll ausdrücken, daß der betrachtete Übergang durch weak coupling oder das statische Limit im Rahmen des Modells sichergestellt wird. Ob für repräsentative Systeme eine der beiden Bedingungen dann überhaupt notwendig ist und somit den Relevanzbereich des thermodynamischen Schemas für Θ_{44} einschränkt, ist bisher noch nicht ausreichend untersucht (Details später). Alternative Gitter-Zugänge werden daran zu messen sein, ob und wenn ja unter welchen Bedingungen sie diesem Schema entsprechen können.

Es wird jetzt ein Modell entwickelt, welches die Güte besitzt, $\mathcal{H}_{\text{STANDARD}}$ auf dem Gitter automatisch zu realisieren, und damit in das thermodynamische Schema paßt. Das eröffnet die Möglichkeit, für die Spur per definitionem weiterhin den thermodynamischen Zugang beizubehalten, da er einen renormierungsgruppenbezogenen Ausdruck zuweist, während der Ausgangspunkt mit Vorfaktor $(D - 4)$ auf dem Gitter im Sinne, daß der Regulator D applikationsmäßig noch vor dem Gitterübergang konzeptionell dem Git-

terabstand a als Regulator weichen muß, leider nur formal renormierungsfähig ist. Für alle restlichen Einzel-Komponenten von $\Theta_{\mu\nu}$ sei von nun an das neue Schema maßgeblich, was insbesondere für Θ_{44} vorteilhaft ist, weil die Gültigkeitsdomäne sauberer und/oder umfassender abgesteckt werden kann. Die thermodynamische Aussage für Θ_{44} bleibt und kann dann eben sogar gegebenenfalls noch erweitert werden! Vom Standpunkt der Entwicklung aus ist anzumerken, daß das nachfolgende umfassendere Schema durch den thermodynamischen Ansatz motiviert wurde, zu dem ich von den Vorarbeiten meines Tutors H. J. Rothe ganz unerwartet inspiriert wurde!

Der jetzt zu konstruierende Gitteransatz soll den abelschen Spezialfall des Elektromagnetismus als Sonderfall einer nichtabelschen allgemeineren Formulierung enthalten. An und für sich geht dadurch die klassische Differentialform-Wertigkeit ($g^\star =$ Kopplung) des Kontinuum-Limes

$$\mathbf{d}A = \frac{g^\star}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad A := A_\lambda dx^\lambda$$

$$\text{mit} \quad \mathbf{d}^2 A \equiv 0 \quad \text{und} \quad \exp\left(-\frac{i}{2} F_{\mu\nu}\right) \in U(1)$$

in der verallgemeinerten Darstellung verloren. Ein ganz großes Versäumnis in der bisherigen Literatur liegt darin, diesen Ausdruck nicht für einen bestimmten Ausnahmefall nichtabelsch zu reinterpretieren.

Für die weiteren Ausführungen ist an dieser Stelle ein Sprung in die allgemeinste Formulierung der Riemannschen Geometrie erforderlich.

Es ist bekannt, daß man in der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Metrik eine Art Wurzel ziehen kann

$$g_{\mu\nu} = \langle \hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu \rangle = V_\mu^m V_\nu^n \delta_{mn}$$

und so zum Vierbein- (V_μ^m) -Formalismus der Allgemeinen Relativitätstheorie gelangt ([17], [42]), der hypothesenfrei ist, da er zur klassischen Version der Allgemeinen Relativitätstheorie mathematisch äquivalent ist. In dieser Darstellung nimmt Cartan's 2. Strukturgleichung die Form

$$R^{ab} = d\omega^{ab} - \omega^{at} \wedge \omega_t^b$$

mit

$$R^{ab}, \omega^{ab} = f\left(\hat{e}_\mu, V_\mu^m, \left(V_\nu^n; \lambda\right), dx^\lambda, R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}\right)$$

an ([6], [45], [46]).

Diese Strukturgleichung ist bekannt, und das mathematische Gebäude steht. Was bisher versäumt wurde, ist, diese Gleichung in ihre genuinste Form zu bringen und ihre Wichtigkeit zu erkennen!

Die sich von dieser höheren Warte aus als besonders interessant erweisende Meta-Interpretation ist: Absorbiert der Riemann-Tensor $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ im Rahmen der Krümmungsform \mathbf{d}^2 das (aufgrund der Antisymmetrie $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = -R^{\beta\alpha}_{\mu\nu}$ unabhängig von den Dachprodukt-Symmetrieeigenschaften antisymmetrisierbare und daher in einer solchen antisymmetrisierten Mittelung ganz direkt dyaden- bzw. matrixwertig auffaßbare) Dachprodukt zweier Cartan'scher Basisvektoren $\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta$, so verwandelt er sich in einen $SO(4)$ -Feldstärke-Tensor, der bis auf ein physikalisches Erzeugungsprinzip bei den inhomogenen Maxwell-Gleichungen (vgl. Kapitel 5.2) automatisch sämtlichen $SO(4)$ -Maxwell-/Kraftdichte-Beziehungen gehorcht!

In Formeln ist das der $U(1) \rightarrow SO(4)$ shift

$$\mathbf{d}^2 = \hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta \frac{1}{4} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{i}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\text{mit } \mathbf{d}^3 \equiv 0 \quad \text{und} \quad \exp\left(-\frac{i}{2} F_{\mu\nu}\right) \in SO(4) \quad ,$$

(das Matrixargument der Exponentialfunktion kann beliebig oft halbiert werden, ohne die $SO(4)$ -Lie-Algebra zu verlassen, und generiert jeweils eine der möglichen Matrix-Quadratwurzeln des vorangehenden Ausdrucks und entspricht genau dann nicht der Hauptwertlösung dafür, wenn diese $\in O(4) \setminus SO(4)$ ist) der eine noch höhere innere Symmetrie besitzt als die allgemein bekannte vorausgehende $U(1)$ -Beziehung (Details - insbesondere auch zur Herleitung - später, jedoch eine nicht ganz unwichtige Randbemerkung dazu schon vorab: für andere nichtabelsche Eichtheorien ist nicht einmal die im Sinne der engeren Definition topologisch signifikante Differentialformwertigkeit des Feldstärketensors übertragbar, obwohl seine kommutatorielle Definition sehr wohl transferierbar bleibt).

Ab jetzt sollen die durch die nachfolgenden Kurzerklärungen in Klammern vorläufig grob umrissenen Kunst-Begriffe (Sektoren im Sinne verschiedener Domänen der zu beschreibenden Physik und der dafür verwendeten Zugänge) Einstein-Sektor (klassische allgemeinrelativistische Feldgleichungen, die auf einer Eichraum-Promiskuität $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ zwischen innerem und äußerem Eichraum basieren) und dem Maxwell-Sektor ($SU(N)/U(1)/SO(4)$ -Maxwell-Beziehungen in gruppenun-

abhängiger Form - hier darf für die Einstein-SO(4) die Zusatz-Symmetrie $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$ nur zur Umrechnung von Quadraten des Feldstärke-Tensors benutzt werden - Details zum Wie und Warum später) eingeführt werden. Die Eichtheorien aller Grundkräfte in der Natur haben dann also einen Maxwell-Sektor, und nur die Allgemeine Relativitätstheorie hat zusätzlich einen Einstein-Sektor.

Nach diesen Vorüberlegungen nun zur Motivation des neuen Gitter-Konzeptes für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor. Wenden wir uns nun einmal dem Maxwell-Sektor irgendeiner geeigneten Eichtheorie zu und betrachten die klassische Plaketten-Variable

$$U_{\mu\nu} = e^{i\kappa \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}} \quad \text{mit} \quad \kappa := g_0(a) a^2$$

Innerhalb dieses Gebildes ist $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$ die Standardversion des Gitter-Analogons zum Kontinuum-Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$. $U_{\mu\nu}$ ist ein Element der betrachteten Eichgruppe, also z. B. U(1)/U(N)/SU(N)/SO(4) etc.

Wie allgemein bekannt ist (und gleich begründet wird) spielt $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$ im Gegensatz zu $F_{\mu\nu}$ relativ zum relevanten physikalischen Szenario nur eine untergeordnete Rolle. Wenn ein Gebilde in der Physik ungünstige aber nicht ungeeignete Transformations-Eigenschaften aufweist, kann es unter anderem daran liegen, daß sich bestimmte Transformations-Freiheitsgrade gegenseitig behindern. In solchen Fällen sollte ein schwerfälliges Konstrukt in seine entscheidenden Symmetrieklassen bezüglich der relevanten Transformationseigenschaften (für das nachfolgende Beispiel siehe dazu die Details in den darauf folgenden Unterpunkten ①, ② und ③) zerlegt bzw. nach diesen entwickelt werden. Ein denkbarer Ansatz für $U_{\mu\nu} \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}$ wäre

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu} = e^{i\kappa \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\kappa)^l}{l!} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \right)^l := \\ &:= \sum_{l=0}^{\mathbf{2}} \frac{(i\kappa)^l}{l!} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(l)} \right)^l \end{aligned}$$

wobei $\left(\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(0)} \right)^0$ ein neutrales Element mit der trivialen Zuweisung einer $\mathbf{1}$ ist und implizite κ -Abhängigkeiten bei $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(l)}$ zugelassen sein sollen.

Betrachten wir den letzten und grundsätzlich neuartigen Part der Gleichungskette. Er definiert aufgrund einer Symmetrieklassen-Trennung bezüglich der

gleich diskutierten matrixtrigonometrischen Transformationseigenschaften eindeutig ein neues $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ und bis auf eine noch festzulegende stets erfüllbare Nebenbedingung (Details später) ein im Sinne dieser Aufspaltung dazu duales $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$.

Nehmen wir nun die Kontinuums-Lagrange-Dichte des Maxwell-Sektors und ersetzen dort das $F_{\mu\nu}$ durch eine der drei Gitter-Alternativen $\mathcal{F}_{\mu\nu}$, $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$, $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$. Es passiert folgendes.

$$\textcircled{1} \quad F_{\mu\nu} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

Die entstehenden Lagrange-Dichten hätten zwar den korrekten Kontinuums-Grenzwert, könnten aber auf dem Gitter NICHT eichinvariant sein, da die notwendige matrixtrigonometrische Struktur fehlt. Außerdem ist $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ durch seine Definition als kontinuumsanaloge Hilfsgröße grundsätzlich nicht eindeutig festgelegt. Ist der Logarithmus, der $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ erzeugt, nichttrivial matrixwertig, so könnten Modulo-Verfeinerungen nur noch symbolisch zugewiesen werden. Aufgrund der fehlenden Eichinvarianz lohnt eine Fortsetzung derartiger Gedankenexperimente nicht - $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ ist kein vollwertiges Gitter-Analogon zu $F_{\mu\nu}$ im Kontinuum.

$$\textcircled{2} \quad F_{\mu\nu} \longrightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$$

Diese Substitution entsteht, indem aus $U_{\mu\nu}$ der schiefermitesche Anteil herausprojiziert wird und durch einen skalaren rein imaginären Vorfaktor hermitesch gemacht wird, $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ ist also die Hermitisierung des schiefermiteschen Anteils von $U_{\mu\nu}$ (für die explizite Darstellung in Abhängigkeit von der Plakettenvariablen siehe Formel (6.2.2), Kapitel 6.2):

$$U_{\mu\nu} = \underline{\alpha} + \underline{\beta} \quad , \quad \underline{\alpha} = \underline{\alpha}^\dagger \quad , \quad \underline{\beta} = -\underline{\beta}^\dagger = i\kappa \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$$

$$F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{\beta}{i\kappa} = \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} \right)^\dagger$$

Alle entstehenden Lagrangedichten (sowohl Maxwell-Sektor als auch Einstein-Sektor) besitzen den korrekten Kontinuumslimit und sind außerdem noch (was Substitution ① nicht leisten konnte) eichinvariant. Für den Maxwell-Sektor tritt jedoch eine unerwünschte Quadrierung der Plakettenvariablen $U_{\mu\nu}$ auf, so daß die Wilson'sche Standard-Lagrangedichte auf dem Gitter durch diese Substitution NICHT realisiert werden kann. Probleme durch $U_{\mu\nu}$ -Quadrierungen gibt es beim Einstein-Sektor nicht (Details später).

$$\textcircled{3} \quad F_{\mu\nu} \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(2)}$$

Hier wird sogar für den Maxwell-Sektor eine $U_{\mu\nu}$ -Quadrierung in der Lagrangedichte vermieden. Diese Substitution überführt nämlich automatisch die Kontinuums-Lagrangedichte in die klassische Wilson'sche Lagrangedichte auf dem Gitter unter Aufrechterhaltung der Eichinvarianz und natürlich mit korrektem Kontinuumslimit. Für Maxwell'sche Eichtheorien ist diese Substitution daher besonders interessant (die konkrete Strukturformel für das hier gewählte Substitutionspendant des Feldstärketensors ist (6.2.3) in Kapitel 6.2).

Nehmen wir jetzt $\Theta_{\mu\nu}$, die Kontinuumsversion des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors. Auch dieses Gebilde kann mit Eichinvarianz und korrektem Kontinuumslimit auf das Gitter gesetzt werden, wenn im Kontinuumsausdruck für eine Eichtheorie des Einstein- oder Maxwell-Sektors $F_{\mu\nu}$ durch $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(1)}$ und/oder $\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(2)}$ ersetzt wird. Im Gegensatz zur Lagrangedichte existiert hier bisher noch kaum irgendeine Standardvorstellung, wie das Gitter-Pendant aussehen soll.

In der Literatur, die sich auf 4 Dimensionen und nichtabelsche Eichtheorien des Maxwell-Sektors konzentriert (für abelsche Theorien in 2 Raumzeit-Dimensionen und noch exotischere Szenarios gibt es noch ganz andere Modelle, vgl. u. a. [31] und [35]) gibt es im wesentlichen eigentlich nur 2 Modelle. Sehen wir einmal von dort vorgenommenen Verfeinerungen wie etwa Artefakt-Erzeuger-Entfernung (durch die matrixtrigonometrische Umgestal-

tung des Gitter-Feldstärketensors können sich artefaktbedingte gruppenfremde Erzeuger mit einschleichen - Einzelheiten zur Vorgehensweise später) und Rotationsinvarianz-Wiederherstellung ab (auch hierzu die entsprechenden Details später), so lassen sich diese zwei wichtigen Modelle (Quellenangaben ebenfalls später zusammen mit allen restlichen Details - und zwar in Kapitel 7.1) durch die bereits vorangestellten $F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(i)}$ -Substitutionen vollständig kennzeichnen.

1) Caracciolo et al., Pisa

$$\Theta_{\mu\nu} (F_{\rho\sigma}) \xrightarrow{\text{LATTICE}} \Theta_{\mu\nu}^L = \Theta_{\mu\nu} (F_{\rho\sigma} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{(1)})$$

VORTEIL:

kann als einziges Modell mit einem Erhaltungssatz für $\Theta_{\mu\nu}^L$ auf dem Gitter aufwarten, allerdings nur perturbativ in one-loop order

PROBLEM:

$$(\Theta_{\mu}^{L\mu})^{\text{renormalized}} \propto \mathcal{L}(F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(1)}) = \mathcal{O}((U_{\mu\nu})^2) \neq \mathcal{L}_{\text{WILSON}}$$

$$\Theta_{44}^L = \mathcal{H} = \mathcal{O}((U_{\mu\nu})^2)$$

2) Karsch et al., Bielefeld

$$\Theta_{\mu\nu} (F_{\rho\sigma}) \xrightarrow{\text{LATTICE}} \Theta_{\mu\nu}^L = \Theta_{\mu\nu} (F_{\rho\sigma} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{([\delta_{\mu\nu} + 1])})$$

VORTEIL:

$$\Theta_{\mu}^{L\mu}, \Theta_{44}^L \propto \mathcal{L}, \mathcal{H} = \mathcal{O}((U_{\mu\nu})^1) ,$$

$\mathcal{L}_{\text{WILSON}}$ wird "wiederentdeckt"

PROBLEM:

uneinheitliche Struktur $\Theta_{\mu\nu}^L = \mathcal{O}((U_{\mu\nu})^2 - \delta_{\mu\nu})$ mit numerischen Konsequenzen (Konvergenzverlangsamung bei gemischt-diagonal-nichtdiagonalen Θ - Θ -Korrelatoren bei der Thermalisierung in Monte-Carlo-Hitzebädern gegenüber nichthybridisierten Vergleichsmodellen etc.)

Betrachten wir jetzt noch einmal den Fall der Allgemeinen Relativitätstheorie. Wie oben bereits kurz skizziert wurde (Details später), kann der Riemann-Tensor, der den klassischen allgemeinrelativistischen Beziehungen unterliegt, in einen $SO(4)$ -Feldstärketensor konvertiert werden, der bis auf in Kapitel 5.2 spezifizierte Einschränkungen den $SO(4)$ -Maxwell-Gleichungen gehorcht. Zu den $SO(4)$ -Maxwell-Gleichungen gehört eine Lagrangedichte, die quadratisch im Feldstärketensor ist. Die Spur über dieses Matrixquadrat kann - wie unten gezeigt wird - mit Hilfe der $SO(4)$ -Vierbein-Beziehungen in ein Quadrat des Riemann-Tensors zurückverwandelt werden.

So exotisch es anmuten mag - die Allgemeine Relativitätstheorie läßt sich mathematisch reduplizieren:

Es existieren (Einschränkungen siehe Kapitel 5.2) zwei unterschiedliche (Kontinuums-)Lagrangedichten $\mathcal{L}_{\text{cont}}^{(i)}$, die von der Ordnung i im Riemann-Tensor sind. Zu jeder dieser beiden Lagrangedichten gehört ein erhaltener symmetrischer Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}^{(i)}$, der ebenfalls (und auch ebenfalls in stringent analoger Form) Ordnung i im Riemann-Tensor ist.

Dieser Sachverhalt kann auch in $F_{\mu\nu}$ -Sprache ausgedrückt werden. Sei $i = 1$ der Einstein-Sektor und $i = 2$ der Maxwell-Sektor gemäß den begrifflichen Vereinbarungen oben. Dann gibt es mit den in Kapitel 5.2 präzisierten Vereinbarungen im Falle der Allgemeinen Relativitätstheorie zwei erhaltene Energie-Impuls-Tensoren $\Theta_{\mu\nu}^{(i)}$ und zwei damit assoziierte Lagrangedichten $\mathcal{L}_{\text{cont}}^{(i)}$, die jeweils von der Ordnung i in den $F_{\rho\sigma}$ sind.

Ersetzt man nun die Feldstärketensoren $F_{\rho\sigma}$ in $\Theta_{\mu\nu}^{(i)}$ und $\mathcal{L}_{\text{cont}}^{(i)}$ jeweils durch irgendeinen Gitter-Ausdruck $\mathcal{F}_{\rho\sigma}^{(j)} \quad \forall i, j \in \{1, 2\}$ (Definition des

noch eingehender diskutierten i - j -Schemas), so erhält man (Details zur Gültigkeitsreichweite in Kapitel 5.2) eichinvariante Energie-Impuls-Tensoren und Lagrangedichten auf dem Gitter, die jeweils auch den korrekten Kontinuumslimes besitzen. Für $i = 2$ kann die Eichgruppe $SO(4)$ durch irgendeine andere maximal unitäre Eichgruppe ($U(N)/SU(N)/SO(N)/O(N)$) ersetzt werden, und es bleibt die Frage offen, ob $j = 1$ (Vollwinkel-Version für den Eichwinkel bei der Gitter-Übertragung) oder $j = 2$ (Halbwinkel-Version) zu favorisieren ist.

Einmal angenommen, Ausgangspunkt der Betrachtungen sei die Frage, ob für eine konkrete physikalische Theorie à la $U(1)$, $SU(2)$ oder $SU(3)$ bei einem Gitter-Übergang des Typs $F_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(j)}$ ($j = 1$ oder $j = 2$) gewählt werden soll. Durch die Tatsache, daß nur die Wahl $j = 2$ zur Wilson-Lagrangedichte führt, allein ist keineswegs hinreichend begründet, daß auch für $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{(2)}$ (Maxwell-Sektor-Zuordnung) $j = 2$ folgen muß - auch wenn damit bestimmte Vorteile impliziert sind. Zu einer tiefgreifenderen Beantwortung dieser Frage steht folgender Trick zur Verfügung.

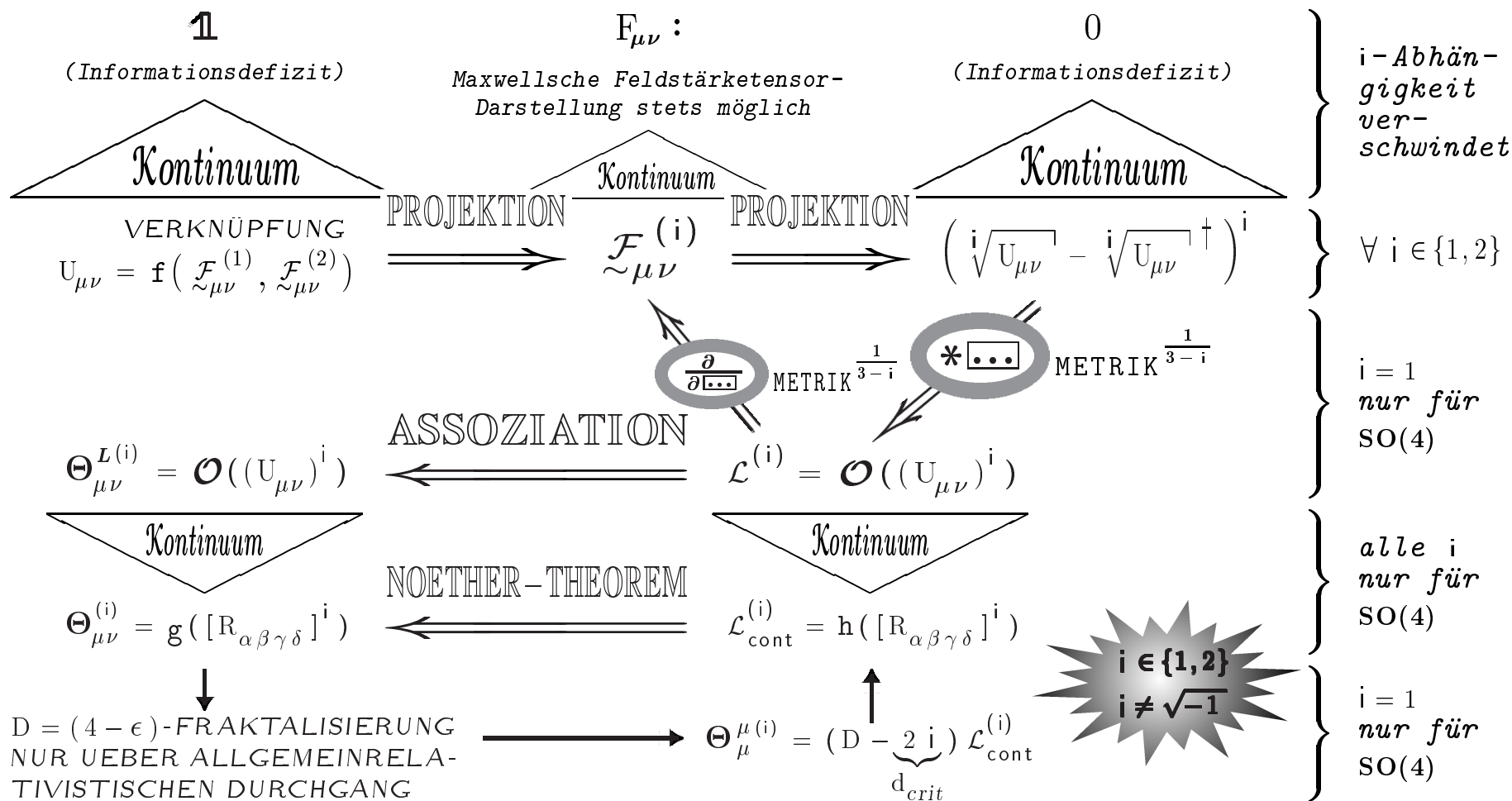
Man nutze den Vorteil, der durch die Möglichkeit einer eichgruppenunabhängigen Darstellung gegeben ist, dazu aus, die teilchenphysikalisch praxisbezogene Eichgruppe $U(1)$, $SU(2)$ oder $SU(3)$ vorübergehend formal durch $SO(4)$ auszutauschen und das Ergebnis davon ebenfalls formal im Rahmen der als i - j -Schema (kein Bezug zur imaginären Einheit, vgl. o.) definierten Prozedur als Maxwell-Sektor $i = 2$ der Allgemeinen Relativitätstheorie zu reinterpreten. Dann gibt es automatisch auch einen Einstein-Sektor $i = 1$. Dank dieser normalerweise verborgenen Zusatzinformation wird es wesentlich aufschlußreicher, mit Index-Index-Funktionalen

$j \rightarrow j(i)$ herumzuxperimentieren. Eine im Sinne des i - j -Schemas durchgängige Vollwinkel-Interpretation ($j = 1$) für die betroffenen Gitter-Übergänge wäre dann durch

$j \rightarrow j = \text{const} = 1$ gegeben. Entscheidet man sich aber für

$j \rightarrow j(i) = i$, so läßt sich folgendes visionär anmutendes und die vorangehenden Hilfschritte motivierendes Schema (Details später) realisieren:

Verknüpfung von Einstein- und Maxwell-Sektor auf dem SO(4)-Gitter



Das neue Modell, das ich im Rahmen dieser Arbeit vorstellen möchte, basiert auf diesem Schema eines kryptischen $SO(4)$ -Durchgangs und folgt der von diesem Schema suggerierten Antwort

$$\Theta_{\mu\nu}(F_{\rho\sigma}) \xrightarrow{\text{LATTICE}} \Theta_{\mu\nu}^L = \Theta_{\mu\nu}(F_{\rho\sigma} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{(2)})$$

(Details zu den vorzunehmenden Verfeinerungen später).

Bis auf die Nichtexistenz eines perturbativen Erhaltungssatzes für $\Theta_{\mu\nu}^L$ bei endlichem Gitterabstand in one-loop order vereint es die Vorzüge der Modelle der Gruppen in Pisa und Bielefeld, ohne deren Nachteile zu haben.

Mein Modell erklärt die Struktur der Wilson'schen Lagrangedichte auf dem Gitter auf einem unkonventionellen neuartigen Wege, der mit den eingangs durchgeführten thermodynamischen Betrachtungen in Einklang steht und über die Einführung einer Hauptwertwurzel-Spezifikation eine jeweils wechselseitig eindeutige Beziehungskette $F_{\mu\nu} \longleftrightarrow U_{\mu\nu} \longleftrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(2)}$ ermög-

licht, die es erlaubt, in der Form eines Substitutionsmodells (der Gitteransatz für den Energie-Impuls-Tensor ergibt sich aus der Kontinuumsvariante durch die Substitution des verwendeten Feldstärke-Tensors) die thermodynamischen Interpretationen noch an Deutlichkeit zu übertreffen. Das gleiche gilt für das Modell der Bielefeld-Gruppe, wo niemals explizit die Wurzel gezogen wurde. Für die dort betrachteten Diagonalkomponenten von $\Theta_{\mu\nu}^L$ kann sich nämlich das Quadrat einer Wurzel aus $U_{\mu\nu}$ hinter der ersten Potenz von $U_{\mu\nu}$ in der Direktformulierung perfekt verstecken.

Wie das $SO(4)$ -Schaubild und die $U_{\mu\nu}$ -Dekomposition demonstrieren, scheinen Gitter-Artefakte bei der Frage nach der Vereinigung der Gravitation mit den restlichen Grundkräften in der Natur als Relikte einer primitiveren Linear-Näherung aussagekräftiger zu sein als eine ausgefeilte infinitesimale Kontinuumstheorie mit komplizierteren Operatoren, deren exakte Wechselbeziehungen das eine oder andere intuitive Bindeglied sehr gut eliminieren könnten.

Kapitel 3

D-DIMENSIONALE KONTINUUMSBE- TRACHTUNGEN UND DER ENERGIE- IMPULS-TENSOR

3.1 Selbstähnlichkeit zwischen Raum und Raumzeit

Das dreidimensionale Kreuzprodukt bildet zwei Urbildvektoren auf einen Bildvektor ab und ist als Abbildung linear und total antisymmetrisch. Alle diese Eigenschaften lassen sich auch in genau sieben Dimensionen realisieren, wobei der für das dreidimensionale Kreuzprodukt charakteristische Levi-Civita-Tensor komponentenweise allgemeineren total antisymmetrischen Strukturkonstanten weicht und der Entwicklungssatz für ein doppeltes, verschachteltes Kreuzprodukt lediglich auf Oktonionenbasis relativiert wird. Mit diesem Konzept kann bei den Maxwell-Gleichungen der 3-dimensionale Ortsraum durch einen 7-dimensionalen Ortsraum ersetzt werden ([56]). Erlaubt man hingegen, daß entweder einer der beiden Urbildvektoren oder der Bildvektor einer antisymmetrischen Dyade weichen darf, so läßt sich das Kreuzprodukt unter Beibehaltung eines Levi-Civita-Tensors auf vier Dimensionen verallgemeinern. Dieses Alternativkonzept ermöglicht es, den Elektromagnetismus als perfektes vierdimensionales Pendant zur Magnetostatik zu identifizieren. Das vorliegende Teilkapitel dient der detaillierten Untersuchung dieses Zusammenhangs, welcher die wichtige Implikation beinhaltet, daß die fundamentalste Beschreibung des Elektromagnetismus diejenige einer reinrassigen Wirbelkraft ist und daher nicht zu einem für die spätere Gitter-Verallgemeinerung benötigten Tiefenverständnis des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors mit beitragen kann.

Unser physikalischer Ortsraum ist 3-dimensional, die ihn einschließende Raumzeit 4-dimensional. Die 4. Dimension der Raumzeit in der euklidi-

schen Darstellung ist die imaginäre Fortsetzung der Zeit. Eine von einer cartesianischen Koordinatenachse aus startende Orthorotation in der Komplexifikationsebene dieser 4. Dimension transmutiert räumliche Eigenschaften in zeitliche Eigenschaften und umgekehrt ([54]).

Eine zentrale Frage dabei ist, warum es sich bei diesen Dimensionalitäten gerade um die Zahlen 3 und 4 handelt. Zwei primäre Eigenschaften eines euklidischen Raumes sind die dort realisierbaren maximalen Anzahlen verschiedenartiger platonischer Polytope mit (N_s) und ohne (N_p) Sterne ([8] und [21] sowie Sekundärliteratur von den dort dafür erwähnten Autoren dazu). Für die Dimensionalitäten $D = 3, 4$ gilt bekanntermaßen jeweils $N_s = D^2$ und $N_p = D + 2$. Für $D \in \mathbb{N} \setminus \{3, 4\}$ hingegen gilt $N_s = N_p$ mit $N_s = +\infty$ für $D = 2$ und $N_s = 3$ für $D > 4$. Infolge der Degeneration der Polytope der pentagonalen Klasse im Fraktalraum zwischen den Dimensionalitäten 4 und 5 (konfigurative Tessellation und anschließende Hyperbolizität für $D > D_{crit}$) und der realen Mosaikbildung des Cesaro-Polytops (24 gleich große begrenzende Oktaeder) in 5 Dimensionen (realgeometrische Reinterpretation eines sphärischen Polytops mit divergierender Fassettenzahl) besteht unter diesem Gesichtspunkt eine enge Affinität zwischen dem 3-dimensionalen und dem 4-dimensionalen euklidischen Raum, die außerhalb dieser beiden Räume nicht verallgemeinerungsfähig ist und eine Disposition für besondere geometrische Schönheit signalisiert.

Die in diesen Ausführungen modellierte Selbstähnlichkeitsidee kann physikalisch weitergeführt werden. Um hierzu benötigte Grundlagen zu schaffen, sollen kurz die Differentialformen im 3- und 4-dimensionalen Raum betrachtet werden.

Im 3-dimensionalen Raum gilt, wie allgemein bekannt ist

$$\begin{aligned} da &= (\mathbf{grad} a) d\vec{x} = \langle \vec{\partial} \cdot \mathbf{a}, d\vec{x} \rangle \\ d(\vec{b} \cdot d\vec{x}) &= (\mathbf{rot} \vec{b}) d\vec{A} = \langle \vec{\partial} \times \vec{b}, d\vec{A} \rangle = \\ &= \langle \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \hat{e}_i \partial_j b_k, \frac{1}{2!} \sum_{m,n,r} \varepsilon_{mnr} \hat{e}_m dx_n \wedge dx_r \rangle \\ d(\vec{c} \cdot d\vec{A}) &= (\mathbf{div} \vec{c}) dV = \langle \vec{\partial}, \vec{c} \rangle dV \end{aligned}$$

Es ergibt sich also ein Schema

$$\mathbf{grad} \quad \rightarrow \quad \mathbf{rot} \quad \rightarrow \quad \mathbf{div}$$

Um die 3-dimensionale Rotation D-dimensional zu verallgemeinern, ist es üblich, à la

$$d(\vec{b} \cdot d\vec{x}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{ROTOR}(\vec{b}))_{ij} dx_j \wedge dx_i$$

$$\text{mit } (\mathbf{ROTOR}(\vec{b}))_{ij} = \partial_i b_j - \partial_j b_i$$

umzuschreiben und die tensorielle Auffassung

$$\mathbf{grad} \rightarrow \mathbf{ROTOR} \rightarrow \dots$$

ganz analog auf den 4-dimensionalen Raum zu übertragen.

Diese Interpretation ordnet über die Formulierung des tensoriellen Rotors die zweite Differentialform des 4-dimensionalen euklidischen Raumes derjenigen des 3-dimensionalen Raumes zu. Wie das jetzt nach und nach entwickelte weitere Selbstähnlichkeitsschema zeigen wird, ist es viel sinnvoller, die Auffassung

$$\begin{array}{l} \mathbb{K}^3 : \boxed{\mathbf{grad}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{rot}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{div}} \\ \mathbb{K}^4 : \boxed{\mathbf{grad}} \longrightarrow \mathbf{chi} := \frac{\mathbf{ROTOR}}{2} \longrightarrow \boxed{\mathbf{rot}} \longrightarrow \boxed{\mathbf{div}} \end{array}$$

in den Vordergrund ('rot' wird etwas weiter unten spezifiziert) zu rücken. Die dafür eingeführte Chiasmus-Interpretation (antisymmetrisierende Überkreuz-Blockung) 'chi' müßte bei einer D-dimensionalen Fortsetzung dieses Schemas sogar als Gradient 2. Ordnung eingestuft werden (und dementsprechend muß 'grad' als '1 - grad' umdefiniert werden):

$$\begin{array}{l} \mathbb{K}^1 : \parallel \longrightarrow \parallel \mathbf{rot} \parallel \longrightarrow \parallel \\ \mathbb{K}^2 : 1 - \mathbf{grad} \longrightarrow \mathbf{rot} \parallel \longrightarrow \parallel \\ \mathbb{K}^3 : 1 - \mathbf{grad} \longrightarrow \mathbf{rot} \longrightarrow \mathbf{div} \\ \mathbb{K}^4 : 1 - \mathbf{grad} \triangleright 2 - \mathbf{grad} \longrightarrow \mathbf{rot} \longrightarrow \mathbf{div} \\ \mathbb{K}^5 : 1 - \mathbf{grad} \triangleright 2 - \mathbf{grad} \longrightarrow \mathbf{rot} \longrightarrow \mathbf{div}^{(*)} \triangleright \mathbf{div} \\ \mathbb{K}^6 : 1 - \mathbf{grad} \triangleright 2 - \mathbf{grad} \triangleright 3 - \mathbf{grad} \triangleright \mathbf{rot} \longrightarrow \mathbf{div}^{(*)} \triangleright \mathbf{div} \\ \mathbb{K}^7 : 1 - \mathbf{grad} \triangleright 2 - \mathbf{grad} \triangleright 3 - \mathbf{grad} \triangleright \mathbf{rot} \triangleright \mathbf{div}^{(*)} \triangleright \mathbf{div}^{(*)} \triangleright \mathbf{div} \\ \text{etc.} \end{array}$$

(*): die von-Links-Multiplikation eines Nabla-Operators in D Dimensionen definiert auch in diesen Fällen die um eine Stufe verjüngende Divergenz eines Tensors n. Stufe - für diese Fälle ((*) $\Rightarrow n \geq 2$) muß allerdings bei dem Argument-Tensor totale Antisymmetrie in allen Indizes als Bedingung vorausgesetzt werden

wobei in Polyaden-Schreibweise (Skalare $a \rightarrow$ Vektoren $\vec{a} \rightarrow$ Dyaden $\overleftrightarrow{a} \rightarrow$ Triaden $\overleftrightarrow{\overleftrightarrow{a}}$ etc.)

$$\mathbb{K}^1 : \quad \mathbf{rot} \ a := \det(\vec{\partial} \cdot a) = \vec{\partial} \cdot a$$

$$\mathbb{K}^2 : \quad \mathbf{rot} \ \vec{a} := \det(\vec{\partial}, \vec{a})$$

$$\mathbb{K}^3 : \quad \mathbf{rot} \ \vec{a} := \sum_i \hat{e}_i \det(\hat{e}_i, \vec{\partial}, \vec{a})$$

$$\mathbb{K}^4 : \quad \mathbf{rot} \ \overleftrightarrow{a} := \sum_i \hat{e}_i \det(\hat{e}_i, \vec{\partial}, \overleftrightarrow{a}), \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\mathbb{K}^5 : \quad \mathbf{rot} \ \overleftrightarrow{a} := \sum_{i,j} \overleftrightarrow{\hat{e}_i \hat{e}_j} \det(\hat{e}_i, \hat{e}_j, \vec{\partial}, \overleftrightarrow{a}), \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\mathbb{K}^6 : \quad \mathbf{rot} \ \overleftrightarrow{\overleftrightarrow{a}} := \sum_{i,j} \overleftrightarrow{\hat{e}_i \hat{e}_j} \det(\hat{e}_i, \hat{e}_j, \vec{\partial}, \overleftrightarrow{\overleftrightarrow{a}}), \quad a_{ijk} = -a_{jik} = -a_{ikj}$$

jeweils in 2-er Terrassenform (alle 2 Dimensionen kommt eine neue unabhängige Drehebene hinzu, vgl. die D-dimensionalen Oberflächen $\mathcal{A}_o(D)$ (D+1)-dimensionaler Kugeln mit Volumen $V(D+1)$ und Durchmesser = 1:

$$\mathcal{A}_o(D) = \pi * V(D-1) = \pi \frac{\frac{1}{2}!^{(D-1)}}{\frac{D-1}{2}!}$$

$$\rightarrow \quad \pi \quad (D=1) \quad \rightarrow \quad \pi \quad (D=2) \quad \rightarrow \quad \frac{\pi^2}{4} \quad (D=3)$$

$$\rightarrow \quad \frac{\pi^2}{6} \quad (D=4) \quad \rightarrow \quad \frac{\pi^3}{32} \quad (D=5) \quad \rightarrow \quad \frac{\pi^3}{60} \quad (D=6)$$

etc., welche eine analoge $(\frac{D}{2} + \frac{1}{2} \mathbf{sin}^2 \frac{\pi D}{2})$ -Terrassenbildung über die Potenzen von π dokumentieren, die jeweils exakt um 1 größer als der Tensor-Rang der genuine Form der D-dimensionalen Rotation sind - als genuine Form wird hier die Verwendung des optimalen Tensorrangs bei den Urbildern der Rotation angesehen, wie sie in der vorangehenden Übersicht konstruiert wurden.

Nach diesen vorbereitenden Betrachtungen darf die durch diese Arbeit motivierte Version des 4-dimensionalen Differentialformen-Schemas vorgestellt werden (die ersten drei Dimensionen seien rein reell, die vierte rein imaginär, was die Vereinbarungen für den verwendeten 4-dimensionalen Zahlenkörper anbelangt):

$$\mathbb{K}^4 :$$

$$da = (\mathbf{grad} \ a) d\vec{x} = \langle \vec{\partial} \cdot a, d\vec{x} \rangle$$

$$d(\vec{b} \cdot d\vec{x}) = (\mathbf{chi} \ \vec{b}) : d\overleftrightarrow{\vec{x}} := \left(\frac{1}{2} \left(\overleftrightarrow{b}'(\vec{x}) - \vec{b}'(\vec{x}) \right) \right) : (\overleftrightarrow{d\vec{x}} \wedge d\vec{x}) := \\ := \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu b_\nu - \partial_\nu b_\mu) \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad :$$

einzigste Differentialform ohne natürliches (außerhalb der tensoriellen **RO-TOR**-Auffassung) Pendant zum analogen (obigen) \mathbb{K}^3 -Schema: Chiasmus

$$\begin{aligned} d(\overleftrightarrow{C} : d\overleftrightarrow{X}) &= (\mathbf{rot} \overleftrightarrow{C}) d\vec{A} = \langle \vec{\mathfrak{D}} \times \overleftrightarrow{C}, d\vec{A} \rangle := \\ &:= \left\langle \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ijkl} \hat{e}_i \partial_j C_{kl}, \frac{1}{3!} \sum_{m,n,r,s} \varepsilon_{mnr s} \hat{e}_m dx_n \wedge dx_r \wedge dx_s \right\rangle \\ (\text{Bedingung : } \overleftrightarrow{C} &= - {}^t \overleftrightarrow{C} , \end{aligned}$$

Bemerkung : das (hierbei mit definierte) vierdimensionale Kreuzprodukt ist trilinear und wirkt zwischen 3 Vektoren oder einem Vektor und einer antisymmetrischen Dyade)

$$d(\vec{d} \cdot d\vec{A}) = (\mathbf{div} \vec{d}) dV = \langle \vec{\mathfrak{D}}, \vec{d} \rangle dV$$

Anders als im \mathbb{K}^3 verändert die Rotation den Tensor-Rang. Ihr genuines (vgl. vorangehende Diskussion über D-dimensionale Differentialformen hinsichtlich des Terrassen-Aspektes) Urbild ist ein Tensor 2. Stufe, der durch diese Abbildung zu einem Bild-Tensor 1. Stufe verjüngt wird. Prinzipiell lassen sich Differentialformausdrücke auf (nicht-genuine) Urbilder höheren Tensor-Ranges verallgemeinern, indem deren überflüssige Tensorindizes an den Kontraktions-Operationen nicht aktiv beteiligt werden (z. B. Divergenz einer Matrix $\mathbf{div} \mathfrak{M} := \sum_{i,j} \hat{e}_i \partial_j M_{ji}$ - für überzählige Tensorindizes muß nicht notwendigerweise eine Antisymmetrieforderung bezüglich aller jeweils restlichen Indizes erhoben werden; eventuelle Erhaltungsgesetzmäßigkeiten würden dann spaltenweise differentialformwertig sein). Bei der vorliegenden 4-dimensionalen Rotation ist auch eine Verallgemeinerung auf Urbilder mit einem zu niedrigen Tensor-Rang möglich, indem analog zu $|ket\rangle$ und $\langle bra|$ bei quantenmechanischen Erwartungswerten ein resultierend $\mathbf{1}$ -wertiges vollständiges System $| \rangle \langle |$ dazwischen geschoben wird:

$$\mathbf{rot} \vec{c} = \frac{1}{2} \sum_i \hat{e}_i \overleftrightarrow{\mathbf{rot}}(\hat{e}_i \vec{c}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j,k,l} \varepsilon_{ijkl} \hat{e}_i \hat{e}_j \partial_k c_l$$

Zusammenfassend kann man bemerken, daß die 4-dimensionale Rotation aus Vektoren Dyaden macht und aus Dyaden Vektoren. Das Format muß sich stets ändern.

Außer 4-dimensionalen Differentialformen werden für die Selbstähnlichkeitsdarstellung bezüglich Raum und Raumzeit vierdimensionale elektrische und magnetische Felder benötigt. Sie sollen - da sie dyadenwertig sein werden - als $\overleftrightarrow{E}_{\mathbb{IV}}$ und $\overleftrightarrow{B}_{\mathbb{IV}}$ definiert werden. Ihre bekanntesten 3-dimensionalen Eltern sind dann die vektorwertigen Größen $\vec{E}_{\mathbb{III}}$ und $\vec{B}_{\mathbb{III}}$. Definiert werde

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\mathbf{E}}_{\mathbb{I}} &:= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} -i \overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}} \times \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\mathbb{I}} & \overrightarrow{\mathbf{E}}_{\mathbb{I}} \\ \hline -{}^t \overrightarrow{\mathbf{E}}_{\mathbb{I}} & 0 \end{array} \right) = \\
&= -\frac{i}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}} \times \left(\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\mathbb{I}} \right) = \frac{i}{2} \left(\overleftrightarrow{\mathbf{F}}_{\mu\nu} \right)_{[\mu\nu \rightarrow \text{Dyade}]} \quad (3.1.1)
\end{aligned}$$

(die Blockungs-Darstellung macht von der Äquivalenz von Matrix und Dyade Gebrauch) und

$$\begin{aligned}
\overleftrightarrow{\mathbf{B}}_{\mathbb{I}} &:= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c|c} i \overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}} \times \overrightarrow{\mathbf{E}}_{\mathbb{I}} & \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\mathbb{I}} \\ \hline -{}^t \overrightarrow{\mathbf{B}}_{\mathbb{I}} & 0 \end{array} \right) = \\
&= \frac{i}{2} \overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}} \times \left(\overrightarrow{\mathbf{E}}_{\mathbb{I}} \right) = \frac{1}{2} \left(\overleftrightarrow{\tilde{\mathbf{F}}}_{\mu\nu} \right)_{[\mu\nu \rightarrow \text{Dyade}]} \quad (3.1.2)
\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ = Standardversion des elektromagnetischen Feldstärke-Tensors

$\tilde{\mathbf{F}}_{\mu\nu}$ = dualer Feldstärke-Tensor

$$\overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}} \times \vec{c}_{\mathbb{I}} := \sum_i \overleftrightarrow{\hat{e}}_i (\hat{e}_i \times \vec{c}_{\mathbb{I}}) \quad :$$

$\vec{c}_{\mathbb{I}}$ spendet genauso viele Indizes wie $\overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}}$ für das Kreuzprodukt

$$\overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}} \times (\overleftrightarrow{\mathbf{C}}_{\mathbb{I}}) := \sum_j \overleftrightarrow{\hat{e}}_j (\hat{e}_j \times \overleftrightarrow{\mathbf{C}}_{\mathbb{I}}) \quad :$$

$\overleftrightarrow{\mathbf{C}}_{\mathbb{I}}$ spendet mehr Indizes als $\overleftrightarrow{\mathbf{1}}_{\mathbb{I}}$ für das Kreuzprodukt

$\overrightarrow{\mathbf{B}}_{\mathbb{I}}$ und $\overleftrightarrow{\mathbf{B}}_{\mathbb{I}}$ sind dann die Winkelgeschwindigkeits-Pseudotensoren der Drehung des jeweiligen Systemgeschwindigkeitsvektors (mit Betragserhaltung - Details später) in einer (\mathbb{I}) bzw. zwei (\mathbb{II}) unabhängigen simultanen Drehenebenen.

Für eine dimensionalitätsübergreifende Darstellung soll dann von allgemeinen elektrischen Feldern \mathbf{E} und magnetischen Feldern \mathbf{B} gesprochen werden - für eine Dimensionalität $D \in \{3, 4\}$. Außerdem wird ein ähnlich allgemein definierter Geschwindigkeitsvektor benötigt.

(- Für die nachfolgenden Gegenüberstellungen werden implizit folgende Beobachtungen ausgenutzt. Auch innerhalb der Speziellen Relativitätstheorie gibt es so etwas wie eine Länge, indem beispielsweise dem euklidisch dargestellten Vierer-Ortsvektor (Ereignis-Koordinate) $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ mit $x_4 = ict$ (Lichtgeschwindigkeit c nachfolgend $= 1$ gesetzt) die Hauptwertwurzel $L(x) := \sqrt{{}^t x \cdot x}^{\text{main}}$ (wobei $\sqrt{+1}^{\text{main}} := +1$, $\sqrt{-1}^{\text{main}} := +i$, für weitere Details der Hauptwertspezifikation bei Quadratwurzeln siehe Formel (6.1.1) in Kapitel 6.1) als Pseudo-Betrag zugeordnet wird, der zwar nicht positiv definit ist, aber anders als die mathematisch saubere Skalarprodukt-Norm $\sqrt{x^\dagger x}$ die Rolle der physikalisch signifikanten Invarianten (Weltskalar) einnimmt. Demzufolge muß die fehlende positive Definitheit des physikalischen Längenbegriffs $L(x)$ in vier Dimensionen kein Makel der Theorie an und für sich, sondern vielmehr ein Spiegel des Naturgeschehens selbst sein. Für die weiter unten präsentierten Bewegungsgleichungen der 3- und 4-dimensionalen Magnetostatik gibt es bei geeigneter Eichung (Auswahl spezieller Teil-Lösungen) und Verallgemeinerung auf D Dimensionen die Potential-Lösung (der Majuskel "A" symbolisiere ab jetzt 3- und 4-dimensionale Vektorpotentiale, während er oben bei differentiellen Flächenelementen Verwendung fand)

$$A(x) = - \int j(x') G_D(x, x') d^D x' \quad (3.1.3)$$

mit (Benutzung folgt)

$$z(D, x, x') = L(x - x') \quad \text{in } D \text{ Dimensionen}$$

(für $D = 3$ normale Länge, für $D = 4$ die bereits angesprochene analog definierte aber nicht positiv definite Pseudo-Länge),

$$\Delta t := t - t' \quad \text{für die Zeit}$$

und $\Phi(D, r)$ als Oberfläche einer D -dimensionalen Kugel mit

Radius $r = L(x^{\text{radial}})$, so daß als Greens-Funktionen $G_D(x, x')$ unter anderem der symmetrische Ansatz

$$G_D^{\text{symm}}(x, x') = \lim_{s \rightarrow \infty} \int_{S^{D-2}}^{z(D, x, x')} \frac{dr}{\Phi(D, r)}$$

und der retardierte Kandidat

$$\begin{aligned} G_4^{\text{ret}}(x, x') &= \frac{i}{2\pi} \delta(z^2(4, x, x')) \vartheta(\Delta t) = \\ &= -i \delta(z(3, x, x') - \Delta t) \vartheta(\Delta t) G_3^{\text{symm}}(x, x') \end{aligned}$$

in euklidischer Normierung und in teilchenphysikalischen Einheiten zur Verfügung stehen. Aufgrund fehlender positiver Definitheit ist bei der vierdimensionalen Raumzeit $L(x^{\text{radial}})$ nicht nur für $x^{\text{radial}} = 0$, sondern sogar für die nichttriviale Menge aller Lösungen für (benutze jetzt die Komponenten des Ereignisvektors = Orts-Vierervektors x^{radial})

$$\sum_{i=1}^3 (x_i^{\text{radial}})^2 + (i t^{\text{radial}})^2 = 0 \quad \text{Null, da } x_4^{\text{radial}} \text{ in Wirklichkeit rein}$$

imaginär ist. Also ist $G_4(x, x')$ dann nicht nur für $x = x'$ singular. Der pathologische Unterraum der 4-dimensionalen Integrationsdomäne mit degeneriertem (singulärem) Integrand ist jetzt nicht mehr 0-, sondern 3-dimensional. Es handelt sich zwar nach wie vor um die zur l'Hospital'schen Problematik analoge Fragestellung, ob ein vergleichsweise unendlich dünnes (oder kleines) Gebiet mit unendlich hohen Beiträgen (bzw. unendlich hohem Beitrag) die restliche Lösung beeinflusst oder gar dominiert - die Antwort ist aber jetzt kein eindeutiges 'Nein' mehr, sondern hängt kritisch davon ab, wie die Singularitäten im Impuls-Raum (der Fourier-Transformierten) der Greensfunktion $G_4(x, x')$ umfahren werden. Die fehlende positive Definitheit der speziellrelativistischen Länge erzeugt hier eine ganz wichtige Ambiguität. In der mikroskopisch relevanten Quantenelektrodynamik ist (3.1.3) eine Operatorgleichung, die genannten kritischen Singularitäten werden im Hinblick auf eine Punktspiegelung am Koordinatenursprung der Komplexifikationsebene) symmetrisch umfahren ($G_4(x, x') = G_4^{symm}(x, x')$), die Raumzeit verhält sich effektiv wie ein metrisch positiv definiten Ortsraum der gleichen Gesamtdimensionalität, die Zeit läuft (vom Standpunkt der Reinterpretations-Hypothese, daß Antiteilchen vorwärts in der Zeit äquivalent zu Teilchen rückwärts in der Zeit sind, aus gesehen) bidirektional ab und kann (das ist meine persönliche Spekulation) insofern möglicherweise als Verursacherin des stochastischen Chaoszustandes der Quantenwelt angesehen werden, für welchen deterministische Größen durch Wahrscheinlichkeitsoperatoren ersetzt werden müssen (gemessen werden aber Erwartungswerte, bei denen $G_4^{symm}(x, x')$ im Operator-Kern effektiv durch eine mathematische Einbindung abgeschirmt wird, die der Charakteristik der anschließend betrachteten Lösung $G_4^{ret}(x, x')$ viel näher steht - die Natur kann also nach außen hin "nicht überlistet werden"). In der makroskopischen Elektrodynamik ist (3.1.3) eine Gleichung für klassische Größen, die genannten kritischen Singularitäten werden asymmetrisch umfahren ($G_4(x, x') = G_4^{ret}(x, x')$), die Raumzeit beschreibt das Geschehen in einem Ortsraum, in dem der Signalträger Licht eine endliche Geschwindigkeit (die entsprechende Vierergeschwindigkeit ist dann wiederum sogar als neue genuine Größe unendlich, vgl. u.) besitzt, die Zeit läuft unidirektional aber bezugssystemspezifisch unterschiedlich schnell ab (es herrscht eine strenge Kausalität, die es ermöglicht, anstelle des herkömmlichen Zeitbegriffs

$$t = -i x_4 \text{ eine absolute Weltzeit}$$

(Eigenzeit im Ruhesystem des Referenzkörpers entlang seiner Weltlinie)

$$T = -i \int L(dx) \operatorname{sgn}(dt) \text{ einzuführen und auf deren Basis mit klassi-$$

schen unumstößlichen Größen zu rechnen). Die fehlende positive Definitheit der speziellrelativistischen Länge reflektiert im Sinne der vorangehenden Ausführungen und detaillierten Begriffszuweisungen den Dualismus zwischen Makrokosmos und Mikrokosmos. Also ist es genau dieser Längen-Be-

griff, der wirklich relevant ist und nicht seine "mathematische Unreinheit". Beim später im Vergleichsschema diskutierten Übergang von 3 zu 4 Dimensionen in Raum ($x \in \mathbb{R}^3 \rightarrow x \in \mathbb{K}^4 := \mathbb{R}^3 \times (\{\sqrt{-1}\} \times \mathbb{R}^1) \subset \mathbb{C}^4$) und Zeit ($t \rightarrow T$) verwandelt sich die Dreier-Geschwindigkeit in eine Vierer-Geschwindigkeit, deren Länge im soeben diskutierten Sinne

$$\begin{aligned} \text{"|V|"} &:= L(V) = \sqrt{t \left(\frac{dx}{dT} \right) \cdot \frac{dx}{dT}}^{\text{main}} = \\ &= \sqrt{\frac{(L(dx))^2}{(L(dx) \operatorname{sgn}(dt)/(ic))^2}}^{\text{main}} = ic \xrightarrow{c=1} i \end{aligned}$$

rein imaginär ist, was die universelle Zeitartigkeit dieser Vierer-Größe in euklidischer Notation ausdrückt. Damit dürfte ausreichend begründet sein, wieso und inwiefern sowohl für 3-dimensionale Vektoren \mathbf{a} (kein Bezug zum später behandelten Gitterabstand a) des normalen Ortsraumes als auch für euklidisch dargestellte Vektoren \mathbf{a} der 4-dimensionalen Raumzeit (zwei verschiedene Interpretationen für \mathbf{a})

$$L(\mathbf{a}) := \sqrt{t_{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}}^{\text{main}} \quad (3.1.4)$$

der maßgebliche Längenbegriff ist. Zur besseren Transparenz der sich anschließenden Vergleichs-Diskussion soll dieses Konzept noch auf Operatoren ausgeweitet werden. Auch hier soll zu Zwecken der Veranschaulichung zunächst mit SI-Einheiten gestartet werden, die dann später wie gewohnt teilchenphysikalischen Einheiten weichen. Sowohl für Dreier-Größen (invariante Dreier-Masse = normale Masse) als auch für Vierer-Größen (invariante Vierer-Masse = Ruhemasse) läßt sich der Impuls systemübergreifend über

$$p = m U \quad (3.1.5)$$

definieren, wenn U die entsprechende Geschwindigkeit ist und m den jeweils dazugehörigen invarianten Massenbegriff verkörpert. (3.1.5) kann sowohl für 3 (benutze auch hier griechische Indizes) als auch für 4 Dimensionen auf Operatorlevel übertragen werden, wobei dann

$$p_\mu = \frac{\hbar}{i} D_\mu, \quad D_\mu = \partial_\mu + i g^\star A_\mu$$

(Schreibweise hier in Anlehnung an das noch folgende Kapitel 5). In 4 Dimensionen kann die Klein-Gordon-Gleichung für ein Teilchen mit nichtverschwindender Ruhemasse

$$\left[(\partial_\mu + i g^\star A_\mu) (\partial^\mu + i g^\star A^\mu) - \left(\frac{c}{\hbar} \right)^2 m^2 \right] \varphi = 0$$

daher in

$$(p_\mu p^\mu + c^2 m^2) \varphi = 0$$

übersetzt und dann um die Masse gekürzt werden, so daß wegen (3.1.5)

$$U^2 \varphi = (ic)^2 \varphi \quad (3.1.6).$$

Auf der linken Seite steht die zum Operator avancierte Vierergeschwindigkeit, von der das Quadrat gebildet wird. Das Quadrat der makroskopischen Vierergeschwindigkeit ist $(ic)^2$. Die Übersetzung eines konstanten Multiplikators auf den Hilbert-Raum führt auf einen Operator, der derselbe konstante Multiplikator ist. Also unterscheidet sich die rechte Seite in (3.1.6) von der linken Seite dort dadurch, daß erst die Vierergeschwindigkeit quadriert (Square-Anweisung) und dann in einen Operator verwandelt (Operator-Anweisung) wird. Daher kann die Klein-Gordon-Gleichung für ein massives Teilchen entsprechend symbolisch und formal durch die Kommutator-Konstruktion

$$\left([\text{Operator}, \text{Square}]_{-} U \right) \varphi = 0$$

ausgedrückt werden. Definiert man zunächst klassisch (mit Vierergeschwindigkeit V für U)

$$\hat{U} := \frac{U}{ic} \quad (3.1.7),$$

so gilt für den vorangehend diskutierten Längenbegriff $L(\hat{U}) = 1$ beziehungsweise $\hat{U}\hat{U} = 1$ oder

$$\hat{U}\hat{U}\omega = \omega \quad (3.1.8),$$

wenn ω irgendein beliebig nachgeschaltetes klassisches Feld ist. Das wirkt irritierend, weil ω hier keine spezielle Bedeutung besitzt. Verallgemeinert man jedoch (3.1.7) auf Operatoren, so kann (3.1.8) auch als weitere Umformung der massiven Klein-Gordon-Gleichung (3.1.6) verstanden werden, wenn ω die Bedeutung von φ zugewiesen wird. Diese Beziehung kann noch abstrakter formuliert werden, wenn eine auf die Anwendung auf ω spezialisierte Vektor-Inversion formal zugelassen wird:

$$\hat{U}\hat{U}_{\omega}^{-1}\omega = \omega \quad \text{mit} \quad \hat{U}_{\omega}^{-1} = \hat{U} \quad (3.1.9).$$

Hierbei kommt es nicht auf die Vollständigkeit aller denkbaren Lösungen für \hat{U}_{ω}^{-1} an, sondern nur auf den einfachsten Lösungskandidaten. Unterzieht man die euklidisch formulierte Dirac-Gleichung für ein massives Teilchen

$$\left[\not{D} + \frac{c}{\hbar} m \right] \psi = 0$$

ähnlichen Umformungen wie die Klein-Gordon-Gleichung, so folgt für $\omega = \psi$

$$\hat{U}\hat{U}_{\omega}^{-1}\omega = \omega \quad \text{mit} \quad \hat{U}_{\omega}^{-1} = \gamma \quad (3.1.10),$$

wobei γ der euklidisch formulierte Vierervektor mit den γ -Matrizen als Komponenten ist. (3.1.9) und (3.1.10) signalisieren, daß auch im Falle der Klein-Gordon-Gleichung und der Dirac-Gleichung bei Anwesenheit von Masse $L(U) = ic$ gelten muß, so daß die naive Operator-Extrapolation von (3.1.7) zur Längengdefinition beim Vierergeschwindigkeits-Operator op-

timal geeignet ist. Damit sind alle wesentlichen Vorbereitungen getroffen worden, um jetzt in teilchenphysikalischen Einheiten folgenden Vergleich knapp und übersichtlich präsentieren zu können, wobei für die Längenfunktion $L(\cdot)$ die Definition (3.1.4) herangezogen werde -):

- α) Die 3-dimensionale Magnetostatik ([21]) charakterisiert eine reine Wirbelkraft, die den Betrag des relevanten 3-er-Geschwindigkeitsvektors invariant läßt. Dann sei hier

$$U_\mu = \mathfrak{V}_\mu \quad \text{mit} \quad L(U) = \text{const} \quad \left(\text{nur hier gilt die Einschränkung } \mu \in \{1, 2, 3\} \right)$$

und ω irgendein klassisches Feld

- β) Für die Dimensionalität $D = 4$ der Elektrodynamik werde für U_μ die Vierer-Geschwindigkeit benutzt:

$$U_\mu = V_\mu \quad \text{mit} \quad L(U) = \text{const} = \mathbf{i}$$

Sei ω hier erneut irgendein klassisches Feld.

- γ) In der ebenfalls 4-dimensionalen Quantenfeldtheorie sei U der Vierergeschwindigkeitsoperator mit den zur kovarianten Ableitung D_μ proportionalen Komponenten

$$U_\mu = \frac{D_\mu}{i m} = \frac{\partial_\mu + i g \underline{A}_\mu}{i m} \quad \left(m = \text{invariante Masse für die jeweilige Dimensionalität } D \right)$$

und dem korrespondierenden konstanten Betragsoperator $|U| = i \ast$. Sei ferner ω der Bosonenfeldoperator oder Fermionenfeldoperator.

Dann kann in allen drei Fällen α) bis γ) ein Definitionstripel

$$U := L(U) \hat{U}$$

$$\mathbb{W} := L(U) \hat{U}_\omega^{-1} \quad \left(\mathbb{W} \text{ darf gegebenenfalls auch trivial } \mathbf{1} \times \mathbf{1}\text{-matrixwertig sein} \right)$$

$$\hat{U} \hat{U}_\omega^{-1} \omega := \omega$$

derart eingeführt werden, daß beispielsweise

$$\hat{U}_\omega^{-1} = \hat{U}$$

nicht nur α) und β) abdeckt, sondern auch die operatorwertige Klein-Gordon-Gleichung unter γ), während

$$\hat{U}_\omega^{-1} = \gamma$$

die Dirac-Gleichung darstellt. Die korrespondierenden systemübergreifenden verallgemeinerten Geschwindigkeitsoperatoren sind U (reine Geschwindigkeit) und \mathbb{W} (effektive = nur für Fermionen semi-inverse Geschwindigkeit). Damit stehen sämtliche Hilfsbegriffe für die Selbstähnlichkeitsdiskussion innerhalb der Gruppe $U(1)$ zur Verfügung. U und \mathbb{W} können außerdem für spätere nichtabelsche Verallgemeinerungen benutzt werden.

Sei $x = {}^t(x_1, x_2, x_3)$ (die Transposition erzeugt den gewohnten Spaltenvektor) und $dT = dt$ für die Magnetostatik bezüglich der Dimensionalität $D = 3$ des Ortsraumes und

sei $x = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x_4 = it$ und $L(dT) = -i L(dx)$ für die Elektrodynamik bezüglich der Dimensionalität $D = 4$ der Raumzeit (wenn nicht gesondert vermerkt, ist eine Verallgemeinerung auf die $U(1)$ -Quantenfeldtheorie sowohl für Bosonen als auch für Fermionen möglich).

Dann gilt für diese Situationen sowohl 3- als auch 4-dimensional

$$\text{div } B = 0 \quad \curvearrowright \quad B = \text{rot } A$$

$$\text{rot } B = j \quad \curvearrowright \quad \text{div } j = 0 : \quad \text{Kontinuitätsgleichung}$$

$$f = j \times B : \quad \text{Kraftdichte} \quad - \quad \text{und Kraft} : \quad F = q \mathbb{W} \times B$$

$$f \cdot j = 0 \quad , \quad \{F, \mathbb{W}\}_+ = 0 : \quad \text{Orthogonalitäten infolge des Wirbelkraft-Charakters, } \rightarrow$$

\rightarrow **da** ein verschwindender Antikommutator eine auf nichtkommutierende Größen verallgemeinerte Orthogonalitätsrelation darstellt

Makroskopisch gilt unabhängig von einem Targetfeld

$$U = \mathbb{W}$$

und damit ($m = m_{\text{Ruhe}}$ für $D = 4$)

$$F \cdot U = 0$$

und (**weiterhin nur makroskopisch**; $a =$ Beschleunigung)

$$\frac{d}{dT} |\mathbf{U}|^2 = 2 \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{a} = \frac{2}{m} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{F} = 2 \frac{q}{m} \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = 0$$

$$\curvearrowright |\mathbf{U}| = \text{const}$$

Anmerkung zu $\text{div } \mathbf{B} = 0$:

Für $D = 4$ ist der Tensor-Rang von \mathbf{B} höher als ihn die Verjüngungsanweisung von \mathbf{div} benötigt:

aufgrund des nicht genuinen Urbildes (vgl. o.) liegt eine uneigentliche Differentialform vor, die streng analog zur genuinen Situation bei $D = 3$ die (für $D = 4$ ebenfalls nicht-genuine) Implikation $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ nach sich zieht. Dieser Schritt ist für die Dimensionalität 3 selbstevident. **Für $D = 4$** hingegen wirkt das Lemma von Poincaré über den Umweg der nur dann vorhandenen $\mathbf{E} \leftrightarrow \mathbf{B}$ -Dualität ('chi' wurde als Differentialoperator der zweiten Differentialform im vierdimensionalen Raum definiert):

$$0 = \text{div } \mathbf{B} = \frac{i}{2} \text{rot } \mathbf{E} \quad \curvearrowright \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0$$

$$\curvearrowright \quad \mathbf{E} = \text{chi} (i \mathbf{A}) \quad \curvearrowright \quad \mathbf{B} = -\frac{1}{2} \mathbf{1} \times (\text{chi } \mathbf{A}) = \text{rot } \mathbf{A}$$

Damit ist gezeigt worden, daß der Elektromagnetismus exakt das 4-dimensionale Pendant zur 3-dimensionalen Magnetostatik ist. Als solches ist er eine reinrassige Wirbelkraft in allen fundamentalen Mechanismen und damit nicht geeignet, symmetrische Tensoren zweiten Ranges (dem Wirbelschema entsprechen im zweiten Rang antisymmetrische Tensoren!) wie etwa den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ in mehr als nur oberflächlichen (z. B. regularisierungsbedingten fraktaldimensionalen) Darstellungen tiefgreifend und vollständig zu beschreiben. Das wird sich in den Umwegen widerspiegeln, die dann im nächsten Teilkapitel bei den Noether-Theoremen deswegen für $\Theta_{\mu\nu}$ besprochen werden müssen.

Als abschließende Bemerkung zu diesem Teilkapitel sollte noch einmal gesondert darauf hingewiesen werden, wie elementar die zur Dokumentation der physikalischen Selbstähnlichkeit zwischen Ortsraum und Raumzeit beziehungsweise Magnetostatik und Elektromagnetismus notwendigen Transformationen sind. Aufgrund eines hohen primären naturwissenschaftlichen Pragmatismus ist ihnen dennoch bisher offensichtlich keine Aufmerksamkeit geschenkt worden. Ganz erstaunlich sind auch die (am Anfang dieses Teilkapitels kurz angesprochenen) Parallelen zu Kunst und Mathematik. Die nächsten Teilkapitel sollen zeigen, wie diese schlichten aber verblüffenden Beobachtungen als intuitiver Hintergrund für wesentlich kompliziertere Fraktalraumbetrachtungen im Zuge der dimensionellen Regularisierung neu verstanden werden können.

3.2 Noether-Theoreme und allgemeinrelativistisch re-interpretierte Skalentransformationen

In diesem Teilkapitel werden einige Applikationen der Herleitung von Erhaltungssätzen aus elementarsten Struktur-Symmetrien der Wirkung nach Emmy Noether abgehandelt. Dieses Konzept erlaubt es, Allgemeine Relativitätstheorie und dimensionelle Regularisierung in der Quantenfeldtheorie (im Hinblick auf die Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors) miteinander zu verzahnen.

Wie bereits in den Kapiteln 2 und 3.1 erwähnt wurde, ist für eine Fraktalraumdarstellung beim Kontinuumsausgangspunkt für die dimensionelle Regularisierung der Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors ein Rückgriff auf die Sprache der Noether-Theoreme notwendig. Diese Spur wird in ihrer regularisierten Darstellung für die thermodynamischen Wechselbeziehungen in Kapitel 3.4 dringend benötigt. Die Applikation der Noether-Theoreme beinhaltet unangenehm komplizierte Prozeduren, die nur in einer ausreichend vollständigen Darstellung wirklich transparent werden, die in auch nur halbwegs geschlossener Form in der bisherigen Literatur offenbar nahezu vollständig fehlt. Auf der anderen Seite kann in dieser Arbeit ein roter Faden inhaltlicher Weiterentwicklung nur dann aufrechterhalten werden, wenn nur die fundamentalsten Schritte des Theoriegebäudes der Noether-Theoreme in stark verkürzter Form als Behauptungen aneinander gereiht werden.

Um beiden nicht unwichtigen Ansprüchen simultan zu genügen, wird die vollständige Behandlung (aus Penibilitätsgründen mit Minkowski-Darstellung der Raumzeit) der Noether-Theoreme in den Appendix Nr. 1 über die Spur-Anomalie ausgegliedert. Die einzige Ausnahme davon bilden spezielle fermionische Probleme, die für Teilkapitel 3.3 vorbehalten bleiben. Hier in diesem Teilkapitel soll nachstehend versucht werden, einen möglichst leicht verständlichen Hyperkurzabriß (aus Übersichtlichkeitsgründen mit euklidischer Darstellung der Raumzeit - wie auch sonst außerhalb der Appendixes) über die Rolle der Noether-Theoreme für die dimensionelle Regularisierung der Spur von $\Theta_{\mu\nu}$ und anderen grundlegenden Definitionsfragen für dieses Gebilde zu präsentieren.

Für eine D-dimensionale Wirkung des Typs

$$S = \int_{\mathbf{G}_D} \mathcal{L}(\varphi^{ab}(x^\lambda), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\lambda)) d^D x \quad (3.2.1)$$

$$\text{mit } \delta \varphi^{ab}(y^\mu) = 0 \quad \forall y \in (\partial \mathbf{G}_D)$$

als zu fordernder Randbedingung

sollen Transformationen der Raumzeitkoordinaten x_λ und der enthaltenen Felder φ^{ab} untersucht werden. Wenn die Strukturierung mancher Felder einfach genug ist, kann unter Umständen bei einer gegebenen Transformation das Bezugssystem künstlich gewählt werden. Bei einer Rotation eines Funktions-Arguments und des Funktions-Bildes relativ zueinander kann zum Beispiel in geeigneten Fällen frei entschieden werden, ob dann das Funktionsargument und/oder das Funktionsbild resultierend entsprechend rotiert werden. Eine konsequente Ausnutzung solcher Wahlfreiheiten verkürzt die theoretische Darstellung der Noether-Theoreme sehr effizient. Also kann ohne effektive Einschränkung der Allgemeinheit eine Restriktion auf solche Arten der Repräsentation vorgenommen werden, die für den betrachteten Wirkungstyp die Einhaltung der formalen Nebenbedingungen

$$\delta \partial_\mu \varphi^{ab} = \partial_\mu \delta \varphi^{ab} \quad (3.2.2)$$

und

$$d^D \tilde{x} = d^D x \quad (3.2.3)$$

bei den Transformationen ($x \rightarrow \tilde{x} = x + \delta x$ etc.) sicherstellen.

Die allgemeinste Form einer Aussage eines Noether-Theorems ist, daß dann ein erhaltener Strom

$$\delta j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} - \delta J^\mu \quad (3.2.4)$$

existiert mit

$$\partial_\mu \delta J^\mu = \delta \mathcal{L}$$

und

$$\partial_\mu \delta j^\mu = 0 \quad .$$

Für geeignete Transformationstypen existiert dann darüber hinaus eine Zerlegungsmöglichkeit à la

$$\delta j^\mu, \delta \varphi^{ab}, \delta J^\mu = F(j^\mu, \varphi^{ab}, J^\mu, \delta \lambda^\nu)$$

$$\text{mit } \partial_\mu \delta \lambda^\nu = 0 \quad \forall \mu, \nu$$

so daß sich in solchen Fällen eine nicht-infinitesimale erhaltene Größe - zum Beispiel ein Tensor - manifestiert. Mehrere solcher speziellen Fälle sollen jetzt nacheinander kurz skizziert werden.

1.) Translationen im flachen Raum

Hier gelten die Transformationsregeln

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &= \sqrt{\det(g_{\mu\nu})} = \text{const} = 1 \\ x^\mu &\rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta a^\mu, \quad a^\mu = \text{const} \\ \varphi^{ab}(x^\mu) &\rightarrow \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu) = \varphi^{ab}(x^\mu + \delta a^\mu) \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu späteren Transformationstypen ist so etwas wie eine Reinterpretation der Transformationsgesetze unter Ausnutzung der zuvor angesprochenen Interpretationsfreiheitsgrade nicht nötig, und das Noether-Theorem impliziert nun bereits die Existenz eines erhaltenen symmetrischen Energie-Impuls-Tensors

$$\curvearrowright \exists \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} = g^{\mu\nu} \mathcal{L} - g^{\mu\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\nu \varphi^{ab}} \partial_\lambda \varphi^{ab} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}$$

mit $\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0$

und $P^\mu = \int_{x_D = \text{const}} \Theta^{\mu\nu} d^{D-1} \mathcal{O}_\nu$ (kovarianter Impuls des Systems)

aber mit D-dimensional unbekanntem $\Sigma^{\mu\nu\lambda} = -\Sigma^{\mu\lambda\nu}$, welches der Symmetrisierungsforderung $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$ in 4 Dimensionen angepaßt werden muß und kann. Wird dieser letzte Anspruch fallen gelassen, so werden der Erhaltungssatz und die Impuls-Interpretation nicht berührt, und die Wahl $\Sigma^{\mu\nu\lambda} = 0$ führt dann zum wohlbekanntem kanonischen Energie-Impuls-Tensor

$$T^{\mu\nu} \stackrel{\text{i. a.}}{\neq} T^{\nu\mu}$$

2.) Rein speziellrelativistisch konstruierte Skalentransformationen

Für die Anwendung des Noether-Theorems ist es hier erforderlich, die als Dehnung oder Stauchung agierende Originalversion

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = e^{-\sigma} x^\mu$$

$$\varphi^{ab}(x^\mu) \rightarrow \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu) = \varphi^{ab}(e^{-\sigma} x^\mu)$$

der skalenbezogenen Koordinatentransformation im Zuge einer Reinterpretation in die echte Skalentransformation

$$x^\mu \rightarrow x^\mu \quad (\text{Fixierung der expliziten Repräsentation})$$

$$\varphi^{ab}(x^\mu) \rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu) = e^{-\mathcal{D}(\varphi^{ab})\sigma} \varphi^{ab}(e^{-\sigma} x^\mu)$$

zu transferieren, wobei $\mathcal{D}(\varphi^{ab})$ die kanonische Massendimension des Feldes φ^{ab} sei. Voraussetzung dafür ist die Abwesenheit von Kopplungskonstanten in der Lagrange-Dichte, die eine nichtverschwindende Einheitendimensionalität (in teilchenphysikalischen Einheiten) aufweisen. Unter diesen Umständen kann das Noether-Theorem unter **2.)** angewandt werden, und in Verbindung mit **1.)** liefert es die Spur-Identität

$$T^\mu{}_\mu = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \mathcal{D}(\varphi^{ab}) \varphi^{ab} \right) ,$$

die im Gegensatz zu dem Ergebnis unter **1.)** bei hinreichend strukturhomonogenen Lagrangedichten fraktalisierbar ist, sich aber unglücklicherweise ausgerechnet auf die weniger interessante Variante des Energie-Impuls-Tensors bezieht.

3.) Gravitative Uminterpretation

Die klassisch allgemeinrelativistische Transformation

$$\sqrt{g(x)} d^D x \longrightarrow \sqrt{\tilde{g}(\tilde{x})} d^D \tilde{x} = \sqrt{g(x)} d^D x$$

mit kohärenter Änderung von Metrik und Ereigniskoordinate ist bezogen auf das dargestellte Maß eine nutzlose Identitäts-Umformung, weil die Metrik normalerweise ausschließlich am Raumzeit-Ort ihres eigenen Urbildes definiert ist. Für die nachfolgenden allgemeinrelativistischen Applikationen des Noether-Theorems muß daher ein Kunstgriff benutzt werden. Es wird auf die Invarianz des Skalarproduktes (bezüglich des Index-Charakters der kontrahierenden Metrik: kovariante und kontravariante Darstellungen sollen disjunkt behandelt werden) verzichtet und nach der (kontrahierenden) Metrik

variiert, wobei außerdem teilweise formal $g_{\mu\nu} \neq g_{\nu\mu}$ für $\mu \neq \nu$ postuliert wird, was ebenfalls den Boden der physikalischen Realität verläßt. Dieser Trick wird erst a posteriori durch seine überzeugenden Erfolge gerechtfertigt (die detaillierten Rechnungen im Anhang können dennoch den Verdacht einer Pseudo-Verifikation als Selbstrückkopplungsartefakt der genannten Hilfspostulate entkräften).

Probleme treten nur bei Fermionen auf, auf deren Miteinbeziehung in diesem Teilkapitel 3.2 ganz verzichtet wird. In 3.3 kann dann sogar die Analyse nachgereicht werden, die in der Lage ist zu zeigen, daß und warum die Ermittlung des eigentlich interessanten Ausdrucks Θ_μ^μ selbst bei Fermionen sämtliche Variationsartefakte eliminiert.

Der angekündigte Kunstgriff liegt in folgender Fission eines physikalischen Ausdrucks in zwei physikalisch unrealistische, rein konfigurative Bestandteile:

$$\underbrace{\tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda)}_{\text{physikalisch}} = \underbrace{\tilde{g}^{\mu\nu}(x^\lambda)}_{\text{konfigurativ}} + \underbrace{\delta x^\rho \partial_\rho \tilde{g}^{\mu\nu}(x^\lambda)}_{\text{konfigurativ}}$$

Die rechte Seite folgt aus der linken durch eine Taylor-Entwicklung (im allgemeinen keine endliche Translation) um den infinitesimal von \tilde{x}^λ entfernten Ausgangspunkt x^λ herum:

$$\tilde{x}^\lambda = x^\lambda + \delta x^\lambda$$

Also ergibt sich der grundsätzliche Transformationstyp

$$\sqrt{g(x)} d^D x \longrightarrow \sqrt{g(\tilde{x})} d^D \tilde{x} = \sqrt{\tilde{g}(x)} d^D x ,$$

der die nachfolgenden Anwendungen ermöglicht.

4.) Vollständige Form der allgemeinrelativistischen Wirkung

Endziel dieser Einzelbetrachtungen ist ja ein im Zuge der Regularisierung dimensionell fraktalisierbarer Ausdruck für Θ_μ^μ . Da dieses Ziel über die rein speziellrelativistischen Ansätze **1.)** und **2.)** für die Applikation des Noether-Theorems nicht erreicht werden konnte, muß die konstante speziellrelativistische Metrik in einem Durchgangsstadium formal als variabel betrachtet werden und die Allgemeine Relativitätstheorie für die Variationsprozesse hinzugezogen werden. Im Rahmen dieses gravitativen Durchgangs soll die Übersetzung

$$\varphi^{ab}(x^\lambda) \left| \begin{array}{l} a \rightarrow \mu \\ b \rightarrow \nu \end{array} \right. = g^{\mu\nu}(x^\lambda)$$

gewählt werden, die die Metrik als variables Feld betrachtet und dabei berücksichtigt, daß die äußeren Indizes a und b dann in Raumzeit-Indizes μ und ν übergehen. Gerade wegen dieses Übergangs wurde ein splitting in zwei äußere Indizes gewählt, um die Umgestaltungen formal transparent zu halten.

Die konfigurative Koordinatentransformation

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$g^{\mu\nu}(x^\lambda) \rightarrow g^{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda) = g^{\mu\nu}(x^\lambda + \delta x^\lambda)$$

erfüllt nicht die eingangs verbindlich gemachte Bedingung (3.2.2) in der jetzt aktuellen Form

$$\delta \partial_\rho g^{\mu\nu} = \partial_\rho \delta g^{\mu\nu} \quad .$$

Die zweite Bedingung (3.2.3) bezüglich der Wechselbeziehung $d^D x \leftrightarrow d^D \tilde{x}$ hingegen wird jetzt infolge der Absorption von \sqrt{g} für das Noether-Theorem irrelevant. Aufgrund der Verletzung der ersten Bedingung muß dennoch nichtsdestotrotz reinterpretiert werden, womit alle Schwierigkeiten aber tatsächlich beseitigt werden können (in der Reinterpretation transformiert sich explizites x nicht):

$$x^\mu \rightarrow x^\mu$$

$$\varphi^{ab}(x^\lambda) \hat{=} g^{\mu\nu}(x^\lambda) \rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(x^\lambda) \hat{=} g^{\mu\nu}(x^\lambda) + \delta g^{\mu\nu}(x^\lambda)$$

Das Variationsprinzip lautet

$$\mathbf{S}^{\text{gesamt}} = \mathbf{S}^{\text{geom(etr.)}} + \mathbf{S}^{\text{materie}} = \text{extremum} !$$

Die Anwendung des Noether-Theorems führt auf einen kombinierten Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}^{\text{gesamt}}$, dessen Erhaltung dadurch realisiert wird, daß alle seine Komponenten nicht nur konstant, sondern Null sind (der Grund dafür ist mathematisch äquivalent zum darauf folgenden Umformungsschritt - da der Materieanteil für den eigentlichen Energie-Impuls-Tensor relevant ist, entfalle eine entsprechende zusätzliche Superskript-Kennzeichnung):

$$\curvearrowright \Theta_{\mu\nu}^{\text{gesamt}} = \Theta_{\mu\nu}^{\text{geom}} + \Theta_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}^{\text{gesamt}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$$

Diese Darstellung kann in die Einsteinschen Feldgleichungen

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = - \frac{8 \pi G}{\sqrt{g}} \Theta_{\mu\nu}$$

umgestaltet werden, die besagen, daß die D-dimensionale Raumzeit zwar einerseits durch den links stehenden Ausdruck verzerrt wird, andererseits aber

aufgrund der im Mittelpart spezifizierten Torsionsfreiheit stets (flachraumgeometrische Implikationen)

$$\sum_{k=1}^D k = \frac{D(D+1)}{2} \text{-dimensional lokal flach und}$$

$$1 + \sum_{l=1}^D (l+2)^2 = \left(\frac{1}{3}D^3 + \frac{5}{2}D^2 + \frac{37}{6}D + 1\right) \text{-dimensional global flach in}$$

einen höheren quasi-spezialrelativistischen Hyper-Raum eingebettet werden kann ([7], [19], [47]).

Im Gegensatz zu **1.)** wird also jetzt tatsächlich $\Theta_{\mu\nu}$ und nicht mehr der kanonische Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ explizit spezifiziert.

$$\cap \Theta_{\mu}^{\mu} = \frac{D-2}{16\pi G} R \sqrt{g} \xrightarrow{g_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}} \equiv 0$$

als D-dimensionale Konsequenz und Verallgemeinerung der Einsteinschen Feldgleichungen - die Proportionalität zur Lagrangedichte der Allgemeinen Relativitätstheorie folgt erst a posteriori.

Hinsichtlich der Spur-Anomalie relativ zu Θ_{μ}^{μ} ist der zum Schluß vorgenommene spezialrelativistische Übergang leider jedoch zu abrupt, und konsequenterweise wird noch ein weiteres Noether-Theorem benötigt, nämlich das allgemeinrelativistische Analogon zur Skalentransformation **2.)**.

5.) Der Materieanteil der allgemeinrelativistischen Wirkung

An und für sich werden hier die gleichen Transformationen wie in **4.)** betrachtet, aber hinsichtlich des Variationsprinzips

$$S^{\text{materie}} = \text{minimum!}$$

Nur für die Summe beider Wirkungsanteile war die bloße Extremalbedingung hinreichend. Infolge der Minimierungsforderung können jetzt die $\delta g^{\mu\nu}$ nicht mehr als unabhängig voneinander klassifiziert werden. Die Minimierung der Wirkung macht nämlich eine Reduktion auf die D Freiheitsgrade der untersuchten D-dimensionalen Raumzeit notwendig:

$$\delta g^{\mu\nu}(x^{\lambda}) = \delta x^{\mu;\nu} + \delta x^{\nu;\mu}$$

Das Noether-Theorem führt hier auf

$$\left(\frac{\Theta_{\mu\nu}}{\sqrt{g}}\right)^{;\nu} = 0$$

und für den Spezialfall $\delta x^\mu \propto x^\mu$ auf eine neu zugänglich werdende Spuridentität, die aus der δx^μ -unabhängigen noch vollständig allgemeinrelativistischen Neben-Implikationskette des Noether-Theorems (ohne Integral funktioniert die Kettenregel bei der Funktionalableitung im allgemeinrelativistischen Szenario im allgemeinen nicht, wobei dann auch Abhängigkeiten von höheren Ableitungen der Metrik nicht mehr durch den Satz von Gauß weggefiltert werden)

$$\partial_\nu (\Theta_\mu^\nu \delta x^\mu) = \frac{\Theta_{\mu\nu}}{2} \delta g^{\mu\nu} = - \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} \stackrel{\text{i. a.}}{\neq} -\delta \mathcal{L}$$

unmittelbar abgelesen werden kann und im Gegensatz zu 4.) einen nichttrivialen $g_{\mu\nu} \rightarrow \delta_{\mu\nu}$ -Grenzwert besitzt, der das Θ_μ^μ -Analogon zu der kanonischen T_μ^μ -Identität in 2.) darstellt - so wie die $\Theta_{\mu\nu}$ -Definition in 4.) das allgemeinrelativistische Analogon zu der $T_{\mu\nu}$ -Spezifikation in 1.) war.

Mit den bisherigen Argumentationsschritten in den Punkten 1.) bis 5.) konnte die Notwendigkeit eines allgemeinrelativistischen Durchgangs bei den Noether-Theoremen demonstriert werden, der genau dann relevant wird, wenn das D-dimensionale Konstruktionsprinzip des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors im Mittelpunkt der Betrachtungen steht.

6.) Applikation des allgemeinrelativistischen Durchgangs für Skalentransformationen

In 2.) wurde gezeigt, daß die Skalentransformation

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow x^\mu \\ \varphi^{ab}(x^\mu) &\rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu) = e^{-\mathcal{D}(\varphi^{ab})\sigma} \varphi^{ab}(e^{-\sigma} x^\mu) \end{aligned}$$

aus der reinen Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \tilde{x}^\mu = e^{-\sigma} x^\mu \\ \varphi^{ab}(x^\mu) &\rightarrow \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu) = \varphi^{ab}(e^{-\sigma} x^\mu) \end{aligned}$$

hervorgeht, wenn es keine dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten gibt, die sich in der Lagrange-Dichte trotz $\mathcal{D} \neq 0$ nicht mittransformieren würden.

Nun ist es so, daß für geeignete Systeme die Möglichkeit existiert, die Rollen der Felder φ^{ab} und der (inversen) Metrik $g^{\mu\nu}$ in dem Sinne perfekt zu vertauschen, daß die Felder bei den Transformationen als Pseudo-Konstanten festgehalten werden und daß die Metrik in $\varphi^{ab}(x^\lambda)$ umbenannt und als

das entsprechende Set von Variationsparametern reinterpretiert wird (einzige kleine Einschränkung: die konfigurative Variation erzwingt $\tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\lambda) \mapsto \tilde{\varphi}^{ab}(x^\lambda)$ für die Metrik):

$$\begin{aligned} x^\mu &\longrightarrow x^\mu \\ \varphi^{ab}(x^\lambda) \Big|_{b \rightarrow \nu}^{a \rightarrow \mu} = g^{\mu\nu}(x^\lambda) &\longrightarrow \\ \longrightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(x^\lambda) \Big|_{b \rightarrow \nu}^{a \rightarrow \mu} = \tilde{g}^{\mu\nu}(x^\lambda) = g^{\mu\nu}(x^\lambda) + \delta g^{\mu\nu}(x^\lambda) &, \end{aligned}$$

wobei die Übersetzungsregeln (infolge der Verletzung der Invarianz des Skalarproduktes - siehe Schritt **3.**) eine anomale kanonische Massendimension bei der Metrik erzwingen

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x^\lambda) = e^{-\mathcal{D}(g^{\mu\nu})\sigma} g^{\mu\nu}(x^\lambda) = e^{+2\sigma} g^{\mu\nu}(x^\lambda)$$

neben

$$\tilde{x}^\mu = e^{-\sigma} x^\mu$$

Infinitesimal ($\sigma \rightarrow \delta\sigma$) kann dann für die Standardversion einer U(1)/SU(N)-Lagrange-Dichte (formal: nichtabelsche Notation; zur Zusammenfassung beider Domänen vgl. 4.2), die jetzt zunächst allgemeinrelativistisch auszudrücken ist,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g^{\rho\xi} g^{\sigma\eta} \sqrt{g} \text{ trace}(F_{\rho\sigma} F_{\xi\eta})$$

aus den Erkenntnissen der vorangehenden Paragraphen allgemeinrelativistisch (bereits aus **4.**)

$$\Theta_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = \left(\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\rho\xi} g^{\sigma\eta} + g_\mu^\rho g^{\sigma\xi} g_\nu^\eta \right) \sqrt{g} \text{ trace}(F_{\rho\sigma} F_{\xi\eta}) \quad (3.2.5)$$

$$\text{mit } \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g^{\mu\nu}}$$

und speziellrelativistisch (erst aus **5.**)

$$\partial_\nu (\Theta_\mu^\nu x^\mu) \delta\sigma = \Theta_\mu^\mu \delta\sigma = 2 g^{\mu\nu} \delta\sigma \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} \quad (3.2.6)$$

gefolgert werden. Die speziellrelativistische Identität (3.2.6) kann Gleichsetzungen benutzen, die noch in der allgemeinrelativistischen Darstellung unter **5.**) im Allgemeinfeld nicht möglich waren, und ist deshalb sehr wichtig, weil die speziellrelativistische Reinterpretation der allgemeinrelativistischen D-dimensional expliziten $\Theta_{\mu\nu}$ -Spezifikation (3.2.5) für die Spur einen Ausdruck liefert, der zwar als D-dimensionales Korollar der Noether-Theoreme angesehen aber im Rahmen der Quantenfeldtheorie störungstheoretisch nur in niedrigster Ordnung einfach renormiert werden kann

$$\Theta_\mu^\mu = \frac{D-4}{4} F_{\mu\nu}^A F_A^{\mu\nu} = \frac{D-4}{4} \left(\frac{\sqrt{Z_3}}{g_r} F_{\mu\nu}^{AR} \right)^2$$

Für die masselose QED ist dieser Ausdruck immerhin in Anwesenheit masseloser Fermionen in führender Ordnung korrekt und liefert die für die Regularisierung erforderliche dimensionelle Fraktalisierung

$$\lim_{D \rightarrow 4} \Theta_\mu^\mu = \frac{1}{e_r} (F_{\mu\nu}^R)^2 \lim_{D \rightarrow 4} \left(\frac{D-4}{4} (\delta_3 + 1) \right) = \frac{(F_{\mu\nu}^R)^2}{24 \pi^2} .$$

Doch es geht noch besser. Führt man beim speziellrelativistischen Ausdruck mit der Divergenz des Dilatationsstroms $\partial_\nu (\Theta_\mu^\nu x^\mu)$ (3.2.6) eine Renormierung der Eichkopplung $g^* \rightarrow \bar{g}$ (Symbole für die jeweils allgemeinste Situation, vgl. a. u.) durch, so wird man hier beim reinen Eichsektor mit der Beobachtung konfrontiert, daß diese Renormierung der einzige Beitrag zu $\delta\mathcal{L}$ ist, da klassisch Skaleninvarianz herrscht. Dies impliziert (der Abgleich zwischen benutzter und physikalischer metrischer Variation liefert ein negatives Vorzeichen)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{g}} \delta\bar{g} \operatorname{sgn} \frac{\delta g_{\text{configurative}}^{\mu\mu}}{\delta g_{\text{real}}^{\mu\mu}} = - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{g}} \delta\bar{g} = \\ &= - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{g}} \beta(\bar{g}) \frac{e^{\mathcal{D}(M)\delta\sigma} M - M}{M} = - \beta(\bar{g}) \delta\sigma \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{g}} + \mathcal{O}(\delta^2) \end{aligned}$$

bezüglich der Renormierungsskala M und der damit verknüpften Renormierungs- β -Funktion $\beta(\bar{g})$. Also folgt für die gegebene Form der Lagrange-Dichte

$$\Theta_\mu^\mu \delta\sigma = \delta\mathcal{L} = \frac{2\beta(\bar{g})}{\bar{g}} \mathcal{L}(\bar{g}) \delta\sigma$$

mit dem dimensionell regularisierten Ergebnis

$$\lim_{D \rightarrow 4} \Theta_\mu^\mu = \frac{2\beta(\bar{g})}{\bar{g}} \mathcal{L}(\bar{g}) \quad (3.2.7),$$

das für eine beliebig hohe \bar{g} -Entwicklung in $\beta(\bar{g})$ maßgeblich ist.

Für die Herleitung dieser Ergebnisse ist der Durchgang durch die Allgemeine Relativitätstheorie von zentraler Bedeutung, da diese Theorie in der Cartan'schen Darstellung die Ankopplung untereinander symmetrischer Indizes oder Gruppen von Indizes an zwei verschiedene Arten von Basen illu-

miniert (also fundierter erklärt, was beim allgemeinrelativistischen Durchgang passiert) und damit genau das kann, was beim Elektromagnetismus (und seinen nichtabelschen Verallgemeinerungen) aufgrund der Selbstähnlichkeit zu den reinrassigen Wirbel-Strukturen bei der 3-dimensionalen Magnetostatik total ausgeschlossen sein muß: symmetrische Tensoren wie zum Beispiel $\Theta_{\mu\nu}$ D-dimensional fraktalisierbar zu machen.

3.3 Der Einfluß der Raumzeit-Metrik auf fermionische Variations-Prozesse

Fermionen verhalten sich wesentlich subtiler als Bosonen. Dieser Abschnitt soll als indirekter Anhang zu den Kapiteln 3.1 und 3.2 kurz demonstrieren, wie mächtig metrische Variationsverfahren und Kovarianzprinzipien auch in anderen physikalischen Domänen sein können. Da jedoch die Einzelkomponenten-Darstellung von $\Theta_{\mu\nu}$ diesen Prinzipien nicht ausreichend genug unterworfen ist, lohnt ein näheres Eingehen auf Fermionen in dieser Arbeit nicht.

Als Ergänzung zu der Selbstähnlichkeits-Diskussion in Kapitel 3.1 soll hier folgender Aspekt kurz erwähnt werden, der anschließend tensoriell umformuliert wird. Sowohl für $D = 3$ ($B^2 = \langle \vec{B}_{\mathbf{III}}, \vec{B}_{\mathbf{III}} \rangle$) als auch für $D = 4$ ($B^2 = B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ bezüglich $\vec{B}_{\mathbf{IV}} = B^{\rho\sigma} \overleftrightarrow{e}_\rho \hat{e}_\sigma$) gilt nach dem Satz von Gauß

$$\int B^2 d^D x = \int d^D x (\mathbf{rot} A)^2 = \int d^D x \langle A, \mathbf{rot} \mathbf{rot} A \rangle + \oint \det(d^{D-1} \circ, A, B) = \int A \cdot j d^D x + 0 \quad ,$$

weil die Felder im Unendlichen verschwinden müssen, wenn die Aussage über eine Fernwirkungskraft physikalisch überhaupt kontrollierbar sein soll. Für den reinen Eichsektor einer U(1)-Theorie (wähle jetzt $D = 4$) wie zum Beispiel der QED entfällt j , so daß das rückwärtige Einsetzen der Bewegungsgleichungen, die aus der Variation der Lagrangedichte

$$\mathcal{L}^{\text{gauge}} = \frac{1}{4} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

nach den Eichfeldern folgen, in die Wirkung über die Lagrangedichte diese Wirkung annulliert:

$$\begin{aligned}
S^{\text{gauge}} &= \int d^4x \mathcal{L}^{\text{gauge}} = \int d^4x \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\
&= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^\mu \partial^\nu - \partial^2 g^{\mu\nu}) A_\nu(x) \longrightarrow 0 \quad \text{WENN} \\
&(\partial^\mu \partial^\nu - \partial^2 g^{\mu\nu}) A_\nu(x) = j^\mu = 0 \quad \text{INGESETZT WIRD}
\end{aligned}$$

Diese Panne passiert zwar im allgemeinen nicht in dieser fatalen Form bei den nichtabelschen SU(N)-Theorien, ist dafür aber bei Fermionen in einer noch wesentlich härteren Variante dispositionsmäßig vorprogrammiert. Aus

$$\mathcal{L}^{\text{fermi}} = \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi$$

folgt durch analoges Variieren nach den Fermionen-Feldern die Dirac-Gleichung

$$(\not{D} + m) \psi = 0$$

Das rückwärtige Einsetzen dieser Gleichung in ihre erzeugende Lagrangedichte erzeugt bereits schon einen Ausdruck, der Null ist. Daher darf die Dirac-Gleichung selbst im SU(N)-Fall bei Variationsprozessen nicht als Zwischenidentität verwendet werden, während die Maxwell-Gleichungen auf der Ebene der Lagrange-Dichte grundsätzlich harmlos und daher verwendungsfähig sind. An und für sich sollte dieser kleine gewisse Unterschied resultierend dennoch keine maßgebliche Rolle bei Variationsprozessen spielen - es sei denn, es liegt simultan noch ein zweites Problem vor, dessen Bewältigungsstrategien mit dieser kleinen Panne kollidieren.

Die allgemeinrelativistische Reinterpretation der auf Fermionen verallgemeinerten speziellrelativistischen Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L}^{(\text{STR})} = \mathcal{L}^{\text{gauge}} + \mathcal{L}^{\text{fermi}} \quad (3.3.1a),$$

$$\mathcal{L}^{\text{gauge}} = \frac{1}{2} \text{trace } F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \quad (3.3.1b)$$

$$\mathcal{L}^{\text{fermi}} = \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi \quad (3.3.1c)$$

wäre

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(\text{GTR})} &= \left(\bar{\psi} \left(\frac{1}{2} g^{\rho\xi} g^{\sigma\eta} D_\rho \gamma_\sigma \{ \gamma_\xi, \gamma_\eta \}_+ + \right. \right. \\
&\left. \left. + \sqrt{g}^{\omega-1} m \right) \psi + \frac{1}{4} g^{\rho\xi} g^{\sigma\eta} F_{\rho\sigma}^A F_{\xi\eta}^B \delta_{AB} \right) \sqrt{g} \quad (3.3.2)
\end{aligned}$$

Eine genuin allgemeinrelativistische Form für $\mathcal{L}^{(\text{GTR})}$ liegt zwar nur für $\omega = 1$ vor, während die Voraussetzungen für das Noether-Theorem im allgemeinen nur für $m = 0$ erfüllt sind. Die (relativistisch invariante = Ruhe-)Masse ist mit $\mathcal{D}(m) = 1$ eine dimensionsbehaftete Kopplungskonstante, deren störender Einfluß durch den Artefaktexponenten $\omega = 1 - \frac{3}{D}$

bei der Wurzel aus der Determinante der Metrik erfolgreich kompensiert werden kann. $\omega = 1 - \frac{3}{D}$ liefert allgemeinrelativistisch zwar ein albernes und unphysikalisches Szenario, das sich aber bei den Variationsprozessen harmlos verhält und im anschließenden speziellrelativistischen Limes $\sqrt{g} \rightarrow 1$ seine unphysikalische Struktur sogar abstreift. Der künstlich eingeführte Antikommutator der γ -Matrizen erhöht die Potenz der involvierten (inversen) Metrik, so daß die allgemeinrelativistische Variation

$$\Theta_{\mu\nu} = -2 \frac{\delta \mathcal{L}^{(\text{GTR})}}{\delta g^{\mu\nu}}$$

nach Verfahren 4.) in Abschnitt 3.2 einen möglichst realitätsnahen (diese Konditionierung wird gleich näher erklärt) Ausdruck für $\Theta_{\mu\nu}$ liefert.

Diese Forderung konnte für den reinen Eichsektor in 3.2 bereits erfolgreich erfüllt werden und liefert für den fermionischen Anteil die Struktur

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu}^{\text{fermi}} &\stackrel{!}{=} \left(-2 \bar{\psi} (D_\mu \gamma_\nu + D_\nu \gamma_\mu) \psi - \right. \\ &\left. - \frac{3}{D} g_{\mu\nu} m \bar{\psi} \psi + g_{\mu\nu} \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi \right) \sqrt{g} \quad , \end{aligned}$$

die dem quantenfeldtheoretisch etablierten Ausdruck

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{fermi}} = \left(-\frac{1}{2} \bar{\psi} (D_\mu \gamma_\nu + D_\nu \gamma_\mu) \psi + g_{\mu\nu} \bar{\psi} (\not{D} + m) \psi \right) \sqrt{g}$$

leider nur strukturell ähnlich ist (ohne den Einschub des γ -Matrizen-Antikommutators in der Spezifikation von $\mathcal{L}^{(\text{GTR})}$ könnte selbst dieses Ziel nicht erreicht werden).

Ein kleines Wunder passiert jedoch, wenn von beiden konkurrierenden Ausdrücken die Spur genommen wird, was eine vollständige (auf sämtliche D_μ 's wirkende) Applikation der Dirac-Gleichung ermöglicht: beide Ausdrücke liefern übereinstimmend

$$\left(\Theta_\mu^\mu \right)^{\text{fermi}} = m \bar{\psi} \psi \quad .$$

Die Erklärung dafür ist einfach und faszinierend zugleich. Beim Variationsverfahren mußte - wie oben in 3.2 bereits schon erwähnt - eine unphysikalische Entkopplung der Metrik

$$g_{\mu\nu} \neq g_{\nu\mu} \quad \forall \mu \neq \nu$$

in Kauf genommen werden, die im Übergangsstadium für $(g^{\rho\xi} g^{\sigma\eta})$ einen Variablenanzahl-Fehlfaktor von bis zu 2^2 liefert. Das Verfahren kann bei

den Eichfeldern durch einen vollständigen kovarianten Durchgang gerechtfertigt werden, der dafür sensible Indizes wegkontrahiert, während bei Fermionen $\mathcal{L}^{\text{fermi}} \neq 0$ benutzt werden muß, was gemäß der vorangehenden Diskussion eine Auswertungssperre für die Dirac-Gleichung impliziert. Die operatorwertige Dirac-Gleichung ist aber nichts anderes als ein quantenfeldtheoretisches Pendant zur makroskopisch als $V_\mu V^\mu = (ic)^2$ bekannten D-Geschwindigkeits-Kovarianz (siehe Abschnitt 3.1; $D \equiv 4$ reproduziert regularisierungsfrei die Spezielle Relativitätstheorie). Ein solches Prinzip wird aber für einen vollständigen kovarianten Durchgang zur Elimination metrik-generierter Artefakte benötigt.

Die Auswertung von $(\not{D} + m)\psi = 0$ kann also bei $\Theta_{\mu\nu}^{\text{fermi}}$ nicht mehr konsequent genug durchgeführt werden - es sei denn, man betrachtet die Spur $\Theta_\mu^\mu \Big|_{\Theta_{\mu\nu} = \text{fermi}}$ und entfernt von dieser restlos $\bar{\psi} \not{D} \psi$ über die Dirac-Gleichung.

