

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der
Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Diplom-Physiker Michael Mayer
aus
Schwäbisch Gmünd

Tag der mündlichen Prüfung : 15.12.2004

Die Absorptionseigenschaften primordialer Materie
und
ihre Anwendung auf
die Struktur und Stabilität stationärer Akkretionsscheiben

Gutachter : Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl
Prof. Dr. Immo Appenzeller

Zusammenfassung

Primordiale Materie besteht vorwiegend aus den Elementen Wasserstoff und Helium mit kleinen Beimengungen von Lithium. Es wurde bislang angenommen, daß die Berücksichtigung von Wasserstoff und Helium allein für die Berechnung der Opazität ausreicht. Lithium beeinflusst jedoch die Opazität indirekt durch eine Verschiebung des chemischen Gleichgewichts, andererseits durch die Absorption von atomarem Lithium und Lithiumhydrid, LiH. Die Abweichungen erreichen bis zu zwei Größenordnungen, verglichen mit Lithium-freier Opazität. Daraus resultierende mögliche Veränderungen im Kühlverhalten primordialer Materie werden kurz diskutiert. Die vorliegenden Rechnungen stellen die ersten Opazitätsrechnungen für primordiale Materie unter 1000 K dar.

Die mit dieser Opazität berechneten Akkretionsscheiben zeigen oberhalb von 10^4 K nahezu das gleiche Verhalten wie heutige Akkretionsscheiben. Darunter zeigen sie jedoch Abweichungen, die die Unterschiede in der Opazität reflektieren: Oberhalb von Akkretionsraten von $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ existiert optisch dicke Akkretion, dominiert durch CIA (kollisionsinduzierte) Absorption, während darunter die äußeren Gebiete optisch dünn sind und dann entweder isotherm bei 3440 K aufgrund eines starken Temperaturgradienten in der Opazität akkretieren oder moleküliniendominiert weiter kühlen. Unterhalb von $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ geht in den äußeren Gebieten die Annahme des chemischen Gleichgewichts verloren.

Es werden zusätzlich zur bekannten H^- -Instabilität zwei weitere thermische Instabilitäten gefunden. Für eine dieser Instabilitäten ist eine Bedingung für chemothermische Instabilitäten erfüllt.

Aufgrund der fehlenden Staubabsorption in primordialer Materie könnten die primordialen Akkretionsscheiben erheblich stärkere Ausbrüche aufgrund der H^- -Instabilität induzieren, die die Akkretionsrate um 3 Größenordnungen erhöhen können.

Abstract

Primordial matter mainly consists of hydrogen and helium with a small amount of lithium. Taking into account contributions to the opacity from hydrogen and helium only has been assumed to be sufficient so far. Lithium, however, influences the opacity indirectly through a change in chemical equilibrium due to absorption of atomic lithium and lithium hydride. The differences reach two orders of magnitude, compared with zero-metallicity, lithium-free opacity. Possible changes in the cooling of primordial matter are being addressed shortly. These opacity calculations are the first to extend the temperature range below 1000 K.

Acretion disc models calculated with this opacity show a good agreement with today's accretion discs for temperatures larger than 10^4 K. Below that temperature there are major differences, reflecting the change in opacity: For accretion rates above $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ we find optically thick, CIA (collision induced) absorption dominated accretion. Below there is optically thin accretion either by molecule line absorption or isothermal accretion at 3440 K resulting from a temperature locking due to a drastic change in opacity. Subsequently, the assumption of chemical equilibrium is lost with decreasing accretion rate.

We find in addition to the well known H^- -instability two additional thermal instabilities in the optical thin regime. At least for one of them the condition for chemo-thermal instability is fulfilled. Due to the lack of dust absorption in primordial matter primordial disks are likely to show much stronger outbursts showing an increase of accretion rate of three orders of magnitude.

Inhaltsverzeichnis

1. Einführung	1
2. Akkretionsscheiben	5
2.1. Geometrie	5
2.2. Massenerhaltung	5
2.3. Mechanische Gleichungen	7
2.3.1. Drehimpulserhaltung	7
2.3.2. Kräftebilanz in radialer Richtung	7
2.3.3. Kräftebilanz in vertikaler Richtung	8
2.4. Energiegleichung	8
2.5. Die effektive optische Tiefe und der Strahlungsdruck	10
2.6. Stationarität	11
2.7. Viskosität	11
2.7.1. Nicht selbstgravitierende Scheiben (NSG)	12
2.7.2. Kepler selbstgravitierende Scheiben (KSG)	13
2.7.3. Voll selbstgravitierende Scheiben (FSG)	13
2.8. Gleichungssystem für das Modell	14
2.9. Instabilitäten	14
2.9.1. Thermische Instabilität	15
2.9.2. Thermisch-viskose Instabilität	15
2.9.3. Gravitationsinstabilität	15
2.10. Zeitskalen	17
2.11. Verhältnis h/r	18
2.12. Zusammenfassung und Diskussion	19
3. Opazität	21
3.1. Primordiale Materie	21
3.2. Gleichgewichte	22
3.2.1. Das Gleichgewicht $H_2^+ + H_2 \leftrightarrow H_3^+ + H$	25
3.2.2. Einfluß von Lithium	25
3.3. Absorptionsmechanismen	25
3.3.1. Kollisionsinduzierte Absorption (CIA)	27
3.3.2. Gebunden-gebunden-Übergänge von H_3^+	28
3.3.3. Verwendete Daten und Extrapolationen	30
3.4. Der integrierte Absorptionskoeffizient	30
3.5. Absorptionskoeffizienten	31
3.6. Planckfunktion	31
3.7. Rosseland- und Planckmittel	34

3.7.1.	Rosselandmittel	36
3.7.2.	Planckmittel ohne Linien	37
3.7.3.	Planckmittel mit Linien	37
3.8.	Einfluß von verschiedenen Lithiumanteilen auf die Opazität	38
3.9.	Vergleich mit anderen primordialen Opazitätsrechnungen	38
3.9.1.	Stahler et al. (1986)	40
3.9.2.	Lenzuni et al. (1991)	40
3.9.3.	Alexander und Ferguson (1994) & Iglesias und Rogers (1996)	40
3.9.4.	Harris et al. (2004)	41
3.10.	Chemisches Gleichgewicht	41
3.10.1.	H ₂	41
3.10.2.	HD	43
3.10.3.	LiH	44
3.10.4.	Diskussion	44
3.11.	Implikationen für die Kühlung primordialer Materie	45
4.	Modelle	47
4.1.	Lösungsmethode	47
4.1.1.	Generalisierte Koordinate q	47
4.1.2.	Bestimmung der Viskosität	49
4.1.3.	2D-Intervallschachtelungsverfahren	49
4.2.	Allgemeines	50
4.2.1.	Scheibenmodelle für hohe Temperaturen	50
4.2.2.	Isotherme äußere Scheibe	50
4.2.3.	Oberflächendichte Σ und Skalenhöhe h/r	51
4.2.4.	Optische Tiefe	53
4.2.5.	Minimaltemperatur	53
4.2.6.	Äußere radiale Grenze der unter 3440 K kühlenden Akkretionsscheiben	54
4.2.7.	Die Grenze zwischen optisch dick und optisch dünn	55
4.3.	Stabilität	58
4.3.1.	Thermische Stabilität	58
4.3.2.	Viskose Instabilität	59
4.3.3.	Gravitationsinstabilität	64
4.4.	Zeitskalen	64
4.4.1.	Abschätzung der chemischen Reaktionszeitskala	64
4.4.2.	Bedingung für chemische Gleichgewicht	65
4.4.3.	Chemo-thermische Instabilitäten	65
4.4.4.	Diskussion	67
4.5.	Einfluß von verschiedenen Lithiumbruchteilen	67
4.6.	Zusammenfassung	67
5.	Zusammenfassung und Diskussion	71
5.1.	Akkretionsscheiben	71
5.2.	Primordiale Opazität	72
5.3.	Primordiale Akkretionsscheibenmodellierung	73
5.4.	Ausblick	74

A. Opazitätstabellen	77
B. Thermische und viskose Instabilität	81
B.1. Viskose Instabilität	81
B.2. Thermische Instabilität	83
B.3. Zusammenhang zwischen thermischer und viskoser Instabilität	84
B.3.1. optisch dick ($\tau_R \gg 1$)	84
B.3.2. optisch dünn ($\tau_R \ll 1$)	87
Literaturverzeichnis	89

1. Einführung

Unserem heutigen Weltbild nach entstand unser Weltall im Urknall, englisch Big Bang genannt. Das sich ausdehnende Weltall kühlte nach und nach ab, sodaß die Elementarkräfte sich nach und nach trennten und schließlich Strahlung und Materie entkoppeln konnten.

Danach heiß und mit Strahlung durchsetzt, dehnte sich das Weltall unter Abkühlung weiter aus. Dadurch konnte die primordiale Materie nach und nach rekombinieren (siehe beispielsweise die Rechnungen von Galli und Palla, 1998; Lepp et al., 2002). Das Universum durchlebte eine Zeit der Finsternis, das dunkle Zeitalter (Dark Ages). Diese Finsternis wurde jedoch mit dem Auftreten der ersten leuchtenden Objekte beendet. Während es noch nicht ganz klar ist, ob sich zuerst Sterne oder schwarze Löcher gebildet haben, hat man Hinweise, daß das dunkle Zeitalter bei einer Rotverschiebung von $z = 17 \pm 5$ geendet haben muß. Dafür sprechen die Ergebnisse von WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, Spergel et al., 2003) aus dem ersten Jahr der Messungen, die mit Hilfe eines Λ CDM kosmologischen Modells (Modell mit kalter dunkler Materie und kosmologischer Konstante Λ) auf Reionisierung bei dieser Rotverschiebung schließen lassen. Bei dieser Rotverschiebung ist das kosmologische Fluid, die primordiale Materie, größtenteils neutral und atomar. Moleküle haben sich trotz der geringen Temperatur erst zu einem kleinen Bruchteil gebildet.

Jedoch haben sich unter Annahme des Λ CDM Modells schon zu sehr frühen Zeiten Strukturen in der Dunklen Materie gebildet. In deren Potentialtöpfe beginnt nach und nach die primordiale, gewöhnliche bzw. baryonische Materie zu fallen, d.h. die Inhomogenitäten in der Dunklen Materie bilden sich nach und nach auf die Verteilung der baryonischen Materie ab. Die durch den Einfall der baryonischen Materie entstehende kinetische Energie wird anfänglich durch Abstrahlung wieder frei. Unter einer kritischen Dichte $n_c = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ (Bromm et al., 2002) folgt jeder Anregung eines höheren Energieniveaus die sofortige Abregung unter Emission eines Photons. Für höhere Dichten jedoch dominiert die Abregung durch Kollisionen über die Abregung durch Photonenemission. Die kritische Dichte markiert demnach den Übergang von non-LTE zu LTE (Lokales thermodynamisches Gleichgewicht). Durch die nun ineffizientere Kühlung (Für den non-LTE Fall ist die Kühlrate proportional zur Teilchendichte im Quadrat, während für LTE sie nur proportional zur Teilchendichte ist) findet eine quasi-hydrostatische, langsame Kontraktion statt. Um diese Phase zu beenden, muß gravitativer Kollaps einsetzen.

Der charakteristischen Dichte kann noch eine charakteristische Temperatur zugeordnet werden, nimmt man an, die Kühlung sei durch molekularen Wasserstoff dominiert. Dazu benötigt man die Kenntnis der Energieniveaus und Übergänge in molekularem Wasserstoff, H_2 . Es besitzt kein Dipolmoment, daher finden nur Quadrupolübergänge statt. Die beiden niedrigst liegenden Energieniveaus besitzen eine Energiedifferenz von $E(0, 2) - E(0, 0) = 511 \text{ K}$ ($E(\nu, J)$, wobei ν der Vibrations- und J der Rotationsquantenzahl entspricht). Durch Kollisionen mit Teilchen auf dem hochenergetischen Teil der Maxwell-Boltzmann-Verteilung können bis zu einem gewissen Maße geringere Temperaturen als 511 K erreicht werden. Rechnungen von Bromm et al. (1999, 2002) und Abel et al. (2000, 2002) ergeben übereinstimmend typische Minimaltemperaturen von ca. 200 K.

Damit besitzt die primordiale Molekülwolke unabhängig von den Anfangsbedingungen in dieser Phase der Sternbildung dieselben physikalischen Eigenschaften.

