

INAUGURAL-DISSERTATION

zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät
der

RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT
HEIDELBERG

vorgelegt von

Herrn Diplom-Mathematiker
MICHAEL H. SCHRAUDNER
aus Bamberg

TAG DER MÜNDLICHEN PRÜFUNG: 26. NOVEMBER 2004

Über die Automorphismengruppen topologischer Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge

Michael Schraudner

schraudner@math.uni-heidelberg.de

GUTACHTER: **Prof. Dr. Wolfgang Krieger**

GUTACHTER: **Prof. Dr. Manfred Denker**

DEM ANDENKEN
MEINER MUTTER

ABSTRACT: We study the algebraic properties of the automorphism groups of topological countable state Markov shifts together with the dynamics of these groups on the shiftspace itself as well as on related spaces like periodic points, compactifications and the canonical boundary.

We present a complete solution to the cardinality-question of the automorphism group for locally-compact and non locally-compact countable state Markov shifts, shed some light on its huge subgroup structure and prove the analogue of Ryan's theorem about the center of the automorphism group in the non compact setting. Moreover we characterize (in terms of topological dynamics) the 1-point-compactifications of locally-compact countable state Markov shifts, whose automorphism groups are countable and show that these compact dynamical systems are conjugate to synchronised systems on doubly-transitive points.

The difference between sliding-block-automorphisms and automorphisms that do not have a bounded coding-length is investigated. For every presentation of a non compact Markov shift, there is a distinct subgroup of sliding-block-automorphisms. These subgroups form a partially ordered hierarchy within the automorphism group. We examine part of their properties (inclusions within the hierarchy, cardinalities in the (non) locally-compact case). Every automorphism that is not a power of the shift map has unbounded coding-length in a special graph-presentation. We exhibit a class of locally-compact countable state Markov shifts that have uncountably many finite order automorphisms that cannot have bounded coding-length in any graph-presentation, but do have this property in some non-graph-presentation. Moreover we prove that every finite order automorphism can be recoded to a 1-block-code in some non-graph-presentation.

We show that there is also a class of locally-compact Markov shifts with automorphism groups isomorphic to a direct sum of a centerless group and the cyclic group generated by the shift map. We define the canonical-boundary-representation of the automorphism group and study its range. Finally we prove that the path-structure at infinity yields a new conjugacy invariant for locally-compact Markov shifts and determine its influence on the range of the canonical-boundary-representation and the extendability of automorphisms from subsystems (SFTs and periodic points) to the entire countable state Markov shift.

ÜBERSICHT: Wir untersuchen die algebraischen Eigenschaften der Automorphismengruppen topologischer Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum zusammen mit der von diesen Gruppen induzierten Dynamik auf dem Shiftraum, den periodischen Punkten, der kanonischen sowie der 1-Punkt-Kompaktifizierung und dem kanonischen Rand.

Wir geben eine vollständige Antwort auf die Frage nach der Kardinalität der Automorphismengruppe für lokalkompakte und nicht lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, beleuchten die immense Untergruppenstruktur und beweisen ein Analogon zu Ryan's Theorem über das Zentrum der Automorphismengruppe für den nicht kompakten Fall. Weiterhin geben wir eine Charakterisierung der 1-Punkt-Kompaktifizierungen lokalkompakter Markovshifts, deren Automorphismengruppen abzählbar sind, mit topologisch-dynamischen Begriffen und zeigen die fast-topologische Konjugiertheit dieser Kompaktifizierungen zu synchronisierten Systemen.

Anschließend wird der Unterschied zwischen sliding-Block-Automorphismen und Automorphismen, die keine beschränkte Kodierlänge haben, herausgearbeitet. Zu jeder Darstellung eines nicht kompakten Markovshifts definiert man die darstellungsabhängige Untergruppe der Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge. Diese bilden eine partiell geordnete Hierarchie innerhalb der Automorphismengruppe, deren Eigenschaften wir näher untersuchen (Echtheit einzelner Inklusionen, Kardinalitäten im (nicht) lokalkompakten Setting). Einzig die Potenzen der Shiftabbildung sind in allen (Graphen-)Darstellungen kodierlängenbeschränkt. Wir geben eine Klasse lokalkompakter Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge an, die überabzählbar viele Automorphismen endlicher Ordnung aufweisen, die in keiner Graphendarstellung beschränkte Kodierlänge haben. Tatsächlich lassen sich zu all diesen Automorphismen spezielle Nicht-Graphendarstellungen angeben, in denen sie zu sliding-Block-Codes werden, da jeder Automorphismus endlicher Ordnung zu einem 1-Block-Code umcodierbar ist.

Wir zeigen, daß die Automorphismengruppen einer speziellen Klasse lokalkompakter Markovshifts isomorph zur direkten Summe einer zentrumslosen Gruppe und der von der Shiftabbildung erzeugten zyklischen Gruppe sind. Wir definieren die kanonische-Rand-Darstellung der Automorphismengruppe und studieren deren Bild. Abschließend weisen wir nach, daß die Pfadstruktur bei ∞ eine neue Konjugationsinvariante für lokalkompakte Markovshifts liefert und bestimmen deren Einfluß auf das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung und die Fortsetzbarkeit von Automorphismen eines Teilsystems (SFT, periodische Punkte) auf das Gesamtsystem.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Symbolverzeichnis	9
1 Grundlagen	11
1.1 Einführende Definitionen	11
1.2 Automorphismen symbolisch-dynamischer Systeme	18
2 Die Automorphismengruppe nicht kompakter Markovshifts	23
2.1 Die Kardinalität der Automorphismengruppe	23
2.2 Die 1-Punkt-Kompaktifizierung lokalkompakter Markovshifts	31
2.3 Die Untergruppenstruktur der Automorphismengruppe	37
2.4 Das Zentrum der Automorphismengruppe	48
3 Automorphismen mit (un-)beschränkter Kodierlänge	53
3.1 Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen	53
3.2 Umkodierbarkeit zu sliding-Block-Codes	71
3.3 Die Kardinalität von $\text{Aut}_X^b(\sigma)$	86
4 Automorphismen bei "Unendlich"	95
4.1 $\text{Aut}(\sigma)$ als direkte Summe	95
4.2 Induzierte Aktion auf dem kanonischen Rand	107
4.3 Die Pfadstruktur bei ∞	117
5 Zusammenfassung	125
Literaturverzeichnis	131

*Am Anfang war keine Formel.
Am Anfang war keine Gleichung.
Am Anfang war kein Beweis.*

Vorwort

A. BEUTELSPACHER¹

In der vorliegenden Dissertation werden erstmals verschiedene Aspekte der Automorphismengruppen topologischer Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum untersucht. Die Motivation dieser Forschungsarbeit ergibt sich zum einen aus dem in den letzten Jahren verstärkten, allgemeinen Interesse an diesen Systemen als mathematisches Objekt an sich und als Modell in der differenzierbaren und topologischen Dynamik, das durch eine steigende Anzahl an Veröffentlichungen zum Ausdruck kommt. Zum anderen lassen die großen Erfolge der Theorie der Automorphismen der eng verwandten Klasse der Shifts vom endlichen Typ (SFTs) bei der Einführung neuer Invarianten und den damit verbundenen Ansätzen zur Klassifikation dieser Systeme auf ähnlich fruchtbare Ergebnisse (Verallgemeinerung der bei SFTs gefundenen Invarianten, besseres Verständnis der Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen SFTs und Markovshifts) hoffen.

Die Fragestellung stammt aus dem Bereich der symbolischen Dynamik, einem noch jungen Teilgebiet der Mathematik, das sich primär mit der Untersuchung diskreter dynamischer Systeme beschäftigt. Der Phasenraum wird als Menge von ein- bzw. zweiseitig-unendlichen Symbolfolgen über einem meist endlichen Alphabet dargestellt und trägt eine metrisch-topologische Struktur. Die Dynamik auf diesen Folgenräumen wird durch die Wirkung der Shiftabbildung modelliert, die eine Folge von Symbolen um eine Koordinate nach links schiebt. Man spricht daher auch von Shifträumen bzw. Subshifts.

Am intensivsten wurden in der Vergangenheit die sogenannten Shifts vom endlichen Typ untersucht. Diese treten unter anderem in der topologischen und differenzierbaren Dynamik (Markovzerlegungen bei Homöo-/Diffeomorphismen), der Ergodentheorie (stationäre Markovketten, statistische Mechanik), der Informationstheorie (Datenspeicherung, zelluläre Automaten) sowie in der Codierungstheorie (Convolution-Codes) auf. Es handelt sich um eine elementare Klasse symbolisch-dynamischer Systeme, deren Symbolfolgen als zweiseitig-unendliche Wege in einem endlichen, gerichteten Graphen aufgefaßt werden können.

Diese konkrete Darstellung eröffnet die Möglichkeit, viele Fragen über SFTs auf Fragen über die Adjazenzmatrizen des zugehörigen Graphen zu reduzieren, wodurch speziell kombinatorische und algebraische Hilfsmittel herangezogen werden können. Daneben stehen starke analytisch-topologische Methoden aus dem Bereich der dynamischen Systeme zur Verfügung. Komplikationen treten häufig auf, da die Darstellung eines gegebenen SFTs, beispielsweise durch einen gerichteten Graphen oder eine Markovpartition einer kompakten Mannigfaltigkeit, keineswegs eindeutig ist. Dies führt auf den Begriff der (topologischen) Konjugiertheit: Zwei SFTs oder allgemeiner zwei Subshifts werden als das gleiche mathematische Objekt angesehen, wenn zwischen ihnen eine topologische Konjugation, i.e. ein Homöomorphismus

¹Aus: "In Mathe war ich immer schlecht ...", Vieweg Verlag, S. 11 (2001)

existiert, der zudem mit den Shiftabbildungen der beiden Systeme vertauscht.

Viele dynamische, topologische oder algebraische Eigenschaften hängen nicht von einer speziellen Darstellung des betrachteten Systems ab. Vielmehr sind sie Invarianten der topologischen Konjugation, so daß Subshifts, die sich in einem dieser, meist einfach berechenbaren, Merkmale unterscheiden niemals "gleich", d.h. konjugiert zueinander, sein können.

Eines der großen, bis heute ungelösten Probleme der symbolischen Dynamik ist es, einen vollständigen Satz (leicht zugänglicher) Invarianten zu finden und damit die Klassifikation der SFTs modulo topologischer Konjugiertheit abzuschließen.

Die über 20 Jahre lang bestehende Vermutung von R.F. Williams, daß die effektiv entscheidbare, algebraische Relation der Shiftäquivalenz über \mathbb{Z}_+ tatsächlich bereits eine vollständige Invariante der topologischen Konjugation ist, wurde Mitte der 1990er Jahre durch Arbeiten von K.H. Kim und F.W. Roush [KR3], [KR4] widerlegt. Die darin konstruierten Beispiele von shiftäquivalenten SFTs, die nicht konjugiert zueinander sein können, wurden erst unter Benutzung tiefliegender Methoden gefunden, die zuvor von J. Wagoner aus der algebraischen Topologie eingebracht und weiterentwickelt wurden.

Viele der neueren Invarianten (z.B. Signaturen- und Gyrationzahlen-Homomorphismen, Dimensionsgruppendarstellung), die schließlich zur negativen Beantwortung der Williams-Vermutung sowie zur Lösung anderer, lange offener Probleme (Fortsetzbarkeitsfragen von Aktionen auf periodischen Punkten, FOG-Vermutung) führten, benutzen die seit den 1980er Jahren entwickelte umfangreiche Theorie der Automorphismen von SFTs. Wie in vielen Bereichen der Mathematik spiegeln Automorphismen die innere Struktur und die vorhandenen Symmetrien des betrachteten Objektes wider und stehen in enger Verbindung zu möglichen Invarianten.

Ein Automorphismus ist hierbei eine Selbstkonjugation des Shift-dynamischen Systems, also ein mit der Shiftabbildung vertauschbarer Homöomorphismus des Shifttraumes in sich. Unter Komposition bilden diese Abbildungen eine Gruppe, die selbst eine Invariante des Subshifts darstellt. Allerdings handelt es sich im allgemeinen um sehr reichhaltige und komplizierte, nicht-abelsche, abzählbar unendliche Gruppen, die bisher nur teilweise verstanden sind. Vermutlich würde eine vollständige Einsicht in die Struktur dieser Gruppen sehr feine Invarianten ergeben, womit das Klassifikationsproblem besser angreifbar wäre.

SFTs sind, wie oben angedeutet, kompakte Subshifts (endliches Alphabet), die zusätzlich eine Markov-Eigenschaft (Darstellbarkeit durch gerichtete Graphen) besitzen. Verallgemeinerungen hiervon und damit der Übergang zu umfassenderen Klassen von symbolisch-dynamischen Systemen sind daher auf zwei grundsätzlich verschiedenen Wegen möglich:

Zum einen läßt sich unter Beibehaltung der Kompaktheit der Subshifts die Markov-Bedingung schrittweise abschwächen. Dies führt zunächst zu den bereits früh von B. Weiss definierten sofischen Systemen, die als stetige, shiftkommutierende Faktoren von SFTs auftreten. Durch weitere Abschwächungen erhält man sogenannte synchronisierte, halb-synchronisierte und schließlich codierte Systeme, wie sie erstmals 1986 von F. Blanchard und G. Hansel betrachtet wurden [BH]².

Zum anderen kann man an der strengen Markov-Eigenschaft (Graphendarstellung) festhalten und dafür die Kompaktheitsforderung, die durch die Endlichkeit des Symbolvorrates

²Der Begriff "halbsynchronisiert" wurde erst später von W. Krieger eingeführt.

gegeben wird, stückweise oder ganz aufgeben. Man erhält auf diese Weise die eigentlichen "Hauptakteure" dieser Dissertation, nämlich lokalkompakte und nicht lokalkompakte topologische Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum (für eine genauere Definition siehe Abschnitt 1.1).

Praktische Anwendung finden diese Systeme unter anderem bei der Modellierung bestimmter dynamischer Systeme (Intervallabbildungen, nicht-hyperbolische Systeme, Billard-Flüsse) durch abzählbar unendliche Markovpartitionen [New], [Buz], [KT], [BSC] (sowie dortige Referenzen) und im Bereich der magnetischen Datenspeicherung [Pet].

Daneben sind Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet gewissermaßen ein topologisches Analogon der in der Wahrscheinlichkeitstheorie umfassend untersuchten (stationären) Markovketten mit abzählbar unendlichem Zustandsraum. B. Kitchens beschreibt in seinem Lehrbuch [Kit] ausführlich die maßtheoretischen Eigenschaften (Rekurrenz, Entropiebegriffe, Variationsprinzip, Existenz eines Maßes maximaler Entropie) dieser Systeme. Neuere Arbeiten von B. Gurevich und S. Savchenko [GS], O. Sarig [Sar] sowie D. Fiebig, U.-R. Fiebig und M. Yuri [FFY] übertragen zudem den thermodynamischen Formalismus und die Theorie der Gleichgewichtszustände in das nicht kompakte Setting.

Lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum treten bereits in der Theorie der kompakten Subshifts auf. So ist jede offene, shiftinvariante Teilmenge eines transitiven SFTs zusammen mit der eingeschränkten Shiftabbildung ein lokalkompakter Markovshift; das gleiche gilt für alle Subsysteme des synchronisierten Teils eines synchronisierten Systems [FieU]. Schließlich tauchen nicht kompakte Markovshifts auch bei der Darstellung codierter Systeme durch abzählbar unendliche, gerichtete Graphen auf, deren Kanten zusätzliche Label tragen. Dabei ist der Shiftraum eines codierten Systems der shiftinvariante Abschluß aller zweiseitig-unendlichen Verkettungen beliebiger Elemente aus einer Liste endlicher Codewörter über einem endlichen Alphabet. Zu jedem codierten System existiert ein stark zusammenhängender, abzählbar unendlicher, gerichteter Graph mit entsprechenden Kantenlabeln, so daß der Shiftraum des codierten Systems genau der Abschluß aller zweiseitig-unendlichen Labelfolgen entlang von (zweiseitig-unendlichen) Wegen innerhalb des Graphen ist.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit [FF4] von D. Fiebig und U.-R. Fiebig werden stetige, shiftkommutierende Abbildungen transitiver Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge in kompakte Subshifts studiert. Eines der Hauptresultate zeigt, daß der Abschluß des Bildes stets ein codiertes System ist und daß sich auf diese Weise sogar jedes codierte System als surjektives Bild eines lokalkompakten Markovshifts realisieren läßt.

Die Beziehung zwischen transitiven topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum und codierten Systemen entspricht also fast der zwischen SFTs und sofischen Systemen, die ja auch durch endliche, gerichtete Graphen mit Kantenlabeln darstellbar sind.

Im folgenden soll ein kurzer, keinesfalls vollständiger, Überblick über einige der bisherigen Resultate zu Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge gegeben werden. Abgesehen von den oben erwähnten maßtheoretischen Untersuchungen (vgl. [Kit], [GS], [Sar] und [FFY]) und trotz des zunehmenden praktischen Interesses, steckt die Theorie der rein topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum noch in ihren Anfängen. Natürlich lassen sich viele Fragestellungen direkt von den SFTs übernehmen; die Beweise benutzen jedoch oft völlig andere Argumente und Hilfsmittel. Ein Beispiel hierfür ist eine Veröffentlichung von R. Gómez [Góm], in der die finitären Isomorphismen, i.e. maßerhaltende

Homöomorphismen modulo Nullmengen, nicht lokalkompakter, positiv rekurrenter Markovketten mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge mittels positiver K-Theorie beschrieben werden. Neu ist neben der rein algebraischen Herangehensweise die Beschreibung der Markovketten durch Matrizen, deren Einträge formale Potenzreihen sind.

Da die topologischen Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet, wie oben erläutert, eine nicht kompakte Version der SFTs darstellen, zeigen einige Resultate starke Ähnlichkeiten zu bekannten Ergebnissen: So fanden D. Fiebig und U.-R. Fiebig in mehreren Forschungsarbeiten ([FieD1], [FieD2] und [FF6]) verschiedene Faktorsätze sowie ein sehr universelles Analogon zum Krieger'schen-Einbettungssatz, die fast identische Voraussetzungen wie bei den SFTs benötigen.

In anderen Fällen ergeben sich jedoch gravierende Unterschiede und Komplikationen. Beispielsweise gibt es nicht einen ausgezeichneten, sondern zahlreiche Entropiebegriffe, die sich in Abhängigkeit der Problemstellung als unterschiedlich nützlich erweisen. Ursache hierfür ist die fehlende Kompaktheit des Shiftraumes. Diese führt auch zu völlig neuen Fragen (Kompaktifizierungen, Ränder als eigene dynamische Systeme), wie sie erstmals in [FF2] auftauchen. Die dort eingeführte kanonische Kompaktifizierung eines lokalkompakten Markovshifts wird in Kapitel 4 dieser Arbeit eine entscheidende Rolle spielen. Schließlich sind zwei weitere Veröffentlichungen ([FF4] und [FF5]) von D. Fiebig und U.-R. Fiebig zu erwähnen, die wie oben angedeutet die enge Beziehung von Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet und codierten Systemen herausarbeiten. Speziell [FF4] enthält Resultate die zeigen, daß stetige, shiftkommutierende Abbildungen eines solchen Markovshifts in einen kompakten Subshift existieren, die keine beschränkte Kodierlänge aufweisen und so dem für kompakte Shifträume gültigen Satz von Curtis-Hedlund-Lyndon widersprechen (vgl. Kapitel 3).

Die vorliegende Dissertation beschäftigt sich mit einem bislang in der Literatur ausgesparten Aspekt topologischer Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum, nämlich den Automorphismen dieser Systeme.

Wieder sind viele Fragestellungen durch die bestehende SFT-Theorie motiviert, und in den Resultaten zeigen sich klare Ähnlichkeiten. Daneben sind besonders die Wechselwirkungen zwischen den neuen topologisch-dynamischen Merkmalen (lokale Kompaktheit, Verhalten bei Unendlich, Nichtexistenz einer formalen Zetafunktion, periodische Strukturen in Graphendarstellungen) der Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet und den algebraischen Eigenschaften ihrer Automorphismengruppen von Interesse. Aus den gefundenen Ergebnissen sollten Rückschlüsse auf die Wirkung der Kompaktheitsforderung im SFT-Fall und die daraus entstehenden Einschränkungen möglich sein. Ein Vergleich mit den Resultaten über die Automorphismengruppen von codierten Systemen ([FF3]) kann zusätzliches Licht auf den Einfluß der Markov-Bedingung werfen.

Die Dissertation hat drei verschiedene Themenschwerpunkte:

- Zunächst soll die Automorphismengruppe als Ganzes studiert werden. So wird in Kapitel 2 die Kardinalität, mögliche und verbotene Untergruppen sowie deren algebraische Eigenschaften und das Zentrum der Automorphismengruppe untersucht, was die Menge der auftretenden, abstrakten Gruppen eingrenzt. Die gefundenen strukturellen Aussagen lassen sich direkt mit den Beschränkungen im SFT-Fall vergleichen. Dabei fällt auf, daß die Einschränkungen im nicht kompakten Setting stark gelockert sind. Hervorzuheben ist auch die Charakterisierung der lokalkompakten Markovshifts mit

abzählbar unendlicher Automorphismengruppe durch verschiedene zueinander äquivalente Bedingungen sowie die daraus möglichen Folgerungen.

- In einem zweiten Schritt werden die Untergruppen der Automorphismen betrachtet, die in einer vorgegebenen Darstellung des Markovshifts beschränkte Kodierlänge aufweisen. Diese sind prinzipiell von der Wahl der Darstellung abhängig, wodurch sich in der Automorphismengruppe eine entsprechende Hierarchie von Untergruppen definieren läßt, die Hauptgegenstand von Kapitel 3 sein wird. Speziell kann die Kardinalität in den einzelnen Schichten dieser Hierarchie bestimmt und die Echtheit einzelner Inklusionen nachgewiesen werden. Interessant ist auch die Existenz von Automorphismen endlicher Ordnung, die in keiner Graphendarstellung beschränkte Kodierlänge haben.
- Schließlich wird gewissermaßen ein Blickwinkel "von außen" auf die Shifträume eingenommen: Kapitel 2 enthält bereits eine topologisch-dynamische Charakterisierung der Systeme, die als 1-Punkt-Kompaktifizierung lokalkompakter Markovshifts mit abzählbar unendlicher Automorphismengruppe auftreten. In Kapitel 4 steht dann die Wirkung der Automorphismen auf die kanonische Kompaktifizierung im Vordergrund. Faßt man deren Rand selbst als dynamisches System auf, so kann man einen Homomorphismus der Automorphismengruppe des Markovshifts in die des Rand-Systems definieren, der eine konjugationsinvariante Darstellung der Automorphismengruppe liefert und die Existenz bestimmter Automorphismen ausschließt. Weitere Einschränkungen folgen, bei gegebener Graphendarstellung, aus der Asymptotik der first-return-Loops (ausgedünnte Graphen), die die Wirkung aller Automorphismen außerhalb eines endlichen Teilgraphen steuert, wodurch die Automorphismengruppe in eine direkte Summe zerfällt, sowie aus der Pfadstruktur weit draußen, die zudem eine neue Konjugationsinvariante liefert.

Es folgt eine detailliertere Zusammenfassung der Dissertation:

Die vorliegende Arbeit untergliedert sich in 5 Kapitel, wobei in Kapitel 1 die grundlegenden Begriffe und Notationen eingeführt werden, wie sie größtenteils auch in dem Standardwerk über symbolische Dynamik von D. Lind und B. Marcus ([LM]) benutzt werden. Abschnitt 1.2 gibt zudem einen kurzen Abriß über die bekannten Ergebnisse zu Automorphismengruppen von SFTs bzw. codierten Systemen, die die erstmalige Untersuchung der Automorphismen bei topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge in dieser Dissertation motiviert haben. Die Kapitel 2 bis 4 enthalten die neuen Forschungsergebnisse:

Als erstes widmen wir uns der Frage nach der Kardinalität der Automorphismengruppe. Einfache Beispiele zeigen, daß anders als bei kompakten Subshifts neben abzählbar unendlichen auch überabzählbare Gruppen auftreten. Tatsächlich haben nicht lokalkompakte Markovshifts stets überabzählbare Automorphismengruppen (Satz 2.1). Auch im lokalkompakten Fall erhält man nach einigen Vorarbeiten (Lemmata 2.3 und 2.6) eine vollständige Antwort, die zunächst bezüglich einer Graphendarstellung gegeben wird: Die Automorphismengruppe ist genau dann abzählbar unendlich, wenn der Graph nur endlich viele kantendisjunkte Doppelpfade enthält (Satz 2.8), ansonsten ist sie wiederum überabzählbar. Dies zeigt bereits die Konjugationsinvarianz dieser Eigenschaft des Graphen, die wir mit (FMDP) bezeichnen. Sie ist gleichbedeutend damit, daß die kompakt-offene Topologie der Automorphismengruppe diskret ist (Korollar 2.7), ein Resultat, das für SFTs uneingeschränkt gültig ist (vgl. [Kit], Observation 3.1.2).

In Abschnitt 2.2 studieren wir die 1-Punkt-Kompaktifizierung des Shiftraumes (Definition 2.9). Man kennt bereits ein Kriterium ([FieD1], Lemma 4.1), wann dieses kompakt-metrische dynamische System expansiv und damit selbst ein Subshift ist. Wir zeigen die Redundanz einer der drei in [FieD1] Lemma 4.1 gegebenen Bedingungen und verschärfen so die Expansivitäts-Charakterisierung (Lemma 2.12). Zudem identifizieren wir eine der beiden verbleibenden Bedingungen mit der Eigenschaft (FMDP) (Beobachtung 2.10), woraus sich für jeden lokalkompakten Markovshift, dessen 1-Punkt-Kompaktifizierung ein Subshift ist, die Abzählbarkeit der Automorphismengruppe ergibt. Umgekehrt gibt es jedoch lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlicher Automorphismengruppe, deren 1-Punkt-Kompaktifizierung nur expansiv auf den doppelt-transitiven Punkten ist. Satz 2.14 zeigt, daß dies genau die topologisch-dynamische Beschreibung der Grapheneigenschaft (FMDP) ist. Tatsächlich impliziert (FMDP) sogar die fast-topologische Konjugiertheit der 1-Punkt-Kompaktifizierung zu einem synchronisierten System mittels einer 1-Block-Faktorabbildung (Satz 2.15).

Der nächste Abschnitt befaßt sich mit der Untergruppenstruktur und den algebraischen Eigenschaften der Automorphismengruppe. Mithilfe von Markerautomorphismen ergibt sich hier zumindest eine ebenso vielfältige Struktur wie in der SFT-Theorie. Satz 2.16 liefert für lokalkompakte Markovshifts mit (FMDP) die Existenz einer formalen Zetafunktion. Ein von den SFTs bekanntes Argument zeigt dann, daß jede abzählbare Automorphismengruppe residual endlich sein muß und weder nichttriviale divisionsvollständige, noch unendliche einfache Gruppen enthalten kann. Zum einen ist die Automorphismengruppe jedes Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge stets eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$, wodurch verschiedene abstrakte Gruppen niemals einbettbar sind. Zum anderen treten im nicht lokalkompakten Setting Automorphismengruppen auf, die $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ selbst als Untergruppe enthalten (Satz 2.20). Damit sind alle abzählbaren Gruppen, alle abelschen Gruppen der Kardinalität 2^{\aleph_0} , endlich erzeugte Gruppen mit unlösbarem Wortproblem sowie freie Produkte von 2^{\aleph_0} dieser Gruppen realisierbar. Satz 2.26 stellt eine Klasse lokalkompakter Markovshifts vor, die immerhin noch eine Einbettung von $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ ermöglichen und ebenfalls nicht residual endlich sind.

Genau wie bei den SFTs scheint es sehr schwierig, die Automorphismengruppe vollständig charakterisieren zu wollen. Allerdings kennt man nach dem Satz von J. Ryan ([Rya1], [Rya2]) zumindest ihr Zentrum. Dieses besteht exakt aus den Potenzen der Shiftabbildung. Abschnitt 2.4 überträgt dieses Resultat auf die Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum und zeigt so, daß die Automorphismengruppen auch hier hochgradig nicht-abelsch sind. Speziell erhält man die für SFTs von M. Boyle und W. Krieger ([BK1]) stammende Aussage, daß die periodische-Orbit-Darstellung auf dem Quotienten $\text{Aut}(\sigma)/\langle\sigma\rangle$ treu ist (Korollar 2.31).

Kapitel 3 beschäftigt sich größtenteils mit dem Wechselspiel zwischen Automorphismen von beschränkter und denen unbeschränkter Kodierlänge. Beschränkte Kodierlänge bedeutet hierbei nichts anderes als gleichmäßige Stetigkeit; eine Eigenschaft, die für stetige Abbildungen zwischen kompakten Subshifts automatisch erfüllt ist. Zunächst geben wir einige Beispiele, die zeigen, daß man bei nicht kompakten Markovshifts sehr leicht Abbildungen konstruieren kann, für die kein beschränktes Kodierfenster existiert und daß anders als bei kompakten Subshifts das Inverse eines bijektiven sliding-Block-Codes, i.e. einer gleichmäßig stetigen, shiftkommutierenden Bijektion, nicht ebenfalls diese Eigenschaft haben muß. Anschließend definieren wir zu jeder Darstellung eines Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge die Untergruppe aller Automorphismen, die zusammen mit ihren Inversen beschränkte Kodierlänge haben (Definition 3.5). Durch Schnittbildung bzw. Vereinigung

solcher Untergruppen ergibt sich ein ganzes Netz von durch Inklusion partiell geordneten Teilmengen der Automorphismengruppe, das in seiner Gesamtheit konjugationsinvariant ist. Auch ausgezeichnete Elemente dieser Hierarchie sind bereits Invarianten (Definition 3.7). Weitere Resultate zeigen die Echtheit bestimmter Inklusionen innerhalb dieses Netzes: So existieren Automorphismen beschränkter Kodierlänge, die durch Konjugation mit einem weiteren Automorphismus diese Eigenschaft bereits verlieren (Satz 3.10) sowie solche, die in verschiedenen Darstellungen einmal beschränkte und einmal unbeschränkte Kodierlänge aufweisen (Beobachtung 3.12 und Beispiel 3.15). Die Untergruppe der kodierlängenbeschränkten Automorphismen ist daher echt darstellungsabhängig. Zudem läßt sich zu jedem Automorphismus, der selbst keine Potenz der Shiftabbildung ist, eine Graphendarstellung konstruieren, in der dieser keine beschränkte Kodierlänge aufweist (Satz 3.14).

Abschnitt 3.2 beginnt mit einem Beispielautomorphismus der Ordnung 2, der in keiner Graphendarstellung ein sliding-Block-Code ist. Die im Beweis nötigen Argumente lassen sich auf eine ganze Klasse lokalkompakter Markovshifts übertragen, die wieder durch eine Eigenschaft ihrer Graphendarstellungen charakterisiert wird (Definition 3.17). Satz 3.19 und Korollar 3.20 liefern für diese Klasse die Existenz überabzählbar vieler Automorphismen endlicher Ordnung, die in keiner Graphendarstellung kodierlängenbeschränkt sind. Andererseits läßt sich zu jedem Automorphismus endlicher Ordnung eine spezielle Darstellung des Markovshifts angeben, in der dieser zu einem 1-Block-Code wird (Satz 3.21). Wir geben einen neuen, explizit konstruktiven Beweis dieser für kompakte Subshifts bekannten Aussage. Kombiniert man die beiden letzten Resultate, so ergibt sich für Markovshifts, die die Bedingungen aus Definition 3.17 erfüllen, eine überabzählbare Differenz zwischen den Mengen der Automorphismen, die in irgendeiner Graphen- bzw. in irgendeiner Darstellung beschränkte Kodierlänge aufweisen. Beispiel 3.25 zeigt, daß selbst in Darstellungen eines lokalkompakten Markovshifts ohne synchronisierende Worte, deren Existenz aus [FieD3] Theorem 1.6 folgt, Markerautomorphismen möglich und keine einfach strukturierten Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen zu erwarten sind.

Als nächstes untersuchen wir die Kardinalität der Untergruppen von Automorphismen beschränkter Kodierlänge und stellen fest, daß diese bei allen Graphendarstellungen nicht lokalkompakter Markovshifts überabzählbar sind (Satz 3.26). Bei lokalkompakten Markovshifts ist diese Fragestellung offensichtlich nur interessant, wenn zumindest die Automorphismengruppe selbst überabzählbar ist. Mithilfe von State-Splittings zeigt man, daß dann immer eine Graphendarstellung konstruiert werden kann, die überabzählbar viele involutorische 1-Block-Automorphismen zuläßt (Satz 3.28), während eine beliebige Graphendarstellung diese Eigenschaft nicht erfüllen muß, wie das abschließende Beispiel 3.30 in Abschnitt 3.3 belegt, in dem trotz überabzählbarer Automorphismengruppe zu jeder Kodierlänge nur endlich viele Automorphismen existieren.

Abschnitt 4.1 befaßt sich mit der Struktur ausgedünnter Graphen (Definition 4.1). Automorphismen lokalkompakter Markovshifts, die eine Darstellung auf einem solchen Graphen zulassen, sind stark restringiert. Sie operieren auf den Punkten, die zu zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen innerhalb des Graphen gehören, wie eine feste Potenz der Shiftabbildung (Lemma 4.3). Tatsächlich beschreibt diese Potenz bereits die gesamte Wirkung außerhalb des σ -Orbits einer kompakten Menge, dessen Komplement alle zweiseitig-unendlichen, einfachen Wege umfaßt (Lemma 4.6). Die Automorphismengruppe solcher Markovshifts zerfällt daher in eine direkte Summe aus der vom Shift erzeugten zyklischen Gruppe sowie einer

zentrumslosen Gruppe von Automorphismen, die gewissermaßen nur auf einem endlichen Teilgraphen operieren (Satz 4.7).

Nach einer Beschreibung der aus [FF2] bekannten Konstruktion der kanonischen Kompaktifizierung sind wir in Abschnitt 4.2 in der Lage einen Homomorphismus der Automorphismengruppe eines lokalkompakten Markovshifts in die oft wesentlich kleinere Automorphismengruppe des kanonischen Rand-Systems zu definieren, der die Wirkung der Automorphismen des Markovshifts auf dem kanonischen Rand widerspiegelt. So umfaßt der Kern dieser kanonischen-Rand-Darstellung alle Automorphismen, die nur auf einer endlichen Teilmenge des Alphabets wirken (Beobachtung 4.9), während die Größe des Bildes aus der Struktur des Markovshifts stammende Einschränkungen aufzeigt. So ist für auf ausgedünnten Graphen darstellbare Markovshifts das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung stets minimal (Beobachtung 4.10). Nach Satz 4.12 muß jeder Automorphismus bezüglich seiner Wirkung auf den Punkten des kanonischen Randes bestimmte Kongruenzrelationen modulo der Periode des Markovshifts erfüllen. Insbesondere darf kein Automorphismus zwei Orbits des Rand-Systems modulo dieser Periode verschieden weit drehen. Weiterhin ergibt sich, daß Automorphismen auch die periodischen Daten bei ∞ respektieren müssen (Beobachtung 4.14). Mit diesen Ergebnissen läßt sich das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung für verschiedene Beispielsysteme vollständig bestimmen.

Diese Untersuchungen werden im letzten Abschnitt des vierten Kapitels fortgesetzt, wo wir eine Relation auf den Orbits des kanonischen Randes einführen, die die Pfadstruktur einer Graphendarstellung des lokalkompakten Markovshifts in der Nähe der Randorbits beschreibt (Definition 4.15). Dies ergibt eine neue Konjugationsinvariante: Notwendig für die topologische Konjugiertheit zweier lokalkompakter Markovshifts ist die Existenz einer Bijektion zwischen den beiden Mengen von Randorbits, die genau unsere Pfadstruktur-Relation berücksichtigt (Satz 4.16). Faßt man Automorphismen als Selbstkonjugationen auf, so folgt hieraus sofort eine weitere Einschränkung an die Wirkung auf dem kanonischen Rand und damit an das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung. Dies führt zu einer negativen Antwort auf die Frage, ob in einem lokalkompakten Markovshift jede mit dem Shift verträgliche Permutation einer Menge periodischer Punkte (beliebig großer Periodenlänge) als Einschränkung eines Automorphismus erhalten werden kann. Zuletzt zeigen wir noch, daß sich im allgemeinen eine Folge von Automorphismen, die auf einer aufsteigenden Folge von SFTs, deren Vereinigung dicht in einem lokalkompakten Markovshift liegt, definiert sind, nicht zu einem Automorphismus des Gesamtsystems fortsetzen läßt.

Wir beschließen diese Dissertation im Kapitel 5 mit einer kurzen Diskussion der erzielten Ergebnisse sowie einiger noch offener Fragen, aus denen sich Ansätze zur weiteren Forschung ergeben.

Heidelberg, im Juli 2004

Michael Schraudner

Symbolverzeichnis

Falls im Text nicht gesondert angegeben, haben die aufgeführten Symbole nachstehende Bedeutung:

$\mathbb{N}; \mathbb{Z}; \mathbb{Q}; \mathbb{R}$	Menge der natürlichen; ganzen; rationalen; reellen Zahlen
\mathbb{N}_0	Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen
$\aleph_0; 2^{\aleph_0}$	Kardinalität der Menge \mathbb{N} ; Kardinalität der Menge \mathbb{R}
$\mathfrak{P}(M); M^c$	Potenzmenge der Menge M ; Komplement der Menge M
$\subseteq; \subsetneq$	Teilmenge; echte Teilmenge
$\leq; \trianglelefteq; \triangleleft$	Untergruppe; Normalteiler; echter Normalteiler
$\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(G)$	Zentrum einer Gruppe G
$\langle \sigma \rangle$	zyklische, von σ erzeugte Gruppe
$\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$	volle Permutationsgruppe auf abzählbar vielen Elementen
$\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$	Gruppe der Permutationen in $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ mit endlichem Träger
$\mathcal{A}_{\mathbb{N},f}$	alternierende Gruppe auf abzählbar unendlicher Menge
$\text{Id}; \text{Id}_X$	identische Abbildung; Identität auf X
$\lfloor x \rfloor; \lceil y \rceil$	$:= \max \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ bzw. $\min \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq y\}$ Gaussklammern
\perp	Symbol für "logischen Widerspruch"
\uparrow	Symbol für "undefinierter Wert" (einer Zuordnung)
$\text{OE}; \text{oE}$	Abkürzung für den Terminus "ohne Einschränkung"
$\mathcal{A}; \Sigma_{\mathcal{A}}$	Alphabet/Zustandsmenge; (voller) zweiseitiger Shiftraum über \mathcal{A}
(X, σ)	zweiseitiger Subshift ($X \subseteq \Sigma_{\mathcal{A}}$ Shiftraum, σ Linksshift)
SFT	Abkürzung für "Shift vom endlichen Typ" (Shift of finite type)
${}_n[a_0 a_1 \dots a_m]$	$:= \{x \in X \mid \forall 0 \leq i \leq m : x_{n+i} = a_i\}$ Zylinder eines Subshifts
$x := \dots x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 \dots$	Punkt eines Subshifts, wobei die Nullkoordinate x_0 entspricht
$x_{[m,n]}$	Abschnitt des Punktes x zwischen den Koordinaten m und n
$x_{(-\infty,n]}$; $x_{[m,\infty)}$	linksseitig-; rechtsseitig-unendlicher Strahl in x
$\underline{\quad ? \quad ? \quad ? \quad}$	unbekannter Abschnitt in einem Punkt eines Subshifts
$ w $; w^n ; w^∞	Länge des Wortes w ; n -fache bzw. unendliche Konkatenation des Wortes w
$\mathcal{B}(X)$; $\mathcal{B}_n(X)$	Sprache des Shiftraumes X ; Menge aller Wörter der Länge n in X
$\text{Graph}(X)$; $\text{Pres}(X)$	Menge der Graphen- bzw. Darstellungen des Subshifts (X, σ)

$G = (V, E)$	gerichteter Graph G mit Vertexmenge V und Kantenmenge E
$i(e); t(e)$	Start- bzw. Endvertex der Kante e
ROM	endliche Kanten-/Vertexmenge, die alle Wege eines Graphen markiert
$[p; q]; [p_1; p_2; \dots; p_n]$	Doppelpfad bzw. n -fach Pfad in einem gerichteten Graphen
(FMDP)	Eigenschaft "finitely many double paths" eines Graphen
(BNPC)	Eigenschaft "bounded number of paths component"
$G - K = (V, E \setminus K)$	Komplementärgraph der Kantenmenge K
$\mathcal{C}(G - K)$	Menge der unendlichen Zusammenhangskomponenten in $G - K$
$W_G(u, v)$	Menge aller Gewichte ungerichteter Pfade zwischen u und v in einem Graphen G
$\text{per}_w(G)$	gewichtete Periode des Graphen G
$\text{per}(X); \text{per}(G)$	Periode des Subshifts X bzw. des Graphen G
$\text{Per}(X); \text{Per}_n(X)$	Menge der periodischen Punkte; Punkte der Periode n in X
$\text{Per}_n^0(X)$	Menge der Punkte mit kleinster Periode n in X
$\text{Orb}(X); \text{Orb}_n(X)$	Menge der σ -Orbits; σ -Orbits der Länge n in X
$\text{Orb}(x); \text{Orb}^+(x); \text{Orb}^-(x)$	Orbit des Punktes x unter σ ; Vorwärts- bzw. Rückwärtsorbit
$\text{Orb}(K)^c$	$:= X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(\bigcup_{k \in K} 0[k])$ Orbitkomplement der (endlichen) Symbolmenge K
DT(X)	Menge der doppelt-transitiven Punkte im Subshift X
$\gamma; \varphi, \phi$	topologische Konjugation; Automorphismen eines Subshifts
$\Phi_\infty^{[-n, m]}$	Blockabbildung, die einen sliding-Block-Code induziert
$\text{Aut}(\sigma); \text{End}(\sigma)$	Menge der Automorphismen bzw. Endomorphismen eines Subshifts (X, σ)
$\text{Aut}(\hat{\sigma}); \text{Aut}(\Theta_X)$	Automorphismengruppe der kanonischen Kompaktifizierung bzw. des kanonischen Randes
$\text{Aut}_\gamma^b(\sigma); \text{Aut}_X^b(\sigma) = \text{Aut}_{\text{Id}_X}^b(\sigma)$	Untergruppe der Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge bezüglich der Konjugation γ bzw. der Identität Id_X
$\text{Aut}_{\cap Y}^b(\sigma); \text{Aut}_{\cup Y}^b(\sigma)$	Schnitt bzw. Vereinigung über alle konjugierten Untergruppen der Darstellung $Y \in \text{Pres}(X)$ des Subshifts (X, σ)
$\text{Aut}_{\cap \mathfrak{G}}^b(\sigma); \text{Aut}_{\cup \mathfrak{G}}^b(\sigma)$	Schnitt bzw. Vereinigung über alle Graphendarstellungen
$\text{Aut}_{\cap}^b(\sigma); \text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$	Schnitt bzw. Vereinigung über alle Darstellungen
$(X_0, \sigma_0); (\hat{X}, \hat{\sigma})$	1-Punkt-Kompaktifizierung; kanonische Kompaktifizierung des Subshifts (X, σ)
$(Z(X), \Theta_X)$	kanonisches Rand-System des Subshifts (X, σ)
$Z(X) = Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}})$	kanonischer Rand (definiert über die Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$)
$\text{Orb}(Z(X))$	$:= Z(X) / \langle \Theta_X \rangle$ Menge der Θ_X -Orbits des kanonischen Randes
$g: X \rightarrow Z(X); \hat{g}: \hat{X} \rightarrow Z(X)$	intrinsische Faktorabbildungen bei ∞
$d_0; \hat{d}; \rho$	Gurevich-Metrik; kanonische Metrik; Metrik des Rand-Systems
$\beta: \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \text{Aut}(\Theta_X)$	kanonische-Rand-Darstellung der Automorphismengruppe
$\Omega(z)$	periodische Daten (bei ∞) des Randpunktes $z \in Z(X)$

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Einführende Definitionen

Wir beginnen mit der Definition eines topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum. Anschließend geben wir eine Zusammenschau der wichtigsten topologischen und graphentheoretischen Begriffe und Eigenschaften dieser symbolisch-dynamischen Systeme. Die verwendete Notation folgt in weiten Teilen den Standardwerken von D. Lind und B. Marcus [LM] sowie B. Kitchens [Kit], die auch eine sehr gute Referenz der hier beschriebenen Sachverhalte darstellen.

Sei \mathcal{A} eine beliebige abzählbar unendliche Menge von Zuständen; oft wird $\mathcal{A} = \mathbb{N}$ benutzt. Versieht man \mathcal{A} mit der diskreten Topologie, so erhält man einen nicht kompakten, metrischen Raum. Der Produktraum $\Sigma_{\mathcal{A}} := \mathcal{A}^{\mathbb{Z}}$ aller zweiseitig-unendlichen Folgen über dem Alphabet \mathcal{A} , versehen mit der Produkttopologie ist dann ebenfalls ein nicht kompakter, metrischer Raum.

Die Topologie auf $\Sigma_{\mathcal{A}}$ wird, nach obiger Konstruktion durch die Produktmetrik der diskreten Metrik auf \mathcal{A} erzeugt:

$$\forall x, y \in \Sigma_{\mathcal{A}} : d(x, y) := \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{\rho(x_i, y_i)}{2^{|i|}} \quad \text{wobei} \quad \rho(x_i, y_i) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x_i \neq y_i \\ 0 & \text{falls } x_i = y_i \end{cases}$$

Eine hierzu äquivalente, einfachere Metrik wird für alle $x, y \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ durch $d(x, y) := \frac{1}{2^n}$ mit $n := \sup \{m \in \mathbb{N}_0 \mid \forall -m < i < m : x_i = y_i\}$ gegeben¹. Zwei Punkte haben somit einen kleinen Abstand, wenn die zugehörigen Folgen $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}, (y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ in einem großen Abschnitt symmetrisch um die Nullkoordinate übereinstimmen.

Ein dünner Zylinder ${}_n[a_0 a_1 \dots a_m]$ ($n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0, a_i \in \mathcal{A}$) ist die Menge aller Folgen $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_{\mathcal{A}}$, die ab der n -ten Koordinate die Symbolfolge a_0, a_1, \dots, a_m sehen. Formal:

$${}_n[a_0 a_1 \dots a_m] := \{x \in \Sigma_{\mathcal{A}} \mid \forall 0 \leq i \leq m : x_{n+i} = a_i\}$$

¹Für $x = y$ ergibt sich $n = \sup \mathbb{N}_0 = \infty$ und $d(x, x) = \frac{1}{2^\infty} = 0$.

Zylindermengen sind zugleich offen und abgeschlossen und bilden eine abzählbare Basis der Topologie. Jede offene Menge läßt sich als Vereinigung von Zylindermengen darstellen. $\Sigma_{\mathcal{A}}$ ist damit ein total unzusammenhängender, nulldimensionaler topologischer Raum ohne isolierte Punkte.

Auf $\Sigma_{\mathcal{A}}$ definiert man die Shiftabbildung $\sigma : \Sigma_{\mathcal{A}} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{A}} : \sigma((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) := (x_{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$. Eine Folge $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ wird unter σ um eine Stelle nach links geschoben. σ erzeugt damit eine Dynamik auf dem Raum $\Sigma_{\mathcal{A}}$. Offensichtlich ist σ invertierbar und respektiert die topologische Struktur von $\Sigma_{\mathcal{A}}$.

Unter der Wirkung von σ wird die Topologie bereits von den Nullzylindern ${}_0[a]$ ($a \in \mathcal{A}$) erzeugt.

Das aus dem Shiftraum $\Sigma_{\mathcal{A}}$ zusammen mit dem Homöomorphismus σ bestehende invertierbare symbolisch-dynamische System ist der zweiseitige volle Shift über dem Alphabet \mathcal{A} .

Bemerkung: Führt man obige Konstruktion für eine endliche Zustandsmenge \mathcal{A} mit $|\mathcal{A}| = N$ aus, so erhält man den vollen, zweiseitigen N -Shift (Σ_N, σ) . Anders als bei abzählbar unendlichem Alphabet ist der Shiftraum Σ_N – als abzählbares Produkt kompakter Räume – nach Tychonoff selbst kompakt. Ein Unterschied, der sich in erheblichem Maß auf die Eigenschaften dieser symbolisch-dynamischen Systeme und die sie beschreibende Theorie auswirkt.

Innerhalb jedes vollen zweiseitigen Shifts definiert man Subshifts (X, σ) . Dabei ist $X \subseteq \Sigma_{\mathcal{A}}$ eine beliebige (abgeschlossene), shiftinvariante Teilmenge, die mit der Relativtopologie versehen wird. Erzeugt wird diese von den Durchschnitten der Zylindermengen aus $\Sigma_{\mathcal{A}}$ mit X . σ ist hierbei die Einschränkung der Shiftabbildung auf die Teilmenge X .

Zwei Subshifts $(X_1, \sigma_1), (X_2, \sigma_2)$ werden als das gleiche dynamische System angesehen, wenn sie zueinander (topologisch) konjugiert sind, d.h. wenn ein Homöomorphismus $\gamma : X_1 \rightarrow X_2$ existiert, der mit den Shiftabbildungen vertauscht: $\gamma \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ \gamma$. Die Abbildung γ heißt (topologische) Konjugation.

(X_1, σ_1) und (X_2, σ_2) sind dann lediglich zwei Darstellungen des gleichen topologisch-dynamischen Objekts. Die Menge aller zu einem gegebenen Subshift (X, σ) konjugierten Subshifts in $(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma)$ wird mit $\text{Pres}(X)$ bezeichnet.

Bemerkung: Allgemein heißt ein topologisch-dynamisches System (M, T) ein Subshift über einer abzählbar unendlichen Zustandsmenge genau dann, wenn (M, T) topologisch konjugiert zu einem Subshift von $(\Sigma_{\mathcal{A}}, \sigma)$ ist. Dies ist nach einer Verallgemeinerung von [FieU] Lemma 2.1.9 äquivalent dazu, daß M ein nulldimensionaler, polnischer, i.e. vollständiger, separabler, metrischer Raum und T expansiv bezüglich einer Metrik ist, die die Topologie auf M erzeugt.

Ein Subshift (X, σ) heißt topologischer Markovshift, falls die Menge seiner Darstellungen $\text{Pres}(X)$ einen sogenannten Kantenshift (X_G, σ) auf einem gerichteten Graphen $G = (V, E)$ enthält. Dabei bezeichnet X_G die Menge aller zweiseitig-unendlichen Wege in G , die üblicherweise als zweiseitig-unendliche Folge von Kanten aus E gegeben sind.

$\sigma : X_G \rightarrow X_G$ operiert auf dieser Menge als Links-Shift, indem die Kantenfolge eines solchen Weges um eine Stelle nach links geschoben wird. Die Shiftinvarianz einer solchen Menge ist offensichtlich; ihre Abgeschlossenheit weist man direkt nach.

Für endliches Alphabet hat sich für diese Subshifts auch die Bezeichnung "Shift vom endlichen Typ" (SFT) eingebürgert. Der Graph G ist in diesem Fall endlich, während er bei abzählbar unendlicher Zustandsmenge unendlich viele Kanten enthält.

Die Menge der Graphendarstellungen von X , i.e. die Darstellungen als Kantenshift auf einem gerichteten Graphen, bezeichnet man mit $\text{Graph}(X)$.

Bemerkung: Ein allgemeines, topologisch-dynamisches System (M, T) ist damit genau dann ein topologischer Markovshift mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, wenn (M, T) topologisch konjugiert zu einem Kantenshift auf einem gerichteten Graphen mit abzählbar unendlicher Kantenmenge ist. Gleichbedeutend hiermit ist die Existenz eines Markovgenerators für das System (M, T) (vgl. [FieU], Lemma 2.2.6).

Häufig werden wir die dynamischen Eigenschaften eines Markovshifts studieren, indem wir eine geeignete Darstellung als Kantenshift wählen und dann diese spezielle Darstellung und die Eigenschaften ihres Graphen ausnutzen. Dies ist gerechtfertigt, da man üblicherweise nur an Invarianten der topologischen Konjugation, also Eigenschaften, die allen Darstellungen eines Subshifts zueigen sind, interessiert ist.

Hierzu stellen wir noch einige Definitionen und Notationen zusammen, die die Begriffe der Graphentheorie mit den Begriffen der Shifträume verknüpfen:

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph mit Vertexmenge V und Kantenmenge E . Alle betrachteten Graphen seien essentiell, d.h. der Ein- und Ausgangsgrad an jedem Vertex sei echt positiv. Dies bedeutet keine echte Einschränkung, da zu jedem Graphen ein eindeutiger, maximaler essentieller Teilgraph existiert und dieser die gesamte Information des Subshifts enthält.

Man definiert zwei Abbildungen $\mathbf{i}, \mathbf{t} : E \rightarrow V$, so daß $\mathbf{i}(e)$ den Startvertex und $\mathbf{t}(e)$ den Endvertex jeder Kante $e \in E$ ergibt. Man spricht von einer am Vertex $v \in V$ einlaufenden (auslaufenden) Kante $e \in E$, falls $\mathbf{t}(e) = v$ ($\mathbf{i}(e) = v$).

Ein zweiseitig-unendlicher Weg in G ist dann eine Folge von Kanten $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}}$, für die gilt: $\mathbf{t}(e_i) = \mathbf{i}(e_{i+1}) \forall i \in \mathbb{Z}$. Der Shiftraum des durch G gegebenen Kantenshifts ist dann $X_G := \{(x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in E^{\mathbb{Z}} \mid \forall i \in \mathbb{Z} : \mathbf{t}(x_i) = \mathbf{i}(x_{i+1})\} \subseteq E^{\mathbb{Z}}$.

Ein Pfad der Länge m in G ist eine Folge e_0, e_1, \dots, e_{m-1} ($e_i \in E$) von Kanten aus G , wobei wieder $\mathbf{t}(e_i) = \mathbf{i}(e_{i+1}) \forall 0 \leq i \leq m-2$ gelten soll. In der Sprache der Shifträume heißt ein solcher endlicher Abschnitt von Symbolen meist Block oder Wort.

Sei (X, σ) ein Subshift über dem Alphabet \mathcal{A} , $x \in X$ und $m \leq n \in \mathbb{Z}$, so bezeichnet $x_{[m,n]} := x_m x_{m+1} \dots x_{n-1} x_n$ den Block des Punktes x , der zwischen den Koordinaten m und n liegt. Für einen Kantenshift $X = X_G$ ist $x_{[m,n]}$ also ein Pfad der Länge $n - m + 1$ in G .

$x_{[n,\infty)} := x_n x_{n+1} x_{n+2} \dots$ bezeichnet den rechtsseitig- und $x_{(-\infty, n]} := \dots x_{n-2} x_{n-1} x_n$ den linksseitig-unendlichen Strahl des Punktes x ab der bzw. bis zur Koordinate n . Dies entspricht bei einem Kantenshift einem rechts- bzw. linksseitig-unendlichen Weg in G .

Die Sprechweise: "Ein Punkt $x \in X$ sieht einen Block $a_0 a_1 \dots a_{m-1} \in \mathcal{A}^m$ ($m \in \mathbb{N}$) ab einer Koordinate $n \in \mathbb{Z}$ " bedeutet gerade $x_{[n, n+m-1]} = a_0 a_1 \dots a_{m-1}$. Analog für Strahlen.

Man definiert $\mathcal{B}_m(X) := \{a_0 a_1 \dots a_{m-1} \in \mathcal{A}^m \mid \exists x \in X : x_{[0,m-1]} = a_0 a_1 \dots a_{m-1}\}$ als die Menge aller Worte der Länge $m \in \mathbb{N}_0$, die in X auftreten. Aufgrund der Shiftinvarianz der Menge X ist das Auftreten eines Wortes unabhängig von der Koordinatenwahl. Für einen Kantenshift sind dies genau alle Pfade der Länge m , die in G enthalten sind.

Die disjunkte Vereinigung dieser Blockmengen $\mathcal{B}(X) := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \mathcal{B}_m(X)$ heißt die Sprache des Subshifts (X, σ) ; die Elemente von $\mathcal{B}(X)$ heißen zulässige Blöcke oder Worte des Subshifts. Für jeden Block $w \in \mathcal{B}(X)$ bezeichnet $|w|$ die Länge und $w^n := w w \dots w$ ($n \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$) die n -fache Konkatenation des Blockes w .

Ein Subshift (X, σ) heißt lokalkompakt, wenn X als topologischer Raum lokalkompakt ist, i.e. wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $x \in U \subseteq X$ gibt, deren Abschluß \bar{U} kompakt ist. Diese Eigenschaft ist für Markovshifts äquivalent dazu, daß ein und damit bereits jeder dünne Zylinder kompakt ist.

Ein Kantenshift $X = X_G$ ist genau dann lokalkompakt, wenn der zugehörige Graph $G = (V, E)$ lokal-endlich ist, d.h. wenn der Ein- und Ausgangsgrad an jedem Vertex endlich ist. Dabei ist der Eingangsgrad von $v \in V$ die Kardinalität der Menge $\{e \in E \mid \mathbf{t}(e) = v\}$. Analog für den Ausgangsgrad. Ist der Graph G endlich, i.e. $|V|, |E|$ endlich, so ist (X_G, σ) ein kompakter Subshift und damit ein Shift vom endlichen Typ.

Ein Subshift (X, σ) heißt (topologisch) transitiv, falls der Shiftraum X irreduzibel ist, i.e. falls es zu jedem Paar $u, w \in \mathcal{B}(X)$ von Blöcken einen Block $v \in \mathcal{B}(X)$ gibt, so daß auch der zusammengesetzte Block $u v w \in \mathcal{B}(X)$ in einem Punkt des Shifts auftritt². Ist $X = X_G$ ein Kantenshift, so ist (X_G, σ) genau dann transitiv, wenn der Graph G stark zusammenhängend ist.

Ein Subshift (X, σ) heißt mischend, falls es zu jedem Paar $u, w \in \mathcal{B}(X)$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq N$ ein Block $v \in \mathcal{B}_n(X)$ existiert, so daß auch der zusammengesetzte Block $u v w \in \mathcal{B}(X)$ für X zulässig ist.

Bemerkung: Für transitive Subshifts (X, σ) über einer endlichen Zustandsmenge, die mehr als einen σ -Orbit enthalten, ist der topologische Raum X stets homöomorph zur Cantor-Menge. Eine ähnliche Charakterisierung hat man teilweise auch für nichttriviale, nicht kompakte Subshifts: Der Shiftraum X jedes transitiven, lokalkompakten Subshifts (X, σ) über einem abzählbar unendlichen Alphabet ist homöomorph zur topologischen Summe abzählbar vieler Kopien der Cantor-Menge ([FieU], Lemma 2.3.1). Bei allgemeinen transitiven, nicht lokalkompakten Subshifts ist der Shiftraum dagegen aus topologischer Sicht nicht eindeutig. Beschränkt man sich jedoch auf transitive, nicht lokalkompakte Markovshifts (X, σ) , so ist X homöomorph zum Baire'schen Raum $\mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ ([FieU], Observation 2.3.2).

Zu jedem Punkt $x \in X$ definiert man den Orbit unter der Shiftabbildung als die Menge $\text{Orb}(x) := \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq X$. Die Menge aller Orbits ist $\text{Orb}(X) := \{\text{Orb}(x) \mid x \in X\}$.

²Diese Begriffsbildung ist äquivalent zur Definition der (topologischen) Transitivität (vgl. [LM] S.189) für allgemeine topologisch-dynamische Systeme (M, T) :

$$(M, T) \text{ ist topologisch transitiv} \iff \forall U, V \subseteq M \text{ offen, nichtleer } \exists n \in \mathbb{N} : T^n(U) \cap V \neq \emptyset$$

Üblicherweise wird $\text{Orb}(x)$ eine unendliche Menge sein. Gilt jedoch $\sigma^n(x) = x$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so ist $\text{Orb}(x)$ endlich und x heißt periodischer Punkt. Jedes solche n heißt eine Periode von x und $\text{Per}_n(X) := \{x \in X \mid \sigma^n(x) = x\}$ ist die Menge aller n -periodischen Punkte des Subshifts. Die Punkte von Periode 1 sind genau die Fixpunkte von (X, σ) .

Jeder Punkt $x \in \text{Per}_n(X)$ läßt sich in der Form $x = w^\infty$ mit $w := x_{[0, n-1]} \in \mathcal{B}_n(X)$ schreiben. Ist $X = X_G$ ein Kantenshift, so entspricht jedem n -periodischen Punkt $x \in X_G$ in G eine sogenannte Schleife oder Loop, i.e. ein geschlossener Pfad der Länge n , also eine Folge von Kanten e_0, e_1, \dots, e_{n-1} ($e_i \in E$) mit $\mathbf{t}(e_i) = \mathbf{i}(e_{i+1}) \forall 0 \leq i \leq n-2$ und $\mathbf{t}(e_{n-1}) = \mathbf{i}(e_0)$, so daß $x = (e_0 e_1 \dots e_{n-1})^\infty$. Ein Fixpunkt korrespondiert dann zu einer Selbstschleife, d.h. einer Kante $e \in E$ mit $\mathbf{i}(e) = \mathbf{t}(e)$.

Die Menge $\text{Per}(X) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Per}_n(X)$ aller periodischen Punkte in X ist abzählbar. In einem transitiven Markovshift (X, σ) läßt sich zudem jeder Punkt $x \in X$ durch die Folge $(\sigma^i((x_{[-i, i]} w^{(x_i, x_{-i})})^\infty))_{i \in \mathbb{N}}$ periodischer Punkte approximieren, wobei $w^{(x_i, x_{-i})} \in \mathcal{B}(X)$ ein Block mit der Eigenschaft $x_{[-i, i]} w^{(x_i, x_{-i})} x_{[-i, i]} \in \mathcal{B}(X)$ ist, welcher aufgrund der Transitivität immer existiert. $\text{Per}(X)$ ist dann bereits eine dichte Teilmenge in X .

Ist $x \in \text{Per}_n(X)$ und gilt zudem $\sigma^i(x) \neq x \forall 1 \leq i \leq n-1$, so heißt n die kleinste Periode von x . Alle übrigen Perioden sind Vielfache von n .

Die Menge $\text{Per}_n^0(X) := \{x \in X \mid \sigma^n(x) = x \wedge \forall 1 \leq i \leq n-1 : \sigma^i(x) \neq x\}$ enthält genau die Punkte kleinster Periode n . Offensichtlich gilt $\text{Per}_n(X) = \bigcup_{m|n} \text{Per}_m^0(X)$.

Enthält ein Subshift (X, σ) periodische Punkte, so definiert man seine Periode $\text{per}(X) := \text{ggT}\{n \in \mathbb{N} \mid \text{Per}_n(X) \neq \emptyset\}$. Dies ist eine Invariante der topologischen Konjugation, da bereits die Zahlen $|\text{Per}_n(X)|$ konjugationsinvariant sind.

Entsprechend definiert man die Periode eines gerichteten, stark zusammenhängenden Graphen G durch $\text{per}(G) := \text{ggT}\{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ geschlossener, gerichteter Pfad der Länge } n \text{ in } G\}$. Für einen topologischen Markovshift (X, σ) , der durch einen Graphen G dargestellt wird gilt $\text{per}(X) = \text{per}(G)$.

Ein Punkt $x \in X$, dessen Orbit $\text{Orb}(x)$ unter σ bereits dicht in X liegt, heißt transitiver Punkt. Bildet bereits der Vorwärts- bzw. Rückwärtsorbit $\text{Orb}^+(x) := \{\sigma^n(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ bzw. $\text{Orb}^-(x) := \{\sigma^{-n}(x) \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine dichte Teilmenge in X , so ist x vorwärts- bzw. rückwärts-transitiv. Punkte die zugleich vorwärts- als auch rückwärts-transitiv sind, heißen zweiseitig- oder doppelt-transitiv.

Jeder transitive Subshift enthält doppelt-transitive Punkte und wir benutzen die Notation $\text{DT}(X)$ für die Menge doppelt-transitiver Punkte in X .

Ein Punkt $x \in \text{DT}(X) \subseteq X$ sieht jeden Block der Sprache $\mathcal{B}(X)$ des Shifts sowohl in jedem rechts- als auch linksseitig-unendlichen Strahl unendlich oft. Für einen Graphenshift $X = X_G$ bedeutet dies, daß x entsprechend jeden endlichen Pfad in G unendlich oft durchläuft.

Doppelt-transitive Punkte sind somit gewissermaßen das Gegenteil periodischer Punkte, die ja nur einen endlichen Pfad in G wiedergeben. Ein einzelner doppelt-transitiver Punkt charakterisiert zum einen bereits den Subshift (X, σ) , indem er die gesamte Information über die Sprache $\mathcal{B}(X)$ enthält und ist zum anderen im maßtheoretischen Sinn typisch für X .³

Jeder Block $w \in \mathcal{B}(X)$ eines transitiven Markovshifts (X, σ) läßt sich zu einem doppelt-

³Bezüglich eines ergodischen Maßes mit vollem Träger ist das Komplement $X \setminus \text{DT}(X)$ eine Nullmenge.

transitiven Punkt erweitern. Damit läßt sich jeder beliebige Punkt $x \in X$ durch eine Folge doppelt-transitiver Punkte approximieren, die man erhält, indem man für jedes $i \in \mathbb{N}_0$ den Block $x_{[-i,i]} \in \mathcal{B}_{2i+1}(X)$ zu einem doppelt-transitiven Punkt fortsetzt. Wie die Menge der periodischen Punkte ist damit auch $DT(X)$ dichte Teilmenge des transitiven Shiftraumes X .

Besonders einfache Beispiele für Abbildungen zwischen zwei Subshifts (X, σ_X) und (Y, σ_Y) sind sogenannte sliding-Block-Codes. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $-m \leq n$. Ein (m, n) -sliding-Block-Code $\phi : X \rightarrow Y$ ist eine Abbildung, bei der für alle $i \in \mathbb{Z}$ die i -te Koordinate des Bildpunktes $\phi(x)$ ($x \in X$) nur von den Symbolen innerhalb des Blockes $x_{[i-m, i+n]}$ abhängt. ϕ wird somit bereits durch eine $(m+n+1)$ -Blockabbildung $\Phi : \mathcal{B}_{m+n+1}(X) \rightarrow \mathcal{B}_1(Y)$ induziert.

Es gilt dann $\phi(x) = y$ mit $y_i := \Phi(x_{[i-m, i+n]})$ für alle $i \in \mathbb{Z}$ und wir schreiben auch $\phi = \Phi_{\infty}^{[-m, n]}$. Jeder sliding-Block-Code ist (gleichmäßig) stetig und kommutiert mit den Shiftabbildungen, d.h. $\sigma_Y \circ \phi = \phi \circ \sigma_X$. Ein bijektiver sliding-Block-Code, dessen Inverses ebenfalls stetig ist, ist daher bereits eine topologische Konjugation.

Die Zahlen m und n heißen das Gedächtnis bzw. die Vorschau des sliding-Block-Codes. Ist $m = n = 0$, so spricht man von einem 1-Block-Code. Allgemeiner ist jede Zahl $K \geq 2 \max\{m, n\} + 1 \in \mathbb{N}$ eine Kodierlänge der Abbildung ϕ . Natürlich ist jeder (m, n) -sliding-Block-Code zugleich auch ein (m', n') -sliding-Block-Code für alle $m' \geq m$ und $n' \geq n$, indem man die Information auf den zusätzlichen Koordinaten nicht beachtet.

Um aus einer Graphendarstellung $G = (V, E)$ eines topologischen Markovshifts (X_G, σ) weitere Graphendarstellungen $G' = (V', E')$ zu konstruieren, so daß die entsprechenden Kantenshifts $(X_{G'}, \sigma')$ und (X_G, σ) topologisch konjugiert zueinander sind, kennt man zwei fundamentale Operationen, die sogenannten State-Splittings bzw. die dazu inversen State-Amalgamierungen. Da G ein gerichteter Graph ist, unterscheidet man zwischen in- und out-Splittings bzw. -Amalgamierungen.

Wir beschreiben hier exemplarisch ein (elementares) out-Splitting am Vertex $v \in V$:

Zunächst partitioniert man die Menge der auslaufenden Kanten $O_v := \{e \in E \mid i(e) = v\}$ in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen $O_{v,1}$ und $O_{v,2}$. Der gesplittete Graph G' besteht dann aus der Vertexmenge $V' := (V \setminus \{v\}) \dot{\cup} \{v_1, v_2\}$ sowie der Kantenmenge $E' := (E \setminus \{e \in E \mid t(e) = v\}) \dot{\cup} \{e_1, e_2 \mid e \in E \wedge t(e) = v\}$.

Die Abbildungen für Start- und Endvertices $i' : E' \rightarrow V'$ und $t' : E' \rightarrow V'$ definiert man formal wie folgt:

$\forall e \in E :$

$$\begin{aligned} i(e) \neq v \wedge t(e) \neq v &\quad \Rightarrow \quad i'(e) := i(e) \wedge t'(e) := t(e) \\ i(e) \neq v \wedge t(e) = v &\quad \Rightarrow \quad i'(e_1) := i'(e_2) := i(e) \wedge t'(e_1) := v_1 \wedge t'(e_2) := v_2 \\ i(e) = v \wedge t(e) \neq v : e \in O_{v,1} &\quad \Rightarrow \quad i'(e) := v_1 \wedge t'(e) := t(e) \\ &\quad e \in O_{v,2} \quad \Rightarrow \quad i'(e) := v_2 \wedge t'(e) := t(e) \\ i(e) = v \wedge t(e) = v : e \in O_{v,1} &\quad \Rightarrow \quad i'(e_1) := i'(e_2) := t'(e_1) := v_1 \wedge t'(e_2) := v_2 \\ &\quad e \in O_{v,2} \quad \Rightarrow \quad i'(e_1) := i'(e_2) := t'(e_2) := v_2 \wedge t'(e_1) := v_1 \end{aligned}$$

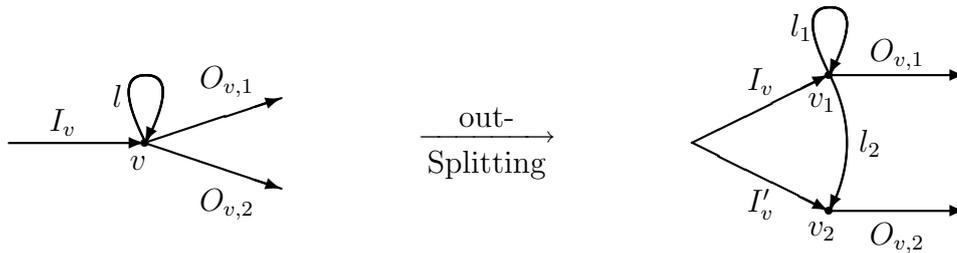


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung eines out-Splittings am Vertex $v \in V$. Gezeigt ist der Ausschnitt des Graphen $G = (V, E)$, der verändert wird. Die Menge der Nachfolgerkanten O_v wird in zwei disjunkte, nichtleere Teilmengen $O_{v,1}$ und $O_{v,2}$ partitioniert, der Vertex v und die einlaufenden Kanten aus I_v werden verdoppelt.