Diese Betrachtungen demonstrieren ein weiteres Mal die tiefgreifenden Verflechtungen zwischen rein raumzeitlichen Größen wie unter anderem der Metrik und physikalischen Operatoren wie Θ_μ^μ , die ihrerseits wiederum im Zuge der Regularisierung dimensionell fraktalisiert werden müssen. Θ_μ^μ ist außerdem eine thermodynamisch motivierbare Größe, und das nächste Teilkapitel soll eine Wechselbeziehung zwischen dimensioneller Regularisierung und thermodynamischer Reinterpretation etablieren.

3.4 Das thermodynamische Bindeglied zwischen dimensioneller Regularisierung und Gitter-Summenregeln

Das vorliegende Teilkapitel stellt einen Zusammenhang zwischen Thermodynamik, Allgemeiner Relativitätstheorie und Gitterphysik her. Es rundet damit die Darstellung von Anknüpfungspunkten aus der Kontinuumsphysik für die Gitter-Physik in Bezug auf die Gitter-Übertragung des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors ab.

In diesem Abschnitt sowie in seinen Zitaten (in Kapitel 2) wird mit totaleuklidisierten (- oder volleuklidisierten, Erklärung umseitig) Größen gerechnet. Bisher und auch in allen nachfolgenden Kapiteln (Ausnahme: Anhang Nr. 1 **Spur-Anomalie** benutzt den Minkowski-Raum) dieser Arbeit wurde und

wird dagegen einfach euklidisch (- oder "normal" euklidisch, Erklärung bzw. Definition sofort) gerechnet. Das heißt, daß die (jetzt hier mit einem M gekennzeichneten) Minkowski-Raum-Größen derart imaginär gewichtet werden, daß speziellrelativistische Werte für die Metrik $g_{\mu\nu}$ zu Kronecker-Deltas $\delta_{\mu\nu}$ avancieren (im Gegensatz zur nachfolgend spezifizierten volleuklidisierten oder echt euklidischen Darstellung handelt es sich also lediglich um die bloße Übersetzung des Minkowski-Raums in (ict) -Metrik), wobei die Unterscheidung von kovarianten und kontravarianten Indizes dann trivial und ineffektiv wird. In dieser Arbeit wird dieser Unterschied ausgenutzt, um die Einsteinsche Summenkonvention in ihrer klassischen Form auch in der euklidischen Darstellung aufrechtzuerhalten: die implizite Verjüngungsanweisung bezieht sich im Gegensatz zu manchen anderen Darstellungen auch dann immer noch jeweils auf einen unteren und einen gleichnamigen oberen Index.

In der volleuklidisierten Darstellung, die jetzt und hier für die thermodynamischen Identitäten benutzt werden soll, werden die imaginären Vorfaktoren der euklidischen Darstellung durch die entsprechenden Größen formal absorbiert und die neu entstehenden Produktgrößen sogar teilweise als pseudo-reell reinterpretiert. Es verschwinden also die imaginären Einheiten, ohne daß der Kronecker-Delta-Tensor der Flachraum-Metrik weicht. Entscheidende Beispiele in **SI**- bzw. **CGS**-Einheiten sind

a) die Zeit: $t \equiv t^M \longrightarrow$ holomorphe Fortsetzung $ict^M = x_4 \longrightarrow$
 \longrightarrow quasi-reelle thermodynamische Reinterpretation " $x_4 \in \mathbb{R}$ " , $x_4 = \frac{c \hbar}{k_B T} := \beta$
 ($T =$ Temperatur)

b) Elektrizität: $i \vec{E}^M := \vec{E} \longrightarrow$ durch quasi-reelle Reinterpretation totaleuklidisiert

c) aber (Magnetismus): $\vec{B}^M = \vec{B}$,
 weil \vec{E} gerade umgekehrt redefiniert wird - die Zuordnung, daß gerade \vec{B} keine imaginäre Einheit absorbieren muß, steht übrigens auch in Einklang mit den *Fundamental* \longleftrightarrow *Sekundär*-Einstufungen des magnetostatischen Selbstähnlichkeitsschemas

Zum direkten Vergleich der totaleuklidisierten Größen \vec{E} und \vec{B} müßte \vec{E} in **SI** (**s**ystème **i**nternational d'unités) noch mit $c \epsilon_0$ (bzw. $\frac{c}{4\pi}$ in **CGS**) multipliziert werden, was das Schema unübersichtlich macht. Die bessere Lösung sind die auch in den anderen Teilen dieser Arbeit benutzten teilchenphysikalischen Einheiten

$c = \hbar = k_B = 1$ und auf sie abgestimmte Größennormierungen (4π -Faktoren aus CGS werden wegdefiniert). Dann gilt

$$x_4 = i c t \quad \longrightarrow \quad x_4 = \frac{1}{T}$$

(analytisch fortgesetzte Zeit mutiert zu inverser Temperatur - den Rahmen dafür liefert die Quantenfeldtheorie bei endlicher physikalischer Temperatur T_{ref} , so daß die reinterpretierte Integrationskala für die Wirkung in der vierten Dimension von $T_{max} = +\infty$ bis $T_{min} = T_{ref}$ läuft ([22],[24])).

Die richtungsweisenden Impulse für eine thermodynamische Assoziation von dimensioneller Regularisierung und diskreten Gittergrößen gehen von einer Untersuchung und Verbesserung der Michael'schen Summenregeln auf dem volleuklidisierten vierdimensionalen Raumzeit-Gitter aus ([49]). Sei dort

$$Z = \int \mathcal{D}U e^{-S_G}$$

die Zustandssumme des reinen Eichsektors,

$$\hat{\beta} = \frac{2N}{g_o^2}$$

die invers quadratische Kopplung im Kontrast zum Gitter-Analogon der Renormierungs- β -Funktion $\beta_L(g_o)$ (und zu der inversen Temperaturgröße β von vorhin),

a

der räumliche (und geometrisch einheitliche) Gitterabstand,

a_τ

der zeitliche (ebenfalls entlang des Gitters konstante) Gitterabstand (beim symmetrischen Gitter gilt dann auch $a = a_\tau$),

$$\kappa = g_o a^2$$

die mit dem Quadrat der Gitterkonstante dimensionierte Gitterkopplung,

$$\square_\tau := \sum_{\mu \neq 4} \text{trace} \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2} (U_{\mu 4}(x) + U_{\mu 4}^\dagger(x)) \right]$$

der temporale und

$$\square_s := \sum_{i > j} \text{trace} \left[\mathbf{1} - \frac{1}{2} (U_{ij}(x) + U_{ij}^\dagger(x)) \right]$$

der rein räumliche Anteil der Eichplaketten. Seien im Hinblick auf die zu übernehmende Wirkung ferner

$$\mathcal{P}'_\tau = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}} \square_\tau \Big|_{x_4 = 0}$$

und

$$\mathcal{P}'_s = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}} \square_s \Big|_{x_4 = 0}$$

temporal fixierte Tessellationssegmente,

$$\xi = \frac{a_\tau}{a}$$

der (invers definierte) Asymmetrieparameter eines 3+1-Gitters,

$$\hat{\beta}_s = \frac{2N}{[g_s(g_o(a), \xi)]^2} \xi$$

und

$$\hat{\beta}_\tau = \frac{2N}{[g_\tau(g_o(a), \xi)]^2} \xi^{-1}$$

unter Beachtung der Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} \frac{\partial^l g_\sigma}{\partial a^l} = \frac{\partial^l g_o(a)}{\partial a^l} \quad \forall l \in \{0, 1\} \quad \forall \sigma \in \{s, \tau\}$$

asymmetrisch skalierte Generalisierungen für $\hat{\beta}$ (diese asymmetrischen Profile sind auf einem 3+1-Gitter keineswegs notwendig, aber fungieren als sehr nützliche Werkzeuge für subtilere Betrachtungen). Dann ist

$$\mathcal{S}_G = \frac{1}{N} \sum_x (\hat{\beta}_\tau \square_\tau + \hat{\beta}_s \square_s)$$

(bzw. $\mathcal{S}_G = \frac{\hat{\beta}}{N} \sum_x (\square_\tau + \square_s)$ für $\xi = 1$)

die vollständige Eich-Wirkung auf einem 3+1-Gitter (resp. 4-Gitter) und

$$\mathcal{S}_\xi = \hat{T} (\hat{\beta}_\tau \mathcal{P}'_\tau + \hat{\beta}_s \mathcal{P}'_s)$$

ihr quasistatisches Analogon auf dem 3+1-Gitter sowie

$$\mathcal{S} := \lim_{\xi \rightarrow 1} \mathcal{S}_\xi$$

wiederum dessen Pendant auf dem symmetrischen oder a posteriori symmetrisch gemachten Gitter.

Für Renormierungsbetrachtungen auf dem Gitter soll der Gitterabstand als Renormierungsskala gewählt werden, und das Gitter-Analogon zur Renormierungs- β -Funktion im Kontinuum soll aus Kompatibilitätsgründen im Gegensatz zu seinem Vorbild ein negatives Vorzeichen erhalten:

$$\beta_L(g_o) = -a \frac{\partial g_o}{\partial a}$$

Es gilt

$$\beta_L(g_o) = -b_o g_o^3 - b_1 g_o^5 + \dots$$

mit $b_o = \frac{11N}{48\pi^2}$ für SU(N), $b_o = -\frac{1}{12\pi^2}$ für U(1)-QED

$$b_1 = \frac{34}{3} \left(\frac{N}{16\pi^2} \right)^2 \text{ für SU(N) etc.}$$

In weak coupling-Näherung gilt also

$$\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \ln a} = \frac{2 \hat{\beta}(g_o(a)) \beta_L(g_o(a))}{g_o(a)} \approx -4N b_o \quad (3.4.1)$$

Weitere weak coupling-Identitäten sind von F. Karsch ([27]) ermittelt worden:

$$\xi^{+1} \hat{\beta}_\tau(g_o(a), \xi) \approx \hat{\beta}(g_o(a)) + 2N c_\tau(\xi) + \mathcal{O}(\hat{\beta}^{-1}) \quad (3.4.2)$$

$$\xi^{-1} \hat{\beta}_s(g_o(a), \xi) \approx \hat{\beta}(g_o(a)) + 2N c_s(\xi) + \mathcal{O}(\hat{\beta}^{-1}) \quad (3.4.3)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial \xi} (\hat{\beta}_s + \hat{\beta}_\tau) \right]_{\xi=1}^{\xi=1} \approx 2N b_o \quad (3.4.4)$$

Die weak coupling-Beziehung (3.4.4) macht eine Aussage gerade über diejenige Linearkombination von $\hat{\beta}_s$ und $\hat{\beta}_\tau$, für deren ξ -Ableitung die Kombination von (3.4.2) und (3.4.3) infolge einer Kompensation der führenden Näherungsordnungen keine sinnvolle Aussage mehr machen könnte. Führt man

$$\eta_\pm := \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \hat{\beta}_\tau}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \pm \left(\frac{\partial \hat{\beta}_s}{\partial \xi} \right)_{\xi=1} \right]$$

ein, so ergeben sich die anschließend verwendeten Kombinationen

$$\eta_+ \frac{\partial \ln a}{\partial \hat{\beta}} \approx -\frac{1}{4} \quad (3.4.1) \wedge (3.4.4)$$

und

$$\eta_- \approx \hat{\beta} \quad (3.4.2) \wedge (3.4.3)$$

Zur Untersuchung der Summenregeln betrachte man nun das Potential

$$\hat{V}(\hat{R}, \hat{\beta}) := -\lim_{\hat{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{\hat{T}} \ln \langle \Omega | W(\hat{R}, \hat{T}) | \Omega \rangle \quad ,$$

welches den Wilson-Loop-Operator $W = W(\hat{R}, \hat{T})$ enthält und von \hat{R} -unabhängigen Selbstenergie-Beiträgen seitens des Quark-Antiquark-Paares mit

(dimensionslosem) Abstand \hat{R} befreit werde. Die Summenregeln gelten in Kontinuumsnähe, so daß dort gefordert werden kann, daß

$$\underbrace{\frac{\xi}{a} \hat{V}(\hat{R} = \frac{R}{a}, \hat{\beta}_\tau(a, \xi), \hat{\beta}_s(a, \xi))}_{\text{lattice}} \xrightarrow[\xi \rightarrow 1]{a \rightarrow 0} \underbrace{V(R)}_{\text{continuum}}$$

Die Teilforderung, daß das Potential für verschwindenden Gitterabstand artefaktfrei sei

$$\partial_a \left(\frac{\xi}{a} \hat{V} \right) \longrightarrow \partial_a V = 0 \quad ,$$

führt auf die Callan-Symanzik-Gleichung des Potentials und wird als Wirkungs-Summenregel bezeichnet.

Das ξ -Pendant dazu

$$\partial_\xi \left(\frac{\xi}{a} \hat{V} \right) \longrightarrow \partial_\xi V = 0$$

wird als Energie-Summenregel aufgefaßt.

Führt man für einen Operator $\mathfrak{O}\mathfrak{p}$ den Korrelator

$$\langle \mathfrak{O}\mathfrak{p} \rangle_{q\bar{q}-0} := \frac{\langle W(\hat{R}, \hat{T}) \mathfrak{O}\mathfrak{p} \rangle}{\langle W(\hat{R}, \hat{T}) \rangle} - \langle \mathfrak{O}\mathfrak{p} \rangle$$

über den Erwartungswert

$$\langle \mathfrak{O}\mathfrak{p} \rangle := \langle \Omega | \mathfrak{O}\mathfrak{p} | \Omega \rangle$$

bezüglich des Grundzustandes der Theorie ein, so impliziert die Wirkungs-Summenregel ($q\bar{q}-0$ bezieht sich auf den Quark-Antiquark-Zustand $q\bar{q}$ relativ zum Vakuum)

$$\hat{V}(\hat{R}, \hat{\beta}) + \hat{R} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{R}} = \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial \ln a} \langle \mathcal{P}'_\tau + \mathcal{P}'_s \rangle_{q\bar{q}-0} = a * \lim_{\xi \rightarrow 1} \langle \partial_a \mathcal{S}_\xi \rangle_{q\bar{q}-0}^{\xi = \text{const} \neq 1}$$

und die Energie-Summenregel

$$\hat{V}(\hat{R}, \hat{\beta}) = - \sum_{\sigma=\pm} \sigma \eta_\sigma \langle \sigma \mathcal{P}'_\tau + \mathcal{P}'_s \rangle_{q\bar{q}-0}$$

Die Verquickung dieser Implikationen der beiden Summenregeln führt unter Anwendung der gekoppelten weak coupling-Approximationen

(3.4.1) \wedge (3.4.4) und (3.4.2) \wedge (3.4.3) zu

$$\hat{V}(\hat{R}, \hat{\beta}) - \frac{1}{4} \left(\hat{V}(\hat{R}, \hat{\beta}) + \hat{R} \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{R}} \right) \approx$$

$$\approx \hat{\beta} \langle -\mathcal{P}'_\tau + \mathcal{P}'_s \rangle_{q\bar{q}-0} \approx \lim_{\xi \rightarrow 1} \langle \partial_\xi \mathbf{S}_\xi \rangle_{q\bar{q}-0}^{a = \text{const}}$$

so daß für ein qualitatives Potential-Profil der Klasse

$$\hat{V}(\hat{R}, \hat{\beta}) = \hat{Q}(\hat{\beta}) \hat{R}^\alpha$$

$$\begin{aligned} \hat{V}(\hat{R}, \hat{\beta}) &= \frac{4\hat{\beta}}{3-\alpha} \langle -\mathcal{P}'_\tau + \mathcal{P}'_s \rangle_{q\bar{q}-0} = a \langle H(\Theta_{44}) \rangle_{q\bar{q}-0} + \\ &\quad + \tilde{a} \langle L(\Theta_\mu^\mu) \rangle_{q\bar{q}-0} \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{a} = \frac{2\beta_L(g_0)}{g_0} a$$

und der Anteilabschätzung des anomalen Lagrange-Anteils

$$\tilde{a} \langle L \rangle_{q\bar{q}-0} = \frac{\alpha+1}{3-\alpha} a \langle H \rangle_{q\bar{q}-0}$$

in Einheiten des Hamilton-Beitrags folgen muß.

Total klassisch würde man im naiven Limes natürlich

$$\frac{\hat{V}}{a}(\hat{R}, \hat{\beta}) \longrightarrow V(R) = \lim_{a \rightarrow 0} \langle \frac{a^3}{2} \sum_{\vec{x}} (-E^2(x) + B^2(x)) \rangle_{q\bar{q}-0}$$

erwarten, was nur für ein quasi-statisches U(1)-Potential des Coulomb-Typs $\alpha = -1$ verwirklicht werden kann, welches alle eventuellen anomalen Beiträge effektiv wegschneidet. Für ein typisches SU(N)-Confinement-Potential in der fundamentalsten Darstellung $\alpha = +1$ werden der anomale Lagrange-Beitrag und der klassische Hamilton-Beitrag gleich groß. Dieser Fall wurde vom Pionier der Gitter-Summenregeln C. Michael ([39]) entweder übersehen, oder der Faktor 2 zwischen Hamiltonian und Gesamtpotential wurde sogar arithmetisch verschlampt (Details dazu in [12]). Das große Verdienst des Autors H. J. Rothe liegt nun darin, in einem ersten Schritt die 50% - 50% - Gewichtung von klassischem Sektor und Anomaliebeitrag bei der Potential-Auswertung durch die Summenregeln für das Confinement-Potential zu erkennen ([48]) und in einem zweiten Schritt die Zuordnungen

$$H \longrightarrow H = H(\Theta_{44})$$

$$L \longrightarrow L = L(\Theta_\mu^\mu)$$

der Potentialbeiträge zu Energiekomponente und Spuranomalie des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors vorzunehmen und damit die Grundlagen für eine thermodynamische Reinterpretation dieser Phänomene zu schaffen und zu etablieren ([51]).

Um diesen Vorstoß besser im Detail zu verstehen, soll zunächst noch einmal mit der Darstellung des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors im Kontinuum gestartet werden. Dazu werde aus Gründen der Übersichtlichkeit für effektiv rein speziellrelativistische Situationen der isolierte Eichsektor gewählt:

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu} &= -2 \frac{\delta \mathcal{L}(g^{\mu\nu} \neq \text{const})}{\delta g^{\mu\nu}} \Bigg|_{g^{\mu\nu} \rightarrow \delta^{\mu\nu}} = \\ &= -2 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g^{\mu\nu}} \right) \Bigg|_{g^{\mu\nu} \rightarrow \delta^{\mu\nu}} \quad \text{a posteriori} \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Diese D-dimensionale Form konnte nur über die Allgemeine Relativitätstheorie hergeleitet werden. Sie ist für den zu renormierenden Ausdruck Θ_μ^μ sowohl notwendig als auch hinlänglich. Für jede im allgemeinen endlich große Komponente jedoch genügte effektiv bereits die etwas umständliche aber vom theoretischen Hintergrund her eher oberflächliche Konstruktion über das Translations-Noether-Theorem, welche für das gegebene Gebilde dann bei der Auswertung äquivalente Resultate liefert.

Dieser Dualismus legt eine Aufspaltung von der zunächst noch im Kontinuum (4-dimensionale Raumzeit) betrachteten Größe $\Theta_{\mu\nu}$ in einen reinrassig verallgemeinert elektromagnetischen (U(N)/SU(N)-Maxwell-Gestalt) **normalen** Anteil $\Theta_{\mu\nu}^N$ (D \equiv 4-Verhalten von $\Theta_{\mu\nu}$) und in einen gravitativen (Allgemeine Relativitätstheorie als höheres Erzeugungsprinzip) **anomalen** Anteil $\Theta_{\mu\nu}^{AN}$ (D \rightarrow 4-Einfluß) nahe:

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^N + \Theta_{\mu\nu}^{AN}$$

$$\text{mit} \quad \Theta_{\mu\nu}^N = \frac{4}{D} g_{\mu\nu} \mathcal{L} + F_{\mu\lambda}^A F_{A\nu}^\lambda \quad \curvearrowright \quad (\Theta_\mu^\mu)^N \equiv 0$$

$$\text{und} \quad \Theta_{\mu\nu}^{AN} = \frac{D-4}{D} g_{\mu\nu} \mathcal{L}(g^{\text{bare}}) \quad \curvearrowright \quad (\Theta_\mu^\mu)^{AN} = \Theta_\mu^\mu = \partial_\mu(\Theta^{\mu\nu} x_\nu)$$

$\Theta_{\mu\nu}^N$ und $\Theta_{\mu\nu}^{AN}$ kann als Komponentenschreibweise der Energie-Impuls-Matrizen Θ^N und Θ^{AN} aufgefaßt werden, welche sich grundsätzlich verschiedenartig verhalten, und zwar je nach physikalischem Ursprung (vgl. [34]; weder bei Θ^N noch bei Θ^{AN} sollen simultan alle Komponenten Null sein):

EIGENSCHAFTEN	$\underline{\Theta}^N$	$\underline{\Theta}^{AN}$
Ursprung	verallgemeinerter Elektromagnetismus	Quanteneffekte
assoziiertes Medium	masselose Eichfelder (wie in der SU(3)-QCD oder in der U(1)-QED etwa)	reinterpretierbar als Anomalie mit nichtverschwindender Ruhemasse
Charakter	effektiv luminal	effektiv subluminal
wird die Möglichkeit, $\underline{\Theta}$ durch Bezugssystemtransformationen zu diagonalisieren, durch die bilinearformmäßig indefinite Metrik gefährdet?	ja (eine entsprechende Diagonalisierung ist manchmal möglich und manchmal nicht)	nein (aufgrund des subluminale Charakters)
existiert $\underline{\Theta}^{-1}$?	nicht immer (verschwindende Eigenwerte möglich)	ja (alle Eigenwerte sind von Null verschieden)
welche Restriktionen gibt es?	$\Theta_{DD}^N = \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$, $(\Theta_\mu^\mu)^N = 0$	nur $\Theta_{DD}^{AN} = \boldsymbol{\varepsilon} \neq 0$ wenn $\underline{\Theta}^{AN} \neq 0$
können demnach isotrope Bedingungen an den normalen Ortsraum (x_1, x_2, x_3) $\underline{\Theta} = \underline{M} \left(\begin{array}{c c} \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right) \underline{M}^{-1}$ erzeugen?	nein (solange \underline{M} eine Bezugssystemtransformation sein soll - kein genuin symmetrischer Ursprung, s. o.)	ja (total euklidisierte Blockstruktur ohne [normal euklidisch] imaginärwertige Nebendiagonale ist enthalten)
konkrete Gestalt (s. a. nächster Punkt)	$\Theta_{\mu\nu}^N = \frac{4}{D} g_{\mu\nu} \mathcal{L} + F_{\mu\lambda}^A F_{A\nu}^\lambda$, $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$	$\Theta_{\mu\nu}^{AN} = \frac{D-4}{D} g_{\mu\nu} \mathcal{L}(g^{\text{bare}})$, $g_{\mu\nu} \neq \delta_{\mu\nu}$ (zulässige $D \neq 4$ -Uminterpretation)
Relevanz	$D \equiv 4$: $\underline{\Theta} = \underline{\Theta}^N$	$D \not\equiv 4$: $\Theta_\mu^\mu = \text{trace } \underline{\Theta}^{AN}$ mit $g_\mu^\mu \equiv \delta_\mu^\mu$ - während (formal) $g_{\mu\nu} \not\equiv \delta_{\mu\nu}$ hier

Die Durchführbarkeit einer Blockung des Typs

$$\underline{\Theta}^{AN} = \underline{M} \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C} \cdot \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right) \underline{M}^{-1}$$

hat folgende physikalisch anschauliche Bedeutung. Bei Beschränkung auf

den normalen Ortsraum gilt

$$\mathbf{d}(\text{KRAFT})_j \quad \text{auf} \quad d^2\mathcal{O} = \Theta_j^i d^2\mathcal{O}_i = -p d^2\mathcal{O}_j$$

- $\Theta_j^i d^2\mathcal{O}_i$ ist der Impulsfluß durch das vektorielle Flächenelement $d^2\mathcal{O}$
- $p d^2\mathcal{O}_j$ ist die isotrope Simplifikation dazu:
Spannung wird zu Druck (mal Flächenelement)

Daher simuliert jede bezüglich des Ortsraumes isotrope Situation auf allgemeinrelativistischer Basis das Pascal'sche Gesetz für Flüssigkeiten und bestimmte Gase in perfekter Weise:

$$\text{trace } \Theta^{\text{AN}} = \text{trace} \left[\underset{\sim}{M} \left(\begin{array}{c|c} -p \cdot \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \boldsymbol{\varepsilon} \end{array} \right) \underset{\sim}{M}^{-1} \right] = \boldsymbol{\varepsilon} + (1 - D)p$$

Nun kann dimensionell regularisiert und renormiert werden. Unter Ausnutzung der bereits ermittelten Beziehungen erhält man einerseits

$$\lim_{D \rightarrow 4} \Theta_\mu^\mu = \lim_{D \rightarrow 4} (\Theta_\mu^\mu)^{\text{AN}} = \frac{2\beta(g)}{g} \mathcal{L}(g)$$

und andererseits für das relevante Szenario

$$\lim_{D \rightarrow 4} \Theta_\mu^\mu = \boldsymbol{\varepsilon} - 3p$$

als Anomalie vom idealen Gaszustand eines ultrarelativistischen Gases masseloser Eichbosonen ([14], [37]) $\boldsymbol{\varepsilon} - 3p = 0$, während für $D \equiv 4$

$$\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{\text{N}} \quad \text{mit} \quad \Theta_{44} = \boldsymbol{\varepsilon} = \mathcal{H}$$

relevant ist.

Sei bezüglich eines allgemein gehaltenen Systems D_S die Anzahl der räumlichen Dimensionen und D_T die Anzahl der zeitlichen Dimensionen. Seien $\boldsymbol{\varepsilon}$ und p ab jetzt Durchschnitts-Interpretationen der Energiedichte und des Drucks. Dann kann für Systeme relevanter Universalitätsklassen in zwei Schritten multidimensionale Thermodynamik betrieben werden (dabei erlaubt das klare Konstruktionsprinzip in einem der beiden Fälle eine formale Verallgemeinerung auf mehr als eine Zeitdimension):

- i) Sei $V = (x^{D_S} y^{D_T})$ das Raumzeitvolumen eines geeigneten Systems mit $D_S \geq 1$, $D_T \geq 1$ aber $D = D_S + D_T > 2$. Dann gilt für den Mittelwert der Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors

$$\bar{\Theta}_\mu^\mu = - \frac{x y}{V} \frac{\partial \ln Z(V = \text{const} = x^{D_S} y^{D_T})}{\partial(x y)} = D_T \boldsymbol{\varepsilon} - D_S p \quad (3.4.6)$$

- ii) Sei $V = (x^{D_s} y)$ das Raumzeitvolumen eines geeigneten Systems mit $D_s \geq 1$, $D_T = 1$ und nun $D = D_s + D_T \geq 2$. Dann ist - wie zu Anfang dieses Kapitels bereits ausführlicher behandelt - die im Sinne einer Feldtheorie bei endlicher Temperatur thermodynamisch (total) euklidisierte Auffassung der holomorphen Fortsetzung der Zeit bei ihrem Maximalwert in der Wirkung in den hier benutzten teilchenphysikalischen Einheiten als inverse physikalische Temperatur zu interpretieren

$$x_D = i t \quad \longrightarrow \quad x_D = (i t)_{\text{eukl}} = \frac{1}{T}$$

und als komplementäre Größe dazu der Mittelwert

$$\bar{\Theta}_{DD} = - \frac{y}{V} \frac{\partial \ln Z(V/y = \text{const})}{\partial y} = \epsilon \quad (3.4.7)$$

zu identifizieren.

Für ein asymmetrisches $(3+1)$ -dimensionales Raumzeit-Gitter ist das Raumzeitvolumen eines periodischen Gittersegments gegeben durch

$$V = (N_\tau a_\tau) (N_s a)^3 .$$

Direkt aus den Kontinuumsbetrachtungen heraus können daher symbolisch folgende primäre $\Theta_{\mu\nu}^L$ -Ansätze ($\{ \text{normaler} + \text{anomaler Anteil} \}$ von $\Theta_{\mu\nu} \longrightarrow \text{Gitter}$) über die beiden polydimensionalen thermodynamischen Identitäten für den Grundzustandserwartungswert

$$\langle \partial_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_G \rangle := \langle \Omega | \partial_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_G | \Omega \rangle = \frac{1}{Z} \int \mathcal{D}U (\partial_{\mathcal{A}} \mathcal{S}_G) e^{-S_G} = - \partial_{\mathcal{A}} \ln Z$$

konstruiert ($\mathcal{A} \in \{a, \xi, \dots\}$ hier - sonst unkaligraphisch und Farbindex) werden (Details zu den Gültigkeitsgrenzen in [22]):

$$\bar{\Theta}_{\mu}^{L\mu} := \epsilon - 3p = \frac{a}{V} \langle \partial_a \mathcal{S}_G \rangle^{\xi = \text{const}} \quad (3.4.8)$$

$$\bar{\Theta}_{44}^L := \epsilon = \frac{\xi}{V} \langle \partial_\xi \mathcal{S}_G \rangle^{a = \text{const}} \quad (3.4.9)$$

Das scheinbar unüberwindliche Problem, das den Hintergrund zu diesem Teilkapitel legt, ist die Aufgabe, dimensionelle Regularisierung oder stellvertretende Alternativverfahren (konkretere Angaben folgen) bei diskreten kristallinen Strukturen wie zum Beispiel einem Raumzeit-Gitter zu betreiben, ohne daß dieses diskrete Konstrukt notwendigerweise den Symmetrieklassen unterliegt, die zu der bei minimalem Verallgemeinerungstransfer gewünschten

fraktaldimensionalen Extrapolation konform sind.

Eine solche dimensionelle Regularisierung kann dennoch formal definiert werden, wenn sich eine konkrete Alternative finden läßt, die dieser formalen Anweisung Sinn einhaucht. Wie in diesem Teilkapitel gezeigt werden konnte, läßt sich dieses ersehnte Ziel tatsächlich erreichen, indem auf dem Gitter stellvertretend für die Dimensionalität als exekutable Variable der eindimensionale Gitterabstand als Regulator benutzt wird. Dieser Schritt folgte zwar pragmatisch bei den Summenregeln, ist aber auf reiner Erwartungswertebene ohne eine externe Theorie definitiv überhaupt nicht einleuchtend.

Ein Übersetzungsversuch der Michael'schen Summenregeln ([12], [27], [39], [48]) auf die Ebene reiner Erwartungswerte führte mich erst dann weiter, nachdem ich die multidimensionalen Formalisierungen (3.4.6) und (3.4.7) der bekannten Ableitungen der Zustandssumme nach Volumen (isotherm) und Temperatur (isochor) in der Thermodynamik über die Kettenregel der Differentiation vor allen Dingen dadurch forciert hatte, daß ich - basierend auf dem Interpretationsschema einer Feldtheorie bei endlicher Temperatur - den realphysikalisch zentral wichtigen Begriff der Temperatur konsequent durch die inverse total euklidisierte holomorphe Fortsetzung des Zeitbegriffs substituiert hatte (Übergang zur euklidischen Repräsentation des Minkowski-Raums ([15], [22])).

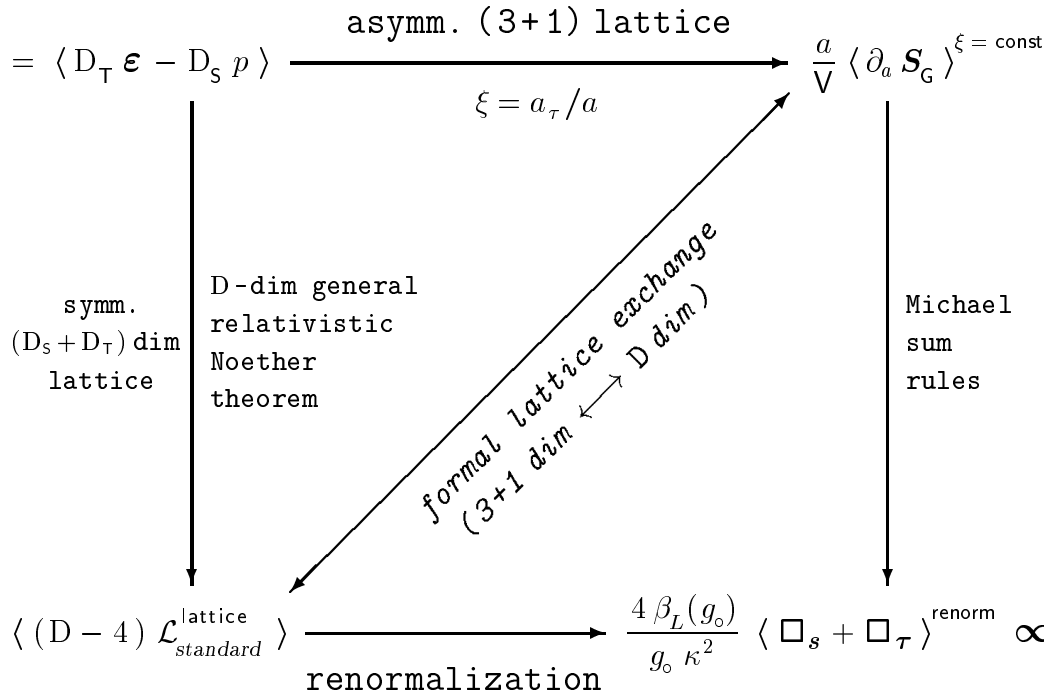
Die über den Gitterabstand a umgeleitete dimensionelle Regularisierung eines durch rudimentäre Transformationsregeln teilweise eingegrenzten postulierten Gitterpendants zu Θ_μ^μ ergab in der thermodynamischen Reinterpretation bereits symbolisch eindeutig den Ausdruck $(\epsilon - 3p)$, der für idealisierte allgemeinrelativistische Applikationen über die Eigenwerttheorie für die Kontinuumsversion der Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors erhalten werden kann.

Auf der anderen Seite demonstrierte die Abhandlung der Noether-Theoreme gerade, daß Θ_μ^μ in der Kontinuumsphysik nur über eine allgemeinrelativistische Reinterpretation eine wirklich eindeutige und stringent logische und nicht bloß irgendwie zusammengeratene D-dimensionale Konstruktion der Spur verrät, deren detaillierte Kenntnis unabdingbare Voraussetzung für eine geregelte Renormierung im Anschluß an die Regularisierung ist. Also ist der dimensionell regularisierte Θ_μ^μ -Beitrag als anomal und in dieser Semipathologie quasigravitativ zu klassifizieren, obwohl er im allgemeinen speziell-relativistische Eichfelder beschreibt. Angesichts dieser Typologie aber ist eine $(\epsilon - 3p)$ -Interpretation für die Spur Θ_μ^μ nicht nur gerechtfertigt sondern theoretisch sogar zwingend notwendig!

Weniger bekannt bisher sind die Generalisierungsgrenzen für eine Weiterentwicklung solcher Sonderbeziehungen, die sich zunächst einmal für die weak

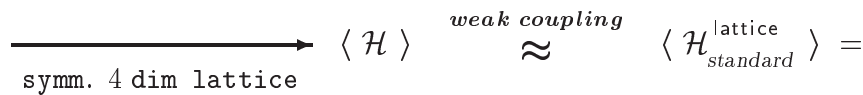
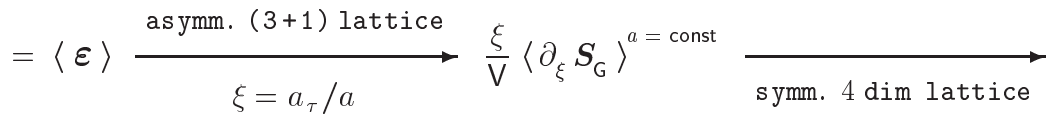
coupling-Prozedur und/ oder im Rahmen einer quasi-statischen Grenzsituation leicht begründen lassen. Für die reine phänomenologische Zuordnung jedoch genügt die Veranschaulichung anhand solcher Sonderfälle beziehungsweise der Verweis darauf, daß allgemeinere Situationen als formale Verallgemeinerung solcher anschaulicher Basis-Szenarios uminterpretiert werden können. Der thermodynamische Ausbau der von Rothe vorgenommenen Reinterpretation ([48]) der Summenregel-Terme für die anfängliche Situation eines Confinement-Potentials liefert folgende zwei universell gültige Schemata, mit denen das Kapitel 'D-Dimensionale Kontinuumsbetrachtungen und der Energie-Impuls-Tensor' formal abgerundet abgeschlossen werden kann (zur Erinnerung: $\kappa = g_0(a) a^2$):

$$\langle \Theta_\mu^\mu \rangle = - \frac{xy}{V} \frac{\partial \ln Z(V = \text{const} = x^{D_S} y^{D_T}, D_S + D_T > 2)}{\partial(xy)} =$$



$$\propto \varepsilon_{\text{"kin"}}^{\text{eukl}} + \varepsilon_{\text{"pot"}}^{\text{eukl}}$$

$$\langle \Theta_{DD} \rangle = - \frac{y}{V} \frac{\partial \ln Z(V/y = \text{const} = x^{D_S}, D_S \geq 1, D_T = 1)}{\partial y} =$$



$$= \frac{2}{\kappa^2} \langle \square_s - \square_\tau \rangle \propto - \varepsilon_{\text{"kin"}}^{\text{eukl}} + \varepsilon_{\text{"pot"}}^{\text{eukl}}$$

Kapitel 4

THEMATISCH RELEVANTES PROFIL DER GRUPPE $U(1)$

4.1 $U(1)$ als ein anschauliches Spielzeug-Modell für das Auftreten magnetischer Ladungen auf dem Gitter

Nachfolgend werden trigonometrische Besonderheiten der Gruppe $U(1)$, ihre spezielle Bedeutung und die Frage nach dem Ausmaß der Transferierbarkeit auf andere Eichgruppen thematisiert.

Anhand der Gruppe $U(1)$ lassen sich typische Gitter-Probleme teilweise besonders einfach skizzieren. Ein Schwachpunkt auf dem Gitter ist das einfachste Pendant dort zum Feldstärketensor des Kontinuums. Die Behebung der mit diesem Gebilde assoziierten Mehrdeutigkeiten gerät in Konflikt mit geometrischer Homogenität bei der Plakettenverteilung auf dem Gitter. Die Konsequenz sind artefaktbedingte magnetische Monopole. Da sich das Gitter jedoch auf die Raumzeit $D = 4$ bezieht und nicht auf den Ortsraum mit $D = 3$ beschränkt, treten diese magnetischen Monopole nicht etwa als nichtrelativistische Skalare (entspräche einem dreidimensionalen Szenario), sondern als vektorwertige Monopolströme auf.

Sei wie gehabt g_0 die Kopplung auf dem Gitter und a der Gitterabstand. Sei kalligraphisch $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ der Standard-Gitter-Ansatz für das Analogon zum Feldstärketensor. Sei ferner \mathcal{A}_μ das Gitterpotential. Dann können die Notationen

$$\begin{aligned} \gamma &:= g_{\circ}(a) a & \kappa &:= g_{\circ}(a) a^2 \\ \vartheta_{\mu} &:= \gamma \mathcal{A}_{\mu} & \vartheta_{\mu\nu} &:= \kappa \mathcal{F}_{\mu\nu} \end{aligned}$$

eingeführt werden, mit denen sich der Zusammenhang von vektoriellen und tensoriellen hermiteschen Erzeugern des $U(N)/SU(N)$ -Eichsektors auf dem Gitter besonders einfach repetieren lassen:

$$\begin{aligned} & e^{i\vartheta_{\mu}(n)} e^{i\vartheta_{\nu}(n+\hat{\mu})} e^{-i\vartheta_{\mu}(n+\hat{\nu})} e^{-i\vartheta_{\nu}(n)} := \\ & := e^{i\vartheta_{(1)}} e^{i\vartheta_{(2)}} e^{i\vartheta_{(3)}} e^{i\vartheta_{(4)}} := U_{\mu\nu} = e^{i\vartheta_{\mu\nu}(n)} \end{aligned}$$

Jetzt darf eine Beschränkung auf die hier zur Debatte stehende Eichgruppe $U(1)$ vorgenommen werden. Dann nämlich kann man ohne Konfusion mit irgendwelchen Verallgemeinerungen beobachten, daß sich jedes $\vartheta_{(\mathbf{k})}$ perfekt wie ein Winkel verhält:

$$\vartheta_{(\mathbf{k})} \in]-\pi, \pi] .$$

Für die Gruppe $U(1)$ gilt aufgrund des skalaren Charakters der Erzeuger

$$e^{i\vartheta_{(j)}} e^{i\vartheta_{(k)}} = \exp(i[\vartheta_{(j)} + \vartheta_{(k)}]) .$$

Dann folgt jedoch

$$\vartheta_{\mu\nu} = \sum_{l=1}^4 \vartheta_{(l)} \in]-4\pi, 4\pi] ,$$

was den Sachverhalt widerspiegelt, daß bei

$$U_{\mu\nu} := e^{i\vartheta_{\mu\nu}} \longleftarrow \text{eindeutig} \quad \vartheta_{\mu\nu}$$

die Eindeutigkeit der Zuordnung nur in einer Richtung gewährleistet werden kann - nämlich nach links hin. Da $U_{\mu\nu}$ innerhalb der Gittereichtheorie ein fundamentaleres Gebilde ist als $\vartheta_{\mu\nu}$, wirkt sich das Unvermögen, aus der Vorgabe von $U_{\mu\nu}$ heraus eindeutig $\vartheta_{\mu\nu}$ erhalten zu können, in sehr störender Weise aus. Konsequenterweise besteht daher die Notwendigkeit, eine Abwandlung von $\vartheta_{\mu\nu}$ - nämlich $\bar{\vartheta}_{\mu\nu}$ - so zu definieren, daß die Vieldeutigkeit bei $\vartheta_{\mu\nu}$ eliminiert wird:

$$\vartheta_{\mu\nu} = \bar{\vartheta}_{\mu\nu} + 2n\pi , \quad n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

mit $\bar{\vartheta}_{\mu\nu} \in]-\pi, \pi] .$

Dieser neue Begriff $\bar{\vartheta}_{\mu\nu}$ scheint angemessener zu sein, denn nun gilt wechselseitig eindeutig

$$U_{\mu\nu} := e^{i\vartheta_{\mu\nu}} = e^{i\bar{\vartheta}_{\mu\nu}} \quad \xleftrightarrow{\text{eindeutig}} \quad \bar{\vartheta}_{\mu\nu} \quad ,$$

so daß $\bar{\vartheta}_{\mu\nu}$ mehr Feldstärkecharakter hat als $\vartheta_{\mu\nu}$.

Im U(1)-Kontinuum folgt aus dem Allgemeinen Stokes'schen Satz formal für ein 3-dimensionales Arrangement bezüglich des 4-dimensionalen Elektromagnetismus

$$\begin{aligned} \oint_{x_4 = \text{const}} \mathbf{F}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu &= \int_{x_4 = \text{const}} d(\mathbf{F}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu) = \\ &= \int j_{\text{monopole continuum}}^\mu \, d\mathbf{A}_\mu \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

mit dem normalerweise durch die homogenen Maxwell-Gleichungen annullierten Monopolstrom

$$j_{\text{monopole continuum}}^\mu = \partial_\lambda \tilde{\mathbf{F}}^{\mu\lambda}$$

und dem Standard-Hyperflächenelement

$$d\mathbf{A}_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \frac{1}{3!} \, dx^\nu \wedge dx^\rho \wedge dx^\sigma \quad .$$

Für die Beschränkung auf die 4-te Komponente des Monopolstroms müßte - wie in der Formel eingetragen - die Integrationsdomäne $x_4 = \text{const}$ gewählt werden, so daß der formale Monopolstrom nur aus der Monopoldichte des 3-dimensionalen Raumes bestehen würde, die dann die 4-te Komponente besetzt, und das Hyperflächenelement damit betragsmäßig zum klassischen Volumenelement des 3-dimensionalen Ortsraumes zusammenschrumpft. Dies ist zwar der strukturell interessanteste Fall; die Integrationsbeschränkung $x_4 = \text{const}$ ist aber keineswegs notwendig. Die ersten drei räumlichen Komponenten des formalen Monopolstromes würden Rotationsanteile des elektrischen Feldes enthalten. Aber hier im Kontinuum ist dieser Strom in der realphysikalischen Praxis zunächst noch resultierend Null.

Nach DeGrand ([11]) kann ein

Gitter-Analogon zu $\oint \mathbf{F}_{\mu\nu} \, dx^\mu \wedge dx^\nu$ in $\sum_{\xi,\eta} \bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ gesehen werden, was wegen des substitutiven Übergangs $dx^\lambda \rightarrow 1$ auf dem Gitter und des idealeren Feldstärkecharakters von $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ sofort einleuchtet. Man könnte dann ganz analog zum Allgemeinen Stokes'schen Satz einen zunächst noch unbekanntem magnetischen Fluß über (die englische Beschriftung spart Platz)

$$\underbrace{g_o}_{\substack{\text{electric} \\ \text{coupling} \\ e}} \underbrace{M}_{\substack{\text{magnetic flux} \\ \text{through a} \\ \text{spatial cube}}} = \sum_{\substack{\text{plaq's } \xi \eta \\ \text{surrounding a} \\ \text{3 cube } \nu \rho \sigma \\ \text{with } \nu, \rho, \sigma \neq 4}} \bar{\vartheta}_{\xi \eta} = \frac{1}{3!} j_{\text{monopole}}^{\mu} \varepsilon_{\mu \nu \rho \sigma}$$

definieren, wobei die Identität zwischen mittlerer und linker Seite aus der diskreten Geometrie direkt folgt. Die Kofaktoren $\frac{1}{3!}$ und $\varepsilon_{\mu \nu \rho \sigma}$ des so definierten Monopolstromes wurden im Falle des Kontinuumsanalogons vom Hyperflächenelement absorbiert.

Aus gitterreich-geometrischen Gründen folgt jedoch

$$\sum_{\substack{\text{plaq's } \xi \eta \\ \text{around spatial} \\ \text{3 cube } \nu \rho \sigma}} \vartheta_{\xi \eta} = 0$$

(Verschwinden der Winkelsumme der Eichwinkel der Originalpotentiale entlang aller Plaketten eines Würfels). Die Hauptwert-Entscheidung $\bar{\vartheta}_{\xi \eta} \in]-\pi, \pi]$ zerstört dann relativ zu $\sum \vartheta_{\xi \eta}$ die vorzeichenunabhängige Homogenität bei der Neuordnung der geometrisch nicht anschaulichen speziellen Werte

$$\vartheta_{\xi \eta} = \pi + 2n\pi, \quad n \in \{-2, -1, 1\} \quad (4.1.2)$$

Das statistische Mittel über solche n -Werte liegt im allgemeinen nicht bei Null und kann daher - wenn solche Fälle dann überhaupt auftreten - die Bilanz über alle n -Beiträge seitens sämtlicher Plaketten eines 3-dimensionalen Würfels aus dem Gleichgewicht um den Nullpunkt herum bringen. Da selbst eine verzerrte Bilanz als solche in derartigen Fällen immer noch eine Invariante des betrachteten 3-dimensionalen kubischen Segments ist, kann so gezeigt werden, daß dann einerseits magnetische Monopolströme zwar nicht ausbleiben können und daß diese Monopolströme sich aber andererseits immerhin noch stets als diskrete Vielfache einer rationalen Funktion von der Elementarladung quantisiert darstellen lassen. Das Bild entspricht erhaltenen magnetischen Monopolen an den Enden nicht eichunabhängiger Dirac-Strings ([61]).

Der $\vartheta_{\xi \eta} - \bar{\vartheta}_{\xi \eta}$ -Dualismus ist eine typische Manifestation von Gitter-Artefakten, die als Quelle klassisch-physikalisch verbotener magnetischer Ladungen angesehen werden kann. Die Transformationsregeln, die für den quantisierten Monopol-Fluß

$$M = -\frac{2\pi}{e} \sum_{\substack{\text{plaq } P \\ \in \text{ cube} \\ \nu \rho \sigma \\ (x_4 = \text{const})}} n_P \quad (4.1.3)$$

maßgeblich sind, gelten jedoch nur im abelschen Spezialfall der Gruppe $U(1)$. Im allgemeinen Fall einer $U(N)/SU(N)$ -Eichgruppe kann bestenfalls ein zur $U(1)$ -Situation analoges Szenario in numerischen Simulationen approximiert werden (Suche nach der Maximalen Abelschen Eichung ([23], [32], [33], [36]), in der die Nichtdiagonalelemente der Plakettenvariablen betragsmäßig möglichst klein gegenüber den jeweiligen Diagonalelementen sind, mit anschließender Wegprojektion der betragsmäßig erheblich kleineren Terme), und nur bestimmte Weiterentwicklungen des $U(1)$ -Konzepts $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ haben wirklich gitterphysikalische Bedeutung.

4.2 Bewegungsgleichungen auf dem Gitter

Im Falle der Gruppe $U(1)$ sind Bewegungsgleichungen auf dem Gitter verfügbar, die zwar anders als im Kontinuum nur über die Wirkung erhalten werden können, in der endgültigen Gestalt aber den Feldgleichungen des Kontinuums ähneln. Um diesen Effekt zu erreichen, muß eine bestimmte Modifikation des bereits verfeinerten Feldbegriffs $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ auf dem Gitter durchgeführt werden. Die Reproduktion der Wilson'schen Lagrangedichte (formal für $D \not\rightarrow 4$) durch die Spur einer geeigneten Gitterversion des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors erfordert eine andere Verfeinerung von $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$. Im ersten Teil dieses Kapitels wurde gezeigt, daß es auf dem $U(1)$ -Gitter einen artefaktbedingten Konflikt zwischen den Auffassungen $\vartheta_{\xi\eta}$ und $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ gibt, wobei nur $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ für die nichtabelschen Verallgemeinerungen richtungsweisend sein kann. Hier wird nun anschließend demonstriert, daß es auch für die beiden $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ -Verfeinerungen auf dem $U(1)$ -Gitter eine unausgeglichene Relevanzverteilung gibt, wobei auch hier nur einer der beiden Ansätze sinnvoll nichtabelsch generalisiert werden kann.

Um die $U(1)$ -Repräsentationen im Hinblick auf spätere Untersuchungen mit nichtabelschen Formulierungen vergleichen zu können, wo dann (die $\hat{\tau}_A$ sind die Generatoren der Gruppe)

$$F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^A \hat{\tau}_A \quad (\text{COMPOSITION}) \quad (4.2.1),$$

$$\hat{\tau}_A = \hat{\tau}_A^\dagger$$

$$\text{trace}(\hat{\tau}_A \hat{\tau}_B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}$$

gilt, führe man für die Gruppe U(1) ein einziges effektiv skalarwertiges

$$\hat{\tau}_A = \hat{\tau}^{\text{unique}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{1})_{1 \times 1}$$

ein, identifiziere den konventionellen U(1)-Feldstärketensor $F_{\mu\nu}$ mit $F_{\mu\nu}^A$ und erstelle eine neues $F_{\mu\nu}$ über die als (*COMPOSITION*) gekennzeichnete (antikommutatoruell) orthonormierte Erzeuger-Linearkombination (4.2.1). Dieses neue $F_{\mu\nu}$ soll als die wahre U(N)/SU(N)-analoge Feldstärketensor-Darstellung interpretiert und das konventionelle $F_{\mu\nu}$ "weggeworfen" werden. Mit diesem kleinen Kunstgriff werden unsinnige historisch bedingte Konversionsfaktoren eliminiert, die kreative Vergleiche nur behindern würden.

Mit den im vorangehenden Teilkapitel bereits eingeführten Hilfsgrößen kann man im allgemeinen Fall einer U(N)/SU(N)-Eichgruppe schreiben

$$U_{\mu\nu} = e^{i\gamma \mathcal{A}_\mu^{(n)}} e^{i\gamma \mathcal{A}_\nu^{(n+\hat{\mu})}} e^{-i\gamma \mathcal{A}_\mu^{(n+\hat{\nu})}} e^{-i\gamma \mathcal{A}_\nu^{(n)}} := e^{i\kappa \mathcal{F}_{\mu\nu}}$$

wobei, wie oben bereits erläutert, leider nur

$$U_{\mu\nu} \xleftarrow[\text{nur in 1 Richtung}]{\text{eindeutig}} \mathcal{F}_{\mu\nu}$$

Alle zu erwartenden Details für nichtabelsche Eichgruppen sollen zunächst zugunsten symbolischer Notationen hintangestellt werden. Vor diesem Hintergrund kann dann für die Gruppe U(1) vollständig und für alle restlichen unitären Eichgruppen symbolisch neu definiert werden

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)} := \frac{l}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa}{l} \text{mod}(\mathcal{F}_{\mu\nu}, \text{period})\right) & \xleftrightarrow{\text{eindeutig}} & \\ \xleftrightarrow{\text{eindeutig}} U_{\mu\nu} & & \forall l \in \{1, 2\} \end{array}$$

Jetzt soll eine konsequente Beschränkung auf die Eichgruppe U(1) vorgenommen werden ($\mathcal{F}_{\mu\nu}$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(i)}$ sind dann 1×1 -Matrizen: unter dem Aspekt dieser formalen Sichtweise kann der kalligraphische Matrixschnörkel aus Gründen der Einheitlichkeit auch bei Skalaren beibehalten werden). Dann ist es möglich, eine Beziehung zu $\vartheta_{\xi\eta}$ und $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ des vorangehenden Teilkapitels herzustellen:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{\kappa} \sin \vartheta_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \sin \bar{\vartheta}_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{2}{\kappa} \sin \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\text{mod}(\vartheta_{\mu\nu} - |\varepsilon|, 2\pi) - \pi}{2} = \frac{2}{\kappa} \sin \frac{\bar{\vartheta}_{\mu\nu}}{2}$$

Es folgt unmittelbar, daß

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}, \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \mathbb{F}_{\mu\nu} \Big|_{\text{continuum}} \quad \forall l \in \{1, 2\}$$

Für irgendeine unitäre Eichgruppe kann die Wilson'sche Gitterwirkung auf einem homogenen ($\xi = 1$, s. Kapitel 3.4) Raumzeit-Gitter matrixtrigonometratisch in

$$\mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\xi=1) = \frac{2}{g_o^2} \sum_{\mu, \nu, n} \text{trace} \left(1 - \cos \vartheta_{\mu\nu}(n) \right) \quad (4.2.2)$$

umgeschrieben werden. In Abwesenheit infinitesimaler Ableitungen bei den Eichfeldern müssen die Euler-Lagrange-Gleichungen für ein U(1)-Gitter in

$$\frac{\delta \mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\xi=1)}{\delta \vartheta_{\lambda}(n)} \longrightarrow \frac{\partial \mathcal{S}_{\mathbb{G}}(\xi=1)}{\partial \vartheta_{\lambda}(n)} = 0$$

übergehen, wobei die verbleibenden partiellen Ableitungen den Gesetzen des Kontinuums und nicht des Gitters gehorchen müssen. Zurück zum abelschen Spezialfall der Gruppe U(1). Dann gilt wieder

$$\vartheta_{\mu\nu}(n) = \vartheta_{\mu}(n) + \vartheta_{\nu}(n + \hat{\mu}) - \vartheta_{\mu}(n + \hat{\nu}) - \vartheta_{\nu}(n)$$

Alle nicht verschwindenden (Mindestvoraussetzung dafür: $\nu \neq \lambda$) Beiträge $\vartheta_{\nu\lambda}(n)$ und $\vartheta_{\nu\lambda}(n - \hat{\nu})$ enthalten das (relativ zur unitären Standarddarstellung logarithmisch ausgedrückte) Referenzlink $\vartheta_{\lambda}(n)$ und können nach diesem nichttrivial partiell abgeleitet werden. Durch diese differentiellen Ableitungen entstehen nichtinfinitesimale Links-Ableitungen $\hat{\partial}_{\mu}^{\text{L}}$ auf dem Gitter in der Auswertung (die Verjüngung mit der Metrik diene der Unterbindung optisch verwirrender kontravarianter Indizes bei den Gitterableitungen)

$$\frac{\delta \mathcal{S}}{\delta \vartheta_{\lambda}(n)} = -\frac{1}{g_o^2} g^{\mu\nu} \hat{\partial}_{\mu}^{\text{L}} \sin \vartheta_{\nu\lambda}(n) \quad (4.2.3).$$

Die Gitter-Adaptionen der Euler-Lagrange-Gleichungen machen daraus

$$g^{\mu\nu} \hat{\partial}_\mu^L \mathcal{F}_{\nu\lambda}^{(1)} = 0 \quad (4.2.4).$$

Dieses Gleichungssystem ist das Gitter-Analogon zu den inhomogenen U(1)-Maxwell-Gleichungen in Abwesenheit eines äußeren Stroms (externe Homogenisierung):

$$g^{\mu\nu} \partial_\mu F_{\nu\lambda} = 0$$

Wichtig ist, daß die Gitter-Übersetzung nur die Vollwinkel-Interpretation

$$F_{\nu\lambda} \left| \begin{array}{c} \text{continuum} \\ \hline \end{array} \right. \longrightarrow \mathcal{F}_{\nu\lambda}^{(1)}$$

zuläßt und nicht etwa eine Zuweisung von $\mathcal{F}_{\nu\lambda}^{(2)}$.

Wie sich später zeigen wird, kann aber nur ein Gitter-Übergang der Form

$$F_{\nu\lambda} \left| \begin{array}{c} \text{continuum} \\ \hline \end{array} \right. \longrightarrow \mathcal{F}_{\nu\lambda}^{(2)}$$

einen Transfer des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf das Gitter gewährleisten, der für Θ_μ^μ die dort nach der Renormierung entstehende Lagrangedichte nach dem Gitterübergang durch ihre standardisierte Wilson-Formulierung ersetzt (eine geeignete Gitterübersetzung des renormierten Kontinuumsausdrucks sollte der renormierten Gitterversion entsprechen). Ähnliche Argumente gelten für eine überzeugende Konkretisierung des Hamiltonian Θ_{44} .

Ein später vorgestelltes Gitter-Modell für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor kann diese Eigenschaften zwar nicht erfüllen, gewährleistet anstelle dessen aber für eine Eichgruppe des Typs SU(N) einen Erhaltungssatz auf dem Gitter. Dieser Erhaltungssatz gilt aber nur perturbativ in

1-loop-Ordnung. Eine konsequente Erfüllung eines solchen Erhaltungssatzes auf dem Gitter läßt sich nicht einmal innerhalb der Gruppe U(1) realisieren, wie sich definitiv zeigen läßt.

Selbst die Homogenisierung der inhomogenen Maxwell-Gleichungen läßt sich nicht auf ein SU(N)-Gitter übertragen. So etwas ist grundsätzlich nur für die kommutative Gruppe U(1) möglich. Auf dem Gitter gibt es bezüglich der Gitterableitungen weder eine Kettenregel der Differentiation noch eine Produktregel der Differentiation und nicht einmal irgendeine Form einer Jacobi-Identität. Kontinuumsanaloge Feldgleichungen und explizite Gitter-Erhaltungssätze sind für andere unitäre Eichgruppen als die U(1) (bzw.

deren Untergruppe $O(1)$) prinzipiell nicht möglich.

Auf der anderen Seite lassen sich die angedeuteten Θ_μ^μ - und Θ_{44} -Vorteile für die Halbwinkelversion $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}$ sehr wohl auf nichtabelsche Eichgruppen übertragen, wie später gezeigt wird. Also sind die Vorteile der Vollwinkel-Konzeption $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)}$ (\longrightarrow Feldgleichungen) (metaphorisch formuliert) kurzlebiger (gelten nur für kommutative Szenarios) als diejenigen für $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}$ (Lagrangedichten-Reproduktion - und die für jede Eichgruppe $U(N)/SU(N)$ incl. $U(1)$), so wie $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ in 4.1 prägnanter als $\vartheta_{\xi\eta}$ war: $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}$ fußt nämlich (wie übrigens auch $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)}$) in erster Linie auf $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ und nur über $\bar{\vartheta}_{\xi\eta}$ auch auf $\vartheta_{\xi\eta}$.

Die Gruppe $U(1)$ zeichnet sich also auf dem Gitter durch ein besonders hohes Maß an Anschaulichkeit aus. Einige der dort transparenten Eigenschaften lassen sich nicht auf eine beliebige unitäre Eichgruppe übertragen. Wählt man jedoch als einen anderen Typ von unitärem Spezialfall die speziell orthogonale Gruppe $SO(4)$, so lassen sich andere erstaunliche Beobachtungen machen. Solchen Phänomenen ist Kapitel 5 gewidmet.

Kapitel 5

THEMATISCH RELEVANTES PROFIL DER GRUPPE $SO(4)$

5.1 Die Idee der $SO(4)$ -Herleitung des Halbwinkel- Modells

Für den schnellen Leser wird ein sofortiges Weiterblättern zu Kapitel 5.2 empfohlen, wo alle wichtigen Mechanismen noch einmal knapp wiederholt werden - hier steht die Information, die diejenigen Fragen zu beantworten versucht, die bei einem zu schnellen und knappen Exkurs aufgeworfen werden könnten.

Nachfolgend werden die Zusammenhänge zwischen Cartan'schen Basisvektoren, $SO(4)$ -Farbindizes, äußeren Ableitungen und Riemannscher Geometrie illustriert.

In Kapitel 2 wurde angekündigt, daß sich aus der Vierbein-Darstellung von Cartan's zweiter Strukturgleichung nach Übersetzung in (ict) -Metrik und gitterphysikalisch üblicher pseudoreeller Reinterpretation der dann imaginär werdenden Komponenten

$$R^{ab} = d\omega^{ab} + \omega^{at} \wedge \omega_t^b \quad (5.1.1)$$

([10] , [17] , [42] , [45] - Symbolbedeutungen siehe (5.1.3) und (5.1.4)) die vi-

sionär anmutende $SO(4)$ -Feldstärketensor-Darstellung der Krümmungsform

$$\mathbf{d}^2 = -\frac{i}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (5.1.2)$$

herleiten läßt. Erstes Anliegen dieses Teilkapitels soll es sein, die in dieser Ankündigung verborgene Behauptung unter Beweis zu stellen, da dieser Gedankengang ganz offensichtlich nicht populär ist.

Als erste Vorbereitung dazu soll die Eichgruppe $SO(4)$ etwas näher unter die Lupe genommen werden. In der 2. Cartan'schen Strukturgleichung wurden lateinische Minuskeln benutzt. Sie können als die Abbildungen der griechischen Indizes der gekrümmten Raumzeit in das vierbeintransformierte lokale Flachraumsystem angesehen werden. Sie laufen wie die (auch weiterhin verwendeten) griechischen Indizes von 1 bis 4, da Koordinatentransformationen Isomorphismen (Konventions-Fixierungen bei entarteten, trivial werdenden Parametern) sein müssen. Lateinische Majuskeln sollen (wie bisher) bei den Gruppenindizes (Lie-Algebren - Vorsicht: jetzt vorübergehend abweichende Bezugsgruppe $SO(4)$) verwendet werden.

Nachdem diese grundlegenden Konventionsfragen noch einmal vorsorglich abgeklärt worden sind, lassen sich folgende Perspektiven für die Eichgruppe $SO(4)$ artikulieren.

Sei

$$A(a, b) := \mathbf{max}(a + 2b - 5, 1) \quad \forall a, b \in \{1, \dots, 4\} \quad \text{mit } b > a$$

Daraus folgt, daß $A \in \{1, \dots, 6\}$ und daß es eindeutige Umkehrfunktionen

$$\varphi(A) := a$$

und

$$\psi(A) := b$$

mit $\varphi(A) < \psi(A)$ gibt (die Funktions-Darstellungen $\varphi(\)$ und $\psi(\)$ sollen trotz griechischer Nomenklatur nicht als Raumzeit-Indizes gewertet werden - diese treten grundsätzlich ohne Funktionsklammer auf).

Ein Dachprodukt zweier Vektoren kann matrix- oder dyadenwertig reinterpretiert werden, wenn es entweder in antisymmetrisierter Form vorliegt oder effektiv antisymmetrisiert werden kann (bei einer Totalkontraktion mit einem antisymmetrischen Tensor zum Beispiel). Hier soll von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht werden, wobei bereits der erste Fall (gegebene Antisym-

metrisierung) vorliegt. Es gibt sechs $SO(4)$ -Generatoren, die sich dann nämlich folgendermaßen klassifizieren lassen:

$$\hat{\tau}_A := \frac{-i \hat{e}_{\varphi(A)} \wedge \hat{e}_{\psi(A)} + i \hat{e}_{\psi(A)} \wedge \hat{e}_{\varphi(A)}}{2} = \hat{\tau}_A^\dagger = - {}^t \hat{\tau}_A$$

$$\forall A \in \{1, \dots, 6\},$$

wobei $\hat{e}_{\varphi(A)} = \hat{e}_a$ und $\hat{e}_{\psi(A)} = \hat{e}_b$ kanonische Einheitsvektoren des assoziierten lateinisch indizierten Flachraums sind, von denen in antisymmetrisierter Darstellung ein Dachproduktschmand der Form $\mathbf{F} \hat{e}_c \wedge \hat{e}_d$ einen Beitrag in der Höhe von \mathbf{F} in der c -ten Zeile und d -ten Spalte der entstehenden Matrix beisteuert. Dieses Verfahren ist zulässig, weil es in antisymmetrisierter Darstellung auch einen Beitrag von $(-\mathbf{F})$ in Zeile d und Spalte c gibt, so daß die dadurch geformte Matrix unter Transposition ihr Vorzeichen ändert und damit der auf Matrix-Ebene übertragenen Antisymmetrie-Eigenschaft des Dachproduktes gehorcht. Die Eigenschaft

$$\hat{\tau}_A = - {}^t \hat{\tau}_A$$

verhält sich gegenpolig zu der $U(1)$ -Eigenschaft

$$\hat{\tau}_A = + {}^t \hat{\tau}_A$$

und ist ein Spezifikum aller speziell orthogonalen Gruppen. Alle sonstigen unitären Gruppen haben - wenn überhaupt - weniger einfache Transpositions-Gesetzmäßigkeiten für ihre Erzeuger, während

$$\hat{\tau}_A = \hat{\tau}_A^\dagger$$

bereits omnivalent aus der Definition folgt.

Wie üblich gilt dann auch hier

$$\text{trace} (\hat{\tau}_A \hat{\tau}_B) = \frac{\delta_{AB}}{2} \quad \forall A, B \in \{1, \dots, 6\}$$

Verschachtelte Kreuzprodukte sind häufig in der Physik, und es kann in solchen Fällen beobachtet werden, daß sich das dann generierte Produkt zweier Levi-Civita-Tensoren in eine Linearkombination von Produkten zweier Kronecker-Delta-Tensoren überführen läßt. Bei den $SO(4)$ -Strukturkonstanten jedoch treten Produkte von 4 Levi-Civita-Tensoren auf. Erstaunlicherweise lassen sich diese Gebilde aber ganz analog in Linearkombinationen von Produkten aus jeweils 4 Kronecker-Delta-Tensoren umformen:

$$\begin{aligned}
f_{ABC} &= -2i \operatorname{trace}([\hat{\tau}_A, \hat{\tau}_B]_- \hat{\tau}_C) = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{b=1}^4 \varepsilon_{\varphi(A)\psi(A)ab} \varepsilon_{\varphi(B)\psi(B)cb} \varepsilon_{\varphi(C)\psi(C)db} \varepsilon_{efgb}^* \\
&\quad * \delta^{ag} \delta^{ce} \delta^{df} = \\
&= \frac{1}{2} \left((\delta_{\varphi(A)\varphi(B)} \delta_{\psi(B)a} - \delta_{\varphi(A)\psi(B)} \delta_{\varphi(B)a}) \cdot \right. \\
&\quad \cdot (\delta_{\psi(A)\varphi(C)} \delta_{\psi(C)b} - \delta_{\psi(A)\psi(C)} \delta_{\varphi(C)b}) + \\
&\quad + (\delta_{\varphi(A)\psi(C)} \delta_{\varphi(C)a} - \delta_{\varphi(A)\varphi(C)} \delta_{\psi(C)a}) \cdot \\
&\quad \left. \cdot (\delta_{\psi(A)\varphi(B)} \delta_{\psi(B)b} - \delta_{\psi(A)\psi(B)} \delta_{\varphi(B)b}) \right) \delta^{ab}
\end{aligned}$$

Eine konkrete Auswertung ergibt, daß es bei der gewählten Basis genau 4 von Null verschiedene SO(4)-Strukturkonstanten mit $A \leq B \leq C$ gibt:

$$f_{123} = f_{145} = f_{246} = f_{356} = \frac{1}{2}$$

Für irgendein (lateinische und/oder griechische Indizes) reelles $4 \times 4 \times 4$ -Feld ω_α^{ab} (Arbeitsversion), das darüber hinaus lediglich die Symmetrieeigenschaft

$$\omega_\alpha^{ab} = (\tilde{\omega}_\alpha)^{ab} = -\omega_\alpha^{ba}$$

resp. (in Matrix-Schreibweise)

$$\tilde{\omega}_\alpha = -{}^t \tilde{\omega}_\alpha$$

zu erfüllen hat, ist angesichts der fundamentalen Eigenschaften der SO(4)-Erzeuger $\hat{\tau}_A$ stets folgende Reinterpretation möglich (der zweite Teilschritt in der nachfolgenden Umformungskette ist algebraisch nichttrivial):

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_\alpha &= 2 \operatorname{trace}(\tilde{\omega}_\alpha \hat{\tau}^A) \hat{\tau}_A = \\
&= 2i \sum_{A=1}^6 (\tilde{\omega}_\alpha)^{\varphi(A)\psi(A)} \hat{\tau}_A := i g^\star A_\alpha
\end{aligned}$$

g^\star ist dabei eine auf (-2) fixierte "Kopplung" (wie spätere physikalische Vergleiche motivieren werden), und A_α verhält sich wie ein hermitesches

Eichpotential

$$A_\alpha = A_\alpha^\dagger \quad ,$$

welches über $\text{eig}^{\star} A_\alpha$ die Gruppe $SO(4)$ erzeugt, in Gruppen-Komponenten

$$A_\alpha = A_\alpha^A \hat{\tau}_A \quad \text{mit} \quad A_\alpha^A := -\omega_\alpha^{\varphi(A)\psi(A)}$$

und in Matrix-Komponenten

$$(A_\alpha)^{ab} = -\frac{i}{g^\star} \omega_\alpha^{ab}$$

geschrieben wird. Mit dieser neuen Identifikationsmöglichkeit läßt sich nun Cartan's 2. Strukturgleichung (5.1.1) folgendermaßen uminterpretieren:

Zunächst einmal muß von den Auffassungen einer 1-Form

$$\omega^{ab} := \omega_\gamma^{ab} dx^\gamma := (\underset{\sim}{\omega}_\gamma dx^\gamma)^{ab} \quad (5.1.3)$$

(das physikalisch verbindliche euklidisierte ω_γ^{ab} erfüllt tatsächlich die $SO(4)$ -Reinterpretations-Kriterien $\omega_\gamma^{ab} \in \mathbb{R}$ und $\omega_\gamma^{ab} = -\omega_\gamma^{ba}$) und der 2-Form (der Faktor $1/2$ ist reine Konventionssache)

$$R^{ab} := \frac{1}{2} R^{ab}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta \quad (5.1.4)$$

ausgegangen werden. Cartan's zweite Strukturgleichung (5.1.1) nimmt daher vorübergehend die Form

$$\frac{1}{2} R^{ab}_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta = (\partial_\mu \underset{\sim}{\omega}_\gamma dx^\mu \wedge dx^\gamma + \underset{\sim}{\omega}_\alpha \underset{\sim}{\omega}_\beta dx^\alpha \wedge dx^\beta)^{ab}$$

an. Der entscheidende (aber eigentlich selbstverständliche) Trick für die weitere Auswertung besteht nun darin, die rechte Gleichungsseite (RHS) in zwei gleich große Hälften zu zerlegen, bei diesen aber die Indizes jeweils anders umzubennen. Das sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} & \text{(RHS)} \longrightarrow \\ \longrightarrow & \frac{(\text{RHS}[\mu, \gamma \rightarrow \nu, \alpha \rightarrow \mu, \beta \rightarrow \nu]) + (\text{RHS}[\mu \rightarrow \nu, \gamma \rightarrow \mu, \alpha \rightarrow \nu, \beta \rightarrow \mu])}{2} \\ := & \frac{(\text{RHS}'[1]) dx^\mu \wedge dx^\nu + (\text{RHS}'[2]) dx^\nu \wedge dx^\mu}{2} \end{aligned}$$

Anschließend braucht nur noch die Antisymmetrie des Dachproduktes für eine Änderung der Klammerungen ausgenutzt werden. Die reduzierten rechten Gleichungsseiten gehen dann über in

$$\frac{1}{2} \left(\text{RHS}'[1] - \text{RHS}'[2] \right) dx^\mu \wedge dx^\nu \quad .$$

Nun kann Cartan's zweite Strukturgleichung in einem zweiten (etwas) größeren Schritt formal aber mit suggestiver Wirkung in

$$\left(R^{ab}{}_{\alpha\beta} - ([D_\alpha, D_\beta]_-)^{ab} \right) dx^\alpha \wedge dx^\beta = 0 \quad (5.1.5)$$

$$\text{mit} \quad D_\mu := \partial_\mu + \varpi_\mu$$

verwandelt werden. Aufgrund der vorangehenden Überlegungen liefert eine Elimination des $SO(4)$ -reinterpretationsfähigen Matrixfeldes ϖ_μ

$$D_\mu = \partial_\mu + i g^\star A_\mu$$

und damit die Spezifikation, daß D_μ die eichkovariante Ableitung der Gruppe $SO(4)$ ist. Die physikalische Bedeutung des in ein Eichpotential undefinierten Tensor-Feldes ω_μ^{ab} liegt in der Vermittlung der allgemeinrelativistisch kovarianten Ableitung eines Vierbein-(Transformations-)Feldes (weiter unten noch etwas näher erläutert; das Symbol "V" stehe ab jetzt nicht mehr für Geschwindigkeitsbegriffe)

$$V^a{}_{\mu;\alpha} = - \omega_\alpha^{ab} V_{b\mu}$$

Mit diesem Hintergrundwissen läßt sich die $SO(4)$ -eichkovariante Ableitung eines allgemeinrelativistischen aber in Vierbeinsprache formulierten Szenarios leicht bestimmen:

$$\begin{aligned} i g^\star A_\mu &= \varpi_\mu = \omega_\mu^{ac} \frac{\overleftrightarrow{\hat{e}_a \hat{e}_c} - \overleftrightarrow{\hat{e}_c \hat{e}_a}}{2} = \omega_\mu^{ac} \hat{e}_a \wedge \hat{e}_c = \\ &= ((\omega_\mu^{ab} V_{b\gamma}) V^{c\gamma}) (V_a^\beta \hat{e}_\beta) \wedge (V_c^\alpha \hat{e}_\alpha) = \\ &= (V_{\gamma;\mu}^a) (V_c^\alpha V^{c\gamma}) V_a^\beta (-\hat{e}_\beta \wedge \hat{e}_\alpha) = \\ &= V_{\gamma;\mu}^a \langle \hat{e}^\alpha, \hat{e}^\gamma \rangle V_a^\beta (\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta) = \\ &= \langle V_a^\beta \hat{e}^\alpha, V_{\gamma;\mu}^a \hat{e}^\gamma \rangle \hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta \quad (5.1.6) \end{aligned}$$

Da die wirklich konkrete Handhabung Cartan'scher Basisvektoren (im vorangehenden Beispiel sind bei der matrixwertigen Reinterpretation eines Dachproduktes zwischen ihnen die Komponenten bezüglich der kanonischen Basis des lokal assoziierten Flachraumes und nicht diejenigen bezüglich der

kanonischen Basis des Einbettungsraumes zu wählen, vgl. u.) unüblich ist, wurden etliche Einzelschritte bei der Herleitung von (5.1.6) präsentiert. Maßgeblich ist, daß die Vierbeine genauso wie die Metrik als Konversionsoperatoren für Indizes benutzt werden können und daß jede Metrik (egal ob im gekrümmten oder flachen Raum) als Skalarprodukt von Basisvektoren (griechische oder lateinische Indizes) zerfasert werden kann.

Aus den jetzt bestimmten Eichfeldern läßt sich ein $SO(4)$ -Feldstärketensor konstruieren

$$F_{\alpha\beta} = \frac{1}{i g^\star} [D_\alpha, D_\beta]_- \quad (5.1.7)$$

In dieser allgemeinen Darstellung könnte dieses Gebilde ebensogut die Feldstärke irgendeiner anderen unitären (Orthogonalität ist nicht notwendig) Eichkraft mit Kopplungsstärke g^\star und eichkovarianter Ableitung D_α darstellen.

In der Neudarstellung (5.1.5) von Cartan's zweiter Strukturgleichung können aufgrund effektiver (wegen der $\alpha \leftrightarrow \beta$ -Antisymmetrie der Vierbein-Darstellung des Riemann-Tensors $R^{\text{ab}}_{\alpha\beta}$ und des nachfolgenden Kommutators in (5.1.5) interessieren nur die Fälle $\alpha < \beta$) linearer Unabhängigkeit dx^α und dx^β sowie die damit involvierten Kontraktionen über α und β entfernt werden. Außerdem kann man die unkontrahierten lateinischen Flachraum-Indizes über Vierbein-Transformationsmatrizen in griechische konvertieren ((5.1.10), (5.1.11)). Dann entsteht

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= + R_{\mu\nu\alpha\beta} = - R_{\beta\alpha\mu\nu} = - R_{\alpha\beta\nu\mu} = \\ &= V_{a\alpha} V_{b\beta} ([D_\mu, D_\nu]_-)^{\text{ab}} \end{aligned} \quad (5.1.8),$$

wobei die krümmungsgeometrische Information in die $SO(4)$ -Eichpotentiale der kovarianten Ableitungen "hineingepackt" wird.

Aufgrund der Antisymmetrie der Indizes α und β beim Riemannschen Krümmungstensor $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ kann ein damit kontrahiertes Dachprodukt der Cartan'schen Basisvektoren $\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta$ sogar unabhängig von seiner eigenen inneren α - β -Antisymmetrie (was die anschließende Abbildung auf dachproduktfreie Strukturen hier sogar von der Konkretisierung der Übergangsformulierung unabhängig machen würde) effektiv antisymmetrisiert werden:

$$\begin{aligned}
& \hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} = \\
& = \frac{1}{2} \left(\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} + \hat{e}_\beta \wedge \hat{e}_\alpha R^{\beta\alpha}_{\mu\nu} \right) = \\
& = \frac{1}{2} \overleftarrow{\left(\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta - \hat{e}_\beta \wedge \hat{e}_\alpha \right)} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} \quad ,
\end{aligned}$$

wobei die Dyadisierung - wie oben bereits diskutiert - auch als Erzeugungsquelle für eine Matrix gedeutet werden kann. Damit sind alle Vorbereitungen abgeschlossen, um die Krümmungsform der Allgemeinen Relativitätstheorie avantgardistisch zu reinterpretieren:

$$d^2 = \hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta \frac{1}{4} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{i}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta$ kann also durch die Nachbarschaft zu $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ in einem ersten Schritt implizit antisymmetrisiert und in einem zweiten Schritt von $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu}$ sogar regelrecht aufgesogen werden. Durch diese Absorption verwandelt sich der Riemann-Tensor in einen SO(4)-Feldstärke-Tensor, für den bis auf einen in Kapitel 5.2 formulierten Vorbehalt (für eine vollständige Eichtheorie der Gravitation reicht es nicht) sämtliche Maxwell-Gleichungen gelten!

Diese Beobachtung erlaubt folgenden konzeptionellen Kunstgriff. Nach den Prinzipien von Kapitel 4.2 können auch für die Gruppe SO(4) aus dem Gitterpendant $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ zu $F_{\mu\nu}$ die neuen ameliorierten Gitter-Feldstärke-Modelle $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ konstruiert werden. Die Zerlegung der SO(4)-Plakettenvariablen (im letzten Teilschritt erfolgt zu Vergleichszwecken ein Analogie-Transfer in die Gruppe U(1), wo die Skalare als $\mathbf{1} \times \mathbf{1}$ -Matrizen aufgefaßt werden können)

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu} &= e^{i\kappa \mathcal{F}_{\mu\nu}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(i\kappa)^l}{l!} \left(\mathcal{F}_{\mu\nu} \right)^l = \\
&= \sum_{l=0}^2 \frac{(i\kappa)^l}{l!} \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)} \right)^l \\
&\xrightarrow{U(1)} \mathbf{1} + i \sin\left(\kappa \mathcal{F}_{\mu\nu}\right) - 2 \sin^2\left(\frac{1}{2} \kappa \mathcal{F}_{\mu\nu}\right) \quad (5.1.9)
\end{aligned}$$

spaltet den standardmäßigen $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ -Beitrag in einen linearen $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ -Sektor

und einen quadratischen $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ -Part. Dem $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ -Sektor kann speziell hier im SO(4)-Schema eine in Kapitel 5.2 erläuterte andersartige Rolle zugewiesen werden.

Den Hintergrund dafür liefert das Problem der Standard-Formulierung der Allgemeinen Relativitätstheorie, daß ihre Metrik

$$g_{\mu\nu} = (({}^t y'(x)) \cdot (y'(x)))_{\mu\nu} = \langle \hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu \rangle$$

aus dem Skalarprodukt der - durch die Ableitung des korrespondierenden Einbettungsraum-Ortsvektors y nach der tangentialen Raumzeit x entstehenden und somit zwischen Raumzeit und lokaler flacher Einbettung (i. a. 10-dimensional) übersetzenden - Cartan'schen Basisvektoren

$$\hat{e}_\mu = \frac{\partial y}{\partial x^\mu}$$

hervorgeht und daher im allgemeinen weder orthonormiert noch überhaupt diagonal ist. Diese Unschönheit läßt sich auf jeden Fall oberflächlich dadurch umgehen, daß das tangentiale Koordinatensystem der gekrümmten Raumzeit jeweils durch einen Extraschritt in ein lokales orthonormales Frenet'sches Vierbein ([6], [44], [45], [46]) konvertiert wird.

Dieses Vierbein trägt die bereits definierten lateinischen Flachraum-Indizes.

Da in den Notationen Cartan'sche Basisvektoren $\hat{e}_\alpha \stackrel{\text{i. a.}}{\neq} \text{const}$ zugelassen sind und die Zeit wieder wie gehabt durch ihre eigene holomorphe Fortsetzung ersetzt ist, stehen $g_{\mu\nu}$ und \hat{e}_α eine Flachraum-Metrik $\eta_{ab} = \delta_{ab}$ und kanonische Einheitsvektoren \hat{e}_a gegenüber:

$$\langle \hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu \rangle = g_{\mu\nu} = V_\mu^a V_\nu^b \eta_{ab} \quad (5.1.10)$$

$$\langle \hat{e}^a, \hat{e}^b \rangle = \eta^{ab} = V_\mu^a V_\nu^b g^{\mu\nu} \quad (5.1.11) ,$$

wobei (als abschließende ergänzende Erklärung für obige Umrechnungen) aus der kovarianten Konstanz der Metrik (Torsionsfreiheit des klassisch-allgemeinrelativistischen Riemannschen Raumes)

$$g_{\mu\nu;\lambda} = 0 \quad \forall \mu, \nu, \lambda$$

die Dekompositionsmöglichkeit

$$V_{\mu;\alpha}^a = -\omega_\alpha^{ab} V_{b\mu} \quad \text{mit} \quad \omega_\alpha^{ab} = -\omega_\alpha^{ba}$$

verbindlich folgt.

Die Vierbein-Transformationsmatrizen V_{μ}^a können daher ((5.1.10) mit η_{ab} -Auswertung: $\implies g_{\mu\nu} = V_{\mu}^a V_{\nu}^b \delta_{ab}$ resp. in Matrix-Schreibweise $\underline{g} = {}^t \underline{V} \cdot \underline{V}$) als (Quasi-)Wurzeln der Metrik $g_{\mu\nu}$ angesehen werden. Ihre Gitterpendants gehen bei der $U_{\mu\nu}$ -Aufspaltung für in Kapitel 5.2 spezifizierte krümmungsgeometrische Applikationen bezüglich der Gruppe $SO(4)$ in den $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ -Sektor mit ein - und zwar ganz analog wie die Metrik als ihr (generalisiertes) Quadrat in den quadratischen Part bezüglich $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ automatisch eingebaut ist. Und hier liegt das entscheidende Problem.

An und für sich sind die involvierten Seitenbeziehungen bei den Beiträgen mit $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ streng analog. Selbst die mit ihnen assoziierten symmetrischen Energie-Impuls-Tensoren $\Theta_{\mu\nu}^{(i)}$ werden - wozu im nächsten Teilkapitel 5.2 die Algorithmen entwickelt werden und nicht eher (!) - relativ zu den mit diesen Sektoren assoziierten (relativ zueinander verschiedenen) Lagrangedichten $\mathcal{L}^{(i)}$ (i stehe hier nicht für die imaginäre Einheit) jeweils die systematische Beziehung

$$\Theta_{\mu}^{\mu(i)} = (D - D_{crit}(i)) \mathcal{L}^{(i)} \quad (5.1.12)$$

$$\text{mit} \quad D_{crit}(i) = 2 * i = 2^i \quad \forall i \in \{1, 2\}$$

erfüllen (Einschränkung: für $i = 1$ kann diese Beziehung aufgrund noch nicht eingehender untersuchter Modellabhängigkeit nur im Kontinuumslimes wirklich sichergestellt werden; Bemerkung: die Interpretation von D_{crit} als kritische Dimensionalität ergibt sich aus der für $D = D_{crit}$ im unrenormierten Szenario folgenden Spurfreiheit). Aber die Vierbein-Transformationsmatrizen V_{μ}^a besitzen im Gegensatz zu ihren metrischen Quadraten η^{ab} und $g_{\mu\nu}$ zwei verschiedene Arten von Indizes. Was bedeutet das?

Die Feldstärketensor-Umformung des Riemann-Tensors resultiert aus einer phänomenologischen Philosophie, die die Ausnutzung einer zentralen Symmetrie der Allgemeinen Relativitätstheorie im Gegensatz zu ihrer klassischen Einsteinschen Formulierung verschmährt: an und für sich können nämlich innerer (Analogon zum $SU(N)$ -Mechanismus) und äußerer (Raumzeit selber)

Eichraum ausgetauscht werden, ohne daß es das zentrale System der Theorie spürt - oder in Formeln: $R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}$. Die Riemann-Tensor-Darstellung stellt gegenüber der Feldstärketensor-Formulierung einen gewissen Informationsverlust dar - es gibt eine Vorzugsrichtung der Umformungen. Wie die Überlegungen in Kapitel 2 (Vorschau) und in Kapitel 5.2 (Details) jedoch zeigen, gilt dieses Prinzip nicht auf quadratischer Ebene. Das Quadrat der SO(4)-Feldstärke kann genauso elegant aus dem geeigneten tensoriellen Quadrat des Riemann-Tensors folgen wie umgekehrt!

Alle Einzelheiten dazu im nächsten Teilkapitel 5.2. An dieser Stelle soll lediglich aufgezeigt werden, daß der $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ -Anteil des SO(4)- $U_{\mu\nu}$ -Schemas ein flexibleres Beziehungsumfeld als der $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ -Anteil besitzt und genau deswegen im Gegensatz zum $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ -Part auf andere Eichgruppen und speziell-relativistische Szenarios übertragen werden kann. Alle Vierbein-Beziehungen für den $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ -Anteil werden außerhalb der Allgemeinen Relativitätstheorie maskiert und liefern - wenn man es in umgekehrter Richtung von einer anderen Eichgruppe aus sehen möchte - wertvolle und normalerweise verborgene Zusatzinformation. Nach dieser bodenständigen Einführung werden diese Phänomene im nächsten Teilkapitel in stark gestraffter und dafür um so übersichtlicherer Form konkretisiert. Für diejenige Leserin oder denjenigen Leser, der dieses Teilkapitel überflogen hat, werden die Grundlagen in Hyperkurzform dort noch einmal zusammengefaßt.

5.2 Analyse und Transfer höherer geometrodynamischer Symmetriestrukturen in die Gitterphysik

In diesem Teilkapitel werden zusätzliche SO(4)-Yang-Mills-Beziehungen für die Allgemeine Relativitätstheorie enthüllt, die in Verbindung zu einem zweiten Typ von symmetrischen Energie-Impuls-Tensor gesehen werden können, der sich in gewisser Hinsicht quadratisch zum wohlbekanntem Energie-Impuls-Tensor der Allgemeinen Relativitätstheorie verhält. Aus der Gitterübertragung dieses Koexistenz-Konzepts und aus der Beobachtung, daß die Wilson'sche Lagrangedichte aus der Kontinuums-Lagrangedichte für Yang-

Mills-Theorien bereits durch eine geschickte Umgestaltung des involvierten Feldstärketensors erhalten werden kann, folgen Symmetrie-Kriterien für einen Gitter-Transfer des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors in Yang-Mills-Theorien.

Der in Kapitel 4.2 vorgestellte Halbwinkel-Ansatz $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ kann durch ein torsionsloses elementares Modell der $SO(4)$ -Gitter-Gravitation (vom Einstein-Cartan-Effekt befreite Poincaré-eichtheoretische Umgestaltung mit einem klassisch allgemeinrelativistischen Kontinuumsgrenzfall, s. a. [29] - jegliche internen Details der konkreten Realisierung dürfen für den vorzunehmenden krümmungsgeometrischen Durchgang bei der nachstehenden Problematik irrelevant sein) motiviert werden. In der damit vorgegebenen Abwesenheit von Fermionen gibt es dann zusätzliche Formelbeziehungen, welche intuitiv eine Zuweisung des Halbwinkel-Modells $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ für einen substitutiven Gitterübergang

$$\Theta_{\mu\nu} \longrightarrow \Theta_{\mu\nu}^L = \Theta_{\mu\nu} (F_{\mu\nu} \rightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\dots)}) \quad (5.2.1)$$

bei dem dadurch induzierten Transfer des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors deswegen nahelegen, weil in einem solchen Schema der Vollwinkel-Ansatz $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ bereits mit einer andersartig physikalisch einzuordnenden Interpretationszuweisung belegt ist, die jenseits des üblichen Eichsektors anzusiedeln ist (Koexistenz-Konzeption). Aus diesem Grund sollte es sinnvoll sein, ein bißchen weniger routinemäßige Gravitationsphysik zu betreiben.

α) Allgemeine Relativitätstheorie

Infolge des Vierbein-Formalismus ([17], [42]) ist es möglich, innerhalb der Allgemeinen Relativitätstheorie folgendes zu machen. Da

$$\Omega(\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta) := \frac{1}{2} \left(\hat{e}_\alpha \left(\mathfrak{t}(\hat{e}_\beta) \right) - \hat{e}_\beta \left(\mathfrak{t}(\hat{e}_\alpha) \right) \right) \quad (5.2.2)$$

tatsächlich dieselben Symmetrieeigenschaften wie das Dachprodukt zwischen den beiden Cartan'schen Basisvektoren \hat{e}_α und \hat{e}_β in seinem eigenen Argument besitzt, kann Ω als die Matrix-Konkretisierung des betrachteten Dachproduktes angesehen werden. Die in der Gitterphysik übliche Vorgehensweise, mit einer (teilweise sogar thermodynamisch motivierten) pseudo-reellen Reinterpretation von Tensorkomponenten zu arbeiten, die beim Übergang zur (*ict*)-Metrik rein imaginär werden, soll hier übernommen

werden (Euklidizität in Bezug auf *(ict)*-Metrik, nicht in Bezug auf die Topologie). Dann kann man neben der üblichen geometrisch kovarianten Ableitung

$$\bar{D}_\mu \quad \text{mit} \quad (\bar{D}_\mu)_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha \partial_\mu + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha$$

und

$$\Gamma_{\lambda\nu}^\mu = \frac{1}{2} \left(g^{\mu\alpha} \left(\delta_\lambda^\beta \delta_\nu^\gamma + \delta_\nu^\beta \delta_\lambda^\gamma \right) - g^{\mu\gamma} \delta_\lambda^\alpha \delta_\nu^\beta \right) \partial_\gamma g_{\alpha\beta}$$

eine SO(4)-eichinvariante Ableitung

$$D_\mu := \partial_\mu + i g^\star A_\mu$$

mit

$$i g^\star A_\mu = \langle V_a^\beta \hat{e}^\alpha, V_{\gamma;\mu}^a \hat{e}^\gamma \rangle \Omega(\hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta)$$

(wobei \wedge wie gesagt kein Kreuzprodukt, sondern ein Dachprodukt mit einer sonst in dieser Arbeit als trivial behandelten matrixwertigen Reinterpretation

Ω sein soll, V_a^β Vierbein-Transformationsmatrizen, \hat{e}_α Cartan'sche Basisvektoren und g^\star eine speziell hier in der SO(4) via $g^\star = -2$ konstant fixierte Eichkopplung symbolisiere) und

$$A_\mu = A_\mu^\dagger$$

als SO(4)-Erzeugern einführen, aus der der SO(4)-Feldstärke-Tensor

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{i g^\star} [D_\mu, D_\nu]_-$$

zusammengebaut werden kann.

Diese Konstruktion unterliegt formal automatisch den SO(4)-Maxwell-Gleichungen, da diese zu rein mathematischen Tautologieaussagen des $(F_{\mu\nu} \leftrightarrow D_\mu -)$ Systems avancieren, wenn die inhomogenen Maxwell-Gleichungen zur Definition eines potentialabhängigen Pseudostroms j_μ umfunktioniert werden. Diese Auslegung weicht insofern vom Standard ab, als inhomogene Maxwell-Gleichungen mit physikalischer Bedeutung eine Lagrange-dichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \text{trace} \left(F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + 2 J_\mu A^\mu \right)$$

mit einem verallgemeinerten Hamiltonschen Prinzip

$$0 = \delta S = \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A^{A\mu}} \delta A^{A\mu} d^4 x$$

benötigen. Postuliert man deren Existenz im Rahmen einer Analogie-Hypothese, die eine potentialunabhängige Strom-Repräsentation J_μ mit einschließt, die nach Auswertung der Euler-Lagrange-Gleichungen mit j_μ gleichgesetzt wird, liegt eine vollständige, widerspruchsfreie und in sich

konsistente Yang-Mills-Theorie vor. Aber selbst wenn auf diese Analogie-Hypothese verzichtet wird, reduziert die Auswertung der Potentiale und der Metrik den Pseudostrom j_μ effektiv auf eine reine (vierdimensionale) Ortsabhängigkeit wie bei einem echten Strom, und selbst die Kontinuitätsgleichung für j_μ als reiner Pseudostrom ist nicht auf die Analogie-Hypothese angewiesen (darüber hinaus gilt: anders als im abelschen Spezialfall der Gruppe $U(1)$ ist hier innerhalb der Gruppe $SO(4)$ die Kontinuitätsgleichung keine triviale Konsequenz der mit oder ohne Analogie-Hypothese applizierten inhomogenen Maxwell-Gleichungen in Verbindung mit der bloßen Antisymmetrie-Eigenschaft des Feldstärketensors, sondern baut auf der durch die homogenen Maxwell-Gleichungen eingegrenzten Struktur des Feldstärketensors auf und drückt somit auch Information aus einer Domäne aus, die nicht einmal von der Analogie-Hypothese überlappt wird). Im Hinblick auf die Noether-Theoreme soll die Analogie-Hypothese aber nachfolgend implizit verwendet werden, ohne daß noch einmal gesondert darauf verwiesen werden muß.

Mit diesen Vereinbarungen gehorcht die Allgemeine Relativitätstheorie bei vollständiger Betrachtung über beide Arten von kovarianten Ableitungen einem Doppelkomplex (jeweils incl. aller Seitenbeziehungen) von Einstein-Gleichungen und Maxwell-Gleichungen:

i) Einstein-Gleichungen

Feldstärke-Repräsentation von Riemann-Tensor und Krümmungsform:

$$d^2 = \hat{e}_\alpha \wedge \hat{e}_\beta \frac{1}{4} R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu = -\frac{i}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

Pseudoverion einer äußeren Ableitung für $D = 4$:

$$\begin{aligned} dx^\alpha \wedge \hat{e}^\beta \left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\gamma\delta}_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu &= \\ = \hat{e}^\beta \left(-\frac{1}{4}\right) \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\gamma\delta}_{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} d^3\mathcal{O}_\lambda &= \hat{e}_\sigma J^{\rho\sigma} d^3\mathcal{O}_\rho \end{aligned}$$

(Erzeugung des Einstein-Tensors $G^{\rho\sigma} \equiv J^{\rho\sigma}$ als Stromdyade des Systems - vgl. eine ebenfalls doppelte System-Rotation bei der Stromerzeugung in der 3- oder 4-dimensionalen Magnetostatik $rot\ rot\ A = j$),

(eigentliche) Einsteinsche Feldgleichungen:

$$J_{\rho\sigma} = - \frac{8\pi G}{\sqrt{g}} \Theta_{\rho\sigma}^{(1)}$$

(die - in der Regel mit Hilfe von Ricci-Tensor und Krümmungsskalar ausgedrückte - krümmungsgeometrische Stromdichte wird über einen die Newtonsche Gravitationskonstante G enthaltenden Umrechnungsfaktor (Einsteinsche Naturkonstante $\tilde{\kappa} = 8\pi G$ für $c = 1$) zum symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}^{(1)}$ des Systems korreliert - der eingeklammerte Index 1 dient lediglich zur Unterscheidung von seinem Yang-Mills-Pendant, s. u.),

$D \geq 3$ -dimensionale Applikation der Einsteinschen Feldgleichungen:

$$\tilde{\kappa} \Theta_{\mu\nu}^{(1)} = \left(\delta_{\mu}^{\alpha} g^{\beta\gamma} \delta_{\nu}^{\delta} + g_{\mu\nu} \frac{g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}}{2} \right) \sqrt{g} R_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

(vgl. u. s. die extrem auffällige strukturelle Analogie zu dem gleich anschließend spezifizierten Objekt $2 \Theta_{\mu\nu}^{(2)}$),

unverjüngte Bianchi-Identität:

$$\mathbf{d}^3 \equiv 0$$

(Torsionsfreiheit Riemannscher Krümmung in Abwesenheit von Fermionen - wie hier z. B. im Kontinuumslimit; notationsmäßig sind

$$\mathbf{d}^3 := \mathbf{d} \circ (\mathbf{d} \circ \mathbf{d}) \equiv 0$$

und der Yang-Mills-Ausdruck

$$(\mathbf{d} \circ \mathbf{d}) \circ (A_{\mu} dx^{\mu}) \stackrel{\text{i. a.}}{\neq} \mathbf{d} \circ (\mathbf{d} \circ (A_{\mu} dx^{\mu})) \equiv 0$$

auseinanderzuhalten, da die Verkettung äußerer Ableitungen in nichttrivial gekrümmten Räumen nichtassoziativ ist),

Energie-Impuls-Erhaltung:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \Theta_{\mu\nu}^{(1)} \right)^{;\nu} \equiv 0$$

(kontrahierte Bianchi-Identität in Kombination mit den eigentlichen Einsteinschen Feldgleichungen)

Diese letzte Formel kann auch über die Benutzung des Noether-Theorems (gemeint ist der Gesamtkomplex der Noether-Theoreme) erhalten werden, welches darüber hinaus im Rahmen der eingangs diskutierten Voraussetzungen Existenz und Erhaltung eines quadratischen SO(4)-Yang-Mills-Analogons zu $\Theta_{\mu\nu}^{(1)}$ vorhersagt:

$$\exists \Theta_{\mu\nu}^{(2)} \quad \text{mit}$$

$$2 \Theta_{\mu\nu}^{(2)} = \left(g^{\alpha\xi} g^{\beta\eta} \delta_\mu^\gamma g^{\delta\rho} \delta_\nu^\sigma + g_{\mu\nu} \frac{g^{\alpha\rho} g^{\beta\sigma} g^{\gamma\xi} g^{\delta\eta}}{4} \right) *$$

$$* \sqrt{g} R_{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\rho\sigma\xi\eta} = \text{trace} \left(F_{\mu\lambda} F^\lambda{}_\nu + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right) \sqrt{g}$$

(bzw. mit der problemlosen nichtabelschen Verallgemeinerung der Selbstähnlichkeits-Notationen

$$\left(\vec{\vec{E}}_{\underline{\mathbf{x}}} \right)_{\mu\nu} = \frac{i}{2} F_{\mu\nu} \quad \text{und} \quad \left(\vec{\vec{B}}_{\underline{\mathbf{x}}} \right)_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F^{\rho\sigma}$$

aus Kapitel 3.1 gilt sogar

$$\Theta_{\mu\nu}^{(2)} = - \text{trace} \left(\vec{\vec{E}}_{\underline{\mathbf{x}}} \cdot \vec{\vec{E}}_{\underline{\mathbf{x}}} + \vec{\vec{B}}_{\underline{\mathbf{x}}} \cdot \vec{\vec{B}}_{\underline{\mathbf{x}}} \right)_{\mu\nu} \sqrt{g})$$

und

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \Theta_{\mu\nu}^{(2)} (j_\lambda^{SO(4)} = 0) \right)'{}^\nu \equiv 0 \quad ,$$

wobei der Strom $j_\lambda^{SO(4)}$ folgendermaßen durch die SO(4)-Maxwell-Gleichungen (nachfolgend natürlich eichgruppenübergreifend formuliert) spezifiziert wird:

ii) Maxwell-Gleichungen

inhomogene Maxwell-Gleichungen
(euklidische Operator-Reihenfolge im Kommutator):

$$j_\mu = [D^\nu, F_{\mu\nu}]_-$$

SO(4)-Kraftdichte - und alle ihre Pendanten für andere (maximal) unitäre Eichgruppen:

$$f_\mu(j_\nu) = \frac{1}{2} g^{\lambda\nu} \{ F_{\mu\lambda}, j_\nu \}_+$$

Divergenz-Relation:

$$\text{trace } f_\mu(j_\nu) = \partial^\nu \left(\Theta_{\mu\nu}^{(2)} / \sqrt{g} \right)$$

homogene Maxwell-Gleichungen:

$$\varepsilon^{\lambda\mu\nu\rho} [D_\lambda, F_{\mu\nu}]_- \equiv 0$$

Kontinuitätsgleichung:

$$[D_\mu, j^\mu]_- \equiv 0$$

Wirbelkraft-Charakter (in einer typischen speziellen Manifestation ohne infinitesimale Operatoren - die elegant vereinfachte Formulierung über die Spur ist natürlich gültig sowohl mit als auch ohne Antikommutator):

$$\text{trace } \{ f_\mu(j_\nu), j^\mu \}_+ \equiv 0$$

(kann als das dichteartig umformulierte D-dimensionale Operator-Analogon zu der magnetostatischen System-Orthogonalität

$(\vec{F})(q \vec{\mathcal{V}}) = (iq)^2 (\vec{B} \times \vec{\mathcal{V}}) \vec{\mathcal{V}} \equiv 0$ identifiziert werden - dieses Operator-Analogon basiert auf einem antikommutatorischen Pendant zu den kommutatorischen Herleitungsmechanismen bei den SO(4)-Jacobi-Identitäten - die dimensionelle Selbstähnlichkeit zur Magnetostatik wurde bereits in Kapitel 3.1 thematisiert; tatsächlich gilt mit den dortigen Notationen sogar ohne (!) Spurbildung nichtabelsch für den speziellrelativistisch kovarianten

Kraft-Operator

$$F_\mu = \frac{g^\star}{2} \{ F_{\mu\nu}, \hat{Q} \mathbb{W}^\nu \}_+ \quad \text{und} \quad \{ F_\mu (\hat{Q} \propto \mathbf{1}), \mathbb{W}^\mu \}_+ \equiv 0 ,$$

wenn lediglich die auf das Produkt mit g^\star normierte Ladungskomponenten-Spezifikationsmatrix \hat{Q} entsprechend schlicht ausfällt, was für die Matrix der verallgemeinerten Geschwindigkeit \mathbb{W}^μ nicht erforderlich ist),

Energie-Impuls-Erhaltung über die Mechanismen aus Paragraph **i**) :

$$\text{trace } f_\mu (j_\nu = 0) \equiv 0$$

(im Gegensatz zu $\text{trace } j_\mu = 0$ ist dies keine Eigentümlichkeit von speziell unitären / orthogonalen Gruppen, sondern die Nichtexistenz einer effektiven relativierten "Systembeschleunigung"). Das Verschwinden von j ist dabei eine hinreichende und nicht eine notwendige Bedingung, wie das SO(4)-Beispiel des de Sitter-Kosmos demonstriert: hier gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{g}} \Theta_{\mu\nu}^{(2)} \right)'^{\nu} = 0$$

obwohl hier

$$(j_\mu)^{ab} = -2i \sum_{\nu=1}^4 \frac{\text{sgn}(\mu - \nu) + \nu - 3}{\sqrt{g_{\nu\nu} g_{44}}} (A_4)^{4n} \delta_n^\nu (F_{\mu\nu})^{ab} \stackrel{\text{i. a.}}{\neq} 0$$

β) Übergang zu einem torsionslosen SO(4)-Modell für eine fermionenfreie Quantengravitation auf dem Gitter

Für die Zwecke dieser Abhandlung sollte es ausreichend sein, eine nicht näher relevante SO(4)-Gitter-Version (Gitterabstand a - zur Wiederholung) des Feldstärke-Tensors zu postulieren:

$$\kappa := g_0(a) a^2 \quad (\tilde{\kappa} \text{ (dagegen) } = \text{ Einsteinsche Naturkonstante! })$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} g_0(a) = g^\star \quad (\text{theorieabhängige Kontinuumskopplung})$$

$$\exists \quad \mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}} ! \quad \text{mit} \quad U_{\mu\nu} := e^{i\kappa \mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}}} \in \text{SO}(4)$$

$$\text{und} \quad \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}} = F_{\mu\nu} \quad \text{wie sonst auch}$$

Dann können die beiden (selbstverständlich auch eichinvarianten) Gitter-Lagrange-Dichten $\mathcal{L}^{(1)}$ und $\mathcal{L}^{(2)}$ eingeführt werden, wobei (Details zu der Hauptwertwurzel $\sqrt{\underline{M}^{\text{main}}}$ einer Matrix \underline{M} in Kapitel 6 - auf jeden Fall gilt $(\sqrt{\underline{M}^{\text{main}}})^2 = \underline{M}$)

$$\begin{aligned} (2\tilde{\kappa}) \mathcal{L}^{(1)} &= \frac{1}{\tilde{\kappa}} \left(U_{\lambda\nu} - U_{\lambda\nu}^\dagger \right)^{\text{bc}} \cdot \mathbf{L}^* \left(g^{\mu\nu} V_\mu^a V_b^\lambda \eta_{ac} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \sqrt{g} \right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \text{R} \sqrt{g} := \text{R}^{\alpha\beta}_{\alpha\beta} \sqrt{g} \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

mit maximaler Nähe zur Allgemeinen Relativitätstheorie (wobei

$\mathbf{L}^*(\text{arg})$ die hier nicht detaillierter spezifizierte Gitterübertragung von arg sei; dies ist die fermionenfreie Übersetzung einer entsprechenden Dekomposition in [38] - siehe dort insbesondere die Gleichungen Nr. (2.11) und (2.25); die quantengravitative Gitterapplikation wird in [57] betrieben, wobei die Rolle des herkömmlichen Plakettenkonzepts dort von demjenigen einer sogenannten Dualplakette übernommen wird - s. a. dazu den Kommentar zu Formel (3.17) dort) und

$$\begin{aligned} 8 \mathcal{L}^{(2)} &:= 8 \mathcal{L}^{(2)} (j_\mu^{SO(4)} = 0) = 4 g^{\rho\xi} g^{\sigma\eta} \eta_{ac} \eta_{bd} \cdot \frac{1}{\kappa^2} \cdot \\ &\cdot \left(\sqrt{U_{\rho\sigma}^{\text{main}}} - \left[\sqrt{U_{\rho\sigma}^{\text{main}}} \right]^\dagger \right)^{\text{ab}} \cdot \\ &\quad \cdot \left(\sqrt{U_{\xi\eta}^{\text{main}}} - \left[\sqrt{U_{\xi\eta}^{\text{main}}} \right]^\dagger \right)^{\text{cd}} \cdot \\ &\cdot \sqrt{g} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \langle \text{R}, \text{R} \rangle \sqrt{g} := \text{R}^{\alpha\beta}_{\gamma\delta} \text{R}^{\gamma\delta}_{\alpha\beta} \sqrt{g} \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

als genuinste Gitter-Übersetzung der Yang-Mills-Version (Wilson-Form der Lagrangedichte)

Nun definiere man folgende korrespondierende modifizierte Gitter-Feldstärken (übrigens in Übereinstimmung mit den Konzepten aus Kapitel 4.2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)} &:= -i \frac{\pi}{2} \tilde{\kappa} \mathbf{L}^* \left(\frac{\partial}{\partial V_a^\mu} \quad \frac{\partial}{\partial V_b^\nu} \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \right) \mathcal{L}^{(1)} \hat{e}_a \wedge \hat{e}_b = \\
&= \frac{1}{2i\kappa} \left(U_{\mu\nu} - U_{\mu\nu}^\dagger \right) = \\
&= \frac{1}{\kappa} \sin \left(\kappa \operatorname{mod} \left(\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}, \operatorname{period} \right) \right) \quad : \quad \mathbf{full \ angle}
\end{aligned}$$

und (gekrümmter Raum mit einer normal, i. e. nichtthermodynamisch euklidisierten Zeitdimension: im Gegensatz zu manchen euklidischen Flachraum-Präsentationen dürfen hier per definitionem nur kovariante Indizes mit kontravarianten Indizes kontrahiert werden - dieser Hinweis dient nur noch einmal zur Wiederholung):

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)} &:= \\
&:= \sqrt{\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial (V_a^\mu V^{a\mu})} \frac{\partial}{\partial (V_b^\nu V^{b\nu})} \frac{\partial}{\partial \eta_{cd}} \frac{\mathcal{L}^{(2)}}{\sqrt{g}} \hat{e}_c \cdot ({}^\tau \hat{e}_d)}^{\text{main}} = \\
&= \frac{1}{i\kappa} \left(\sqrt{U_{\mu\nu}}^{\text{main}} - \left[\sqrt{U_{\mu\nu}}^{\text{main}} \right]^\dagger \right) = \\
&= \frac{2}{\kappa} \sin \left(\frac{\kappa}{2} \operatorname{mod} \left(\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}, \operatorname{period} \right) \right) \quad : \quad \mathbf{half \ angle}
\end{aligned}$$

Hierbei sollte man dem Umstand Beachtung schenken, daß die in den trigonometrischen Formulierungen präsentierten *modulo*-Formulierungen nur symbolischen Charakter haben, wenn die Eichgruppe nichtabelsch ist (für weitere Details siehe Kapitel 6).