Wie oben angedeutet, gelangt eine primordiale Wolke für $n_c = 10^4 \text{ cm}^{-3}$ und $T_c = 200 \text{ K}$ in ein

Regime von langsamer quasi-hydrostatischer Kontraktion. Erfüllt sie jedoch das Jeans-Kriterium, welches besagt, daß für Massen größer als die Jeans-Masse M_J die Wolke unter Eigengravitation kollabiert, erhalten wir als Abschätzung (z.B. Clarke und Bromm, 2003)

$$M_J = \left(\frac{k_B T}{G \mu m_p} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4\pi\rho} \right)^{\frac{1}{2}} \approx 700 M_\odot \cdot \left(\frac{T}{200 \text{ K}} \right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{n}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.1)$$

Dieser Kollaps führt zur Bildung eines Sterns, der anfänglich nur aus primordialer Materie besteht. Diese erste Sternengeneration wird Population-III, kurz Pop-III, genannt. Verglichen mit heutigen Molekülwolken, die aufgrund von CO bis auf Temperaturen um 10 K kühlen können, ergibt sich ein Verhältnis für die Jeansmassen von

$$\frac{M_{J, \text{Pop-III}}}{M_{J, \text{Pop-I}}} = \left(\frac{200 \text{ K}}{10 \text{ K}} \right)^{\frac{3}{2}} \approx 100.$$

Das bedeutet, daß die im primordialen gravitativen Kollaps zur Verfügung stehende Masse um den Faktor 100 höher ist als für heutigen Kollaps. Setzt man gleiche Sternbildungseffizienz voraus, kann man schließen, daß Pop-III-Sterne sehr massereich gewesen sein müssen. Daher geht man für Pop-III-Sterne von einer top-heavy IMF aus (Massenverteilung mit den meisten Sternen bei große Massen).

Jedoch finden Nakamura und Umemura (2001) eine bimodale Massenverteilung aufgrund einer Bifurkation in der Entwicklung des Kollapses. Sie finden für eine anfängliche Dichte von $n_c \lesssim 10^5 \text{ cm}^{-3}$ eine langsame radiale Kontraktion wegen wenig effektiver H_2 Kühlung. Diese verlangsamt sich weiter beim Erreichen von LTE. Dabei wird die Kühlzeitskala länger als die Frei-Fall-Zeitskala. Daher fragmentiert die Wolke, bevor es eine Teilchendichte von 10^8 cm^{-3} erreicht, wo Drei-Körper-Reaktionen (Palla et al., 1983) effektiv werden und damit die Kühlung beschleunigen. Fragmente, die von $n_c \lesssim 10^5 \text{ cm}^{-3}$ starten, erreichen Massen von einigen $10 M_\odot$. Im Gegensatz dazu finden diese Autoren für Fragmente mit anfänglichen $n_c \gtrsim 10^5 \text{ cm}^{-3}$, daß die durch die Drei-Körper-Reaktionen effektivere H_2 Kühlung Dichten von $n \sim 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ erreicht werden können, bevor die langsame hydrostatische Kontraktion einsetzt. Durch die deutlich höhere Teilchendichte reduziert sich die Fragmentmasse auf ca. $1 M_\odot$. Daher könnte die IMF für die Pop-III-Sterne in der Tat der heutigen IMF (welche Sterne von $1 M_\odot$ bevorzugt) ähnlich sein mit dem Zusatz eines zweiten Peaks bei einigen $10 M_\odot$. Uehara und Inutsuka (2000) und Nakamura und Umemura (2002) konnten diese Bimodalität mittels Kühlung durch HD weiter untermauern.

Geht man davon aus, daß eine Jeans-instabile Wolke auf der Frei-Fall-Zeitskala

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G \rho}} = 2 \cdot 10^5 \text{ yr} \cdot \left(\frac{n}{10^4 \text{ cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{2}}$$

kollabiert, erhält man typische Akkretionsraten von

$$\dot{M} \approx \frac{M_J}{\tau_{\text{ff}}} = 3 \cdot 10^{-3} M_\odot \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{T}{200 \text{ K}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

Zum Vergleich: für Pop-I-Sterne ist Kühlung durch CO bis $T = 10 \text{ K}$ möglich. Daher ergibt sich $\dot{M} \approx 4 \cdot 10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Beobachtungen von T Tau Sternen (Bertout et al., 1988; Calvet et al., 2004) ergeben Akkretionsraten von $10^{-8} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ bis zu einigen $10^{-7} M_\odot \text{ yr}^{-1}$. Diese kann jedoch bei FU Ori Objekten auf $10^{-5 \dots -3} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ steigen (Hartmann und Kenyon, 1985, 1987; Kenyon und Hartmann, 1991), konsistent mit unseren Abschätzungen.

Palla et al. (1983) untersuchten den Kollaps einer primordialen Gaswolke mittels eines Einzonenmodells für die Wolke unter Berücksichtigung von Strahlungstransport und zeitabhängige Chemie. Sie fanden typische Akkretionsraten von $10^{-2} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und einen hydrostatischen Kern von $0.05 M_{\odot}$.

Wie massereich können nun Pop-III-Sterne werden? Omukai und Palla (2003) fanden eine kritische Akkretionsrate von $\dot{M}_{\text{crit}} = 4 \cdot 10^{-3} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$, unterhalb der sich Sterne mit mehreren $100 M_{\odot}$ bilden können. Oberhalb dieser kritischen Akkretionsrate wird das Eddington-Limit vor dem Einsetzen von Wasserstoffbrennen überschritten. Dies führt zu einer starken Vergrößerung des Sternradius und eventuell zu einer Umkehrung der Akkretion. Daher nimmt oberhalb von \dot{M}_{crit} die maximal mögliche Masse mit zunehmendem \dot{M} ab.

Der beim Überschreiten der Jeans-Masse folgende Kollaps bildet den Protostern, geht dann aber bei Vorhandensein von Drehimpuls in die Scheibenakkretion über. In der Scheibenakkretionsphase wird Masse mittels viskoser Prozesse auf den Stern transportiert, während Drehimpuls nach außen transportiert wird.

Die Untersuchung dieser Phase der Scheibenakkretion hinsichtlich Struktur und Stabilität soll Thema der vorliegenden Arbeit sein.

In Kapitel 2 stellen wir das Modell für eine stationäre Akkretionsscheibe vor. Kapitel 3 beschreibt die Berechnung der Opazität für primordiale Materie. In Kapitel 4 schließlich findet die Opazität ihre Anwendung auf stationäre Akkretionsscheiben mit primordialer chemischer Zusammensetzung. Die Arbeit schließt mit einer Zusammenfassung und Diskussion in Kapitel 5.

2. Akkretionsscheiben

Im folgenden Kapitel sollen die Grundlagen der Theorie von Akkretionsscheiben kurz dargestellt werden. Im Wesentlichen handelt es sich um das Standardmodell für geometrisch dünne, stationäre Akkretionsscheiben. Zunächst werden die Einzelgleichungen vorgestellt (Abschnitt 2.2–2.4). Dann wird in 2.5 die Modifikation der optischen Tiefe und des Strahlungsdruck diskutiert, um optisch dünne Akkretionsscheiben modellieren zu können. Abschnitt 2.6 führt die zeitabhängig hergeleiteten mechanischen Gleichungen in die Stationarität über.

Bevor der komplette Satz von Gleichungen in Abschnitt 2.8 in einem Gleichungssystem zusammengefaßt wird, findet in 2.7 noch eine Diskussion der Viskosität statt. Das Kapitel endet mit einer Einführung in mögliche Instabilitäten in Akkretionsscheiben (Abschnitt 2.9), einer Herleitung bzw. Definition der Zeitskalen für eine Akkretionsscheibe in 2.10, der Berechnung des Verhältnisses h/r in 2.11 und schließt mit einer abschließenden Zusammenfassung und Diskussion in Abschnitt 2.12 ab.

2.1. Geometrie

Betrachten wir die Skizze in Abbildung 2.1. Wir benutzen Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) , wobei wir Zylindersymmetrie in ϕ -Richtung annehmen. Sei h die Skalenhöhe der Scheibe am Ort r , so sind die vertikal integrierten Größen die Flächendichte

$$\Sigma = 2\rho h \quad (2.1)$$

und die Akkretionsrate

$$\dot{M} = 2\pi r v_r \Sigma \quad (2.2)$$

Ist die Bewegung der Masse nach innen gerichtet ($v_r < 0$), sprechen wir von Akkretion, für $v_r > 0$ ergibt sich Dekretion. Entsprechendes gilt für \dot{M} .

Wir fordern nun in jedem Scheibenring Massen-, Drehimpuls- und Energieerhaltung sowie Kräftegleichgewicht in radialer und vertikaler Richtung. Daraus leiten wir die zeitabhängigen Scheibengleichungen ab, um dann zum stationären Limit überzugehen.

2.2. Massenerhaltung

In einem Scheibenring wird die Änderung der Flächendichte Σ nur durch den Massenzu- und -abstrom von links und rechts verursacht:

$$2\pi r \Delta r \frac{\partial \Sigma}{\partial t} = -\Delta \dot{M} = -(\dot{M}_r - \dot{M}_l) \quad .$$

Differentiell ergibt sich

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial \dot{M}}{\partial r} = 0 \quad (2.3)$$

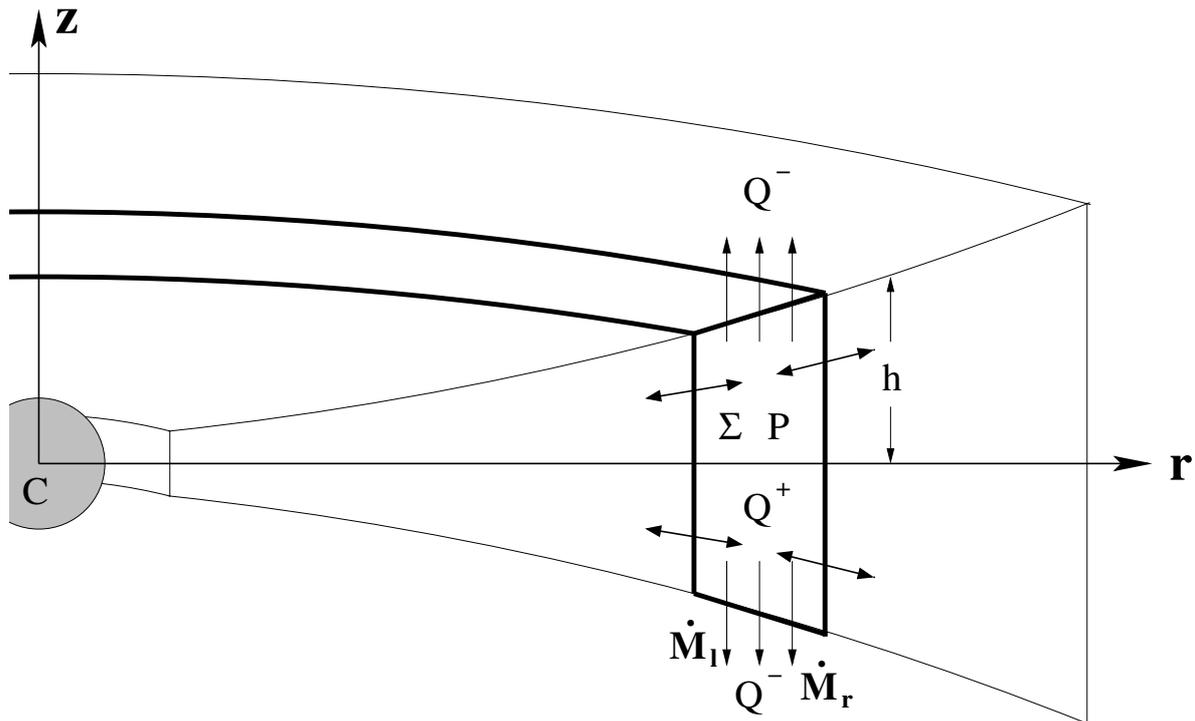


Abbildung 2.1.: Ausschnitt aus dem schematischen Bild einer Akkretionsscheibe. Bei $r = z = 0$ befindet sich das Zentralobjekt (C). Die Scheibe wird radialsymmetrisch in verschiedene Ringe unterteilt. Der Ausschnitt eines Rings wird exemplarisch mittels dicker Linien dargestellt. Durch die Seitenflächen in radialer Richtung findet Massenzu-/abstrom $\dot{M}_{l/r}$ statt. In diesem Ring gibt es eine Flächendichte Σ , den Druck P , sowie die Drucksalenhöhe h . Die durch viskose Reibung entstehende Wärme Q^+ wird nach beiden Seiten abgestrahlt (Q^-).