Anschaulich verdoppelt man den Vertex v sowie die Menge $I_v := \{e \in E \mid \mathbf{t}(e) = v\}$ der Vorgängerkanten wie in Abbildung 1.1 angedeutet. Die neuen Vertices v_1 und v_2 haben dann gleiche Vorgänger- aber disjunkte Nachfolgerkantenmengen.

Die zu einem out-Splitting inverse Operation, bei der man zwei Vertices mit disjunkten Nachfolger- aber gleichen Vorgängerkantenmengen zu einem Vertex zusammenschlägt, nennt man out-Amalgamierung.

Ein (elementares) in-Splitting entspricht der Operation eines out-Splittings auf dem transponierten Graphen. Dabei wird nicht die Menge der auslaufenden, sondern die Menge der einlaufenden Kanten partitioniert und die Nachfolgerkantenmenge verdoppelt. Man kann ein in-Splitting am Vertex $v \in V$ erzeugen, indem man zunächst zum transponierten Graphen übergeht, d.h. die Richtung aller Kanten in G umkehrt, dann ein out-Splitting am Vertex v durchführt und anschließend den gesplitteten Graphen transponiert. Die dazu inverse Operation heißt in-Amalgamierung.

Erhält man ausgehend von einem Graphen G durch eine endliche Folge von elementaren in-/out-Splittings und -Amalgamierungen einen Graphen G' , so sind die Kantenshifts (X_G, σ) und $(X_{G'}, \sigma')$ topologisch konjugiert.⁴ Ist G stark zusammenhängend, so hat auch G' diese Eigenschaft.

Generalvoraussetzung: In dieser Arbeit bezeichnet der Begriff "Markovshift" stets einen nicht kompakten topologischen Markovshift über einem abzählbar unendlichen Alphabet. Kompakte Markovshifts nennen wir dagegen SFTs. Ein "lokalkompakter Markovshift" ist daher immer ein nicht kompakter, lokalkompakter topologischer Markovshift mit abzählbar unendlichem Zustandsraum.

⁴Das in [LM] §2.4 für SFTs entwickelte Konzept allgemeiner Splittings/Amalgamierungen, die zugleich auf mehrere (alle) Vertices in G wirken, und in denen auch Unterteilungen der Nachfolger-/Vorgängerkanten in mehr als 2 Partitionsmengen erlaubt sind, ist nicht mächtiger. Jedes allgemeine Splitting (Amalgamierung) eines SFTs kann aus einer endlichen Folge elementarer Splittings (Amalgamierungen) erzeugt werden.

1.2 Automorphismen symbolisch-dynamischer Systeme – Stand der Forschung

Wir definieren Automorphismen eines Subshifts, geben einige Beispiele und erläutern, warum die Automorphismengruppe ein interessantes, invariant mit dem Subshift verbundenes Objekt ist. Anschließend beschreiben wir den momentanen Kenntnisstand in Bezug auf die Automorphismen(gruppen) von SFTs und codierten Systemen.

Wie in vielen Bereichen der Mathematik studiert man auch Subshifts, indem man ihre inneren Symmetrien untersucht. Den passenden Rahmen hierfür bildet der Begriff des Automorphismus:

Sei (X, σ) ein beliebiger Subshift über einem (endlichen oder abzählbar unendlichen) Alphabet. Eine Abbildung $\varphi : X \rightarrow X$ heißt ein Automorphismus (von σ), falls φ ein Homöomorphismus auf X ist, der zusätzlich mit der Shiftabbildung vertauscht, d.h. $\varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi$.

Mit anderen Worten ist ein Automorphismus also eine topologische Konjugation des symbolisch-dynamischen Systems zu sich selbst.

Einfache Beispiele für Automorphismen auf zweiseitigen Subshifts (X, σ) sind die Identität Id_X sowie die Potenzen σ^i ($i \in \mathbb{Z}$) der Shiftabbildung. Auf dem vollen Shift über dem Alphabet \mathcal{A} induziert zudem jede Permutation $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ einen Automorphismus $\varphi_\pi : \Sigma_{\mathcal{A}} \rightarrow \Sigma_{\mathcal{A}}$ durch $(\varphi(x))_i := \pi(x_i)$ für alle $x \in \Sigma_{\mathcal{A}}$ und $i \in \mathbb{Z}$.

Offensichtlich sind mit φ, ϕ auch die zusammengesetzte Abbildung $\varphi \circ \phi$ und die inverse Abbildung φ^{-1} Automorphismen. Damit induziert die Komposition eine Gruppenstruktur auf der Menge der Automorphismen $\text{Aut}(\sigma) := \{\varphi : X \rightarrow X \mid \varphi \text{ Homöomorphismus} \wedge \varphi \circ \sigma = \sigma \circ \varphi\}$.

Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ ist eine Invariante der topologischen Konjugation. Seien (X, σ_X) und (Y, σ_Y) zwei topologisch konjugierte Subshifts und sei $\gamma : X \rightarrow Y$ die zugehörige Konjugation, so vermittelt γ einen Gruppenisomorphismus $\text{Aut}(\sigma_X) \rightarrow \text{Aut}(\sigma_Y)$ durch $\varphi \mapsto \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1}$.

Bereits seit der Arbeit von G. Hedlund [Hed] versucht man die Automorphismengruppen verschiedener Subshifts zu verstehen, um daraus Informationen über das jeweilige symbolisch-dynamische System zu erhalten. Interessiert ist man vor allem an der Größe, der Untergruppenstruktur und den algebraischen Eigenschaften von $\text{Aut}(\sigma)$ als abstrakter Gruppe. Daneben stehen Fragen nach speziellen Darstellungen der Automorphismengruppe, d.h. Homomorphismen in kleinere, einfacher strukturierte Gruppen, im Vordergrund. Die Schwierigkeit und Komplexität solcher Fragestellungen zeigt sich unter anderem darin, daß bisher mit wenigen Ausnahmen nur Ergebnisse über Automorphismen(gruppen) von Shifts vom endlichen Typ veröffentlicht wurden. Hierfür hat man eine tiefgehende Theorie entwickelt, die ihre Wurzeln in verschiedensten Teildisziplinen (Algebra, Kombinatorik, Zahlentheorie, algebraische Topologie, K-Theorie, Maß- und Ergodentheorie) der Mathematik hat.

Wir geben einen Abriß der wichtigsten, bekannten Resultate über Automorphismen zweiseitiger SFTs, die diese Dissertation grundlegend motiviert haben:

In einem Übersichtsartikel von 1969 zeigte G. Hedlund [Hed], daß die Automorphismengruppe zweiseitiger, nichttrivialer SFTs stets abzählbar unendlich sein muß, da zwischen kompakten Subshifts generell nur abzählbar viele stetige, shiftkommutierende Abbildungen existieren und offensichtlich jede Potenz der Shiftabbildung zugleich ein Automorphismus ist. Insbesondere hat jeder Automorphismus beschränkte Kodierlänge.

Ebenfalls auf G. Hedlund geht das wichtigste Verfahren zur Konstruktion von Automorphismen, die sogenannte Marker-Methode zurück: Sei $M \in \mathcal{B}(X)$ ein Markerblock eines nichttrivialen SFTs (X, σ) und $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{B}_n(X)$ ($n \in \mathbb{N}$) eine Menge von Blöcken gleicher Länge, so daß jedes Wort der Form MWM mit $W \in \mathcal{W}$ für X zulässig ist und der Block M jedes solche Wort nur in trivialer Weise, d.h. auf den ersten bzw. letzten $|M|$ Symbolen, überlappen kann. Zu jeder Permutation $\pi : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$ läßt sich ein Markerautomorphismus $\varphi_\pi : X \rightarrow X$ definieren, der in jedem Punkt aus X alle Blöcke der Form MWM durch die (gleichlangen) Blöcke $M\pi(W)M$ ersetzt. Solche Abbildungen sind nach Wahl von M und \mathcal{W} wohldefiniert, bijektiv, stetig und sie vertauschen mit der Shiftabbildung. Obwohl die Menge \mathcal{W} bei geeigneter Wahl des Markers M (und wachsendem n) beliebig groß gemacht und damit nach dem Satz von Cayley jede endliche Gruppe in der Automorphismengruppe realisiert werden kann, hat jeder Markerautomorphismus eines SFTs endliche Ordnung. Eine Einschränkung, die durch Komposition aufgehoben wird, wie das in [Hed] beschriebene Beispiel zweier involutorischer Markerautomorphismen zeigt, deren Produkt unendliche Ordnung hat.

Diese einfachste Form der Marker-Methode und entsprechende Verallgemeinerungen wurden in den 1980er Jahren dazu benutzt, verschiedenste Untergruppen der Automorphismengruppe zu konstruieren. Einen Überblick über die dabei entdeckten, vielfältigen und komplizierten Strukturen geben [BLR] und [Kit]. Für jeden mischenden, nichttrivialen SFT (X, σ) enthält $\text{Aut}(\sigma)$ die direkte Summe jeder abzählbaren Familie endlicher Gruppen, die direkte Summe abzählbar vieler Kopien von \mathbb{Z} , die von abzählbar vielen Generatoren erzeugte freie Gruppe sowie all deren Untergruppen. Eine spätere Arbeit [KR1] bettet zudem die Fundamentalgruppe jeder 2-Mannigfaltigkeit sowie jede abzählbare, residual endliche, lokal-endliche (i.e. jede endliche Teilmenge liegt in einer endlichen Untergruppe) Gruppe in $\text{Aut}(\sigma)$ ein.

Als einschränkende Resultate seien die Nichtexistenz von endlich erzeugten Untergruppen mit unlösbarem Wortproblem sowie die residuale Endlichkeit der Automorphismengruppe und damit all ihrer Untergruppen erwähnt [BLR]. Letzteres beruht allein auf der Tatsache, daß Subshifts über einem endlichen Alphabet zu jeder Periodenlänge nur endlich viele periodische Punkte enthalten, und daß diese in einem transitiven SFT eine dichte Teilmenge bilden. Als direkte Konsequenz dieser algebraischen Eigenschaft lassen sich weder einfache Gruppen unendlicher Ordnung noch nichttriviale, divisionsvollständige Gruppen wie $\mathcal{A}_{N,f}$, $\text{PSL}_n(\mathbb{Q})$ ($2 \leq n \in \mathbb{N}$), \mathbb{Q} , $\mathbb{Z}(p^\infty)$ mit $p \in \mathbb{N}$ prim in $\text{Aut}(\sigma)$ realisieren. Unbekannt ist bis heute allerdings, ob Gruppen der Form $\mathbb{Z}[1/p]$ (p prim) als Untergruppen in $\text{Aut}(\sigma)$ auftreten können.

Schließlich bewiesen H. Kim und F. Roush [KR1], daß die Automorphismengruppe jedes mischenden, nichttrivialen SFTs bereits die Automorphismengruppe jedes vollen zweiseitigen Shifts enthält. Obwohl dies impliziert, daß die Automorphismengruppen aller vollen Shifts

die gleiche Untergruppenstruktur haben, ist bis heute nicht bekannt, ob die Automorphismengruppen des vollen 2- und vollen 3-Shifts aus algebraischer Sicht isomorph sind.

Die gleiche Frage konnte für den vollen 2- und den vollen 4-Shift mithilfe des Satzes von J. Ryan [Rya1], [Rya2] negativ beantwortet werden. Dieser besagt, daß das Zentrum der Automorphismengruppe allein aus den Potenzen der Shiftabbildung besteht, die Automorphismengruppe also maximal nicht-abelsch ist.

Weitere für uns wichtige Resultate sind die auf J. Franks zurückgehende Tatsache, daß jeder Automorphismus endlicher Ordnung (speziell jeder Markerautomorphismus) in einer geeigneten Darstellung des SFTs zu einem 1-Block-Code wird [BLR], und daß die Automorphismengruppe eines transitiven SFTs in der kompakt-offenen Topologie diskret ist [Kit].

Neben diesem direkten Zugang untersucht man die Struktur der Automorphismengruppe eines SFTs mit indirekten Methoden (Gruppenoperationen und Darstellungen):

Sei (X, σ) ein mischender SFT. Offensichtlich bleibt die Periode eines Punktes aus dem Shiftraum unter jedem Automorphismus gleich, so daß $\text{Aut}(\sigma)$ nicht nur auf X , sondern bereits auf den einzelnen Mengen $\text{Per}_n^0(X)$ in einer mit dem Shift kommutierenden Weise operiert. Der $\text{Aut}(\sigma)$ -Orbit $\{\varphi(x) \mid \varphi \in \text{Aut}(\sigma)\}$ jedes nicht periodischen Punktes $x \in X$ ist eine dichte Teilmenge in X [BLR], während der $\text{Aut}(\sigma)$ -Orbit eines periodischen Punktes endlich ist. Zudem operiert die Automorphismengruppe für n groß genug transitiv auf den Mengen $\text{Per}_n^0(X)$ [BLR]. Die einzigen kompakten, unter der $\text{Aut}(\sigma)$ -Operation invarianten Teilmengen des Shiftraumes sind daher X selbst oder endliche Vereinigungen periodischer σ -Orbits (wobei für n groß entweder kein Punkt kleinster Periode n oder ganz $\text{Per}_n^0(X)$ enthalten ist) [BLR].

Für kleine Perioden gibt es hingegen selbst bei vollen Shifts Einschränkungen. So gaben H. Kim und F. Roush ein auf U.-R. Fiebig zurückgehendes Beispiel einer Permutation der 54 Punkte des vollen 2-Shifts von kleinster Periode 6, die nicht durch einen Automorphismus realisiert werden kann [KR2]. In einer gemeinsamen Arbeit mit J. Wagoner [KRW1] fanden sie zudem einen mischenden SFT mit genau zwei Fixpunkten, die unter der Aktion der Automorphismengruppe nicht ausgetauscht werden können. Diese Arbeiten beantworten damit die von R. Williams stammende LIFT-Hypothese, die danach fragt, ob sich jede, den Shift respektierende Permutation einer (endlichen) Menge periodischer Punkte eines SFTs zu einem Automorphismus des gesamten SFTs fortsetzen läßt.

Bisher wurden speziell zwei verschiedene Darstellungen der Automorphismengruppe in einfacher strukturierte Gruppen studiert:

Es handelt sich zum einen um die von M. Boyle und W. Krieger [BK1] gefundene periodische-Punkte-Darstellung, bei der jedem Automorphismus seine Wirkung auf den periodischen Punkten zugeordnet wird. Man erhält so einen Homomorphismus der Automorphismengruppe in ein abzählbares Produkt symmetrischer Gruppen: $\text{Aut}(\sigma) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{\text{Per}_n^0(X)}$. Da die periodischen Punkte eines transitiven, nichttrivialen SFTs (X, σ) eine dichte Menge in X bilden, ist dieser Homomorphismus treu. Durch Faktorbildung nach der vom Shift erzeugten zyklischen Gruppe $\langle \sigma \rangle$ entsteht hieraus die etwas gröbere periodische-Orbit-Darstellung: $\text{Aut}(\sigma) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{S}_{\text{Orb}_n(X)}$, wobei $\text{Orb}_n(X) := \text{Per}_n^0(X) / \langle \sigma \rangle$ die Menge der σ -Orbits der Länge n bezeichnet und der Kern dieser Darstellung genau $\langle \sigma \rangle$ ist [BLR].

Ebenfalls in [BK1] wurden die von diesen Darstellungen abgeleiteten Gyrationzahlen- und Signaturen-Homomorphismen ($\text{GYR} : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $\text{OS} : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$)

definiert, die einem Automorphismus je eine Zahlenfolge zuordnen. Dabei messen die Gyrationzahlen $\text{GYR}_n(\varphi)$, wie weit der Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ die σ -Orbits der Länge n (modulo Orbitlänge) insgesamt dreht, während die Signaturen $\text{OS}_n(\varphi)$ angeben, ob die von φ auf den σ -Orbits der Länge n induzierte Permutation gerade ist oder nicht.

Aufbauend auf Vorarbeiten von M. Boyle, W. Krieger und U.-R. Fiebig wurden diese beiden Homomorphismen in [KRW1] zum Signaturen-Gyrationzahlen-Kompatibilitäts-Homomorphismus SGC verschmolzen, der die Automorphismengruppe ebenfalls in ein abzählbares Produkt der zyklischen Gruppen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ abbildet. Untersuchungen des Wertebereiches von SGC zeigten, daß die Wirkung von Automorphismen auf Punkte einer kleinsten Periode bereits die Wirkung auf periodische Punkte anderer Periodenlänge einschränkt oder sogar festlegt. Derartige Ergebnisse spielten bei der Konstruktion der oben erwähnten Gegenbeispiele zur LIFT-Hypothese und schließlich auch bei der negativen Lösung des Shiftäquivalenz-Problems (Williams-Vermutung) in [KR4] und [KRW2] die entscheidende Rolle.

Auch die zweite wichtige Darstellung der Automorphismengruppe, die sogenannte Dimensionsgruppendarstellung, geht auf W. Krieger [Kri2] zurück. Dabei wird jedem Automorphismus seine induzierte Aktion auf der Dimensionsgruppe des SFTs zugeordnet. Diese respektiert die Struktur des Dimensionstripels⁵ $(\Delta, \Delta^+, \delta)$ und man erhält einen Gruppenhomomorphismus $\text{Aut}(\sigma) \rightarrow \text{Aut}(\Delta)$ in die wesentlich kleinere und einfachere Automorphismengruppe der Dimensionsgruppe (oft ist diese endlich erzeugt abelsch). Ein großer Teil der komplizierten Struktur von $\text{Aut}(\sigma)$ ist damit im Kern dieser Darstellung enthalten. Dieser besteht aus den sogenannten inerten Automorphismen, einer sehr umfangreichen Klasse, die beispielsweise alle einfachen sowie alle Markerautomorphismen und im Falle voller Shifts sogar alle Automorphismen endlicher Ordnung umfaßt [KR2].

H. Kim und F. Roush [KR2] konnten zeigen, daß sich jeder inerte Automorphismus eines SFTs $Y \subseteq X$ zu einem Automorphismus auf dem größeren SFT (X, σ) fortsetzen läßt, während dies für allgemeine Automorphismen nicht gilt.

Das genaue Bild der Dimensionsgruppendarstellung ist nur in Spezialfällen (volle Shifts) bekannt; Surjektivität wird durch Bedingungen, die aus dem Zusammenwirken von Signaturen- und Gyrationzahlen entstehen, verhindert [KRW1].

Trotz dieser teilweise sehr tief liegenden Resultate, hat man noch immer kein vollständiges Bild der Automorphismengruppe von SFTs, obwohl diese *"a key ingredient in our present understanding of SFTs"* ([KRW1], S. 192) zu sein scheint.

Da die Untersuchung der Automorphismengruppe von entscheidender Bedeutung für die Weiterentwicklung der Theorie der SFTs war, läßt sich vermuten, daß das Studium der Automorphismengruppen anderer symbolisch-dynamischer Systeme zu ähnlichen Fortschritten führen wird. Zumal ein Beispiel in [BLR] zeigt, daß allgemeine Subshifts völlig andere Automorphismengruppen (abelsche, nicht residual endliche, divisionsvollständige) haben können. Ein direkter Vergleich der auftretenden Strukturen und Phänomene könnte helfen, den Einfluß bestimmter topologischer oder dynamischer Annahmen (Kompaktheit, dichte periodische Punkte etc.) der verschiedenen Systeme zu klären.

⁵Da wir die Dimensionsgruppe im folgenden nicht benötigen, verzichten wir auf eine genaue Definition und verweisen stattdessen auf [LM] oder die Originalarbeit [Kri2].

Wie im Vorwort beschrieben, kann man die Klasse der SFTs erweitern, indem man entweder die Kompaktheit des Subshifts aufgibt, um zu topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum zu gelangen, oder indem man die Markov-Bedingung abschwächt, was schließlich zu synchronisierten und codierten Systemen führt. Die Automorphismengruppen der letztgenannten Subshifts wurden bereits in einer Arbeit von D. Fiebig und U.R. Fiebig [FF3] mit folgenden Ergebnissen studiert:

Während bei synchronisierten Systemen die Marker-Methode anwendbar ist und daher wieder große und komplizierte Automorphismengruppen auftreten, können die Automorphismengruppen bei codierten Systemen sehr klein und übersichtlich sein. Beide Subshiftarten sind kompakt und haben eine dichte Menge periodischer Punkte, was wie bei den SFTs die residuale Endlichkeit der Automorphismengruppe erzwingt. Tatsächlich gibt es zu jedem Subshift (Y, T) mit dichten periodischen Punkten ein synchronisiertes System, dessen Automorphismengruppe eine Kopie von $\text{Aut}(T)$ enthält [FF3].

Grundlegend neu ist die Möglichkeit, die Automorphismengruppe eines codierten Systems genau einzustellen: In [FF3] wird hierzu eine Konstruktion angegeben, die zu einer großen Klasse abstrakter Gruppen G ein codiertes System liefert, dessen Automorphismengruppe die direkte Summe aus G und der vom Shift erzeugten zyklischen Gruppe ist, wobei die Shiftabbildung σ mit $(1_G, \sigma)$ identifiziert wird. Diese Klasse von Gruppen ist abgeschlossen unter abzählbarer Summenbildung. Zu ihr gehören alle endlichen Gruppen und alle unendlichen, endlich erzeugten abelschen Gruppen [FF3]. Im Gegensatz zur SFT-Theorie gibt es daher codierte Systeme mit endlich erzeugten Automorphismengruppen (selbst der Extremfall $\text{Aut}(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ ist möglich) und solche mit abelschen Automorphismengruppen (das Zentrum besteht nicht nur aus den Potenzen der Shiftabbildung). Als einfache Folgerung dieser Resultate erhält man die Existenz überabzählbar vieler codierter Systeme mit paarweise nicht isomorphen Automorphismengruppen (direkte Summen einer abzählbar unendlichen Familie zyklischer Gruppen); man beachte, daß es überhaupt nur abzählbar unendlich viele SFTs und daher auch höchstens abzählbar viele nicht isomorphe SFT-Automorphismengruppen gibt.

Weitere Elemente dieser Klasse sind das freie Produkt aus zwei Kopien von $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die Gruppen $\mathbb{Z}[1/p]$ (p prim) und genau die residual endlichen Untergruppen von \mathbb{Q}/\mathbb{Z} [FF3]. Leider ist nicht bekannt, ob und wie sich diese Liste fortsetzen läßt.

Obwohl die gefundene Konstruktion direkt ein codiertes System (X, σ) mit $\text{Aut}(\sigma) \cong \langle \sigma \rangle \oplus \mathbb{Z}[1/2]$ liefert, ist eine allein zu $\mathbb{Z}[1/2]$ isomorphe Automorphismengruppe bei codierten Systemen nicht realisierbar [FF3]. Schließlich zeigten D. Fiebig und U.-R. Fiebig durch Angabe zweier codierter Systeme mit isomorphen Automorphismengruppen, aber verschiedenen Zetafunktionen, daß die Automorphismengruppe hier keine vollständige Invariante der topologischen Konjugation ist. Hingegen ist die Frage, ob $\text{Aut}(\sigma_1) \cong \text{Aut}(\sigma_2)$ bei SFTs bereits die topologische Konjugiertheit von (X_1, σ_1) zu (X_2, σ_2) bzw. zum transponierten SFT $(X_2^\top, \sigma_2^{-1})$ mit $X_2^\top := \{(x_{-i})_{i \in \mathbb{Z}} \mid (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X_2\}$ impliziert, noch unbeantwortet.

Die nachfolgenden Kapitel 2 bis 4 enthalten erste Ergebnisse über die bisher noch nicht untersuchten Automorphismengruppen topologischer Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum.

Kapitel 2

Die Automorphismengruppe nicht kompakter Markovshifts

2.1 Die Kardinalität der Automorphismengruppe

Die augenfälligste und vielleicht natürlichste Fragestellung, die sich bei der Untersuchung der Automorphismengruppe eines mathematischen Objekts ergibt, ist sicher die, nach der Elementanzahl dieser Gruppe.

Durch Konstruktion einer entsprechenden Untergruppe sind wir in der Lage zu beweisen, daß die Automorphismengruppe jedes nicht lokalkompakten, topologischen Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet überabzählbar ist.

Im lokalkompakten Fall hat man dagegen ein einfaches Kriterium, das über Abzählbarkeit bzw. Überabzählbarkeit der Automorphismengruppe entscheidet. Dieses wird zunächst durch eine Eigenschaft einer Graphendarstellung gegeben. Später finden wir eine rein dynamische Charakterisierung, aus der die Invarianz unter topologischer Konjugation direkt ablesbar ist.

Schließlich zeigen wir noch, daß dieses Kriterium äquivalent zur Diskretheit der kompakt-offenen Topologie auf der Automorphismengruppe ist.

Schon der Übersichtsartikel [Hed] von Hedlund enthält die Antwort auf die Frage nach der Kardinalität der Automorphismengruppe für beliebige kompakte Subshifts. Nach dem Satz von Curtis-Hedlund-Lyndon hat jede stetige, shiftkommutierende Abbildung zwischen kompakten Subshifts beschränkte Kodierlänge. Da die Menge aller sliding-Block-Codes über endlichen Alphabeten abzählbar ist, kann somit auch die Automorphismengruppe jedes kompakten Subshifts höchstens abzählbar sein.

Insbesondere ist für mischende, zweiseitige SFTs (X, σ) die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ immer abzählbar unendlich, was durch die Einbettbarkeit verschiedenster unendlicher Gruppen in $\text{Aut}(\sigma)$ gezeigt wurde (vgl. [BLR], [Kit]).

Durch den Übergang von einem endlichen zu einem abzählbar unendlichen Alphabet und dem damit verbundenen Wegfall der Kompaktheit des Shiftraumes verliert dieses grundlegende Resultat seine allgemeine Gültigkeit. Die Kardinalität der Automorphismengruppe

hängt dann, wie wir zeigen werden, von der inneren Struktur des Markovshifts ab.

Im folgenden sei der betrachtete transitive Markovshift (X, σ) über einem abzählbar unendlichen Alphabet stets als Kantenshift (X_G, σ) eines abzählbaren, stark zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ dargestellt.

Wir untersuchen zuerst die nicht lokalkompakten Markovshifts und erhalten:

Satz 2.1 *Die Automorphismengruppe eines transitiven, nicht lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge ist überabzählbar.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für einen Graphen $G = (V, E)$, der einen Vertex mit unendlichem Ausgangsgrad enthält. Für die völlig symmetrische Situation einer Ecke mit unendlichem Eingangsgrad läßt sich der Beweis mittels eines Zeitumkehrarguments (Übergang zum transponierten Subshift) direkt übertragen.

Sei $v \in V$ ein Vertex, von dem unendlich viele Kanten $e_1, e_2, \dots \in E$ ausgehen. Setze $w_j := \mathbf{t}(e_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$ und wähle zu jeder Ecke w_j mit $j \notin 3\mathbb{N}$ einen kürzesten Pfad p_j zurück zu v . Ein solcher existiert, da G als stark zusammenhängend vorausgesetzt war. Man erhält so unendlich viele verschiedene, endliche Loops $l_j := e_j p_j$, die am Vertex v starten und enden. Die noch nicht benutzten Kanten e_j ($j \in 3\mathbb{N}$) dienen nun als Marker, mit deren Hilfe sich Abbildungen $\phi_i : X \rightarrow X$ definieren lassen: ϕ_i scannt einen Punkt $x \in X \subseteq E^{\mathbb{Z}}$ und ersetzt jeden Block der Form $l_{3i-2} l_{3i-1} e_{3i}$ durch $l_{3i-1} l_{3i-2} e_{3i}$ sowie jeden Block der Form $l_{3i-1} l_{3i-2} e_{3i}$ durch $l_{3i-2} l_{3i-1} e_{3i}$.

Aufgrund der Minimalität der Pfade p_j ($j \notin 3\mathbb{N}$) können diese keine der bei v startenden Kanten e_1, e_2, \dots enthalten. Dies schließt sowohl das Auftreten einer Kante e_{3i} in einem Block l_j ($j \notin 3\mathbb{N}$), als auch ein nichttriviales Überlappen zweier Blöcke l_i, l_j aus und garantiert so die Wohldefiniiertheit der Abbildungen ϕ_i .

Da die Abbildungen ϕ_i nur die Reihenfolge bestimmter Blöcke l_j , die alle an der Ecke v starten und enden, vertauscht, liegt mit $x \in X$ auch jeder Bildpunkt $\phi_i(x)$ wieder in X . Zudem hängen die Koordinaten des Bildpunktes nur von einem endlichen Abschnitt des Urbildpunktes ab. ϕ_i ist ein sliding-Block-Code mit Kodierlänge $2|l_{3i-2} l_{3i-1}| + 1$, also insbesondere shiftkommutierend und stetig. Tatsächlich ist jedes ϕ_i durch die Benutzung der Markeranten e_{3i} eine Involution, somit auch bijektiv.

Aufgrund der Transitivität des Shifts lassen sich zu jedem $i \in \mathbb{N}$ Punkte $x \in X$ finden, die den Block $l_{3i-1} l_{3i-2} e_{3i}$ enthalten. Dies stellt sicher, daß die konstruierten Automorphismen ϕ_i tatsächlich verschieden sind und man so mit $\{\phi_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \text{Aut}(\sigma)$ eine abzählbar unendliche Teilmenge der Automorphismengruppe konstruiert hat.

Als nächstes betrachtet man unendliche Produkte der Abbildungen ϕ_i und zeigt, daß auch diese Kompositionen Automorphismen des Shifts sind. Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ eine beliebige 0/1-Folge, so definiert man die Abbildung $\varphi_{(a_k)} := \prod_{i \in \mathbb{N}} \phi_i^{a_i}$.

Zunächst zeigt man, daß die $\varphi_{(a_k)}$ wohldefinierte, bijektive Abbildungen des Shiftraumes X in sich sind. Wie oben bereits angedeutet können sich insbesondere verschiedene Blöcke

der Form $l_{3i-2}l_{3i-1}e_{3i}$ bzw. $l_{3i-1}l_{3i-2}e_{3i}$ nicht überlappen. Verschiedene Automorphismen ϕ_i wirken deshalb auf zueinander disjunkte Teilabschnitte eines Punktes $x \in X$, die jeweils mit einem Symbol e_{3i} enden. Betrachtet man nun für jedes $i \in \mathbb{N}$ das e_{3i} -Skelett eines Punktes x , d.h. die Koordinaten in x , an denen ein Symbol e_{3i} steht¹, so stellt man fest, daß dieses unter der Abbildung $\varphi_{(a_k)}$ invariant ist, da sich die Position der Markerkanten unter den einzelnen Automorphismen ϕ_i nicht ändert. Alle ϕ_i kommutieren miteinander und das Produkt $\varphi_{(a_k)}$ ist unabhängig von der Reihenfolge der Kompositionen definiert. Daher gilt: $(\varphi_{(a_k)})^2 = (\prod_{i \in \mathbb{N}} \phi_i^{a_i})^2 = \prod_{i \in \mathbb{N}} \phi_i^{2a_i}$ und mit den Automorphismen ϕ_i sind auch die Abbildungen $\varphi_{(a_k)}$ Involutionen. Das Bild $\varphi_{(a_k)}(X)$ liegt wieder ganz in X , so daß $\varphi_{(a_k)} : X \rightarrow X$ bijektiv wird.

Um schließlich die Stetigkeit der Abbildungen $\varphi_{(a_k)}$ nachzuweisen, genügt es zu zeigen, daß die Nullkoordinate des Bildpunktes bereits durch einen endlichen Abschnitt des Urbildpunktes festgelegt wird. Es bezeichne x_0 die Nullkoordinate eines beliebigen Punktes $x \in X$ und sei n die Länge eines kürzesten Pfades von $\mathfrak{t}(x_0)$ zum Vertex v . Damit überhaupt ein ϕ_i auf die Nullkoordinate wirken kann, muß x_0 Teil eines Blockes der Form $l_{3i-2}l_{3i-1}e_{3i}$ bzw. $l_{3i-1}l_{3i-2}e_{3i}$ sein. Speziell muß an der Koordinate $n+1$ ein Symbol e_j ($j \in \mathbb{N}$) stehen. Ist dies nicht der Fall, so gilt $(\varphi_{(a_k)}(x))_0 = x_0$, und die Nullkoordinate des Bildpunktes ist bereits durch den Block $x_{[0, n+1]}$ bestimmt.

Andernfalls gilt $x_{n+1} = e_j$ für ein $j \in \mathbb{N}$ und es kann höchstens noch der eindeutig bestimmte Automorphismus ϕ_i mit $i := \lceil j/3 \rceil$ auf die Nullkoordinate wirken. Da ϕ_i eine beschränkte Kodierlänge hat, genügt im Fall $j \in 3\mathbb{N}$ der Abschnitt $x_{n+1-|l_{3i-2}l_{3i-1}|} \cdots x_0 \cdots x_{n+1}$, im Fall $j \notin 3\mathbb{N}$ der Abschnitt $x_{n+1-\max\{|l_{3i-2}|, |l_{3i-1}|\}} \cdots x_0 \cdots x_{n+1} \cdots x_{n+1+|l_{3i-2}l_{3i-1}|}$, um das Bild der Nullkoordinate unter der Abbildung $\phi_i^{a_i}$ und damit unter $\varphi_{(a_k)}$ festzulegen.

Mit ϕ_i ist auch $\varphi_{(a_k)}$ eine shiftkommutierende Abbildung und somit folgt aus obigem Argument die Stetigkeit von $\varphi_{(a_k)}$.

Jede 0/1-Folge definiert einen Automorphismus und zwar umkehrbar eindeutig. Seien $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ zwei verschiedene Folgen und $i \in \mathbb{N}$, so daß $a_i \neq b_i$ ($\circ \in \mathbb{E}$: $a_i = 1, b_i = 0$). Sei nun p_{3i} ein kürzester Pfad von $\mathfrak{t}(e_{3i})$ zurück zu v , so hat der Punkt $x := (l_{3i-2}l_{3i-1}e_{3i}p_{3i})^\infty \in X$ unter den Abbildungen $\varphi_{(a_k)}, \varphi_{(b_k)}$ verschiedene Bilder. Es gilt: $e_{3i-1} = (\varphi_{(a_k)}(x))_0 \neq (\varphi_{(b_k)}(x))_0 = e_{3i-2}$

Somit ist die Menge $\left\{ \varphi_{(a_k)} \mid (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\} \subseteq \text{Aut}(\sigma)$ bereits überabzählbar. \square

Bemerkung: Man beachte, daß alle Abbildungen ϕ_i in obigem Beweis beschränkte Kodierlänge haben und daher sogar gleichmäßig stetig sind, während die Abbildungen $\varphi_{(a_k)}$ im allgemeinen, i.e. falls die Folge der Kodierlängen der ϕ_i mit $i \in \mathbb{N}$ unbeschränkt wächst, nur stetig sein werden.

Damit ist die Frage nach der Kardinalität der Automorphismengruppe im nicht lokalkompakten Fall bereits vollständig beantwortet. Wenden wir uns als nächstes den lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum zu und stellen die gleiche Frage.

¹Für eine genaue Erklärung des Begriffs Skelett siehe Definition 2.4.

Um die Lösung des Problems einfach ausdrücken zu können, benötigen wir die Notation eines Doppelpfades in einem gerichteten Graphen:

Definition 2.2 Ein Paar von zwei verschiedenen Pfaden gleicher Länge, die einen gemeinsamen Start- mit einem gemeinsamen Endvertex verbinden, nennt man einen Doppelpfad (zwischen diesen Vertices).

Für den aus den Pfaden p und q gebildeten Doppelpfad schreibt man $[p; q]$. Nach Definition gilt $[p; q] = [q; p]$, $|p| = |q|$, $\mathbf{i}(p) = \mathbf{i}(q)$ und $\mathbf{t}(p) = \mathbf{t}(q)$.

Zwei Doppelpfade heißen kantendisjunkt, wenn ihre Gesamtkantenmengen, i.e. die jeweilige Vereinigung der Kanten beider Pfade, disjunkt sind.

In den beiden folgenden Lemmata werden wir zeigen, daß die Kardinalität der Automorphismengruppe eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts (X, σ) über einem abzählbar unendlichen Alphabet davon abhängt, ob der lokal-endliche Graph G , der den Shift $X = X_G$ darstellt, folgende Eigenschaft besitzt:

(FMDP) In G existieren nur endlich viele paarweise kantendisjunkte Doppelpfade².

Zunächst stellen wir fest, daß auch bei lokalkompakten Markovshifts überabzählbare Automorphismengruppen auftreten:

Lemma 2.3 Der transitive, lokalkompakte Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum sei als Kantenshift eines gerichteten, stark zusammenhängenden, lokal-endlichen Graphen realisiert, der die Eigenschaft (FMDP) nicht erfüllt, so ist $\text{Aut}(\sigma)$ überabzählbar.

Beweis: Nach Voraussetzung hat G eine unendliche Menge $P := \{[p_1; q_1], [p_2; q_2], \dots\}$ paarweise kantendisjunkter Doppelpfade. Zu jedem $[p_i; q_i]$ wählt man eine Markerante e_i , die an dem gemeinsamen Endvertex $\mathbf{t}(p_i) = \mathbf{t}(q_i)$ startet und selbst nicht Teil des Doppelpfades ist. Dies ist ohne Einschränkung möglich; falls nämlich am gemeinsamen Endvertex nur Kanten starten, die bereits Teil des Doppelpfades $[p_i; q_i]$ sind, so lassen sich die beiden Pfade p_i und q_i um einen endlichen Teilpfad verlängern, dessen Kanten alle in $[p_i; q_i]$ enthalten sind und der an einem Vertex endet, von dem mindestens eine Kante ausgeht, die nicht in $[p_i; q_i]$ auftritt. Man benutzt dann den so verlängerten Doppelpfad anstelle von $[p_i; q_i]$.

Man umgeht das Problem, daß einige der gewählten Markeranten e_i bereits in einem Doppelpfad $[p_j; q_j]$ enthalten sind, indem man nur eine geeignete, unendliche Teilmenge $Q \subseteq P$ betrachtet. Eine solche läßt sich wie folgt schrittweise definieren:

Setze $Q := \emptyset$. Wähle einen Doppelpfad $[p; q] \in P$ und setze $Q := Q \cup \{[p; q]\}$. Die zu $[p; q]$ gehörige Markerante sei e . Entferne aus P das Element $[p; q]$, den eventuell vorhandenen Doppelpfad, der die Kante e enthält (dies ist höchstens einer), sowie alle Doppelpfade, deren Markeranten in $[p; q]$ auftreten (wegen der lokalen Endlichkeit des Graphen sind dies nur endlich viele).

Die so verkleinerte Menge P hat noch immer unendlich viele Elemente und das Verfahren

²Daher auch die Bezeichnung (FMDP) für "finitely many double paths".

liefert induktiv eine unendliche Teilmenge $Q \subseteq P$. Um die Notation einfach zu halten, seien die Elemente der Menge Q wieder fortlaufend mit $[p_i; q_i]$ und die zugehörigen Markerkanten mit e_i ($i \in \mathbb{N}$) bezeichnet.

Sei $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ eine beliebige 0/1-Folge, so definiert man eine Abbildung $\varphi_{(a_k)} : X \rightarrow X$, die einen Punkt $x \in X \subsetneq E^{\mathbb{Z}}$ scannt und genau dann einen Block $p_i e_i$ durch $q_i e_i$ bzw. einen Block $q_i e_i$ durch $p_i e_i$ ersetzt, wenn das Folgenglied a_i den Wert 1 hat. Ähnlich wie im Beweis zu Satz 2.1 zeigt man nun, daß diese Abbildungen Automorphismen des Shifts sind.

Die Wohldefiniertheit ergibt sich direkt aus der Disjunktheit der Doppelpfade $[p_i; q_i] \in Q$ und der Benutzung der Markerkanten e_i , die ein Überlappen verhindern. Die lokale Wirkungsweise der $\varphi_{(a_k)}$ hängt nicht von der Position der Blöcke $p_i e_i$ bzw. $q_i e_i$ innerhalb eines Punktes $x \in X$ ab. Insbesondere kommutieren die $\varphi_{(a_k)}$ deshalb mit der Shiftabbildung. Da die vertauschten Blöcke an den gleichen Vertices starten bzw. enden, gilt $\varphi_{(a_k)}(X) \subseteq X$ und $\varphi_{(a_k)}^2 = \text{Id}_X$. Wieder hat man also selbstinverse und somit bijektive Abbildungen.

Zum Nachweis der Stetigkeit sei x_0 die Nullkoordinate eines beliebigen Punktes $x \in X$. Angenommen x_0 ist in keinem Doppelpfad $[p_i; q_i]$ der Menge Q enthalten. Da $\varphi_{(a_k)}$ nur auf Blöcken p_i und q_i nichttrivial wirkt, bleibt die Nullkoordinate invariant, d.h. $(\varphi_{(a_k)}(x))_0 = x_0$. Wegen der paarweisen Kantendisjunktheit der Elemente in Q , bestimmt x_0 ansonsten genau einen Doppelpfad $[p_j; q_j]$ ($j \in \mathbb{N}$), der x_0 als Kante enthält. Es genügt nun zu testen, ob der Pfad $p_j e_j$ bzw. $q_j e_j$ vollständig in dem Block $x_{[-|p_j|+1, |p_j|]}$ enthalten ist. Ist dies ab einer Koordinate m mit $1 - |p_j| \leq m \leq 0$ der Fall, und ist das entsprechende Folgenglied $a_j = 1$, so ist die Nullkoordinate des Bildpunktes die $(1 - m)$ -te Koordinate des Pfades q_j bzw. p_j . Andernfalls bleibt die Nullkoordinate unter $\varphi_{(a_k)}$ wieder invariant. Da $\varphi_{(a_k)}$ mit der Shiftabbildung vertauschbar ist, wird jede Koordinate des Bildpunktes bereits durch einen endlichen Abschnitt des Urbildpunktes bestimmt. $\varphi_{(a_k)}$ ist also stetig; insgesamt sogar ein Automorphismus.

Offensichtlich definieren verschiedene Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ mit $a_i \neq b_i$ für ein $i \in \mathbb{N}$ (oE: $a_i = 1, b_i = 0$) auch verschiedene Automorphismen $\varphi_{(a_k)} \neq \varphi_{(b_k)}$. Wegen der Transitivität des Markovshifts existiert ein Punkt $x \in X$ mit $x_{[0, |p_i|]} = p_i e_i$ für den gilt: $q_i e_i = (\varphi_{(a_k)}(x))_{[0, |p_i|]} \neq (\varphi_{(b_k)}(x))_{[0, |p_i|]} = p_i e_i$. Mit $\left\{ \varphi_{(a_k)} \mid (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\} \subseteq \text{Aut}(\sigma)$ hat man wieder eine überabzählbare Teilmenge der Automorphismengruppe konstruiert. \square

Beobachtung 2.5, die den unten definierten Begriff des F -Skeletts eines Punktes des Shift-raumes benutzt, ermöglicht es, die Aussage des Lemmas 2.3 umzukehren und zu zeigen, daß die Gültigkeit der Eigenschaft (FMDP) bereits eine abzählbare Automorphismengruppe impliziert.

Definition 2.4 Sei $F \subseteq E$ eine beliebige Menge von Kanten. Unter dem F -Skelett eines Punktes $x \in E^{\mathbb{Z}}$ versteht man eine im allgemeinen nur partiell definierte Funktion

$$\kappa_x : \mathbb{Z} \rightarrow F \quad \text{mit} \quad \kappa_x(i) := \begin{cases} x_i & \text{falls } x_i \in F \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases}$$

Beobachtung 2.5 *Ein lokal-endlicher, stark zusammenhängender Graph $G = (V, E)$ hat genau dann die Eigenschaft (FMDDP), wenn es eine endliche Menge $F \subseteq E$ gibt, so daß jeder doppelt-transitive Weg in G eindeutig durch sein F -Skelett festgelegt ist.*

Beweis: Für Graphen mit endlicher Kantenmenge wird die Behauptung trivial, indem man $F := E$ setzt. Sei also $G = (V, E)$ ein Graph mit $|E| = \infty$ und $X = X_G$ die Menge aller zweiseitig-unendlichen Wege in G .

” \Leftarrow “: Sei $F \subsetneq E$ eine endliche Menge von Kanten, so daß das F -Skelett jedes doppelt-transitiven Weges $x \in \text{DT}(X)$ diesen eindeutig festlegt. Angenommen der Graph erfüllt die Eigenschaft (FMDDP) nicht, dann gibt es unendlich viele kantendisjunkte Doppelpfade in G . Insbesondere existiert ein Doppelpfad $[p; q]$, der keine Kante aus F enthält. Als doppelt-transitiver Weg enthält x unendlich viele Abschnitte, in denen der Pfad p durchlaufen wird. Ersetzt man einen solchen Block durch den Pfad q , so bleibt der Weg doppelt-transitiv. Auch das F -Skelett ändert sich durch diese Ersetzung nicht, was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.

” \Rightarrow “: Sei $P := \{[p_1; q_1], [p_2; q_2], \dots, [p_n; q_n]\}$ eine nicht mehr vergrößerbare, endliche Menge paarweise kantendisjunkter Doppelpfade und $F \subsetneq E$ die Gesamtkantenmenge aller Elemente in P . Angenommen es gäbe einen doppelt-transitiven Weg $x \in \text{DT}(X)$, der nicht vollständig durch sein F -Skelett festgelegt wird. Da die Kanten der Menge F in x in endlichen Abständen auftreten, erzwingt dies die Existenz eines Blockes $x_{[i,j]}$ ($i, j \in \mathbb{Z}$) mit $x_{i-1}, x_{j+1} \in F$, $x_k \notin F$ für $i \leq k \leq j$, der durch zwei verschiedene Pfade der Länge $(j - i + 1)$ aufgefüllt werden kann. Diese müssen am Vertex $t(x_{i-1})$ starten, bei $i(x_{j+1})$ enden und dürfen keine Kante aus F enthalten. Der von ihnen gebildete Doppelpfad ist somit kantendisjunkt zu allen Elementen der Menge P . \downarrow □

Lemma 2.6 *Ein transitiver, lokalkompakter Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge sei durch den gerichteten, stark zusammenhängenden, lokal-endlichen Graphen $G = (V, E)$ dargestellt. Existiert in G eine endliche Menge $F \subsetneq E$ von Kanten, so daß jeder doppelt-transitive Punkt des Shifttraumes eindeutig durch sein F -Skelett festgelegt wird, so ist die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ abzählbar unendlich.*

Beweis: Die Menge der doppelt-transitiven Punkte $\text{DT}(X)$ liegt dicht in dem nach Voraussetzung transitiven Markovshift (X, σ) . Jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ ist insbesondere stetig und wird somit durch seine Wirkung auf einer dichten Teilmenge des Shifts bereits vollständig beschrieben. Es genügt deshalb die Einschränkungen $\varphi|_{\text{DT}(X)}$ zu betrachten.

Sei $F \subsetneq E$ eine endliche Menge, wie im Lemma angegeben. Da X als lokalkompakt vorausgesetzt ist, sind mit den Nullzylindern ${}_0[e]$ ($e \in E$) auch die Urbildmengen $\varphi^{-1}({}_0[e])$ kompakt-offene Mengen. Zu einer Überdeckung durch dünne Zylinder existiert dann eine endliche Teilüberdeckung derart, daß sich die Menge $\varphi^{-1}({}_0[e])$ als endliche Vereinigung dieser Zylindermengen darstellen läßt. Wählt man für alle Kanten $f \in F$ eine solche Darstellung mit möglichst wenigen Zylindern:

$$\varphi^{-1}({}_0[f]) = \bigcup_{i=1}^{m_f} n_{f,i}[b_{f,i}] \quad \text{mit } b_{f,i} \in \mathcal{B}(X), n_{f,i} \in \mathbb{Z}$$

so gilt, da φ mit der Shiftabbildung vertauscht:

$$\varphi(n_{f,i+k}[b_{f,i}]) \subseteq k[f] = \bigcup_{j=1}^{m_f} \varphi(n_{f,j+k}[b_{f,j}]) \quad \text{für alle } 1 \leq i \leq m_f \text{ und alle } k \in \mathbb{Z}$$

Die Kenntnis der Zylindermengen $\{n_{f,i}[b_{f,i}] \mid 1 \leq i \leq m_f\}$ für alle $f \in F$ ermöglicht es damit, das gesamte F -Skelett eines Bildpunktes zu bestimmen. Da mit $x \in \text{DT}(X)$ auch der Bildpunkt $\varphi(x)$ doppelt-transitiv ist, legt dies nach Voraussetzung die Einschränkung $\varphi|_{\text{DT}(X)}$ und somit φ selbst fest.

Sei M die Menge aller möglichen Zuordnungen $\mu : F \rightarrow \{C \subsetneq \mathcal{C}(X) \mid C \text{ endlich}\}$ mit $f \mapsto \{n_{f,1}[b_{f,1}], \dots, n_{f,m_f}[b_{f,m_f}]\}$, wobei $\mathcal{C}(X)$ die abzählbare Menge aller dünnen Zylinder des Shiftraumes X ist.

Obiges Argument zeigt, daß eine Zuordnung $\mu \in M$ höchstens einen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ beschreibt. Die Menge der Automorphismen läßt sich also injektiv nach M abbilden. Da mit der Menge $\{C \subsetneq \mathcal{C}(X) \mid C \text{ endlich}\}$ auch die Menge M abzählbar ist, ergibt sich die Behauptung. \square

Als direktes Korollar aus den Lemmata 2.3 und 2.6 läßt sich eine Aussage über die topologische Struktur der Automorphismengruppe gewinnen. Dazu betrachten wir $\text{Aut}(\sigma)$ als Funktionenraum, ausgestattet mit der kompakt-offenen Topologie. Diese besteht aus beliebigen Vereinigungen endlicher Durchschnitte der Subbasismengen $S(C, U) := \{\varphi \in \text{Aut}(\sigma) \mid \varphi(C) \subseteq U\}$, wobei $C \subsetneq X$ kompakt und $U \subseteq X$ offen ist.

Korollar 2.7 *Für einen lokalkompakten, transitiven Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge ist die Gültigkeit der Eigenschaft (FMDP) äquivalent dazu, daß die kompakt-offene Topologie auf $\text{Aut}(\sigma)$ diskret ist.*

Beweis: " \implies ": Mit den Bezeichnungen aus Lemma 2.6 ist jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ eindeutig durch die endlichen Zylindermengen $\{n_{f,i}[b_{f,i}] \mid 1 \leq i \leq m_f\}$ für alle $f \in F$ bestimmt. Es gilt also:

$$\bigcap_{f \in F} S\left(\bigcup_{i=1}^{m_f} n_{f,i}[b_{f,i}], {}_0[f]\right) = \bigcap_{f \in F} \left\{ \phi \in \text{Aut}(\sigma) \mid \phi\left(\bigcup_{i=1}^{m_f} n_{f,i}[b_{f,i}]\right) \subseteq {}_0[f] \right\} = \{\varphi\}$$

Jedes Element der Automorphismengruppe läßt sich damit wie gefordert als endlicher Schnitt von Subbasismengen darstellen.

" \impliedby ": Hat der Markovshift $X = X_G$ dagegen unendlich viele, kantendisjunkte Doppelpfade, so ist bereits die in Lemma 2.3 gefundene, überabzählbare Teilmenge der Automorphismengruppe nicht diskret bezüglich der kompakt-offenen Topologie. Jeder beliebige endliche Schnitt von Subbasismengen legt die Wirkungsweise eines solchen Automorphismus höchstens auf endlich vielen Doppelpfaden fest. Will man dagegen

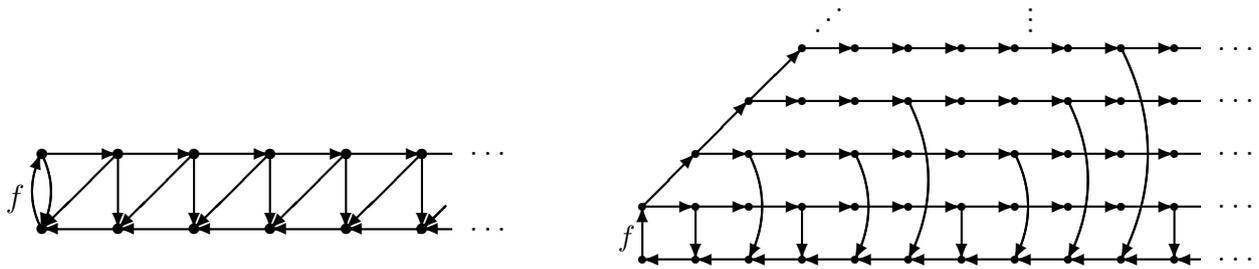


Abbildung 2.1: Die beiden dargestellten Graphen enthalten nur endlich viele paarweise kantendisjunkte Doppelpfade. In beiden Fällen ist die mit f bezeichnete Kante Teil jedes Doppelpfades, so daß in jedem Graphen nicht einmal zwei zueinander kantendisjunkte Doppelpfade existieren. Der rechte Graph ist eine leichte Modifikation des Beispiels 4.3 aus [FieD1].

eine offene Menge erzeugen, die nur einen einzelnen Automorphismus $\varphi_{(a_k)} \in \text{Aut}(\sigma)$ (Notation wie in Lemma 2.3) enthält, so ist es nötig die Wirkung auf allen, unendlich vielen Doppelpfaden $[p_i; q_i] \in Q$ zu kennen, was mit endlichen Schnitten nicht erreichbar ist. \square

Bei SFTs ist im Vergleich dazu die kompakt-offene Topologie der Automorphismengruppe immer diskret ([Kit], Observation 3.1.2). Die Eigenschaft (FMDP) beeinflusst also nicht nur die Anzahl der Automorphismen, sondern auch die topologische Struktur der Automorphismengruppe und scheint wesentlich stärkere Auswirkungen zu haben, als der bloße Wegfall der Kompaktheit beim Übergang von einem endlichen zu einem abzählbar unendlichen Alphabet. Ein Eindruck, den die Ergebnisse in Abschnitt 2.3 noch verstärken werden.

Nach diesen Vorarbeiten sind wir in der Lage die Frage nach der Kardinalität der Automorphismengruppe auch im lokalkompakten Fall vollständig zu beantworten. Wir fassen die Ergebnisse zusammen, in

Satz 2.8 *Die Automorphismengruppe eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum ist genau dann abzählbar, wenn ein (und damit jeder), den Shift darstellender Graph die Eigenschaft (FMDP) erfüllt.*

Beweis: " \implies ": Lemma 2.3.

" \impliedby ": Beobachtung 2.5 und Lemma 2.6. \square

Abbildung 2.1 zeigt zwei unendliche, stark zusammenhängende Graphen, die die Eigenschaft (FMDP) erfüllen. Die entsprechenden Kantenshifts haben nach Satz 2.8 eine abzählbare Automorphismengruppe.

Bemerkungen:

1. Betrachten wir ein allgemeines dynamisches System (M, T) , das durch eine abzählbare Markovpartition P als transitiver, lokalkompakter Subshift darstellbar ist. Nach

obigem Satz 2.8 ist die Automorphismengruppe $\text{Aut}(T)$ genau dann abzählbar, wenn eine endliche Teilmenge $F \subsetneq P$ der Markovpartition existiert, so daß jeder Punkt mit dichtem Vorwärts- und Rückwärtsorbit eindeutig durch die Zeitpunkte festgelegt ist, zu denen er in einer bestimmten Partitionsmenge aus F liegt.

2. Der folgende Abschnitt 2.2 zeigt, daß jeder transitive, lokalkompakte Markovshift mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, dessen 1-Punkt-Kompaktifizierung expansiv und damit selbst ein Subshift ist, immer eine abzählbare Automorphismengruppe hat. Aus der Expansivitäts-Charakterisierung der Eigenschaft (FMDP) (siehe nächster Abschnitt) folgt aber, daß es auch lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge gibt, deren 1-Punkt-Kompaktifizierung kein Subshift ist und die dennoch eine abzählbare Automorphismengruppe haben. Es stellt sich also die Frage, welche weiteren dynamischen Systeme als 1-Punkt-Kompaktifizierungen von lokalkompakten Markovshifts mit abzählbarer Automorphismengruppe auftreten.

2.2 Die 1-Punkt-Kompaktifizierung lokalkompakter Markovshifts mit abzählbarer Automorphismengruppe

Wie für jeden lokalkompakten Raum, läßt sich auch für lokalkompakte Shifträume die Alexandroff-Kompaktifizierung definieren. Bei transitiven, lokalkompakten Markovshifts erhält man so ein kompakt-metrisches dynamisches System, das unter bestimmten, in [FieD1] angegebenen Bedingungen selbst wieder ein Subshift ist.

Wir geben ein kurzes, direktes Argument dafür, daß in diesem Fall die Automorphismengruppe des ursprünglichen Shifts nur abzählbar sein kann. Anschließend zeigen wir, wie sich die in [FieD1] gefundene Charakterisierung dafür, daß die 1-Punkt-Kompaktifizierung eines solchen Markovshifts expansiv ist, vereinfachen läßt.

Die in Abschnitt 2.1 gefundene Eigenschaft (FMDP) reicht dazu allerdings nicht aus. Sie ist zwar notwendig, aber nicht hinreichend. Dies impliziert die Existenz einer Klasse lokalkompakter Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet, deren Automorphismengruppe abzählbar, deren 1-Punkt-Kompaktifizierung aber kein Subshift ist.

Wie oben angedeutet, wirft dies die Frage nach einer genauen Beschreibung dieser kompakt-metrischen dynamischen Systeme auf. Es gelingt uns, die Klasse der 1-Punkt-Kompaktifizierungen von transitiven, lokalkompakten Markovshifts, die die Eigenschaft (FMDP) haben, mit rein topologisch-dynamischen Begriffen zu charakterisieren. Damit befreien wir uns zugleich von der bisherigen Abhängigkeit der gewählten Graphendarstellung des Subshifts und zeigen explizit die Konjugationsinvarianz der gefundenen Eigenschaften.

Als abschließendes Resultat ergibt sich, daß jeder transitive, lokalkompakte Markovshift mit der Eigenschaft (FMDP) topologisch konjugiert auf den doppelt-transitiven Punkten zu einem synchronisierten System ist.

Beginnen wir mit der Definition der 1-Punkt-Kompaktifizierung:

Definition 2.9 *Zu jedem lokalkompakten Markovshift (X, σ) hat man die 1-Punkt-Kompaktifizierung (X_0, σ_0) . Hierbei ist $X_0 := X \dot{\cup} \{\infty\}$ die Alexandroff-Kompaktifizierung des topologischen Raumes X und der Homöomorphismus³ $\sigma_0 : X_0 \rightarrow X_0$ ist die kanonische Fortsetzung der Shiftabbildung: $\sigma_0|_X := \sigma$ und $\sigma_0(\infty) := \infty$.*

(X_0, σ_0) ist offensichtlich ein kompakt-metrisches dynamisches System. Da mit X auch X_0 ein nulldimensionaler Raum ist, liefert die Kompaktifizierung genau dann wieder einen Subshift, wenn der Homöomorphismus σ_0 expansiv ist⁴.

Wie in [FieD1] (Lemma 4.1) bewiesen wurde, ist dies genau dann der Fall, wenn sich in dem lokal-endlichen, stark zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$, der den Subshift (X, σ) als Kantenshift darstellt, eine endliche Teilmenge $F \subsetneq E$ von Kanten finden läßt, die folgende drei Eigenschaften besitzt:

- (1) F ist die Kantenmenge eines ROMs, d.h. jeder zweiseitig-unendliche Weg in G enthält eine Kante aus F .
- (2) Für beliebige Kanten $c, d \in E$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gibt es höchstens einen Pfad $p := e_1 e_2 \dots e_n$, so daß $\mathbf{i}(e_1) = \mathbf{t}(c)$, $\mathbf{t}(e_n) = \mathbf{i}(d)$ und $e_i \notin F$ für alle $1 \leq i \leq n$.
- (3) Für jede Kante $e_0 \in E$ existiert höchstens ein rechtsseitig-unendlicher Weg $r := e_0 e_1 e_2 e_3 \dots$ mit $e_i \notin F$ für alle $i \geq 1$ sowie höchstens ein linksseitig-unendlicher Weg $l := \dots e_{-3} e_{-2} e_{-1} e_0$ mit $e_i \notin F$ für alle $i \leq -1$.

Vergleichen wir zunächst Eigenschaft (2) und die in Abschnitt 2.1 gefundene Eigenschaft (FMDP), so ergibt sich folgende, einfache

Beobachtung 2.10 *Für einen stark zusammenhängenden, lokal-endlichen Graphen sind die Eigenschaften (2) und (FMDP) äquivalent.*

Beweis: " \implies ": Angenommen in $G = (V, E)$ gibt es unendlich viele, paarweise kantendisjunkte Doppelpfade $[p_i; q_i]$ ($i \in \mathbb{N}$). Um (2) zu erfüllen, müßte für jedes i mindestens eine Kante aus p_i bzw. q_i in die Kantenmenge $F \subsetneq E$ aufgenommen werden. Aus der Kantendisjunktheit der Doppelpfade folgt sofort ein Widerspruch zur Endlichkeit von F .

" \impliedby ": Zu einer nicht mehr vergrößerbaren, nach Voraussetzung endlichen Menge P von paarweise kantendisjunkten Doppelpfaden sei $F := \{e \in E \mid \exists [p; q] \in P : e \in p \vee e \in q\}$ die endliche Menge aller in diesen Pfaden auftretenden Kanten. Da P als nicht vergrößerbar angenommen wurde, weist jeder beliebige Doppelpfad $[p; q]$ in $G = (V, E)$ mindestens eine Kante aus F auf. Für die Menge F ist dann Eigenschaft (2) bereits erfüllt. \square

³ σ_0 ist im allgemeinen keine Shiftabbildung, sondern nur ein Homöomorphismus des Raumes X_0 in sich.

⁴Ein kompakt-metrisches dynamisches System (M, T) ist genau dann (konjugiert zu) ein(em) Subshift, wenn M ein nulldimensionaler topologischer Raum und T ein expansiver Homöomorphismus auf M ist.

Satz 2.8 liefert zudem die Äquivalenz zwischen Eigenschaft (FMDP) und der Abzählbarkeit der Automorphismengruppe. Man erhält somit:

Korollar 2.11 *Jeder transitive, lokalkompakte Markovshift mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, dessen 1-Punkt-Kompaktifizierung expansiv und damit ein Subshift ist, hat eine abzählbare Automorphismengruppe.*

Beweis: Lemma 4.1 aus [FieD1] sowie Satz 2.8 und Beobachtung 2.10. □

An dieser Stelle sei noch kurz ein alternatives Argument beschrieben, das ebenfalls dieses Resultat und sogar eine etwas stärkere Aussage zeigt, ohne auf die Graphendarstellung des betrachteten Markovshifts zurückgreifen zu müssen:

Unter den Voraussetzungen des Korollars ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung (X_0, σ_0) ein kompakter Subshift. Nach dem Satz von Curtis-Hedlund-Lyndon sind stetige, shift-kommutierende Abbildungen von X_0 in sich sliding-Block-Codes. Bereits die Menge der Endomorphismen $\text{End}(\sigma_0) := \{\phi : X_0 \rightarrow X_0 \mid \phi \text{ stetig} \wedge \phi \circ \sigma_0 = \sigma_0 \circ \phi\}$ ist also höchstens abzählbar. Weiterhin läßt sich $\text{End}(\sigma)$ in $\text{End}(\sigma_0)$ einbetten, denn zu jedem Endomorphismus $\varphi \in \text{End}(\sigma)$ erhält man eine kanonische Fortsetzung $\varphi_0 : X_0 \rightarrow X_0$ mit $\varphi_0|_X := \varphi$ und $\varphi_0(\infty) := \infty$, die eine shiftkommutierende, stetige Abbildung von X_0 in sich ist.

Verschiedene Endomorphismen $\varphi \in \text{End}(\sigma)$ ergeben trivialerweise verschiedene Fortsetzungen, so daß die Abbildung $\varepsilon : \text{End}(\sigma) \rightarrow \text{End}(\sigma_0)$, $\varphi \mapsto \varphi_0$ injektiv ist. Dies zeigt die Abzählbarkeit von $\text{End}(\sigma)$, also erst recht die Abzählbarkeit der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma) \subseteq \text{End}(\sigma)$.

Als nächstes zeigen wir, daß die 3 Eigenschaften, die nach [FieD1] die Expansivität der 1-Punkt-Kompaktifizierung charakterisieren, nicht unabhängig sind. Vielmehr sind bereits die Eigenschaften (2) und (3) alleine äquivalent zur Expansivität; Bedingung (1) ist damit redundant.

Lemma 2.12 *Jeder stark zusammenhängende, lokal-endliche Graph, der eine endliche Kantenmenge enthält, die Bedingung (3) erfüllt, hat auch ein ROM, d.h. besitzt automatisch auch Eigenschaft (1).*

Beweis: Sei $G = (V, E)$ der betrachtete Graph, $X = X_G$ die Menge aller zweiseitig-unendlichen Wege in G und $F \subsetneq E$ eine endliche Menge von Kanten, die Bedingung (3) erfüllt.

Angenommen Eigenschaft (1) wäre nicht erfüllbar. Dann gäbe es unendlich viele, zweiseitig-unendliche Wege $W := \{w^{(i)} \in X \mid i \in \mathbb{N}\}$ in G , die keine Kante aus F enthalten und so, daß auch keine endliche Menge von Kanten ausreicht, jeden dieser Wege zu markieren⁵.

Insbesondere ist es möglich, die Menge W so zu wählen, daß sich zwei beliebige Wege $w^{(i)}$,

⁵Ein Pfad/Weg ist durch eine Kante markiert, wenn diese Kante Teil des Pfades/Weges ist. Entsprechend für Mengen von Pfaden/Wegen oder Mengen von Kanten.

$w^{(j)}$ nicht nur durch eine Translation unterscheiden, d.h. $\forall i, j \in \mathbb{N} : i \neq j \Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : \sigma^k(w^{(i)}) \neq w^{(j)}$.

Aus jedem dieser Wege wählt man eine Kante $e_i \in w^{(i)}$. Wäre eine der gewählten Kanten e_i zugleich Teil eines Weges $w^{(j)}$ ($j \neq i$), so würden sich die beiden Wege $w^{(i)}$ und $w^{(j)}$ entweder vor oder nach der gemeinsamen Kante e_i verzweigen. Man hätte also zwei verschiedene links- bzw. rechtsseitig-unendliche Wege, die mit e_i enden bzw. beginnen und keine Kante aus F enthalten. Offensichtlich ein Widerspruch zur Voraussetzung über F . Die Wege in W müssen deshalb sogar kantendisjunkt sein.

Sei $I := \{i(f) \mid f \in F\} \subseteq V$ die Menge der Startvertices aller Kanten aus F . Zu jeder Kante e_i wählt man nun einen kürzesten Pfad p_i von $t(e_i)$ zu einem beliebigen Vertex der Menge I . Nach Konstruktion enthalten diese Pfade keine Kanten aus F . Da mit der Menge F auch I endlich ist, muß es einen Vertex $v \in I$ geben, an dem unendlich viele Pfade p_i enden. Bereits zwei von diesen ergeben aber eine Verzweigung, die Eigenschaft (3) verletzt. Sei nämlich $i \neq j \in \mathbb{N}$ mit $t(p_i) = v = t(p_j)$, so sind die beiden Pfade $e_i p_i$ und $e_j p_j$ verschieden und lassen sich durch linksseitig-unendliche Teilwege von $w^{(i)}$ bzw. $w^{(j)}$ fortsetzen, ohne daß die fortgesetzten Wege eine Kante aus F enthalten.

Die gemachte Annahme ist somit falsch, d.h. außerhalb von F kann es nur endlich viele zweiseitig-unendliche Wege geben. Wählt man aus jedem dieser Wege eine Kante und fügt diese zu F hinzu, so besitzt die vergrößerte Menge die Eigenschaft (1), der Graph hat somit ein ROM. \square

Die 1-Punkt-Kompaktifizierung eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet ist deshalb genau dann expansiv, also wieder ein – jetzt kompakter – Subshift, wenn die Eigenschaften (2) und (3) für diesen erfüllt sind. Nach einem Resultat von D. Fiebig ([FieD1], Lemma 4.5) ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung in diesem Fall stets ein synchronisiertes System, in dem höchstens der Punkt ∞ keinen synchronisierenden Block enthält.

Die beiden in Abbildung 2.1 dargestellten Graphen erfüllen die Eigenschaft (2), aber nur der linke Graph erfüllt zudem Eigenschaft (3). Damit ist die 1-Punkt-Kompaktifizierung des zugehörigen Kantenshifts für den linken Graphen konjugiert zu einem synchronisiertem System, hier sogar zum Fibonacci-Shift⁶. Der rechte Graph in Abbildung 2.1 definiert dagegen einen transitiven, lokalkompakten Markovshift über einem abzählbar unendlichen Alphabet, dessen 1-Punkt-Kompaktifizierung nicht expansiv und damit kein Subshift ist.

Wie in Abschnitt 2.1 gesehen, kontrolliert bereits die Eigenschaft (2) alleine die Kardinalität der Automorphismengruppe. Sie hat darüber hinaus auch auf die algebraische Struktur und die möglichen Untergruppen von $\text{Aut}(\sigma)$ starken Einfluß (siehe Abschnitt 2.3). Wir wollen deshalb dieses Merkmal, unabhängig von der gewählten Darstellung des Markovshifts, durch möglichst fundamentale Eigenschaften beschreiben und geben im folgenden Satz 2.14 eine Charakterisierung durch Begriffe der topologischen Dynamik.

⁶Der Fibonacci- oder golden-mean-Shift ist die Menge $\{(x_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \mid \forall k \in \mathbb{Z} : x_k \neq 1 \vee x_{k+1} \neq 1\}$ zusammen mit der Shiftabbildung.

Definition 2.13 Sei (Y_0, S_0) die 1-Punkt-Kompaktifizierung des lokalkompakten dynamischen Systems (Y, S) und sei $d_0 : Y_0 \times Y_0 \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine Metrik, die mit der auf Y_0 durch Kompaktifizierung des topologischen Raumes Y erzeugten Topologie verträglich ist. Durch Einschränkung auf Y erhält man eine (bis auf uniforme Äquivalenz) eindeutige Metrik $d := d_0|_Y$, die als Gurevich-Metrik bezeichnet wird.

Ist (X, σ) ein lokalkompakter Markovshift über einem abzählbar unendlichen Alphabet mit der Graphendarstellung $G = (V, E)$, so hat man für die Gurevich-Metrik die explizite Formel (vgl. [FF2], Seite 627):

$$d(x, y) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} |h(x_n) - h(y_n)| \quad \text{wobei } h : E \rightarrow \{m^{-1} \mid m \in \mathbb{N}\} \text{ eine frei wählbare, injektive Abbildung ist.}$$

Satz 2.14 Für einen lokalkompakten, transitiven Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge gilt: Die Eigenschaft (FMDP) ist äquivalent dazu, daß die Shiftabbildung σ_0 der 1-Punkt-Kompaktifizierung (X_0, σ_0) auf den doppelt-transitiven Punkten expansiv ist, i.e. es gibt eine Konstante $c > 0$, so daß für die Gurevich-Metrik d gilt:

$$\forall x \in \text{DT}(X), y \in X : x \neq y \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) > c$$

Dies ist weiterhin dazu äquivalent, daß die ansonsten überabzählbare Menge der c -beschattenden Punkte $T_c(x) := \{y \in X \mid \forall k \in \mathbb{Z} : d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \leq c\}$ für alle $x \in \text{DT}(X)$ einelementig ist.