Nun ist es möglich, die Beiträge zu der besonders interessierenden $SO(4)$ -Plaketten-Variablen mit den modifizierten Versionen der Gitter-Feldstärken reinrassiger aufzuspalten als mit Hilfe des Gitter-Prototypen $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}$:

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu} &\equiv e^{i\kappa \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}} \stackrel{\text{saubere Aufspaltung (trigonometr. Bifurkation)}}{=} \mathbb{1} + \frac{(i\kappa)^1}{1!} (\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(1)})^1 + \frac{(i\kappa)^2}{2!} (\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(2)})^2 = \\
&\stackrel{\text{artefakthaltige Taylor-Entwicklung (Standard)}}{=} \mathbb{1} + \frac{(i\kappa)^1}{1!} (\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu})^1 + \frac{(i\kappa)^2}{2!} (\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu})^2 + \mathcal{O}(\kappa^3)
\end{aligned}$$

mit den Zuordnungen der symmetrischen Gitter-Versionen von Energie-Impuls-Tensoren ($k \in \{1, 2\}$)

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\nu}^{L(k)} &= \Theta_{\mu\nu}^{L(k)}(\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(k)}) = -2 \left(\frac{\delta \mathcal{L}^{(k)}}{\delta g^{\mu\nu}} \right)^{\text{generalized}} \xrightarrow{a \rightarrow 0} \\
&\xrightarrow{a \rightarrow 0} \Theta_{\mu\nu}^{(k)} = \Theta_{\mu\nu}^{(k)}(\mathbb{F}_{\mu\nu}) \Big|_{\text{continuum}}
\end{aligned}$$

wobei jeweils die k -te Ordnung von Riemann-Tensor und Feldstärketensor involviert ist (vgl. o.)

$$\Theta_{\mu\nu}^{(k)} = \mathcal{O}((R_{\alpha\beta\gamma\delta})^k) = \mathcal{O}((\mathbb{F}_{\mu\nu})^k) \quad (5.2.5).$$

Zur sauberen Spezifikation der verallgemeinerten Funktionalableitung muß folgender Hilfstensor eingeführt werden. Sei $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)}$ durch

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} := \frac{1}{\tilde{\kappa}} R_{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (5.2.6)$$

und (mit anderem Normierungsfaktor infolge der Nichtkompatibilität geometrischer Einheiten mit teilchenphysikalischen Einheiten)

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} := \frac{1}{2} R_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma\gamma\delta} \quad (5.2.7)$$

definiert. Dann gehorchen beide Äste (5.2.6) und (5.2.7) demselben Symmetriegesetz

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} = + C_{\gamma\delta\alpha\beta}^{(k)} = - C_{\beta\alpha\gamma\delta}^{(k)} = - C_{\alpha\beta\delta\gamma}^{(k)} \quad \forall k \in \{1, 2\},$$

so daß $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)}$ wirklich als eine Art tensorielles Quadrat von $C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}$ angesehen

hen werden kann. Mit dieser Hilfsbrücke **gilt einerseits**

$$\left(\frac{\delta \mathcal{L}^{(k)}}{\delta g^{\mu\nu}} \right)^{\text{generalized}} := \frac{\partial \mathcal{L}^{(k)}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}^{(k)}}{\partial \partial_\lambda g^{\mu\nu}}$$

für $k = 1$ im Kontinuumsgrenzfall **und erst nach** Auswertung der Einsteinschen Feldgleichungen

und

für $k = 2$ **bei** allen (maximal) unitären Eichgruppen **außer** der Gruppe $SO(4)$, deren Feldstärketensor mit der Metrik rückgekoppelt sein kann

und andererseits

$$\begin{aligned} \left(\frac{\delta \mathcal{L}^{(k)}}{\delta g^{\mu\nu}} \right)^{\text{generalized}} &:= -\frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha g^{\beta\gamma} \delta_\nu^\delta \sqrt{g} C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} + g_{\mu\nu} \mathcal{L}^{(k)} \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left(\delta_\mu^\alpha g^{\beta\gamma} \delta_\nu^\delta + g_{\mu\nu} \frac{g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta}}{2k} \right) \sqrt{g} C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(k)} \end{aligned}$$

ebenfalls für $k = 1$ im Kontinuumsgrenzfall **und erst nach** Applikation der Einsteinschen Feldgleichungen

und

für $k = 2$ komplementär zur vorangehenden Formel **gerade speziell** bei der Eichgruppe $SO(4)$.

Der Sinn dieser Subtilität wird anhand des Spezialfalls des de Sitter-Kosmos (mit kosmologischer Konstante $\tilde{\Lambda}$) schnell klar. Hier gilt

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(2)} = \frac{\tilde{\kappa}}{3} \tilde{\Lambda} C_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \quad \forall \alpha, \beta, \gamma, \delta$$

so daß

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^{(2)}}{\mathcal{L}^{(1)}} = \frac{\tilde{\kappa}}{6} \tilde{\Lambda}$$

und dennoch

$$\Theta_{\mu\nu}^{(2)} \neq \frac{\tilde{\kappa}}{6} \Theta_{\mu\nu}^{(1)} \quad \forall \mu = \nu$$

an allen nichtsingulären Stellen der inversen Metrik $g^{\mu\nu}$.

Diese Zuordnungen gewähren einen Einblick in die Implikationen, daß $\Theta_{\mu\nu}^{L(1)}$ im Kontinuumslimit gegen die Stromdyade $\Theta_{\mu\nu}^{(1)}$ der Quellen der geometri-

schen Raumzeitkrümmung konvergiert, die im speziellrelativistischen Grenzfall versiegen, und daß $\Theta_{\mu\nu}^{L(2)}$ im Kontinuumslimit der reinen Eichgruppen-Größe $\Theta_{\mu\nu}^{(2)}$ entspricht, deren erzeugende Gruppe durch irgendeine andere Eichgruppe (z. B. U(1) oder SU(N)) ausgetauscht werden kann, wenn dies vor dem speziellrelativistischen Übergang

$$g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad \cap \quad \sqrt{g} = 1$$

geschieht.

Eine Eichgruppen-Substitution $SO(4) \longrightarrow U(1)/SU(N)$ verursacht folgendes. Die Vierbein-Transformationsmatrix, die ursprünglich die gekrümmte Raumzeit $g_{\mu\nu}$ und das lokale Frenet'sche Vierbein $\eta_{a,b}$ miteinander verband wie ein Wechselschalter, verliert ihren eigentlichen Charakter als eine reelle Koordinatentransformation (und für $N \neq 4$ als Koordinatentransformation überhaupt). Für $N \neq 4$ hat die lokale Frenet'sche Flachraum-Metrik $\eta_{a,b}$ eine andere Anzahl an Index-Komponenten als die Raumzeit $g_{\mu\nu}$. Im speziellrelativistischen Grenzfall wären dann $\eta_{a,b}$ und $g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$ ungleich in der Dimension ihrer Basen. Bei einer Untersuchung von $\Theta_{\mu\nu}^{L(2)}$ stellt sich jedoch heraus, daß es vor dem speziellrelativistischen Übergang noch möglich ist, eine Reorganisation durchzuführen, die vollständig alle V_a^μ 's durch $g^{\alpha\nu}$'s und alle $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$'s durch $F_{\mu\nu}$'s ersetzt. Daher kann die Eichgruppe ausgetauscht werden, so daß die Strukturen einer flachraummäßigen euklidischen U(1)/SU(N)-Eichtheorie wiederentdeckt werden können, ohne daß Anomalien nach dem Übergang auftreten.

Im Falle von $\Theta_{\mu\nu}^{L(1)}$ ist eine solche Umordnung nicht möglich, so daß $g_{\mu\nu} \longrightarrow \eta_{\mu\nu}$ mit $R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ dann auch unausweichlich $F_{\mu\nu} = 0$ impliziert.

Also kann die Schlußfolgerung gezogen werden, daß die Vollwinkel-Version $\Theta_{\mu\nu}^{L(1)}$ auf dem Gitter im Gegensatz zu der neuartigen Halbwinkel-Version $\Theta_{\mu\nu}^{L(2)}$ keinen genuinen U(1)/SU(N)-Eichkraft-Charakter hat. Dieses Gedankenexperiment ist neu und wird unsichtbar, wenn der allgemeinrelativistische Durchgang weggelassen wird.

Kapitel 6

THEMATISCH RELEVANTES PROFIL DER GRUPPE SU(2)

6.1 Halbzahlige Matrix-Potenzen und Implementierung von Rotationsinvarianz auf dem Gitter

Die Gruppe SU(2) ist von der Anzahl ihrer Erzeuger her gesehen die größte unitäre Gruppe, auf deren Grundlage eine Wiederherstellung von Rotationsinvarianz auf dem Gitter mit wohldefinierten halbzahligen Potenzen von Matrix-Operatoren problemlos kompatibel ist. Das vorliegende Teilkapitel diskutiert die Details des aus der Überschneidung beider soeben artikulierten Ansprüche resultierenden Szenarios.

In Kapitel 4.1 wurde innerhalb der Eichgruppe U(1) für

$$\vartheta_{\mu\nu} \in]-4\pi, 4\pi]$$

in $U_{\mu\nu} = e^{i\vartheta_{\mu\nu}}$ die eindeutig gemachte Sekundärgröße

$$\bar{\vartheta}_{\mu\nu} \in]-\pi, \pi]$$

über

$$\vartheta_{\mu\nu} = \bar{\vartheta}_{\mu\nu} + 2n\pi, \quad n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

eingeführt.

Zieht man aus der hier in der Gruppe U(1) noch skalaren Plakettenvariablen

$U_{\mu\nu}$ die Quadratwurzel, so erhält man zunächst

$$\sqrt{U_{\mu\nu}} = \sqrt{e^{i(\bar{\vartheta}_{\mu\nu} + 2n\pi)}} = \exp\left[i\frac{\bar{\vartheta}_{\mu\nu}}{2} + n\pi i\right] = \pm e^{i\frac{\bar{\vartheta}_{\mu\nu}}{2}}$$

Um diese Wurzel eindeutig zu machen, könnte es ausreichen, eine Extra-Vorschrift einzuführen, die erstens für das Wurzelziehen die Darstellung

$$U_{\mu\nu} = e^{i\bar{\vartheta}_{\mu\nu}}$$

relevant macht und zweitens die Quadratwurzel in der einfachsten Weise ohne Phasen und Extravorzeichen spezifiziert (Normierung über positiven Realteil des Bildes - sollte dieser entfallen, Normierung über positiven Imaginärteil des Bildes). Für irgendeine Matrix $U \in U(1)$ läßt sich genau diese Zielvorstellung durch die simple Hauptwertwurzel-Definition ('main value' kürzt sich besser ab als 'principal value')

$$\sqrt{U}^{\text{main}} := \exp\left[\frac{i}{2} \arg(U)\right] \quad (6.1.1)$$

realisieren, wobei

$$\arg(U) = \arctan^{\text{main}} \frac{\text{Im } U}{\text{Re } U} \in]-\pi, \pi] , \quad \text{Re } U \neq 0$$

$$\arg(U) = +\frac{\pi}{2} \quad \text{für } \text{Re } U = 0$$

der in Bogenmaß standardisierte komplexe Phasenwinkel von U und \arctan^{main} wiederum der Hauptwert-Bereich des Arcustangens ist.

Um diese Vorschrift auf eine diagonalisierbare Matrix zu übertragen, die im allgemeinen nicht mehr dem skalarwertigen Sonderfall zuzuordnen ist, muß eine solche Matrix U diagonalisiert werden, und die Hauptwertwurzel-Vorschrift braucht dann nur noch auf die Einzelkomponenten der Diagonalmatrix losgelassen zu werden. Die Reihenfolge der Eigenwerte spielt dabei keine Rolle. Alle unitären Matrizen sind diagonalisierbar, Linearkombinationen von ihnen jedoch nicht notwendigerweise. Bevor diese Methodik angemessen verallgemeinert und im Detail dargestellt wird, sollen zunächst einmal die konkreten Spezialfälle $SU(2)$ und $U(2)$ angesprochen werden.

Innerhalb der Gruppe $SU(2)$ läßt sich die Hauptwertwurzel einer Matrix U auch durch eine alternative parallel konzipierte Konstruktion definieren, ohne daß Abweichungen von der systematischen Prozedur über die Eigenwerttheorie befürchtet werden müssen (die Querverbindungen sind eine bessere algebraische Trivialität). Dazu nutze man den Umstand aus, daß sich jedes Element

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{pmatrix}$$

der Gruppe $SU(2)$ schreiben läßt als

$$\mathbf{U} = \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{2} + i \hat{\sigma} \hat{n} \sin \frac{\theta}{2} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ -(\mathbf{U}_{12})^{\text{cc}} & (\mathbf{U}_{11})^{\text{cc}} \end{pmatrix}$$

($\text{cc} = \text{complex conjugation}$)

mit dem $SU(2)$ -Phasenwinkel

$$\theta = 2 \text{ mod} (\arccos \text{Re } \mathbf{U}_{11}, \pi) \in [0, 2\pi[$$

(nicht zu verwechseln mit dem komplexen Argument), dem Pauli-Matrizen-Vektor

$$\vec{\sigma} = 2 \begin{pmatrix} \hat{\tau}_1 \\ \hat{\tau}_2 \\ \hat{\tau}_3 \end{pmatrix}, \quad (\sigma_i)^2 = \mathbf{1} \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}$$

($\hat{\tau}_A$ sind die auf $\text{trace}(\hat{\tau}_A \hat{\tau}_B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}$ normierten allgemein standardisierten $SU(N)$ -Erzeuger für $N=2$) und dem skalarkomponentigen Einheitsvektor des Systems (Erläuterung folgt unmittelbar)

$$\hat{n} := \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \text{Re } \mathbf{U}_{11} = \pm 1$$

(willkürliche Festlegung für den (an und für sich bezüglich \hat{n} irrelevanten) Fall $\sin(\theta/2) = 0$), der in allen restlichen Fällen gegeben ist durch

$$\hat{n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\text{trace}(\mathbf{U} \vec{\sigma})}{2i \sqrt{1 - (\text{Re } \mathbf{U}_{11})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\text{Re } \mathbf{U}_{11})^2}} \begin{pmatrix} \text{Im } \mathbf{U}_{12} \\ \text{Re } \mathbf{U}_{12} \\ \text{Im } \mathbf{U}_{11} \end{pmatrix}$$

Hier entspricht die oberflächliche Intuition einer Halbierung des $SU(2)$ -Phasenwinkels (ohne effektiven modulo-cut-off) tatsächlich der im Endeffekt zu

favorisierenden (mit Einschränkung der Gruppentreue, vgl. u.) detaillierten Definition einer Hauptwertwurzel:

$$\begin{aligned}\sqrt{\mathbf{U}}^{\text{main}} &= \mathbf{1} \cos \frac{\theta}{4} + i \hat{\sigma} \hat{n} \sin \frac{\theta}{4} = \\ &= \frac{\mathbf{U} + \mathbf{1}}{\sqrt{2(\operatorname{Re} \mathbf{U}_{11} + 1)}} \quad (\operatorname{Re} \mathbf{U}_{11} \neq -1) \quad (6.1.2)\end{aligned}$$

Einzig und allein der Fall $\mathbf{U} = -\mathbf{1}$ bedarf einer sauberen Behandlung durch die Eigenwerttheorie (Diagonalisierung von Endomorphismen). Hier führt die Hauptwertwurzel aus der Gruppe $SU(2)$ heraus und in die Gruppe $U(2)$ hinein

$$\sqrt{-\mathbf{1}}^{\text{main}} = i \mathbf{1} \quad (6.1.3)$$

Die nur um einen Erzeuger größere Gruppe $U(2)$ verhält sich bereits wesentlich komplizierter. Dennoch gibt es auch hier noch vergleichsweise einfache Formeln. Zunächst einmal muß der Fall, daß

$$\mathbf{U} = e^{i\phi} \mathbf{1} \in U(2) ,$$

abgesplittert und separat behandelt werden. Hier gilt gemäß der Eigenwerttheorie (Durchgang durch das Diagonalisierungsschema)

$$\sqrt{\mathbf{U}}^{\text{main}} = \sqrt{e^{i\phi}}^{\text{main}} \mathbf{1} \quad (6.1.4) ,$$

womit der Fall auf die Hauptwertwurzel-Anweisung für ein $U(1)$ -Konstrukt abgestreift ist. Für alle restlichen Situationen sind folgende Substitutionen wohldefiniert (eine Anmerkung dazu gleich vorweg: der bezüglich nachstehender Symbolik kritische Fall $y^2 = (a-d)^2 + 4bc = 0$ kann wegen $|\det \mathbf{U}| = 1$ nur für $|a+d| = 2$ eintreten; nach der Dreiecksungleichung und wegen $\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}$ muß dann - und überall sonst - aber auch $|a+d| \leq |a| + |d| \leq 2$ gelten, was nur der antizipierte Situationstyp $\mathbf{U} = e^{i\phi} \mathbf{1}$ gleichschalten kann) und sehr nützlich:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ \mathbf{U}_{21} & \mathbf{U}_{22} \end{pmatrix} \equiv \mathbf{U} , \\ \sqrt{r e^{i\phi}}^{\text{main}} &:= \operatorname{abs}(\sqrt{r}) \sqrt{e^{i\phi}}^{\text{main}} ,\end{aligned}$$

$$y \equiv y(a, b, c, d) = \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}^{\text{main}} ,$$

$$\alpha := a - d + y$$

$$\beta := d - a + y$$

$$\gamma := \sqrt{a + d + y}^{\text{main}}$$

$$\delta := \sqrt{a + d - y}^{\text{main}}$$

Dann folgt für alle noch nicht abgeschätzten Situationen ($y \neq 0$)

$$\sqrt{\mathbf{U}}^{\text{main}} = \frac{2^{-1.5}}{y} \begin{pmatrix} \alpha \gamma + \beta \delta & 2b(\gamma - \delta) \\ 2c(\gamma - \delta) & \alpha \delta + \beta \gamma \end{pmatrix} \quad (6.1.5)$$

Die deutliche Zunahme an innerer Struktur kann kompakte Hauptwertwurzel-Formeln innerhalb noch größerer unitärer oder speziell unitärer Gruppen nicht erwarten lassen. Bemerkenswert ist und bleibt, wie sehr sich diese kompliziertere Darstellung (6.1.5) durch die bloße Applikation einer einzigen zusätzlichen Randbedingung (i. e. $\det \mathbf{U} = \text{abs } \det \mathbf{U}$) vereinfacht - nämlich zu (6.1.2). Weitere besonders herausragende Eigenschaften der Gruppe $SU(2)$ im Hinblick auf extreme Schlichtheit sollen für eine Darstellung in Kapitel 6.2 vorbehalten bleiben.

Ein gut geeignetes Mittel, auf dem Gitter Rotationsinvarianz herzustellen, ist die Mischung von Plaketten um einen Gitterpunkt herum (die nachfolgende Schreibweise genügt für die Spezifizierung der Lagrangedichte)

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) &\longrightarrow V_{\mu\nu}(n) := \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2} \hat{\partial}_\mu^L \hat{\partial}_\nu^L \right) U_{\mu\nu}(n) + \right. \\ &\quad \left. + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right] = \\ &= \frac{1}{4} \left[U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu}) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\nu}) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right] \end{aligned}$$

Die neu entstehenden Objekte $V_{\mu\nu}(n)$ sind im allgemeinen nicht mehr unitär

und werden nach in Kapitel 6.2 diskutierten Methoden in bestimmte Gitteransätze für Feldstärketensoren eingebaut. Dabei stellt sich unter anderem auch die Aufgabe, aus einem solchen $V_{\mu\nu}$ - wenn möglich, sonst gibt es Ausweichdefinitionen - eine Hauptwertwurzel zu ziehen. Im Gegensatz zu größeren Eichgruppen läßt sich aus jeder beliebigen Linearkombination von $SU(2)$ -Matrizen eine Hauptwertwurzel ziehen. Hiermit ist ein guter Ansatzpunkt für eine detaillierte Beschreibung von Hauptwertwurzeln gesetzt. Dazu muß der Begriff der Semi-Unitarität in einer für die Arbeit geeigneten Form neu eingeführt werden.

Die bekannten Begriffsbildungen sind

- speziell unitär:

$$U^{-1} = {}^t U^{cc} \quad \wedge \quad \det U = +1$$

- unitär:

$$U^{-1} = {}^t U^{cc} \quad \wedge \quad \text{abs } \det U = +1$$

Nun soll speziell für 2×2 -Matrizen hier neu definiert werden

- speziell semi-unitär:

$$\begin{aligned} \text{entweder} \quad & U^{-1} \text{ abs } \det U = {}^t U^{cc} \quad \wedge \quad \det U = \text{Re } \det U > 0 \\ \text{oder} \quad & U = 0 \quad (\text{Null-Matrix}) \end{aligned}$$

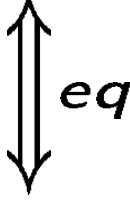
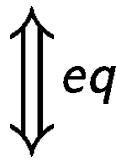
- semi-unitär:

$$\begin{aligned} \text{entweder} \quad & U^{-1} \text{ abs } \det U = {}^t U^{cc} \\ \text{oder} \quad & U = 0 \end{aligned}$$

Dann folgt (2×2 -Matrizen-Spezifikationen bei den Fallunterscheidungen):

α) Alle rellen Linear-Kombinationen von $SU(2)$ -Matrizen sind speziell semi-unitär:

$$V = \sum_i \alpha_i U_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{R} \qquad U_i \in \text{SU}(2)$$



$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ -V_{12}^{cc} & V_{11}^{cc} \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow_{eq} \quad V \text{ speziell} \\ \text{semi-unitär}$$

Dieses Schema impliziert zwingend die Spektralzerlegbarkeit von V :

$$V = \overset{t}{\underbrace{\mathbf{E}\mathbf{S}_2}} \cdot \underbrace{\mathbf{E}\mathbf{S}_1} \cdot \overset{cc}{\underbrace{\mathbf{E}\mathbf{S}_2}}$$

Wenn \mathbf{eve}_i der i -te Eigenvektor (eigenvector) zum i -ten Eigenwert \mathbf{eva}_i (eigenvalue) von V ist, so ist das Eigensystem insgesamt gegeben durch

$$\mathbf{E}\mathbf{S} \equiv \text{eigensystem} := \left(\underbrace{\mathbf{E}\mathbf{S}_1}, \underbrace{\mathbf{E}\mathbf{S}_2} \right) :=$$

$$:= \left(\begin{pmatrix} \text{eva}_1 & & & & \mathbf{O} \\ & \ddots & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{O} & & & & \text{eva}_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \overset{t}{\text{eve}}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \overset{t}{\text{eve}}_n \end{pmatrix} \right)$$

mit der Eigenwert-Zuweisung

$$V \cdot \mathbf{eve}_i = \left(\overset{t}{\hat{e}}_i \cdot \underbrace{\mathbf{E}\mathbf{S}_1} \cdot \hat{e}_i \right) \cdot \left(\overset{t}{\mathbf{E}\mathbf{S}_2} \cdot \hat{e}_i \right) \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

und der nachfolgend benutzten Operator-Auffassung

$$\mathfrak{Dp}(\underline{ES}_1) := \left(\begin{array}{ccc} & \mathfrak{Dp}(eva_1) & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ & \mathfrak{Dp}(eva_n) & \\ \mathbf{0} & & \mathbf{0} \end{array} \right)$$

β) Zu jeder speziell (semi-)unitären Matrix existiert eine eindeutig definierbare Hauptwertwurzel, die im Falle von (Dehnungs / Stauchungs-) Punktspiegelungen (semi-)unitär ist und in allen restlichen Fällen sogar auch speziell (semi-)unitär ist ($\sqrt{\text{abs}(\dots)} := \text{abs} \sqrt{\text{abs}(\dots)}$ in der üblichen Auffassung):

$$\sqrt{V}^{\text{main}} := {}^t \underline{ES}_2 \sqrt{\text{abs}(\underline{ES}_1)} \exp\left(\frac{i}{2} \arg(\underline{ES}_1)\right) \underline{ES}_2^{\text{cc}}$$

$$\text{mit } \arg(eva_i) = \arctan^{\text{main}} \frac{\text{Im}(eva_i)}{\text{Re}(eva_i)} \in]-\pi, \pi]$$

$$\text{für } \text{Re } eva_i \neq 0 \quad \left(\text{sonst } \arg = \frac{\pi}{2} \right),$$

t = Transposition ,

${}^{\text{cc}}$ = complex conjugation (wie gehabt)

Konkret ergibt sich (gegebenenfalls unter Reduktion auf Hauptwertwurzeln von skalaren Ausdrücken, die bereits für den allgemeinsten Fall generalisiert wurden; $\sqrt[4]{\dots}^{\text{main}} := \sqrt{\sqrt{\dots}^{\text{main}}}$; 2×2 -Matrizen)

i) (Dehnungs- / Stauchungs-)Punktspiegelungen:

$$V = -\sqrt{(\det V)}^{\text{main}} \cdot \mathbf{1}$$

so daß $\sqrt{V}^{\text{main}} = i \sqrt[4]{(\det V)^{\text{main}}} \cdot \mathbf{1}$

Das Transformationsverhalten ist also

$$\begin{aligned} - \quad V \text{ speziell semi-unitär} &\implies \\ &\implies \sqrt{V}^{\text{main}} \text{ semi-unitär} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \quad V \text{ speziell unitär (} \in \text{SU}(2) \text{)} &\implies \\ &\implies \sqrt{V}^{\text{main}} \text{ unitär} \end{aligned}$$

ii) sonst:

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ -V_{12}^{\text{cc}} & V_{11}^{\text{cc}} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} -|V_{11}| & 0 \\ 0 & -|V_{11}| \end{pmatrix}$$

$$\text{so daß } \sqrt{V}^{\text{main}} = \frac{V + \sqrt{(\det V)^{\text{main}}} \cdot \mathbf{1}}{\sqrt{2(\operatorname{Re} V_{11} + \sqrt{(\det V)^{\text{main}}})^{\text{main}}}}$$

Das Transformationsverhalten ist dann

$$\begin{aligned} - \quad V \text{ speziell semi-unitär} &\implies \\ &\implies \sqrt{V}^{\text{main}} \text{ speziell semi-unitär} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} - \quad V \text{ speziell unitär (} \in \text{SU}(2) \text{)} &\implies \\ &\implies \sqrt{V}^{\text{main}} \text{ speziell unitär} \end{aligned}$$

iii) beide Fälle **i)** und **ii)** formal zusammengefaßt:

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ -V_{12}^{cc} & V_{11}^{cc} \end{pmatrix} \quad \text{beliebig}$$

so daß
$$\sqrt{V}^{\text{main}} = \frac{V + \alpha \sqrt{(\det V)^{\text{main}}} \cdot \mathbf{1}}{\sqrt{2 \left(\operatorname{Re} V_{11} + \alpha \sqrt{(\det V)^{\text{main}}} \right)^{\text{main}}}}$$

mit
$$\alpha = 2 \operatorname{sgn} \det \left(V + \sqrt{(\det V)^{\text{main}}} \mathbf{1} \right) - 1$$

γ) Im allgemeinsten Fall irgendeiner Linearkombination über Elemente aus einer Eichgruppe $U(N)/SU(N)$ bezüglich reeller Koeffizienten ist die Matrix V zumindest mit dem Format $N \times N$ quadratisch und besitzt daher Haupträume (generalisierte Eigenräume)

$$\text{Kernel} \left[\left(V - \mathbf{e} \mathbf{v} \mathbf{a}_i \mathbf{1} \right)^{\text{multiplicity of } \mathbf{e} \mathbf{v} \mathbf{a}_i} \right] ,$$

deren Basisvektoren die Reihen der nun hauptraumwertig verallgemeinerten Version von $\widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{S}_2$ bilden, so daß

$$V = S + N$$

mit
$$S = {}^t \widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{S}_2 \cdot \widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{S}_1 \cdot {}^t \left(\widetilde{\mathbf{E}}\mathbf{S}_2^{-1} \right)$$

und
$$N = \text{nilpotent}$$

S ist also semi-simpel (diagonalisierbar), und für N gilt

$$N^m = 0 \quad \left(m \leq \boxed{\text{group parameter } N} \neq \text{matrix} \right) ,$$

wobei m die höchste Multiplizität eines Eigenvektors von V ist. Ferner gilt

$$[S , N]_- = 0 ,$$

was eine unabdingbare Voraussetzung für die weitere Applikation der

$\mathbf{S} + \mathbf{N}$ - Zerlegung von V ist.

Bevor die Hauptwertwurzel gezogen wird, müssen die Fälle gesondert betrachtet werden, wo V mindestens einen verschwindenden Eigenwert besitzt und gleichzeitig eine Diagonalisierung nicht realisierbar ist ($V \neq \mathbf{S}$). Innerhalb der Gruppen $U(1)$ und $SU(2)$, wo \sqrt{V}^{main} stets definierbar ist, gibt es eine ebenfalls interessante (s. Kapitel 6.2) Projektionsgröße

$$W_{\mu\nu} := \lambda * \text{trace} \left(\left(\sqrt{V_{\mu\nu}}^{\text{main}} - \left[\sqrt{V_{\mu\nu}}^{\text{main}} \right]^\dagger \right) \hat{\tau}^A \right) \hat{\tau}_A$$

bezüglich der ursprünglichen Eichgruppen-Erzeuger (λ ist eine skalare Normierungskonstante des komplexen Zahlenraumes resp. aus einem seiner Unterräume - $V_{\mu\nu}$ kann wie V als eine Kurzform der weiter oben in diesem Kapitel definierten Plaketten-Hybridisierung $V_{\mu\nu}(n)$ aufgefaßt werden, da es gerade um die korrespondierenden algebraischen Eigenschaften geht). Für etwas mehr degenerierte Sonderfälle der Gruppe $SU(2)$ mutiert $W_{\mu\nu}$ selbst dann zur Nullmatrix, wenn es seine Bestandteile (die Differenz der Wurzeln ohne die $\hat{\tau}_A$ bzw. die Hauptwertwurzel für sich allein) noch nicht unbedingt tun. Insofern läßt sich $W_{\mu\nu}$ über die Zuweisung einer Nullmatrix per Definition auf alle vom Umfang der Erzeugerbasis her größeren unitären Eichgruppen ausdehnen, wenn - was dort stets prinzipiell möglich ist - die Hauptwertwurzel \sqrt{V}^{main} über eine Linearkombination der Gruppenelemente in einzelnen Fällen nicht sinnvoll definiert werden kann. In solchen entarteten Fällen wird (später) grundsätzlich nur mit $W_{\mu\nu}$ -haltigen Größen gearbeitet, und diese Fälle sollen bezüglich \sqrt{V}^{main} beiseite gelassen werden.

Es folgt für alle von den soeben diskutierten Definitionsschwierigkeiten nicht berührten Fälle von V entweder ganz simpel

$$\sqrt{V}^{\text{main}} = \sqrt{\mathbf{S}}^{\text{main}} \quad \text{für} \quad V = \mathbf{S}$$

oder über eine endliche binomische Zerlegung ($m =$ höchste Vielfachheit eines der involvierten Eigenwerte wie oben schon)

$$\sqrt{V}^{\text{main}} = \sqrt{\mathbf{S}}^{\text{main}} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\frac{1}{2}!}{k! \left(\frac{1}{2} - k\right)!} (\mathbf{N} \mathbf{S}^{-1})^k$$

für $V \neq S$ und $\det S \neq 0$

mit der \mathbb{C} -Verallgemeinerung der Fakultät

$$z! := \Gamma(z + 1)$$

und der inneren Wurzel ($\sqrt{\text{abs}(\dots)}$ sei wieder standardmäßig positiv)

$$\sqrt{S}^{\text{main}} = {}^t \underline{\underline{ES}}_2 \sqrt{\text{abs}(\underline{\underline{ES}}_1)} \exp\left(\frac{i}{2} \arg(\underline{\underline{ES}}_1)\right) {}^t (\underline{\underline{ES}}_2^{-1})$$

Im Spezialfall von Linearkombinationen von $U(1)$ -Elementen können die $\underline{\underline{ES}}_2$ -Ausdrücke weggelassen werden, weil die Matrix $\underline{\underline{ES}}_2$ dann zu einer skalarwertigen 1 zusammenschrumpft. Für den Fall der Eichgruppe $SU(2)$ wurden bereits spezielle Elaborate unter Punkt $\beta)$ erstellt. Soviel zu $\gamma)$.

Die Wurzel aus einer Matrix sollte die Hauptwertwurzel sein, wenn sich überhaupt eine wohldefinierbare Wurzel finden läßt und diese sich auch noch in eindeutiger Weise fixieren lassen soll. Zur Herstellung von Rotationsinvarianz auf dem Gitter werden Linearkombinationen von unitären oder speziell unitären Matrizen (für die Gruppe $U(1)$ auch trivial 1×1 -matrixwertig) benötigt, die dann im allgemeinen nicht mehr unitär sind. Saubere halbzahlige Potenzen von solchen Konstrukten werden dann für Halbwinkel-Modelle des Feldstärketensors auf dem Gitter benötigt und durch Hauptwertwurzel-Operationen verfügbar gemacht. Allerdings funktioniert dieses Verfahren nur vollständig innerhalb der Gruppen $U(1)$ und $SU(2)$ (sowie in deren Subgruppe $SO(2)$, die aber kaum von praktischem Interesse sein dürfte), weil in höheren unitären (o. ä.) Gruppen die sinnvolle Existenz einer Hauptwertwurzel aus einer Linearkombination von Gruppenelementen nicht sichergestellt werden kann.

Die größte Spielfreiheit bei neuen Modellansätzen für den Feldstärketensor auf dem Gitter und damit auch indirekt für $\Theta_{\mu\nu}$ -Modelle bieten also die Gruppen $U(1)$ und $SU(2)$. Als nichtabelsche Gruppe ist die $SU(2)$ natürlich noch interessanter als die Gruppe $U(1)$. Dies ist der tiefere Grund, warum die Monte-Carlo-Verfahren in Kapitel 8. für die Gruppe $SU(2)$ appliziert wurden. Im nächsten Teilkapitel werden Feldstärketensor-Konzepte für das Raumzeit-Gitter allgemein entwickelt resp. (im Hinblick auf Kapitel 4.) überarbeitet und speziell für die Gruppen $U(1)$ und $SU(2)$ vertieft.

6.2 Vergleich mit U(1)-Konzepten und symbolische Generalisierungen

Das letzte Unterkapitel zum Profil der Gruppe SU(2) soll die in den Abschnitten 4.2 und 6.1 gewonnenen Erkenntnisse in Beziehung zueinander setzen und vertiefen. Mit dieser Zielsetzung werden die theoretischen Vorbereitungen für die Problematik des Gitter-Transfers beim symmetrischen Energie-Impuls-Tensor abgeschlossen.

In Kapitel 4.2 wurden die für nichtabelsche Gruppen zunächst noch symbolischen (auch im Hinblick auf die Notation) Definitionsansätze

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)} := \frac{l}{\kappa} \sin\left(\frac{\kappa}{l} \operatorname{mod}\left(\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}, \text{period}\right)\right) \quad \forall \quad l \in \{1, 2\} \quad (6.2.1)$$

für verbesserte Feldstärketensor-Modelle auf dem Gitter eingeführt. Mit den Erkenntnissen des vorangehenden Teilkapitels kann man die symbolische Notation durch die beiden Spezifikationen

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2i\kappa} \left(U_{\mu\nu} - U_{\mu\nu}^\dagger \right) \quad (6.2.2)$$

und

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{i\kappa} \left(\sqrt{U_{\mu\nu}}^{\text{main}} - \sqrt{U_{\mu\nu}}^{\text{main}\dagger} \right) \quad (6.2.3)$$

präzisieren, die im Falle der Eichgruppe U(1) mit den bereits vorgenommenen Konkretisierungen

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{\kappa} \sin \vartheta_{\mu\nu} = \frac{1}{\kappa} \sin \bar{\vartheta}_{\mu\nu} \quad (6.2.4)$$

und

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)} = \frac{2}{\kappa} \sin \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\operatorname{mod}(\vartheta_{\mu\nu} - |\varepsilon|, 2\pi) - \pi}{2} = \frac{2}{\kappa} \sin \frac{\bar{\vartheta}_{\mu\nu}}{2} \quad (6.2.5)$$

harmonisieren. Für 4-Plaketten-Mittelungen zur Wiederherstellung von Rotationsinvarianz auf dem Gitter braucht in (6.2.2) und (6.2.3) lediglich die bereits in 6.1 beschriebene Substitution (Beibehaltung des Ansatzpunktes)

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}(n) \quad \longrightarrow \quad V_{\mu\nu}(n) := & \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2} \hat{\partial}_\mu^L \hat{\partial}_\nu^L \right) U_{\mu\nu}(n) + \right. \\ & \left. + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4} \left[U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu}) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\nu}) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right]$$

vorgenommen werden. Im Falle von $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ gilt aufgrund der linearen Konstruktion

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}(U_{\mu\nu}(n) \longrightarrow V_{\mu\nu}(n)) &= \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2} \hat{\partial}_\mu^L \hat{\partial}_\nu^L \right) \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}(U_{\mu\nu}(n)) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}(U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu})) \right] \end{aligned}$$

Zwei weitere besonders einfache Zusammenhänge gelten simultan jeweils in den Gruppen U(1) und SU(2). Hier sollen die beiden Feldstärketensor-Modelle $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ jeweils für den in doppelter Hinsicht regulären Fall $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\dots)} = \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(\dots)}(U_{\mu\nu}(n))$ und $U_{\mu\nu} \in \text{SU}(2) \setminus \{-\mathbf{1}\}$ verglichen werden. Als erstes kann beobachtet werden, daß dann jeweils eine Gitterkorrelation zwischen $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ besteht, die beide Konstruktionen einzig und allein durch die Transformation einer skalaren Koeffizienten-Funktion in Abhängigkeit von $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ aufeinander abzubilden vermag:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} = \sqrt{\frac{\text{trace } \mathbf{1}}{\text{trace} \left(\mathbf{1} + \left(\frac{i\kappa}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} \right)^2 \right)}} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)} \quad \text{main}$$

Außerdem sind zum zweiten die Reprojektionen $[\mathbf{R}]$ von $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(1)}$ und $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ auf die eigenen Gruppengeneratoren innerhalb der genannten Gruppen U(1) und SU(2) jeweils identische Abbildungen (der Anwendungsbereich von (6.2.7) beschränke sich auf den in wie oben präzisiert doppelter Hinsicht regulären Fall):

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)}[\mathbf{R}] := 2 \text{trace} \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)} \hat{\tau}^A \right) \hat{\tau}_A \quad \forall l \in \{1, 2\} \quad (6.2.6)$$

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)} = \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)}[\mathbf{R}] \quad \text{bezüglich U(1), SO(2), SU(2)-Lie-Algebren} \quad (6.2.7)$$

Diese Beobachtungen sind sehr nützlich für das Entwerfen und Gestalten verschiedener $\Theta_{\mu\nu}$ -Modelle auf dem Gitter. Sie dokumentieren, daß die symbolische Verallgemeinerung der in (6.2.1) beschriebenen Sinus-Schwingungen

über die Feldstärketensor-Prototypen auf dem Gitter bis zu einem gewissen Grade von der skalaren Gruppe $U(1)$ tatsächlich auf die nichtabelsche Gruppe $SU(2)$ ausgedehnt werden können. Bei größeren unitären Eichgruppen wird diese Selbstähnlichkeit durch zu viele Freiheitsgrade behindert. Gerade deshalb ist es besonders interessant, die Gruppe $SU(2)$ zu studieren, die zwar noch systemübergreifende Gemeinsamkeiten mit der Gruppe $U(1)$ besitzt und dennoch der chromodynamischen $SU(3)$ sehr viel ähnlicher ist als etwa die Gruppe $U(1)$. Die hier diskutierten Eigentümlichkeiten können bei den konkreten Definitionen der Gittermodelle für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor ausgenutzt werden, sofern die betroffenen Eichgruppen und/oder Feldstärketensor-Modelle den Definitionsrahmen prägen sollen. Details in Kapitel 7.

In Abschnitt 6.1 wurde die Hauptwertwurzel aus einer Linear-Kombination V von $SU(2)$ -Matrizen gezogen. Dafür wurde der Hilfsparameter (Quadratwurzeln von skalaren Urbildern sollen für den Rest dieses Kapitels stets implizit als Hauptwertwurzeln aufgefaßt werden - als Kontrast zu der verbleibenden Hauptwertwurzel-Etikettierung bei Matrizen, wo eine solche Prozedur nicht so einfach ist)

$$\alpha = 2 \operatorname{sgn} \det \left(V + \sqrt{\det V} \cdot \mathbf{1} \right) - 1$$

konstruiert. Konkret gab und gibt es nur zwei verschiedene α -Werte, nämlich

$$\alpha \left(V \neq -\sqrt{\det V} \cdot \mathbf{1} \right) = +1$$

und

$$\alpha \left(V = -\sqrt{\det V} \cdot \mathbf{1} \right) = -1$$

Es sollen nun für 4-Plaketten-Mittelungen über die Gruppe $SU(2)$ Gitter-Feldstärketensoren konstruiert werden. Die allgemeine eichgruppenübergreifende Form ergab sich bereits aus (6.2.2) und (6.2.3) via der Substitution $U_{\mu\nu} \in SU(2) \longrightarrow V_{\mu\nu}$. Für die besonders interessante Gruppe $SU(2)$ lassen sich (6.2.2) und (6.2.3) beträchtlich vereinfachen.

Sei dazu nun in etwas umgestalteter Schreibweise

$$\alpha(\mu, \nu) := \alpha \left(V_{\mu\nu} \stackrel{?}{=} \dots \right) \in \{ -1, +1 \}$$

bezüglich der bereits erwähnten Hilfsgröße α und noch etwas umfassender

$$\alpha(\rho, \sigma; \xi, \eta) := \left(\alpha(\rho, \sigma), \alpha(\xi, \eta) \right)$$

Dann gilt für diese Situationen ($\kappa = g_0(a) a^2$, vgl. o.)

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(1)} = \frac{1}{2i\kappa} \left(V_{\mu\nu} - V_{\mu\nu}^\dagger \right) = \frac{1}{\kappa} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} V_{\mu\nu}^{11} & -i V_{\mu\nu}^{12} \\ (-i V_{\mu\nu}^{12})^{\text{cc}} & -\operatorname{Im} V_{\mu\nu}^{11} \end{pmatrix}$$

und für

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{i\kappa} \left(\sqrt{V_{\mu\nu}}^{\text{main}} - \sqrt{V_{\mu\nu}}^{\text{main}\dagger} \right)$$

mit (eigentlich selbstevident) $\sqrt{V_{\mu\nu}}^{\text{main}\dagger} := \left[\sqrt{V_{\mu\nu}}^{\text{main}} \right]^\dagger$

einerseits

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{1}{\kappa} \sqrt{\frac{2}{\operatorname{Re} V_{\mu\nu}^{11} + \sqrt{\det V_{\mu\nu}}}} \begin{pmatrix} \operatorname{Im} V_{\mu\nu}^{11} & -i V_{\mu\nu}^{12} \\ (-i V_{\mu\nu}^{12})^{\text{cc}} & -\operatorname{Im} V_{\mu\nu}^{11} \end{pmatrix}$$

für $\alpha(\mu, \nu) = +1$

und andererseits

$$\tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu}^{(2)} = \frac{2}{\kappa} \sqrt[4]{\det V_{\mu\nu}} \cdot \mathbf{1}$$

für $\alpha(\mu, \nu) = -1$

Die später diskutierten Gitter-Energie-Impuls-Tensoren enthalten teilweise Kerne der Form

$$\operatorname{trace} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{(l)} \tilde{\mathcal{F}}_{\xi\eta}^{(l)} \right) \quad .$$

Hier interessiert jetzt vor allen Dingen der Kern

$$\langle \rho \sigma \xi \eta \rangle := \operatorname{trace} \left(\tilde{\mathcal{F}}_{\rho\sigma}^{(2)} \tilde{\mathcal{F}}_{\xi\eta}^{(2)} \right) \quad ,$$

da das Vollwinkel-Pendant so einfach strukturiert ist, daß es keiner weiteren Erläuterung bedarf. Es folgt

$$\langle \rho \sigma \xi \eta \rangle = \frac{4}{\kappa^2} \frac{\operatorname{Im} V_{\rho\sigma}^{11} \operatorname{Im} V_{\xi\eta}^{11} + \operatorname{Re} V_{\rho\sigma}^{12} \operatorname{Re} V_{\xi\eta}^{12} + \operatorname{Im} V_{\rho\sigma}^{12} \operatorname{Im} V_{\xi\eta}^{12}}{\sqrt{\operatorname{Re} V_{\rho\sigma}^{11} + \sqrt{\det V_{\rho\sigma}}} \sqrt{\operatorname{Re} V_{\xi\eta}^{11} + \sqrt{\det V_{\xi\eta}}}}$$

$$\text{für } \alpha(\rho, \sigma; \xi, \eta) = (+1, +1)$$

$$\langle \rho \sigma \xi \eta \rangle = 0 \quad \text{für } \alpha(\rho, \sigma; \xi, \eta) \in \{(-1, +1), (+1, -1)\}$$

$$\langle \rho \sigma \xi \eta \rangle = \frac{8}{\kappa^2} \sqrt{(V_{\rho\sigma} \cdot V_{\xi\eta})^{11}}$$

$$\text{für } \alpha(\rho, \sigma; \xi, \eta) = (-1, -1)$$

(wobei zum Beispiel schematisch gilt: $V_{\rho\sigma}^{12}$ = das in der 1. Zeile und 2. Spalte sitzende Element der Matrix $V_{\rho\sigma}$)

$\langle \rho \sigma \xi \eta \rangle$ ist deshalb für die α -gemischten Zustände Null, weil die Spur des gemischten Produktes aus einer Einheits-Matrix und einer spurlosen hermiteschen Matrix gewählt wird, während für einheitliches α eines der beiden matrixwertigen Argumente jeweils vorher quadriert wird. Wenn $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ über ein Verfahren wie in Beziehung (6.2.6) auf die SU(2)-Erzeuger reprojiziert wird, gilt für den modifizierten Kern

$$\langle \rho \sigma \xi \eta \rangle^{[R]} := \text{trace} \left(\mathcal{F}_{\rho\sigma}^{(2)[R]} \mathcal{F}_{\xi\eta}^{(2)[R]} \right)$$

auch im Falle von $\alpha(\rho, \sigma; \xi, \eta) = (-1, -1)$

$$\langle \rho \sigma \xi \eta \rangle^{[R]} = 0$$

Für konkrete Erwartungswertbildungen jedoch sind alle

$\alpha(\rho, \sigma; \xi, \eta) \neq (+1, +1)$ als einzelne diskrete Spezialfälle von $V_{\rho\sigma}$ und/oder $V_{\xi\eta}$ relativ zu einer kontinuierlichen $V_{\rho\sigma}$ - und $V_{\xi\eta}$ -Verteilung mit der Zehnerpotenz der signifikanten Stellen der reellen Zahlen im Arbeitsspeicher des exekutablen Software-Programms bzw. mit deren Quadrat (für $\alpha(\rho, \sigma; \xi, \eta) = (-1, -1)$) unterdrückt, so daß die durch diese Subtilitäten verursachten systematischen Abweichungen weit unter der Schwelle der Rechengenauigkeit liegen. Daher sind solche Betrachtungen rein akademischer Natur und schließen damit jetzt das letzte rein theoretische Kapitel dieser Arbeit ab.

Kapitel 7

GITTER-MODELLE FÜR DEN SYMMETRISCHEN ENERGIE-IMPULS-TENSOR

7.1 Bisher existierende Modelle

Ziel dieses Abschnittes ist es, Literaturbeispiele für Gittermodelle des Energie-Impuls-Tensors zu präsentieren. Eingangs werden bei den Literaturmodellen verwendete technische Feinheiten erläutert. Dabei wird soweit ausgeholt, daß gleichzeitig auch ausreichende Grundlagen für die Definition eines neuartigen Modells im Rahmen dieser Arbeit im nächsten Unterkapitel geschaffen werden.

Bevor also konkrete Modelle präsentiert werden, sollen im speziellen noch einmal kurz und in endgültiger Nomenklatur die zwei wesentlichen Methoden angesprochen werden, mit denen Gitter-Artefakte verringert werden sollen.

α) Ein Modell ('MODEL' stehe als Platzhalter für irgendeine Bezeichnung) soll dann 'MODEL PURE' genannt werden, wenn mit Plakettenvariablen $U_{\mu\nu}(n)$ gearbeitet wird, die sich im Sinne des verwendeten Koordinatensystems nur vorwärts in den Richtungen $+\hat{\mu}$ und $+\hat{\nu}$ erstrecken.

Diese gitterphysikalisch klassische Ausgangssituation kann verbessert werden, indem auf dem Gitter die Rotationsinvarianz wiederhergestellt wird. Das geschieht am besten über eine Substitution der zentralen Größe $U_{\mu\nu}(n)$ via (Bezug jeweils auf den gleichen Ansatzpunkt)

$$\begin{aligned}
U_{\mu\nu}(n) &\longrightarrow \frac{1}{2} \left[\left(\mathbf{1} - \frac{1}{2} \hat{\partial}_\mu^L \hat{\partial}_\nu^L \right) U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right] = \\
&= \frac{1}{4} \left[U_{\mu\nu}(n) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu}) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\nu}) + U_{\mu\nu}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right] ,
\end{aligned}$$

wenn dieselbe Ersetzung simultan für $U_{\mu\nu}^\dagger(n)$ vorgenommen wird. Das entstehende neue Schema wird als **'MODEL HYBRID'** bezeichnet. Für ein anschließend vorgeführtes italienisches Modell namens **'CARA'** (in dieser Arbeit zugewiesenes Kurzform-Kürzel) ist zwar seitens der Autoren eine Definition gewählt worden, die in der hier benutzten Nomenklatur äquivalent zu der Vorschrift **'CARA := CARA HYBRID'** wäre; dennoch kann zu Vergleichszwecken ein Modell des Typs **'CARA PURE'** künstlich als zusätzliche Alternative rekonstruiert werden. Von einer derartigen Möglichkeit wird natürlich Gebrauch gemacht.

β) Im Falle einer Situation des Typs **'MODEL PURE'** (hier stören weniger Finessen) sind die bereits definierten verbesserten Gitter-Feldstärketensoren $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)}$ hermitesch wie die Generatoren von $U_{\mu\nu}$, könnten aber über deren Basis hinausgehen, weil Artefakt-Erzeuger (eingehendere Erläuterung folgt unmittelbar durch den Kontext) bezüglich des eventuell nichttrivial existierenden Komplementärsektors $\{U(N) \setminus \text{Referenzgruppe}\}$ durch die $U_{\mu\nu}$ -Exponentiation erzeugt werden könnten und anschließend möglicherweise nicht vollständig durch die Differenzbildung mit der hermiteschen Konjugation des entstandenen Ausdrucks entfernt werden. Der einfachste Weg, solche Artefakt-Erzeuger abzuschneiden, wurde bereits in Kapitel 6.2 vorgestellt (zur Definition von $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)}$ siehe dort (6.2.1)):

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)} \longrightarrow \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)[R]} := 2 \operatorname{trace} \left(\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)} \hat{\tau}^A \right) \hat{\tau}_A \quad (7.1.1)$$

Für den Vollwinkel-Ansatz sollte diese Verfeinerung bereits ausreichend sein - auch im Falle von Linearkombinationen über Gruppenelemente (**'MODEL HYBRID'** z. B.), da die $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)}$ -Hermitisierung $\frac{1}{2i\kappa} \left(V_{\mu\nu} - V_{\mu\nu}^\dagger \right)$ selbst nicht diagonalisierbare (aber natürlich bezüglich des Matrixformats immer noch quadratische) Urbilder $V_{\mu\nu}$ aus-

reichend vorbereitet (anpaßt) und anschließend alle Fremderzeuger wegprojiziert werden.

Beim Halbwinkel-Ansatz $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}$ sind jedoch zwei Subtilitäten zu beachten. Erstens kann es innerhalb der quantitativ unbedeutenden Untermenge weder diagonalisierbarer noch invertierbarer Kandidaten von Linearkombinationen $V_{\mu\nu}$ speziell (oder auch nicht speziell) unitärer (oder orthogonaler) Matrizen außerhalb der Gruppen $U(1)$, $SO(2)$, $SU(2)$ sein, daß aus $V_{\mu\nu}$ keine geeignete (im Hinblick auf irgendeine grundständige Definition ohne l'Hospital'sche Vorschriften für singuläre Situationen) Hauptwertwurzel gezogen werden kann. Nach den Gesichtspunkten von Kapitel 6.1 kann in diesen seltenen Fällen in intuitiv überzeugender Weise eine Null-Defintion für die Fortsetzung von $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}[\mathbb{R}]$ auf solche Domänen angesetzt werden.

Zweitens kann eine Hauptwertwurzel bei der getroffenen Festlegung, die Hauptwertanweisung auf die Eigenwerte abzustreifen, in natürlicher Weise aus der Gruppe $SU(N)$ in die Gruppe $U(N)$ hineintunneln. Auf der anderen Seite entsteht der gleiche Effekt noch viel häufiger durch Exponentiation mit unvollständig wirksamer Re-Hermitisierung - wie bereits beschrieben. Sollte ein nicht verschwindender Ausdruck der Form $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}$ durch das Entfernen der Artefakt-Erzeuger alle seine Beiträge verlieren, so kann man davon ausgehen, daß diese in solchen Fällen in erster Linie von der Hauptwertwurzel und nicht von Exponentiationsrückständen generiert wurden. Exponentiationen streuen sehr stark bei $SU(N)$ -Erzeuger-Gemischen, bei $SU(N) \rightarrow U(N)$ -Wurzeleffekten in der Regel jedoch überhaupt nicht (die Exponentiation eines diagonalen $U(N)$ -Erzeugers ist wieder diagonal). Hauptwertwurzel-Effekte dürfen demnach nicht mit der sonstigen Verunreinigung von $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}$ durch Artefakt-Erzeuger in ein einheitliches Schema gepreßt werden.

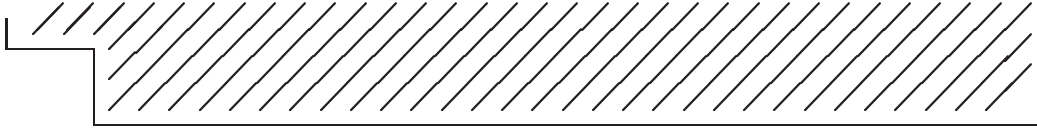
Eine sanfte Methode, in Einklang mit den diskutierten Besonderheiten unnötige Artefakt-Erzeuger von Gitter-Feldstärketensoren zu entfernen und gleichzeitig Defintionslücken zu umgehen, liegt in der neuen Operation

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)} \longrightarrow \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)'} \quad \forall \quad l \in \{1, 2\}$$

mit den kombinierten Optionen (\neg steht für Negation, $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(l)}[\mathbb{R}]$ wurde in (7.1.1) definiert)

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)'} := \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(1)[R]} \quad (7.1.2a)$$

$$\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)'} := \begin{cases} 0 & \text{falls } \neg \exists \sqrt{V_{\mu\nu}}^{\text{main}} \\ \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)} & \text{falls } \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)[R]} = 0 \\ \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)[R]} & \text{sonst} \end{cases} \quad (7.1.2b)$$



So weit zu den artefaktverringern Prozeduren. Außerdem stellt sich noch die Frage, ob ein Kern der Form $\text{trace}\left(\sqrt{A}^{\text{main}} \sqrt{B}^{\text{main}}\right)$ eichinvariant sein kann. Physikalische Halbwinkel-Modelle für symmetrische Energie-Impuls-Tensoren bestehen aus Linearkombinationen von solchen Elementen beziehungsweise Verfeinerungen durch die Entfernung überflüssiger Artefakt-Erzeuger. Der Einfluß solcher Verfeinerungen manifestiert sich ganz analog zu den Vollwinkel-Modellen, wo seine Handhabung bereits durch Vorgängermodelle etabliert ist. Das Novum des Halbwinkel-Ansatzes kann also auch im Hinblick auf Eichinvarianz stellvertretend anhand des Transformationsverhaltens des Elements $\text{trace}\left(\sqrt{A}^{\text{main}} \sqrt{B}^{\text{main}}\right)$ diskutiert werden. Auch die Modifikationen von Linearkombinationen über Gruppenmatrizen können auf diesen Fall leicht zurückgeführt werden.

Zum Nachweis der Eichinvarianz im gewünschten Fall wird folgendes Lemma (7.1.3) benötigt. Für irgendeine über die Koordinatentransformation A diagonalisierbare Matrix $M = A D A^{-1}$ mit Diagonal-Repräsentation D soll gelten:

$$\sqrt{A D A^{-1}} \stackrel{!}{=} A \sqrt{D} A^{-1} \quad , \quad \sqrt{\quad} := \sqrt{\quad}^{\text{main}} \quad (7.1.3)$$

Dieser Zusammenhang wurde schon sehr häufig benutzt und läßt eine schnelle Beweisführung über die Bestätigung der Eindeutigkeit ($\sqrt{\quad}^{\text{main}}$ -Identifikation der Quadratwurzel $\sqrt{\quad}$) und folgende hier kurz dargestellte Quadrierung

$$\left(\sqrt{A D A^{-1}}\right)^2 = A D A^{-1} = A (\sqrt{D})^2 A^{-1} =$$

$$= A (\sqrt{D} \mathbf{1} \sqrt{D}) A^{-1} = A \sqrt{D} A^{-1} A \sqrt{D} A^{-1} = (A \sqrt{D} A^{-1})^2$$

zu.

Sei $\mathbf{G} \equiv \mathbf{G}(n)$ nun eine (speziell) unitäre ortsabhängige Eichtransformation und \mathbf{D}_i die jeweiligen Diagonalisierungen für zwei verschiedene (z. B. unterschiedliche Raumrichtungen) aber an ein und demselben Gitterpunkt n startende und auslaufende Plaketten U_i , $i \in \{1, 2\}$, mit

$$U_i = \mathbf{g}_i \mathbf{D}_i \mathbf{g}_i^{-1} \quad .$$

Nach (7.1.3) folgt

$$\sqrt{U_i} = \mathbf{g}_i \sqrt{\mathbf{D}_i} \mathbf{g}_i^{-1} \quad .$$

Algebraisch gesehen spielt die Anordnung der Eigenwerte in \mathbf{D}_i keine Rolle (lediglich bei nichtdiagonalisierbaren Matrizen wäre es ungeschickt, bei der Diagonalisierung des semi-simplen Anteils die Haupträume durcheinanderzuwirbeln - hier sind aber die U_i mindestens unitär und daher automatisch diagonalisierbar), bei einer Umordnung würden sich die Koordinatentransformationen \mathbf{g}_i ändern, nicht jedoch die U_i . Trotz der Invarianz der U_i kann aber für die \mathbf{D}_i eine Spezifikationsfixierung vorgenommen werden - zum Beispiel nach aufsteigender Eigenwert-Reihenfolge, wenn etwa die Größe des Realteils der Eigenwerte als eines der möglichen Kriterien dafür benutzt wird. Sei $U_1 = A$, $U_2 = B$ und $\sqrt{\quad}$ wieder ein Kürzel für $\sqrt{\quad}^{\text{main}}$. Dann müßte jetzt gezeigt werden können, daß

$$\mathbf{A} \equiv \text{trace} \left(\sqrt{U_1'} \sqrt{U_2'} \right) := \text{trace} \left(\sqrt{\mathbf{G} U_1 \mathbf{G}^{-1}} \sqrt{\mathbf{G} U_2 \mathbf{G}^{-1}} \right)$$

gleichwertig zu

$$\text{trace} \left(\sqrt{U_1} \sqrt{U_2} \right)$$

ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \text{trace} \left(\sqrt{\mathbf{G} U_1 \mathbf{G}^{-1}} \sqrt{\mathbf{G} U_2 \mathbf{G}^{-1}} \right) = \\ &= \text{trace} \left(\sqrt{\mathbf{G} \mathbf{g}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{g}_1^{-1} \mathbf{G}^{-1}} \sqrt{\mathbf{G} \mathbf{g}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{g}_2^{-1} \mathbf{G}^{-1}} \right) = \\ &= \text{trace} \left(\sqrt{(\mathbf{G} \mathbf{g}_1) \mathbf{D}_1 (\mathbf{G} \mathbf{g}_1)^{-1}} \sqrt{(\mathbf{G} \mathbf{g}_2) \mathbf{D}_2 (\mathbf{G} \mathbf{g}_2)^{-1}} \right) \end{aligned}$$

Die lokale unitäre Eichtransformation \mathbf{G} kann als Spezialfall einer Koordinatentransformation mit den Ähnlichkeitstransformationen (diagonalisierenden Koordinatentransformationen) \mathbf{g}_i zu den neuen Koordinatentransformationen \mathbf{H}_i verkettet werden, und bezüglich dieser \mathbf{H}_i kann das Lemma

(7.1.3) appliziert werden. Man erhält

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \text{trace} \left(\sqrt{\mathbf{H}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{H}_1^{-1}} \sqrt{\mathbf{H}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{H}_2^{-1}} \right) = \\
&= \text{trace} \left(\left(\mathbf{H}_1 \sqrt{\mathbf{D}_1} \mathbf{H}_1^{-1} \right) \left(\mathbf{H}_2 \sqrt{\mathbf{D}_2} \mathbf{H}_2^{-1} \right) \right) = \\
&= \text{trace} \left(\left(\mathbf{G} \mathbf{g}_1 \right) \sqrt{\mathbf{D}_1} \left(\mathbf{G} \mathbf{g}_1 \right)^{-1} \left(\mathbf{G} \mathbf{g}_2 \right) \sqrt{\mathbf{D}_2} \left(\mathbf{G} \mathbf{g}_2 \right)^{-1} \right) = \\
&= \text{trace} \left(\mathbf{G} \mathbf{g}_1 \sqrt{\mathbf{D}_1} \mathbf{g}_1^{-1} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \mathbf{g}_2 \sqrt{\mathbf{D}_2} \mathbf{g}_2^{-1} \mathbf{G}^{-1} \right)
\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der zyklischen Eigenschaft der Spur über ein Matrizenprodukt und der anschließenden umgekehrt gerichteten Anwendung von (7.1.3) folgt

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \text{trace} \left(\mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \left(\mathbf{g}_1 \sqrt{\mathbf{D}_1} \mathbf{g}_1^{-1} \right) \mathbf{G}^{-1} \mathbf{G} \left(\mathbf{g}_2 \sqrt{\mathbf{D}_2} \mathbf{g}_2^{-1} \right) \right) = \\
&= \text{trace} \left(\mathbf{1} \sqrt{\mathbf{g}_1 \mathbf{D}_1 \mathbf{g}_1^{-1}} \mathbf{1} \sqrt{\mathbf{g}_2 \mathbf{D}_2 \mathbf{g}_2^{-1}} \right) = \\
&= \text{trace} \left(\sqrt{\mathbf{U}_1} \sqrt{\mathbf{U}_2} \right) \quad , \quad \text{q. e. d.}
\end{aligned}$$

\mathbf{A} ist also tatsächlich ein eichinvarianter Kombinationsbaustein, über dessen dann ebenfalls eichinvariante Linearkombinationen in den Gitter-Feldstärkentensoren quadratische Neudefinitionen von Gitter-Größen erfolgreich zusammengebaut werden können. Natürlich sind solche Dinge absolut banal, dennoch sollten sie repräsentativ für die vielfache Applikation in dieser Arbeit wenigstens ein einziges Mal mit nicht zu knapper Liebe zum Detail illuminiert werden.

Nun steht nichts mehr im Wege, fertige Gitter-Modelle für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor vorzustellen. Die bisherigen Versuche, $\Theta_{\mu\nu}$ auf das Gitter zu setzen, sind eigentümlicherweise wohl eher seltene Einzelfälle (s. a. Kapitel 2). Ganz offensichtlich sind bis zum Zeitpunkt dieser Arbeit insbesondere folgende zwei signifikante Vorstöße vorgenommen worden, denen der Rest dieses Teilkapitels gewidmet sei.

i) S. Caracciolo, G. Curci, P. Menotti, A. Pelissetto in [4] und [5] :

Was diese Autor(inn)en der Gitter-Gruppe aus Pisa für $\Theta_{\mu\nu}$ auf dem Raumzeit-Gitter vorschlagen, kann in der Terminologie dieser Arbeit als

$$\begin{aligned}
\Theta_{\mu\nu}^{\text{cara}} &= \left(\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \delta^{\rho\xi} \delta^{\sigma\eta} + 2 \delta_{\mu}^{\rho} \delta^{\sigma\xi} \delta_{\nu}^{\eta} \right) \cdot \\
&\cdot \text{trace} \left(\begin{array}{c} \mathcal{F}_{\rho\sigma}^{(1)'} \\ \mathcal{F}_{\xi\eta}^{(1)'} \end{array} \right) \Bigg|_{\text{HYBRID anzuwenden}} \quad (7.1.4)
\end{aligned}$$

geschrieben werden. Es liegt also ein konsequentes (reinrassiges) Vollwinkel-

Modell vor. Die Gruppe hält eine Hybridisierung des Typs (Rotation der beteiligten Plaketten auf denselben Ansatzpunkt, kein Clover-Konzept ([13], [55]))

$$\mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}}^{(1)'} \longrightarrow \frac{1}{4} \left[\mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}}^{(1)'}(n) + \mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}}^{(1)'}(n - \hat{\mu}) + \mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}}^{(1)'}(n - \hat{\nu}) + \mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}}^{(1)'}(n - \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right]$$

für essentiell, was aufgrund der Linearität von $\mathcal{F}_{\tilde{\mu\nu}}$ in $U_{\mu\nu}$ und $U_{\mu\nu}^\dagger$ (nichts weiter als Richtungsänderung) genauso gut auf Plakettenebene durch die Anweisung **'HYBRID'** umgesetzt werden kann. Natürlich wird bei den Monte-Carlo-Meßreihen in Kapitel 8.2 auch das entsprechende **'PURE'**-Pendant getestet - selbst wenn es in Zusammenhanglosigkeit mit der Auffassung dieser Autoren stehen sollte (es interessiert in dieser Form allein schon als reinrassiges Vollwinkel-Pendant zum speziell in dieser Arbeit entwickelten konsequenten Halbwinkel-Modell, siehe anschließend Abschnitt 7.2). Es wird daher nachfolgend in rein symbolischer Notation zwischen **'CARAPURE'** (in Abwesenheit des geforderten Hybridisierungs-Verfahrens umgestaltete Primitiv-Variante des Vollwinkel-Modells, aber mit Artefakt-Erzeuger-Entfernung) und **'CARAHYBRID'** (originalgetreuer Transfer der Idee der Gruppe aus Pisa, also **'CARA'** \longrightarrow **'CARAHYBRID'**) unterschieden.

Durch die Hybridisierungs-Routine wird Rotationsinvarianz auf dem Gitter realisiert. Ein Vorteil des in dieser Art und Weise formulierten Vollwinkel-Modells ist, daß es eine Erhaltung des $SU(N)$ -Typs von $\Theta_{\mu\nu}^{\text{caraHYBRID}}$ auf dem Gitter gewährleisten kann - jedoch nur perturbativ in 1-Schleifen-Ordnung.

ii) F. Karsch und H. W. Wyld in [28] :

Es ist ein empfindlicher Nachteil der vorangehenden Version i), daß die Hamilton'sche Dichte Θ_{44} quadratisch bezüglich der $U_{\mu\nu}'$ s ist, während die Standardform der Lagrangedichte auf dem Gitter 1. Ordnung in den $U_{\mu\nu}'$ s ist. Benutzt man geeignete Generalisierungen der betreffenden nichtrelativistischen Größen, so muß man in konsequent euklidisierter Übersetzung (einschließlich Absorption imaginärer Vorfaktoren) an und für sich

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_{\text{kin}} + \mathcal{E}_{\text{pot}}$$

und

$$\mathcal{H} = \Theta_{44} = -\epsilon_{\text{kin}} + \epsilon_{\text{pot}}$$

erwarten. Nimmt man dieses Schema ernst, so ist das vorangehende Pisa-Modell nicht kompatibel mit der Wilson'schen Lagrangedichte

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa^2} \sum_{\substack{\mu, \nu \\ \mu \neq \nu}} \left(2N - \text{trace} \left(U_{\mu\nu} + U_{\mu\nu}^\dagger \right) \right) .$$

Die Autoren Karsch und Wyld überlisten diese Schwierigkeit durch nachstehende hybride Konstruktion (angepaßt an eine inkl. i -Absorption euklidisierte Interpretation und die darin normierte Flachraum-Metrik $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ - formuliert in der Terminologie dieser Arbeit; entsprechende Übersetzungen sind wechselseitig eindeutig)

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{karsch}} = -\frac{2}{\kappa^2} \text{trace} \left(-\sum_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq \mu}} U_{\mu\lambda} + \sum_{\substack{\sigma, \lambda \\ \sigma, \lambda \neq \mu, \sigma > \lambda}} U_{\sigma\lambda} \right) + \mathcal{O}(\kappa^2)$$

für $\mu = \nu$ (7.1.5a)

und

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{karsch}} = -2 \delta^{\sigma\lambda} \text{trace} \left(\mathcal{F}_{\mu\sigma}^{(1)'} \mathcal{F}_{\nu\lambda}^{(1)'} \right) \quad \text{für } \mu \neq \nu \quad (7.1.5b)$$

Ob eine 4-Plaketten-Hybridisierung automatisch mitzudenken ist oder nicht, wird von den Autoren nicht klar herausgearbeitet. In 8.2 werden ohnehin die Applikationen **'KARSCH PURE'** und **'KARSCH HYBRID'** im Sinne der Meßreihen und einer anschließenden Diskussion aufeinander losgelassen.

Unter gewissen Umständen (s. Kapitel 8.1) kann dieses Modell für $\mu = \nu$ als kryptischer Durchgang durch ein Halbwinkel-Verfahren gedeutet werden - wahrscheinlich ohne kognitive Aufbereitung durch die Autoren. Die Nichtdiagonalkomponenten des Modells haben jedoch Vollwinkel-Charakter. Um es kurz noch einmal zu wiederholen - die Winkel-Interpretationen wurden durch die symbolischen U(1)-Verallgemeinerungen

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(l)} = \frac{l}{\kappa} \sin \left(\frac{\kappa}{l} \text{mod} \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}, \text{period} \right) \right), \quad \text{Modell-Winkel} = \frac{\text{Voll-Winkel}}{l \in \{1, 2\}}$$

inspiriert. Diese künstlichen Winkel beziehen sich auf das einer Plakette zugeordnete primäre Feldstärketensor-Konstrukt und nicht auf die um einen

Index ärmeren Eichfelder. Numerisch verursacht die implizit wirksame hermaphroditische Winkel-Kategorisierung beim vorliegenden Modell gewisse Konvergenzschwierigkeiten und Harmoniestörungen. Alle sekundären Fakten über solche Mechanismen werden nach Kapitel 8.2 ausgegliedert.

Dies sind die maßgeblichen Vorgängermodelle für $\Theta_{\mu\nu}$ auf dem Gitter, die für diese Arbeit zur Verfügung stehen konnten. Im nächsten Teilkapitel folgt meine eigene Idee.

7.2 Ein alternatives Modell

Wie bereits angekündigt, darf der Rest von Kapitel 7 für die Präsentation einer Neuentwicklung genutzt werden. Das durch diese Arbeit motivierte neuartige Modell für $\Theta_{\mu\nu}$ auf dem Gitter ist genauso wie i) ein reines Substitutionsmodell:

iii) **eine neue Gitter-Version für $\Theta_{\mu\nu}$:**

$\Theta_{\mu\nu}^{\text{own}}$ geht aus der Kontinuumsvariante von $\Theta_{\mu\nu}$ hervor, indem dort einheitlich $F_{\mu\nu}$ durch $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)l}$ ersetzt wird:

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{own}} := \left(\frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \delta^{\rho\xi} \delta^{\sigma\eta} + 2 \delta_{\mu}^{\rho} \delta^{\sigma\xi} \delta_{\nu}^{\eta} \right) \text{trace} \left(\mathcal{F}_{\rho\sigma}^{(2)l} \mathcal{F}_{\xi\eta}^{(2)l} \right) \quad (7.2.1)$$

In allgemeinrelativistischer Form und in partiell symbolischer matrixtrigonometrischer Notation erhält man für die Gruppen U(1) und SU(2), wo dann mit den in Kapitel 7.1 getroffenen Vereinbarungen $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)l} = \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$ gilt,

$$\begin{aligned} \Theta_{\mu\nu}^{\text{own}} = & \frac{2}{(g_0(a) a^2)^2} \left(g_{\mu\nu} g^{\rho\xi} g^{\sigma\eta} + 4 \delta_{\mu}^{\rho} g^{\sigma\xi} \delta_{\nu}^{\eta} \right) \cdot \\ & \cdot \text{trace} \left[\sin \left(\frac{g_0(a) a^2}{2} \text{mod} \left(\mathcal{F}_{\rho\sigma}, \text{period} \right) \right) * \right. \\ & \left. * \sin \left(\frac{g_0(a) a^2}{2} \text{mod} \left(\mathcal{F}_{\xi\eta}, \text{period} \right) \right) \right] \sqrt{g} \end{aligned}$$

Die explizite und im Falle der Nichtdiagonalkomponenten irreduzible Abhängigkeit von halben Winkeln ist völlig neu. Sie garantiert, daß $\Theta_{44}^{\text{own}} = \mathcal{H}$ erster Ordnung in den $U_{\mu\nu}$'s ist wie die Standardversion von \mathcal{L} , und die Realisierung dieses Prinzips ist bezüglich aller Komponenten von $\Theta_{\mu\nu}^{\text{own}}$ eichinvariant. $\Theta_{\mu\nu}^{\text{own}}$ besitzt den korrekten Kontinuumsgrenzwert, und in D Dimensionen ist $\Theta_{\mu}^{\mu} = (D - 4) \mathcal{L}$ als Extrapolation von (7.2.1) in entsprechend vorsichtiger symbolischer Deutung bei Applikation des Typs $\Theta_{\mu\nu}^{\text{own}}$ für die Gruppen $U(1)$, $SU(2)$ (oder für alle maximal unitären Eichgruppen bei Unterlassung des $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} \rightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)l}$ -shift) sogar auf dem Raumzeit-Gitter gültig.

Dennoch kann aus solchen vordergründigen Vorteilen a priori noch keine innere Notwendigkeit zur Umsetzung von Halbwinkel-Prinzipien erwachsen. Außerdem arbeiten die Vorgängermodelle i) und ii) zumindest teilweise mit vollen Winkeln. Erst der allgemeinrelativistische Durchgang in Kapitel 5.2 konnte wirkliche Evidenz dafür beibringen, daß die Halbwinkel-Phänomenologie mehr als nur eine bloße utilitäre mathematische Spielerei ist.

$\Theta_{\mu\nu}^{\text{own}}$ steht in Einklang mit dem thermodynamischen Schema aus Kapitel 3.4 (Θ_{44} wird exakt wiederentdeckt für $U(1)$, $SU(2)$ und bloßes $\mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)}$), und für die Spuranomalie auf dem Gitter kann basierend auf den Überlegungen aus Kapitel 3.4 widerspruchsfrei ergänzend ($\langle \sum_n \mathcal{L}(n) \rangle = \hat{V} \langle \mathcal{L} \rangle$)

$$\langle \Theta_{\mu}^{\mu} \rangle^{\text{own, renorm}} := a \langle \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{L} \rangle$$

eingeführt werden, wobei in (anfangs noch symbolischer) matrixtrigonometrischer Schreibweise bei $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}^{\text{wilson}}$ ein effektiver Charakteristikwechsel von halben zu ganzen Winkeln beobachtet werden kann:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{\text{wilson}}(n) &= \frac{2}{\kappa^2} \text{trace} \sum_{\mu, \nu} \sin^2 \left(\frac{\kappa}{2} \text{mod} \left(\mathcal{F}_{\mu\nu}(n), \text{period} \right) \right) = \\ &= \frac{2}{\kappa^2} \text{trace} \sum_{\mu, \nu} \sin^2 \left(\frac{\kappa}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu}(n) \right) = \\ &= \frac{1}{\kappa^2} \text{trace} \sum_{\mu, \nu} \left(\mathbf{1} - \cos \left(\kappa \mathcal{F}_{\mu\nu}(n) \right) \right) \quad , \\ &\quad \kappa = g_0(a) a^2 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel ist deshalb interessant, weil sich auf ganz analoge Weise illu-

strieren läßt, daß die Hauptwertwurzelpezifikation

$\sqrt{\quad} \longrightarrow \sqrt{\quad}^{\text{main}}$ für die Quadratwurzel aus einer Matrix nur für die Nichtdiagonalkomponenten von $\Theta_{\mu\nu}^{\text{own}}$ notwendig ist. Gerade die thermodynamischen Identitäten umgehen Spaltungsmechanismen wie etwa das Ziehen einer Quadratwurzel aus irgendeinem Gebilde und auf irgendeiner Genauigkeitsstufe. Solche bezüglich $\Theta_{\mu\nu}$ nichtdiagonalen Prozesse sind auf höherer Ebene an eine allgemeinrelativistische Reinterpretation gebunden.

Die bisher durchgegangenen mathematischen Eigenschaften meines neuartigen Modells basierten auf einer stillschweigend applizierten **'OWN'** = **'OWNPURE'**-Konvention. Ein Übergang zu **'OWNHYBRID'** stellt auf dem Gitter die Rotationsinvarianz wieder her, simuliert auf Erwartungswertlevel etliche der **'OWNPURE'**-Qualität und läßt ein sanfteres artefaktärmeres numerisches Verhalten erhoffen.

Kapitel 8

MONTE – CARLO – SIMULATIONEN

8.1 Theoretische Vorhersagen

Der erste Teil dieses Kapitels befaßt sich mit den modellspezifischen Aussagen, die bereits vor Durchführung der Messungen transparent sind und von diesen unbedingt reproduziert werden müssen. Dadurch ergeben sich Anhaltspunkte für die Überprüfung der Programmierung.

Aus den in Kapitel 7 zusammengestellten Modellen lassen sich ein paar theoretische Vorhersagen ableiten, wie sich die softwaregesteuerten Datensätze von Monte-Carlo-Simulationen unter angemessenen Bedingungen verhalten müssen. Es läßt sich manches einfacher darstellen, wenn für ein stellvertretendes Diagonal- und ein stellvertretendes Nichtdiagonal-Element von $\Theta_{\mu\nu}$ auf dem Gitter jeweils konkrete Zahlen für die Komponenten eingesetzt werden. Außerdem sollen ausschließlich für Zwecke der reinen Illustration die provisorischen Modelle (die Definition erfolgt ausschließlich über die nachfolgenden Zuweisungs-Gleichungen, die zwei verschiedene Modifikationen von Definition (7.2.1) spezifizieren, indem dort die gemäß (7.1.2b) zusammengesetzte Mischungsgröße $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)l}$ entweder wieder zum Original $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)}$ aus (6.2.3) zurückgebildet (\rightarrow 'pre') oder vollständig (\rightarrow 'post') in ihre Modifikation $\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)[R]}$ ((7.1.1) für $l = 2$) konvertiert wird, s. u.)

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{pre}} := \Theta_{\mu\nu}^{\text{own}} \left(\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)l} \rightarrow \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)} \right) \quad (8.1.1)$$

und

$$\Theta_{\mu\nu}^{\text{post}} := \Theta_{\mu\nu}^{\text{own}} \left(\mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)l} \rightarrow \mathcal{F}_{\sim\mu\nu}^{(2)[R]} \right) \quad (8.1.2)$$

für die Situationen **'PURE'** und **'HYBRID'** ergänzt werden (zur Nomenklatur: sukzessive Feldstärketensor-Umgestaltungen generieren die Reihenfolge 'pre' → 'own' → 'post'). Alle hier benutzten Symbole und Bezeichnungen wurden in Kapitel 7 definiert und/oder wiederholt (bis auf 'pre' und 'post', wofür nachfolgend auf die Definitionen (8.1.1) und (8.1.2) zurückzugreifen ist).

Dann können folgende Zusammenhänge seitens der Theorie für die Numerik erwartet werden (für $\dim = 2$ ist Θ_{13} jeweils durch Θ_{12} zu ersetzen):

$$\begin{aligned} \mathbf{1.)} \quad Re \Theta_{22}^{\text{karschPURE}} &= \Theta_{22}^{\text{prePURE}} = \\ &= \frac{1}{\kappa^2} Re \text{ trace} \left(U_{21} + U_{23} + U_{24} - U_{13} - U_{14} - U_{34} \right) \end{aligned}$$

speziell für die Dimensionalität $\dim = 4$ (eine Übertragung auf 4-plaket-tengemittelte $V_{\mu\nu}$ ist seitens der **'HYBRID'**-Modelle deshalb nicht möglich, weil die zur Ermittlung dieser Formel erforderliche Nebenbeziehung

$$U_{\mu\nu} U_{\mu\nu}^\dagger = \text{const} = \mathbf{1}$$

so nicht auf die $V_{\mu\nu}$'s ausgeweitet werden kann).

$$\begin{aligned} \mathbf{2.)} \quad \Theta_{22}^{\text{karschPURE}} &= \Theta_{22}^{\text{prePURE}} = \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} = (\text{nur } U(1):) \Theta_{22}^{\text{postPURE}} \\ &\text{ bzw. } (\text{nur } SU(2):) \frac{1}{\kappa^2} \text{ trace} \left(U_{21} + U_{23} + U_{24} - U_{13} - U_{14} - U_{34} \right) \end{aligned}$$

speziell für $\dim = 4$ und die Gruppen $U(1)$ und $SU(2)$ (bei letzterer ist die Spur invariant unter hermitescher Konjugation)

$$\mathbf{3.)} \quad \Theta_{13}^{\text{karschPURE}} = \Theta_{13}^{\text{caraPURE}}$$

(das folgt unmittelbar aus den Definitionen)

$$\mathbf{4.)} \quad \Theta_{13}^{\text{karschHYBRID}} = \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}}$$

(gleicher Kommentar wie zu **3.)**)

$$\mathbf{5.)} \quad \Theta_{22}^{\text{prePURE}} = \Theta_{22}^{\text{ownPURE}}$$

speziell für die Gruppen $U(1)$ und $SU(2)$

$$6.) \quad \Theta_{22}^{\text{preHYBRID}} = \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}}$$

speziell für die Gruppen U(1) und SU(2)

$$7.) \quad \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} = \Theta_{22}^{\text{postPURE}}$$

speziell für die Gruppe U(1)

$$8.) \quad \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} = \Theta_{22}^{\text{postHYBRID}}$$

speziell für die Gruppe U(1)

$$9.) \quad \langle \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{postPURE}} \rangle$$

speziell für die Gruppe SU(2) (Da lediglich der infinitesimal häufige Beitrag $U_{\mu\nu} = -\mathbf{1}$ einen Unterschied zwischen den Ausdrücken

$trace \left(\begin{matrix} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} & \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)} \end{matrix} \right)$ und $trace \left(\begin{matrix} \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)[R]} & \mathcal{F}_{\mu\nu}^{(2)[R]} \end{matrix} \right)$ herzustellen vermag, können auf Erwartungswert-Ebene bei den Monte-Carlo-Simulationen keine effektiven Unterschiede erwartet werden)

$$10.) \quad \langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{postHYBRID}} \rangle$$

speziell für die Gruppe SU(2) (Im Gegensatz zu **9.)** liefern alle möglichen positiven Vielfachen von $U_{\mu\nu} = -\mathbf{1}$ Abweichungen - allerdings nimmt die Anzahl aller irrelevanten restlichen Situationen wegen des Überschreitens der unitären Gruppe in Richtung semi-unitärer Hybridisierungen in gleichem Maße zu. Also kann die Interpretation von Punkt **9.)** in etwas abstrahierter Form transferiert werden)

$$11.) \quad \langle \Theta_{22}^{\text{karschPURE}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{karschHYBRID}} \rangle$$

(Da bei der Erwartungswertbildung für die Monte-Carlo-Simulationen über alle Gitter-Punkte summiert wird, werden linear konstruierte individuelle Mittelwertbildungen wie etwa die Anweisung zur 4-Plaketten-Mittelung bei der Gesamtauswertung ineffektiv. Dieser Effekt

ließe sich für die Dimensionalität $\dim = 4$ in zweiter Ordnung (erst Wur-

zeln requadrieren, dann $V_{\mu\nu}$'s durch $U_{\mu\nu}$'s ersetzen) auf den Vergleich von $\langle \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} \rangle$ und $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ übertragen, wenn die drei positiv und die drei negativ gewichteten und zu Antikommutatoren zusammengefaßten Beiträge $2 * \{ \sqrt{V}^{\text{main}}, \sqrt{V}^{\text{main}^\dagger} \}_+$ jeweils konstant und dadurch unabhängig von den Indizes μ und ν wären. Wie aber schon im Kommentar zu Punkt **1.)** ausgeführt wurde, ist gerade dieser Schritt nicht möglich. Bei der Numerik in 8.2 wird sich zeigen, daß genau dieser Unterschied enorme Abweichungen im Thermalisierungsverhalten der betroffenen Konstruktionen zur Folge hat)

$$\mathbf{12.)} \quad \Theta_{12} \left| \text{alle } \mathbf{MODELLE} \right. = 0$$

speziell für $\dim = 2$ (Wie ein schnelles Nachrechnen zeigt, ist eine Erwartungswertbildung für das Zustandekommen dieser Beziehung nicht erforderlich - tiefere Erklärung: Nichtdiagonalelemente von $\Theta_{\mu\nu}$ sind infolge ihrer Konstruktionen bei allen der präsentierten Modelle auf mindestens 3 unabhängige Raumrichtungen angewiesen (daher gibt es hier auch kein Θ_{13}), die eine zweidimensionale Raumzeit nicht bieten kann - eine Ausweitung dieser Beziehung auf die Diagonalkomponenten von $\Theta_{\mu\nu}$ wäre auf eine Gewichtung des zur Lagrangedichte proportionalen Anteils von $\Theta_{\mu\nu}$ mit der inversen Raumzeitdimensionalität angewiesen, was nicht einmal bei den Kontinuumsbetrachtungen in Kapitel 3.4 für die Summe aus normalem und anomalem Beitrag gilt)

$$\mathbf{13.)} \quad \langle \Theta_{22} \rangle \left| \text{alle } \mathbf{MODELLE} \right. \longrightarrow 0$$

speziell für $\dim = 4$ (Ergänzt sich aufgrund der anderen Referenzdimensionalität nicht mit Punkt **12.)** - bei jedem der untersuchten Modelle gibt es für die 4-dimensionale Version irgendeiner Diagonalkomponente aufgrund der euklidischen Formulierung jeweils die gleiche Anzahl analoger positiver und negativer Beiträge. Wie schon unter Punkt **11.)** bemerkt wurde, müssen sich Beiträge, die durch keine Sonderbeziehungen zueinander direkt korreliert sind, auch nicht notwendigerweise gegenseitig wegheben, wenn das Vorzeichen jeweils invers ist. Im Zuge einer Thermalisierung, deren Konvergenztempo sehr unterschiedlich und hochgradig modellabhängig sein kann, sollten sich - da der euklidische Vakuumerwartungswert bei perfekter $O(4)$ -Symmetrie Null ist - jedoch Unterschiede, die nur in den Raumzeitin-

dizes begründet liegen, früher oder später wegnivellieren, wenn sich das gewählte Monte-Carlo-Verfahren als realistisch erweist und in der Lage ist, im Falle eines symmetrischen Gitters raumzeitliche Isotropie zu approximieren)

Interessant wird es nun, diese Kriterien in der numerischen Praxis einer unmittelbaren Prüfung zu unterziehen. Diesem besonders wichtigen Aspekt dient das nächste Teilkapitel. Das dazu verwendete kombinierte Unix- und Fortran-Programm findet sich in Appendix Nr. 2.

8.2 Simulations-Daten

Die zu vergleichenden Gittermodelle für den Energie-Impuls-Tensor waren Objekte von Monte-Carlo-Simulationen ([22]). Der folgende etwas längere Abschnitt befaßt sich mit der numerischen Auswertung.

Gemessen wurde mit zwei grundsätzlich verschiedenen Verfahren. Zum einen wurden Kurzzeit-Messungen vorgenommen, die nach 100 Aktualisierungen der Link-Konfigurationen auf dem Gitter das spontane Einschwing-Profil der zu untersuchenden Energie-Impuls-Tensoren in Abhängigkeit von Raumzeit-Dimensionalität, Kopplungsstärke und Anisotropie-Parameter sondieren sollen. Auf der anderen Seite wurden für die wirklich maßgeblichen Daten Langzeitmessungen durchgeführt, die die ersten 10000 updatings gänzlich ignorieren und dann nur alle 50 updatings messen und über diese Messungen jeweils den Mittelwert nehmen.

Der primäre Unterschied zwischen beiden Vorgehensweisen manifestiert sich in der Wahl des Zufalls-Generators. Die einige Monate dauernden Langzeitmessungen mußten einige Male unterbrochen werden, wenn zum Beispiel die eine oder andere Maschine rebootet werden mußte. Für die Programmiersprache bedeutet das eine ausgeklügelte Unix-Syntax (siehe Programm-Beispiel im Appendix), die in regelmäßigen Abständen die Zwischenspeicherung repräsentativer Datensätze veranlaßt, die aufgrund ihrer Größe im Gigabyte-Bereich auf externe Magnetbänder teilweise ausgelagert werden mußte. Da diese Art der Speicherung nicht wirklich zuverlässig ist, mußte das Programm in der Lage sein, im Falle eines Versagens bei der Wiedereinlesung von Daten automatisch in einen Rekonstruktionsmodus umzuschalten, der eine Datenhierarchie zurück auf sekundäre Datensätze zugreift. Natürlich wurde die er-

ste Link-Konfiguration nach den jeweils 10 000 updatings auf einer instituts-eigenen Festplatte in gezielter Form hinterlegt, um die Rekonstruktions-Modi sinnvoll zeitlich zu begrenzen. Dies alles ließ sich nur dadurch verwirklichen, daß der benutzte Zufallsgenerator mit einer großen Anzahl von Initialisierungskeimen arbeiten mußte.

Die Kurzzeitmessungen dagegen profitierten davon, daß sie ohne nennenswerte Zeitverluste so oft von vorne betrieben werden können, bis sie einmal ohne jegliche Unterbrechung durchgelaufen sind. Daher kann ein optionaler seed mit besonders guter Statistik für das gesamte Set der Messungen zur Verfügung gestellt werden, dessen Qualität das Kurzzeitlevel der Messungen aussagekräftiger macht.

Gearbeitet wird mit einem $SU(2)$ -Hitzebad-Algorithmus, der von Michael Creutz ([9]) bereits sehr erfolgreich für diese Eichgruppe appliziert wurde. Mit Ausnahme der temporalen Richtung in der D -ten von D Dimensionen, wo für $\xi = \frac{a_\tau}{a} < 1$ weniger Gitterpunkte verwendet werden, stehen jeweils 10 Gitterpunkte in jeder Raumrichtung zur Verfügung. Die Restriktion von nicht mehr als 10 Gitterpunkten orientiert sich an einer CPU-Belastung durch die $f77$ -Prozesse, die zwar hoch aber kompatibel für das Institut für Theoretische Physik gewählt wurde, wobei das exekutable Programm unter anderem auch so optimiert wurde, daß ein mapping von Tensoren auf temporäre Skalarfelder die CPU-Belastung maximal absenkt. Mit dieser Methode konnten 170 MB auf 17 MB reduziert werden (siehe Kommentare im angefügten Programm - die ähnlichen Zahlenwerte kommen rein zufällig zustande).

In dieser Arbeit wird ausschließlich mit euklidischen Erwartungswerten von Energie-Impuls-Tensoren $\Theta_{\mu\nu}^{(\dots)}$ und $\Theta_{\mu\nu}^{(\dots)} \Theta_{\rho\sigma}^{(\dots)}$ -Korrelatoren gearbeitet, obwohl in der Vorgängerarbeit von Karsch ([28]) auch Minkowskiraum-Erwartungswerte auf das endliche Gitter verallgemeinert werden. Das hat folgende Gründe:

1. Es ist allgemein bekannt, daß die freie Zweipunkts-Greensfunktion in der Quantenfeldtheorie

$$G(x, y)^{free} \Big|_{\text{QFT}} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^D k \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + m^2}$$

über die diskreten Matsubara-Frequenzen ω_n ([20]) in ihr thermodynamisches Pendant

$$G(x, y)^{free} \Big|_{\text{Thermodyn}} =$$

$$= \frac{1}{\beta} \sum_n \frac{1}{(2\pi)^{D-1}} \int d^{D-1}k \frac{e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{y}) + i\omega_n(x_D - y_D)}}{\omega_n^2 + \vec{k}^2 + m^2}$$

übergeht, welches für $D = 4$ in einen kontinuierlichen D -dimensionalen Impuls-Raum retransformiert werden kann, wenn der Residuensatz umgekehrt wird:

$$G(x, y)^{free} \Big|_{\text{Thermodyn}} = \frac{1}{(2\pi)^D} \int d^{D-1}k \int i dk_0 \left(e^{ik(x-y)} \boldsymbol{\Omega} \right)$$

mit $\boldsymbol{\Omega} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\tilde{G}_{\text{F}}(k, \epsilon) - \tilde{G}_{\text{F}}(k, -\epsilon) \right) \left(\theta(x_4 - y_4) + n(k_0) \right)$ bezüglich einer Fourier-Transformierten in Feynman-Gestalt

$$\tilde{G}_{\text{F}}(k, \epsilon) := \frac{1}{k^2(k_4 \rightarrow i(k_0 + i\epsilon)) + m^2} ,$$

wobei in $\boldsymbol{\Omega} \quad n(k_0) := n(E) \Big|_{E \rightarrow k_0}$ über $n(E) := \frac{1}{e^{\beta E} - 1}$ mit der statistischen Bose-Einstein-Verteilung für die Energie auf der Massenschale

$$E = -i k_4 \Big|_{k^2 = -m^2} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$$

verknüpft ist.

Mit Hilfe des Dzyaloshinskiischen Algorithmus ([3], [24]) wird das Prinzip auf beliebige Zweipunkt-Funktionen verallgemeinert: sobald die Ausdehnung der noch euklidischen Koordinate x_4 endlich wird, verwandelt sich das Schema der Fourier-Transformation in ein Schema von Fourier-Entwicklungen:

$$\begin{array}{l}
\text{abs}(x_4^{\text{extremum}}): \\
\mathbf{infinite} \\
\downarrow \\
\mathbf{finite}
\end{array}
\begin{array}{l}
\mathbf{G}(x, y) := \\
:= \mathbf{G}(x - y) = \\
= \int_{\mathbf{infinite}} dk_4 \int_{\mathbf{infinite}} d^3k \dots \\
\dots \tilde{\mathbf{G}}^{\text{fourier}}(k) * \\
* \exp(\dots)
\end{array}
\begin{array}{l}
\tilde{\mathbf{G}}^{\text{fourier}}(p) = \\
= \int_{\mathbf{infinite}} dz_4 \int_{\mathbf{infinite}} d^3z \dots \\
\dots G(z) * \\
* \exp(\dots)
\end{array}
\begin{array}{l}
\downarrow \\
\boxed{\Sigma}_{\mathbf{infinite}} \int_{\mathbf{infinite}} d^3k \\
k_4
\end{array}
\begin{array}{l}
\downarrow \\
\boxed{\int}_{\mathbf{finite}} \int_{\mathbf{infinite}} d^3z
\end{array}$$

wobei $\boxed{\Sigma}_{\mathbf{infinite}}^{k_4}$ mithilfe des rückwärts angewandten Residuensatzes in ein Minkowski-Raum-Integral $\int_{\mathbf{infinite}} dk_0 (k_0 = k_0(k_4))$ konvertiert und die Impulsraum-Version der Spektralfunktion als Fixpunkt zur Umrechnung übernommen wird. Wenn nun dieser Formalismus auf ein endliches Gitter übertragen werden soll - wie es die Gruppe Karsch versucht -, entsteht das Problem, daß das Konversionsschema in der Gestalt gar nicht weiterexistieren kann:

$$\begin{array}{l}
x_4 \mathbf{finite} \\
\downarrow \\
\mathbf{finite lattice}
\end{array}
\begin{array}{l}
\mathbf{G}(x, y) = \\
= \sum_{\mathbf{infinite}} \int_{\mathbf{infinite}} d^3k \dots \\
k_4 \dots \tilde{\mathbf{G}}^{\text{fourier}}(k) * \\
* \exp(\dots)
\end{array}
\begin{array}{l}
\tilde{\mathbf{G}}^{\text{fourier}}(p) = \\
= \int_{\mathbf{finite}} dz_4 \int_{\mathbf{infinite}} d^3z \dots \\
\dots G(z) * \\
* \exp(\dots)
\end{array}
\begin{array}{l}
\downarrow \\
\text{finite } \Sigma = \text{finite } \int
\end{array}
\begin{array}{l}
\downarrow \\
\text{finite } \Sigma
\end{array}$$

Doch das ist noch nicht alles.

2. Eine eingehendere Untersuchung des Überganges zwischen Fouriertransformation im Kontinuum und auf einem endlichen Gitter demonstriert folgendes.

Auf einem endlichen Gitter mit Periodenlänge L gilt für irgendeine Ortsraumfunktion

$$f(x, L) = f(\text{mod}(x, L), L) = \sum_{y=0}^{L-1} f(y, L) \delta_{y, \text{mod}(x, L)}$$

wobei die auf 1 normierte Orthogonalität in Gestalt eines Kronecker-Delta simultan den beiden Entwicklungen

$$\delta_{y, \text{mod}(x, L)} = \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} e^{\frac{2\pi i k (x-y)}{L}}$$

für k diskret $\in \{0, 1, 2, \dots, L-1\}$ und

$$\delta_{y, \text{mod}(x, L)} = \frac{1}{L} \int_0^L e^{\frac{2\pi i k (x-y)}{L}} dk$$

für kontinuierlich interpretiertes $k \in [0, L]$ gehorcht. Also kann man irgendeine Kontinuumsfunktion $F(\xi)$ nehmen, sie à la

$$f(x, L) := F\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L}} \text{mod}(x, L)\right)$$

für ein endliches Gitter umformulieren und sich davon überzeugen, daß für jede geeignete Funktion $f(x, L)$ dann

$$\begin{aligned} f(x, L) &= \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{k=0}^{L-1} \tilde{f}(k, L) e^{\frac{2\pi i k x}{L}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{L}} \int_0^L \tilde{f}(k, L) e^{\frac{2\pi i k x}{L}} dk \end{aligned}$$

einheitlich mit

$$\tilde{f}(k, L) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{x=0}^{L-1} f(x, L) e^{-\frac{2\pi i x k}{L}}$$

gilt, wobei über die Doppelkonvention

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{F}_{l, L \rightarrow \lambda} G(l, L, \lambda) := \\
 & := \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_{\substack{\lambda = -\sqrt{2\pi L} \\ \Delta\lambda = \sqrt{2\pi/L} \Delta l \\ \Delta l = 1 \text{ (DISKRET)}}}^{\sqrt{2\pi L} (1 - 1/L)} G(l = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \lambda, L, \lambda) = \\
 & = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\substack{\lambda = -\sqrt{2\pi L} \\ d\lambda = \sqrt{2\pi/L} dl \\ dl \rightarrow 0 \text{ (KONTINUIERLICH)}}}^{\sqrt{2\pi L}} G(l = \sqrt{\frac{L}{2\pi}} \lambda, L, \lambda) d\lambda
 \end{aligned}$$

Konvergenz im quadratischen Mittel in Ortsraum

$$\mathfrak{F}_{x, L \rightarrow \xi} (F(\xi) - f(x, L))^2 = 0$$

und Impulsraum

$$\mathfrak{F}_{k, L \rightarrow \kappa} (\tilde{F}(\kappa) - \tilde{f}(k, L))^2 = 0$$

positiv bestätigt werden kann. Der einzige Haken dabei ist, daß die Korre-

spondenz

$$f(x, L) = F\left(\sqrt{\frac{2\pi}{L}} \operatorname{mod}(x, L)\right)$$

zwischen Originalfunktion $F(\xi)$ und Gitterpendant $f(x, L)$ mit korrekter Grenzwertübereinstimmung im allgemeinen nicht auf den Impulsraum übertragbar ist, da dafür die mathematischen Voraussetzungen nicht wirklich gegeben sind.