2.3. Mechanische Gleichungen

2.3.1. Drehimpulserhaltung

Der Drehimpuls ΔL eines mit der Geschwindigkeit $v_\phi = \Omega r$ rotierenden Kreisrings der radialen Ausdehnung Δr und der Masse $\Delta M = 2\pi r \Sigma \Delta r$ ist ($\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$)

$$\Delta L = \Delta M r^2 \Omega = 2\pi r \Delta r \Sigma r^2 \Omega .$$

Die zeitliche Änderung desselben muß durch den Zu-/Abstrom von Masse bzw. durch Austausch mittels viskoser Reibung geschehen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} + \Delta (\dot{M} r^2 \Omega) &= \Delta G \\ \Leftrightarrow 2\pi r \Delta r \frac{\partial}{\partial t} (\Sigma r^2 \Omega) + \Delta (\dot{M} r^2 \Omega) &= \Delta G . \end{aligned}$$

In differentieller Form

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Sigma r^2 \Omega) + \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (\dot{M} r^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial G}{\partial r} . \quad (2.4)$$

G ist das durch Viskosität erzeugte Drehmoment. Es kann entweder durch Austausch von Massenelementen in benachbarten Kreisringen und Grenzübergang (z.B. Pringle, 1981) oder durch direktes Umformen und Berechnen der ϕ -Komponente der Navier-Stokes Gleichung (z.B. Bisnovatyi-Kogan und Lovelace, 2001) beschafft werden. Es ergibt sich

$$G = 2\pi r v_t \Sigma r^2 \Omega \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} . \quad (2.5)$$

Die Ableitung $\frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}}$ ist die hier verwendete Kurzschreibweise für die logarithmische Ableitung von Ω nach r . Im Keplerfall folgt mit (2.7)

$$\frac{\partial \bar{\Omega}_K}{\partial \bar{r}} = -\frac{3}{2} .$$

2.3.2. Kräftebilanz in radialer Richtung

In radialer Richtung fordern wir Gleichgewicht zwischen Gravitations- und Zentrifugalkraft

$$\Omega^2 r + g_r = 0 , \quad (2.6)$$

wobei g_r die Radialkomponente der Beschleunigung ist. Sie berechnet sich als Gradient des Potentials

$$g_r = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad \text{mit} \quad \Phi = \Phi_{\text{Zentrum}} + \Phi_{\text{Scheibe}} .$$

In unserem Falle sei das Gravitationspotential der Scheibe vernachlässigbar. Dann folgt

$$\Omega^2 = \Omega_K^2 = \frac{GM}{r^3} , \quad (2.7)$$

d.h. die Scheibe rotiert keplersch.

2.3.3. Kräftebilanz in vertikaler Richtung

In vertikaler Richtung fordern wir hydrostatisches Gleichgewicht

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} = g_z, \quad (2.8)$$

wobei g_z die Vertikalkomponente der Gravitationskraft ist. Sie berechnet sich als z -Komponente des Gradienten des Gravitationspotentials Φ (s.o.):

$$g_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} = -\frac{GMz}{r^3} - \pi G \Sigma.$$

Hier erlauben wir einen Beitrag der lokalen Massendichte zur vertikalen Beschleunigung (Paczynski, 1978). Mittels (2.8) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial z} &= \rho g_z \\ \frac{\partial P}{\partial z} &= -\rho \left(\frac{GMz}{r^3} + \pi G \Sigma \right) \\ \int_0^h \frac{\partial P}{\partial z} dz &= -\int_0^h \rho \left(\frac{GMz}{r^3} + \pi G \Sigma \right) dz \\ P(h) - P(0) &= -\frac{GM\rho h^2}{2r^3} - 2\pi G \Sigma \rho h \\ P(0) &= \frac{GM\Sigma^2}{4\rho r^3} + \pi G \Sigma^2. \end{aligned}$$

In den letzten Umformungen haben wir die so genannte Ein-Zonen-Approximation verwendet, d.h. wir haben von $z = 0$ bis $z = h$ integriert und dabei angenommen, daß ρ konstant bleibt und der Druck außen gegen den Druck in der Mittelebene vernachlässigbar ist. Alle Größen in der letzten Gleichung nehmen die Werte in der Mittelebene an. Damit ist

$$P = G \left(\frac{M}{4\rho r^3} + \pi \right) \Sigma^2. \quad (2.9)$$

In dieser Gleichung steckt in starkem Maße schon die Annahme der Keplerschen Rotation, da wir die Komponente g_z durch die z -Komponente des Zentralpotentials berechnet haben.

2.4. Energiegleichung

Wir fordern, daß die lokal durch viskose Reibung erzeugte Energie in Strahlung umgesetzt wird:

$$\rho \epsilon_{\text{visc}} = \nabla \vec{F}. \quad (2.10)$$

Hier ist ϵ_{visc} die viskose Energieerzeugung und \vec{F} der Strahlungsflußgradient. In vertikaler Richtung können wir für den Strahlungsfluß in Diffusionsapproximation für optisch dicke Scheiben schreiben:

$$F(h) = -\frac{16\sigma T^3}{3\kappa_{\text{R}}\rho} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_h = -\frac{4\sigma}{3\kappa_{\text{R}}\rho} \left. \frac{\partial T^4}{\partial z} \right|_h \approx -\frac{4\sigma}{3\kappa_{\text{R}}\rho} \frac{T(z=h)^4 - T(z=0)^4}{h-0}.$$

Der im Strahlungsfluß auftretende Differentialkoeffizient wird durch einen Differenzkoeffizienten approximiert. κ_R ist das Rosselandmittel der Opazität. Unter der Annahme $T(h) \ll T(0)$ können wir die linke Seite der Energiegleichung vertikal integrieren und erhalten

$$\int_{-h}^h \nabla F dz = F(h) - F(-h) = \frac{8\sigma T^4}{3\kappa_R \rho h}.$$

Mittels $\tau_R = \frac{1}{2}\Sigma\kappa_R$, der Rosselandschen optischen Tiefe, und der Tatsache, daß die Abstrahlung gleichermaßen zu beiden Seiten erfolgt, für die Abstrahlung Q^- nach oben und unten

$$Q^- = \frac{4\sigma T^4}{3\tau_R}. \quad (2.11)$$

Ebenso erhalten wir für die vertikal integrierte rechte Seite von (2.10) die Dissipationsrate

$$Q^+ = \int_{-h}^h \rho \epsilon_{\text{visc}} dz = \frac{1}{2} \nu_t \Sigma \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2.$$

Dabei ist Q^+ die durch viskose Reibung dissipierte Energie pro Einheitsfläche. Sie läßt sich anschaulich aus dem Drehmoment G (Gl. 2.5) berechnen, indem man sich das auf das den Kreisring wirkende Gesamtdrehmoment ausrechnet :

$$\Delta G = G_r - G_l \approx \frac{\partial G}{\partial r} \Delta r.$$

Damit ist die geleistete Arbeit

$$\Delta Q = \Omega \Delta G \approx \Omega \frac{\partial G}{\partial r} \Delta r = \left[\frac{\partial}{\partial r} (G\Omega) - G \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right] \Delta r.$$

Integriert über alle Scheibenringe ergibt die letzte Gleichung lokal nur Quellterme $G \frac{\partial \Omega}{\partial r}$, der Term $\frac{\partial}{\partial r} (G\Omega)$ steht für den Transport der dissipierten Energie zwischen den einzelnen Kreisringen. Innerhalb eines Scheibenrings kann man diesen Randterm vernachlässigen:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta r} = \left[\frac{\partial}{\partial r} (G\Omega) - G \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right].$$

Da wir an der Abstrahlung pro Oberfläche $\Delta A = 2 \cdot 2\pi r \Delta r$ interessiert sind (Faktor 2 für zwei Seiten), erhalten wir für die Dissipationrate

$$Q^+ = \frac{1}{4\pi r} \frac{\Delta Q}{\Delta r} = \frac{1}{4\pi r} G \frac{\partial \Omega}{\partial r} = \frac{1}{2} \nu_t \Sigma \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2. \quad (2.12)$$

Aus der Gleichheit von (2.12) und (2.11) gemäß (2.10) folgt

$$\frac{1}{2} \nu_t \Sigma \left(r \frac{\partial \Omega}{\partial r} \right)^2 = \frac{4\sigma T^4}{3\tau_R}. \quad (2.13)$$

Für den Fall Keplerscher Rotation (2.7) ergibt sich

$$Q^+ = \frac{9}{8} \nu_t \Sigma \Omega_K^2. \quad (2.14)$$

2.5. Die effektive optische Tiefe und der Strahlungsdruck

In (2.11) haben wir die optische Tiefe mit Hilfe des Rosselandmittels eingeführt. Um auch optisch dünne Akkretionsscheiben modellieren können, modifizieren wir (2.11), indem wir die Rosselandsche optische Tiefe durch eine effektive optische Tiefe ersetzen.

Folgend einem Ansatz nach Artemova et al. (1996) und Bisnovaty-Kogan und Lovelace (2001) ersetzen wir die Rosselandsche optische Tiefe τ_R durch

$$\tau_{\text{eff}} = \tau_R + \frac{4}{3} + \frac{2}{3\tau_P}. \quad (2.15)$$

$\tau_P = \frac{1}{2}\Sigma\kappa_P$ wird analog zu τ_R definiert. Ebenso modifizieren wir den Strahlungsdruck P_{rad} durch

$$P_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3c\tau_{\text{eff}}} T^4 \left(\tau_R + \frac{4}{3} \right). \quad (2.16)$$

Damit können wir die Grenzfälle optisch dick und optisch dünn modellieren:

- optisch dick ($\tau_{R/P} \gg 1$):

$$Q^- = \frac{4\sigma}{3\tau_R} T^4 \quad \text{und} \quad P_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3c} T^4.$$

- optisch dünn ($\tau_{R/P} \ll 1$):

$$Q^- = 2\sigma\tau_P T^4 \quad \text{und} \quad P_{\text{rad}} = \frac{8\sigma\tau_P}{3c} T^4 \rightarrow 0.$$

Im optisch dicken Fall (freie Weglänge \ll geometrische Ausdehnung) werden Photonen mehrfach gestreut und bauen daher einen Strahlungsdruck auf. Die Diffusionsapproximation für den Strahlungsfluß ist gerechtfertigt. Ob dieser nennenswert zum Gesamtdruck beiträgt, hängt vom Verhältnis $P_{\text{rad}}/P_{\text{gas}}$ ab. Dies berechnet sich in diesem Falle zu

$$R = \frac{4\sigma\mu m_p T^3}{3c\rho k_B} = 0.3 \cdot \left(\frac{\rho}{10^{-10} \text{ g cm}^{-3}} \right) \left(\frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^3. \quad (2.17)$$

Für den optisch dünnen Fall (freie Weglänge \gg geometrische Ausdehnung) werden Photonen vorwiegend nur absorbiert. Das bedeutet, Strahlung trägt nicht mehr zum Gesamtdruck bei. Die Abstrahlung erfolgt über Volumenemission (Reemission der absorbierten Photonen, proportional zum Planck Mittel). Weitere Details finden sich in Bisnovaty-Kogan und Lovelace (2001).

Damit ergibt sich mit diesen Modifikationen der Gesamtdruck zu

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \rho \frac{k_B T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c\tau_{\text{eff}}} T^4 \left(\tau_R + \frac{4}{3} \right). \quad (2.18)$$

und die vertikal integrierte Energiegleichung aus (2.14) und (2.11) zu

$$\frac{9}{8} v_t \Sigma \Omega_K^2 = \frac{4\sigma T^4}{3\tau_{\text{eff}}}. \quad (2.19)$$

2.6. Stationarität

Die Energiegleichung (2.13) ist schon in stationärer Form. Aus der Massenerhaltung (2.3) folgt im stationären Fall

$$\dot{M} = \text{const.} , \quad (2.20)$$

d.h. die Akkretionsrate im stationären Fall ist über die Scheibe konstant. Drehimpulserhaltung (2.4) für den stationären Fall liefert

$$\frac{1}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial r} (\dot{M} r^2 \Omega) = \frac{1}{2\pi r} \frac{\partial G}{\partial r} .$$

Diese Gleichung kann leicht von einem Radius r_{in} bis zum Radius r integriert werden:

$$\dot{M} r^2 \Omega \Big|_{r_{\text{in}}}^r = 2\pi v_t \Sigma r^2 \Omega \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \Big|_{r_{\text{in}}}^r . \quad (2.21)$$

Da die Rotationsgeschwindigkeit nahe am Zentralobjekt von keplersch auf die (wesentlich langsamere) Rotation des Zentralobjekts wechselt, muß es einen Radius r^* geben, wo Ω ein lokales Maximum annimmt. Dieser Radius liege hinreichend nahe an r_{in} . Dann wird der innere Randwert des Terms auf der linken Seite von Gl. 2.21 Null und wir schreiben

$$\begin{aligned} \dot{M} (r^2 \Omega - r_{\text{in}}^2 \Omega_{\text{in}}) &= 2\pi v_t \Sigma r^2 \Omega \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \\ \Leftrightarrow \dot{M} r^2 \Omega \left(1 - \frac{r_{\text{in}}^2 \Omega_{\text{in}}}{r^2 \Omega} \right) &= 2\pi v_t \Sigma r^2 \Omega \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} . \end{aligned}$$

Für Keplerrotation (s.o.)

$$\dot{M} \left(1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}} \right) = -3\pi v_t \Sigma . \quad (2.22)$$

Die Funktion $f(r) = 1 - \sqrt{\frac{r_{\text{in}}}{r}}$ repräsentiert die innere Randbedingung. Es ist $f(r) \approx 1$, solange $r \gg r_{\text{in}}$. Für alle weiteren Rechnungen wird $f(r) = 1$ gesetzt.

2.7. Viskosität

In den vorangegangenen Gleichungen tritt v_t , die Viskosität, auf. Sie erlaubt es, Masse nach innen und Drehimpuls nach außen zu transportieren. Jedoch ist es nicht unbedingt einfach, den Mechanismus, der die Viskosität hervorruft, zu bestimmen. Für molekulare Viskosität ergeben sich jedoch viel zu geringe Werte, die zu einer zu großen Reynoldszahl und einer zu großen viskosen Zeitskala führen. Da man annimmt, daß Akkretionsscheiben auf hinreichend kurzer Zeit zumindest in den zentrumsnahen Teilen stationär werden, ist eine viskose Zeitskala von mehreren Hubble-Zeiten ein Widerspruch zu dieser Annahme.