Beweis: " \implies ": Sei $G = (V, E)$ ein den Shiftraum X darstellender Graph; die endliche Menge $F \subsetneq E$ erfülle die Eigenschaft (FMDP) und $h : E \rightarrow \{m^{-1} \mid m \in \mathbb{N}\}$ sei eine injektive Funktion, welche die Gurevich-Metrik induziert.

Setzt man $c := \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \mid m = h(f)^{-1} \text{ für ein } f \in F \right\}$, so gilt $c > 0$ (da F endlich). Für $x, y \in X$ mit $x_0 \in F$ und $x_0 \neq y_0$ folgt dann:

$$d(x, y) \geq |h(x_0) - h(y_0)| \geq \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1} \geq 2c > c \quad \text{wobei } m := h(x_0)^{-1}$$

Fordert man $d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \leq c$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so bedeutet dies, daß das F -Skelett der beiden Punkte x und y übereinstimmt. Setzt man x zudem als doppelt-transitiv voraus, so gilt nach Beobachtung 2.5 tatsächlich $x = y$.

" \impliedby ": Sei (X, σ) dagegen ein Markovshift, der die Eigenschaft (FMDP) nicht erfüllt, so gibt es in der Graphendarstellung $G = (V, E)$ unendlich viele, kantendisjunkte Doppelpfade. Sei $c > 0$ frei gewählt, so läßt sich ein Doppelpfad $[p; q]$ finden, für dessen Kanten $e \in [p; q]$ gilt: $h(e) \leq \frac{c}{3}$.

Sei nun $x \in \text{DT}(X)$, so tritt insbesondere der Block p unendlich oft in x auf. Substituiert man beliebig viele solcher Blöcke durch den Block q , so erhält man jeweils einen neuen Punkt

des Shifts. Für jeden dieser Punkte $y \in X$ gilt nun:

$$\begin{aligned}
c &\geq 3 \max \{h(e) \mid e \in [p; q]\} \\
&\geq 3 \max \{|h(x_i) - h(y_i)| \mid i \in \mathbb{Z}\} \\
&\geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} \max \{|h(x_i) - h(y_i)| \mid i \in \mathbb{Z}\} \\
&\geq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^{-|n|} \left| h((\sigma^k(x))_n) - h((\sigma^k(y))_n) \right| = d(\sigma^k(x), \sigma^k(y)) \quad \forall k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Zu jedem $x \in \text{DT}(X)$ hat man damit überabzählbar viele Punkte, die x im Abstand $\leq c$ beschatten. Speziell kann c also niemals eine Expansivitätskonstante für die doppelt-transitiven Punkte sein. \square

Obiger Satz 2.14 löst die Eigenschaft (FMDP) aus dem Kontext einer zuvor gewählten Graphendarstellung. Er charakterisiert zugleich diejenigen dynamischen Systeme (Y, S) , die als 1-Punkt-Kompaktifizierung von lokalkompakten, transitiven Markovshifts (X, σ) mit der Eigenschaft (FMDP) auftreten können, durch a priori konjugationsinvariante, topologische Begriffe. Y ist demnach immer ein nulldimensionaler, kompakt-metrischer, topologischer Raum auf dem ein Homöomorphismus S definiert ist, der auf den doppelt-transitiven Punkten expansiv operiert, während die übrigen Punkte unter S im allgemeinen nicht auseinandergetrieben werden.

Setzt man für (X, σ) zusätzlich die Eigenschaft (3) voraus, so ist jeder Punkt durch sein F -Skelett⁷ eindeutig festgelegt. S wird dann ein echt expansiver Homöomorphismus und das System (Y, S) ist konjugiert zu einem Subshift (synchronisiertes System).

Abschließend wollen wir noch zeigen, daß die Eigenschaft (FMDP) alleine bereits die fast-topologische Konjugiertheit der 1-Punkt-Kompaktifizierung zu einem synchronisierten System impliziert.

Satz 2.15 *Sei (X, σ) ein lokalkompakter, transitiver Markovshift über einem abzählbar unendlichen Alphabet mit der Eigenschaft (FMDP). Dann existiert eine Faktorabbildung $\kappa : (X_0, \sigma_0) \rightarrow (Y, \sigma)$ der 1-Punkt-Kompaktifizierung in ein synchronisiertes System (Y, σ) , wobei wieder alle Punkte in $Y \setminus \kappa(\infty)$ ein synchronisierendes Wort sehen.*

Zusätzlich kann κ als 1-Block-Code realisiert und so gewählt werden, daß die Einschränkung $\kappa|_{\text{DT}(X)} : (\text{DT}(X), \sigma|_{\text{DT}(X)}) \rightarrow (\text{DT}(Y), \sigma|_{\text{DT}(Y)})$ eine Konjugation auf den doppelt-transitiven Punkten darstellt.

Beweis: Sei $G = (V, E)$ eine Graphendarstellung des Markovshifts (X, σ) und $F \subsetneq E$ endlich erfülle Eigenschaft (FMDP). Dann ist $A := F \cup \{\uparrow\}$ ein endlich Alphabet und die Skelettabbildung

$$\kappa : X_0 \rightarrow A^{\mathbb{Z}}, \quad (\kappa(x))_i := \begin{cases} x_i & \text{falls } x_i \in F \\ \uparrow & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall x \in X, i \in \mathbb{Z} \quad \kappa(\infty) := \uparrow^{\infty}$$

⁷wobei $F \subsetneq E$ endlich, die Eigenschaften (1), (2) und (3) erfüllt

ist ein 1-Block-Code, damit also shiftkommutierend und stetig.

Mit X_0 ist auch das Bild $Y := \kappa(X_0)$ kompakt und man erhält einen kompakten Subshift $(\kappa(X_0), \sigma) \subseteq (A^{\mathbb{Z}}, \sigma)$. Offensichtlich ist jedes Symbol $f \in F \subsetneq A$ ein synchronisierender Block in (Y, σ) , denn zu $u, v \in \mathcal{B}(Y)$ mit $uf, fv \in \mathcal{B}(Y)$ gibt es Blöcke $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathcal{B}(X)$ mit $\tilde{u}f \in \kappa^{-1}(uf)$ und $f\tilde{v} \in \kappa^{-1}(fv)$. Nun ist $X = X_G$ Kantenshift auf dem Graphen G und somit $\tilde{u}f\tilde{v} \in \mathcal{B}(X)$. Dies zeigt $ufv = \kappa(\tilde{u}f\tilde{v}) \in \mathcal{B}(Y)$. (Y, σ) ist damit ein synchronisiertes System. Speziell enthält sogar jeder Punkt $y \in Y$ mit $y \neq \uparrow^\infty$ ein synchronisierendes Wort.

Damit bleibt noch zu zeigen, daß $\kappa|_{\text{DT}(X)}$ tatsächlich eine Konjugation auf den doppelt-transitiven Punkten realisiert. Wegen $X_0 = X \dot{\cup} \{\infty\}$ gilt $\text{DT}(X_0) = \text{DT}(X)$. Die Abbildung $\kappa|_{\text{DT}(X)}$ ist injektiv, da zwei Punkte $x, y \in \text{DT}(X)$ mit gleichem Bild ($\kappa(x) = \kappa(y)$) das gleiche F -Skelett aufweisen und nach Beobachtung 2.5 somit gleich sein müssen. Weiterhin treten in jedem doppelt-transitiven Punkt $y \in \text{DT}(Y)$ sowohl im linken wie im rechten Halbstrahl unendlich oft Kanten aus F auf. Die dazwischenliegenden Blöcke \uparrow^n ($n \in \mathbb{N}$) können ebenfalls nach Beobachtung 2.5 auf eindeutige Weise durch Pfade in G ersetzt werden, so daß zu jedem $y \in \text{DT}(Y)$ ein (eindeutiger) Punkt $x \in \text{DT}(X)$ existiert, für den $\kappa(x) = y$ gilt. Insgesamt zeigt dies die Bijektivität von $\kappa|_{\text{DT}(X)}$.

Die Stetigkeit der Abbildung $\kappa^{-1}|_{\text{DT}(X)}$ ergibt sich folgendermaßen: Sei $y \in \text{DT}(Y)$ und $W(x) \subseteq \text{DT}(X)$ eine beliebige Umgebung des Punktes $x := \kappa^{-1}(y)$, so enthält diese einen dünnen Zylinder der Form ${}_{-n}[x_{-n} \dots x_0 \dots x_m] \cap \text{DT}(X)$ mit $x_{-n}, x_m \in F$ ($n, m \in \mathbb{N}$ groß genug). Sein Bild $V(y) := \kappa({}_{-n}[x_{-n} \dots x_0 \dots x_m] \cap \text{DT}(X)) \subseteq \text{DT}(Y)$ ist eine kompakt-offene Menge, die y enthält und für die gilt:

$$\kappa^{-1}(V(y)) = {}_{-n}[x_{-n} \dots x_0 \dots x_m] \cap \text{DT}(X) \subseteq W(\kappa^{-1}(y)) \subseteq \text{DT}(X)$$

Damit ist $\kappa|_{\text{DT}(X)}$ wie gefordert ein Homöomorphismus bezüglich der Relativtopologien, der zudem mit den Shiftabbildungen kommutiert. \square

2.3 Die Untergruppenstruktur der Automorphismengruppe

Dieser Abschnitt soll etwas Licht auf die innere Struktur der Automorphismengruppe eines topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum werfen, was sich bereits für SFTs als ein schwieriger und noch immer nicht vollständig gelöster Fragenkomplex herausgestellt hat. Interessant sind insbesondere Fragen nach bestimmten algebraischen Merkmalen (z.B. residuale Endlichkeit, Zentrum, Wortproblem) sowie nach möglichen und verbotenen Untergruppen. Die Sprechweise, eine abstrakte Gruppe H sei Untergruppe der Automorphismengruppe eines Subshifts (X, σ) , bedeutet in diesem Zusammenhang, daß sich H isomorph auf eine Untergruppe von $\text{Aut}(\sigma)$ abbilden läßt.

Ausgehend von den entsprechenden Resultaten für die Automorphismengruppe eines SFTs (siehe [BLR], [Kit]), finden wir im Fall eines nicht kompakten Markovshifts teilweise neue, deutlich abweichende Eigenschaften. Insbesondere werden, durch die Vergrößerung des Alphabets, einige Beschränkungen an die Struktur der Automorphismengruppe aufgehoben,

während andere weiterhin bestehen bleiben.

Zunächst sei erwähnt, daß die Konstruktion von Markerautomorphismen, wie sie für einen transitiven, nichttrivialen SFT möglich ist, ebenso für transitive Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet durchgeführt werden kann. Gruppen, die sich mittels dieser Technik in die Automorphismengruppe eines transitiven, nichttrivialen SFTs einbetten lassen, sind somit zugleich Untergruppen der Automorphismengruppe eines Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum. Nach M. Boyle, D. Lind und D. Rudolph ([BLR], Abschnitt 2) hat man also bereits folgende Gruppen und deren Untergruppen realisiert:

- Direkte Summe abzählbar vieler endlicher Gruppen
- Direkte Summe abzählbar vieler Kopien von \mathbb{Z}
- Freie Gruppe mit abzählbar vielen Generatoren
- Freies Produkt endlich vieler zyklischer Gruppen

Die Automorphismengruppen topologischer Markovshifts haben deshalb zumindest eine ebenso reichhaltige Struktur, wie die von SFTs. Tatsächlich werden wir sehen, daß die fehlende Kompaktheit weitere Möglichkeiten eröffnet und eine noch größere Vielfalt an Untergruppen zuläßt.

Die in Abschnitt 2.1 definierte Eigenschaft (FMDP) beeinflußt nicht nur die Kardinalität der Automorphismengruppe. Vielmehr zieht diese Bedingung ähnlich starke Einschränkungen an die algebraische Struktur der Automorphismengruppe nach sich, wie sie auch im Fall eines SFTs bestehen.

Satz 2.16 *Ein lokalkompakter, transitiver Markovshift mit abzählbar unendlichem Zustandsraum, der die Eigenschaft (FMDP) erfüllt, hat auch eine formale Zetafunktion⁸, d.h. zu jeder Periodenlänge existieren nur endlich viele periodische Punkte.*

Beweis: Der betrachtete Subshift $X = X_G$ werde als Kantenshift auf dem lokal-endlichen, stark zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ dargestellt und $F \subsetneq E$ sei eine endliche Menge, die die Eigenschaft (FMDP) erfüllt. Das folgende Argument führt die zusätzliche Annahme, X habe keine formale Zetafunktion, zum Widerspruch:

Sei $k \in \mathbb{N}$ die kleinste Periodenlänge, zu der es in X unendlich viele periodische Punkte gibt, so enthält G unendlich viele einfache⁹ Loops der Länge k . Aufgrund der lokalen Endlichkeit des Graphen sowie der endlichen Kardinalität der Menge F kann aus diesen eine abzählbar unendliche Teilmenge $L := \{l_i \mid i \in \mathbb{N}_0\}$ von paarweise kantendisjunkten Loops l_i gewählt werden, die zudem keine Kante aus F enthalten. Die Loops aus L sind dann automatisch

⁸Sei (M, T) ein dynamisches System, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$: $|\text{Per}_n(M)| < \infty$. Die Zetafunktion $\zeta_T(z)$ wird definiert als:

$$\zeta_T(z) := \exp \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\text{Per}_n(M)|}{n} \cdot z^n \right)$$

⁹Ein einfacher Pfad enthält keinen echt kürzeren, geschlossenen Teilpfad. Analog für Loops.

vertexdisjunkt, denn hätten zwei Loops einen Vertex $v \in V$ gemeinsam, so würden diese einen Doppelpfad der Länge k von v nach v bilden, der keine Kante der Menge F enthält. Da G als stark zusammenhängend vorausgesetzt war, läßt sich zu jedem Loop $l_i \in L$ ($i \in \mathbb{N}$) ein kürzester Pfad vom Startvertex des Loops l_0 zum Startvertex des Loops l_i bestimmen. Dieser Verbindungspfad ist offensichtlich nicht leer und sei mit p_i bezeichnet. Nun bilden aber die Pfade $l_0 p_i$ und $p_i l_i$ einen Doppelpfad zwischen den Vertices $\mathbf{i}(p_i) = \mathbf{i}(l_0)$ und $\mathbf{t}(p_i) = \mathbf{t}(l_i)$. Weder in l_0 noch in l_i taucht nach Konstruktion eine Kante aus F auf. Folglich muß der Verbindungspfad eine solche Kante aufweisen, da sonst Eigenschaft (FMDP) durch $[l_0 p_i; p_i l_i]$ verletzt wäre. Entsprechend wählt man kürzeste Pfade q_i vom Startvertex von l_i ($i \in \mathbb{N}$) zum Startvertex von l_0 , die je eine Kante aus F enthalten müssen.

Mit der Menge F ist auch das Produkt $\mathfrak{P}(F) \times \mathfrak{P}(F)$ der Potenzmenge endlich. Es gibt deshalb ein Paar $(M_1, M_2) \in \mathfrak{P}(F) \times \mathfrak{P}(F)$, so daß die Menge

$$L' := \{l_i \in L \mid i \in \mathbb{N} \wedge (f \in M_1 \Leftrightarrow f \in p_i) \wedge (f \in M_2 \Leftrightarrow f \in q_i)\}$$

abzählbar unendlich ist. Im folgenden werden nur noch die Loops der Menge L' mit ihren zugehörigen Verbindungspfaden p_i und q_i betrachtet. Eine einfache Umnummerierung ergibt dann $L' = \{l_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Durch die Minimalität der Verbindungspfade ist sichergestellt, daß die Kanten der Menge M_1 in allen Pfaden p_i ($i \in \mathbb{N}$) genau einmal und zudem in der gleichen Reihenfolge auftreten. Gleiches gilt auch für die Pfade q_i und die Menge M_2 .

Sei $f_1 \in M_1$ die eindeutige, von $\mathbf{i}(l_0) = \mathbf{i}(p_i)$ aus gesehen am weitesten entfernte Kante der Menge M_1 . Es genügt, die verkürzten Verbindungspfade \tilde{p}_i zu betrachten, die entstehen, indem man das Anfangsstück des Pfades p_i von $\mathbf{i}(l_0)$ bis $\mathbf{t}(f_1)$ entfernt. Entsprechend sei $f_2 \in M_2$ die eindeutige, von $\mathbf{i}(l_i) = \mathbf{i}(q_i)$ aus gesehen erste Kante der Menge M_2 und seien \tilde{q}_i die Pfade, die aus q_i durch Weglassen des Endstückes zwischen den Vertices $\mathbf{i}(f_2)$ und $\mathbf{i}(l_0)$ entstehen.

Die Verknüpfungen $\tilde{p}_i \tilde{q}_i$ enthalten dann keine Kante der Menge F . Ihre Länge sei $n_i := |\tilde{p}_i| + |\tilde{q}_i|$. Offensichtlich gibt es nun zwei – sogar unendlich viele – Indizes $i, j \in \mathbb{N}$, so daß $n_i \equiv n_j \pmod{k}$ gilt, wobei k , wie oben definiert, die Länge der Loops ist. Sei $\alpha \in \mathbb{N}$ mit $n_i = n_j + m \cdot k$ ($m \in \mathbb{N}_0$), so hat man einen Doppelpfad $[\tilde{p}_i \tilde{q}_i; \tilde{p}_j l_j^m \tilde{q}_j]$, der keine Kante aus F enthält. Ein offensichtlicher Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Menge F für den Graphen G die Eigenschaft (FMDP) erfüllt. \square

Korollar 2.17 *Die Automorphismengruppe eines lokalkompakten, transitiven Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, der die Eigenschaft (FMDP) erfüllt, ist residual endlich¹⁰. Insbesondere enthält sie keine nichttrivialen, divisionsvollständigen¹¹ sowie keine unendlichen, einfachen Gruppen. Es lassen sich damit auch nicht alle abzählbaren (abelschen) Gruppen in der Automorphismengruppe realisieren.*

Von den Untergruppen in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sind genau die residual endlichen Teil der Automorphismengruppe.

¹⁰Eine Gruppe G heißt residual endlich, falls es zu jedem Element $1_G \neq g \in G$ eine endliche Gruppe H und einen Homomorphismus $\alpha : G \rightarrow H$ gibt, so daß $\alpha(g) \neq 1_H$.

¹¹Eine Gruppe G heißt divisionsvollständig, falls jedes Element $h \in G$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine n -te Wurzel $g \in G$ mit $g^n = h$ besitzt.

Beweis: Der Beweis des Korollars benutzt nur die Tatsache, daß der Markovshift eine formale Zetafunktion hat und stützt sich auf die gleichen Argumente wie im Fall eines SFTs (vgl. Abschnitt 3 in [BLR]):

Sei $\text{Per}_n^0(X)$ die Menge der periodischen Punkte kleinster Periodenlänge $n \in \mathbb{N}$ des betrachteten Markovshifts (X, σ) und sei $\mathcal{S}_{\text{Per}_n^0(X)}$ die zugehörige symmetrische Gruppe. Da X eine formale Zetafunktion hat, sind mit jedem $\text{Per}_n^0(X)$ auch alle $\mathcal{S}_{\text{Per}_n^0(X)}$ endlich. Die Einschränkung eines Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ auf eine Menge $\text{Per}_n^0(X)$ liefert eine entsprechende Permutation auf $\mathcal{S}_{\text{Per}_n^0(X)}$. Dies induziert einen Homomorphismus $\alpha_n : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \mathcal{S}_{\text{Per}_n^0(X)}$. Benutzt man die Dichtheit der periodischen Punkte in X , so ist der einzige Automorphismus, dessen Bild unter allen Abbildungen α_n ($n \in \mathbb{N}$) die Identität $\text{Id}_{\text{Per}_n^0(X)}$ ist, selbst die Identität auf X . Für alle $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ mit $\varphi \neq \text{Id}_X$ hat man also ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $\alpha_n(\varphi) \neq \text{Id}_{\text{Per}_n^0(X)}$ gilt. Dies zeigt die residuale Endlichkeit der Gruppe $\text{Aut}(\sigma)$.

Angenommen $\text{Aut}(\sigma)$ hätte eine nichttriviale, divisionsvollständige Untergruppe G . Zu $\varphi \in G \leq \text{Aut}(\sigma)$ mit $\varphi \neq \text{Id}_X$ hat man eine endliche Gruppe H und einen Homomorphismus $\alpha : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow H$ mit $\alpha(\varphi) \neq 1_H$. Sei $k := |G/\text{Kern}(\alpha)| \leq |\text{Aut}(\sigma)/\text{Kern}(\alpha)| \leq |H|$ endlich, so gilt $(\phi\text{Kern}(\alpha))^k = \text{Kern}(\alpha)$ für alle $(\phi\text{Kern}(\alpha)) \in G/\text{Kern}(\alpha)$. Aufgrund der Divisionsvollständigkeit der Gruppe G , gibt es einen Automorphismus $\psi \in G$ mit $\psi^k = \varphi$. Der Kern des Homomorphismus α ist ein Normalteiler in G und man erhält aus der Gleichung: $\text{Kern}(\alpha) = (\psi\text{Kern}(\alpha))^k = \psi^k\text{Kern}(\alpha) = \varphi\text{Kern}(\alpha)$ einen Widerspruch zu $\varphi \notin \text{Kern}(\alpha)$. Die Existenz der divisionsvollständigen Gruppen \mathbb{Q} und $\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ (p prim) zeigt sofort, daß nicht alle abzählbaren abelschen Gruppen in $\text{Aut}(\sigma)$ auftreten.

Mit $\text{Aut}(\sigma)$ ist auch jede Untergruppe $G \leq \text{Aut}(\sigma)$ residual endlich. Damit kann aber G niemals eine unendliche, einfache Gruppe sein, da diese keinen nichttrivialen Homomorphismus in eine endliche Gruppe zulassen.

Nicht residual endliche Untergruppen von \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sind aufgrund der residualen Endlichkeit von $\text{Aut}(\sigma)$ ausgeschlossen. Residual endliche Untergruppen von \mathbb{Q}/\mathbb{Z} sind isomorph zu einer direkten Summe $\bigoplus_{p \text{ prim}} H_p$, wobei $H_p \leq \mathbb{Z}(p^\infty)$ für jede Primzahl p eine endliche Gruppe ist. Jede abzählbare direkte Summe endlicher Gruppen ist aber in $\text{Aut}(\sigma)$ realisierbar. \square

Diese Ergebnisse zeigen, daß bei topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, die die Eigenschaft (FMDP) haben, praktisch alle aus dem SFT-Fall bekannten Einschränkungen an die Struktur der Automorphismengruppe gültig bleiben. Speziell sind alle abzählbaren Automorphismengruppen transitiver Markovshifts zugleich immer residual endlich. Diese starke Bedingung kann also erst bei überabzählbaren Automorphismengruppen wegfallen. Tatsächlich werden wir Klassen von topologischen Markovshifts mit unendlich vielen periodischen Punkten einer festen Periodenlänge finden, die nicht residual endliche Automorphismengruppen haben.

Zum weiteren Studium der Automorphismengruppe eines transitiven, nicht kompakten Markovshifts ist es nötig, die Permutationsgruppen abzählbar unendlicher Mengen einzuführen.

Definition 2.18 Die Menge aller bijektiven Selbstabbildungen einer abzählbar unendlichen Menge (zusammen mit der Komposition als Verknüpfung) ergibt die volle Permutationsgruppe auf abzählbar vielen Elementen. Da für die Struktur dieser Gruppe nur die Kardinalität der zugrunde gelegten Menge entscheidend ist, benutzt man meist die Notation $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$. Sie enthält 2^{\aleph_0} Elemente, ist also überabzählbar.

Die eingeschränkte Permutationsgruppe auf abzählbar vielen Elementen wird dagegen mit $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ bezeichnet. Sie besteht aus allen bijektiven Abbildungen einer abzählbar unendlichen Menge in sich, die nur auf endlich vielen Elementen von der Identität abweichen und ist deshalb eine abzählbare Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.

Beobachtung 2.19 Die Automorphismengruppe eines transitiven Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet ist immer eine Untergruppe der vollen Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$.

Beweis: Aufgrund der vorausgesetzten Transitivität liegen die periodischen Punkte dicht in dem betrachteten Markovshift (X, σ) . Jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ ist somit durch seine Einschränkung auf die Menge der periodischen Punkte eindeutig festgelegt. Speziell ist $\varphi|_{\text{Per}(X)}$ eine Bijektion auf der abzählbaren Menge $\text{Per}(X)$ und kann deshalb als Element von $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ aufgefaßt werden. Es gilt also $\text{Aut}(\sigma) \leq \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$, wobei die Untergruppenrelation wieder so zu lesen ist, daß in $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ eine zu $\text{Aut}(\sigma)$ isomorphe Untergruppe existiert. \square

Diese fast triviale Beobachtung hat bereits einige direkte Konsequenzen auf die verbotenen Untergruppen der Automorphismengruppe eines transitiven Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge. Nach den Arbeiten von N.G. de Bruijn ([Bru1]) sowie M. Kneser und S. Swierczkowski ([KS]) sind folgende Gruppen nicht in die volle Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ und damit auch nicht in die Automorphismengruppe einbettbar:

- Die Gruppe aller Permutationen einer nicht-abzählbaren Menge (z.B. \mathbb{R}), die nur auf abzählbar vielen Elementen von der Identität abweichen ([Bru1] Theorem 5.1), sowie alle vollen Permutationsgruppen auf Mengen noch höherer Kardinalität.
- Die Gruppe $G := F/F''$, wobei F eine nicht-abelsche, freie Gruppe mit mehr als 2^{\aleph_0} Erzeugenden, F' ihre Kommutatorgruppe und F'' die Kommutatorgruppe von F' bezeichnen ([KS] Theorem 2).

Als nächstes werden wir zeigen, daß eine bestimmte Klasse topologischer Markovshifts Automorphismengruppen besitzt, in die sich die Gruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ einbetten läßt. Einfachstes Beispiel eines Subshifts, für den Satz 2.20 gilt, ist der volle Bernoulli-Shift über einem abzählbar unendlichen Alphabet. Aber auch viele andere, nicht lokalkompakte Markovshifts erfüllen die gemachten Voraussetzungen.

Satz 2.20 Ein transitiver Markovshift mit abzählbar unendlichem Zustandsraum sei durch einen stark zusammenhängenden Graphen dargestellt, der zwei Vertices enthält, zwischen

denen unendlich viele Pfade gleicher Länge existieren. Dann läßt sich die volle Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ auf abzählbar vielen Elementen in die Automorphismengruppe des Markovshifts einbetten.

Beweis: Sei $G = (V, E)$ eine Graphendarstellung des Markovshifts (X, σ) , wie im Satz angegeben und $l \in \mathbb{N}$ die kürzeste Pfadlänge, so daß sich zwei Vertices $u, v \in V$ ($u = v$ möglich) finden lassen, zwischen denen unendlich viele Pfade p_i ($i \in \mathbb{N}$) der Länge l existieren.

Angenommen man hätte eine Kante $e \in E$, die in unendlich vielen Pfaden p_i auftritt. Aufgrund der endlichen Länge l hätte man auch eine unendliche Menge von Pfaden, die e als k -te Kante ($1 \leq k \leq l$ fest) enthalten. Dann gibt es aber bereits unendlich viele Pfade der Länge $(k-1)$ zwischen u und $i(e)$, bzw. der Länge $(l-k)$ von $t(e)$ zu v , was im Widerspruch zur Minimalität der Länge l steht. Jede Kante $e \in E$ tritt somit in höchstens endlich vielen Pfaden p_i auf. Ohne Einschränkung kann man deshalb sogar annehmen, daß die Pfade p_i kantendisjunkt gewählt wurden (Induktiv wählt man je einen Pfad p_i aus und entfernt anschließend die endlich vielen, zu p_i nicht kantendisjunkten Pfade aus der Liste) und daß mindestens eine Kante $f \in E$ in keinem der betrachteten Pfade auftritt.

Da G als stark zusammenhängend vorausgesetzt war, gibt es einen Pfad von v zu $i(f)$. Ein kürzester unter diesen sei mit q bezeichnet. Der zusammengesetzte Pfad qf dient im folgenden als Marker.

Zu jeder Permutation $\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ definiert man nun eine Abbildung $\varphi_{\pi} : X \rightarrow X$, die einen Punkt $x \in X$ scannt und jeden Block $p_i q f$ durch $p_{\pi(i)} q f$ ersetzt. Diese ist wohldefiniert, da die Markerkante f wegen dessen Minimalität nicht im Pfad q und nach Konstruktion auch in keinem Pfad p_i auftritt und so ein nichttriviales Überlappen verschiedener Blöcke $p_i q f$ vermieden wird. Die Tatsache, daß die Blöcke p_i alle am Vertex u starten, bei v enden und durch φ_{π} nur permutiert werden, gewährleistet Bijektivität. Durch die Benutzung des Markerblockes qf und die einheitliche Länge der Blöcke p_i sind alle Abbildungen mit dem Shift vertauschbar. Stetigkeit von φ_{π} und $\varphi_{\pi}^{-1} = \varphi_{\pi^{-1}}$ ergibt sich direkt, da es sich bei den betrachteten Abbildungen um einfache sliding-Block-Codes mit Gedächtnis und Vorausschau $l + |q|$ handelt.

Die φ_{π} sind also Automorphismen und es gilt: $\mathcal{S}_{\mathbb{N}} \cong \{\varphi_{\pi} \mid \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{N}}\} \leq \text{Aut}(\sigma)$. □

Alle Automorphismengruppen, die überhaupt bei allgemeinen Subshifts $Y \subseteq \Sigma_{\mathcal{A}}$ über einem abzählbar unendlichen Alphabet \mathcal{A} mit periodischen Punkten dicht auftreten, sind so bereits Untergruppen der Automorphismengruppe des vollen Bernoulli-Shifts auf abzählbar vielen Symbolen bzw. jedes anderen Subshifts, der die Voraussetzungen von Satz 2.20 erfüllt (gleiches Argument wie in Beobachtung 2.19). In diesem Kontext können die Automorphismengruppen, die $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ als Untergruppe enthalten, bereits als sehr universell angesehen werden.

Die weitreichenden Konsequenzen von Satz 2.20 lassen sich in einer Reihe von Korollaren zusammenfassen. Standardvoraussetzung ist jeweils ein transitiver Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum und $\mathcal{S}_{\mathbb{N}} \leq \text{Aut}(\sigma)$.

Korollar 2.21 *Die Automorphismengruppe ist nicht mehr residual endlich, insbesondere*

enthält sie einfache Gruppen unendlicher Ordnung.

Beweis: Bezeichne $\mathcal{A}_{\mathbb{N},f}$ die von allen 3-Zykeln erzeugte, unendliche, alternierende Gruppe. Dies ist eine unendliche, einfache Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ und man hat die aufsteigende Kette: $\mathcal{A}_{\mathbb{N},f} \leq \mathcal{S}_{\mathbb{N},f} \leq \mathcal{S}_{\mathbb{N}} \leq \text{Aut}(\sigma)$. Die Existenz einer unendlichen, einfachen Untergruppe verbietet aber die Existenz eines nichttrivialen Homomorphismus der Automorphismengruppe in eine beliebige endliche Gruppe. \square

Korollar 2.22 *Jede abzählbare Gruppe ist Untergruppe von $\text{Aut}(\sigma)$. Speziell lassen sich damit auch die divisionsvollständigen Gruppen \mathbb{Q} und $\mathbb{Z}(p^\infty) = \mathbb{Z}[1/p]/\mathbb{Z}$ in die Automorphismengruppe einbetten.*

Beweis: Sei G eine abzählbare Gruppe, so operiert G auf sich selbst als Permutationsgruppe, indem man jedes $g \in G$ mit der bijektiven Abbildung $\alpha_g : G \rightarrow G, x \mapsto gx$ identifiziert. Man hat dann $G \leq \mathcal{S}_{\mathbb{N}} \leq \text{Aut}(\sigma)$. \square

Korollar 2.23 *Die Automorphismengruppe enthält endlich erzeugte Gruppen mit unlösbarem Wortproblem¹².*

Beweis: Wie in R. Lyndon und P. Schupp ([LS], Theorem 7.2) definiert man eine abzählbare Gruppe $G := \langle a, b, c, d; a^{-i}ba^i = c^{-i}dc^i \text{ falls } i \in S \rangle$, wobei $S \subsetneq \mathbb{N}$ eine rekursiv-aufzählbare, nicht berechenbare Menge ist. Nach Korollar 2.22 ist G eine Untergruppe von $\text{Aut}(\sigma)$. Allerdings ist in G das Wortproblem nicht entscheidbar, da $a^{-i}ba^i = c^{-i}dc^i$ genau dann gilt, wenn $i \in S$ ist, was nach Voraussetzung selbst nicht entschieden werden kann. \square

Korollar 2.24 *Jede abelsche Gruppe der Kardinalität 2^{\aleph_0} , insbesondere die Gruppe der reellen Zahlen, ist in die Automorphismengruppe einbettbar.*

Beweis: Siehe [Bru2] Theorem 4.3. \square

Korollar 2.25 *Gegeben sei eine Familie von 2^{\aleph_0} Gruppen, die alle in die Automorphismengruppe einbettbar sind, so ist auch das freie Produkt all dieser Gruppen eine Untergruppe von $\text{Aut}(\sigma)$.*

Beweis: Siehe [Bru1] Theorem 4.2. \square

¹²Das Wortproblem einer abstrakten Gruppe G ist lösbar, wenn es ein Verfahren gibt, um für jede endliche Verknüpfung von Generatoren zu entscheiden, ob diese der Identität entspricht. Existiert kein solches Verfahren, so hat G unlösbares Wortproblem.

Unter den gemachten Voraussetzungen hat man also eine sehr große, in ihrer Struktur nur wenig beschränkte Automorphismengruppe. Insbesondere zeigt der Vergleich mit einem SFT deutlich abweichende Merkmale: So sind viele Gruppen realisierbar, die in den Automorphismengruppen eines SFTs verboten sind ($\mathcal{A}_{\mathbb{N},f}$, $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$, $\mathbb{Z}[1/p]$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$, \mathbb{Q} , \mathbb{R} etc.). Zudem sind die bekannten Einschränkungen an die algebraischen Eigenschaften größtenteils aufgehoben. Es existieren sowohl unendliche einfache, als auch nichttriviale divisionsvollständige Untergruppen, wodurch zugleich die Forderung nach residualer Endlichkeit fallengelassen werden muß. Auch das im SFT-Fall bestehende Verbot endlich erzeugter Untergruppen mit unlösbarem Wortproblem ist nicht länger gültig. Dennoch zeigen die oben angegebenen Beispiele verbotener Untergruppen, daß auch die Automorphismengruppe eines derartigen Markovshifts nicht völlig universell ist.

Der folgende Satz 2.26 zeigt, daß weitaus mehr transitive Markovshifts immerhin eine Einbettung der eingeschränkten Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ auf abzählbar vielen Elementen in ihre Automorphismengruppe zulassen. Insbesondere gilt dieses Resultat auch für eine Klasse von lokalkompakten Markovshifts. Hieraus ergeben sich zwar nicht die gleichen starken Folgerungen wie oben, aber zumindest der Beweis zu Korollar 2.21 überträgt sich direkt, so daß auch hier die residuale Endlichkeit der Automorphismengruppe durch die Existenz unendlicher, einfacher Untergruppen aufgehoben ist.

Satz 2.26 *Eine Graphendarstellung eines transitiven Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum enthalte eine unendliche Menge $L := \{l_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ von Loops l_i gleicher Länge, wobei zu jedem Loop l_i ein Loop l_j ($j > i$) gewählt werden kann, so daß die Abstände von l_i zu l_j und von l_j zu l_i in dem Graphen durch eine globale Konstante beschränkt sind. Dann enthält die Automorphismengruppe eine zu $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ isomorphe Untergruppe.*

Bemerkung: Die etwas technisch verklausulierte Bedingung, die in obigem Satz 2.26 an die Graphendarstellung des Subshifts gestellt wird, bedeutet anschaulich gesprochen, daß in dem Graphen eine unendliche Baumstruktur, wie in Abbildung 2.2 angedeutet, gefunden werden kann, in der die Länge der gewählten Verbindungspfade $p_{i,j}$ und $p_{j,i}$ zweier Loops l_i und l_j durch eine (für alle $i, j \in \mathbb{N}$) feste Anzahl von Kanten beschränkt ist, so daß sich ein stark zusammenhängender, unendlicher Teilgraph ergibt.

Beweis: Innerhalb der gewählten Graphendarstellung $G = (V, E)$ genügt es, den nach Voraussetzung existierenden, unendlichen, stark zusammenhängenden Teilgraphen der l_i zusammen mit den gewählten Verbindungspfaden $p_{i,j}$ ($i, j \in \mathbb{N}$) zu betrachten. Abhängig von dessen Struktur unterscheidet man zwei Fälle:

Entweder in der Nähe eines Loops liegen unendlich viele weitere, d.h. es gibt einen Loop $l_i \in L$ und eine unendliche Menge $L' \subseteq L$, so daß der Abstand von l_i zu jedem Loop $l_j \in L'$ und von jedem Loop l_j zurück zu l_i durch die globale Konstante $M \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. Der Graph G ist dann natürlich nicht lokal-endlich. Tatsächlich sind damit sogar die Voraussetzungen von Satz 2.20 erfüllt, denn es gibt dann bereits unendlich viele Pfade von einem Vertex des Loops l_i zurück zu diesem Vertex, deren Länge durch $3(|l_i| - 1) + 2M$ beschränkt ist. Man

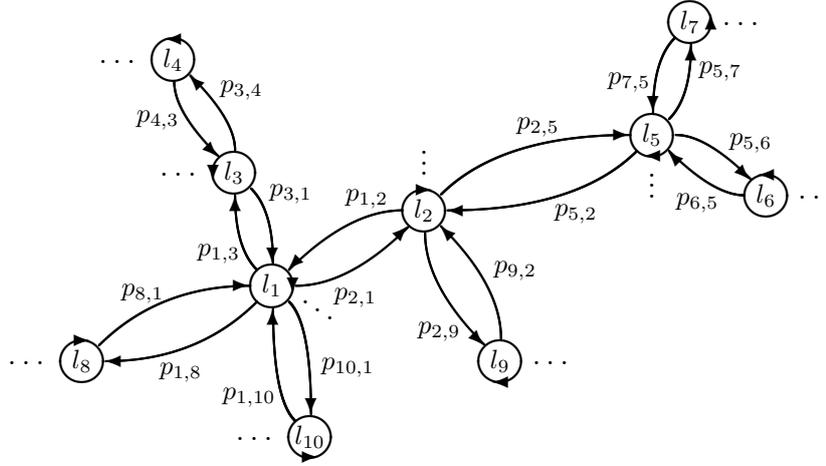


Abbildung 2.2: Enthält der Graph eines transitiven Kantenshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet einen unendlichen, stark zusammenhängenden Teilgraphen aus gleichgroßen Loops l_i und Verbindungspfaden $p_{i,j}$ bzw. $p_{j,i}$, deren Länge global beschränkt ist, so ist $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe.

kann somit nicht nur die Gruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$, sondern sogar die volle Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ in die Automorphismengruppe einbetten.

Liegen dagegen in der Nähe jedes Loops $l_i \in L$ immer nur endlich viele weitere Loops, so ist der betrachtete, baumartige Teilgraph lokal-endlich. Da dieser zudem als unendlich und stark zusammenhängend vorausgesetzt ist, muß in ihm nach Umnummerierung eine unendliche Kette von Loops l_k ($k \in \mathbb{N}$) existieren, in der zwei aufeinanderfolgende Loops l_k, l_{k+1} durch Pfade $p_{k,k+1}$ und $p_{k+1,k}$ verbunden sind, deren Länge für alle $k \in \mathbb{N}$ durch $M \in \mathbb{N}$ beschränkt ist. OE wählt man minimale Verbindungspfade $p_{k,k+1}$ und $p_{k+1,k}$ und richtet die Loops so aus, daß $i(p_{1,2}) = t(p_{2,1}) = i(l_1)$ und $t(p_{k,k+1}) = i(p_{k+1,k}) = i(p_{k+1,k+2}) = t(p_{k+2,k+1}) = i(l_{k+1})$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Im weiteren Beweis spielt nur noch diese "lineare" Kette von Loops inklusive ihrer Verbindungspfade eine Rolle.

Durch die globale Schranke M an die Länge der Verbindungspfade ist es möglich eine abzählbare Familie gleichlanger, geschlossener Pfade

$$b_k := p_{k,k+1} p_{k+1,k} l_k (p_{k,k+1} p_{k+1,k})^{\frac{(2M)!}{|p_{k,k+1} p_{k+1,k}|} - 1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

zu definieren, die sich aufgrund der Minimalität der Pfade $p_{k,k+1}; p_{k+1,k}$ nur trivial überlappen können und so daß je zwei Pfade b_k, b_{k+1} einen Vertex gemeinsam haben. Weiterhin betrachtet man noch die Pfade

$$\tilde{b}_k := p_{k+1,k} l_k (p_{k,k+1} p_{k+1,k})^{\frac{(2M)!}{|p_{k,k+1} p_{k+1,k}|} - 1} p_{k,k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$$

die aus den b_k 's durch zyklisches Verschieben um $|p_{k,k+1}|$ Kanten nach links hervorgehen.

Nun gilt für alle $k \in \mathbb{N}$: $\mathbf{i}(\tilde{b}_k) = \mathbf{t}(\tilde{b}_k) = \mathbf{i}(b_{k+1}) = \mathbf{t}(b_{k+1})$ und $|b_k| = |\tilde{b}_k| = (2M)! + N$ (wobei $N := |l_i|$).

Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ definiert man nun einen $((2M)! + N - 1, (2M)! + N - 1)$ -sliding-Block-Code $\phi_{(k,k+1)} : X \rightarrow X$, der einen Punkt $x \in X$ scannt und jeden Block \tilde{b}_k durch den Block b_{k+1} sowie jeden Block b_{k+1} durch \tilde{b}_k ersetzt. Die Wohldefiniertheit folgt dabei aus der Wahl der nicht überlappenden Blöcke b_{k+1} bzw. \tilde{b}_k . Die Abbildungen $\phi_{(k,k+1)}$ sind offensichtlich stetig, shiftkommutierend und involutorisch. Sie sind damit auch bijektiv und haben stetige Umkehrabbildungen. Außerdem gilt nach Konstruktion: $\phi_{(k,k+1)}((\tilde{b}_k)^\infty) = (b_{k+1})^\infty$ sowie $\phi_{(k,k+1)}((b_{k+1})^\infty) = (\tilde{b}_k)^\infty$. Bezeichne $\text{Orb}(x)$ den Orbit eines Punktes $x \in X$ unter der Shiftabbildung, so gilt:

$$\phi_{(k,k+1)}(\text{Orb}((b_k)^\infty)) = \text{Orb}((b_{k+1})^\infty) \quad \text{und} \quad \phi_{(k,k+1)}(\text{Orb}((b_{k+1})^\infty)) = \text{Orb}((b_k)^\infty)$$

Während $\phi_{(k,k+1)}(\text{Orb}((b_i)^\infty)) = \text{Orb}((b_i)^\infty)$ für alle $i \neq k, k+1$ gilt.

Die Familie der Automorphismen $(\phi_{(k,k+1)})_{k \in \mathbb{N}}$ operiert damit auf der Menge der σ -Orbits $\mathcal{O} := \{\text{Orb}((b_k)^\infty) \mid k \in \mathbb{N}\}$ wie die Nachbartranspositionen $((k, k+1))_{k \in \mathbb{N}}$ auf \mathbb{N} . Nachdem aber jede Permutation aus $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ als endliches Produkt von Transpositionen benachbarter Symbole darstellbar ist ($\mathcal{S}_{\mathbb{N},f} \cong \langle (k, k+1) \mid k \in \mathbb{N} \rangle$), kann auch jede Permutation der Menge \mathcal{O} , die nur endlich viele Elemente bewegt, durch ein endliches Produkt von Abbildungen $\phi_{(k,k+1)}$ erzeugt werden. Solche Kompositionen sind wieder Automorphismen. Verschiedene Darstellungen einer endlichen Permutation der Menge \mathcal{O} als Produkt von Transpositionsautomorphismen $\phi_{(k,k+1)}$ ergeben jeweils den gleichen Automorphismus. Man hat damit einen Gruppenisomorphismus

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{\mathbb{N},f} &\cong \{\text{endliche Produkte von Nachbartranspositionen } (k, k+1) \mid k \in \mathbb{N}\} \\ &\cong \{\text{endliche Produkte von Automorphismen } \phi_{(k,k+1)} \mid k \in \mathbb{N}\} \leq \text{Aut}(\sigma) \end{aligned}$$

was die Behauptung des Satzes zeigt. □

Korollar 2.27 *Die Automorphismengruppe topologischer Markovshifts, die die Voraussetzungen von Satz 2.26 erfüllen, enthalten unendliche einfache Untergruppen und sind insbesondere nicht residual endlich.*

Beweis: Nach Satz 2.26 gilt $\mathcal{A}_{\mathbb{N},f} \leq \mathcal{S}_{\mathbb{N},f} \leq \text{Aut}(\sigma)$. Die alternierende Gruppe auf abzählbar vielen Elementen ist aber eine unendliche einfache Gruppe. □

Die bisherigen Ergebnisse liefern bereits eine grobe Klassifikation aller transitiven Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge. Man erhält eine Einteilung in fünf zueinander disjunkte Mengen von Subshifts, die sich in Bezug auf ihre Automorphismengruppen deutlich voneinander unterscheiden:

- Nicht lokalkompakte Markovshifts mit nicht residual endlicher Automorphismengruppe: Hier ergeben sich, wie oben gesehen, die schwächsten strukturellen Beschränkungen

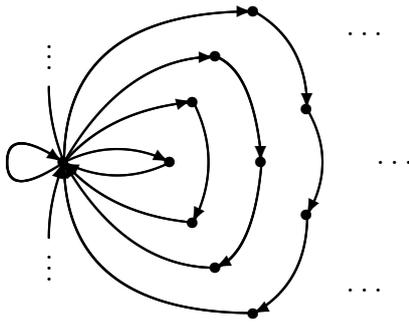


Abbildung 2.3: Graphendarstellung eines nicht lokalkompakten Markovshifts mit formaler Zetafunktion. Die Automorphismengruppe ist überabzählbar, aber residual endlich.



Abbildung 2.4: Graphendarstellung einer Irrfahrt auf \mathbb{N} mit Schrittweiten 0 und 1. Der entsprechende lokalkompakte Markovshift hat unendlich viele Fixpunkte und unendlich viele paarweise kantendisjunkte Doppelpfade. Die Automorphismengruppe ist überabzählbar und enthält nach Satz 2.26 die Gruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$, ist also nicht residual endlich.

und die größten Freiheiten bezüglich realisierbarer Untergruppen. Subshifts die dieser Klasse angehören, ergeben sich aus Satz 2.20 (z.B. voller Bernoulli).

- Nicht lokalkompakte Markovshifts mit residual endlicher Automorphismengruppe: Die Automorphismengruppe ist zwar noch überabzählbar, enthält aber keine unendlichen einfachen und keine nichttrivialen divisionsvollständigen Untergruppen. Beispiele sind nicht lokalkompakte Markovshifts mit formaler Zetafunktion, wie der in Abbildung 2.3 dargestellte Kantenshift.
- Lokalkompakte Markovshifts mit überabzählbarer, nicht residual endlicher Automorphismengruppe: Die nur geringen Einschränkungen an die Automorphismengruppe sind auf das Fehlen einer formalen Zetafunktion und der Eigenschaft (FMDP) zurückzuführen. Beispiele dieser Klasse sind insbesondere lokalkompakte Kantenshifts, die die Voraussetzungen von Satz 2.26 erfüllen (Abbildung 2.4 zeigt einen entsprechenden Graphen).
- Lokalkompakte Markovshifts mit überabzählbarer, residual endlicher Automorphismengruppe: Wieder verbietet die residuale Endlichkeit die Existenz unendlicher einfacher und nichttrivialer divisionsvollständiger Untergruppen und ergibt eine starre Struktur. Eine einfache Konstruktionsmethode für entsprechende Beispiele benutzt einen transitiven, lokalkompakten Markovshift mit formaler Zetafunktion, der als Kantenshift gegeben ist und verdoppelt (ver- n -facht) alle Kanten des entsprechenden Graphen. Hierdurch geht die Eigenschaft (FMDP) zwangsläufig verloren, während die Anzahl periodischer Punkte fester Länge endlich bleibt. Ein so gewonnener Kantenshift ist in Abbildung 2.5 dargestellt.
- Lokalkompakte Markovshifts mit abzählbarer, residual endlicher Automorphismengruppe: Die Automorphismengruppen zu Shifts dieser Klasse unterliegen den starresten Beschränkungen, sowohl bei den möglichen Untergruppen, als auch bezüglich der algebraischen Struktur. Nach Sätzen 2.8, 2.16 und Korollar 2.17 enthält diese Klasse genau die lokalkompakten Markovshifts, die Eigenschaft (FMDP) erfüllen. Beispiele zeigt bereits Abbildung 2.1 am Ende von Abschnitt 2.1.

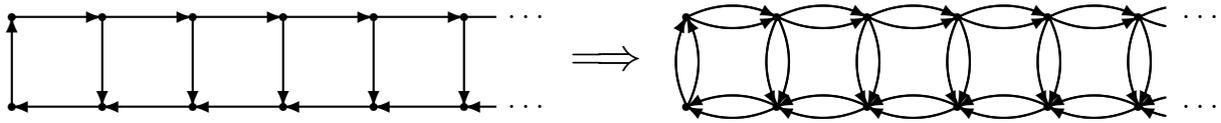


Abbildung 2.5: Durch "Kantenverdopplung" entsteht aus einem lokalkompakten Markovshift mit formaler Zetafunktion (hier sogar mit Eigenschaft (FMDP)) ein Kantenshift, dessen Automorphismengruppe überabzählbar, aber residual endlich ist ((FMDP) geht verloren, formale Zetafunktion bleibt erhalten).

Da die Automorphismengruppe und die topologische Struktur des Shiftraumes (lokalkompakt bzw. nicht lokalkompakt) Invarianten der topologischen Konjugation darstellen, können zwei Markovshifts, die in obiger Einteilung zu verschiedenen Klassen gehören, niemals konjugiert zueinander sein.

Die aufgeführte Einteilung ist bereits vollständig in dem Sinne, daß jeder transitive, topologische Markovshift über einem abzählbar unendlichen Alphabet in genau eine der 5 angegebenen, konjugationsinvarianten Klassen fällt.

2.4 Das Zentrum der Automorphismengruppe

Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gesehen, daß es sehr schwierig ist, die Automorphismengruppe eines topologischen Markovshifts, als abstrakte Gruppe aufgefaßt, zu beschreiben. Man sucht deshalb nach weiteren gruppentheoretischen Eigenschaften, die die auftretenden Gruppen näher charakterisieren. Ein solches Merkmal, das bereits bei SFTs untersucht wurde, ist das Zentrum $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\text{Aut}(\sigma))$, also die Menge der Automorphismen eines Subshifts (X, σ) , die mit allen Elementen aus $\text{Aut}(\sigma)$ vertauschen.

J. Ryan ([Rya1] und [Rya2]) bewies, daß das Zentrum der Automorphismengruppe eines transitiven SFTs genau aus den Potenzen der Shiftabbildung besteht und für nichttriviale SFTs somit isomorph zu \mathbb{Z} ist.

Zunächst zeigen wir, daß jeder Automorphismus eines transitiven Markovshifts, der den σ -Orbit jedes periodischen Punktes in sich selbst abbildet, bereits eine Potenz der Shiftabbildung sein muß. Dieses Resultat erlaubt es uns anschließend den Satz von Ryan auf transitive, nicht kompakte Markovshifts zu übertragen und damit die Menge der auftretenden Automorphismengruppen weiter einzugrenzen.

Aufgrund der Definition des Begriffs Automorphismus gilt offensichtlich $\sigma \in \mathfrak{Z}$. Da das Zentrum einer Gruppe stets eine Untergruppe – sogar ein Normalteiler – ist, gilt $\langle \sigma \rangle = \{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \leq \mathfrak{Z}$.

Diese triviale Überlegung ermöglicht es uns bereits, weitere abstrakte Gruppen anzugeben, die nicht als Automorphismengruppe auftreten können.

Beobachtung 2.28 *Die Automorphismengruppe eines transitiven Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge ist niemals isomorph zur vollen, noch zur eingeschränkten*

Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ bzw. $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ auf abzählbar vielen Elementen.

Beweis: Angenommen man hätte einen transitiven Markovshift (X, σ) mit $\text{Aut}(\sigma) \cong \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$. Das Zentrum \mathfrak{Z} der Automorphismengruppe, ist eine abelsche Gruppe und ein Normalteiler in $\text{Aut}(\sigma)$.

Nach dem Satz von Schreier und Ulam ([SU]) kennt man sämtliche Normalteiler der vollen Permutationsgruppe. Insbesondere hat man die Jordan-Hölder-Kette $\mathcal{S}_{\mathbb{N}} \triangleright \mathcal{S}_{\mathbb{N},f} \triangleright \mathcal{A}_{\mathbb{N},f} \triangleright \{1\}$ und dies sind alle möglichen Normalteiler (Faktorgruppen sind jeweils einfach).

Das Zentrum $\mathfrak{Z} \trianglelefteq \text{Aut}(\sigma)$ muß daher isomorph zu einer dieser vier Gruppen sein. Offensichtlich sind aber die Gruppen $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$, $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ und $\mathcal{A}_{\mathbb{N},f}$ nicht als Zentrum möglich, da dies selbst keine abelschen Gruppen sind. Der noch mögliche Fall $\mathfrak{Z} = \{1\}$ ist ebenfalls ausgeschlossen, da das Zentrum der Automorphismengruppe nach Definition alle Potenzen der Shiftabbildung enthält: $\{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \leq \mathfrak{Z} \trianglelefteq \text{Aut}(\sigma)$.

Das gleiche Argument gilt auch für die Annahme $\text{Aut}(\sigma) \cong \mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$. □

Im Fall eines transitiven SFTs zeigte J. Ryan ([Rya1], [Rya2]), daß das Zentrum der Automorphismengruppe genau aus den Potenzen der Shiftabbildung besteht, d.h. $\mathfrak{Z} = \langle \sigma \rangle$. Mit Hilfe von Lemma 2.29, das bereits für sich eine nichttriviale strukturelle Aussage über Automorphismen enthält, sind wir in der Lage, den Satz von Ryan für beliebige transitive Markovshifts zu beweisen.

Lemma 2.29 *Ein Automorphismus eines transitiven Markovshifts, dessen Einschränkung auf die Menge der σ -Orbits periodischer Punkte die Identität ergibt, ist bereits eine Potenz der Shiftabbildung.*

Beweis: Sei $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ ein Automorphismus des Markovshifts (X, σ) , der die σ -Orbits periodischer Punkte höchstens dreht. Die Aussage des Lemmas ergibt sich, indem man nachweist, daß φ ab einer bestimmten Orbitlänge alle σ -Orbits um die gleiche Weite dreht.

Dazu wählt man aus X einen Orbit \mathcal{O}_1 kleinster Länge und daraus einen periodischen Punkt $x \in \mathcal{O}_1$. Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ die Orbitlänge von \mathcal{O}_1 , so ist $l_1 := x_{[0, N_1)} \in \mathcal{B}_{N_1}(X)$ ein Block, der $x = l_1^\infty$ definiert und nach Wahl von \mathcal{O}_1 mit sich selbst nur trivial überlappen kann (in einer Graphendarstellung würde l_1 einem geschlossenen, einfachen Pfad entsprechen). Sei weiter $\varphi(x) = \sigma^{s_1}(x)$ mit $-\frac{1}{2}N_1 < s_1 \leq \frac{1}{2}N_1$ eindeutig bestimmt. Aufgrund der Stetigkeit von φ und der Annahme, daß φ alle σ -Orbits festläßt, gibt es eine Zahl $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß $(\varphi(y))_{[0, N_1)} = (\sigma^{s_1}(x))_{[0, N_1)}$ für alle $y \in_{-n_1 N_1} [l_1^{2n_1}]$ erfüllt ist.

Seien nun $\mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3$ verschiedene Orbits, deren Längen $N_2, N_3 \in \mathbb{N}$ größer als $2(n_1 + 1)N_1$ sind, und seien $l_2 \in \mathcal{B}_{N_2}(X), l_3 \in \mathcal{B}_{N_3}(X)$ Blöcke für die gilt: $l_2^\infty \in \mathcal{O}_2, l_3^\infty \in \mathcal{O}_3$. Wie oben sei $\varphi(l_2^\infty) = \sigma^{s_2}(l_2^\infty)$ mit $-\frac{1}{2}N_2 < s_2 \leq \frac{1}{2}N_2$ und $\varphi(l_3^\infty) = \sigma^{s_3}(l_3^\infty)$ mit $-\frac{1}{2}N_3 < s_3 \leq \frac{1}{2}N_3$. Die Zahlen s_2, s_3 sind wieder eindeutig festgelegt. Das Stetigkeitsargument von oben ergibt jetzt Zahlen $n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: $(\varphi(y))_{[0, N_i)} = (\sigma^{s_i}(l_i^\infty))_{[0, N_i)}$ für alle $y \in_{-n_i N_i} [l_i^{2n_i}]$ mit $i := 2, 3$.

Die Transitivität des Markovshifts erlaubt, minimale Verbindungsblöcke $p_{12}, p_{23}, p_{31} \in \mathcal{B}(X)$

zu finden, so daß $l_1 p_{12} l_2 p_{23} l_3 p_{31} l_1 \in \mathcal{B}(X)$ ein zulässiger Block ist. Da l_2, l_3 nicht nur eine Konkatenation von l_1 -Blöcken sind, wählt man $m \in \mathbb{N}$ so daß $m N_1 > \max\{|l_3 p_{31} l_1 p_{12} l_2|, |l_2 p_{23} l_3|\}$ und betrachtet den periodischen Punkt $y := (l_1^{2n_1+m} p_{12} l_2^{2n_2} p_{23} l_3^{2n_3} p_{31})^\infty \in X$. Nach Konstruktion ist dessen kleinste Periodenlänge genau die Länge des angegebenen Blockes. Insbesondere kann ein Block der Form l_1^m nur als Teilblock von $l_1^{2n_1+m}$ auftreten (weitere l_1^i -Blöcke sind nach Wahl von m kürzer). Nach Voraussetzung hat man nun $\varphi(y) = \sigma^s(y)$ für ein eindeutiges $-\frac{1}{2}M < s \leq \frac{1}{2}M$ mit $M := (2n_1 + m)N_1 + 2(n_2 N_2 + n_3 N_3) + |p_{12} p_{23} p_{31}|$. Außerdem gilt:

$$(\sigma^{s+n_1 N_1}(y))_{[0, (m+1)N_1]} = (\sigma^{s_1}(x))_{[0, (m+1)N_1]} \quad \text{d.h.} \quad -(n_1 + 1)N_1 < s \leq (n_1 + 1)N_1$$

und wegen $N_2 > 2(n_1 + 1)N_1$ folgt $-\frac{1}{2}N_2 < s \leq \frac{1}{2}N_2$.

Zudem gilt aufgrund der Stetigkeitsforderung bezüglich des Blockes l_2 :

$$(\sigma^{s+(2n_1+m)N_1+|p_{12}|+n_2 N_2}(y))_{[0, N_2]} = (\sigma^{s_2}(l_2^\infty))_{[0, N_2]}$$

wodurch $s = s_2$ erzwungen wird.

Da auch $N_3 > 2(n_1 + 1)N_1$, folgt mit dem gleichen Argument auch $s = s_3$.

Alle σ -Orbits deren Länge $2(n_1 + 1)N_1$ übersteigt, werden also um die gleiche Weite gedreht. Jeder Punkt des Markovshifts läßt sich durch eine konvergente Folge periodischer Punkte approximieren, deren kleinste Periode größer als diese Schranke ist. Der Automorphismus φ schiebt deshalb alle Punkte um eine konstante Weite und ist damit eine Potenz der Shiftabbildung. \square

Bemerkung: Der Beweis benutzt nur die Markoveigenschaft und die Transitivität des Subshifts, macht aber keinerlei Annahmen über die Kardinalität des Alphabets. Er ist gleichermaßen für SFTs und Markovshifts mit abzählbar unendlicher (oder noch größerer) Zustandsmenge gültig.

Um die Aussage des Lemmas 2.29 in die Sprache der Gruppentheorie übersetzen zu können, definiert man, genau wie im SFT-Fall, die von M. Boyle und W. Krieger eingeführte periodische-Orbit-Darstellung der Automorphismengruppe (vgl. hierzu auch [BK1] und [BLR]).

Definition 2.30 Sei (X, σ) ein transitiver Markovshift, so operiert jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ auf der Menge $\text{Per}_n^0(X)$ der periodischen Punkte kleinster Periode $n \in \mathbb{N}$. Zu jedem n erhält man eine Permutation $\pi_n(\varphi) := \varphi|_{\text{Per}_n^0(X)} \in \text{Aut}(\text{Per}_n^0(X), \sigma)$. Im Fall $\text{Per}_n^0(X) = \emptyset$ setzt man hierbei $\text{Aut}(\text{Per}_n^0(X), \sigma) := \{\text{Id}\}$.

Der Homomorphismus

$$\pi : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \text{Aut}(\text{Per}_n^0(X), \sigma), \quad \varphi \mapsto \pi(\varphi) := (\pi_1(\varphi), \pi_2(\varphi), \dots)$$

heißt die periodische-Punkte-Darstellung der Automorphismengruppe.

Aufgrund der Dichtheit der periodischen Punkte in einem transitiven Markovshift, ist dieser Homomorphismus injektiv.

Sei weiterhin $\text{Orb}_n(X) := \text{Per}_n^0(X)/\langle\sigma\rangle$ die Menge der σ -Orbits der Länge $n \in \mathbb{N}$. Ausgehend von π erhält man die periodische-Orbit-Darstellung:

$$\rho : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \prod_{n=1}^{\infty} \text{Aut}(\text{Orb}_n(X), \sigma), \quad \varphi \mapsto \rho(\varphi) := (\rho_1(\varphi), \rho_2(\varphi), \dots)$$

wobei $\rho_n(\varphi) \in \text{Aut}(\text{Orb}_n(X), \sigma)$ die von $\pi_n(\varphi)$ induzierte Permutation auf der Menge der σ -Orbits bezeichnet. $\rho_n(\varphi)$ ist wohldefiniert, da $\pi_n(\varphi) \in \text{Aut}(\text{Per}_n^0(X), \sigma)$ nach Definition mit der durch die Shiftabbildung gegebenen Permutation $\pi_n(\sigma)$ vertauscht und $\rho_n(\sigma) = \text{Id}_{\text{Orb}_n(X)}$ gilt.

Obiges Lemma zeigt nun, daß genau dann $\rho(\varphi) = \text{Id}$ gilt, wenn $\varphi \in \langle\sigma\rangle$ ist. Mit anderen Worten:

Korollar 2.31 Die periodische-Orbit-Darstellung der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ eines transitiven Markovshifts (X, σ) ist treu auf der Gruppe $\text{Aut}(\sigma)/\langle\sigma\rangle$.

Beweis: Sei $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ und sei $\rho(\varphi) = \text{Id}$, d.h. $\rho_n(\varphi) = \text{Id}_{\text{Orb}_n(X)}$ für alle $n \geq 1$. Nach obigem Lemma 2.29 folgt $\varphi \in \langle\sigma\rangle$, also $\varphi \in [\text{Id}] \in \text{Aut}(\sigma)/\langle\sigma\rangle$. \square

Nach diesen Vorarbeiten erhalten wir den Satz von Ryan auch für transitive, nicht kompakte Markovshifts:

Satz 2.32 Das Zentrum der Automorphismengruppe eines transitiven Markovshifts besteht genau aus den Potenzen der Shiftabbildung.

Beweis: Nach Definition des Begriffs Automorphismus ist klar, daß jede Potenz σ^i ($i \in \mathbb{Z}$) der Shiftabbildung im Zentrum \mathfrak{Z} der Automorphismengruppe des betrachteten Markovshifts (X, σ) liegen muß.

Angenommen es gäbe einen weiteren Automorphismus $\varphi \in \mathfrak{Z} \trianglelefteq \text{Aut}(\sigma)$ mit $\varphi \notin \{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$. Nach Lemma 2.29 existiert dann ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\varphi|_{\text{Orb}_N(X)} \neq \text{Id}_{\text{Orb}_N(X)}$, d.h. es gibt mindestens zwei verschiedene Orbits $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$ der Länge N mit $\varphi(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$. Seien nun $x^{(1)} \in \mathcal{O}_1$ und $x^{(2)} \in \mathcal{O}_2$ Orbitpunkte, für die gilt $\varphi(x^{(1)}) = x^{(2)}$ und sei weiter $x^{(3)} := \varphi(x^{(2)}) \in \text{Per}_N^0(X)$. Definiert man $l_i := (x^{(i)})_{[0, N)} \in \mathcal{B}_N(X)$ für $i := 1, 2, 3$, so folgt aus der Stetigkeit von φ : $\varphi(-iN[l_1^{2i}]) \subseteq {}_0[l_2]$ und $\varphi(-jN[l_2^{2j}]) \subseteq {}_0[l_3]$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ groß genug.

Aufgrund der Transitivität des Markovshifts ist man in der Lage einen periodischen Punkt großer Periodenlänge und folgender Gestalt zu konstruieren: $y^{(1)} := (l_1^{m+m_1} p_{12} l_2^{m_2} p_{21} l_1^{m_3} \tilde{p}_{12} l_2^{m_4} \tilde{p}_{21} l_1^{m_5})^\infty \in X$ wobei $p_{12}, p_{21}, \tilde{p}_{12}$ und \tilde{p}_{21} nichtverschwindende Verbindungsblöcke sind, die keine vollständigen Blöcke l_1, l_2 oder l_3 enthalten. Die natürlichen Zahlen $m_i \in \mathbb{N}$ für $1 \leq i \leq 5$ werden so groß gewählt, daß im Bildpunkt $y^{(2)} := \varphi(y^{(1)}) = (l_2^{m+n_1} q_{23} l_3^{n_2} q_{32} l_2^{n_3} \tilde{q}_{23} l_3^{n_4} \tilde{q}_{32} l_2^{n_5})^\infty$ mindestens je ein Block l_2 bzw. l_3 entsteht, d.h. $n_i \geq 1$ für $1 \leq i \leq 5$. Hierbei sollen, wie die Darstellung

des Punktes $y^{(2)}$ bereits suggeriert, die Blöcke $l_2^{m+n_1}, l_3^{n_2}$, etc. maximal ausgedehnt sein, so daß weder am linken Ende der Blöcke q_{23}, \tilde{q}_{23} , noch am rechten Ende der Blöcke q_{32}, \tilde{q}_{32} ein vollständiger Block l_2 vorhanden ist, noch soll am linken Ende von q_{32}, \tilde{q}_{32} oder am rechten Ende von q_{23}, \tilde{q}_{23} ein vollständiger Block l_3 vorhanden sein. Schließlich sei $mN > (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)N + |p_{12}p_{21}\tilde{p}_{12}\tilde{p}_{21}|$ und m_2, m_4 seien so gewählt, daß $n_2 \neq n_4$ ist.

Nach Konstruktion ist $y^{(1)} \in \text{Per}_M^0(X)$ mit

$$M := |p_{12}p_{21}\tilde{p}_{12}\tilde{p}_{21}| + N(m + m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5)$$

und da φ auf $\text{Per}_M^0(X)$ operiert, hat auch $y^{(2)}$ die kleinste Periodenlänge M . Der $y^{(2)}$ -definierende Block $(l_2^{m+n_1} q_{23} l_3^{n_2} q_{32} l_2^{n_3} \tilde{q}_{23} l_3^{n_4} \tilde{q}_{32} l_2^{n_5}) \in \mathcal{B}_M(X)$ kann nur trivial mit sich selbst überlappen. Es ist deshalb möglich, einen weiteren Automorphismus $\psi : X \rightarrow X$ zu definieren, der einen Punkt scannt und jeden Block $(l_2^{m+n_1} q_{23} l_3^{n_2} q_{32} l_2^{n_3} \tilde{q}_{23} l_3^{n_4} \tilde{q}_{32} l_2^{n_5})$ durch $(l_2^{m+n_1} q_{23} l_3^{n_4} q_{32} l_2^{n_3} \tilde{q}_{23} l_3^{n_2} \tilde{q}_{32} l_2^{n_5})$ ersetzt, sowie umgekehrt. Diese Abbildung ist ein involutorischer sliding-Block-Code, wobei die Blöcke $l_2^{m+n_1} q_{23}$ und $\tilde{q}_{32} l_2^{n_5}$ als Marker dienen; also tatsächlich $\psi \in \text{Aut}(\sigma)$. Nach Voraussetzung war $n_2 \neq n_4$, weshalb ψ nicht die Identität sein kann.

Nach Konstruktion von $y^{(1)}$ gilt $\psi(y^{(1)}) = y^{(1)}$, was durch die Wahl von m groß genug erreicht wurde. Damit vertauscht ψ aber nicht mit φ :

$$(\varphi \circ \psi)(y^{(1)}) = \varphi(y^{(1)}) = y^{(2)} \neq \psi(y^{(2)}) = (\psi \circ \varphi)(y^{(1)})$$

Dies zeigt $\varphi \notin \mathfrak{Z}$ im Widerspruch zur Annahme. □

Bei transitiven Markovshifts über endlichen, wie über abzählbar unendlichen Alphabeten besteht also die gleiche Einschränkung an das Zentrum der Automorphismengruppe. Insbesondere existiert höchstens dann eine Darstellung der Automorphismengruppe als direkte Summe $\text{Aut}(\sigma) \cong \langle \sigma \rangle \oplus G$, wenn der zweite Summand eine zentrumslose Gruppe $(\mathfrak{Z}(G) \cong \{\text{Id}\})$ ist. Wir kommen im Abschnitt 4.1 auf diese Fragestellung zurück.

Vergleicht man Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum und codierte Systeme, so ergeben sich deutliche Unterschiede bezüglich der auftretenden Automorphismengruppen. Speziell gibt es keine der in der Arbeit "The automorphism group of a coded system" von D. Fiebig und U.-R. Fiebig gefundenen Automorphismengruppen der Form:

$\text{Aut}(\sigma) \cong \langle \sigma \rangle \oplus \mathbb{Z}$ ([FF3], Theorem 2.4), $\text{Aut}(\sigma) \cong G$ mit G unendliche, endlich erzeugte abelsche Gruppe ([FF3], Korollar 2.7) und $\text{Aut}(\sigma) \cong \langle \sigma \rangle \oplus G$ mit $G \leq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ residual endlich ([FF3], Korollar 2.8).

Sei $Y \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{Z}}$ ein beliebiger nichttrivialer Subshift mit periodischen Punkten dicht, so läßt sich niemals ein transitiver Markovshift (X, σ_X) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge finden, für den gilt: $\text{Aut}(\sigma_X) \cong \langle \sigma_X \rangle \oplus \text{Aut}(\sigma_Y)$, obwohl dies für codierte Systeme immer möglich ist ([FF3], Theorem 2.13).