Für $F(\xi) = e^{-|\xi|} \quad \curvearrowright \quad f(x, L) = \exp\left[-\sqrt{\frac{2\pi}{L}} \operatorname{mod}(x, L)\right]$

beispielsweise hat

$$\tilde{F}(\kappa) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\kappa\xi} d\xi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(\kappa^2 + 1)}$$

das völlig andersartige Gitterpendant

$$\tilde{f}(k, L) = \frac{e^{-\sqrt{2\pi L}} - 1}{\sqrt{L} \left(e^{-\frac{2\pi i k}{L} - \sqrt{\frac{2\pi}{L}}} - 1 \right)},$$

welches nicht gegen die Fouriertransformierte des Kontinuums konvergiert.

Punkt **1.** hatte in Frage gestellt, ob auf dem endlichen Gitter eine residuen-satzanaloge Transformation vom euklidischen Raum in den Minkowski-Raum überhaupt möglich und notwendig ist. Diese Argumentation in Punkt **2.** hingegen stellt bereits schon in Frage, ob eine derartige Konversion für ein endliches Gitter überhaupt im Impulsraum - nämlich über die Spektralfunktion - zugelassen werden kann, wenn die Kontinuumsergebnisse dort an und für sich ihren Zusammenhang mit der Gitterübertragung verlieren. Selbst wenn dieser problematische Schritt in Einzelsituationen dennoch möglich sein sollte, gibt es bereits von den Autoren ([28]) selbst erwähnte nachstehend behandelte Schwierigkeiten.

3. Auf einem endlichen Gitter, das demzufolge auch nur eine endliche Anzahl von Punkten in temporaler Richtung aufweist, steht lediglich eine diskrete endliche Anzahl von Meßpunkten von euklidisch ermittelten Korrelatoren zur Verfügung, so daß deren analytische Fortsetzung im Prinzip unmöglich ist und bestenfalls durch einen intuitiven Low-Level-Ansatz angenähert werden kann.

4. Unangenehmerweise sagen die in [28] zur Vereinfachung der Korrelationen bei niedrigen Temperaturen herangezogenen hydrodynamischen Gleichungen

chungen ([25]) für die dann involvierten Greensfunktionen die Existenz von Polen bei $\omega = -i k^2 D_T$ und $\omega = c_s k - i k^2 T$ vorher, wobei D_T die thermische Diffusivität, c_s die Schallgeschwindigkeit und T die Dämpfungskonstante der Schallwellenausbreitung ist. Obwohl diese Singularitäten einen nichttrivialen endlichen Einfluß auf die Umrechnung haben können, können sie mit Hilfe des in **3.** beschriebenen Ansatzes prinzipiell nicht erfaßt werden.

5. Selbst wenn sich die Punkte **1.** bis **4.** entkräften ließen, krankt die Ermittlung "physikalischer" Minkowski-Erwartungswerte für Korrelatoren auf dem Gitter daran, daß bereits nach Angaben der Gruppe Karsch die bloße euklidische Messung von Θ - Θ -Korrelatoren, die in nichttrivialer Weise Nichtdiagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors $\Theta_{\mu\nu}$ enthalten, aufgrund zu hoher Fehlerfortpflanzung bereits nicht mehr aussagekräftig sein kann. Leider wird dieser Aspekt durch die unten präsentierten Meßergebnisse erhärtet, so daß es sinnvoll erscheinen muß, die Diskussion auf zuverlässigere Datensysteme zu fokussieren - nämlich die euklidischen Erwartungswerte verschiedener $\Theta_{\mu\nu}$ -Modelle.

Signifikante Gitter-Messungen können nur im sogenannten scaling window vorgenommen werden. Dort ist die Korrelationslänge gegenüber dem Gitterabstand a groß genug, um Renormierungsbeziehungen aus dem Kontinuum transferieren und auf das Gitter übersetzen zu können, und immer noch klein genug relativ zu der Länge des verwendeten Gitters (betrachte ein Periodizitätssegment), um bereits bei einer durch die Möglichkeiten zur Verfügung stehender Rechnerkapazitäten eher eng begrenzten Anzahl benutzter Gitterpunkte realistische Kraftstrukturen asymptotisch approximieren zu können (Kontrolle über die finite-size-Effekte). Um dieses scaling window für a zu finden, muß eine dimensionierte physikalische Größe als Input vorgegeben werden. Dafür kommen z. B. die string tension oder die Massen von Gluonenball-Zuständen in Frage.

In der Praxis wird gerne ein etwas indirekterer Weg beschritten. Um Gluonenball-Massenspektren oder die string tension auf dem Gitter geeignet fit-ten zu können, wird zu deren Dimensionierung ein Wert für die string tension

zur Verfügung gestellt, der eine sinnvolle Abstimmung mit den experimentellen Ergebnissen für die Eichgruppe SU(3) der Quantenchromodynamik als Stützgröße ermöglicht. Dieser Wert wird mit $\sigma = (440 \text{ MeV})^2$ angesetzt und kann wegen weitgehend qualitativ und quantitativ analoger Verhältnisse aus theoretisch-physikalischer Sicht auf eine chromodynamik-ähnliche Interpretation der Eichgruppe SU(2) übertragen werden ([1], [40], [41]). Andererseits wird für die dimensionslose string tension $\hat{\sigma}$ ein Wert $\hat{\sigma} = (0.1360)^2$ beziffert ([18]), der speziell für die Eichgruppe SU(2) und eine invers quadratische Kopplung (ab sofort stehe β nicht mehr für inverse Temperatur, sondern für die Hilfsgröße $\hat{\beta}$ aus Kapitel 3.4) $\beta = \frac{2N}{g_o^2}$ ($N = 2$) in der Höhe von $\beta = 2.6$ relevant ist.

Nun liegt $\beta = 2.6$ nicht nur im SU(2) scaling window, welches sich von $\beta = 2.30$ bis 2.75 erstreckt, sondern bezieht sich außerdem noch gerade auf die kritische Kopplung bezüglich eines Deconfinement-Phasenübergangs auf einem 10^4 -Gitter, der dann bei einer Temperatur

$$\mathbb{T}_{crit} = \frac{1}{(aN_\tau)_{crit}} = (0.180 \pm 0.016) m_G \quad (8.2.1)$$

erwartet wird, wobei m_G die Masse des leichtesten Gluonenzustandes

$$m_G = m_{\mathbf{0}^{++}} = \frac{\sqrt{\sigma}}{0.265 \pm 0.016} \quad (8.2.2)$$

ist. Mit der obigen Abschätzung $\sigma \approx (440 \text{ MeV})^2$ folgt automatisch

$$\mathbb{T}_{crit} = (0.679 \pm 0.073) \sqrt{\sigma} \approx 300 \text{ MeV} = 3.5 \cdot 10^{12} \text{ }^\circ\mathcal{C}$$

([1], [2], [18]).

Innerhalb des scaling window gilt (siehe z. B. [52] und dort zitierte Originalreferenzen) für den Gitterabstand

$$a = \frac{1}{\Lambda_L} R(g_o)$$

mit der Renormierungsgruppenfunktion in 1-loop-Näherung

$$R(g_o) \approx e^{-(3\pi^2/11)\beta}$$

und einer Darstellung von σ über

$$\sqrt{\sigma} = \sqrt{\hat{C}_\sigma} \Lambda_L \quad ,$$

wobei Λ_L eine renormierungsgruppeninvariante Skala ist und \hat{C}_σ aus einer Messung der dimensionslosen string tension

$$a^2 \sigma = \hat{\sigma}(g_o) \approx \hat{C}_\sigma [R(g_o)]^2$$

resultiert. Für die untersuchte Gruppe SU(2) gilt $N = 2$ in $\beta = \frac{2N}{g_o^2}$. Da die string tensions σ und $\hat{\sigma}$ simultan für $\beta = \beta_{\text{crit}} \approx 2.6$ auf dem zu betrachtenden 10^4 -Gitter zur Verfügung stehen, werden Λ_L und \hat{C}_σ für diese spezielle Parameterwahl ausgewertet und in die Skalierungsbeziehung zwischen Gitterabstand a und $R(g_o)$ eingesetzt, die für das gesamte scaling window Anwendung findet:

$$a = a(\beta) = a_{\text{crit}} \frac{R(g_o)}{R(g_o^{\text{crit}})} \approx e^{-2.69\beta} * 65.8 \text{ fermi}$$

so daß auf einem 10^4 -Gitter innerhalb der Eichgruppe SU(2) gilt:

$$\beta = \beta_{\text{min}}^{\text{scaling}} = 2.3 \quad \Longrightarrow \quad a = 0.13(5) \text{ fm}$$

$$\beta = \beta_{\text{crit}}^{\text{deconf}} = 2.6 \quad \Longrightarrow \quad a = a_{\text{crit}} = 0.06(0) \text{ fm}$$

$$\beta = \beta_{\text{max}}^{\text{scaling}} = 2.75 \quad \Longrightarrow \quad a = 0.04(0) \text{ fm}$$

Wenn also nachfolgend für den physikalisch besonders signifikanten Gitter-Kopplungswert $\beta = 2.6$ (10^4 Meßpunkte für $\xi = 1$) der Erwartungswert eines Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter gemessen wird, so müßten die resultierenden Zahlenwerte mit $\frac{1}{(0.06 \text{ fm})^4} = 117 \text{ GeV}^4$ multipliziert

werden, um die Darstellung in physikalischen Einheiten zu rekonstruieren. Analog ergäbe sich ein Faktor von $(117 \text{ GeV}^4)^2$ für $\Theta - \Theta$ -Korrelatoren. Da sich ganz abgesehen von den 3D-Plots diese Zuordnung jedoch nicht sinnvoll für stärkere Vergleichskopplungen wie etwa bei $\beta = 0.6$ und $\beta = 1.6$ fortsetzen läßt, sei von nun an $a = 1$ gesetzt (auch fermi und GeV verschwinden als Dimensionsangaben, alle Größen werden in Gittereinheiten gemessen), um die nachfolgenden Meßergebnisse eleganter vergleichen zu können. Die physikalische Annäherung liege also bei $\beta = 2.6 - \beta = 0.6$ und $\beta = 1.6$ sollen für $a := 1$ Vergleichsmöglichkeiten anbieten.

Die wahrscheinlich allererste Frage, die sich an die reine Numerik richtet, betrifft den Einfluß der Dimensionalität auf das Konvergenzverhalten der ver-

schiedenen Modelle. Diskutiert werden sollen die Raumzeit-Dimensionalitäten 2, 3 und 4 sowie numerische Interpolationen zwischen ihnen, für deren Konstruktion die geometrisch maximal anschauliche 2-Norm als Grundlage gewählt wird.

Auf Anhieb ist ersichtlich, daß auch für jedes der hier betrachteten Gitter-Modelle für $\Theta_{\mu\nu}$ (Ausnahmen beim Karsch-Modell) die Eingrenzung (für $\text{dim} = 2$ folgt automatisch $\Theta_{\mu\nu} = \Theta_{11} \delta_{\mu\nu}$ - das Variieren in der Raumzeit-dimensionalität bezieht sich ausschließlich auf die Wertemengen der Indizes und ist daher im Kontinuumsmlimes sowohl zu den Noether-Theoremen in Kapitel 3.2 als auch zur Divergenz-Kraftdichtespur-Relation in Kapitel 5.2 kompatibel, wobei die Spurfreiheit von $\Theta_{\mu\nu}$ auf $\text{dim} \equiv 4$ beschränkt ist, während die Jacobi-Identität nicht auf die Verschiedenartigkeit aller involvierten Indizes angewiesen ist und daher auch für $\text{dim} \in \{2, 3\}$ gilt - unter 'ABGLEICHTERME' in der folgenden Gleichung soll die Differenz von linker Gleichungsseite und vom ersten Summanden der rechten Gleichungsseite verstanden werden)

$$\Theta_{\mu\nu} = \gamma(\text{dim} = \delta_{\rho}^{\rho}) \frac{\Theta_{\sigma}^{\sigma}}{\text{dim}} \delta_{\mu\nu} + (1 - \gamma) * 100 \% * \text{ABGLEICHTERME}$$

für

$$\text{dim} = \text{dim}_{\text{min}} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 1 \hat{=} 100 \%$$

und für

$$\text{dim} = \text{dim}_{\text{max}} = 4 \quad \Longrightarrow \quad \gamma = 0 \hat{=} 0 \%$$

maßgeblich ist, solange auf die separate thermodynamisch motivierte Definition für die Spur Θ_{σ}^{σ} verzichtet wird. Dieses Gedankenexperiment dient lediglich dazu aufzuzeigen, daß wegen

$$\begin{aligned} \delta_{\mu\nu} \Theta^{\mu\nu}(\text{dim} = 4) &= 0 \\ \Rightarrow \langle \Theta_{22} \rangle &\text{ hat genauso viele positive wie negative Beiträge} \\ \Rightarrow \langle \Theta_{22} \rangle &\longrightarrow 0 \end{aligned}$$

automatisch zu erwarten ist, daß ein Meßübergang von der Raumzeit-Dimensionalität 2 zum Standardwert 4 das größenmäßige Dominieren diagonalen Terme wie etwa $\langle \Theta_{22} \rangle$ gegenüber nichtdiagonalen Pendanten wie zum Beispiel $\langle \Theta_{12} \rangle$ sich genau in das Gegenteil umkehren muß.

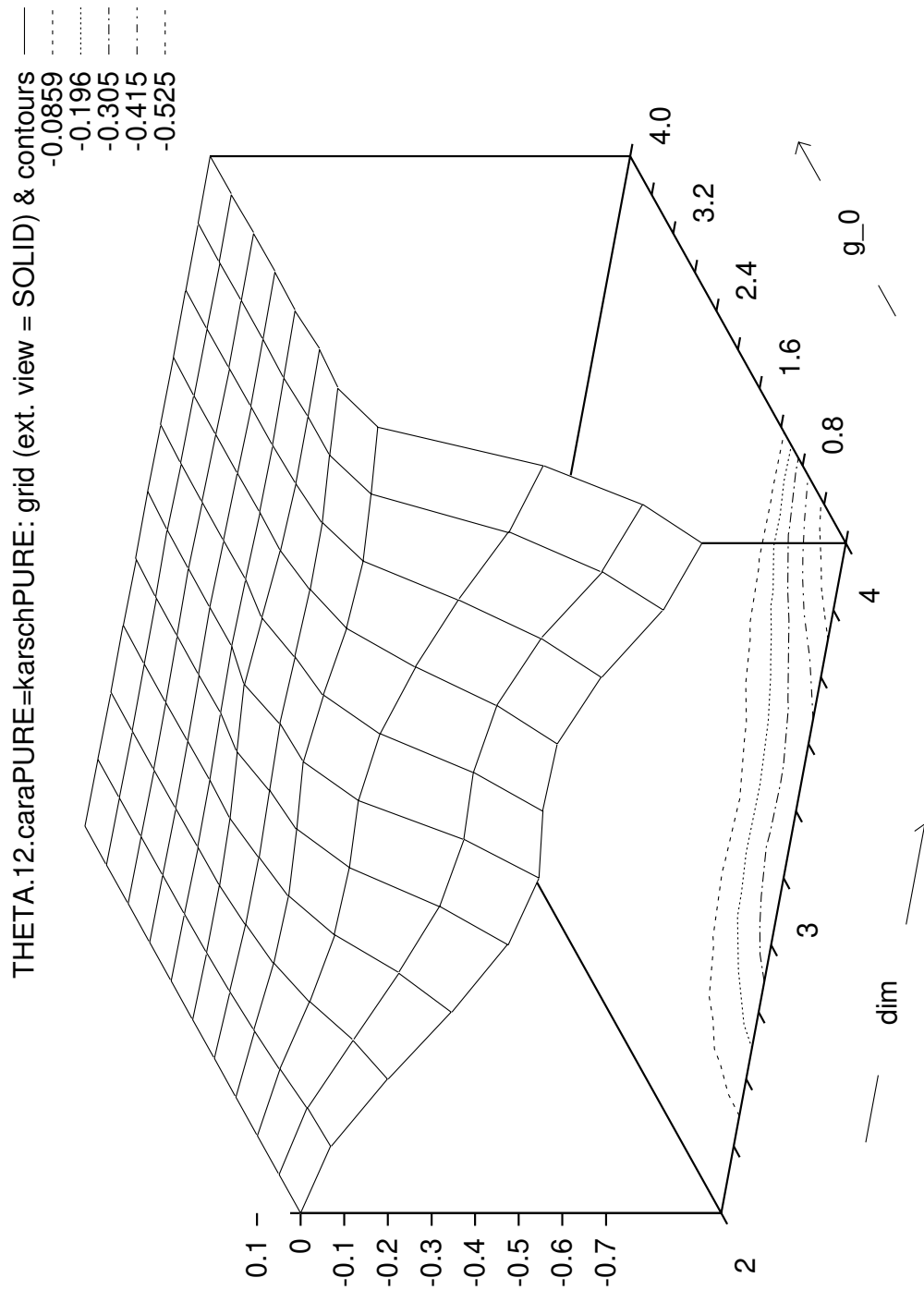


Fig. 8.2.1a

Erwartungswert der Vollwinkel-Konstruktion für Nichtdiagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter in Abhängigkeit von Gitterdimensionalität dim und Kopplungsstärke. Die numerischen Interpolationen für reelles dim beziehen sich dabei jeweils nicht auf die beiden nächsten Verbindungspunkte allein, sondern auf das gesamte ohne sie gegebene Oberflächennetz. Für Kopplungsstärken unterhalb des $SU(2)$ scaling window treten Instabilitäten auf.

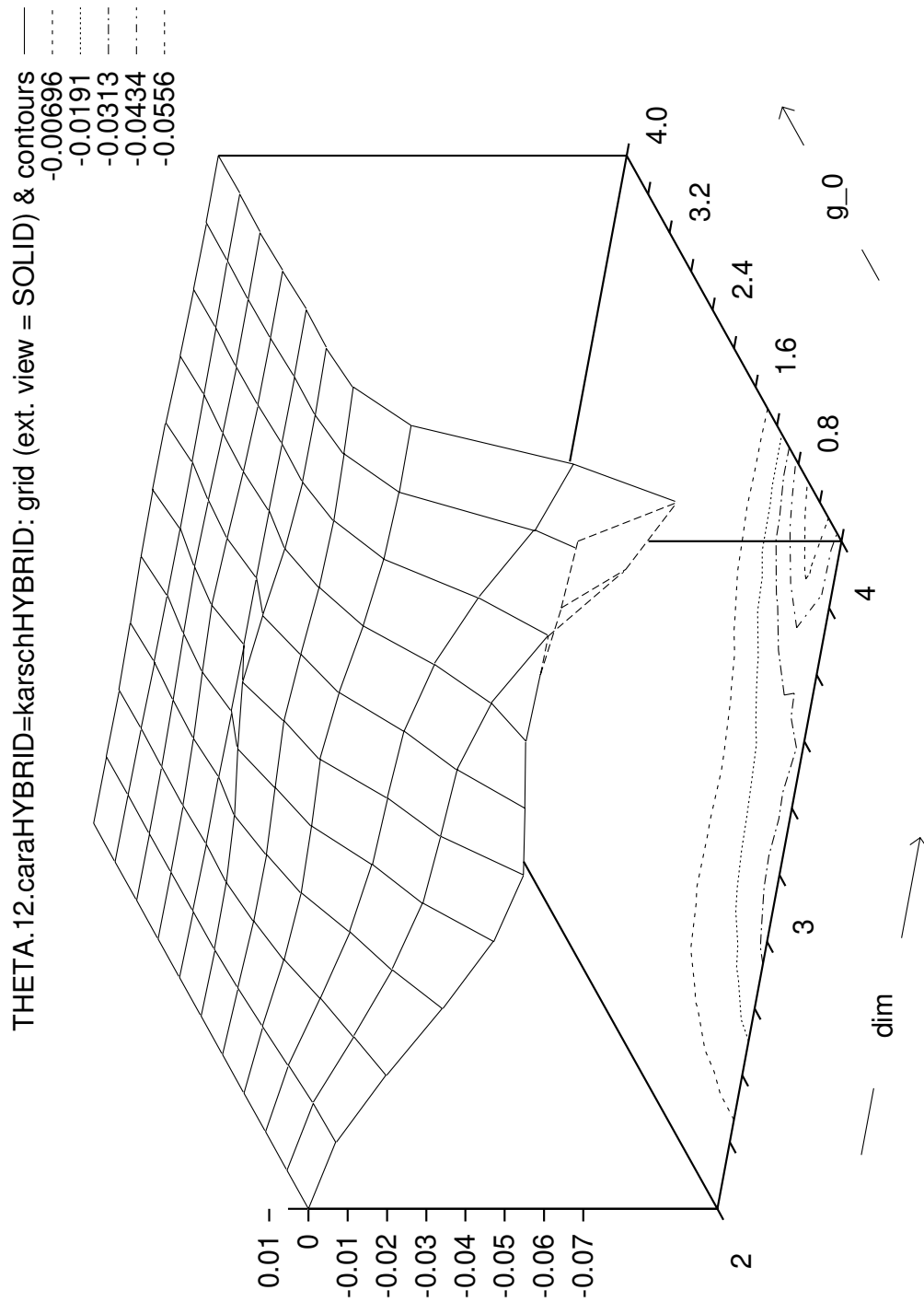


Fig. 8.2.1b

Das gleiche Szenario wie in Fig. 8.2.1a - aber für 4-Plaketten-Mittelungen. Die Bildwerte sind aufgrund des zusätzlich implementierten Mittelungsverfahrens betragsmäßig effektiv ca. um eine Zehnerpotenz kleiner, und die Instabilitäten nehmen im Vergleich zu Fig. 8.2.1a an ihren Extremstellen zu und glätten sich sonst ab.

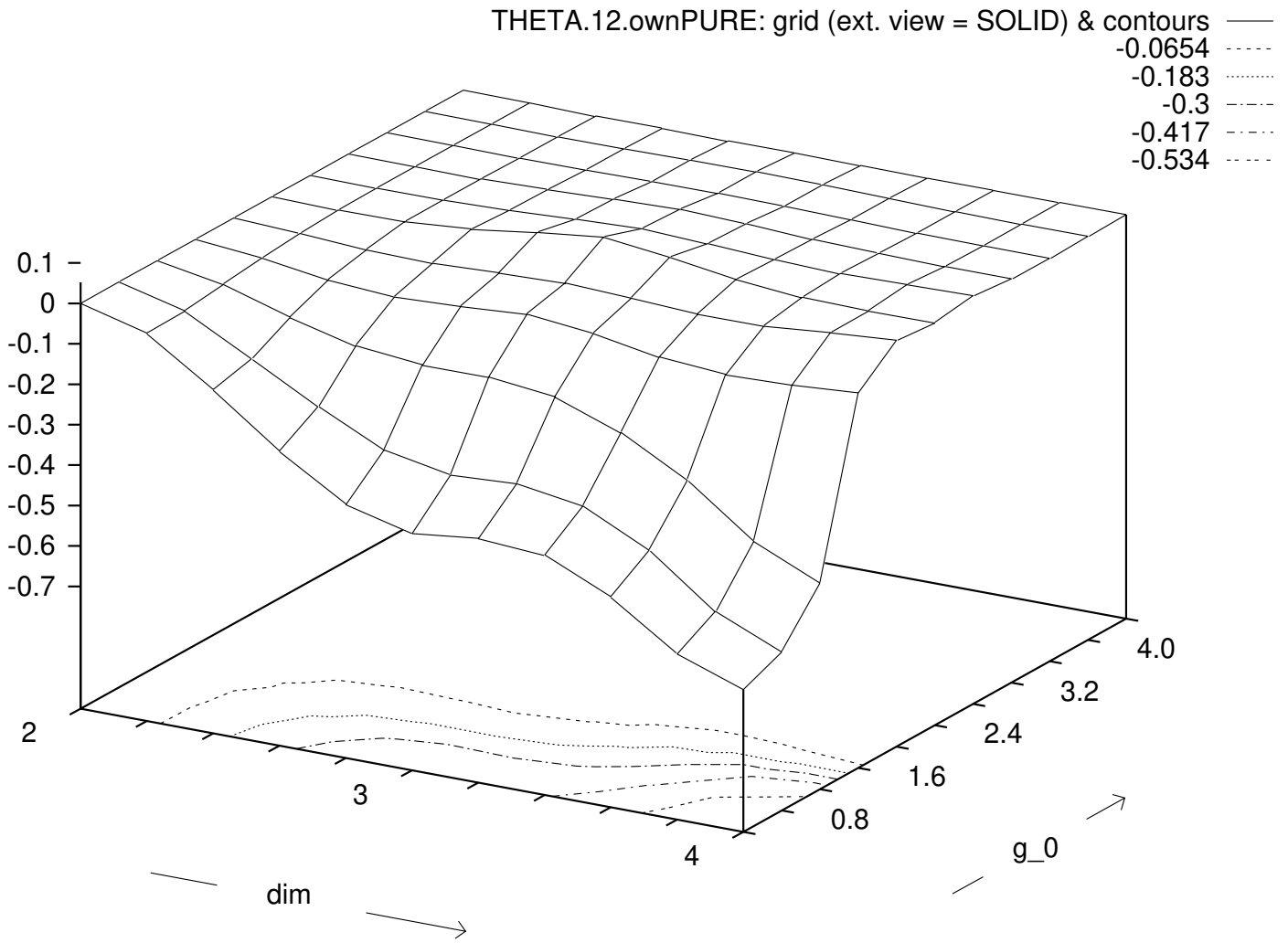


Fig. 8.2.1c

Die Bildpunkte der Messungen vom Halbwinkelpendant zur Referenzgröße in Fig. 8.2.1a ergeben ein
 Fig. 8.2.1a sehr ähnliches 3-dimensionales Profil.

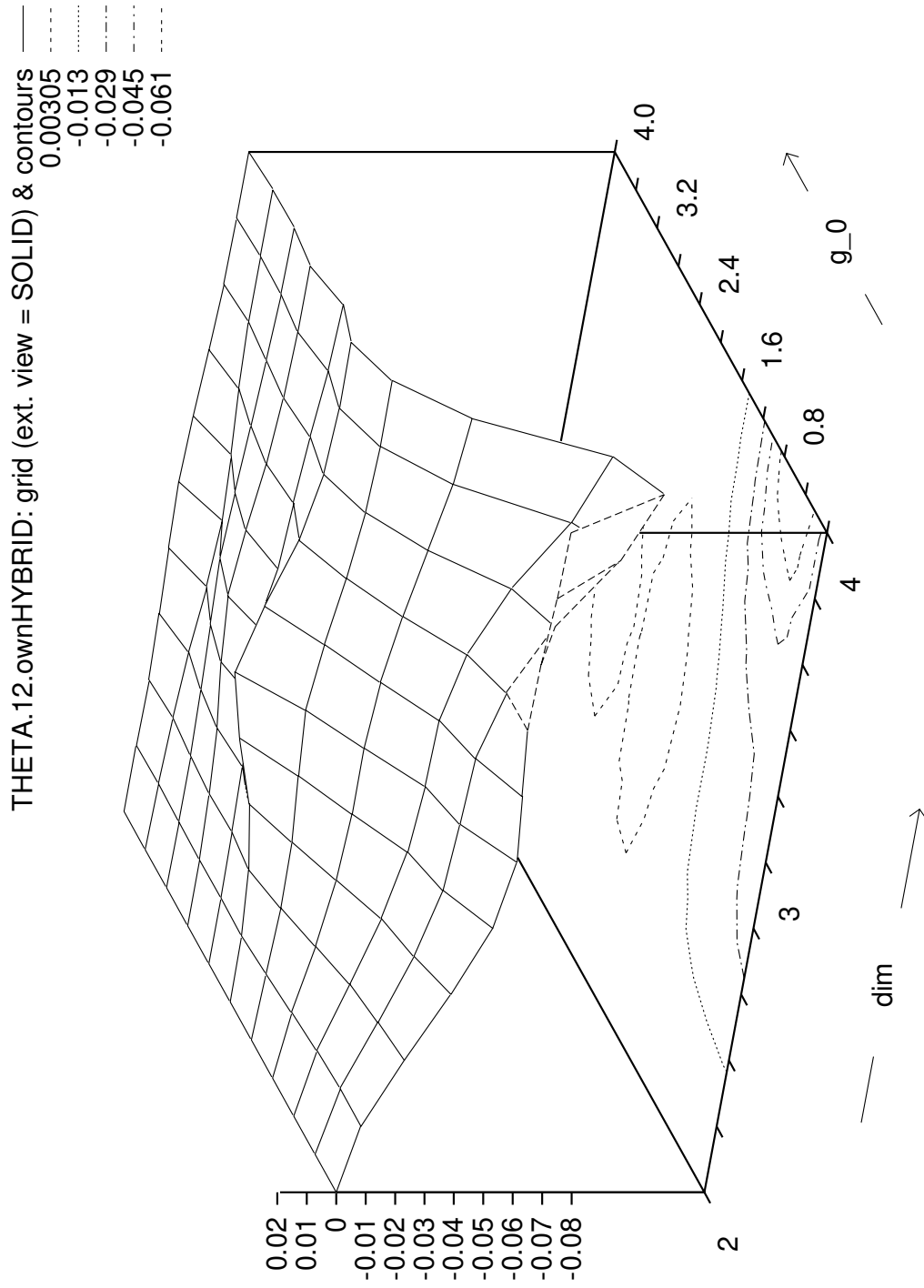


Fig. 8.2.1d

Das Analogon zu Fig. 8.2.1c für 4-Plaketten-Mittelungen. Anders als in Fig. 8.2.1b relativ zu Fig. 8.2.1a nehmen die Störungen im relativen Verhältnis der Bildpunkte zueinander zu. Maßgeblich dafür ist die Nichtlinearität von Hauptwertwurzeln aus $SU(2)$ -Matrizen bezüglich 4-Plaketten-Mittelungen.

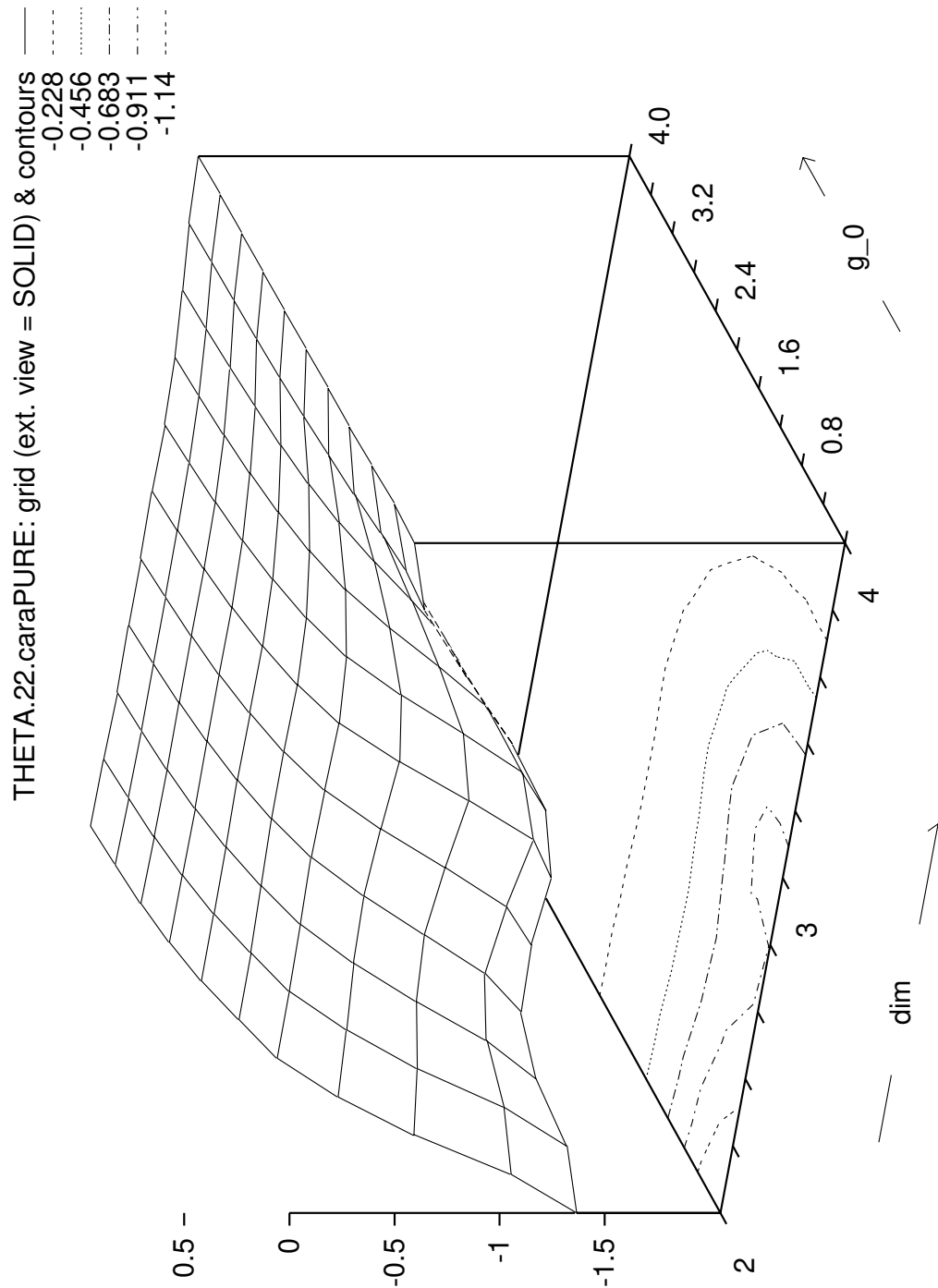


Fig. 8.2.2 a

Erwartungswert der Vollwinkel-Konstruktion für Diagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter in Abhängigkeit von Gitterdimensionalität und Kopplungsstärke. Wie bei den Nichtdiagonalelementen in Fig. 8.2.1a wird auch hier für nichtganzzahlige Dimensionalitäten interpoliert, um die Parameter-Abhängigkeiten deutlicher herauszuarbeiten.

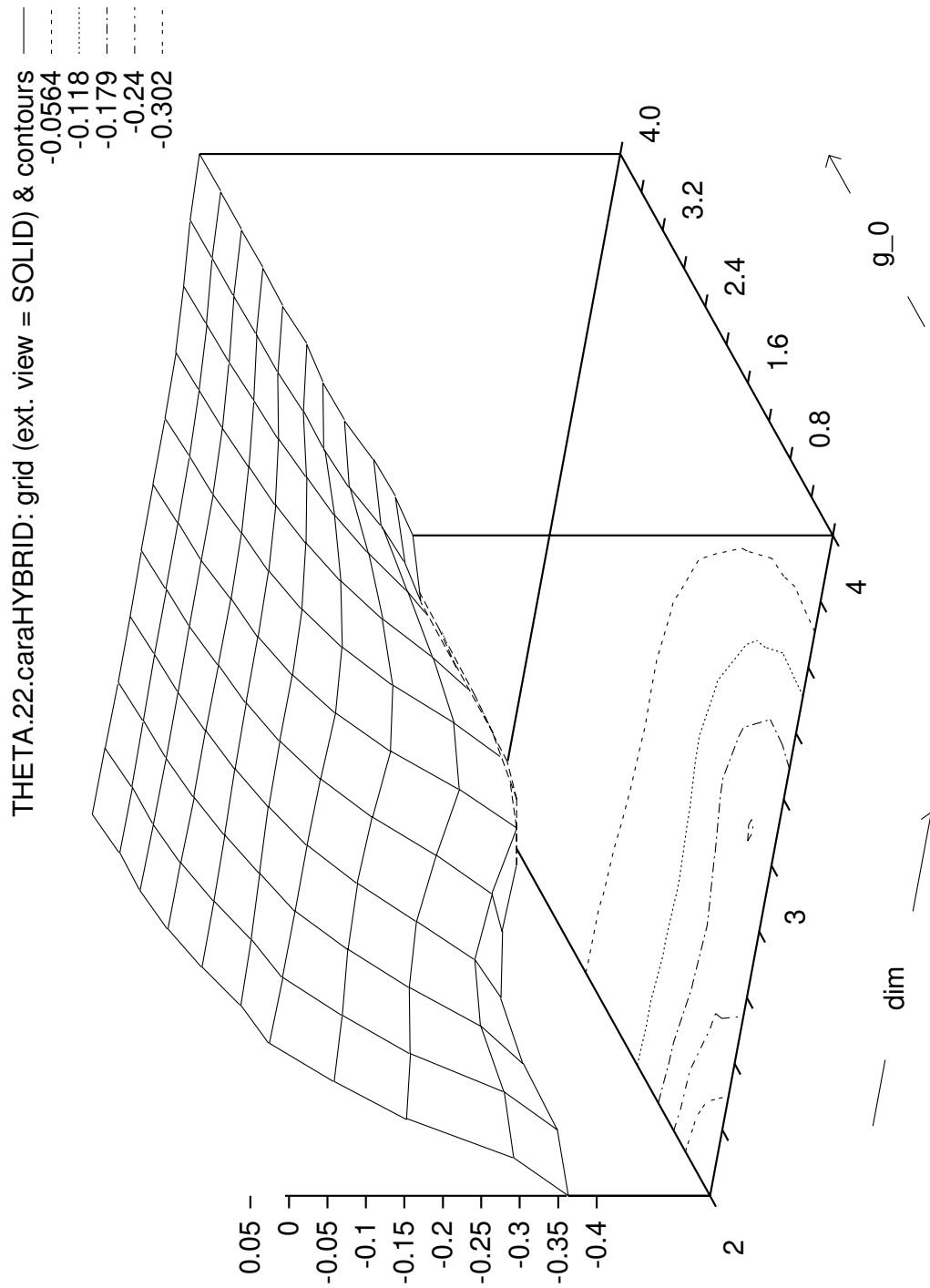


Fig. 8.2.2b

Das Analogon zu Fig. 8.2.2a für 4-Plaketten-Mittelungen. Auch für die Diagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors liegen die Bildwerte bei 4-Plaketten-Mittelungen betragsmäßig in etwa eine Zehnerpotenz niedriger als in Abwesenheit dieser zusätzlichen Prozedur, was sich bei den anderen Gittermodellen wiederholen wird.

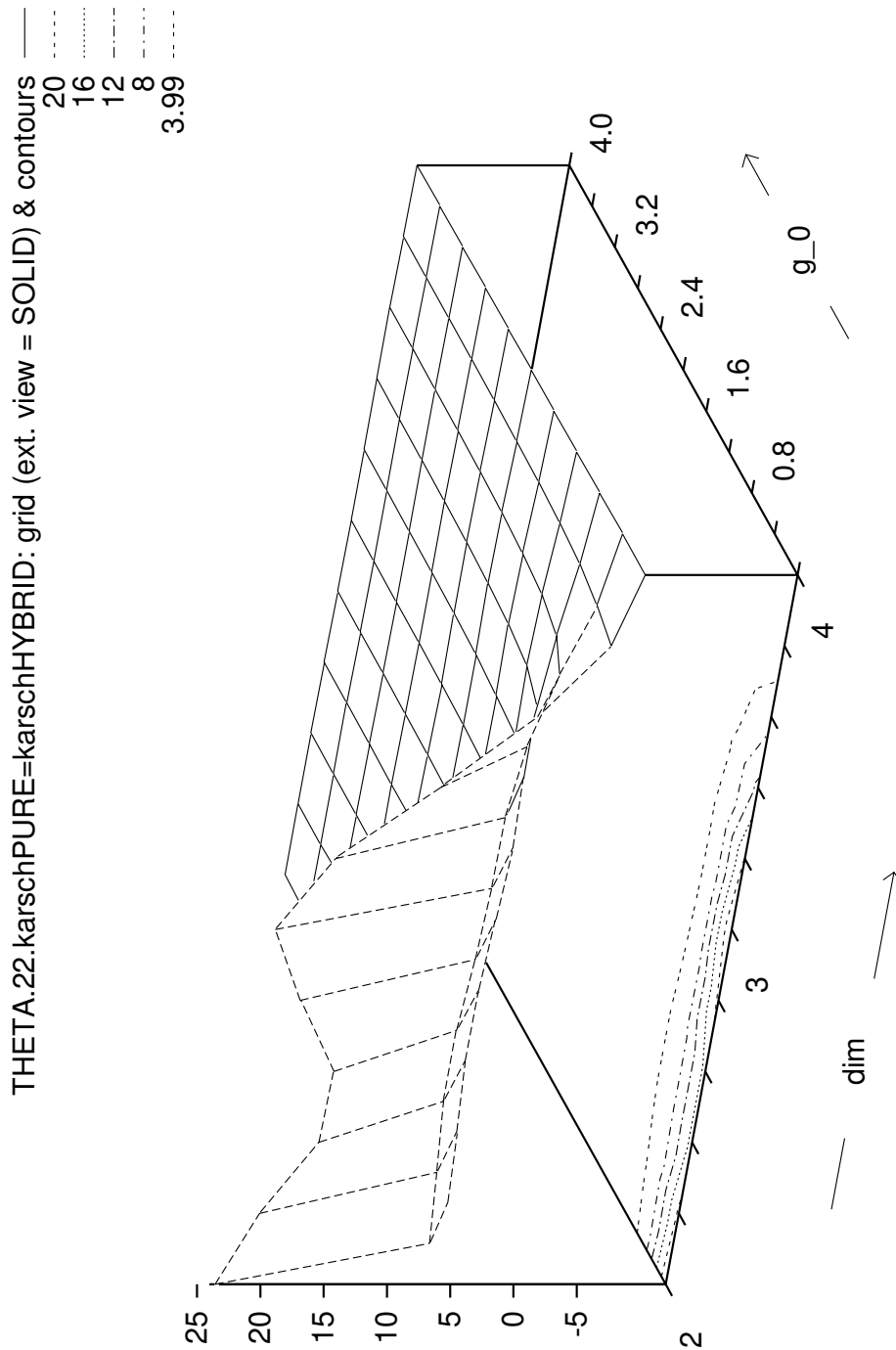


Fig. 8.2.2 c

Das Modell der Gruppe Karsch im Falle von Diagonalkomponenten des Energie-Impuls-Tensors, parametrisiert nach Dimensionalität und Kopplungsstärke. Die Operation der 4-Plaketten-Mittelung ist hier aufgrund der modelltypischen Linearität in der Plakettenvariablen die identische Abbildung, und aufgrund dieser Eigentümlichkeit fällt die entsprechende Graphik optisch aus dem Rahmen.

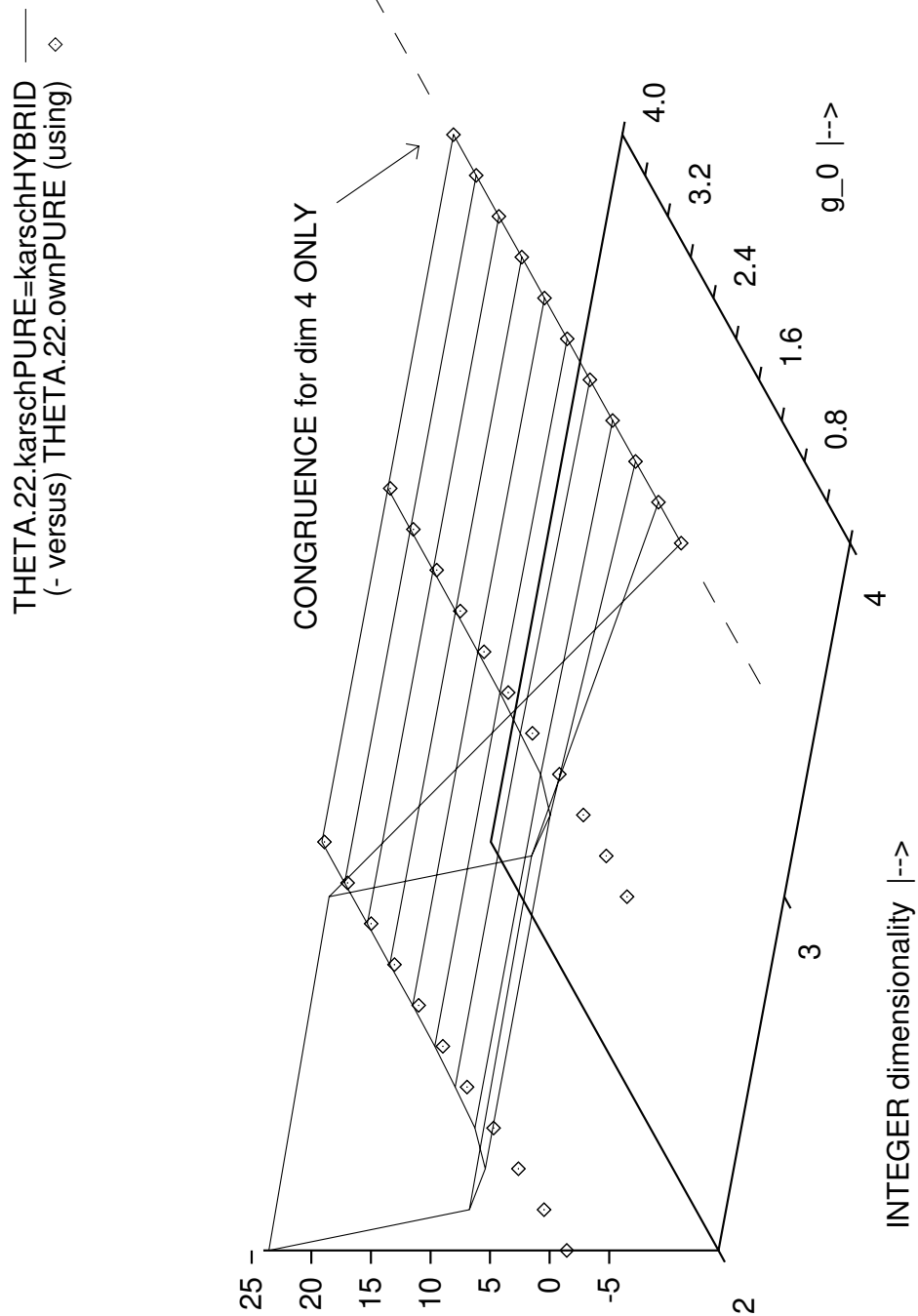


Fig. 8.2.2 d

Illumination der für Fig. 8.2.2 c charakteristischen Kreppe für niedrige Kopplungsstärken im Vergleich zum anschließend in Fig. 8.2.2 e isoliert dargestellten Halbwinkependant ohne (dort spielt es eine Rolle) 4-Plaketten-Mittelung. Die theoretische Vorhersage, daß beide Vergleichsmodelle innerhalb der Gruppe $SU(2)$ für die Gitterdimensionalität 4 gleiche Ergebnisse liefern, wird bestätigt. Mit zunehmender Kopplungsstärke nähern sich beide Modelle einander an und reduzieren dabei ihre Dimensionalitätsabhängigkeit.

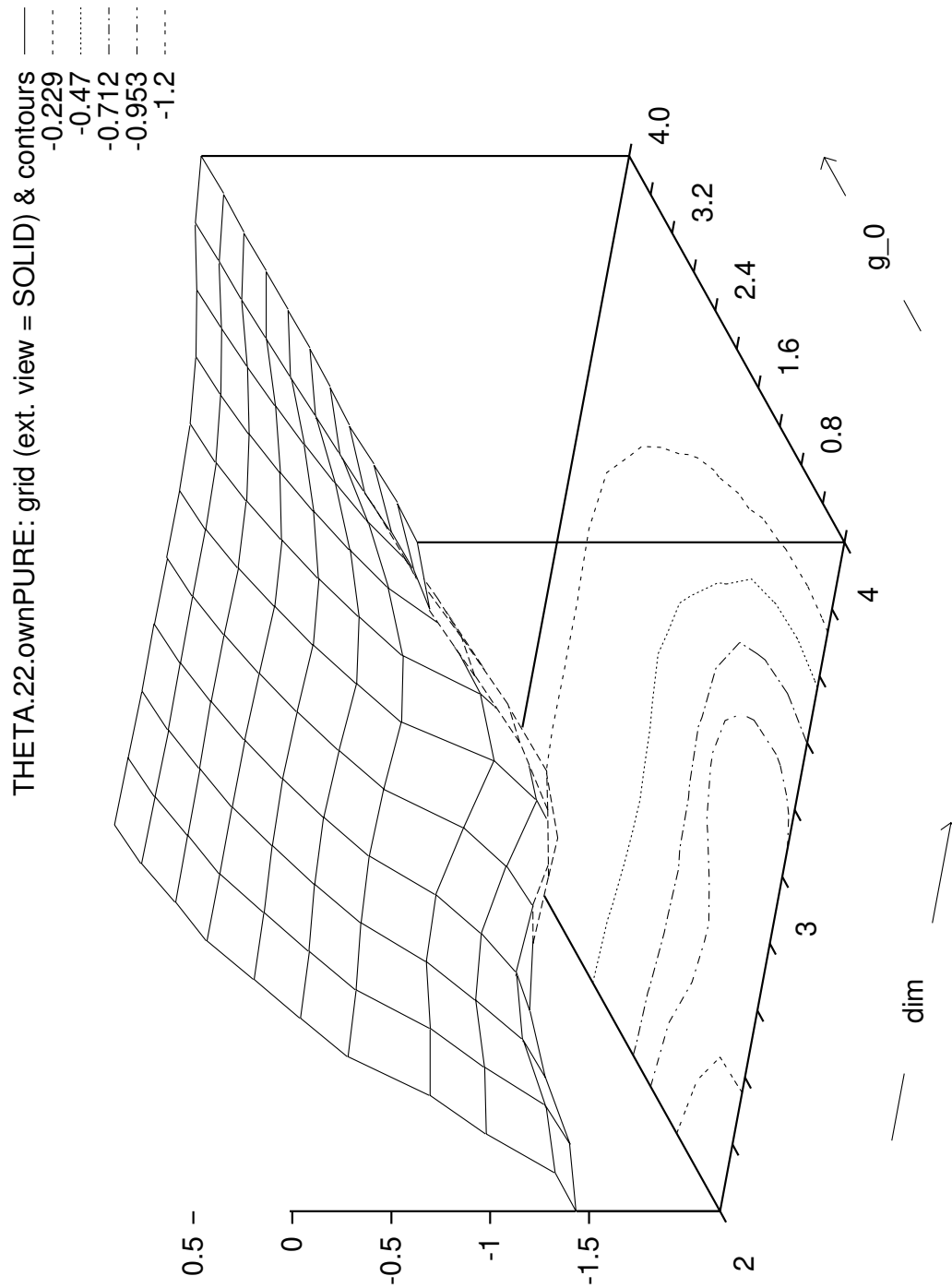


Fig. 8.2.2 e

Erwartungswert der Halbwinkel-Konstruktion für Diagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter in Abhängigkeit von Gitterdimensionalität und Kopplungsstärke. Infolge der feineren Skalierung wirkt das dreidimensionale Profil nicht mehr so flach wie in Fig. 8.2.2 d.

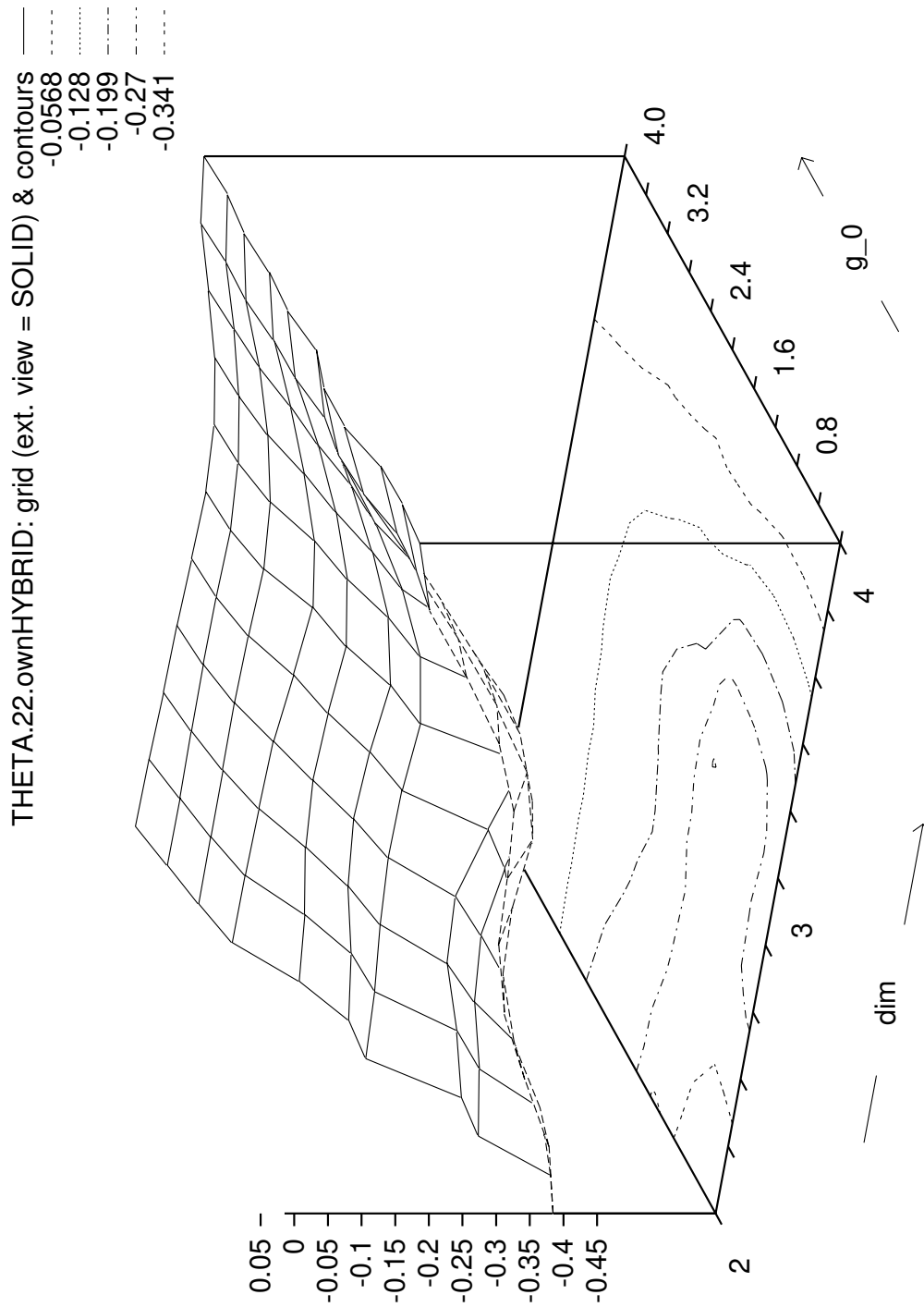


Fig. 8.2.2 f

Das Analogon zu Fig. 8.2.2e für 4-Plaketten-Mittelungen. Auch wenn die Bildwerte relativ zu ihrer näheren Umgebung chaotischer gestreut sind als in irgendeinem anderen der Vergleichsmodelle, so entfällt dennoch eine relativ zum Gesamtprofil eklatante Entartung für niedrige Kopplungsstärken wie etwa die Kreme beim Modell der Gruppe Karsch in Fig. 8.2.2c.

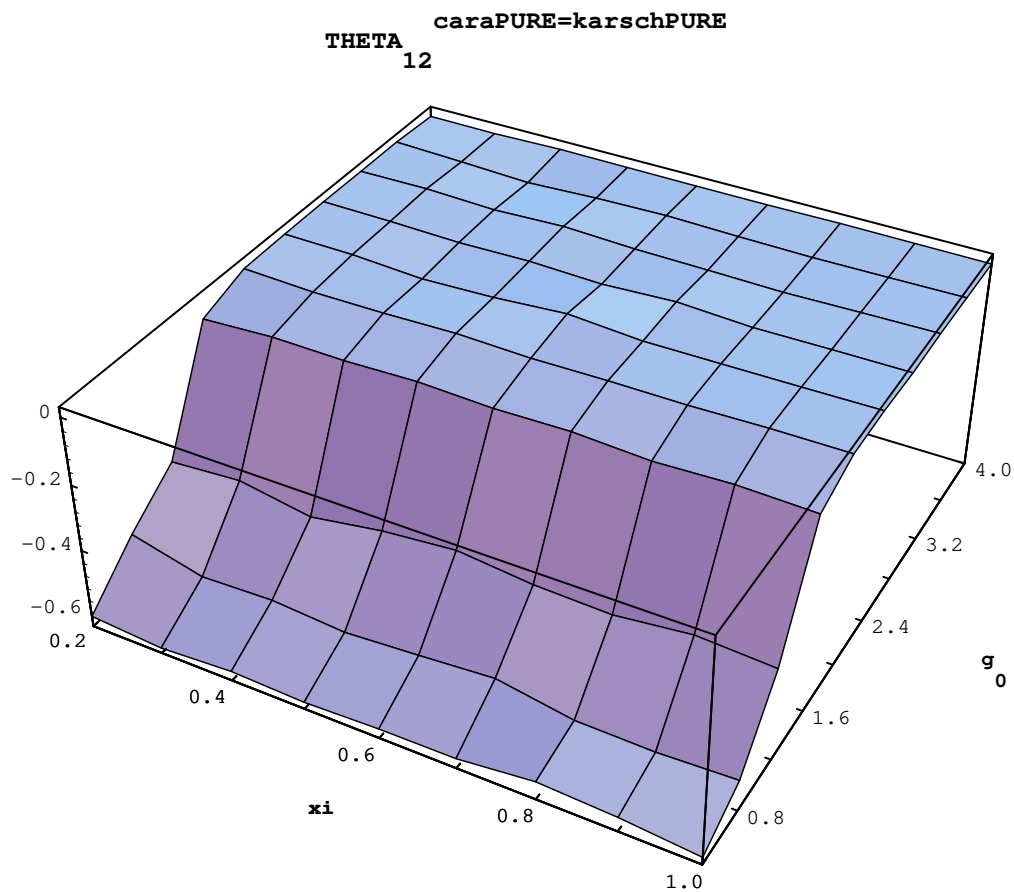


Fig. 8.2.3 a

Erwartungswert der Vollwinkel-Konstruktion für Nichtdiagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter als Funktion von Asymmetrieparameter und Kopplungsstärke. Eine effektive Abhängigkeit von der Asymmetrie in Form einer variierten Gitterpunkanzahl in temporaler Richtung (hier vierte Dimension auf dem Gitter) ist im vorliegenden Diagramm noch nicht zu verzeichnen.

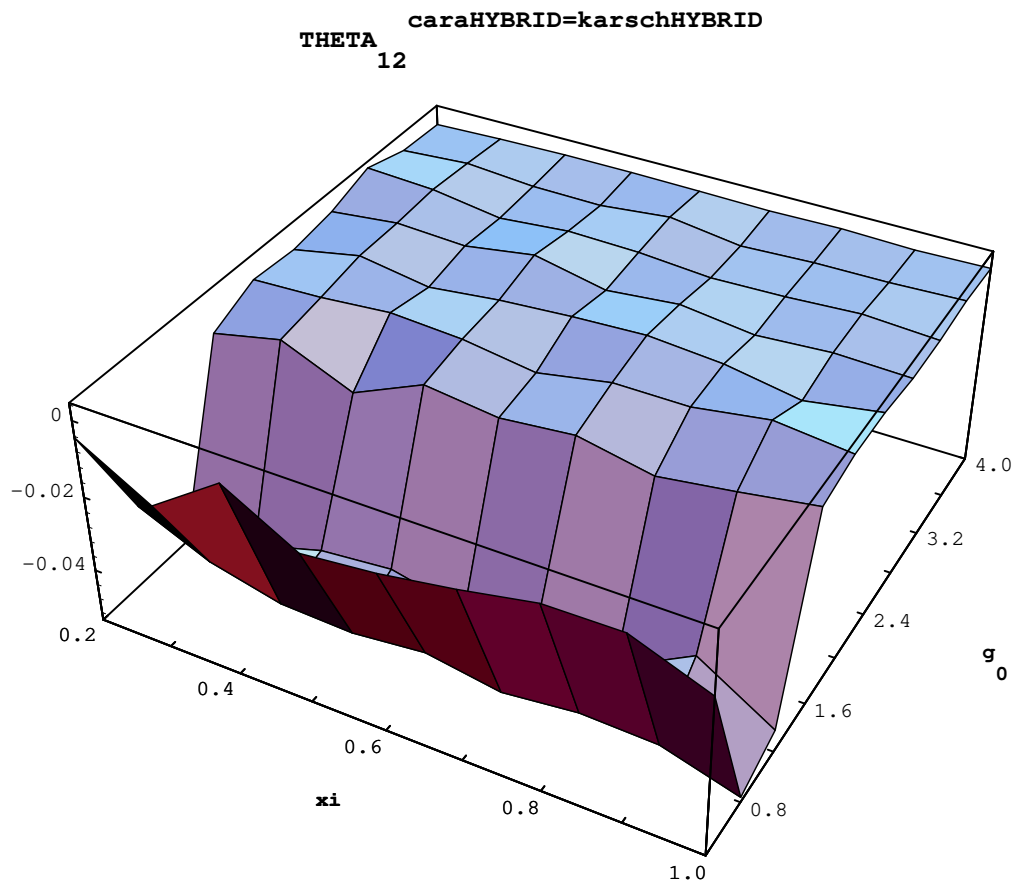


Fig. 8.2.3b

Wiederholung der in Fig. 8.2.3a dargestellten Meßreihe mit aktivierter 4-Plaketten-Mittelung. Obwohl auch in diesem Diagramm noch keine irgendwie ausgerichtete Abhängigkeit vom Asymmetrieparameter zu entdecken ist, erzeugt das Variieren nach diesem Parameter anders als in Fig. 8.2.3a geringfügige und unspezifische Ausschläge (in Fig. 8.2.3a lag in dieser Hinsicht noch nahezu absolute Konstanz vor).

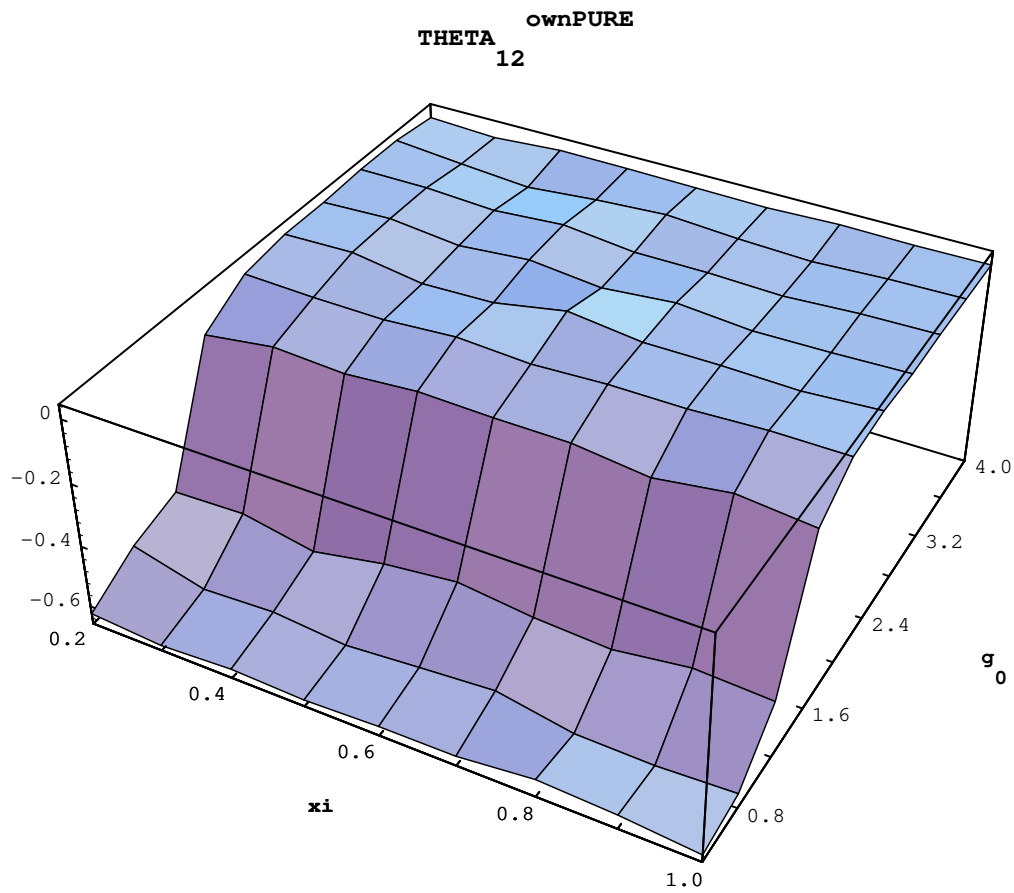


Fig. 8.2.3c

Das Halbwinkel-Pendant zum Diagramm in Fig. 8.2.3a. Der Perfektionsgrad der Unabhängigkeit vom Asymmetrieparameter kann in der Mitte zwischen den Resultaten in Fig. 8.2.3a und 8.2.3b angesiedelt werden.

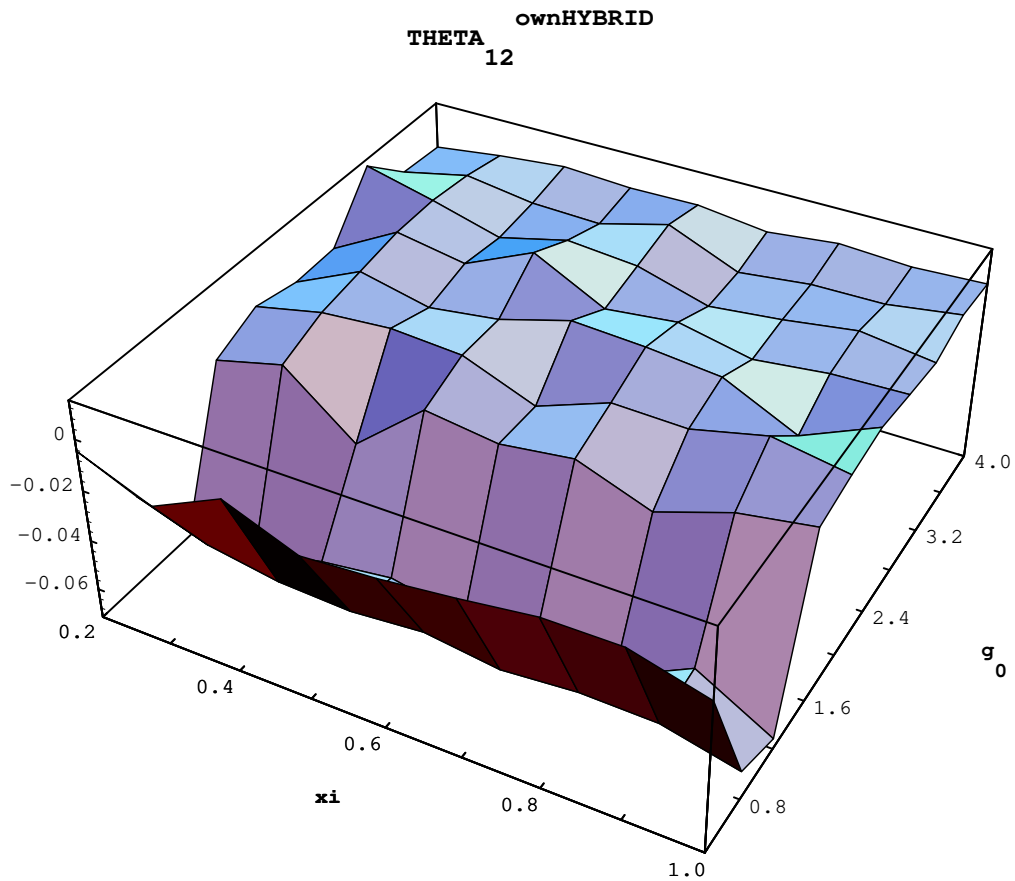


Fig. 8.2.3d

Wiederholung der in Fig. 8.2.3c dargestellten Meßreihe mit aktivierter 4-Plaketten-Mittelung. Dieses Diagramm fällt vom Verhältnis der Meßpunkte untereinander her größer als die Diagramme aller Vergleichsmodelle für Nichtdiagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors aus. Dennoch wird sich zeigen, daß es glatter als alle Modell-Profile für Diagonalelemente des gleichen Tensors strukturiert ist.

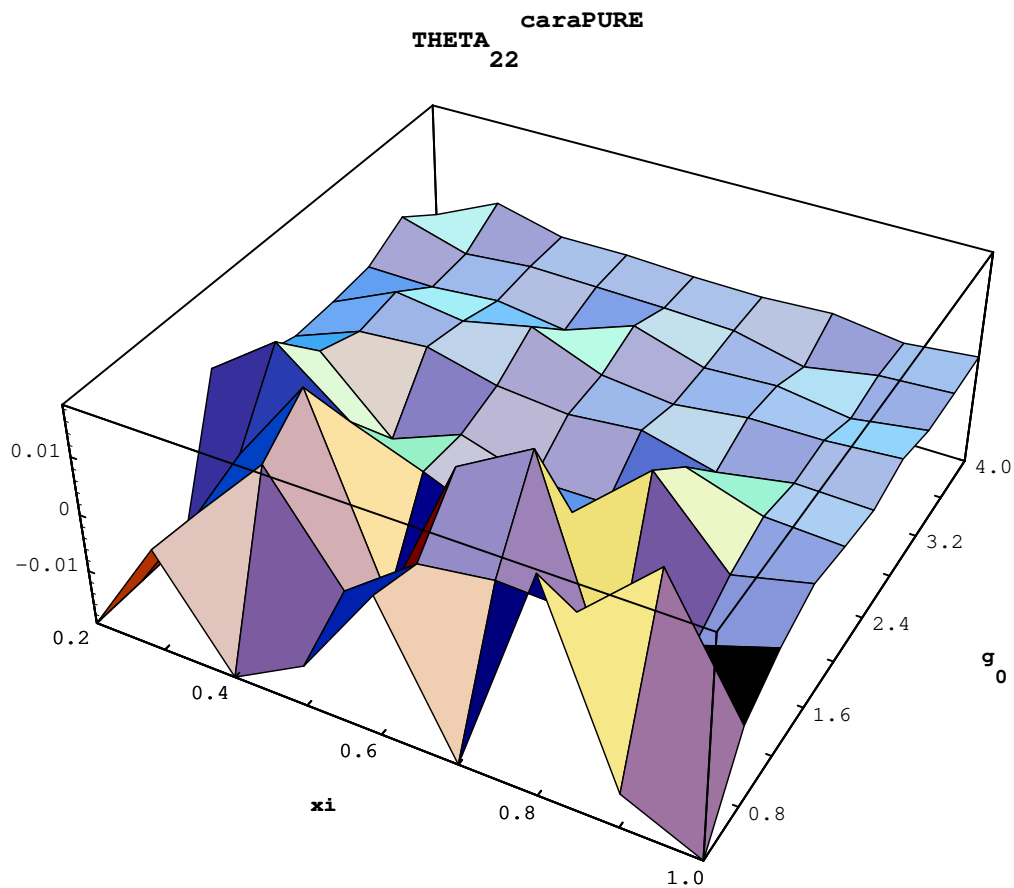


Fig. 8.2.4 a

Erwartungswert der Vollwinkel-Konstruktion für Diagonalelemente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter als Funktion von Asymmetrieparameter und Kopplungsstärke. Dies ist das einzige hier präsentierte Modell für die Diagonalelemente des Gitter-Energie-Impuls-Tensors, dessen Profil-Darstellung effektiv so gut wie überhaupt keine (außer statistischen Schwankungen) Abhängigkeit vom Asymmetrieparameter erkennen läßt.

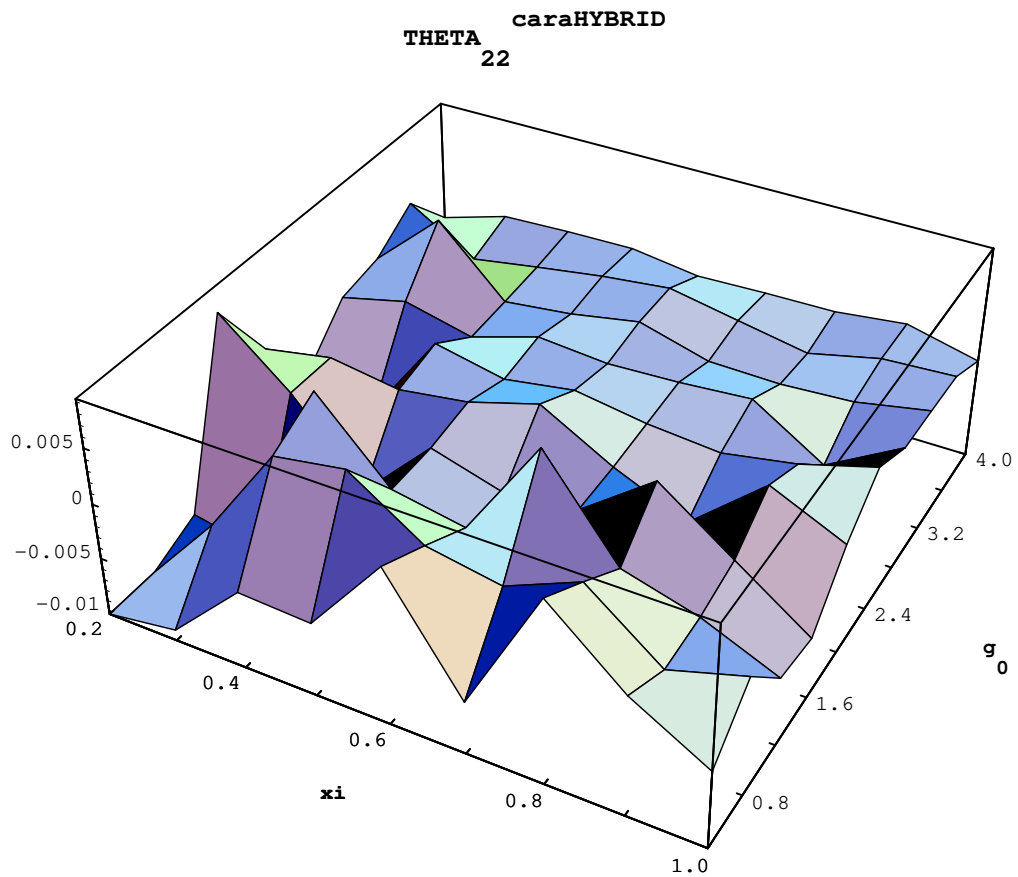


Fig. 8.2.4b

Wiederholung der in Fig. 8.2.4 a dargestellten Meßreihe mit aktivierter 4-Plaketten-Mittelung. Im Gegensatz zum in Fig. 8.2.4 a präsentierten Profil nehmen hier die Schwankungen zwischen den Meßpunkten in dem gleichen Maße zu, wie sich der Asymmetrieparameter vom neutralen Wert 1 durch abweichende Wertzuweisungen entfernt.

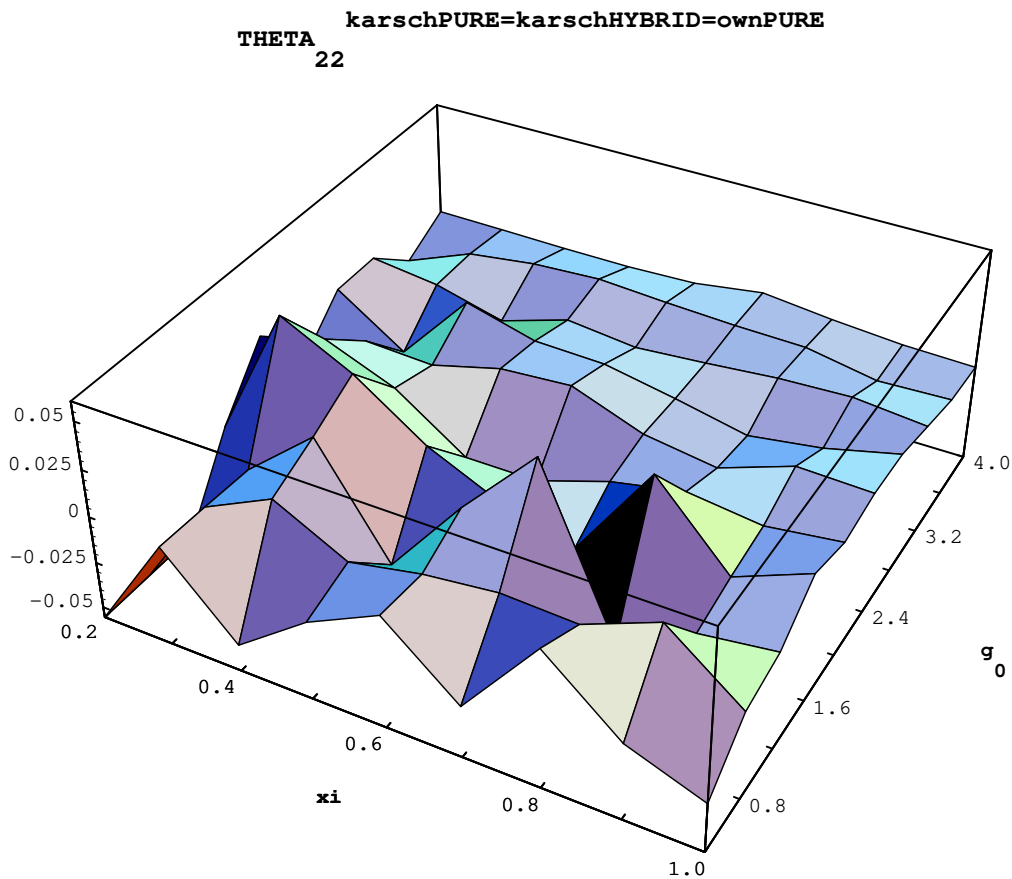


Fig. 8.2.4 c

Das Halbwinkel-Pendant zum Diagramm in Fig. 8.2.4 a . Das Verhältnis dieses Diagramms zu den Abbildungen Fig. 8.2.4 a und Fig. 8.2.4 b dokumentiert eine ähnliche Wechselbeziehung wie diejenige von Fig. 8.2.3 c zu Fig. 8.2.3 a und Fig. 8.2.3 b .

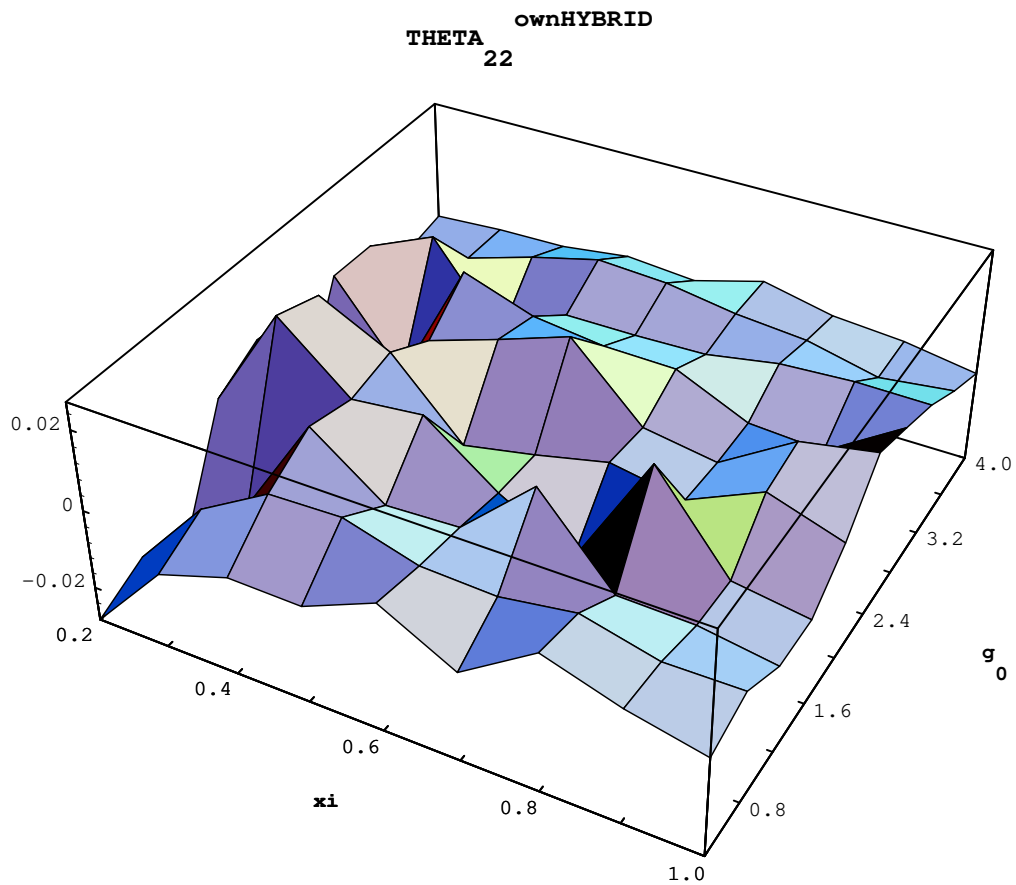


Fig. 8.2.4 d

Fig. 8.2.4 c stellte drei verschiedene Modelltypen simultan dar. Eines dieser Untermodelle war invariant unter der Prozedur einer Mittelwertbildung über vier benachbarte Plaketten, das in der Plotbeschriftung zuletzt genannte dagegen nicht. Die Applikation der Prozedur einer 4-Plaketten-Mittelung für jenes zuletzt genannte Modell generiert ein abweichendes Diagramm - nämlich den vorliegenden Plot Fig. 8.2.4 d.

Ein Vergleich der Graphiken 8.2.1 a - d mit 8.2.2 a - f bestätigt diese Schlußfolgerung optisch. Diese Plots stellen die verschiedenen $\Theta_{\mu\nu}$ -Typen auf Erwartungswertebene dar, und zwar in Abhängigkeit von der Gitter-Dimensionalität \dim und der Kopplungsstärke g_o . Es handelt sich jeweils um ein 10^4 -Gitter bezüglich der Eichgruppe $SU(2)$ mit implementiertem Hitzebadalgorithmus (nach 100 updatings). Als Resultat ergibt sich ein Oberflächengitter, das leider nicht beleuchtet ist wie die Mathematica-Pendants 8.2.3 a - d und 8.2.4 a - d, weil Mathematica die *dgrid3d*-Option für die Interpolation von Streudatensets leider nicht unterstützt. Um diesen Effekt so realistisch wie möglich zu halten, wurde darauf geachtet, daß die Oberflächengitter quadratisch sind (11 Höhenlinien, 11 Breitenlinien - mehr Koordinaten würden die Plots unübersichtlich machen), daß für g_o (im Gegensatz zur Gitterdimensionalität) überhaupt nicht interpoliert wird (deshalb der zusätzliche Wert von $g_o = 4.4$ im Vergleich zu 8.2.3 a - d und 8.2.4 a - d) und daß die Dimensionalität 3 in uninterpolierter Form eine eigene Höhenlinie (nämlich die 6. = mittlere von den 11 Kandidaten) beisteuern kann, wie es die natürlichen Grenzen $\dim = 2$ und $\dim = 4$ ohnehin tun. Die ebenfalls interpolierten Konturlevel für diese Oberflächengitter wurden aus Gründen der Übersichtlichkeit nicht auf die 3D-Gitter selbst aufgetragen, sondern auf die "Fußbodenebene" der Zeichnungen projiziert. Punkte dieser Oberflächengitter, die bei hypothetischer Echtbeleuchtung dieser Oberfläche verborgen wären, wurden dementsprechend weggeclipt - es sei denn, die Unterseite des Oberflächengitters kann im Vordergrund der Zeichnung noch eingesehen werden; dann sind diese Partien gestrichelt dargestellt.

Die Mathematica-Plots 8.2.3 a - d und 8.2.4 a - d hingegen stellen echtbeleuchtete Oberflächengitter in Abhängigkeit vom Asymmetrieparameter $\xi = \frac{a_r}{a}$ und g_o dar. ξ reicht von 0.2 bis 1 in Schritten von 0.1 - ohne jegliche Interpolation. Die Konstellation $\xi = 0.1$ kann nicht direkt umgesetzt werden - sie entspräche bei dem verwendeten 10^4 -Gitter formal einem shift zu einem 10^3 -Gitter mit $\xi = 1$. Die realen $\xi = 1$ -Höhenlinien bei diesen Graphiken sollten an und für sich den $\dim = 4$ -Höhenlinien bei den Plots 8.2.1 a - d und 8.2.2 a - f entsprechen. Dazu gibt es zwei wichtige Anmerkungen.

Erstens wurde - wie eingangs bereits für die Kurzzeitmessungen vermerkt - mit einem einzigen optionalen Initialisierungskeim für den verwendeten Zufallsgenerator gearbeitet. Demzufolge wird dieser nur ein einziges Mal für das gesamte Set der Messungen neu von Anfang an gestartet, so daß die konkreten Output-Werte von der Anzahl der Applikationen bei Vorgängermessungen abhängen. Daher können für die $\dim - g_o$ -Plots und die $\xi - g_o$ -Plots für

die jeweils letzte Höhenlinie ($\dim = 1$ bzw. $\xi = 1$) keine identischen Meßergebnisse erwartet werden. Ein Vergleich der Zahlenwerte bestätigt jedoch angemessen gute stochastische Übereinstimmung - anderenfalls wäre der Zufallsgenerator ungeeignet.

Viel wichtiger ist jedoch der zweite Hinweis. Infolge der enormen Zahlenunterschiede bei den $\dim - g_o$ -Plots, die daher herrühren, daß $\langle \Theta_{22} \rangle$ nur für $\dim = 4$ gegen Null tendiert, erscheinen die $\dim = 4$ -Höhenlinien für $\langle \Theta_{22} \rangle$ dem Auge des Betrachters optisch linear, was nur an der speziell für diese Werte unglücklichen Maßstabswahl liegt. Für die $\xi - g_o$ -Plots hingegen gilt stets $\dim = 4$, so daß $\langle \Theta_{22} \rangle$ innerhalb des gesamten Areals des Oberflächennetzes klein bleibt, so daß für die bei ausreichender Auflösung keineswegs lineare g_o -Abhängigkeit eine geeignete Maßstabsskalierung zur Verfügung stehen kann. Da die Qualität des ununterbrochenen Zufallsgenerators mit dem einen einzigen optionalen Initialisierungskeim gesamt-statistisch überdurchschnittlich gut ist, können die $\xi = 1$ -Höhenlinien für $\langle \Theta_{22} \rangle$ in Abhängigkeit von g_o als substituierende Lupe für die eingehendere Begutachtung der $\dim = 4$ -Höhenlinien für $\langle \Theta_{22} \rangle$ in 8.2.2 a - f herangezogen werden. Von diesem Umstand wird nachfolgend so oft wie erforderlich Gebrauch gemacht, ohne daß dann noch gesondert darauf hingewiesen werden wird. Nach diesen Vorbemerkungen können die 3D-Plots 8.2.1 a - d, 8.2.2 a - f, 8.2.3 a - d und 8.2.4 a - d ohne weitere terminologische Schwierigkeiten numerisch ausgewertet werden.

Der Vergleich der 3-dimensionalen Einschwing-Profile (Messungen aus dem Frühstadium der Monte-Carlo-Simulationen ohne Abhängigkeit von einer Variation der Anzahl der Gitter-Aktualisierungen)

8.2.1 a - d, 8.2.2 a - f, 8.2.3 a - d und 8.2.4 a - d ergibt folgendes. Die Nichtdiagonalelemente $\langle \Theta_{12} \rangle$, an welche keine theoretischen Forderungen oder Vorhersagen adressiert sind, erweisen sich als sensibel gegenüber $\dim \rightarrow 4$ und g_o - klein - ohne daß eine deutliche Modellabhängigkeit zu verzeichnen wäre.

Die Region, die relativ noch am stärksten modellabhängig ist, liegt ganz eindeutig im totalen "Mittelfeld", nämlich um $\dim \approx 3$ und $\beta(g_o) \approx 0.6$ herum. Hier thermalisiert mein eigenes Halbwinkelmodell - was die Wechselverhältnisse der Meßpunkte untereinander anbetrifft - jeweils spürbar langsamer als das Modell der Gruppe Caracciolo, das hier sowohl mit als auch ohne 4-Plaketten-Hybridisierung jeweils identisch zu den Versionen

von Karsch et al. ist. Diese Aussage bezieht sich auf den Vergleich von **'CARA PURE'** = **'KARSCH PURE'** mit **'OWN PURE'** und den von **'CARA HYBRID'** = **'KARSCH HYBRID'** mit **'OWN HYBRID'**. Infolge der etwas komplizierteren Struktur konvergieren die 4-plakettengemittelten Modelle etwas langsamer als ihre unmanipulierten Vorbilder und degenerieren demzufolge an der ohnehin instabilsten aber keineswegs besonders modellabhängigen Stelle, nämlich für $\dim \rightarrow 4$ und $\beta(g_o) \gtrsim 6$. Eine ξ -Abhängigkeit läßt sich sogar nirgendwo definitiv herauskristallisieren. Ganz offensichtlich spiegelt sich in diesem eher unsensiblen Gesamtverhalten der Einschwingplots für $\langle \Theta_{12} \rangle$ die Abwesenheit theoretischer Aussagekraft wider.

Die einzige modellsensible Stelle bei $\dim \approx 3$ und $\beta \approx 0.6$ liegt bei einer Dimensionalität, die bei den theoretischen Herleitungen niemals eine kritische Rolle annahm, und einem Kopplungsbereich, der für kontinuumsnahe Gitterphysik absolut irrelevant ist. Es scheinen also gerade für die Herleitung atypische Artefakt-Momente zu dominieren, deren Strukturbildung eher minderfundamentalen Gesetzmäßigkeiten unterliegt. In diesem Rahmen kann das geringere Konvergenztempo meines eigenen Modells ganz lapidar mit der etwas komplizierteren algebraischen Struktur eines Halbwinkelmodells erklärt werden.

Zu den eher selbstverständlichen Beobachtungen gehört, daß die 4-plakettengemittelten Versionen trotz der weniger regelmäßigen Oberflächennetze von der Größe der resultierenden Werte her natürlich um 1/2 bis 1 Größenordnung kleiner sind, was auch für die Diagonalelemente $\langle \Theta_{22} \rangle$ gilt. Die Absolutbeträge für $\langle \Theta_{12} \rangle$ werden jeweils an der Ecke $\dim \rightarrow 4$ und $g_o \rightarrow \textit{klein}$ groß. Für $\langle \Theta_{22} \rangle$ tritt durchgehend ein ähnlicher Effekt ein - jedoch dimensionell entgegengesetzt an der Ecke $\dim \rightarrow 2$ und $g_o \rightarrow \textit{klein}$. Diese Beobachtung ist fundamental aber wenig aussagekräftig, da sie eine unmittelbare Konsequenz der eingangs diskutierten Verschiebung des Größengleichgewichts zwischen Diagonalelementen (Dominanz bei $\dim 2$) und Nichtdiagonalelementen (Dominanz bei $\dim 4$) ist. Die einzige Eigentümlichkeit dabei ist, daß diese Extrema sowohl für $\langle \Theta_{12} \rangle$ als auch für $\langle \Theta_{22} \rangle$ stets im negativen Zahlenbereich liegen, wenn konsequente Halb- oder durchgängige Vollwinkel-Modelle untersucht werden (**'CARA'** stets, **'OWN'** stets und **'KARSCH'** immer genau dann, wenn **'KARSCH'** mit einem der anderen Modelle **'CARA'** oder **'OWN'** zusammenfällt).

Nun speziell zu $\langle \Theta_{22} \rangle$. Für $\xi = 1$ sollte $\langle \Theta_{22} \rangle \longrightarrow \langle \Theta_{44} \rangle$ gelten,

so daß hier wirklich eine Größe auf dem Gitter betrachtet wird, deren Herkunft im Zusammenhang mit der $SO(4)$ -Plaketten-Entwicklung in den 2 Winkel-Stufen gesehen werden muß und ebenfalls mit dem thermodynamischen $\Theta_\mu^\mu \leftrightarrow \Theta_{44}$ -Dualismus assoziiert ist. Die Meßdaten in den Plots 8.2.2 a – f und 8.2.4 a – d signalisieren eine extreme Modellabhängigkeit für $g_o \rightarrow \textit{klein}$ und $\textit{dim} \rightarrow 2$. In dieser Umgebung fallen die Caracciolo-Versionen (Fig. 8.2.2 a , Fig. 8.2.2 b) deutlich regelmäßiger als die entsprechenden Implementationen meines eigenen Halbwinkel-Modells (Fig. 8.2.2 e und 8.2.2 f) aus, und das Karsch-Modell mit '**KARSCH PURE**' = '**KARSCH HYBRID**' (in Fig. 8.2.2 c) degeneriert in einem geradezu pathologischem Ausmaß.

Hierzu ist folgendes anzumerken. Wenn ein Ausdruck à la

$(\sqrt{U} - \sqrt{U^\dagger})^2$ ausmultipliziert wird, entstehen neben den innerhalb der Eichgruppe $SU(2)$ spurgleichen Ausdrücken U und U^\dagger (wegen der Quadrierung sind sie auch vorzeichengleich, so daß sie wirklich zusammengefaßt werden können) Einheitsmatrizen. Da für $\textit{dim} = 4$ die Anzahl positiver und negativer Beiträge dieser Art gleich groß ist, heben sich die **1**'en gegenseitig weg und erzeugen so bis auf in Kapitel 8.1 behandelte Subtilitäten, die sich in der approximativen numerischen Darstellung ausdrücken, $\langle \Theta_{22}^{\textit{karschPURE}} \rangle \longrightarrow \langle \Theta_{22}^{\textit{ownPURE}} \rangle$. Dies als anschauliche Kurzlegende ohne alle verwirrenden Feinheiten zur Illustration von Schema Fig. 8.2.2 d , die die Sonderrolle der Dimensionalität 4 hervorhebt.

Die asymptotische Konvergenz von $\langle \Theta_{22}^{\textit{karschPURE}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\textit{karschHYBRID}} \rangle$ gegen $\langle \Theta_{22}^{\textit{ownPURE}} \rangle$ an der Randzone $\textit{dim} \rightarrow 4$ ist deshalb so interessant, weil sie in Zusammenhang mit einem Prozeß gesehen werden muß, der keineswegs selbstevident aus den theoretischen Symmetriebetrachtungen von Kapitel 8.1 folgt. An dieser Randzone $\textit{dim} \rightarrow 4$ manifestiert sich nämlich ein Phänomen, das ganz offensichtlich in anderen Situationen überhaupt nicht beobachtet werden kann: beide Versionen (mit oder ohne 4-Plaketten-Hybridisierung) des Caracciolo-Modells liefern die Datensets mit den höchsten Verzerrungen!

Darüber hinaus ist in den nichttrivial 4-plakettengemittelten Situationen $\langle \Theta_{22}^{\textit{caraHYBRID}} \rangle$ und $\langle \Theta_{22}^{\textit{ownHYBRID}} \rangle$ eine deutliche ξ -Abhängigkeit in Hinblick auf den Verzerrungsgrad zu verzeichnen, obwohl die durch ξ getunete 4. Raumrichtung nicht aktiv an den Komponenten des Meßobjekts Θ_{22} beteiligt ist. Dies ist vor allen Dingen bei kleinen und mittleren

g_0 -Werten deutlich zu beobachten, wobei die Verzerrungen - wie es eigentlich auch zu erwarten ist - mit kleinerem ξ stärker werden. Verrechnet man die deutlich kleineren Werte von $\langle \Theta_{22}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ und $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ gegenüber den entsprechenden 'PURE'-Versionen symbolisch mit den höheren Verzerrungsgraden der entstehenden Daten-Netze, so entsteht der Eindruck, daß die 'HYBRID'-Methode in der Einschwingphase nur dann eine deutliche Verbesserung darstellt, wenn die Dimensionalität bei 4 liegt. Alle diese Beobachtungen lassen folgende Schlüsse zu.

Die Dimensionalität und die Homogenität des ihr unterliegenden Gitter-Raumes spielen bei der Erwartungswertmessung von Θ_{22} in der Einschwingphase (Messungen in der Frühphase der Monte-Carlo-Simulationen) eine zentrale Rolle. Für die kritische Dimensionalität 2 der Vollwinkel-Gitter-Übersetzung des Einstein-Sektors konvergiert das Vollwinkel-Modell der Gruppe Caracciolo wesentlich besser als die beiden effektiven Halbwinkel-Darstellungen durch die anderen Modelle für $\langle \Theta_{22} \rangle$, wobei mein eigenes Modell sich gegenüber der Karsch-Version noch deutlich sanfter verhält - vermutlich aufgrund des einheitlicheren Charakters bei der Konstruktionsvorschrift für $\Theta_{\mu\nu}$. Für die kritische Dimensionalität 4 der Halbwinkel-Gitter-Übersetzung des Maxwell-Sektors hingegen verhalten sich ganz offensichtlich in streng analoger Umkehrung die Halbwinkel-Modelle gutartiger. Anders als bei den Nichtdiagonal-Komponenten der Gitterversionen von $\Theta_{\mu\nu}$ spielte ja übrigens auch die Winkelfrage für die Diagonal-Komponenten bei den allgemeinrelativistischen und thermodynamischen Schemata eine maßgebliche Rolle.

Nun ist es natürlich so, daß Messungen nach 100 updatings nicht besonders signifikant sind. Eine Erhöhung der Anzahl der updatings nivelliert - wie sich bei dem Herumexperimentieren mit den Einleseparametern herausstellte - jedoch diese Charakteristika nicht unbeträchtlich, so daß die Aussagekraft über die Startbedingungen des Thermalisierungstempos abnimmt. Unterscheidbare Signale über das Thermalisierungsverhalten offenbaren sich also im vergleichsweise jungen Frühstadium der Einschwingprozesse und dürften als Bestätigung dafür gedeutet werden, daß die algebraischen Wechselbeziehungen der in Kapitel 8.1 ausführlich dargestellten Modelle numerische Effekte erzeugen, die in einem zweiten Interpretationsschritt in Beziehung zu dem SO(4)-Plakettenschema gesetzt werden können. Da diese Effekte jedoch im Einschwingbereich selber zu lokalisieren sind, spielen sie nur eine sekundäre Rolle und liefern aufgrund des beobachteten Zusammenhangs zwischen Thermalisierungstempo und Konvergenzqualität Evidenz dafür, daß die Ergebnisse der anschließend diskutierten Langzeitmessungen bezüglich ihrer physikalischen Aussagekraft ernst genommen

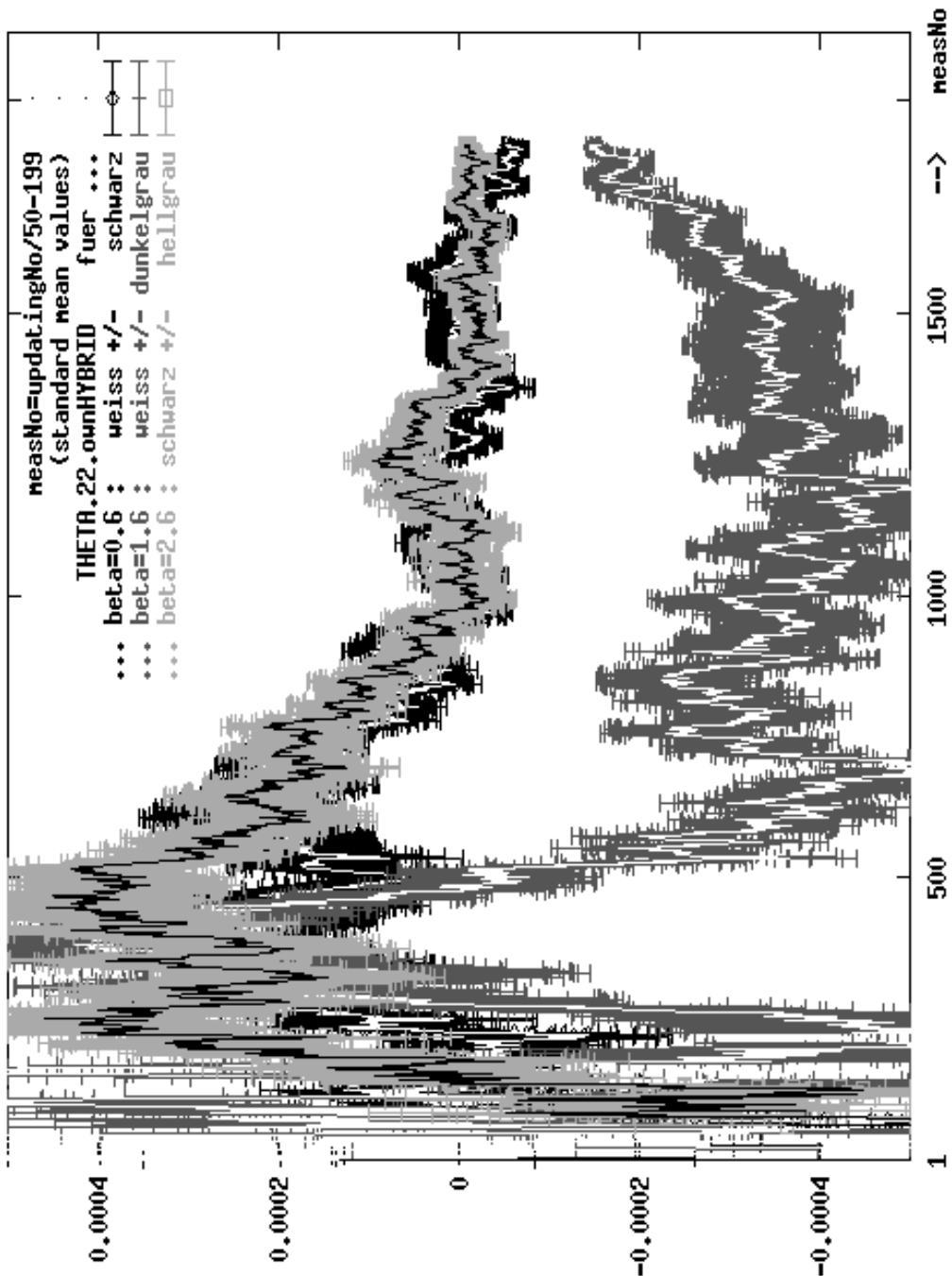


Fig. 8.2.5 a

Gemessen wird der Erwartungswert für eine Diagonalkomponente des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors auf dem Gitter für das Halbwinkel-Modell mit 4-Plaketten-Mittelung. Beim verwendeten $SU(2)$ -Hitzebad-Algorithmus werden die ersten (ca.) 10 000 (exakt: 9959) Gitter-Aktualisierungen verworfen und dann jeweils immer wieder nach 50 weiteren updatings gemessen. Diese Prozedur wiederholt sich mehr als 2000 Mal, wobei die entstehenden List-Plot-Graphen von den durch graphisch enges Zusammenrücken ihrer statistischen Fehlerbalken " +/- " generierten Flächen-Clustern in den Farben des jeweiligen Fehlerbalkentyps (schwarz, dunkelgrau, hellgrau) eingerahmt sind.