Shakura und Sunyaev (1973) schließlich schlugen vor, die molekulare Viskosität als Drehimpulsmechanismus durch Turbulenz und magnetische Felder zu ersetzen. Sie approximierten das Spannungstensorelement $W_{r\phi}$ ¹ durch

$$W_{r\phi} = \eta_t \Omega \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} \approx \rho c_s^2 \frac{v_t}{c_s} + \rho c_s^2 \frac{H^2}{4\pi \rho c_s^2} = \tilde{\alpha} \rho c_s^2 . \quad (2.23)$$

¹In unserer Herleitung ist $G = 2\pi v \Sigma r^2 \Omega \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \bar{r}} = 2\pi W_{r\phi} r^2 \Omega h$.

Hier ist v_t eine typische Turbulenzgeschwindigkeit, $H^2/4\pi$ die magnetische Energiedichte sowie c_s die Schallgeschwindigkeit.

Die Turbulenzgeschwindigkeit muß kleiner sein als die Schallgeschwindigkeit, da sonst Stoßwellen auftreten würden, welche die Turbulenz sofort wieder subsonisch machen würden. Entstehende Zellen mit Magnetfeldern gleicher Polarität werden durch die differentielle Rotation in der Scheibe sofort zerrieben werden. Daher ist das magnetische Feld in einer Scheibe höchstwahrscheinlich chaotisch und kleinskalig. Plasmainstabilitäten und ähnliche Effekte sorgen daher dafür, daß die magnetische Energiedichte die thermische Energiedichte nicht übersteigt.

Daher können wir folgern, daß $\tilde{\alpha} \leq 1$ gelten muß. Jedoch ist 2.23 immer noch nur eine Parametrisierung. Der Mechanismus, der die Turbulenz antreibt, steht jedoch nach wie vor unter Diskussion.

Balbus und Hawley (1991) fanden eine Instabilität, welche die Turbulenz mittels eines Magnetfelds antreibt. Direkte numerische Simulationen ergaben Werte für α zwischen 10^{-2} und 0.6 (Hawley et al., 1995), abhängig von der Magnetfeldgeometrie. Jedoch ist immer noch unklar, ob diese Werte durch numerische Artefakte beeinflusst sind. Lin und Papaloizou (1996) leiten jedoch ähnliche Werte aus Beobachtungen ab.

Ausgehend von der Viskositätsparametrisierung in Gl. 2.23 können wir für Kepler Akkretionsscheiben schreiben

$$\frac{3}{2}\eta_t\Omega_K = \frac{3}{2}\rho v_t\Omega_K = \tilde{\alpha}\rho c_s^2,$$

und bekommen hieraus die turbulente Viskosität

$$v_t = \alpha \frac{c_s^2}{\Omega_K}, \quad (2.24)$$

wobei wir $\alpha = \frac{2}{3}\tilde{\alpha}$ ersetzt haben. Diese turbulente Viskosität ist das Produkt aus einer turbulenten Längenskala l_t und Geschwindigkeitsskala v_t

$$v_t = l_t \cdot v_t.$$

Im Rahmen dieser Arbeit gehen wir von isotroper Turbulenz aus — daher darf die lokal verfügbare größte Längenskala nie größer als die Skalenhöhe h werden.

2.7.1. Nicht selbstgravitierende Scheiben (NSG)

Für dünne, nicht selbstgravitierende Scheiben reduziert sich das hydrostatische Gleichgewicht (Gl. 2.9) zu

$$P = \rho c_s^2 = \frac{GM}{4\pi r^3} \Sigma^2 \quad \Leftrightarrow \quad c_s^2 = \Omega_K^2 h^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{h}{r} = \frac{c_s}{v_\phi}.$$

Mit Hilfe der letzten Beziehung findet sich

$$v_{t,\alpha} = \alpha c_s h. \quad (2.25)$$

In diesem Falle kann h und αc_s mit der turbulenten Längen- und Geschwindigkeitsskala identifiziert werden.

2.7.2. Kepler selbstgravitierende Scheiben (KSG)

Falls der Druckgradient im hydrostatische Gleichgewicht (Gl. 2.9) durch die lokale Massenverteilung bestimmt wird ($4\pi\rho r^3 \gg M$), folgt

$$\begin{aligned} P = \rho c_s^2 &= \pi G \Sigma^2 \\ c_s^2 &= 4\pi G \rho h^2 . \end{aligned} \quad (2.26)$$

Eingesetzt in die Viskosität (2.24) und mit (2.31) ergibt sich

$$v_{t,\alpha} = \alpha \frac{c_s^2}{\Omega} = \alpha \frac{2\pi G \Sigma}{\Omega} h = 2 \frac{\alpha}{Q_T} c_s h . \quad (2.27)$$

Hier ist h wieder die turbulente Längenskala, während die turbulente Geschwindigkeit nun aus der Kompression durch vertikale Beschleunigung pro Rotationsperiode resultiert. Während in (2.25) noch die turbulente Geschwindigkeit einem Bruchteil der Schallgeschwindigkeit zugeordnet werden konnte, ergibt sich hier eine direkte Kopplung von Vertikalbeschleunigung und Azimutalbewegung, die sich mittels des Toomre-Kriteriums (2.31) weiter reduzieren läßt. Daraus ist erkenntlich, daß die Viskosität mit zunehmendem Maße an vertikaler Selbstgravitation ($Q_T \ll 1$) immer effizienter wird. Probleme bereitet hier allerdings, daß die Turbulenzgeschwindigkeit spätestens für $Q_T < 2\alpha$ größer als die Schallgeschwindigkeit wird. Dies löst Schockwellen aus.

Bertin (1997) und Bertin und Lodato (1999) schlagen vor, die Energiegleichung bei Selbstgravitation durch die Bedingung $Q_T = 1$ zu ersetzen. Sie begründen dies durch eine Selbstregulation. Eine ähnliche Argumentation wurde schon von Paczynski (1978) vorgeschlagen. Gebiete einer Scheibe mit $Q_T < 1$ werden durch die Jeans-Instabilität geheizt, während heiße Gebiete mit $Q_T > 1$ effektiv abstrahlen können und sich dadurch wieder gegen $Q_T = 1$ nähern.

Dies ist im Lichte des vorhergesagten leicht einsehbar: Für $Q_T < 2\alpha$ wird die Turbulenz supersonisch, d.h. der Akkretionsfluß entwickelt Stoßwellen. Diese heizen das Medium, bis $Q_T \rightarrow 1$ erreicht wird.

Der vorangegangenen Argumentation unterliegt jedoch eine Annahme: die Isotropie der Turbulenz.

Als Alternative dazu kann die von Duschl et al. (2000) vorgeschlagene β -Viskosität verwendet werden. Diese Viskositätsbeschreibung erlaubt anisotrope Turbulenz. Die typische Längen- und Geschwindigkeitsskala für β -Viskosität ($v_\beta = \beta r v_\phi$) ist $\sqrt{\beta}r$ bzw. $\sqrt{\beta}v_\phi$.

Als Maß für die vertikale Selbstgravitation definieren wir

$$\eta_{\text{KSG}} = \frac{M}{M + 4\pi\rho r^3} , \quad (2.28)$$

d.h. $\eta_{\text{KSG}} \rightarrow 1$ für nicht selbstgravitierende Scheiben (NSG), $\eta_{\text{KSG}} \rightarrow 0$ für vertikal selbstgravitierende Scheiben (KSG).

2.7.3. Voll selbstgravitierende Scheiben (FSG)

Im voll selbstgravitierenden Fall wird die Lage noch komplizierter, da dort die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe an einem Punkt durch die Massenverteilung der gesamten Scheibe bestimmt ist. Eine Einteilung in NSG, KSG, FSG wie in Duschl et al. (2000), nach der die drei Regimes allein durch die eingeschlossene Scheibenmasse bestimmt werden können, ist jedoch für hinreichend angenehme Massenverteilungen möglich.

Wir werden sehen, daß beispielsweise bei Pop-III-Scheiben auf KSG-Bereiche wieder NSG-Bereiche in der Scheibe folgen können. Dies liegt daran, daß das Kriterium für vertikale Selbstgravitation —

Massenerhaltung	$\dot{M} = \text{const.}$
Drehimpulsgleichung	$\dot{M} = 3\pi\nu_t\Sigma$
Hydrostatisches Gleichgewicht	$P = G\left(\frac{M}{4\rho r^3} + \pi\right)\Sigma^2$
Radiale Kraftbilanz	$\Omega_K^2 r = \frac{GM}{r^2}$
Zustandsgleichung	$P = \rho c_s^2 = \rho \frac{k_B T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma}{3c\tau_{\text{eff}}} T^4 \left(\kappa_R + \frac{4}{3}\right)$
Energiegleichung	$\frac{9}{8}\nu_t\Sigma\frac{GM}{r^3} = \frac{4\sigma}{3\tau_{\text{eff}}} T^4$
Effektive optische Tiefe	$\tau_{\text{eff}} = \tau_R + \frac{4}{3} + \frac{2}{3\tau_P}$
Rosselandsche & Plancksche optische Tiefe	$\tau_{R/P} = \frac{1}{2}\Sigma\kappa_{R/P}$
Viskositätsparametrisierung	$\nu_t = \alpha \frac{c_s^2}{\Omega}$

Tabelle 2.1.: Gleichungen für eine keplersch rotierende stationäre Akkretionsscheibe

vertikale Beschleunigung durch die lokale Massenerteilung größer als Vertikalkomponente der Zentralbeschleunigung — ein lokales ist, während für volle Selbstgravitation sich eine globale Kopplung ergibt.

Im Rahmen dieser Arbeit sehen wir von der Modellierung voll selbstgravitierender Scheiben ab. Die numerische Modellierung dieser Scheiben im sinnvollen Maße ist sehr aufwendig. Als Referenz sei hier auf die Doktorarbeit von M. Biermann (2001) verwiesen.

2.8. Gleichungssystem für das Modell

Die Gleichungen in den vorangegangenen Kapiteln können nun zu einem Gleichungssystem, welches eine stationäre Akkretionsscheibe beschreibt, zusammengefaßt werden (siehe Tab. 2.1). Die Lösung dieses Gleichungssystem wird in Abschnitt 4.1 beschrieben.

2.9. Instabilitäten

Das Gleichungssystem in Tabelle (2.1) kann nun gelöst werden. Die genaue Lösungsmethodik wird in Kapitel 4 erläutert. Einer Lösung des Gleichungssystem sieht man nun aber nicht auf den ersten Blick an, ob sie stabil ist. Jede Lösung wird unter der Annahme von hydrostatisches Gleichgewicht, ausgeglichener Energiebilanz, Drehimpuls- und Massenerhaltung gefunden. Jedoch kann diese Gleichgewichtslösung unter Variation beispielsweise der Temperatur physikalisch instabil werden. Mathematisch gesprochen ist eine instabile physikalische Lösung ein repulsiver Fixpunkt. Im Folgenden werden die thermische Instabilität (Abschnitt 2.9.1), thermisch-viskose Instabilität (Abschnitt 2.9.2) und die Graviationsinstabilität (Abschnitt 2.9.3) vorgestellt.

2.9.1. Thermische Instabilität

Angenommen, wir haben eine Lösung des Gleichungssystem (vgl. Tab. 2.1). Betrachten wir nun eine Variation der Temperatur. Wenn ein Anstieg(Abfall) der viskosen Reibung (2.14) durch einen langsameren Anstieg(Abfall) der Abstrahlung (2.11) beantwortet wird, bezeichnet man die Scheibe als thermisch instabil. Mathematisch formuliert man dieses Kriterium für Instabilität (Pringle, 1976, 1981)

$$\left(\frac{d \log Q^+}{d \log T} \right) \Big|_P - \left(\frac{d \log Q^-}{d \log T} \right) \Big|_P > 0. \quad (2.29)$$

Dieses Kriterium kann für eine gegebene Viskositätsbeschreibung (z.B. Gl. 2.24) und einer Approximation der Opazität durch $\kappa_{R/P} \propto \rho^{A_{R/P}} T^{B_{R/P}}$ berechnet werden (siehe Anhang B). In Tabelle 2.2 haben wir einige interessante Grenzfälle zusammengestellt. Es ist festzustellen, daß im optisch dicken Grenzfall ($\tau_R \gg 1$) jeweils eine stark positiver Temperaturgradient eine thermische Instabilität induziert, während im optisch dünnen Grenzfall ($\tau_R \ll 1$) ein stark negativer Gradient thermische Instabilität hervorruft ($0 \leq A \leq 1$ für alle Absorptionsmechanismen).