Sind dagegen (X, σ_X) und (Y, σ_Y) zwei transitive Markovshifts, so ist eine Darstellung $\text{Aut}(\sigma_X) \cong \text{Aut}(\sigma_Y) \oplus G$ höchstens wieder für eine zentrumslose Gruppe G erreichbar.

Kapitel 3

Automorphismen mit (un-)beschränkter Kodierlänge

3.1 Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen

Wie bereits mehrfach angedeutet, führt die fehlende Kompaktheit topologischer Markovshifts über abzählbar unendlichen Alphabeten dazu, daß es neben sliding-Block-Codes auch stetige, shiftkommutierende Abbildungen gibt, die a priori keine beschränkte Kodierlänge haben. Zunächst geben wir zwei einfache Beispiele für Automorphismen lokalkompakter Markovshifts, die in einer Graphendarstellung unbeschränkte Kodierlänge haben und somit dem Satz von Curtis-Hedlund-Lyndon widersprechen. Bei transitiven, lokalkompakten Markovshifts mit überabzählbarer Automorphismengruppe gibt es zu jeder Graphendarstellung überabzählbar viele, nicht kodierlängenbeschränkte Automorphismen der Ordnung 2.

Auch die für kompakte Subshifts wahre Aussage, daß das Inverse eines bijektiven sliding-Block-Codes selbst ein sliding-Block-Code ist, verliert seine Gültigkeit, was wir durch Angabe einer topologischen Konjugation und eines Automorphismus mit beschränkter Kodierlänge zeigen, deren Umkehrung nicht kodierlängenbeschränkte Abbildungen sind.

Zu jeder Darstellung eines nicht kompakten Markovshifts hat man entsprechend die Menge der Automorphismen mit beschränkter bzw. unbeschränkter Kodierlänge bezüglich dieser Darstellung. Speziell läßt sich in $\text{Aut}(\sigma)$ zu jeder Darstellung die Untergruppe der Automorphismen definieren, die, zusammen mit ihren Inversen, sliding-Block-Codes sind. Diese ist im allgemeinen darstellungsabhängig. Konjugationsinvarianten erhält man dagegen aus den Mengen der Automorphismen, die zusammen mit ihren Inversen in jeder bzw. in irgendeiner (Graphen-)Darstellung beschränkte Kodierlänge haben. Die entsprechenden Teilmengen bilden in ihrer Gesamtheit eine durch Inklusion partiell geordnete, hierarchische Struktur innerhalb von $\text{Aut}(\sigma)$.

Die Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen zu zwei topologischen Konjugationen $\gamma_1, \gamma_2 : X \rightarrow Y$ sind stets isomorph. Allerdings existieren zu jedem transitiven, lokalkompakten Markovshift Graphendarstellungen, für die diese Untergruppen unter gruppentheoretischer Konjugation mit Elementen aus $\text{Aut}(\sigma)$ nicht abgeschlossen

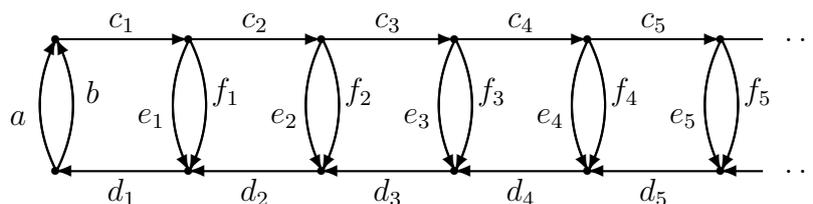


Abbildung 3.1: Graphendarstellung eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts. Die Folge der Doppelpfade $[e_n; f_n]$ ($n \in \mathbb{N}$) läßt eine einfache Konstruktion involutorischer Automorphismen von unbeschränkter Kodierlänge zu.

sind. Ebenfalls für jeden transitiven, lokalkompakten Markovshift gilt, daß allein die Potenzen der Shiftabbildung in allen (Graphen-)Darstellungen beschränkte Kodierlänge haben.

Die Stetigkeit einer Abbildung zwischen kompakten Räumen impliziert bereits ihre gleichmäßige Stetigkeit. Alle stetigen shiftkommutierenden Abbildungen zwischen kompakten Subshifts sind somit sliding-Block-Codes (Satz von Curtis-Hedlund-Lyndon [Hed]). Anders bei Subshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet: Man kennt Beispiele von Faktorabbildungen lokalkompakter Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge in kompakte Subshifts [FF4] sowie topologische Konjugationen zwischen zwei (Graphen-)Darstellungen eines lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum [FieD3], die jeweils keine beschränkte Kodierlänge haben.

Auch bei Automorphismen treten neben sliding-Block-Codes (Identität, Potenzen des Shifts, etc.) Abbildungen mit unbeschränkter Kodierlänge auf. Als Beispiel betrachten wir den Kantenshift $X = X_G$, des in Abbildung 3.1 gegebenen Graphen G :

Beispiel 3.1 Die Abbildung $\varphi : X \rightarrow X$ scanne einen Punkt und ersetze jeden Block der Form $ac_1c_2 \dots c_n e_n$ durch $ac_1c_2 \dots c_n f_n$ ($n \in \mathbb{N}$) sowie umgekehrt, während sie alle anderen Blöcke festlasse. Diese Definition zeigt bereits, daß φ eine shiftkommutierende Involution ist. Die Symbole a, b, c_i und d_i ($i \in \mathbb{N}$) bleiben unter φ unverändert erhalten. Ein Symbol e_n (bzw. f_n) wird in Abhängigkeit des $(n+1)$ -Koordinaten weiter links stehenden Symbols (a oder b) entweder durch f_n (bzw. e_n) ersetzt, oder es bleibt unverändert. Damit ist φ stetig, insgesamt ein Automorphismus.

Offensichtlich hat die Abbildung aber keine beschränkte Kodierlänge, denn mit wachsendem $n \in \mathbb{N}$ ist ein immer längerer Block von Koordinaten nötig, um das Bild eines Punktes aus ${}_0[e_n]$ bzw. ${}_0[f_n]$ zu bestimmen.

Allgemein lassen sich bei transitiven, lokalkompakten Markovshifts (X, σ) ohne die Eigenschaft (FMDP) in jeder Graphendarstellung solche nicht kodierlängenbeschränkten Automorphismen konstruieren, indem man zu zwei verschiedenen, gleichlangen Markerblöcken $a, b \in \mathcal{B}(X)$ mit $v_0 := \mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(b)$ und einer unendlichen Familie paarweise kantendisjunkter Doppelpfade $P := \{[p_i; q_i] \mid i \in \mathbb{N}\}$ (die zudem keine Kante aus a und b enthalten) die kürzesten Abstände $k_j \in \mathbb{N}_0$ von v_0 zu $v_j := \mathbf{i}(p_j) = \mathbf{i}(q_j)$ bestimmt und

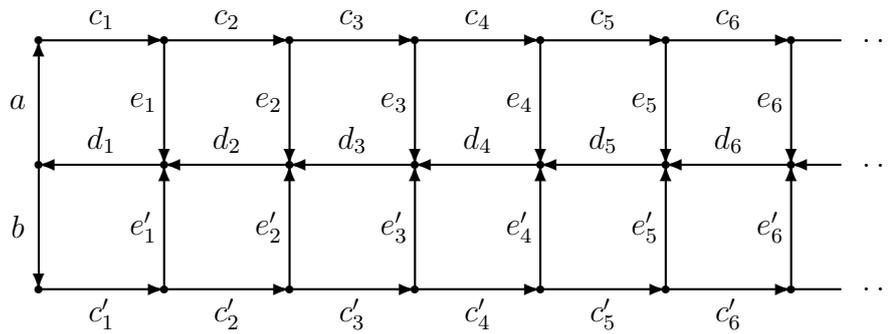


Abbildung 3.2: Graphendarstellung eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts mit der Eigenschaft (FMDP).

einen Automorphismus definiert, der für alle $j \in \mathbb{N}$ jeden Block der Form $a \underline{???} p_j$ mit $a \underline{???} q_j$ sowie umgekehrt vertauscht und alle übrigen Blöcke, speziell $b \underline{???} p_j$ und $b \underline{???} q_j$ festläßt. Hierbei müssen die nicht genauer bezeichneten Mittelblöcke genau die Minimallänge k_j haben. Diese Blöcke dürfen auch Pfade p_i bzw. q_i anderer Doppelpfade $[p_i; q_i]$ ($i \neq j$) enthalten, die bei passendem Abstand zum Block a selbst ausgetauscht werden. Da die Längen k_j aufgrund der Lokalkompaktheit des Subshifts mit $j \in \mathbb{N}$ über jede Schranke wachsen, hat dieser involutorische Automorphismus genau wie in Beispiel 3.1 unbeschränkte Kodierlänge.

Beobachtung 3.2 Die Automorphismengruppe jeder Graphendarstellung eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts ohne Eigenschaft (FMDP) enthält überabzählbar viele involutorische Automorphismen von unbeschränkter Kodierlänge.

Beweis: Zu jeder 0/1-Folge definiert man einen Automorphismus wie oben, der die Blöcke $a \underline{???} p_j$ und $a \underline{???} q_j$ genau dann vertauscht, wenn der j -te Eintrag der Folge gleich 1 ist. Dies ergibt überabzählbar viele verschiedene Automorphismen mit unbeschränkter Kodierlänge. \square

Auch bei transitiven, lokalkompakten Markovshifts mit der Eigenschaft (FMDP) kann man leicht Beispielautomorphismen angeben, die keine beschränkte Kodierlänge aufweisen:

Beispiel 3.3 Sei (X, σ) der Kantenshift des in Abbildung 3.2 skizzierten lokal-endlichen, stark zusammenhängenden Graphen G . Dieser erfüllt die Eigenschaft (FMDP); eine entsprechende, alle Doppelpfade überdeckende, endliche Kantenmenge ist z.B. $F := \{a, b\}$. Er besitzt zudem die aus Abschnitt 2.2 bekannte Eigenschaft (3) und damit auch ein ROM. Offensichtlich weist die Involution $\varphi : X \rightarrow X$, die einen Punkt scannt und jeden Block

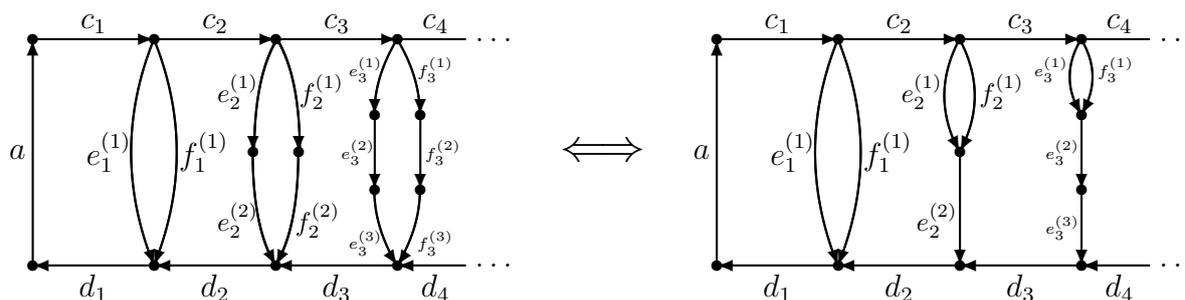


Abbildung 3.3: Gezeigt sind die Graphen zu zwei topologisch konjugierten Kantenshifts. Dabei ist die Konjugationsabbildung in der einen Richtung (von links nach rechts) ein 1-Block-Code, während ihr Inverses (von rechts nach links) keine beschränkte Kodierlänge hat.

der Form $d_2 d_1 a c_1 c_2 \dots c_n e_n$ durch $d_2 d_1 b c'_1 c'_2 \dots c'_n e'_n$ ($n \in \mathbb{N}$) und jeden rechtsseitig-unendlichen Strahl der Form $d_2 d_1 a c_1 c_2 \dots c_n c_{n+1} \dots$ durch $d_2 d_1 b c'_1 c'_2 \dots c'_n c'_{n+1} \dots$ sowie umgekehrt ersetzt, keine beschränkte Kodierlänge auf. Sie ist jedoch stetig und kommutiert mit der Shiftabbildung.

Natürlich lassen sich aus φ sofort abzählbar unendlich viele weitere Automorphismen von unbeschränkter Kodierlänge erzeugen, indem man zu jeder endlichen Teilmenge $N \subsetneq \mathbb{N}$ die Involution φ_N betrachtet, die die angegebenen Blöcke genau für $n \notin N$ vertauscht (die rechtsseitig-unendlichen Strahlen werden unabhängig von N weiterhin vertauscht). Man hat damit für den Markovshift aus Abbildung 3.2 mit Eigenschaft (FMDP) abzählbar unendlich viele verschiedene nicht kodierlängenbeschränkte Automorphismen gefunden.

Da jede stetige, bijektive Abbildung zwischen kompakten Räumen schon ein Homöomorphismus ist, muß für kompakte Subshifts die Umkehrung jedes bijektiven sliding-Block-Codes selbst ein sliding-Block-Code sein (vgl. [LM], Theorem 1.5.14). Das folgende Beispiel 3.4 zeigt, daß diese Aussage bei topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum aufgrund der fehlenden Kompaktheit nicht länger gültig ist. Wir beschreiben zunächst eine topologische Konjugation, die ein 1-Block-Code ist, während ihr Inverses unbeschränkte Kodierlänge hat. Durch eine leicht modifizierte Konstruktion läßt sich auch ein Automorphismus eines (nicht) lokalkompakten Markovshifts angeben, der diese Eigenschaft besitzt.

Beispiel 3.4 Sei G_1 der linke und G_2 der rechte in Abbildung 3.3 dargestellte Graph und seien (X_1, σ_1) bzw. (X_2, σ_2) die beiden Kantenshifts $X_1 = X_{G_1}$ und $X_2 = X_{G_2}$.

Wir definieren $\gamma : X_1 \rightarrow X_2$ als 1-Block-Abbildung wie folgt:

$$\forall x \in X_1, j \in \mathbb{Z} : (\gamma(x))_j := \begin{cases} e_i^{(k)} & \text{falls } x_j \in \{e_i^{(k)}, f_i^{(k)}\} \text{ mit } i, k \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \leq k \leq i \\ x_j & \text{sonst} \end{cases}$$

Man überzeugt sich leicht von der Bijektivität von γ . Die inverse Abbildung $\gamma^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ ist zwar stetig, hat jedoch keine beschränkte Kodierlänge: Wählt man zu $n \in \mathbb{N}$ einen Punkt $y \in X_2$ mit $y_0 = e_n^{(n)}$, so ist die Nullkoordinate $(\gamma^{-1}(y))_0$ erst durch den Block $y_{[-n+1,0]}$

eindeutig bestimmt. Somit ist γ eine topologische Konjugation, wobei γ selbst ein sliding-Block-Code, γ^{-1} aber kein sliding-Block-Code ist. Dies widerlegt Theorem 1.5.14 in [LM] für lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge.

Auch die entsprechende Aussage über Automorphismen wird ungültig, sobald man ein abzählbar unendliches Alphabet benutzt. Automorphismen, die dieses Resultat falsch werden lassen, können offensichtlich keine endliche Ordnung haben¹. Ein Beispiel erhält man durch folgende Konstruktion:

Zunächst erzeugt man je abzählbar unendlich viele disjunkte Kopien $G^{(-m)}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) und $G^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) der Graphen G_1 bzw. G_2 . Zur Unterscheidung versieht man alle Kanten aus $G^{(-m)}$ mit einem zusätzlichen Subscript $(-m)$; entsprechend mit den Kanten von $G^{(n)}$. Anschließend klebt man alle Kopien durch Identifikation der Kanten $a_{(i)}$ ($i \in \mathbb{Z}$) zusammen. Der entstehende Graph sei G ; sein nicht lokalkompakter Kantenshift sei (X, σ) .

Nun definiert man einen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$, der gewissermaßen die Kopien von G_1 und G_2 um eine Stelle weiterschiebt, indem der Zusatzindex einer Kante um 1 erhöht wird. Da die Kantenshifts zu G_1 und G_2 topologisch konjugiert zueinander sind, läßt sich entsprechend $G^{(0)}$ auf $G^{(1)}$ abbilden.

Sei $E^{(-m)} := \{k_{(-m)} \mid k \in E_1 \setminus \{a\}\}$ ($m \in \mathbb{N}_0$) und $E^{(n)} := \{k_{(n)} \mid k \in E_2 \setminus \{a\}\}$ ($n \in \mathbb{N}$), wobei E_i die Kantenmenge von $G_i = (V_i, E_i)$ ($i := 1, 2$) bezeichnet. Für alle $x \in X$ definiert man φ formal als 1-Block-Code:

$$(\varphi(x))_j := \begin{cases} a & \text{falls } x_j = a \\ k_{(-m+1)} & x_j = k_{(-m)} \in E^{(-m)} \text{ für } m \in \mathbb{N} \\ k_{(n+1)} & x_j = k_{(n)} \in E^{(n)} \text{ für } n \in \mathbb{N} \\ k_{(1)} & x_j = k_{(0)} \in E^{(0)} \setminus \{e_{i,(0)}^{(k)}, f_{i,(0)}^{(k)} \mid i, k \in \mathbb{N} \wedge 2 \leq k \leq i\} \\ e_{i,(1)}^{(k)} & x_j \in \{e_{i,(0)}^{(k)}, f_{i,(0)}^{(k)}\} \text{ mit } i, k \in \mathbb{N} \text{ und } 2 \leq k \leq i \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Wie oben hängt die Nullkoordinate $(\varphi^{-1}(x))_0$ für $x \in X$ mit $x_0 = e_{n,(1)}^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) von dem Symbol x_{-n+1} ab; φ^{-1} hat also keine beschränkte Kodierlänge.

Identifiziert man nicht alle Kanten $a_{(i)}$ ($i \in \mathbb{Z}$), sondern zu jedem $i \in \mathbb{Z}$ nur je die beiden Vertices $\mathfrak{i}(a_{(i)})$ und $\mathfrak{t}(a_{(i-1)})$ miteinander, so erhält man einen transitiven, lokalkompakten Kantenshift, der ebenfalls Automorphismen zuläßt, die sliding-Block-Codes sind, ohne daß ihr Inverses diese Eigenschaft besitzt. Ein solcher entsteht aus φ durch Modifikation der ersten Zeile der Fallunterscheidung zu " $a_{(i+1)}$ falls $x_j = a_{(i)}$ für $i \in \mathbb{Z}$ ".

Bemerkung: Auch die in Beispiel 3.4 ausgeführte Konstruktion einer topologischen Konjugation ist sehr allgemein. Zu einem lokalkompakten Markovshift ohne (FMDP) lassen sich unendlich viele, paarweise kantendisjunkte Doppelpfade, wie im Beweis zu Lemma 3.27 beschrieben, isolieren. Zudem kann man durch weitere Splittings erreichen, daß die Länge dieser isolierten Doppelpfade über jede Schranke wächst. Auf diese Weise erhält man die erste (linke) Graphendarstellung. Amalgamiert man diese Doppelpfade jeweils bis auf ihr erstes Kantenpaar, so ergibt sich die zweite (rechte) Darstellung. Die entsprechende Konju-

¹Gilt $\varphi^N = \text{Id}$ für $N \in \mathbb{N}$, $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ sliding-Block-Code, so ist auch $\varphi^{-1} := \varphi^{N-1}$ ein sliding-Block-Code (hat $(N-1)$ -fache Kodierlänge).

gationsabbildung ist wieder ein 1-Block-Code, während ihre Umkehrung keine beschränkte Kodierlänge hat.

Innerhalb der Automorphismengruppe eines transitiven, nicht kompakten Markovshifts gibt es damit zu jeder Darstellung die (echte) Teilmenge derjenigen Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge. Sie enthält genau die gleichmäßig stetigen Automorphismen. Die Komposition zweier Elemente dieser Menge hat selbst diese Eigenschaft; eine Kodierlänge der Zusammensetzung ist durch die Summe der Kodierlängen der verknüpften Abbildungen gegeben. Da insbesondere die identische Abbildung auf dem Shiftraum ein 1-Block-Code ist, ergibt sich eine Halbgruppe mit Einheit.

Um tatsächlich eine Untergruppe zu erhalten, ist es nach Beispiel 3.4 notwendig, sich auf diejenigen Automorphismen einzuschränken, die zusammen mit ihrem Inversen beschränkte Kodierlänge haben, i.e. gleichmäßig stetig sind. Diese zusätzliche Bedingung erzwingt, daß mit jedem Automorphismus auch die dazu inverse Abbildung ein Element der ausgezeichneten Untergruppe aller kodierlängenbeschränkten Automorphismen ist.

Nun ist a priori nicht klar, ob und wie die Wahl der Darstellung des Markovshifts diese Untergruppe beeinflusst. Wir definieren deshalb zunächst:

Definition 3.5 Sei $Y \in \text{Pres}(X)$ eine beliebige Darstellung des nicht kompakten Markovshifts (X, σ) und sei $\gamma : X \rightarrow Y$ eine topologische Konjugation, so bezeichne $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma) \leq \text{Aut}(\sigma)$ die Untergruppe der Automorphismen, deren Konjugierte zusammen mit ihren Inversen als Abbildungen auf Y beschränkte Kodierlänge haben (kurz: die Untergruppe der Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge), d.h.

$$\text{Aut}_\gamma^b(\sigma) := \{\varphi \in \text{Aut}(\sigma) \mid \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1} \text{ und } \gamma \circ \varphi^{-1} \circ \gamma^{-1} \text{ haben beschränkte Kodierlänge}\}$$

Zudem definiert man

$$\text{Aut}_X^b(\sigma) := \text{Aut}_{\text{id}_X}^b(\sigma) = \{\varphi \in \text{Aut}(\sigma) \mid \varphi \text{ und } \varphi^{-1} \text{ haben beschränkte Kodierlänge}\}.$$

Die Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen zu verschiedenen topologischen Konjugationen in eine feste Darstellung sind als abstrakte Gruppen isomorph. Sie lassen sich auf kanonische Weise durch (gruppentheoretische) Konjugation mit einem Automorphismus ineinander überführen:

Beobachtung 3.6 Sei (X, σ) ein topologischer Markovshift mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge und sei $Y \in \text{Pres}(X)$ eine Darstellung. Für je zwei topologische Konjugationen $\gamma_1, \gamma_2 : X \rightarrow Y$ gilt $\text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma) \cong \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$. Der Isomorphismus wird durch Konjugation mit einem Automorphismus gegeben.

Beweis: Sei $\phi := \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 \in \text{Aut}(\sigma)$, so vermittelt $\Phi : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \text{Aut}(\sigma) \quad \varphi \mapsto \phi \circ \varphi \circ \phi^{-1}$ einen Gruppenisomorphismus, für den zudem gilt: $\Phi(\text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma)) = \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$

Sei $\varphi \in \text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma)$, so haben $\gamma_2 \circ \Phi(\varphi) \circ \gamma_2^{-1} = \gamma_2 \circ ((\gamma_2^{-1} \circ \gamma_1) \circ \varphi \circ (\gamma_1^{-1} \circ \gamma_2)) \circ \gamma_2^{-1} = \gamma_1 \circ \varphi \circ \gamma_1^{-1}$ und $\gamma_2 \circ (\Phi(\varphi))^{-1} \circ \gamma_2^{-1} = \gamma_1 \circ \varphi^{-1} \circ \gamma_1^{-1}$ beschränkte Kodierlänge, d.h. $\Phi(\varphi) \in \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$.

Entsprechend gilt für $\psi \in \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$ auch $\Phi^{-1}(\psi) \in \text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma)$. \square

Definition 3.7 Seien $\text{Aut}_{\cap_Y}^b(\sigma) := \bigcap_{\gamma: X \rightarrow Y} \text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma)$ und $\text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma) := \bigcup_{\gamma: X \rightarrow Y} \text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma)$ (wobei γ jeweils über alle topologischen Konjugationen von X nach Y läuft) der Schnitt bzw. die Vereinigung über alle konjugierten Untergruppen von Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge² der Darstellung $Y \in \text{Pres}(X)$.

Der Schnitt über alle (Graphen-)Darstellungen $\text{Aut}_{\cap}^b(\sigma) := \bigcap_{Y \in \text{Pres}(X)} \text{Aut}_{\cap_Y}^b(\sigma)$ und $\text{Aut}_{\cap_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma) := \bigcap_{Y \in \text{Graph}(X)} \text{Aut}_{\cap_Y}^b(\sigma)$ ergibt die konjugationsinvariante Untergruppe der Automorphismen, die in jeder Darstellung (jeder Graphendarstellung) beschränkte Kodierlänge haben.

Schließlich sind $\text{Aut}_{\cup}^b(\sigma) := \bigcup_{Y \in \text{Pres}(X)} \text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma)$ bzw. $\text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma) := \bigcup_{Y \in \text{Graph}(X)} \text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma)$ die konjugationsinvarianten Teilmengen aller Automorphismen, die in irgendeiner Darstellung (irgendeiner Graphendarstellung) zusammen mit ihren Inversen beschränkte Kodierlänge haben.

Bemerkung: Weitere Invarianten ergeben sich aus den Zuordnungen:

$$\begin{aligned} \Gamma_X^{\cap} : \text{Pres}(X) &\rightarrow \{G \mid G \leq \text{Aut}(\sigma)\} & Y &\mapsto \text{Aut}_{\cap_Y}^b(\sigma) \\ \Gamma_X^{\cup} : \text{Pres}(X) &\rightarrow \{G \mid G \leq \text{Aut}(\sigma)\} & Y &\mapsto \text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma) \end{aligned}$$

Notwendig für die Konjugiertheit zweier Markovshifts $(X, \sigma_X), (Y, \sigma_Y)$ mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge ist die Existenz einer bijektiven Abbildung $\delta : \text{Pres}(X) \rightarrow \text{Pres}(Y)$, so daß $\Gamma_X^{\cap} = \Gamma_Y^{\cap} \circ \delta$ und $\Gamma_X^{\cup} = \Gamma_Y^{\cup} \circ \delta$ gilt.

Insbesondere müssen natürlich die Bilder $\Gamma_X^{\cap}(\text{Pres}(X))$ und $\Gamma_Y^{\cap}(\text{Pres}(Y))$ bzw. $\Gamma_X^{\cup}(\text{Pres}(X))$ und $\Gamma_Y^{\cup}(\text{Pres}(Y))$ für konjugierte Subshifts gleich sein. Entsprechend schwächer allein für Graphendarstellungen, d.h. $\text{Graph}(\cdot)$ anstelle von $\text{Pres}(\cdot)$.

Es ist zu erwarten, daß dies sehr sensitive, zugleich aber auch nur schwer zugängliche Invarianten der topologischen Konjugation sind.

Wir werden als nächstes beweisen, daß die Kodierlängenbeschränktheit eines Automorphismus sowohl von der gewählten Darstellung als auch von der gewählten topologischen Konjugation in diese Darstellung abhängt. Um dies allgemein zeigen zu können, beginnen wir mit einigen technischen Vorbereitungen:

Definition 3.8 Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph. Ein Pfad $p := e_1 e_2 \dots e_n$ ($n \in \mathbb{N}$) in G heißt isoliert, wenn an keinem Vertex $\mathfrak{t}(e_i)$ mit $i := 1, 2, \dots, n-1$ mehr als eine Kante endet bzw. startet. Formal:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n-1\} : \quad |\{e \in E \mid \mathfrak{i}(e) = \mathfrak{t}(e_i)\}| = 1 \quad \wedge \quad |\{e \in E \mid \mathfrak{t}(e) = \mathfrak{t}(e_i)\}| = 1$$

²Sei $\gamma : X \rightarrow Y$ eine feste Konjugation. Da sich jede beliebige topologische Konjugation von X nach Y als Komposition von γ mit einem Automorphismus $\phi \in \text{Aut}(\sigma)$ schreiben läßt, gilt:

$$\text{Aut}_{\cap_Y}^b(\sigma) = \bigcap_{\phi \in \text{Aut}(\sigma)} (\phi \circ \text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma) \circ \phi^{-1}) \quad \text{und} \quad \text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma) = \bigcup_{\phi \in \text{Aut}(\sigma)} (\phi \circ \text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma) \circ \phi^{-1})$$

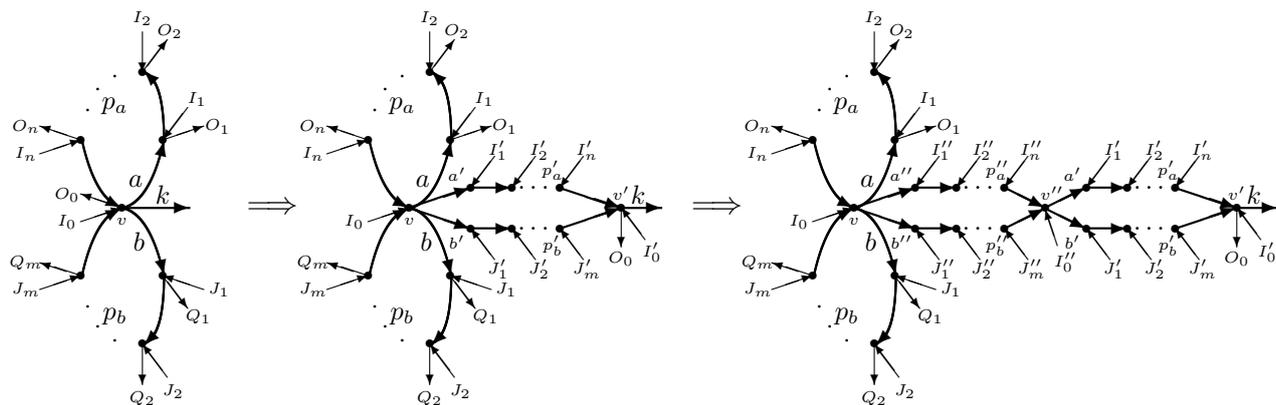


Abbildung 3.4: Auseinanderziehen zweier Loops $a p_a$ und $b p_b$ durch out-Splittings am Vertex v (Partitionierung in $\{a, b\}$ und $\{k\} \cup O_0$) und anschließend an allen übrigen Vertices, beginnend mit dem Startvertex der letzten Kante des jeweiligen Loops entgegen der Looprichtung bis zum Endvertex $t(a)$ bzw. $t(b)$ der ersten Kante des Loops. Das Verfahren ist endlich oft wiederholbar; die Kantenshifts der entstehenden Graphen sind topologisch konjugiert zueinander.

Lemma 3.9 Sei G ein gerichteter, stark zusammenhängender (lokal-endlicher) Graph mit abzählbar unendlicher Kantenmenge, so kann durch eine endliche Anzahl von State-Splittings ein weiterer stark zusammenhängender (lokal-endlicher) Graph G' erzeugt werden, der endlich viele kantendisjunkte Doppelpfade $[p_n; q_n]$ ($n \in \{1, 2, \dots, N\}$) enthält, für die $t(p_i) = t(q_i) = i(p_{i+1}) = i(q_{i+1})$ mit $i \in \{1, 2, \dots, N-1\}$ gilt und deren Pfade p_n, q_n ($1 \leq n \leq N$) isoliert sind. Zudem sind die beiden durch G und G' definierten Kantenshifts topologisch konjugiert.

Beweis: Nach Voraussetzung enthält $G = (V, E)$ zwei verschiedene Kanten $a \neq b \in E$ mit $v := i(a) = i(b) \in V$. Wähle zwei kürzestmögliche Pfade p_a von $t(a)$ und p_b von $t(b)$ zurück zu v , so daß p_a und p_b nach ihrem ersten gemeinsamen Vertex nicht mehr verzweigen. Durch eine endliche Anzahl von in-Splittings entlang des eventuell vorhandenen gemeinsamen Endstücks der beiden einfachen Loops $a p_a$ und $b p_b$ werden diese kantendisjunkt gemacht. OE gibt es eine bei v startende Kante $k \in E \setminus \{a, b\}$ (mindestens einer der Loops enthält einen Vertex mit einer auslaufenden, nicht zu den Loops gehörenden Kante $k' \in E$; eine endliche Anzahl von out-Splittings beginnend bei $i(k')$ entgegen dem Durchlaufsinne des Loops verschiebt diese Verzweigung an den Vertex v).

Nach diesen Vorbereitungen hat man die in Abbildung 3.4 links dargestellte Konstellation. Man erzeugt nun aus den beiden Loops einen Doppelpfad und isoliert anschließend dessen Einzelpfade:

Durch ein out-Splitting am Vertex v (Partitionierung der auslaufenden Kanten in $\{a, b\}$ und $\{k\} \cup O_0$) sowie anschließende out-Splittings an allen übrigen Vertices der beiden Loops $a p_a$ und $b p_b$ entgegen der Looprichtung erreicht man eine Situation wie in Abbildung 3.4 mitte. Führt man diesen Schritt noch einmal aus (wiederum ein out-Splitting am Vertex v mit Partitionierung $\{a, b\}$ und $\{a', b'\}$ und nachfolgende out-Splittings an den restlichen Vertices der beiden Loops), so ergibt sich ein Teilgraph wie in Abbildung 3.4 rechts skizziert.

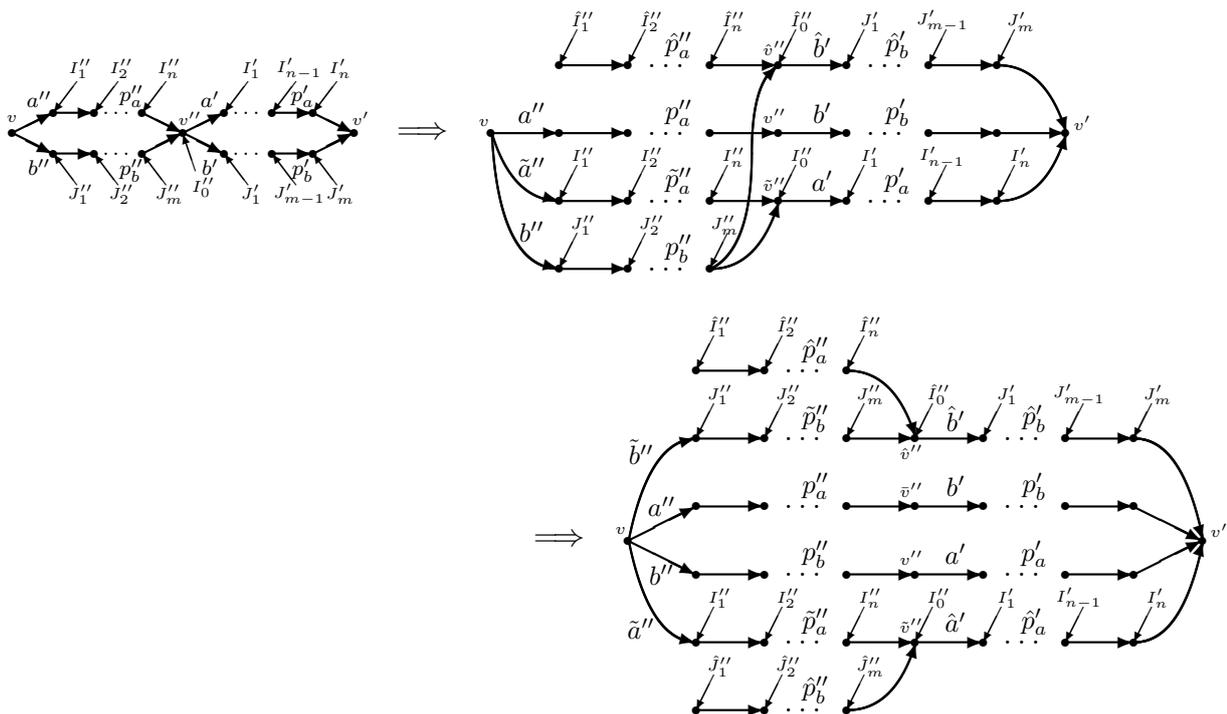


Abbildung 3.5: Isolieren der Pfade $a'' p''_a b' p'_b$ sowie $b'' p''_b a' p'_a$. Im ersten Schritt wird der Pfad $a'' p''_a b' p'_b$ durch eine Graphenumformung vom Typ 3 (vgl. Lemma 3.27) isoliert. Die gestrandeten Vertices (ohne auslaufende Kanten) wurden bereits entfernt. Im zweiten Schritt wird entsprechend der Pfad $b'' p''_b a' p'_a$ isoliert.

Mit $[a'' p''_a b' p'_b; b'' p''_b a' p'_a]$ hat man einen Doppelpfad zwischen v und v' , dessen beide Einzelpfade sich wie in Lemma 3.27 gezeigt nacheinander isolieren lassen (vgl. Abbildung 3.5).

Man erhält so aus G einen neuen, nach Entfernung aller gestrandeten Vertices³ ebenfalls stark zusammenhängenden Graphen \tilde{G} . Dieser enthält automatisch den in Abbildung 3.4 links gezeigten Teilgraphen (wobei $k := a''$ gesetzt werden kann). Die beschriebene Prozedur läßt sich wiederholen, wodurch nach $N - 1$ weiteren Schritten der Graph G' und die gewünschte endliche Kette kantendisjunkter, isolierter Doppelpfade entsteht.

Jedes Splitting entspricht einer topologischen Konjugation mit beschränkter Kodierlänge, so daß die durch die Graphen G und G' gegebenen Kantenshifts wie gefordert konjugiert zueinander sind. \square

Bemerkung: Die im Beweis beschriebene Konstruktion ist möglichst universell gehalten. Sie läßt sich für jeden stark zusammenhängenden Graphen mit abzählbar unendlicher Kantenmenge durchführen. Für viele Graphen kann sie jedoch durch geschickte Wahl der Kanten a, b bzw. der Loops vereinfacht werden.

Es sei an dieser Stelle noch darauf hingewiesen, daß die Aussage des Lemmas für eine un-

³Ein Vertex heißt gestrandet, wenn in ihn kein linksseitig-unendlicher Weg einmündet oder von ihm kein rechtsseitig-unendlicher Weg ausgeht. Nach Entfernen aller gestrandeten Vertices (und der an sie angrenzenden Kanten) bleibt der eindeutige, maximale essentielle Graph dieser Darstellung zurück.

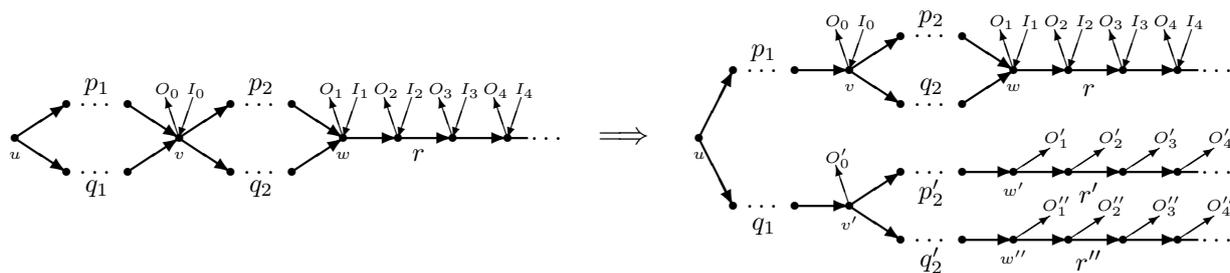


Abbildung 3.6: Doppeltes Aufspalten eines rechtsseitig-unendlichen, einfachen Weges, dem zwei isolierte Doppelpfade vorangehen. Zunächst werden in-Splittings am Vertex v und allen Vertices, entlang des Doppelpfades $[p_2; q_2]$ und des Weges r durchgeführt. Anschließend führt man weitere in-Splittings am Vertex w' und allen Vertices entlang der zuvor erzeugten, halbisolierten Kopie des Weges r durch.

endliche Anzahl von Doppelpfaden nicht länger gültig ist. Speziell sind die durch G und G' gegebenen Kantenshifts in diesem Fall nicht länger konjugiert.

Nach Beobachtung 3.6 und Definition 3.7 enthalten die Mengen $\text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{S}}}^b(\sigma)$ und $\text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$ mit einem Automorphismus φ stets seine gesamte Konjugationsklasse $\{\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1} \mid \phi \in \text{Aut}(\sigma)\}$. Die Eigenschaft ein sliding-Block-Code zu sein, bleibt allerdings unter (gruppentheoretischer) Konjugation mit einem beliebigen Automorphismus nicht erhalten. Deshalb ist die Gruppe $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ im allgemeinen echt in ihrer Konjugationsklasse $\text{Aut}_{\cup_X}^b(\sigma)$ enthalten. Entsprechend für $\text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma)$ (mit $\gamma : X \rightarrow Y$ topologische Konjugation, $Y \in \text{Pres}(X)$) und $\text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma)$.

Satz 3.10 *Zu jedem lokalkompakten, transitiven Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum gibt es eine Graphendarstellung $Y \in \text{Graph}(X)$ und eine topologische Konjugation $\gamma : X \rightarrow Y$, so daß $\text{Aut}_{\cap_Y}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma)$. Speziell existieren Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma)$ beschränkter Kodierlänge, deren Konjugationsklasse $\{\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1} \mid \phi \in \text{Aut}(\sigma)\}$ nicht vollständig in $\text{Aut}_{\gamma}^b(\sigma)$ liegt.*

Beweis: Nach Lemma 3.9 darf man bereits eine Darstellung des lokalkompakten, transitiven Markovshifts $X = X_G$ als Kantenshift auf einem Graphen $G = (V, E)$ als gegeben annehmen, bei der G zwei kantendisjunkte, hintereinanderliegende, isolierte Doppelpfade $[p_1; q_1]$ und $[p_2; q_2]$ mit p_1, p_2, q_1, q_2 isolierte Pfade und $\mathfrak{t}(p_1) = \mathfrak{t}(q_1) = \mathfrak{i}(p_2) = \mathfrak{i}(q_2)$ enthält. Seien $u := \mathfrak{i}(p_1) = \mathfrak{i}(q_1)$ und $v := \mathfrak{t}(p_1) = \mathfrak{t}(q_1) = \mathfrak{i}(p_2) = \mathfrak{i}(q_2)$. Ferner sei $r := r_1 r_2 r_3 \dots$ ($r_i \in E$, $\mathfrak{t}(r_i) = \mathfrak{i}(r_{i+1}) \forall i \in \mathbb{N}$) ein rechtsseitig-unendlicher, einfacher Weg in G , der am Vertex $w := \mathfrak{t}(p_2) = \mathfrak{t}(q_2) = \mathfrak{i}(r_1)$ startet und der (nach endlich vielen State-Splittings) knotendisjunkt zu p_1, p_2, q_1, q_2 gewählt werden kann (vgl. Abbildung 3.6 links).

Die gesuchte Darstellung $Y \in \text{Graph}(X)$ ergibt sich durch eine doppelte Folge von in-Splittings:

Zunächst führt man beginnend am Vertex v entlang des gesamten Doppelpfades $[p_2; q_2]$ und des rechtsseitig-unendlichen Weges r eine unendliche Folge von in-Splittings durch. Dabei

läßt sich erreichen, daß der neue, rechtsseitig-unendliche Weg $r' := r'_1 r'_2 r'_3 \dots$ halbisoliert ist, d.h. an allen Vertices $t(r'_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) endet nur die Kante r'_i selbst (am Vertex $w' := i(r'_1)$ enden genau die beiden letzten Kanten der Kopien p'_2 und q'_2). Der entstandene Graph enthält dann die rechtsseitig-unendlichen, bei u startenden Wege $p_1 p_2 r$, $p_1 q_2 r$ sowie $q_1 p'_2 r'$ und $q_1 q'_2 r'$. Durch eine weitere Folge von in-Splittings an den Vertices $i(r'_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) erreicht man schließlich die in Abbildung 3.6 rechts skizzierte Situation. Der entstandene, lokal-endliche, stark zusammenhängende Graph sei G' . Man überzeugt sich leicht, durch explizite Angabe eines shiftkommutierenden Homöomorphismus $\gamma : X \rightarrow Y$ zwischen den Kantenshifts $X = X_G$ und $Y = Y_{G'}$ der Graphen G und G' , daß diese tatsächlich topologisch konjugiert zueinander sind.

Sei $\tilde{\varphi}_1 : Y \rightarrow Y$ der involutorische Automorphismus, der in jedem Punkt aus Y die Blöcke p_2 und q_2 vertauscht. Offensichtlich kann dann $\tilde{\varphi}_1$ schon als 1-Block-Code realisiert werden (p_2 und q_2 sind isoliert). Damit ist $\varphi_1 := \gamma^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \gamma \in \text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$.

Konjugiert man $\tilde{\varphi}_1$ jedoch mit dem involutorischen Automorphismus $\tilde{\phi} : Y \rightarrow Y$, der in jedem Punkt alle Blöcke der Form $p_1 p_2 r_1 \dots r_{n-1} e_n$ mit $e_n \in O_n$ ($n \in \mathbb{N}$) durch $q_1 p'_2 r'_1 \dots r'_{n-1} e'_n$ und die rechtsseitig-unendlichen Strahlen $p_1 p_2 r$ durch $q_1 p'_2 r'$ sowie umgekehrt ersetzt, so hat $\tilde{\varphi}_2 := \tilde{\phi} \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \tilde{\phi}^{-1}$ keine beschränkte Kodierlänge. Das Abbildungsverhalten einer Kante r_n hängt von dem Block ab, der sich n Koordinaten weiter links befindet. Handelt es sich dabei um $p_1 q_2$, so wird r_n auf r'_n abgebildet, ansonsten bleibt r_n unverändert; $\tilde{\varphi}_2$ vertauscht gerade die Blöcke $p_1 q_2 r_1 \dots r_{n-1} e_n$ mit $q_1 p'_2 r'_1 \dots r'_{n-1} e'_n$ und die Strahlen $p_1 q_2 r$ mit $q_1 p'_2 r'$. Somit ist $\varphi_2 := \gamma^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2 \circ \gamma \notin \text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ und $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ enthält mit φ_1 nicht die gesamte Konjugationsklasse $\{\phi \circ \varphi_1 \circ \phi^{-1} \mid \phi \in \text{Aut}(\sigma)\}$ dieses Elements. Umgekehrt kann man den Automorphismus $\tilde{\varphi}_2$ wiederum mit $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}^{-1}$ konjugieren, um $\tilde{\varphi}_1$ zurückzuerhalten. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \gamma^{-1} \circ \tilde{\varphi}_1 \circ \gamma \in \text{Aut}_\gamma^b(\sigma) \quad \text{aber} \quad \varphi_1 \notin \text{Aut}_{\gamma \circ \phi}^b(\sigma) \quad \text{und} \\ \varphi_2 &= \gamma^{-1} \circ \tilde{\varphi}_2 \circ \gamma \notin \text{Aut}_\gamma^b(\sigma) \quad \text{aber} \quad \varphi_2 \in \text{Aut}_{\gamma \circ \phi}^b(\sigma) \quad \text{mit} \quad \phi := \gamma^{-1} \circ \tilde{\phi} \circ \gamma \in \text{Aut}(\sigma) \end{aligned}$$

und man hat die geforderte Echtheit der Inklusionen $\text{Aut}_{\cap Y}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_\gamma^b(\sigma) \cap \text{Aut}_{\gamma \circ \phi}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_\gamma^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_\gamma^b(\sigma) \cup \text{Aut}_{\gamma \circ \phi}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\cup Y}^b(\sigma)$ nachgewiesen. \square

Bemerkung: Der Beweis zu Satz 3.10 garantiert zu jedem transitiven, lokalkompakten Markovshift (X, σ) die Existenz von Graphendarstellungen $Y, Y' \in \text{Graph}(X)$, so daß die topologische Konjugation $\gamma : Y \rightarrow Y'$ ein sliding-Block-Code ist, während ihr Inverses unbeschränkte Kodierlänge hat. Man betrachte hierzu eine unendliche Folge von in-Splittings entlang eines rechtsseitig-unendlichen, einfachen Weges, dem eine Verzweigung (z.B. ein Doppelpfad) vorangeht. Die hierdurch gegebene Konjugation ist nicht kodierlängenbeschränkt, ihr Inverses ist jedoch ein 1-Block-Code.

Korollar 3.11 *Für alle lokalkompakten, transitiven Markovshifts (X, σ) gilt insbesondere:* $\text{Aut}_\cap^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\cap \mathfrak{G}}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_{\cup \mathfrak{G}}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_\cup^b(\sigma)$.

Beweis: Satz 3.10 zeigt $\text{Aut}_{\cap \mathfrak{G}}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\cap Y}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_{\cup Y}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\cup \mathfrak{G}}^b(\sigma)$ für eine spezielle Graphendarstellung $Y \in \text{Graph}(X)$. \square

Damit haben wir gezeigt, daß im allgemeinen die Untergruppe kodierlängenbeschränkter Automorphismen von der Wahl der topologischen Konjugation in eine feste Darstellung $Y \in \text{Pres}(X)$ abhängt, daß also für topologische Konjugationen $\gamma_1, \gamma_2 : X \rightarrow Y$ zwar stets $\text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma) \cong \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$, aber üblicherweise $\text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma) \neq \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$ gilt. Darüber hinaus gibt es verschiedene Darstellungen eines Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, in denen ein Automorphismus abwechselnd beschränkte und unbeschränkte Kodierlänge aufweist.

Beobachtung 3.12 *Zu jedem lokalkompakten, transitiven Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge existieren Graphendarstellungen $Y_1, Y_2 \in \text{Graph}(X)$ und topologische Konjugationen $\gamma_1 : X \rightarrow Y_1, \gamma_2 : X \rightarrow Y_2$, so daß $\text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma) \neq \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$. Die Untergruppe der kodierlängenbeschränkten Automorphismen hängt also echt von der gewählten Darstellung ab.*

Beweis: Sei $Y_1 \in \text{Graph}(X)$ eine Graphendarstellung mit zwei hintereinanderliegenden, isolierten Doppelpfaden $[p_1; q_1]$ und $[p_2; q_2]$ mit p_1, p_2, q_1, q_2 isolierte Pfade mit $v := \mathbf{t}(p_1) = \mathbf{t}(q_1) = \mathbf{i}(p_2) = \mathbf{i}(q_2)$. Eine solche existiert nach Lemma 3.9. OE betrage der Ein- und Ausgangsgrad am Vertex v je genau 2, i.e. nur die beiden Endkanten von p_1, q_1 münden in v und nur die beiden Startkanten von p_2, q_2 verlassen v . Dies läßt sich vorab durch State-Splittings erreichen. $\gamma_1 : X \rightarrow Y_1$ sei die entsprechende topologische Konjugation. Offensichtlich besitzt der Automorphismus $\hat{\varphi} := \gamma_1 \circ \varphi \circ \gamma_1^{-1}$, der in jedem Punkt aus Y_1 alle Blöcke $p_1 p_2$ durch $p_1 q_2$ sowie umgekehrt ersetzt und sonst keine Wirkung hat, die Kodierlänge $2|p_1 p_2| - 1$. Es gilt also $\varphi \in \text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma)$.

Ähnlich wie im Beweis zu Satz 3.10 erzeugt man durch eine unendliche Anzahl von State-Splittings eine weitere Graphendarstellung $Y_2 \in \text{Graph}(X)$ wie folgt:

Zunächst führt man an allen Vertices entlang der beiden Pfade des Doppelpfades $[p_2; q_2]$ in-Splittings durch, so daß der neu entstehende Graph die gleichlangen Pfade $p_1 p_2, p_1 q_2, q_1 p'_2$ und $q_1 q'_2$ mit $u := \mathbf{i}(p_1 p_2) = \mathbf{i}(p_1 q_2) = \mathbf{i}(q_1 p'_2) = \mathbf{i}(q_1 q'_2)$, $v := \mathbf{t}(p_1) = \mathbf{i}(p_2) = \mathbf{i}(q_2)$, $v' := \mathbf{t}(q_1) = \mathbf{i}(p'_2) = \mathbf{i}(q'_2)$ und $w := \mathbf{t}(p_1 p_2) = \mathbf{t}(p_1 q_2) = \mathbf{t}(q_1 p'_2) = \mathbf{t}(q_1 q'_2)$ enthält (p'_2, q'_2 bezeichne die neu erzeugten Kopien von p_2 bzw. q_2).

Nun wählt man einen einfachen, rechtsseitig-unendlichen, bei w startenden Weg $r := r_1 r_2 r_3 \dots$, der als knotendisjunkt zu $p_1, p_2, p'_2, q_1, q_2, q'_2$ angenommen werden darf. Eine unendliche Folge von in-Splittings entlang aller Vertices dieses Weges ergibt dann die Darstellung Y_2 . Dabei partitioniert man die 4 am Vertex w einlaufenden Endkanten von p_2, p'_2, q_2, q'_2 in eine einelementige und eine dreielementige Menge (mögliche weitere bei w einlaufende Kanten schlägt man der einelementigen Menge zu) und erreicht so, daß der zu Y_2 gehörende Graph die rechtsseitig-unendlichen Wege $p_1 p_2 r, p_1 q_2 r', q_1 p'_2 r'$ und $q_1 q'_2 r'$ mit der halbisierten Kopie $r' := r'_1 r'_2 r'_3 \dots$ der Weges r enthält. Sei $\tilde{\gamma} : Y_1 \rightarrow Y_2$ die durch die Splittings gegebene topologische Konjugation, so setzt man $\gamma_2 := \tilde{\gamma} \circ \gamma_1 : X \rightarrow Y_2$.

Betrachtet man den Automorphismus $\tilde{\varphi} := \gamma_2 \circ \varphi \circ \gamma_2^{-1}$, so hängt die Abbildungsvorschrift für eine Kante r'_n ($n \in \mathbb{N}$) von dem n Koordinaten weiter links stehenden Symbol ab. Damit hat $\tilde{\varphi}$ keine beschränkte Kodierlänge, d.h. $\varphi \notin \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$. \square

Im folgenden wollen wir noch zeigen, daß die Potenzen der Shiftabbildung nicht nur als alleinige Elemente des Zentrums der Automorphismengruppe (vgl. Abschnitt 2.4) eine gewisse Ausnahmestellung innehaben. Vielmehr spielen diese Abbildungen auch im Kontext der kodierlängenbeschränkten Automorphismen eine ausgezeichnete Rolle. Offensichtlich hat die Potenz σ^i ($i \in \mathbb{Z}$) in jeder Darstellung des Markovshifts (X, σ) die Kodierlänge $2|i| + 1$. Es gilt daher: $\langle \sigma \rangle \subseteq \text{Aut}_{\cap}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\cap_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma) \subseteq \dots$

Schon die Suche nach weiteren Automorphismen, die zumindest in allen Graphendarstellungen eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge beschränkte Kodierlänge aufweisen, scheitert. Damit fallen die Untergruppen $\text{Aut}_{\cap}^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cap_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$ und $\mathfrak{Z} = \langle \sigma \rangle$ zusammen. Speziell ist $\text{Aut}_{\cap}^b(\sigma) = \text{Aut}_{\cap_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$ wieder unter gruppentheoretischer Konjugation mit Elementen aus $\text{Aut}(\sigma)$ abgeschlossen.

Lemma 3.13 *Für jede topologische Konjugation $\gamma : X \rightarrow Y$ zwischen zwei transitiven, lokalkompakten Markovshifts (X, σ_X) und (Y, σ_Y) über abzählbar unendlichen Alphabeten \mathcal{A}_X bzw. \mathcal{A}_Y und jeden Punkt $x \in X$ gilt:*

Der rechtsseitig-unendliche Strahl $x_{[N, \infty)}$ ($N \in \mathbb{Z}$) enthält nur endlich viele verschiedene Symbole aus \mathcal{A}_X genau dann, wenn der rechtsseitig-unendliche Strahl $(\gamma(x))_{[N, \infty)}$ nur endlich viele verschiedene Symbole aus \mathcal{A}_Y enthält. $x_{[N, \infty)}$ sieht genau dann kein Symbol aus \mathcal{A}_X unendlich oft, wenn $(\gamma(x))_{[N, \infty)}$ kein Symbol aus \mathcal{A}_Y unendlich oft sieht.

Entsprechendes gilt für die linksseitig-unendlichen Strahlen $x_{(-\infty, N]}$ und $(\gamma(x))_{(-\infty, N]}$.

Beweis: Angenommen der rechtsseitig-unendliche Strahl $x_{[N, \infty)}$ sieht nur endlich viele verschiedene Symbole, i.e. die Symbolmenge $A := \{x_n \mid n \geq N\} \subsetneq \mathcal{A}_X$ ist endlich. Dann gilt für alle $n \geq N$: $\sigma_X^n(x) \in \bigcup_{a \in A} {}_0[a] \subsetneq X$ kompakt. Aufgrund der Stetigkeit der topologischen Konjugation γ ist auch die Menge $\gamma(\bigcup_{a \in A} {}_0[a]) \subsetneq Y$ kompakt. Sie kann also durch endlich viele Nullzylinder ${}_0[a']$ mit $a' \in A' \subsetneq \mathcal{A}_Y$ endlich überdeckt werden.

Man erhält dann:

$$\forall n \geq N : \quad \sigma_Y^n(\gamma(x)) = \gamma(\sigma_X^n(x)) \in \gamma\left(\bigcup_{a \in A} {}_0[a]\right) \subseteq \bigcup_{a' \in A'} {}_0[a']$$

also wie gefordert: $(\gamma(x))_n \in A' \forall n \geq N$

Angenommen der rechtsseitig-unendliche Strahl $x_{[N, \infty)}$ sieht ein Symbol $a \in \mathcal{A}_X$ unendlich oft, d.h. für unendlich viele $n \geq N$ gilt: $\sigma_X^n(x) \in {}_0[a] \subsetneq X$. Wie zuvor ist $\gamma({}_0[a]) \subsetneq Y$ kompakt und wird daher durch endlich viele Nullzylinder ${}_0[a']$ mit $a' \in A' \subsetneq \mathcal{A}_Y$ endlich überdeckt. Für alle $n \geq N$ wie oben erhält man: $\sigma_Y^n(\gamma(x)) = \gamma(\sigma_X^n(x)) \in \gamma({}_0[a]) \subseteq \bigcup_{a' \in A'} {}_0[a']$. Nach Schubfachprinzip gibt es somit mindestens ein Symbol $a' \in A'$, das unendlich oft in $(\gamma(x))_{[N, \infty)}$ auftritt.

Für die Umkehrung der beiden Aussagen vertausche man die Rollen von X und Y und betrachte γ^{-1} anstelle von γ . \square

Bemerkung: In der Sprache der Kantenshifts bedeutet dies: Sind $X = X_G$ und $Y = Y_{G'}$ durch stark zusammenhängende, lokal-endliche Graphen G bzw. G' dargestellt, so verläßt ein

rechtsseitig-unendlicher Weg $x_{[N,\infty)}$ ($N \in \mathbb{Z}$) jeden endlichen Teilgraphen in G genau dann, wenn der rechtsseitig-unendliche Weg $(\gamma(x))_{[N,\infty)}$ jeden endlichen Teilgraphen in G' verläßt. Ein rechtsseitig-unendlicher Weg $x_{[N,\infty)}$ kehrt genau dann unendlich oft zu einem bestimmten Vertex zurück, wenn dies für den Weg $(\gamma(x))_{[N,\infty)}$ der Fall ist. Analog für linksseitig-unendliche Wege.

Insbesondere sind die Aussagen des Lemmas 3.13 für Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ anstelle von γ gültig.

Satz 3.14 *Für jeden transitiven, lokalkompakten Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum gilt $\text{Aut}_{\text{fin}}^b(\sigma) = \langle \sigma \rangle$. Jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$, der selbst keine Potenz der Shiftabbildung ist, hat in einer speziellen Graphendarstellung $Y_\varphi \in \text{Graph}(X)$ unbeschränkte Kodierlänge.*

Beweis: Offensichtlich sind die Shiftabbildung und ihr Inverses in jeder Darstellung des Markovshifts sliding-Block-Codes mit Vorschau und Gedächtnis 1. Damit haben zugleich alle Potenzen des Shifts σ^i ($i \in \mathbb{Z}$) beschränkte Kodierlänge und man erhält $\langle \sigma \rangle \subseteq \text{Aut}_{\text{fin}}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\text{fin}}^b(\sigma)$.

(X, σ) sei bereits als Kantenshift auf dem Graphen $G = (V, E)$ gegeben. Für Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$, die bezüglich dieser Darstellung unbeschränkte Kodierlänge haben, setzt man daher $Y_\varphi := X$ und hat nichts zu zeigen. Sei nun $\varphi \in \text{Aut}_X^b(\sigma) \setminus \langle \sigma \rangle$ ein kodierlängenbeschränkter Automorphismus, der keine Potenz der Shiftabbildung ist. Nach Lemma 2.29 gibt es in G zwei verschiedene Loops $l_1 \neq l_2$ gleicher Länge $N := |l_1| = |l_2| \in \mathbb{N}$, so daß $\varphi(l_1^\infty) = l_2^\infty$ gilt (diese Loops entsprechen zwei endlichen σ -Orbits, die durch φ nicht in sich überführt werden).

OE darf man annehmen, daß die beiden Loops l_1 und l_2 in G bereits kantendisjunkt sind und daß bei $v := \mathbf{i}(l_1) = \mathbf{t}(l_1)$ und $w := \mathbf{i}(l_2) = \mathbf{t}(l_2)$ mindestens je eine nicht zu l_1 und l_2 gehörende ein- und auslaufende Kante existiert. Beides läßt sich durch eine endliche Anzahl von State-Splittings an den Vertices der Loops l_1 und l_2 erreichen. Weiterhin existiert in G ein bei v startender, rechtsseitig-unendlicher, einfacher Weg $r := r_1 r_2 r_3 \dots$ ($r_i \in E$, $\mathbf{t}(r_i) = \mathbf{i}(r_{i+1}) \forall i \in \mathbb{N}$), der durch weitere State-Splittings sogar als bis auf den Vertex $v = \mathbf{i}(r_1)$ knotendisjunkt zu l_1 und l_2 angenommen werden darf.

Sei K eine Kodierlänge für φ und sei $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $2(k-1)N \geq K-1$. Wegen $\varphi(l_1^\infty) = l_2^\infty$ hat das Bild des Punktes $x := l_1^\infty \cdot l_1^k r \in X$ unter φ die Gestalt $\varphi(x) = l_2^\infty \cdot l_2^n s \in X$ mit $n \in \mathbb{N}$ und einem am Vertex $\mathbf{i}(s_1) = w$ startenden, rechtsseitig-unendlichen Weg $s := s_1 s_2 s_3 \dots$ ($s_i \in E$, $\mathbf{t}(s_i) = \mathbf{i}(s_{i+1}) \forall i \in \mathbb{N}$) mit $s_1 s_2 \dots s_N \neq l_2$, der wie r schließlich jeden endlichen Teilgraphen in G verläßt, i.e. jeden Vertex (bzw. jede Kante) in G höchstens endlich oft sieht (vgl. Lemma 3.13).

Weiterhin seien p, q zwei nichtleere, minimale Pfade in G mit $\mathbf{t}(p) = v$ bzw. $\mathbf{t}(q) = w$, die nicht nur Kanten aus l_1 und l_2 enthalten und $m \in \mathbb{N}$, so daß der Zylinder ${}_{-kN-|p|}[p l_1^k l_1^k r]$ einen Punkt $y \in X$ enthält, der unter φ in den Zylinder ${}_{-mN-|q|}[q l_2^m l_2^n s]$ abgebildet wird.

Ausgehend von G konstruiert man durch eine Reihe von State-Splittings einen Graphen G' , dessen Kantenshift die gesuchte Darstellung Y_φ sein wird:

Zunächst wickelt man, ähnlich einer mehrfachen Graphenumformung vom Typ 2 aus Lemma 3.27, den Loop l_2 $(m+n+1)$ -mal ab, i.e. man führt $(m+n+1)$ -fach out-Splittings an allen

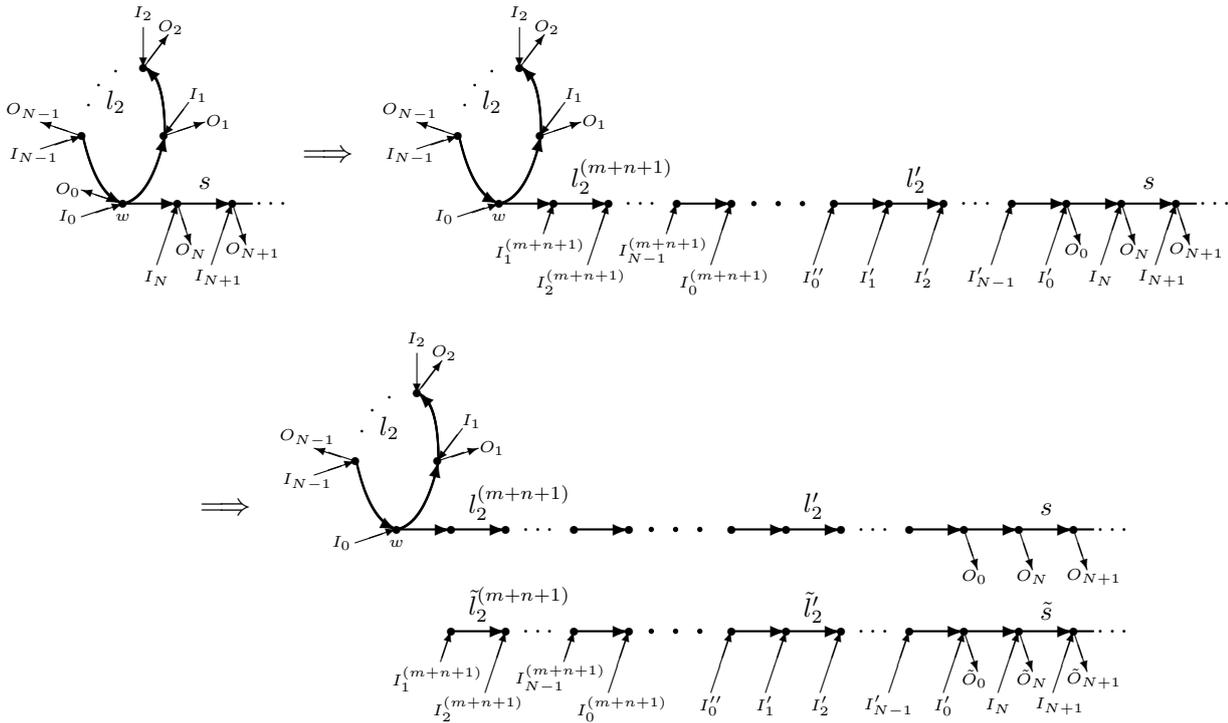


Abbildung 3.7: Mehrfaches Auseinanderziehen eines (nicht-einfachen) Loops und anschließendes Aufspalten eines einseitig-unendlichen Weges. Analog zu Abbildung 3.4 wird der Loop l_2 durch out-Splittings am Vertex w sowie an den übrigen Vertices des Loops (entgegen der Looprichtung) insgesamt $(m+n+1)$ -fach auseinandergezogen. Im zweiten Schritt führt man eine unendliche Folge von in-Splittings entlang aller Vertices der Kopien $l_2^{(m+n+1)}, \dots, l_2''$ des ursprünglichen Loops sowie entlang des rechtsseitig-unendlichen Weges s aus (Die Folge der in-Splittings beginnt am ersten Vertex rechts von w . Der Kopie $\tilde{l}_2^{(m+n+1)}$ fehlt daher genau genommen die erste Kante.).

Vertices entlang l_2 durch. Hierdurch erreicht man die in Abbildung 3.7 mitte skizzierte Konstellation. Man überzeugt sich, daß dies für beliebige (nicht-einfache) Loops l_2 funktioniert, und daß der Kantenshift auf dem entstehenden Graphen topologisch konjugiert zu (X, σ) ist.

Anschließend isoliert man den Pfad $l_2^{(m+n+1)} \dots l_2'' l_2''$ durch in-Splittings an den neu entstandenen Vertices und erreicht durch eine unendliche Folge weiterer in-Splittings entlang des Weges s die in Abbildung 3.7 unten gezeigte Situation. Der so erzeugte Graph sei G' . Nach Voraussetzung verläßt s jeden endlichen Teilgraphen in G und betritt jeden Vertex in G höchstens endlich oft. Damit ist der Kantenshift auf G' noch immer eine Graphendarstellung von X . Die durch die ausgeführten State-Splittings induzierte topologische Konjugation sei $\gamma : X \rightarrow Y_{G'}$.

Tatsächlich hat φ bezüglich der Darstellung $Y_\varphi := Y_{G'}$ keine beschränkte Kodierlänge, d.h. $\varphi \notin \text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ und somit $\varphi \notin \text{Aut}_{\cap_{\mathbb{N}}}^b(\sigma)$. Um dies einzusehen, betrachte man das Abbildungsverhalten einer Kante r_i ($i \in \mathbb{N}$) aus dem Weg r . Da der Punkt $\gamma(x) \in Y_\varphi$ unter φ auf $l_2 \infty l_2^{(m+n+1)} \dots l_2^{(n+1)} \cdot l_2^{(n)} \dots l_2'' l_2'' s \in Y_\varphi$, der Punkt $\gamma(y) \in Y_\varphi$ aber in den Zylinder ${}_{-mN}[\tilde{l}_2^{(m+n)} \dots \tilde{l}_2'' \tilde{l}_2'' s]$ abgebildet wird, ist die Kodierlänge jeder Kante r_i größer als

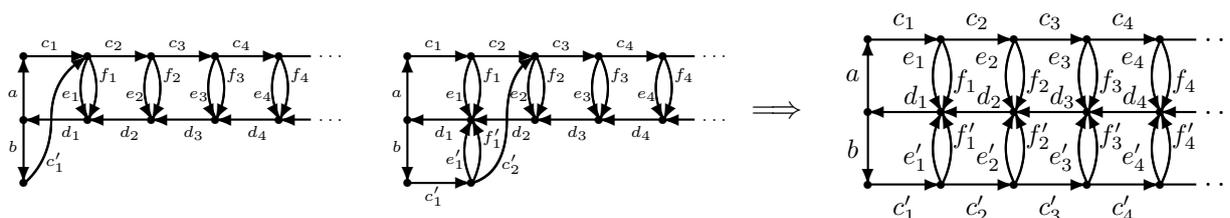


Abbildung 3.8: Durch eine Folge von in-Splittings entsteht aus der Graphendarstellung in Abbildung 3.1 eine konjugierte Darstellung des entsprechenden Kantenshifts. Gezeigt ist der Graph nach dem ersten bzw. zweiten Splitting (am Vertex $i(c_1)$ bzw. $i(c_2)$) sowie der durch die unendliche Folge von Splittings entstehende Graph.

$2(i + 2kN)$ und wächst daher mit $i \in \mathbb{N}$ über jede Schranke. \square

Bisher benutzten wir State-Splittings, um aus einem sliding-Block-Automorphismus einen Automorphismus von unbeschränkter Kodierlänge zu erhalten. Das folgende Beispiel zeigt, daß auch die Umkehrung hiervon möglich ist:

Beispiel 3.15 Sei (X, σ) der transitive, lokalkompakte Kantenshift auf dem in Abbildung 3.1 gezeigten Graphen und sei $\varphi : X \rightarrow X$ der im Beispiel 3.1 definierte Automorphismus. Dann existieren Darstellungen $Y_1, Y_2 \in \text{Graph}(X)$ und topologische Konjugationen $\gamma_1 : X \rightarrow Y_1$, $\gamma_2 : X \rightarrow Y_2$, so daß $\varphi \notin \text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma)$ aber $\varphi \in \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$.