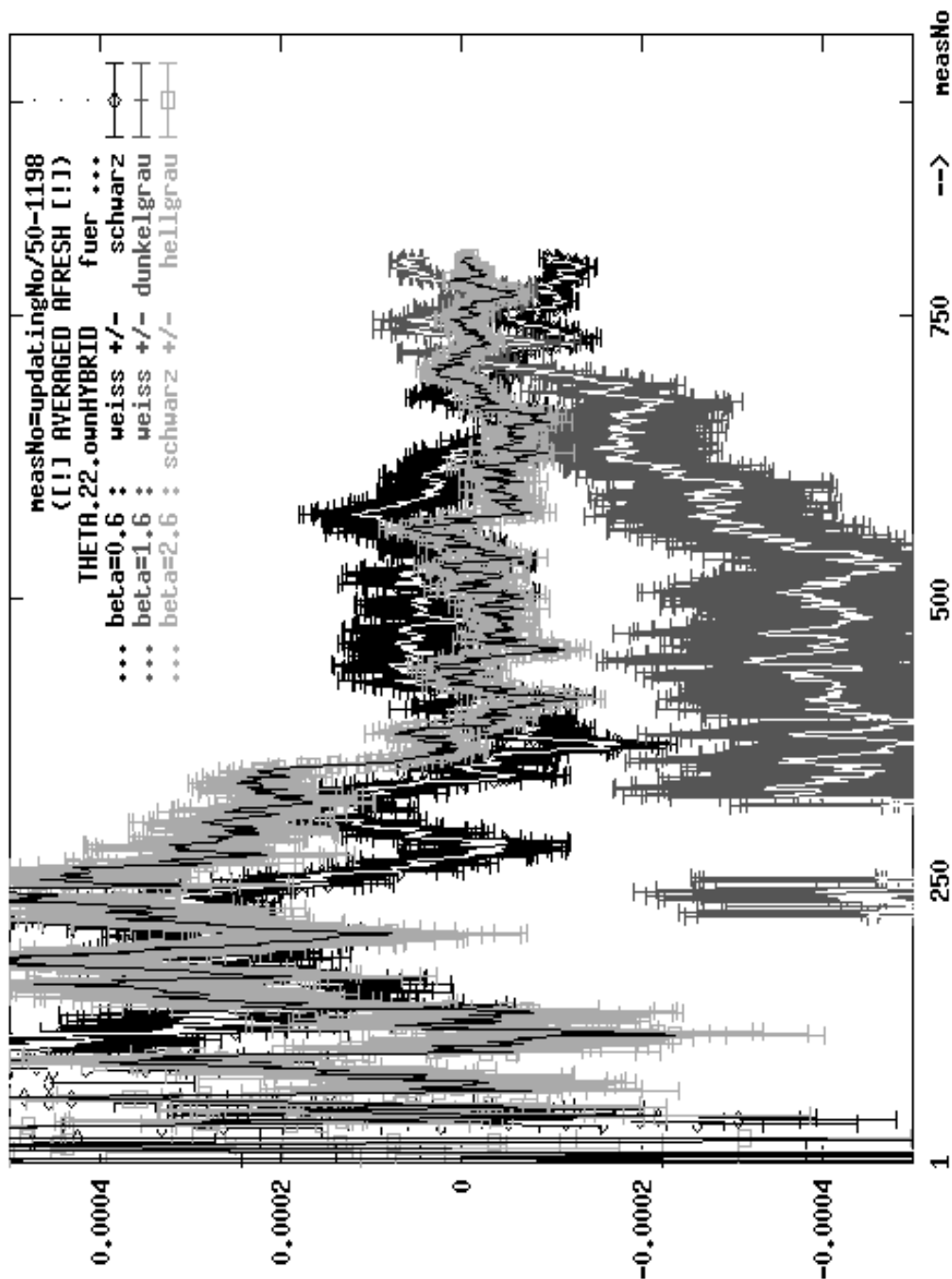


Fig. 8.2.5b

Wird die Situation in Fig. 8.2.5a dahingehend variiert, daß vor dem ersten Eintrag 50 000 (49 999) und noch einmal die üblichen 50 Gitter-Aktualisierungen verschmählt werden, so verbessert sich die Konvergenz der bei unterschiedlicher Kopplungsstärke aufgenommenen konkurrierenden Vergleichs-Meßreihen. Dies kann als Indiz dafür gewertet werden, daß die Einschwingphase in Fig. 8.2.5a eher zu niedrig bewertet ist. Dennoch soll an der dort getroffenen Bewertung in Bezug auf ähnliche Projekte festgehalten werden, da anderenfalls die Mengensubstanz der zur Verfügung stehenden Meßpunkte zu stark schrumpfen würde.

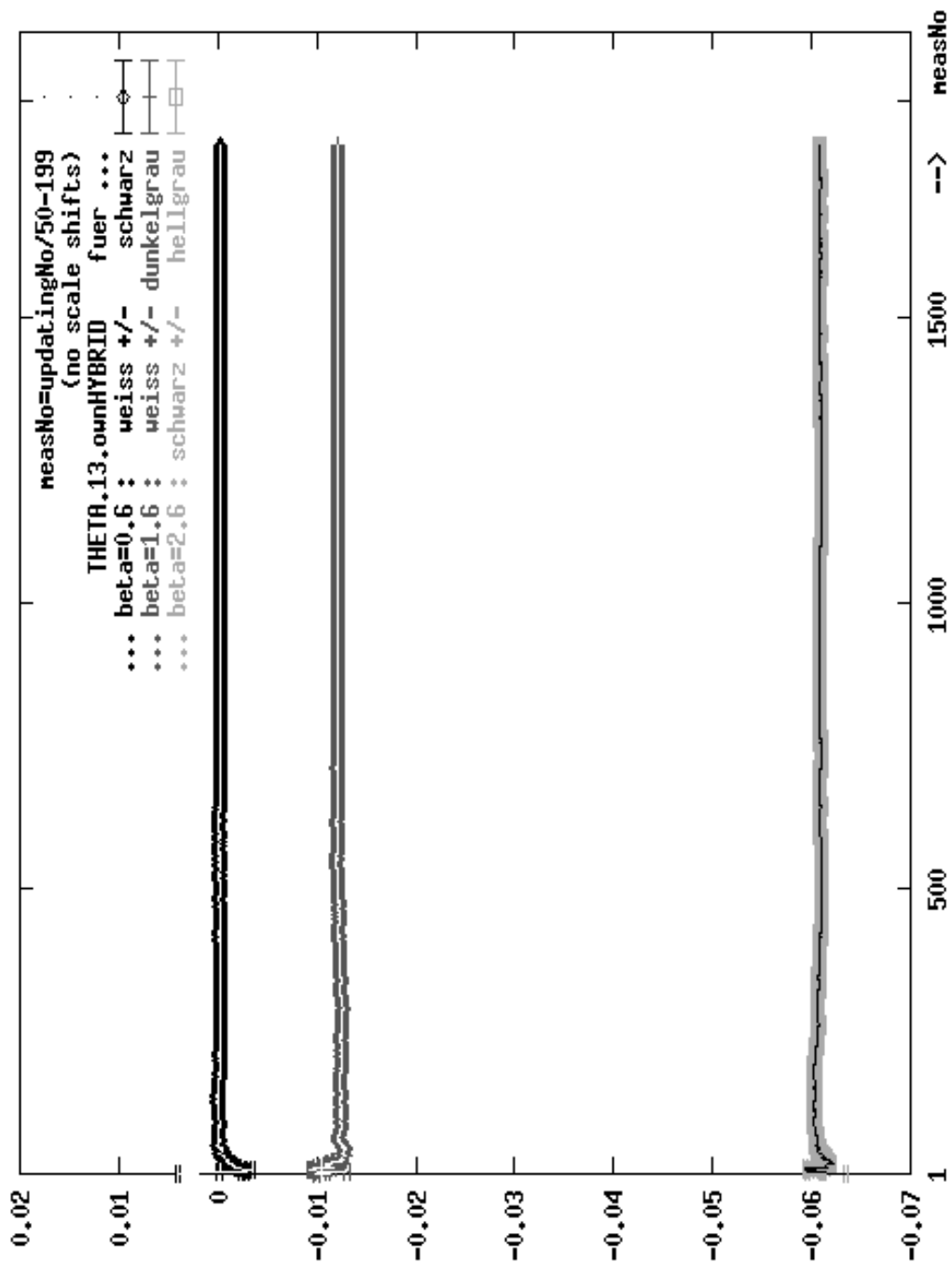


Fig. 8.2.5c

Pendantdarstellung zu Fig. 8.2.5 a für eine beliebig gewählte repräsentative Nichtdiagonalkomponente des gleichen betroffenen Tensors bezüglich aller drei konkurrierenden Vergleichs-Meßreihen bei unterschiedlichen Kopplungsstärken. Bei einer Skalierung, die es erlaubt, alle drei Teil-Meßreihen durch ein einziges gemeinsames Diagramm vollständig zu erfassen, wirken die Teil-Meßreihen nahezu linear. Die statistischen Schwankungen sind sehr klein im Vergleich zu den Größenunterschieden zwischen den verschiedenen Vergleichs-Meßreihen bei jeweils unterschiedlicher Kopplung.

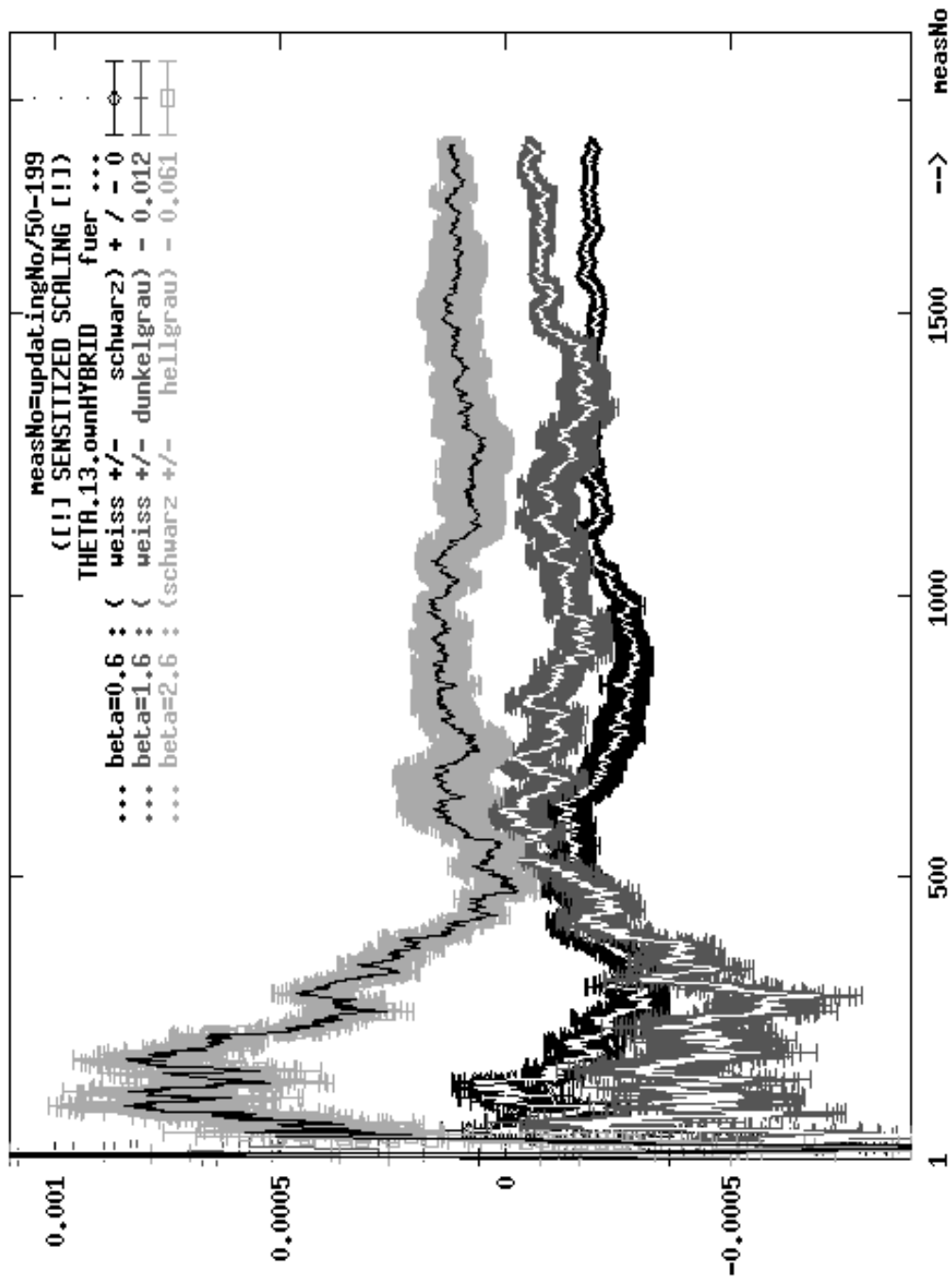


Fig. 8.2.5 d

Mit Hilfe der Vereinbarung, bei der Wiedergabe einzelner Graphen zusammengehörender Meßpunkte eine jeweils uniforme Verschiebung zuzulassen (Einschränkung der Maßstabstreue bei den Vergleichs-Graphen relativ zueinander), kann die Skalierung in Fig. 8.2.5 c dahingehend modifiziert werden, daß innere Strukturen bei den Vergleichs-Graphen sichtbar werden. Je besser die Plots für die Nichtdiagonalkomponenten des betrachteten Gitter-Energie-Impuls-Tensors aufgelöst werden, desto ähnlicher werden sie ihren Analoga für die Diagonalkomponenten des Referenzensors.

werden müssen, was aus den möglichen Qualitäten einer theoretisch-physikalischen Herleitung und der technischen Sauberkeit einer entsprechenden numerischen Umsetzung nicht notwendigerweise folgt.

Zur Begutachtung der Länge von Einschwingphasen und des Auftretens von statistischen Fehlern sind die Plots 8.2.5 a bis 8.2.5 d eingefügt. Sie beziehen sich jeweils auf ein 10^4 -Gitter der Eichgruppe SU(2), dessen Anzahl an durchgeführten Monte-Carlo-Aktualisierungen nach dem Hitzebad-Verfahren für einen eingetragenen Meßpunkt oder Fehlerbalken durch Auflösung der jeweils in der rechten oberen Ecke des Plots eingetragenen Gleichung nach der 'updatingNo' in Abhängigkeit von der durch die x-Achse zugewiesenen Messungsnumerierung 'measNo' erhalten werden kann.

Alle Messungen sind mit statistischen Fehlerbalken versehen. Unter einer "Einzel"-Messung mit $\text{measNo} = n$ wird - wie eingangs bereits schon ganz knapp erwähnt wurde - der Mittelwert der Rohdaten (die natürlich wiederum über das gesamte Gitter gemittelt sind) nach jeweils $\text{updatingNo}(\text{measNo} = i)$ Aktualisierungen verstanden, wobei i von 1 bis n läuft. Da dadurch die Fehler infolge der mehr oder minder verlängerten Einschwingphasen nach und nach bis zu einem gewissen Grade effektiv weggeglättet werden, wird der assoziierte statistische Fehler besser über den mittleren Fehler der "Einzel"-Messung $\text{measNo} = n$ bezüglich der von den schlechteren Anfangsmessungen befreiten Rest-Meßreihe $\text{measNo} \in \{n, \dots, \max(\text{measNo})\}$ definiert, da der "unverdaute" Part der Einschwingfehler in die Streuung dieser restlichen Meßreihe mit eingeht. Die restlichen Meßwerte sind ja alle wie gesagt über sämtliche vorangehende Protodaten gemittelt ($\min(\text{measNo}) = n$ - aber es bleibt bei $\min(i) = 1$).

Da sowohl die Meßpunkte als auch die Fehlerbalken in den Graphiken 8.2.5 a bis 8.2.5 d im allgemeinen sehr dicht beieinander liegen - schließlich liegen in 3 der 4 Zeichnungen weit mehr als 1000 Meßpunkte mit relativ eng benachbarten Bild-Werten nahe aneinander, wenn die 'measNo' nicht allzu klein ist - , entstehen aus einzelnen Punkten durchgezogene Kurven und aus Fehlerbalken in den Bereichen geringer Verschiebung effektive Flächen. Die Reihenfolge wurde stets so gewählt, daß erst die Schar von Fehlerbalken aufgetragen wird und dann durch ihr fluktuierendes Zentrum die effektive Kurve der eigentlichen 3 Messungen gelegt wird, wobei die Plotprogramme dafür auch weiße Farbe zulassen. Die Plots demonstrieren folgendes.

In Fig. 8.2.5 a fällt die weiße Meßkurve \pm dunkelgraue Fehler für

$\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ für den mittleren β -Wert 1.6 aus dem Rahmen. Um die Ursache dafür zu verstehen, wurde die für die Langzeitmessungen nicht berücksichtigte Stabilisierungsphase von 10 000 (ca., programmtechnisch waren es genauer 9999) Gitter-Aktualisierungen ca. 6-fach länger mit 60 000 (59949) updatings redefiniert. Das Ergebnis dieses Experiments ist in Abbildung 8.2.5 b illustriert und demonstriert, daß eine Verletzung der in Kapitel 8.1 aufgestellten Vorhersage, daß jeder Erwartungswert der in dieser Arbeit behandelten Gitterversionen von Θ_{22} gegen Null thermalisiert, als Signal für eine zu kurz bemessene Einschwingzeit bewertet werden kann. Auffällig ist und bleibt, daß unabhängig von der Dauer dieser Stabilisierungsphase der $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ -Plot für die realistische Gitter-Parametrisierung $\beta = 2.6$ im scaling window in beiden Abbildungen 8.2.5 a und 8.2.5 b jeweils das beste Thermalisierungsverhalten im Hinblick auf den Attraktor 0 und die effektivste Fehlerbalken-Reduzierung für `measNo` \rightarrow **groß** aufweist. In beiden Fällen können für $\beta = 2.6$ Einschwingphase und anschließendes Meß-Intervall als ausreichend groß angesehen werden. Diese positive Bestätigung ist keineswegs selbstverständlich und wird durch die aufgetragenen Fehlerbalken schön anschaulich illustriert.

Ein Blick auf die Pendant-Darstellungen Fig. 8.2.5 c und 8.2.5 d für die entsprechende Nichtdiagonalkomponente $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ verrät zunächst einmal, daß in der natürlichen Skalierung bei Fig. 8.2.5 c die schwarzen Fehlerbalken für $\beta = 0.6$ ungefähr genauso groß sind wie in Fig. 8.2.5 d, obwohl dort ein Skalenabstand in vertikaler Richtung 40-fach kleiner ist. Eine eingehende Untersuchung der Output-Kanalisation des zugrundeliegenden Graphik-Programms ergab, daß bei der Konversion der Bildformate vom interaktiven Zeichnungs-Modus in die druckertreiberfreundliche Postscript-Sprache gewisse Minimalnormen bei verketteten Bildsymbolen nicht unterschritten werden und so in der Extremsituation geclustertes Miniatur-Fehlerbalken Artefakte produzieren.

Aus diesem Grund sind die drei β -Verläufe aus Fig. 8.2.5 c in Fig. 8.2.5 d durch konstante shifts für $\beta = 1.6$ und $\beta = 2.6$, die die dazugehörigen Kurvenpunkte und Fehlerbalken ohne jegliche Dehnungs- oder Stauchungseffekte einfach nur verschieben, ähnlich weit auseinandergerückt worden, wie es sich für die $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ -Darstellungen automatisch ergab. Der Maßstab ist hier nun wie gesagt 40-mal sensibler als in Fig. 8.2.5 c und liefert jetzt realistische Fehlerbalken-Entwicklungen, die sich auf die ungeshiftete Interpretation der jeweiligen Meßwerte beziehen.

Interessant ist zunächst einmal, daß sich bei hinreichend feiner Skalierung die $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ -Verläufe im Hinblick auf die äußere Gestalt und die Entwicklung der statistischen Fehler in einer Art und Weise verhalten, die hohe qualitative Ähnlichkeit zu den Strukturen bei $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ aufweist. Ganz anders sind natürlich die quantitativen Aussagen: die relativen Fehler sind für $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ um weit mehr als eine Größenordnung kleiner als etwa $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$, wenn β größer als 1.5 ist, wie es zum Beispiel im scaling window für das 10^4 -Gitter der Fall ist.

Sehr kleine β -Werte entsprechen hohen Kopplungen und sind in ihrer Wirkung ähnlich zu bewerten wie zu große Gitterabstände: der Kontakt zur Kontinuumsphysik geht verloren, und eine Größe wie etwa $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ wird von Gitterartefakten überlastet, die infolge der räumlichen $O(4)$ -Symmetrie eine unpolarisierte Flut an resultierend asymptotisch gleich gewichteten positiven und negativen Artefaktbeiträgen mitschleppen, die die eigentliche Physik maskieren. Bei den Einschwingprofilen interessierten die qualitativen Wechselbeziehungen zwischen den einzelnen Datenpunkten, weil die quantitativen Feinheiten noch gar nicht als aussagekräftig bewertet werden konnten. Nun ist aber ein Vergleich mit den ersten Langzeit-Meßdaten möglich, und man sieht, daß die im allgemeinen noch nicht ganz flachen $\langle \Theta_{12} \rangle \approx 0$ -Plateaus (am jeweils linken Rand der betroffenen Plots gilt diese Beziehung natürlich sogar exakt) für mittel- bis extrem hohe g_0 in der Tat die artefaktdominierte Konvergenz von $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} (\beta = 0.6) \rangle$ (bei den Einschwingmessungen wurde Θ_{12} anstelle von Θ_{13} gewählt, um die Situation unproblematisch auf die Dimensionalität 2 verallgemeinern zu können - infolge der $O(4)$ -Symmetrie für die Dimensionalität 4 ist das aber völlig irrelevant, wie sich auch durch Testmessungen bestätigen ließ) gegen Null erfolgreich ankündigen. Insofern wird durch diesen Kurztest eine elementare Kommensurabilität der Einschwingprofil-Daten mit den Langzeit-Meßwerten sichergestellt.

Sämtliche Schlußfolgerungen aus den Graphiken 8.2.5 a bis 8.2.5 d auf das Modell 'OWNHYBRID' für die Gitterversionen des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors können auf die anderen in dieser Arbeit behandelten Konkurrenz-Modelle ausgeweitet werden, wie umfangreiche numerische Detailtests aufzeigen konnten. Für das scaling window auf dem 10^4 -Gitter ist es völlig ausreichend, ab der 10000-ten Hitzebad-Aktualisierung in Abständen von 50 updatings knapp 2000 mal zu messen. Die jeweilige Pause von 50 updatings ist in der Lage, im Bereich der aufgrund von CPU-Grenzen gewählten single precision numbers die gewünschte Pseu-

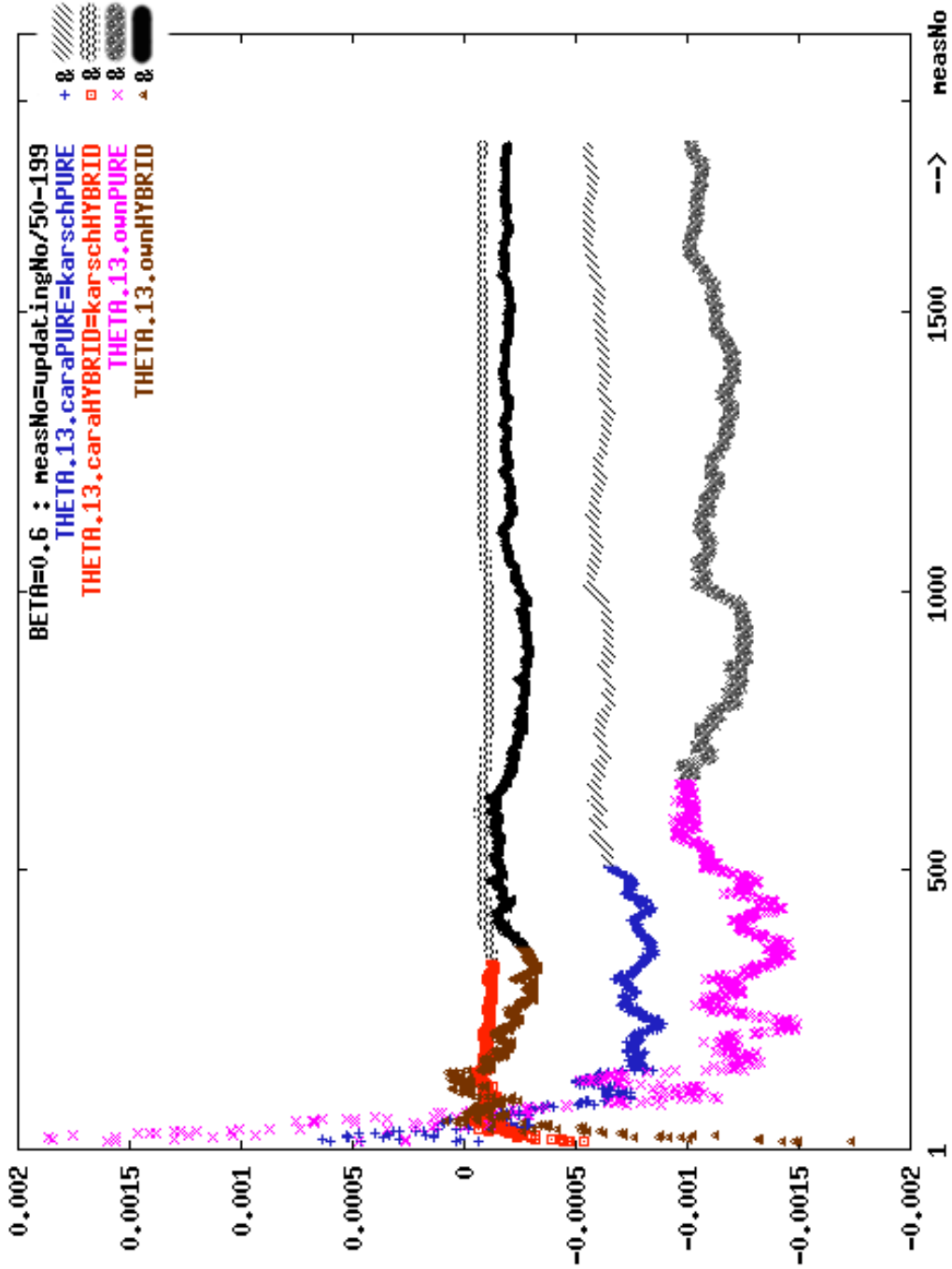


Fig. 8.2.6 a

Langzeitmessungen nach dem Schema von Fig. 8.2.5 a für in der Plot-Legende aufgelistete (Definitionen siehe Haupt-Text) verschiedene Gitter-Modelle für Nichtdiagonalkomponenten des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors (Erwartungswerte einer repräsentativ herausgegriffenen Komponente) bei einer bestimmten Kopplungsstärke (in der Plot-Legende invers quadratisch benutzt). Für niedriges β liegen die Vergleichs-Graphen relativ eng benachbart und starten relativ ungeordnet.

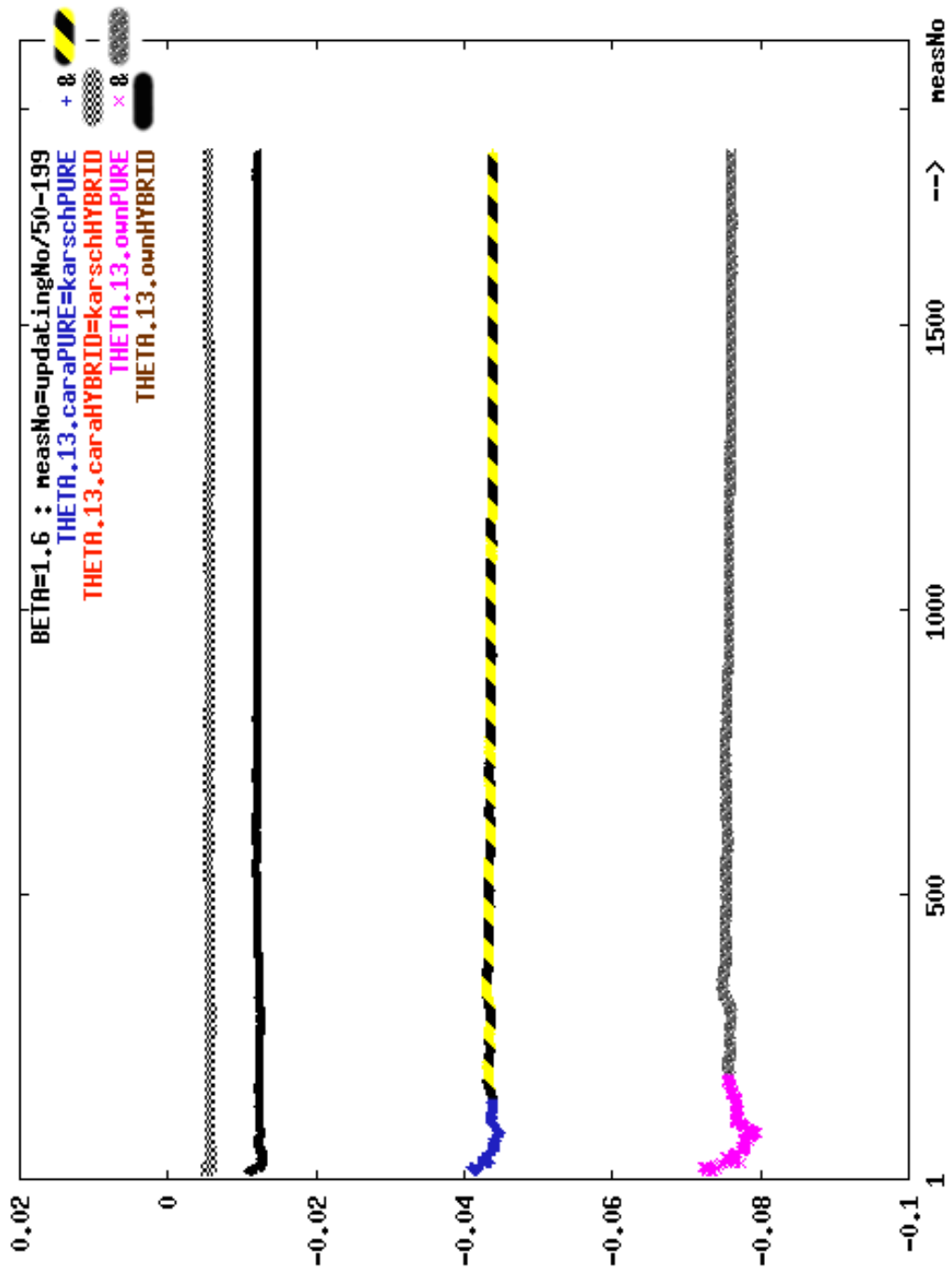


Fig. 8.2.6b

Das gleiche Szenario wie in Fig. 8.2.6a, aber für höheres β . Die einzelnen Graphen werden regelmäßiger und entfernen sich stärker voneinander.

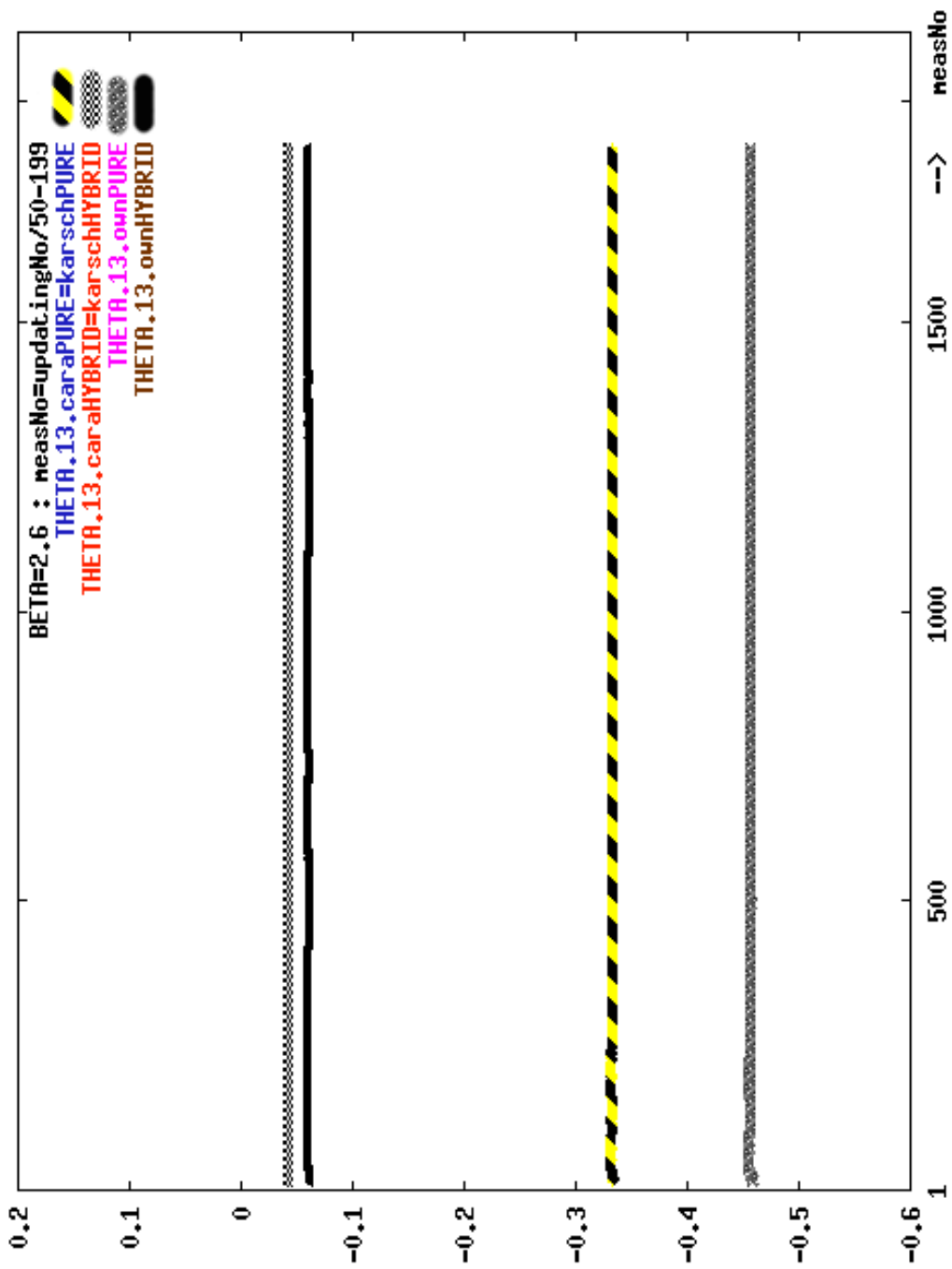


Fig. 8.2.6 c

Das gleiche Szenario wie in Fig. 8.2.6 b , aber für noch höheres β . Die Entwicklungen im Vergleich von Fig. 8.2.6 a und 8.2.6 b setzen sich im Hinblick auf Fig. 8.2.6 c (hier vorliegend) in manifester Form fort.

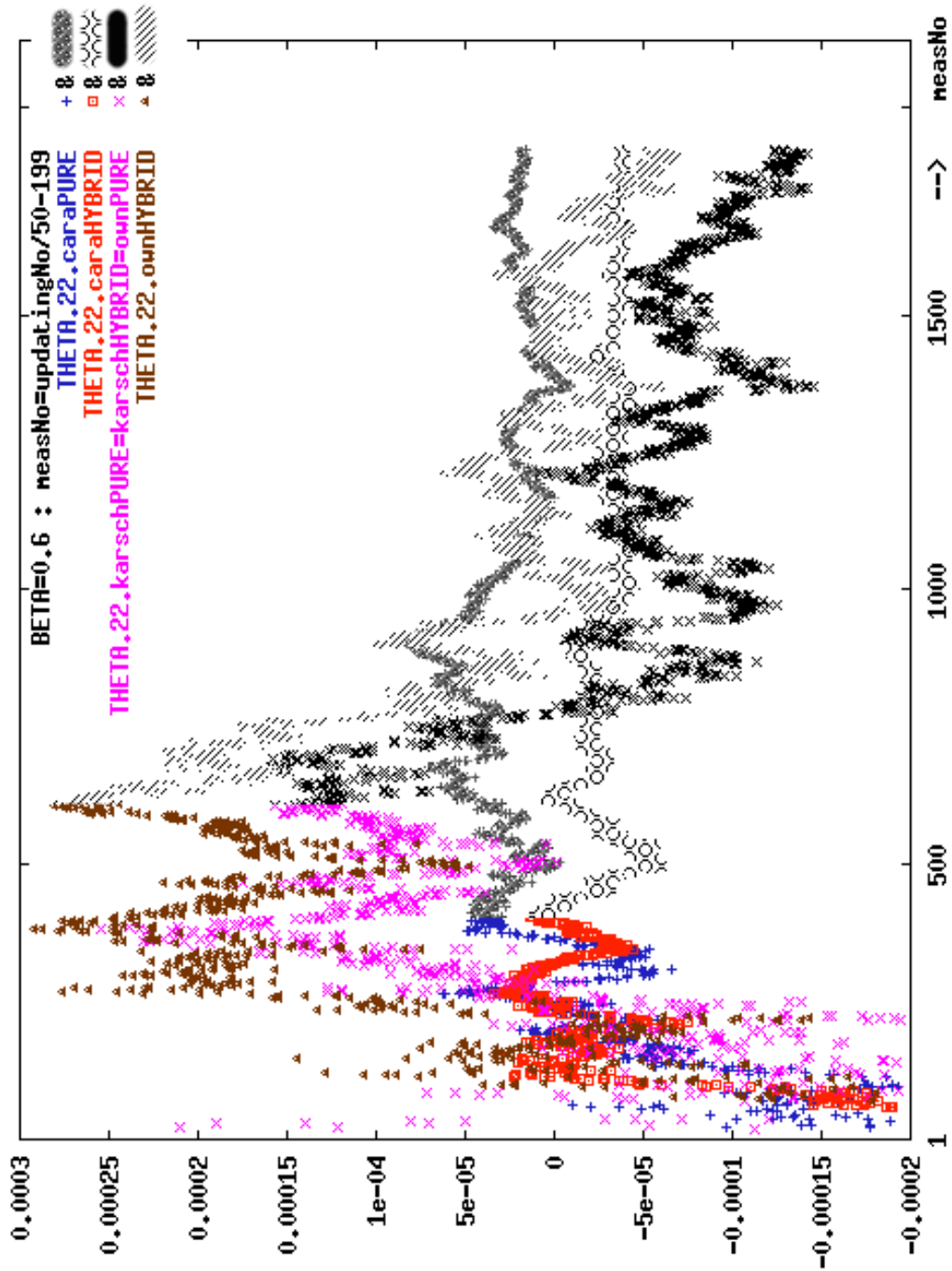


Fig. 8.2.6 d

Langzeitmessungen nach dem Schema von Fig. 8.2.5 a für verschiedene Gitter-Modelle des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors in Bezug auf die Erwartungswerte einer beliebig herausgegriffenen (das Gitter ist symmetrisch) Diagonalkomponente ganz analog zu dem Verfahren in Fig. 8.2.6 a. Der universell gewählte β -Wert ist noch niedrig, und sämtliche betrachtete Modelle verhalten sich zueinander unterschiedlich.

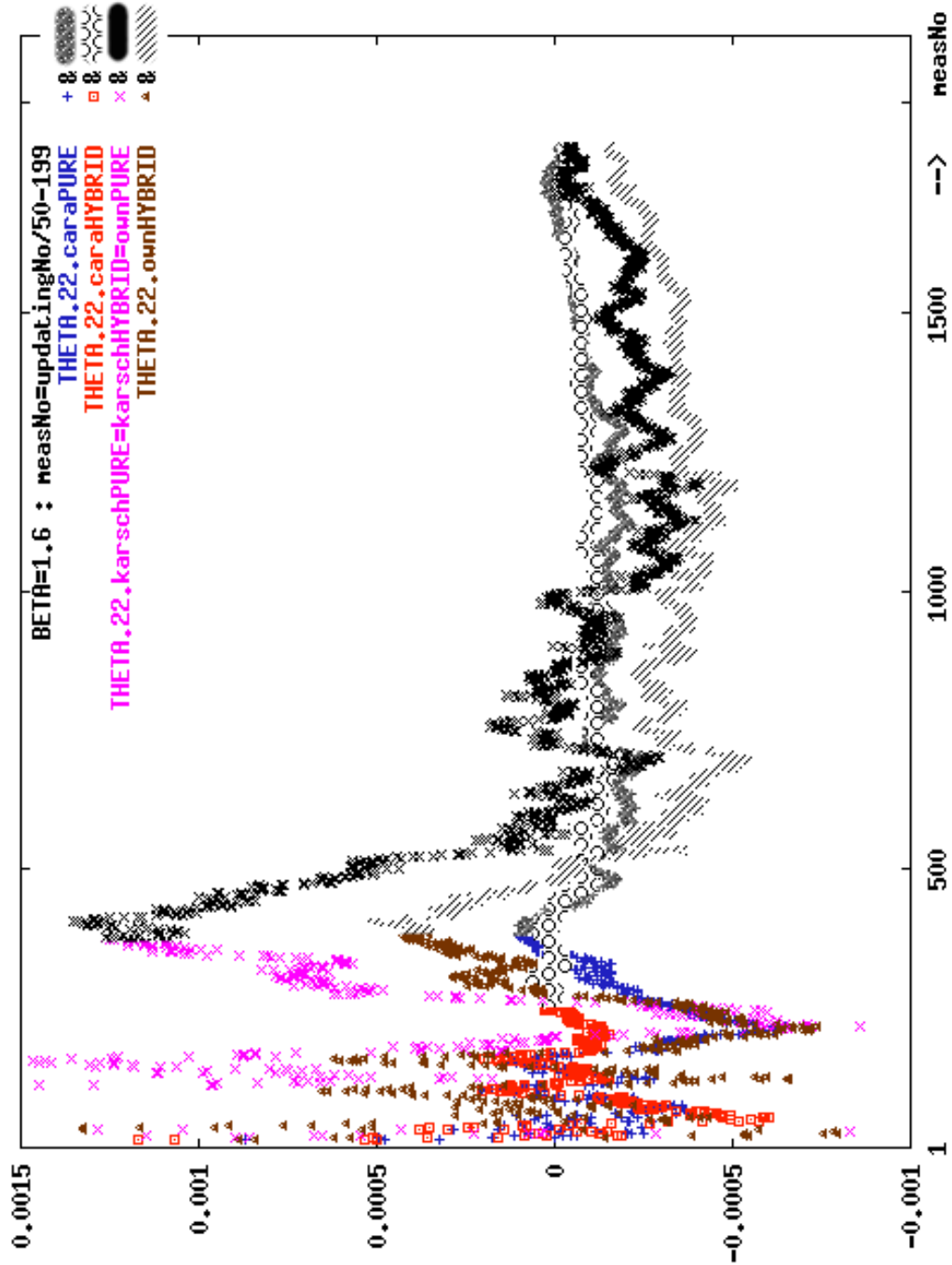


Fig. 8.2.6 e

Das gleiche Szenario wie in Fig. 8.2.6 d , aber für höheres β . Die Verläufe der einzelnen Graphen glätten sich schneller und nähern sich einander an.

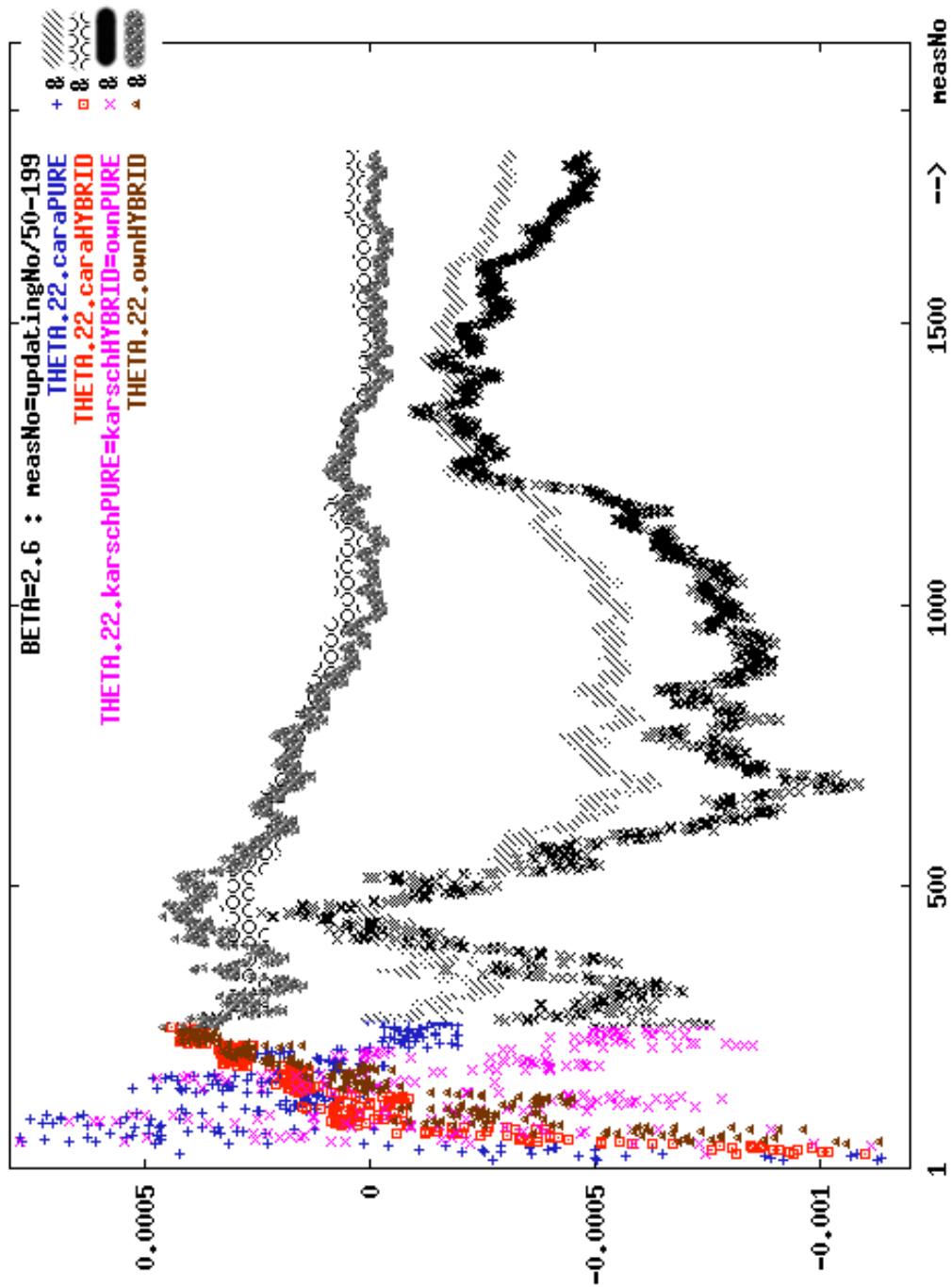


Fig. 8.2.6 f

Das gleiche Szenario wie in Fig. 8.2.6 e , aber für noch höheres β . Die Modelle ohne und die Modelle mit 4-Plaketten-Mittelung nähern sich im weiteren Verlauf der Meßreihen jeweils untereinander noch stärker, aber beide Teilgruppen (die derjenigen Modelle mit und die derjenigen Modelle ohne 4-Plaketten-Mittelung) als solche entwickeln sich ebenso deutlich auseinander. Weitere Details und die Interpretation dieser Entwicklungen finden sich im Haupt-Text.

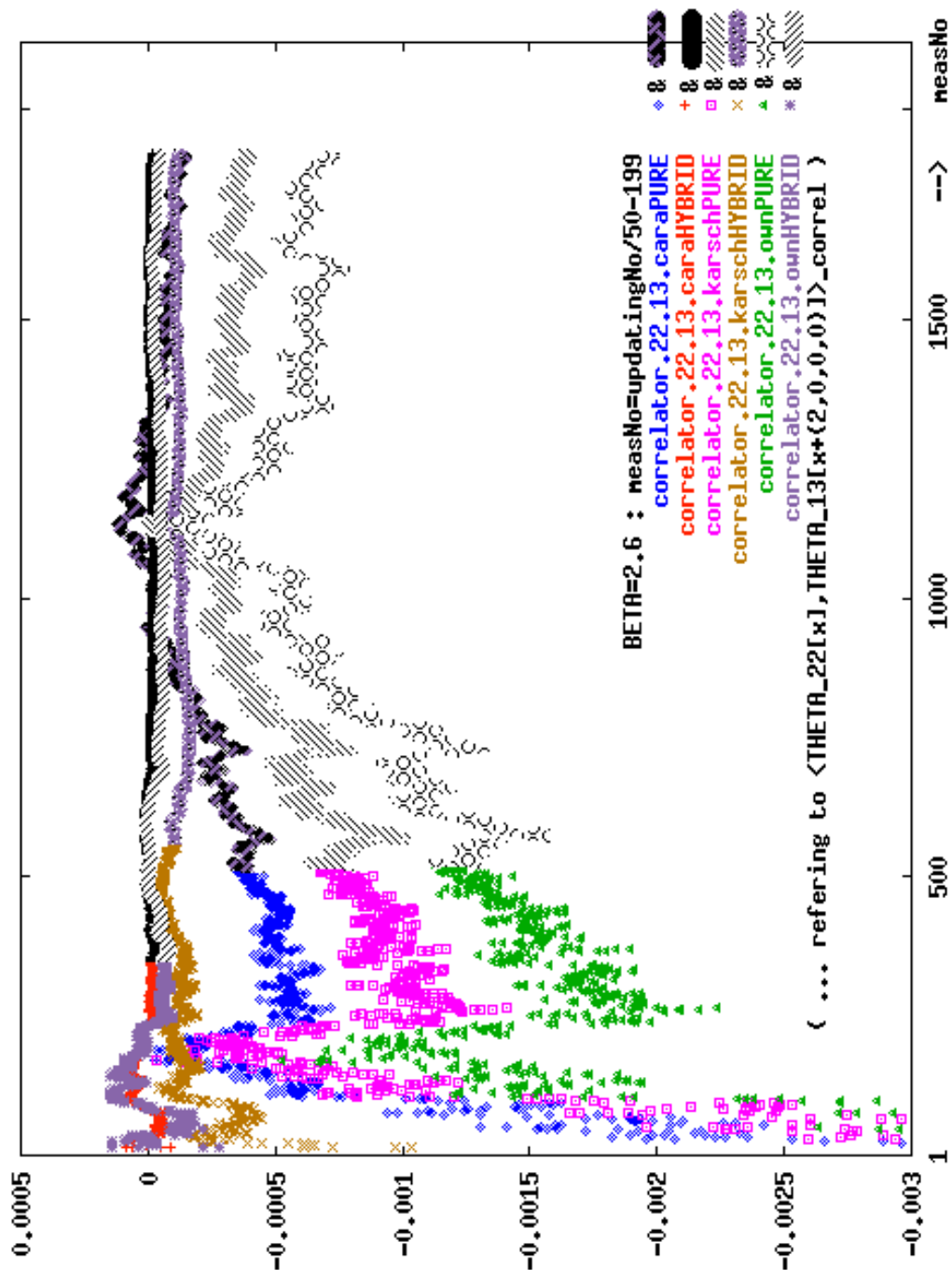


Fig. 8.2.6 g

Als Korrelator wird die in der Plotlegende spezifizierte zusammenhängende Zweipunktsfunktion relativ zu den ebenfalls in der Legende spezifizierten Modellen gemessen. Je komplizierter dort die algebraische Struktur ist (eine 4-Plaketten-Mittelung wirkt dem antieskalativ entgegen), desto instabiler verhalten sich die nach der Methode in Fig. 8.2.5 a aufgenommenen Langzeit-Graphen.

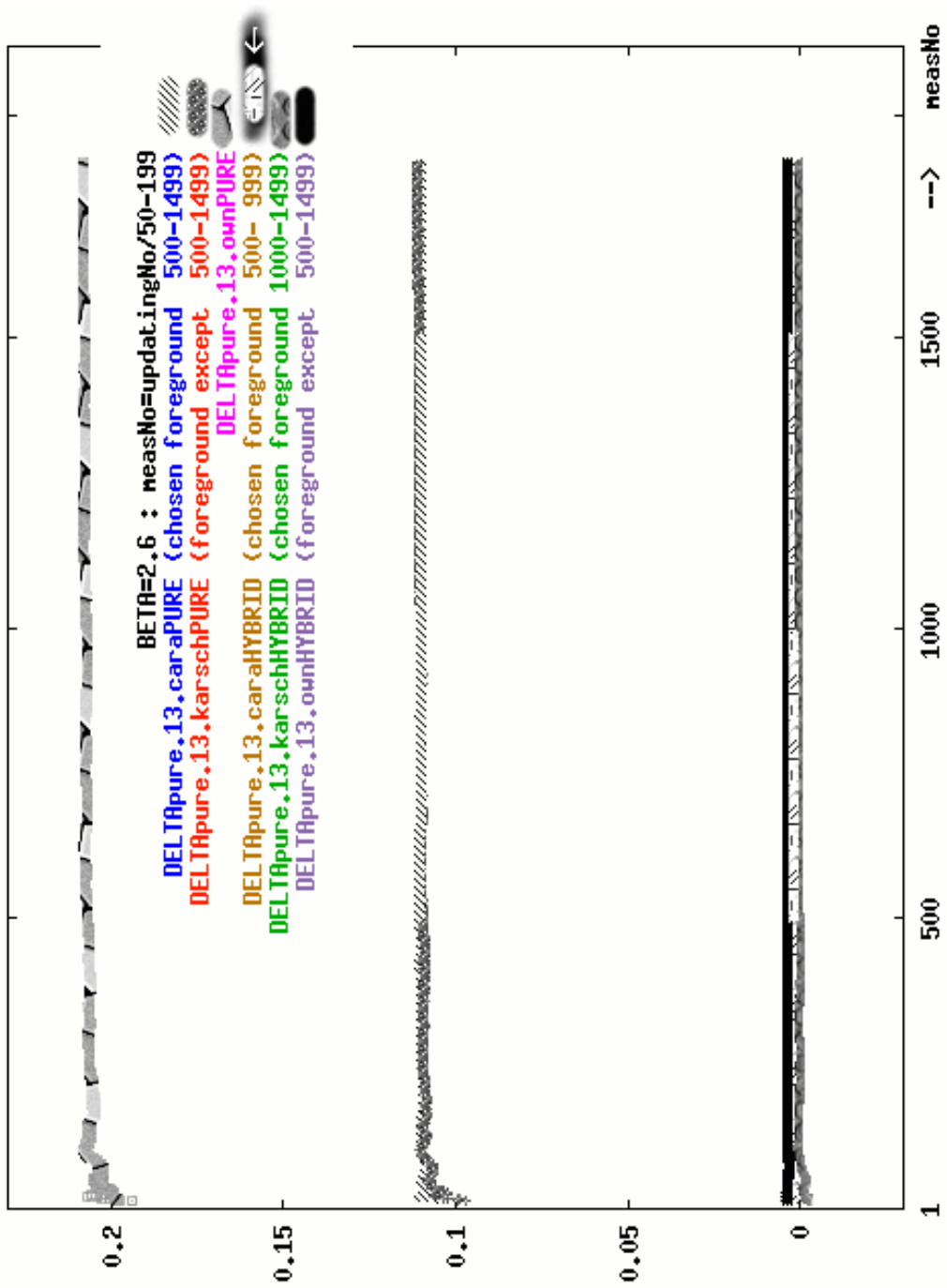


Fig. 8.2.6 h

Check der $O(4)$ -Symmetrie-Testfunktion in der reinen Erwartungswert-Interpretation. Die sechs verschiedenen untersuchten Modelle (Methode nach Fig. 8.2.5 a) liegen jeweils sehr nahe bei insgesamt drei verschiedenen zur Abszisse parallelen Geraden.

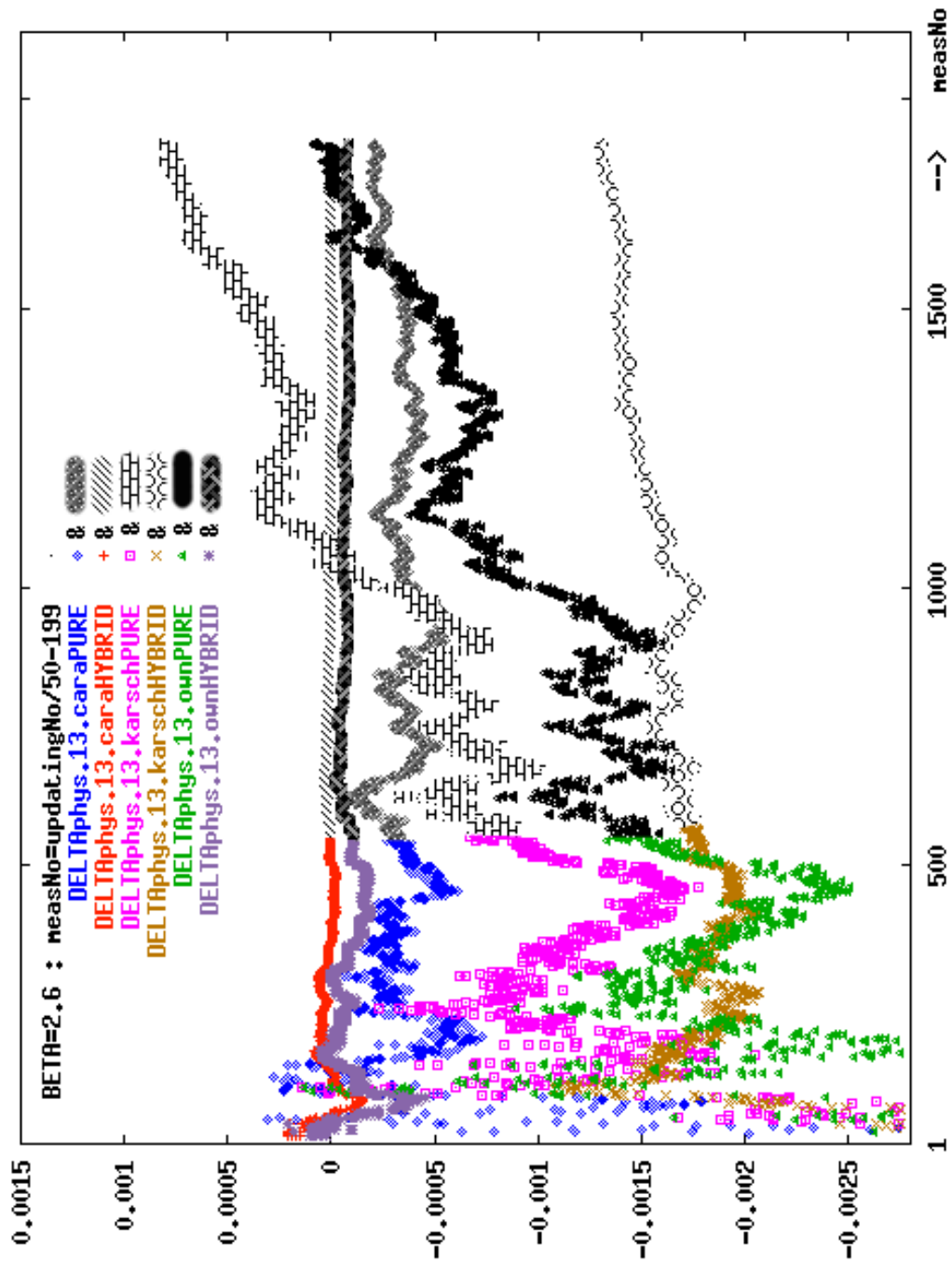


Fig. 8.2.6 i

Wie in Fig. 8.2.6 h, aber für die Korrelator-Interpretation der $O(4)$ -Symmetrie-Testfunktion (Details zu dieser im Haupt-Text). Die Werte sind jetzt sehr viel kleiner, die Verläufe hingegen dafür in unzuverlässiger Weise chaotisch.

do-Dekorrelation zu realisieren. Hierzu muß einschränkend bemerkt werden, daß das Erreichen des scaling window eine Interpretation ist, die auf der Korrelationslängenmaximierung der string tension basiert und nicht ohne weiteres auf beliebige andere Bezugsgrößen verallgemeinert werden kann. Für gitterphysikalisch unrealistische Kopplungsbereiche muß unter anderem mit einem physikalischen Informationsverlust gerechnet werden, der durch die Domination von Artefakten bedingt ist. Sollte jedoch außerhalb des scaling window der entgegengesetzte Effekt eintreten, daß die Meßdaten gegen überhaupt keinen Grenzwert überzeugend konvergieren, so kann auf eine nicht ausreichend lang gewählte Stabilisierungsphase geschlossen werden. Die grundlegenden Beobachtungen bei den Einschwingprofilen sind ganz offensichtlich keineswegs disjunkt zu den nachfolgend umfassender betrachteten Langzeitmessungen.

Für den Vergleich sämtlicher Modelle untereinander dienen die Bilder

8.2.6 a bis 8.2.6 i .

Die Randbedingungen für die Meßreihen sind hier analog zu den Diagrammen 8.2.5 a bis 8.2.5 d gewählt worden. Da ab jetzt alle unterschiedlichen Gitter-Modelle simultan in jede Graphik eingetragen werden sollen, werden zur Bewahrung der Übersichtlichkeit in den Zeichnungen zwei Modifikationen gegenüber 8.2.5 a bis 8.2.5 d vorgenommen. Zum einen entfallen in 8.2.6 a bis 8.2.6 i die Fehlerbalken. Da die bis zu 6 verbleibenden Kurven im Schwarz-Weiß-Format kaum übersichtlich durch Grautöne sortiert werden können, wird zur Kennzeichnung ein duales Konzept verwendet.

Die primäre Kennzeichnung eines Datensets soll durch kleine geometrische Symbole wie etwa Kreuze, Sterne, Rauten etc. erfolgen, die jeweils in einem eigenen Grauton jedem Meßpunkt einer bestimmten Meßreihe zugeordnet werden. Die entsprechende Legende findet sich rechts oben in jeder Abbildung. Sobald die Bildwerte der einzelnen Meßpunkte dicht beieinander liegen, tritt ein Problem auf.

Die kleinen geometrischen Symbole verschmelzen dann nämlich zu einer durchgezogenen Kurve, deren Ausreißer immer zahmer werden und bald nicht mehr die spezifischen Symbolkonturen wenigstens andeutungsweise noch erkennen lassen. Es würden dann nur noch die Grautöne für die weitere Identifikation der Meßkurve zur Verfügung stehen. Die Schnittstelle zur Hardware liefert in der Regel weder präzise noch wirklich konstante Grauton-Sättigungen, die bei einer Anzahl von mehr als zwei verschiedenen Grautönen keine zuverlässige Druck- oder Kopier-Qualität mehr garantieren können. Daher werden diese an und für sich grau eingefärbten Bereiche durch ein für jedes Modell diakritisches schwarz-grau-weißes Muster substituiert, von dem

ein Probeabstrich jeweils nach einem ampersand-Zeichen an das thumbnail des geometrischen Symbols angehängt wird, das dadurch dann ersetzt wird.

Die Muster sind so gewählt, daß sie sich durch das menschliche Auge so gut wie möglich unterscheiden lassen. Manche Muster kommen ganz ohne Grautöne aus, andere wiederum ohne weiße Zwischenräume etc. Manchmal ersetzt ein Muster auch vollständig die ursprüngliche Kennzeichnung - dann wird diese in der Legende oben rechts auch nicht mehr erwähnt, und das Ampersandzeichen kann entfallen.

In den Plots 8.2.6 a bis 8.2.6 c werden jeweils die verschiedenen Gitter-Modelle für $\langle \Theta_{13} \rangle$ für die invers quadratischen Kopplungsstärken $\beta = 0.6$, $\beta = 1.6$ und $\beta = 2.6$ verglichen. Da sich aus den Definitionen für die Nichtdiagonalkomponenten 'CARAPURE' = 'KARSCH PURE' und 'CARAHYBRID' = 'KARSCH HYBRID' ergibt, können die Caracciolo-Modelle hier stellvertretend für die Karsch-Modelle diskutiert werden.

Bereits für $\beta = 1.6$ werden nahezu konstante Verläufe für die 4 unterschiedlichen Datensets beobachtet. Alle liefern jeweils negative

$\langle \Theta_{13} \rangle$ -Werte, die betragsmäßig etwas zu klein starten (ca. 10%), dann etwas zu weit negativ herunterschwingen und nach den ersten 100 Messungen auf ihren eigentlichen endlich negativen Grenzwert einschwingen, so daß bis auf Mikrofluktuationen, die infolge der grundsätzlichen Dekorrelationsgrenzen des verwendeten Zufallsgenerators unter einem bestimmten Mindestmaß durch eine weitere Erhöhung intermediärer Gitter-Aktualisierungen nicht mehr weiter abgesenkt werden können, überzeugende kerzengerade Verläufe entstehen. Der betragsmäßig kleinste dieser Verläufe wird von $\langle \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ erzeugt. Er liegt für $a := 1$ bei 0.006. Als nächstes folgt mit ungefähr doppelt so hohem negativen Wert $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$. Betrachtet man den Zwischenraum dieser Kurven in absoluten Einheiten, so ist er ziemlich eng im Vergleich zu den restlichen beiden Verläufen. Diese liegen nämlich beim 8-fachen ($\langle \Theta_{13}^{\text{caraPURE}} \rangle$) und beim 13-fachen ($\langle \Theta_{13}^{\text{ownPURE}} \rangle$) des betragsmäßig niedrigsten Wertes ($\langle \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$) und sind auch jeweils negativ.

Die Karsch-Modelle sind hier jeweils zu den entsprechenden Caracciolo-Versionen äquivalent. Es werden für $\langle \Theta_{13} \rangle$ und $\beta = 1.6$ resultierend 4 wirklich gerade Kurven bei den relativen Niveaus 1, 2, 8 und 13 beobach-

tet. Da die 8 durch deutliches Aufrunden zustande kam, gilt sogar

$$0 \leftrightarrow \text{'CARAHYBRID'} \hat{\approx} \\ \hat{\approx} \text{'CARAHYBRID'} \leftrightarrow \text{'OWNHYBRID'}$$

und

$$\text{'OWNHYBRID'} \leftrightarrow \text{'CARAPURE'} \hat{\approx} \\ \hat{\approx} \text{'CARAPURE'} \leftrightarrow \text{'OWNPURE'}$$

Um es noch einmal zu betonen - die geraden Verläufe erstrecken sich jeweils von der 100. Messung bis zur abschließenden 1801. Messung.

Abbildung 8.2.6 c zeigt für den um 1 größeren β -Wert 2.6 eine ähnliche Situation. Die Regelmäßigkeit der 4 Graphen ist noch stärker ausgeprägt. Der jeweils kerzengerade anmutende - aber natürlich horizontal ausgerichtete - Verlauf kann jetzt jeweils schon ab der 30. Messung beobachtet werden, und davor liegen die Abweichungen unter 2%. Für Schwingungen lassen diese 2% keinen Freiraum, es kann - wenn überhaupt - lediglich eine geringfügige Absenkung in dieser Frühphase bis zur 30. Messung beobachtet werden.

War bei $\beta = 1.6$ für die Θ_{13} -Erwartungswerte für **'CARAHYBRID'**, **'OWNHYBRID'**, **'CARAPURE'**, **'OWNPURE'** noch ein Niveauschema 1 - 2 - 8 - 13 gegeben, so würde es jetzt in denselben Einheiten (Vielfache von -0.0057 für $a := 1$) und in derselben Reihenfolge die wesentlich größeren Werte 7 - 10 - 57 - 78 liefern. Absolut gesehen, wandern in einer Animation der Abbildungen 8.2.6 a bis 8.2.6 c alle Graphen auseinander. Relativ (im Sinne dieser fiktiven Animation) zueinander hingegen nähern sich $\langle \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ und $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ einander - und das deutlich. Eine etwas schwächere relative Annäherung kann zwischen den Graphen $\langle \Theta_{13}^{\text{caraPURE}} \rangle$ und $\langle \Theta_{13}^{\text{ownPURE}} \rangle$ diagnostiziert werden, ohne daß aber ausgeschlossen werden kann, daß dies möglicherweise ein reiner Sekundäreffekt vom abstandsmäßigen Wegrücken der **'PURE'**-Modelle von den **'HYBRID'**-Pendants ist. Auf jeden Fall artikulieren sich die Unterschiede dieser beiden Modellklassen für $\beta = 2.6$ wesentlich deutlicher als noch für $\beta = 1.6$.

Der gegenteilige Effekt manifestiert sich für $\beta = 0.6$ in Abbildung

8.2.6 a . Nach den ersten 250 Messungen bleibt zwar noch die Größenklassifikation

$$\begin{aligned} 0 > \langle \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}} \rangle > \langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle > \\ > \langle \Theta_{13}^{\text{caraPURE}} \rangle > \langle \Theta_{13}^{\text{ownPURE}} \rangle \end{aligned}$$

mit 'KARSCHE' $\hat{=}$ 'CARA' relevant, es liegen aber keine linear wirkenden Graphen mehr vor, und die Abstände zwischen diesen Graphen sind im Vergleich zu $\beta = 1.6$ und $\beta = 2.6$ deutlich geschrumpft. Die Θ_{13} -Erwartungswerte sind für $\beta = 0.6$ um mehr als $1^{1/2}$ Größenordnungen kleiner als für $\beta = 1.6$ und um mehr als $2^{1/2}$ Größenordnungen kleiner als für $\beta = 2.6$.

Bisher wurde die $\beta = 0.6$ -Version von $\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ ohne die Konkurrenzmodelle aber für andere β -Werte und mit Fehlerbalken in den Bildern 8.2.5 c und 8.2.5 d dargestellt. Ein Blick auf Fig. 8.2.6 a macht schnell deutlich, daß die Beobachtungen bei 8.2.5 c und 8.2.5 d qualitativ und mit Ausnahme von $\langle \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ (hier kann ein deutlich glatterer Verlauf verzeichnet werden) auch quantitativ ebenso auf die anderen Gittermodelle von $\langle \Theta_{13} \rangle$ für $\beta = 0.6$ übertragen werden können: die Graphen ähneln in der Größenordnung ihrer Bildkoordinaten und dem nicht zu übersehenden Schwingungscharakter eher $\langle \Theta_{22} \rangle$ -Graphen als den $\langle \Theta_{13} \rangle$ -Verläufen für die beiden höheren β -Werte 1.6 und 2.6.

Fig. 8.2.5 c konnte dies im Gegensatz zu Fig. 8.2.6 a nicht sichtbar werden lassen, weil die Skalierung in vertikaler Richtung zu grobmaschig war. Fig. 8.2.5 d konnte dieses Anliegen erfüllen, ohne daß für $\beta = 0.6$ ein shift gemacht werden mußte, der die relativen (aber natürlich nicht die absoluten) Fehler unrealistisch machte. Im Normalfall sollten die $\langle \Theta_{13} \rangle$ -Modelle für $\beta = 1.6$ und $\beta = 2.6$ natürlich ohne den Lupeneffekt in 8.2.5 d dargestellt werden, weil der dann wirklich winzige relative Fehler ausschlaggebend ist.

Nun ist es so, daß nur der Plot 8.2.6 c mit $\beta = 2.6$ im scaling window liegt und die beiden Plots für $\beta = 0.6$ und $\beta = 1.6$ als Annäherungsprozesse von einem zu grobmaschigen Gitter aus verstanden werden können. Der Gitterabstand a wird zwar nicht wirklich getunet, doch die Effekte einer zu starken Kopplung mit zu niedrigen β -Werten sind ähnlich.

Der beobachtete Effekt ist, daß die Graphen sich einerseits insgesamt deutlich voneinander entfernen, wenn die Gitter-Parameter realistischere Werte

annehmen, dann aber andererseits eine deutliche Annäherung zwischen den 4-plaketten-hybridisierten Versionen des Halbwinkel-Modells

$\langle \Theta_{13}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ und der Vollwinkel-Modelle $\langle \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}} \rangle = \langle \Theta_{13}^{\text{karschHYBRID}} \rangle$ stattfindet. Bevor diese Beobachtung interpretiert wird, wäre es interessant, eine vergleichende Betrachtung mit den Diagonalkomponenten von $\Theta_{\mu\nu}$ anzustellen.

Die Plots 8.2.6 d , 8.2.6 e und 8.2.6 f vergleichen die insgesamt 6 Gittermodelle für Θ_{22} für die invers quadratischen Kopplungen $\beta = 0.6$, $\beta = 1.6$ und $\beta = 2.6$. Wie im Falle von Θ_{13} gibt es effektiv nur 4 verschiedene Modelle, wobei hier aber im Gegensatz zu

$\langle \Theta_{13}^{\text{caraPURE}} \rangle = \langle \Theta_{13}^{\text{karschPURE}} \rangle$ und $\langle \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}} \rangle = \langle \Theta_{13}^{\text{karschHYBRID}} \rangle$ jetzt $\langle \Theta_{22}^{\text{karschPURE}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{karschHYBRID}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} \rangle$ gilt, weil sich diese Plots ausschließlich auf die Dimensionalität 4 beziehen.

Die Plots 8.2.6 d bis 8.2.6 f wirken deshalb chaotisch, weil in vertikaler Richtung in sehr kleinen Einheiten skaliert wird. Das ist möglich, weil $\langle \Theta_{22} \rangle$ stets gegen Null thermalisiert, und auch notwendig, weil die relativen Fehler daher nicht unerheblich sein können (siehe hierzu die drei $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle \pm \text{Fehler}$ -Verläufe in Fig. 8.2.5 a).

Es darf noch einmal daran erinnert werden, daß die fehlende Konvergenz von $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} (\beta = 1.6) \rangle$ in Plot 8.2.5 a durch eine Redefinition der Stabilisierungsphase behoben werden konnte (und zwar durch eine Verlängerung - siehe Plot 8.2.5 b). Die theoretische Erwartung $\langle \Theta_{22} \rangle \rightarrow \mathbf{0}$ wird dadurch also nicht verletzt, wohl aber muß in solchen Fällen festgestellt werden, daß eine empfindliche Verlangsamung der Konvergenz eintritt.

Besonders stark verzögert konvergieren

$\langle \Theta_{22}^{\text{karschPURE}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{karschHYBRID}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} \rangle$ für $\beta = 0.6$

und $\beta = 2.6$ sowie $\langle \Theta_{22}^{\text{caraPURE}} \rangle$ für $\beta = 2.6$. Ein Vergleich der drei Bilder 8.2.6 d , 8.2.6 e , 8.2.6 f zeigt, daß es für die größenbereichsmäßige Verteilung der graphischen Umsetzung der verschiedenen $\langle \Theta_{22} \rangle$ -Modelle auch in anderer Hinsicht keine klare Entwicklung von $\beta = 0.6$ über $\beta = 1.6$ nach $\beta = 2.6$ gibt. Das braucht deshalb nicht zu

verwundern, weil die Kurven im allgemeinen auch in diesen Langzeitmessungen noch relativ ungeordnet einschwingen und selbst dann, wenn sie allmählich flacher werden, das Schwingungsverhalten nie ganz abschütteln.

Dennoch lassen sich Aussagen machen. Verzichtet man auf eine klare und sich mit wachsendem β entwickelnde innere Gesetzmäßigkeiten zwischen allen Kurven untereinander und beschränkt sich auf das allgemeine Abstandsverhalten in einer Art formaler Mittelung über die gesamte Meßskala, so stellt man eine klare Auseinanderentwicklung mit steigendem β fest. Diese Beobachtung macht man deshalb nicht auf den ersten Blick, weil unwillkürlich die Versuchung entsteht, die einzelnen Graphen optisch zu trennen und zu sortieren. Verzichtet man gänzlich auf diesen Anspruch und versucht im Gegenteil dazu zu registrieren, wann und wie oft sich irgendwelche Kurven durchdringen oder alternativ dazu größere Zwischenräume entstehen, wird man sehr schnell und leicht zu der genannten Beobachtung geleitet.

Man kann aber noch etwas anderes machen. Anstatt alle 4 Graphen in ihrer β -Entwicklung zu vergleichen, konzentrierte man sich lediglich auf

$\langle \Theta_{22}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ und $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$. Erstaunlicherweise liegt hier speziell ein weiteres systematisches Charakteristikum des Verhaltens bei steigendem β vor: mit zunehmenden β -Werten nähern sich beide Modelle einander definitiv an. Für $\beta = 0.6$ kreuzt $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ den etwas stabileren Verlauf von $\langle \Theta_{22}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ zwar häufig - von Zeit zu Zeit und noch mehr bei früheren Messungen manifestieren sich jedoch enorme Größenunterschiede. Für $\beta = 1.6$ finden Kontakte zwar nur noch in der Frühphase der Messungen statt, und es bleibt später stets ein eher größerer Abstand - der mittlere Abstand ist jedoch deutlich geringer als bei $\beta = 0.6$, weil das Schwankungsverhalten von $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ bei $\beta = 1.6$ viel stärker gedämpft ist. Für den scaling-window-Wert $\beta = 2.6$ hingegen sind $\langle \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} \rangle$ und $\langle \Theta_{22}^{\text{caraPURE}} \rangle$ ab der 250. Messung bis zur 1801. Messung durchgehend mindestens eng benachbart wenn nicht sogar abschnittsweise übereinanderliegend.

Das Zusammenrücken von $\langle \Theta_{\mu\nu}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ und $\langle \Theta_{\mu\nu}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ für größer werdendes β in Richtung scaling window kann also sowohl bei den Diagonal-Komponenten als auch bei den Nichtdiagonal-Komponenten von $\Theta_{\mu\nu}$ beobachtet werden. Außerdem rücken bei der gleichen Entwicklung von β die restlichen Modelle für $\Theta_{\mu\nu}$ ebenfalls gleichermaßen bei $\mu = \nu$ und $\mu \neq \nu$ von diesen beiden Modellen weg und auch untereinander aus-

einander. Um dieses Verhalten besser zu verstehen, sollen noch ein paar andere Größen gemessen und diskutiert werden.

Bisher wurden Energie-Impuls-Tensoren auf dem Gitter gemessen. Aus deren Operatoren lassen sich aber auch quadratische Konstruktionen wie etwa $(\Theta_{\mu\nu}(x) \Theta_{\rho\sigma}(y))$ zusammenbauen. Um eine sinnvolle Abweichung $(y-x) \in \mathbb{R}^4$ euklidisch zu wählen, sollten einerseits Wege entlang der Gitterkanten genommen werden (es darf nur eine einzige Komponente ungleich $\mathbf{0}$ sein - wähle z. B. ohne effektive Einschränkung der Allgemeinheit auf einem symmetrischen Gitter $(y-x) \parallel \hat{e}_1$) und sollte andererseits die Längen-Norm $|y-x|$ kleiner als die halbe Gitterlänge sein und dabei deutlich von Null verschieden sein, um wirklich $(y-x)$ -Abweichungseffekte zu generieren (auf einem 10^4 -Gitter wäre zum Beispiel $|y-x| = 2$ gut geeignet). Interessant wäre ferner ein gemischt-diagonal-nichtdiagonaler Korrelator.

Die Verknüpfung der vorangehenden Überlegungen macht den physikalischen Korrelator

$$\langle \Theta_{22}(x), \Theta_{13}(x+2\hat{e}_1) \rangle_{cor}$$

interessant, wobei natürlich die Deutung als zusammenhängende Zweipunktsfunktion ('**cor**' wie 'correlator'; '**con**' wie 'connected' wäre auch treffend)

$$\langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{cor} := \langle \mathbf{A} \mathbf{B} \rangle - \langle \mathbf{A} \rangle \langle \mathbf{B} \rangle$$

gemeint ist. Die besonders praxisnahe Abhandlung der Gruppe Karsch in [28] stellt die Meßbarkeit von Korrelatoren, die in nichttriviale Weise Nichtdiagonalkomponenten von $\Theta_{\mu\nu}$ enthalten, auf dem Gitter in Frage und nennt für die Tauglichkeit des Gitters selbst das $O(4)$ -Kriterium

$$\langle \Theta_{\mu\nu}(x) \Theta_{\rho\sigma}(y) \rangle \stackrel{!}{=} A(x, y) (\delta_{\mu\rho} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\mu\sigma} \delta_{\nu\rho}) + B(x, y) \delta_{\mu\nu} \delta_{\rho\sigma},$$

welches für einen aktiven Asymmetrieparameter $\xi = \frac{a_\tau}{a} < 1$ in die entsprechende Forderung nach raumartiger $O(3)$ -Symmetrie mit lateinischen Indizes zurückfällt. Wird diese Relation vollständig in ihrer 4-dimensionalen $\xi = 1$ -Version erfüllt, so müßte der Ausdruck

$$\Delta_{\alpha\beta}(x, y) := \langle 2 \Theta_{\alpha\beta}(x) \Theta_{\alpha\beta}(y) + \Theta_{\alpha\alpha}(x) (\Theta_{\beta\beta}(y) - \Theta_{\alpha\alpha}(y)) \rangle$$

klein werden bzw. im exakten Grenzfall verschwinden, wobei an und für sich mit der Auffassung

$$\langle \mathbf{A} \mathbf{B} \rangle := \langle \mathbf{A}, \mathbf{B} \rangle_{cor} \implies \Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\beta}^{phys} \text{ und notfalls auch mit}$$

der schlichten Erwartungswertinterpretation $\Rightarrow \Delta_{\alpha\beta} = \Delta_{\alpha\beta}^{pure}$ gearbeitet werden sollte beziehungsweise muß.

Eine Meßreihe für Δ_{13}^{pure} (aufgrund vorangehender Überlegungen sei $y = x + 2 \hat{e}_1$) liegt der Abbildung 8.2.6 h zugrunde und demonstriert eindrucksvoll, daß dieses Δ ohne 4-Plaketten-Mittelung nicht klein wird. $\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{CARAPURE})$ und

$\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{KARSCHPURE})$ liegen beide jeweils ab der 100. Messung so gut wie konstant bei einem Wert ziemlich nahe bei 0.1 für $a = 1$. Um dieses geeignet graphisch darzustellen, wurde erst $\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{CARAPURE})$ geplottet, dann $\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{KARSCHPURE})$, so daß der erste Plot weitgehend überdeckt wurde. Damit dieser Plot dennoch deutlich gesehen werden kann, wurde er für die Messungen Nr. 500 bis 1499 noch einmal über $\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{CARAPURE})$ herübergelegt.

Ein ähnliches aber etwas komplizierteres zyklisches Verfahren wurde für die 'HYBRID'-Modelle verwendet. Das hat den Effekt, daß die danach noch sichtbaren Partien von $\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{CARAHYBRID})$ aufgrund besonders guter Konvergenz nach Null stets von anderen Kurvensegmenten eingeschlossen sind, so daß ein ganz besonders helles Muster gewählt werden konnte, das in der Legende zur Verdeutlichung auf einen simulierten schwarzen Sprühfleck gelegt wurde (es würde sich sonst zu wenig vom weißen Hintergrund abheben).

Die Applikation der 4-Plaketten-Mittelung führt also bei allen untersuchten Modellen zu einer besseren und schnelleren Konvergenz. Interessant ist auch im Hinblick auf die nicht 4-plaketten-hybridisierten Modelle, daß die Fehlkonstante für das Halbwinkel-Modell $\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{OWNPURE})$ ziemlich genau bei 0.2 liegt und damit gerade doppelt so groß ausfällt wie die Fehlkonstante 0.1 für das Vollwinkel-Modell $\Delta_{13}^{pure}(\mathcal{CARAPURE})$. Ansonsten ist die Aussage des Plots, daß - wenn überhaupt - lediglich Δ_{13}^{phys} als maßgeblich betrachtet werden kann, wie es die gitterphysikalische Praxis auch nahelegt.

Abbildung 8.2.6 i illustriert die Verhältnisse für Δ_{13}^{phys} (auch hier sei

$y = x + 2 \hat{e}_1$). Hier fällt zunächst einmal auf, daß die Varianten

'**KARSCH PURE**' und '**KARSCH HYBRID**' die Forderung

$\Delta_{13}^{phys} \rightarrow 0$ bei den präsentierten Anzahlen von Messungen und intermediären Gitter-Aktualisierungen so nicht und möglicherweise prinzipiell überhaupt nicht erfüllen können. Andererseits aber liegt weder ein prinzipielles Versagen der '**PURE**'-Modelle noch seitens ihrer 4-Plaketten-Mittelungen vor.

Die Δ_{13}^{phys} -Versionen '**CARAPURE**' und '**OWNPURE**' konvergieren ausgezeichnet gegen Null - und das mit sehr hoher Präzision, wie die sehr feine Skalierung der Ordinatenachse verrät. Die Version '**CARAPURE**' konvergiert zwar deutlich schlechter aber dennoch zweifelsfrei gegen Null. Bei dem Modell '**OWNPURE**' verbessert sich sogar diese Konvergenz gegenüber derjenigen von '**CARAPURE**' im Laufe der Meßreihe und scheint zuletzt tatsächlich flach zu werden und wohl doch nicht weiter das Verhalten des positiv immer weiter über Null herausgehenden Graphen '**KARSCH PURE**' zu imitieren. Selbst wenn hier ein kleines Fragezeichen bleibt, ist gezeigt worden, daß für Δ_{13}^{phys} grundsätzlich eine Konvergenz nach Null möglich ist - unabhängig von als sekundär zu wertenden Fragen, ob dabei über eine 4-Plaketten-Mittelwertbildung Rotationsinvarianz wiederhergestellt wird oder nicht.

Das schlechte Abschneiden des Karsch-Modells für beide Konstruktionsklassen '**PURE**' und '**HYBRID**' muß offensichtlich auf den uneinheitlichen Charakter von Diagonalkomponenten wie Θ_{11} und Nichtdiagonalkomponenten wie Θ_{13} zurückgeführt werden, da diese Störungen genau dann auftreten, wenn Produkte von Θ_{11} und Θ_{13} wie hier in Δ_{13}^{phys} gebildet werden. Die erfüllte Konvergenz von $\Delta_{13}^{pure}(\text{KARSCH HYBRID})$ kann diese Argumentation nicht entkräften, weil dieser Messung keine aussagekräftige gitterphysikalische Situation zugrunde liegt (siehe oben). Ausgehend von dieser Art der Klassifikation kann die $O(4)$ -Symmetrie auf den vorliegenden 10^4 -Gittern mit 1801 Messungen bei insgesamt 10^5 updatings mit einer Stabilisierungsphase von 10^4 irrelevanten updatings als gesichert betrachtet werden.

Bei den $\Delta_{\alpha\beta}^{pure}, \Delta_{\alpha\beta}^{phys}$ -Beziehungen wurden Ergebnisse verworfen, bei denen die Wiederherstellung der Rotationsinvarianz durch 4-Plaketten-Hybridisierungen die ausschlaggebende Rolle bei der Frage nach numerischer Gut-

artigkeit spielten. Trotz Applikation dieses Kriteriums konnte $\Delta_{\alpha\beta}^{phys}$ akzeptiert werden. Leider ist dieses Konstrukt in seiner Aussagekraft über die Verwendbarkeit von Θ - Θ -Korrelatoren begrenzt, weil es effektiv in ein Polynom (Polynomring in 2 Unbestimmten) von Erwartungswerten zerlegt werden kann, die grundsätzlich keine gemischten Produkte von Diagonal- und Nichtdiagonal-Elementen von $\Theta_{\mu\nu}$ als Operatorkern enthalten.

Daher ist es jetzt wichtig, das etwas weiter oben als interessant eingestufte Gebilde

$$\langle \Theta_{22}(x), \Theta_{13}(x + 2\hat{e}_1) \rangle_{cor}$$

zum Vergleich mit den $\Delta_{\alpha\beta}$ -Beobachtungen heranzuziehen. Dazu betrachte man Fig. 8.2.6 g, die den beschriebenen Θ_{22} - Θ_{13} -Korrelator für alle 6 verschiedenen Gitter-Modelle darstellt.

Dieser Plot weist zwei Merkmale auf. Alle nicht 4-plaketten-hybridisierten Modelle starten nach einem turbulenten Anfangsbereich vor der 250. Messung ($\hat{=}$ 22450 updatings bis dahin) im negativen Bereich, werden allmählich immer größer, bis sie bei der ca. 1100. Messung den positiven Bereich erreichen und dort bei der ca. 1150. Messung wenden, um wieder monoton kleiner zu werden. Bei der ca. 1200. Messung liegt die zweite Nullstelle vor, ohne daß zu einem späteren Zeitpunkt das weitere Absinken stoppt oder sich auch nur verlangsamt.

Auf der anderen Seite verhalten sich die 4-plaketten-gemittelten Versionen aller drei Modelle 'CARA', 'KARSCH' und 'OWN' absolut gutartig und konvergent. Wie vorangehend aber schon betont wurde, darf der Wiederherstellung der Rotationsinvarianz nicht eine Schlüsselrolle dieses Ausmaßes zukommen. Das widerspricht einfach jeder gitterphysikalischen Intuition. Also muß diese Meßreihe verworfen werden, was die zu Anfang dieses Kapitels 8.2 zitierten Vorbehalte der Gruppe Karsch bei der Messung von Θ - Θ -Korrelatoren mit Nichtdiagonalelementen bestätigt.

Bereits ein Feldstärketensor auf dem Gitter kann kein wirklich extrem zuverlässiges Gebilde sein, wenn die Gittergröße und die Anzahl signifikanter Dezimalstellen bei der verwendeten Zahlenkategorie durch CPU-Limits eng begrenzt sind: der Feldstärketensor resultiert unter solchen Umständen stets aus der Differenz zweier ungefähr gleich großer Terme. Für einen direkt aus diesen Feldstärken zusammengebauten Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ werden diese sensiblen $F_{\mu\nu}$ -Terme sogar noch quadriert und im Falle der Diagonalkomponenten noch die Differenz von zwei ungefähr gleich großen Summen über solche Quadrate gebildet. Wie die numerischen Ergebnisse dokumentieren, ließen sich diese Schwierigkeiten durch Langzeitmessungen bis zur 10^5 -ten Gitter-Aktualisierung über ein 10^4 -Gitter noch beheben, weil dank

der jüngsten Unix-Maschinen-Generation solche Messungen bereits innerhalb von Monaten erledigt werden konnten.

Nimmt man nun bei Θ - Θ -Korrelatoren noch einmal das Quadrat von solchen empfindlichen Größen und subtrahiert davon sinnvollerweise das aber leider ähnlich große Produkt der Erwartungswerte der Einzelfaktoren, gibt es für 10^4 -Gitter mit implementierten single precision number Datensätzen empfindliche numerische Probleme.

Sehr *CPU*-intensive Teilmessungen (im Sommerloch bei Abwesenheit anderer user und batch jobs) mit double precision numbers konnten Verbesserungsmöglichkeiten demonstrieren, die aber nicht umfangreich genug ausfielen, um ohne eine kombinierte echte Erhöhung der Anzahl der Gitterpunkte durchschlagende Erfolge erwarten zu lassen.

Diese Problematik könnte an und für sich partiell entschärft werden, wenn $\Theta_{\mu\nu}$ nur noch direkt über die Plakettenvariable $U_{\mu\nu}$ und nicht mehr über die numerisch sensiblen Feldstärketensoren $F_{\mu\nu}$ definiert werden könnte. Dieser geniale Ansatz ist von der Gruppe Karsch besprochen worden, hat aber leider den Haken, daß er nur für die Diagonalelemente nichttrivial funktioniert. Werden dann $F_{\mu\nu}$ -orientierte Nichtdiagonalkomponenten mit $U_{\mu\nu}$ -wertigen Diagonalelementen von $\Theta_{\mu\nu}$ kombiniert, leidet ein solches Modell an Koordinationsstörungen, die auf fehlende innere Regelmäßigkeit zurückzuführen sind. $\Delta_{13}^{phys}(\text{KARSCH PURE})$ und

$\Delta_{13}^{phys}(\text{KARSCH HYBRID})$ litten unter diesem Defizit. Von der Gruppe Karsch selber sind leider keine Meßergebnisse zum Test dieses Kriteriums veröffentlicht worden, und darüber hinaus sind von diesem Team eine andere räumliche Symmetriegruppe und eine andere Eichgruppe verwendet worden. Aufgrund der eingangs angeführten 5 verschiedenen Einwände betreffs einer Konversion von thermischen in retardierte Erwartungswerte müssen Definitionsweg und Aussagekraft von Θ - Θ -Korrelatoren im Rahmen dieser Arbeit in Frage gestellt werden, was deren praktische Anwendung zur gitter-simulierten Ermittlung der Minkowskiraum-Erwartungswerte von Scherungviskosität, Massenstromviskosität und Wärmeleitfähigkeit des beim Deconfinement-Phasenübergang entstehenden Quark-Gluon-Plasmas (Quagmas) anbelangt. In dieser Einschränkung kann auch ein gewisser Vorteil gesehen werden, da dadurch etwas mehr Freiraum zur Diskussion der allgemeinrelativistischen Hintergründe (u. a. Noether-Theoreme) geschaffen wird, ohne daß diese Arbeit dadurch überfrachtet wird.

Die durchgeführten Langzeitmessungen können also die Erwartungswerte der 6 verschiedenen in Kapitel 8.1 zusammengestellten endgültigen (Semi-)Substitutionsmodelle für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor auf dem Gitter mit Meßreihen vom 10^4 . bis zum 10^5 . updating gut erfassen und

O(4)-Invarianz herstellen. Selbst wenn die dafür maßgeblichen

$\Delta_{\alpha\beta}^{phys} \rightarrow \mathbf{0}$ -Tests weniger eindeutig ausfallen, liefern die Messungen für sämtliche Nichtdiagonalelemente von $\langle \Theta_{\mu\nu} \rangle$ für jedes updating und alle signifikanten Zahlenstellen dieselben Werte. Wird bei diesen Messungen die Ordinate hinreichend weit gestreckt, entstehen unter anderem für die $\langle \Theta_{22} \rangle$ -Modelle im scaling window mit $\beta = 2.6$ unregelmäßige Zitterschwingungen, die bei zunehmender Anzahl der Gitter-Aktualisierungen um die zur Abszisse parallelen Null-Achse herum spürbar gedämpft schwingen und immer weiter abklingen (s. u. a. **Fig. 8.2.6 f**). Versucht man, durch Verlängerung der bei den Messungen nicht berücksichtigten Einschwingphase die chaotischen Anfangsschwingungen als systematische Fehlerquelle zu eliminieren, so wird man mit dem Phänomen der Selbstähnlichkeit konfrontiert: läßt man bei den ameliorierten Messungen die Ordinate weiterhin durch das benutzte Graphikprogramm automatisch skalieren, so wird diese Skalierung zwar feiner ausfallen - das Plotgeschehen wird aber relativ zu dieser Skalierung wieder ganz ähnlich ausfallen und relativ zu dieser etwas feineren Skala ungefähr gleich chaotisch starten (vgl. dazu **Fig. 8.2.5 a** und **8.2.5 b**; dieser Selbstähnlichkeitsmechanismus ist bei einer sehr umfangreichen Anzahl von Probeplots immer wieder getestet und durchweg bestätigt gefunden worden). Egal wie lange gemessen und wie spät damit gestartet wird - die $\langle \Theta_{22}(\beta = 2.6) \rangle$ -Modelle werden bei einer full-range-Skalierung immer wieder zum linken Bildrand hin stochastische Kunstwerke liefern, ohne daß ein Versagen der Meßprozedur oder des benutzten Modells vorliegt.

Für Θ - Θ -Korrelatoren hingegen kann eine gitterphysikalische Zuverlässigkeit im allgemeinen nicht sichergestellt werden, wobei solche Datensets ohnehin in den Minkowski-Raum re-orthorotiert werden müßten, um physikalisch interpretierbare Aussagen zu liefern. Hierzu reicht aber eine Umnormierung über konstante Vorfaktoren nicht aus. Bei der Übersetzung würden Probleme mit Singularitäten auftreten, deren Hebung mit der durch die Anzahl an zur Verfügung stehenden Gitterpunkten begrenzten Information auch nicht ansatzweise durchführbar ist (s. o.).

Die Konzentration auf die Messung euklidischer Erwartungswerte auf dem Gitter hat den Vorteil einer höheren inneren Symmetrie, die unter Verzicht oberflächlicher Quantifizierungen sehr viel deutlicher fundamentale qualitative Beziehungen numerisch transparent werden läßt. Die wahrscheinlich verblüffendste der dadurch zugänglich gemachten Einsichten ist, daß sich die beiden numerisch erfolgreichsten Modelle, nämlich das konsequente Vollwinkelmodell mit Rotationsinvarianz-Wiederherstellung $\Theta_{\mu\nu}^{caraHYBRID}$ und sein einheitliches Halbwinkelpendant $\Theta_{\mu\nu}^{ownHYBRID}$, einerseits im scaling window für die Dimensionalität 4 für $\mu = \nu$ und $\mu \neq \nu$

jeweils nahezu identisch verhalten, während sie andererseits in Abhängigkeit von der über einen größeren Bereich getuneten Kopplung sich bei den kritischen Dimensionalitäten 2 für den Vollwinkel-Ansatz und 4 für den Halbwinkel-Ansatz komplementär verhalten.

Aus prinzipiellen Überlegungen heraus kann zunächst erwartet werden, daß jedes der hier behandelten $\Theta_{\mu\nu}$ -Modelle die Beziehungen (zur Verwendung des Begriffs der kritischen Dimensionalität siehe vorangehenden Text; der Begriff des Eichwinkels sei ikonifiziert)

$$\Theta_{12}(\dim = \dim_{crit}(\text{gauge} : \blacktriangleleft) = 2) = 0$$

und

$$\langle \Theta_{22}(\dim = \dim_{crit}(\text{gauge} : \frac{\blacktriangleleft}{2}) = 4) \rangle \rightarrow 0$$

erfüllt. Zu hohe Kopplungen lassen einen ähnlichen Effekt wie ein zu grobmaschig gewähltes Gitter erwarten: sich ab einem bestimmten Stadium gegenseitig kompensierende Artefakte dominieren die betragsmäßig kleiner ausfallenden Meßgrößen dahingehend, daß die Resultate gegen Null thermalisieren. In der Tat wird für die 6 analysierten $\Theta_{\mu\nu}$ -Modelle in fraktaldimensionaler Interpolation mit identischer Reproduktion der ganzzahlig dimensionalen Stützwerte

$$\langle \Theta_{12}(\dim \in [2, 4] \ \& \ g_o \rightarrow \text{groß}) \rangle \rightarrow 0$$

und

$$\langle \Theta_{22}(\dim \in [2, 4] \ \& \ g_o \rightarrow \text{groß}) \rangle \rightarrow 0$$

festgestellt. Interessant sind nun folgende komplementär zueinander korrelierte numerische Beobachtungen:

$\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}}(\dim = \dim_{crit}(\mathcal{CARA}) = 2) \rangle =$ viel unregelmäßigere g_o -Funktion als $\langle \Theta_{22}^{\text{caraHYBRID}}(\dim = 2) \rangle$: siehe insbesondere Plot 8.2.2 f für $\dim = 2$

und

$\langle \Theta_{22}^{\text{caraHYBRID}}(\dim = \dim_{crit}(\mathcal{OWN}) = 4) \rangle =$ viel unregelmäßigere g_o -Funktion als $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}}(\dim = 4) \rangle$: siehe insbesondere Plot 8.2.4 b für $\xi = 1$

Man könnte also formal zusammenfassen (die Symbolik wurde bereits erläu-

tert):

$$\begin{aligned} \dim_{crit} \left(\frac{\langle \text{gauge} \rangle}{1} \right) &= \dim_{crit} (\Theta_{12} \text{ generell}) = \\ &= \dim_{crit} (\text{CARAPURE / HYBRID}) = 2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dim_{crit} \left(\frac{\langle \text{gauge} \rangle}{2} \right) &= \dim_{crit} (\Theta_{22} \text{ generell}) = \\ &= \dim_{crit} (\text{OWNPURE / HYBRID}) = 4 \quad , \end{aligned}$$

wenn die Betrachtung jeweils entweder nur auf den Eichwinkel oder nur auf das $\mu \leftrightarrow \nu$ -Wechselverhältnis oder ausschließlich auf die reinrassigen Muttermodelle fokussiert wird.

Raumzeit-dimensionelle Abhängigkeiten spielen eine Schlüsselrolle für die Renormierungs- β -Funktion im Kontinuum. Ableitungen nach g_o -Abhängigkeiten werden für die Konstruktion der Renormierungsgruppen- β -Funktion auf dem Gitter benötigt. Beide Größen haben daher einen speziellen Beziehungs-Zusammenhang zu der renormierten Spur Θ_{μ}^{μ} des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors, die wiederum im Themenkreis der thermodynamischen Relationen und der kryptischen SO(4)-Kopplung von Einstein- und Maxwell-Sektor eingebettet gesehen werden kann.

Für rein speziellrelativistische Größen kann dort die Eichgruppe ausgetauscht werden, zum Beispiel von SO(4) nach SU(2). Die renormierte Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors stellt ein zwitteriges Bindeglied zwischen dem simplifizierten Schema und der vollständigen Version dar und soll hier kurzerhand beiseite gelassen werden. Wenn so vorgegangen wird, vergißt das übrig bleibende System die Information, daß zwischen Vollwinkel-Domäne und Einstein-Sektor eine Verbindung bestand. Diese Mechanismen wurden bereits ausgiebig im theoretischen Teil der Arbeit diskutiert.

Neu ist jetzt, daß der gleiche Übergang numerisch bestätigt werden kann. Verhielten sich noch die besten Kandidaten für Voll- und Halbwinkel-Modell $\langle \Theta_{\mu\nu}^{\text{caraHYBRID}} \rangle$ und $\langle \Theta_{\mu\nu}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ in ihren Diagonalkomponenten bei der grundsätzlichen Variation von Kopplungsstärke und Raumzeit-Dimensionalität auf dem Gitter komplementär zueinander, so führt ein zu den theoretischen Betrachtungen analoger Simplifikationsmechanismus in das scaling window für die eigentliche Raumzeitdimensionalität 4. Hier nun scheint auch das numerische SU(2)-Monte-Carlo-System die Sonderbedeutung des

Vollwinkel-Modells zu vergessen, so daß die Unterschiede zu den Meßdaten des Halbwinkel-Modells bis auf subtile Konvergenzverschlechterungen beim Halbwinkel-Modell infolge der komplizierteren algebraischen Struktur wegschmelzen! Dies ist eine eindrucksvolle Manifestation des Zusammenspiels zwischen Theorie und Numerik.

In ähnlichem Zusammenhang kann das numerisch schlechtere Abschneiden gerade derjenigen Modelle gesehen werden, die bereits vom theoretischen Standpunkt aus physikalisch weniger überzeugend wirken. Das sind zum einen die **'PURE'**-Versionen, die ganz offensichtlich deshalb sehr viel höhere Betragswerte auf dem Gitter erzeugen, weil ihnen im Gegensatz zu den 4-Plaketten-Hybridisierungen die im Kontinuum immer noch selbstverständliche Rotationsinvarianz fehlt. Aufgrund der komplizierten algebraischen Struktur fallen die Halbwinkel-Versionen von nicht rotationsinvarianten und nicht gegen Null thermalisierenden Größen besonders extrem aus, weil die Kombination dieser drei Merkmale außerordentlich symmetriestörend wirkt. Beispiel ist $\langle \Theta_{13}^{\text{ownPURE}} \rangle$ in Fig. 8.2.6 a bis 8.2.6 c .

Läßt man die Halbwinkel-Konstruktion fallen, so gibt es immer noch relativ extreme Meßergebnisse (siehe $\langle \Theta_{13}^{\text{caraPURE} = \text{karschPURE}} \rangle$ in

Fig. 8.2.6 a bis 8.2.6 c). Läßt man stattdessen den Anspruch auf nur endlich klein zu erwartende Größen fallen, sind die Ergebnisse keineswegs so eindeutig. Für $\beta = 0.6$ erzielt $\langle \Theta_{22}^{\text{caraPURE}} \rangle$ in Darstellung 8.2.6 d die besten Ergebnisse von allen verglichenen Modellen. Das mag aber an der Größe Θ_{22} selbst liegen, weil hier zum Beispiel der betragsmäßig am größten ausfallende Graph $\langle \Theta_{22}^{\text{ownHYBRID}} \rangle$ aus Abbildung 8.2.6 e mit $\beta = 1.6$ im shift zum scaling window bei $\beta = 2.6$ sogar betragsmäßig am kleinsten ausfällt (siehe Fig. 8.2.6 f - Vorsicht: aus Visualisierungsgründen ist das Erkennungsmuster geändert worden!). Beim Korrelator $\Delta_{13}^{\text{phys}}$ hingegen schneiden - wie es ja auch der physikalischen Intuition entspricht - die **'PURE'**-Versionen wiederum am unglücklichsten ab.