2.9.2. Thermisch-viskose Instabilität

Eine Akkretionsscheibe ist thermisch-viskos instabil, wenn sich bei einer Erhöhung(Verringerung) der Akkretionsrate die Flächendichte verringert(erhöht). Mathematisch ergibt sich folgendes Kriterium (Pringle, 1981) für eine viskose Instabilität

$$\left(\frac{\partial \log \dot{M}}{\partial \log \Sigma} \right) \Big|_{P, Q^+ = Q^-} < 0. \quad (2.30)$$

Im Fall der Akkretion auf schwarze Löcher mit Thomson-Streuung dominierter Opazität wurde dies schon von Lightman und Eardley (1974) gezeigt. Meyer und Meyer-Hofmeister (1981) fanden schließlich, daß die thermisch-viskose Instabilität die Helligkeitsvariationen in Dwarfnovae erklären kann.

Gewöhnlich wird die Bezeichnung thermisch-viskose Instabilität verwendet. Dabei wird vorausgesetzt, daß jede viskos instabile Scheibe auch thermisch instabil ist. Mathematisch sieht man in der detaillierten Herleitung (Anhang B), daß dies im gasdruckdominierten Falle richtig ist, aber im strahlungsdruckdominierten Fall nicht mehr strikt erfüllt ist.

2.9.3. Gravitationsinstabilität

Eine Akkretionsscheibe ist instabil bzgl. Fragmentation, wenn der Toomre-Parameter (Toomre, 1964)

$$Q_T = \frac{\Omega_K c_s}{\pi G \Sigma} \quad (2.31)$$

kleiner als 1 wird. Der genaue kritische Toomre-Wert ist immer noch in der Diskussion (vgl. Goodman, 2003, und Ende von Kapitel 2).

Der Toomre-Parameter Q_T ist für NSG Scheiben ($\Omega_K^2 = \frac{GM}{r^3} \gg 4\pi G\rho$) immer größer als 1:

$$Q_{T,NSG} = \frac{c_s \Omega_K}{\pi G \Sigma} = \frac{c_s \Omega_K r}{2\pi G \rho h r} = \left(\frac{r}{h} \right) \cdot \frac{c_s \Omega_K}{2\pi G \rho r} \gg \left(\frac{r}{h} \right) \cdot \frac{2c_s}{\Omega_K r} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad Q_{T,NSG} \gg 2.$$

Für KSG ($\Omega_K^2 = \frac{GM}{r^3} \ll 4\pi G\rho$) ergibt sich analog

$$Q_{T,KSG} = \left(\frac{r}{h} \right) \cdot \frac{c_s \Omega_K}{2\pi G \rho r} \ll \left(\frac{r}{h} \right) \cdot \frac{2c_s}{\Omega_K r} \Leftrightarrow Q_{T,KSG}^2 \ll 4 \quad \Leftrightarrow \quad Q_{T,KSG} \ll 2.$$

$P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$	$\tau_{\text{R}} \gg 1$	$A_{\text{R}} - (1 + \eta_{\text{KSG}})B_{\text{R}} + 3(1 + \eta_{\text{KSG}}) < 0$
	$\tau_{\text{P}} \ll 1$	$-A_{\text{P}} + (1 + \eta_{\text{KSG}})B_{\text{P}} + 3(1 + \eta_{\text{KSG}}) < 0$
$P_{\text{rad}} \gg P_{\text{gas}}$	$\tau_{\text{R}} \gg 1$	$4A_{\text{R}} - \eta_{\text{KSG}}B_{\text{R}} - 4 < 0$
	$\tau_{\text{P}} \ll 1$	$-B_{\text{P}} - 4 < 0$

Tabelle 2.2.: Bedingungen für thermische Instabilität (Tabelle aus Mayer und Duschl, 2004b).

$P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$	$\tau_{\text{R}} \gg 1$	$\frac{3A_{\text{R}} - (1 + \eta_{\text{KSG}})B_{\text{R}} + 5(1 + \eta_{\text{KSG}})}{A_{\text{R}} - (1 + \eta_{\text{KSG}})B_{\text{R}} + 3(1 + \eta_{\text{KSG}})} < 0$
	$\tau_{\text{P}} \ll 1$	$\frac{-3A_{\text{P}} + (2 + \eta_{\text{KSG}})B_{\text{P}} + 3(3 + \eta_{\text{KSG}})}{-A_{\text{P}} + (1 + \eta_{\text{KSG}})B_{\text{P}} + 3(1 + \eta_{\text{KSG}})} < 0$
$P_{\text{rad}} \gg P_{\text{gas}}$	$\tau_{\text{R}} \gg 1$	$\frac{12A_{\text{R}} + (2 - \eta_{\text{KSG}})B_{\text{R}} - 4(1 - 2\eta_{\text{KSG}})}{4A_{\text{R}} - \eta_{\text{KSG}}B_{\text{R}} - 4} < 0$
	$\tau_{\text{P}} \ll 1$	$1 - \eta_{\text{KSG}} < 0$

Tabelle 2.3.: Bedingungen für thermisch-viskose Instabilität (Tabelle aus Mayer und Duschl, 2004b).

	A_{R}	B_{R}	$\left(\frac{\partial \log Q^+}{\partial \log T}\right) - \left(\frac{\partial \log Q^-}{\partial \log T}\right) =$	$\left(\frac{\partial \log \dot{M}}{\partial \log \Sigma}\right) =$
Eis	0	2	$(1 + \eta_{\text{KSG}})$	3
Verdampfung von Eis	0	-7	$10(1 + \eta_{\text{KSG}})$	$\frac{6}{5}$
Staub	0	1/2	$\frac{5}{2}(1 + \eta_{\text{KSG}})$	$\frac{9}{5}$
Verdampfung von Staub	1	-24	$1 + 27(1 + \eta_{\text{KSG}})$	$\frac{3 + 29(1 + \eta_{\text{KSG}})}{1 + 27(1 + \eta_{\text{KSG}})}$
Moleküle	2/3	3	$\frac{2}{3}$	$6 + 3\eta_{\text{KSG}}$
H ⁻ Absorption	1/3	10	$\frac{1}{3} - 7(1 + \eta_{\text{KSG}})$	$\frac{3 - 15(1 + \eta_{\text{KSG}})}{1 - 21(1 + \eta_{\text{KSG}})}$
Gebunden-frei und frei-frei	1	-5/2	$1 + \frac{1}{2}(1 + \eta_{\text{KSG}})$	$\frac{6 + 5(1 + \eta_{\text{KSG}})}{2 + (1 + \eta_{\text{KSG}})}$
Elektronenstreuung ($P_{\text{rad}} \gg P_{\text{gas}}$)	0	0	-4	$1 - 2\eta_{\text{KSG}}$

Tabelle 2.4.: Stabilitätskriterien (2.29 und 2.30) für $P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$, ausgewertet für die Fits an Pop-I-Rosselandopazitäten aus Bell und Lin (1994) (Tabelle aus Mayer und Duschl, 2004b). Vgl. mit Abbildung B.1.

2.10. Zeitskalen

Wir unterscheiden folgende Zeitskalen (Pringle, 1981)

- **dynamische Zeitskala** τ_{dyn} :

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{1}{\Omega} . \quad (2.32)$$

- **hydrostatische Zeitskala** τ_z

Zeit, um Information über die Skalenhöhe h zu transportieren:

$$\tau_z = \frac{h}{c_s} . \quad (2.33)$$

Im Falle von NSG erhalten wir

$$\tau_{z,\text{NSG}} = \frac{h}{c_s} = \frac{1}{\Omega_K} = \tau_{\text{dyn}} .$$

Für KSG folgt

$$\tau_{z,\text{KSG}} = \frac{h}{c_s} = \frac{c_s h}{c_s^2} = \frac{c_s \Omega_K}{2\pi G \Sigma \Omega_K} = \frac{Q_T}{2} \frac{1}{\Omega_K} = \frac{Q_T}{2} \tau_{\text{dyn}} .$$

- **viskose Zeitskala** τ_{ν_t} :

$$\tau_{\nu_t} = \frac{r^2}{\nu_t} . \quad (2.34)$$

Unter der Benutzung von (2.31) erhalten wir

$$\tau_{\nu_t} = \frac{r^2}{\nu_t} = \frac{\Omega_K r^2}{\alpha c_s^2} = \frac{\Omega_K r^2}{2\alpha G \left(\pi + \frac{M}{4\rho r^3}\right) \Sigma h} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{\pi Q_T}{2\left(\pi + \frac{M}{4\rho r^3}\right)} \cdot \frac{h}{c_s} .$$

Im Falle von NSG ($M \gg 4\pi\rho r^3$) vereinfacht sich in der letzten Beziehung der Term zu

$$\frac{\pi Q_T}{2\left(\pi + \frac{M}{4\rho r^3}\right)} = \frac{\pi \Omega_K c_s}{2\pi G \frac{M}{4\rho r^3} \Sigma} = \frac{\Omega_K c_s}{\Omega^2 h} = \frac{c_s}{\Omega h} ,$$

und damit

$$\tau_{\nu_t,\text{NSG}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{c_s}{\Omega_K h} \cdot \frac{h}{c_s} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{1}{\Omega_K} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \tau_{\text{dyn}} \gg \tau_{\text{dyn}} ,$$

während sich für KSG ($M \ll 4\pi\rho r^3$)

$$\frac{\pi Q_T}{2\left(\pi + \frac{M}{4\rho r^3}\right)} = \frac{\pi \Omega_K c_s}{2\pi^2 G \Sigma} = \frac{\Omega_K c_s}{2G \Sigma} = \frac{\Omega_K c_s^2}{2G \Sigma c_s} = \frac{2\Omega_K G \Sigma h}{2G \Sigma c_s} = \frac{\Omega_K h}{c_s}$$

ergibt, und somit folgt

$$\tau_{\nu_t,\text{KSG}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{\Omega_K h}{c_s} \cdot \frac{h}{c_s} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \Omega_K \left(\frac{h}{c_s}\right)^2 = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot \frac{\tau_z^2}{\tau_{\text{dyn}}} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \left(\frac{r}{h}\right)^2 \cdot Q_T^2 \cdot \tau_{\text{dyn}} \gg \tau_{\text{dyn}} .$$

- **thermische Zeitskala** τ_{th} :

Zeit, um die lokal verfügbare Wärmemenge durch Strahlung abzubauen = Zeit, um sie durch viskose Reibung (2.14) aufzubauen (Heizzeitskala = Kühlzeitskala = thermische Zeitskala)

$$\tau_{\text{th}} = \frac{\Sigma c_s^2}{Q^+} = \frac{\Sigma c_s^2}{\frac{9}{8} \nu_t \Sigma \Omega_K^2} = \frac{8}{9\alpha} \frac{1}{\Omega_K}. \quad (2.35)$$

- **chemische Reaktionszeitskala** τ_{ch} :

Zeitskala, auf der die chemischen Reaktionen ins Gleichgewicht laufen. Im vorliegenden Fall von Pop-III-Scheiben wird sie im Zusammenhang mit der Molekülbildung bei niedrigen Temperaturen wichtig (cf. Abschnitt 3.10). Diese Zeitskala muß kürzer als alle anderen Zeitskala sein, da sonst die Annahme von chemischen Gleichgewicht nicht mehr gegeben ist und damit die Opazität inkonsistent wird..

2.11. Verhältnis h/r

Ausgehend von 2.9, folgt

$$\begin{aligned} P &= G \left(\frac{M}{4\rho r^3} + \pi \right) \Sigma^2 \\ c_s^2 &= (\Omega_K^2 + 4\pi G\rho) h^2 \\ \left(\frac{c_s}{\Omega_K r} \right)^2 &= \left(1 + \frac{4\pi\rho r^3}{M} \right) \left(\frac{h}{r} \right)^2 \\ \left(\frac{h}{r} \right)^2 &= \eta_{\text{KSG}} \left(\frac{c_s}{\Omega_K r} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Mit Hilfe der vorletzten Gleichung und (2.31) finden wir

$$\frac{4\pi\rho r^3}{M} = \frac{4\pi G\rho r^3 h}{GMh} = \frac{2\pi G\Sigma}{\Omega_K^2 h} = \frac{2c_s \Omega_K r}{Q_T \Omega_K^2 h r} = \frac{2}{Q_T} \frac{c_s}{\Omega_K r} \frac{r}{h},$$

und damit

$$\left(\frac{h}{r} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{2}{Q_T} \frac{c_s}{\Omega_K r} \frac{r}{h}} \left(\frac{c_s}{\Omega_K r} \right)^2, \quad (2.37)$$

gleichbedeutend für NSG mit

$$\frac{h}{r} = \frac{c_s}{\Omega_K r},$$

sowie für KSG

$$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} Q_T \frac{c_s}{\Omega_K r}.$$

In kombinierter Schreibweise für NSG/KSG folgt

$$\frac{h}{r} = \left[1, \frac{1}{2} Q_T \right] \frac{c_s}{\Omega_K r}. \quad (2.38)$$

Eine Zusammenfassung der Betrachtungen der Abschnitte 2.7, 2.10 und 2.11 findet sich in Tabelle 2.5.