Bereits in Beispiel 3.1 wurde gezeigt, daß $\varphi \notin \text{Aut}_X^b(\sigma)$ ist. Wählt man daher als Darstellung Y_1 den Kantenshift selbst und setzt $\gamma_1 := \text{Id}_X$, so hat man $\varphi \notin \text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma)$ bereits gezeigt. Gesucht ist daher eine weitere, zu X topologisch konjugierte, Graphendarstellung Y_2 mit zugehöriger Konjugation $\gamma_2 : X \rightarrow Y_2$, so daß die Kodierlängen von $\gamma_2 \circ \varphi \circ \gamma_2^{-1}$ und $\gamma_2 \circ \varphi^{-1} \circ \gamma_2^{-1}$ beschränkt sind.

Eine solche Darstellung erhält man aus dem Graphen der Abbildung 3.1 durch eine Folge von in-Splittings, die sukzessive an den Vertices $i(c_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) durchgeführt werden. Die Folge der Splittings und der daraus resultierende Graph ist in Abbildung 3.8 skizziert.

Die Konjugation zwischen den Darstellungen Y_2 und X wird durch das Weglassen der Striche an den Symbolen c'_i, e'_i und f'_i ($i \in \mathbb{N}$) gegeben:

$$\gamma : Y_2 \rightarrow X \quad (\gamma(y))_0 := \begin{cases} y_0 & \text{falls } y_0 \in \{a, b\} \dot{\cup} \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\} \\ c_i & y_0 \in \{c_i, c'_i\} \text{ mit } i \in \mathbb{N} \\ e_i & y_0 \in \{e_i, e'_i\} \\ f_i & y_0 \in \{f_i, f'_i\} \end{cases} \quad \sigma_X^n(\gamma(y)) = \gamma(\sigma_{Y_2}^n(y)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Damit ist γ ein 1-Block-Code, also shiftkommutierend und (gleichmäßig) stetig. Zwei Punkte $y, y' \in Y_2$, die unter γ auf den gleichen Bildpunkt $\gamma(y) = \gamma(y') \in X$ abgebildet werden, können sich nur durch das Vorhandensein/Fehlen von Strichen unterscheiden. Das für y und y' identische $\{a, b\}$ -Skelett verbietet dies aber und erzwingt bereits die Injektivität von γ . Sei $x \in X$ ein beliebiger Punkt, so läßt sich durch Auffüllen des $\{a, b\}$ -Skeletts dieses Punk-

tes durch passende gestrichene bzw. ungestrichene Symbole ein zweiseitig-unendlicher Weg $y \in Y_2$ in dem gesplitteten Graphen konstruieren, für den gilt: $\gamma(y) = x$. γ ist damit eine Bijektion, deren Umkehrabbildung formal durch

$$(\gamma^{-1}(x))_0 := \begin{cases} x_0 & \text{falls } x_0 \in \{a, b\} \dot{\cup} \{d_i \mid i \in \mathbb{N}\} \\ c_i & x \in {}_{-i}[a c_1 \dots c_i] \text{ mit } i \in \mathbb{N} \\ c'_i & x \in {}_{-i}[b c_1 \dots c_i] \\ e_i & x \in {}_{-(i+1)}[a c_1 \dots c_i e_i] \\ e'_i & x \in {}_{-(i+1)}[b c_1 \dots c_i e_i] \\ f_i & x \in {}_{-(i+1)}[a c_1 \dots c_i f_i] \\ f'_i & x \in {}_{-(i+1)}[b c_1 \dots c_i f_i] \end{cases} \quad \sigma_{Y_2}^n(\gamma^{-1}(x)) = \gamma^{-1}(\sigma_X^n(x)) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

gegeben ist. Da dies auch die Stetigkeit von γ^{-1} zeigt, gilt $Y_2 \in \text{Graph}(X)$.

Bezüglich der Darstellung Y_2 und der Konjugation $\gamma_2 := \gamma^{-1}$ ist $\tilde{\varphi} := \gamma^{-1} \circ \varphi \circ \gamma$ aber ein sliding-Block-Automorphismus, der einen Punkt scannt und einzig jeden Block $c_i e_i$ durch $c_i f_i$ sowie jeden Block $c_i f_i$ durch $c_i e_i$ ersetzt. Da zudem $\tilde{\varphi}$ eine Involution ist, hat auch $\tilde{\varphi}^{-1}$ Kodierlänge 3, so daß $\varphi \in \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$.

Bemerkung: Das in obigen Beweisen und Beispielen benutzte Verfahren, durch eine unendliche Folge von State-Splittings aus einer Graphendarstellung eines Markovshifts eine neue Darstellung zu gewinnen, funktioniert in vielen, aber nicht allen Fällen. Speziell ergibt ein unendliches Produkt elementarer Splittings oder Amalgamierungen nicht immer eine Konjugation, so daß nachzuprüfen bleibt, ob die erzeugte Darstellung konjugiert zum ursprünglichen System ist. Trotz dieser Schwäche ist die Methode häufig einsetzbar, um zu einem Automorphismus unbeschränkter Kodierlänge eine Graphendarstellung zu konstruieren, in der dieser, zusammen mit seinem Inversen, zu einem sliding-Block-Code wird.

Wir haben gesehen, daß sich zu jedem topologischen Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum in $\text{Aut}(\sigma)$ eine durch Inklusion partiell geordnete, in ihrer Gesamtheit konjugationsinvariante Hierarchie von Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen ergibt. Die Aut^b -Hierarchie ist auf der nächsten Seite schematisch dargestellt (Abbildung 3.9).

Jede topologische Konjugation führt die linke und rechte Hälfte dieser Struktur in sich über; bewirkt je eine Permutation in den Ebenen $\text{Aut}_{\cap x_i}^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cup x_i}^b(\sigma)$ bzw. $\text{Aut}_{\cap y_i}^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cup y_i}^b(\sigma)$ und bildet die Mengen $\text{Aut}_{\cap}^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cap_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$ und $\text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$ als Invarianten auf sich ab.

Die unteren Schichten der Aut^b -Hierarchie fallen nach Satz 3.14 zusammen, während am oberen Ende zumindest für transitive, lokalkompakte Markovshifts mit der Eigenschaft (BNPC) (siehe Abschnitt 3.2) eine echte Inklusion erhalten bleibt.

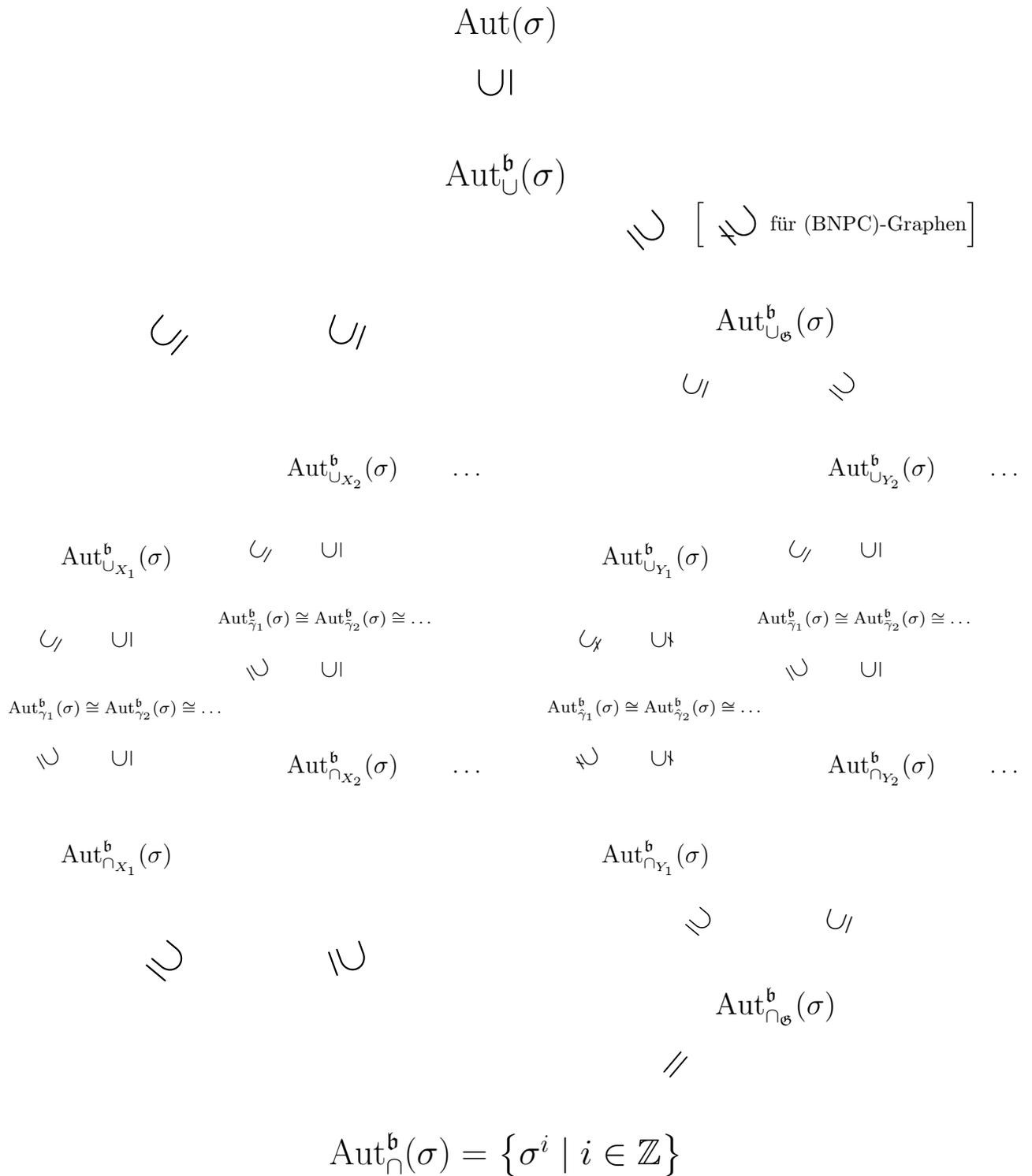


Abbildung 3.9: Die Aut^b -Hierarchie. Dabei seien $X_1, X_2, \dots \in \text{Pres}(X) \setminus \text{Graph}(X)$ und $Y_1, Y_2, \dots \in \text{Graph}(X)$. Die Existenz einer Graphendarstellung Y_1 wird durch Satz 3.10 garantiert.

3.2 Umkodierbarkeit zu sliding-Block-Codes

Am Anfang dieses Abschnitts steht die wichtige Beobachtung, daß bei topologischen Konjugationen zwischen lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge jedes Symbol für sich eine beschränkte Kodierlänge aufweist. Diese Eigenschaft wird in fast allen Beweisen der restlichen Arbeit eine entscheidende Rolle spielen.

Durch Konstruktion eines Beispiels zeigen wir anschließend, daß im allgemeinen nicht jeder Automorphismus durch Graphenumformungen (State-Splittings, -Amalgamierungen etc.) zu einem sliding-Block-Code umcodiert werden kann. Anders als bei SFTs ist es deshalb nicht möglich, zu jedem Automorphismus endlicher Ordnung⁴ eines lokalkompakten, transitiven Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum eine geeignete Graphendarstellung zu wählen, in der dieser zu einem 1-Block-Code wird. Nach einigen technischen Vorbereitungen verallgemeinern wir dieses Resultat auf eine ganze Klasse lokalkompakter Markovshifts. Für diese existieren je überabzählbar viele Automorphismen endlicher Ordnung, die in keiner Graphendarstellung beschränkte Kodierlänge haben.

Andererseits läßt sich zu jedem Automorphismus endlicher Ordnung eines beliebigen topologischen Markovshifts eine spezielle (Nicht-Graphen-)Darstellung angeben, in der dieser ein 1-Block-Automorphismus ist. Die Menge $\text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$ enthält daher alle Automorphismen der Form $\varphi \circ \sigma^i$ ($\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ endlicher Ordnung, $i \in \mathbb{Z}$).

Beide Ergebnisse zusammen erzwingen für die vorgestellte Klasse von Markovshifts die Echtheit der Inklusion $\text{Aut}_{\cup_{\sigma}}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$, wobei die Kardinalität der Differenzmenge überabzählbar ist.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Bemerkung, daß die Untergruppe der kodierlängenbeschränkten Automorphismen in keiner Darstellung eines lokalkompakten Markovshifts besonders klein oder einfach strukturiert ist. Selbst in Darstellungen ohne synchronisierende Blöcke lassen sich mit der Markermethode viele sliding-Block-Automorphismen erzeugen.

Im letzten Abschnitt haben wir ausgiebig nicht kodierlängenbeschränkte, stetige, shiftkommutierende Abbildungen zwischen topologischen Markovshifts untersucht. Als notwendige Bedingung für deren Auftreten hatten wir die Nichtkompaktheit ihrer Bild- bzw. Urbildmengen identifiziert. Hält man an der Lokalkompaktheit dieser topologischen Räume fest, so liefert folgende Überlegung die Existenz lokaler Kodierlängen, i.e. die Existenz eines beschränkten Kodierfensters (Gedächtnis und Vorschau) für jedes Einzelsymbol der Alphabetsmenge und damit für jedes endliche Wort:

Seien (X, σ_X) und (Y, σ_Y) lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge und $\phi : X \rightarrow Y$ eine stetige, shiftkommutierende Abbildung. Aufgrund der Stetigkeit von ϕ ist das Urbild jedes dünnen Zylinders $C \subsetneq Y$ zugleich offen und abgeschlossen in X . Der Schnitt $\phi^{-1}(C) \cap D$ ($D \subsetneq X$ dünner Zylinder) ist als abgeschlossene Teilmenge des Kompaktums D selbst kompakt und läßt sich daher durch endlich viele dünne Zylinder fester Länge und einheitlicher Startkoordinate überdecken. Zu beliebig vorgegebenen Zylindern C, D hat man stets eine bedingte lokale Kodierlänge:

$$\exists s_{C,D}, t_{C,D} \in \mathbb{Z} : \phi^{-1}(C) \cap D = \bigcup_{x \in \phi^{-1}(C) \cap D} s_{C,D} [x_{s_{C,D}} \cdots x_{t_{C,D}}]$$

⁴Unser (Gegen-)Beispiel ist eine Involution.

Ist ϕ zusätzlich invertierbar mit ϕ^{-1} stetig (d.h. ϕ eine topologische Konjugation oder ein Automorphismus), so ist $\phi^{-1}(C) \subsetneq X$ bereits kompakt und jeder Zylinder C hat eine (unbedingte) lokale Kodierlänge:

$$\begin{aligned} \exists s_C, t_C \in \mathbb{Z} : x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \phi^{-1}(C) &\Leftrightarrow s_C[x_{s_C} \dots x_{t_C}] \subseteq \phi^{-1}(C) \\ \text{bzw. } \phi^{-1}(C) &= \bigcup_{x \in \phi^{-1}(C)} s_C[x_{s_C} \dots x_{t_C}] \end{aligned} \quad (\text{CL})$$

Insbesondere gilt dies für Nullzylinder $C := {}_0[e] \subsetneq Y$. Jedes Symbol $e \in \mathcal{A}_Y$ hat damit eine beschränkte Kodierlänge, die aber von diesem Symbol abhängig ist und mit variierendem e über jede gegebene Schranke anwachsen kann. Die Existenz topologischer Konjugationen und Automorphismen mit unbeschränkter Kodierlänge ist also im lokalkompakten Fall eine direkte Folge der Unendlichkeit des Alphabets.

Nach der Umcodierung unseres Beispiels 3.15 am Ende des letzten Abschnitts könnte man vermuten, daß jeder Automorphismus eines topologischen Markovshifts in einer geeigneten Graphendarstellung bereits beschränkte Kodierlänge hat, so daß auch die oberen Schichten der Aut^b -Hierarchie zusammenfallen.

Folgendes Beispiel 3.16 zeigt jedoch, daß sogar involutorische Automorphismen eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts existieren können, die in jeder Graphendarstellung unbeschränkte Kodierlänge aufweisen.

Beispiel 3.16 Gegeben sei der Graph aus Abbildung 3.1 mit einer zusätzlichen Selbstschleife l am Vertex $i(c_1) = \mathbf{t}(a) = \mathbf{t}(b)$.⁵ Der entsprechende Kantenshift sei X . Wie zuvor definiert man eine stetige, shiftkommutierende Involution $\varphi : X \rightarrow X$, die einen Punkt aus X scant und jeden Block $al^n c_1 \dots c_n e_n$ durch $al^n c_1 \dots c_n f_n$ ($n \in \mathbb{N}$), sowie umgekehrt ersetzt. Man überzeugt sich leicht, daß tatsächlich $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ gilt und daß φ bezüglich der gewählten Graphendarstellung keine beschränkte Kodierlänge hat.

Behauptung: Sei $Y \in \text{Graph}(X)$ und sei $\gamma : X \rightarrow Y$ eine beliebige topologische Konjugation, die die beiden Darstellungen ineinander überführt. Dann hat auch der konjugierte Automorphismus $\tilde{\varphi} := \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1}$ unbeschränkte Kodierlänge.

Beweis: Mit $l^\infty \in X$ ist auch der konjugierte Punkt $\gamma(l^\infty)$ ein Fixpunkt des Shifts. Dieser sei durch $\tilde{l}^\infty := \gamma(l^\infty)$ bezeichnet. Gemäß (CL) hat das Symbol \tilde{l} eine beschränkte Kodierlänge, d.h. $\exists L_l \in \mathbb{N} : {}_{-L_l}[l^{2L_l+1}] \subseteq \gamma^{-1}({}_0[\tilde{l}])$.

⁵Wir wandeln den vorher benutzten Graphen nur minimal, durch Hinzufügen einer einzigen Kante ab. Auch der betrachtete Automorphismus auf dem neuen Subshift ähnelt dem vorherigen, läßt sich aber im Gegensatz dazu nicht (durch eine Folge von State-Splittings) in einen sliding-Block-Code umcodieren.

Zunächst definiert man für jedes $n \in \mathbb{N}$ spezielle Punkte des Shiftraumes X :

$$\begin{array}{l}
 x^{a,e_n} := l^\infty c_1 e_1 d_1 a l^n \cdot c_1 \dots c_n e_n d_n \dots d_1 a l^\infty \\
 x^{a,f_n} := l^\infty c_1 e_1 d_1 a l^n \cdot c_1 \dots c_n f_n d_n \dots d_1 a l^\infty \\
 x^{b,e_n} := l^\infty c_1 e_1 d_1 b l^n \cdot c_1 \dots c_n e_n d_n \dots d_1 a l^\infty \\
 x^{b,f_n} := l^\infty c_1 e_1 d_1 b l^n \cdot c_1 \dots c_n f_n d_n \dots d_1 a l^\infty
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \updownarrow \\ \varphi \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \varphi \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \varphi \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Koordinaten:} \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad -n-4 \quad -n-1 \quad 0 \quad n \quad 2n+1
 \end{array}$$

Während x^{b,e_n} und x^{b,f_n} Fixpunkte des Automorphismus φ sind, werden die Punkte x^{a,e_n} und x^{a,f_n} unter φ genau vertauscht.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ sehr groß, insbesondere $n \gg 2L_l$, so haben die konjugierten Punkte folgende Gestalt, wobei $A, B, C, D, W^{a,e_n}, W^{a,f_n}, W^{b,e_n}, W^{b,f_n} \in \mathcal{B}(Y)$ Blöcke entsprechender Länge sind (speziell hängen A, B, C, D nicht von der Wahl von n ab):

$$\begin{array}{l}
 \gamma(x^{a,e_n}) = \tilde{l}^\infty A \quad \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{a,e_n} D \tilde{l}^\infty \\
 \gamma(x^{a,f_n}) = \tilde{l}^\infty A \quad \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{a,f_n} D \tilde{l}^\infty \\
 \gamma(x^{b,e_n}) = \tilde{l}^\infty B \quad \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{b,e_n} D \tilde{l}^\infty \\
 \gamma(x^{b,f_n}) = \tilde{l}^\infty B \quad \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{b,f_n} D \tilde{l}^\infty
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \begin{array}{c} \updownarrow \\ \tilde{\varphi} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \tilde{\varphi} \end{array} \\
 \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \tilde{\varphi} \end{array}
 \end{array}
 \quad \text{(IP)}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Koordinaten:} \quad \quad \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad -n-L_l-4 \quad -n+L_l \quad -L_l \quad 0 \quad 2n+1 \quad 2n+L_l+2 \\
 \text{Blocklängen:} \quad \quad \quad 2L_l+4 \quad \quad \quad L_l \quad 2n+1 \quad L_l+1
 \end{array}$$

Solange n groß genug gewählt wurde, hängen die Blöcke A und B nicht mehr von dem im Urbild an der Koordinate n stehenden Symbol e_n bzw. f_n und die Blöcke C und D weder von diesem, noch von dem bei $-n-1$ stehenden Symbol a bzw. b ab. Dies folgt wieder direkt aus (CL) und ist für jedes n größer als die dort gefundenen Kodierlängen erfüllt.

Exakte Bestimmung der Mindestgröße des Parameters n :

Seien $A := \gamma(x^{a,e_n})_{[-n-L_l-4, -n+L_l]}$; $B := \gamma(x^{b,e_n})_{[-n-L_l-4, -n+L_l]}$; $C := \gamma(x^{a,e_n})_{[-L_l, 0]}$ und $D := \gamma(x^{a,e_n})_{[2n+1, 2n+L_l+2]} \in \mathcal{B}(Y)$. Nun existieren Zahlen $s_i, t_i \in \mathbb{Z}$ mit $i \in \{A, B, C, D\}$, so daß (CL) für die Nullzylinder ${}_0[A], {}_0[B], {}_0[C], {}_0[D]$ erfüllt ist.

Ist $t_A, t_B < 2n + L_l + 4$ so gilt:

$$\begin{aligned} x^{a,e_n}_{(-\infty, n)} &= x^{a,f_n}_{(-\infty, n)} \\ &\implies x^{a,f_n} \in {}_{s_A-(n+L_l+4)}[x^{a,e_n}_{s_A-(n+L_l+4)} \cdots x^{a,e_n}_{t_A-(n+L_l+4)}] \subseteq \gamma^{-1}(-(n+L_l+4)[A]) \\ x^{b,e_n}_{(-\infty, n)} &= x^{b,f_n}_{(-\infty, n)} \\ &\implies x^{b,f_n} \in {}_{s_B-(n+L_l+4)}[x^{b,e_n}_{s_B-(n+L_l+4)} \cdots x^{b,e_n}_{t_B-(n+L_l+4)}] \subseteq \gamma^{-1}(-(n+L_l+4)[B]) \end{aligned}$$

Entsprechend für $s_C > L_l - (n+1)$ und $t_C < n + L_l$:

$$\begin{aligned} x^{a,e_n}_{[-n, n]} &= x^{a,f_n}_{[-n, n]} = x^{b,e_n}_{[-n, n]} = x^{b,f_n}_{[-n, n]} \\ &\implies x^{a,f_n}; x^{b,e_n}; x^{b,f_n} \in {}_{s_C-L_l}[x^{a,e_n}_{s_C-L_l} \cdots x^{a,e_n}_{t_C-L_l}] \subseteq \gamma^{-1}(-L_l[C]) \end{aligned}$$

Schließlich für $s_D > -(n+1)$:

$$\begin{aligned} x^{a,e_n}_{[n+1, \infty)} &= x^{a,f_n}_{[n+1, \infty)} = x^{b,e_n}_{[n+1, \infty)} = x^{b,f_n}_{[n+1, \infty)} \\ &\implies x^{a,f_n}; x^{b,e_n}; x^{b,f_n} \in {}_{s_D+(2n+1)}[x^{a,e_n}_{s_D+(2n+1)} \cdots x^{a,e_n}_{t_D+(2n+1)}] \subseteq \gamma^{-1}(2n+1[D]) \end{aligned}$$

Für $n > \max\{\frac{1}{2}t_A - \frac{1}{2}L_l - 2, \frac{1}{2}t_B - \frac{1}{2}L_l - 2, L_l - 1 - s_C, t_C - L_l, -s_D - 1, 2L_l\}$ hat man damit die oben angegebene Gestalt der konjugierten Punkte bestätigt.

Mit $x^{a,e_n} \neq x^{a,f_n}$ und $x^{b,e_n} \neq x^{b,f_n}$ folgt aus (IP) und der Bijektivität von γ sofort $W^{a,e_n} \neq W^{a,f_n}$ sowie $W^{b,e_n} \neq W^{b,f_n}$.

Um die Behauptung zu zeigen, genügt es schließlich nachzuweisen, daß die Menge $\mathcal{W}_n := \{W^{a,e_n}, W^{a,f_n}, W^{b,e_n}, W^{b,f_n}\}$ tatsächlich nur 2 Elemente enthält.

Wegen $W^{a,e_n} \neq W^{a,f_n}$ muß dann W^{b,e_n} entweder gleich W^{a,e_n} oder gleich W^{a,f_n} sein (oder $W^{b,e_n} = W^{a,e_n}$). Angenommen $\tilde{\varphi}$ wäre ein sliding-Block-Code mit Kodierlänge $\leq 2N + 1$. Für $n > N + L_l$ und so groß, dass (IP) gültig ist, liegt der Block A bzw. B in den Punkten $\gamma(x^{a,e_n})$ bzw. $\gamma(x^{b,e_n})$ bereits außerhalb des Kodierfensters, so daß die Blöcke W^{a,e_n} und W^{b,e_n} unter $\tilde{\varphi}$ in gleicher Weise abgebildet werden:

$$\tilde{\varphi}(\gamma(x^{b,e_n}))_{[0, 2n]} = \tilde{\varphi}(\gamma(x^{a,e_n}))_{[0, 2n]} = \gamma(x^{a,f_n})_{[0, 2n]} = W^{a,f_n} \neq W^{b,e_n}$$

x^{b,e_n} ist Fixpunkt unter φ , so daß auch $\gamma(x^{b,e_n})$ ein Fixpunkt der konjugierten Abbildung $\tilde{\varphi}$ sein muß⁶. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\tilde{\varphi}$ keine beschränkte Kodierlänge haben kann. Vielmehr benötigt auch der konjugierte Automorphismus mit wachsendem n Informationen über immer weiter auseinanderliegende Abschnitte des Urbildpunktes. \square

Zum Abschluß des Beweises genügt nun folgende

Behauptung: $|\mathcal{W}_n| = 2$ für alle n groß genug.

Beweis: Sei $F := \{a, b, l\} \subsetneq \mathcal{A}_X$, so ist mit $\bigcup_{f \in F} {}_0[f] \subsetneq X$ auch das Bild dieser Menge unter

⁶Eine entsprechende Überlegung führt auch die Annahme $W^{b,e_n} = W^{a,f_n}$ zum Widerspruch.

der Konjugation γ kompakt-offen, d.h. $\exists G \subsetneq \mathcal{A}_Y$ endlich, mit $\gamma(\bigcup_{f \in F} 0[f]) \subseteq \bigcup_{g \in G} 0[g]$. Entsprechendes gilt für die Urbildmenge der G -Nullzylinder:

$$\exists H \subsetneq \mathcal{A}_X \text{ endlich : } \bigcup_{f \in F} 0[f] \subseteq \gamma^{-1}\left(\bigcup_{g \in G} 0[g]\right) \subseteq \bigcup_{h \in H} 0[h]$$

In Worten läßt sich diese Inklusionskette folgendermaßen beschreiben:

Bildet man einen Punkt $x \in X$, dessen Nullkoordinate in F liegt mit γ ab, so erhält man einen Punkt $y := \gamma(x)$, dessen Nullkoordinate eine Kante aus G ist. Ändert man nun diesen Punkt außerhalb der Nullkoordinate zu einem Punkt $\tilde{y} \in Y$ ab, so daß $\tilde{y}_0 = y_0$ gilt, so hat das Urbild $\gamma^{-1}(\tilde{y}) \in X$ eine Kante aus H an der Nullkoordinate.

Wir werden diese Schlußweise am Ende des Beweises anwenden.

Sei nun $u := l^\infty \cdot c_1 c_2 c_3 \dots \in X$. Die Endlichkeit von H garantiert die Existenz einer Zahl $j \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: $c_i, d_i, e_i, f_i \notin H$ für alle $i > j$. Der Bildpunkt $v := \gamma(u) \in Y$ hat folgende Eigenschaften:

- $v_{(-\infty, -1]} = \tilde{l}^\infty C$ mit $\tilde{l} \in \mathcal{A}_Y$ und $C \in \mathcal{B}_{L_l}(Y)$ wie oben. Dies folgt aus der Stetigkeit von $\gamma: x^{a, e_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$, somit $\gamma(x^{a, e_n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$
- $\forall i \geq j : v_i \notin G$. Sonst wäre $\sigma_Y^i(v) \in \bigcup_{g \in G} 0[g]$, also $\sigma_X^i(\gamma^{-1}(v)) = \gamma^{-1}(\sigma_Y^i(v)) \in \bigcup_{h \in H} 0[h]$ und damit $c_{i+1} = (\gamma^{-1}(v))_i \in H$

Aufgrund der Stetigkeit von γ^{-1} im Punkt $v = \gamma(u)$ findet man eine Zahl $J \in \mathbb{N}$, so daß das Urbild der Menge $[v_{(-\infty, J]}]_J := \{y \in Y \mid \forall i \leq J : y_i = v_i\}$ ganz in der Menge $[u_{(-\infty, j]}]_j := \{x \in X \mid \forall i \leq j : x_i = u_i\}$ liegt. Hierbei wird ausgenutzt, daß die Strahlen $u_{(-\infty, N]}$ und $v_{(-\infty, N]}$ ($N \in \mathbb{Z}$) nur endlich viele verschiedene Symbole sehen.

Entsprechende Überlegungen für die Punkte $w := \dots d_3 d_2 d_1 \cdot a l^\infty \in X$ und $z := \gamma(w) \in Y$ ergeben:

- $z_{[0, \infty)} = D \tilde{l}^\infty$ mit $\tilde{l} \in \mathcal{A}_Y$ und $D \in \mathcal{B}_{L_l+1}(Y)$ wie oben
- $\forall i > j : z_{-i} \notin G$
- $\gamma^{-1}\left([z_{[-J-1, \infty)}]\right) \subseteq [w_{[-j-1, \infty)}]$ (mit eventuell geeignet vergrößertem J)

Sei nun $n \gg J$ so groß, daß alle Blöcke der Menge \mathcal{W}_n auf den Koordinaten 0 bis J und $2n - J$ bis $2n$ miteinander und mit $v_{[0, J]}$ bzw. $z_{[-J-1, -1]}$ übereinstimmen. Die Existenz eines solchen $n \in \mathbb{N}$ ist wieder durch die Stetigkeit der Konjugation γ gewährleistet.

Angenommen die Menge \mathcal{W}_n hat mindestens drei Elemente $W^{(1)}, W^{(2)}, W^{(3)} \in \mathcal{W}_n$, so definiert man drei Punkte: $y^{(i)} := \tilde{l}^\infty C \cdot W^{(i)} D \tilde{l}^\infty \in Y$ ($i \in \{1, 2, 3\}$). Nach Konstruktion und aufgrund der Shiftkommutativität von γ gilt nun: $y^{(i)} \in [v_{(-\infty, J]}]_J \cap [z_{[-J-1, \infty)}]_{2n-J}$ und damit $\gamma^{-1}(y^{(i)}) \in [u_{(-\infty, j]}]_j \cap [w_{[-j-1, \infty)}]_{2n-j}$.

Angenommen der Block $\gamma^{-1}(y^{(i)})_{[j, 2n-j]}$ enthält ein Symbol aus F , so muß das Bild unter γ , also der Punkt $y^{(i)}$, im Mittelstück von j bis $2n - j$ ein Element aus G enthalten. Nun

ist aber $y_{[j,2n-j]}^{(i)} = W_{[j,2n-j]}^{(i)}$ und der Zylinder ${}_j[W_{[j,2n-j]}^{(i)}]$ enthält einen Punkt der Form $\tilde{y}^{(i)} := \tilde{l}^\infty A \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{(i)} D \tilde{l}^\infty \in Y$ bzw. $\tilde{y}^{(i)} := \tilde{l}^\infty B \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{(i)} D \tilde{l}^\infty \in Y$ mit einer Kante aus G im Abschnitt j bis $2n - j$. Das Urbild des modifizierten Punktes $\gamma^{-1}(\tilde{y}^{(i)})$ müßte zwischen Koordinate j und $2n - j$ ein Symbol aus H enthalten. Nach Konstruktion ist dies aber einer der vier Punkte $x^{a,e_n}, x^{a,f_n}, x^{b,e_n}, x^{b,f_n}$. Nach Wahl von j enthält der entsprechende Block in diesen Punkten aber gerade keine Kante aus H . Dies widerlegt die ursprüngliche Annahme und zeigt, daß die Mittelblöcke der Punkte $\gamma^{-1}(y^{(i)})$ ($i \in \{1, 2, 3\}$) ganz außerhalb von F verlaufen.

Wegen $(\gamma^{-1}(y^{(i)}))_j = u_j = c_{j+1}$ und $(\gamma^{-1}(y^{(i)}))_{2n-j} = w_{-j-1} = d_{j+1}$, hätte man nun drei Pfade der Länge $2n - 2j - 1$ von $\mathbf{t}(c_{j+1})$ nach $\mathbf{i}(d_{j+1})$, die keine Kante a, b oder l enthalten. Offensichtlich ein Widerspruch, da höchstens zwei solche Pfade existieren. \square

Damit enthält die Menge \mathcal{W}_n für n groß genug nur zwei verschiedene Blöcke und der konjugierte Automorphismus $\tilde{\varphi}$ hat unbeschränkte Kodierlänge. Wie behauptet ist damit $\varphi \notin \text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$.

Die soeben an einem konkreten Beispiel beschriebene Konstruktion eines nicht zu einem sliding-Block-Code umcodierbaren Automorphismus, läßt sich entsprechend modifiziert auf eine ganze Klasse lokal-endlicher Graphen übertragen. Für die zugehörigen Markovshifts hat man damit ebenfalls die Existenz von Automorphismen endlicher Ordnung gezeigt, die in keiner Graphendarstellung beschränkte Kodierlänge aufweisen. Dazu benötigen wir allerdings einige Vorarbeiten:

Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter Graph und $v \in V$ ein Vertex. Ein first-return-Loop bei v ist ein geschlossener Pfad $l := e_1 \dots e_n$ ($e_i \in E$) endlicher Länge $n \in \mathbb{N}$, so daß $\mathbf{i}(e_1) = \mathbf{t}(e_n) = v$ und für alle $1 \leq i < n$: $\mathbf{t}(e_i) = \mathbf{i}(e_{i+1}) \neq v$.

In Verallgemeinerung der Definition 2.2 benutzen wir im folgenden den Begriff eines Mehrfachpfades für eine (endliche) Menge verschiedener Pfade gleicher Länge, die einen gemeinsamen Start- mit einem gemeinsamen Endvertex verbinden. Wir sprechen in diesem Zusammenhang auch von einem N -fachen Pfad, falls zu gegebener Länge und gegebenem Start- und Endvertex N entsprechende Pfade existieren und benutzen die Notation $[p_1; p_2; \dots; p_N]$. Wie in 2.2 gilt dann: $[p_1; p_2; \dots; p_N] = [p_{\tau(1)}; p_{\tau(2)}; \dots; p_{\tau(N)}]$ für jede Permutation $\tau \in \mathcal{S}_N$ sowie $|p_1| = |p_2| = \dots = |p_N|$, $\mathbf{i}(p_1) = \mathbf{i}(p_2) = \dots = \mathbf{i}(p_N)$ und $\mathbf{t}(p_1) = \mathbf{t}(p_2) = \dots = \mathbf{t}(p_N)$. Für $P := [p_1; p_2; \dots; p_N]$ seien daher $|P|$, $\mathbf{i}(P)$ und $\mathbf{t}(P)$ in offensichtlicher Weise definiert.

Definition 3.17 *Ein gerichteter, lokal-endlicher Graph $G = (V, E)$ hat die Eigenschaft (BNPC) (Die Bezeichnung steht für "bounded-number-of-paths component"), falls eine endliche Menge $K \subsetneq E$ von Kanten existiert, so daß eine maximale stark zusammenhängende Komponente⁷ $H = (V_H, E_H)$ des Graphen $G - K = (V, E \setminus K)$ folgende Bedingungen erfüllt:*

1. Die Anzahl der first-return-Loops an einem ausgezeichneten Vertex $v \in V_H$ von gleicher

⁷Der Graph $G - K$, der aus G durch Entfernen der endlichen Kantenmenge K entsteht, ist im allgemeinen nicht länger stark zusammenhängend. Eine maximale stark zusammenhängende Komponente in $G - K$ ist ein nicht vergrößerbarer, stark zusammenhängender Teilgraph von $G - K$.

Länge ist global beschränkt, d.h.

$$\exists M \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : |\{\text{first-return-Loops bei } v \text{ der Länge } n\}| \leq M$$

2. *In H gibt es unendlich viele zueinander kantendisjunkte Mehrfachpfade maximaler Anzahl, d.h.*

$$\begin{aligned} \exists \left\{ P_n := [p_1^{(n)}; p_2^{(n)}; \dots; p_M^{(n)}] \mid n \in \mathbb{N} \wedge P_n \text{ } M\text{-facher Pfad in } H \right\} \\ \forall m, n \in \mathbb{N} : m \neq n \Rightarrow P_m \text{ kantendisjunkt zu } P_n \end{aligned}$$

Bemerkung: Bedingung 2 in Definition 3.17 erzwingt bereits, daß die globale Schranke M mindestens den Wert 2 hat. Aufgrund der lokalen Endlichkeit des Graphen am Vertex v und der Kantendisjunktheit der M -fach Pfade kann man annehmen, daß kein Element P_n aus Bedingung 2 den Vertex v sieht. Dies werden wir im folgenden stets voraussetzen.

Wir vermuten die Konjugationsinvarianz der Eigenschaft (BNPC), i.e. falls ein transitiver, lokalkompakter Markovshift eine Darstellung als Kantenshift auf einem (BNPC)-Graphen besitzt, so scheinen alle Graphendarstellungen diese Eigenschaft zu haben.

Um die nachfolgenden Argumente zu vereinfachen, schicken wir ein technisches Lemma vorweg, das die Struktur des Teilgraphen H in einem (BNPC)-Graphen beschreibt:

Lemma 3.18 *Hat ein gerichteter, lokal-endlicher Graph $G = (V, E)$ die Eigenschaft (BNPC), so enthält der stark zusammenhängende Teilgraph $H = (V_H, E_H)$ (Bezeichnungen wie in Definition 3.17) einen einfachen, rechtsseitig-unendlichen, bei v startenden Weg $r := r_0 r_1 r_2 \dots$ sowie einen dazu kantendisjunkten, einfachen, linksseitig-unendlichen, bei v endenden Weg $s := \dots s_{-3} s_{-2} s_{-1}$, die beide unendlich viele zueinander kantendisjunkte Mehrfachpfade maximaler Anzahl tragen, d.h.*

$$\begin{aligned} \exists \left\{ Q_n := [q_1^{(n)}; q_2^{(n)}; \dots; q_M^{(n)}] \mid n \in \mathbb{N} \wedge Q_n \text{ } M\text{-facher Pfad in } H \right\} \\ \forall m, n \in \mathbb{N} : m \neq n \Rightarrow Q_m \text{ kantendisjunkt zu } Q_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \exists (N_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ aufsteigende Folge, } N_n \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} \exists N_n \leq i, j < N_{n+1} : \\ \mathbf{i}(Q_n) = \mathbf{i}(r_i) \wedge \mathbf{t}(Q_n) = \mathbf{i}(s_{-j}) \end{aligned}$$

Beweis: Sei $\left\{ P_n := [p_1^{(n)}; p_2^{(n)}; \dots; p_M^{(n)}] \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ eine unendliche Menge zueinander kantendisjunkter M -fach Pfade in H . Wähle zu jedem P_n kürzest mögliche Pfade $a^{(n)}$ von v nach $\mathbf{i}(P_n)$ bzw. $b^{(n)}$ von $\mathbf{t}(P_n)$ zurück zu v . Die erste an H gestellte Bedingung in Definition 3.17 sorgt dafür, daß die Pfade $a^{(n)}, b^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) eindeutig bestimmt sind. Gäbe es ≥ 2 kürzest mögliche Verbindungspfade $a^{(n)}, \tilde{a}^{(n)}$ von v nach $\mathbf{i}(P_n)$, so wäre die Schranke an die Zahl der first-return-Loops fester Länge bei v mindestens $2M$. Ebenso für zwei Pfade $b^{(n)}, \tilde{b}^{(n)}$.

Weiterhin können zwei Pfade $a^{(m)}, a^{(n)}$ ($m \neq n$) nicht rekombinieren, d.h. nach einem beliebig langen gemeinsamen Anfangsstück verlaufen die Pfade $a^{(m)}$ und $a^{(n)}$ kantendisjunkt. Um dies einzusehen, betrachte man eine Zerlegung $a^{(m)} := a_1^{(m)} a_2^{(m)} a_3^{(m)}$ und $a^{(n)} := a_1^{(n)} a_2^{(n)} a_3^{(n)}$, wobei $a_1^{(m)} \neq a_1^{(n)}$ und $a_2^{(m)} = a_2^{(n)}$ nichtleere Teilpfade von $a^{(m)}$ bzw. $a^{(n)}$ seien. OE sei $|a_1^{(n)}| \geq |a_1^{(m)}|$. Man betrachte den Pfad $\tilde{a}^{(n)} := a_1^{(m)} a_2^{(n)} a_3^{(n)}$. Falls $|a_1^{(n)}| > |a_1^{(m)}|$, ist dies eine kürzere Verbindung von v nach $i(P_n)$ ∇ zur Wahl von $a^{(n)}$. Ist dagegen $|a_1^{(n)}| = |a_1^{(m)}|$ und damit $|a^{(n)}| = |\tilde{a}^{(n)}|$, so ergibt sich ein Widerspruch zur Eindeutigkeit von $a^{(n)}$.

Eine symmetrische Überlegung zeigt, daß zwei Pfade $b^{(m)}, b^{(n)}$ ($m \neq n$) nicht aufspalten können, d.h. sie enden nach beliebig langen kantendisjunkten Anfangsstücken in einem (möglicherweise leeren) gemeinsamen Endstück.

Aufgrund der lokalen Endlichkeit des Teilgraphen H gibt es einen rechtsseitig-unendlichen Weg $r := r_0 r_1 r_2 r_3 \dots$ mit $i(r_0) = v$, einen linksseitig-unendlichen Weg $s := \dots s_{-4} s_{-3} s_{-2} s_{-1}$ mit $t(s_{-1}) = v$ und eine unendliche Indexmenge $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$, so daß für alle $n \in \mathcal{N}$ der Pfad $a^{(n)}$ mit einem endliche Anfangsstück von r beginnt, dessen Länge mit n über jede Schranke wächst, und so daß der Pfad $b^{(n)}$ in einem endlichen Schlußstück von s endet, dessen Länge ebenfalls mit n unbeschränkt zunimmt. Zur Konstruktion von r und s wende man wiederholt das Schubfachprinzip auf die unendlich vielen Pfade $a^{(n)}$ (bzw. $b^{(n)}$) sowie die nur endlich vielen vom Knoten v ausgehenden (bzw. einlaufenden) Pfade fester Länge an, um so induktiv die Teilpfade $r_0, r_0 r_1, r_0 r_1 r_2, \dots$ (bzw. $s_{-1}, s_{-2} s_{-1}, s_{-3} s_{-2} s_{-1}, \dots$) auszuwählen.

Die Einfachheit der Pfade $a^{(n)}$ und $b^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) erzwingt die Einfachheit der Wege r und s , so daß r und s wie gefordert schließlich jeden endlichen Teilgraphen in H verlassen. r und s sind zueinander kantendisjunkt. Andernfalls hätten bereits die Pfade $a^{(n)}$ und $b^{(n)}$ für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ eine gemeinsame Kante. Dies würde die Existenz eines zu v knotendisjunkten M -fachen Loops und damit einen Widerspruch zu Bedingung 1 in Definition 3.17 implizieren.

Aus den oben gezeigten Eigenschaften der Verbindungspfade folgt weiterhin, daß $a^{(n)}$ ($n \in \mathcal{N}$) mit einem endlichen Anfangsblock aus r beginnt und danach keine weitere Kante aus r enthält ($a^{(n)}$ darf nicht rekombinieren). Es bezeichne $a^{(n)} = r^{(n)} c^{(n)}$ eine entsprechende Aufteilung in zwei Teilpfade mit $r^{(n)} := r_0 r_1 r_2 \dots r_{i_n}$ mit $i_n \in \mathbb{N}_0$ und $c^{(n)}$ enthält keine Kante aus r ($c^{(n)}$ darf leer sein).

Entsprechend sei $b^{(n)} = d^{(n)} s^{(n)}$ eine Unterteilung des Pfades $b^{(n)}$ in einen (möglicherweise leeren) Block $d^{(n)}$, der keine Kante aus s enthält und einen Teilpfad $s^{(n)} := s_{-j_n} \dots s_{-2} s_{-1}$ mit $j_n \in \mathbb{N}$ ($b^{(n)}$ kann nicht aufspalten).

Abschließend zeigt man, daß die konstruierten Wege r, s wie gefordert unendlich viele kantendisjunkte Mehrfachpfade maximaler Anzahl tragen:

Sei dazu $\mathcal{P} := \{(c^{(n)}, P_n, d^{(n)}) \mid n \in \mathcal{N}\}$. Man setzt $N_1 := 1$, wählt einen Index $n^* \in \mathcal{N}$ mit $|r^{(n^*)}| = \min \{|r^{(n)}| \mid n \in \mathcal{N}\}$ und definiert

$$Q_1 = c^{(n^*)} P_{n^*} d^{(n^*)} := [c^{(n^*)} p_1^{(n^*)} d^{(n^*)}; c^{(n^*)} p_2^{(n^*)} d^{(n^*)}; \dots; c^{(n^*)} p_M^{(n^*)} d^{(n^*)}]$$

Weiterhin setzt man $N_2 := \max \{|r^{(n^*)}|, |s^{(n^*)}|\} + 1$.

Man entfernt aus \mathcal{P} zunächst alle Elemente, für die $|r^{(n)}| < N_2$ oder $|s^{(n)}| < N_2$ ist, i.e. für die $i(c^{(n)}) = i(r_i)$ oder $t(d^{(n)}) = i(s_{-i})$ mit $i < N_2$. Obwohl hierbei \mathcal{P} eventuell um unendlich viele Elemente verkleinert wird, bleibt die Kardinalität von \mathcal{P} unendlich, da die Länge der

Teilpfade $r^{(n)}$ und $s^{(n)}$ mit n unbeschränkt wächst. Anschließend entfernt man aus der verbleibenden Menge noch alle Elemente, die eine Kante mit Q_1 gemeinsam haben. Aufgrund der Kantendisjunktheit der Mehrfachpfade P_n und der oben bewiesenen Eigenschaften der Verbindungspfade (mit $a^{(n)}$ darf auch $c^{(n)}$ nicht rekombinieren bzw. mit $b^{(n)}$ darf auch $d^{(n)}$ nicht aufspalten), behält man auch in diesem Schritt unendlich viele Elemente zurück.

Expliziter Nachweis, daß in der Restmenge von \mathcal{P} unendlich viele, nicht durch Kanten des M -fach Pfades Q_1 markierte Elemente existieren:

- P_{n^*} ist kantendisjunkt zu allen P_n ($n \neq n^*$) nach Voraussetzung.
- $c^{(n^*)}$ ist kantendisjunkt zu $c^{(n)}$ ($n \neq n^*$), aufgrund des Rekombinationsverbots ($c^{(n^*)}$ und $c^{(n)}$ starten an verschiedenen Vertices). Analog für $d^{(n^*)}$ und $d^{(n)}$, wegen Aufspaltverbots.
- $c^{(n^*)}$ ist kantendisjunkt zu $d^{(n)}$, da der Graph H sonst M^2 first-return-Loops fester Länge bei v enthalten müßte (zunächst $r^{(n)}$ $c^{(n)}$ P_n $d^{(n)}$ bis zur gemeinsamen Kante, dann den Rest von $c^{(n^*)}$ P_{n^*} $d^{(n^*)}$ $s^{(n^*)}$ zurück zu v). Entsprechendes gilt für $d^{(n^*)}$ und $c^{(n)}$.
- Jede Kante aus $c^{(n^*)}$ bzw. $d^{(n^*)}$ kann höchstens Teil eines Mehrfachpfades P_n ($n \neq n^*$) sein (Kantendisjunktheit der P_n). $\implies \leq |c^{(n^*)}| + |d^{(n^*)}|$ Elemente zu entfernen.
- Aufgrund des Rekombinations-/Aufspaltverbots starten alle Pfade $c^{(n)}$, die eine bestimmte Kante e aus P_{n^*} enthalten an einem festen Vertex $i(r_{i_e})$ (enden alle Pfade $d^{(n)}$, die e enthalten an einem festen Vertex $i(s_{i_e})$). Alle Kanten aus P_{n^*} markieren daher höchstens $M \cdot |P_{n^*}|$ verschiedene Vertices in r und s . Selbst nach Entfernen aller Elemente aus \mathcal{P} , deren Pfade $c^{(n)}$ bzw. $d^{(n)}$ an diesen Vertices starten bzw. enden, garantiert das unbeschränkte Wachstum der Längen $|r^{(n)}|$ und $|s^{(n)}|$ die Existenz unendlich vieler, nicht durch P_{n^*} markierter Elemente in \mathcal{P} .

Da die entstehende Restmenge in \mathcal{P} (und die zugehörige, verkleinerte Indexmenge \mathcal{N}) noch immer unendliche Kardinalität hat, läßt sich aus den übrig gebliebenen Elementen wieder eines mit minimalem $|r^{(n)}|$ wählen und damit Q_2 und N_3 definieren. Induktiv ergeben sich die gesuchte Menge $\{Q_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ kantendisjunkter M -fach Pfade und die aufsteigende Folge $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen. \square

Nach diesen Vorbereitungen sind wir in der Lage die Konstruktion aus Beispiel 3.16 für beliebige Kantenshifts, deren Graph die Eigenschaft (BNPC) erfüllt, zu verallgemeinern.

Satz 3.19 *Ist der transitive, lokalkompakte Markovshift (X, σ) als Kantenshift auf einem (BNPC)-Graphen darstellbar, so enthält $\text{Aut}(\sigma)$ Automorphismen endlicher Ordnung, die in keiner Graphendarstellung von X beschränkte Kodierlänge aufweisen.*

Beweis: Der nachfolgende Beweis kann fast wörtlich aus Beispiel 3.16 übernommen werden. Die entsprechenden Argumente lassen sich direkt von Doppelpfaden auf M -fach Pfade übertragen.

Um die Notation zu vereinfachen, sei bereits $X = X_{G_1}$ selbst eine Darstellung von (X, σ) als Kantenshift auf dem Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$, wobei G_1 die Eigenschaft (BNPC) erfüllt. Mit den üblichen Bezeichnungen aus Definition 3.17 seien $K_1 \subsetneq E_1$ endlich, $H_1 = (V_{H_1}, E_{H_1})$ eine maximale, stark zusammenhängende Komponente in $G_1 - K_1 = (V_1, E_1 \setminus K_1)$, $v \in V_{H_1}$ und $M \in \mathbb{N}$ gegeben, so daß die Bedingungen 1 und 2 in Definition 3.17 gültig sind.

Es bezeichne $l := l_1 l_2 l_3 \dots l_{|l|}$ einen minimalen Loop am Vertex v in H_1 , d.h. l einfacher Loop minimaler Länge mit $l_i \in E_{H_1}$ für alle $i \in \{1, 2, \dots, |l|\}$ und $\mathbf{i}(l_1) = \mathbf{t}(l_{|l|}) = v$.

Nach Lemma 3.18 findet man in H_1 einfache, einseitig-unendliche Wege $r := r_0 r_1 r_2 \dots$ und $s := \dots s_{-3} s_{-2} s_{-1}$, eine unendliche Menge $\mathcal{Q} := \left\{ Q_n = [q_1^{(n)}; q_2^{(n)}; \dots; q_M^{(n)}] \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ kantendisjunkter M -fach Pfade und eine zugehörige aufsteigende Folge $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen. OE seien alle Q_n kantendisjunkt zu dem gewählten Loop l und $N_1 > |l|$. Ist dies nicht der Fall, so entferne man die endlich vielen Mehrfachpfade Q_n , die Kanten aus l enthalten und für die $N_n \leq |l|$ gilt und nummeriere die verbleibenden Elemente in \mathcal{Q} neu.

Setzt man $p := s_{-|l|} s_{-|l|+1} \dots s_{-2} s_{-1}$ (Endstück des Weges s), so ist $p \neq l$. Wie im Beispiel 3.16 definiert man eine shiftkommutierende Abbildung $\varphi : X \rightarrow X$, die in einem Punkt aus X alle Blöcke der Form $p l^n r_0 r_1 \dots r_{i_n} q_m^{(n)}$ durch $p l^n r_0 r_1 \dots r_{i_n} q_{m+1}^{(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) ersetzt⁸, wobei $i_n \in \mathbb{N}$ durch $\mathbf{t}(r_{i_n}) = \mathbf{i}(Q_n)$ eindeutig bestimmt wird.

Offensichtlich ist φ wohldefiniert und stetig nach Konstruktion sowie Lemma 3.18 (Kantendisjunktheit der Q_n und streng monotonen Wachstum der N_n bzw. i_n). Die Abbildungsvorschrift ist koordinatenunabhängig formuliert; φ vertauscht daher mit dem Shift. Zudem gilt $\varphi^M = \text{Id}_X$, was die Bijektivität von φ sowie die Stetigkeit von φ^{-1} zeigt. Man hat daher $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$. Um zu entscheiden, ob ein Block $q_m^{(n)}$ ($1 \leq m \leq M$) in einem Punkt aus X unter φ verändert wird, benötigt man mindestens Kenntnis über die letzten $|l| \cdot (n+1) + (i_n+1)$ Symbole. Diese Anzahl wächst mit n über jede Grenze, so daß φ keine beschränkte Kodierlänge haben kann.

Sei nun $Y \in \text{Graph}(X)$ eine weitere Graphendarstellung (auf $G_2 = (V_2, E_2)$) und $\gamma : X \rightarrow Y$ die entsprechende topologische Konjugation. Wir müssen zeigen, daß auch die Kodierlänge des konjugierten Automorphismus $\tilde{\varphi} := \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1} : Y \rightarrow Y$ unbeschränkt ist.

Nach Wahl von l gilt $l^\infty \in \text{Per}_{|l|}^0(X)$, also auch $\tilde{l}^\infty := \gamma(l^\infty) \in \text{Per}_{|l|}^0(Y)$ und es gibt eine endliche (lokale) Kodierlänge $L_l \in \mathbb{N}$, so daß ${}_{-L_l, |l|}[l^{2L_l+1}] \subseteq \gamma^{-1}({}_0[\tilde{l}])$. Weiterhin seien a und b zwei Loops gleicher Länge bei v , wobei a mit dem Pfad p endet, während b dies nicht tut. Beispielsweise wäre $a := l c$ und $b := c l$ mit $c := r_0 r_1 r_2 \dots r_{i_1} q_1^{(n)} s_{-j_1} \dots s_{-|l|-1} s_{-|l|} \dots s_{-2} s_{-1}$ ($i_1, j_1 \in \mathbb{N}$ mit $\mathbf{t}(r_{i_1}) = \mathbf{i}(Q_1)$ und $\mathbf{i}(s_{-j_1}) = \mathbf{t}(Q_1)$) eine mögliche Wahl.

Wie zuvor betrachtet man zu $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ die Punkte:

$$\begin{aligned} x^{a, q_m^{(n)}} &:= l^\infty a l^n \cdot r_0 r_1 \dots r_{i_n} q_m^{(n)} s_{-j_n} \dots s_{-2} s_{-1} l^\infty && \xrightarrow{m+1(M)} M\text{-periodisch unter } \varphi \\ x^{b, q_m^{(n)}} &:= l^\infty b l^n \cdot r_0 r_1 \dots r_{i_n} q_m^{(n)} s_{-j_n} \dots s_{-2} s_{-1} l^\infty && \curvearrowright \text{ Fixpunkt} \end{aligned}$$

sowie deren Bilder unter γ , die für $n \gg 2L_l$ wie folgt aussehen:

$$\begin{aligned} \gamma(x^{a, q_m^{(n)}}) &= \tilde{l}^\infty A \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{a, q_m^{(n)}} D \tilde{l}^\infty && \xrightarrow{m+1(M)} M\text{-periodisch unter } \tilde{\varphi} \\ \gamma(x^{b, q_m^{(n)}}) &= \tilde{l}^\infty B \tilde{l}^{n-2L_l} C \cdot W^{b, q_m^{(n)}} D \tilde{l}^\infty && \curvearrowright \text{ Fixpunkt} \end{aligned}$$

Hierbei sind $A, B, C, D, W^{a, q_m^{(n)}}, W^{b, q_m^{(n)}} \in \mathcal{B}(Y)$ zulässige Blöcke mit $|A| = |B| = 2L_l \cdot |l| + |a|$, $|C| = |D| = L_l \cdot |l|$ und $|W^{a, q_m^{(n)}}| = |W^{b, q_m^{(n)}}| = i_n + j_n + 1 + |Q_n|$, derart, daß A, B, C, D nicht von den Pfaden $q_m^{(n)}$ und zudem C, D nicht von den Blöcken a oder b im jeweiligen Urbild

⁸Hierbei ist $m+1(M)$ als $m+1$ modulo M zu lesen.

abhängen. Dies wird wie zuvor durch die Eigenschaft (CL) der Konjugation γ für n groß genug garantiert. Auf die Bestimmung der Mindestgröße des Parameters n wird an dieser Stelle verzichtet (vgl. Beispiel 3.16).

Wie angedeutet, werden $x^{a,q_m^{(n)}}$ (bzw. $\gamma(x^{a,q_m^{(n)}})$) unter φ (bzw. $\tilde{\varphi}$) auf $x^{a,q_{m+1}^{(n)}}$ (bzw. $\gamma(x^{a,q_{m+1}^{(n)}})$) abgebildet, während $x^{b,q_m^{(n)}}$ und $\gamma(x^{b,q_m^{(n)}})$ Fixpunkte unter φ bzw. $\tilde{\varphi}$ sind.

Nach Konstruktion sind die Punkte $x^{a,q_m^{(n)}}$ ($n \in \mathbb{N}$ fest, $m \in \{1, 2, \dots, M\}$) paarweise verschieden, ebenso die Punkte $x^{b,q_m^{(n)}}$. Die Bijektivität von γ erzwingt, daß für große n auch die Blöcke $W^{a,q_m^{(n)}}$ und entsprechend die Blöcke $W^{b,q_m^{(n)}}$ paarweise verschieden sind. Wie im Beispiel 3.16 zeigt man, daß die Menge $\mathcal{W}_n := \left\{ W^{a,q_m^{(n)}} \mid 1 \leq m \leq M \right\} \cup \left\{ W^{b,q_m^{(n)}} \mid 1 \leq m \leq M \right\}$ für große n tatsächlich nur M Elemente enthält und es daher zu jedem $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ genau ein $m' \in \{1, 2, \dots, M\}$ mit $W^{a,q_m^{(n)}} = W^{b,q_{m'}^{(n)}}$ geben muß. Dies sieht man wie folgt:

Es bezeichne $F := \{e \in E_1 \mid \mathfrak{t}(e) = v\} \cup K_1 \subsetneq \mathcal{A}_X$ die endliche Menge aller am Vertex v einlaufenden Kanten vereinigt mit der ebenfalls endlichen Kantenmenge K_1 , die den Teilgraphen H_1 "begrenzt". Weiter seien $G \subsetneq \mathcal{A}_Y$ und $H \subsetneq \mathcal{A}_X$ endliche Teilmengen mit:

$$\bigcup_{f \in F} {}_0[f] \subseteq \gamma^{-1} \left(\bigcup_{g \in G} {}_0[g] \right) \subseteq \bigcup_{h \in H} {}_0[h]$$

Wieder hat man Punktepaare $u := l^\infty \cdot r_0 r_1 r_2 \dots \in X$ und $v := \gamma(u) \in Y$ sowie $w := \dots s_{-3} s_{-2} s_{-1} \cdot l^\infty \in X$ und $z := \gamma(w) \in Y$ mit folgenden Eigenschaften:

- $v_{(-\infty, -1]} = \tilde{l}^\infty C$ und $z_{[0, \infty)} = D \tilde{l}^\infty$ mit $C, D \in \mathcal{B}_{L_i, |l|}(Y)$ und $\tilde{l} \in \mathcal{B}_{|l|}(Y)$ wie oben definiert (um dies einzusehen benutzt man die Stetigkeit der Konjugation γ bei $x^{a,q_m^{(n)}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} u$ und $\sigma^{i_n + j_n + 1 + |Q_n|}(x^{a,q_m^{(n)}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} w$).
- $\exists j \in \mathbb{N} \forall i \geq j : r_i, s_{-i} \notin H \wedge \forall n \in \mathbb{N} : N_n \geq j \Rightarrow Q_n \cap H = \emptyset$ (kein M -fach Pfad Q_n mit zugehörigem N_n groß genug enthält eine Kante aus H). Damit gilt auch $\forall i \geq j : v_i, z_{-i} \notin G$.

Zu fest gewähltem j ergibt sich die Existenz von $J \in \mathbb{N}$ mit⁹:

$$\gamma^{-1} \left([v_{(-\infty, J]}]_J \right) \subseteq [u_{(-\infty, j]}]_j \quad \wedge \quad \gamma^{-1} \left({}_{-J}[z_{[-J, \infty)}] \right) \subseteq {}_{-j}[w_{[-j, \infty)}]$$

(man nutzt die Stetigkeit der Konjugation bei $v = \gamma(u)$ und $z = \gamma(w)$).

Weiter garantiert die Stetigkeit von γ , daß für n groß genug alle Blöcke der Menge $\mathcal{W}_n \subseteq \mathcal{B}_{i_n + j_n + 1 + |Q_n|}(Y)$ auf den ersten und letzten $J + 1$ Koordinaten gleich $v_{[0, J]}$ bzw. $z_{[-J-1, -1]}$ sind. Wählt man ein derartiges n und definiert zu jedem Block $W \in \mathcal{W}_n$ einen Punkt $y^W := \tilde{l}^\infty C \cdot W D \tilde{l}^\infty \in Y$, so gilt

$$y^W \in [v_{(-\infty, J]}]_J \cap {}_{|W|-J}[z_{[-J, \infty)}] \quad \text{also auch} \quad \gamma^{-1}(y^W) \in [u_{(-\infty, j]}]_j \cap {}_{|W|-j}[w_{[-j, \infty)}]$$

Eine einfache Überlegung zeigt, daß der Mittelblock $\gamma^{-1}(y^W)_{[j, |W|-j]}$ keine Kante aus F enthalten kann.

⁹Hierbei bezeichnet

$$\begin{aligned} [u_{(-\infty, j]}]_j &:= \{x \in X \mid \forall i \leq j : x_i = u_i\}, & [v_{(-\infty, J]}]_J &:= \{y \in Y \mid \forall i \leq J : y_i = v_i\}, \\ {}_{-j}[w_{[-j, \infty)}] &:= \{x \in X \mid \forall i \geq -j : x_i = w_i\}, & {}_{-J}[z_{[-J, \infty)}] &:= \{y \in Y \mid \forall i \geq -J : y_i = z_i\} \end{aligned}$$

Andernfalls müßte der Block $y^W_{[j,|W|-j]} = W_{[j,|W|-j]}$ eine Kante aus G enthalten. Auch der modifizierte Punkt $\tilde{y}^W := \tilde{l}^\infty A \tilde{l}^{n-2L_i} C \cdot W D \tilde{l}^\infty \in_j [W_{[j,|W|-j]}] \subseteq Y$ (bzw. $\tilde{y}^W := \tilde{l}^\infty B \tilde{l}^{n-2L_i} C \cdot W D \tilde{l}^\infty \in_j [W_{[j,|W|-j]}] \subseteq Y$) hätte dann ein Symbol aus G in den Koordinaten j bis $|W| - j$. Sein Urbildpunkt $\gamma^{-1}(\tilde{y}^W)$ hat die Form $x^{a,q_m^{(n)}}$ bzw. $x^{b,q_m^{(n)}}$ (mit $m \in \{1, 2, \dots, M\}$). Dessen Mittelblock $(\gamma^{-1}(\tilde{y}^W))_{[j,|W|-j]} = r_j \dots r_{i_n} q_m^{(n)} s_{-j_n} \dots s_{-j}$ enthält nach Konstruktion aber gerade kein Symbol aus H . \nmid zu $\gamma^{-1}(\bigcup_{g \in G} 0[g]) \subseteq \bigcup_{h \in H} 0[h]$.

Zudem ist $(\gamma^{-1}(y^W))_j = u_j = r_j$ und $(\gamma^{-1}(y^W))_{|W|-j} = w_{-j} = s_{-j}$. Der dem Block $(\gamma^{-1}(y^W))_{[j,|W|-j]}$ entsprechende Pfad in G_1 verbindet den Vertex $i(r_j)$ mit $t(s_{-j})$ und hat die Länge $|W| - 2j + 1$. Er verläuft aufgrund der Maximalität von H_1 ganz innerhalb dieses Teilgraphen und enthält den Vertex v nicht. Jeder Punkt $\gamma^{-1}(y^W)$ definiert daher einen eindeutigen first-return-Loop $r_0 r_1 \dots r_{j-1} (\gamma^{-1}(y^W))_{[j,|W|-j]} s_{-j+1} \dots s_{-2} s_{-1}$ der Länge $|W|$ am Vertex v . Verschiedenen Blöcken $W, W' \in \mathcal{W}_n$ entsprechen verschiedene derartige Pfade. Nach Voraussetzung über H_1 gibt es jedoch maximal M first-return-Loops gleicher Länge. Somit gilt $|\mathcal{W}_n| \leq M$. Da zudem $\{W^{a,q_1^{(n)}}, W^{a,q_2^{(n)}}, \dots, W^{a,q_M^{(n)}}\} \subseteq \mathcal{W}_n$ bereits eine M -elementige Menge ist, ergibt sich die Behauptung $|\mathcal{W}_n| = M$ (für n groß genug).

Damit kann der konjugierte Automorphismus $\tilde{\varphi}$ keine beschränkte Kodierlänge haben, da sonst für n viel größer als die Kodierlänge von $\tilde{\varphi}$ und so groß, daß die Punkte $\gamma(x^{a,q_m^{(n)}})$ und $\gamma(x^{b,q_{m'}^{(n)}})$ die oben angegebene Gestalt haben und $|\mathcal{W}_n| = M$ gilt, die identischen Blöcke $W^{a,q_m^{(n)}}$ und $W^{b,q_{m'}^{(n)}}$ auf gleiche Weise abgebildet würden (die Blöcke A, B liegen zu weit links und beeinflussen die lokale Abbildungsvorschrift nicht mehr):

$$\begin{aligned} W^{a,q_m^{(n)}} = W^{b,q_{m'}^{(n)}} &= \gamma(x^{b,q_{m'}^{(n)}})_{[0,i_n+j_n+|Q_n|]} = \tilde{\varphi}(\gamma(x^{b,q_{m'}^{(n)}}))_{[0,i_n+j_n+|Q_n|]} = \\ &= \tilde{\varphi}(\gamma(x^{a,q_m^{(n)}}))_{[0,i_n+j_n+|Q_n|]} = \gamma(x^{a,q_{m+1}^{(n)}})_{[0,i_n+j_n+|Q_n|]} = W^{a,q_{m+1}^{(n)}} \end{aligned}$$

Die Gleichung ergibt sofort einen Widerspruch zur paarweisen Verschiedenheit der Blöcke $W^{a,q_m^{(n)}}$ (mit $m \in \{1, 2, \dots, M\}$) und zeigt so die Behauptung. \square

Korollar 3.20 *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.19 existieren sogar überabzählbar viele Automorphismen endlicher Ordnung, die in keiner Graphendarstellung zu sliding-Block-Codes werden. Sowohl die Menge $\text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$ als auch ihr Komplement $\text{Aut}(\sigma) \setminus \text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$ haben in diesem Fall überabzählbare Kardinalität.*

Beweis: Offensichtlich hat ein transitiver, lokalkompakter Markovshift, der auf einem (BNPC)-Graphen darstellbar ist, stets eine überabzählbare Automorphismengruppe. Die Aussage über $\text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{G}}}^b(\sigma)$ folgt dann direkt aus Satz 3.28.

Für die zweite Aussage sei $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{N}$ unendlich. Zu einer unendlichen Menge von M -fach Pfaden $\mathcal{Q} := \{Q_n = [q_1^{(n)}; q_2^{(n)}; \dots; q_M^{(n)}] \mid n \in \mathbb{N}\}$ wie in Lemma 3.18, definiert man Abbildungen $\varphi_{\mathcal{N}} : X \rightarrow X$, die einen Punkt aus X scannen und jeden Block $p l^n r_0 r_1 \dots r_{i_n} q_m^{(n)}$ genau dann durch $p l^n r_0 r_1 \dots r_{i_n} q_{m+1}^{(n)}$ ersetzen, falls $n \in \mathcal{N}$ ist (Notation wie in Satz 3.19).

Dies ergibt eine überabzählbare Menge $\{\varphi_{\mathcal{N}} \mid \mathcal{N} \subseteq \mathbb{N} \text{ unendlich}\}$ von Automorphismen der Ordnung M , die in Verallgemeinerung des oben Gezeigten in keiner Graphendarstellung beschränkte Kodierlänge haben. \square

Als nächstes beweisen wir das Analogon zu Proposition 2.9 in [BLR] für Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum. Unser Beweis benutzt die gleiche Idee wie in der Originalarbeit, betont jedoch stärker die Konstruktivität der gesuchten Darstellung.

Satz 3.21 *Zu jedem Automorphismus endlicher Ordnung auf einem topologischen Markovshift (mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge) existiert eine Darstellung, in der dieser Automorphismus beschränkte Kodierlänge hat. Speziell läßt sich eine Darstellung konstruieren, in der der Automorphismus (und sein Inverses) ein 1-Block-Code wird. $\text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$ enthält daher immer die Menge der Automorphismen endlicher Ordnung.*

Beweis: Sei $X \subseteq \mathcal{A}_X^{\mathbb{Z}}$ ein beliebiger Shiftraum über dem (abzählbar unendlichen) Alphabet \mathcal{A}_X und sei $\varphi \in \text{Aut}(\sigma_X)$ ein Automorphismus endlicher Ordnung. Man konstruiert eine von φ abhängige Darstellung $Y \in \text{Pres}(X)$, so daß der zu φ konjugierte Automorphismus auf Y ein 1-Block-Code ist.