Mit der dafür relevanten Abbildung 8.2.6 i ist auch der Anknüpfungspunkt für eine weitere Korrespondenz zwischen einer problematischeren theoretischen gitterphysikalischen Konstruktion und deren numerisch weniger glatten Ergebnissen gegeben. Beide Versionen **'PURE'** und **'HYBRID'** der Karsch-Modelle liefern für die an und für sich meßbare Korrelator-Größe $\Delta_{13}^{\text{phys}}$ aufgrund des hermaphroditischen Halbwinkel-Vollwinkel-Dualismus zwischen Diagonalkomponenten und Nichtdiagonalkomponenten von $\Theta_{\mu\nu}$

jeweils stark konvergenzgestörte Ergebnisse. Im übrigen ist es sogar so, daß die beiden Versionen des Karsch-Modells - solange sie nicht definitions- gleich zu den Caracciolo-Versionen ausfallen ($\Theta_{13}^{\text{karschPURE}} = \Theta_{13}^{\text{caraPURE}}$, $\Theta_{13}^{\text{karschHYBRID}} = \Theta_{13}^{\text{caraHYBRID}}$ aufgrund der Beschränkung auf die untereinander einheitlich konstruierten Nichtdiagonalelemente) - in der Regel entweder mit der sonst im allgemeinen konvergenzmäßig schwächsten Version zusammenfallen ($\langle \Theta_{22}^{\text{karschPURE}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} \rangle$ und sogar $\langle \Theta_{22}^{\text{karschHYBRID}} \rangle = \langle \Theta_{22}^{\text{ownPURE}} \rangle$ für die Dimensionalität 4) oder sie noch an Extremheit übertreffen ($|\kappa_{\text{KARSCH PURE, HYBRID}}|$ größer als alles andere in den Abbildungen 8.2.2c, 8.2.2d, 8.2.6i). Das Karsch-Modell würde in der relativen Hierarchie der verschiedenen Graphen quantitativ genau dort etwas besser abschneiden, wo qualitative Überlegungen einsichtig demonstrieren, daß die untersuchte Größe sich als ungeeignet für die konkrete Durchführung der Meßreihe erweist (Fig. 8.2.6g und 8.2.6h, weitere Datenprofile für die Korrelatoren wären nicht aussagekräftig).

Abschließend soll folgendes noch einmal durch eine kurze Zusammenfassung betont werden. Bei den Langzeitmessungen der euklidischen Erwartungswerte der verschiedenen Gitter-Modelle für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor fiel auf, daß die Resultate für Diagonalkomponenten und die Resultate für Nichtdiagonalkomponenten mit vergleichbaren absoluten statistischen Fehlern behaftet und bei gleicher Auflösung optischen Zitterbewegungen mit einer jeweils ähnlichen allmählich abflauenden Dynamik unterworfen waren. Der Gitter-Erwartungswert für eine Observable mit negativer Parität oder einer gleichen Anzahl mit positivem und negativem Vorzeichen gewichteten quadratischen Beiträgen sollte bei hinreichend langer Messung gegen Null gehen. Für die euklidischen Erwartungswerte der Nichtdiagonalkomponenten des Gitter-Energie-Impuls-Tensors tritt in vier Dimensionen keine der beiden im vorangehenden Satz erwähnten Möglichkeiten ein, für die euklidischen Erwartungswerte der Diagonalkomponenten in vier Gitterdimensionen hingegen tritt die zweite der beiden Möglichkeiten ein. Die Konsequenz ist, daß bei allen untersuchten Modellen die Messungen der Nichtdiagonalkomponenten explizit negative Werte mit graphisch verschwindenden relativen Fehlern liefern, während die Diagonalkomponenten der Voraussage entsprechend sehr kleine Meßwerte mit entsprechend großen relativen Fehlern generieren. Das Konzept der Parität kann dabei selbstverständlich auf die Miteinbeziehung der holomorphen Fortsetzung der Zeit erweitert werden, da sich der euklidische Energie-Impuls-Tensor auch unter Zeitumkehr im Sinne eines positiven Transformationsvorzeichens gerade verhält. Sowohl für die Nichtdiagonalkomponenten als auch für die Diagonalkomponenten des Gitter-Energie-Impuls-Tensors stabilisiert eine 4-Plaketten-Mittelung (Wiederherstellung der Rotationsinvarianz auf dem Gitter) die Langzeitmeßgraphen sowohl in Bezug auf die Absolutbeträge der

Meßwerte als auch in Bezug auf die relativen Abweichungen der Meßpunkte untereinander, wenn diese Operation der 4-Plaketten-Mittelung beim gegebenen Modell algebraisch nichttrivial ist. Bei den in dieser Arbeit diskutierten Modellen ist die Operation der 4-Plaketten-Mittelung immer algebraisch nichttrivial und daher numerisch sehr wirkungsvoll - mit einer Ausnahme: bei den Diagonalkomponenten des Gitter-Energie-Impuls-Tensors der Gruppe Karsch ist diese Operation effektiv wirkungslos, wobei das diskutierte Modell dann mit der nicht 4-plaketten-gemittelten Version (da spielt es eine Rolle) des in dieser Arbeit neu entwickelten Ansatzes für die Gruppe $SU(2)$ und die Dimensionalität 4 zusammenfällt und die Langzeitmeßdaten mit der vergleichsweise langsamsten Konvergenz liefert. Wird von dem neu in dieser Arbeit gemachten Ansatz die 4-plaketten-gemittelte Variante gemessen, so nehmen die Langzeitdaten sowohl für die Diagonalkomponenten als auch für die Nichtdiagonalkomponenten der untersuchten tensoriellen Konstruktion im Vergleich zu den restlichen Modellen jeweils den Platz 2 in der Frage nach Stabilität und Konvergenz ein. Als Erklärung hierfür wurde das einheitliche Bauprinzip herangezogen, welches aber algebraisch komplizierter als das bei der noch schneller konvergenten 4-plaketten-gemittelten Vollwinkel-Version von der Gruppe aus Pisa ist.

Kapitel 9

ZUSAMMENFASSUNG UND DISKUSSION

Das zentrale Anliegen dieser Arbeit war die Untersuchung gitter-regularisierter Ausdrücke für den Energie-Impuls-Tensor. Gemeint ist damit der symmetrische Energie-Impuls-Tensor und nicht sein weniger bedeutendes kanonisches Pendant. Der kanonische Energie-Impuls-Tensor kann bereits im Kontinuum nur dann als Zwischenschritt zur Berechnung des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors herangezogen werden, wenn die zugrundeliegende Raumzeitdimensionalität auf die natürliche Zahl Vier fixiert wird.

Der oberflächliche Grund dafür ist die Installation eines Hilfsfeldes bei der Applikation des Translations-Noether-Theorems, welches einen verbleibenden Freiheitsgrad bei diesem Erhaltungssatz der nicht a priori erfüllten Symmetrisierungsforderung opfert und durch diese hermaphroditische Anpassung potentielle D -dimensionale Strukturinformation verdeckt, die für eine fraktale Extrapolation im Zuge der dimensionellen Regularisierung der Spur des resultierenden symmetrischen Energie-Impuls-Tensors benötigt wird. Der unter diesem Aspekt in dieser Arbeit zunächst untersuchte bekannte Ausweg aus dem Dilemma liegt in einem allgemeinrelativistischen Durchgang.

Dabei wird die Flachraum-Metrik der Speziellen Relativitätstheorie in einem Variationsstadium formal als variabel betrachtet und stattdessen die äußeren Eichfelder vorübergehend fixiert. Während eine Extremwertforderung für die Gesamtwirkung jetzt über den Satz von Gauß und die kontrahierte Bianchi-Identität auf die Einsteinschen Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie führen würde, impliziert eine explizite Minimierungsforderung für die von den formal mitgeschleppten raumzeit-krümmungsgeometrischen Termen befreite Teilwirkung über den Noetherschen Erhaltungssatz in seiner allgemeinsten Form eine Definition des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors, die ohne Mehrdeutigkeitsprobleme dimensionell regularisierbar ist. Da

ein Transfer dieses Zuganges auf das Gitter mit zusätzlichen Schwierigkeiten verbunden ist, stellte sich im Verlauf dieser Arbeit die Frage nach einem elementareren Verständnis für die eigentliche Ursache des allgemeinrelativistischen Umweges.

Es konnte gezeigt werden, daß der abelsche $U(1)$ -Grenzfall einer beliebigen Yang-Mills-Theorie mathematisch äquivalent zu einer 4-dimensionalen raumzeitlichen Verallgemeinerung der 3-dimensionalen Magnetostatik ist. Als Ausgangspunkt dafür ist die differentialformwertige nichttensorielle Darstellung der Magnetostatik ohne tangential vektorisierte Flächenelemente zu wählen. Der Verallgemeinerungs-Algorithmus basiert auf dem Schema einer reinen Wirbelkraft.

Die vierdimensionale Formulierung einer Wirbelkraft und all ihrer direkten nichtabelschen Yang-Mills-Verallgemeinerungen spaltet symmetrische Tensoren zweiten Ranges von den fundamentalen Erzeugungsmechanismen phänomenologisch ab, da es beim Differentialformenkalkül der Yang-Mills-Theorien nur einen mit der äußeren Ableitung interaktiv gekoppelten Basentyp gibt - nämlich die Differentialelemente. In der Differentialformendarstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie (Geometrodynamik) hingegen gibt es einen zweiten Basentyp - das sind die Cartan'schen Basisvektoren. Eine mit beiden Basensystemen wechselwirkende "doppelt duale" (double dual) Systemrotation erzeugt symmetrische Tensoren zweiten Ranges, also auch den Energie-Impuls-Tensor (in Gestalt der weniger üblichen strichrechnungsfreien Darstellung der Einsteinschen Feldgleichungen mit zwei involvierten Levi-Civita-Tensoren; die tensoriellen Verjüngungen bleiben natürlich - vgl. Kapitel 5.2). Also ist der symmetrische Energie-Impuls-Tensor als artfremdes Leihgebilde aus der Allgemeinen Relativitätstheorie anzusehen, was die Frage nach dem Hintergrund für den allgemeinrelativistischen Durchgang bei seiner D -dimensionalen Spezifikation beantwortet.

Weiterentwicklungen dieses Konzeptes führen zu thermodynamischen Anknüpfungspunkten, die eine elegante Analogie zu den Michael'schen Summenregeln und einer gitter-regularisierten Definition der Spur des Energie-Impuls-Tensors herstellen. Außerdem werden dadurch Parallelen zwischen der Allgemeinen Relativitätstheorie und einer $SO(4)$ -Yang-Mills-Theorie sichtbar gemacht, die in grober Vereinfachung auf quadrierungsähnlichen Operationen bezüglich Quasi-Wurzeln aus der Metrik (Vierbein-Transformationsmatrizen) und bezüglich des Riemann-Tensors basieren. Sie suggerieren im Hinblick auf einen potentiellen Gitter-Transfer, Wurzeln aus der Plakettenvariable zu ziehen und bei einer matrixtrigonometrischen Redefinition der Standardversion des Gitter-Feldstärketensors "Winkel"-Halbierungen einzuführen.

Zwischen derartigen "Halbwinkel"-Konzepten und korrespondierenden

”Vollwinkel“-Konstruktionen manifestieren sich Analogien, die bei einem Austausch der Eichgruppe $SO(4)$ durch irgendeine andere maximal unitäre Eichgruppe unsichtbar werden, da nur die Eichgruppe $SO(4)$ simultan der Raumzeit und dem äußeren Eichraum (für die relevante Gravitationsbeschreibung oder andere extern angekoppelte Felder) zugeordnet werden kann und Isomorphismen zwischen beiden Eichräumen zuläßt. Vom Standpunkt einer beliebigen Yang-Mills-Theorie aus gesehen ergibt sich durch das Gedankenexperiment einer Eichgruppensubstitution durch die Eichgruppe $SO(4)$ ein zusätzliches Kriterium für die Zuordnungen verschiedener matrix-trigonometrischer Redefinitionen des Gitter-Feldstärketensors, welches im $SO(4)$ -Kontinuumslimit auf die Tatsache zurückgeführt werden kann, daß die ”quadratische“ Verschachtelung $R_{\alpha\beta\mu\nu} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} R_{\rho\sigma\gamma\delta}$ zweier (*ict*)-euklidisch dargestellter Riemann-Tensoren dieselben Symmetrieeigenschaften wie der Riemann-Tensor $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ selbst besitzt und sich stets über einen konstanten Einheiten-Umnormierungs-Faktor als Spur $trace(F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta})$ zweier $SO(4)$ -Feldstärketensoren $F_{\mu\nu}$ darstellen läßt, welche den homogenen $SO(4)$ -Maxwell-Gleichungen gehorchen. Nach Beendigung dieses $SO(4)$ -Gedankenexperiments kann zum speziellrelativistischen Grenzfall zurückgekehrt und damit der bis hierhin erweiterte kryptische allgemeinrelativistische Durchgang abgeschlossen werden.

Unter Zugrundelegung des angesprochenen $SO(4)$ -Gedankenexperimentes konnte nun im Rahmen dieser Arbeit ein neuartiges Modell für den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta_{\mu\nu}$ auf dem Gitter entworfen werden, welches mit Eichinvarianz, korrektem Kontinuums Grenzwert, einheitlichem Bauprinzip für die einzelnen μ - ν -Komponenten und in oben erwähnter Weise mit Kompatibilität zu thermodynamischen Strukturen aufwarten konnte. Bei den bisher publizierten Gitter-Ansätzen für $\Theta_{\mu\nu}$ konnten die aufgezählten Vorzüge offensichtlich jeweils nicht vollständig vereint werden.

Erwartungswerte der Komponenten des neuen Ansatzes für $\Theta_{\mu\nu}$ sowie Korrelatoren der Komponenten wurden für eine $SU(2)$ -Yang-Mills-Theorie in einer Monte-Carlo-Rechnung untersucht und mit den anderen Modellen in der Literatur verglichen. Es konnte festgestellt werden, daß die numerischen Ergebnisse bei den Messungen der $\Theta_{\mu\nu}$ -Komponenten spürbar vom Bauprinzip des jeweiligen untersuchten $\Theta_{\mu\nu}$ -Modells abhängig waren. Andererseits zeigte es sich, daß es äußerst schwierig ist, verwertbare Daten für die Korrelatoren der zusammengesetzten Operatoren zu erhalten, da in den dafür relevanten Simulationen die Differenzbildung zwischen nahezu gleich großen Gegentermen in hohem Maße verschachtelt ist. Das Erreichen eines ”scaling window“ für diese Größen, wo sich die Gitterartefakte wegcanceln, konnte aufgrund sehr großer statistischer Fehler weder realisiert noch überprüft werden. Explizite Implementierung von Rotationsinvarianz auf dem Gitter führte zu stabileren Ergebnissen, die im Falle der Erwartungswerte bei den Nicht-

diagonalelementen des Energie-Impuls-Tensors für alle untersuchten Modelle mit niedrigen statistischen Fehlern behaftet waren.

Es bleibt anzumerken, daß die in dieser Arbeit entwickelten theoretischen Konzepte im Hinblick auf die Frage nach der Vereinigung der Grundkräfte in der Natur suggestionsmäßig die Yang-Mills-Eichpotentiale auf eine Ebene mit den Christoffel-Konnexionen stellen und nicht wie Kaluza-Klein-Theorien ([26], [30], [53], [58], [59]) mit weiteren Freiheitsgraden der Metrik assoziieren.

Appendix Nr. 1

SPUR-ANOMALIE

Der meines Erachtens erste wirklich umfassende Exkurs über Noether-Theoreme, Energie-Impuls-Tensoren und deren Symmetrie-Beziehungen zu metrischen Variationsverfahren und dimensioneller Regularisierung. Besonders die dafür zu applizierenden allgemeinrelativistischen Durchgänge bedürfen einer sauberen und differenzierten Darstellung:



SPUR - ANOMALIE

Die quantentheoretische Betrachtung baut auf der klassischen Untersuchung auf, die zunächst einen Zusammenhang zwischen der Änderung der Lagrange-Dichte und der Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors herzustellen versucht, und zwar möglichst über das Noether's-Theorem und unveränderte Strukturen. Da hier bei ernsthaften Hindernisse erwartet werden müssen, empfiehlt es sich, ganz bescheiden anzufangen und zunächst einmal Basiszusammenhänge über Koordinatentransformationen in verschiedenen theoretischen Grundsituationen herzustellen.

Ausgangspunkt ist die Wirkung

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi^{ab}(x^\alpha), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\alpha)) d^D x$$

wobei

$$d^D x := \prod_{\nu=1}^D dx^\nu = d^3 x dt$$

(weil bei kovarianten Indizes

$$d^4 x^{\text{cov}} = -d^3 x^{\text{cov}} dt \text{ stören würde),}$$

so daß

$$\det \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} := \det \left(\left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right)_{\mu, \nu} \right)$$

Für gravitative Systeme werde $d^D x$ durch $\sqrt{-g} d^D x$ ersetzt,

wobei $g := \det(g_{\mu\nu}) = \det^{-1}(g^{\mu\nu})$

sind es werde eine formale Kettenregel

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \text{andere Abhängigkeiten}$$

eingeführt, wobei formal der Einwand

$$g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \text{ ignoriert werde, das für}$$

$\mu \neq \nu$ in bestimmten Fällen zu einem Fehlerfaktor der Größe 2 Anlaß gibt, welcher durch geeignete Redefinitionen beherrschbar ist. Außerdem wird unten gezeigt, daß sich die Definition der Metrik auf disjunkte Raumzeitorte verallgemeinern läßt.

Die Rückkehr zur Minkowski-Welt der Quantenelektrodynamik geschieht durch die globale Substitution

$$\sqrt{-g} = +1,$$

die unmittelbar aus der Arithmetik des metrischen Tensors folgt.

$$a_\mu b^\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 a_\mu b^\mu \quad (\text{Raumzeit})$$

$$a_m b^m \equiv \sum_{m=1}^3 a_m b^m \quad (\text{Ortraum})$$

Nur Skalare der griechischen Summenkonvention werden formal auf einen fraktalen D-dimensionalen Raum

verallgemeinert (Fixierung der Regularisierungsmethoden auf die vollständige Raumzeit, indexbehaftete Raumzeitgrößen seien auf $D \in \mathbb{N}$ verallgemeinerbar)

i) SPEZIELL RELATIVISTISCHE TRANSLATIONEN

$$\sqrt{-g} = \text{const} = 1$$

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta a^\mu$$

$$\varphi^{ab}(x^\alpha) \rightarrow \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu) = \varphi^{ab}(x^\mu + \delta a^\mu)$$

$$S = \int_{G_D} \mathcal{L}(\varphi^{ab}(x^\alpha), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\alpha)) d^D x$$

geforderte Randbedingungen:

$$\delta \varphi^{ab}(\gamma^\mu) = 0 \quad \forall y \in (\partial G_D)$$

Nun gilt zunächst einmal allgemein infinitesimal

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} &= \tilde{\partial}_\mu (\tilde{x}^\nu - \delta x^\nu) = \\
&= \delta_\mu^\nu - \frac{\partial x^\lambda}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial_\lambda \delta x^\nu = \\
&= \delta_\mu^\nu - \tilde{\partial}_\mu (\tilde{x}^\lambda - \delta x^\lambda) \partial_\lambda \delta x^\nu = \\
&= \delta_\mu^\nu - \delta_\mu^\lambda \partial_\lambda \delta x^\nu + \mathcal{O}(\delta^2) = \\
&= \delta_\mu^\nu - \partial_\mu \delta x^\nu \\
\Rightarrow \delta \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\lambda) &= \tilde{\partial}_\mu \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\lambda) - \\
&\quad - \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\lambda) = \tilde{\partial}_\mu (\varphi^{ab}(x^\lambda) + \\
&\quad + \delta \varphi^{ab}(x^\lambda)) - \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\lambda) = \\
&= \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial_\nu (\varphi^{ab} + \delta \varphi^{ab}) - \partial_\mu \varphi^{ab} = \\
&= (\delta_\mu^\nu - \partial_\mu \delta x^\nu) \partial_\nu (\varphi^{ab} + \delta \varphi^{ab}) - \\
&\quad - \partial_\mu \varphi^{ab} = \partial_\mu \varphi^{ab} + \partial_\mu \delta \varphi^{ab} - \\
&\quad - \partial_\mu \delta x^\nu \partial_\nu \varphi^{ab} + \mathcal{O}(\delta^2) - \partial_\mu \varphi^{ab} \\
\Rightarrow \delta \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\lambda) &= \\
&= \partial_\mu \delta \varphi^{ab}(x^\lambda) - \partial_\nu \varphi^{ab} \partial_\mu \delta x^\nu \quad (*)
\end{aligned}$$

außerdem

$$\begin{aligned}
d^D \tilde{x} &= \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| d^D x = \\
&= \left| \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_D} \text{sgn}(\sigma) \prod_{\mu=1}^D \partial_\mu (x^{\sigma(\mu)} + \delta x^{\sigma(\mu)}) \right| d^D x = \\
&= \text{abs} \left(\prod_{\mu=1}^D (\delta_\mu^{\sigma(\mu)} + \partial_\mu \delta x^{\sigma(\mu)}) \right) \Big|_{\sum_{\mu=1}^D \delta_\mu^{\sigma(\mu)} = D} + \\
&\quad + \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_D} \text{sgn}(\sigma) \prod_{\mu=1}^D (\delta_\mu^{\sigma(\mu)} + \partial_\mu \delta x^{\sigma(\mu)}) \Big|_{\sum_{\mu=1}^D \delta_\mu^{\sigma(\mu)} \leq D-2} \\
&= |1 + \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta^2)| d^D x \\
\text{Da } \mathcal{O}(\delta^2) &\ll \mathcal{O}(\delta^1) \ll 1 \\
\Rightarrow |1 + \partial_\mu \delta x^\mu + \mathcal{O}(\delta^2)| &= 1 + \partial_\mu \delta x^\mu \\
&\text{also} \\
d^D \tilde{x} &= (1 + \partial_\mu \delta x^\mu) d^D x \quad (***)
\end{aligned}$$

Für Translationen

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + \delta a^\mu$$

folgt aus (*) und (***) unmittelbar

$$\delta \partial_\mu \varphi^{ab} = \partial_\mu \delta \varphi^{ab}$$

$$d^D \tilde{x} = d^D x$$

In Verbindung mit

$$\delta \varphi^{ab}(y^\mu) = 0 \quad \forall y \in (\partial G_D)$$

folgt $\delta S = 0$

und man kann das Noetherische Beweisschema anwenden:

$$\begin{aligned}
0 &= \delta \int \mathcal{L}(\varphi^{ab}(x^\lambda), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\lambda)) d^D x = \\
&\quad \delta d^D x = 0 \\
&= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \partial_\mu \varphi^{ab} \right) d^D x = \\
&\quad \delta \partial_\mu \varphi^{ab} = \partial_\mu \delta \varphi^{ab} \\
&= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \right) \delta \varphi^{ab} \right) d^D x = \\
&= \int_{G_D} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} d^D x + \oint_{\partial G_D} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} d^{D-1} \varphi_\mu
\end{aligned}$$

wobei

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^{ab}} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{ab}} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} = \frac{\delta S[\gamma]}{\delta \varphi^{ab}[x]}$$

sind

$$\oint_{\partial G_D} \delta \varphi^{ab} = 0 \quad \text{weil } \delta \varphi^{ab}(y^\mu) = 0 \quad \forall y \in (\partial G_D)$$

Wegen der Unabhängigkeit und der Beliebigkeit des $\delta \varphi^{ab}$ und des $y \in (\partial G_D)$ folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^{ab}} = 0,$$

die auf der Ebene des Lagrange-Dichte gerade den anderen Anteil der Variation nicht eliminieren:

$$\delta S = 0 \Rightarrow \delta \mathcal{L} = \partial_\mu S J^\mu \Big|_{S J^\mu(x \in \partial G_D) = 0}$$

denn

$$0 = \delta \int_{G_D} \mathcal{L} d^D x = \int_{G_D} \partial_\mu S J^\mu d^D x =$$

$$= \oint_{\partial G_D} S J^\mu d^{D-1} \varphi_\mu = 0$$

mit

$$\begin{aligned} \partial_\mu S J^\mu &= \delta L(\varphi^{ab}(x^2), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^2)) = \\ &= \frac{\partial L}{\partial \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} + \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \partial_\mu \varphi^{ab} = \\ &\stackrel{\text{wie oben}}{=} \frac{\delta L}{\delta \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} + \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} \right) = \\ &\stackrel{\text{nun umgekehrte Annihilation}}{=} \partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} \right) \end{aligned}$$

⇒ Noether - Strom - Erhaltung

$$\partial_\mu S J^\mu = 0$$

mit

$$S J^\mu = \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} - S J^\mu$$

und $\partial_\mu S J^\mu = \delta L$

für alle Systeme, die die benutzten
Herleitungskriterien erfüllen (Translationen
und später eingeführte Pendelsysteme)

Für Translationen gilt

$$\delta \varphi^{ab} = \varphi^{ab}(x^2) - \varphi^{ab}(x^2) = 0$$

$$\begin{aligned} &= \varphi^{ab}(x^2 + \delta a^2) - \varphi^{ab}(x^2) = \\ &= \varphi^{ab}(x^2) + \delta a^\mu \partial_\mu \varphi^{ab}(x^2) + \mathcal{O}(\delta^2) - \\ &= \varphi^{ab}(x^2) \end{aligned}$$

gehe über zu

$$\varphi^{ab}(x^2) \rightarrow \varphi^a(x^2)$$

und finde dabei

$$S \varphi^a(x^2) = \delta a^\mu \partial_\mu \varphi^a(x^2)$$

$\varphi^a(x^2)$ verhält sich wie ein Skalar
und sollte sich dabei exakt analog
transformieren wie das Skalar

$L(\varphi^a, \partial_\mu \varphi^a)$, welches implizit ge-
rade über die φ^a 's in x^μ korre-
liert wird:

$$\delta L = \delta a^\mu \partial_\mu L,$$

was sich wegen der Konstanz des a^μ
umschreiben läßt in

$$\delta L = \partial_\mu (\delta a^\mu L) = \partial_\mu S J^\mu$$

$$\Rightarrow \partial_\mu S J^\mu = 0 \quad \text{mit}$$

$$\begin{aligned} S J^\mu &= \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^a} \delta a^\nu \partial_\nu \varphi^a - \delta a^\mu L = \\ &= \left(\frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^a} \partial_\nu \varphi^a - S^\mu_\nu L \right) \delta a^\nu \end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit und der Kon-
stanz des δa^ν folgt

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = 0 \quad \text{mit}$$

$$T^\mu_\nu := \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^a} \partial_\nu \varphi^a - S^\mu_\nu L$$

(Erhaltungssatz für den kanonischen
Energie-Impuls-Tensor)

Das Ziel, von dieser Ausgangsposition
aus zum symmetrischen Energie-Imp-
puls-Tensor $\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu}$ voranzustreben,
kann folgendermaßen in Angriff ge-
nommen werden:

Es sei

$$T^{\mu\nu} := g^{\mu\lambda} T^\nu_\lambda$$

so daß

$$\begin{aligned} \partial_\nu T^{\mu\nu} &= \partial_\nu (g^{\mu\lambda} T^\nu_\lambda) \stackrel{g^{\mu\lambda} = \text{const}}{=} \\ &= g^{\mu\lambda} \partial_\nu T^\nu_\lambda = 0 \end{aligned}$$

(weil im ersten Anlauf noch $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$)

Der Viererimpuls des Systems ist dann
für $D=4$ gegeben durch

$$P^\mu := \int_{x^0 = \text{const}} T^{\mu\nu} d^3 \sigma_\nu = \int T^{\mu 0} d^3 x$$

$$\text{so daß} \quad \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0$$

$$\partial_0 P^\mu = \int \partial_0 T^{\mu 0} d^3 x = - \int \partial_k T^{\mu k} d^3 x =$$

$$= - \int d(T^{\mu k} d^2 \sigma_k) = - \oint_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} T^{\mu k} d^2 \sigma_k = 0$$

(Gauß'sches Satz in 3 Dimensionen:
grad \rightarrow rot \rightarrow div)

Nun ist $T^{\mu\nu}$ nicht eindeutig, wenn man
die Anforderungen stellt, daß dies durch
die kanonische Konstruktion festgelegte Vier-

rerimpuls durch eine Redefinition nicht beeinflusst werden darf und daß die redefinierte Variante ebenfalls erhalten bleibt. Denn folgendes Modifikationskonzept bietet neue Freiheitsgrade, ohne den Anforderungen zu trotzen:

$$T^{\mu\nu} \rightarrow \tilde{T}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}$$

$$\text{mit } \Sigma^{\mu\nu\lambda} = -\Sigma^{\mu\lambda\nu}$$

(erlaubt $\Sigma^{\mu\nu\lambda} = 0$ ohne diese Interpretation notwendig zu machen)

Begründung ($D=4$):

$$\begin{aligned} 1) \partial_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} &= \partial_\nu (T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}) = \\ &= 0 + \partial_\nu \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda} \stackrel{\text{Satz von Schwarz}}{=} \partial_\lambda \partial_\nu \Sigma^{\mu\nu\lambda} = \\ &\stackrel{\text{Antisymmetrie von } \Sigma^{\mu\nu\lambda}}{=} \partial_\lambda \partial_\nu (-\Sigma^{\mu\lambda\nu}) \stackrel{\text{Umbenennung von } \lambda \text{ und } \nu \text{ und formale Ergänzung von } 0}{=} \\ &= 0 - \partial_\nu \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda} \stackrel{\text{Vergleich mit „+...“-Darstellung}}{=} 0 \end{aligned}$$

Einblick mit der unten diskutierten eindeutig antisymmetrischen Impuls-Darstellung die genuine Form

$$M^{\mu\nu} = x^\mu \tilde{T}^{\nu\lambda} - x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda}$$

hat. In jedem Fall gibt

4-dimensionales Drehimpulstensor

$$M^{\mu\nu} := \int_{x^0=\text{const}} M^{\mu\nu\lambda} d^3\sigma_\lambda = M^{\mu\nu 0} d^3x$$

$$\text{und } \partial_\lambda M^{\mu\nu\lambda} = 0$$

Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\lambda (x^\mu \tilde{T}^{\nu\lambda} - x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda}) = \\ &= \delta_\lambda^\mu \tilde{T}^{\nu\lambda} + \partial_\lambda T^{\nu\lambda} - \delta_\lambda^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda} - \partial_\lambda T^{\mu\lambda} = \\ &\stackrel{\leftarrow \partial_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} = 0}{=} \tilde{T}^{\nu\mu} - \tilde{T}^{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu}$$

A posteriori ergibt sich gerade das hochgradig erwünschte symmetrische Eresque-Impuls-Tensor

$$\Rightarrow \partial_\nu \tilde{T}^{\mu\nu} = \partial_\nu T^{\mu\nu} = 0, \text{ q.e.d.}$$

$$2) \tilde{P}^\mu = \int_{x^0=\text{const}} \tilde{T}^{\mu\nu} d^3\sigma_\nu =$$

$$= \int_{x^0=\text{const}} (T^{\mu\nu} + \partial_\lambda \Sigma^{\mu\nu\lambda}) d^3\sigma_\nu =$$

$$\stackrel{\leftarrow \Sigma^{\mu\nu\lambda} = -\Sigma^{\mu\lambda\nu}}{=} P^\mu + \frac{1}{2} \int_{x^0=\text{const}} d(\Sigma^{\mu\nu\lambda} d^2\sigma_{\nu\lambda}) =$$

$$= P^\mu + \frac{1}{2} \oint_{|\vec{x}|=\infty} \Sigma^{\mu\nu\lambda} d^2\sigma_{\nu\lambda} = P^\mu$$

(Stokes'sches Satz in 4 Dimensionen:

$$\text{grad} \rightarrow \text{ROT} \rightarrow \text{DIV}(\text{anti-symm}) \rightarrow \text{div})$$

$$\Rightarrow \tilde{P}^\mu = P^\mu, \text{ q.e.d.}$$

Bevor über die endgültige ideale Wahl von $\tilde{T}^{\mu\nu}$ nachgedacht wird, erhebt sich aus strukturellen Gründen die Forderung, $\Sigma^{\mu\nu\lambda}$ so zu wählen, daß die 4-dimensionale Drehimpulsdichte $M^{\mu\nu\lambda}$ in

$$\Theta^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\mu\nu} = \tilde{T}^{\nu\mu},$$

das sowohl erhalten ist

$$\partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = 0$$

als auch, wie oben angebeidigt, strukturell zum eindeutig antisymmetrischen Impuls-Darstellung des Drehimpuls-Tensor führt, was umgekehrt als Echtheitsbeweis des Viererimpulsdefinition gewertet werden kann.

$$M^{\mu\nu} = \int_{x^0=\text{const}} (x^\mu \tilde{T}^{\nu\lambda} - x^\nu \tilde{T}^{\mu\lambda}) d^3\sigma_\lambda =$$

$$= \int (x^\mu d\tilde{P}^\nu - x^\nu d\tilde{P}^\mu) =$$

$$= \int (x^\mu dP^\nu - x^\nu dP^\mu)$$

Gerade hier zeigt sich aber, daß eine rein speziellrelativistische Betrachtung in eine Saclgarne führt, wenn man sich

für den Dilationsstrom interessiert:

$$d(x^\mu \Theta^{\nu\lambda}) d^2 \sigma_{\mu\nu} = d(\psi^{\mu\nu\lambda}) d^2 \sigma_{\mu\nu} + d(\varphi^{\mu\nu\lambda}) d^2 \sigma_{\mu\nu}$$

$$\text{mit } \psi^{\mu\nu\lambda} = \frac{x^\mu \Theta^{\nu\lambda} + x^\nu \Theta^{\mu\lambda}}{2}$$

$$\text{und } \varphi^{\mu\nu\lambda} = \frac{x^\mu \Theta^{\nu\lambda} - x^\nu \Theta^{\mu\lambda}}{2}$$

Als geeigneter Beitrag zum äußeren Differentialform im Sinne des allgemeinen Satzes von Stokes kann nämlich nur der antisymmetrische Term

$$\varphi^{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu\lambda}$$

aufgefasst werden, während der symmetrische Teil $\psi^{\mu\nu\lambda}$, aus dem der Dilationsstrom

$$D^\mu := \Theta^{\mu\nu} x_\nu = g_{\nu\lambda} \psi^{\nu\lambda\mu}$$

hervorgeht, durch das antisymmetri-

sche Orthogonalflächenelement $d^2 \sigma_{\mu\nu}$ zu Null neutralisiert wird und somit überhaupt nicht mehr aktiv zum Spezialrelativistischen Differentialformenkalkül beitragen werden kann.

Man findet also

$$\exists \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \text{ mit } \partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = 0$$

und daher

$$\partial_\mu D^\mu = \partial_\mu (\Theta^{\mu\nu} x_\nu) = \Theta^\mu_\mu,$$

findet aber weder eine explizite allgemeine Formel zur Ermittlung von $\Theta^{\mu\nu}$ noch irgendeinen konkreten Bezug zwischen SL, Θ^μ_μ und irgendwelchen speziellrelativistisch motivierten Erhaltungssätzen. Allenfalls kann man bemerken, daß

$$\int_{x^0 = \text{const}} \Theta^{\mu\nu} x_\nu d^3 \sigma_\mu = \int x_\nu dP^\nu.$$

Nun gibt für eine Ruhemassendichte $\mu_0 \neq 0$

$$x_\nu dP^\nu = x_\nu V^\nu d\mu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} x_\nu x^\nu \right) d\mu_0 = \frac{1}{2} \left(\frac{d}{dt} T^2 \right) d\mu_0 = T d\mu_0$$

und für eine Ruhemassendichte $\mu_0 = 0 \Leftrightarrow dt = 0$ (Lichtartigkeit)

$$x_\nu dP^\nu = 0 = T d\mu_0 \quad (x \perp P \text{ bei Licht}),$$

wobei der Symbolcharakter (Pseudokontinuumsbetrachtung entlang quasidiskreter Eigenzeitparametrisierung) dieses Veranschaulichungsverfahrens nicht unterschätzt werden darf.

Dieser Systemvergleich reicht damit nur für ein intuitives Indiz dafür,

warum beim elektromagnetischen Feld, dessen Träger das Licht ist, eine verschwindende Spitze des entsprechenden Anteils des normalen symmetrischen 4-dimensionalen Energie-Impuls-Tensors erwartet werden darf.

ii) REIN SPEZIELLRELATIVISTISCH KONSTRUIERTE SKALENTRANSFORMATIONEN

Das eigentliche Ausgangskonzept ist $\sqrt{-g} = \text{const} = 1$

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = e^{-\sigma} x^\mu$$

$$\varphi^{ab}(x^\mu) \rightarrow \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu) = \varphi^{ab}(e^{-\sigma} x^\mu)$$

so daß

$$\delta x^\mu = x^\mu e^{-\delta\sigma} - x^\mu =$$

$$= x^\mu (1 - \delta\sigma + \mathcal{O}(\delta\sigma^2)) - x^\mu =$$

$$= -x^\mu \delta\sigma$$

Unmittelbarer Gebrauch des zu Anfang von Abschnitt i) entwickelten Formeln (*) und (**) führt zu

$$\begin{aligned} (*) &\Rightarrow \delta \partial_\mu \varphi^{ab} = \\ &= \partial_\mu \delta \varphi^{ab} - \partial_\nu \varphi^{ab} \partial_\mu (-x^\nu \delta \sigma) = \\ &= \partial_\mu \delta \varphi^{ab} + \partial_\mu \varphi^{ab} \delta \sigma \neq \partial_\mu \delta \varphi^{ab} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (**) &\Rightarrow d^D \tilde{x} = \\ &= (1 + \partial_\mu (-x^\mu \delta \sigma)) d^D x = \\ &= (1 - D \delta \sigma) d^D x \neq d^D x \end{aligned}$$

oder makroskopisch

$$\begin{aligned} d^D \tilde{x} &= \left| \det \frac{\partial (e^{-\delta \sigma} x)}{\partial x} \right| d^D x = \\ &= \det (e^{-\delta \sigma} \mathbb{1}) d^D x = e^{-D \delta \sigma} d^D x \end{aligned}$$

Dieser nicht infinitesimale Zusammenhang legt folgende Reinterpretation nahe, mit der die Voraussetzungen $\delta \partial_\mu \varphi^{ab} = \partial_\mu \delta \varphi^{ab}$ und $d^D \tilde{x} = d^D x$

für das elementar formalthese Noether-Theorem möglicherweise gerechtfertigt werden können

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \tilde{x}^\mu \\ \varphi^{ab}(x^\mu) &\rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu) = \\ &= e^{-D(\varphi^{ab})\delta \sigma} \varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu), \end{aligned}$$

wobei $D(\varphi^{ab})$ die kanonische Maschen dimension des Feldes φ^{ab} sei.

In Abwesenheit dimensionsbehafteter Kopplungskonstanten gilt nämlich

$$\begin{aligned} \delta S &= \int \delta (\mathcal{L} d^D x) = \\ &= \int [\mathcal{L}(\varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu), \tilde{\partial}_\mu \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu)) \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| - \\ &\quad - \mathcal{L}(\varphi^{ab}(x^\mu), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\mu))] d^D x = \\ &= \int [\tilde{\mathcal{L}}(\varphi^{ab}(x^\mu), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\mu)) - \\ &\quad - \mathcal{L}(\varphi^{ab}(x^\mu), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\mu))] d^D x \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(\varphi^{ab}(x^\mu), \partial_\mu \varphi^{ab}(x^\mu)) &:= \\ &= \mathcal{L}(\varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu), \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} \partial_\nu \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu)) \cdot \\ &\quad \cdot \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| = \\ &= \mathcal{L}(\varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu), \frac{\partial (e^{\delta \sigma} \tilde{x}^\nu)}{\partial \tilde{x}^\mu}) \cdot \\ &\quad \cdot \partial_\nu \varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu) \cdot \left| \det \frac{\partial (e^{-\delta \sigma} x)}{\partial x} \right| = \\ &= \mathcal{L}(\varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu), \\ &\quad e^{\delta \sigma} \partial_\mu \partial_\nu \varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu)) e^{-D \delta \sigma} = \\ &= \mathcal{L}(e^{-D(\varphi^{ab})\delta \sigma} \varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu), \\ &\quad e^{-D(\partial_\mu \varphi^{ab})\delta \sigma} e^{\delta \sigma} \partial_\mu \varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu)) = \\ &= \mathcal{L}(e^{-D(\varphi^{ab})\delta \sigma} \varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu), \\ &\quad \partial_\mu (e^{-D(\varphi^{ab})\delta \sigma} \varphi^{ab}(e^{-\delta \sigma} x^\mu))) = \\ &= \mathcal{L}(\tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu), \partial_\mu \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu)) \end{aligned}$$

Für die Reinterpretation gilt (ersetze $D(\varphi^{ab})$ provisorisch durch die Kurzform D)

$$\begin{aligned} \delta \varphi^{ab}(x^\mu) &= \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu) - \varphi^{ab}(x^\mu) = \\ &= \tilde{\varphi}^{ab}(x^\mu + \delta x^\mu) - \varphi^{ab}(x^\mu) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \\ &= \tilde{\varphi}^{ab}(x^\mu) + \delta x^\nu \partial_\nu \varphi^{ab}(x^\mu) + \mathcal{O}(\delta^2) - \\ &\quad - \varphi^{ab}(x^\mu) = [\tilde{\varphi}^{ab}(x^\mu) - \varphi^{ab}(x^\mu)] + \\ &\quad + \partial_\nu \varphi^{ab}(x^\mu) [\tilde{x}^\nu - x^\nu] = \\ &= [e^{-D \delta \sigma} \varphi^{ab} - \varphi^{ab}] + \partial_\nu \varphi^{ab} [e^{-\delta \sigma} x^\nu - \\ &\quad - x^\nu] \stackrel{\text{Taylor}}{=} \varphi^{ab} [1 - D \delta \sigma + \mathcal{O}(\delta^2) - 1] + \\ &\quad + \partial_\nu \varphi^{ab} x^\nu [1 - \delta \sigma + \mathcal{O}(\delta^2) - 1] = \\ &= - (D \varphi^{ab} + x^\nu \partial_\nu \varphi^{ab}) \delta \sigma \end{aligned}$$

Also gilt konkret

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= 0 \\ \delta \varphi^{ab}(x^\mu) &= - (D(\varphi^{ab}) \varphi^{ab} + x^\nu \partial_\nu \varphi^{ab}) \cdot \\ &\quad \cdot \delta \sigma \end{aligned}$$

Damit ist das Verhalten von δS noch nicht erforscht. Ist die Lagrange-Dichte aber frei von dimensionsbehafteten Kopplungskonstanten (die sich sonst näm-

lich verändern würden aber trotzdem nicht als Felder aufgefaßt werden könnten), so muß sie sich analog zu den skalare aufgefaßten Feldern transformieren:

$$\begin{aligned} \delta L &= -(D(L)L + x^\nu \partial_\nu L) \delta \sigma = \\ &= -(D(L)L + x^\nu \partial_\nu L) \delta \sigma = \\ &= -((\partial_\nu x^\nu)L + x^\nu \partial_\nu L) \delta \sigma = \\ &= \partial_\mu (-x^\mu L \delta \sigma) \end{aligned}$$

Hierbei würde benutzt, daß

$D(x^\mu) = -1$ ($x^\mu \rightarrow e^{-\delta \sigma} x^\mu$ gehört also erwartungsgemäß zu der inversen Transformation

$$x^\mu \rightarrow (e^{-D(x^\mu)\delta \sigma})^{-1} x^\mu$$

$$\Rightarrow D(d^D x) = -D \text{ neben}$$

$$D(S, \text{tr} \tau_0 = c = \text{tr} 1) = 0$$

$$\Rightarrow D(L) = D$$

Dies hat zwei Konsequenzen

$$1) \delta L = \partial_\mu (-x^\mu L \delta \sigma) := \partial_\mu \delta J^\mu$$

$$\Rightarrow \delta S = \int_{G_D} \partial_\mu \delta J^\mu d^D x =$$

$$= \oint_{\partial G_D} \delta J^\mu d^{D-1} \sigma_\mu$$

$$\Rightarrow \delta S = 0 \text{ für}$$

$$\delta \varphi^{ab}(y^\mu) = 0 \quad \forall y \in (\partial G_D)$$

und das Noethes-Theorem kann appliziert werden

2) Falls (die Bedeutung dieses Trivialmodells ergibt sich erst vor dem Hintergrund des Vergleiches mit allgemeinrelativistischen Interpretationen)

$$\Theta^{\mu\nu} = L g^{\mu\nu}$$

(Modelltopie, welche als Simplifizierung reales Aspektes fungiert)

so folgt (jetzt ausführliches als links i):

$$\begin{aligned} \delta L &= \partial_\mu (-x^\mu L \delta \sigma) = \\ &= -\delta \sigma \partial_\mu (L g^{\mu\nu} x_\nu) = \\ &= -\delta \sigma \partial_\mu (\Theta^{\mu\nu} x_\nu) \stackrel{\leftarrow \mu \leftrightarrow \nu}{=} \\ &= -\delta \sigma \partial_\nu (\Theta^{\nu\mu} x_\mu) \stackrel{\leftarrow \mu \leftrightarrow \nu}{=} \\ &= -\delta \sigma \partial_\nu (\Theta^{\mu\nu} x_\mu) \stackrel{\leftarrow \partial_\nu \Theta^{\mu\nu} = 0}{=} \\ &= -\delta \sigma \Theta^{\mu\nu} \partial_\nu x_\mu = \\ &= -\delta \sigma \Theta^{\mu\nu} g^{\lambda\nu} \partial_\nu x_\mu = \\ &= -\delta \sigma \Theta^{\mu\lambda} \partial^\lambda x_\mu = -\delta \sigma \Theta^{\mu\lambda} \delta_\mu^\lambda = \\ &= -\Theta^{\mu\lambda} \delta \sigma \end{aligned}$$

also

$$\delta L = -\partial_\mu (\Theta^{\mu\nu} x_\nu) \delta \sigma = -\Theta^{\mu\lambda} \delta \sigma$$

als gewünschte Beziehung zwischen Änderung des Lagrange-Dichte, Dilatationsstrom und Spür des symmetrischen Energie-Impuls-Tensor, die aber hier leider anders als bei i) nicht einmal Vision ist sondern einfach nur sinneal suggeriert wird.

Real hingegen ergibt sich gemäß i) über das Noethes-Theorem

$$\partial_\mu \delta J^\mu = 0$$

mit der kanonischen Impulsdichte

$$\Pi_{ab}^\mu := \frac{\partial L}{\partial \partial_\mu \varphi^{ab}}$$

und dem infinitesimalen Strom

$$\delta J^\mu = \Pi_{ab}^\mu \delta \varphi^{ab} - \delta J^\mu =$$

$$= -\Pi_{ab}^\mu (D(\varphi^{ab}) \varphi^{ab} + x^\nu \partial_\nu \varphi^{ab}).$$

$$\cdot \delta \sigma - (-x^\mu L \delta \sigma) \stackrel{\leftarrow \text{egal ob } \varphi^a \text{ oder } \varphi^{ab} \text{ dominiert wird}}{=} -\delta \sigma [(\frac{\partial L}{\partial \partial_\nu \varphi^{ab}} \partial_\nu \varphi^{ab} - \delta_\nu^\mu L) x^\nu +$$

$$+ \Pi_{ab}^\mu \delta \varphi^{ab}] = -\delta \sigma [T^\mu_\nu x^\nu +$$

$$+ \Pi_{ab}^\mu D(\varphi^{ab}) \varphi^{ab}]$$

$$\Rightarrow 0 = \partial_\mu \delta J^\mu \stackrel{\leftarrow \partial_\mu T^\mu_\nu = 0}{=} -\delta \sigma [T^\mu_\nu \partial_\mu x^\nu + \partial_\mu (\Pi_{ab}^\mu D(\varphi^{ab}) \varphi^{ab})]$$

$$\Rightarrow T^{\mu}_{\nu} = -\partial_{\nu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\nu} \varphi^{ab}} \partial (\varphi^{ab}) \varphi^{ab} \right),$$

einer Spürs-Identität, die so weder mit der Änderung der Lagrange-Dichte noch mit dem eigentlich relevanten symmetrischen Energie-Impuls-Tensor in Verbindung gebracht werden kann. Im direkten Anlauf zur Analyse von skalentransformierten Verhalten weist sich der Weg ii) also zunächst als noch unfruchtbarer als Ansatz i).

Außerdem enthält die konkrete Form der QED-Lagrange-Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu},$$

$$\text{wobei: } D_{\mu} = \partial_{\mu} + ie A_{\mu},$$

$$\not{D} = D_{\mu} \gamma^{\mu},$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ie} [D_{\mu}, D_{\nu}],$$

daß dieser Weg ii) nur für $m=0$ beschrieben werden kann, denn die Dimensionsbetrachtungen zeigen für die unternormalisierte klassische Situation $D=4$:

$D[m]=1$, m ist kein Feld, sondern fungiert als Kopplungskonstante

$D[e, 4\pi e_0 = c = \hbar = 1] = 0$, e ist kein Feld, sondern eine Kopplungskonstante (was wegen $D=0$ so nicht stört),

$$D(\varphi^a = \psi^a) = D(\varphi^{a2} = \bar{\psi}^a) = \frac{3}{2}$$

$$D(\varphi^{5b} = A^{\mu}) = 1$$

$D[D_{\mu}] = 1$, D_{μ} ist primär kein Feld und auch nicht in diesem Sinne betroffen

Zur detaillierten Begründung des

$m=0$ -Forderung:

$$\langle \varphi_b(\vec{x}, x^0+T) | \varphi_a(\vec{x}, x^0) \rangle =$$

$$= \langle \varphi_b(x) | e^{-\frac{i}{\hbar} HT} | \varphi_a(x) \rangle =$$

$$= \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{i}{\hbar} S \int d^D x \mathcal{L}}$$

in den atomaren SI-Einheiten.

Aus der teilchenphysikalischen Simplifikation $4\pi e_0 = c = \hbar = 1 \Rightarrow \alpha) \wedge \beta)$

$\alpha)$ einheitendim [Größe] =

$$= (\text{massendim}^{\mathcal{D}[\text{Größe}]}) [\text{Größe}]$$

$$\beta) e^{-\frac{1}{\hbar} S} \rightarrow e^{-S}$$

$$\text{also } \mathcal{D}(e^{-S}) = \mathcal{D}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} S^k\right) = \text{physikalischer Realismus}$$

$$= \mathcal{D}\left[\frac{(-1)^a}{a!}\right] + \mathcal{D}(S^a) = a \mathcal{D}(S)$$

$$\Rightarrow a \mathcal{D}(S) = \mathcal{D}(e^{-S}) = \text{const} = \mathcal{D}(S) \forall a \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(S = \int d^D x \mathcal{L}) = 0$$

$$\alpha) \wedge \beta) \Rightarrow$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) = \mathcal{D}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}(\not{D}) = \mathcal{D}(D_{\mu}) = \mathcal{D}(e A_{\mu}) = \mathcal{D}(m) = 1$$

im Gegensatz zu

$$\mathcal{D}(A_{\mu}) = \mathcal{D}(e A_{\mu}) - \mathcal{D}(e) =$$

$$= 1 - \mathcal{D}\left(\sqrt{\frac{[D_{\mu}, D_{\nu}][D^{\mu}, D^{\nu}]}{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}}\right) =$$

$$= 1 - 2 \mathcal{D}(D_{\mu}) + \frac{1}{2} \mathcal{D}(F^2) =$$

$$= 1 - 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{D} = \frac{\mathcal{D}}{2} - 1$$

In der klassischen Darstellung darf sich nicht mit transformieren und man gerät für $m = \text{const} \neq 0$ an den widersprüchlichen Dualismus

$$\bar{\psi} \not{D} \psi \rightarrow \tilde{\bar{\psi}} \tilde{\not{D}} \tilde{\psi} \text{ mit } \mathcal{D}(\bar{\psi} \not{D} \psi) = \mathcal{D}$$

$$\bar{\psi} m \psi \rightarrow \tilde{\bar{\psi}} m \tilde{\psi} \text{ mit } \mathcal{D}(\bar{\psi} \psi) =$$

$$= \mathcal{D}(\bar{\psi} m \psi) - \mathcal{D}(m) = \mathcal{D} - 1$$

so daß dann

$$T^{\mu}_{\nu} = -\partial_{\nu} (\epsilon^{\mu}_{ab} \partial(\varphi^{ab}) \varphi^{ab}),$$

Diese Argumentation bildet nicht umkehrbar die reinterpretation bedingten Fixierung von x^{μ} , da im Rahmen eines reinen Dimensional betrachting ∂_{μ} als operatorwertiges Feld aufgefaßt werden kann, das auch eine skalaren transformation inklusive inverser Umrückskalierung erfährt:

$$\begin{aligned} x^{\mu} &\rightarrow \tilde{x}^{\mu} \\ \varphi^{\mu\nu}(x^{\mu}) &= \partial_{\mu} \rightarrow \tilde{\varphi}^{\mu\nu}(\tilde{x}^{\mu}) = \\ &= e^{-\sigma} \partial(\varphi^{\mu\nu}) e^{\sigma} \varphi^{\mu\nu}(e^{-\sigma} x^{\mu}) = \\ &= e^{-1 \cdot \sigma} \frac{\partial}{\partial(e^{-\sigma} x^{\mu})} = \partial_{\mu} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{\det(\epsilon^{\mu\nu}(\tilde{x}) \cdot \tilde{x}'(\tilde{x}))} = \\ &= \sqrt{\det \text{GRAM}} = |\det \tilde{x}'(\tilde{x})| = \\ &= |\det \left(\left(\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right)_{\mu\nu} \right)| \end{aligned}$$

Entscheidend ist, daß in dieser Uminterpretation bei subtilerer Betrachtung gilt:

$$\begin{aligned} x^{\mu} &\rightarrow \tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} e^{-\sigma} \text{ aber } x \rightarrow x \\ (\text{so daß wegen } \delta \langle x, x \rangle = 0 \\ x_{\mu} &\rightarrow \tilde{x}_{\mu} = x_{\mu} e^{+\sigma} \text{ folgt}) \text{ im krassen} \\ \text{Gegensatz zur Ausgangssituation wo} \\ x^{\mu} &\rightarrow \tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} e^{-\sigma} \text{ und } x \rightarrow \tilde{x} = x e^{-\sigma} \\ (\text{einschließlich } x_{\mu} &\rightarrow \tilde{x}_{\mu} = x_{\mu} e^{-\sigma}). \end{aligned}$$

Für die spätere Betrachtung von Renormierungseffekten sind gerade die Betragänderungen

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow \tilde{x}^2 = x^2 e^{-2\sigma} \\ \Rightarrow p^2 &\rightarrow \tilde{p}^2 = p^2 e^{2\sigma} \end{aligned}$$

iii) KONZEPT: GRAVITATIVE UMINTERPRETATION

Sei für $D=4$ $\vec{y} \in \mathbb{K}^{10}$ der Ortsvektor der lokalen Einbettung der allgemein-relativistisch interpretierten Raumzeit und $\vec{x} \in \mathbb{K}^4$ ihre euklidische Parametrisierung (das übliche Vektorpfeildiene hier ausnahmsweise der symbolischen Anschaulichkeit). Dann läßt sich $\vec{x} \in \mathbb{K}^4$ naiv als Ortsvektor eines ganz besonders niederdimensionalen flachen lokalen Einbettung denken, wobei zunächst in grober Schreibweise gilt:

$$\begin{aligned} \sqrt{-\det(g_{\mu\nu})} &:= \sqrt{-g} = \sqrt{g_{\text{euklid}}} = \\ &= \sqrt{\det \left(\left\langle \frac{\partial \vec{y}}{\partial x^{\mu}}, \frac{\partial \vec{y}}{\partial x^{\nu}} \right\rangle_{\mu\nu} \right)} = \\ &= \sqrt{\det \left(\epsilon^{\mu\nu}(\vec{x}) \cdot \vec{y}'(\vec{x}) \right)} = \end{aligned}$$

maßgeblich, die jedoch für die allgemein-relativistisch interpretierten Betrachtungen ohne Komplikationen übersehen werden dürfen. Außerdem sind die tensoriellen Darstellungen sehr empfindlich vom Transformationscharakter des Indizes abhängig. Das wird jetzt verfeinert unter Rückgriff auf die eingangs festgelegten metrischen inspirierten tensoriellen Konventionen.

Dazu betrachte man folgende bereits suggestive Darstellung der bodenständigen allgemein-relativistischen Transformationsformel

$$\frac{\partial \tilde{x}^{\mu}}{\partial x^{\rho}} \frac{\partial \tilde{x}^{\nu}}{\partial x^{\sigma}} g^{\rho\sigma} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial \tilde{x}^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial \tilde{x}^{\sigma}} \tilde{g}^{\rho\sigma},$$

die sich präzisieren läßt zu

$$\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x^\alpha) = \tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha)$$

Die Metrik ist also normalerweise direkt am Orte ihres eigenen Urbildes definiert. Dies hat folgende störende Konsequenz:

$$\text{Da } g = \det(g_{\mu\nu}) = \det^{-1}(g^{\rho\sigma})$$

folgt aus der obigen Formel zunächst

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho}\right) \det\left(\frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma}\right) \det(g^{\rho\sigma}(x^\alpha)) &= \\ = \det(\tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha)) \det^2 \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\alpha} \frac{1}{g(x)} &= \frac{1}{\tilde{g}(\tilde{x})} \\ \Rightarrow \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| &= \sqrt{\frac{g(x)}{\tilde{g}(\tilde{x})}} \end{aligned}$$

Angewandt auf ein dichteartiges Volumenelement bedeutet dies

$$\begin{aligned} \sqrt{-g(x)} d^D x &= \sqrt{-g(x)} \left| \det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right| d^D \tilde{x} = \\ = \sqrt{-g(x)} \sqrt{\frac{\tilde{g}(\tilde{x})}{g(x)}} d^D \tilde{x} &= \sqrt{-\tilde{g}(\tilde{x})} d^D \tilde{x} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \delta(\sqrt{-g(x)} d^D x) = 0 \text{ wenn}$$

$$\begin{aligned} \delta(\sqrt{-g} d^D x) &= \sqrt{-\tilde{g}(\tilde{x})} d^D \tilde{x} - \\ &= \sqrt{-g(x)} d^D x, \end{aligned}$$

ein Ansatz, der für die real gegebenen Variationen völlig ungeeignet ist.

Nun kann man aber formal

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(x^\alpha) := \tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) - \delta x^\rho \partial_\rho \tilde{g}^{\mu\nu}(x^\alpha)$$

definieren,

$$\text{wenn } \tilde{x}^\alpha = x^\alpha + \delta x^\alpha,$$

weil die Taylorische Entwicklung um den Punkt (x^α) herum infinitesimal nur bis zur ersten Ordnung effektiv bleibt.

Auf der Ebene der Metrik läßt sich diese formal korrekte aber physikalisch exzentrische Uminterpretation mit Hilfe Taylorische Ableitungen

allgemein spezifizieren, was zunächst bedauerlich zu sein scheint.

Betrachtet man jedoch die Formel

$$\left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| = \sqrt{\frac{g(x)}{\tilde{g}(\tilde{x})}},$$

so bemerkt man, daß auf Detekminebene ein demmaßen rigoroses Invarianzverlust bezüglich der Transformationsspezialität auftritt, desart, daß auf der rechten Seite bloße skalare Funktionen von den reinen Ortsvektoren zurückbleiben, die auf der linken Seite der Gleichung ähnlich gleichgeordnet und simpel strukturiert sind. Also ist es möglich, formal x und \tilde{x} zu vertauschen:

$$x \leftrightarrow \tilde{x} \Rightarrow \left| \det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right| = \sqrt{\frac{g(\tilde{x})}{g(x)}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Nun gilt aber auch} \\ \sqrt{\frac{g(x)}{\tilde{g}(\tilde{x})}} &= \left| \det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right|^{-1} = \left| \det \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right)^{-1} \right| = \\ &= \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| \end{aligned}$$

Die Konsequenz ist, daß die formale Teststellung

$$\sqrt{\frac{g(x)}{\tilde{g}(\tilde{x})}} = \sqrt{\frac{\tilde{g}(\tilde{x})}{g(x)}} = \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| :=$$

$$:= \left| \det \left(\left(\frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\nu} \right)_{\mu\nu} \right) \right|$$

völlig korrekt ist. Versucht man nun (siehe Punkt ii)) eine Skalentransformation

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = e^{-\sigma} x^\mu$$

in der speziellrelativistischen Quantenelektrodynamik metrisch zu reinterpreten, so ist die Umkehrmetrik minzkowskiartig und daher

zunächst noch raumzeitlich konstant:

$$\Rightarrow g(x) = g(\tilde{x}) = \text{const} = -1$$

so daß dann

$$\left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| = \sqrt{\frac{-1}{g(\tilde{x})}} = \sqrt{\frac{\tilde{g}(x)}{-1}},$$

welches folgende Variationen ermöglicht:

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{-g(x)} d^D x &= d^D x \rightarrow \\ &\rightarrow \sqrt{-\tilde{g}(\tilde{x})} d^D \tilde{x} = \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| d^D \tilde{x} = \\ &= d^D x; \text{ wie oben bereits } \\ &\text{ vorhergesagt trivial und un-} \\ &\text{interessant} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{-g(x)} d^D x &= d^D x \rightarrow \\ &\rightarrow \sqrt{-g(\tilde{x})} d^D \tilde{x} = d^D \tilde{x} = \\ &= \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| d^D x = \sqrt{-\tilde{g}(x)} d^D x; \\ &\text{ bestätigt die } \tilde{g} \leftrightarrow \tilde{x} \text{-Umkehr-} \end{aligned}$$

pretisbarkeit und reproduziert denselben speziellrelativistischen QED-Direktansatz:

$$d^D x \rightarrow d^D \tilde{x} = \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| d^D x$$

IV) ALLGEMEINRELATIVISTISCHE GESAMTWIRKUNG

Ausgegangen wird von

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = x^\mu + \delta x^\mu$$

$$g^{\mu\nu}(x^\alpha) \rightarrow g^{\mu\nu}(\tilde{x}^\alpha) = g^{\mu\nu}(x^\alpha + \delta x^\alpha)$$

wobei

$$(*) \Rightarrow \delta \partial_\rho g^{\mu\nu} \neq \partial_\rho \delta g^{\mu\nu}$$

und die Wechselbeziehung zwischen $d^D \tilde{x}$ und $d^D x$ nach der Vorlage von

(**) irrelevant ist, da auf der Grundlage der Auffassung

$$\begin{aligned} S_{\text{ges}} &= \int \Lambda_{\text{ges}}(g^{\mu\nu}(x^\alpha), \dots) \sqrt{-g} d^D x := \\ &= \int \mathcal{L}_{\text{ges}} d^D x \end{aligned}$$

der jacobideterminantenverstärkte Faktor $\sqrt{-g}$ bereits in die Lagrangedichte mit hineindefiniert ist.

Die Vertauschbarkeit von S und ∂_ρ in Bezug auf $g^{\mu\nu}$ gibt Anlaß zu der in iii) vorgestellten Reinterpretation

$$\begin{aligned} x^\mu &\rightarrow \tilde{x}^\mu \\ \varphi^{ab}(x^\alpha) &= g^{\mu\nu}(x^\alpha) \rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(x^\alpha) = \\ &= \tilde{g}^{\mu\nu}(x^\alpha) = g^{\mu\nu}(x^\alpha) + \delta g^{\mu\nu}(x^\alpha) \end{aligned}$$

Nun ist die Vertauschbarkeit von S und ∂_ρ relativ zu $g^{\mu\nu}$ erfüllt (Problemstellung (*)) und die Evolution des differentiellen Hypervolumenelemente nach (**) weiterhin

irrelevant, und die Situation ist zu einer allgemeinrelativistischen Koordinatentransformation äquivalent. Diese läßt a priori Skalare invariant, also auch die Wirkung:

$$\delta S_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\},$$

egal ob es sich um die Gesamtwirkung $S_1 = S_{\text{ges}}$, ihren rein geometrischen Anteil $S_2 = S_{\text{geom}}$ oder ihre Standardform $S_3 = S = S_{\text{mat}}$, bezogen auf die Materie (Pendant zu den in i) und ii) diskutierten Wirkungen), handelt:

$$S_{\text{ges}} = S_{\text{geom}} + S$$

$$\delta S_{\text{ges}} = 0 = \delta S_{\text{geom}} = \delta S$$

Diese Universalität ist jedoch die Konsequenz eines Informationsverlustes relativ zu den eigentlichen Extremal-

Forderungen:

$$S_{ges} = \text{extremum!}$$

$$S_{geom} = \text{minimum!}$$

$$S = S_{mat} = \text{minimum!}$$

Bei der Variation nach dem Prinzip stellt sich nämlich die Frage, inwieweit die Komponenten $g^{\mu\nu}$ formal als unabhängig voneinander betrachtet werden können - im Gegensatz zu den Fällen i) und ii), wo die q^{ab} von vorneherein als unabhängig anzusehen sind.

Das unabhängige Variieren der $g^{\mu\nu}$ schließt nämlich Fälle von Koordinatentransformationen mit ein, die keine reellen Änderung des Gravitationsfeldes entsprechen und daher nicht notwendigerweise die Wirkung minimieren, wie es die rein physika-

lischen Koordinatentransformationen automatisch tun. Um die Wirkung zu minimieren, müssen also Nebenbedingungen eingeführt werden, die die unphysikalischen Koordinatentransformationen eliminieren und somit die Unabhängigkeit der $g^{\mu\nu}$ grundsätzlich aufheben.

Für die Gesamtwirkung, die hier links iv) diskutiert werden soll, gilt jedoch ein allgemeineres Variationsprinzip, das formal auch Maxima und Sattelpunkte gestattet. Also dürfen hier für die $g^{\mu\nu}$ als unabhängig betrachtet werden:

$$S_{ges} = \text{extremum!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta S_{ges} = 0 \text{ mit } S_{g^{\mu\nu}} \text{ unabhängig voneinander}$$

$$S_{geom}, S = \text{minimum!} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \delta S_{geom} = \delta S = 0 \text{ mit } S_{g^{\mu\nu}} \text{ abhängig voneinander}$$

Dies impliziert, daß wir uns genau für die Gesamtwirkung sämtliche Voraussetzungen für die Noethersche Argumentation gemäß i) erfüllt sind, deren wesentliches Aspekt folgendermaßen abstrakt formalisiert werden kann:

$$X^{\mu} \rightarrow X^{\mu} \Rightarrow \delta \partial_{\mu} \varphi^{ab} = \partial_{\mu} \delta \varphi^{ab}$$

\Rightarrow für die Standardvariationsvoraussetzungen, die auch hier implizit relevant sind (siehe i))

$$\int \delta \mathcal{L} d^D x =$$

$$= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi^{ab}} \delta \partial_{\mu} \varphi^{ab} \right) d^D x =$$

Satz von Gauß etc.

$$= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} - \partial_{\mu} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_{\mu} \varphi^{ab}} \right) \delta \varphi^{ab} \right) d^D x$$

$$= \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \varphi^{ab}} \delta \varphi^{ab} d^D x,$$

d.h. links dem Integral gilt für die multidimensionalen integrallosen Pseudo-funktionalableitungen

$$\frac{\delta}{\delta \varphi^{ab}} = \frac{\partial}{\partial \varphi^{ab}} - \partial_{\mu} \frac{\partial}{\partial \partial_{\mu} \varphi^{ab}}$$

die Kettenregel

$$\int d^D x \delta = \int d^D x \delta \varphi^{ab} \frac{\delta}{\delta \varphi^{ab}},$$

aber nur hier, denn

$$\delta \neq \delta \varphi^{ab} \frac{\delta}{\delta \varphi^{ab}}$$

Nun braucht man an und für sich nur noch die $S_{q^{ab}}$ als die $S_{g^{\mu\nu}}$ zu interpretieren. Für die allgemeineren relativistische Gesamtwirkung tritt infolge ihres geo-

metrischen Anteils jedoch die Komplikation auf, daß zweite Ableitungen der Metrik auftauchen. Diese Problemsituation läßt sich nach folgendem Schema entschärfen:

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S = \\
 &= \int \delta \mathcal{L}_{\text{ges}}(g^{\mu\nu}(x^\alpha), \partial_\rho g^{\mu\nu}(x^\alpha), \\
 &\quad \partial_\sigma \partial_\tau g^{\mu\nu}(x^\alpha)) d^D x = \\
 &= \int \delta \mathcal{L}_{\text{ges}}(g^{\mu\nu}(x^\alpha), \partial_\rho g^{\mu\nu}(x^\alpha), \\
 &\quad R_{\sigma\tau}) d^D x = \\
 &= \int \left(\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ges}}}{\partial g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ges}}}{\partial \partial_\rho g^{\mu\nu}} \delta \partial_\rho g^{\mu\nu} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{ges}}}{\partial R_{\sigma\tau}} \delta R_{\sigma\tau} \right) d^D x = \\
 &\stackrel{\text{Noethersche Argumentation, basierend auf dem Satz von Gauß}}{\leftarrow} = \int \left(\frac{\delta \mathcal{L}_{\text{ges}}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} + \delta R_{\sigma\tau} \right. \\
 &\quad \left. \cdot \frac{\partial}{\partial R_{\sigma\tau}} \left(-\frac{R\sqrt{-g}}{16\pi G} + \mathcal{L} \right) \right) d^D x =
 \end{aligned}$$

Dann folgen aus der effektiven Irrelevanz der Ricci-Variationen (erfolgreiche Einschränkung auf die metrische Noether-Argumentation) die allgemeinrelativistischen Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{\Theta_{\mu\nu}^{\text{ges}}}{2} := \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{ges}}}{\delta g^{\mu\nu}} = 0 \quad \forall \mu, \nu \in \{0, 1, 2, 3\}$$

wobei der Null-Tensor $\Theta_{\mu\nu}^{\text{ges}}$ ein formales aber sehr nützlich konstruiert für den Analogietransfer relativ zu i) ist.

Denn aus

$$\begin{aligned}
 \delta \sqrt{-g} &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \\
 (\text{Herleitung siehe Appendix}) \\
 \text{folgt}
 \end{aligned}$$

$$0 = \Theta_{\mu\nu}^{\text{ges}} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_{\text{ges}}}{\delta g^{\mu\nu}} =$$

$$\begin{aligned}
 \leftarrow \int d^D x \delta &= \int d^D x \delta g^{\mu\nu} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}}, \text{ basierend auf dem Satz von Gauß} \\
 &= \int (\delta \mathcal{L}_{\text{ges}}(g^{\mu\nu}(x^\alpha), \partial_\rho g^{\mu\nu}(x^\alpha), \\
 &\quad R_{\sigma\tau} \text{ fixed}) + \delta R_{\sigma\tau} \\
 &\quad \cdot \frac{\partial}{\partial R_{\sigma\tau}} \left(-\frac{R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}}{16\pi G} \right) d^D x = \\
 &= \int \left(\delta \mathcal{L}_{\text{ges}} \Big|_{\text{Noether metr.}} - \frac{g^{\sigma\tau} \sqrt{-g}}{16\pi G} \delta R_{\sigma\tau} \right) d^D x \\
 &\stackrel{\text{kontraktierte Bianchi-Identität } G_{\mu\nu}{}^{;\nu} = 0, \text{ angewandt auf der Basis des Satzes von Gauß}}{\leftarrow} \\
 &= \int \delta \mathcal{L}_{\text{ges}} \Big|_{\text{Noether metr.}} d^D x
 \end{aligned}$$

wobei $G_{\mu\nu}$ = Einstein-Tensor
 $R_{\mu\nu}$ = Ricci-Tensor
 R = Krümmungsskalar

Sei ferner $\Theta_{\mu\nu}$ das symmetrische Energie-Impuls-Tensor in reinen dichteartigen Interpretation (d.h. den Faktor $\sqrt{-g}$ enthaltend, was kein speziellrelativistisch gesehen nicht weiteres von Bedeutung ist).

$$\begin{aligned}
 &= 2 \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} (\mathcal{L}_{\text{mat}} + \mathcal{L}_{\text{geom}}) = \\
 &= 2 \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \left(\mathcal{L} - \frac{R\sqrt{-g}}{16\pi G} \right) = \\
 &= 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} - \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \frac{R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta} \sqrt{-g}}{8\pi G} = \\
 &\stackrel{\text{implizite } \Theta_{\mu\nu}\text{-Definition}}{\leftarrow} = \Theta_{\mu\nu} - \left(\frac{R_{\mu\nu} \sqrt{-g}}{8\pi G} + \frac{R}{8\pi G} \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} \right) = \\
 &= \Theta_{\mu\nu} - \left(\frac{R_{\mu\nu} \sqrt{-g}}{8\pi G} - \frac{R g_{\mu\nu} \sqrt{-g}}{16\pi G} \right) \\
 &\Rightarrow \text{Einsteinsche Feldgleichungen} \\
 G_{\mu\nu} &:= R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{\sqrt{-g}} \Theta_{\mu\nu} \\
 \text{und speziell} \\
 \Theta_{\mu}^{\mu} &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (2R_{\mu}^{\mu} - R \delta_{\mu}^{\mu}) = \\
 &= \frac{\sqrt{-g}}{16\pi G} (2R - R D)
 \end{aligned}$$

also

$$\Theta_{\mu}^{\mu} = \frac{\sqrt{-g} (2-D)}{16\pi G} R_{\mu}^{\mu}$$

als Antwort auf die Frage nach des Spürs des symmetrischen Energie-Impuls-Tensor ohne materieführende Zusammenhänge. Versucht man nämlich wie geplant im Nachhinein zur Spezialrelativistischen Minkowski-Welt der Quantenelektrodynamik überzugehen, so stößt man abträp auf

$$\Theta_{\mu}^{\mu} = 0,$$

ohne die Chance gehabt zu haben, eine Skalentransformation metrisch zu reinkespretieren.

Eine solche Reinkespretation würde nämlich letztlich zu einer räumlich konstanten Dehnung oder Stauchung des Metriks führen, einem Einfluß, der uns dann zu überlebensfähigen

relevanten Extratermen führt, wenn diese die Metrik selbst enthalten, ohne daß sie mit ihren eigenen Ableitungen multipliziert wird.

$R_{\mu\nu}$ sind daher auch R_{μ}^{μ} hängen aber desart von

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} \propto \sum g^{\delta\epsilon} \partial_{\alpha} g_{\mu\nu}$$

sind

$$\partial_{\tau} \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$$

ab, daß

$$\partial_{\alpha} g_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \lambda, \mu, \nu \Rightarrow R_{\mu\nu}, R_{\mu}^{\mu} = 0$$

$$\Rightarrow \Theta_{\mu\nu}, \Theta_{\mu}^{\mu} = 0 \quad \forall D$$

ohne geeignete Modifikationmöglichkeiten bei irgendwelchen Zwischenschritten.

V) ALLGEMEINRELATIVISTISCHE MATERIEWIRKUNG

Erneut wird die Koordinatentransformation

$$x^{\mu} \rightarrow \tilde{x}^{\mu} = x^{\mu} + \delta x^{\mu}$$

$$g^{\mu\nu}(x^{\alpha}) \rightarrow g^{\mu\nu}(\tilde{x}^{\alpha}) = g^{\mu\nu}(x^{\alpha} + \delta x^{\alpha})$$

reinkespretativ umgestaltet in

$$x^{\mu} \rightarrow x^{\mu}$$

$$\varphi^{ab}(x^{\alpha}) = g^{\mu\nu}(x^{\alpha}) \rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(x^{\alpha}) = \tilde{g}^{\mu\nu}(x^{\alpha}) = g^{\mu\nu}(x^{\alpha}) + \delta g^{\mu\nu}(x^{\alpha}).$$

Alles verhält sich wie in Abschnitt iv) mit Ausnahme des Tatsache, daß, wie dort bereits skizziert, die Teilwirkung recht minimiert werden muß und die $Sg^{\mu\nu}$ dabei nicht als unabhängig eingestuft werden dürfen und sich somit nicht auf dem Standardwege entkoppeln las-

sen.

Infolge der etwas künstlichen Transformationsvorschrift

$$\sqrt{\frac{g(x)}{g(\tilde{x})}} = \sqrt{\frac{\tilde{g}(x)}{g(\tilde{x})}} = \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right|$$

(siehe Abschnitt iii))

kann $Sg^{\mu\nu}$ reinkespretiert werden in das Koordinatendifferential δx^{α} , welches selber bei den eigentlichen Koordinaten reinkespretiert würde. Dieses existiert formal noch durch die $g(\tilde{x}) \leftrightarrow \tilde{g}(x)$ -Vorschrift und bietet darüber hinaus den Vorteil, daß die δx^{α}

selbst dann unabhängig sind, wenn es die $Sg^{\mu\nu}$ nicht mehr sind. Denn die δx^{α} verkörpern gerade jene 4 Freiheitsgrade, die bei den 16 $Sg^{\mu\nu}$ für eine vollständige Unabhängig-

beit nicht ausreichen, wenn die Teilwirkung $S = S_{\text{mat}}$ künstlich minimiert werden soll (man beachte, daß gerade die eines Skalentransformation entsprechende Koordinatenänderung keiner realen Änderung des Gravitationsfeldes entspricht, die auch die Teilwirkung automatisch minimieren könnte).

Die Umformung des $S_{g^{\mu\nu}}$ verläuft folgendermaßen:

$$\begin{aligned}
 S_{g^{\mu\nu}}(x^\lambda) &= \tilde{g}^{\mu\nu}(x^\lambda) - g^{\mu\nu}(x^\lambda) \quad \leftarrow \text{Def. in iii)} \\
 &= \tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}^\lambda) - \delta x^\tau \partial_\tau \tilde{g}^{\mu\nu}(x^\lambda) - g^{\mu\nu}(x^\lambda) = \\
 &= \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x^\lambda) - \delta x^\tau \partial_\tau (g^{\mu\nu}(x^\lambda) + \\
 &+ S_{g^{\mu\nu}}(x^\lambda)) = \frac{\partial}{\partial x^\rho} (x^\mu + \delta x^\mu) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (x^\nu + \delta x^\nu) \cdot \\
 &\cdot g^{\rho\sigma}(x^\lambda) - \delta x^\tau \partial_\tau g^{\mu\nu}(x^\lambda) + \mathcal{O}(\delta^2) - \\
 &- g^{\mu\nu}(x^\lambda) \quad \leftarrow \text{hier noch tildefreie Größen betroffen}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\delta_\rho^\mu + \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\rho} \right) \left(\delta_\sigma^\nu + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\sigma} \right) g^{\rho\sigma} - \\
 &- \delta x^\tau \partial_\tau g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} = \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu g^{\rho\sigma} + \\
 &+ \delta_\rho^\mu \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma} + \delta_\sigma^\nu \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\rho} g^{\rho\sigma} + \mathcal{O}(\delta^2) - \\
 &- \delta x^\tau \partial_\tau g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\mu\sigma} + \\
 &+ \frac{\partial \delta x^\mu}{\partial x^\rho} g^{\rho\nu} - \delta x^\tau \partial_\tau g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} \stackrel{\leftarrow}{=} g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu} \\
 &= g^{\mu\rho} \partial_\rho \delta x^\nu + g^{\nu\sigma} \partial_\sigma \delta x^\mu - \delta x^\tau \partial_\tau g^{\mu\nu} = \\
 &= g^{\mu\rho} (D_\rho \delta x^\nu - \Gamma_{\tau\rho}^\nu \delta x^\tau) + g^{\nu\sigma} (D_\sigma \delta x^\mu - \\
 &- \Gamma_{\tau\sigma}^\mu \delta x^\tau) - \delta x^\tau (-\Gamma_{\tau\rho}^\mu g^{\rho\nu} - \Gamma_{\tau\sigma}^\nu g^{\mu\sigma} \cdot \\
 &\cdot g^{\mu\rho}) = g^{\nu\rho} D_\rho \delta x^\mu + g^{\mu\sigma} D_\sigma \delta x^\nu = \\
 &= \delta x^{\mu;\nu} + \delta x^{\nu;\mu}
 \end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta S = \int \delta \mathcal{L}(g^{\mu\nu}(x^\lambda), \partial_\rho g^{\mu\nu}(x^\lambda)) d^D x = \\
 &\stackrel{\leftarrow}{=} \int d^D x \delta \mathcal{L} = \int d^D x \delta p^{ab} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta p^{ab}} \quad \leftarrow \text{in iv) motiviert} \\
 &= \int \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \delta g^{\mu\nu} d^D x := \int \frac{\Theta^{\mu\nu}}{2} \delta g^{\mu\nu} d^D x =
 \end{aligned}$$

Entkopplung des $S_{g^{\mu\nu}}$ wegen Abhängigkeit voneinander nicht möglich, stattdessen Substitution

$$\begin{aligned}
 &= \int \frac{\Theta^{\mu\nu}}{2} (\delta x^{\mu;\nu} + \delta x^{\nu;\mu}) d^D x = \\
 &\stackrel{\leftarrow}{=} \int \Theta_{\mu\nu} \delta x^{\mu;\nu} d^D x = \quad \Theta_{\nu\mu} = \Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu}^{\mu} \\
 &= \int \Theta_{\mu\nu} \frac{g^{\nu\lambda}}{\sqrt{-g}} \delta x^\mu ;_{,\lambda} \sqrt{-g} d^D x \quad \leftarrow \\
 &= \int \frac{\Theta_{\mu\nu}^{\lambda}}{\sqrt{-g}} \delta x^\mu ;_{,\lambda} \sqrt{-g} d^D x = \quad \leftarrow \text{Produktregel des kovarianten Differentiation} \\
 &= \int \left(\left(\frac{\Theta_{\mu\nu}^{\lambda}}{\sqrt{-g}} \delta x^\mu \right) ;_{,\lambda} - D_\lambda \left(\frac{\Theta_{\mu\nu}^{\lambda}}{\sqrt{-g}} \right) \delta x^\mu \right) \cdot \\
 &\cdot \sqrt{-g} d^D x \stackrel{\leftarrow}{=} \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \int \left(\frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\Theta_{\mu\nu}^{\lambda} \delta x^\mu \right) ;_{,\lambda} - \right. \\
 &- D_\lambda \left(\frac{\Theta^{\nu\lambda}}{\sqrt{-g}} \right) g_{\rho\mu} \delta x^\mu \left. \right) \sqrt{-g} d^D x = \\
 &\stackrel{\leftarrow}{=} \int \partial_\nu (\Theta_{\mu\nu}^{\lambda} \delta x^\mu) d^D x - \int (D_\nu \frac{\Theta^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}) \cdot \\
 &\cdot \delta x_\mu \sqrt{-g} d^D x
 \end{aligned}$$

Nun gilt (absolut Noether'sche Argumentationsweise)

$$\begin{aligned}
 \int \partial_\nu (\Theta_{\mu\nu}^{\lambda} \delta x^\mu) d^D x &= \oint \Theta_{\mu\nu}^{\lambda} \delta x^\mu d^{D-1} \mathcal{O}_\nu = \\
 &= 0 \text{ gemäß den Variationsvoraussetzungen. Also}
 \end{aligned}$$

$$0 = \int (D_\nu \frac{\Theta^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}) \delta x_\mu \sqrt{-g} d^D x$$

wobei jetzt die δx^μ unabhängig voneinander sind. Wegen der prinzipiell uneingeschränkten Wahlfreiheiten (siehe i)) folgt jenes kovariante Erhaltungssatz

$$D_\nu \frac{\Theta^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}} = 0,$$

das den symmetrischen Energie-Impuls-Tensor $\Theta^{\mu\nu}$ (hier dichteartig aufgefaßt) klassisch definiert. Des Noether'sche Weg wiederholt nun wie gehabt dieselbe Herleitung ohne Integral, indem links Rückgriff auf den ersten Ansatz genau das andere Term direkt annihiliert wird:

$$\frac{\Theta_{\mu\nu}}{2} Sg^{\mu\nu} = \partial_\nu (\Theta_\mu^\nu Sx^\mu) -$$

$$- (D_\nu \frac{\Theta^{\mu\nu}}{\sqrt{-g}}) Sx_\mu \sqrt{-g} = \partial_\nu (\Theta_\mu^\nu Sx^\mu),$$

wobei zu beachten ist, daß

$$\frac{\Theta_{\mu\nu}}{2} Sg^{\mu\nu} = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} Sg^{\mu\nu} \stackrel{\text{i.a.}}{\neq} \delta \mathcal{L},$$

weil jetzt gerade das Integral des Erstan-
satzes fehlt. Stattdessen bietet sich die
etwas beschränktere annähernde Möglich-
keit an, die rudimentäre integrallose
Pseudofunktionalableitung durch ex-
plizite Spezifikation abzustreifen:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\lambda g^{\mu\nu}} \right) Sg^{\mu\nu} = \frac{\Theta_{\mu\nu}}{2} Sg^{\mu\nu} =$$

$$= \partial_\nu (\Theta_\mu^\nu Sx^\mu),$$

einem Beziehungsgeflecht, das einerseits
trotz unbeschränkter allgemeinerrela-
tivistischer Gültigkeit ganz ohne kom-
plizierte Kovariante Ableitungen aus-

kommt und andererseits durch spe-
ziellrelativistische Simplifikation im
nächsten Abschnitt vi) direkt zu den
gewünschten Wechselbeziehungen führt.

vi) APPLIKATION DES ALLGEMEINRELA- TIVISTISCHEN DURCHGANGS FÜR SKALENTRANSFORMATIONEN

In Abschnitt ii) wurde gezeigt, daß die
Skalentransformation

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$$

$$\varphi^{ab}(x^\mu) \rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu) =$$

$$= e^{-D(\varphi^{ab})\epsilon} \varphi^{ab}(e^{-\epsilon} x^\mu)$$

für $m=0$ aus der reinen Koordinatenän-
derung (vorherige oder andere φ^{ab})

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu = e^{-\epsilon} x^\mu$$

$$\varphi^{ab}(x^\mu) \rightarrow \varphi^{ab}(\tilde{x}^\mu) = \varphi^{ab}(e^{-\epsilon} x^\mu)$$

hervorgeht. Weiset man diese infinitesimal
aus, so ist sie gemäß Abschnitt v) über-

föhrbar in die rein metrische allgemein-
relativistische Transformation

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu$$

$$\varphi^{ab}(x^\mu) = g^{\mu\nu}(x^\mu) \rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(\tilde{x}^\mu) =$$

$$= \tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}^\mu) = g^{\mu\nu}(x^\mu) + Sg^{\mu\nu}(x^\mu).$$

Die Vorbereitungen dazu in Abschnitt iii)
zeigten, daß diese zweite Uminterpretation
aus zulässig ist, wenn die Ortskoordinaten
ausschließlich in kontravariante
Form vorkommen. Denn einerseits

$$\tilde{x}^\mu = e^{-\epsilon} x^\mu \Rightarrow \tilde{x}_\mu = e^{-\epsilon} x_\mu,$$

andererseits aber transformieren sich
ko- und kontravariante Ereignisvektoren
in der Allgemeinen Relativitätstheorie
invers.

Gerade dieses Dilemma darf
aber getrost ignoriert werden, da in
Anbetracht des strukturellen Vorausset-
zungen für die Lagrange-Dichten das

einzige explizite Auftreten des Ortsko-
ordinaten in kontravariante Form
bei den Hypervolumendifferentialelemen-
ten zu verzeichnen ist.

Dennoch darf nicht übersehen werden,
daß die erzeugenden allgemeinrelati-
vistischen Variationsverfahren sehr
künstlich annähernd sind mit symphy-
sikalischen Verallgemeinerungen ar-
beiten. Genauer gilt:

1) klassische allgemeinrelativistische metrisch äquivalente Skalentransformationen

$$\left. \begin{aligned} X^\mu &\rightarrow \tilde{X}^\mu = X^\mu e^{-\epsilon} \\ x &\rightarrow \tilde{x} \\ X_\mu &\rightarrow \tilde{X}_\mu = X_\mu e^{+\epsilon} \\ &\Rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(X^\alpha) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(X^\alpha) = e^{-2\epsilon} g_{\mu\nu}(X^\alpha) \\ &\Rightarrow \tilde{X}_\mu \rightarrow \tilde{X}_\mu = X_\mu e^{+\epsilon} \\ &\Rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(X^\alpha) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(X^\alpha) = e^{+2\epsilon} g_{\mu\nu}(X^\alpha) \end{aligned} \right\} \hat{=}$$

dann dann gilt

$$\text{const} = \langle x, x \rangle = X_\mu X^\mu = \tilde{X}_\mu \tilde{X}^\mu = \tilde{X}_\mu g_{\mu\nu}(X^\alpha) \tilde{X}^\nu = \tilde{X}_\mu \tilde{g}_{\mu\nu}(X^\alpha) \tilde{X}^\nu$$

entspricht dem unveränderlichen Realsatz α) zum Selbst β) von Abschnitt iii)

2) modifizierbare Version dazu

$$X^\mu \rightarrow \tilde{X}^\mu \\ \sqrt{-g(X^\mu)} \rightarrow \sqrt{-\tilde{g}(\tilde{X}^\mu)} = \left| \det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right| = \frac{1}{\sqrt{-g(\tilde{X}^\mu)}}$$

wobei für das implizite x gilt $\tilde{X}^\mu = X^\mu e^{-\epsilon}$

$$\Rightarrow g^{\mu\nu}(X^\alpha) \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu}(X^\alpha) = e^{+2\epsilon} g^{\mu\nu}(X^\alpha)$$

$$\Rightarrow g_{\mu\nu}(X^\alpha) \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu}(X^\alpha) = e^{-2\epsilon} g_{\mu\nu}(X^\alpha)$$

Bei liegt der Ansatz β) zum Selbst von Abschnitt iii) vor, der gerade benötigt wird, dabei allerdings die $\langle x, x \rangle$ -Invarianz durch Mehrdeutigkeiten infolge der Formalkonstitution gesetzt:

$$X_\mu X^\mu = X^\mu g_{\mu\nu}(X^\alpha) X^\nu \neq X^\mu \tilde{g}_{\mu\nu}(X^\alpha) X^\nu \neq X_\mu \tilde{g}^{\mu\nu}(X^\alpha) X_\nu$$

a) speziellrelativistisch motivierte Skalentransformation

$$X^\mu \rightarrow \tilde{X}^\mu$$

$$q^{ab}(X^\mu) \rightarrow \tilde{q}^{ab}(\tilde{X}^\mu) = e^{-D(q^{ab})} q^{ab}(e^{-\epsilon} X^\mu)$$

so daß $\tilde{q}^{ab}(\tilde{X}^\mu) = q^{ab}(X^\mu)$ falls z.B. $q^{ab}(X^\mu) = |x|^{-D(q^{ab})}$:

Trivialisierbarkeit infolge des Tatsache, daß sich $\tilde{\text{Bild}}$ und Urbild invers transformieren

b) allgemeinrelativistisch motivierte Skalentransformation

$$X^\mu \rightarrow \tilde{X}^\mu$$

$$g^{\mu\nu}(X^\alpha) \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu}(X^\alpha) = e^{+2\epsilon} g^{\mu\nu}(X^\alpha)$$

so daß $\sqrt{-\tilde{g}(\tilde{X}^\alpha)} \tilde{g}^{\mu\nu}(X^\alpha) \tilde{g}^{\rho\sigma}(X^\alpha) = \sqrt{-g(X^\alpha)} g^{\mu\nu}(X^\alpha) g^{\rho\sigma}(X^\alpha)$

falls z.B. $D=4$:

Trivialisierbarkeit infolge des Tatsache, daß die Spezialrelati-

Für den doppelten Sprung von der speziellrelativistischen Skalentransformation zur allgemeinrelativistischen metrisch orientierten Darstellung gibt es folgende Reinterpretationskriterien, die zwar keine Identität wohl aber einen klaren Analogietransfer transparent werden lassen (ACHTUNG: die Variation nach der Metrik liefert für den fermionischen Anteil von $\Theta_{\mu\nu}$ keinen realistischen Ausdruck. Dennoch liefert dieses problematische $\Theta_{\mu\nu}$ -Ansatz die korrekte realphysikalische Spur Θ^μ_μ . Auf dieses Pseudo-Paradoxon wird aus Gründen der Übersichtlichkeit hier an keiner weiteren Stelle hingewiesen und statt dessen so getan, als ob $\Theta_{\mu\nu}$ durchweg zuverlässig sei. Sämtliche Details hierzu finden sich ausgelagert in Kapitel 3.3 \square)

virtuell motivierte Skalentransformation metrisch sinnvoll ist, wobei D die Rolle von $\text{Tr} D(\varphi^{ab})$ übernimmt und die $g^{\mu\nu}$ als die eigentlich variablen Bestandteile des Feldes interpretiert werden (Mechanismus eines Abstreifens in- neres Eigenschaften auf die Vorles (triviale Hülle)).

Dann

$$\sqrt{-\tilde{g}(x^{\mu})} = e^{-D(x^{\mu})} = \text{Tr} e^{-D(\varphi^{ab})}$$

und die Anzahl des Indizes des metrischen Koeffizienten kann links Anmerkung von Interpretationsgrenzen folgen aus- sen auf die Anzahl des Felder abgeplant werden:

Benutze \sqrt{g} minkowski = 1, um die eigentlich gegebene QED-Lan- grange - Dichte

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

Falls $\Theta_{\mu}^{\mu} = \alpha \bar{\psi} (i \not{D}) \psi - \beta(\omega) \bar{\psi} \psi + \gamma F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \Omega(D) \mathcal{L}$ dann soll gelten

$$\alpha - \beta(\omega) = D(\bar{\psi} \psi) - D(\psi \bar{\psi}) = 0, \quad \beta(\omega) = 1,$$

da m in der klassischen Darstellung kein Feld ist und sich dabei nicht in Form transformiert und andererseits $\Omega(D) \mathcal{L} \propto \text{trace}(g_{\mu\nu} \mathcal{L}(\omega=1)_{\text{mess}})$ vollständig ist (er wird sich später zeigen, dass Θ_{μ}^{μ} tatsächlich die gewünschte Form annimmt und es problematischer die $m \neq 0$ -Distorsion bereitigt).

2) Die Anpassung des Begriffs $\bar{\psi} i \not{D} \psi$ (vorles würde über $\bar{\psi} \psi$ gesprochen) an die erforderliche kanonische Mas- sendifferenzialität kann weniger künstlich erfolgen, indem \not{D} mithilfe einer zwischenprodukten g -Matrizen - An-

in die \sqrt{g} als Kofaktor vorkommende allgemeinrelativistische Form

$$\mathcal{L} = [\bar{\psi} (\frac{1}{2} i g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} \partial_{\xi} \partial_{\eta} \psi - \sqrt{g} m) \psi - \frac{1}{4} g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} F_{\xi\eta} \sqrt{g}]$$

zu bringen. Hier zu sind 3 Kommentare notwendig:

- 1) Es würde festgelegt, daß die allgemeinrelativistische Interpretation, welche klassisch $\omega=1$ erfordert (ω steht im Exponenten des zwischenprodukten Faktors $\sqrt{g}^{\omega-1}$), nur für $m=0$ zulässig ist. Diese Einschränkung läßt sich aufheben, wenn man den für die hinterher erfolgende speziellrelativistische Auswertung \sqrt{g} minkowski = 1 imes- selbigen Wert ω des QED-motivierten Skalentransforma- tion anpaßt, indem man verlangt:

Skalentransformation in die zu $F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} F_{\xi\eta} F_{\rho\sigma}$ analoge Gestalt gebracht wird:

$$\frac{1}{2} i g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} \partial_{\xi} \partial_{\eta} \psi = i g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} \partial_{\xi} \partial_{\eta} \psi = i g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} \partial_{\xi} \partial_{\eta} \psi = i g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} \partial_{\xi} \partial_{\eta} \psi = i g^{\xi\eta} g_{\rho\sigma} \partial_{\xi} \partial_{\eta} \psi$$

3) Das Dualismus des veränderten Transformations

a) $g^{\mu\nu}(x^{\mu}) \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu}(x^{\mu}) = e^{2\phi} g^{\mu\nu}(x^{\mu})$

sind die benutzten Transformation

b) $g^{\mu\nu}(x^{\mu}) \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu}(x^{\mu}) = e^{+2\phi} g^{\mu\nu}(x^{\mu})$

erlaubt wegen $\tilde{g}^{\mu\nu}(x^{\mu}) \neq \tilde{g}^{\mu\nu}(x^{\mu})$ noch keinen direkten Über- gang zu

c) $g^{\mu\nu}$ minkowski = const = $g_{\mu\nu}(g^{\mu\nu})_{\text{minkowski}} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = e^{2\phi} g^{\mu\nu}$ minkowski

und wäre anderenfalls selbst dann noch überaus rätselhaft, weil
 $\Theta_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}$ mit $Sg^{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} = c^{zsc} g^{\mu\nu} - g^{\mu\nu} = 2g^{\mu\nu} \delta c$
 hier für $g^{\mu\nu} \neq 0$ ableitet ist, was $g^{\mu\nu}$ Minowski; hier für $\mu = \nu$
 erfüllt. Des Übergang zur speziellrelativistischen Quanten-
 elektrodynamik $\partial_\alpha g^{\mu\nu} = 0 \quad \forall \alpha, \mu, \nu$ darf also erst nach
 vollendetes Ausfertigung von $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\alpha \frac{\partial}{\partial g^{\alpha\mu\nu}}$ erfol-
 gen. Da δ jedoch Ansätze des Form $\partial_\alpha g^{\mu\nu}$ konstantes g
 nicht enthält, folgt

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} \quad \text{obwohl hier noch } \frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} \neq \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}$$

Erst nach Vollendung dieser Operation darf $\sqrt{-g} = 1$ gesetzt
 werden (wäre nicht einmal bei $\frac{\delta}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}}$ vorher erlaubt).

$$\begin{aligned} \cdot g^{\alpha\gamma} \} F_{\alpha\beta} F_{\gamma\delta}] \sqrt{-g} &= [\psi (i (S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta} S_{\rho}^{\gamma} S_{\sigma}^{\delta} + S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta} S_{\rho}^{\gamma} S_{\sigma}^{\delta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} S_{\rho\sigma}^{\alpha\gamma} \\ \cdot g^{\alpha\gamma} \} D_{\beta} \delta_{\gamma}^{\alpha} + \frac{\omega}{2} \sqrt{-g} \omega^{-1} g_{\mu\nu} m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} + F_{\beta\mu} F_{\gamma\nu} g^{\alpha\delta} - \\ - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\gamma}) \sqrt{-g} &= [\psi (i (D_{\mu} S_{\nu}^{\beta} \delta_{\rho}^{\gamma} + D_{\gamma} S_{\nu}^{\beta} \delta_{\rho}^{\mu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} D_{\rho} \delta^{\alpha\gamma}) + \\ + \frac{\omega}{2} \sqrt{-g} \omega^{-1} g_{\mu\nu} m) \psi - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} + F_{\beta\mu} F_{\alpha\gamma} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\gamma}) \sqrt{-g} &= \\ \stackrel{F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}}{=} [\psi (i (D_{\mu} \delta_{\nu}^{\beta} + D_{\nu} \delta_{\mu}^{\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathcal{D}) + \frac{\omega}{2} \sqrt{-g} \omega^{-1} g_{\mu\nu} m) \psi - \frac{1}{4} (2 F_{\mu\nu} & \\ \cdot F_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\gamma}) \sqrt{-g} &= \stackrel{\mathcal{D} = \nabla_{\mu} + i m \gamma^{\mu}}{=} [\psi (i (D_{\mu} \delta_{\nu}^{\beta} + D_{\nu} \delta_{\mu}^{\beta}) \psi + \frac{\omega-1}{2} \\ \cdot \sqrt{-g} \omega^{-1} g_{\mu\nu} m \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \psi (i \mathcal{D} - m) \psi - \frac{1}{2} F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} + \frac{1}{8} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\gamma} & \\ \cdot \sqrt{-g} & \stackrel{\text{siehe oben}}{=} 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} = (2 \bar{\psi} i (D_{\mu} \delta_{\nu}^{\beta} + D_{\nu} \delta_{\mu}^{\beta}) \psi + (\omega-1) \sqrt{-g} \omega^{-1} g_{\mu\nu} \\ \Rightarrow \Theta_{\mu\nu} &= 2 \bar{\psi} i (D_{\mu} \delta_{\nu}^{\beta} + D_{\nu} \delta_{\mu}^{\beta}) \psi - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \\ \text{wobei } \mathcal{L} & \text{ nach allgemeinrelativistisch aufgeföhrt vor} \end{aligned}$$

Also $\Theta_{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}} \stackrel{\text{konstante } \delta\text{-Distribution}}{=} 2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}$
 betrachte: aus $S \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} S g^{\mu\nu}$ (siehe Appendix) folgt
 $\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \sqrt{-g}) = S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta} g^{\gamma\delta} \sqrt{-g} + g^{\alpha\beta} S_{\mu}^{\gamma} S_{\nu}^{\delta} \sqrt{-g} +$
 $+ g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} (-\frac{1}{2}) \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial g^{\mu\nu}} = (S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta} g^{\gamma\delta} + S_{\mu}^{\gamma} S_{\nu}^{\delta} g^{\alpha\beta} -$
 $-\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} g_{\alpha\beta} S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta}) \sqrt{-g} = (S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta} g^{\gamma\delta} + S_{\mu}^{\gamma} S_{\nu}^{\delta} g^{\alpha\beta} -$
 $-\frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta}) \sqrt{-g}$
 neben $\frac{\partial}{\partial g^{\mu\nu}} \sqrt{-g} = -\frac{\omega}{2} g_{\mu\nu} \sqrt{-g}$ und $\{ \delta_{\mu}^{\alpha} \delta_{\nu}^{\beta} \} = 2 g_{\mu\nu}$ so daß
 $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} = [\bar{\psi} (\frac{1}{2} i \{ S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta} g^{\gamma\delta} + S_{\mu}^{\gamma} S_{\nu}^{\delta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} \} D_{\rho} \delta_{\sigma}^{\alpha\gamma} (2 g_{\rho\sigma}) -$
 $- m (-\frac{\omega}{2} \sqrt{-g} \omega^{-1} g_{\mu\nu})) \psi - \frac{1}{4} \{ S_{\mu}^{\alpha} S_{\nu}^{\beta} g^{\gamma\delta} + S_{\mu}^{\gamma} S_{\nu}^{\delta} g^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \}$

Nach dieses abschließenden Bemerkung Ableit des Rückbeleg zur
 Hinweisgröße - Wert des Quantenelektrodynamik nichts mehr im
 Wege:
 $\sqrt{-g} = 1$
 $\Rightarrow \Theta_{\mu}^{\mu} = 2 \bar{\psi} i (D_{\mu} \delta^{\mu} + D_{\mu} \delta^{\mu}) \psi + (\omega-1) S_{\mu}^{\alpha} m \psi - F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - S_{\mu}^{\alpha} \mathcal{L} =$
 $= 4 \bar{\psi} (i \mathcal{D}) \psi + (\omega-1) D_{\mu} \bar{\psi} \psi - F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - D \mathcal{L} = \alpha \bar{\psi} (i \mathcal{D}) \psi - \beta(\omega)$
 $\cdot \bar{\psi} m \psi + \gamma F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \Omega(D) \mathcal{L}$
 also folgt für die Skalendimension $\alpha - \beta(\omega) = 1$ durch Koeffizienten-
 Vergleich
 $1 = \alpha - \beta(\omega) = 4 - [(\omega-1) D] \Rightarrow (\omega-1) D = -3 \Rightarrow \omega = 1 - \frac{3}{D}$
 Dieses Ergebnis vervollständigt nun die speziellrelativistisch
 entsprechende Darstellung für den symmetrischen Energie - Im-
 puls - Tensor

$$\Theta^{\mu\nu} = 2\bar{\psi}(i\partial_\mu\partial_\nu + D_\mu\partial_\nu)\psi - \frac{3}{2}g_{\mu\nu}m\bar{\psi}\psi - F_{\mu\alpha}F_{\nu}^{\alpha} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}$$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

Nach Ableitung des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors aus dem Lagrange-Dichte kann auf diese die operatorwertige Divac-Gleichung losgelöst werden $(i\cancel{D} - m)\psi = 0$

$$\Rightarrow \Theta^{\mu\nu} = 4\bar{\psi}(i\cancel{D})\psi - 3m\bar{\psi}\psi - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D\mathcal{L} = 4\bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi + m\bar{\psi}\psi - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D\mathcal{L} = 0 + m\bar{\psi}\psi - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - D(0 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

\Rightarrow die zentrale multiplikatoren Darstellung

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{D-4}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + m\bar{\psi}\psi$$

In Abschnitt v) würde gezeigt, daß generell allgemeinrelativistisch gilt

$$\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} - \partial_\lambda\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\lambda g^{\mu\nu}}\right)Sg^{\mu\nu} = \frac{\Theta^{\mu\nu}}{2}Sg^{\mu\nu} = \partial_\nu(\Theta^{\nu\mu}Sx^\mu)$$

Nun ist nicht nur $\Theta^{\mu\nu}$ explizit bekannt (vgl. hierzu die Verlegenheit in Abschnitt i) bezüglich dieses Punktes), sondern nun darf gegenüber Abschnitt v) spezifiziert werden

$$Sx^\mu = x^\mu - \delta\sigma = x^\mu e^{-\delta\sigma} - x^\mu \stackrel{\text{Taylor}}{\approx} x^\mu(1 - \delta\sigma + \mathcal{O}(\delta\sigma^2)) - x^\mu = -\delta\sigma x^\mu$$

und $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\lambda g^{\mu\nu}} = 0$

so daß

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}}Sg^{\mu\nu} = \frac{\Theta^{\mu\nu}}{2}Sg^{\mu\nu} = -\delta\sigma\partial_\nu(\Theta^{\nu\mu}x^\mu)$$

In Abschnitt ii) wurde vorgerechnet, daß (was allgemeinrelativistisch im allgemeinen streng verboten ist) auch

$$\partial_\mu(\Theta^{\mu\nu}x_\nu) = \Theta^{\mu\mu}$$

gilt.