$\frac{h}{r}$	NSG	$\frac{h}{r} = \frac{c_s}{\Omega r}$			$\left(\frac{h}{r}\right)^2 = \eta_{\text{KSG}} \left(\frac{c_s}{\Omega r}\right)^2$
	KSG	$\frac{h}{r} = \frac{1}{2} Q_{\text{T}} \frac{c_s}{\Omega r}$			
Q_{T}	NSG	$Q_{\text{T}} \gg 2$			$\eta_{\text{KSG}} \rightarrow 1$
	KSG	$Q_{\text{T}} \ll 2$			$\eta_{\text{KSG}} \rightarrow 0$
v_{t}	NSG	$v_{\text{t}} = \alpha c_s \quad l_{\text{t}} = h$			$v_{\text{t}} = \frac{\alpha}{\eta_{\text{KSG}}} c_s \quad l_{\text{t}} = h$
	KSG	$v_{\text{t}} = \frac{2\alpha}{Q_{\text{T}}} c_s \quad l_{\text{t}} = h$			
τ	NSG	$\tau_{v_{\text{t}}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{h}{r}\right)^{-2} \cdot \tau_{\text{dyn}}$	$\tau_{\text{th}} = \frac{9}{8\alpha} \tau_{\text{dyn}}$	$\tau_{\text{z}} = \tau_{\text{dyn}}$	$\tau_{v_{\text{t}}} \gg \tau_{\text{th}} \geq \tau_{\text{dyn}} = \tau_{\text{z}}$
	KSG	$\tau_{v_{\text{t}}} = \frac{1}{4\alpha} \cdot \left(\frac{h}{r}\right)^{-2} \cdot Q_{\text{T}}^2 \cdot \tau_{\text{dyn}}$	$\tau_{\text{th}} = \frac{9}{8\alpha} \tau_{\text{dyn}}$	$\tau_{\text{z}} = \frac{1}{2} Q_{\text{T}} \tau_{\text{dyn}}$	$\tau_{v_{\text{t}}} \gg \tau_{\text{th}} \geq \tau_{\text{dyn}} \geq \tau_{\text{z}}$

Tabelle 2.5.: Relationen für das Höhenverhältnis h/r , den Toomre-Parameter Q_{T} , die viskose Längen- und Geschwindigkeitsskala l_{t} und v_{t} und die Zeitskalen τ in einer Akkretionsscheibe für NSG und KSG.

2.12. Zusammenfassung und Diskussion

Damit können wir noch nachträglich einige Annahmen, die in den vorangehenden Abschnitten stillschweigend gemacht wurden, begründen, unter der Voraussetzung geometrisch dünner Scheiben (vgl. Tabelle 2.5):

Unabhängig von NSG oder KSG ist die viskose Zeitskala immer deutlich größer als die dynamische oder die hydrostatische Zeitskala. Daher ist es erlaubt, die Bewegung in vertikaler und azimuthaler von der in radialer Richtung (viskoser Drehimpulstransport) zu entkoppeln.

Für KSG ist die hydrostatische Zeitskala länger als die dynamische Zeitskala. Hydrostatisches Gleichgewicht kann sich schneller einstellen, als die Scheibe rotiert.

Für geometrisch dünne KSG Scheiben ergibt sich $Q_{\text{T}} \ll 1$. Dem Übergang von NSG→KSG folgt demnach relativ bald die Fragmentation. Am Übergang von NSG→KSG (Gleichheit von Vertikal- und Zentralkraft und Selbstgravitation) gilt $Q_{\text{T}} = 2$.

Im Rahmen der hier verwendeten α -Viskosität unter der Annahme von isotroper Turbulenz wird bei Unterschreiten von $Q_{\text{T,crit}} = 2\alpha$ die Turbulenz supersonisch. Schockwellen jedoch werden das Gas heizen und die Turbulenzgeschwindigkeit wieder unter die Schallgeschwindigkeit bringen.

In der Energiegleichung wurden Terme der inneren Energie vernachlässigt. Sie treten im stationären Fall als Advektionsterme in Erscheinung. Sie sind von der Form (z.B. Bisnovatyi-Kogan und Lovelace, 2001)

$$Q_{\text{adv}} = -\frac{\dot{M}}{2\pi r} \left(\frac{\partial E}{\partial r} - \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial r} \right),$$

und können durch

$$Q_{\text{adv}} \approx \frac{\dot{M} c_s^2}{2\pi r^2} \xi$$

approximiert werden (ξ ist eine Funktion, deren Wert stets von der Größenordnung 1 ist). Vergleicht

man mit dem Term für Q^+ (2.14), so ist

$$\frac{Q^+}{Q_{\text{adv}}} \approx \frac{3r^2\Omega_K^2}{4c_s^2}.$$

Daher ist $Q^+ \gg Q_{\text{adv}}$, solange $c_s^2 \ll \Omega_K^2 r^2$. Für geometrisch dünne NSG Scheiben ist dies gut erfüllt ($\frac{c_s}{\Omega_K r} = \frac{h}{r} \ll 1$), selbst im KSG Fall, solange $\frac{c_s}{\Omega_K r} = \frac{2h}{Q_T r} \ll 1$. Mittels der Selbstregulation über die Turbulenzgeschwindigkeit darf Q_T niemals den Wert 2α unterschreiten, ohne supersonische Turbulenz zu erreichen. Da α nahe aber kleiner 1 ist, ist somit auch im KSG Fall für geometrisch dünne Scheiben die Vernachlässigung des Advektionsterms gerechtfertigt.

In Abschnitt 2.9.3 haben wir das Toomre-Kriterium für gravitative Instabilität eingeführt. Wir konnten zeigen, daß für KSG Lösungen der Toomre-Parameter kleiner als 2 und dadurch die Scheibe Toomre-instabil wird. Das Toomre-Kriterium ist eine notwendige Bedingung für Fragmentation. Die klassische Bedingung für Fragmentation ist, daß die thermische Zeitskala kürzer als die dynamische ist ($\tau_{\text{th}} < \tau_{\text{dyn}}$). In Abschnitt 2.10 finden wir, daß unabhängig von KSG oder NSG die thermische Zeitskala immer um den Faktor $9/(8\alpha)$ ($\alpha < 1$) größer ist. Dies ist ein Widerspruch.

Das Toomre-Kriterium jedoch besagt lediglich, daß für $Q_T < 1$ die Scheibe die Tendenz hat, lokal Kondensationen höherer Dichte zu formen. Diese Kondensationen bilden dann axial- und nichtaxial-symmetrische Verdichtungen. Es ist jedoch nicht klar, wie die Anregung dieser Moden verläuft. Dies bedarf weiterer Untersuchungen mittels mindestens zweidimensionaler Simulationen (vgl. Gammie, 2001; Goodman, 2003; Theis und Orlova, 2004) mit möglichst realistischer Physik, um die Spiralwellen in $r - \phi$ -Richtung modellieren zu können.

3. Opazität

Um die Absorptionseigenschaften primordialier Materie (Opazität) zu verstehen, benötigen wir die Kenntnis über die vorhandenen Elemente in primordialier Materie und deren Häufigkeiten (Abschnitt 3.1). Dann berechnen wir zunächst die Gleichgewichtskonzentrationen aller Spezies (Abschnitt 3.2). In 3.3 erfolgt eine Übersicht über alle Absorptionsmechanismen, welche in primordialier Materie

möglich sind. Diese werden dann mit den berechneten Gleichgewichten zu monochromatischen Absorptionskoeffizienten kombiniert (Abschnitt 3.5) und darauffolgend zur Berechnung und Diskussion der Rosseland- und Planckmitteln (Abschnitt 3.7) benutzt.

Der quantitative Einfluß von Lithium auf die Opazitätsmittel wird in Abschnitt 3.8 untersucht. Danach findet ein Vergleich für Lithium-freie Opazität mit bestehenden Rechnungen statt (siehe 3.9). In 3.10 wird untersucht, für welche Dichten und Temperatur die Annahme des chemischen Gleichgewichts gültig ist. Das Kapitel schließt mit Abschnitt 3.11 über mögliche Implikationen für die Kühlung primordialier Materie ab.

3.1. Primordiale Materie

Primordiale Materie besteht unserem heutigem Verständnis nach vorwiegend aus Wasserstoff (H) und Helium (He). Dazu kommen noch kleinere Bestandteile wie z.B. das Wasserstoffisotop Deuterium (D), das Heliumisotop ³He, und Lithium.

Während die primordialen relativen Häufigkeiten von Wasserstoff und Helium genau bekannt sind, ist die Situation für die weniger häufigen Bestandteile (D, ³He und Li) weniger klar. Sie zeigen einerseits eine starke Abhängigkeit vom Baryon-zu-Photon-Verhältnis η (siehe Abb. 3.1) und damit vom kosmolo-

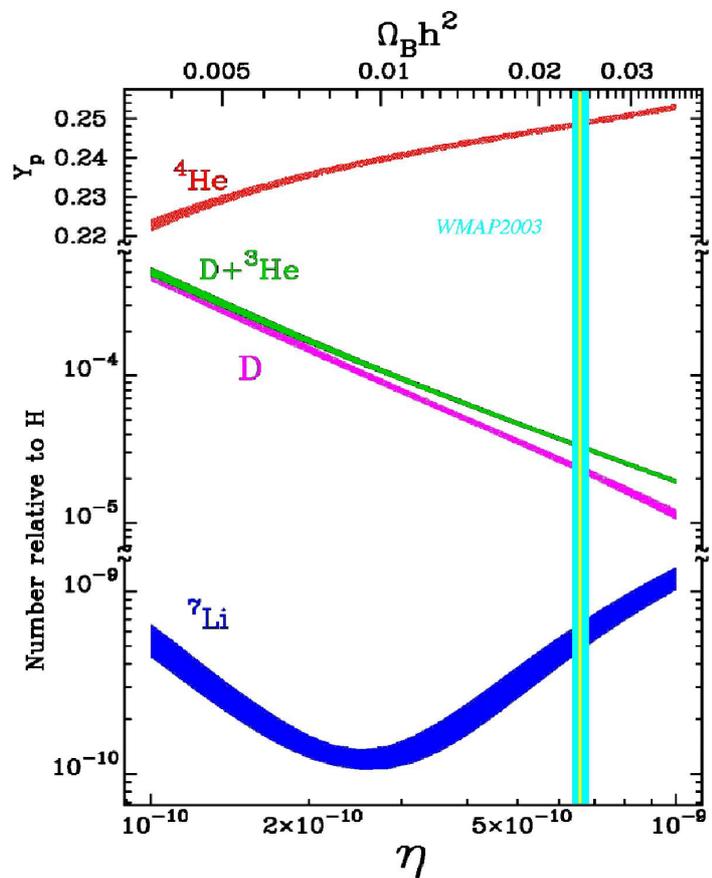


Abbildung 3.1.: Abhängigkeit der Elementhäufigkeiten vom Baryon-zu-Photon-Verhältnis η nach SBBN (aus Burles et al., 2001, WMAP-Ergebnisse hinzugefügt)

	Standard Pop-III
Y	(0.2479 ± 0.0004)
D/H	$(2.60^{+0.19}_{-0.17}) \cdot 10^{-5}$
$^3\text{He}/\text{H}$	$(1.04^{+0.04}_{-0.04}) \cdot 10^{-5}$
$^7\text{Li}/\text{H}$	$(4.15^{+0.49}_{-0.45}) \cdot 10^{-10}$

Tabelle 3.1.: WMAP+SBBN Standardhäufigkeiten nach Coc et al. (2004)

gischen Modell, andererseits besitzt insbesondere die gemessene primordiale Häufigkeit von Lithium intrinsische Unsicherheiten, welche durch die Prozessierung mittels galaktischer kosmischer Strahlung entstehen (Reeves et al., 1973). Diese führt zu einem deutlich höheren Wert. Die genaue Bestimmung dieser Häufigkeiten ist sehr wichtig, da sie indirekt über Standard-Big-Bang-Nukleosynthese (SBBN) die Information über den Wert von η und damit einen kosmologischen Parameter liefert.

Mit Hilfe von WMAP konnte der Wert von η unabhängig von SBBN sehr genau vermessen werden (Spergel et al., 2003). Diese erlauben mittels Kombination mit SBBN eine sehr genaue Festlegung der chemischen Häufigkeiten in primordialer Materie (Burles et al., 2001; Cyburt et al., 2003; Coc et al., 2004). Diese Rechnungen liefern untereinander bis auf wenige Prozent konsistente Häufigkeiten. Die Deuteriumhäufigkeit ist sowohl konsistent mit den Beobachtungen an hochrotverschobenen Quasaren (z.B. Pettini und Bowen, 2001) als auch mit Messungen im Sonnensystem (Hersant et al., 2001) und im interstellarem Medium (Moos et al., 2002, FUSE-Mission)

Die gemessene primordiale Lithium-Häufigkeit ist jedoch nicht vereinbar mit den Ergebnissen aus WMAP+SBBN. Messungen (Ryan et al., 1999, 2000; Thévenin et al., 2001; Bonifacio et al., 2002) an Sternen niedriger Metallizität im Halo der Milchstraße ergeben einen Faktor 3 kleineren Wert als nach SBBN. Die Messungen wurde an Einzelsternen und Kugelsternhaufen durchgeführt. Die Bestimmung der Lithiumhäufigkeit erfolgte über das Spite-Plateau, siehe Spite und Spite (1982).