Sei dazu $N \in \mathbb{N}$ die Ordnung von φ , d.h. $\varphi^N = \text{Id}_X$. Die Abbildung:

$$\gamma : X \rightarrow (\mathcal{A}_X^N)^{\mathbb{Z}} \quad (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \begin{pmatrix} x_i \\ (\varphi(x))_i \\ (\varphi^2(x))_i \\ \vdots \\ (\varphi^{N-1}(x))_i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$$

vermittelt eine topologische Konjugation zwischen X und $Y := \gamma(X)$.

Die Injektivität von γ ist offensichtlich, da jeder Bildpunkt in der ersten Komponente jeder Koordinate die Symbole des Urbildpunktes enthält. Surjektivität folgt aus der Definition von Y . Unter Benutzung von $\varphi^n \circ \sigma_X = \sigma_X \circ \varphi^n$ ($n \in \mathbb{Z}$) bestätigt man durch einfache Rechnung, daß γ mit den Shiftabbildungen σ_X und σ_Y vertauscht. Die Stetigkeit von φ^n ($n \in \mathbb{Z}$) impliziert die Stetigkeit von γ in jeder Komponente, damit auch die Stetigkeit insgesamt. γ^{-1} ist durch das Weglassen der Komponenten 2 bis N gegeben. Diese Projektion auf die erste Komponente ist ebenfalls stetig.

Das Bild $Y = \gamma(X)$ hat als Zustandsraum eine Teilmenge von \mathcal{A}_X^N . Diese hat die gleiche Kardinalität wie \mathcal{A}_X . Y ist somit eine Darstellung von X . Sei $\tilde{\varphi} := \gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1}$ der zu φ konjugierte Automorphismus auf Y . Zu $y \in Y$ beliebig, sei $x \in X$ so, daß $y = \gamma(x)$. Wegen $\varphi^N = \text{Id}_X$ gilt dann:

$$\tilde{\varphi}(y) = (\gamma \circ \varphi \circ \gamma^{-1})(\gamma(x)) = \gamma(\varphi(x)) = \begin{pmatrix} (\varphi(x))_i \\ (\varphi^2(x))_i \\ \vdots \\ (\varphi^{N-1}(x))_i \\ (\varphi^N(x))_i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}} = \begin{pmatrix} (\varphi(x))_i \\ (\varphi^2(x))_i \\ \vdots \\ (\varphi^{N-1}(x))_i \\ x_i \end{pmatrix}_{i \in \mathbb{Z}}$$

$\tilde{\varphi}$ schiebt die Komponenten jeder Koordinate zyklisch um eine Stelle nach oben ($\tilde{\varphi}^{-1}$ entsprechend nach unten). Formal hat man folgende Abbildungsvorschrift:

$$\tilde{\varphi} : Y \rightarrow Y \quad \left(\begin{array}{c} y_i^{(1)} \\ y_i^{(2)} \\ \vdots \\ y_i^{(N-1)} \\ y_i^{(N)} \end{array} \right)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \left(\begin{array}{c} y_i^{(2)} \\ y_i^{(3)} \\ \vdots \\ y_i^{(N)} \\ y_i^{(1)} \end{array} \right)_{i \in \mathbb{Z}}$$

Damit ist $\tilde{\varphi}$ und auch $\tilde{\varphi}^{-1} = \tilde{\varphi}^{N-1}$ ein 1-Block-Code. Man hat die Inklusion: $\varphi \in \text{Aut}_\gamma^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\cup_Y}^b(\sigma) \subseteq \text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$. \square

Korollar 3.22 *Es gilt $\{\varphi \circ \sigma^i \mid \varphi \in \text{Aut}(\sigma) \text{ endlicher Ordnung} \wedge i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$.*

Beweis: Wie oben definiert man die Darstellung Y . Bezüglich dieser ist $\varphi \circ \sigma^i$ ein sliding-Block-Code mit Gedächtnis 0 und Vorschau i (falls $i \geq 0$) bzw. Gedächtnis $-i$ und Vorschau 0 (falls $i < 0$). Entsprechend für $(\varphi \circ \sigma^i)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \sigma^{-i}$. \square

Korollar 3.23 *Für alle Graphendarstellungen $Y \in \text{Graph}(X)$ eines transitiven, lokal-kompakten Markovshifts (X, σ) ohne die Eigenschaft (FMDP) ist die Differenzmenge $\text{Aut}_{\cup}^b(\sigma) \setminus \text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ (mit $\gamma : X \rightarrow Y$ eine beliebige topologische Konjugation) überabzählbar.*

Beweis: Beobachtung 3.2 und Satz 3.21. \square

Korollar 3.24 *Für transitive Markovshifts, die eine (BNPC)-Graphendarstellung haben, gilt $\text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{S}}}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$. Die Differenzmenge hat überabzählbare Kardinalität.*

Beweis: Nach Satz 3.21 gilt $\{\varphi \in \text{Aut}(\sigma) \mid \exists N \in \mathbb{N} : \varphi^N = \text{Id}_X\} \subseteq \text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$. Der Beweis zu Satz 3.19 und Korollar 3.20 liefert jedoch überabzählbar viele Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}(\sigma) \setminus \text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{S}}}^b(\sigma)$ endlicher Ordnung. \square

Satz 3.19 zeigt die Existenz von Automorphismen, die in keiner Graphendarstellung kodierlängenbeschränkt sind. In Abschnitt 3.1 haben wir dagegen Automorphismen kennengelernt, die in einer Graphendarstellung unbeschränkte Kodierlänge hatten, während sie in anderen Darstellungen sliding-Block-Automorphismen waren. Zudem haben wir gesehen, daß einzig die Potenzen der Shiftabbildung in allen (Graphen-)Darstellungen beschränkte Kodierlänge aufweisen.

Nun stellt sich die Frage, ob zu einem gegebenen Markovshift (X, σ) Darstellungen

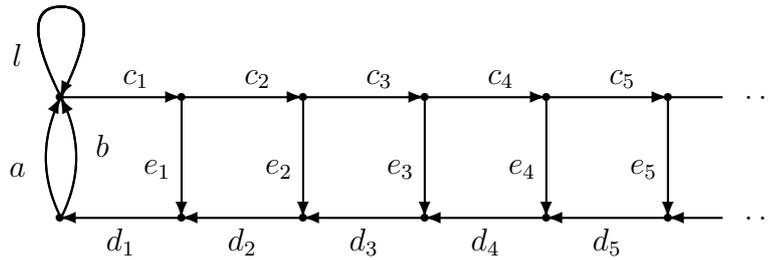


Abbildung 3.10: Graphendarstellung eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts.

$Y \in \text{Pres}(X)$ und topologische Konjugationen $\gamma : X \rightarrow Y$ existieren, bezüglich derer besonders wenige Automorphismen kodierlängenbeschränkt sind. Für solche Darstellungen wäre die Gruppe $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ im Hinblick auf ihre Untergruppenstruktur entsprechend klein. Im Extremfall könnte man die Existenz einer Darstellung Y^* und $\gamma^* : X \rightarrow Y^*$ vermuten, zu der $\text{Aut}_{\gamma^*}^b(\sigma)$ nur Potenzen der Shiftabbildung enthält.

Tatsächlich scheint $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ aber immer eine komplizierte Gruppe mit reicher Untergruppenstruktur zu sein:

Enthält eine Darstellung eines topologischen Markovshifts ein synchronisierendes Wort, so ist die Konstruktion entsprechender Markerautomorphismen möglich. Dies zeigt, daß dann die Untergruppe der Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge bereits sehr groß und komplex ist.

Primär wären somit Darstellungen ohne synchronisierende Worte interessant. In einem nicht-trivialen Resultat der Arbeit [FieD3] (Theorem 1.6) wurde bereits die Existenz solcher Darstellungen nachgewiesen. Leider ist auch hier $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ nicht besonders klein¹⁰, wie folgendes Beispiel zeigt:

Beispiel 3.25 Der transitive, lokalkompakte Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum sei durch die in Abbildung 3.10 gezeigte Graphendarstellung gegeben. Sei $y := l^\infty . l c_1 c_2 c_3 c_4 \dots$ und $\gamma : X \rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} l \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d_i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}^{\mathbb{Z}}$ die durch

$$(\gamma(x))_i := \begin{cases} \begin{pmatrix} x_i \\ 1 \end{pmatrix} & \text{falls } x_i = y_n \text{ und } x_{i-j} = y_0 \text{ für ein } n \geq 0 \text{ und } n^2 - 1 \leq j \leq n^2 + 1 \\ \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sonst} \end{cases}$$

definierte Abbildung.

$\gamma : X \rightarrow \gamma(X)$ ist dann eine Konjugation und $Y := \gamma(X) \in \text{Pres}(X)$ eine Darstellung ohne synchronisierendes Wort¹¹. Jede Involution $\tilde{\varphi}_n : Y \rightarrow Y$ ($n \in \mathbb{N}$), die einzig folgende 2 Blöcke vertauscht: $\begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} e_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} d_1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ (sonst keine Wirkung), hat beschränkte Kodierlänge in Y . Die Blöcke, auf die $\tilde{\varphi}_n$ wirkt, liegen außerhalb des Bildpunktes $\gamma(y)$. Symbole, die durch $\tilde{\varphi}_n$ verändert werden, sind deshalb immer von der Form

¹⁰Eine erste Vermutung war, daß in diesem Fall tatsächlich $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma) = \langle \sigma \rangle$ gelten würde.

¹¹Die Konstruktion der Darstellung $Y \in \text{Pres}(X)$ und die Tatsache, daß es sich um eine Präsentation ohne synchronisierende Blöcke handelt, geht auf D. Fiebig ([FieD3] Theorem 1.6) zurück.

(*)). Man erhält $\gamma^{-1} \circ \tilde{\varphi}_n \circ \gamma \in \text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$, wodurch die Existenz von Markerautomorphismen mit beschränkter Kodierlänge auf der Darstellung Y gezeigt ist.

3.3 Die Kardinalität von $\text{Aut}_X^b(\sigma)$

Wir wenden uns nun der Frage zu, wie viele Automorphismen beschränkter Kodierlänge es zu einer gegebenen Graphendarstellung eines topologischen Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet gibt. Aufgrund von Beobachtung 3.6 hängt diese Kardinalität höchstens von der gewählten Darstellung, nicht aber im Detail von der topologischen Konjugation in diese Darstellung ab. Es genügt daher $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ für beliebige Kantenshifts (X, σ) zu betrachten.

Wie schon in Abschnitt 2.1 ergibt sich ein Unterschied zwischen lokalkompakten und nicht lokalkompakten Markovshifts: Letztere erlauben in jeder Graphendarstellung überabzählbar viele, kodierlängenbeschränkte (involutorische) Automorphismen. Bei lokalkompakten Markovshifts mit der Eigenschaft (FMDP) gibt es aufgrund der bisherigen Ergebnisse, ebenfalls unabhängig von der benutzten Darstellung, immer nur abzählbar unendlich viele Automorphismen beschränkter Kodierlänge.

Für transitive, lokalkompakte Markovshifts ohne (FMDP) ist die Situation komplizierter: Zu jedem solchen Markovshift gibt es eine spezielle, durch State-Splittings erzeugbare Graphendarstellung, bezüglich der überabzählbar viele 1-Block-Automorphismen der Ordnung 2 existieren. Anhand eines Beispiels zeigen wir abschließend, daß eine allgemeine Graphendarstellung eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts ohne (FMDP) dagegen nur abzählbar viele kodierlängenbeschränkte Automorphismen zuläßt und somit die Kardinalität von $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ in diesem Fall echt darstellungsabhängig ist.

Der volle Bernoulli-Shift auf abzählbar unendlich vielen Symbolen hat in der Graphendarstellung mit nur einem Vertex und unendlich vielen Kanten, die an diesem Vertex starten und enden, bereits überabzählbar viele 1-Block-Automorphismen (beliebige Permutationen der Kantenmenge).

Für eine Graphendarstellung eines allgemeinen, nicht lokalkompakten Markovshifts ist dies nicht zu erwarten (vgl. den in Abbildung 2.3 skizzierten Graphen). Man kann jedoch ein nur leicht abgeschwächtes, allgemeingültiges Resultat erzielen, indem man anstelle von 1-Block-Automorphismen involutorische sliding-Block-Codes größerer Kodierlänge betrachtet.

Der Beweis des folgenden Satzes 3.26 basiert auf einer Modifikation einer bereits aus Abschnitt 2.1 bekannten Idee. Er liefert ein alternatives Argument für die Aussage von Satz 2.1 und verschärft diese noch, da hier sogar überabzählbar viele, gleichmäßig stetige Automorphismen der Ordnung 2 konstruiert werden.

Satz 3.26 *Für jede beliebige Graphendarstellung (X, σ) eines transitiven, nicht lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum ist die Untergruppe der kodierlängenbeschränkten Automorphismen $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ überabzählbar. Speziell gibt es ab einer festen Kodierlänge überabzählbar viele, involutorische sliding-Block-Automorphismen.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für einen Kantenshift $X = X_G$, wobei $G = (V, E)$ einen Vertex mit unendlichem Ausgangsgrad hat. Für den symmetrischen Fall einer Ecke mit unendlichem Eingangsgrad läßt sich der Beweis direkt übertragen.

Sei $v \in V$ ein Vertex, von dem unendlich viele Kanten $e_1, e_2, e_3, \dots \in E$ ausgehen. Wähle zu e_1 einen kürzestmöglichen Pfad p_1 von $\mathfrak{t}(e_1)$ zurück zu v . Entsprechend für e_2 . Ist $\mathfrak{t}(e_1)$ oder $\mathfrak{t}(e_2)$ bereits gleich v , so sind p_1 bzw. p_2 leer.

Zu einer 0/1-Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ definiert man eine Abbildung $\varphi_{(a_k)} : X \rightarrow X$, die einen Punkt $x \in X \subseteq E^{\mathbb{Z}}$ scannt und für alle $i \in \mathbb{N}$ einen Block der Form $(e_1 p_1)^{|e_2 p_2| e_{i+2}}$ genau dann durch einen Block der Form $(e_2 p_2)^{|e_1 p_1| e_{i+2}}$ sowie umgekehrt ersetzt, wenn $a_i = 1$ ist. Die Minimalität der Pfade p_1, p_2 garantiert die Wohldefiniertheit von $\varphi_{(a_k)}$. Man überzeugt sich leicht, daß $\varphi_{(a_k)}$ ein involutorischer sliding-Block-Code mit Gedächtnis $|e_1 p_1| \cdot |e_2 p_2| - 1$ und Vorschau $|e_1 p_1| \cdot |e_2 p_2|$ ist. Da zudem $\varphi_{(a_k)} \neq \varphi_{(b_k)}$ für zwei verschiedene 0/1-Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}, (b_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, hat man mit $\left\{ \varphi_{(a_k)} \mid (a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\} \subseteq \text{Aut}(\sigma)$ eine überabzählbare Menge von Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge auf X konstruiert. \square

Für den in Abbildung 2.3 gezeigten Beispielgraphen hat man so zu jeder Kodierlänge ≥ 4 (Gedächtnis ≥ 1 und Vorschau ≥ 2) überabzählbar viele Automorphismen. Man benutzt die Selbstschleife als e_1 und den Loop der Länge 2 als $e_2 p_2$. Zu kleineren Kodierlängen existieren dagegen jeweils nur endlich viele sliding-Block-Codes.

Betrachten wir nun einen lokalkompakten, nichttrivialen Markovshift (X, σ) . Die Frage nach der Kardinalität von $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ stellt sich nur, falls $\text{Aut}(\sigma)$ überabzählbar ist. Allgemein gilt $\{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \leq \text{Aut}_X^b(\sigma) \leq \text{Aut}(\sigma)$, so daß für abzählbare Automorphismengruppen $\text{Aut}(\sigma)$, unabhängig von der gewählten Darstellung (X, σ) , auch $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ abzählbar unendlich ist.

Für lokalkompakte, transitive Markovshifts mit überabzählbarer Automorphismengruppe kann man dagegen die Existenz spezieller Graphendarstellungen (X, σ) nachweisen, für die $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ überabzählbar ist.

Hierzu benötigen wir ein technisches Lemma, das es uns ermöglicht Doppelpfade durch State-Splittings zu isolieren:

Lemma 3.27 *Sei G ein gerichteter, lokal-endlicher Graph und $[p; q]$ ein Doppelpfad in G . Durch eine endliche Anzahl von State-Splittings läßt sich ein neuer, ebenfalls lokal-endlicher Graph G' erzeugen, der anstelle von $[p; q]$ einen Doppelpfad $[p'; q']$ (mit $\mathfrak{i}([p'; q']) = \mathfrak{i}([p; q])$, $\mathfrak{t}([p'; q']) = \mathfrak{t}([p; q])$ und $||[p'; q']|| = ||[p; q]||$) aus zwei isolierten Pfaden p', q' enthält. Hierbei wird G nur lokal in der unmittelbaren Umgebung von $[p; q]$ abgeändert, d.h. die Splittings wirken nur auf die Vertices des Doppelpfades $[p; q]$. Deshalb sind die durch G und G' dargestellten Kantenshifts topologisch konjugiert zueinander.*

Beweis: Zunächst definieren wir 3 elementare Graphenumformungen:

1. Auseinanderziehen eines einfachen Loops mit einer auslaufenden Kante (vgl. Abbildung 3.11):

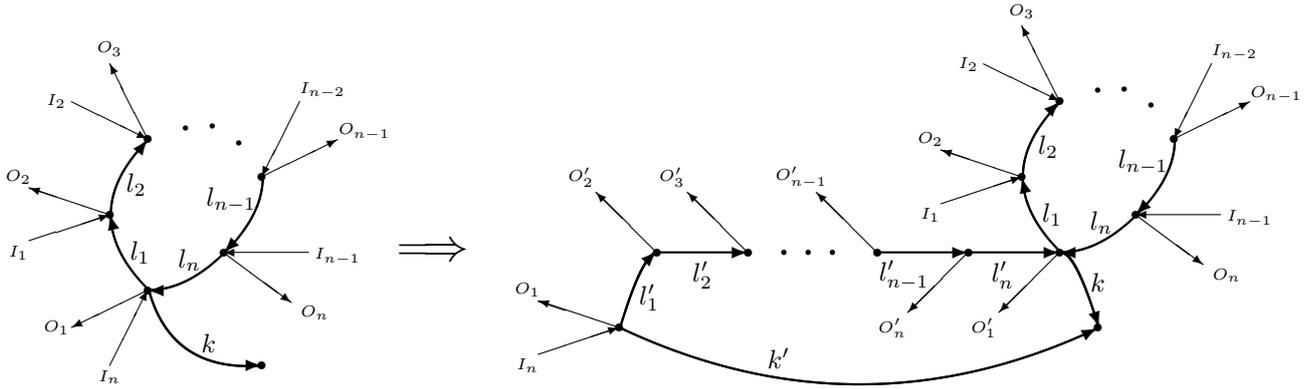


Abbildung 3.11: Auseinanderziehen des einfachen Loops $l_1 l_2 \dots l_n$ ($n \in \mathbb{N}$) mit einer auslaufenden Kante k durch in-Splittings an den Vertices $i(k), i(l_2), i(l_3), \dots, i(l_n)$.

Sei $l := l_1 l_2 l_3 \dots l_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein einfacher Loop in G mit $l_i \in E$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), $t(l_i) = i(l_{i+1})$ für $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und $t(l_n) = i(l_1)$ und sei $k \in E$ eine auslaufende Kante mit $i(k) = t(l_n)$ und $k \neq l_1$.

Man definiert die Mengen $O_i := \{e \in E \mid i(e) = i(l_i) \wedge e \neq l_i \wedge e \neq k\}$ sowie $I_i := \{e \in E \mid t(e) = t(l_i) \wedge e \neq l_i\}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Zunächst führt man ein in-Splitting am Vertex $i(k) = i(l_1) = t(l_n)$ durch, wobei man die Menge der einlaufenden Kanten in I_n und $\{l_n\}$ partitioniert. Die bei $i(k)$ auslaufenden Kanten $O_1 \dot{\cup} \{l_1\} \dot{\cup} \{k\}$ werden entsprechend dupliziert (Die Kopien sind in Abbildung 3.11 mit Strichen gekennzeichnet). Nun führt man weitere in-Splittings an den Vertices $i(l_2), i(l_3), \dots, i(l_n)$ durch. Die einlaufenden Kanten an $i(l_i)$ werden dabei in $I_{i-1} \dot{\cup} \{l_{i-1}\}$ und $\{l'_{i-1}\}$ ($i := 2, 3, \dots, n$) unterteilt.

2. Auseinanderziehen eines einfachen Loops mit einer einlaufenden Kante (wie Punkt 1 am transponierten Graphen):

Sei $l := l_1 l_2 l_3 \dots l_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein einfacher Loop in G wie oben und sei $k \in E$ eine einlaufende Kante mit $t(k) = i(l_1)$ und $k \neq l_n$.

Wieder definiert man die Mengen $I_i := \{e \in E \mid t(e) = t(l_i) \wedge e \neq l_i \wedge e \neq k\}$ und $O_i := \{e \in E \mid i(e) = i(l_i) \wedge e \neq l_i\}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$). Man führt ein out-Splitting am Vertex $t(k) = i(l_1) = t(l_n)$ durch, bei dem die Menge der auslaufenden Kanten in O_1 und $\{l_1\}$ unterteilt wird. Anschließend führt man weitere out-Splittings an den Vertices $t(l_{n-1}), t(l_{n-2}), \dots, t(l_1)$ aus. Hierbei werden die Nachfolgerkanten von $t(l_i)$ in $O_{i+1} \dot{\cup} \{l_{i+1}\}$ und $\{l'_{i+1}\}$ ($i := n-1, n-2, \dots, 1$) partitioniert.

3. Isolieren eines einfachen Pfades (vgl. Abbildung 3.12):

Sei $p := f_1 f_2 f_3 \dots f_n$ ($n \in \mathbb{N}$) ein einfacher (möglicherweise geschlossener) Pfad in G mit $f_i \in E$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$), $t(f_i) = i(f_{i+1})$ für $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Seien $I_i := \{e \in E \mid t(e) = t(f_i) \wedge e \neq f_i\}$ und $O_i := \{e \in E \mid i(e) = i(f_{i+1}) \wedge e \neq f_{i+1}\}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$). Zunächst führt man ein out-Splitting am Vertex $t(f_{n-1})$ durch, wobei man die Nachfolgerkantenmenge in O_{n-1} und $\{f_n\}$ partitioniert. Die bei $t(f_{n-1})$ einlaufenden Kanten $I_{n-1} \dot{\cup} \{f_{n-1}\}$ werden verdoppelt (In Abbildung 3.12 sind die Kopien mit einem Strich gekennzeichnet). Anschließend trennt man die neu entstandene

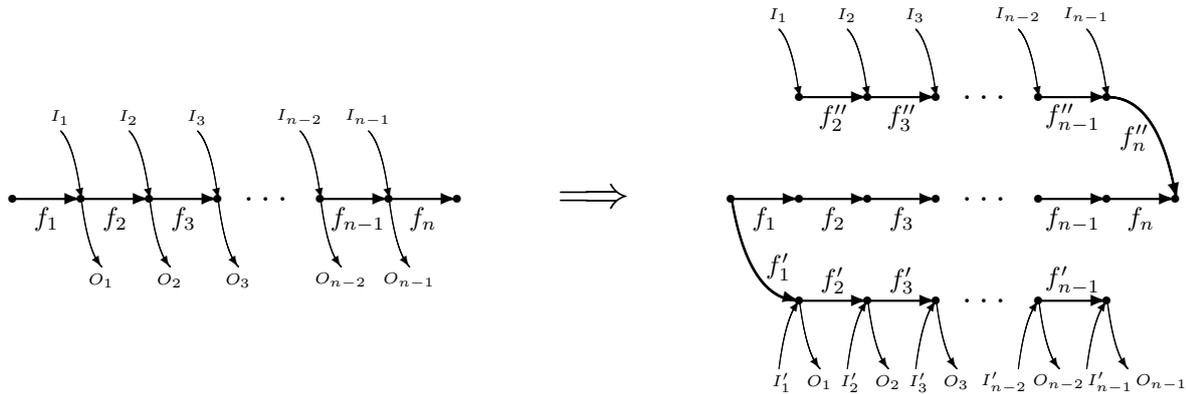


Abbildung 3.12: Isolieren eines einfachen Pfades $f_1 f_2 \dots f_n$ ($n \in \mathbb{N}$) durch out-Splittings an den Vertices $\mathbf{t}(f_{n-1}), \mathbf{t}(f_{n-2}), \dots, \mathbf{t}(f_2), \mathbf{t}(f_1)$ sowie in-Splittings an den Vertices $\mathbf{i}(f_2), \mathbf{i}(f_3), \dots, \mathbf{i}(f_n)$.

Verzweigung durch out-Splittings der Vertices $\mathbf{t}(f_{n-2}), \mathbf{t}(f_{n-3}), \dots, \mathbf{t}(f_2), \mathbf{t}(f_1)$ weiter auf. Dabei teilt man für $i := n - 2, n - 3, \dots, 2, 1$ die an $\mathbf{t}(f_i)$ auslaufenden Kanten in $O_i \dot{\cup} \{f'_{i+1}\}$ und $\{f_{i+1}\}$ auf. Der ursprüngliche Pfad ist nun "halb"-isoliert. Die noch störenden einlaufenden Kanten entfernt man durch entsprechende in-Splittings an den Vertices $\mathbf{i}(f_2)$ (Aufteilung der Vorgängerkanten in I_1 und $\{f_1\}$; in Abbildung 3.12 Bezeichnung der duplizierten Kanten mit zwei Strichen.) sowie $\mathbf{i}(f_3), \mathbf{i}(f_4), \dots, \mathbf{i}(f_n)$ (mit Kantenaufteilung $I_{i-1} \dot{\cup} \{f''_{i-1}\}$ und $\{f_{i-1}\}$ für $i := 3, 4, \dots, n$).

Sei nun $[p; q]$ ein Doppelpfad in $G = (V, E)$ und sei $H_{[p; q]} = (V_{[p; q]}, E_{[p; q]})$ der endliche Teilgraph in G , der den Doppelpfad $[p; q]$ und alle angrenzenden Kanten enthält, d.h.

$$E_{[p; q]} := \{e \in E \mid \exists f \in [p; q] : \{\mathbf{i}(e), \mathbf{t}(e)\} \cap \{\mathbf{i}(f), \mathbf{t}(f)\} \neq \emptyset\}$$

$$V_{[p; q]} := \{\mathbf{i}(e), \mathbf{t}(e) \mid e \in E_{[p; q]}\}$$

Durch eine endliche Folge von Umformungen vom Typ 1 und 2 läßt sich ein Graph \tilde{G} konstruieren, der anstelle von $[p; q]$ einen Doppelpfad $[\tilde{p}; \tilde{q}]$ enthält, wobei \tilde{p} und \tilde{q} einfache Pfade sind. Diese lassen sich durch je eine Transformation vom Typ 3 zu isolierten Pfaden p' und q' machen, wodurch der gesuchte Graph G' inklusive Doppelpfad $[p'; q']$ entsteht.

Alle gemachten Umformungen wirken dabei nur auf Kanten des ursprünglichen Graphen G , die mindestens einen Vertex mit $[p; q]$ gemein haben, sowie auf neu erzeugte Kanten. Die Struktur des Graphen G außerhalb von $H_{[p; q]}$ bleibt daher erhalten. Zudem bleibt auch die lokale Endlichkeit in jedem Schritt erhalten.

Wie oben beschrieben, lassen sich die Graphenumformungen 1, 2 und 3 selbst auf eine endliche Folge von in- und out-Splittings reduzieren. Der durch den Graphen G gegebene Kantenshift ist somit topologisch konjugiert zu dem durch G' dargestellten Kantenshift. \square

Satz 3.28 Sei (X, σ) ein lokalkompakter, transitiver Markovshift mit abzählbar unendlichem Zustandsraum und überabzählbarer Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$. Es existiert eine Graphendarstellung $Y \in \text{Graph}(X)$, so daß die zugehörige Untergruppe der Automorphismen

mit beschränkter Kodierlänge $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$ (mit $\gamma : X \rightarrow Y$ beliebige topologische Konjugation zwischen X und Y) überabzählbar ist. Diese Graphendarstellung kann so gewählt werden, daß in ihr überabzählbar viele, involutorische 1-Block-Automorphismen existieren.

Beweis: Man beginnt mit einer beliebigen Graphendarstellung $X = X_G$ des Markovshifts durch einen lokal-endlichen, stark zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$.

Nach Voraussetzung ist $\text{Aut}(\sigma)$ überabzählbar. Aus Satz 2.8 ist bekannt, daß der Graph G dann unendlich viele paarweise kantendisjunkte Doppelpfade enthält. Aufgrund der lokalen Kompaktheit von X (G hat an jedem Vertex endlichen Ein- und Ausgangsgrad), kann \mathfrak{dE} eine unendliche Menge paarweise knotendisjunkter Doppelpfade $D := \{[p_1; q_1], [p_2; q_2], [p_3; q_3], \dots\}$ gewählt werden.

Die gesuchte Graphendarstellung $Y = Y_{G'}$ konstruiert man mit Hilfe von Lemma 3.27. Wie dort beschrieben, modifiziert man den Graphen G lokal an jedem Doppelpfad $[p_i; q_i]$ ($i \in \mathbb{N}$) durch eine endliche Anzahl von Splittings. Zu jedem Doppelpfad $[p_i; q_i]$ in G erhält man so einen Doppelpfad $[p'_i; q'_i]$ in G' , wobei p'_i und q'_i isolierte Pfade gleicher Länge sind, die an je einem gemeinsamen Vertex beginnen und enden.

Der Austausch der Blöcke p'_i und q'_i innerhalb eines Punktes $y \in Y$ kann nun als involutorischer 1-Block-Code realisiert werden: Sei $p'_i = e_1^{(i)} e_2^{(i)} \dots e_{n_i}^{(i)}$ und $q'_i = f_1^{(i)} f_2^{(i)} \dots f_{n_i}^{(i)}$ mit $n_i := |p'_i| = |q'_i|$, so definiert man $\phi_i : Y \rightarrow Y$ durch:

$$(\phi_i(y))_j := \begin{cases} f_k^{(i)} & \text{falls } y_j = e_k^{(i)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n \\ e_k^{(i)} & \text{falls } y_j = f_k^{(i)} \text{ mit } 1 \leq k \leq n \\ y_j & \text{sonst} \end{cases} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

Anhand der Definition sieht man sofort ein, daß ϕ_i shiftkommutierend und stetig ist. Die Wohldefiniertheit der Abbildung sowie ihre Bijektivität folgt aus der Isoliertheit der Pfade p'_i und q'_i . Schließlich rechnet man $\phi_i^2 = \text{Id}_Y$ direkt nach.

Die Elemente der Menge $D' := \{[p'_1; q'_1], [p'_2; q'_2], [p'_3; q'_3], \dots\}$ sind wieder paarweise knotendisjunkt. Verschiedene Automorphismen ϕ_i, ϕ_j ($i, j \in \mathbb{N}$) vertauschen somit. Produkte von diesen sind wohldefinierte 1-Block-Abbildungen der Ordnung 2.

Definiert man daher $\varphi_{(a_k)} : Y \rightarrow Y$ als $\varphi_{(a_k)} := \prod_{i=1}^{\infty} \phi_i^{a_i}$ für $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, so hat man auf Y eine überabzählbare¹² Menge von Automorphismen beschränkter Kodierlänge; hier sogar involutorische 1-Block-Codes. \square

Korollar 3.29 Für jeden transitiven Markovshift (X, σ) über einem abzählbar unendlichen Alphabet hat $\text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{b}}}^b(\sigma)$ bereits die gleiche Kardinalität wie die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ selbst.

Beweis: Direkte Folgerung aus den Sätzen 3.26 und 3.28 sowie der Tatsache, daß $\{\sigma^i \mid i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \text{Aut}_{\cup_{\mathfrak{b}}}^b(\sigma)$. \square

¹²Zum Nachweis von $\varphi_{(a_k)} \neq \varphi_{(b_k)}$ mit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \neq (b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ betrachtet man zu $i \in \mathbb{N}$ mit $a_i \neq b_i$ einen Punkt $y \in Y$ mit $y[0, |p'_i| - 1] = p'_i$. Ein solcher existiert aufgrund des starken Zusammenhangs von G' .

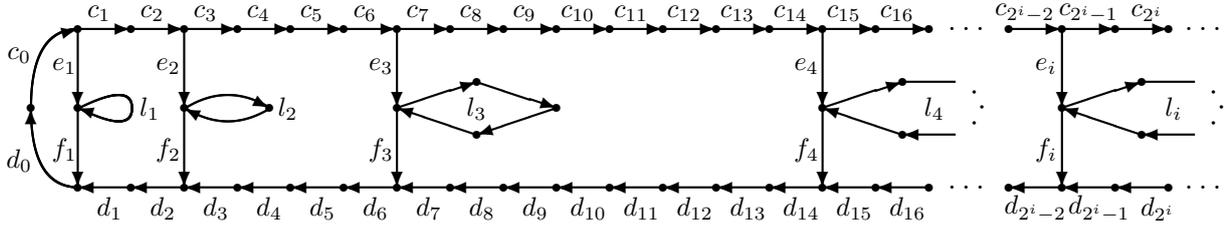


Abbildung 3.13: Lokalkompakter, transitiver Kantenshift mit überabzählbarer Automorphismengruppe. Der gezeigte Graph besteht aus einer beidseitig-unendlichen Kette von Kanten d_i, c_i ($i \in \mathbb{N}_0$ mit $t(d_{i+1}) = i(d_i)$, $t(d_0) = i(c_0)$, $t(c_i) = i(c_{i+1})$) sowie einer Folge von disjunkten, einfachen Loops l_i ($i \in \mathbb{N}$) der Länge 2^{i-1} . Diese sind jeweils durch Kanten e_i bzw. f_i mit der Kette verbunden ($i(e_i) = t(c_{2^i-2})$, $t(e_i) = i(f_i) = i(l_i)$, $t(f_i) = i(d_{2^i-2})$). Durch die exponentiell wachsende Länge sowie den Abstand der Loops l_i , läßt sich direkt zeigen, daß die Gruppe der Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge für diese Graphendarstellung abzählbar ist.

Anhand eines Beispiels zeigen wir nun, daß für lokalkompakte, transitive Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge und überabzählbarer Automorphismengruppe die Kardinalität von $\text{Aut}_\gamma^b(\sigma)$, $Y \in \text{Pres}(X)$ und $\gamma : X \rightarrow Y$ eine topologische Konjugation, tatsächlich darstellungsabhängig ist. Anders als im nicht lokalkompakten Fall existieren neben den in Satz 3.28 konstruierten Graphendarstellungen mit überabzählbar vielen Automorphismen beschränkter Kodierlänge auch solche, die nur abzählbar viele sliding-Block-Automorphismen zulassen. Die Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen zu verschiedenen (Graphen-)Darstellungen sind somit im allgemeinen nicht isomorph zueinander.

Beispiel 3.30 Für den in Abbildung 3.13 skizzierten transitiven, lokalkompakten Kantenshift (X, σ) ist $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ abzählbar, obwohl $\text{Aut}(\sigma)$ überabzählbar ist.

Um dies zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß zu jedem $N \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ existieren, so daß sowohl φ als auch φ^{-1} ein (N, N) -sliding-Block-Code ist.

Sei dazu $G = (V, E)$ der in Abbildung 3.13 gezeigte Graph und sei $G_i = (V_i, E_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) der stark zusammenhängende Teilgraph mit:

$$E_i := \{c_j, d_j \mid 0 \leq j \leq 2^i - 2\} \cup \{e_j, f_j \mid 1 \leq j \leq i\} \cup \bigcup_{j=1}^i \{e \in E \mid e \in l_j\}$$

$$V_i := \{v \in V \mid \exists e \in E_i : i(e) = v\}$$

Behauptung: *Außerhalb des Teilgraphen G_{N+1} wirkt jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ mit Kodierlänge $\leq 2N + 1$ wie eine Potenz σ^n der Shiftabbildung mit $|n| \leq N$.*

Beweis: Aufgrund der Stetigkeit von φ ist mit ${}_0[c_0] \subsetneq X$ auch das Urbild $\varphi^{-1}({}_0[c_0]) \subsetneq X$ kompakt-offen und läßt sich daher durch endlich viele Nullzylinder überdecken. Sei $F \subsetneq E$ endlich, so daß $\varphi^{-1}({}_0[c_0]) \subseteq \bigcup_{f \in F} {}_0[f]$.

Nun wählt man $M_\varphi \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i > M_\varphi$ der Loop l_i keine Kante aus F enthält. Für das Bild des Punktes $l_i^\infty \in \text{Per}_{2^{i-1}}^0(X)$ gilt dann: $\varphi(l_i^\infty) \in \text{Per}_{2^{i-1}}^0(X)$ und $(\varphi(l_i^\infty))_j \neq c_0$ für alle $j \in \mathbb{Z}$.

Dies erzwingt $\varphi(l_i^\infty) \in \text{Orb}(l_1^\infty)$ für alle $i > M_\varphi$. Insbesondere gilt natürlich $\varphi(l_1^\infty) = l_1^\infty$, da dies der einzige Punkt in X von Periode 1 ist.

Seien nun $p_i := f_1 d_0 c_0 c_1 c_2 \dots c_{2^{i-2}} e_i$ und $q_i := f_i d_{2^{i-2}} \dots d_2 d_1 d_0 c_0 e_1$ ($i \in \mathbb{N}$). Es gilt $|p_i| = |q_i| = 2^i + 2$. Weiterhin seien $p_\infty := f_1 d_0 c_0 c_1 c_2 c_3 \dots$ und $q_\infty := \dots d_3 d_2 d_1 d_0 c_0 e_1$. Man bezeichne die Kanten der Loops l_i fortlaufend durch $l_i^{(j)}$ ($j \in \{1, 2, \dots, 2^{i-1}\}$, $i \in \mathbb{N}$), so daß $l_i = l_i^{(1)} l_i^{(2)} l_i^{(3)} \dots l_i^{(2^{i-1})} \in \mathcal{B}_{2^{i-1}}(X)$.

Zunächst betrachtet man die Bilder der Punkte $x^{(i)} := l_1^\infty p_i l_i \cdot l_i q_i l_1^\infty \in X$ für $i > \max\{N + 1, M_\varphi\}$ sowie $x^{(+)} := l_1^\infty \cdot l_1^N p_\infty \in X$; $x^{(-)} := q_\infty l_1^N \cdot l_1^\infty \in X$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \forall j \leq -3 \cdot 2^{i-1} - 3 - N : & \quad (\varphi(x^{(i)}))_j = l_1^{(1)} \\ \forall -2^{i-1} + N \leq j \leq 2^{i-1} - N - 1 : & \quad (\varphi(x^{(i)}))_j \in l_i \\ \forall j \geq 3 \cdot 2^{i-1} + 2 + N : & \quad (\varphi(x^{(i)}))_j = l_1^{(1)} \end{aligned} \quad (\text{BP})$$

Ein Bildpunkt $\varphi(x^{(i)})$ besteht damit aus einem Mittelblock der Länge $3 \cdot 2^i + 2N + 4$, der rechts und links von halbunendlichen Worten l_1^∞ umrahmt wird. Eine einfache Rechnung bestätigt, daß dieser Mittelblock genau 2 vollständige Loops l_i enthält.

Nach Wahl von i gilt: $2^{i-1} > 2N$. Die Länge des Mittelblockes ergibt eine obere Schranke:

$$3 \cdot 2^i + 2N + 4 - |p_i| - |q_i| = 3 \cdot 2^i + 2N + 4 - 2 \cdot (2^i + 2) = 2^i + 2N < 3 \cdot 2^{i-1} = 3 |l_i|$$

Aus (BP) folgt zudem: $(2^{i-1} - N - 1) - (-2^{i-1} + N) + 1 = 2 \cdot 2^{i-1} - 2N > 2^{i-1} = |l_i|$

Damit hat $\varphi(x^{(i)})$ folgende Struktur:

$$\varphi(x^{(i)}) := l_1^\infty \underbrace{? ? ?}_{\text{Block}} d_0 c_0 c_1 \dots c_{2^{i-2}} e_i l_i l_i f_i d_{2^{i-2}} \dots d_1 d_0 c_0 \underbrace{? ? ?}_{\text{Block}} l_1^\infty$$

wobei die Nullkoordinate in dem Block $l_i^{(2^{i-1}-N)} \dots l_i^{(2^{i-1})} l_i^{(1)} \dots l_i^{(N+1)}$ liegt und die beiden unbekannt, nichtleeren Blöcke zusammen genau eine Länge von $2N + 2$ Symbolen haben. Sie enthalten deshalb höchstens Kanten aus dem Teilgraphen G_n mit $2^n \leq N$. Diese Blöcke sind zudem, unabhängig von der Wahl von i , immer gleich. Bezeichnet man sie mit $b^{(+)}$ und $b^{(-)}$, so erhält man:

$$\begin{aligned} (\varphi(x^{(+)}))_{(-\infty, 2^i]} &= (\varphi(x^{(i)}))_{(-\infty, -2^{i-1}-N-2]} = l_1^\infty b^{(+)} d_0 c_0 c_1 \dots c_{2^{i-1}-|b^{(+)}|} \\ (\varphi(x^{(-)}))_{[2^{i-1}+N+1, \infty)} &= (\varphi(x^{(i)}))_{[2^{i-1}+N+1, \infty)} = d_{2^{i-1}-|b^{(-)}|} \dots d_1 d_0 c_0 b^{(-)} l_1^\infty \end{aligned}$$

Also $\varphi(x^{(+)}) = l_1^\infty \cdot b^{(+)} p_\infty$ und $\varphi(x^{(-)}) = q_\infty b^{(-)} \cdot l_1^\infty$.

Weiterhin gilt $\varphi(l_i^\infty) = \sigma^{N+1-|b^{(+)}|}(l_i^\infty)$ sogar für $i > N + 1$, was man wie folgt einsieht:
 Sei $y^{(i)} := l_1^\infty \cdot l_1^N p_i l_i^\infty$ für $i > N + 1$. Aufgrund der festen Kodierlänge von φ ergibt sich:

$$(\varphi(y^{(i)}))_{(-\infty, 2^i]} = (\varphi(x^{(+)}))_{(-\infty, 2^i]} = l_1^\infty b^{(+)} d_0 c_0 c_1 \dots c_{2^i-1-|b^{(+)}|}$$

Entsprechend ist $\varphi(y^{(i)})$ ab der Koordinate $2^i + 2N + 2$ periodisch mit kleinster Periode 2^{i-1} .
 Ein entsprechender Block $(\varphi(y^{(i)}))_{[2^i+2N+2, 2^i+2N+1+2^{i-1}]}$ enthält daher entweder nur Kanten aus l_i oder nur aus dem Teilgraphen G_{i-2} . Die zweite Möglichkeit wird ausgeschlossen, da kein Pfad von $t(c_{2^i-1-|b^{(+)}|})$ zurück zu einem Knoten aus V_{i-2} mit Länge höchstens $2N + 1$ existiert.

Der kürzeste Pfad von $t(c_{2^i-1-|b^{(+)}|})$ zu $i(d_{2^{i-2}-2})$ enthält den Teilpfad $e_i f_i \dots d_{2^i-1-|b^{(+)}|} \dots d_{2^{i-1}-1}$.
 Für dessen Länge L gilt:

$$\begin{aligned} L &\geq 2 + (2^i - 1 - |b^{(+)}|) - (2^{i-2} - 1) + 1 = 3 \cdot 2^{i-2} + 3 - |b^{(+)}| \geq 3 \cdot 2^{i-2} - 2N + 2 \geq \\ &\geq 3 \cdot 2N - 2N + 2 \geq 4N + 2 \end{aligned}$$

In den letzten Abschätzungen wurde $|b^{(+)}| \leq 2N + 1$, $i - 1 \geq N + 1$ und $2^{i-2} \geq 2N$ benutzt.

Ein Vergleich von $y^{(i)}$ und $\varphi(y^{(i)})$ ab der Koordinate $2^i + 2N + 2$ zeigt nun, daß $\varphi(l_i^\infty) = \sigma^{N+1-|b^{(+)}|}(l_i^\infty)$:

$$\begin{array}{cccccccccccc} y^{(i)} = & l_1^\infty \cdot l_1^N & f_1 & d_0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{2^i-2} & e_i & l_i^{(1)} & \dots & l_i^{(N)} & \dots & l_i^{(1)} & \dots \\ & & \uparrow & & & & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{Koord.:.} & N & & & & & & & & 2^i+N+2 & & 2^i+2N+1 & & 3 \cdot 2^{i-1}+N+2 & \\ \\ \varphi(y^{(i)}) = & l_1^\infty \cdot b^{(+)} & d_0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{2^i-1-|b^{(+)}|} & \dots & c_{2^i-2} & e_i & l_i^{(1)} & \dots & l_i^{(2N+1-|b^{(+)}|)} & \dots & l_i^{(N+2-|b^{(+)}|)} & \dots \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ \text{Koord.:.} & |b^{(+)}| & & & 2^i & & & & & 2^i+|b^{(+)}|-1 & & 2^i+2N+1 & & 3 \cdot 2^{i-1}+N+2 & \end{array}$$

Entsprechende Überlegungen gelten für die Punkte $z^{(i)} := l_i^\infty q_i l_1^N \cdot l_1^\infty$ ($i > N + 1$).

Tritt in einem Punkt $x \in X$ an der Koordinate $j \in \mathbb{Z}$ eine Kante aus $E \setminus E_{N+1}$ auf, so läßt sich der Punkt lokal, d.h. in einem (N, N) -Block um diese Kante, durch einen entsprechenden $(2N + 1)$ -Block aus einem der Punkte $y^{(i)}$ bzw. $z^{(i)}$ mit $i > N + 1$ approximieren, der nur Kanten aus $E \setminus E_N$ enthält. Die j -te Koordinate des Bildpunktes $\varphi(x)$ liegt dann fest und entspricht genau $(\sigma^{N+1-|b^{(+)}|}(x))_j = x_{j+N+1-|b^{(+)}|}$. φ wirkt außerhalb des endlichen Teilgraphen G_{N+1} wie $\sigma^{N+1-|b^{(+)}|}$. Wegen $1 \leq |b^{(+)}| \leq 2N + 1$ folgt die Behauptung. \square

Sei nun $n \in \mathbb{Z}$ mit $|n| \leq N$ fest gewählt. Wir zeigen, daß es nur endlich viele Automorphismen $\varphi : X \rightarrow X$ geben kann, die Kodierlänge $\leq 2N + 1$ haben und außerhalb von G_{N+1} wie σ^n wirken.

Da φ ein (N, N) -sliding-Block-Code sein soll, genügt es, die Wirkung von φ auf allen Blöcken der Länge $(2N + 1)$, d.h. die φ -induzierende Abbildung $\Phi : \mathcal{B}_{2N+1}(X) \rightarrow E$ mit $\varphi = \Phi_{\infty}^{[-N, N]}$ zu kennen.

Das bisher Bewiesene legt Φ bereits auf allen Blöcken aus $\mathcal{B}_{2N+1}(X)$ fest, die mindestens eine Kante aus $E \setminus E_{N+1}$ enthalten (lokale Approximation durch einen $(2N + 1)$ -Block aus $y^{(i)}$ bzw. $z^{(i)}$ mit $i > N + 1$). Es genügt deshalb zu zeigen, daß für Blöcke $b \in \mathcal{B}_{2N+1}(X)$, die nur Kanten aus E_{N+1} enthalten, auch $\Phi(b) \in E_{N+1}$ gilt. Dann gibt es höchstens $|E_{N+1}|^{|E_{N+1}|^{2N+1}}$ verschiedene $(2N + 1)$ -Blockabbildungen Φ , die einen Automorphismus φ wie oben induzieren können.

Betrachte dazu den Punkt

$$x_b := \dots d_{2N+1+1} d_{2N+1} d_{2N+1-1} \cdot \underbrace{\quad ? \quad ? \quad ? \quad}_{\text{Block 1}} b \underbrace{\quad ? \quad ? \quad ? \quad}_{\text{Block 2}} c_{2N+1-1} c_{2N+1} c_{2N+1+1} \dots \in X$$

wobei die beiden nicht näher bezeichneten Blöcke jeweils kürzeste Pfade von $\mathfrak{t}(d_{2N+1-1})$ zu $\mathfrak{i}(b)$ bzw. von $\mathfrak{t}(b)$ zu $\mathfrak{i}(c_{2N+1-1})$ in G_{N+1} sind. Unabhängig von der Wahl von b ist deren Länge jeweils durch $2^{N+2} + 2^N - 2$ nach oben beschränkt. Der gesamte Block aus G_{N+1} hat somit höchstens Länge $L := 2 \cdot (2^{N+2} + 2^N - 2) + 2N + 1 = 2^{N+3} + 2^{N+1} + 2N - 3$.

Nach den bisherigen Ergebnissen hat das Bild von x_b folgende Gestalt:

$$\varphi(x_b) = \sigma^n(\dots d_{2N+1+1} d_{2N+1} d_{2N+1-1} \cdot \underbrace{\quad ? \quad ? \quad ? \quad}_{\text{Block 1}} c_{2N+1-1} c_{2N+1} c_{2N+1+1} \dots) \in X$$

Wieder hat der mittlere Block höchstens Länge L . Er enthält deshalb nur Kanten aus E_{N+1} , da der kürzeste Pfad von $\mathfrak{t}(d_{2N+1-1})$ nach $\mathfrak{i}(c_{2N+1-1})$, der eine Kante aus $E \setminus E_{N+1}$ enthält bereits eine Länge von $2^{N+3} + 2^{N+2} - 2$ hat.

Eine einfache Abschätzung ergibt:

$$2^{N+3} + 2^{N+2} - 2 = 2^{N+3} + 2^{N+1} + 4 \cdot 2^{N-1} - 2 \geq 2^{N+3} + 2^{N+1} + 4 \cdot N - 2 = L + 2N + 1 > L$$

Man hat daher höchstens $(2N + 1) \cdot |E_{N+1}|^{|E_{N+1}|^{2N+1}}$ Automorphismen mit einer Kodierlänge $\leq 2N + 1$.

Die Menge der kodierlängenbeschränkten Automorphismen $\text{Aut}_X^b(\sigma)$ auf diesem Kantenshift ist daher abzählbar unendlich, obwohl für (X, σ) , aufgrund der Existenz unendlich vieler kantendisjunkter Doppelpfade, die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ selbst überabzählbar ist.

Kapitel 4

Automorphismen bei "Unendlich"

4.1 Automorphismengruppen mit der Struktur einer direkten Summe

In dem Forschungsartikel [FF3] wurde von D. Fiebig und U.-R. Fiebig gezeigt, daß die Automorphismengruppe eines codierten Systems oft eine direkte Summe der von der Shiftabbildung erzeugten, unendlichen zyklischen und einer weiteren abstrakten Gruppe ist. Für SFTs ist eine derartige Zerlegung bisher nicht bekannt.

Wir definieren in diesem Abschnitt eine Klasse transitiver, lokalkompakter Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet, deren Elemente sich als Kantenshifts auf speziellen "ausgedünnten" Graphen darstellen lassen. Die Struktur dieser Graphen erzwingt, daß alle Automorphismen die σ -Orbits zweiseitig-unendlicher, einfacher Wege in sich abbilden und deshalb auf dem Komplement einer endlichen Kantenmenge wie Potenzen der Shiftabbildung wirken.

Dies ermöglicht es, die Automorphismengruppe dieser Markovshifts wie oben als direkte Summe zu schreiben. Die abstrakte Gruppe, die hierbei als zweiter Summand auftritt, muß vollständig nicht-abelsch (triviales Zentrum) sein. Sie umfaßt genau diejenigen Automorphismen, die nur auf dem σ -Orbit einer kompakten Menge wirken, der zudem keinen zweiseitig-unendlichen, einfachen Weg innerhalb der Graphendarstellung enthält.

Anhand einfacher Beispiele sieht man, daß Automorphismen topologischer Markovshifts im allgemeinen nicht zwischen zweiseitig-unendlichen Wegen und zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen einer Graphendarstellung unterscheiden.

Wir illustrieren dieses Verhalten anhand des in Abbildung 4.1 dargestellten Graphen. Auf dem zugehörigen Kantenshift (X, σ) betrachten wir folgenden Automorphismus der Ordnung 2:

$$\varphi : X \rightarrow X \quad \forall n \in \mathbb{N} : \text{all } c_1 \dots c_n e_n \longleftrightarrow a c_1 \dots c_{n+1} e_{n+1} d_{n+1}$$

φ scannt also jeden Punkt $x \in X$ und vertauscht jedes Vorkommen der angegebenen Blöcke. Aufgrund der Stetigkeit bildet dann φ den Punkt $x := \dots d_3 d_2 d_1 . a c_1 c_2 c_3 \dots \in X$ (Grenzwert der Folge $(x^{(n)} := (a c_1 \dots c_n e_n d_n \dots d_1)^\infty)_{n \in \mathbb{N}}$), der einen zweiseitig-unendlichen, einfachen

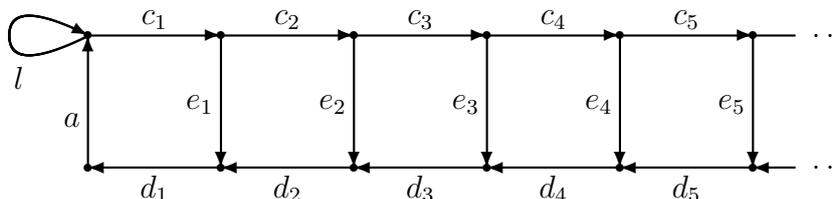


Abbildung 4.1: Graphendarstellung eines lokalkompakten, transitiven Markovshifts. Der Vertex $t(a)$ ist ein ROM, d.h. ein Vertex, der in jedem zweiseitig-unendlichen Weg des Graphen auftritt. Entsprechend enthält jeder Punkt des zugehörigen Kantenshifts eine der Kanten a bzw. l ($\{a, l\}$ ist ein (Kanten-)ROM für diesen Subshift).

chen Weg in G repräsentiert, auf $\varphi(x) = \dots d_3 d_2 d_1 . a l l c_1 c_2 c_3 \dots \in X$ ab, was offensichtlich keinem einfachen Weg entspricht.

Ziel dieses Abschnitts ist es nun, eine Klasse lokalkompakter Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge zu untersuchen, deren Automorphismen die Einfachheit eines Weges respektieren. Für spezielle ausgedünnte Graphen ist dies der Fall. Jeder Automorphismus eines entsprechenden Kantenshifts permutiert die Punkte, die einfache Wege repräsentieren.

Die Formulierung "ausgedünnt" bezieht sich hierbei auf die Folge der Längen der first-return-Loops. In obigem Beispielgraphen (vgl. Abbildung 4.1) ist diese Folge für den Vertex $v = t(a)$ durch $1, 4, 6, 8, 10, \dots$ gegeben, während sie für alle anderen Vertices ab einer festen Schranke sogar alle natürlichen Zahlen enthält. Die Differenz aufeinanderfolgender Längen ist also in jedem Fall beschränkt.

Bei einem ausgedünnten Graphen soll diese Folge dagegen beliebig große Lücken aufweisen. Genauer soll es einen Vertex geben, so daß zu jeder Schranke höchstens endlich viele first-return-Loops existieren, deren Längendifferenz die Schranke unterbietet.

Definition 4.1 Ein gerichteter, stark zusammenhängender, lokal-endlicher Graph $G = (V, E)$ heißt *ausgedünnt*, wenn er einen Vertex $v \in V$ enthält, so daß für die Menge der first-return-Loops $L := \{l_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ bei v gilt:

$$\forall M \in \mathbb{N}_0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N : |l_{n+1}| - |l_n| > M \quad (\text{GC})$$

Bemerkung: Insbesondere gibt es in L höchstens endlich viele Paare gleichlanger Loops. Zu $M = 0$ existiert nämlich ein $N \in \mathbb{N}$, so daß die Länge der Loops $l_n \in L$ für $n \geq N$ streng monoton wächst.

OE kann man die Elemente in L als ihrer Länge nach geordnet annehmen, so daß $|l_m| \leq |l_n| \forall m \leq n$, was wir im folgenden stets tun werden.

Zunächst zeigen wir, daß in einem ausgedünnten Graphen nie zwei knotendisjunkte Loops existieren. Definition 4.1 ist daher nicht konjugationsinvariant, da zwei Loops eines aus-

gedünnten Graphen durch eine endliche Folge von State-Splittings leicht knotendisjunkt gemacht werden können.¹

Tatsächlich haben ausgedünnte Graphen sogar ein einelementiges Vertex-ROM:

Beobachtung 4.2 *Sei $G = (V, E)$ ein ausgedünnter Graph, so existiert ein Vertex $v \in V$, der in allen zweiseitig-unendlichen Wegen in G auftritt. G enthält daher weder zwei knotendisjunkte Loops, noch zwei knotendisjunkte, zweiseitig-unendliche, einfache Wege. Speziell sieht jeder nicht-einfache Pfad in G den Vertex v . First-return-Loops bei v sind stets einfache Loops.*

Beweis: Angenommen es gibt zu jedem Vertex $v \in V$ einen Loop $l_v := e_1 e_2 \dots e_{|l_v|}$ ($e_i \in E$), so daß $\mathbf{t}(e_{|l_v|}) = \mathbf{i}(e_1) \neq v$ und für $1 \leq i < |l_v|$: $\mathbf{t}(e_i) = \mathbf{i}(e_{i+1}) \neq v$. Durch den starken Zusammenhang in G ist es möglich, minimale Verbindungspfade p von v nach $\mathbf{i}(e_1)$ sowie q von $\mathbf{t}(e_{|l_v|})$ nach v zu finden. Die Minimalität dieser Pfade garantiert, daß die Menge L der first-return-Loops bei v die unendliche Teilmenge $\{p l_v^i q \mid i \in \mathbb{N}_0\} \subseteq L$ enthält. Für $M := |l_v|$ ergibt dies einen Widerspruch zur Definition eines ausgedünnten Graphen. Man hat so zumindest einen Vertex $v \in V$, der in allen Loops und damit in allen nicht-einfachen Pfaden/Wegen in G auftritt.

Sei nun $w := \dots w_{-3} w_{-2} w_{-1} w_0 w_1 w_2 w_3 \dots$ ein zweiseitig-unendlicher, einfacher Weg in G ($w_i \in E$, $\mathbf{t}(w_i) = \mathbf{i}(w_{i+1}) \neq v \forall i \in \mathbb{Z}$), der den Vertex v nicht sieht. Wie oben existieren ein minimaler Verbindungspfad p_1 von v nach $\mathbf{i}(w_0)$, ein minimaler Pfad p_2 von v nach $\mathbf{i}(w_{-|p_1|})$ sowie eine unendliche Folge $(q_i)_{i \in \mathbb{N}}$ minimaler Verbindungspfade von $\mathbf{t}(w_{n_i})$ mit $n_i := \sum_{j=1}^{i-1} |q_j|$ zurück zu v . All diese Pfade sind nach Vorgabe nicht leer und nach Konstruktion verschieden. Wieder hat man unendlich viele Paare $p_1 w_0 \dots w_{n_i} q_i$ und $p_2 w_{-|p_1|} \dots w_0 w_1 \dots w_{n_i} q_i$ ($i \in \mathbb{N}$) von first-return-Loops am Vertex v , deren Längendifferenz durch $M := |p_2|$ beschränkt ist. \spadesuit □

Durch eine Reihe von Approximationsargumenten weisen wir nach, daß jeder Automorphismus nicht nur die zweiseitig-unendlichen, einfachen Wege eines ausgedünnten Graphen respektiert, sondern sogar alle entsprechenden Punkte um eine einheitliche Weite verschiebt. Dieses Verhalten wird durch die anwachsenden Längendifferenzen der first-return-Loops gesteuert. Die Struktur des Graphen weit draußen "bei Unendlich" beeinflusst also direkt die möglichen Automorphismen.

Lemma 4.3 *Der transitive, lokalkompakte Markovshift (X, σ) über einem abzählbar unendlichen Alphabet sei als Kantenshift auf einem ausgedünnten Graphen $G = (V, E)$ dargestellt. Dann induziert jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ eine Permutation auf den zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen in G .*

Tatsächlich wirkt φ auf den entsprechenden Punkten (Repräsentanten zweiseitig-unendlicher, einfacher Wege) in X wie eine feste Potenz der Shiftabbildung. Die von φ induzierte Permutation ist also stets die Identität.

¹Die Möglichkeit einer Zerlegung der Automorphismengruppe in eine direkte Summe ist als rein gruppentheoretische Eigenschaft dieser Invarianten jedoch offensichtlich darstellungsunabhängig.

Beweis: Sei $v \in V$ ein Vertex, für den die Wachstumsbedingung (GC) aus Definition 4.1 erfüllt ist und der zudem in allen zweiseitig-unendlichen Wegen in G auftritt und sei $F := \{e \in E \mid i(e) = v\}$ die endliche Menge der am Vertex v auslaufenden Kanten. Die endliche Vereinigung der Zylindermengen ${}_0[f]$ mit $f \in F$ ist kompakt-offen. Daher existiert zu jedem Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ eine von diesem abhängige, endliche Kantenmenge $K \subsetneq E$ mit

$$F \subseteq K \quad \text{und} \quad \varphi^{-1}\left(\bigcup_{f \in F} {}_0[f]\right) \subseteq \bigcup_{k \in K} {}_0[k] \quad (\text{FP})$$

Im folgenden identifizieren wir in kanonischer Weise jeden zweiseitig-unendlichen Weg in G mit dem σ -Orbit der entsprechenden Punkte in X und unterscheiden nicht zwischen den von einem Automorphismus $\varphi : X \rightarrow X$ auf den σ -Orbits bzw. den zweiseitig-unendlichen Wegen induzierten Abbildungen $\tilde{\varphi} : \text{Orb}(X) \rightarrow \text{Orb}(X)$, $\text{Orb}(x) \mapsto \text{Orb}(\varphi(x))$.

Die Injektivität von φ erzwingt die Injektivität von $\tilde{\varphi}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\text{Orb}(x)) = \tilde{\varphi}(\text{Orb}(y)) &\iff \text{Orb}(\varphi(x)) = \text{Orb}(\varphi(y)) \iff \\ \exists n \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \sigma^n(\varphi(y)) = \varphi(\sigma^n(y)) &\xrightarrow{\varphi \text{ inj.}} x = \sigma^n(y) \iff \text{Orb}(x) = \text{Orb}(y) \end{aligned}$$

Für die erste Aussage des Lemmas muß man zeigen, daß jeder Automorphismus auf der Menge der zweiseitig-unendlichen, einfachen (2-un,ei) Wege innerhalb des Graphen G operiert.

Da v bzw. F ein ROM für den Graphen darstellt und φ mit der Shiftabbildung vertauscht, genügt es zu zeigen, daß jeder Repräsentant $x := \dots x_{-3} x_{-2} x_{-1} \cdot x_0 x_1 x_2 x_3 \dots \in \text{Orb}(x)$ mit $x_0 \in F$ eines 2-un,ei Weges in G unter einem beliebigen Automorphismus φ wieder auf einen Repräsentanten eines 2-un,ei Weges abgebildet wird.

Die Surjektivität und damit die Bijektivität der Einschränkung von $\tilde{\varphi}$ auf die einfachen Wege ergibt sich direkt aus der Existenz der inversen Abbildung $\tilde{\varphi}^{-1}$ ($\text{Aut}(\sigma)$ ist eine Gruppe) mit $\tilde{\varphi}^{-1}(\text{Orb}(x)) := \text{Orb}(\varphi^{-1}(x))$, die dann selbst auf den zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen in G operiert:

$$\forall p \text{ 2-un,ei Weg in } G \quad \exists q := \tilde{\varphi}^{-1}(p) \text{ 2-un,ei Weg in } G : \quad \tilde{\varphi}(q) = \tilde{\varphi}(\tilde{\varphi}^{-1}(p)) = p$$

Der Nachweis, daß $\tilde{\varphi}$ tatsächlich auf der Menge der 2-un,ei Wege in G operiert, erfolgt in zwei Schritten (nachfolgende zwei Behauptungen).

Die Einfachheit des durch x repräsentierten Weges erzwingt, daß zu jeder endlichen Kantenmenge $K \subsetneq E$ eine Zahl $i \in \mathbb{N}$ existiert, so daß weder der linksseitig-unendliche Strahl $x_{(-\infty, -i]}$ noch der rechtsseitig-unendliche Strahl $x_{[i, \infty)}$ eine Kante aus K enthält.

Diese Aussage läßt sich unter den gegebenen Voraussetzungen über F und G entscheidend verschärfen:

Behauptung: Der Abstand einer Kante aus $K \subsetneq E$ beliebige, endliche Teilmenge zur nächstliegenden Kante aus F in Punkten aus X ist global beschränkt, d.h. es existiert eine von $y \in \bigcup_{k \in K} {}_0[k] \subsetneq X$ unabhängige Schranke $I \in \mathbb{N}$, so daß der Mittelblock $y_{[-I, I]}$ eine Kante aus F enthält.

Beweis: Solange die Menge $B := \{y_{[-i,i]} \mid y \in \bigcup_{k \in K} 0[k] \wedge i \in \mathbb{N} \wedge \forall -i \leq j \leq i : y_j \notin F\}$ als endlich (oder leer) angenommen wird, ist die Behauptung trivial.

Andernfalls ist bereits $B_k := \{y_{[-i,i]} \mid y \in 0[k] \wedge i \in \mathbb{N} \wedge \forall -i \leq j \leq i : y_j \notin F\} \subseteq B$ für ein $k \in K$ unendlich.

Die lokale Endlichkeit des Graphen G erlaubt die induktive Wahl einer Folge von Blöcken $(b^{(n)} \in \mathcal{B}_{2n+1}(X))_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit $b^{(0)} := k$ und $b^{(n+1)} := a_n b^{(n)} c_n$ ($a_n, c_n \in E$) derart, daß die entsprechende Folge $(B_{b^{(n)}} := \{y_{[-i,i]} \mid y \in -n[b^{(n)}] \wedge i > n \wedge \forall -i \leq j \leq i : y_j \notin F\})_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Inklusionskette $B \supseteq B_k = B_{b^{(0)}} \supseteq B_{b^{(1)}} \supseteq B_{b^{(2)}} \supseteq \dots$ unendlicher Mengen ergibt. Aus der Abgeschlossenheit des Shiftraumes X folgt die Existenz eines Punktes $z \in X$ mit $z_{[-i,i]} \in B_{b^{(i)}} \forall i \in \mathbb{N}_0$. z enthält keine Kante aus F . Dies steht im Widerspruch zur Voraussetzung, daß F ein ROM für X ist. \square

Für die Repräsentanten $x \in X$ zweiseitig-unendlicher, einfacher Wege mit $x_0 \in F$ bedeutet dies, daß außerhalb des Mittelblockes $x_{[-I,I]}$ keine Kanten aus K auftreten können. Speziell gilt dies für eine Kantenmenge $K \subsetneq E$ wie in (FP).

Betrachten wir nun den Bildpunkt $\varphi(x)$. Offensichtlich kann weder der linksseitig-unendliche Strahl $(\varphi(x))_{(-\infty,-I)}$ noch der rechtsseitig-unendliche Strahl $(\varphi(x))_{(I,\infty)}$ eine Kante aus F enthalten, da sonst $x_{(-\infty,-I)}$ bzw. $x_{(I,\infty)}$ nach (FP) eine Kante aus K enthalten müßte.

Da v ein ROM für den Graphen G ist, also jeder Loop eine Kante aus F enthält, sind die 2-un,ei Wege dadurch charakterisiert, daß sie genau eine Kante aus F enthalten. $\varphi(x)$ ist daher genau dann Repräsentant eines 2-un,ei Weges in G , wenn folgende Behauptung wahr ist. φ induziert dann, wie gefordert, eine Permutation auf den zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen des Graphen.

Behauptung: Der Mittelblock $(\varphi(x))_{[-I,I]}$ des Bildpunktes enthält genau eine Kante aus F .

Beweis: Der endliche Block $(\varphi(x))_{[-I,I]}$ hat nach (CL) beschränkte Kodierlänge. Es existiert daher ein $J \geq I$, so daß für alle $y \in -J[x_{-J} \dots x_J]$ gilt: $(\varphi(y))_{[-I,I]} = (\varphi(x))_{[-I,I]}$.

Um die Behauptung einzusehen, konstruiert man einen speziellen Punkt

$$y := x_{(-\infty,-J)} x_{[-J,-1]} \cdot x_{[0,J]} \underline{\quad ? \quad ? \quad ? \quad} x_{[-J,-1]} x_{[0,J]} x_{(J,\infty)} \in X$$

des Shifts, wobei der mittlere Block $x_{[0,J]} \underline{\quad ? \quad ? \quad ? \quad} x_{[-J,-1]}$ genau zwei first-return-Loops $l_m, l_n \in L$ am Vertex v enthält, die man wie folgt wählt:

Aufgrund der Voraussetzung über das Wachstumsverhalten der Längen der Loops in L (dE seien die Elemente in L ihrer Länge nach geordnet), existiert ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|l_{N_1}| > 2J$, so daß für alle $i \geq N_1$ und $j \neq i$ gilt: $||l_i| - |l_j|| > 2I$.²

$l_m \in L$ sei dann der kürzeste first-return-Loop, der mit dem Block $x_{[0,l_{N_1}]}$ beginnt. Ein solcher existiert wegen der Transitivität des Shifts.

²Zu $M := 2I$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N$ gilt: $|l_{n+1}| - |l_n| > M$. Man setzt nun $N_1 := \max\{N + 1, \min\{i \in \mathbb{N} \mid |l_i| > 2J\}\}$.

Sei nun $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|l_{N_2}| > |l_m|$, so daß für alle $i \geq N_2$ und $j \neq i$ wieder $||l_i| - |l_j|| > |l_m| + 2I$ gilt. Schließlich wählt man $l_n \in L$ minimal, wobei l_n mit $x_{[-|l_{N_2}|, -1]}$ endet.

Man setzt nun $x_{[0, J]} \underline{\quad ? \quad ? \quad ? \quad} x_{[-J, -1]} := l_m l_n$ und erhält so $y = x_{(-\infty, -1]} \cdot l_m l_n x_{[0, \infty)}$.

Wir wissen bereits, daß der Block $(\varphi(x))_{[-I, I]}$ mindestens eine Kante aus F enthält (F ist ein ROM). Sei daher $a := \max \{i \in \mathbb{Z} \mid -I \leq i \leq I \wedge (\varphi(x))_i \in F\}$ und sei $b := \min \{i \in \mathbb{Z} \mid -I \leq i \leq I \wedge (\varphi(x))_i \in F\}$.

Da $y_{(-\infty, J]} = x_{(-\infty, J]}$, $y_{[|l_m l_n| - J, \infty)} = x_{[-J, \infty)}$ und $2J + 1$ eine Kodierlänge für $(\varphi(x))_{[-I, I]}$ ist, folgt $(\varphi(y))_{[-I, I]} = (\varphi(y))_{[|l_m l_n| - I, |l_m l_n| + I]} = (\varphi(x))_{[-I, I]}$. Der Block $B := (\varphi(y))_{[a, |l_m l_n| + b]}$ besteht daher aus einer Konkatenation endlich vieler first-return-Loops aus L .