Dies impliziert

$$\delta\mathcal{L} = -\delta\sigma\partial_\mu(\Theta^{\mu\nu}x^\nu) = \Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\mu}$$

$$= -\delta\sigma\partial_\mu(\Theta^{\mu\nu}g_{\nu\lambda}x^\lambda) = -\delta\sigma\partial_\mu(\Theta^{\mu\nu}x_\nu) = -\Theta^{\mu\mu}\delta\sigma$$

In Abschnitt ii) konnte dieses Zusammenhang nur mithilfe des isotopischen Postulats

$$\Theta^{\mu\nu} = \mathcal{L}g^{\mu\nu}$$

nachgewiesen werden.

Es stellt sich nun die Frage, was über den sehr langen und umständlichen Umweg über die Allgemeine Relativitätstheorie eigentlich besser gemacht würde.

Zur Beantwortung dieser Frage werden die speziellrelativistische Version des La-

grange-Dichte umbenannt in Λ :

$$\Lambda = \bar{\psi}(i\cancel{D} - m)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

und folgende zwei alternative allgemeinrelativistische Umdeutungen unterwacht, die speziellrelativistisch automatisch wieder exakt zu Λ kollabieren

- $\mathcal{L} = \frac{1}{D}\Lambda g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}$
denn $g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\alpha = D$
- $\mathcal{L} = \Lambda\sqrt{-g}$ (ohne weiteres Anfügen von metrischen Koeffizienten)
denn $\sqrt{-g} \rightarrow 1$

Zu Fall 1):

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\sigma}\Theta_{\sigma\sigma} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\sigma} \cdot 2\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta g^{\sigma\sigma}} = 2g^{\mu\sigma}g^{\nu\sigma}\frac{\delta}{\delta g^{\sigma\sigma}}\left(\frac{1}{D}g_{\alpha\beta}g^{\alpha\beta}\right) =$$

$$= \frac{2}{D} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Lambda g_{\rho\sigma} = \frac{2}{D} g^{\mu\rho} \delta_{\rho}^{\nu} \Lambda =$$

$$= \frac{2}{D} g^{\mu\nu} \Lambda$$

speziellrelativistisch
 $\Lambda \rightarrow \mathcal{L}$

so daß

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{2}{D} \mathcal{L} g^{\mu\nu} = \text{const} \cdot \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

Zu Situation 2):

Wieders einmal wird auf die im Anhang begründete Formel

$$\delta\sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

vorgriffen.

$$\Theta^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \Theta_{\rho\sigma} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \cdot 2 \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\rho\sigma}} =$$

$$= 2 g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \frac{\delta}{\delta g^{\rho\sigma}} (\Lambda \sqrt{-g}) =$$

$$= 2 \Lambda g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} \left(-\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\alpha\beta} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g^{\rho\sigma}} \right) =$$

$$= -\Lambda \sqrt{-g} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g_{\alpha\beta} \delta_{\rho}^{\alpha} \delta_{\sigma}^{\beta} =$$

$$= -\mathcal{L} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} g_{\rho\sigma} = -\mathcal{L} g^{\mu\rho} \delta_{\rho}^{\nu} = -\mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

also

$$\Theta^{\mu\nu} = -\mathcal{L} g^{\mu\nu} = \text{const} \cdot \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

In beiden Fällen erhält man also

$$\Theta^{\mu\nu} = \text{const} \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

mit $\text{const} \neq 1$

Und dies ist daher die Antwort:

Durch die allgemeinrelativistische Uminterpretation entsteht im Prinzip eine umgekehrte Wahlfreiheit, die gezielt genutzt werden kann, um den naiven Vorstoß

$$\Theta^{\mu\nu} = \mathcal{L} g^{\mu\nu}$$

zu einem Dilatationsstrom, das an die Änderung der Lagrange-Dichte und die Spur des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors direkt gekoppelt ist,

beliebig nahe strukturell zu simulieren. Eine perfekte Identität scheidet im D=4 heraus aus, gerade weil die echte Uminterpretation eines Skalentransformation einen ganz bestimmten Prototyp favorisiert, das die gewünschten Ergebnisse erzeugt, ohne mit der erfolglosen Version in ii) identisch zu sein. Was sich hier auszahlt, ist die hohe Flexibilität des allgemeinrelativistischen mathematischen Apparates, das nicht nur die passenden Interpretationsvarianten anbietet sondern auch viel geschmeidiger mit symmetrischen Tensoren umgeht, worin die letztlich auf Differentialformenkalzül basierende Spezielle Relativitätstheorie viel schlechter geeignet ist, weil ihre

Tensoren bevorzugt antisymmetrisch strukturiert sind (vgl. hierzu die Diskussion gegen Ende des Abschnittes i)).

Die gewünschten Wechselbeziehungen sind also über einen mühseligen Umweg gefunden worden und lauten

$$\delta \mathcal{L} = -\delta \sigma \partial_{\mu} (\Theta^{\mu\nu} x_{\nu}) = -\Theta_{\mu}^{\mu} \delta \sigma$$

$$\text{wobei } \partial_{\nu} \Theta^{\mu\nu} = 0$$

für

$$\Theta^{\mu\nu} = 2 \bar{\psi} i (\not{D}^{\mu} \not{g}^{\nu} + \not{D}^{\nu} \not{g}^{\mu}) \psi -$$

$$- \frac{3}{D} g^{\mu\nu} m \bar{\psi} \psi - F_{\mu\alpha} F_{\nu}^{\alpha} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}$$

wobei

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i \not{D} - m) \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

so daß die Anwendung der Dirac-Gleichung auf

$$\Theta_{\mu}^{\mu} = \frac{D-4}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m \bar{\psi} \psi$$

führt, so daß klassisch für $D=4$ und $m=0$ die Spürs Θ_μ^{μ} verschwindet und das Dilatationsstrom erhalten ist

$$\left. \begin{matrix} D=4 \\ m=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \partial_\mu (\Theta^{\mu\nu} x_\nu) = \Theta_\mu^{\mu} = 0$$

Dies wiederum ist gleichbedeutend mit der Aussage, daß die Lagrange-Dichte klassisch gesehen invariant unter Skalentransformationen ist:

$$\left. \begin{matrix} D=4 \\ m=0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \delta L = -\Theta_\mu^{\mu} \delta \sigma = 0$$

Die Skalentransformation ist dabei gegeben durch

$$\begin{aligned} X^\mu &\rightarrow X^\mu \\ \varphi^{ab}(X^\mu) &\rightarrow \tilde{\varphi}^{ab}(X^\mu) = e^{-D(\varphi^{ab})\sigma} \cdot \varphi^{ab}(e^{-\sigma} X^\mu) \end{aligned}$$

wobei das letztes unumgängliche allgemeinrelativistische Dischgang rest-

los besprochen werden kann und man (aus oben erläuterten Gründen) so tun kann, als wäre nie die teilchenphysikalische Auffassung

$$\tilde{X}^\mu = X^\mu e^{-\sigma} \Leftrightarrow \tilde{X}_\mu = X_\mu e^{-\sigma}$$

verletzt worden.

ENDE !!

Des Weiteren empfiehlt es sich, für $D=4$ noch folgende Betrachtung anzustellen.

Es ist klar, daß

$$E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta\mu\nu} \neq 0 \text{ falls } \begin{cases} \alpha=\mu \wedge \beta=\nu \\ \alpha=\nu \wedge \beta=\mu \end{cases}$$

Ohne (!) Summenkonvention gilt

$$\begin{aligned} E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta\alpha\beta} &= -E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta\gamma\delta} = \\ &= E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\alpha\beta\gamma\delta} = -E^{\alpha\beta\gamma\delta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} = -1 = \\ &= -E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta\beta\alpha} \end{aligned}$$

so daß MIT Summenkonvention (wenn

nicht ausdrücklich verboten, automatisch relevant):

$$(-1) \rightarrow (-1) \times \Gamma (\# \text{gleiche Indizes} + 1)$$

$$\Rightarrow E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta\mu\nu} = (-S_\mu^\alpha S_\nu^\beta + S_\nu^\alpha S_\mu^\beta) \cdot 2!$$

$$\Rightarrow 0 = \oint d^3x_\alpha (E^{\alpha\beta\gamma\delta} A_\beta E_{\gamma\delta\mu\nu} \partial^\mu A^\nu) =$$

$$= \int d^4x \partial_\alpha (E^{\alpha\beta\gamma\delta} A_\beta E_{\gamma\delta\mu\nu} \partial^\mu A^\nu) =$$

$$= \int d^4x [E^{\alpha\beta\gamma\delta} \partial_\alpha A_\beta E_{\gamma\delta\mu\nu} \partial^\mu A^\nu +$$

$$+ E^{\alpha\beta\gamma\delta} E_{\gamma\delta\mu\nu} A_\beta \partial_\alpha \partial^\mu A^\nu] =$$

$$= \int d^4x \left[\left(\frac{1}{2ie} E^{\alpha\beta\gamma\delta} [D_\alpha, D_\beta] \right) \cdot \right.$$

$$\left. \left(\frac{1}{2ie} E_{\gamma\delta\mu\nu} [D^\mu, D^\nu] \right) + \right.$$

$$+ 2! \cdot (-S_\mu^\alpha S_\nu^\beta + S_\nu^\alpha S_\mu^\beta) A_\beta \partial_\alpha \partial^\mu A^\nu] =$$

$$= \int d^4x [F^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} - 2A_\beta \partial_\alpha \partial^\alpha A^\beta +$$

$$+ 2A_\beta \partial_\alpha \partial^\beta A^\alpha] \stackrel{g_{\mu\nu} = \text{const}}{=} \int d^4x [2(E^2 - B^2) - 2A_\beta \partial^2 g^{\beta\gamma} A_\gamma +$$

$$+ 2A_\beta \partial^\alpha \partial^\beta g_{\alpha\gamma} A^\gamma] \stackrel{\text{Satz von Schwarz}}{=} \int d^4x \partial_\alpha \partial^\alpha A^\alpha$$

$$= \int d^4x [-F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2A_\mu \partial^2 g^{\mu\nu} A_\nu + 2A_\mu \partial^\mu \partial^\nu A_\nu]$$

als 4-dimensionales Analogon zu der magnetostatischen Entwicklung

$$\int B^2 dV = \int d^3x (\text{rot } \vec{A})^2 =$$

$$= \int d^3x \vec{A} \text{ rot rot } \vec{A} + \int \det(d^2 \vec{\sigma}, \vec{A}, \vec{B}) =$$

$$= \int d^3x A_m (\partial^m \partial^n - \nabla^2 \delta^{mn}) A_n + 0$$

$$\Rightarrow \int d^4x [-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] =$$

$$= \frac{1}{2} \int d^4x A_\mu(x) (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x)$$

Von einem allgemeineren strukturellen Standpunkt aus interessiert vor allem die Wirkung von $(\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu)$ auf das Standardelement e^{ikx} der vierdimensionalen Fouriers Transformation, so daß man sagen kann, daß das kinetische Lagrange-Term

$$-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

die Impulsraumstrukturs

$$k^2 g^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu$$

erzeugt, was auf den ersten Blick nämlich keineswegs ersichtlich ist.

Das Standardrenormalisierungsschema der Quantenelektrodynamik ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = \\ &= Z_2 \bar{\psi}_r (i\not{\partial} - m) \psi_r - \\ &\quad - e Z_2 \sqrt{Z_3} \bar{\psi}_r \gamma^\mu \psi_r A_\mu \end{aligned}$$

wobei $\psi = \sqrt{Z_2} \psi_r$
 $A_\mu = \sqrt{Z_3} A_{\mu r}$

$$\Rightarrow e Z_2 \sqrt{Z_3} := e_r Z_1$$

(r steht für die renormierten Größen, wobei die Renormierung bei den Kopplungskonstanten den Übergang

von nackter Masse m und nackter Elementarladung e zu den entsprechenden physikalisch meßbaren Größen m_r und e_r bedeuete).

Dann läßt sich die Lagrange-Dichte in ihre eigene renormalisierbare Imitation und die Gegentermkorrektur aufspalten:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_r + \mathcal{L}_{\text{counterterms}}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r &= \bar{\psi}_r (i\not{\partial} - m_r) \psi_r - \\ &\quad - e_r \bar{\psi}_r \gamma^\mu \psi_r A_{\mu r} - \frac{1}{4} (F_r^{\mu\nu})^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{counterterms}} \equiv \mathcal{L}_c &= \bar{\psi}_r (i\not{\partial}_2 \not{\partial} - m) \psi_r - \\ &\quad - e_r \delta_1 \bar{\psi}_r \gamma^\mu \psi_r A_{\mu r} - \frac{1}{4} \delta_3 (F_r^{\mu\nu})^2 \end{aligned}$$

wobei

$$\delta_1 = Z_1 - 1 = \frac{e}{e_r} Z_2 \sqrt{Z_3} - 1$$

$$\delta_2 = Z_2 - 1$$

$$\delta_3 = Z_3 - 1$$

$$\delta_m = Z_2 m - m_r,$$

wobei mithilfe der strukturrellen Einordnung

$$-\frac{1}{4} (F^{\mu\nu})^2 \rightarrow g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu$$

die Gegenterme unmittelbar zugeordnet werden können

$$\text{---}\otimes\text{---} \hat{=} -ie_r g^\mu \delta_1 \quad (\text{s. 2. Term von } \mathcal{L}_c)$$

$$\text{---}\otimes\text{---} \hat{=} i(\not{p} \delta_2 - \delta_m) \quad (\text{s. 1. Term von } \mathcal{L}_c)$$

$$\text{---}\otimes\text{---} \hat{=} -i(g^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu) \delta_3 \quad (\text{s. 3. Term von } \mathcal{L}_c \text{ mit Deutungshilfe})$$

Diese drei divergenten Diagramme spe-

zifizieren unter mehrfacher Anwendung der Callan-Symanzik-Gleichung in niedrigster Ordnung die β -Funktion

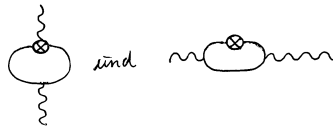
$$\beta(e_r) = M \frac{\partial}{\partial M} (-\delta_1 + e_r \delta_2 + \frac{e_r}{2} \delta_3)$$

Für masselose Fermionen ergibt sich unter Anwendung der Renormierungsskala M

$$e_r^{-1} \delta_1 = \delta_2 = -\frac{e_r^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2-D/2)}{M^{4-D}} + \text{endlich}$$

$$\delta_3 = -\frac{e_r^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{4\Gamma(2-D/2)}{3M^{4-D}} + \text{endlich},$$

so daß sich auf das Basis der Identifikationsmöglichkeit $Z_1 = Z_2$ die 1-Schleifen-Versionen



gegenseitig wegheben, mit der Konsequenz, daß nur das fermionenschleifenhaltige Photon-Selbstenergiendiagramm



relevant bleibt

$$\Rightarrow \beta(e_r) = M \frac{\partial}{\partial M} \left(-\frac{e_r^3}{(4\pi)^{D/2}} \frac{2\Gamma(2-D/2)}{3M^{4-D}} + \text{endlich} \right) =$$

$$= M \left(-\frac{e_r^3}{(4\pi)^{D/2}} \frac{2\Gamma(3-D/2)}{3(2-D/2)} (D-4) M^{D-5} + (D-4) \cdot \text{endlich} \right) =$$

$$= \frac{e_r^3}{(4\pi)^{D/2}} \frac{4\Gamma(3-D/2)}{3M^{4-D}} + (D-4) \cdot \text{endlich}$$

$$\Rightarrow \text{für } D \rightarrow 4 \quad \beta(e_r) = \frac{e_r^3}{(4\pi)^2} \frac{4\Gamma(1)}{3M^0} + 0 =$$

$$= \frac{e_r^3}{12\pi^2} \text{ in niedrigster Ordnung}$$

Während wirklich identisch nur die

Definition

$$\beta(e_r) \equiv \frac{M}{gM} \delta e_r$$

gilt.

Ist die Lagrange-Dichte lokal invariant unter Skalentransformationen, wie es z.B. für $m=0$ und $D=4$ gilt:

$$S_L = -\Theta_\mu^\mu \delta\sigma = -\left(\frac{D-4}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + m\bar{\psi}\psi\right) \delta\sigma \xrightarrow{D=4, m=0} 0,$$

so ist diese Invarianz nicht notwendigerweise unempfindlich gegenüber Quantenkorrekturen. Denn die Variation des Renormierungsskala

$$\frac{\delta M}{M} = \frac{\delta |p|}{|p|} = \frac{|p| e^{+\delta\sigma} - |p|}{|p|} \stackrel{\text{Taylor}}{=} \frac{1 + \delta\sigma + \mathcal{O}(\delta\sigma^2) - 1}{1} = \delta\sigma$$

weil invers dazu $\tilde{x}^\mu = x^\mu e^{-\sigma}$, beeinflusst die renormierte Darstellung der Kopplungskonstante

$$e = \frac{z_1}{z_2 \sqrt{z_3}} e_r = \frac{e_r}{\sqrt{z_3}}$$

so daß wegen

$$A_\mu = \sqrt{z_3} A_{r\mu}$$

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{ie} [\partial_\mu + ie A_\mu, \partial_\nu + ie A_\nu] =$$

$$= \frac{1}{i \frac{e_r}{\sqrt{z_3}}} \left[\partial_\mu + i \frac{e_r}{\sqrt{z_3}} \sqrt{z_3} A_{r\mu}, \partial_\nu + i \frac{e_r}{\sqrt{z_3}} \sqrt{z_3} A_{r\nu} \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{z_3}}{ie_r} [\partial_\mu + i e_r A_{r\mu}, \partial_\nu + i e_r A_{r\nu}] :=$$

$$=: \frac{\sqrt{z_3}}{ie_r} [\partial_\mu + i A_\mu^R, \partial_\nu + i A_\nu^R] =$$

$$= \frac{\sqrt{z_3}}{ie_r^2} [\partial_\mu + i e_r A_\mu^R, \partial_\nu + i e_r A_\nu^R] :=$$

$$=: \frac{\sqrt{z_3}}{e_r} F_{\mu\nu}^R,$$

wenn die renormierte Kopplungskonstante

in das Vektorpotential mit hineindefiniert wird.

\Rightarrow für $m=0$

$$S_L = -\Theta_\mu^\mu \delta\sigma = -\left(\frac{D-4}{4} \left(\frac{\sqrt{z_3}}{e_r} F_{\mu\nu}^R\right)^2\right) \delta\sigma =$$

$$= \frac{4-D}{4} (\delta_3 + 1) \frac{1}{e_r^2} (F_{\mu\nu}^R)^2 \delta\sigma =$$

$$= \frac{4-D}{4} \left(-\frac{e_r^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{4\Gamma(2-D/2)}{3M^{4-D}} + \text{endlich} \right) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{e_r^2} (F_{\mu\nu}^R)^2 \delta\sigma =$$

$$= \frac{D-4}{4} \frac{(F_{\mu\nu}^R)^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{4\Gamma(3-D/2)}{3M^{4-D}(2-D/2)} \delta\sigma$$

$$\rightarrow -\frac{2}{3} \frac{(F_{\mu\nu}^R)^2}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(3-D/2)}{M^{4-D}} \delta\sigma$$

Insbesondere für $D \rightarrow 4$ (dimensionelle Regularisierung) wird damit eine L'Hospital'sche Prozedur überflüssig ($0 \cdot \infty \rightarrow$ Evducht in direktem Vergleich), und man erhält direkt und problemlos

$$S_L = -\Theta_\mu^\mu \delta\sigma = -\frac{1}{24\pi^2} (F_{\mu\nu}^R)^2 \delta\sigma$$

in niedrigster Ordnung.

Diese Beziehung lässt sich auf anderem Wege überprüfen, wobei sogar ein Direktzusammenhang mit der β -Funktion hergestellt wird (Qualitätsvorteil des eingetragenen Beweises). Denn da für

$$\mathcal{L}^{\text{klass}} = 0$$

für $D=4$ und $m=0$, führt der einzige Korrektureinfluss von der renormalisierten elektromagnetischen Kopplungskonstante her:

$$\delta \mathcal{L} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_r} \delta e_r \text{ sgn. } \frac{\delta g^{\mu\nu}_{\text{benutzt}}}{\delta g^{\mu\nu}_{\text{physikalisch}}}$$

$$\left(\text{das wegen } \delta g^{\mu\nu}_{\text{benutzt}} = 2\delta\sigma g^{\mu\nu} = -\delta g^{\mu\nu}_{\text{phys}} \right)$$

negative Vorzeichen, $\tilde{g}^{\mu\nu}_{\text{benutzt}} = \tilde{g}^{\mu\nu}(x^?) = e^{2\sigma} g^{\mu\nu}(x^?)$, $\tilde{g}^{\mu\nu}_{\text{phys}} = \tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}^?) = e^{-2\sigma} g^{\mu\nu}(x^?)$, übersetzt die realphysikalische Variation in die korrespondierende variationskonfigurative Konstellation, auf die $\delta \mathcal{L}$ herleitungsmäßig bezogen werden muss; $\delta g^{\mu\nu}$ weil für $\mu \neq \nu$ spezialrelativistisches $\delta g^{\mu\nu} = 0$ zu Missverständnissen führt)

neben

$$\beta(e_r) \equiv \frac{1}{8\pi} \delta e_r \quad \text{exakt}$$

$$\beta(e_r) = \frac{e_r^3}{12\pi^2} \quad \text{in niedrigster Ordnung}$$

$$\frac{\delta M}{M} = \delta\sigma$$

$$\text{und } \mathcal{L}(m=0, D=4) = -\frac{1}{4e_r^2} (F_{\mu\nu}^R)^2$$

also

$$\begin{aligned} -\Theta_{\mu}^{\mu} \delta\sigma &= \delta \mathcal{L} \stackrel{\text{exakt}}{=} -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_r} \frac{\delta M}{M} \beta(e_r) = \\ &= -\delta\sigma \frac{e_r^3}{12\pi^2} \frac{\partial}{\partial e_r} \left(-\frac{1}{4e_r^2} (F_{\mu\nu}^R)^2 \right) = \\ &= -\delta\sigma \frac{e_r^3}{12\pi^2} \left(-\frac{1}{4} \right) (-2) \frac{1}{e_r^3} (F_{\mu\nu}^R)^2 = \\ &= -\frac{1}{24\pi^2} (F_{\mu\nu}^R)^2 \delta\sigma \quad \text{in niedrigster Ordnung} \end{aligned}$$

(und natürlich

$$\Theta_{\mu}^{\mu} = \beta(e_r) \partial_{e_r} \mathcal{L}^{(R)} \quad \text{exakt})$$

Also würde auf zwei unabhängigen Wegen gezeigt, daß die Anomalie des symmetrischen Energie-Impuls-Tensors in der renormierten QED gegeben ist durch

$$0 \neq \Theta_{\mu}^{\mu} = \frac{\beta(e_r)}{2e_r^3} (F_{\mu\nu}^R)^2 = \frac{(F_{\mu\nu}^R)^2}{24\pi^2}$$

$$(m=0, D \rightarrow 4),$$

wobei der exakte Zusammenhang zwischen der β -Funktion und der Spur Θ_{μ}^{μ} (systemübergreifendes $\delta \mathcal{L}$ -Kalkül) sowie deren D-dimensionale Form (welche für die dimensionelle Regularisierung des numerischen Alternativwegs erforderlich war) über die Allgemeine Relativitätstheorie hergestellt wurden.

APPENDIX

Analyse der Ableitungen von $\sqrt{-g}$ anhand der algebraischen Eigenwerttheorie:

Jede quadratische Matrix M ist über \mathbb{C} trigonalisierbar

$$M = A(D+N)A^{-1} \quad (\text{Basiswechsel})$$

$$D^k = \begin{pmatrix} \diagup & & 0 \\ & * & \\ 0 & & \diagdown \end{pmatrix} \quad (\text{Diagonalform})$$

$$N^k = \begin{pmatrix} \diagup & & 0 \\ * & & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \quad (\text{linke Dreiecksform})$$

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ wobei } [D, N]_- = 0, \\ N^{\text{max. Eigenwertvielfachheit}} = 0$$

$$\det(AB) = \det A \det B$$

$$\Rightarrow \det(ABA^{-1}) = \det B$$

$$\text{Spur}(AB) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ji} = \sum_{i,j} b_{ji} a_{ij} = \\ = \text{Spur}(BA)$$

$$\Rightarrow \text{Spur}(ABA^{-1}) = \text{Spur}(AA^{-1}B) = \\ = \text{Spur } B$$

Nun gilt

$$[ADA^{-1}, ANA^{-1}]_- = A[D, N]_- A^{-1} = 0$$

also

$$e^M = e^{ADA^{-1}} e^{ANA^{-1}} = \frac{\mathbb{1}}{0!} + \frac{ADA^{-1}}{1!} + \frac{ADA^{-1}ADA^{-1}}{2!} + \dots \\ \cdot \left(\frac{A \cdot \mathbb{1} \cdot A^{-1}}{0!} + \frac{ANA^{-1}}{1!} + \frac{ANA^{-1}ANA^{-1}}{2!} + \dots \right) = \\ = \sum_{k=0}^{\text{max. Eigenwertvielfachheit}} A e^D \frac{N^k}{k!} A^{-1} =$$

$$= A e^D \left(\mathbb{1} + \begin{pmatrix} \diagup & & 0 \\ * & & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} \right) A^{-1}$$

$$\Rightarrow \det e^M = \det A \det e^D (\det A)^{-1} \cdot$$

$$\det \begin{pmatrix} \diagup & & 0 \\ * & & \\ & & \diagdown \end{pmatrix} = \prod_i e^{d_{ii}}$$

andererseits

$$e^{\text{Spur } M} = e^{\text{Spur } D^k + \text{Spur } N^k} = \prod_i e^{d_{ii}}$$

$$\text{also } \det e^M = e^{\text{Spur } M}$$

$$\text{Sei } B := e^M$$

Dann lässt sich gegebenenfalls (Konvergenz und Umkehrbarkeit müssen situationspezifisch geklärt werden)

$$M = \log B := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (B-1)^k$$

konstruiert mit

$$\det B = e^{\text{trace } \log B}$$

Speziell für $\det B \neq 0 \neq \det B$ folgt in solchen Fällen dann

$$\delta \sqrt{\det B} = \frac{1}{2} \frac{\delta \det B}{\sqrt{\det B}} = \frac{1}{2} \sqrt{\det B} \frac{\delta \det B}{\det B} =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\det B} \delta \log \det B =$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\det B} \delta \log (\det B^{\pm 1})^{\pm 1} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\det B} \delta \log \det B^{\pm 1} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\det B} \delta \text{trace } \log B^{\pm 1} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\det B} \text{trace } \delta \log B^{\pm 1} =$$

$$= \pm \frac{1}{2} \sqrt{\det B} \text{trace} (B^{\mp 1} \delta B^{\pm 1})$$

Sei nun bezüglich des hier für geeigneten allgemeinrelativistischen Metrik

$$(B)_{\mu\nu} \equiv b_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$$

$$\Rightarrow (B^{-1})_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = g^{\nu\mu}$$

$$\text{mit } \det B = g$$

$$\Rightarrow \delta (-g)^{1/2} = \frac{1}{2} (-g)^{-1/2} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \\ = -\frac{1}{2} (-g)^{-1/2} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

Das sieht man auch folgendesmaßen

$$0 = \delta D = \delta S_{\mu}^{\mu} = \delta (g_{\mu\nu} g^{\mu\nu}) =$$

$$= g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

$$\text{also } g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu},$$

was den Vorzeichenunterschied anbelangt

aufßerdem:

$$\frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} = \delta \sqrt{-g} = \frac{1}{2} (-g)^{\frac{1}{2}-1} \delta(-g)$$

$$\Rightarrow \delta g = g g^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}$$

Fazit:

Wie bei den Beispielen sind hiermit bewiesen

Hauptformel

$$\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}$$

reingestrichelt sich im Gegensatz zur einfachen Standardform der Kettenregel des Exponenten der zusammengesetzten Funktion bei der Entwicklung nach den Einzelableitungen effektiv nicht (Pseudoparadoxon der allgemeinen relativistischen Metrik). Die Eigenwerttheorie wird künstlich über einen verschachtelten revidierten Logarithmus angekoppelt und verkörpert so etwas wie einen „Schellen Umweg“.

Appendix Nr. 2

MONTE – CARLO – PROGRAMM

Das für die Durchführung der $SU(2)$ -Monte-Carlo-Simulationen auf Hitzebad-Basis verwendete Unix-Programm. Es aktiviert zahlreiche untereinander wechselseitig verschachtelte Fortran-Prozesse und Unix-Sub-Exekutablen. Datenauslagerungen auf externe Magnetbänder können angesteuert werden:



Nov 24 2000 01:02

AUTOMATIC

Page 1

```
cp AUTOMATIC AUTOS.HERE
banner " "
banner " WAIT ..."
banner " "
echo \\!\\!\\!\\! >AUTOS1
cat AUTOS1 AUTOS1 AUTOS1 AUTOS1 AUTOS1 >AUTOS2
cat AUTOS1 AUTOS1 AUTOS1 AUTOS2 AUTOS2 AUTOS2 >AUTOS3
head -18 AUTOS.HERE >AUTOS1
cut -c1-75 AUTOS1 >AUTOS2
paste -d"\0" AUTOS3 AUTOS2 >AUTOS1
tail +19 AUTOS.HERE >AUTOS2
cat AUTOS1 AUTOS2 >automatic.f
head -125 AUTOS2 >AUTOS3
cut -c3-80 AUTOS3 >AUTO.EXE
chmod a+x AUTO.EXE
nice -19 AUTO.EXE
rm textedit.*
exit
* gunzip L.USR.tar.gz
* tar xvf L.USR.tar
* rm L.USR.tar
* mv L.USR/* .
* rmdir L.USR
* gzip Lstart.LINK
* rm automatic execution1
* f77 automatic.f -o automatic
* rm AUTOS*
* echo -2 >ldevice
* echo "paste -d'\ \ 0\ \ " | cut -c1-10,12,13 >ldeviceBA
* nice -19 automatic
* echo 'rm nohup.out automatic' >AUTOS
* grep 'f77 [a]' AUTO.EXE | cut -c1-14 >LatT1
* echo old. >LatT2
* grep 'f77 [a]' AUTO.EXE | cut -c15-30 >LatT3
* paste -d"\0" LatT1 LatT2 LatT3 >>AUTOS
* grep '[-]2 >' AUTO.EXE >>AUTOS
* grep '[\]"'"' AUTO.EXE >>AUTOS
* echo 'nice -19 automatic' >>AUTOS
* echo 'chmod ugo+x execution1' >>AUTOS
* echo 'nice -19 execution1' >>AUTOS
* chmod *x AUTOS
* mv automatic.f automatic.old.f
* mv AUTOS AUTOMATIC.OLD
* echo ' ' >LatT4
* cat LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 LatT4 >LatT5
* echo 'execution10 LatT5 >execution19' >LatT4
* head -4 execution19 >execution0
* paste -d" " ldeviceBA LatT4 >>execution0
* echo 'head -4 execution19 >execution10' >>execution0
* echo 'tail +5 execution19 | grep -v "execution1 " >>execution10' >>execution0
* tail -1 execution19 >>execution0
* chmod ugo+x execution*
* nice -19 execution0
* grep 'm Lattention.WARNING' execution1 >execution19
* nice -19 execution19
* echo >execution19
* echo 'nice -19 LatT5' >LatT1
* echo 'banner " " - O. K. -' >LatT5
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT5
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT5
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT5
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT5
* echo 'echo \ \ \ \ \ (NOTHING MORE TO DO OR TO INSPECT AT PRESENT : \ \ \ \ \ ' >>LatT5
* echo 'echo \ \ \ \ \ PROGRAM IS GOING TO BE CONTINUED AUTOMATICALLY)\ \ \ \ \ ' >>LatT5
* echo 'banner " " % % % % % %' >>LatT5
* echo 'sleep 15' >>LatT5
* echo 'rm Lattention.WARNING' >>LatT1
* echo 'rm LatT2' >>LatT1
* chmod ugo+x LatT1
* cp Lattention.WARNING LatT1
```

Nov 24 2000 01:02

AUTOMATIC

Page 2

```
* cp LatT1 LatT2
* grep rm LatT2 >LatT1
* grep LatT5 LatT2 >LatT3
* chmod a+x LatT*
* split -15 Lattention.WARNING LatT
* head -1 LatTab >LatTa
* tr "n" "[\]" <LatTa >LatTaA
* tr "o" "[\]" <LatTaA >LatTaB
* tr "hup&" " " <LatTaB >LatTaC
* cut -c0-46 LatTaC >LatTaA
* cut -c47 LatTaC >LatTaB
* cut -c48-80 LatTaC >LatTaD
* paste -d "\0" LatTaA LatTaB LatTaB LatTaB LatTaD >LatTa
* tail +2 LatTab >LatTb
* head -2 LatTb >LatTbaa
* tail +3 LatTb >LatTbabc
* banner " NOT O.K." >LatTc
* cat -s LatTaa LatTa LatTb >Lattention.WARNING
* cat -s LatTaa LatTa LatTbaa LatTc LatTbabc >LatT2
* nice -19 LatT1
* echo >>LatT2
* cat LatT2
* echo >>LatT3
* echo 'nice -19 LatT3' >execution0
* echo 'rm LatT* nohup.out NOHUP' >>execution0
* echo 'nice -19 execution1' >>execution0
* echo 'mkdir L.USR' >>execution0
* echo 'gunzip Lstart.LINK.gz' >>execution0
* echo 'bash' >AUTO.SIG
* echo 'cp execution0 L.USR' >>AUTO.SIG
* echo 'mv execution[0]* L.USR' >>AUTO.SIG
* echo 'cp AUTO.* L.USR' >>AUTO.SIG
* echo 'cp Lattention.WARNING Mattention.WARNING' >>AUTO.SIG
* echo 'mv L[!]* DELTA.p THETA.m L.USR' >>AUTO.SIG
* echo 'mv ma.mb.m* programDOCU w.r.t.P* wilsonL* L.USR' >>AUTO.SIG
* echo 'cp L.[0U]* L.USR' >>AUTO.SIG
* echo 'mv Mattention.WARNING Lattention.WARNING' >>AUTO.SIG
* echo 'exit' >>AUTO.SIG
* echo 'pwd | nice -19 AUTO.SIG' >>execution0
* echo 'tar cf L.USR.tar L.USR' >>execution0
* echo 'rm -f L.USR AUTO.SIG' >>execution0
* echo 'gzip L.USR.tar' >>execution0
* echo 'rm nohup.out' >>execution0
* echo 'rm execution0' >>execution0
* echo 'nice -19 execution0' >>AUTO.MOD
* cp AUTO.MOD AUTO.RET
* cp AUTO.MOD LatT6
* echo 'banner " " "(rm : yes)"' >>LatT6
* echo 'banner " " "finish by" "control c" " "' >>AUTO.RET
* echo 'nohup AUTO.RET | tee nohup.out &' >NOHUP
* echo 'banner " " "(rm : no)!"' >>NOHUP
* echo 'banner " " "rm NOHUP ?"' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ ( yes [ OR SIMPLY: y ] WILL DISABLE THE \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ NO HANG UP MECHANISM FOR BATCH JOBS : \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'echo \ \ \ \ \ ' >>LatT1
* echo 'rm -1 NOHUP' >>LatT1
* echo 'mv NOHUP LatT6' >>LatT1
* echo 'grep banner LatT6 >AUTO.MOD' >>LatT1
* echo 'nice -19 AUTO.MOD' >>LatT1
* echo 'sleep 6' >>LatT1
* echo 'grep -v banner LatT6 >AUTO.MOD' >>LatT1
* echo 'Banner " " " " >>LatT1
* echo 'nice -19 LatT1' >LatT2
```

AUTOMATIC

1

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 3
* cp Lattention.WARNING LatT2
* grep LatT1 LatT2 >LatT4
* chmod ugo+x execution* AUTO.* LatT* NOHUP
* nice -19 LatT4
* nice -19 AUTO.MOD

c
c DIE VORANGEHENDEN ZEILEN SIND ABGEZAEHLT UND DUERFEN N I C H T DURCH
c IRGENDWELCHE EINRUECKUNGEN ODER ZUSATZKOMMENTARE VERAENDERT WERDEN !!!!!
c

*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*

*;;::::::; D A N G E R : NEVER tar OR 'NEXT'-compress L.OLD.*
*;;::::::; BUT ONLY W.R.T. ITS CONTENTS SO THAT L.OLD.* NEVER LOSE
*;;::::::; ITS CHARACTER AS A FOLDER WHICH WILL PROTECT IT AGAINST
*;;::::::; MOVING (AT tep3 ) OR EVEN ERASING (AT ALL OTHER MACHINES
*;;::::::; EXCEPT tep1, tep3 )

c::::::::: also: folder L.OLD.* auf einer NEXT aufmachen, alles
c::::::::: weiss umranden und nur den Inhalt komprimieren - NIEMALS
c::::::::: DAS DOKUMENTARVERZEICHNIS L.OLD.* SELBST - ES KOENNTE BEI
c::::::::: DER NAECHSTEN POROGRAMM-AUSFUEHRUNG RESTLOS ZERSTOERT WERDEN !!!

*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*
*;;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::*

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 4
** DIE KOMMENTARE IN Lattention.WARNING BEZIEHEN SICH AUF DEN URSPRUENG-
** LICHEN PROGRAMM-NAMEN " AUTOMATIC "

C; wegen einer dsmc -Isolierung (aeltere Version ohne Kontakt zur juen-
C; geren) kann das Programm auf der tepln NUR DAMN funktionieren, wenn
C; es bei keinem Durchlauf vorher oder nachher in dem betreffenden Haupt-
C; folder JEMALS AUF EINER ANDEREN MASCHINE VORHER GELAUFEN WAR ODER LAU-
C; FEN WIRD (braucht NATUERLICH nicht beachtet zu werden fuer AUSSCHLIESS-
C; LICHE FEHLER-RECHNUNG abs(decide)>3 )

CC DER REINE FORTRAN-ANTEIL DIESES PROGRAMMS KANN AUCH DADURCH ERHALTEN
CC WERDEN,DASS AN DEN ANFANG DER ERSTEN 18 ZEILEN DER STRING !!!!!
CC VORANGESTELLT (EINGEFUEGT) WIRD = automatic.old.f PER HAND

CC DAS ZWEITAEUSSERSTE UNIX-PROGRAMM AUTO.EXE KANN EBENFALLS PER HAND
CC AUS DIESEM FILE EXTRAHIERT WERDEN, INDEM ZEILE 19 BIS ZEILE 143
CC HERAUSGESCHNITTEN UND JEWELNS VON DEN ERSTEN BEIDEN SPALTEN ( * &
CC ein blank ) BEFREIT WERDEN (HERAUSKOMMENTIERUNG RUECKGAENGIG MACHEN)

CC AUTOMATIC.OLD IST DAS FRUEHERE FILE AUTOMATIC UND KANN AUCH DURCH
CC MANUELLE KOPIER-, CUT- UND PASTE-PROZESSE ALTERNATIV ERSTELLT WERDEN,
CC INDEM AUF DIE HIER WEITER UNTEN EINGEKLEBETE DARSTELLUNG

CC
CC *** *** tep3% cat AUTOMATIC
CC
CC ZURUECKGEGRIFFEN WIRD (EINFACH 'HERAUSSCHNEIDEN' UND IN EINEN NEUEN
CC EDITOR (z. B. textedit ) HEREINPASTEN UND ENTSPRECHEND ABSPEICHERN)
CC - VORSICHT: automatic.f MUSS DABEI ZU automatic.old.f WERDEN !
CC das falsche decide zur Erstellung muss natuerlich geandert werden
CC
cc das erste decide=0 in AUTOMATIC.OLD nach AUTOMATIC kann die
cc archivierten Links zerstoeren, weil die Info-Files L[1..]* von
cc AUTOMATIC nach L.USR.tar.gz verpackt wurde, welches als ge-tar-tes
cc Kompressionsprodukt keinen directory-Charakter mehr hat und daher
cc vom primitiveren 'nackten' AUTOMATIC.OLD fuer decide=0 in einen
cc passiven Ablage-Ordner L.OLD... verschoben werden kann (u. a.)
CC D A H E R : FUER PROFESSIONELLE LANGE MESSUNGEN N I E MIT
CC AUTOMATIC.OLD ARBEITEN - DIESES FILE IST NUR GUT FUER EXPERIMENTE !

c
c
c DAS PROGRAMM KANN JETZT AUCH AUF ANDEREN MASCHINEN ALS DER
c tep3.thphys.uni-heidelberg.de AM INSTITUT LAUFEN (UND AM URZ NACH
c HERAUSKOMMENTIEREN VON rand(0) UND ENTSPRECHENDER SPEICHERPLATZ-
c BESCHAFFUNG)
c
c
c

```



```

Nov 24 2000 01:02      AUTOMATIC      Page 13

!QQ)

!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]
* v

      integer ii,jj,kkk,ll,mm,ij,k1
      integer cho(15),set(7,4*10**4),take(10,10,10,10,4)
* ^
!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]![!]

character*37 to ! new for file 1  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*3 tu ! new for file 1 !/|\|/\|/\|/\|/\|

real linkSTORE(10,10,10,10,4,4) !/|\|/\|/\|/\|/\|

integer counter  !/|\|/\|/\|/\|/\|
integer seed  !/|\|/\|/\|/\|/\|
logical filex  !/|\|/\|/\|/\|/\|

integer n00tt  !/|\|/\|/\|/\|/\|
real ranftt  !/|\|/\|/\|/\|/\|
common/seedtt/n00tt  !/|\|/\|/\|/\|/\|

real ranfSM  !/|\|/\|/\|/\|/\|
integer seedSM  !/|\|/\|/\|/\|/\|
integer ttSM  !/|\|/\|/\|/\|/\|

* ASSIGNMENT FOR THE LATTICE SPACING : = (a=1 --> a=dym)
real dym !phys. Dimensionierung !/|\|/\|/\|/\|/\|

integer device,decide,repetition  !/|\|/\|/\|/\|/\|
integer special,intern,step  !/|\|/\|/\|/\|/\|
logical file2,file3,file4,file5  !/|\|/\|/\|/\|/\|

* logical filint  !/|\|/\|/\|/\|/\|
* corresponding to the file Lintern which will in case only be asked
* w.r.t. its own existence but never read (- would be superfluous -)
logical filrep  !/|\|/\|/\|/\|/\|

logical filcont,filsymb  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*13 filpreserve  !/|\|/\|/\|/\|/\|
real cont1(14),cont2(14)  !/|\|/\|/\|/\|/\|
integer warn1,warn2  !/|\|/\|/\|/\|/\|

integer dev,swi  !/|\|/\|/\|/\|/\|

character*1 ym(0:9),yp  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*3 yll(2),yn(2),yh,yr  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*4 yj,yL,yL2,yq  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*5 yb,yC,yg(2),ykk,yt  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*6 yd,yI,yk,yk2,ylk(2),y13,yo(2)  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*7 ertortag,ye,yli  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*8 yk3  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*9 errorlabel(68),ya,yb4(2),yk1  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*11 ye4,yf(2),ys  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*12 yk1(6)  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*13 ya4(2,2),yb5(2,3),yc4,yc5(3)  !/|\|/\|/\|/\|/\|
character*14 yd4(2,2)  !/|\|/\|/\|/\|/\|

```

```

Nov 24 2000 01:02      AUTOMATIC      Page 14

character*16 ye5  !/|\|/\|/\|/\|
character*17 ya5(2,2,3)  !/|\|/\|/\|/\|
character*18 yd5(2,2,3),yb1(2)  !/|\|/\|/\|/\|
character*20 ye1  !/|\|/\|/\|/\|
character*22 ya1(2,2),yc1  !/|\|/\|/\|/\|
character*23 yd1(2,2)  !/|\|/\|/\|/\|
character*30 yb3(2,3)  !/|\|/\|/\|/\|
character*31 yb2(2,3),yc2(3)  !/|\|/\|/\|/\|
character*34 yc3(3)  !/|\|/\|/\|/\|
character*35 ye3  !/|\|/\|/\|/\|
character*37 ye2  !/|\|/\|/\|/\|
character*38 ya3(2,2,3)  !/|\|/\|/\|/\|
character*39 ya2(2,2,3)  !/|\|/\|/\|/\|
character*40 yd3(2,2,3)  !/|\|/\|/\|/\|
character*41 yd2(2,2,3)  !/|\|/\|/\|/\|

integer icounter,ifileno,jfileno,imeas,isafe(20000)
real rmeas(10000),rdelta(10000),rstore(3)
! FUER DIE FEHLER-RECHNUNG - GEBEBENENFALLS FELDGROESSEN ERWEITERN !

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
*
* modified for asymmetric lattices w.r.t. the time direction
*
* (finite temperatures) : /home/tepl/holk/asym/asym1.f !! PLOT !!
* | | | | |
*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####

integer asym1,asym2,asym3,asym4,asym5,asym6
real asystoreNN,asystoreDYM
*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####

* IN ORDER TO INCREASE THE VELOCITY THIS SHOULD BE DONE FIRST :

open(2000,file='Ldevice')  !/|\|/\|/\|/\|/\|
read(2000,*)device  !/|\|/\|/\|/\|/\|
close(2000,status='keep')  !/|\|/\|/\|/\|/\|

```

```

Nov 24 2000 01:02                AUTOMATIC                Page 15

*      the ensuing line just represents a formal construction :
*      if (device.eq.(-1)) continue !being the normal input seed
*      since device is only used as an output magnitude here.
C      THE ONLY EXCEPTIONS FROM THE INPUT IRRELEVANCE WILL BE :

! TOO EARLY  if (device.eq.(-2)) goto 20000  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
! TOO EARLY  if (device.eq.(-3)) goto 30000  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
! TOO EARLY  if (device.eq.(-4)) goto 40000  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
! TOO EARLY  if (device.eq.(-5)) goto 50000  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
! TOO EARLY  if (device.eq.(-6)) goto 36000  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
! TOO EARLY  if (device.eq.(-9)) goto 20028  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
* LATER:     if (device.eq.(-7)) switch=2-switch !/|\|\|\|\|\|\|\|\|

      if (device.eq.(-8)) goto 38000  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|

* O.K.

*:.....:      EIN AUTOMATISCHES FILE DARF NICHT f77 -INPUT
*:.....:      VOM BILDSCHIRM LESEN - DAHER NACHFOLGENDE
*:.....:      FIXIERUNGEN DER INPUT-PARAMETER :

c      dym=0.06 ! fuer beta=2.6 und ... !/|\|\|\|\|\|\|\|\| !**** INS
c      war dym=1 im dimensionslosen Fall !/|\|\|\|\|\|\|\|\| !**** INS

      dym=1!0.06 ! 1 !*****INSERTED***** !/|\|\|\|\|\|

C      DECIDE=-4 ! FEHLERBALKEN AKTUALISIEREN !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=-3 ! FORTSETZUNG VON DECIDE=-2 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=-2 ! DECIDE=+1 & =0 - ERGAENZUNGEN !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=-1 ! FORTSETZUNG EINER ERMITTLUNG !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=0 ! ERMITTLUNG VON VORNE !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=+1 ! WIEDERHOLUNG (VON VORNE) !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=+2 ! UNZERSTUECKELTE URBERECHNUNG MIT
C      DEMSELBEN ZUFALLSGENERATOR !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=+3 ! WIE DECIDE=+2 ABER MIT
C      PROTOTYP rand(0) !/|\|\|\|\|\|\|\|\|
C      DECIDE=+4 ! FEHLERBALKEN ENTFERNEN !/|\|\|\|\|\|\|\|\|

```

```

Nov 24 2000 01:02                AUTOMATIC                Page 16

C      DECIDE=+5 ! KONSTANTE TOTALE FEHLERBALKEN !/|\|\|\|\|\|\|\|\|

* professionelle Erst-Ermittlung: DECIDE= 0,
* nach Absturz mit DECIDE=-1 fortfahren
* oder zumindest mit DECIDE=-4 Fehlerbalken anbringen

* professionelle Wieder-Einlesung: DECIDE=-2,
* nach Absturz mit DECIDE=-3 fortfahren
* oder zumindest mit DECIDE=-4 Fehlerbalken anbringen

* DECIDE=+1 wirkt bei kleinen Test-Programmen schneller als DECIDE=-2
* und spart noch mehr Speicherplatz, bei grossen Programmen wird jedoch
* die Wahrscheinlichkeit von dsmc -Ausfaellen realistisch gross, wel-
* che den DECIDE=+1 -Modus executions-irreparabel abstuerzen lassen,
* waehrend DECIDE=-2 sogar DECIDE=-1 ersetzen kann (zeitaufwendiger)

* DECIDE=+2 wirkt bei kleinen Test-Programmen schneller als DECIDE=0
* und spart noch mehr Speicherplatz, bei grossen Programmen wird jedoch
* die Wahrscheinlichkeit von Programm-Abstuerzen realistisch gross, wel-
* che den DECIDE=+2 -Modus executions-irreparabel abstuerzen lassen,
* erlaubt aber den Transfer auf speziellere und bessere Zufallsgenerato-
* ren, die keine Programm-Unterbrechung vertragen ( --> DECIDE=+3 )

* DECIDE=+4 ist bei den meisten Plot-Programmen ueberfluessig, da sie
* ohne spezielle Fehlerbalken-Anweisungen in der Regel sowieso nur die
* ersten beiden Spalten der Datenfiles fuer 2-dimensionale Plots lesen

* DECIDE=-4 ist immer dann ueberfluessig, wenn - egal ob mit Unter-
* brechungen oder ohne - das Programm bis zum Ende durchlaufen konnte,
* wo dann per default eine DECIDE=-4 -artige Prozedur stattfindet;
* wurde jedoch anschliessend mit DECIDE= +4, +5 gearbeitet, kann
* DECIDE=-4 zur Wiederherstellung der eigentlichen Verhaeltnisse
* benutzt werden (und muss es dann auch - DECIDE=+5 traegt den ersten
* Fehlerbalken einer Messreihe, welcher den totalen Gesamtfehler unter
* Miteinebeziehung auch noch so wenig eingeschwungener Fruehmessungen
* darstellt, repraesentativ als mittleren Fehler der Einzelmessung der
* total unverkuerzten Messreihe fuer jeden Messpunkt ein: Pessimismus)

      decide=2 !! 1 ! -1 ! 0 !*****INSERTED*****

*.....*
*.....*
*.....*
C      asym6=0 ! NORMALER VOLLSTAENDIG !*.....*
C      DOKUMENTIERTER BETRIEB !*.....*

c      Der asym6 -Parameter ist eine Art Appendix und seine Abweichungen
c      sollen nicht in die Dokumentarfiles etc. eingehen (WEIL ES NUR UM
c      DIE FORMALE DOKUMENTATION SPONTANER AUSBAU-MOEGLICHKEITEN GEHT) :

C      asym6=1 ! 3-dimensionale Plots in Ab- !*.....*
C      haengigkeit von Kopplung und !*.....*
C      Asymmetrie-Parameter (using !*.....*
C      the final updating only) !*.....*

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 17

C   asym6=2 ! 3-dimensionale Plots in Ab-      !*****@*****
C   haengigkeit von Kopplung und             !*****@*****
C   RAUMZEIT-DIMENSIONALITAET ( >1,        !*****@*****
C   <5 ) auf dem Gitter (using              !*****@*****
C   the final updating only)                !*****@*****
*****@*****@*****@*****@*****@*****@*****@*****
      asym6=1!2 !! 1 ! 2 ! 0 !*****IN*****

*****@*****@*****@*****@*****@*****@*****@*****
      beta=2.6 !! 2.7 ! 2.3          !*****IN*****

      NN=4 !! 10 ! 10      !       Z U N A E C H S T !**** IN***** ****
      wn=25 ! 20 !****2 !/|\ 4!!1000000 ! Z U N A E C H S T !*****
!**** IN***** **** ! wn HAS TO BE CORRECT for executable files!!!!
      wn=5! 5!2!!! 100 FUER asym6=1 !!!!! 500 ! FUER asym6=2!!
!*****IN***** ( repeated input )

CC   switchY = 1 finishes the mechanism of anti- [ nearly always ...
CC   switchY = 1 ... rejecting ] of the random No.'s ; <> 1 does not
CC   so insert 1 for achieving this new removal, 0 for dropping it :

C$C$C$C$  switchY=1 ! 0 !*****IN*****
      switchY=1 !---NEU---!C$C$C$C$

                               !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|!

CC   swi = 0 : switch IS OSCILLATING BETWEEN 2 AND 0
CC   swi = 1 : ... THE SAME BUT OSCILLATING EFFECTIVELY BETWEEN 2 AND 1
CC   swi = 1 : ... IMPLYING caraPURE becoming a really PURE FULL-ANGLE :

                               !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|!

      swi=0 ! 1          !*****IN*****

      ma=2!1          !*****IN*****

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 18

mb=2!3 !*****IN*****
mc=1!1 !*****IN*****
md=2!3!4 !*****IN*****

za=0!2!10 !5 ! (NN>5) !*****IN*****
zb=0 !*****IN*****
zc=0 !*****IN*****
zd=0 !*****IN*****

C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$
C$C$C$C$  a normal interactive input does still not exist

      dilu1=3 !****1 !! 50 ! 2 ! 1 L A T E R : 50 !*****
!*****IN*****
      dilu2=4 !****1 !!200 ! 8 ! 1 L A T E R : 20 !*****
!*****IN*****

C$C$C$C$C$  choosing 1 for both No.'s implies measuring everything (basic)

C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$C$

      if (device.eq.(-9)) goto 20028 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|! :: JUST HERE ::
      if ((decide.eq.5).or.           ! statistics !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|!
      * (abs(decide).eq.4)) goto 20000 ! statistics !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|!

      if ((decide.ne.-3).and.(decide.ne.-2).and.      !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|!
1 (decide.ne.-1).and.(decide.ne.1).and.
2 (decide.ne.2).and.(decide.ne.3)) decide=0           !DEFINING A DEFAULT!

      if ((device.eq.-2).or.(device.eq.-3)) dev=decide      !/|\|\|\|!
      if ((decide.lt.-1).and.(device.eq.-2)) decide=2*decide+5 !/|\|\|\|!
      if ((decide.lt.-1).and.(device.eq.-3)) decide=1       !/|\|\|\|!

*   useful values
*   A) FOR SHORT TESTS OF THE PROGRAM ITSELF
*

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 19

*
*   wn=25
*   beta=2.3
*   NN=4
*
*   dilu1=3
*   dilu2=4
*   dym=1
*
*   switch=2
*   swi=0
*   switchX=1
*   switchY=1
*
* B) FOR PROFESSIONAL COMPUTING
*
*   wn=100000
*   beta=2.6
*   NN=4
*
*   dilu1=50
*   dilu2=200
*   dym=0.06
*
*   switch=2
*   swi=1
*   switchX=1
*   switchY=1
*
*#####*#####*#####*#####*#####
!      asym

      IF ((ASYM6.NE.0).and.(device.eq.-2)) GOTO 5

!      asym
*#####*#####*#####*#####*#####

! BUT AT BEST NOW ALREADY BECAUSE THE ENSUING print AND write OPTIONS WILL
! ... BE REALIZED NETHERTHELESS IN THE TWO device.eq.(-1) RUNS EACH CYCLE

      if (device.eq.(-2)) goto 20000      !/|√|√|√|√|√|√|!
      if (device.eq.(-3)) goto 30000      !/|√|√|√|√|√|√|!
      if (device.eq.(-4)) goto 40000      !/|√|√|√|√|√|√|!
      if (device.eq.(-5)) goto 50000      !/|√|√|√|√|√|√|!
      if (device.eq.(-6)) goto 36000      !/|√|√|√|√|√|√|!

* LATER:      if (device.eq.(-7)) switch=2-switch !/|√|√|√|√|√|√|!
! LATER THAN NECESSARY if (device.eq.(-8)) goto 38000 !/|√|√|√|√|√|√|!
! LATER THAN POSSIBLE if (device.eq.(-9)) goto 20028 !/|√|√|√|√|√|√|!

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 20

*#####*#####*#####*#####*#####
*#####
*#####
*#####*#####*#####*#####*#####

***** anstelle von dsmc koennte auch mit Extra-Festplatten
***** und ftp gearbeitet werden - das wuerde die ADSM -
***** Server entlasten, aber wegen der fortgesetzten (alle 10
***** Minuten wuerde das ungeschuetzte password unverschlueselt
***** ueber die normalen Glasfaserkanale wandern - ungeschuetzt
***** gegen Hacker) automatisierten Benutzung ein Sicherheits-
***** risiko fuer das Institut darstellen,

***** Beispiele fuer ftp -Skripte:

* tep24>
* tep24>
* tep24>
* tep24>more file.transfer.operator1  ( - -> put Link* )
*
* echo test >test
* ##### ftp geht, weil auf Instituts-Server, NICHT ABER rlogin ,
* ##### telnet UND rsh, weil diese auf URZ-AFS-Cluster TOTAL GESCHUETZT
* ftp aixterm6.urz.uni-heidelberg.de <<ENDE
* # OHNE .netrc MUESSTE VORANGEHENDE ZEILE DURCH FOLGENDE
* ##### ftp -n aixterm6.urz.uni-heidelberg.de <<ENDE
* ##### user ds4 [password]
* cd alink1 ### Ziel-Verzeichnis ! oder alink2
* prompt ### Interactive mode off. ! nur fuer mput / mget
* mput test ### mput ist allgemeiner als put, GEGENTEIL: mget (">" get)
* ENDE
* tep24>
* tep24>
* tep24>cat file.transfer.operator2  ( - -> get Link* )
*

```



```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 23

switchX=1

print*, '
print*, '
if (switchX.eq.1) print*,
$ ' ameliorized to include random updating order : '
print*, '
print*, 'switchX = ', switchX ! <--- *****

print*, '
print*, '
print*, '
& 'switchY = 1 finishes the mechanism of anti- [ nearly always ...'
print*, '
& 'switchY = 1 ... rejecting ] of the random No.'s , <> 1 does not'
print*, '
& 'so insert 1 for achieving this new removal, 0 for dropping it : '
***** read*, switchY *****
print*, 'switchY = ', switchY ! <--- *****

if (switchY.ne.1) switchY=0
print*, '

!????????? !????????? !????????? !????????? !????????? !?????????

*-----
*-----+-----
*#####

* print*, 'input BETA > 0 (large in reality, little ... '
* print*, ' for purposes of quick computations)'
* read*, beta
* NgroupNo=2 ! for SU( NgroupNo ) = SU(2)
!????? print*,
!????? A '( benign boundaries g0=<0.4 | 4.> --> beta=<25. | 0.25> )'
!????? print*,
!????? A '( Creutz: g0=1.31876 --> beta=2.3 | NN=4 | xi=1 --> WL=0.6)'
!????? print*, '
!????? print*, 'input lattice COUPLING g0 > 0 : '
!????? print*,
!????? A 'beta[ g0 = <20 | 1.155 | 0.633> ] ~ <0.01 | 3. | 10.> , so g0 = '
!????? read*, g0
!????? beta=2*NgroupNo/g0**2
!????? print*, 'implying beta being : ', beta
!????? print*, '
!????? print*,
!????? A '( ultimate boundaries g0=<0.1 | 10.> --> beta=<400. | 0.04> )'
!????? print*, '

!????????? !????????? !????????? !????????? !????????? !?????????

print*, 'input BETA > 0 (large in reality, little ... '
print*, ' for purposes of quick computations)'
***** read*, beta *****
print*, beta ! <--- *****

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 24

print*, '
print*, '
print*, '
g0=sqrt(2*NgroupNo/beta)
g0=g0+0 ! in order to pretend using it
!????? print*, 'g0=', g0
!????????? !????????? !????????? !????????? !????????? !?????????

* print*, 'N = # points in one dim. (<11) = '
print*, 'N = # points in any non-temporal dim. (<11) = '
***** read*, NN *****
print*, NN ! <--- *****

print*, '
print*, '
print*, '
print*, '
& 'lphys. Dimensionierung pro Raum-Achse = ', dym !/|/|/|/|/|/|/|/|/|

print*, '
print*, '
print*, '
!|/|/|/|/|/|/|/|/|
!|/|/|/|/|/|/|/|/|

if (decide.eq.-3) print*, !|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' decide=-3 : FORTSETZUNG VON DECIDE=-2 ' !|/|/|/|/|/|/|/|/|
! if (decide.eq.-2) print*, !|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' decide=-2 : DECIDE=+1 & =0 - ERGAENZUNGEN' !|/|/|/|/|/|/|/|/|

if (decide.eq.-1) print*, !|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' decide=-1 : FORTSETZUNG EINER ERMITTLUNG ' !|/|/|/|/|/|/|/|/|
! if (decide.eq.0) print*, !|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' decide=0 : ERMITTLUNG VON VORNE ' !|/|/|/|/|/|/|/|/|
! if (decide.eq.+1) print*, !|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' decide=+1 : WIEDERHOLUNG (VON VORNE) ' !|/|/|/|/|/|/|/|/|

if (decide.eq.2) print*, !|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' decide=+2 : UNZERSTUECKELTES PENDANT ' !|/|/|/|/|/|/|/|/|
! if (decide.eq.3) print*, !|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' decide=+3 : UNZERSTUECKELT MIT rand(0) ' !|/|/|/|/|/|/|/|/|

!????? print*,
!????? 1 'input asymmetry parameter 0.2 <= xi = Nt/NN <= 1 : '
!????? read*, xi
!????? print*, '
!????? xi=min(real(max(nint(xi*NN),2))/NN,1)
!????? print*,
!????? 1 'xi being affirmed, rounded or corrected to the concrete value'
!????? print*, 'xi |final = ', xi
!????? print*, '

!????????? !????????? !????????? !????????? !????????? !?????????

print*, '
print*, '
print*, '
xi=1
print*,
& ' asymmetric generalization with special symmetric case xi=1 '
print*, '

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 25

!????????]!????????]!????????]!????????]!????????]!????????]!????????]

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####

!!!!!!!
print*, 'consider < Theta(rho,sigma)*Theta(xi,eta) >_[eukl.] : '
print*, '
print*, 'input first direction el. of {1,2,3,4} : '
*****
read*, ma
*****
print*, 'ma = ', ma  ! <--- *****
print*, 'input second direction el. of {1,2,3,4} : '
*****
read*, mb
*****
print*, 'mb = ', mb  ! <--- *****
print*, 'input third direction el. of {1,2,3,4} : '
*****
read*, mc
*****
print*, 'mc = ', mc  ! <--- *****
print*, 'input fourth direction el. of {1,2,3,4} : '
*****
read*, md
*****
print*, 'md = ', md  ! <--- *****
print*, '
print*, 'consider < Theta(x)*Theta(y) >_[eukl.] : '
print*, '
print*, 'input first integer component of deviation z=(y-x) : '
*****
read*, za
*****
print*, 'za = ', za  ! <--- *****
print*, 'input second integer component of deviation z=(y-x) : '
*****
read*, zb
*****
print*, 'zb = ', zb  ! <--- *****
print*, 'input third integer component of deviation z=(y-x) : '
*****
read*, zc
*****
print*, 'zc = ', zc  ! <--- *****
print*, 'input fourth integer component of deviation z=(y-x) : '
*****
read*, zd
*****
print*, 'zd = ', zd  ! <--- *****

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####

***      open(1, file='/home/tepl/holk/ave/w3d1')
***      open(2, file='/home/tepl/holk/ave/w3d2')
***      open(3, file='/home/tepl/holk/ave/w3d3')
***      open(4, file='/home/tepl/holk/ave/w3d4')
*** *****
***      write(1, *) ' '
***      write(1, *) 'this is the documentation file wld1 containing the '
***      A, ' data : '

*      open(11, file='SequenceForm1')

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 26

*      open(12, file='/home/tepl/holk/ave/ownV2D')
*      open(13, file='/home/tepl/holk/ave/ownV3D')
*      open(14, file='/home/tepl/holk/ave/ownV4D')
*      open(15, file='/home/tepl/holk/ave/KaWy2D')
*      open(16, file='/home/tepl/holk/ave/KaWy3D')
*      open(17, file='/home/tepl/holk/ave/KaWy4D')
*      open(18, file='/home/tepl/holk/ave/cara2D')
*      open(19, file='/home/tepl/holk/ave/cara3D')
*      open(20, file='/home/tepl/holk/ave/cara4D')

open(1, file='programDOCU')
open(2, file='wilsonLOOP.dim.2') ! not used
open(3, file='wilsonLOOP.dim.3') ! not used
open(4, file='wilsonLOOP.dim.4')

open(102, file='THETA.ma.mb.1')
open(202, file='THETA.ma.mb.2')
open(302, file='THETA.ma.mb.3')

***      open(120, file='DELTApure.ma.mb.1')   *** war vertauscht
***      open(220, file='DELTApure.ma.mb.2')   *** war vertauscht
***      open(320, file='DELTApure.ma.mb.3')   *** war vertauscht

open(110, file='DELTApure.ma.mb.1')
open(210, file='DELTApure.ma.mb.2')
open(310, file='DELTApure.ma.mb.3')

open(125, file='w.r.t.PURE.ma.mb.1')
open(225, file='w.r.t.PURE.ma.mb.2')
open(325, file='w.r.t.PURE.ma.mb.3')

***      open(121, file='DELTAphys.ma.mb.1')   *** war vertauscht
***      open(221, file='DELTAphys.ma.mb.2')   *** war vertauscht
***      open(321, file='DELTAphys.ma.mb.3')   *** war vertauscht

open(111, file='DELTAphys.ma.mb.1')
open(211, file='DELTAphys.ma.mb.2')
open(311, file='DELTAphys.ma.mb.3')

```



```

Nov 24 2000 01:02           AUTOMATIC           Page 31

write(1,*)' '
write(1,*)' '
write(1,*)' swi = 0 : switch IS OSCILLATING BETWEEN 2 AND 0'
write(1,*)
$ ' swi = 1 : ... THE SAME BUT OSCILLATING EFFECTIVELY'
write(1,*)' ... BETWEEN 2 AND 1'
write(1,*)
$ ' ... IMPLYING caraPURE becoming a really PURE FULL-ANGLE : '
write(1,*)' '
write(1,*)' so : IT WAS CHOSEN THAT ... swi = ',swi
write(1,*)' '
write(1,*)' '

!|/|/|/|/|/|/|/|/|

write(1,*)' '
write(1,*)' '

write(1,*)
& ' switchX = 1 imports random updating ordering , <> 1 does not'
write(1,*)
& 'so insert 1 for achieving this ameliorization, 0 for dropping : '
write(1,*)' '
if (switchX.eq.1) !|/|/|/|/|/|/|/|/|
$ write(1,*)' ameliorized to include random updating order '
write(1,*)'switchX = ',switchX
write(1,*)' '
write(1,*)' '

write(1,*)
& 'switchY = 1 finishes the mechanism of anti- [ nearly always ...'
write(1,*)' '
!|/|/|/|/|/|/|/|/|
& ' ... rejecting ] of the random No.'s , <> 1 does not'
write(1,*)
& 'so insert 1 for achieving this new removal, 0 for dropping it : '
write(1,*)' '
write(1,*)'switchY = ',switchY
write(1,*)' '
write(1,*)' '

write(1,*)
$ 'consider < Theta_{rho,sigma}*Theta_{xi,eta} >_[eukl.] : '
write(1,*)' '
write(1,*)'DISPLAY first direction el. of {1,2,3,4} : ',ma
write(1,*)' '
write(1,*)'DISPLAY second direction el. of {1,2,3,4} : ',mb
write(1,*)' '
write(1,*)'DISPLAY third direction el. of {1,2,3,4} : ',mc
write(1,*)' '
write(1,*)'DISPLAY fourth direction el. of {1,2,3,4} : ',md
write(1,*)' '
write(1,*)' '
write(1,*)'consider < Theta(x)*Theta(y) >_[eukl.] : '
write(1,*)' '
write(1,*)' '
$ 'DISPLAY first integer component of deviation z=(y-x) :',za
write(1,*)' '
write(1,*)' '
$ 'DISPLAY second integer component of deviation z=(y-x) :',zb
write(1,*)' '
write(1,*)' '
$ 'DISPLAY third integer component of deviation z=(y-x) :',zc
write(1,*)' '
write(1,*)' '

```

```

Nov 24 2000 01:02           AUTOMATIC           Page 32

$ 'DISPLAY fourth integer component of deviation z=(y-x) :',zd
write(1,*)' '
write(1,*)' '

to=' --> so < ma | mb | mc | md > = < ' |/|/|/|/|/|/|/|/|
tu=' | ' |/|/|/|/|/|/|/|/|

write(1,2)to,ma,tu,mb,tu,mc,tu,md,' >' |/|/|/|/|/|/|/|/|
2 format(a,il,a,il,a,il,a,il,a) !/|/|/|/|/|/|/|/|

!|/|/|/|/|/|/|/|/|
!!!!goto 3 ! JUST SKIPPING INFORMATION WHICH BECAME SUPERFLUOUS
!!!!GENERATES: "aut.f", line 1583: Warning: statement cannot be reached

!!!!!!IN ORDER TO INCREASE THE PORTABILITY OF THE PROGRAM....
IF (1.NE.2) GOTO 3

!|/|/|/|/|/|/|/|/|

write(1,*)
& 'so < ma | mb | mc | md > = < ',ma,'|',mb,'|',mc,'|',md,' >'

write(1,*)' '
write(1,*)' '
write(1,*)
& 'FILE NO. 1 REPRESENTS amo.../programDOCU'
write(1,*)' '
& 'FILE NO. 4 REPRESENTS amo.../wilsonLOOP.dim.4'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'NACHFOLGEND LAUFE r VON 1 BIS 3 '
write(1,*)' '
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r02 REPRESENTS amo.../THETA.ma.mb.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r20 REPRESENTS amo.../DELTApure.ma.mb.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r25 REPRESENTS amo.../w.r.t.PURE.ma.mb.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r21 REPRESENTS amo.../DELTAphys.ma.mb.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r26 REPRESENTS amo.../w.r.t.PHYS.ma.mb.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r03 REPRESENTS amo.../THETA.mc.md.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r10 REPRESENTS amo.../DELTApure.mc.md.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r27 REPRESENTS amo.../w.r.t.PURE.mc.md.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '
& 'FILE NO. r11 REPRESENTS amo.../DELTAphys.mc.md.r'
write(1,*)' '
write(1,*)' '

```



```
Nov 24 2000 01:02                AUTOMATIC                Page 35

ecc

      WL=1
      WM=1

      NN=asystoreNN ! AUFFRISCHUNG RECHTZEITIG VOR DER ERMITTLUNG VON xi
      dym=asystoreDYM          ! ( NN hatte 2 shifts, dym einen)

!
      g0=asym1/10.
      g0=asym1*0.4
      beta=2*NgroupNo/g0**2
      xi=asym3/real(asym5)
      xi=min(real(max(nint(xi*NN),2))/NN,1)

      IF (ASYM6.EQ.1) GOTO 7

!
      g0=asym1/10.
      g0=asym1*0.4
      beta=2*NgroupNo/g0**2
      DD=asym3                !!!!!!!!!!!!!!! AUDIM      xi=asym3/real(asym5)
      xi=1                    !!!!!!!!!!!!!!! AUDIM      min(real(max(nint(xi*NN),2))/NN,1)

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
```

```
Nov 24 2000 01:02                AUTOMATIC                Page 36

c#####c

c      now construct the multidimensional loop boundary
!!!!!!do 5 n=1,4
!!!!!!IN ORDER TO INCREASE THE PORTABILITY OF THE PROGRAM....
      7 do 9 n=1,4          ! level 7: von: IF (ASYM6.EQ.0) GOTO 7

      d(n)=nint(NN)
      if (n.gt.dd) d(n)=1

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
!!!!!!if (n.ne.dd) goto 4
!!!!!!IN ORDER TO INCREASE THE PORTABILITY OF THE PROGRAM....
      if (n.ne.dd) goto 8

      d(n)=nint(NN*xi) ! adding the altered value of the time direction
      print*, '
      print*, ' temporal d(' ,n,') = ',d(n)
      print*, ' NN**dd old/ original = ',nint(NN**dd)
      NN=NN*xi**(1./dd) !refreshing NN after its complete input evaluation
***      d(n)=nint(NN*xi) !!!!!!!!!!!!!!! sorum waere das richtig
      print*, ' NN**dd new/effective = ',nint(NN**dd)
      print*, '
!!!!!!4 continue

!!!!!!IN ORDER TO INCREASE THE PORTABILITY OF THE PROGRAM....
      8 continue

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
!!!!!!5 continue
!!!!!!IN ORDER TO INCREASE THE PORTABILITY OF THE PROGRAM....
      9 continue

*      d(2)=NN
*      d(3)=NN*(dd-2)
*      if (dd.eq.4) d(3)=NN
*      d(4)=NN*(dd-3)
*c      0 or (-NN) both cancel a do-loop starting with 1
*      this is not really required since cancelling a do-loop
*      implies ignoring its core containing other working loops
      d(5)=dd

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
*      d(6)=dd*(dd-1)/2*NN**dd
      d(6)=dd*(dd-1)/2*nint(NN**dd) ! in order to prevent automatic
      continue                   ! int(value +/- rounding error)
*      print*, 'd(6) = ',d(6)      ! restoration check of NN**dd*xi
*      stop
*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
```

```

Nov 24 2000 01:02 AUTOMATIC Page 37

c can always be devided by 2 leading to the integer number
c of lattice plaquettes w.r.t one aperiodic region while
c the number of lattice links is dd*NN*dd and the number
c of lattice points being NN*dd w.r.t one aperiodic region

num1=1
num2=0

do 35 i=1,d(1)
do 30 j=1,d(2)
do 25 k=1,d(3)
do 20 l=1,d(4)
do 15 m=1,d(5)
do 10 n=1,2

link(i,j,k,l,m,n)=cmplx(1)
link(i,j,k,l,m,n,3-n)=cmplx(0)
link(i,j,k,l,m,3,1)=cmplx(num1)
link(i,j,k,l,m,3,2)=cmplx(0)

-----
c c if the last two indices are less than 3 they denote the
c c SU(2) matrix elements - let further be:
c c NINT(ABS( .... 31)) = no. of link
c c NINT(RE( .... 32)) = total no. of a0-trials
c c NINT(IM( .... 32)) = no. of a0-trials spent for the
c c isolated redefinition of the corresponding link
c c
-----

10 continue
num1=num1+1

15 continue
20 continue
25 continue
30 continue
35 continue

*****@*****
! asym

IF ((ASYM4.EQ.1).and.(asym6.ne.0)) GOTO 50

```

```

Nov 24 2000 01:02 AUTOMATIC Page 38

! asym
*****@*****

* inquire(file='Lcounter',exist=filex) !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
! does 'counter' already exist?

wm=-1 ! being the first use of wm !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
open(5000,file='Lwilson') !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (filex) read(5000,* )WL !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
close(5000,status='keep') !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (filex.and.(abs(WL).le.1)) wm=0 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

!/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

open(3333,file='execution11') ! analogous to execution3
write(3333,*)' ' ! making it empty

!/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

counter=0 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
seed=1 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
dev=0 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

if (.not.filex) goto 46 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
inquire(file='Llink',exist=file2) !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (file2) goto 39 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (decide.lt.-1) goto 36 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (decide.eq.1) goto 38 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

open(7000,file='Lspecial') !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
write(7000,*)3 !shifting execution3 !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
close(7000,status='keep') !backward !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
goto 50000 !stopping this program now! !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

!/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

36 inquire(file='Llink.old',exist=file2)
if (.not.file2) goto 38
inquire(file='LdeviceBA',exist=file2)
if (.not.file2) goto 38

dev=device ! storing the information concerning
device = -1 or -7 (-7 is not used effectively)

open(1000,file='Llink.old')
read(1000,*)linkSTORE
close(1000,status='keep')

open(2007,file='LdeviceBA')
read(2007,*)device
close(2007,status='keep')

```

249

Nov 24 2000 01:02

AUTOMATIC

Page 39

```

goto 30230 ! ... and returning from there to level 37
*                                 just below
37 counter=(device+dilu2-2)*dilu ! simulating decide=0

write(3333,*)'echo',wn+1,' >Lcounter' ! and undoing it
* ... after the main execution automatic and its preli-
* minary success test execution10 in execution11
* SINCE AFTER THE INITIALIZATION BY THE THREE LINES BELOW
* LEVEL 30060, THE INFORMATION ABOUT decide IS GIVEN
* IMPLICITLY BY CHAIN RULES FOR THE FILE Lcounter WHICH
* ARE NOT SENSITIVE FOR ARTIFICIAL CHANGES IN decide

** write(3333,*)'echo',seed+1,' >Lseed' ! re-installing the
* alternative true counter for the read repetition since
* echo',wn+1,' >Lcounter IS GENERATING A TOO HIGH COUNTER
* IN ORDER TO GIVE THE INPUT SIGNAL for the read repetition
* since anyway the counter is manipulated for allowing to
* abbreviate the cycle of sweeps bound to the minimum dilu
** THERE IS ONE ADDITIONAL COMPLICATION: Lseed WILL FIRST BE
** OPENED SEVERAL LINES LATER (at present, there is still the
** default seed=1) - BUT THE INTERMEDIATE device HAS JUST
** THE RIGHT PROPERTIES BEFORE IT IS OVERWRITTEN BY device=dev :
write(3333,*)'echo',device+1,' >Lseed'
** WHERE +1 IS THE MISSING INCREMENTATION TO BE SUPPLEMENTED HERE

c device=dev ! retrieving the original device information
c since a different device was needed for the writing in
c execution11 in the emergency case presented at execution3

dev=1 ! storing the emergency information to dev
! for the line just below level 48

goto 40

!|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

38 open(7000,file='Lspecial') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
write(7000,*)2 !stopping execution3 !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
close(7000,status='keep') !in future !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
goto 50000 !stopping this program now!|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

39 open(1000,file='Link') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
read(1000,*)linkSTORE !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
close(1000,status='keep') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

40 do 45 i=1,d(1) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
do 44 j=1,d(2) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
do 43 k=1,d(3) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
do 42 l=1,d(4) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
do 41 m=1,d(5) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

link(i,j,k,l,m,1,1)= !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
& cplx(linkSTORE(i,j,k,l,m,1), !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
& linkSTORE(i,j,k,l,m,2)) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

link(i,j,k,l,m,1,2)= !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
& cplx(linkSTORE(i,j,k,l,m,3), !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
& linkSTORE(i,j,k,l,m,4)) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

link(i,j,k,l,m,2,1)= !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

```

Nov 24 2000 01:02

AUTOMATIC

Page 40

```

& cplx(-linkSTORE(i,j,k,l,m,3), !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
& linkSTORE(i,j,k,l,m,4)) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

link(i,j,k,l,m,2,2)= !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
& cplx(linkSTORE(i,j,k,l,m,1), !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
& -linkSTORE(i,j,k,l,m,2)) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

41 continue !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
42 continue !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
43 continue !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
44 continue !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
45 continue !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

if (wm.eq.0) goto 48 !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

46 do 47 i=1,3 ! will be done at ... !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
!!!!!!!!!!!! do 47 j=1,3 ! .. line level No. 6110 !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

do 47 j=1,128 ! .. line level No. 6110 !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
!!!!!!!!!!!!

if (j.lt.25) hscorrel(i,j)=0 ! completing correspondingly

hcorrel(i,j)=0 ! ... once again ... !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
47 continue ! ... in the standard case !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

48 open(3000,file='Lcounter') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
* if (filex !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
* ! IMAGINE THAT ONE IS JUMPING TO b )read... DIRECTLY !
* ! CORRESPONDING TO THE ORIGINAL SYNTAX WITH decide>=-1 ONLY
*
* a .and.(dev.eq.0) ! insertion (cf. 1. 37) !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
*
* b )read(3000,*)counter !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
* in principle possible but in this case to complicated for f77

if (filex.and.(dev.eq.0)) read(3000,*)counter

close(3000,status='keep') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
open(3000,file='Lcounter') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
if (.not.filex) write(3000,*)counter ! actually not necessary,
* just to give an example for the inverse handling,
* anyway : close and open between read and write
close(3000,status='keep') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

if (counter.ge.0) counter=counter+1 !for incrementation
* also acting on read files (cf. final writing operations, o.k.)

open(4000,file='Lseed') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
if (wm.eq.0) read(4000,*)seed !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|
close(4000,status='keep') !|\| |\| |\| |\| |\| |\| |\| |\|

```

AUTOMATIC

20

```

Nov 24 2000 01:02           AUTOMATIC                               Page 41
*-----+-----
*----- A D D E D T O M O N T 1 -----
*-----+-----
          if (wm.lt.1) wn=1
          WL=1

          if (device.eq.(-7)) switch=2-switch !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
*          CONSTRUCTING THE PURE VERSIONS FOR THE BASIC CASES  decide>1
*          .. where device=-7 is applied only !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          open(5000,file='Lwilson')           !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          if (wm.eq.0) read(5000,*)WL         !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          close(5000,status='keep')          !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          open(6000,file='Lcorrelator')       !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          if (wm.eq.0) read(6000,*)hscorrel  !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          close(6000,status='keep')          !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          wn=(wm/dilul)*dilul ! -> effectively !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          wm=counter ! as the second use of wm !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          n00tt=1 !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          if ((wm.le.0).or.(wm.gt.wn)) n00tt=-1 ! as a paranormal signature
          if ((counter.le.0).and.(switch.ne.1 ! alternative version
& )) switch=2-switch ! ... for truely negative Lcounter input
          if (n00tt.eq.1) goto 49 ! normal case !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          wm=wn ! in order to pass a barriere !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          if (counter.ne.wn+1) goto 730 ! SHOULD BE REALIZED THEN TRUELY !

          n00tt=0 ! signature for the SPECIAL CASE OF last wm REPETITIONS !
          seed=wn/dilul-dilu2+1 ! modifying a read file totally - important
          goto 730 ! links are read externally !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\| do 1111 wm=1,wn

          !!!!!49 do 1111 wm=counter,wn ! third use of wm !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
          * and finishing this loop after the first executions of writing
          * by passing to the formal outer loop do 1234 dd=4,4
          * !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          !!!!!IN ORDER TO INCREASE THE PORTABILITY OF THE PROGRAM....
          49 WM=COUNTER
          50 CONTINUE

```

```

Nov 24 2000 01:02           AUTOMATIC                               Page 42
C((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((

n00tt=wm          !444444444 !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
call cinit3tt     !444444444 !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

seedSM=wm        ! SM SM ! !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
call ransetSM(seedSM) ! SM SM ! !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          ttSM=1 ! ----- !

          Prozeduren: *         at four places in total

          ! ttSM=1      ! : 1=tt (profi) TO BE CHOSEN
          !                ! -> ranftt()

          ! ttSM=2      ! : 2=SM (fossil + minder-uncorreliert!)
          !                ! -> ranfSM()

          ! ttSM=3      ! : 3=rand(0) (billig und nur 1 seed)
          !                ! neither tt nor SM : simply rand(0)

          ! ttSM=4      ! : 4=rand(seed) SIMPLY AS AN EXPERIMENT
          ! ... BECAUSE .... : (nur 1 Wert pro seed: verboten weil korreliert)

          !                *         at four places in total ^^^^^^^^^^^^^^^^^
          !                *         at four places in total vvvvvvvvvvvvvvvvv

          C((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((

          if (decide.eq.3) ttSM=3           !/\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

          print*, '
          print*, ' seed = ',seed           !FOR TEST
          print*, 'counter = ',counter      !FOR TEST
          print*, 'link(2,4,4,1,4,2,1) = ',link(2,4,4,1,4,2,1) !FOR TEST
          print*, 'link(2,4,4,1,4,3,1) = ',link(2,4,4,1,4,3,1) !FOR TEST
          print*, 'link(2,4,4,1,4,3,2) = ',link(2,4,4,1,4,3,2) !FOR TEST
          print*, ' given starting amount for ... : WL = ',WL !FOR TEST
          if (wm.ne.1) print*, 'hcorrel(2,15) = ',hcorrel(2,15) !FOR TEST
          print*, '
          print*, '
          !FOR TEST

          *-----+-----
          *-----+-----

          !! [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1]
          * (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2) (2)
          !! [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1] [1]

```



```

Nov 24 2000 01:02      AUTOMATIC      Page 43

* v                                v *

!][!![]  !instead of!   do 720 i=1,d(1)  !][!![]
*) (?) (*) !instead of!  do 700 j=1,d(2)  *) (?) (*)
!][!![]  !instead of!   do 680 k=1,d(3)  !][!![]
*) (?) (*) !instead of!  do 660 l=1,d(4)  *) (?) (*)
!][!![]  !instead of!   do 640 m=1,d(5)  !][!![]

* ..... use a totally randomized scheme of link ordering
* ..... in order to prevent any inhomogeneities generated
* ..... by any systematic procedure due to default chains

      cho(15)=dd*nint(NN*dd)  !!!! <<< NOT  dd*nint(NN)**dd  >>> !!!!!
do 72 ij=1,cho(15)
set (7,ij)=0
72 continue
do 88 i=1,d(1)
do 86 j=1,d(2)
do 84 k=1,d(3)
do 82 l=1,d(4)
do 80 m=1,d(5)
cho(1)=i
cho(2)=j
cho(3)=k
cho(4)=l
cho(5)=m
cho(6)=1
cho(7)=1
do 74 ij=1,5
kl=6-ij
cho(6)=cho(6)+cho(7)*(cho(kl)-1)
cho(7)=cho(7)*d(kl)
cho(7+kl)=0
kl=cho(6)
74 continue
cho(7)=1
cho(13)=0
take (i,j,k,l,m)=kl
C((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((
!/|\||\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
!* FIRST OF FOUR PLACES:  !44444444 ! SM SM ! !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

76 if (ttSM.eq.1) ij=int(ranfth()*cho(15)+1)  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (ttSM.eq.2) ij=int(ranfSM()*cho(15)+1)  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (ttSM.eq.3) ij=int(rand(0)*cho(15)+1)  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

if (ttSM.eq.4) ij=int(rand(seed)*cho(15)+1)  !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
if (seed.eq.2147483647) seed=0                !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|
seed=seed+1                                    !/|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|\|

C((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((((

*****

if (ij.gt.cho(15)) goto 76

```

```

Nov 24 2000 01:02      AUTOMATIC      Page 44

* otherwise, rand(0)=1 is realized after many steps
* (especially, if NN and/or beta are not small)
* and causes unexpected loops which generate values
* set (kl,ij)>NN for kl<6 so that the argument tensor
* (l,j,k,l,m) of natural format NN^dd X dd would get
* paranormal components exceeding this size. as a conse-
* quence of that, inserting such values for i,j,k,l,m for
* the ensuing computation of p(ai,ak,r,s)=conjug(
* A link(q(ai,l,ak),q(ai,2,ak),q(ai,3,ak),q(ai,4,ak),q(ai,5,ak),s,r))
* the array sizes will be broken explicitly and cause the
* f77 fortran compiler stating a diagnosis like ...
* " *** TERMINATING a.out "
* " *** Received signal 11 (SIGSEGV) "
* " Segmentation Fault "

*****

if (set(7,ij).eq.1) goto 76
cho(6)=ij
cho(14)=i-j-kl
do 78 ij=1,7
set (ij,cho(ij+7)+kl)=cho(ij)
78 continue
80 continue
82 continue
84 continue
86 continue
88 continue
do 720 ii=1,d(1)
do 700 jj=1,d(2)
do 680 kkk=1,d(3)
do 660 ll=1,d(4)
do 640 mm=1,d(5)
ij=set(6,take(ii,jj,kkk,ll,mm))
i=set(1,ij)
j=set(2,ij)
k=set(3,ij)
l=set(4,ij)
m=set(5,ij)

!?????????!!?????????!?????????!?????????!?????????!?????????
if (switchX.eq.1) goto 89 !????? preserving true random ordering
i=ii !??? re-establishing the original systematic updating order
j=jj
k=kkk
l=ll
89 continue
!?????????!!?????????!?????????!?????????!?????????!?????????

* ^
!![] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []
*) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?) (?)
!! [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] [] []

* -----
C
C each link is specified by its limiting point with the
C smaller distance w.r.t. (1,1,1,1) and the number of the
C coordinate axis parallel to its direction:
C
C dd*N^dd specimen on a dd-dim N^dd-lattice with periodic
C boundary conditions
C *-----

```

```
Nov 24 2000 01:02 AUTOMATIC Page 45

do 360 ai=1,d(5)

psi(1)=i
psi(2)=j
psi(3)=k
psi(4)=l
phi(ai)=1
if (ai.eq.m) phi(ai)=0
do 160 ak=1,6
do 110 aj=1,5
chi(ai,aj,ak)=0
110 continue
if (abs(ak-2).eq.1) goto 120
chi(ai,ai,ak)=-1
psi(5)=1
*#####*
* if (ak.eq.2) psi(5)=NN
* if (psi(ai).eq.psi(5)) chi(ai,ai,ak)=NN-1
! MORE INVARIANT FORMULATION FOR ASYMMETRIC LATTICES REQUIRED :
if (ak.eq.2) psi(5)=d(ai)
if (psi(ai).eq.psi(5)) chi(ai,ai,ak)=d(ai)-1
*#####*
if (ak.eq.2) chi(ai,ai,ak)=-chi(ai,ai,ak)
120 psi(5)=m
if (abs(2*ak-9).ne.3) goto 130
chi(ai,m,ak)=1
*#####*
* if (psi(m).eq.NN) chi(ai,m,ak)=1-NN
! MORE INVARIANT FORMULATION FOR ASYMMETRIC LATTICES REQUIRED :
if (psi(m).eq.d(m)) chi(ai,m,ak)=1-d(m)
*#####*
130 if (abs(2*ak-7).eq.3) goto 140
chi(ai,5,ak)=ai-m
*-----*
C
C imposing periodic boundary conditions can already
C be implemented by choosing cyclic rules for the
C number deviation vector chi w.r.t. lattice sites
C
*-----*

140 do 150 aj=1,5
q(ai,aj,ak)=chi(ai,aj,ak)*phi(ai)+psi(aj)
150 continue
160 continue
do 190 r=1,2
do 180 s=1,2
do 170 ak=1,6

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!! JUST HERE AND CUTTING THREE ORDER LINES AROUND LINE 386/388 BY
* THE ASSOCIATED COLLECTIVE SYMBOL !!!

!!! changing from the preceding interpretation of the matrix scheme
!!!
!!!
!!!          U1      n+HAT[mu]
!!!          |
!!! n+HAT[nu] <-----+HAT[nu]
!!!          |
!!!          |
!!!          |
!!!          U2
!!!          |
```

```
Nov 24 2000 01:02 AUTOMATIC Page 46

!!!          U3      |
!!!          POINT n -----> n+HAT[mu] AS
!!!
!!!          U1.U2.U3      being equivalent to
!!!
!!! Conjugate[Tranpose[U_{mu}(n+HAT[nu])]].U_{nu}(n+HAT[mu]).U_{mu}(n)
!!!
!!! TO THE LEFT TO RIGHT IDENTIFICATION OF MATRIX MULTIPLICATION LIKE
!!!
!!! let @ abbreviate Conjugate[Tranpose[ ... ]]
!!!
!!! giving U1.U2.U3 -----> ((U1)@(U2)@(U3))@ @ = U3.U2.U1 being
!!!
!!! U_{mu}(n).U_{nu}(n+HAT[mu]).Conjugate[Tranpose[U_{mu}(n+HAT[nu])]]
* SO THAT Ui --> Ui@ HERE AND CONJUGATING HERMITICALLY THE HERMITEAN
!!! CONJUGATION BELOW BY DROPPING THE SAME ORDER ( @@ = Identity Order )

!!! p(ai,ak,r,s)=
!!! A link(q(ai,1,ak),q(ai,2,ak),q(ai,3,ak),q(ai,4,ak),q(ai,5,ak),r,s)
p(ai,ak,r,s)=conjg(
A link(q(ai,1,ak),q(ai,2,ak),q(ai,3,ak),q(ai,4,ak),q(ai,5,ak),s,r))
!!! EFFECTIVELY, EACH LINK VARIABLE WILL BE REPLACED BY ITS OWN HERMITEAN
!!! CONJUGATE BY THE TOTAL !!! PROCEDURE SO THAT THE INDIVIDUAL
!!! VALUES FOR THE 1X1 WILSON LOOPS ARE CHANGED BUT LESS THEIR AVERAGE
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

p(ai,ak+6,r,s)=cmplx(0)
170 continue
180 continue
190 continue

do 220 r=1,2
do 210 s=1,2
do 200 ak=1,2

p(ai,7,r,s)=p(ai,7,r,s)+conjg(p(ai,2,ak,r))*p(ai,3,ak,s)

200 continue
210 continue
220 continue

do 250 r=1,2
do 240 s=1,2
do 230 ak=1,2

p(ai,8,r,s)=p(ai,8,r,s)+conjg(p(ai,1,ak,r))*p(ai,7,ak,s)

230 continue
240 continue
250 continue

do 280 r=1,2
do 270 s=1,2
do 260 ak=1,2

p(ai,9,r,s)=p(ai,9,r,s)+p(ai,6,r,ak)*p(ai,5,ak,s)
c do not forget that later hermitean conjugation changes
c the order of the involved matrices

260 continue
```



```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 51

!----NEU----!----NEU----!----NEU----!----NEU----!
!----NEU----!      if (a(6).gt.a(4)) goto 440
      if (a(6).gt.a(4)) goto 622 !----NEU----! neu:dann kein updating

!----NEU----!----NEU----!----NEU----!----NEU----!

      link(i,j,k,l,m,3,2)=cmplx(num2,num3)
      a(5)=1-a(0)**2
!????????? !????????? !????????? !????????? !?????????
      a(4)=0 !?????
      if (a(-1).ge.10.**(-20)) a(4)=sqrt(a(5)/a(-1)) !?????
!?????]      a(4)=sqrt(a(5)/a(-1))
      do 450 r=1,3
      a(x)=a(x)*a(4)
      if (a(-1).lt.10.**(-20)) a(x)=sqrt(a(5)/3) !?????
!??]      ! due the rule of l'Hospital
!????????? !????????? !????????? !????????? !?????????
450 continue

      qsum(1,1)=cmplx(a(0),a(3))
      qsum(1,2)=cmplx(a(2),a(1))
      qsum(2,1)=-conjg(qsum(1,2))
      qsum(2,2)=conjg(qsum(1,1))

      do 480 r=1,2
      do 470 s=1,2
      do 460 ak=1,2
      pq(r,s)=pq(r,s)+qsum(r,ak)*psum(ak,s)
460 continue
470 continue
480 continue

      do 620 r=1,2
      do 600 s=1,2

*-----+-----
*----- A D E D T O M O N T 1 -----
*-----+-----
c      withdraw hermitean conjugation of psum without crossed indices
      psum(r,s)=cmplx(2-r)*conjg(psum(1,s))

!????????? !????????? !????????? !????????? !?????????
!?????]      qsum(r,s)=pq(r,s)/cmplx(kk)-link(i,j,k,l,m,r,s)

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 52

      if (bk.lt.10.**(-20)) qsum(r,s)=cmplx(1-iabs(r-s))-
1 link(i,j,k,l,m,r,s) ! due the rule of l'Hospital
      if (bk.ge.10.**(-20))
1 qsum(r,s)=pq(r,s)/cmplx(kk)-link(i,j,k,l,m,r,s)
!????????? !????????? !????????? !????????? !?????????

      if ((r.eq.s).and.(wm.eq.wmn))
A qsum(r,s)=cmplx(real(3)/real(5))-link(i,j,k,l,m,r,s)
      if ((r.ne.s).and.(wm.eq.wmn))
A qsum(r,s)=cmplx(0.,real(4)/real(5))-link(i,j,k,l,m,r,s)
c      initializing once again homogenously (the values may be
c      arbitrary but are chosen rationally and unequal to unity)

      WL=WL+real(psum(r,s)*qsum(r,s))/real(d(6))

c      do not divide a real by an integer and use NN instead of N
c      within the construction of d(6) above
*-----+-----
!????????? !????????? !????????? !????????? !?????????
!?????]      link(i,j,k,l,m,r,s)=pq(r,s)/cmplx(kk)
!??]      if (bk.lt.10.**(-20)) link(i,j,k,l,m,r,s)=cmplx(1-iabs(r-s))
!??]      ! due the rule of l'Hospital
      if (bk.ge.10.**(-20)) link(i,j,k,l,m,r,s)=pq(r,s)/cmplx(kk)
!????????? !????????? !????????? !????????? !?????????

      if ((r.eq.s).and.(wm.eq.wmn))
A link(i,j,k,l,m,r,s)=cmplx(real(3)/real(5))
      if ((r.ne.s).and.(wm.eq.wmn))
A link(i,j,k,l,m,r,s)=cmplx(0.,real(4)/real(5))
c      serving as test values for reinitialization

600 continue
620 continue

622 continue !----NEU----!----NEU----!----NEU----!----NEU----!

640 continue
660 continue
680 continue
700 continue
720 continue

730 continue ! just doing nothing
*      ! finishing no loop for instance !/|v|v|v|v|v|v|
*      see also at the new line of reference No. 730
*      only serving as a kind of formal bookmark !/|v|v|v|v|v|v|

```



```

Nov 24 2000 01:02 AUTOMATIC Page 79

    if ((r.eq.1).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)))
2 print*, 'passing wm = ',wm

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)))
2 print*, ' '

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
A .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)).and.
B (switch.eq.1).and.(r.eq.3)) print*,
C '4-plaq-HYBRIDIZATION --> UNITARY-1-plaq reconfiguration '
    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
A .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)).and.
B (switch.gt.1).and.(r.lt.3)) print*,
C 'UNITARY-1-plaq --> 4-plaq-HYBRIDIZATION reconfiguration '

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
2 '< THETA_{',ma,' ',mb,' } > of type',r,' : = ',
3 hcorrel(r,2)

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< DELTApure_{',ma,' ',mb,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,20)

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< w.r.t.PURE{',ma,' ',mb,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,25)

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< DELTAphys_{',ma,' ',mb,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,21)

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< w.r.t.PHYS{',ma,' ',mb,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,26)

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
2 '< THETA_{',mc,' ',md,' } > of type',r,' : = ',
3 hcorrel(r,3)

```

```

Nov 24 2000 01:02 AUTOMATIC Page 80

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< DELTApure_{',mc,' ',md,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,10)

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< w.r.t.PURE{',mc,' ',md,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,27)

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< DELTAphys_{',mc,' ',md,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,11)

    if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
& .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
& '< w.r.t.PHYS{',mc,' ',md,' } > of ',r,' : = ',hcorrel(r,28)

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)))
2 print*, ' '

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
A .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)).and.
B (switch.eq.1).and.(r.eq.3)) print*,
C '4-plaq-HYBRIDIZATION --> UNITARY-1-plaq reconfiguration '
    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
A .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)).and.
B (switch.gt.1).and.(r.lt.3)) print*,
C 'UNITARY-1-plaq --> 4-plaq-HYBRIDIZATION reconfiguration '

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) print*,
2 '< ',ma,' |',mb,' |',mc,' |',md,'>, type',r,' : = ',hcorrel(r,4)

    if ((wm.eq.wn).and.(i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2))
1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4)))
2 print*, ' '

6149 continue !C$C$C$C$ ... NO LIMIT FOR WRITING ....