Diese Differenz könnte systematischer Natur sein. Die Reduktion von Beobachtungen von Halo Sternen benötigt viele Details der Physik von Sternatmosphären (Effektivtemperatur, thermische Nichtgleichgewichtsphänomene etc.) Weiterhin könnte die Modifikation der Lithiumhäufigkeit an der Sternoberfläche durch Kernreaktionen bewirkt werden. Auf der Seite von SBBN könnte die Überhäufigkeit von Lithium durch nicht-berücksichtigte Physik (Quintessenz, Neutrino-Degenerierung, veränderte Gravitation, zeitliche Veränderung von Kopplungskonstanten) oder Systematik in den Reaktionsraten hervorgerufen werden. Cyburt et al. (2004) schließen eine Systematik in den SBBN-Reaktionsraten aus.

Wir benutzen in dieser Arbeit als Standardwerte die Häufigkeiten nach Coc et al. (2004), untersuchen jedoch den Einfluß der Lithiumhäufigkeit auf die Absorptionseigenschaften primordialer Materie im Detail.

3.2. Gleichgewichte

Unsere Berechnungen nehmen im Folgenden chemisches und lokales thermodynamisches Gleichgewicht (LTE) an. Wir benutzen die in Tabelle 3.2 angegebenen Gleichgewichtskonstanten. Wenn tabelliert, interpolieren wir mittels kubischen Splines in $\log K$ - $\log T$, für die Saha-Gleichungen ap-

$H_2 \leftrightarrow H + H$	$K_{H_2} = \frac{[H][H]}{[H_2]}$	Saha ($U = 4.478$ eV)
$H^- \leftrightarrow H + e^-$	$K_{H^-} = \frac{[H][e^-]}{[H^-]}$	Saha ($U = 0.7556$ eV)
$H \leftrightarrow H^+ + e^-$	$K_H = \frac{[H^+][e^-]}{[H]}$	Saha ($U = 13.6$ eV)
$H_2^+ \leftrightarrow H + H^+$	$K_{H_2^+} = \frac{[H][H^+]}{[H_2^+]}$	Stancil (1994a) $D_0 = 2.6507$ eV (Huber und Herzberg, 1979)
$H_2^+ + H_2 \leftrightarrow H_3^+ + H$	$K_{H_3^+} = \frac{[H_3^+][H]}{[H_2^+][H_2]}$	siehe Abschnitt 3.2.1 ($D_0 = 0.7382$ eV, Sidhu et al., 1992)
$HD \leftrightarrow H + D$	$K_{HD} = \frac{[H][D]}{[HD]}$	Saha ($U = 4.5167$ eV) (Stancil und Dalgarno, 1997b)
$D \leftrightarrow D^+ + e^-$	$K_D = \frac{[D^+][e^-]}{[D]}$	$K_D = K_H$ (ass.)
$H_3^+ + D \leftrightarrow H_2D^+ + H$	$K_{H_3^+,D} = \frac{[H_2D^+][H]}{[H_3^+][D]}$	Sidhu et al. (1992), $D_0 = 0.0439$ eV
$H_3^+ + HD \leftrightarrow H_2D^+ + H_2$	$K_{H_3^+,HD} = \frac{[H_2D^+][H_2]}{[H_3^+][HD]}$	Sidhu et al. (1992), $D_0 = 0.0120$ eV
$He \leftrightarrow He^+ + e^-$	$K_{He} = \frac{[He^+][e^-]}{[He]}$	Saha ($U = 24.587$ eV)
$He^+ \leftrightarrow He^{++} + e^-$	$K_{He^+} = \frac{[He^{++}][e^-]}{[He^+]}$	Saha ($U = 54.418$ eV)
$He_2^+ \leftrightarrow He + He^+$	$K_{He_2^+} = \frac{[He][He^+]}{[He_2^+]}$	Stancil (1994a) $D_0 = 2.365$ eV (Huber und Herzberg, 1979)
$Li \leftrightarrow Li^+ + e^-$	$K_{Li} = \frac{[Li^+][e^-]}{[Li]}$	$K_{Li} = K_{LiH^+,1} \cdot K_{LiH,2} / K_{LiH,1}$
$Li^+ \leftrightarrow Li^{++} + e^-$	$K_{Li^+} = \frac{[Li^{++}][e^-]}{[Li^+]}$	Saha ($U = 75.640$ eV)
$LiH \leftrightarrow Li + H$	$K_{LiH,1} = \frac{[Li][H]}{[LiH]}$	Stancil (1996)
$LiH \leftrightarrow LiH^+ + e^-$	$K_{LiH,2} = \frac{[LiH^+][e^-]}{[LiH]}$	Stancil (1996)
$LiH^+ \leftrightarrow Li^+ + H$	$K_{LiH^+,1} = \frac{[Li^+][H]}{[LiH^+]}$	Stancil (1996)
$LiH^+ \leftrightarrow Li + H^+$	$K_{LiH^+,2} = \frac{[Li][H^+]}{[LiH^+]}$	Stancil (1996)

Tabelle 3.2.: Gleichgewichtskonstanten. Tabelle aus Mayer und Duschl (2004a).

proximieren wir die statistischen Gewichte durch das Gewicht des Grundzustands mit Ausnahme von H_2 und HD , wo wir uns die Zustandssumme Q durch die Summation über die Energieniveaus direkt berechnet haben. Als Abbruchbedingung für die Hochtemperaturzustandssumme nehmen wir $(\Delta Q)/Q < \frac{1}{10}$.

Da einerseits die Wasserstoffspezies nicht direkt mit Helium wechselwirken und andererseits die relative Häufigkeit von Deuterium und Lithium sehr gering ist (siehe Tabelle 3.1), können wir Massenerhaltung für Wasserstoff-, Helium-, Deuterium und Lithiumspezies getrennt fordern, ohne einen großen Fehler zu machen.

Die Gleichungen für Massenerhaltung sind ($[X]$ bezeichnet die Teilchenzahldichte von Spezies X):

$$[H^-] + [H] + [H^+] + 3[H_3^+] + 2([H_2] + [H_2^+]) = N_H \quad (3.1)$$

$$[He] + [He^+] + [He^{++}] + 2[He_2^+] = N_{He} \quad (3.2)$$

$$[HD] + [D] + [D^+] + [H_2D^+] = N_D \quad (3.3)$$

$$[LiH] + [Li] + [Li^+] + [Li^{++}] = N_{Li} \quad (3.4)$$

Die Anzahldichten (Teilchen pro Volumen) der einzelnen Elemente, N_X , berechnen sich aus den relativen Häufigkeiten in Tabelle 3.1 zu

$$\begin{aligned} N_H &= f_H N_0 = \frac{f_H}{4 - 3f_H - 2f_D + f_{Li}} \frac{\rho}{m_H} \\ N_D &= f_D N_0 = \frac{f_D}{4 - 3f_H - 2f_D + f_{Li}} \frac{\rho}{m_H} \\ N_{He} &= f_{He} N_0 = \frac{1 - f_H - f_D - f_{Li}}{4 - 3f_H - 2f_D + f_{Li}} \frac{\rho}{m_H} \\ N_{Li} &= f_{Li} N_0 = \frac{f_{Li}}{4 - 3f_H - 2f_D + f_{Li}} \frac{\rho}{m_H}, \end{aligned}$$

wobei

$$N_0 = \frac{1}{f_H + 2f_D + 4f_{He} + 5f_{Li}} \frac{\rho}{m_H}$$

die Anzahldichte aller Spezies ist.

Für die Ladungsneutralität muß natürlich über alle geladenen Spezies summiert werden:

$$\begin{aligned} [e^-] + [H^-] - [H^+] - [H_2^+] - [H_3^+] - [He^+] - 2[He_2^+] \\ - [D^+] - [H_2D^+] - [Li^+] - [Li^{++}] = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Gleichungen (3.1–3.4) involvieren maximal Gleichungen dritten Grades im Falle von Wasserstoff, ansonst sind es lineare und quadratische Gleichungen. Die Gleichung dritten Grades wird durch Vernachlässigung des kubischen Glieds auf eine quadratische Gleichung reduziert. Das ist gerechtfertigt, da das kubische Glied nur zur Berechnung der H_3^+ -Konzentration dient, welche für die Massenerhaltung niemals der dominierende Teil ist.

Die Ladungsneutralität (3.5) läßt sich nicht mehr analytisch auflösen. Wir lösen sie mittels eines iterativen Verfahrens: (3.1–3.4) wird mit einem angenommenen Wert für die Elektronenkonzentration $[e^-]$ analytisch gelöst. Aus der Neutralitätsbedingung (3.5) folgt dann ein neuer Wert für $[e^-]$. Mit dem geometrischen Mittel aus altem und neuem Wert für $[e^-]$ wird die Iteration weitergeführt. Konvergenz wird nach ca. 20-50 Iterationen erreicht.

3.2.1. Das Gleichgewicht $\text{H}_2^+ + \text{H}_2 \leftrightarrow \text{H}_3^+ + \text{H}$

Die Zustandssumme von H_3^+ hat in den letzten Jahren eine stete Weiterentwicklung und Verbesserung erfahren (Patch, 1968; Tennyson und Sutcliffe, 1984; Chandra et al., 1991; Sidhu et al., 1992; Neale und Tennyson, 1995). Diese erweiterten sukzessive den Temperaturbereich und vergrößerten dabei den Wert der Zustandssumme im Hochtemperaturbereich durch die Berücksichtigung neu berechneter Energieniveaus. Dies hat eine größere H_3^+ -Häufigkeit bei hohen Temperaturen zur Folge.

H_3^+ ist das häufigste positive molekulare Ion für Temperaturen zwischen 2000 und 5000 K. Obwohl die maximale Häufigkeit niemals Werte von H^- oder H_2^+ erreicht, beeinflusst es die Gleichgewichtshäufigkeiten der anderen Spezies durch die Ladungsneutralität.

Wir haben die Gleichgewichtskonstante $\log_{10} K$ an die Funktion

$$\log_{10} K(T) = \frac{7079 \text{ K}}{T} \left(1 + \sum_{i=1}^5 a_i x^i \right), \quad x = \log_{10} T[\text{K}], \quad (3.6)$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} a_1 &= +(0.365793 \pm 0.02124) \\ a_2 &= -(0.624287 \pm 0.03488) \\ a_3 &= +(0.388540 \pm 0.02095) \\ a_4 &= -(0.102057 \pm 0.00546) \\ a_5 &= +(0.940462 \pm 0.05203) \cdot 10^{-2} \end{aligned}$$

gefittet.

Dieser Fit erreicht einen Maximalfehler von 4 % für $300 \text{ K} < T < 7000 \text{ K}$ sowie kleiner als 8% unterhalb von 10^4 K . 7079 K entspricht der Enthalpie von 16300 K für die Reaktion $\text{H}_2^+ + \text{H}_2 \rightarrow \text{H}_3^+ + \text{H}$, dividiert durch den Faktor log 10 wegen Basisumwandlung.

3.2.2. Einfluß von Lithium

Abbildung 3.2 zeigt die Häufigkeiten der Spezies für zwei Dichten abhängig von der Temperatur, mit und ohne Lithium.

Bei einem genauen Vergleich ist festzustellen, daß Lithium relativ früh ionisiert werden kann. Daher besitzt Pop-III- bzw. primordiale Materie relativ früh ($T \approx 1000 \dots 3000 \text{ K}$) freie Elektronen. Bei großen Dichten beeinflussen diese noch die H_3^+ - und die H^- -Häufigkeit. Die H^- -Häufigkeit wird vergrößert, während die H_3^+ -Häufigkeit sinkt, verglichen mit Lithium-freier Zusammensetzung.

Lithiumhydrid dissoziiert ebenfalls schon sehr früh bei wenigen hundert Kelvin.