Die Annahme nur eines first-return-Loops führt sofort zum Widerspruch, denn sei $B = l_j$, so gilt:

$$||l_j| - |l_n|| = ||l_m l_n| + b - a - |l_n|| = ||l_m| + b - a| \leq |l_m| + |b - a| \leq |l_m| + 2I$$

Nach Wahl von l_n erfüllt nur $l_j = l_n$ diese Abschätzung. Da aber $|l_m| > 2J \geq 2I$ und $-2I \leq b - a \leq 0$, folgt $|l_j| = |l_m| + |l_n| + b - a > |l_n|$, was diese Möglichkeit ausschließt.

Die Äquivalenz $y_i \in F \Leftrightarrow i \in \{0, |l_m|, |l_m l_n|\}$ erzwingt zusammen mit der oben bewiesenen Behauptung über den beschränkten Abstand einer Kante aus K zu einer Kante aus F :

$$\forall I < i < |l_m| - I : y_i \notin K \quad \text{und} \quad \forall |l_m| + I < i < |l_m l_n| - I : y_i \notin K$$

Nach Wahl der Menge K und der Koordinaten a, b gilt für den Bildpunkt:

$$\forall a < i < |l_m| - I : (\varphi(y))_i \notin F \quad \text{und} \quad \forall |l_m| + I < i < |l_m l_n| + b : (\varphi(y))_i \notin F$$

Beginnt B mit dem Loop $l_i \in L$ und endet mit $l_j \in L$, so gilt: $|l_m| - I - a \leq |l_i| \leq |l_m| + I - a$.

Nach Umformung also $||l_i| - |l_m|| \leq 2I$, was offensichtlich $l_i = l_m$ erzwingt.

Entsprechend folgt aus $|l_m l_n| + b - |l_m| - I \leq |l_j| \leq |l_m l_n| + b - |l_m| + I$ die Abschätzung $||l_j| - |l_n|| \leq 2I$. Dies garantiert $l_j = l_n$.

Schließlich benutzt man $-I \leq b \leq a \leq I$, um zu zeigen, daß die Länge des Blockes B nach oben beschränkt ist: $|B| = |l_m l_n| + \underbrace{b - a}_{\leq 0} \leq |l_m| + |l_n|$.

Man erhält somit $B = l_m l_n$ und $a = b$, d.h. $(\varphi(x))_{[-I, I]}$ enthält tatsächlich nur eine Kante aus F . □

Durch zwei geringfügige Verallgemeinerungen der Beweisidee der letzten Behauptung zeigt man die restlichen Aussagen des Lemmas:

Behauptung: Für alle Repräsentanten $x \in X$ zweiseitig-unendlicher, einfacher Wege mit $x_0 \in F$ liegt die einzige Kante aus F innerhalb des Blockes $(\varphi(x))_{[-I, I]}$ immer an der gleichen Koordinate.

Beweis: Seien nun $x^{(1)}, x^{(2)} \in X$ Repräsentanten zu zwei verschiedenen zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen in G mit $x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \in F$ und seien $a_1, a_2 \in \{-I, -I + 1, \dots, I\}$

die Koordinaten der nach obiger Behauptung einzigen Kante aus F in $(\varphi(x^{(1)}))_{[-I,I]}$ bzw. $(\varphi(x^{(2)}))_{[-I,I]}$. OE sei $a_1 \geq a_2$.

Genau wie zuvor konstruiert man einen Punkt $y := x_{(-\infty,-1]}^{(1)} \cdot l_m l_n x_{[0,\infty)}^{(2)} \in X$, wobei $l_m, l_n \in L$ first-return-Loops bei v sind, so daß l_m mit dem Block $x_{[0,l_{N_1}]}^{(1)}$ beginnt und l_n mit dem Block $x_{[-|l_{N_2}|,-1]}^{(2)}$ endet. Hierbei sind $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ wie oben im Beweis gewählt; $J \geq I$ ist eine gemeinsame Kodierlänge für $(\varphi(x^{(1)}))_{[-I,I]}$ und $(\varphi(x^{(2)}))_{[-I,I]}$.

Setzt man $a := a_1$ und $b := a_2$, so überträgt sich der restliche Beweis direkt und man erhält wie gefordert $a_1 = a_2$. \square

Bezeichnet man mit M_φ ($-I \leq M_\varphi \leq I$) das Negative dieser einheitlichen Koordinate, so folgt für alle Repräsentanten zweiseitig-unendlicher, einfacher Wege $x \in X$ und alle $i \in \mathbb{Z}$ die Äquivalenz: $x_i \in F \iff (\varphi(x))_{i-M_\varphi} \in F$

Behauptung: φ bildet jeden Repräsentanten $x \in X$ eines zweiseitig-unendlichen, einfachen Weges in G auf einen Punkt in $\text{Orb}(x)$ ab. Damit wirkt φ auf der Menge der Punkte, die einfachen Wegen entsprechen, wie die M_φ -te Potenz der Shiftabbildung.

Beweis: Wieder sei $J \geq I$ eine Kodierlänge für den Block $(\varphi(x))_{[-I,I]}$ und auch die Schranke $N_1 \in \mathbb{N}$ definiert man wie zuvor. Diesmal konstruiert man eine Folge von Punkten $y^{(k)} := x_{(-\infty,-1]}^{(k)} l_m^{(k)} l_n^{(k)} \cdot l_m^{(k)} l_n^{(k)} x_{[0,\infty)}^{(k)} \in X$ ($k \in \mathbb{N}$), die gegen x konvergieren wird.

Dazu wählt man $l_m^{(k)} \in L$ als kürzesten first-return-Loop, der mit $x_{[0,|l_{N_1}|+k)}$ beginnt. Entsprechend bestimmt man $N_2^{(k)} \in \mathbb{N}$ mit $|l_{N_2}^{(k)}| > |l_m^{(k)}|$, so daß wie oben für alle $i \geq N_2^{(k)}$ und $j \neq i$ die Abschätzung $||l_i| - |l_j|| > |l_m^{(k)}| + 2I$ erfüllt ist. $l_n^{(k)}$ sei dann das minimale Element in L , das mit dem Block $x_{[-|l_{N_2}^{(k)}|,-1]}$ endet.

Damit ist $y^{(k)}_{[-|l_{N_2}^{(k)}|,|l_{N_1}|+k]} = x_{[-|l_{N_2}^{(k)}|,|l_{N_1}|+k]}$. Wegen $|l_{N_2}^{(k)}| > |l_{N_1}| + k$, erzwingt dies die Konvergenz $y^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$.

Die Bildpunkte $\varphi(y^{(k)})$ haben folgende Struktur:

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{N} : \quad & (\varphi(y^{(k)}))_{[-I-|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|, I-|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|]} = \\ & = (\varphi(y^{(k)}))_{[-I,I]} = (\varphi(y^{(k)}))_{[-I+|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|, I+|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|]} = (\varphi(x))_{[-I,I]} \end{aligned}$$

Die Blöcke $B_1^{(k)} := (\varphi(y^{(k)}))_{[-M_\varphi-|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|, -M_\varphi]}$ und $B_2^{(k)} := (\varphi(y^{(k)}))_{[-M_\varphi, -M_\varphi+|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|]}$ bestehen daher jeweils aus einer Konkatenation von first-return-Loops aus L . Wie oben zeigt man, daß dann bereits $B_1^{(k)} = l_m^{(k)} l_n^{(k)} = B_2^{(k)}$ gilt.

Damit ist:

$$\begin{aligned} \left(\sigma^{-M_\varphi}(\varphi(y^{(k)})) \right)_{[-|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|, |l_m^{(k)} l_n^{(k)}|]} &= (\varphi(y^{(k)}))_{[-M_\varphi - |l_m^{(k)} l_n^{(k)}|, -M_\varphi + |l_m^{(k)} l_n^{(k)}|]} = \\ &= (y^{(k)})_{[-|l_m^{(k)} l_n^{(k)}|, |l_m^{(k)} l_n^{(k)}|]} \end{aligned}$$

Mit wachsendem k stimmt $(\sigma^{-M_\varphi} \circ \varphi)(y^{(k)})$ auf immer längeren Abschnitten, symmetrisch zur Nullkoordinate, mit dem Urbildpunkt $y^{(k)}$ überein. Insbesondere gilt $((\sigma^{-M_\varphi} \circ \varphi)(y^{(k)}))_{[-k, k]} = y_{[-k, k]}^{(k)}$. Die Konvergenz $y^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x$ garantiert $\varphi(y^{(k)}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \varphi(x)$.

Im Limes erhält man daher wie gefordert:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\varphi(y^{(k)}))_{[-k, k]} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sigma^{M_\varphi}((\sigma^{-M_\varphi} \circ \varphi)(y^{(k)})) \right)_{[-k, k]} = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\sigma^{M_\varphi}(y^{(k)}))_{[-k, k]} = \sigma^{M_\varphi}(x) \end{aligned}$$

□

Die letzte Behauptung zeigt insbesondere, daß jeder Automorphismus φ auf den zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen des Graphen die identische Abbildung induziert. □

Die folgenden beiden Beobachtungen enthalten weitere allgemeine Strukturaussagen über stark zusammenhängende (lokal-endliche) Graphen mit einelementigem (Vertex-)ROM, die in Lemma 4.6 eingesetzt werden, um eine erste Fassung des Hauptresultats dieses Abschnitts (vgl. Satz 4.7) zu beweisen.

Beobachtung 4.4 *Sei $G = (V, E)$ ein gerichteter, stark zusammenhängender Graph. Existiert in G ein Vertex $v \in V$, der in allen zweiseitig-unendlichen Wegen auftritt (v ist ein ROM), so enthält jeder Loop in G eine Kante, die nicht Teil irgendeines zweiseitig-unendlichen, einfachen Weges ist.*

Beweis: Angenommen G enthält einen Loop $l := e_1 e_2 \dots e_{|l|}$ ($e_i \in E$), der der Behauptung widerspricht. OE ist l ein einfacher Loop mit $|l| \geq 2$ und $\mathbf{i}(e_1) = \mathbf{t}(e_{|l|}) = v$.

Da jede, also speziell die letzte Kante $e_{|l|}$ in einem 2-un,ei Weg auftritt, gibt es linksseitig-unendliche, einfache Wege, die an einem Vertex des Loops l enden und den Vertex v nicht enthalten. Sei $x_- := \dots x_{-2} x_{-1}$ ein solcher Weg, der an einem möglichst frühen Vertex innerhalb des Loops l endet, d.h. $\mathbf{t}(x_{-1}) = \mathbf{t}(e_m) \neq v$, wobei

$$\begin{aligned} m &:= \min \{ i \in \mathbb{N} \mid i \leq |l| \wedge \exists y_- := \dots y_{-2} y_{-1} \text{ linksseitig-unendlicher, einfacher Weg:} \\ &\quad \mathbf{t}(y_{-1}) = \mathbf{t}(e_i) \wedge \forall j \in \mathbb{N} : \mathbf{t}(y_{-j}) \neq v \} \end{aligned}$$

Entsprechend sei $x_+ := x_1 x_2 \dots$ ein rechtsseitig-unendlicher, einfacher Weg, der den Loop l an einem möglichst späten Vertex verläßt und v nicht enthält, d.h. $\mathbf{i}(x_1) = \mathbf{i}(e_n) \neq v$, wobei

$$\begin{aligned} n &:= \max \{ i \in \mathbb{N} \mid i \leq |l| \wedge \exists y_+ := y_1 y_2 \dots \text{ rechtsseitig-unendlicher, einfacher Weg:} \\ &\quad \mathbf{i}(y_1) = \mathbf{i}(e_i) \wedge \forall j \in \mathbb{N} : \mathbf{i}(y_j) \neq v \} \end{aligned}$$

Ein solcher existiert, da auch die Kante e_1 Teil eines 2-un,ei Weges in G ist.

Falls $m \geq n$, müßte jeder zweiseitig-unendliche Weg in G , der eine Kante e_i ($n \leq i \leq m$) enthält, nach Definition von m und n sowohl vor, als auch nach der Kante e_i den Vertex v aufsuchen. Die Kanten e_n, e_{n+1}, \dots, e_m wären damit nicht Teil eines 2-un,ei Weges in G , was der Annahme über l widerspricht.

Andernfalls ($m < n$) ist aber $x_- e_{m+1} \dots e_{n-1} x_+$ ein zweiseitig-unendlicher Weg, der v nicht enthält. $\downarrow v$ ist ROM. \square

Beobachtung 4.5 Sei $G = (V, E)$ eine Graphendarstellung des transitiven, lokalkompakten Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum und sei $v \in V$ ein ROM in G . Jeder einfache Pfad $p \in \mathcal{B}(X)$ in G , der in unendlich vielen first-return-Loops bei v auftritt, ist bereits Teil eines zweiseitig-unendlichen, einfachen Weges.

Beweis: Sei wie bisher L die Menge der first-return-Loops bei v . Man nutzt die lokale Endlichkeit des Graphen, um schrittweise einen Repräsentanten $x \in X$ eines 2-un,ei Weges zu konstruieren: Zu $b^{(0)} := p$ ist die Menge $L_{b^{(0)}} := \{ptr \mid \exists l \in L, r, t \in \mathcal{B}(X) : l = rpt\} \cup \{ps \mid \exists l \in L, r, s, t \in \mathcal{B}(X) : l = rst \wedge tr = p\}$ aller (gedrehten) first-return-Loops, die mit dem Block p beginnen, nach Annahme unendlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählt man induktiv $a_n, c_n \in E$, so daß $b^{(n)} := a_n b^{(n-1)} c_n \in \mathcal{B}_{2n+|p|}(X)$ und weiterhin die Menge $L_{b^{(n)}} := \{l \in L_{b^{(0)}} \mid |l| \geq 2n + |p| \wedge \exists q \in \mathcal{B}(X) : l = pq \wedge qpq \text{ enthält } b^{(n)}\}$ unendlich bleibt.

Dies ergibt eine Folge nichtleerer, dünner Zylinder: $X \supseteq {}_0[b^{(0)}] \supseteq {}_{-1}[b^{(1)}] \supseteq {}_{-2}[b^{(2)}] \supseteq \dots$. Sei $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}_{-n}[b^{(n)}]$.

Man überzeugt sich leicht, daß in jedem Block $b^{(n)}$ höchstens eine Kante aus $F := \{e \in E \mid i(e) = v\}$ liegt: Die Elemente in $L_{b^{(n)}}$ haben die Mindestlänge $2n + |p|$ und enthalten genau eine F -Kante. In qpq liegen somit nie mehr als zwei solcher Kanten (nur eine falls p selbst ein Symbol aus F sieht). Diese werden durch einen Block der Länge $|l| - 1 \geq 2n + |p| - 1$ voneinander getrennt. Der Block $b^{(n)}$ mit $|b^{(n)}| = 2n + |p|$ ist daher in jedem Fall zu kurz, um beide Vorkommen zu umfassen. Nach Voraussetzung ist F ein (Kanten-)ROM für X , so daß $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} {}_{-n}[b^{(n)}] \subseteq X$ tatsächlich genau eine Kante aus F enthält. x ist dann ein durch $x_{[0, |p|-1]} = p$ markierter Repräsentant eines 2-un,ei Weges in G . \square

Lemma 4.6 Unter den Voraussetzungen von Lemma 4.3 ((X, σ) sei ein transitiver, lokalkompakter Markovshift, $G = (V, E)$ eine Darstellung als Kantenshift, $v \in V$ ein ROM für G und die Menge L der first-return-Loops bei v erfülle (GC)) existiert zu jedem Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ eine endliche Teilmenge $K_\varphi \subsetneq E$ von Kanten, wobei nur endlich viele Elemente aus L eine Kante aus K_φ enthalten und eine Zahl $M_\varphi \in \mathbb{Z}$, so daß für das Orbit-Komplement $\text{Orb}(K_\varphi)^\complement := X \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \sigma^n(\bigcup_{k \in K_\varphi} {}_0[k])$ gilt:

$$\varphi|_{\text{Orb}(K_\varphi)^\complement} = \sigma^{M_\varphi}|_{\text{Orb}(K_\varphi)^\complement}$$

Die Bedingung, daß die Kanten in K_φ nur endlich viele first-return-Loops bei v markieren, ist äquivalent dazu, daß K_φ ganz im Komplement der zweiseitig-unendlichen, einfachen Wege in G liegt. Wie zuvor schiebt φ jeden Repräsentanten eines solchen Weges um M_φ Koordinaten nach links.

Beweis: Der Beweis zu Lemma 4.3 ergab zu jedem Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ eine eindeutige Zahl $M_\varphi \in \mathbb{Z}$, so daß φ auf Punkten, die 2-un,ei Wegen in G entsprechen, wie die M_φ -te Potenz der Shiftabbildung wirkt. Es genügt daher, anstelle eines allgemeinen Automorphismus den "zurückgeschifteten" Automorphismus $\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}$ zu betrachten, der alle Repräsentanten zu 2-un,ei Wegen fest läßt. Die Hauptaussage des Lemmas ist wahr, falls es für jeden derartigen Automorphismus, wie gefordert, eine endliche Menge $K_\varphi \subsetneq E$ gibt, so daß $\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}$ auf $\text{Orb}(K_\varphi)^\circ$ die identische Abbildung induziert.³

Um dies zu zeigen, sei wie zuvor $F := \{e \in E \mid i(e) = v\}$ die endliche Menge der bei v auslaufenden Kanten und $I \in \mathbb{N}$ eine globale Schranke für den Abstand einer Kante aus $K \subsetneq E$ wie in (FP) zur nächsten Kante aus F (vgl. erste Behauptung im Beweis zu Lemma 4.3). Aufgrund der Kompaktheit der Menge $\bigcup_{f \in F} 0[f]$, kann man eine gemeinsame Kodierlänge $J \geq I$ für alle Kanten aus F finden, so daß

$$\forall x \in X \text{ Repräsentant eines 2-un,ei Weges mit } x_0 \in F \quad \forall y \in {}_{-J}[x_{-J} \dots x_J] : \\ (\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}(y))_0 = (\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}(x))_0 = x_0 \in F$$

Die lokale Kompaktheit des Shiftraumes sorgt zudem dafür, daß es je nur endlich viele für X zulässige Blöcke der Länge J bzw. $J + 1$ gibt, die am Vertex v enden bzw. starten. Beobachtung 4.5 zeigt, daß fast alle Elemente in L mit einem Block aus $B_+ := \{y_{[0,J]} \mid y \in \bigcup_{f \in F} 0[f] \wedge y \text{ repräsentiert einen 2-un,ei Weg in } G\}$ beginnen und mit einem Block aus $B_- := \{y_{[-J,-1]} \mid y \in \bigcup_{f \in F} 0[f] \wedge y \text{ repräsentiert einen 2-un,ei Weg in } G\}$ enden:

Dazu definiert man endliche Mengen $A_+ := \{y_{[0,J]} \mid y \in \bigcup_{f \in F} 0[f] \wedge y_{[0,J]} \text{ einfacher Pfad}\}$ und $A_- := \{y_{[-J,-1]} \mid y \in \bigcup_{f \in F} 0[f] \wedge y_{[-J,-1]} \text{ einfacher Pfad}\}$. Für $a \in A_+$ (bzw. A_-) gilt nach Beobachtung 4.5: Falls a in unendlich vielen Elementen aus L enthalten ist, so ist a bereits Teil eines 2-un,ei Weges und daher ein Element aus B_+ (bzw. B_-). Zudem tauchen in A_+ (bzw. A_-) die Anfangsstücke (Endstücke) aller first-return-Loops bei v auf, deren Länge größer als $J + 2$ ist. Es gibt somit, wie gefordert, nur endlich viele Elemente in L , die nicht mit einem Block aus B_+ beginnen oder mit einem Block aus B_- enden.

Die Gültigkeit der Wachstumsbedingung (GC) ermöglicht es, ein $N \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften $|l_N| > 2J$ und für alle $i \geq N$ und $j \neq i$ gilt $||l_i| - |l_j|| > 2I$ zu finden.

Setzt man $L_\varphi := \{l_i \in L \mid i \geq N \wedge \exists u \in B_+, w \in B_-, b \in \mathcal{B}(X) : l_i = u b w\}$, so ist die Differenzmenge

$$L \setminus L_\varphi = \{l_i \in L \mid i \leq N \vee \forall u \in B_+ : l_i \text{ beginnt nicht mit } u \vee \\ \forall w \in B_- : l_i \text{ endet nicht mit } w\}$$

³Die Notation K_φ (später auch L_φ) anstelle von $K_{\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}}$ (bzw. $L_{\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}}$) ist gerechtfertigt, da das Orbit-Komplement $\text{Orb}(K_\varphi)^\circ$ nach Definition shiftinvariant ist. Eine zu $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ gefundene Menge K_φ erfüllt daher die Bedingungen zu Lemma 4.6 zugleich für alle Automorphismen der Form $\varphi \circ \sigma^i$ ($i \in \mathbb{Z}$).

endlich. Nach Beobachtung 4.4 kann man aus jedem Element in $L \setminus L_\varphi$ eine Kante wählen, die nicht Teil eines 2-un,ei Weges in G ist. Die Vereinigung dieser endlich vielen Kanten ergibt schließlich die Menge K_φ .

Es bleibt zu zeigen, daß mit dieser Wahl für K_φ tatsächlich $\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}|_{\text{Orb}(K_\varphi)^{\mathfrak{c}}} = \text{Id}_{\text{Orb}(K_\varphi)^{\mathfrak{c}}}$ gilt. Jeder Punkt aus $\text{Orb}(K_\varphi)^{\mathfrak{c}}$ kann durch eine konvergente Folge von Punkten approximiert werden, die eine unendliche Konkatenation von Elementen aus L_φ sind. Da $\varphi \circ \sigma^{-M_\varphi}$ stetig ist, genügt es, für alle Punkte $x \in L_\varphi^\infty$ die Gleichheit $\varphi \circ \sigma^{M_\varphi}(x) = x$ nachzuweisen. Der Beweis hierzu beruht auf den gleichen Argumenten wie Lemma 4.3.

Abschließend zeigt man die für die endliche Menge $K_\varphi \subsetneq E$ geforderte Äquivalenz:

$$K_\varphi \text{ markiert nur endlich viele Elemente aus } L \iff K_\varphi \text{ enthält keine Kante aus einem 2-un,ei Weg}$$

" \implies ": Angenommen die Kante $k \in K_\varphi$ tritt in einem 2-un,ei Weg in G auf. Dann gibt es einen zugehörigen Repräsentanten $x := (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X$ mit $x_0 \in F$ und ein $N \in \mathbb{Z}$ mit $x_N = k$. Sei zunächst $N \geq 0$. Für jedes $n \geq N$ existiert aufgrund der Transitivität des Markovshifts zu $a^{(n)} := x_{[0,n]}$ ein minimaler Block $b^{(n)} \in \mathcal{B}(X)$, so daß $a^{(n)} b^{(n)} x_0$ für X zulässig ist. Wegen $i(x_0) = v$ und der Wahl von $b^{(n)}$ ist $a^{(n)} b^{(n)}$ sogar ein first-return-Loop bei v . Nach Konstruktion enthält jedes Element der offensichtlich unendlichen Menge $\{a^{(n)} b^{(n)} \mid n \geq N\} \subseteq L$ die Kante k .

Für $N < 0$ argumentiert man für $n \geq |N|$ entsprechend mit den Blöcken $a^{(n)} := x_{[-n,-1]}$. Wieder erhält man eine unendliche Teilmenge $\{b^{(n)} a^{(n)} \mid n \geq |N|\} \subseteq L$ von durch k markierten first-return-Loops. \downarrow

" \impliedby ": Nimmt man an, K_φ markiere unendlich viele Elemente der Menge L , so ist dies bereits für ein $k \in K_\varphi$ der Fall. Offensichtlich darf man $i(k) \neq t(k)$ voraussetzen, da eine Selbstschleife höchstens in einem first-return-Loop bei v auftritt. Nach Beobachtung 4.5 ist dann der einfache Pfad $p := k$ bereits Teil eines 2-un,ei Weges. \square

Abschließend fassen wir die in den Lemmata 4.3 und 4.6 geleisteten Vorarbeiten zusammen und erhalten daraus für die untersuchte Klasse von Markovshifts die angestrebte Zerlegung der Automorphismengruppe in eine direkte Summe.

Satz 4.7 *Erlaubt ein transitiver, lokalkompakter Markovshift (X, σ) über einem abzählbar unendlichen Alphabet eine Darstellung als Kantenshift auf einem ausgedünnten Graphen $G = (V, E)$, so wirkt jeder Automorphismus auf der Menge der Repräsentanten zweiseitig-unendlicher, einfacher Wege in G wie eine Potenz der Shiftabbildung.*

Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ läßt sich dann in eine direkte Summe der von σ erzeugten zyklischen und einer zentrumslosen Gruppe zerlegen. Genauer gilt:

$$\text{Aut}(\sigma) \cong \langle \sigma \rangle \oplus \left\{ \varphi \in \text{Aut}(\sigma) \mid \exists K_\varphi \subsetneq E \text{ endlich: } K_\varphi \text{ enthält keine Kante aus zweiseitig-unendlichen, einfachen Wegen in } G \wedge \varphi|_{\text{Orb}(K_\varphi)^{\mathfrak{c}}} = \text{Id}_{\text{Orb}(K_\varphi)^{\mathfrak{c}}} \right\}$$

Beweis: Die erste Aussage des Satzes wurde bereits in Lemma 4.3 gezeigt.

Offensichtlich ist der zweite Summand $H := \{\varphi \in \text{Aut}(\sigma) \mid \exists K_\varphi \subsetneq E \text{ endlich: } K_\varphi \text{ markiert höchstens endlich viele Elemente aus } L \wedge \varphi|_{\text{Orb}(K_\varphi)^c} = \text{Id}_{\text{Orb}(K_\varphi)^c}\}$ eine Untergruppe der Automorphismengruppe:

Seien $\varphi, \phi \in H$ mit $K_\varphi, K_\phi \subsetneq E$ endlich, wie in der Definition von H gefordert. Setzt man $K_{\varphi \circ \phi} := K_\varphi \cup K_\phi$, so ist $K_{\varphi \circ \phi} \subsetneq E$ endlich und auch $K_{\varphi \circ \phi}$ markiert nur endlich viele Elemente aus L . Weiter folgt aus $K_\varphi, K_\phi \subseteq K_{\varphi \circ \phi}$ sofort $\text{Orb}(K_{\varphi \circ \phi})^c \subseteq \text{Orb}(K_\varphi)^c \cap \text{Orb}(K_\phi)^c$. Für alle $x \in \text{Orb}(K_{\varphi \circ \phi})^c$ ergibt sich daher $(\varphi \circ \phi)(x) = \varphi(\phi(x)) = \varphi(x) = x$, d.h. $(\varphi \circ \phi)|_{\text{Orb}(K_{\varphi \circ \phi})^c} = \text{Id}_{\text{Orb}(K_{\varphi \circ \phi})^c}$. H ist somit abgeschlossen unter Komposition.

Zudem ist $\text{Id}_X \in H$ (wähle $K_{\text{Id}_X} := \emptyset$) und mit $\varphi \in H$ liegt auch $\varphi^{-1} \in \text{Aut}(\sigma)$ in H (mit $K_{\varphi^{-1}} := K_\varphi$ gilt für alle $x \in \text{Orb}(K_{\varphi^{-1}})^c$: $x = (\varphi^{-1} \circ \varphi)(x) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = \varphi^{-1}(x)$).

Nach Lemma 4.3 ist die Abbildung $\alpha : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \langle \sigma \rangle \quad \varphi \mapsto \sigma^{M_\varphi}$ mit dem dort eingeführten $M_\varphi \in \mathbb{Z}$ ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Zu $\varphi, \phi \in \text{Aut}(\sigma)$ mit $K_\varphi, K_\phi \subsetneq E$, $M_\varphi, M_\phi \in \mathbb{Z}$ wie oben, setzt man wieder $K_{\varphi \circ \phi} := K_\varphi \cup K_\phi$ und $M_{\varphi \circ \phi} := M_\varphi + M_\phi$ und zeigt $(\varphi \circ \phi)|_{\text{Orb}(K_{\varphi \circ \phi})^c} = \sigma^{M_{\varphi \circ \phi}}|_{\text{Orb}(K_{\varphi \circ \phi})^c}$. Unter α ergibt dies $\alpha(\varphi \circ \phi) = \sigma^{M_{\varphi \circ \phi}} = \sigma^{M_\varphi + M_\phi} = \sigma^{M_\varphi} \circ \sigma^{M_\phi} = \alpha(\varphi) \circ \alpha(\phi)$.

Nun ist der Kern der Abbildung α aber gerade die Untergruppe H (vgl. Lemma 4.6 und die Definition von H). Man hat also zwei Normalteiler $\langle \sigma \rangle, \text{Kern}(\alpha) \trianglelefteq \text{Aut}(\sigma)$ mit trivialem Schnitt $\langle \sigma \rangle \cap \text{Kern}(\alpha) = \{\text{Id}_X\}$. Ebenfalls aus den Lemmata 4.3 und 4.6 folgt $\langle \sigma \rangle \cdot \text{Kern}(\alpha) = \{\sigma^n \circ \varphi \mid n \in \mathbb{Z} \wedge \varphi \in \text{Kern}(\alpha)\} = \text{Aut}(\sigma)$. Damit sind die Voraussetzungen für eine Zerlegung von $\text{Aut}(\sigma)$ in eine direkte Summe aus $\langle \sigma \rangle$ und $\text{Kern}(\alpha)$ gegeben.

Nach Satz 2.32 besteht das Zentrum von $\text{Aut}(\sigma)$ genau aus den Potenzen der Shiftabbildung. Für die Zerlegung gilt daher:

$$\langle \sigma \rangle = \mathfrak{Z}(\text{Aut}(\sigma)) = \mathfrak{Z}(\langle \sigma \rangle \oplus \text{Kern}(\alpha)) = \mathfrak{Z}(\langle \sigma \rangle) \oplus \mathfrak{Z}(\text{Kern}(\alpha)) = \langle \sigma \rangle \oplus \mathfrak{Z}(\text{Kern}(\alpha))$$

Die zyklische Gruppe $\langle \sigma \rangle$ ist isomorph zu \mathbb{Z} und damit nur trivial zerlegbar. $\text{Kern}(\alpha)$ muß deshalb eine zentrumslose Gruppe sein. \square

Beispiele für "ausgedünnte" Kantenshifts, die die Voraussetzungen von Satz 4.7 erfüllen, erhält man aus dem in Abbildung 4.1 skizzierten Graphen durch Entfernen der Kanten e_i mit $i \notin S(\mathbb{N})$ und $S : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine mehr als linear wachsende Funktion (z.B. $S(n) := n^2$ oder $S(n) := 2^n$) sowie aus dem in Abbildung 3.13 gezeigten Graphen nach Entfernung aller Loops l_i ($i \in \mathbb{N}$).

Durch Verheften mehrerer ausgedünnter Graphen (Identifikation ihrer Vertex-ROMs) ist es zudem möglich, ausgedünnte Kantenshifts mit mehr als einem zweiseitig-unendlichen, einfachen Weg und sogar mit einem aus mehreren Θ_X -Orbits bestehenden kanonischen Rand (vgl. Abschnitt 4.2) zu konstruieren. Beispiele hierfür ergeben sich aus den in Abbildung 3.2 und 4.2 rechts dargestellten Graphen nach Entfernung aller Kanten e_i, e'_j mit $i \notin S(\mathbb{N})$, $j \notin T(\mathbb{N})$ und $S, T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ stärker als linear wachsende Funktionen mit $S(\mathbb{N}) \cap T(\mathbb{N}) \subsetneq \mathbb{N}$ endlich.

4.2 Induzierte Aktion auf dem kanonischen Rand

In diesem Abschnitt betrachten wir transitive, lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum zusammen mit der von D. Fiebig und U.-R. Fiebig in [FF2] definierten kanonischen Kompaktifizierung. Dazu beschreiben wir zunächst die dort durchgeführte Konstruktion des kanonischen Randes als inversen Limes einer Folge endlicher dynamischer Systeme und erläutern kurz, wie dieser mit dem lokalkompakten Markovshift verbunden wird, um die kanonische Kompaktifizierung zu erhalten.

Die in [FF2] bewiesenen Resultate enthalten implizit die für uns nützliche Aussage, daß sich jeder Automorphismus des Subshifts in eindeutiger Weise auf die kanonische Kompaktifizierung fortsetzen läßt. Seine Einschränkung auf den Rand, i.e. das Komplement des ursprünglichen Markovshifts in der kanonischen Kompaktifizierung, ergibt einen Automorphismus dieses kompakt-metrischen dynamischen Systems. Man erhält so einen Homomorphismus der Automorphismengruppe des Markovshifts in die kleinere und einfachere Automorphismengruppe des Rand-dynamischen Systems, dessen Eigenschaften wir näher untersuchen.

Die kanonische-Rand-Darstellung, wie wir den soeben beschriebenen Gruppenhomomorphismus nennen, ist nicht treu. Ihr Kern enthält beispielsweise alle Automorphismen, die nur auf einer endlichen Teilmenge des zugrundeliegenden Alphabets wirken.

Die Größe des Bildes von $\text{Aut}(\sigma)$ ist ein Maß für die innere Symmetrie des Markovshifts (X, σ) . Fehlende Surjektivität der kanonischen-Rand-Darstellung weist auf Beschränkungen auf dem Rand-System $(Z(X), \Theta_X)$ hin, die erst durch die Struktur des Subshifts induziert werden. Solche Einschränkungen treten natürlich erst auf, wenn der kanonische Rand $Z(X)$ aus mehreren Θ_X -Orbits besteht. Für transitive Markovshifts auf ausgedünnten Graphen läßt sich das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung direkt angeben.

Wir können außerdem zeigen, daß die Fortsetzung eines Automorphismus auf den kanonischen Rand alle Θ_X -Orbits modulo der Periode des Subshifts um die gleiche Weite dreht und höchstens dann zwei Randpunkte aufeinander abbildet, wenn deren periodische Daten⁴ bei ∞ übereinstimmen. Wir benutzen diese Ergebnisse, um in verschiedenen Beispielen das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung vollständig anzugeben.

Wir beginnen mit einer kurzen Beschreibung der in [FF2] ausgeführten Konstruktion der kanonischen Kompaktifizierung und des kanonischen Randes sowie der für unsere Zwecke wichtigen Resultate dieses Papers:

Sei (X, σ) ein transitiver, lokalkompakter Markovshift über einem abzählbar unendlichen Alphabet, der durch den gerichteten Graphen $G = (V, E)$ gegeben wird. Entfernt man aus G eine endliche Teilmenge $K \subsetneq E$ von Kanten, so zerfällt der Restgraph $G - K := (V, E \setminus K)$ in eine endliche Menge von Zusammenhangskomponenten, i.e. maximale, zusammenhängende Teilgraphen⁵. Die Komponenten, die unendlich viele Kanten enthalten, bilden die Menge der unendlichen Zusammenhangskomponenten in $G - K$, die mit $\mathcal{C}(G - K)$ bezeichnet wird.

⁴Zur Definition dieses Begriffs vgl. Beobachtung 4.14 und die Originalarbeit [FF2].

⁵Im Unterschied zum starken Zusammenhang findet die Richtung der Kanten beim (einfachen) Zusammenhang keine Beachtung. Eine (einfache) Zusammenhangskomponente muß daher nicht stark zusammenhängend sein.

Weiterhin definiert man zu einem zusammenhängenden Teilgraphen $H = (V_H, E_H)$ von G die gewichtete Periode $\text{per}_w(H)$, als den größten gemeinsamen Teiler der Gewichte über alle ungerichteten Loops innerhalb von H . Ein ungerichteter Loop in H ist dabei eine endliche Folge von Kanten $e_1, e_2, \dots, e_n \in E_H$ und Vertices $v_1, v_2, \dots, v_n \in V_H$, so daß $\{i(e_k), t(e_k)\} = \{v_k, v_{k+1}\}$ für alle $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ und $\{i(e_n), t(e_n)\} = \{v_n, v_1\}$ gilt. Lax gesprochen "vergißt" man einfach die Richtung der Kanten und betrachtet H als ungerichteten Teilgraphen in G . Das Gewicht eines solchen ungerichteten Loops ergibt sich als Summe über alle Kantengewichte w_k , wobei $w_k := 1$ falls $i(e_k) = v_k$ und $w_k := -1$ falls $i(e_k) \neq v_k$ ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$) ist.

Wählt man in G eine aufsteigende Folge $K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \dots$ endlicher Teilmengen der Kantenmenge E , so daß $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = E$ und definiert $\mathcal{C}(G - K_n)$ wie oben, so erhält man eine Folge endlicher dynamischer Systeme (A_n, θ_n) :

$$A_n := \{(H, i) \mid H \in \mathcal{C}(G - K_n) \wedge 0 \leq i < \text{per}_w(H)\}$$

$$\theta_n : A_n \rightarrow A_n \quad \theta_n((H, i)) := (H, (i + 1) \bmod \text{per}_w(H))$$

Zu jeder Komponente $H \in \mathcal{C}(G - K_n)$ enthält (A_n, θ_n) einen θ_n -Orbit der Länge $\text{per}_w(H)$.

Da die Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}} \nearrow E$ geschachtelt ist, gibt es zu jeder Komponente $H \in \mathcal{C}(G - K_{n+1})$ eine eindeutige Komponente $H' \in \mathcal{C}(G - K_n)$, die die Komponente H vollständig enthält und man kann die Systeme (A_n, θ_n) durch Abbildungen $\pi_n : A_{n+1} \rightarrow A_n$, $\pi_n((H, i)) := (H', i \bmod \text{per}_w(H'))$ miteinander verkleben. Wegen $H \subseteq H'$, beides zusammenhängende, unendliche Teilgraphen von G , gilt $\text{per}_w(H') \mid \text{per}_w(H)$ (nach Lemma 3.2 in [FF2] und der daran anschließenden Bemerkung über $\text{per}_w(H), \text{per}_w(H') > 0$), und man erhält die Vertauschungsrelation $\pi_n \circ \theta_{n+1} = \theta_n \circ \pi_n$.

Bildet man den, durch die Projektionen $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ induzierten inversen Limes über die Folge der (A_n, θ_n) , so erhält man ein kompakt-metrisches dynamisches System $(Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}}), \Theta_X)$:

$$Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}}) := \left\{ (H_n, i_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n \mid \forall n \in \mathbb{N} : \pi_n((H_{n+1}, i_{n+1})) = (H_n, i_n) \right\}$$

$$\Theta_X : Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}}) \rightarrow Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}}) \quad \Theta_X((H_n, i_n)_{n \in \mathbb{N}}) := (\theta_n(H_n, i_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Trägt jedes A_n die diskrete Topologie und versieht man $Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}}) \subseteq \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit der durch die Produkttopologie induzierten Topologie, so ist Θ_X ein Homöomorphismus.

In [FF2] (Lemma 3.4) wurde gezeigt, daß das System $(Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}}), \Theta_X)$ unabhängig von der Wahl der Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist; man schreibt deshalb kurz $(Z(X), \Theta_X)$. Weiterhin entsteht aus dem lokalkompakten, transitiven Markovshift (X, σ) durch Hinzufügen des Kompaktums $(Z(X), \Theta_X)$ als Rand die kanonische Kompaktifizierung $(\hat{X}, \hat{\sigma})$, wobei $\hat{X} := X \cup Z(X)$ und $\hat{\sigma} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ mit $\hat{\sigma}|_X := \sigma$, $\hat{\sigma}|_{Z(X)} := \Theta_X$.

Für Einzelheiten dieser Konstruktion, insbesondere das Anfügen des Rand-Systems durch eine Faktorabbildung bei ∞ , sei auf die Originalarbeit von D. Fiebig und U.-R. Fiebig [FF2] verwiesen. Hier soll nur die Definition einer solchen intrinsischen Faktorabbildung $g : X \rightarrow Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}})$ angegeben werden:

Wähle eine beliebige Kante $e \in E$, setze $g_G(e) := 0$ und definiere durch die Vorschrift $g_G(f_1) + 1 \equiv g_G(f_2) \bmod \text{per}_w(G)$ für alle $f_1, f_2 \in E$ mit $t(f_1) = i(f_2)$ eine periodische

Labelfunktion $g_G : E \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{per}_w(G) - 1\}$.

Sei nun $H \subseteq G$ ein zusammenhängender Teilgraph von G , so läßt sich ein entsprechendes maximal-periodisches Labeling auf H finden, das für alle $e \in E_H$ die Zusatzbedingung $g_H(e) \equiv g_G(e) \pmod{\text{per}_w(G)}$ erfüllt. Induktiv erhält man eine Familie maximal-periodischer Labelabbildungen $g_H : E_H \rightarrow \{0, 1, \dots, \text{per}_w(H) - 1\}$, wobei $H \in \mathcal{C}(G - K_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) ist, und die folgende Projektivitätsforderung erfüllen:

$$\forall H \in \mathcal{C}(G - K_{n+1}), H' \in \mathcal{C}(G - K_n) : H \subseteq H' \implies \forall e \in E_H : \\ g_H(e) \equiv g_{H'}(e) \pmod{\text{per}_w(H')}$$

Mit diesen Labelabbildungen definiert man eine lokalkonstante, weil nur von der Nullkoordinate eines Punktes abhängige, Faktorabbildung $g : X \rightarrow Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}})$ wie folgt: Für alle $x \in X$ mit $x_0 \in K_1$ sei $g(x) := z^*$ für ein $z^* \in Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}})$. Ansonsten sei $n := \max \{i \in \mathbb{N} \mid x_0 \notin K_i\}$ und $H \in \mathcal{C}(G - K_n)$ die eindeutige Komponente mit $x_0 \in E_H$. Setze nun $g(x) := z$ für ein $z \in Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}})$ mit $z_n = (H, g_H(x_0))$.

Die Topologie der kanonischen Kompaktifizierung $(\hat{X}, \hat{\sigma})$ wird durch eine, bis auf uniforme Äquivalenz eindeutige, (kanonische) Metrik \hat{d} erzeugt, die sich nach [FF2] wie folgt darstellen läßt:

$$\hat{d}(x, y) := d_0(\pi(x), \pi(y)) + \rho(\hat{g}(x), \hat{g}(y)) \quad \forall x, y \in \hat{X}$$

Dabei ist d_0 die Gurevich-Metrik der 1-Punkt-Kompaktifizierung (X_0, σ_0) (vgl. Abschnitt 2.2) und $\pi : \hat{X} \rightarrow X_0$ $\pi|_X := \text{Id}_X$, $\pi(Z(X)) := \infty$ ist die Projektion der kanonischen auf die 1-Punkt-Kompaktifizierung, die den Rand $Z(X)$ auf den Punkt ∞ zusammenzieht. ρ bezeichnet eine beliebige, mit der Topologie auf $(Z(X), \Theta_X)$ verträgliche Metrik und die Abbildung $\hat{g} : \hat{X} \rightarrow Z(X)$ ist die Fortsetzung der intrinsischen Faktorabbildung $g : X \rightarrow Z(X)$ wie oben definiert, mit $\hat{g}|_X := g$, $\hat{g}|_{Z(X)} := \text{Id}_{Z(X)}$.

Die kanonische Kompaktifizierung $(\hat{X}, \hat{\sigma})$ und damit auch der kanonische Rand $(Z(X), \Theta_X)$ sind Konjugationsinvarianten des lokalkompakten Markovshifts (X, σ) . Jede Konjugation zwischen zwei lokalkompakten, transitiven Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge ist gleichmäßig stetig bezüglich der entsprechenden Metriken \hat{d} und läßt sich somit in eindeutiger Weise zu einer Konjugation der kanonischen Kompaktifizierungen fortsetzen (Theorem B und Korollar 3.6 in [FF2]).

In unserem Kontext bedeutet dies die eindeutige Fortsetzbarkeit eines Automorphismus des Markovshifts auf die kanonische Kompaktifizierung, so daß die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ als Untergruppe von $\text{Aut}(\hat{\sigma})$ angesehen werden kann. Jeder Automorphismus des Markovshifts induziert in dieser Weise einen Automorphismus seines kanonischen Randes.

Definition 4.8 Sei (X, σ) ein transitiver, lokalkompakter Markovshift mit abzählbar unendlichem Zustandsraum. Der Gruppenhomomorphismus $\beta : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \text{Aut}(\Theta_X)$ $\varphi \mapsto \hat{\varphi}|_{Z(X)}$, wobei $\hat{\varphi} \in \text{Aut}(\hat{\sigma})$ die eindeutige Fortsetzung des Automorphismus φ auf die kanonische Kompaktifizierung $(\hat{X}, \hat{\sigma})$ bezeichnet, heißt kanonische-Rand-Darstellung der Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$.

Bemerkung: Als Komposition der Einbettungsabbildung $\varepsilon : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \text{Aut}(\hat{\sigma})$ $\varphi \mapsto \hat{\varphi}$

und der Projektion $\pi : \text{Aut}(\hat{\sigma}) \rightarrow \text{Aut}(\Theta_X) \quad \hat{\varphi} \mapsto \hat{\varphi}|_{Z(X)}$ sind die Eigenschaften eines Gruppenhomomorphismus ($\beta(\varphi \circ \phi) = \beta(\varphi) \circ \beta(\phi)$ und $\beta(\text{Id}_X) = \text{Id}_{Z(X)}$) für die Abbildung $\beta = \pi \circ \varepsilon$ offensichtlich erfüllt.

Wir werden nun einige Eigenschaften des Homomorphismus β untersuchen und zeigen, daß die kanonische-Rand-Darstellung zusätzliche Informationen über den betrachteten Markovshift enthält. Speziell lassen sich so lokalkompakte Markovshifts trennen, die durch ihren kanonischen Rand alleine nicht unterschieden werden können.

Zunächst ist klar, daß β keine treue Darstellung ist. Viele lokalkompakte Markovshifts über abzählbar unendlichen Alphabeten haben als kanonischen Rand ein dynamisches System, das aus einer endlichen Anzahl endlicher Θ_X -Orbits besteht. In diesem Fall ist die Gruppe $\text{Aut}(\Theta_X)$ endlich, während $\text{Aut}(\sigma)$ zumindest abzählbar unendlich ist. Allgemeiner gilt:

Beobachtung 4.9 *Sei (X, σ) ein lokalkompakter, transitiver Markovshift mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge. Jeder Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$, der nur auf endlich vielen Symbolen des Alphabets \mathcal{A}_X wirkt, induziert auf dem kanonischen Rand die Identität und liegt somit im Kern der kanonischen-Rand-Darstellung β .*

Beweis: Zu $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ wie vorausgesetzt, sei $F \subsetneq \mathcal{A}_X$ endlich, so daß für alle $x \in X$ mit $x_0 \notin F$ gilt: $(\varphi(x))_0 = x_0$.

Sei $z \in Z(X)$ ein beliebiger Randpunkt. Es genügt zu zeigen, daß dann $(\beta(\varphi))(z) = z$.

Sei $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Punkten $x^{(n)} \in X$, die bezüglich der kanonischen Metrik \hat{d} gegen z konvergiert. Eine solche existiert, da X dicht in \hat{X} liegt. Die explizite Darstellung von \hat{d} ergibt nun:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(x^{(n)}, z) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_0(\pi(x^{(n)}), \pi(z)) + \rho(\hat{g}(x^{(n)}), \hat{g}(z)) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} d_0(x^{(n)}, \infty) + \rho(g(x^{(n)}), z) \end{aligned}$$

Speziell folgt damit, daß $\lim_{n \rightarrow \infty} d_0(x^{(n)}, \infty) = 0$. Für n groß genug liegt damit ein immer längerer Block $x_{[-j_n, j_n]}^{(n)}$ ($(j_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine schließlich monoton wachsende Folge) außerhalb von F .

Aus der Voraussetzung erhält man für alle $|i| \leq j_n$ die Gleichungskette:

$$(\varphi(x^{(n)}))_i = (\sigma^i(\varphi(x^{(n)})))_0 = (\varphi(\sigma^i(x^{(n)})))_0 = (\sigma^i(x^{(n)}))_0 = x_i^{(n)}$$

wobei im vorletzten Schritt $(\sigma^i(x^{(n)}))_0 = x_i^{(n)} \notin F$ benutzt wurde.

Insgesamt folgt aus der Dreiecksungleichung und unter Ausnutzung der Stetigkeit von $\hat{\varphi}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(x^{(n)}, \hat{\varphi}(z)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\hat{d}(x^{(n)}, \hat{\varphi}(x^{(n)}))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\hat{d}(\hat{\varphi}(x^{(n)}), \hat{\varphi}(z))}_{\rightarrow 0} = 0$$

Somit konvergiert die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\hat{\varphi}(z)$ und erzwingt wie gefordert $\hat{\varphi}(z) = z$. Da $z \in Z(X)$ beliebig war, gilt $\hat{\varphi}|_{Z(X)} = \text{Id}_{Z(X)}$ und daher $\varphi \in \text{Kern}(\beta)$. \square

Bemerkung: Beispiele für Automorphismen, die nur auf endlich viele Symbole wirken, sind sogenannte einfache Automorphismen, die in einer Graphendarstellung einzelne (oder endlich viele) Mehrfachpfade permutieren.

Als nächstes versuchen wir das Bild $\beta(\text{Aut}(\sigma)) \leq \text{Aut}(\Theta_X)$ zu beschreiben. Dies gibt Aufschluß darüber, welche Automorphismen des Rand-Systems durch Automorphismen des Markovshifts realisiert werden können. Surjektivität würde bedeuten, daß die Struktur des Subshifts selbst keine Einschränkungen auf den kanonischen Rand induziert. Fehlende Surjektivität zeigt dagegen, daß die innere Struktur des Markovshifts starrer ist, als das Rand-System alleine es vermuten läßt.

Bemerkung: Hier erkennt man auch die besondere Stellung der kanonischen Kompaktifizierung als eindeutige, maximale Kompaktifizierung, deren Rand inverser Limes endlicher dynamischer Systeme ist. Offensichtlich werden in einer Rand-Darstellung der Automorphismengruppe umso mehr Strukturen des Markovshifts sichtbar, je größer das dabei benutzte Rand-System ist.

So lassen sich auch auf die 1-Punkt-Kompaktifizierung alle Automorphismen eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge fortsetzen. Der entsprechende Gruppenhomomorphismus $\beta : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \text{Aut}(\text{Id}_\infty)$ ist aber trivial ($\text{Aut}(\text{Id}_\infty) \cong \{1\}$). Der einelementige Rand der 1-Punkt-Kompaktifizierung ist daher zu klein, um nützliche Informationen über die Beschaffenheit des Subshifts zu liefern.

Offensichtlich gilt $\langle \Theta_X \rangle \leq \beta(\text{Aut}(\sigma))$, da $\Theta_X = \hat{\sigma}|_{Z(X)}$. Besteht der kanonische Rand aus nur einem Θ_X -Orbit, d.h. in jeder Graphendarstellung $G = (V, E)$ des Markovshifts existiert zu jeder endlichen Teilmenge $K \subsetneq E$ von Kanten nur eine unendliche Komponente in $G - K$, so ist die kanonische-Rand-Darstellung β surjektiv. Beispiele hierfür sind die in den Abbildungen 2.1, 2.4, 3.1, 3.2, 3.10, 3.13 und 4.1 gezeigten Kantenshifts. Für einen kanonischen Rand mit mehr als einem Θ_X -Orbit ergeben sich im allgemeinen jedoch starke Einschränkungen an die Fortsetzungen von Automorphismen auf den kanonischen Rand, wodurch die Surjektivität von β meist verloren geht.

Speziell haben die in Abschnitt 4.1 betrachteten Kantenshifts auf ausgedünnten Graphen eine starre Struktur mit sehr wenig inneren Symmetrien, was sich in einem entsprechend kleinen Bild der kanonischen-Rand-Darstellung niederschlägt.

Beobachtung 4.10 *Sei (X, σ) ein transitiver, lokalkompakter Markovshift mit abzählbar unendlichem Zustandsraum, der sich als Kantenshift auf einem ausgedünnten Graphen darstellen läßt. Unabhängig von der Größe und Struktur des kanonischen Randes ist das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung stets minimal, d.h. $\beta(\text{Aut}(\sigma)) = \langle \Theta_X \rangle$.*

Beweis: Der Markovshift (X, σ) sei als Kantenshift auf dem ausgedünnten Graphen $G = (V, E)$ gegeben. Nach Satz 4.7 hat die Automorphismengruppe die Struktur einer direkten Summe $\text{Aut}(\sigma) = \langle \sigma \rangle \oplus H$, wobei die Gruppe H genau die Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ enthält, die auf dem Orbitkomplement einer von φ abhängigen, endlichen Menge $K_\varphi \subsetneq E$

von Kanten wie die Identität wirken.

Man zeigt nun, daß alle Automorphismen $\phi \in H$ im Kern der kanonischen-Rand-Darstellung liegen. Sei dazu $v \in V$ ein Vertex-ROM in G , L_v die Menge der first-return-Loops bei v und $z \in Z(X)$ ein beliebiger Punkt des kanonischen Randes. Man wählt eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x^{(n)} \in X$, die bezüglich der kanonischen Metrik \hat{d} gegen z konvergiert. Wie im Beweis zu Beobachtung 4.9 folgt die Konvergenz $\lim_{n \rightarrow \infty} d_0(x^{(n)}, \infty) = 0$. Für n groß genug liegt damit ein immer längerer Block $x_{[-j_n, j_n]}^{(n)}$ außerhalb der endlichen Menge $F := \{e \in E \mid \exists k \in K_\phi, l \in L_v : k \in l \wedge e \in l\}$ aller Kanten, die in einem durch K_ϕ markierten first-return-Loop bei v auftreten (F ist endlich, da die Menge K_ϕ nach Beobachtung 4.5 nur endlich viele Elemente aus L_v markiert).

OE kann man daher die Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ durch eine entsprechende Folge $(y^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_{[-j_n, j_n]}^{(n)} = x_{[-j_n, j_n]}^{(n)}$ ersetzen, deren Punkte $y^{(n)} \in X$ nie eine Kante aus K_ϕ sehen und die noch immer gegen z konvergiert:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} d_0(y^{(n)}, \infty) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(d_0(y^{(n)}, x^{(n)}))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{d_0(x^{(n)}, \infty)}_{\rightarrow 0} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(g(y^{(n)}), z) &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\rho(g(y^{(n)}), g(x^{(n)})))}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\rho(g(x^{(n)}), z)}_{\rightarrow 0} = 0 \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(y^{(n)}, z) = 0$$

Nach Voraussetzung ist $\phi|_{\text{Orb}(K_\phi)^c} = \text{Id}_{\text{Orb}(K_\phi)^c}$, so daß $\phi(y^{(n)}) = y^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Stetigkeit der Fortsetzung $\hat{\phi} \in \text{Aut}(\hat{\sigma})$ ergibt sofort:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(y^{(n)}, z) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(\hat{\phi}(y^{(n)}), \hat{\phi}(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(y^{(n)}, \hat{\phi}(z))$$

und somit $\hat{\phi}(z) = z$. Wie gefordert ist daher $H \subseteq \text{Kern}(\beta)$.

Die in Satz 4.7 gefundene Zerlegung der Automorphismengruppe ergibt zu jedem Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ eine eindeutige Darstellung $\varphi = \sigma^i \circ \phi$ mit $i \in \mathbb{Z}$ und $\phi \in H$. In der kanonischen-Rand-Darstellung erhält man:

$$\beta(\varphi) = \beta(\sigma^i \circ \phi) = \beta(\sigma^i) \circ \beta(\phi) = (\beta(\sigma))^i \circ \text{Id}_{Z(X)} = \Theta_X^i \in \langle \Theta_X \rangle$$

Umgekehrt hat jedes Element $\Theta_X^i \in \langle \Theta_X \rangle$ mit $\sigma^i \in \text{Aut}(\sigma)$ ein natürliches Urbild ($\beta(\sigma^i) = \Theta_X^i$), so daß tatsächlich $\beta(\text{Aut}(\sigma)) = \langle \Theta_X \rangle$ gilt. \square

Das folgende Lemma 4.11 schafft eine Verbindung der beiden Periodenbegriffe $\text{per}_w(G)$ und $\text{per}(G)$, die für allgemeine Graphen echt verschieden sind. Betrachtet man ausschließlich stark zusammenhängende Graphen, so fallen beide Definitionen jedoch zusammen.

Da unsere Graphen stets stark zusammenhängend sind (die Shifträume werden als transitiv vorausgesetzt), werden wir nicht länger zwischen $\text{per}(G)$ und $\text{per}_w(G)$ unterscheiden.

Lemma 4.11 *Für einen stark zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ stimmt die gewichtete Periode $\text{per}_w(G)$ mit der mittels gerichteter Loops definierten Periode $\text{per}(G) := \text{ggT} \{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{gerichteter, geschlossener Pfad der Länge } n \text{ in } G\}$ überein.*

Beweis: Sei $W_G(u, v) := \{w \in \mathbb{Z} \mid \exists \text{ ungerichteter Pfad von } u \text{ nach } v \text{ mit Gewicht } w \text{ in } G\}$ für alle $u, v \in V$ die Menge der auftretenden Gewichte. Da G als stark zusammenhängend vorausgesetzt ist, gilt unabhängig von $v \in V$: $W_G(v, v) = \text{per}_w(G) \cdot \mathbb{Z}$, wobei die gewichtete Periode $\text{per}_w(G)$ ein Erzeuger für das Ideal $W_G(v, v)$ ist.

Jeder gerichtete Pfad der Länge $n \in \mathbb{N}$ in G hat zugleich Gewicht n . Somit gilt für alle gerichteten Loops der Länge n an einem beliebigen Vertex $v \in V$ bereits $n \in W_G(v, v)$. Durchläuft man einen solchen gerichteten Loop entgegen der Kantenrichtung, so erhält man als Gewicht die negative Länge, so daß auch $-n \in W_G(v, v)$. Durch mehrfache Konkatenation des Loops ist $n \cdot \mathbb{Z} \subseteq W_G(v, v)$. Dies erzwingt

$$\text{ggT} \{n \in \mathbb{N} \mid \exists \text{ gerichteter Loop der Länge } n \text{ in } G\} \cdot \mathbb{Z} \subseteq \text{per}_w(G) \cdot \mathbb{Z}$$

also $\text{per}_w(G) \mid \text{per}(G)$.

Für die Umkehrung sei ein ungerichteter, geschlossener Pfad p mit Gewicht $w_p = \text{per}_w(G)$ gegeben. Dieser zerfällt in gerichtete Teilpfade p_1, p_2, \dots, p_n ($n \in \mathbb{N}$), die abwechselnd in bzw. gegen ihre Kantenrichtung durchlaufen werden und so im Gesamtgewicht abwechselnd positiv und negativ zählen (oE werde p_1 in Kantenrichtung durchlaufen; es gilt $\mathbf{t}(p_1) = \mathbf{t}(p_2)$, $\mathbf{i}(p_2) = \mathbf{i}(p_3), \dots$): $\text{per}_w(G) = w_p = |p_1| - |p_2| + |p_3| - \dots + (-1)^{n+1}|p_n|$.

Aufgrund des starken Zusammenhangs in G läßt sich jeder, entgegen seiner Kantenrichtung durchlaufene, Teilpfad p_{2i} ($1 \leq i \leq \frac{n}{2}$) durch einen gerichteten Pfad p'_{2i} (mit $\mathbf{i}(p'_{2i}) = \mathbf{t}(p_{2i})$ und $\mathbf{t}(p'_{2i}) = \mathbf{i}(p_{2i})$) zu einem geschlossenen Loop in G vervollständigen. Für die Länge dieser Loops gilt $\text{per}(G) \mid (|p_{2i}| + |p'_{2i}|)$.

Nach Konstruktion ist auch $q := p_1 p'_2 p_3 p'_4 \dots p_n$ ein gerichteter Loop in G , d.h. $\text{per}(G) \mid |q|$. Fügt man die Teilbarkeitsrelationen zusammen, erhält man schließlich:

$$\text{per}(G) \mid \underbrace{(|p_1| + |p'_2| + |p_3| + |p'_4| + \dots + |p'_n|)}_{|q|} - \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (|p_{2i}| + |p'_{2i}|) = w_p = \text{per}_w(G)$$

□

Satz 4.12 Sei $G = (V, E)$ eine Graphendarstellung des lokalkompakten, transitiven Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum. Der kanonische Rand $(Z(X), \Theta_X)$ sei, wie oben definiert, durch eine Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ($\forall n \in \mathbb{N} : K_n \subseteq K_{n+1} \subsetneq E$ endlich; $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n = E$) gegeben.

Seien $z_j = (H_n^{(j)}, i_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}} \in Z(X)$ ($j \in \{1, 2, 3, 4\}$) vier Randpunkte, so gibt es keinen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$, für den gilt:

$$\hat{\varphi}(z_1) = z_3 \quad \wedge \quad \hat{\varphi}(z_2) = z_4 \quad \wedge \quad i_1^{(3)} - i_1^{(1)} \not\equiv i_1^{(4)} - i_1^{(2)} \pmod{\text{per}(G)}$$

Beweis: Oe sei der kanonische Rand $Z(X)$ durch die intrinsische Faktorabbildung $g : X \rightarrow Z(X)$ mit X verheftet, alle K_n ($n \in \mathbb{N}$) seien Kantenmengen stark zusammenhängender Teilgraphen in G und es existiere eine Kante $e \in K_1$ mit $g_G(e) = 0$.

Zu einem beliebigen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ und zwei beliebigen Randpunkten $z_1, z_2 \in Z(X)$ definiert man $z_3 := \hat{\varphi}(z_1)$ und $z_4 := \hat{\varphi}(z_2)$. Die Randpunkte seien mit den entsprechenden Folgen aus $\prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ identifiziert: $z_j = (H_n^{(j)}, i_n^{(j)})_{n \in \mathbb{N}}$ für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Um die Aussage des Satzes zu zeigen, genügt es, die Kongruenz $i_1^{(3)} - i_1^{(1)} \equiv i_1^{(4)} - i_1^{(2)} \pmod{\text{per}(G)}$ nachzuweisen:

Man wählt einen rechtsseitig-unendlichen, einfachen Weg $r := r_1 r_2 r_3 \dots$, der bei $\mathfrak{t}(e)$ startet und auf direktem Weg durch die Komponenten $H_n^{(1)}$ läuft, d.h. es gibt eine aufsteigende Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n \in \mathbb{N}$, so daß $r_i \in E_{H_n^{(1)}} \setminus E_{H_{n+1}^{(1)}}$ für alle $s_n \leq i < s_{n+1}$. Ein solcher existiert aufgrund des starken Zusammenhangs der Kantenmengen K_n .

Entsprechend wählt man einen linksseitig-unendlichen, einfachen Weg $w := \dots w_{-3} w_{-2} w_{-1}$, der bei $\mathfrak{i}(e)$ endet, so daß für eine aufsteigende Folge $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $t_n \in \mathbb{N}$ wiederum gilt: $w_{-i} \in E_{H_n^{(2)}} \setminus E_{H_{n+1}^{(2)}}$ für alle $t_n \leq i < t_{n+1}$.

Durch Zusammenkleben der Kante e und der Wege w und r definiert man einen Punkt $x := \dots w_{-3} w_{-2} w_{-1} . e r_1 r_2 r_3 \dots \in X$.

Nach Konstruktion von r gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index $i \in \mathbb{N}$, so daß $(\sigma^i(x))_0 \in E_{H_n^{(1)}}$ und $g_{H_n^{(1)}}((\sigma^i(x))_0) = i_n^{(1)}$. Der σ -Vorwärtsorbit des Punktes x enthält daher eine Folge $(\sigma^{i_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ($i_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) von Punkten, die bezüglich der kanonischen Metrik \hat{d} gegen z_1 konvergiert. Speziell liegen fast alle Folgenglieder in dem eingeschränkten Orbit $\mathcal{O}^+(x) := \{\sigma^i(x) \mid i \in \mathbb{N} \wedge i \equiv i_1^{(1)} \pmod{\text{per}(G)}\}$, denn bereits $g_{H_1^{(1)}}((\sigma^i(x))_0) = i_1^{(1)}$ gilt höchstens für $i \equiv i_1^{(1)} \pmod{\text{per}(G)}$.

Ebenfalls nach Konstruktion enthält der σ -Rückwärtsorbit von x eine Folge $(\sigma^{-j_n}(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ($j_n \in \mathbb{N}$ für alle $n \in \mathbb{N}$) von Punkten, die gegen z_2 konvergiert. Diese liegt, bis auf ein endliches Anfangsstück, sogar in $\mathcal{O}^-(x) := \{\sigma^{-j}(x) \mid j \in \mathbb{N} \wedge -j \equiv i_1^{(2)} \pmod{\text{per}(G)}\}$.

Aus der Stetigkeit von $\hat{\varphi}$ bei $\hat{\varphi}(z_1) = z_3$ und $\hat{\varphi}(z_2) = z_4$ folgt die Konvergenz der Bildfolgen $(\varphi(\sigma^{i_n}(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(\varphi(\sigma^{-j_n}(x)))_{n \in \mathbb{N}}$ gegen z_3 bzw. z_4 . Für alle $n \in \mathbb{N}$ groß genug ergibt sich:

$$\begin{aligned} i_1^{(3)} &\equiv g_G\left(\left(\varphi(\sigma^{i_n}(x))\right)_0\right) \equiv g_G\left(\left(\sigma^{i_n}(\varphi(x))\right)_0\right) \equiv g_G\left(\left(\varphi(x)\right)_{i_n}\right) \equiv \\ &\equiv g_G\left(\left(\varphi(x)\right)_0\right) + i_n \pmod{\text{per}(G)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1^{(4)} &\equiv g_G\left(\left(\varphi(\sigma^{-j_n}(x))\right)_0\right) \equiv g_G\left(\left(\sigma^{-j_n}(\varphi(x))\right)_0\right) \equiv g_G\left(\left(\varphi(x)\right)_{-j_n}\right) \equiv \\ &\equiv g_G\left(\left(\varphi(x)\right)_0\right) - j_n \pmod{\text{per}(G)} \end{aligned}$$

Wählt man n so groß, daß zudem $\sigma^{i_n}(x) \in \mathcal{O}^+(x)$ und $\sigma^{-j_n}(x) \in \mathcal{O}^-(x)$, so erhält man wie gefordert: $i_1^{(3)} - i_1^{(1)} \equiv g_G\left(\left(\varphi(x)\right)_0\right) \equiv i_1^{(4)} - i_1^{(2)} \pmod{\text{per}(G)}$. \square

Bemerkung: Ist man für eine spezielle Graphendarstellung G eines Markovshifts (X, σ) in der Lage zu zeigen, daß im Beweis zu Satz 4.12 ein Punkt $x \in X$ gewählt werden kann, so daß unabhängig von $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ sowohl x als auch $\varphi(x)$ ganz in einer Komponente $H_n \in \mathcal{C}(G - K_n)$ liegen, so gilt die entsprechend verschärfte Aussage modulo $\text{per}_w(H_n)$ anstelle von $\text{per}(G)$.

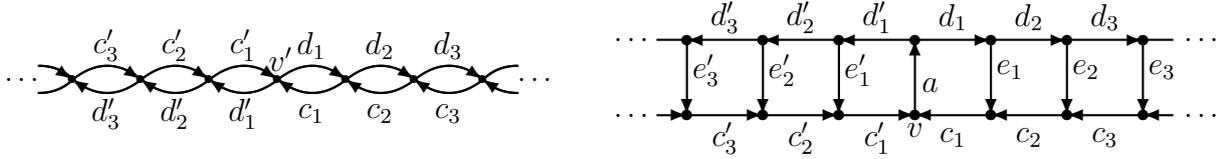


Abbildung 4.2: Dargestellt sind die Graphen zu zwei transitiven, lokalkompakten Kantenshifts, deren kanonischer Rand $(Z(X), \Theta_X)$ aus je zwei Θ_X -Orbits der Länge 2 besteht. Die Automorphismengruppe des Rand-dynamischen Systems ist somit $\text{Aut}(\Theta_X) \cong \{\text{Id}, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$.

Korollar 4.13 Sei $(Z(X), \Theta_X)$ der kanonische Rand eines lokalkompakten, transitiven Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum. Es existiert kein Automorphismus, dessen Fortsetzung auf $Z(X)$ zwei Θ_X -Orbits modulo der Periode des Subshifts X verschieden weit dreht, d.h.

$$\forall \varphi \in \text{Aut}(\sigma), z_1, z_2 \in Z(X) : \hat{\varphi}(z_1) = \hat{\sigma}^{i_1}(z_1) \wedge \hat{\varphi}(z_2) = \hat{\sigma}^{i_2}(z_2) \implies i_1 \equiv i_2 \pmod{\text{per}(X)}$$

Beweis: Die Aussage des Korollars folgt als Spezialfall direkt aus Satz 4.12, denn für $k := 1, 2$ gilt: $\hat{\sigma}^{i_k}(z_k) = (H_n^{(k)}, i_n^{(k)} + i_k \pmod{\text{per}_w(H_n^{(k)})})_{n \in \mathbb{N}}$ und $\text{per}(X) \mid \text{per}_w(H_n^{(k)})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \square

Satz 4.12 ermöglicht es bereits, für bestimmte Markovshifts das Bild der Automorphismengruppe unter der kanonischen-Rand-Darstellung vollständig zu beschreiben. So gilt für die beiden lokalkompakten Markovshifts, der in Abbildung 4.2 dargestellten Graphen, jeweils $\beta(\text{Aut}(\sigma)) \cong \{\text{Id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$ (Klein'sche Vierergruppe).

In beiden Fällen wird das Bild jeweils von der Shiftabbildung σ und dem involutorischen 1-Block-Code, der die rechte und linke Hälfte des Graphen vertauscht (Austausch: $c_i \longleftrightarrow c'_i, d_i \longleftrightarrow d'_i, e_i \longleftrightarrow e'_i$) erzeugt. Die vier Automorphismen in $\text{Aut}(\Theta_X)$, die nicht im Bild der kanonischen-Rand-Darstellung auftauchen, werden durch Satz 4.12 ausgeschlossen.

Beobachtung 4.14 Sei $(Z(X), \Theta_X)$ der kanonische Rand eines lokalkompakten, transitiven Markovshifts (X, σ) über einem abzählbar unendlichen Alphabet. Ein Randpunkt $z_1 \in Z(X)$ kann höchstens dann durch die Fortsetzung eines Automorphismus auf $z_2 \in Z(X)$ abgebildet werden, falls die periodischen Daten der beiden Randpunkte z_1 und z_2 bei ∞ (vgl. [FF2] Definition 3.7 und anschließende Bemerkung a)) übereinstimmen, d.h. wenn gilt: $\Omega(z_1) = \Omega(z_2)$, wobei $\Omega(z) := \{k \in \mathbb{N} \mid \exists (x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} : x^{(n)} \in \text{Per}_k^0(X) \wedge \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(x^{(n)}, z) = 0\}$ für alle $z \in Z(X)$.

Beweis: Seien $z_1, z_2 \in Z(X)$ zwei Randpunkte, deren periodische Daten bei ∞ verschieden sind, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so daß $k \in \Omega(z_1)$ und $k \notin \Omega(z_2)$. Angenommen man hätte

einen Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ mit $\hat{\varphi}(z_1) = z_2$.