!$#@.->!$#@.->!$#@.->!$#@.->!$#@.->!$#@.->!$#@.->!$#@.->!$#@.->

*#####*#####*#####*#####*#####*#####*#####
!
    asym

*ASYM*###
*ASYM*###
*ASYM*###
*ASYM*###

```

Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 81
IF (ASYM6.NE.0) GOTO 6153		
<pre> *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+2,*)wm,hcorrel(r,2) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+20,*)wm,hcorrel(r,20) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+25,*)wm,hcorrel(r,25) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+21,*)wm,hcorrel(r,21) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+26,*)wm,hcorrel(r,26) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+3,*)wm,hcorrel(r,3) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+10,*)wm,hcorrel(r,10) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+27,*)wm,hcorrel(r,27) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+11,*)wm,hcorrel(r,11) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+28,*)wm,hcorrel(r,28) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+4,*)wm,hcorrel(r,4) </pre>		

Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 82
<pre> *ASYM*000 *ASYM*000 *ASYM*000 GOTO 6155 6153 if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+2,*)hcorrel(r,2) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+20,*)hcorrel(r,20) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+25,*)hcorrel(r,25) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+21,*)hcorrel(r,21) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+26,*)hcorrel(r,26) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+3,*)hcorrel(r,3) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+10,*)hcorrel(r,10) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+27,*)hcorrel(r,27) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+11,*)hcorrel(r,11) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+28,*)hcorrel(r,28) if ((i.eq.d(1)).and.(j.eq.d(2)) 1 .and.(k.eq.d(3)).and.(l.eq.d(4))) 2 write(100*r+4,*)hcorrel(r,4) ! asym </pre>		


```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 89

open(1919,file='execution19')
write(1919,*)' ' ! in order to make execution19 empty

warn1=0
if (NN.gt.10) warn1=1
warn2=0

cont1(1)=beta
cont1(2)=NN

c!      cont1(3)=real(switchY)
cont1(3)=real(swi)

cont1(4)=real(dilu1)
cont1(5)=real(dilu2)
if (decide.eq.1) warn2=5

cont1(6)=dym
cont1(7)=real(ma)
cont1(8)=real(mb)
cont1(9)=real(mc)
cont1(10)=real(md)
cont1(11)=real(za)
cont1(12)=real(zb)
cont1(13)=real(zc)
cont1(14)=real(zd)
if (decide.eq.-1) warn2=14

inquire(file='Lcontinuation',exist=filcont)
inquire(file='Lsymbol',exist=filsymb)

if ((.not.filcont).and.(abs(decide).eq.1)) warn1=2
if (filcont.and.(decide.eq.0)) warn1=3
if ((.not.filsymb).or.(warn1.ne.3)) goto 20001

write(1111,*)'nice -19 execution19'
write(1919,*)'echo -8 >Ldevice'
write(1919,*)'nice -19 automatic'
write(1919,*)'chmod ugo+x execution10'
write(1919,*)'nice -19 execution10'
goto 50000 ! checking whether warn1=3 can be modified

20001 if ((.not.filcont).or.(abs(decide).ne.1)) goto 20003

***| ~~~~~
***|      open(10000,file='Lcontinuation')
***|      read(10000,*)cont2
***|      close(10000,status='keep')

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 90

***|      NOTE: THE MAXIMUM [NO.] FOR open((NO.),file=' .... ')
***|      IS 9999 , NOT MORE !!!!! SO .....

! [ AT LEAST THIS RELEVANT FOR [NO.]'s WITH THE LAST DIGIT BEING A ZERO ! ]
! [ so 11001 might be allowed like 11111 BUT CERTAINLY NOT 11000 ! ! ]

***| ~~~~~

open(1010,file='Lcontinuation')
read(1010,*)cont2
close(1010,status='keep')

do 20002 i=1,warn2
20002 if (cont1(i)-cont2(i).ne.0) warn1=1
      continue

20003 if (warn1.eq.0) goto 20006

open(1100,file='Lattention.WARNING')

print*,
a '#####'
write(1100,*)
a '#####'
print*,
a '#####'
a '#####'
print*,
a ' '
write(1100,*)
a ' '
print*,
a
write(1100,*)
a ' '

if (warn1.lt.2) goto 20004

if (warn1.eq.2) print*,
a 'DIE GEFORDERTE FORTSETZUNG/WIEDERHOLUNG MACHT KEINEN SINN '
if (warn1.eq.2) write(1100,*)
a 'DIE GEFORDERTE FORTSETZUNG/WIEDERHOLUNG MACHT KEINEN SINN '

if (warn1.eq.2) print*,
a 'DA DIE VORAUSGEHENDE ERMITTLUNG VON VORNE NOCH GAR NICHT '
if (warn1.eq.2) write(1100,*)
a 'DA DIE VORAUSGEHENDE ERMITTLUNG VON VORNE NOCH GAR NICHT '

if (warn1.eq.2) print*,
a 'STATTGEFUNDEN HAT - BITTE IN DIESEM FOLDER MIT ..... '
if (warn1.eq.2) write(1100,*)
a 'STATTGEFUNDEN HAT - BITTE IN DIESEM FOLDER MIT ..... '

```



```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 91

        if (warnl.eq.2) print*, ' '
        if (warnl.eq.2) write(1100,*) ' '

c!      if (warnl.eq.2) print*,
c!      a '          abs(decide)<>1'
c!      if (warnl.eq.2) write(1100,*)
c!      a '          abs(decide)<>1'

        if (warnl.eq.2) print*,
a '          decide<>-3,-2,-1,1'
        if (warnl.eq.2) write(1100,*)
a '          decide<>-3,-2,-1,1'

        if (warnl.eq.2) print*, ' '
        if (warnl.eq.2) write(1100,*) ' '

        if (warnl.eq.2) print*,
a ' STARTEN - DANN GIBT ES DIESES PROBLEM NICHT MEHR '
        if (warnl.eq.2) write(1100,*)
a ' STARTEN - DANN GIBT ES DIESES PROBLEM NICHT MEHR '

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' EINE ERNEUTE BENUTZUNG VON decide=0 WUERDE DAS BISHERIGE'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' EINE ERNEUTE BENUTZUNG VON decide=0 WUERDE DAS BISHERIGE'

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' dsmc -ARCHIV ALLER GESPEICHERTEN LINKS ZERSTOEREN, WAS'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' dsmc -ARCHIV ALLER GESPEICHERTEN LINKS ZERSTOEREN, WAS'

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' BEI GROESSEREN DATENMENGEN UND LANEGEREN RECHENZEITEN KAUM'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' BEI GROESSEREN DATENMENGEN UND LANEGEREN RECHENZEITEN KAUM'

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' ZU EMPFEHLEN SEIN DUERFTE, DA DER GEPLANTE PROZESS EBENSOGUT'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' ZU EMPFEHLEN SEIN DUERFTE, DA DER GEPLANTE PROZESS EBENSOGUT'

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' IN EINEM NEUEN FOLDER GESTARTETE WERDEN KANN - SOLLEN IM'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' IN EINEM NEUEN FOLDER GESTARTETE WERDEN KANN - SOLLEN IM'

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' FALLE EINES VORAUSGEHENDEN TESTS DIE LINK-DATEN DENNOCH'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' FALLE EINES VORAUSGEHENDEN TESTS DIE LINK-DATEN DENNOCH'

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' DURCH decide=0 KOMPAKT ZERSTOERT WERDEN, SO MUSS AUF'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' DURCH decide=0 KOMPAKT ZERSTOERT WERDEN, SO MUSS AUF'

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 92

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' EINEM UNIX-COMMANDTOOL DER BEFEHL: '
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' EINEM UNIX-COMMANDTOOL DER BEFEHL: '

        if (warnl.eq.3) print*, ' '
        if (warnl.eq.3) write(1100,*) ' '

        if (warnl.eq.3) print*,
a '          echo NO-NEW-FOLDER >Lsymbol '
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a '          echo NO-NEW-FOLDER >Lsymbol '

        if (warnl.eq.3) print*, ' '
        if (warnl.eq.3) write(1100,*) ' '

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' EINGEGEBEN UND DER VORGANG ( nohup AUTOMATIC & ) WIEDERHOLT '
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' EINGEGEBEN UND DER VORGANG ( nohup AUTOMATIC & ) WIEDERHOLT '

        if (warnl.eq.3) print*,
a ' WERDEN - DIE GESPEICHERTEN DATEN GEHEN DANN VERLOREN !!!!!'
        if (warnl.eq.3) write(1100,*)
a ' WERDEN - DIE GESPEICHERTEN DATEN GEHEN DANN VERLOREN !!!!!'

        goto 20005

20004 print*,
a ' -DIESER INPUT KANN SO NICHT BEARBEITET WERDEN - DENN :'
        write(1100,*)
a ' -DIESER INPUT KANN SO NICHT BEARBEITET WERDEN - DENN :'

        print*,
a ' '
        write(1100,*)
a ' '
        print*,
a ' '
        write(1100,*)
a ' '

c!      print*,
c!      a '          FUER decide =' ,decide,' IST NUR ERLAUBT: '
c!      write(1100,*)
c!      a '          FUER decide =' ,decide,' IST NUR ERLAUBT: '

c!      dev has the information of original device
c!      while device is adapted effectively - so :

        print*,
a '          FUER decide =' ,dev,' IST NUR ERLAUBT: '

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 93

      write(1100,*)
a '      FUER decide =',dev,' IST NUR ERLAUBT:      '

      print*,
a '
      write(1100,*)
a '
      print*,
a '
      write(1100,*)
a '

      if (warn2.gt.0) print*, 'beta =', cont2(1)
      if (warn2.gt.0) write(1100,*) 'beta =', cont2(1)

      if (warn2.eq.0) print*, 'NN <= 10'
      if (warn2.eq.0) write(1100,*) 'NN <= 10'

      if (warn2.gt.0) print*, 'NN =', nint(cont2(2))
      if (warn2.gt.0) write(1100,*) 'NN =', nint(cont2(2))
* OF COURSE ONLY FORMALLY BECAUSE NN IS A REAL MAGNITUDE IN f77 *

      if (warn2.eq.0) goto 20005

!c      print*, 'switchY =', nint(cont2(3))
      print*, 'swi =', nint(cont2(3))

      print*, 'dilul =', nint(cont2(4))
      print*, 'dilu2 =', nint(cont2(5))

!c      write(1100,*) 'switchY =', nint(cont2(3))
      write(1100,*) 'swi =', nint(cont2(3))

      write(1100,*) 'dilul =', nint(cont2(4))
      write(1100,*) 'dilu2 =', nint(cont2(5))

      if (warn2.eq.5) goto 20005

      print*, 'dym =', cont2(6)
      write(1100,*) 'dym =', cont2(6)

      print*, 'ma =', nint(cont2(7))
      print*, 'mb =', nint(cont2(8))

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 94

      print*, 'mc =', nint(cont2(9))
      print*, 'md =', nint(cont2(10))

      write(1100,*) 'ma =', nint(cont2(7))
      write(1100,*) 'mb =', nint(cont2(8))
      write(1100,*) 'mc =', nint(cont2(9))
      write(1100,*) 'md =', nint(cont2(10))

      print*, 'za =', nint(cont2(11))
      print*, 'zb =', nint(cont2(12))
      print*, 'zc =', nint(cont2(13))
      print*, 'zd =', nint(cont2(14))

      write(1100,*) 'za =', nint(cont2(11))
      write(1100,*) 'zb =', nint(cont2(12))
      write(1100,*) 'zc =', nint(cont2(13))
      write(1100,*) 'zd =', nint(cont2(14))

20005 print*,
a '
      write(1100,*)
a '
      print*,
a '
      write(1100,*)
a '
      print*,
a '#####'
      write(1100,*)
a '#####'
      print*,
a '#####'
      write(1100,*)
a '#####'

      goto 50000 ! should be totally sufficient

20006 if (decide.gt.1) goto 20007
      open(1010, file='Lcontinuation')
      write(1010,*) cont1
      close(1010, status='keep')

20007 open(2222, file='execution2')
      open(4444, file='execution4')
      open(6666, file='execution6')
      open(7777, file='execution7')
      open(8888, file='execution8')
      open(9999, file='execution9')

      open(1111, file='execution10') !already enabling the chmod assignment
      open(3333, file='execution11') !for the same reason - not execution3 !

```

Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 95
-------------------	------------------	---------

```

open(1313,file='execution13')
open(1515,file='execution15')
open(1717,file='execution17')

write(1111,*)'rm execution.old.*' ! just for the case of remnants

write(1111,*)'rm Lattention.WARNING' ! since this is the benign case
*(just in the case that such a remnants has survived from a previous run)

write(1111,*)' '
* ... in order to make it empty so that it is avoided that it still
* ... contains one more execution1 from the branch at level 38000

20008 open(2020,file='execution20') ! ANALYZING STATISTICAL ERRORS
open(2121,file='execution21') ! ANALYZING STATISTICAL ERRORS

write(1111,*)'chmod a+x execution*' ! .... RATHER EARLY
C ! .... FOR execution10
C ! .... AND execution15

if (abs(decide).ge.4) goto 20025 ! :: statistics

if (dev.eq.-3) write(1111,*)'mv Llink.old Llink'
!! IF A RUN WITH decide=-2 AND WITHOUT nohup .. & WAS INTERRUPTED
!! THERE STILL MIGHT EXIST Llink.old BUT NOT NECESSARILY THE
!! R E L E V A N T VERSION OF Llink (dev = EFFECTIVE decide HERE)

inquire(file='Lintern',exist=filint)
if (.not.filint) write(1111,*)'rm Lcounter'

if (decide.lt.0) goto 20020
write(1111,*)'rm Lcounter'
if (decide.le.1) write(1111,*)'rm Lintern'

! VORSICHT: dsmc SPEICHERT EIN FILE GLEICHEN NAMENS, WENN ES ZU VER-
! SCHIEDENEN ZEITPUNKTEN NACHEINANDER ARCHIVIERT WIRD, GLEICH MEHRFACH
if (decide.eq.0) write(1111,*) ! f77 : APOSTROPH ' INNERHALB ' ,
$ 'dsmc d ar -nopr 'Llink'' ' ! WIRD ZU DOPPEL-APOSTROPH '' also
! ... schreibt diese Zeile ins file 1111 dsmc d ar -nopr 'Llink''
! wobei die Apostroph-Umgebung und die (Nicht-Interaktiv=No-Prompt)-Option
! nicht im normalen Unix, sondern nur innerhalb der Archivierungsfunktion
! dsmc FUER EINEN HINTERGRUND-PROZESS NICHTTRIVIAL BENOETIGT WERDEN !!
! (ohne -nopr wuerde der Prozess stoppen, ohne ' ' muessten alle files

```

Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 96
-------------------	------------------	---------

```

! einzeln geloescht werden)

! if (decide.eq.0) write(1111,*)'echo 0 >Lrepetition'
! if (decide.ne.1) goto 20010
! ... this was unfortunately restricted to one set of links

! ... however there is no need for destroying old subfolders

! ... so the enumeration for various sets can start
! ... once per folder : .....

inquire(file='Lrepetition',exist=filrep)
if ((decide.eq.0).and(.not.filrep)) write(1111,*)
$ 'echo 0 >Lrepetition'

***! CONCERNING THE SOMEHOW DANGEROUS ORDERS : !***
***! write(1111,*)'dsmc a "L.*"' !***
***! if (repetition.lt.10) write(1111,(a,il,a')) !***
***! $ 'dsmc ret -rep=a "L.*" L.OLD.',repetition,/' ' ETC. !***
***! write(1111,*)'dsmc d ar -nopr "L.*"' !***
***! 20010 write(1111,*)'rm L.*' !***
***! TO BE CHANGED FROM write(1111,*) INTO write(1111,*) !***

*** PROBLEM: imagine an iteration of decide=0 so that the next
*** orders are relevant. IF THEY ARE DIRECTLY WRITTEN ON
*** execution1 THEY MIGHT BE REPEATED BY SOME B U G
*** OF THE UNIX SHELL AT THE END OF ONE EXECUTION OF THE
*** WHOLE PROGRAM COMPLEX when all other execution's are
*** removed (PERHAPS BECAUSE THE DESIRED FILES ARE NOT
*** LONGER AVAILABLE)

*** SOLUTION: use execution10 as an intermediate file which will
*** be destroyed in that form immediately after execution
*** ALSO HERE

write(1111,*)'nice -19 execution10' ! as an intermediate file !***
write(1111,*)'echo >execution10' ! be destroyed in that form !***

*** BEFORE THESE THINGS ARE ACTUALLY PURSUED IT WILL BE WRITTEN INTO
*** execution10 :

if (.not.filrep) goto 20010

open(8000,file='Lrepetition')
read(8000,*)repetition
close(8000,status='keep')

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 97

repetition=repetition+1

***!      write(11111,*)'dsmc a "L.*"'      !***
***!
***!      if ((repetition.lt.10).and.(repetition.lt.100))      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'      !***
      if ((repetition.ge.10).and.(repetition.lt.100))
$ write(11111,'(a,i2,a)')      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'
      if ((repetition.ge.100).and.(repetition.lt.1000))
$ write(11111,'(a,i3,a)')      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'
      if ((repetition.ge.1000).and.(repetition.lt.10000))
$ write(11111,'(a,i4,a)')      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'
      if ((repetition.ge.10000).and.(repetition.lt.100000))
$ write(11111,'(a,i5,a)')      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'
      if ((repetition.ge.100000).and.(repetition.lt.1000000))
$ write(11111,'(a,i6,a)')      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'
      if ((repetition.ge.1000000).and.(repetition.lt.10000000))
$ write(11111,'(a,i7,a)')      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'
      if ((repetition.ge.10000000).and.(repetition.lt.100000000))
$ write(11111,'(a,i8,a)')      !***
$ 'dsmc ret -rep="L.*" L.OLD.',repetition, '/'

C      SINCE SOMETIMES dsmc FAILS IT WILL BE BETTER TO INSERT INSTALLING
C      THE DEPOSIT DIRECTORIES BY HAND IF THEY ARE NOT CREATED YET AND TO
C      REPEAT THE MOVING = RENAMING PROCESS IN THE SAME MANNER.
C      THIS IS MORE SECURE THAN TO GENERALIZE dsmc FOR OTHER MACHINES
C      BY PIPES WITH A REMOTE SHELL - ssh AS DONE BELOW IF THERE IS NO
C      PRACTICAL (w.r.t. file space) ALTERNATIVE

*Retrieving      12,384 /home/tepl/holk/automa10/L.DELTApure.22.ownPURE --> */home/te
pl/holk/automa10/L.OLD.2/L.DELTApure.22.ownPURE .. ** Unsuccessful **
*ANS4081S *** Unknown system error 150; program ending ***
*
*>>>>> Retrieve Processing Interrupted!! <<<<<<
*ANS4081S *** Unknown system error 150; program ending ***
*
*Total number of objects retrieved:      23
*Total number of bytes transferred:      109.6 KB

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 98

      if (repetition.lt.10) write(11111,'(a,i1)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.10).and.(repetition.lt.100))
$ write(11111,'(a,i2)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.100).and.(repetition.lt.1000))
$ write(11111,'(a,i3)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.1000).and.(repetition.lt.10000))
$ write(11111,'(a,i4)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.10000).and.(repetition.lt.100000))
$ write(11111,'(a,i5)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.100000).and.(repetition.lt.1000000))
$ write(11111,'(a,i6)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.1000000).and.(repetition.lt.10000000))
$ write(11111,'(a,i7)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.10000000).and.(repetition.lt.100000000))
$ write(11111,'(a,i8)')
$ 'mkdir L.OLD.',repetition

C IN CONTRAST TO rm WITHOUT THE DANGEROUS OPTION -r
C (WHICH CAN SERVE FOR INDICATING THE EXISTING DIRECTORIES
C ON THE SHELL BY THE TYPICAL ERROR MESSAGES IN THE CASE OF
C ATTEMPTING - AS PURSUED BY 20010 write(1111,*)'rm L.*' )
C THE ORDER mv WILL INDEED ALSO AFFECT THE FOLDERS L.OLD.*

C THEREFORE, 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition WOULD BE REQUIRED

C BUT SOME SHELLS ARE NOT SUITED FOR THE EXCEPTIONAL SYMBOL '! ' !

C SO CALL IN ANY CASE THE bash AND LEAVE IT AFTERWARDS BY exit

C SINCE OTHER SHELLS (AND ESPECIALLY OFTEN THE bsh ) DO NOT
C CONDUCT BACK TO THE ORIGINAL PROMPT A TRIVIAL PIPE HAS TO BE
C INSTALLED WHICH REDIRECTS THE INPUT WHICH HAS TO BE CONCENTRATED
C TOWARDS ONE ORDER WHICH WILL BE NAMED execution15

      write(11111,*)'pwd | nice -19 execution15' ! C THE TRIVIAL PIPE

      write(1515,*)'bash' ! C THE BASH IN SUBPROGRAM execution15

      if (repetition.lt.10) write(1515,'(a,i1)')
$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.10).and.(repetition.lt.100))
$ write(1515,'(a,i2)')
$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.100).and.(repetition.lt.1000))
$ write(1515,'(a,i3)')
$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.1000).and.(repetition.lt.10000))
$ write(1515,'(a,i4)')
$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.10000).and.(repetition.lt.100000))
$ write(1515,'(a,i5)')
$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.100000).and.(repetition.lt.1000000))
$ write(1515,'(a,i6)')
$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition
      if ((repetition.ge.1000000).and.(repetition.lt.10000000))
$ write(1515,'(a,i7)')

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 99

$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition
if ((repetition.ge.10000000).and.(repetition.lt.100000000))
$ write(1515,'(a,i8)')
$ 'mv L.[!0]* L.OLD.',repetition

write(1515,*)'exit' ! C QUITTING THE BASH IN execution15

C DONE: AT LEAST THE SECOND DOUBLE PROCEDURE WILL BE SUCCESSFUL

if (decide.ne.0) goto 20009
* EMERGENCY SAVING OF THE MOST IMPORTANT LINK OF REFERENCE

if (repetition.lt.10) write(11111,'(a,i1)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

if ((repetition.ge.10).and.(repetition.lt.100))
$ write(11111,'(a,i2)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

if ((repetition.ge.100).and.(repetition.lt.1000))
$ write(11111,'(a,i3)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

if ((repetition.ge.1000).and.(repetition.lt.10000))
$ write(11111,'(a,i4)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

if ((repetition.ge.10000).and.(repetition.lt.100000))
$ write(11111,'(a,i5)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

if ((repetition.ge.100000).and.(repetition.lt.1000000))
$ write(11111,'(a,i6)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

if ((repetition.ge.1000000).and.(repetition.lt.10000000))
$ write(11111,'(a,i7)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

if ((repetition.ge.10000000).and.(repetition.lt.100000000))
$ write(11111,'(a,i8)')
$ 'mv Lstart.LINK.gz L.OLD.',repetition

20009 write(11111,*)'dsmc d ar -nopr "L.*"'          !***
***!          !***

c THE FILES L. WERE MOVED INTO THE FOLDER L.OLD.[repetition No.]
c WHICH WAS CREATED BY dsmc RETrieve JUST RIGHT NOW (BY CIRCUMVEN-
c TING THE UNIX BUG THAT mkdir L.OLD.[repetition No.] AND THEN
c mv L.* L.OLD.[repetition No.] DOES NOT WORK SO COMPACTLY

*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 100

* THE STORAGE PROGRAM IS NOT SUITED FOR MORE THAN 99999999 REPETITIONS *
*%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

open(8000,file='Lrepetition')
write(8000,*)repetition
close(8000,status='keep')

20010 CONTINUE ! [ mv L.OLD... is not applied in any situation - so
! 'rm L.*' will stay elementary necessary ]
WRITE(11111,*)'mv L.USR.tar.gz M.USR.tar.gz' ! IF EXISTING
write(11111,*)'rm L.*' ! clean up & ANNOUNCEMENT OF THE DIRECTORIES
WRITE(11111,*)'mv M.USR.tar.gz L.USR.tar.gz'
CC BECAUSE OF CONFUSIONS BETWEEN AUTOMATIC AND AUTOMATIC.OLD
CC L.USR.tar.gz WOULD BE INTERPRETED AS A SIMPLE FILE AND DELETED
CC IF FIST AUTOMATIC AND THEN AUTOMATIC.OLD IS APPLIED FOR decide=0
***!          !***
CC20010 write(11111,*)'rm L.*' !* only acting on files but not on directories
* ... so that fortunately this does not affect the subdirectories L.OLD.*
* ... which are completed structures being specified by L.last.programDOCU
***!          !***
***!          E N D   O F   T E R M          !***
***!          !***

open(9000,file='Lstep')
write(9000,*)0
close(9000,status='keep')

20020 if (decide.gt.1) goto 20023

write(1111,*)'echo -3 >Ldevice'
write(1111,*)'echo 1 >Lspecial'
write(1111,*)'nice -19 automatic'
write(1111,*)'chmod ugo+x execution*'

write(1111,*)'nice -19 execution17' ! DSMC generalization ONLY
write(1111,*)'nice -19 execution13' ! DSMC generalization ONLY

write(1111,*)'nice -19 execution3'
write(1111,*)'echo -4 >Ldevice'
write(1111,*)'nice -19 automatic'
write(1111,*)'chmod ugo+x execution5'

write(1111,*)'echo -3 >Ldevice'
write(1111,*)'echo 0 >Lspecial'
write(1111,*)'nice -19 execution5'

! DSMC generalization ONLY          ! DSMC generalization ONLY

```


Nov 24 2000 01:02

AUTOMATIC

Page 103

```

C .... THIS SUBSESSION IS DEVOTED TO MACHINES WITHOUT A DIRECT
C .... dsmc MECHANISM AND USES REMOTE SHELLS
C .... - IN THE OPPOSITE CASE THE DELETING OPERATIONS ARE JUST
C .... REPEATED WHICH WILL IMPLY NO FURTHER EFFECT
* (if at all - machines at the UR2 will have DSMC by default
* - but will not be knowing the ITP host TEP3 - -
* the crucial point is that EITHER dsmc AND/OR rsh tep3
* will be effective - so the idea will be realized once or attempted
* to be realized twice with the second trial being ineffective)
C .... - ON THE OTHER HAND, THE ABSENCE OF dsmc OBSERVED IN THE
C .... REMAINING CASES WILL HAVE CAUSED THE UNIX COMPILER TO
C .... NEGLECT (NO INTERPRETATION POSSIBLE) THE PRECEDING ORDER ...

c      if (decide.eq.0) write(1111,*) !
c      $ 'dsmc d ar -nopr 'Llink*' !

C IF FORMER LINK CONFIGURATIONS ARE NOT REMOVED EFFECTIVELY IN THE
C CASE OF decide=0 A DISTURBING DISORDER WILL BE GENERATED
C ***** IMPORTANT *****

      write(1717,*)
      & 'grep 'dsmc d ar -nopr' execution1 >execution18'
C PREPARING THE BASE FOR THE SECOND STEP write(1717,*)
c      & 'grep 'Llink*' execution18 >>execution15'
c
C BECAUSE IN THE TWO STEP PATTERN THE OCCURENCE OF INNER ' '
C WITHIN OUTER ' ' CAN BE AVOIDED SUCCESSFULLY
C (CF. THE PROBLEMS INVOLVED WITH TOO MANY ' - V. JUST BELOW)

      write(1717,*)'cat execution16 >execution15'
C PRESERVING THE EXECUTABLE CHARACTER WHICH WAS DEFINED FOR
C execution15 AND NOT FOR execution16 BY THE OPENING PROCEDURE

c      write(1111,*)'chmod a+x execution*' ! .... RATHER EARLY
c      ! .... FOR execution10
c      ! .... AND execution15

      write(1717,*)
      & 'grep 'Llink*' execution18 >>execution15'

C THE grep 'Llink*' execution18 >>execution15 HAS THE SAME EFFECT
C AS echo 'dsmc d ar -nopr 'Llink\*\'' >>execution15
C WHICH CANNOT BE TRANSPORTED TO THE f77 LANGUAGE EVEN WITHOUT
C THE ADDITIONALLY REQUIRED ' '
C NOTE: dsmc d ar -nopr 'Llink*' WOULD ONLY ACT DIRECTLY FROM
C A COMMAND TOOL BUT NOT FROM AN EXECUTABLE FILE SINCE SUCH A
C FILE WOULD GENERATE THE OUTPUT dsmc d ar -nopr Llink* ONLY!

      write(1717,*)'cat execution12 >execution18'
C MAKING USE OF THE EXECUTABLE CHARACTER OF execution18
C WHICH ALREADY WAS INSTALLED ABOVE IN CONTRAST TO execution12

      write(1717,*)'nice -19 execution18'

20022 write(1717,*)'mv execution13 execution11'
* STORING THE COMPLEX FILE WHICH IS ALREADY WRITTEN TO THE AUXILIARY
* FILE execution11 BECAUSE ENSUINGLY THE TRIVIAL ALTERNATIVE

```

Nov 24 2000 01:02

AUTOMATIC

Page 104

```

* VERSION WILL BE LOADED ... :

      write(1717,*)'echo 'echo >execution12'' >execution13'
      write(1717,*)'echo 'echo >execution14'' >>execution13'
      write(1717,*)'echo 'echo >execution18'' >>execution13' !!
! otherwise on tep3, execution18 would keep just the
! "echo >execution1[2,4,8,3]"(only ls -l execution1[2,4,8,3]
! is working really in unix) information which is totally
! harmless but a little bit disturbing since it will be called
! for each increment of the loop magnitude device -
! execution15 and execution16 have the advantage that they
! are not called at all if execution12 and execution14
! have been made empty - so they can be ignored without repentence !!
      write(1717,*)'echo 'echo >execution13'' >>execution13'
* BEING THE TRIVIAL ALTERNATIVE VERSION WHICH WILL EFFECTIVELY
* (FOR THAT GOAL, IT WILL BE SUFFICIENT TO MAKE THE FILES
* execution12, execution13, execution14 ONLY EMPTY -
* WITH execution13 IN LAST INSTANCE : --> SELF-DESTROYING)
* SWITCH OF ALL THE ARTIFICIAL AMELIORIZATIONS FOR RUNNING THE
* ARCHIVING PROGRAM dsmc ON A REMOTE HOST BEING CAPABLE OF IT

      write(1717,*)'dsmc a execution13'
* ATTEMPTING TO ARCHIVE THIS ALMOST VOID NEW INFORMATION DIRECTLY

      write(1717,*)'mv execution11 execution13'
* NOW THE OLD COMPLEX PROGRAM FOR USING REMOTE HOSTS IS MADE
* ACTIVE AGAIN BY MOVING IT BACK TO ITS ORIGINAL POSITION

      write(1717,*)'echo >execution11'
* NOUGT INFORMATION IS ASSIGNED TO execution11 FOR THE EXCLUSIVE
* PURPOSE OF CREATING IT NOW AGAIN SO THAT THE FOLLOWING COMMAND
* chmod +x CAN ACT ON IT AS EARLY AS REQUIRED FOR A CLEAN
* CONTINUATION OF THE WHOLE SUBSET OF PROGRAMS FOR device<-1

      write(1717,*)'dsmc ret -rep=a execution13'
* THIS IS THE INGENIOUS TRICK: IF dsmc DOES WORK ON THE SAME
* MACHINE WHICH IS RUNNING THE FORTRAN COMPILER JUST THIS dsmc
* WILL REPLACE THE ORIGINAL MORE COMPLEX REMOTE HOST PROGRAM
* execution13 BY THE ALMOST VOID TRIVIAL ALTERNATIVE GIVEN
* TO THE dsmc ARCHIVE WHEN THE ORIGINAL PROGRAM WAS MOVED
* TO execution11 - SO: IF AND ONLY IF dsmc IS INSTALLED
* IN THE FOREGROUND THE REMOTE SHELLS WILL BE DEACTIVATED

      write(1717,*)'dsmc d ar -nopr execution13'
* ERASING THE INTERMEDIATE INFORMATION DOWNLOADED TO dsmc

      write(1717,*)
      a 'grep -v 'cp execution15'' execution13 >execution18'
* SINCE execution18 SERVES AS SOME KIND OF ITERATION OF
* execution13 THE DELETING PROCEDURE OF THE ADDITIONAL
* LINES WHICH ARE ACQUIRED FROM execution3 HAS TO BE
* DISMISSED SINCE execution16 IS NOT YET PERFORMED
* (THIS IS OF COURSE NOT THE CASE FOR REGARDING execution15 )

      write(1717,*)'chmod +x execution*'
* ESPECIALLY TRANSFORMING THE FILES execution12,
* execution14, execution16 WHICH WERE NOT OPENED BY FORTRAN
* AND NOT ADDRESSED HITHERTO BY UNIX - /: MAKING THEM EXECUTABLE

```

AUTOMATIC

52

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 105
! DSMC generalization ONLY          ! DSMC generalization ONLY

goto 20024

20023 write(1111,*)'echo -1 >Ldevice'
      write(1111,*)'nice -19 automatic'
      write(1111,*)'chmod ugo+x execution*'
      write(1111,*)'nice -19 execution4'

      write(1111,*)'rm Lcounter'
      write(1111,*)'echo -7 >Ldevice'
      write(1111,*)'nice -19 automatic'
      write(1111,*)'nice -19 execution6'

20024 write(1111,*)'mv programDOCU L.last.programDOCU'

!$$#
!$$#
!$$#
!$$# IF mv programDOCU L.last.programDOCU IS USED ONLY HERE IT IS
!$$# TOO LATE BECAUSE IN THE CASE OF AN INTERRUPTING (E.G. BY A RE-
!$$# BOOTING OF THE MACHINE), L.last.programDOCU WILL NOT ANY MORE
!$$# BE GENERATED ON THE BASE OF THE CONTENTS OF programDOCU
!$$#
!$$# HOWEVER, SINCE L.last.programDOCU IS WRITTEN FOR EACH device=-1
!$$# IN THE SAME WAY (EVEN FOR THE MAGNITUDE switch SINCE switch=0 IS
!$$# SIMULATED AT A LATER PART OF THE EXECUTION OF THE PROGRAM SO THAT
!$$# ALWAYS THE DEFAULT switch=2 WILL BE INDICATED) AND mv DOES AUTO-
!$$# MATICALLY OVERWRITE ALREADY EXISTING FILES THE PROBLEM WOULD BE AT
!$$# LEAST (DISCARDING THE REAL OSCILLATION OF THE MAGNITUDE switch )
!$$# SOLVED BY APPLYING mv programDOCU L.last.programDOCU A SECOND AND
!$$# EARLIER TIME AFTER THE FIRST EXECUTION OF echo -1 >Ldevice (WITH
!$$# AN ENSUING nice -19 automatic CONSIDERED TO BE INCLUDED)
!$$#
!$$# IN ORDER TO ACHIEVE THIS THE MOST ELEGANT CONCEPT IS TO INSERT IT
!$$# AT THE FIRST STAGE (OF EXECUTING switch=2 EFFECTIVELY - AT THE
!$$# SECOND STAGE OF EXECUTING switch=0 EFFECTIVELY NOTHING CAN BE
!$$# ALTERED AS POINTED OUT JUST ABOVE: SO THERE IS NOTHING TO DO) EACH
!$$# COMPUTATIONAL CYCLE INTO execution3 ACCEPTING AN ARBITRARY NUMBER
!$$# OF SUPERFLUOUS BUT HARMLESS REPETITIONS (ONCE EACH DOUBLE EXECUTION
!$$# OF THE MAIN PROGRAM AFTER THE FIRST PART RESPECTIVELY) OF IT THEREBY
!$$#
!$$# (LOOK AT THE LINE ARTIFICIALLY MARKED BY 30220 AND THEN GO TWO
!$$# LINES MORE BELOW: THE NEW INSERTION IS THERE ALSO MARKED BY !$$# )
!$$#
!$$# AT THE LAST TIME (DIRECTLY HERE) THE switch=2 ASSIGNMENT IS JUST
!$$# REPEATED ONCE MORE SO THAT IT BECOMES THE LAST programDOCU INDEED
!$$#
!$$#
!$$#
      if (dev.lt.-1) write(1111,*)'mv Llink Mlink'
      if (dev.lt.-1) write(1111,*)'mv Llink.old Mlink'
!! if Llink.old and Llink are both available and different with
!! respect to each other, Llink is younger and if it is not yet dsmc
!! archived it is the wrong magnitude (if it is dsmc archived just
!! the archive will be taken for input and the rest will be discarded)

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 106

      write(1111,*)'rm Llink*' ! N O T AFFECTING Lstart.LINK.gz

      if (dev.lt.-1) write(1111,*)'mv Mlink Llink'
!! so that Llink is kept - since AT THE BEGINNING of the new program run
!! it will be needed for accessing Llink at .... mv Llink Llink.old
!! IF decide<=-2 IS CONTINUED BY decide=-3
!! ( dev = the EFFECTIVE decide HERE )
!! IF THIS PART REALLY IS EXECUTED IN A NORMAL MANNER THERE IS NOTHING
!! MORE TO CONTINUE - SO AT A FIRST GLANCE THE THINGS HERE SEEM TO BE
!! SUPERFLUOUS AND TO BE AN UNNECESSARY WASTE OF STORAGE PLACE
!! HOWEVER THE AUTO-SUICIDE COMMAND FOR THE WHOLE PROGRAM CANNOT
!! REALIZE THE STOPPING AS IMMEDIATE AS REQUIRED - SO NEVERTHELESS
!! THE PROBABILITY IS HIGH THAT THESE LINES ARE VISITED ANYWAY
!! THIS IMPLIES THAT FOR dev<=-2 THE SECURITY MECHANISM DISPLAYED
!! JUST ABOVE HAS TO BE INSTALLED
!!

      write(1111,*)'rm DELTA*' ! completing degenerate runs anyway
      write(1111,*)'rm THETA*' ! completing degenerate runs anyway
      write(1111,*)'rm ma.mb.*' ! completing degenerate runs anyway
      write(1111,*)'rm w.r.t.*' ! completing degenerate runs anyway
      write(1111,*)'rm wilson*' ! completing degenerate runs anyway

20025 write(1111,*)'nice -19 execution20' ! ANALYZING STATISTICAL ERRORS

      if (abs(decide).ge.4) goto 20026          ! :: statistics

*
* the following orders will be ineffective in the normal case
* of no artificial interrupting since then non-existing files
* have to be moved onto the original files which cannot cause
* any effect doing harm to these original files:

      write(1111,*)'mv automatic.old automatic'
      write(1111,*)'mv execution.old.2 execution2'

      write(1111,*)'mv execution.old.3 execution3' ! cf. 3 <---> 11
      write(1111,*)'mv execution.old.11 execution11'!open(3333,..), too

      write(1111,*)'mv execution.old.12 execution12' ! rsh ---> DSMC
      write(1111,*)'mv execution.old.13 execution13' ! rsh ---> DSMC
      write(1111,*)'mv execution.old.14 execution14' ! rsh ---> DSMC
      write(1111,*)'mv execution.old.15 execution15' ! rsh ---> DSMC
      write(1111,*)'mv execution.old.16 execution16' ! rsh ---> DSMC
      write(1111,*)'mv execution.old.17 execution17' ! rsh ---> DSMC
      write(1111,*)'mv execution.old.18 execution18' ! rsh ---> DSMC
      write(1111,*)'mv execution.old.19 execution19' ! rsh ---> DSMC

      write(1111,*)'mv execution.old.20 execution20' ! STATISTICS
      write(1111,*)'mv execution.old.21 execution21' ! STATISTICS

      write(1111,*)'mv execution.old.4 execution4'
      write(1111,*)'mv execution.old.5 execution5'
      write(1111,*)'mv execution.old.6 execution6'
      write(1111,*)'mv execution.old.7 execution7'
      write(1111,*)'mv execution.old.8 execution8'

```



```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 107

write(1111,*)'mv execution.old.9 execution9'
write(1111,*)'mv execution.old.10 execution10'

*      .... otherwise, the moved execution files are moved back
*      (they had then to be moved in order to stop the processes)

20026 write(1111,*)'rm .nfs* nohup.out'

      if (abs(decide).ge.4) goto 20027      !      ::      statistics

write(2222,*)'nice -19 automatic'

write(2222,*)'nice -19 execution13' ! DSMC generalization ONLY

write(2222,*)'nice -19 execution3'
write(2222,*)'rm nohup.out'

write(2222,*)'rm .nfs*'      ! deleting hidden files

20027 ya='cat -s L.'
      yb='mv L.'
      yc='DELTA'
      yd='THETA.'
      ye='correl.'
      yf(1)='w.r.t.PHYS.'
      yf(2)='w.r.t.PURE.'
      yg(1)='phys.'
      yg(2)='pure.'
      yh='own'
      yi='karsch'
      yj='cara'

      yk='HYBRID'
      yl='PURE'

      yk1='HYBRID'
      yk2='HYBRID'
      yk3='HYBRID'

      y11='PURE'
      y12='PURE'
      y13='PURE'

      d(1)=ma ! for possible generalizations
      d(2)=mb ! for possible generalizations
      d(3)=mc ! for possible generalizations
      d(4)=md ! for possible generalizations
*      because of d(1:4) not being used here any more

20028 ym(1)='1'
      ym(2)='2'

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 108

ym(3)='3'
ym(4)='4'

if (device.eq.-9) goto 20400

ym(1)=ym(ma)//ym(mb)///.'
ym(2)=ym(mc)//ym(md)///.'
yo(1)='ma.mb.'
yo(2)='mc.md.'
yp=' '
yq=' >L.'
yr=' L.'
ys='WilsonLOOP.'
yt='dim.4'

do 20040 i=1,2
do 20040 j=1,2
ya4(i,j)=yc/yg(i)//yn(j)
yb4(j)=yd/yn(j)
yc4=ye//yn(1)//yn(2)
yd4(i,j)=yf(i)//yn(j)
ya1(i,j)=ya/ya4(i,j)
yb1(j)=yb/yb4(j)
yc1=ya/yc4
yd1(i,j)=ya/yd4(i,j)
do 20040 k=1,3
ya5(i,j,k)=yc/yg(i)//yo(j)//ym(k)
yb5(j,k)=yd/yo(j)//ym(k)
yc5(k)=yo(1)//yo(2)//ym(k)
yd5(i,j,k)=yf(i)//yo(j)//ym(k)
ya2(i,j,k)=yp/ya5(i,j,k)//yq/ya5(i,j,k)
yb2(j,k)=yp/yb5(j,k)//yq/yb5(j,k)
yc2(k)=yp/yc5(k)//yq/yc5(k)
yd2(i,j,k)=yp/yd5(i,j,k)//yq/yd5(i,j,k)
ya3(i,j,k)=yb/ya5(i,j,k)//yr/ya4(i,j)
yb3(j,k)=yb/yb5(j,k)//yr/yb4(j)
yc3(k)=yb/yc5(k)//yr/yc4
yd3(i,j,k)=yb/yd5(i,j,k)//yr/yd4(i,j)
20040 continue
ye4=ys
ye1=ya//ye4
ye5=ys//yt
ye2=yp//ye5//yq//ye5
ye3=yb//ye5//yr//ye4

if (abs(decide).ge.4) goto 20400      !      ::      statistics

do 20080 i=1,2
do 20080 j=1,2
write(4444,20060) ya1(i,j),yh,yk1,ya2(i,j,1)
20060 format(a,a,a,a)
write(4444,20060) ya1(i,j),yi,yk2,ya2(i,j,2)
write(4444,20060) ya1(i,j),yj,yk3,ya2(i,j,3)
20080 continue
do 20100 j=1,2
write(4444,20060) yb1(j),yh,yk1,yb2(j,1)
write(4444,20060) yb1(j),yi,yk2,yb2(j,2)
write(4444,20060) yb1(j),yj,yk3,yb2(j,3)
20100 continue
write(4444,20060) yc1,yh,yk1,yc2(1)
write(4444,20060) yc1,yi,yk2,yc2(2)
write(4444,20060) yc1,yj,yk3,yc2(3)

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 109
do 20120 i=1,2
do 20120 j=1,2
write(4444,20060)yd1(i,j),yh,yk1,yd2(i,j,1)
write(4444,20060)yd1(i,j),yi,yk2,yd2(i,j,2)
write(4444,20060)yd1(i,j),yj,yk3,yd2(i,j,3)
20120 continue
20140 format(a,a,a)
write(4444,20140)ye1,yk,ye2

do 20160 i=1,2
do 20160 j=1,2
write(4444,20140)ya3(i,j,1),yh,yk
write(4444,20140)ya3(i,j,2),yi,yk
write(4444,20140)ya3(i,j,3),yj,yk
20160 continue
do 20180 j=1,2
write(4444,20140)yb3(j,1),yh,yk
write(4444,20140)yb3(j,2),yi,yk
write(4444,20140)yb3(j,3),yj,yk
20180 continue
write(4444,20140)yc3(1),yh,yk
write(4444,20140)yc3(2),yi,yk
write(4444,20140)yc3(3),yj,yk
do 20200 i=1,2
do 20200 j=1,2
write(4444,20140)yd3(i,j,1),yh,yk
write(4444,20140)yd3(i,j,2),yi,yk
write(4444,20140)yd3(i,j,3),yj,yk
20200 continue
write(4444,'(a,a)')ye3,yk

do 20220 i=1,2
do 20220 j=1,2
write(6666,20060)yal(i,j),yh,y11,ya2(i,j,1)
write(6666,20060)yal(i,j),yi,y12,ya2(i,j,2)
write(6666,20060)yal(i,j),yj,y13,ya2(i,j,3)
20220 continue
do 20240 j=1,2
write(6666,20060)ybl(j),yh,y11,yb2(j,1)
write(6666,20060)ybl(j),yi,y12,yb2(j,2)
write(6666,20060)ybl(j),yj,y13,yb2(j,3)
20240 continue
write(6666,20060)ycl,yh,y11,yc2(1)
write(6666,20060)ycl,yi,y12,yc2(2)
write(6666,20060)ycl,yj,y13,yc2(3)

do 20260 i=1,2
do 20260 j=1,2
write(6666,20060)yd1(i,j),yh,y11,yd2(i,j,1)
write(6666,20060)yd1(i,j),yi,y12,yd2(i,j,2)
write(6666,20060)yd1(i,j),yj,y13,yd2(i,j,3)
20260 continue
write(6666,20140)ye1,y1,ye2

do 20280 i=1,2
do 20280 j=1,2
write(6666,20140)ya3(i,j,1),yh,y1
write(6666,20140)ya3(i,j,2),yi,y1
write(6666,20140)ya3(i,j,3),yj,y1
20280 continue
do 20300 j=1,2
write(6666,20140)yb3(j,1),yh,y1
write(6666,20140)yb3(j,2),yi,y1

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 110
write(6666,20140)yb3(j,3),yj,y1
20300 continue
write(6666,20140)yc3(1),yh,y1
write(6666,20140)yc3(2),yi,y1
write(6666,20140)yc3(3),yj,y1
do 20320 i=1,2
do 20320 j=1,2
write(6666,20140)yd3(i,j,1),yh,y1
write(6666,20140)yd3(i,j,2),yi,y1
write(6666,20140)yd3(i,j,3),yj,y1
20320 continue
write(6666,'(a,a)')ye3,y1

write(7777,*)'rm LcounterA'
write(7777,*)'rm LdeviceA'
write(7777,*)'rm LseedA'
write(7777,*)'rm LwilsonA'
write(7777,*)'rm LcorrelatorA'

write(7777,*)'rm LcounterB'
write(7777,*)'rm LdeviceB'
write(7777,*)'rm LseedB'
write(7777,*)'rm LwilsonB'
write(7777,*)'rm LcorrelatorB'

write(7777,*)'cp LcounterAB LcounterAAA'
write(7777,*)'cp LdeviceAB LdeviceAAA'
write(7777,*)'cp LseedAB LseedAAA'
write(7777,*)'cp LwilsonAB LwilsonAAA'
write(7777,*)'cp LcorrelatorAB LcorrelatorAAA'

write(7777,*)'cp Lcounter LcounterBBB'
write(7777,*)'cp Ldevice LdeviceBBB'
write(7777,*)'cp Lseed LseedBBB'
write(7777,*)'cp Lwilson LwilsonBBB'
write(7777,*)'cp Lcorrelator LcorrelatorBBB'

write(7777,*)'rm LcounterAA'
write(7777,*)'rm LdeviceAA'
write(7777,*)'rm LseedAA'
write(7777,*)'rm LwilsonAA'
write(7777,*)'rm LcorrelatorAA'

write(7777,*)'rm LcounterBB'
write(7777,*)'rm LdeviceBB'
write(7777,*)'rm LseedBB'
write(7777,*)'rm LwilsonBB'
write(7777,*)'rm LcorrelatorBB'

write(8888,*)'cp LcounterAB LcounterA'
write(8888,*)'cp LdeviceAB LdeviceA'
write(8888,*)'cp LseedAB LseedA'
write(8888,*)'cp LwilsonAB LwilsonA'
write(8888,*)'cp LcorrelatorAB LcorrelatorA'

write(8888,*)'cp LcounterB'
write(8888,*)'cp LdeviceB'

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 111

write(8888,*)'cp Lseed LseedB'
write(8888,*)'cp Lwilson LwilsonB'
write(8888,*)'cp Lcorrelator LcorrelatorB'

* at this stage, at least one cycle can be regarded as being closed

write(9999,*)'rm LcounterAAA'
write(9999,*)'rm LdeviceAAA'
write(9999,*)'rm LseedAAA'
write(9999,*)'rm LwilsonAAA'
write(9999,*)'rm LcorrelatorAAA'

write(9999,*)'rm LcounterBBB'
write(9999,*)'rm LdeviceBBB'
write(9999,*)'rm LseedBBB'
write(9999,*)'rm LwilsonBBB'
write(9999,*)'rm LcorrelatorBBB'

write(9999,*)'cp LcounterAB LcounterAA'
write(9999,*)'cp LdeviceAB LdeviceAA'
write(9999,*)'cp LseedAB LseedAA'
write(9999,*)'cp LwilsonAB LwilsonAA'
write(9999,*)'cp LcorrelatorAB LcorrelatorAA'

write(9999,*)'cp Lcounter LcounterBB'
write(9999,*)'cp Ldevice LdeviceBB'
write(9999,*)'cp Lseed LseedBB'
write(9999,*)'cp Lwilson LwilsonBB'
write(9999,*)'cp Lcorrelator LcorrelatorBB'

write(9999,*)'rm LcounterAB'
write(9999,*)'rm LdeviceAB'
write(9999,*)'rm LseedAB'
write(9999,*)'rm LwilsonAB'
write(9999,*)'rm LcorrelatorAB'

write(9999,*)'rm Lcounter'
write(9999,*)'rm Lseed'
write(9999,*)'rm Lwilson'
write(9999,*)'rm Lcorrelator'

write(9999,*)'echo -3 >Ldevice'

20400 ym(0)='0'
      ym(5)='5'
      ym(6)='6'
      ym(7)='7'
      ym(8)='8'
      ym(9)='9'

errortag='L.ERROR'

do 20420 i=0,6
do 20420 j=0,9
if (abs(2*(i+j)-15).eq.15) goto 20420
errorlabel(10*i+j)=errortag//ym(i)//ym(j)

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 112

20420 continue

      if (device.eq.-9) goto 20800

      ykk='cp L.'

      yll(1)='mv '
      yll(2)=' L.'

      ykl(1)=yh//ykl
      ykl(2)=yi//ykc2
      ykl(3)=yj//ykc3
      ykl(4)=yh//yll//yp//yp
      ykl(5)=yi//yl2//yp//yp
      ykl(6)=yj//yl3//yp//yp

      ylk(1)=yk
      ylk(2)=yl//yp//yp

do 20460 k=1,6
write(2020,20440)ykk,yc4,ykl(k),errorlabel(k)

20440 format(a,a,a,ix,a)

do 20460 j=1,2
write(2020,20440)ykk,yb4(j),ykl(k),errorlabel(j+2*k+4)

do 20460 i=1,2
write(2020,20440)
* ykk,ya4(i,j),ykl(k),errorlabel(2*i+4*j+8*k+5)
write(2020,20440)
* ykk,yd4(i,j),ykl(k),errorlabel(2*i+4*j+8*k+6)

20460 continue

do 20480 k=1,2
write(2020,20440)ykk,ye4,ylk(k),errorlabel(k+66)

20480 continue

write(2121,*)'rm L.ERROR*'

write(2020,*)'echo -9 >Ldevice'
write(2020,*)'nice -19 automatic'

write(2020,*)'nice -19 execution21'

do 20620 k=1,6
write(2020,20600)yll(1),errorlabel(k),yll(2),yc4,ykl(k)

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 113

20600 format (a,a,a,a,a)
do 20620 j=1,2
write(2020,20600)
* yll(1,errorlabel(j+2*k+4),yll(2),yb4(j),yk1(k))
do 20620 i=1,2
write(2020,20600)
* yll(1,errorlabel(2*i+4*j+8*k+5),yll(2),ya4(i,j),yk1(k))
write(2020,20600)
* yll(1,errorlabel(2*i+4*j+8*k+6),yll(2),yd4(i,j),yk1(k))

20620 continue
do 20640 k=1,2
write(2020,20600)
* yll(1,errorlabel(k+66),yll(2),ye4,yk(k))

20640 continue

goto 50000

* ..... STATISTICS ..... STATISTICS .....
* ..... STATISTICS ..... STATISTICS .....
* ..... STATISTICS ..... STATISTICS .....
* ..... STATISTICS ..... STATISTICS .....
* ..... STATISTICS ..... STATISTICS .....

20800 do 20866 ifileno=1,68

JFILENO=IFILENO

CCCCCCC IF (IFILENO.EQ.6) JFILENO=0
***** open(6, ...) WAERE ZUM BILDSCHIRM KORRELIERT UND
***** ERZEUGT IN f77 NICHT DIREKT ANGEZEIGTE FEHLER !

IF (IFILENO.EQ.6) JFILENO=69
CCCCCCC WEIL close(0) DAS PROGRAMM ZU UNSINN VERANLAESST !!!
CCCCCCC (DER REST WAERE O. K. - IM GEGENSATZ ZU (6), (6,...) )

open ! performing an opening loop using character variables
* (JFILENO,file=errorlabel(ifileno),status='old',err=20866)

icounter=0
rstore(1)=0
rstore(2)=0
rstore(3)=0 ! : nur 2 gleiche Inputs - unabhaengig von rstore(3)
* gesperrt, nur Verlaufswege dafuer abhaengig von rmeas(isafe(2)),<>

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 114

20805 read(JFILENO,*,end=20810,err=20810)imeas,rmeas(imeas)
goto 20805 ! WEIL endfile AUF 'MANUELLES' VORSPULEN ANGEWIESEN IST
! im Gegensatz zu rewind
! ( EINFACHSTE SYNTAX DAFUER WAERE : rewind JFILENO )

20810 endfile JFILENO ! diese + die naechste Zeile sind rein formal
backspace JFILENO ! undoing going behind the EOF record

20811 backspace(JFILENO,err=20817) ! Klauseln nur in Klammern

*ASYM*@@@ read(JFILENO,*,end=20866,err=20866)imeas,rmeas(imeas)
*ASYM*@@@ ! err SCHLAEFT NUR IN 'RUECKWAERTS'-RICHTUNG
*ASYM*@@@
*ASYM*@@@ im 3D-plot-Modus kann u. a. hier ein "Fehler" auftreten,
*ASYM*@@@ der durch err=20866 handzuhaben waere - BEI DEN MEHR
*ASYM*@@@ ALS 64 HIER BETROFFENEN FILES JEDOCH WUERDE DER f77 -
*ASYM*@@@ COMPILER MIT DER FEHLERMELDUNG 'too many open files' AB-
*ASYM*@@@ STUERZEN, WAS ZWAR SEHR WOHL IM HARMONISCHEN EINKLANG MIT
*ASYM*@@@ DEM GESAMT-KETTENPROZESS ALS SOLCHEM STEHT, JEDOCH LEIDER
*ASYM*@@@ EIN CA. 17 MB SCHWERES core -FILE ZURUECKLAESST, WELCHES
*ASYM*@@@ EINFACH UNNOETIGERWEISE ZU VIEL SPEICHERPLATZ VERBRAEHT:
*ASYM*@@@ als ABHILFE moeglichst auch bei "fehlerhaften" run die
*ASYM*@@@ die geoeffneten files nach Moeglichkeit schliessen, was
*ASYM*@@@ durch eine Ersetzung von "Hintertuer" 20866 durch "Hin-
*ASYM*@@@ tertuer" 20855 innerhalb der open - close -Umgebungen
*ASYM*@@@ erreicht werden kann und jetzt vorgenommen wird:
*ASYM*@@@
*ASYM*@@@ read(JFILENO,*,end=20855,err=20855)imeas,rmeas(imeas)
! err SCHLAEFT NUR IN 'RUECKWAERTS'-RICHTUNG

* write(*,*)imeas,rmeas(imeas)
! Bildschirm-Kontrolle wie write(6,*) und print*,

backspace JFILENO
c KOMPENSIERT EFFEKT VON VORANGEHENDEM read UND IST DAHER
C error -FREI --> TRIVIAL-NOTATION

icounter=icounter+1
isafe(icounter)=imeas
if (icounter.eq.1) rdelta(imeas)=0
rstore(1)=rstore(1)+rmeas(imeas)
rstore(2)=rstore(2)+rmeas(imeas)**2
if (icounter.eq.1) goto 20811
if (imeas.lt.isafe(icounter-1)) goto 20818
if (imeas.gt.isafe(icounter-1)) goto 20815
if (rmeas(imeas).ne.rstore(3)) goto 20815
goto 20816
20815 if (decide.eq.4) goto 20811

*ASYM*@@@
*ASYM*@@@
*ASYM*@@@
*ASYM*@@@ goto 20866
*ASYM*@@@

goto 20855 ! ( siehe vorangehenden *ASYM*@@@ -ABSCHNITT )
*ASYM*@@@

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 115

20816 icounter=icounter-1 ! ERSATZ FUER FEHLENDE err -AUSFUEHRUN- ...
      imeas=isafe(icounter)
20817 rstore(3)=rdelta(imeas)

      goto 20822          ! ... GEN IN backspace(...) UND read(...)
20818 rstore(3)=rmeas(imeas)
      if (decide.eq.4) goto 20811
      rdelta(imeas)=sqrt(abs(
* rstore(2)-rstore(1)**2/real(icounter)
* )/real(icounter-1))
* THE STANDARD DEVIATION FOR THE REGARDED SINGLE-TERM MEASUREMENT
* IS TAKEN FROM THE SET OF ALL REMAINING MEASUREMENTS (INCLUDING
* THE ANALYZED VALUE) BUT IS NOT INCLUDING THE QUALITATIVELY
* WORSE MEASUREMENTS TAKEN BEFORE THAT EVALUATION OF REFERENCE

c in Ausnahme-Faellen, wo alle Punkte in der zeitlichen Umgebung irgend-
c eines sweeps jeweils stark aber stets ungefaehr gleich stark streuen,
c nimmt der mittlere Fehler des Mittelwertes natuerlich zum Ende der
c sweeps hin trompetenartig zu, weil hier per Vorgabe weniger Streuun-
c gen kollektiv abgeglichen und quasi-nivelliert werden

      goto 20811
20822 close(JFILENO,err=20866) ! BEI MEHRZEILIGEN FILES KOENNEN TAT-
      ! SAECHLICH close -FEHLER AUFTRETEN,
      ! DIE DAS PROGRAMM DANN EINFACH OHNE
      ! ERSICHTLICHEN GRUND ABSTUERZEN LAS-
      ! SEN, WAS NICHT SEIN MUSS, WENN DANN
      ! AUF WEITERE FILE-MODIFIKATIONEN DES
      ! KRITISCHEN FILES VERZICHTET WIRD
      if ((icounter.lt.2).and.(decide.ne.4)) goto 20866

      open !          IF EVERYTHING WAS O.K. NOW OPEN IT AGAIN
      * (JFILENO,file=errorlabel(ifileno))

20844 imeas=isafe(icounter)
      if (decide.eq.5)
      * write(JFILENO,*)imeas,rmeas(imeas),rstore(3)
      if (decide.eq.4) write(JFILENO,*)imeas,rmeas(imeas)

      if (decide.lt.4)
      * write(JFILENO,*)imeas,rmeas(imeas),rdelta(imeas)
* gnuplot: plot "L.E. ..." using 1:2 OR plot "L.E. ..." with errorbars
* BUT: plot "L.E. ..." IS WORKING LIKE plot "L.E. ..." using 1:2
* SO: IN gnuplot AS WELL AS IN xgraph , A THIRD COLUMN IS IGNORED
* IN THE NORMAL MODE SO THAT THERE IS NO NEED TO KEEP THE TWO-COLUMN VER-
* SIONS OF THE OLD DATA LISTS - AND ONE CAN EVEN GO ONE STEP BEYOND:
* IMAGINE THAT THE PROGRAM IS INTERRUPTED AND CONTINUED AFTERWARDS:
* THIS ELEMENT CAN USE INPUT FILES WITH A MIXED MODE OF TWO AND THREE
* COLUMNS AND BOTH OF THE PLOT SYSTEMS CITED JUST ABOVE CAN HANDLE SUCH
* A SITUATION EITHER: SO THERE IS NO NEED AT ALL TO STAY WITH PURE TWO-
* COLUMN VERSIONS

* EVEN THE 3D PLOT splot "L.blabla.2" using 2 IS WORKING FORMALLY -
* THE ONLY DANGER IS WITH ERROR BARS: SOMETIMES IT FAILS DUE TO TOO HIGH
* DENSITY: IN SUCH A CASE, MAKE A DIFFERENT SUCCESSFUL PLOT FIRST AND THEN
* ENLARGE THE PICTURE TOOL AS LARGE AS POSSIBLE, TRY AGAIN AND IF IT IS
* SUCCEEDING NOW MAKE IT SMALLER AGAIN AFTERWARDS (IT IS JUST A TRICK)

* REMEMBER: EACH PLOT IN AN ENUMERATION ORDER WOULD NEED AN ATTRIBUTE

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 116

* ' with errorbars ' IN TURN IF DESIRED - OTHERWISE ONLY THE LAST OF
* THE PLOTS CALLED SIMULTANEOUSLY WOULD DEPICT ERROR BARS IN gnuplot

      if (icounter.eq.1) goto 20855
      icounter=icounter-1
      goto 20844
20855 close(JFILENO,err=20866)
20866 continue

      open(2121,file='execution21')
      write(2121,*)' ' ! MAKING IT EMPTY AFTER A SUCCESSFUL RUN ONLY

* :::::::::::::::::::: STATISTICS :::::::::::::::::::: STATISTICS ::::::::::::::::::::
* :::::::::::::::::::: STATISTICS :::::::::::::::::::: STATISTICS ::::::::::::::::::::
* :::::::::::::::::::: STATISTICS :::::::::::::::::::: STATISTICS ::::::::::::::::::::
* :::::::::::::::::::: STATISTICS :::::::::::::::::::: STATISTICS ::::::::::::::::::::
* :::::::::::::::::::: STATISTICS :::::::::::::::::::: STATISTICS ::::::::::::::::::::

      goto 50000

30000 open(3333,file='execution3')
      open(1919,file='execution19')

      inquire(file='LcorrelatorB',exist=file3)
      inquire(file='LcorrelatorBB',exist=file4)
      inquire(file='LcorrelatorBBB',exist=file5)

      inquire(file='Lintern',exist=filint)

      intern=1
      if (.not.filint) intern=0
      if (intern.eq.0) goto 30060

      if (file3) goto 30020
      write(3333,*)'cp LcounterAA Lcounter'
      open(2002,file='LdeviceAA')
      read(2002,*)device
      close(2002,status='keep')
      write(3333,*)'cp LseedAA Lseed'
      write(3333,*)'cp LwilsonAA Lwilson'
      write(3333,*)'cp LcorrelatorAA Lcorrelator'

30020 if (file4) goto 30040
      write(3333,*)'cp LcounterAAA Lcounter'
      open(2003,file='LdeviceAAA')
      read(2003,*)device
      close(2003,status='keep')
      write(3333,*)'cp LseedAAA Lseed'
      write(3333,*)'cp LwilsonAAA Lwilson'
      write(3333,*)'cp LcorrelatorAAA Lcorrelator'

30040 if (file5) goto 30050
      write(3333,*)'cp LcounterA Lcounter'
      open(2001,file='LdeviceA')
      read(2001,*)device
      close(2001,status='keep')
      write(3333,*)'cp LseedA Lseed'
      write(3333,*)'cp LwilsonA Lwilson'
      write(3333,*)'cp LcorrelatorA Lcorrelator'

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 117

    if (device.le.wn/dilu1-dilu2) goto 30050
* ... should be trivial for decide>=0

* ... and helping in order to realize a true aborting ....
* ... for decide=-1 if the set of links already is full
* ... BY MEANS OF ....
    write(3333,*)'echo -1 >LdeviceBA'
    write(3333,*)'echo -6 >LdeviceC'
    write(3333,*)'nice -19 automatic'
    write(3333,*)'nice -19 execution10' ! ( TOTALLY )
    goto 50000 ! ( IMMEDIATELY )
* ... ACTING IMMEDIATELY & TOTALLY IN THE FIRST SUPERFLUOUS LOOP

30050 if (decide.eq.-1) write(3333,*)
    a 'echo', (device+dilu2-1)*dilu1, '>Lcounter'
! ... being a trivial operation [ DECIDE=0 & stop --> DECIDE=-1 ]
! ... EXCEPT in the case of a continuation decide=-1
! ... of an [ ADDITIONALLY INERTED ] READING decide=1
! ... after an (quite normal) incomplete computation decide=0
! ... [ DECIDE=0 & stop --> DECIDE=1 --> DECIDE=-1 ]
    goto 30080

30060 device=0
    if (decide.lt.1) goto 30080
    write(3333,*)'echo',wn+1,' >Lcounter'
    write(3333,*)'echo 10 >Lwilson'

30080 open(7000,file='Lspecial')
    read(7000,*)special
    close(7000,status='keep')

    if (special.ne.2) goto 30087
    write(3333,*)'echo -5 >Ldevice'
    goto 50000

30087 if (special.ne.3) goto 30093
    write(3333,*)'echo 1 >Lspecial'
    device=0

30093 if (decide.le.0) decide=0
    device=device+decide
    if (device*special+decide.eq.0) goto 30220

    write(3333,*)'rm Llink.old' ! the same idea as below but
    write(3333,*)'mv Llink Llink.old' ! only in second order
    since sometimes dsmc ret fails - then back to "decide=0"
c! _____XXXXXXXXXXXXX_____
c!
c!
c! recovering Llink.old IF Llink is missing AND dev<-1
C! ( - which is representing the real original decide<-1 - )
c!
    write(3333,*)'rm Llink'

* ... so that a following failure of dsmc does not preserve the
* former Llink but that this failure can be detected by f77
* when checking the existence of the file Llink

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 118

* ... since mv [non-EXISTING file] [EXISTING file] does not
* destroy [EXISTING file] (confer the opposite goal above)

!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!
!!!!!!
!!!!!! IF BY OCCASION, ANY FILE Llink[No.] IS EXISTING BEFORE,
!!!!!! dsmc ret WILL TRY TO ASK
!!!!!! ' File /home/tepl/holk/aut3/Llink[No.] exists, '
!!!!!! ' do you want to replace it? (Yes/No) '
!!!!!! WHAT CANNOT BE NEITHER RECOGNIZED NOR ANSWERED IN A
!!!!!! BACKGROUND PROCESS - SO IT MIGHT BE BETTER TO EXCLUDE
!!!!!! ANY POSSIBLE PROMPTING EXPLICITLY BEFORE BY REPLACING
!!!!!!
!!!!!! dsmc ret Llink[No.] BY dsmc ret -rep=a Llink[No.]
!!!!!!
!!!!!! LIKE
!!!!!!
!!!!!! dsmc d ar Llink[No.] BY dsmc d ar -nopr Llink[No.]
!!!!!!
!!!!!!
!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!!

* write(1919,*)' ' ! in order to make execution19 empty again
* for the next loop accompanied by an increment of device

    if (device.ge.2) goto 30098
!c regarding all cases except the information of the first
!c link to be stored since that link does contain the
!c information of the most slowly dilu1*dilu2 sweeps
!c which must not vanish by randomized dsmc decay
!c
!c the other links just have a computational distance of
!c dilu2 sweeps so then it is possible to re-determine
!c them - but for the first link a separate process of
!c reliable archiving is necessary - so for instance :
!c
!c use dsmc only for sakes of completeness and regain
!c Llink1 by some unix decompression in the same folder:

    write(3333,*)'gunzip Lstart.LINK.gz' ! opening the tool
    write(3333,*)'cp Lstart.LINK Llink1' ! extracting from the tool
    write(3333,*)'gzip Lstart.LINK' ! re-compressing the tool
    write(3333,*)'mv Llink1 Llink' ! supplying FORMAL -> REAL field

    if (dev.ge.-1) goto 30220

C NOW A PROCEDURE FOR RESTORING THE dsmc ARCHIVE OF LLINK1 USING
C THE CONTENTS OF GUNZIPPED Lstart.LINK.gz IF LLINK1 OCCASIONALLY
C GOT LOST BY A dsmc FAILURE :
C
    write(3333,*)'cp Llink Llink1A' ! 1A
    write(1919,*)'echo ''dsmc a Llink1'' >Llink1' ! 1A
* so that it will be outside any 3333/execution3 grep process ! 1A
    write(3333,*)'chmod ugo+x execution19' ! 1A
    write(3333,*)'nice -19 execution19' ! 1A

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 119

30098 write(3333,*)'nice -19 execution12' ! DSMC generalization ONLY

      if (device.ge.10) goto 30100
      write(3333,'(a,i1)')'dsmc ret -rep=a Llink',device

      if (device.ge.2) goto 30099                ! 1A
      write(3333,*)'mv Llink1 Llink1B'          ! 1A
      write(3333,*)'mv Llink1A Llink1'          ! 1A
      write(3333,*)'grep Llink1 Llink1B >execution19' ! 1A
      write(3333,*)'rm Llink1B'                ! 1A
      write(3333,*)                              ! 1A
      a 'echo ''nice -19 execution14'' >>execution19' ! 1A
      write(3333,*)'echo ''rm Llink1'' >>execution19' ! 1A
      goto 30220                                ! 1A

30099 write(3333,'(a,i1,a)')'mv Llink',device,' Llink'
      goto 30220

30100 if (device.ge.100) goto 30120
      write(3333,'(a,i2)')'dsmc ret -rep=a Llink',device
      write(3333,'(a,i2,a)')'mv Llink',device,' Llink'
      goto 30220

30120 if (device.ge.1000) goto 30140
      write(3333,'(a,i3)')'dsmc ret -rep=a Llink',device
      write(3333,'(a,i3,a)')'mv Llink',device,' Llink'
      goto 30220

30140 if (device.ge.10000) goto 30160
      write(3333,'(a,i4)')'dsmc ret -rep=a Llink',device
      write(3333,'(a,i4,a)')'mv Llink',device,' Llink'
      goto 30220

30160 if (device.ge.100000) goto 30180
      write(3333,'(a,i5)')'dsmc ret -rep=a Llink',device
      write(3333,'(a,i5,a)')'mv Llink',device,' Llink'
      goto 30220

30180 if (device.ge.1000000) goto 30200
      write(3333,'(a,i6)')'dsmc ret -rep=a Llink',device
      write(3333,'(a,i6,a)')'mv Llink',device,' Llink'
      goto 30220

30200 if (device.ge.10000000) goto 30220
      write(3333,'(a,i7)')'dsmc ret -rep=a Llink',device
      write(3333,'(a,i7,a)')'mv Llink',device,' Llink'

30220 write(3333,*)'echo',device,' >LdeviceBA' !c c!

      write(3333,*)'echo -1 >Ldevice'
      write(3333,*)'nice -19 automatic'

!$$#
      write(3333,*)'mv programDOCU L.last.programDOCU'
!$$#

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 120

!$$# SEE THE COMMENT JUST BELOW THE LINE ARTIFICIALLY MARKED BY 20026
!$$#

      write(3333,*)'cp Ldevice LdeviceBA' ! with Ldevice ....
      write(3333,*)'echo -6 >Ldevice' ! continuously being present
      write(3333,*)'nice -19 automatic' !*** generating execution10
      write(3333,*)'nice -19 execution10' !*** cancelling everything
!*** if automatic could not work properly after echo -1 >Ldevice

      write(3333,*)'cat execution19 >>execution11' ! 1A

      write(3333,*)'nice -19 execution18' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,*)'nice -19 execution11' !c c!

      if (decide.eq.1) goto 30500
      device=device+1

!!!! IMAGINE THE CASE THAT ALL PROCESSES ARE INTERRUPTED DURING dsmc
!!!! THEN THE PROCEDURE WILL BE REPEATED LEADING TO A SECOND ARCHIVED
!!!! FILE OF THE SAME NAME - WITH THE FIRST OF THEM BEING UNSUITED.
!!!! BUT: dsmc ret WILL ONLY TREAT THE RESPECTIVELY LAST FILE :
!!!! SO THERE WILL BE DONE NO HARM TO ANY CONTINUATION

!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! B U T :

!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@!
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@!
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! the program should not be stopped by stopping
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@!
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! a single process like the main execution of
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! automatic for instance
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@!
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! BECAUSE IT CANNOT BE AVOIDED THAT THE IMMEDIATE
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! NEIGHBOUR PROCESSES AFTER QUITTING ARE STARTET
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! NETHERTHELESS DUE TO SOME KIND OF PATHOLOGICAL
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! UNIX INERTIA which are e. g. in a forbidden
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! manner acting on Lstep and other information
!@@@@@@@@@@@@@@@@@@@@! files causing a WRONG PROGRAM LOCALIZATION !!!

```

```

Nov 24 2000 01:02           AUTOMATIC           Page 121
!#####!
!#####! SO: WHEN MEASURING A LARGE NUMBER OF SWEEPS
!#####!
!#####! THE PROGRAM SHOULD BE INTERRUPTED ONLY
!#####! BY REBOOTING THE MACHINE AND
!#####! NOT BY KILLING ANY PROCESSES
!#####! BY HAND AVOIDING UNIX BUGS AT STOPPING
!#####!
!#####! so the courtesy of killing the own processes before
!#####! in order to free the supervisor of the implicit
!#####! consequence of killing other processes by the
!#####! act of rebooting a machine WILL DO HARM TO THE
!#####! PROGRAM SEQUENCE AND THEREFORE HAS TO BE REFUSED !!
!#####!
!#####! (but: the damage by this defect is not very dangerous
!#####! so that in the case of some f77 stopping the automa10
!#####! procedure can stop everything with the only mistake
!#####! being some doublings in the L.* files by superfluous
!#####! and not appropriate Lstep actualizations = unix bugs
!#####! - if such things do happen at all <- everything o.k.
!#####! ) SO: JUST AVOID IT WHENEVER POSSIBLE (-> beauty)
!#####! AND: DO NOT FEAR IF IT CANNOT BE AVOIDED (-> o.k.)
!#####!

* HAVING A LOOK INTO the file AUTOMATIC:
*
*   rm automatic IS A NECESSARY UNIX LINE BEFORE PERFORMING
*   'F77 automatic.f -o automatic' ... DESTROYING OLD fortran output files
*   so that in the case of a failure of the 'f77 automatic.f -o automatic'
*   process it will be prevented that the preceding output file with other
*   decide parameters could be used and COULD DESTROY all storaged links
*   (in the dsmc archive) for instance (v. at the head of the whole program)!!!

      if (device.gt.1) goto 30230

!c the dsmc storage method on offline media is suffering from the
!c severe disadvantage of NOT BEING RELIABLE :
!c FROM TIME TO TIME SOME ARCHIVED FILES ARE JUST GETTING LOST !!

!c the rate of loosing files is pleasantly low but very important
!c information like Link1 has to be STORED separately in UNIX
!c bound to the original file system ( -> normal compression is
!c possible and useful because such files can be >> 1 megabyte )

      write(3333,*)'cp Llink Lstart.LINK' ! ONLY FOR TRUE decide=0
      write(3333,*)'gzip Lstart.LINK'

* SINCE THIS PROJECT CAN BE EXPECTED TO BE FREE FROM ANY FAILURE
* UNLIKE dsmc IT WILL NOT DIRECTLY BE ACCESSIBLE FROM THE MAIN
* PROGRAM WHICH WILL ONLY BE LINKED FOR THE LESS SECURE dsmc
* REPETITION (if regarded at all for device=1) starting now at
* level 30230 (repetitions will be archived with time ordering)

30230 if (device.ge.10) goto 30260
      write(3333,30240)'cp Llink Llink',device
      write(3333,30240)'dsmc a Llink',device

      write(3333,*)'nice -19 execution14' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,30240)'rm Llink',device
30240 format(a,11)

```

```

Nov 24 2000 01:02           AUTOMATIC           Page 122

      goto 30500
30260 if (device.ge.100) goto 30300
      write(3333,30280)'cp Llink Llink',device
      write(3333,30280)'dsmc a Llink',device

      write(3333,*)'nice -19 execution14' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,30280)'rm Llink',device
30280 format(a,12)
      goto 30500

30300 if (device.ge.1000) goto 30340
      write(3333,30320)'cp Llink Llink',device
      write(3333,30320)'dsmc a Llink',device

      write(3333,*)'nice -19 execution14' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,30320)'rm Llink',device
30320 format(a,13)
      goto 30500

30340 if (device.ge.10000) goto 30380
      write(3333,30360)'cp Llink Llink',device
      write(3333,30360)'dsmc a Llink',device

      write(3333,*)'nice -19 execution14' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,30360)'rm Llink',device
30360 format(a,14)
      goto 30500

30380 if (device.ge.100000) goto 30420
      write(3333,30400)'cp Llink Llink',device
      write(3333,30400)'dsmc a Llink',device

      write(3333,*)'nice -19 execution14' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,30400)'rm Llink',device
30400 format(a,15)
      goto 30500

30420 if (device.ge.1000000) goto 30460
      write(3333,30440)'cp Llink Llink',device
      write(3333,30440)'dsmc a Llink',device

      write(3333,*)'nice -19 execution14' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,30440)'rm Llink',device
30440 format(a,16)
      goto 30500

30460 if (device.ge.10000000) goto 30500
      write(3333,30480)'cp Llink Llink',device
      write(3333,30480)'dsmc a Llink',device

      write(3333,*)'nice -19 execution14' ! DSMC generalization ONLY

      write(3333,30480)'rm Llink',device
30480 format(a,17)

```


Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 123
c!	abs(decide)>1 cannot be generated starting from 30000	
30500	if (decide.lt.-1) goto 37	
c!	so it is clear that it is coming from the main part	
c!	of the program to which it has just returned (- O.K.)	
	 write(3333,*)'mv Lcounter LcounterAB' write(3333,*)'mv Ldevice LdeviceAB' write(3333,*)'mv Lseed LseedAB' write(3333,*)'mv Lwilson LwilsonAB' write(3333,*)'mv Lcorrelator LcorrelatorAB'	
	if (intern.eq.1) goto 30520 write(3333,*)'echo -1 >Lcounter' write(3333,*)'echo 10 >Lwilson' goto 30580	
30520	if (file3) goto 30540 write(3333,*)'cp LcounterBB Lcounter' write(3333,*)'cp LseedBB Lseed' write(3333,*)'cp LwilsonBB Lwilson' write(3333,*)'cp LcorrelatorBB Lcorrelator'	
30540	if (file4) goto 30560 write(3333,*)'cp LcounterBBB Lcounter' write(3333,*)'cp LseedBBB Lseed' write(3333,*)'cp LwilsonBBB Lwilson' write(3333,*)'cp LcorrelatorBBB Lcorrelator'	
30560	if (file5) goto 30580 write(3333,*)'cp LcounterB Lcounter' write(3333,*)'cp LseedB Lseed' write(3333,*)'cp LwilsonB Lwilson' write(3333,*)'cp LcorrelatorB Lcorrelator'	
30580	open(9000,file='Lstep') read(9000,*)step close(9000,status='keep') if (step.gt.0) goto 30600 write(3333,*)'nice -19 execution4' write(3333,*)'echo 1 >Lstep'	
30600	write(3333,*)'echo -1 >Ldevice' write(3333,*)'nice -19 automatic' write(3333,*)'cp Ldevice LdeviceBA' ! with Ldevice write(3333,*)'echo -6 >Ldevice' ! continuously being present write(3333,*)'nice -19 automatic' !*** generating execution10 write(3333,*)'nice -19 execution10' !*** cancelling everything !*** if automatic could not work properly after echo -1 >Ldevice	

Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 124
	if (step.eq.2) goto 30620 write(3333,*)'nice -19 execution6' write(3333,*)'echo 2 >Lstep'	
30620	write(3333,*)'nice -19 execution7' write(3333,*)'echo 0 >Lstep' write(3333,*)'nice -19 execution8' write(3333,*)'echo 1 >Lintern' ! confirming >=1 effective cycle write(3333,*)'nice -19 execution9'	
	 goto 50000	
36000	open(11111,file='execution10') write(11111,*)'rm LdeviceBA' * ... because it will then be superfluous already * ... but at present it still can influence following choice: open(2007,file='LdeviceBA') read(2007,*)device close(2007,status='keep') open(7000,file='Lspecial') read(7000,*)special close(7000,status='keep') write(11111,*)'echo',device,' >Ldevice' * ... in order to restore the true Ldevice output if ((device.ne.-1).and.(special.ne.2)) goto 50000 * ... doing nothing more because apparently there are no f77 bugs	
	 if (decide.lt.-1) write(11111,*)'mv Llink Mlink' if (decide.lt.-1) write(11111,*)'mv Llink.old Mlink' !! if Llink.old and Llink are both available and different with !! respect to each other, Llink is younger and if it is not yet dsmc !! archived it is the wrong magnitude (if it is dsmc archived just !! the archive will be taken for input and the rest will be discarded)	
	write(11111,*)'rm Llink**' * ... in order to prevent dsmc of the not overwritten former Llink * ... a second time with the next higher digit thereby causing errors	
	 if (decide.lt.-1) write(11111,*)'mv Mlink Llink' !! so that Llink is kept - since AT THE BEGINNING of the new program run !! it will be needed for accessing Llink at mv Llink Llink.old !! IF decide<=-2 IS CONTINUED BY decide=-3 !! THIS PART OF THE PROGRAM IS REALLY CONCERNED IF THERE SOME DAMAGE TO !! A SINGLE f77 SUBPROGRAM OF A nohup ... & EXECUTION CAUSING THIS !! TYPE OF execution10 TO BE ACTIVATED	

Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 125
write(11111,*)'mv automatic automatic.old'		
write(11111,*)'mv execution2 execution.old.2'		
write(11111,*)'mv execution3 execution.old.3' ! cf. 3 <--- 11		
write(11111,*)'mv execution11 execution.old.11'!open(3333,..), too		
write(11111,*)'mv execution12 execution.old.12' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution13 execution.old.13' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution14 execution.old.14' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution15 execution.old.15' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution16 execution.old.16' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution17 execution.old.17' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution18 execution.old.18' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution19 execution.old.19' ! rsh ---> DSMC		
write(11111,*)'mv execution20 execution.old.20' ! STATISTICS		
write(11111,*)'mv execution21 execution.old.21' ! STATISTICS		
write(11111,*)'mv execution4 execution.old.4'		
write(11111,*)'mv execution5 execution.old.5'		
* an execution2 cascade within execution5 cannot be stopped by this		
* - it is just a superfluous process of a tiny size like:		
* 14013 hoik 1 0 19 912K 752K sleep 1111 0.44% sh		
* and will stop more or less early by itself in the background		
write(11111,*)'mv execution6 execution.old.6'		
write(11111,*)'mv execution7 execution.old.7'		
write(11111,*)'mv execution8 execution.old.8'		
write(11111,*)'mv execution9 execution.old.9'		
write(11111,*)'mv execution10 execution.old.10'		
* ... stopping all separate processes secondary to execution1		
* ... and also moving itself away in the last step of procedure		
goto 50000		
38000 open(1111,file='execution1')		
open(1111,file='execution10')		
write(1111,*)' ! necessary for destroying older entries		
write(11111,*)'rm Lsymbol' ! disabling this tool afterwards		
..... during the execution of execution10		
write(11111,*)'nice -19 execution1' ! being either void now		
..... or just containing 'rm Lcontinuation'		
write(11111,*)'echo -2 >Ldevice'		
write(11111,*)'nice -19 automatic'		
write(11111,*)'nice -19 execution1'		
..... which has to be done before a possible f77 failure		
*		
..... but after 'rm Lcontinuation' (otherwise no change)		

Nov 24 2000 01:02	AUTOMATIC	Page 126
inquire(file='Lsymbol',exist=filesym)		
if (.not.filesym) goto 50000 ! controlling it a second time		
open(7111,file='Lsymbol') ! filpreserve checks the first 13 char.		
read(7111,'(a)')filpreserve ! -> filpreserve='read(7111,*)'		
close(7111,status='keep')		
if (filpreserve.eq.'NO-NEW-FOLDER') ! or NO-NEW-FOLDER+something		
& write(1111,*)'rm Lcontinuation'		
* ... BEING FULFILLED BY THE UNIX ORDER echo NO-NEW-FOLDER >Lsymbol		
* ... BUT		
* ... (HERE, f77 INDEED IS CASE SENSITIVE SINCE		
* ... if ('a'.eq.'A') print*, 'ja'		
* ... if ('a'.ne.'A') print*, 'nein'		
* ... WILL YIELD nein)		
* ... NOT BEING FULFILLED BY echo no-new-folder >Lsymbol		
* ... AND A FAILURE OF THE FORTRAN EXECUTION LIKE		
* ... tep3% automatic		
* ... dofiio: [-1] end of file		
* ... logical unit 7111, named 'Lsymbol'		
* ... lately: reading sequential formatted external IO		
* ... part of last format: ext list io		
* ... part of last data:		
* ... Abort		
* ... WILL BE CAUSED BY AN UNIX OPERATION LIKE echo >Lsymbol		
* ... SO THAT IT IS NECESSARY TO HAVE THIS ISOLATED		
* ... echo -7 >Ldevice RUN TO SUBSTITUTE		
* ... rm Lcontinuation BY echo NO-NEW-FILE >Lsymbol		
* ... FOR REASONS OF SECURITY SINCE A SECOND USE OF		
* ... decide=0 IN THE SAME FOLDER WILL DESTROY ALL		
* ... LINK CONFIGURATIONS STORED BY dsmc		
goto 50000		
40000 open(5555,file='execution5')		
open(2001,file='LdeviceA')		
read(2001,*)device		
close(2001,status='keep')		
device=device+1		
wn=wn/dilul-dilu2+1		
if (device.lt.2) device=2 ! preventing any		
! consequences of ill-defined file situations		
if (wn.lt.2) goto 40040		
do 40020 wm=device,wn		
write(5555,*)'execution2'		
40020 continue		
40040 continue		

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 127

50000 end          !/|V|V|V|V|V|V|V|!

!/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!
!/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!
!/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!
!/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!
!/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!          !/|V|V|V|V|V|V|V|!

!/|V|V|V|V|V|V|V|!          end

*          THIS IS rand.f
*          NEVER USE THE VARIABLES SPENT HERE FOR OTHER PURPOSES
*          A LIST OF THIS VARIABLES IS GIVEN AS A APPENDIX TO THIS
*          SUBROUTINE

C-----C
*          lib2_ran version 3.0          July 21,1991          *
*          0 < ranf < 1 26/6/1994          *
C-----C
!IMPLICIT CONSTR. ARE NOT DESIRED!          FUNCTION RANFtt()

      real FUNCTION RANFtt()          !MAKING EXPLICIT NOW!
      implicit none          !MAKING EXPLICIT NOW!
      integer IPtt,IQtt,Jtt,Ktt,IRNDtt          !MAKING EXPLICIT NOW!
      real FNORMtt,FRNDtt          !MAKING EXPLICIT NOW!

C-----C
      INTEGER Ptt,Qtt
      parameter (IPtt= 521)
      parameter (IQtt= 32)
!EFFECTIVELY NOT USED EXACTLY HERE!          parameter (MACRMtt= 40)
!EFFECTIVELY NOT USED EXACTLY HERE!          parameter (MACRItt= 1)
***** parameter correct 1991.9.24*****
      PARAMETER (Ptt=IPtt,Qtt=IQtt,FNORMtt=0.465661E-9)
      INTEGER IRtt (0:Ptt-1)
      COMMON /RANDDtt/ IRtt,Jtt,Ktt
c          #####
c          COMMON /RAND/ IR,J,K was changed into
c          COMMON /RANDD/ IR,J,K because otherwise
c          the Fortran expression RAND(0) is changed
c          into an illegal opcode (TERMINATING ... SIGILL)
c          on the other hand, confusions with the name
c          RAND of this subroutine RAND.f do not appear
c          #####
100      continue
      IRtt (Jtt)=XOR (IRtt (Jtt), IRtt (Ktt))
*

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 128

*
*          THE PRECEDING LINE DOES NOT REPRESENT TRUE FORTRAN LANGUAGE
*          AND MIGHT BE NOT ACCEPTED BY ALL FORTRAN COMPILERS - xor() IS
*          NO WELLKNOWN FORTRAN FUNCTION AND EVEN THE BETTER KNOWN LOGICAL
*          EXPRESSION .xor. IS NO STANDARD FORTRAN FUNCTION AT ALL
*
*
*
*          IRNDtt=IRtt (Jtt)
*          FRNDtt=IRNDtt*FNORMtt
*          RANFtt=FRNDtt
*          if (ranf .eq. 1.0) then
*
!DISTURBING!          write(*,*)'ranf=1.0'
!DISTURBING!          stop
      goto 100          !(* PROPOSED REMEDY *)!

      endif
      Jtt=Jtt+1
      IF (Jtt.GE.Ptt) Jtt=Jtt-Ptt
      Ktt=Ktt+1
      IF (Ktt.GE.Ptt) Ktt=Ktt-Ptt
      if (ranf .eq. 0) goto 100
      RETURN
      END

      SUBROUTINE CINIT3tt
C-----C
c          CALL chrcv (1,MSGP)
c          CALL crdmsg (N00,4,NRSIZE)
c          CALL cpstat (0,NWSTAT)
c          CALL cgcid (KCELL)
c          NDELAY=1

      implicit none          !MAKING EXPLICIT NOW!
      integer n00tt,NDELAYtt          !MAKING EXPLICIT NOW!

      common/ seedtt /n00tt
!DISTURBING!          write(*,*)'seed',n00tt
*
*
*          THE PRECEDING LINE DOES NOT REPRESENT TRUE FORTRAN LANGUAGE
*          AND MIGHT BE NOT ACCEPTED BY ALL FORTRAN COMPILERS - THE BETTER
*          AND CLASSICAL VERSION WOULD BE write(6,*)'seed',n00
*
*
*
c          KCELL=mynde()
c          NDELAYtt= n00tt
c          CALL INIT3tt
c          CALL DELAY3tt (NDELAYtt)
      END

      SUBROUTINE INIT3tt

      implicit none          !MAKING EXPLICIT NOW!
      integer IPtt,IQtt,Itt,IWtt,IWORKtt          !MAKING EXPLICIT NOW!
      integer IXtt,IRtt,Jtt,KRtt,MACRItt          !MAKING EXPLICIT NOW!
*          with the sizes of non-trivial fields still being specified
*          in the common blocks below (one way of realizing) ..IT NOW!

C
      parameter (IPtt= 521)
      parameter (IQtt= 32)
!EFFECTIVELY NOT USED EXACTLY HERE!          parameter (MACRMtt= 40)
      parameter (MACRItt= 1)
      COMMON /RANDDtt/ IWtt (0:IPtt-1),JRtt,KRtt
c          #####
c          COMMON /RAND/ IR,J,K was changed into
c          COMMON /RANDD/ IR,J,K because otherwise

```



```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 131
*   COUNTEREXAMPLE:  common/sin/... AND sin(...) do not disturb
*                   each other BUT
*   common/rand/... AND rand(...) and all cases with functions
*   (not variables) defined in further subroutines F A I L !!!
*   rand(...) MIGHT BE EXTREMELY SENSITIVE FOR SUCH BUGS BECAUSE
*   there seems to be no universal definition and confusions bet-
*   ween direct fortran libraries and indirectly used C libraries
*   cannot be excluded totally if the linking processes are
*   sufficiently sophisticated
*
! SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM !
function ranfSM()
!!!   real*8 ranfSM

implicit none !!!
real ransetSM !!! da die Subroutine ransetSM(seedSM) entry
!!! im Funktions-Unterprogramm ranfSM() und nicht in einer Subroutine
!!! ist, wirkt sie zwar immer noch wie ein Subprogramm, ist aber formal
!!! eine externe Funktion ransetSM(seedSM) die bei implicit none
!!! als real ransetSM spezifiziert werden muss (die entry - Anweisung
!!! ist ohnehin unueblich und kann die Forderung nach strukturierter
!!! Programmierung nicht unerstuetzen - ist also total improvisiert hier)
real ranfSM !!! hier klar, weil ja direkt als Funktion angesetzt -
!!! ausserdem zu einem reinen real Ausdruck trunkiert wegen Anbindung
-----
c---- dieselbe folge von zufallszahlen wie bei cray.
c----
c---- die version laeuft sowohl auf ibm/370 als auch risc 6000 und sun.
c----
c---- sie laeuft auch auf cray selbst - dort sollte man aber natuerlich
c---- die version des herstellers bevorzugen, weil sie vektorisiert
c---- und auch sonst viel schneller ist.
c----
c---- voraussetzung: es gibt eine real*16-arithmetik.
c----
c---- author: g.groten at forschungszentrum juelich gmbh
-----
c
c ranf() real*8 function          for cms, mvs, unicos, aix, sunos
c
c returns the first or next in a series of pseudo-random numbers.
c ranf is a multiplicative linear congruential random number
c generator working on 48 bits.
c
c you can -not need- give a starting value by "call ranset(seed)".
c seed is a positive integer on cray, but real*8 on other machines.
c
c to get the connected creating integer number (the seed) use
c "call ranget(seed)". seed is integer on cray, but real*8 on other
c machines.
c
c you can get the source of the program by "gime vmcraypr".
-----
c----- short example
*   program ranfts
*   real*8 ranf
*cibm real*8 seed          ! may be omitted
*cray integer seed        ! may be omitted
*   real*8 seed            ! may be omitted
*
*   seed = 4                ! may be omitted

```

```

Nov 24 2000 01:02          AUTOMATIC          Page 132
*   call ranset(seed)          ! may be omitted
*   do 17 i=1,10
*     write(*,'(1x,i3,1x,e25.18)') i,ranf()
* 17 continue
*   end
-----
!!!   real*8 seedSM,d48SM

real*8 d48SM          !!! seed KOENNTE AUCH real SEIN, sei hier ...
integer seedSM       !!! ... aber so modifiziert -> .SM <-> tt..

real*16 fmSM,frSM,q48SM
fm = multiplikator, q48 = 2**48, d48 = 2**(-48)
parameter (q48SM=281474976710656d0)
parameter (d48SM=0.35527136788005009293556213378906250d-14)
c---- empfohlene kombinationen von multiplikatoren und anfangswerten:
parameter (fmSM=44485709377909d0)
c--2- parameter (fm=19073664296501d0)
c--3- parameter (fm=81962378567069d0)
c--4- parameter (fm=81962378567053d0)
data frSM/ 48131768981101d0/
c--2- data fr/ 46912496118445d0/
c--3- data fr/          3d0/
c--4- data fr/187649984473775d0/
save frSM ! WERTE-ERHALT BIS ZUR NAECHSTEN PROZEDUR !

c
c fr=mod(fr*fm,2**48) naechste ganzzahlige zufallszahl
frSM = mod(frSM*fmSM,q48SM)
c ins intervall 0.-1. bringen: /16**12
!!! ranfSM = dble(frSM)*d48SM

ranfSM = real(dble(frSM)*d48SM) !!! um genauer zu sein

goto 99

c
c ibm-version : seed ist bei der original-cray-version vom typ integer !
c die original-cray-version liefert bei ranget einen anderen,
c um 64 aufrufe verschobenen wert.
c
c !!! entry rangetSM(seedSM) ! nicht verwendet, da seed vorgegeben
c !!! seedSM = dble(frSM) ! basiert daher noch auf der Ur-Version
c !!! goto 99
c
c entry ransetSM(seedSM) ! DEFINIERT HIER STARTENDE SUBROUTINE !

!!! frSM = dint(seedSM*.5d0)*2d0+1d0 !!! seed KANN AUCH real SEIN
!!! dint() wirkt auf double Zahl,
!!! seed BRAUCHT HIER NICHT vom Typ integer =DISKRET ZU SEIN !!!

frSM = dble(dint(dble(seedSM)*.5d0))*2d0+1d0 !!!

99 end
! SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM SM !

```


Literaturverzeichnis

- [1] P. van Baal and A. S. Kronfeld, *Spectrum of the Pure Glue Theory*, Proc. Suppl. Nucl. Phys. **B9**(1989)227 [CERN preprint, CERN-TH-5241/88]
- [2] G. S. Bali, K. Schilling, J. Fingberg, U. M. Heller, and F. Karsch, *Computation of the Spatial String Tension in High Temperature SU(2) Gauge Theory*, Int. J. Mod. Phys. **C4**(1993)1179 [hep-lat/9308003]
- [3] G. Baym and N. D. Mermin, *Determination of Thermodynamic Green's Functions*, J. Math. Phys. **2**(1961)232
- [4] S. Caracciolo, G. Curci, P. Menotti, and A. Pelissetto, *The Energy-Momentum Tensor for Lattice Gauge Theories*, Ann. Phys. (N. Y.) **197** (1990)119 [IFUP preprint (Pisa), IFUP-TH-28/89]
- [5] S. Caracciolo, P. Menotti, and A. Pelissetto, *One-Loop Analytic Computation of the Energy-Momentum Tensor for Lattice Gauge Theories*, Nucl. Phys. **B375**(1992)195 [IFUP preprint (Pisa), IFUP-TH-24-91]
- [6] J. M. Charap in "Constraint's Theory and Relativistic Dynamics", Florence 1986 (World Scientific, Singapore, 1987 - ed. G. Longhi & L. Lusanna), pp. 84ff.
- [7] C. J. S. Clarke, *On the Global Isometric Embedding of Pseudo-Riemannian Manifolds*, Proc. Roy. Soc. London **A314**(1970)417
- [8] J. H. Conway and N. J. A. Sloane, 'Sphere Packings, Lattices and Groups', (Springer, New York, 1988), pp. 449ff.
- [9] M. Creutz, *Monte Carlo Study of Quantized SU(2) Gauge Theory*, Phys. Rev. **D21**(1980)2308
- [10] A. D'Adda, J. E. Nelson, and T. Regge, *Covariant Canonical Formalism for the Group Manifold*, Ann. Phys. (N. Y.) **165**(1985)384
- [11] T. A. DeGrand and D. Toussaint, *Topological Excitations and Monte Carlo Simulation of Abelian Gauge Theory*, Phys. Rev. **D22**(1980)2478

- [12] H. G. Dosch, O. Nachtmann, and M. Rueter, '*String Formation in the Model of the Stochastic Vacuum and Consistency with Low-Energy Theorems*', Heidelberg preprint, HD-THEP-95-12 [[hep-ph/9503386](#)]
- [13] R. G. Edwards and U. M. Heller, '*Thermodynamics with Dynamical Clover Fermions*', [hep-lat/9905008](#)
- [14] J. Engels, F. Karsch, I. Montvay, and H. Satz, '*Glueball Mass Estimate from Finite Temperature $SU(2)$ Lattice Studies*', Phys. Lett. **B102** (1981)332
- [15] J. Engels, F. Karsch, and H. Satz, '*Finite Size Effects in Euclidean Lattice Thermodynamics for Non-interacting Bose and Fermi Systems*', Nucl. Phys. **B205**(1982)239
- [16] B. Fauser, '*Clifford Algebraic Remark on the Mandelbrot Set of Two-Component Number Systems*', Adv. Appl. Clifford Algebras **6**(1996)1
- [17] S.-S. Feng and Y.-S. Duan, '*Conservative Angular Momentum as $SU(2)$ Charges in Complex Gravity*', Commun. Theor. Phys. **25**(1996)485
- [18] J. Fingberg, U. M. Heller, and F. Karsch, '*Scaling and Asymptotic Scaling in the $SU(2)$ Gauge Theory*', Nucl. Phys. **B392**(1993)493 [[hep-lat/9208012](#)]
- [19] A. Friedman, '*Isometric Embedding of Riemannian Manifolds into Euclidean Spaces*', Rev. Mod. Phys. **37**(1965)201
- [20] T. Hashimoto, A. Nakamura, and I. O. Stamatescu, '*Temperature-dependent Structure in the Mesonic Channels of QCD*', Nucl. Phys. **B400**(1993)267
- [21] J. Holk, '*Self-Similarity between 3-dimensional Magnetostatics and 4-dimensional Electrodynamics*', Heidelberg preprint, HD-THEP-03-10 [[math-ph/0302047](#)]
- [22] J. Holk, '*A Novel Ansatz for the Energy-Momentum Tensor on the Lattice*', Heidelberg preprint, HD-THEP-03-51 [[hep-lat/0310031](#)]
- [23] G. 't Hooft, '*Topology of the Gauge Condition and New Confinement Phases in Non-Abelian Gauge Theories*', Nucl. Phys. **B190**(1981)455
- [24] A. Hosoya, M. Sakagami, and M. Takao, '*Nonequilibrium Thermodynamics in Field Theory: Transport Coefficients*', Ann. Phys. (N. Y.) **154** (1984)229
- [25] L. P. Kadanoff and P. C. Martin, '*Hydrodynamic Equations and Correlation Functions*', Ann. Phys. (N. Y.) **24**(1963)419
- [26] T. Kaluza, '*Zum Unitätsproblem der Physik*', Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin **K1**(1921)966
- [27] F. Karsch, ' *$SU(N)$ Gauge Theory Couplings on Asymmetric Lattices*', Nucl. Phys. **B205**(1982)285

- [28] F. Karsch and H. W. Wyld, *Thermal Green's Functions and Transport Coefficients on the Lattice*, Phys. Rev. **D35**(1987)2518
- [29] T. Kawai and H. Yoshida, *De Sitter Gauge Theory of Gravitation*, Prog. Theor. Phys. **62**(1979)266
- [30] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Z. Phys. **37**(1926)895
- [31] W. M. Koo and H. Saleur, *Representations of the Virasoro Algebra from Lattice Models*, Nucl. Phys. **B426**(1994)459
- [32] A. S. Kronfeld, M. L. Laursen, G. Schierholz, and U. J. Wiese, *Monopole Condensation and Color Confinement*, Phys. Lett. **B198**(1987)516
- [33] A. S. Kronfeld, G. Schierholz, and U. J. Wiese, *Topology and Dynamics of the Confinement Mechanism*, Nucl. Phys. **B293**(1987)461
- [34] L. D. Landau und E. M. Lifschitz, '*Klassische Feldtheorie*' (Akademie-Verlag, Berlin, 1987), S. 95ff, 326ff, 404
- [35] V. V. Lebedev and I. M. Khalatnikov, *Relativistic Hydrodynamics of a Superfluid*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **56**(1982)1601/Sov. Phys. JETP **56**(1982)923
- [36] S. Mandelstam, *Vortices and Quark Confinement in Non-Abelian Gauge Theories*, Phys. Rep. **C23**(1976)245
- [37] L. D. McLerran and B. Svetitsky, *A Monte Carlo Study of SU(2) Yang-Mills Theory at Finite Temperature*, Phys. Lett. **B98**(1981)195
- [38] P. Menotti and A. Pelissetto, *Poincaré, de Sitter, and Conformal Gravity on the Lattice*, Phys. Rev. **D35**(1987)1194
- [39] C. Michael, *Lattice Action Sum Rules*, Nucl. Phys. **B280**(1987)13
- [40] C. Michael, G. A. Tickle, and M. J. Teper, *The SU(2) Glueball Spectrum in a Small Volume*, Phys. Lett. **B207**(1988)313
- [41] C. Michael and M. J. Teper, *The Glueball Spectrum in SU(3)*, Nucl. Phys. **B314**(1989)347
- [42] A. Nakamichi and A. Sugamoto, *Topological 4-D Selfdual Gravity*, Phys. Rev. **D44**(1991)3835
- [43] D. M. Neumann and M. Arnaud, *Self-Similarity of Clusters of Galaxies and the L-X-T Relation*, astro-ph/0105463
- [44] A. R. Prasanna in '*Gravitation, Gauge Theories and the Early Universe*' (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989 - ed. B. R. Iyer), pp. 119ff.

- [45] T. Regge in '*Relativité, Groupes et Topologie II*', *Les Houches 1983* (North-Holland, Amsterdam, 1984 - ed. B. S. DeWitt & R. Stora), pp. 933ff.
- [46] T. Regge in "*Constraint's Theory and Relativistic Dynamics*", *Florence 1986* (World Scientific, Singapore, 1987 - ed. G. Longhi & L. Lusanna), pp. 78ff.
- [47] J. Rosen, *Embedding of Various Relativistic Riemannian Spaces in Pseudo-Euclidean Spaces*, *Rev. Mod. Phys.* **37**(1965)204
- [48] H. J. Rothe, '*A Novel Look at the Michael Lattice Sum Rules*', Heidelberg preprint, HD-THEP-95-14 [hep-lat/9504012]
- [49] H. J. Rothe, *A Novel Look at the Michael Lattice Sum Rules*, *Phys. Lett.* **B355**(1995)260 (being an abridged version and development of [48])
- [50] H. J. Rothe, '*Lattice Gauge Theories*' (World Scientific, Singapore, 1997), pp. 135ff.
- [51] *ibidem* ([50]), pp. 136ff.
- [52] *ibidem* ([50]), pp. 285ff.
- [53] A. D. Sakharov, *Cosmological Transitions with a Change in Metric Signature*, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **87**(1984)375/*Sov. Phys. JETP* **60**(1984) 214
- [54] D. W. Sciama, P. Candelas, and D. Deutsch, *Quantum Field Theory, Horizons and Thermodynamics*, *Adv. Phys.* **30**(1981)327
- [55] B. Sheikholeslami and R. Wohlert, *Improved Continuum Limit Lattice Action for QCD with Wilson Fermions*, *Nucl. Phys.* **B259**(1985)572
- [56] Z. K. Silagadze, *Feynman's Derivation of Maxwell Equations and Extra Dimensions*, hep-ph/0106235
- [57] L. Smolin, *Quantum Gravity on a Lattice*, *Nucl. Phys.* **B148**(1979)333
- [58] I. I. Smolyaninov, *Fractal Extra Dimension in Kaluza-Klein Theory*, *Phys. Rev.* **D65**(2002)047503
- [59] G. F. Torres del Castillo and V. Cuesta-Sanchez, *Generation of Solutions of the Einstein Equations by Means of the Kaluza-Klein Formulation*, *Gen. Rel. Grav.* **34**(2002)435
- [60] K. G. Wilson, *Confinement of Quarks*, *Phys. Rev.* **D10**(1974)2445
- [61] M. Zach, M. Faber, W. Kainz, and P. Skala, *Monopole Currents in U(1) Lattice Gauge Theory: A Comparison to an Effective Model Based on Dual Superconductivity*, *Phys. Lett.* **B358**(1995)325

Danksagung

Diese Arbeit ist in ihrer Entwicklung entscheidend durch numerische Zugangsmöglichkeiten motiviert und vorangetrieben worden, die während ihres Fortganges noch erheblich verbessert werden konnten. Noch zu Beginn der Arbeit schien es erforderlich zu sein, die Rechnungen mit **vp**-Fortran via telnet auf dem Parallelprozessor `vpux` in Karlsruhe zu starten. Dank der großzügigen finanziellen Mittel, die für das Haus Philosophenweg Nr. 16 zur Verfügung gestellt werden konnten, und der fachkundigen US-Importe seitens Werner Wetzel, deren Wartung er selbst während seiner diversen mittelfristigen China-Aufenthalte erfolgreich per E-mail-Anweisungen fortsetzen konnte, war es möglich, die 10^4 -Rechnungen in sinnvoller Zeit auf hauseigenen Maschinen durchzuführen, wobei die Datenmengen im mehrstelligen Gigabyte-Bereich zwischen zwei aufeinander folgenden Fortran-Prozessen in einer Unix-Exekutablen automatisch auf Magnetbänder am Universitätsrechenzentrum der Universität Heidelberg ein- und ausgelesen werden konnten.

Philosophische Impulse für die erweiterten physikalischen Sichtweisen kamen von I. O. Stamatescu und dem indischen Gast Giridhari Lal Pandit, mit dem ich auch in den Zeiträumen nach seiner jeweiligen Rückkehr nach Delhi den wissenschaftstheoretischen Meinungsaustausch postalisch fortsetzen durfte.

Wesentliche Unterstützung in vielerlei Hinsicht hat die Arbeit durch meinen Betreuer H. J. Rothe erfahren sowie durch die Delta-Treffs, die von I. O. Stamatescu an unserem Institut, an der F.E.St. oberhalb des Heidelberger Schlosses und in Straßburg interdisziplinär organisiert und insbesondere von I. Bender sehr gekonnt gestaltet wurden.

Neben etlichen privaten Danksagungen, die sich unter anderem auch ganz besonders an meine Familie richten, bleibt dienstlicher Dank auch für das nette Institut INSGESAMT, an dem ich arbeiten durfte. Software-Beratung erhielt ich von W. Wetzel, D. Jungnickel, T. Takaishi und H. Matsufuru sowie

von J. Solbrig vom Institut für Angewandte Physik, inzwischen Teil des Kirchhoff-Instituts für Physik, Albert-Ueberle-Straße 1-5 (ab 28.09.2002 → INF 227), Heidelberg. Für meinen exzellenten Arbeitsplatz mit Balkon fühle ich mich auch über die Doktorarbeit hinaus den Herren Dr. Hefft und Dr. Thommes dankbar verbunden. Der notorisch verspielten Instituts-Katze, der fortwährend aktiv für die Überwindung des Klischees einer stereotypen Institutsatmosphäre engagierten Raumpflegerin Frau Rumpf sowie meinen Instituts-Kommilitonen Tassilo Ott (inzwischen HU Berlin) und Frank Daniel Steffen sei für viele kurzweilige und kreative Pausen gedankt.