Man wählt eine Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ von Punkten $x^{(n)} \in \text{Per}_k^0(X)$, die bezüglich der kanonischen Metrik \hat{d} gegen z_1 konvergiert. Die Punkte der Bildfolge $(\varphi(x^{(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ liegen nun ebenfalls in $\text{Per}_k^0(X)$. Aufgrund der Stetigkeit von $\hat{\varphi}$ müßte diese Folge aber gegen z_2 konvergieren. Ein Widerspruch zu $k \notin \Omega(z_2)$. \square

Bemerkung: Die Ω -Mengen verschiedener Randpunkte eines Θ_X -Orbits stimmen offensichtlich überein, da mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(x^{(n)}, z) = 0$, $x^{(n)} \in \text{Per}_k^0(X)$ auch $\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{d}(\hat{\sigma}^i(x^{(n)}), \hat{\sigma}^i(z)) = 0$ und $\hat{\sigma}^i(x^{(n)}) \in \text{Per}_k^0(X)$ gilt. Anstelle von Ω -Mengen bzw. periodischen Daten bei ∞ eines Randpunktes könnte man deshalb auch von Ω -Mengen bzw. periodischen Daten bei ∞ des entsprechenden Θ_X -Orbits sprechen.

Verklebt man je eine Hälfte der beiden in Abbildung 4.2 gezeigten Graphen durch Identifikation der Vertices $v = \mathbf{i}(a)$ und $v' = \mathbf{i}(d_1)$, so erhält man die Darstellung eines lokalkompakten, transitiven Kantenshifts (X, σ) , dessen kanonischer Rand ebenfalls aus zwei Θ_X -Orbits der Länge 2 besteht. Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\Theta_X)$ enthält daher, wie bei den beiden Markovshifts zuvor, 8 Elemente.

Nun stimmen aber die periodischen Daten bei ∞ der Randpunkte aus verschiedenen Θ_X -Orbits nicht länger überein. Die Ω -Mengen der beiden Randpunkte, die zu der aus dem linken Graphen in Abbildung 4.2 entnommenen Hälfte gehören, umfassen alle geraden Zahlen, während sich die beiden anderen Randpunkte durch keine Folge periodischer Punkte fester, endlicher Periode approximieren lassen (ihre Ω -Mengen sind leer).

Die Fortsetzung eines Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ muß deshalb nach Beobachtung 4.14 die beiden Θ_X -Orbits in sich abbilden. Nach Korollar 4.13 müssen beide Θ_X -Orbits zudem modulo 2 ($= \text{per}(X)$) um die gleiche Weite gedreht werden. Die innere Struktur dieses Kantenshifts ist daher so starr, daß das Bild $\beta(\text{Aut}(\sigma)) = \{\text{Id}_{Z(X)}, \Theta_X\} = \langle \Theta_X \rangle$ bereits alleine von der Shiftabbildung erzeugt wird.

Man beachte, daß die hier gegebene Definition der periodischen Daten bei ∞ leicht von der in [FF2] benutzten Definition abweicht. Dort wurde lediglich die Existenz einer Folge $(x^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ periodischer Punkte $x^{(n)} \in \text{Per}_k(X)$ gefordert, während in unserer Definition der Ω -Menge $x^{(n)} \in \text{Per}_k^0(X)$ gelten muß.

Dieser Unterschied ermöglicht es uns zu zeigen, daß bestimmte Automorphismen des kanonischen Randes nicht von Automorphismen des Markovshifts induziert werden, ohne daß dies mit der ursprünglichen Definition von D. Fiebig und U.-R. Fiebig möglich wäre:

Betrachte hierzu den rechten Graphen in Abbildung 4.2, der zusätzlich an jedem Vertex $\mathbf{t}(d_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) einen einfachen Loop der Länge 2 und an jedem Vertex $\mathbf{t}(d'_n)$ ($n \in \mathbb{N}$) zwei solche Loops hat. In der ursprünglichen Definition der periodischen Daten bei ∞ unterscheiden sich die beiden Θ_X -Orbits des kanonischen Randes nicht (beide Ω -Mengen bestehen aus allen geraden Zahlen). In unserer Definition ist die Ω -Menge der linken Komponente ebenfalls $2\mathbb{Z}$. Die Ω -Menge des zur rechten Hälfte des modifizierten Graphen gehörigen Θ_X -Orbits enthält dagegen nur die Zahl 2 und das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung ist nach Beobachtung 4.14 und Korollar 4.13 wieder minimal.

4.3 Die Pfadstruktur bei ∞

Zu einem lokalkompakten Markovshift (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge definieren wir eine Relation auf der Menge der Θ_X -Orbits seines kanonischen Randes, die von der Pfadstruktur einer beliebigen Graphendarstellung "weit draußen", in der Umgebung des jeweiligen Θ_X -Orbits abhängt. Diese Pfadstruktur-Relation ergibt zum einen ein notwendiges Kriterium für die Existenz einer topologischen Konjugation zwischen zwei lokalkompakten Markovshifts und schränkt zum anderen das mögliche Bild der kanonischen-Rand-Darstellung weiter ein.

Als direkte Folgerung erhält man die Aussage, daß im allgemeinen nicht alle Permutationen einer unendlichen Menge periodischer Punkte $\text{Per}_n^0(X)$ eines lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum durch Automorphismen realisierbar sind. Anders als bei mischenden SFTs, wo diese Einschränkung nur für kleine Periodenlängen n besteht, tritt sie hier für beliebig große Perioden auf.

Abschließend geben wir ein Beispiel eines lokalkompakten Kantenshifts und einer projektiven Folge von Automorphismen dieses Subshifts, die auf einer aufsteigenden Folge endlicher Teilgraphen (SFTs) wirken, deren auf den gesamten Markovshift wirkender Limes aber selbst kein Automorphismus ist.

Sei $(Z(X), \Theta_X)$ der kanonische Rand eines lokalkompakten Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge. Wir betrachten die Menge $\text{Orb}(Z(X)) := Z(X)/\langle \Theta_X \rangle$ der Θ_X -Orbits. Wird $Z(X)$ bezüglich einer Graphendarstellung $G = (V, E)$ wie in Abschnitt 4.2 durch eine aufsteigende Folge $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ endlicher Kantenmengen $K_n \subsetneq E$ gegeben, so läßt sich die Quotientenabbildung $\pi : Z(X) \rightarrow \text{Orb}(Z(X))$ formal als Projektion $\pi((H_n, i_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschreiben. Man betrachtet also nur die Folge der Komponenten $H_n \in \mathcal{C}(G - K_n)$ und vergißt die durch das periodische Labeling gegebene Zusatzinformation.

Ein Punkt $x \in X$ heißt vorwärts-asymptotisch zu einem Θ_X -Orbit $\mathcal{O} \in \text{Orb}(Z(X))$, falls der Abstand zwischen \mathcal{O} und den Punkten des Vorwärtsorbits von x bezüglich der Quotientenmetrik gegen Null konvergiert, d.h. falls $\inf\{\hat{d}(\sigma^n(x), z) \mid z \in \mathcal{O}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. x ist rückwärts-asymptotisch zu \mathcal{O} , falls entsprechend $\inf\{\hat{d}(\sigma^{-n}(x), z) \mid z \in \mathcal{O}\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dabei bezeichnet \hat{d} die kanonische Metrik auf der kanonischen Kompaktifizierung $(\hat{X}, \hat{\sigma})$ (vgl. Abschnitt 4.2).

Sei $x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in X$ vorwärts-asymptotisch zu $\mathcal{O} = (H_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Orb}(Z(X))$, so existiert eine aufsteigende Folge $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen $N_n \in \mathbb{N}$, so daß für alle $i \geq N_n$ alle Kanten $x_i \in E_{H_n}$ in der Komponente H_n liegen. Entsprechend für rückwärts-asymptotische Punkte.

Wir definieren nun eine Relation auf den Θ_X -Orbits des kanonischen Randes $Z(X)$:

Definition 4.15 *Seien G_1 und G_2 zwei lokal-endliche, stark zusammenhängende Graphen. Wie in Abschnitt 4.2 beschrieben, seien die kanonischen Ränder der zugehörigen Shifträume X_1 bzw. X_2 durch aufsteigende Folgen endlicher Kantenmengen $(K_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(K_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ gegeben.*

Ein Θ_{X_1} -Orbit $\mathcal{O}_1 = (H_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Orb}(Z(X_1))$ heißt bezüglich seiner Pfadstruktur bei ∞ in einen Θ_{X_2} -Orbit $\mathcal{O}_2 = (H_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Orb}(Z(X_2))$ einbettbar, falls gilt:

Für alle Punkte $x, y \in X_1$ mit x vorwärts-asymptotisch zu \mathcal{O}_1 und y rückwärts-asymptotisch zu \mathcal{O}_1 und zu jeder Zahl $N \in \mathbb{N}$ gibt es $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_1, n_2 \geq N$ und Indizes $i, j, k, l \in \mathbb{N}$ mit $i \leq j$, $-k \leq -l$, so daß die unendlichen Teilwege $x_{[i, \infty)} = x_i \dots x_j \dots$ und $y_{(-\infty, -l]} = \dots y_{-k} \dots y_{-l}$ ganz in $H_{n_1}^{(1)}$ verlaufen, sowie Kanten $e, f \in E_{H_{n_2}^{(2)}}$, so daß für alle Pfadlängen $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\# \left\{ b_1 \dots b_m \mid x_{[i, j]} b_1 \dots b_m y_{[-k, -l]} \in \mathcal{B}_{\tilde{m}+2}(X_1) \wedge \forall 1 \leq \mu \leq m : b_\mu \in E_{H_{n_1}^{(1)}} \right\} \\ \leq \# \left\{ b_1 \dots b_{\tilde{m}} \mid e b_1 \dots b_{\tilde{m}} f \in \mathcal{B}_{\tilde{m}+2}(X_2) \wedge \forall 1 \leq \mu \leq \tilde{m} : b_\mu \in E_{H_{n_2}^{(2)}} \right\}$$

wobei $\tilde{m} := m + (j - i) + (k - l)$.

Zwei Orbits $\mathcal{O}_1 = (H_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Orb}(Z(X_1))$ und $\mathcal{O}_2 = (H_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Orb}(Z(X_2))$ heißen vergleichbar bezüglich ihrer Pfadstruktur bei ∞ , wenn sowohl \mathcal{O}_1 in \mathcal{O}_2 als auch \mathcal{O}_2 in \mathcal{O}_1 einbettbar (bezüglich der Pfadstruktur bei ∞) ist.

Wir wollen nun zeigen, daß jede topologische Konjugation zwischen zwei transitiven, lokal-kompakten Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum die Vergleichbarkeitsrelation respektiert. Die durch die Pfadstruktur einer Graphendarstellung weit draußen gegebene Relation auf den Θ_X -Orbits des kanonischen Randes ist daher unabhängig von der gewählten Darstellung des Markovshifts und ergibt so eine Konjugationsinvariante.

Satz 4.16 *Zwei lokalkompakte, transitive Markovshifts (X_1, σ_1) , (X_2, σ_2) mit abzählbar unendlichen Zustandsmengen sind höchstens dann zueinander topologisch konjugiert, wenn eine Bijektion $\hat{\phi} : \text{Orb}(Z(X_1)) \rightarrow \text{Orb}(Z(X_2))$ zwischen den Orbits ihrer kanonischen Ränder $(Z(X_1), \Theta_{X_1})$ und $(Z(X_2), \Theta_{X_2})$ existiert⁶, so daß in beliebig gewählten Graphendarstellungen G_1 und G_2 der beiden Markovshifts jeder Θ_{X_1} -Orbit $\mathcal{O}_1 \in \text{Orb}(Z(X_1))$ mit seinem Bildpunkt $\mathcal{O}_2 := \hat{\phi}(\mathcal{O}_1) \in \text{Orb}(Z(X_2))$ bezüglich seiner Pfadstruktur bei ∞ vergleichbar ist.*

Beweis: Angenommen man hat eine topologische Konjugation $\gamma : X_1 \rightarrow X_2$ zwischen den beiden Markovshifts. Diese läßt sich in eindeutiger Weise zu einem Homöomorphismus $\hat{\gamma} : \hat{X}_1 \rightarrow \hat{X}_2$ der kanonischen Kompaktifizierungen fortsetzen. Die hiervon induzierte Abbildung von der Menge der Θ_{X_1} -Orbits auf die Menge der Θ_{X_2} -Orbits ist dann bijektiv und hat die geforderte Verträglichkeitseigenschaft:

Zunächst bemerkt man, daß die Abbildung $\pi_{X_2} \circ \hat{\gamma}|_{Z(X_1)} \circ \pi_{X_1}^{-1} : \text{Orb}(Z(X_1)) \rightarrow \text{Orb}(Z(X_2))$ wohldefiniert ist, da $\hat{\gamma}$ mit den Fortsetzungen $\hat{\sigma}_1$ und $\hat{\sigma}_2$ der Shiftabbildungen kommutiert. Man setzt daher $\hat{\phi} := \pi_{X_2} \circ \hat{\gamma}|_{Z(X_1)} \circ \pi_{X_1}^{-1}$ und erhält so eine Bijektion von $\text{Orb}(Z(X_1))$ auf $\text{Orb}(Z(X_2))$.⁷

Seien nun $G_1 = (V_1, E_1)$ und $G_2 = (V_2, E_2)$ zwei beliebige Graphendarstellungen der Markovshifts (X_1, σ_1) bzw. (X_2, σ_2) . Die kanonischen Ränder $(Z(X_1), \Theta_{X_1})$ und $(Z(X_2), \Theta_{X_2})$ seien

⁶Notwendigerweise sind dann die kanonischen Ränder als dynamische Systeme selbst topologisch konjugiert zueinander.

⁷Genau wie der kanonische Rand $Z(X)$ ist auch die Menge der Θ_X -Orbits von der gewählten Folge endlicher Kantenmengen $K_n \subsetneq E$ unabhängig, so daß wir nicht zwischen $\text{Orb}(Z(X))$ und $\text{Orb}(Z(X, (K_n)_{n \in \mathbb{N}}))$ unterscheiden müssen.

durch aufsteigende Folgen $(K_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(K_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ endlicher Teilmengen der Kantenmengen E_1 bzw. E_2 definiert ($K_1^{(i)} \subseteq K_2^{(i)} \subseteq K_3^{(i)} \subseteq \dots$ mit $K_n^{(i)} \subsetneq E_i$ endlich und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n^{(i)} = E_i$ für $i \in \{1, 2\}$). Dabei enthalte $K_1^{(1)}$ bereits alle Kanten eines (kürzesten) Loops p in G_1 und jedes $K_n^{(i)}$ ($n \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, 2\}$) sei Kantenmenge eines stark zusammenhängenden Teilgraphen in G_i .

Um die Behauptung einzusehen, sei $\mathcal{O}_1 = (H_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Orb}(Z(X_1, (K_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}))$ ein beliebiger Θ_{X_1} -Orbit und $\mathcal{O}_2 = (H_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}} := \hat{\phi}(\mathcal{O}_1) \in \text{Orb}(Z(X_2, (K_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}))$ sein Bildorbit unter $\hat{\phi}$. Seien nun $u := p^\infty \cdot u_0 u_1 u_2 \dots \in X_1$ und $w := \dots w_{-3} w_{-2} w_{-1} \cdot p^\infty \in X_1$ zweiseitig-unendliche Wege in G_1 , wobei u vorwärts-asymptotisch und w rückwärts-asymptotisch zu \mathcal{O}_1 ist. OE betrachtet man nur solche Punkte, deren Nullkoordinate eine bei $i(p) = \mathfrak{t}(p) \in V_1$ auslaufende Kante ist, da jeder beliebige, einseitig-unendliche, zu \mathcal{O}_1 asymptotische Weg in G_1 als Teilweg von $u_{[0, \infty)}$ bzw. $w_{(-\infty, -1]}$ realisiert werden kann.

Da γ mit den Shiftabbildungen vertauscht, gilt: $\gamma(p^\infty) = q^\infty \in \text{Per}_{|p|}^0(X_2)$ für einen Block $q \in \mathcal{B}_{|p|}(X_2)$, so daß p^∞ und q^∞ zwei Punkte gleicher minimaler Periodenlänge sind.

Auf den endlich vielen Symbolen des Blockes q hat γ nach (CL) eine beschränkte Kodierlänge. Aufgrund der Stetigkeit von γ werden deshalb die Punkte u und w auf Punkte der Form $q^\infty U_{-L} \dots U_{-1} \cdot U_0 U_1 \dots \in X_2$ und $\dots W_{-2} W_{-1} \cdot W_0 \dots W_{L-1} q^\infty \in X_2$ (mit $|p| \mid L$) abgebildet.

Nach Konstruktion von u gilt: $\inf\{\hat{d}_{X_1}(\sigma_1^n(u), z) \mid z \in \mathcal{O}_1\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Weiterhin ist die Fortsetzung der Konjugation γ stetig bezüglich der kanonischen Metriken \hat{d}_{X_1} und \hat{d}_{X_2} und $\sigma_2^n \circ \gamma = \gamma \circ \sigma_1^n$. Da $\hat{\phi}(\mathcal{O}_1) = \mathcal{O}_2$, geht für $n \rightarrow \infty$ auch $\inf\{\hat{d}_{X_2}(\sigma_2^n(\gamma(u)), z) \mid z \in \mathcal{O}_2\}$ gegen Null. Der Bildpunkt $U := \gamma(u) \in X_2$ ist daher vorwärts-asymptotisch zu \mathcal{O}_2 . Folglich gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index $i \in \mathbb{N}$, so daß der rechtsseitig-unendliche Teilweg $U_{[i, \infty)}$ ganz in $H_n^{(2)}$ verläuft.

Entsprechend ist $W := \gamma(w) \in X_2$ rückwärts-asymptotisch zu \mathcal{O}_2 und es gibt zu jedem $n \in \mathbb{N}$ einen Index $i \in \mathbb{N}$, so daß der linksseitig-unendliche Weg $W_{(-\infty, i]}$ ganz in $H_n^{(2)}$ verläuft.

Weiterhin trifft das Urbild der Menge $\bigcup_{e \in K_n^{(2)}} 0[e] \subsetneq X_2$ unter γ für jedes $n \in \mathbb{N}$ nur endlich viele Nullzylinder in X_1 . Zu jedem $n_2 \in \mathbb{N}$ gibt es somit ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so daß

$$\gamma^{-1}\left(\bigcup_{e \in K_{n_2}^{(2)}} 0[e]\right) \subseteq \bigcup_{e \in K_{n_1}^{(1)}} 0[e] \quad \text{und damit} \quad \gamma^{-1}\left(\bigcup_{e \in K_{n_2}^{(2)}} 0[e]\right) \cap \bigcup_{e \in E_{H_{n_1}^{(1)}}} 0[e] = \emptyset \quad (\text{KH})$$

Sei nun $n_2 \in \mathbb{N}$ beliebig, groß genug und fest gewählt, und sei $i \in \mathbb{N}$ der minimale Index, so daß für alle $l \geq i$ gilt: $U_l \in E_{H_{n_2}^{(2)}}$ und $W_{-l} \in E_{H_{n_2}^{(2)}}$. Ein solcher Index existiert nach Konstruktion von u und w wie oben ausgeführt.

Gemäß (CL) läßt sich ein $j \in \mathbb{N}$, $j > i$ finden, für das gilt:

$$\begin{aligned} \gamma((p^\infty u_0 \dots u_i \dots u_{j-1} u_j]_{j-i}) &\subseteq (q^\infty U_{-L} \dots U_0 \dots U_{i-1} U_i]_0 \\ \gamma({}_{i-j}[w_{-j} w_{-j+1} \dots w_{-i} \dots w_{-1} p^\infty)) &\subseteq {}_0[W_{-i} W_{-i+1} \dots W_0 \dots W_{L-1} q^\infty) \end{aligned}$$

und so daß zudem für alle $l \geq j$ gilt: $u_l \in E_{H_{n_1}^{(1)}}$, $w_{-l} \in E_{H_{n_1}^{(1)}}$, wobei $n_1 \in \mathbb{N}$ zu n_2 gemäß (KH) gewählt wurde. OE ist dabei $n_1 \geq n_2$.

Schließlich läßt sich ein $k \in \mathbb{N}$, $k \geq j$ finden, für das gilt:

$$\begin{aligned} \gamma((p^\infty u_0 \dots u_i \dots u_j \dots u_{k-1} u_k]_{k-i}) &\subseteq (q^\infty U_{-L} \dots U_0 \dots U_i \dots U_{j-1} U_j]_{j-i} \\ \gamma(i_{-k}[w_{-k} w_{-k+1} \dots w_{-j} \dots w_{-i} \dots w_{-1} p^\infty)) &\subseteq i_{-j}[W_{-j} W_{-j+1} \dots W_{-i} \dots W_0 \dots W_{L-1} q^\infty) \end{aligned}$$

Man vergleicht nun die Pfadstruktur des Graphen $G_{n_1}^{(1)} = (V_1, E_{H_{n_1}^{(1)}})$ zwischen den Vertices $\mathfrak{t}(u_k)$ und $\mathfrak{i}(w_{-k})$ mit der des Graphen $G_{n_2}^{(2)} = (V_2, E_{H_{n_2}^{(2)}})$ zwischen $\mathfrak{t}(U_j)$ und $\mathfrak{i}(W_{-j})$:

Zu $m \in \mathbb{N}$ sei

$$B_m := \left\{ b_1 \dots b_m \mid u_k b_1 \dots b_m w_{-k} \in \mathcal{B}_{m+2}(X_1) \wedge \forall 1 \leq \mu \leq m : b_\mu \in E_{H_{n_1}^{(1)}} \right\} \subseteq \mathcal{B}_m(X_1)$$

die Menge aller Pfade der Länge m , die vollständig in $H_{n_1}^{(1)}$ verlaufen und $\mathfrak{t}(u_k)$ mit $\mathfrak{i}(w_{-k})$ verbinden.

Zu jedem Block $b = b_1 \dots b_m \in B_m$ konstruiert man nun einen Punkt

$$x_b := p^\infty u_0 \dots u_{i-1} \cdot u_i \dots u_j u_{j+1} \dots u_k b_1 \dots b_m w_{-k} \dots w_{-j-1} w_{-j} \dots w_{-i} \dots w_{-1} p^\infty \in X_1$$

Dessen Bild unter γ hat folgende Gestalt:

$$\gamma(x_b) = q^\infty U_{-L} \dots U_0 \dots U_{i-1} \cdot U_i \dots U_j \underbrace{\quad ? \quad ? \quad ? \quad}_{\quad} W_{-j} \dots W_{-i} \dots W_0 \dots W_{L-1} q^\infty$$

Nach Konstruktion enthält der Block $u_{j+1} \dots u_k b_1 \dots b_m w_{-k} \dots w_{-j-1}$ nur Kanten aus $E_{H_{n_1}^{(1)}}$.

Daher kann keine Kante des unbekanntenen, mittleren Blockes in der Menge $K_{n_2}^{(2)}$ liegen, sonst würde sich ein Widerspruch zu (KH) ergeben. Nach Wahl von i liegen U_j und W_{-j} und damit auch alle Kanten des unbekanntenen Blockes in $E_{H_{n_2}^{(2)}}$.

Die Komponente $H_{n_2}^{(2)}$ muß damit zwischen den Vertices $\mathfrak{t}(U_j)$ und $\mathfrak{i}(W_{-j})$ mindestens so viele Pfade der Länge $m + 2(k - j)$ enthalten, wie die Komponente $H_{n_1}^{(1)}$ Pfade der Form $u_{j+1} \dots u_k b_1 \dots b_m w_{-k} \dots w_{-j-1}$ mit $b_1 \dots b_m \in B_m$ enthält.

Dies zeigt die Einbettbarkeit des Θ_{X_1} -Orbits \mathcal{O}_1 in \mathcal{O}_2 . Ein symmetrisches Argument mit γ^{-1} anstelle von γ zeigt, daß auch der Θ_{X_2} -Orbit \mathcal{O}_2 bezüglich der Pfadstruktur bei ∞ in \mathcal{O}_1 einbettbar ist. \square

Als unmittelbare Folgerung aus Satz 4.16 erhält man eine entsprechende Aussage über Automorphismen und das Bild der Automorphismengruppe unter der kanonischen-Rand-Darstellung β :

Korollar 4.17 *Sei (X, σ) ein lokalkompakter, transitiver Markovshift mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge. $(Z(X), \Theta_X)$ bezeichne den kanonischen Rand. Ein Θ_X -Orbit $\mathcal{O}_1 \in \text{Orb}(Z(X))$ läßt sich höchstens dann durch die Fortsetzung $\hat{\varphi}$ eines Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ auf einen Θ_X -Orbit $\mathcal{O}_2 \in \text{Orb}(Z(X))$ abbilden, wenn \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 bezüglich ihrer Pfadstruktur bei ∞ vergleichbar sind.*

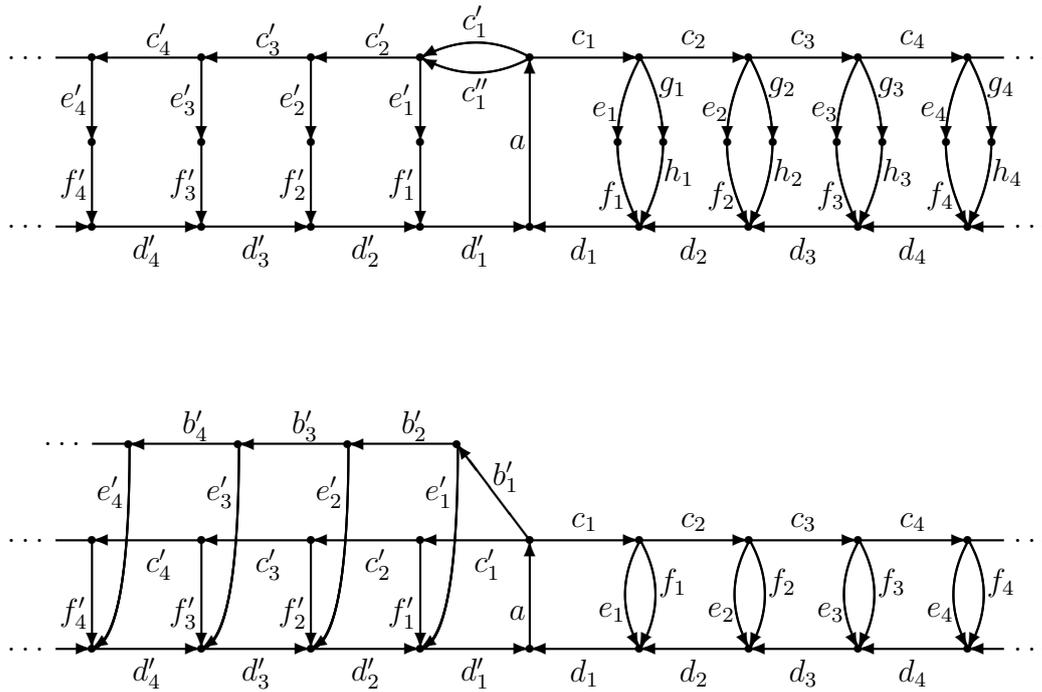


Abbildung 4.3: Die Abbildung zeigt die Graphendarstellungen zweier lokalkompakter, transitiver Markovshifts mit sehr geringer innerer Symmetrie. Das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung ist entsprechend klein.

Beweis: Siehe Beweis zu Satz 4.16 mit $(X_1, \sigma_1) = (X_2, \sigma_2) := (X, \sigma)$, $G_1 = G_2 := G$ eine Graphendarstellung für (X, σ) , $(K_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}} = (K_n^{(2)})_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $\gamma := \varphi$. \square

Abbildung 4.3 zeigt zwei Beispiele lokalkompakter, transitiver Markovshifts (X, σ) , deren kanonischer Rand jeweils aus zwei Θ_X -Orbits der Länge 2 besteht. Aufgrund der Pfadstruktur bei ∞ sind verschiedene Θ_X -Orbits nicht vergleichbar. Man könnte sagen, die rechte Seite sei nicht in die linke Seite des jeweiligen Graphen einbettbar.

Nach Satz 4.12 und Korollar 4.17 ist das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung in beiden Fällen kleinstmöglich: $\beta(\text{Aut}(\sigma)) = \beta(\langle \sigma \rangle) = \{\text{Id}, \Theta_X\}$.

Unterteilt man die Graphen an der mittleren, aufwärts gerichteten Kante in zwei Hälften (die beide eine Kopie der mittleren Kante a enthalten), so erhält man Graphendarstellungen entsprechender Kantenshifts mit gleicher Zetafunktion, gleichem kanonischem Rand und gleichen periodischen Daten bei ∞ . Satz 4.16 weist die beiden Paare von Markovshifts dennoch als nicht zueinander topologisch konjugiert aus. Die Relation "Vergleichbarkeit der Pfadstruktur bei ∞ " ergänzt damit die Menge der Konjugationsinvarianten in nützlicher Weise.

Aus Korollar 4.17 folgt weiterhin, daß sich nicht jede, den Shift respektierende Permutation auf einer (unendlichen) Menge periodischer Punkte eines lokalkompakten, transitiven Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet zu einem Automorphismus des Gesamtsystems fortsetzen läßt. In Beispiel 4.18 weisen wir dies für alle Mengen $\text{Per}_n^0(X)$

einer Modifikation des Kantenshifts aus Abbildung 4.3 oben nach, so daß die Antwort auf die LIFT-Hypothese für lokalkompakte Markovshifts, unabhängig von der Periodenlänge n , stets negativ ausfällt.

Beispiel 4.18 Wir fügen zu dem in Abbildung 4.3 oben dargestellten Graphen an allen Vertices $\mathbf{i}(d_i)$ und $\mathbf{i}(f'_i)$ ($i \in \mathbb{N}$) je zwei Selbstschleifen k_i, l_i bzw. k'_i, l'_i hinzu. Der entstehende Kantenshift sei (X, σ) .

Man betrachte nun eine mit der Shiftabbildung σ verträgliche Permutation $\tau \in \mathcal{S}_{\text{Per}_n^0(X)}$ auf der Menge der periodischen Punkte $\text{Per}_n^0(X)$, die die beiden Teilmengen $\{(k_i l_i^{n-1})^\infty \mid i \in \mathbb{N}\}$ und $\{(k'_i l'_i{}^{n-1})^\infty \mid i \in \mathbb{N}\}$ vertauscht, d.h.

$$\forall i \in \mathbb{N}: \quad \tau((k_i l_i^{n-1})^\infty) := (k'_i l'_i{}^{n-1})^\infty, \quad \tau((k'_i l'_i{}^{n-1})^\infty) := (k_i l_i^{n-1})^\infty \quad \text{und} \quad \sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$$

und auf dem Rest von $\text{Per}_n^0(X)$ beliebig operiert.

Wir werden nun zeigen, daß eine solche Permutation τ niemals als Einschränkung eines Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ auf $\text{Per}_n^0(X)$ auftreten kann:

Sei $\mathcal{O}_1 \in Z(X)$ der rechte, $\mathcal{O}_2 \in Z(X)$ der linke Randpunkt (beide Θ_X -Orbits haben nun Länge 1). Wie zuvor sind die Orbits $\{\mathcal{O}_1\}$ und $\{\mathcal{O}_2\}$ bezüglich ihrer Pfadstruktur bei ∞ nicht vergleichbar:

Wir benutzen die Notation aus Definition 4.15. Zu ganz in $H_{n_1}^{(1)}$ verlaufenden Wegen $x_{[i,\infty)}$ und $y_{(-\infty,-l]}$ (beide asymptotisch zu $\{\mathcal{O}_1\}$) sowie Kanten $e, f \in E_{H_{n_2}^{(2)}}$ definiert man

$$B_{e,f}(\tilde{m}) := \left\{ b_1 \dots b_{\tilde{m}} \mid e b_1 \dots b_{\tilde{m}} f \in \mathcal{B}_{\tilde{m}+2}(X) \wedge \forall 1 \leq \mu \leq \tilde{m} : b_\mu \in E_{H_{n_2}^{(2)}} \right\} \quad \text{und}$$

$$B_{x_{[i,j]}, y_{[-k,-l]}}(m) := \left\{ b_1 \dots b_m \mid x_{[i,j]} b_1 \dots b_m y_{[-k,-l]} \in \mathcal{B}_{\tilde{m}+2}(X) \wedge \forall 1 \leq \mu \leq m : b_\mu \in E_{H_{n_1}^{(1)}} \right\}$$

mit $\tilde{m} = m + (j - i) + (k - l)$. Unabhängig von e, f gilt $\#B_{e,f}(\tilde{m}) \leq 2^{\tilde{m}}$. Für große Pfadlängen $m \in \mathbb{N}$ ist andererseits

$$\#B_{x_{[i,j]}, y_{[-k,-l]}}(m) = 2^{m-I} + 2^{m-I-2}(m-I-2) + \underbrace{2^{m-I-5}(m-I-4)(m-I-3) + \dots}_{\geq 0}$$

wobei $I \in \mathbb{N}$ eine nur von der Wahl von x_j und y_{-k} abhängige Konstante ist (minimale Entfernung von $\mathbf{t}(x_j)$ nach $\mathbf{i}(y_{-k})$ minus 1).

Damit gilt für $m > 2^{(j-i)+(k-l)+I+2} + I - 2$ stets $\#B_{e,f}(\tilde{m}) < \#B_{x_{[i,j]}, y_{[-k,-l]}}(m)$ und $\{\mathcal{O}_1\}$ ist keinesfalls in $\{\mathcal{O}_2\}$ einbettbar.

Korollar 4.17 verbietet folglich die Existenz eines Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$, dessen Fortsetzung $\hat{\varphi}$ auf die kanonische Kompaktifizierung den Randpunkt \mathcal{O}_1 auf \mathcal{O}_2 abbildet. Genau dies ist aber wegen der Konvergenz $\hat{d}((k_i l_i^{n-1})^\infty, \mathcal{O}_1) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ und $\hat{d}((k'_i l'_i{}^{n-1})^\infty, \mathcal{O}_2) \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ nötig, um $\varphi|_{\text{Per}_n^0(X)} = \tau$ zu realisieren.

Die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\sigma)$ wirkt daher auf keiner Menge $\text{Per}_n^0(\sigma)$ periodischer Punkte wie $\text{Aut}(\text{Per}_n^0(X), \sigma)$, obwohl der kanonische Rand für sich (zwei identische Θ_X -Orbits der Länge 1) und die für beide Randpunkte übereinstimmenden periodischen Daten bei ∞ keine Einschränkungen liefern.

Als weitere Anwendung von Korollar 4.17 zeigen wir abschließend, daß zu einer projektiven Folge von Automorphismen, die auf einer aufsteigenden Folge von SFTs innerhalb eines lokal-kompakten Markovshifts wirkt, nicht immer eine Fortsetzung auf den gesamten Markovshift existiert.

Beispiel 4.19 Betrachten wir noch einmal den in Abbildung 4.3 unten dargestellten Kantenshift (X, σ) und die in ihm enthaltene, aufsteigende Folge von SFTs $((X_n, \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$, die durch die Teilgraphen $G_n = (V_n, E_n)$ mit

$$E_n := \{a, c_i, d_i, e_i, f_i, b'_i, c'_i, d'_i, e'_i, f'_i \mid i \leq n\} \quad \text{und} \quad V_n := \{i(e) \mid e \in E_n\}$$

gegeben sind.

Auf X_n hat man einen Automorphismus $\varphi_n \in \text{Aut}(\sigma_n)$, der in der gewählten Graphendarstellung links mit rechts vertauscht. Formal scannt φ_n einen Punkt $x \in X_n$, ersetzt die durch das Symbol a markierten Blöcke:

$$\begin{aligned} a c_1 \dots c_i e_i d_i \dots d_1 a &\longleftrightarrow a b'_1 \dots b'_i e'_i d'_i \dots d'_1 a \\ a c_1 \dots c_i f_i d_i \dots d_1 a &\longleftrightarrow a c'_1 \dots c'_i f'_i d'_i \dots d'_1 a \end{aligned} \quad \forall i \leq n$$

und hat sonst keine Wirkung.

Faßt man X_n als Teilmenge von X auf, so erhält man zu jedem φ_n eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}_n \in \text{Aut}(\sigma)$ auf ganz X , die allerdings nur auf einen endlichen Teilgraphen bzw. eine endliche Teilmenge des Alphabets wirkt⁸.

Weiterhin gilt für $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, $n_1 \leq n_2$: $\tilde{\varphi}_{n_2}|_{X_{n_1}} = \tilde{\varphi}_{n_1}$, so daß $\tilde{\varphi}_{n_2}$ quasi eine Erweiterung von $\tilde{\varphi}_{n_1}$ ist. Es ist daher möglich, durch $\tilde{\varphi}(x) := \tilde{\varphi}_n(x)$ für $x \in X_n$ eine Abbildung $\tilde{\varphi} : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ zu definieren.

Diese läßt sich jedoch nicht zu einem Automorphismus des transitiven, lokalkompakten Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum erweitern. Offensichtlich ist die Vereinigung $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subsetneq X$ eine dichte Teilmenge in X bezüglich der von den Zylindermengen erzeugten Topologie. Aufgrund von $X \subsetneq \hat{X}$ dicht, gibt es für eine stetige Abbildung $\hat{\varphi} : \hat{X} \rightarrow \hat{X}$ mit $\hat{\varphi}|_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n} := \tilde{\varphi}$ nur eine Wahl. $\hat{\varphi}$ würde aber Randpunkte aus nicht vergleichbaren Θ_X -Orbits aufeinander abbilden, was nach Korollar 4.17 für keine Fortsetzung eines Automorphismus $\varphi \in \text{Aut}(\sigma)$ möglich ist.

Das Beispiel 4.19 zeigt die Existenz lokalkompakter, transitiver Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, so daß nicht zu jeder aufsteigenden Folge von SFTs $((X_n, \sigma_n))_{n \in \mathbb{N}}$ mit $X_n \subseteq X_{n+1} \subsetneq X$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \subsetneq X$ dicht und jeder Folge von Automorphismen $(\tilde{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\tilde{\varphi}_n \in \text{Aut}(\sigma)$, $\tilde{\varphi}_n(X_n) = X_n$ und $\tilde{\varphi}_m|_{X_n} = \tilde{\varphi}_n|_{X_n}$ für alle $m \geq n$ eine Fortsetzung $\tilde{\varphi} \in \text{Aut}(\sigma)$ existiert, für die gilt $\tilde{\varphi}|_{X_n} = \tilde{\varphi}_n|_{X_n}$ ($n \in \mathbb{N}$).

⁸Die Wirkung von $\tilde{\varphi}_n$ wird genau wie bei φ_n durch den Austausch der oben angegebenen Blöcke beschrieben.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Wir diskutieren die wichtigsten Ergebnisse dieser Dissertation und vergleichen sie mit den in Abschnitt 1.2 beschriebenen Resultaten über SFTs und codierte Systeme. Abschließend geben wir einen Ausblick auf offene Fragen und Ansätze zu weiterer Forschungsarbeit.

Sei (X, σ) ein transitiver, nicht kompakter, topologischer Markovshift mit abzählbar unendlichem Zustandsraum, so gilt:

Ist X nicht lokalkompakt, so ist $\text{Aut}(\sigma)$ überabzählbar.

Ist X lokalkompakt, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- *$\text{Aut}(\sigma)$ ist abzählbar unendlich.*
- *Die kompakt-offene Topologie auf $\text{Aut}(\sigma)$ ist diskret.*
- *Eine (und damit jede) Graphendarstellung hat die Eigenschaft (FMDP). Diese ist zudem äquivalent zu Eigenschaft (2) aus [FieD1] Lemma 4.1.*
- *Die 1-Punkt-Kompaktifizierung des Markovshifts (X, σ) ist expansiv auf den doppelt-transitiven Punkten.*

Ansonsten ist $\text{Aut}(\sigma)$ wiederum überabzählbar.

Gilt eine der obigen, äquivalenten Bedingungen, so folgt:

- *Es existiert eine 1-Block-Faktorabbildung der 1-Punkt-Kompaktifizierung von (X, σ) in ein synchronisiertes System, deren Einschränkung auf die doppelt-transitiven Punkte bijektiv ist.*
- *Der Markovshift (X, σ) hat eine formale Zetafunktion, seine Automorphismengruppe ist residual endlich und enthält weder unendliche einfache, noch nichttriviale divisions-vollständige Untergruppen.*

Für lokalkompakte Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge ist die Gültigkeit der Eigenschaften (FMDP) und (3) aus [FieD1] Lemma 4.1 äquivalent zur (vollen) Expansivität der 1-Punkt-Kompaktifizierung. Diese ist dann ein synchronisiertes System.

Die schrittweise Abschwächung der Kompaktheitsforderung spiegelt sich direkt in der Kardinalität der Automorphismengruppe wider. Lokalkompakte Markovshifts mit der Eigenschaft (FMDP) sind noch sehr nahe an den kompakten Subshifts, was sich in den Ergebnissen über

die Größe, die Topologie und die stark restringierte Untergruppenstruktur der Automorphismengruppe zeigt. Tatsächlich gibt es bisher kein Resultat, das die Automorphismengruppen lokalkompakter Markovshifts mit (FMDP) von denen der SFTs unterscheidet.

Auch in der topologisch-dynamischen Charakterisierung der 1-Punkt-Kompaktifizierung zeigt sich gewissermaßen der vorhandene Rest an Kompaktheit. Man erhält zwar nicht immer einen Subshift, aber doch ein nulldimensionales dynamisches System mit unvollständiger Expansivität, das fast-topologisch konjugiert zu einem synchronisierten Subshift ist.

Das Aufgeben der Eigenschaft (FMDP) kommt einer weiteren Lockerung der Kompaktheitsbedingung gleich und führt direkt zu einem Anwachsen der Kardinalität der Automorphismengruppe. Beim Übergang zu nicht lokalkompakten Shifträumen bleibt diese zwar erhalten, dafür ergeben sich größere Freiheiten in den algebraischen Eigenschaften und der Untergruppenstruktur der Automorphismengruppe.

Die Automorphismengruppe von (X, σ) ist stets eine Untergruppe von $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ und ist niemals isomorph zu $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$, $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ oder $\mathcal{A}_{\mathbb{N},f}$.

Es gibt eine Klasse transitiver, nicht lokalkompakter Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum, deren Automorphismengruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N}}$ als Untergruppe enthält. $\text{Aut}(\sigma)$ ist dann nicht residual endlich, enthält alle abzählbaren Gruppen, alle abelschen Gruppen der Kardinalität 2^{\aleph_0} sowie endlich erzeugte Gruppen mit unlösbarem Wortproblem. Die Menge ihrer Untergruppen ist zudem abgeschlossen unter der Bildung 2^{\aleph_0} -facher freier Produkte.

Es gibt eine Klasse transitiver, lokalkompakter Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, deren Automorphismengruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ als Untergruppe enthält. $\text{Aut}(\sigma)$ ist dann nicht residual endlich und enthält unendliche, einfache Untergruppen.

Das Zentrum von $\text{Aut}(\sigma)$ besteht stets aus den Potenzen der Shiftabbildung (isomorph zu \mathbb{Z}). Speziell enthält der Kern der periodischen-Orbit-Darstellung nur die Potenzen des Shifts.

Wie oben gesehen, sind alle abzählbaren Automorphismengruppen zugleich residual endlich. Diese von SFTs, codierten Systemen und allgemeiner allen kompakten Subshifts mit dichten periodischen Punkten bekannte, starke Einschränkung gilt auch noch für beliebige nicht kompakte Markovshifts, die eine formale Zetafunktion haben. Sie verschwindet hingegen bei den beiden in Abschnitt 2.3 angegebenen Klassen topologischer Markovshifts.

Die in Satz 2.20 beschriebenen, nicht lokalkompakten Markovshifts haben in Bezug auf die Untergruppenstruktur der Automorphismengruppe die schwächstmöglichen Einschränkungen. Ihre Automorphismengruppen sind sozusagen universell, d.h. sie enthalten bereits eine Kopie jeder Automorphismengruppe, die überhaupt bei Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet auftreten kann, sowie alle möglichen Untergruppen.

Satz 2.26 enthält eine ähnliche Aussage für lokalkompakte Markovshifts. Hier wird zwar nur die Existenz einer zur eingeschränkten Permutationsgruppe $\mathcal{S}_{\mathbb{N},f}$ isomorphen Untergruppe nachgewiesen; dies zeigt aber schon die im Vergleich zu den SFTs und codierten Systemen deutlich erweiterten Möglichkeiten bei der Konstruktion von Markerautomorphismen.

Beide Sätze sind bezüglich der gemachten Voraussetzungen über die Graphendarstellungen nahe an den zu erwartenden, bestmöglichen Resultaten.

Auch das Analogon des Satzes von Ryan reflektiert die Mächtigkeit der Marker-Methode. Anders als bei codierten Systemen garantiert die Markov-Eigenschaft eine so große Freiheit bei der Konstruktion von Automorphismen, daß nur die Potenzen der Shiftabbildung mit allen anderen Elementen der Automorphismengruppe vertauschen.

Vergleicht man die bei SFTs, codierten Systemen und topologischen Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet auftretenden Automorphismengruppen, so fallen die wesentlich größeren Ähnlichkeiten zwischen SFTs und Markovshifts, als zwischen diesen und codierten Systemen auf. Für die Automorphismen hat die Markov-Eigenschaft einen deutlich stärkeren Einfluß als die Kompaktheit.

Es existieren Automorphismen (bei lokalkompakten Markovshifts ohne (FMDP) sogar überabzählbar viele Involutionen), die in einer vorgegebenen Darstellung des topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum keine sliding-Block-Codes sind. Zudem muß das Inverse eines Automorphismus mit beschränkter Kodierlänge diese Eigenschaft selbst nicht haben.

Zu jeder Darstellung läßt sich in $\text{Aut}(\sigma)$ die Untergruppe der Automorphismen definieren, die, zusammen mit ihren Inversen, in dieser Darstellung beschränkte Kodierlänge haben. Diese Untergruppen hängen echt von der Darstellung ab. Der Schnitt bzw. die Vereinigung über alle (Graphen-)Darstellungen ergibt jedoch Konjugationsinvarianten.

Jeder Automorphismus eines lokalkompakten, transitiven Markovshifts (X, σ) mit abzählbar unendlichem Zustandsraum, der keine Potenz der Shiftabbildung ist, hat in einer Graphendarstellung unbeschränkte Kodierlänge. Insbesondere gilt dann: $\langle \sigma \rangle = \text{Aut}_{\cap \mathfrak{G}}^b(\sigma) = \text{Aut}_{\cap}^b(\sigma)$.

Die Untergruppen $\text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma)$ und $\text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$ zu je zwei topologischen Konjugationen $\gamma_1, \gamma_2 : X \rightarrow Y$ sind isomorph. Für topologische Konjugationen $\gamma_1 : X \rightarrow Y_1$ und $\gamma_2 : X \rightarrow Y_2$ gilt allgemein $\text{Aut}_{\gamma_1}^b(\sigma) \neq \text{Aut}_{\gamma_2}^b(\sigma)$.

Es gibt Automorphismen $\varphi \in \text{Aut}_X^b(\sigma)$, die bezüglich der Darstellung (X, σ) beschränkte Kodierlänge haben, deren Konjugationsklasse $\{\phi \circ \varphi \circ \phi^{-1} \mid \phi \in \text{Aut}(\sigma)\}$ aber Automorphismen unbeschränkter Kodierlänge enthält. Allgemein gilt: $\text{Aut}_{\cap X}^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_X^b(\sigma) \subsetneq \text{Aut}_{\cup X}^b(\sigma)$.

Es existiert eine Klasse transitiver, lokalkompakter Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet, deren Automorphismengruppe überabzählbar viele Automorphismen endlicher Ordnung enthält, die in keiner Graphendarstellung beschränkte Kodierlänge aufweisen. Speziell sind dann $\text{Aut}_{\cup \mathfrak{G}}^b(\sigma)$ und $\text{Aut}(\sigma) \setminus \text{Aut}_{\cup \mathfrak{G}}^b(\sigma)$ überabzählbar.

Zu jedem Automorphismus endlicher Ordnung findet man eine Darstellung des topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, in der dieser Automorphismus beschränkte Kodierlänge hat (sogar ein 1-Block-Code ist). Folglich gilt: $\{\varphi \circ \sigma^i \mid \varphi \in \text{Aut}(\sigma) \text{ endlicher Ordnung} \wedge i \in \mathbb{Z}\} \subseteq \text{Aut}_{\cup}^b(\sigma)$.

Ist X nicht lokalkompakt, so haben in jeder Graphendarstellung überabzählbar viele Automorphismen beschränkte Kodierlänge.

Ist X lokalkompakt und $\text{Aut}(\sigma)$ überabzählbar, so existieren Graphendarstellungen, in denen überabzählbar viele Automorphismen beschränkte Kodierlänge haben (sogar involutorische 1-Block-Codes sind). Beispiele zeigen, daß es andererseits Graphendarstellungen gibt, in denen trotz $\text{Aut}(\sigma)$ überabzählbar nur abzählbar viele Automorphismen eine beschränkte Kodierlänge aufweisen.

Bei nicht kompakten Subshifts treten erstmals stetige, shiftkommutierende Abbildungen mit unbeschränkter Kodierlänge auf. Bei lokalkompakten Subshifts ist die Kodierlänge eines einzelnen Symbols bzw. eines endlichen Blockes beschränkt, während bei nicht lokalkompakten Subshifts auch diese lokalen Kodierlängen unbeschränkt sein können. Viele der angegebenen

Resultate über lokalkompakte Markovshifts benutzen genau diese lokalen Kodierlängen, zusammen mit der Kompaktheit dünner Zylinder, als wesentliche Idee im Beweis.

Die Menge der Untergruppen der kodierlängenbeschränkten, i.e. in beide Richtungen gleichmäßig stetigen Automorphismen zu jeder Darstellung bildet in ihrer Gesamtheit eine Konjugationsinvariante. Durch Schnittbildung bzw. Vereinigung über einzelne oder alle (Graphen-)Darstellungen ergeben sich weitere Teilmengen in $\text{Aut}(\sigma)$. Diese können in einer durch Inklusion partiell geordneten Hierarchie (vgl. Abbildung 3.9) strukturiert werden. Jede topologische Konjugation induziert auf dieser Familie von Untergruppen/Teilmengen eine Permutation, die zudem die einzelnen Schichten invariant in sich überführt. Die ausgezeichneten Elemente $\text{Aut}_\cap^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cap_\mathfrak{G}}^b(\sigma)$, $\text{Aut}_\cup^b(\sigma)$, $\text{Aut}_{\cup_\mathfrak{G}}^b(\sigma)$ bleiben hierbei fest, i.e. sind konjugationsinvariant.

Einzig die Potenzen der Shiftabbildung sind in allen (Graphen-)Darstellungen eines nicht kompakten, transitiven Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet gleichmäßig stetig. Alle übrigen Automorphismen haben bereits in einer Graphendarstellung unbeschränkte Kodierlänge; viele von ihnen (z.B. alle Automorphismen endlicher Ordnung) sind jedoch in anderen Darstellungen kodierlängenbeschränkt. Die Frage nach der Existenz von Automorphismen, die in keiner Graphendarstellung gleichmäßig stetig sind, konnte für eine Klasse lokalkompakter Markovshifts positiv beantwortet werden. Diese haben jedoch endliche Ordnung und können so in einer speziellen Nicht-Graphendarstellung stets zu einem 1-Block-Code umcodiert werden.

Genau wie die gesamte Automorphismengruppe können auch die einzelnen Untergruppen kodierlängenbeschränkter Automorphismen bisher nicht exakt beschrieben werden. Es gelingt aber, die Echtheit einzelner Inklusionen innerhalb der Hierarchie sowie die Kardinalität in den verschiedenen Schichten zu bestimmen (Abbildung 3.9 und Abschnitt 3.3).

Eine entscheidende Rolle bei der Kardinalität spielt wieder der noch im System vorhandene Rest an Kompaktheit. So sind bei nicht lokalkompakten Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum die Untergruppen der Automorphismen mit beschränkter Kodierlänge zu beliebigen Graphendarstellungen überabzählbar, während bei lokalkompakten Markovshifts ohne (FMDP) darstellungsabhängig der abzählbare oder überabzählbare Fall auftritt.

Es existiert eine Klasse transitiver, lokalkompakter Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge, deren Automorphismengruppe eine direkte Summe aus der vom Shift erzeugten zyklischen Gruppe und einer zentrumslosen Gruppe G ist. Dabei enthält G alle Automorphismen, die nur auf den σ -Orbit einer kompakten Menge in X wirken, dessen Komplement alle zweiseitig-unendlichen, einfachen Wege einer speziellen Graphendarstellung enthält.

Jeder Automorphismus eines solchen Markovshifts wirkt auf alle Repräsentanten zweiseitig-unendlicher, einfacher Wege wie eine feste Potenz der Shiftabbildung.

Wie in [FF3] ausgiebig beschrieben, zerfällt die Automorphismengruppe bei codierten Systemen häufig in eine direkte Summe. Dies lieferte die Motivation, eine Klasse lokalkompakter Markovshifts anzugeben, die ebenfalls dieses Verhalten zeigen. Wichtig ist hier die durch die ausgedünnte Struktur des Subshifts erzeugte Starrheit, die erzwingt, daß die Wirkung jedes Automorphismus "weit draußen" wie die einer festen Potenz der Shiftabbildung aussieht. Die Automorphismengruppe läßt sich nach dieser Wirkung faktorisieren. Übrig bleibt die Gruppe der Automorphismen, die in der Nähe des Randes wie die Identität wirken.

Sei $(Z(X), \Theta_X)$ der kanonische Rand [FF2] eines lokalkompakten Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet, so definiert man die kanonische-Rand-Darstellung $\beta : \text{Aut}(\sigma) \rightarrow \text{Aut}(\Theta_X)$, $\varphi \mapsto \hat{\varphi}|_{Z(X)}$, wobei $\hat{\varphi}$ die eindeutige Fortsetzung von φ auf die kanonische Kompaktifizierung bezeichnet. Ihr Kern umfaßt alle Automorphismen, die nur auf endlich viele Symbole wirken.

Das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung umfaßt die von Θ_X erzeugte Gruppe, ist im allgemeinen aber nicht surjektiv. Für die in Abschnitt 4.1 untersuchte Klasse lokalkompakter Markovshifts ist das Bild stets minimal.

Die Aktion jedes Automorphismus auf dem kanonischen Rand muß die Periode des Markovshifts respektieren. Speziell darf kein Automorphismus zwei Θ_X -Orbits modulo der Periode des Markovshifts verschieden weit drehen.

Punkte des kanonischen Randes können höchstens dann durch die Fortsetzung eines Automorphismus aufeinander abgebildet werden, wenn ihre periodischen Daten bei ∞ übereinstimmen.

Auf der Menge der Θ_X -Orbits der kanonischen Ränder zweier transitiver, lokalkompakter Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum definiert man eine Vergleichbarkeitsrelation, die auf der Pfadstruktur einer Graphendarstellung bei ∞ aufbaut.

Notwendig für die topologische Konjugiertheit zweier transitiver, lokalkompakter Markovshifts (mit topologisch konjugierten kanonischen Rand-Systemen) ist die Existenz einer Bijektion zwischen den Θ_X -Orbits der beiden Rand-Systeme, die die Vergleichbarkeitsrelation bezüglich der Pfadstruktur bei ∞ respektiert.

Als direkte Folgerung kann die Fortsetzung jedes Automorphismus eines transitiven, lokalkompakten Markovshifts nur Θ_X -Orbits aufeinander abbilden, die bezüglich ihrer Pfadstruktur bei ∞ vergleichbar sind.

Von den SFTs kennt man die periodische-Punkte-Darstellung der Automorphismengruppe sowie davon abgeleitete Darstellungen, deren Untersuchungen zu großen Fortschritten geführt haben. Bei lokalkompakten Markovshifts induziert jeder Automorphismus zudem eine Aktion auf dem kanonischen Rand. Da diese die Struktur des Randes respektiert, ergibt sich eine neue Darstellung der Automorphismengruppe des Markovshifts in die Automorphismengruppe des kanonischen Rand-Systems. Diese enthält Informationen über die Struktur des Markovshifts in der Nähe des Randes. Das Bild der Automorphismengruppe ist beispielsweise um so größer, je symmetrischer der Markovshift "weit draußen" ist.

Ähnliche Informationen lassen sich auch in der Pfadstruktur einer Graphendarstellung bei ∞ ablesen. Diese ergibt eine stärkere Konjugationsinvariante als der kanonische Rand allein. Insbesondere müssen Automorphismen die gefundene Pfadstruktur-Relation berücksichtigen.

Diese Resultate ermöglichen es zum einen, das Bild der kanonischen-Rand-Darstellung in verschiedenen Beispielen vollständig zu bestimmen und zeigen zum anderen, daß sich nicht jede Aktion auf dem kanonischen Rand zu einem Automorphismus des Markovshifts fortsetzen läßt (weder die LIFT-Hypothese für eine Menge periodischer Punkte des Markovshifts, noch für Punkte des kanonischen Randes ist gültig). Auch die Fortsetzbarkeit einer Folge von Automorphismen einer aufsteigenden Folge von SFTs (deren Vereinigung dicht in X liegt) zu einem Automorphismus auf dem lokalkompakten Markovshift (X, σ) ist im allgemeinen nicht gegeben.

Genau wie bei den SFTs ist die Struktur der Automorphismengruppe topologischer Markovshifts über einem abzählbar unendlichen Alphabet sehr komplex. Daher können die in dieser Dissertation gefundenen Ergebnisse auch nur den Beginn der Forschung auf diesem Gebiet darstellen. Selbst in den drei untersuchten Themenschwerpunkten bleiben noch einige Fragen unbeantwortet:

Wann sind die Automorphismengruppen zweier Markovshifts isomorph zueinander? Wie fein ist die Automorphismengruppe als Invariante der topologischen Konjugation? Dies sind vermutlich die interessantesten und zugleich schwierigsten Fragen. Um hier eine Antwort geben zu können, bräuchte man ein besseres Verständnis der Automorphismengruppe und ihrer Untergruppen. Auch eine genaue Beschreibung der Untergruppen von Automorphismen beschränkter Kodierlänge wäre hier hilfreich.

Lassen sich die Automorphismengruppen von SFTs und lokalkompakten Markovshifts mit der Eigenschaft (FMDP) unterscheiden? Treten in beiden Fällen die gleichen Gruppen auf? Ergebnisse könnten die Rolle der Kompaktheit in Bezug auf die Automorphismen klären.

Hat jeder Automorphismus eines topologischen Markovshifts mit abzählbar unendlicher Zustandsmenge in irgendeiner Darstellung beschränkte Kodierlänge, d.h. gilt $\text{Aut}_{\cup}^b(\sigma) = \text{Aut}(\sigma)$? Leider kennt man überhaupt nur wenige Automorphismen unendlicher Ordnung (Shift, Komposition von Markerautomorphismen), die aber kein Gegenbeispiel liefern. Eine positive Antwort würde ein allgemeines Konstruktionsverfahren für Automorphismen und ein Verständnis der Menge aller Darstellungen eines Markovshifts voraussetzen.

In der vorliegenden Arbeit wurde nur die 1-Punkt- und die kanonische Kompaktifizierung lokalkompakter Markovshifts betrachtet. Diese beiden Extremfälle haben die Eigenschaft, daß sich jeder Automorphismus des Markovshifts fortsetzen läßt. Man könnte untersuchen, welche Automorphismen sich auf eine beliebige Kompaktifizierung fortsetzen lassen bzw. welche Kompaktifizierungen die Fortsetzbarkeit aller Automorphismen zulassen. Wieder könnte man entsprechende Rand-Darstellungen definieren und danach fragen, welche Automorphismen des Randes von Automorphismen des Markovshifts induziert werden.

Ein weiterer, in dieser Arbeit ausgesparter Aspekt ist das genaue Studium der periodischen-Punkte-Darstellung. Für nicht kompakte Markovshifts mit formaler Zetafunktion hat man wie bei SFTs Signaturen- und Gyrationzahlen-Homomorphismen. Bei allgemeinen Markovshifts kann man diese Darstellungen auf die Menge der Automorphismen einschränken, die höchstens endlich viele periodische Punkte fester Periode bewegen. Die Untersuchung der Eigenschaften dieser Homomorphismen, ihr Wertebereich und etwaige Wechselwirkungen (Signaturen-Gyrationzahlen-Kompatibilität) könnte ein lohnendes Forschungsziel sein.

Schließlich enthält eine Arbeit von J. Wagoner [Wag1] erste Ansätze zur Definition einer Dimensionsgruppe für lokalkompakte Markovshifts. Zunächst müsste diese Konstruktion ausgearbeitet werden. Anschließend könnte man die Eigenschaften der Dimensionsgruppen untersuchen und versuchen eine Dimensionsgruppendarstellung zu definieren.

Es bleibt noch vieles zu tun, bis man auch für topologische Markovshifts mit abzählbar unendlichem Zustandsraum eine ähnlich breite Theorie der Automorphismengruppen hat wie für SFTs. So scheint ein 12 Jahre altes Zitat von M. Boyle ([Boy], Seite 34), auf den Forschungsgegenstand dieser Dissertation übertragen, auch heute noch Gültigkeit zu haben:

There have only been a few papers on [countable state topological Markov shifts], so we have a situation common in symbolic dynamics: there's not too much to learn, but something to invent.

Literaturverzeichnis

- [BH] Blanchard, F. und Hansel, G., *Systèmes codés (Coded systems)*, Theor. Comput. Sci. **44**, 17-49 (1986).
- [Boy] Boyle, M., *Symbolic dynamics and matrices*, Brualdi, R. (ed.) et al., Combinatorial and graph-theoretical problems in linear algebra. Springer, IMA Vol. Math. Appl. **50**, 1-38 (1993).
- [BK1] Boyle, M. und Krieger, W., *Periodic points and automorphisms of the shift*, Trans. Am. Math. Soc. **302**, 125-149 (1987).
- [BK2] Boyle, M. und Krieger, W., *Automorphisms and subsystems of the shift*, J. Reine Angew. Math. **437**, 13-28 (1993).
- [BLR] Boyle, M., Lind, D. und Rudolph, D., *The automorphism group of a shift of finite type*, Trans. Am. Math. Soc. **306**, No.1, 71-114 (1988).
- [Bru1] Bruijn, N.G. de, *Embedding theorems for infinite groups*, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. **A 60**, 560-569 (1957).
- [Bru2] Bruijn, N.G. de, *Addendum to 'Embedding theorems for infinite groups'*, Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. **A 67**, 594-595 (1964).
- [BS] Bunimovich, L. und Sinai, Y., *Markov partitions for dispersed billiards*, Commun. Math. Phys. **78**, 247-280 (1980).
- [BSC] Bunimovich, L., Sinai, Y. und Chernov, N., *Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards*, Russ. Math. Surv. **45**, No.3, 105-152 (1990).
- [Buz] Buzzi, J., *Markov extensions for multi-dimensional dynamical systems*, Isr. J. Math. **112**, 357-380 (1999).
- [DGS] Denker, M., Grillenberger, C. und Sigmund, K., *Ergodic theory on compact spaces*, Lecture Notes in Math. **527**, Springer Verlag (1976)
- [FieD1] Fiebig, D., *Factor maps, entropy and fiber cardinality for Markov shifts*, Rocky Mt. J. Math. **31**, No.3, 955-986 (2001).
- [FieD2] Fiebig, D., *Factor theorems for locally compact Markov shifts*, Forum Math. **14**, No.4, 623-640 (2002).
- [FieD3] Fiebig, D., *Graphs with preassigned Salama entropies and optimal degrees for locally compact Markov shifts*, Ergodic Theory & Dyn. Syst. **23**, No.4, 1093-1124 (2003).
- [FF1] Fiebig, D. und Fiebig, U.-R., *Covers for coded systems*, Symbolic dynamics and its applications, Proc. AMS Conf. in honor of R. L. Adler, New Haven/CT (USA) 1991, Contemp. Math. **135**, 139-179 (1992).

- [FF2] Fiebig, D. und Fiebig, U.-R., *Topological boundaries for countable state Markov shifts*, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. **III**, **70**, No.3, 625-643 (1995).
- [FF3] Fiebig, D. und Fiebig, U.-R., *The automorphism group of a coded system*, Trans. Am. Math. Soc. **348**, No.8, 3173-3191 (1996).
- [FF4] Fiebig, D. und Fiebig, U.-R., *Compact factors of countable state Markov shifts*, Theor. Comput. Sci. **270**, No.1-2, 935-946 (2002).
- [FF5] Fiebig, D. und Fiebig, U.-R., *Subshift compactifications of locally compact Markov shifts*, to appear in Theor. Comput. Sci.
- [FF6] Fiebig, D. und Fiebig, U.-R., *Embedding theorems for locally compact mixing Markov shifts*, preprint.
- [FFY] Fiebig, D., Fiebig, U.-R. und Yuri, M., *Pressure and equilibrium states for countable state Markov shifts*, Isr. J. Math. **131**, 221-257 (2002).
- [FieU] Fiebig, U.-R., *Symbolic dynamics and locally compact Markov shifts*, Habilitationsschrift, Universität Heidelberg (1996).
- [Góm] Gómez, R., *Positive K-theory for finitary isomorphisms of Markov chains*, Ergodic Theory & Dyn. Syst. **23**, 1485-1504 (2003).
- [GS] Gurevich, B. und Savchenko, S., *Thermodynamic formalism for countable symbolic Markov chains*, Russ. Math. Surv. **53**, No.2, 245-344 (1998).
- [Hed] Hedlund, G., *Endomorphisms and automorphisms of the shift dynamical system*, Math. Systems Theory **3**, 320-375 (1969).
- [Hof1] Hofbauer, F., *On intrinsic ergodicity of piecewise monotonic transformations with positive entropy*, Isr. J. Math. **34**, 213-237 (1979).
- [Hof2] Hofbauer, F., *The structure of piecewise monotonic transformations*, Ergodic Theory & Dyn. Syst. **1**, 159-178 (1981).
- [KR1] Kim, K.H. und Roush, F.W., *On the automorphism groups of subshifts*, PU.M.A., Pure Math. Appl., Ser. **B 1**, No.4, 203-230 (1990).
- [KR2] Kim, K.H. und Roush, F.W., *On the structure of inert automorphisms of subshifts*, PU.M.A., Pure Math. Appl., Ser. **B 2**, No.1, 3-22 (1991).
- [KR3] Kim, K.H. und Roush, F.W., *Williams's conjecture is false for reducible subshifts*, J. Am. Math. Soc. **5**, No.1, 213-215 (1992).
- [KR4] Kim, K.H. und Roush, F.W., *The Williams conjecture is false for irreducible subshifts*, Electron. Res. Announc. Am. Math. Soc. **3**, 105-109 (1997).
- [KRW1] Kim, K.H., Roush, F.W. und Wagoner, J., *Automorphisms of the dimension group and gyration numbers*, J. Am. Math. Soc. **5**, No.1, 191-212 (1992).
- [KRW2] Kim, K.H., Roush, F.W. und Wagoner, J., *The shift equivalence problem*, Math. Intell. **21**, No.4, 18-29 (1999).
- [Kit] Kitchens, B., *Symbolic dynamics. One-sided, two-sided and countable state Markov shifts*, Universitext, Springer Verlag (1998).
- [KS] Kneser, M. und Swierczkowski, S., *Embeddings in groups of countable permutations*, Colloq. Math. **7**, 177-179 (1960).

- [Kri1] Krieger, W., *On the periodic points of topological Markov chains*, Math. Z. **169**, 99-104 (1979).
- [Kri2] Krieger, W., *On dimension functions and topological Markov chains*, Invent. Math. **56**, 239-250 (1980).
- [Kri3] Krieger, W., *On the subsystems of topological Markov chains*, Ergodic Theory & Dyn. Syst. **2**, 195-202 (1982).
- [KT] Kruger, T. und Troubetzkoy, S., *Markov partitions and shadowing for non-uniformly hyperbolic systems with singularities*, Ergodic Theory & Dyn. Syst. **12**, No.3, 487-508 (1992).
- [LM] Lind, D. und Marcus, B., *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press (1995).
- [LS] Lyndon, R. und Schupp, P., *Combinatorial group theory*, Classics in Mathematics, Springer Verlag (2001).
- [New] Newhouse, S., *On some results of Hofbauer on maps of the interval*, Dynamical Systems and Related Topics, World Scientific, Singapore, 407-421 (1992).
Corrections to: "On some results of Hofbauer on maps of the interval", Dynamical systems and chaos, Proc. of the international Conf., Hachioji (Japan) 1994, World Scientific, Singapore, 204-205 (1995).
- [Pet] Petersen, K., *Chains, entropy, coding*, Ergodic Theory & Dyn. Syst. **6**, 415-448 (1986).
- [Rya1] Ryan, J., *The shift and commutativity*, Math. Systems Theory **6**, 82-85 (1972).
- [Rya2] Ryan, J., *The shift and commutativity II*, Math. Systems Theory **8**, 249-250 (1975).
- [Sar] Sarig, O., *Thermodynamic formalism for countable Markov shifts*, Ergodic Theory & Dyn. Syst. **19**, No.6, 1565-1593 (1999).
- [SU] Schreier, J. und Ulam, S., *Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge*, Stud. Math. **4**, 134-141 (1933).
- [Wag1] Wagoner, J.B., *Topological Markov chains, C^* -algebras, and K_2* , Adv. Math. **71**, No.2, 133-185 (1988).
- [Wag2] Wagoner, J.B., *Classification of subshifts of finite type revisited*, Symbolic dynamics and its applications, Proc. AMS Conf. in honor of R. L. Adler, New Haven/CT (USA) 1991, Contemp. Math **135**, 423-444 (1992).
- [Wag3] Wagoner, J.B., *Strong shift equivalence theory and the shift equivalence problem*, Bull. Am. Math. Soc., New Ser. **36**, No.3, 271-296 (1999).
- [Wil] Williams, R.F., *Classification of subshifts of finite type*, Ann. Math. (2) **98**, 120-153 (1973);
Errata. Ibid. **99**, 380-381 (1974).

Danksagung

Bedanken möchte ich mich an dieser Stelle bei Herrn PD Dr. U.-R. Fiebig für die Anregung zu dieser Arbeit sowie bei ihm und Herrn Prof. Dr. W. Krieger für die gut strukturierten und interessanten Vorlesungen, die mich in das Gebiet der symbolischen Dynamik einführten und für die Betreuung während meiner Zeit als Doktorand.

Die fertige Arbeit wurde von Silke Gaißert korrekturgelesen, wodurch etliche Rechtschreibfehler beseitigt werden konnten. Auch für die konstruktive Kritik, die moralische Unterstützung und dafür, daß sie mir besonders in den letzten Monaten den Rücken für meine Arbeit freigehalten hat, sei ihr meine tiefste Anerkennung ausgesprochen. Besonderen Dank schulde ich meinen Eltern für die vielen Kleinigkeiten, deren Umfang nur sie und ich einschätzen können.

Erklärung gemäß §8 (3) b) und c) der Promotionsordnung

Hiermit erkläre ich, daß ich die vorgelegte Dissertation selbst verfaßt und mich dabei keiner anderen als der von mir ausdrücklich angegebenen Quellen und Hilfsmittel bedient habe. Ich habe an keiner anderen Stelle ein Prüfungsverfahren beantragt bzw. die Dissertation in dieser oder anderer Form bereits anderweitig als Prüfungsarbeit verwendet oder einer anderen Fakultät als Dissertation vorgelegt.

Heidelberg, im Juli 2004

(Michael Schraudner)