3.3. Absorptionsmechanismen

Wir berücksichtigen folgende Absorptionsmechanismen:

- Thomson-Streuung
- Rayleigh-Streuung
- Frei-frei-Übergänge

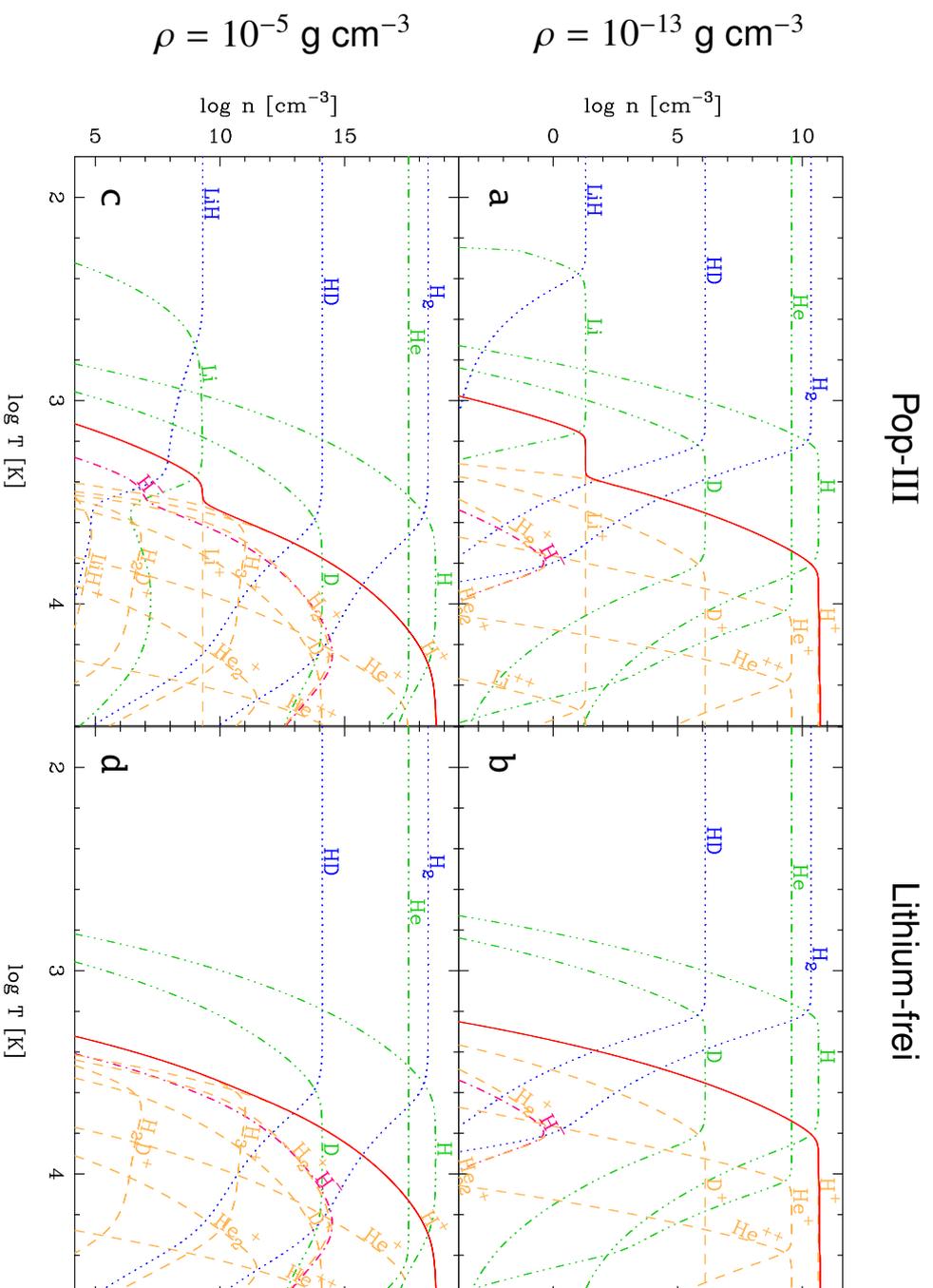


Abbildung 3.2.: Einfluß von Lithium auf das Gleichgewicht: (a) $\rho = 10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$, Pop-III; (b) $\rho = 10^{-13} \text{ g cm}^{-3}$, Lithium-frei; (c) $\rho = 10^{-5} \text{ g cm}^{-3}$, Pop-III; (d) $\rho = 10^{-5} \text{ g cm}^{-3}$, Lithium-frei. Die durchgezogene rote Linie zeigt die Elektronenhäufigkeit, gepunktete blaue Linien die Häufigkeit der neutralen Moleküle, gestrichelte orangene Linien positive Ionen, gestrichelt-gepunktete violette Linien negative Ionen und gestrichelt-dreifach-gepunktete grüne Linien die Häufigkeit neutraler Atome. Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

- Gebunden-frei-Übergänge
 - Photoionisation
 - Photodissoziation
- Gebunden-Gebunden-Übergänge
- Kollisions-Induzierte-Absorption

Im Folgenden stellen wir einige Absorptionsmechanismen genauer vor.

3.3.1. Kollisionsinduzierte Absorption (CIA)

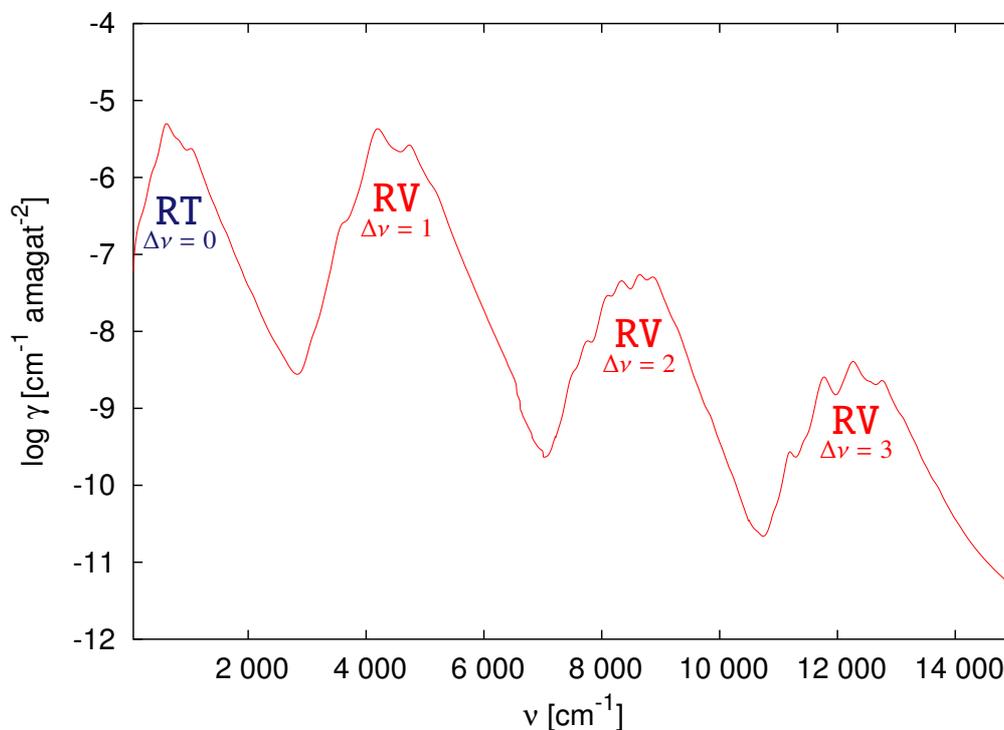


Abbildung 3.3.: CIA für H_2/H_2 Kollisionen bei $T = 400 \text{ K}$ (Borysow, 2002). RT steht für rototranslationale, RV für rotovibrationelle Übergänge. $\Delta\nu = 2, 3$ sind die Overtone (OT). ν ist die Quantenzahl der radialen Energieeigenwerte.

CIA ist grundsätzlich die van-der-Waals-Wechselwirkung zwischen einem Paar nicht notwendigerweise polarer Moleküle oder Atome. Die Wechselwirkung induziert ein Dipolmoment, welches Absorption hervorruft. Das Dipolmoment ist in gewissem Sinne permanent, und darf nicht mit durch beispielsweise von externen Feldern hervorgerufenen Dipolmomenten verwechselt werden. In diesem Sinne ist das Dipolmoment bei CIA permanent. Die typische Zeitskala für die Wechselwirkung ist von der Größenordnung Nanosekunden, daher erwartet man breite und diffuse Absorptionsspektren.

Eine allgemeine Theorie der CIA wurde schon in den 1960ern entwickelt (z.B. Van Kranendonk, 1957a,b; Van Kranendonk und Kiss, 1959). CIA fand die erste astrophysikalische Anwendung in der Modellierung der Spektren von Sternen in späten Entwicklungsstadien (Linsky, 1969). Während des letzten Jahrzehnts wurde die Theorie durch semi-analytische und ab-initio quantenmechanische

Rechnungen verbessert. Dazu wurden neu berechnete Dipolmomente und verbesserte Linienprofile verwendet (z.B. Borysow et al., 1989).

Der Einfluß von CIA auf Modellatmosphären von kühlen Sternen niedriger Metallizität wurde nachgewiesen (Borysow et al., 1997). Eine Bestätigung durch Beobachtungen erfolgte durch Bergeron und Leggett (2002) im Fall von zwei weißen Zwergen. Weiterhin ist CIA wichtig in den Atmosphären von Planeten.

Schließlich ist CIA noch wichtig in primordialen Opazitätsrechnungen (z.B. Lenzuni et al., 1991; Harris et al., 2004). Im kühlen Gas niedriger Metallizität ist CIA wichtig, da wenig oder im Falle von primordialen Gas gar kein Staub gebildet werden kann. Staub ist ein sehr guter Absorber, der die Opazität um Größenordnungen erhöhen würde.

Das häufigste Teilchen im kühlen primordialen Gas mittlerer bis hoher Dichte ist molekularer Wasserstoff, H_2 . Normalerweise absorbiert H_2 wegen seines fehlenden Dipolmoments nur über Quadrupolübergänge, welche sehr schwach sind. CIA bietet jedoch die Möglichkeit zu induzierten Dipolübergängen, welche deutlich stärkere Absorption bewirken. Da die Absorption durch Stöße hervorgerufen wird, erwarten wir die Wichtigkeit der Absorption bei hohen Dichten.

3.3.2. Gebunden-gebunden-Übergänge von H_3^+

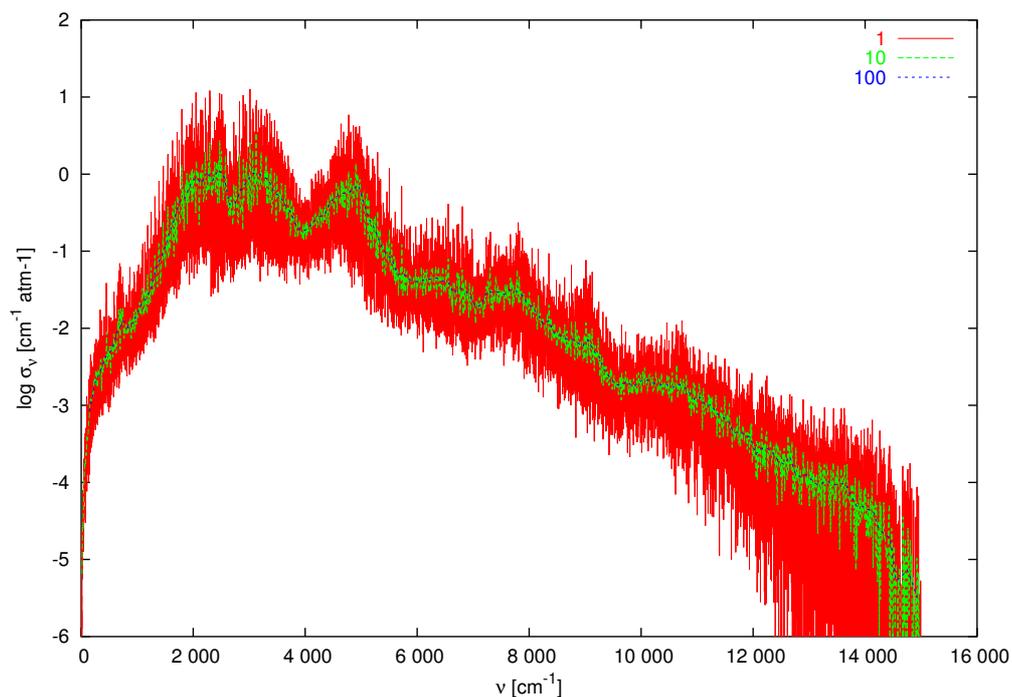


Abbildung 3.4.: Geglättete gebunden-gebunden Absorption von H_3^+ für Bin Größen von 1, 10 und 100 cm^{-1} (Linienliste nach Neale et al., 1996)

H_3^+ beeinflusst die Häufigkeiten der anderen Spezies in einem Temperaturbereich von ca. 2000 – 5000 K (siehe Abschnitt 3.2.1), da es dann das häufigste positive molekulare Ion ist.

Gebunden-gebunden Übergänge von H_3^+ haben Auswirkungen auf die Opazität. Harris et al. (2004) haben die Auswirkungen auf die Entwicklung von Sternen niedriger Metallizität und sehr niedriger Masse gezeigt.

Thomson	Th(e^-)	$e^- + h\nu \rightarrow e^- + h\nu'$	Cox (2000)
Rayleigh	Ray(H_2)	$H_2 + h\nu \rightarrow H_2 + h\nu'$	Dalgarno und Williams (1962)
	Ray(H)	$H + h\nu \rightarrow H + h\nu'$	
	Ray(He)	$He + h\nu \rightarrow He + h\nu'$	Kissel (2000)
	Ray(Li)	$Li + h\nu \rightarrow Li + h\nu'$	
frei-frei	ff(H^-)	$H + e^- + h\nu \rightarrow H + e^-$	Bell und Berrington (1987), Fit aus John (1988)
	ff(H)	$H^+ + e^- + h\nu \rightarrow H^+ + e^-$	Rybicki und Lightman (1979) mit Gaunt Faktoren aus Sutherland (1998)
	ff(H_2^+)	$H^+ + H + h\nu \rightarrow H^+ + H$	Stancil (1994b)
	ff(H_2^-)	$H_2 + e^- + h\nu \rightarrow H_2 + e^-$	Bell (1980)
	ff(H_2)	$H_2^+ + e^- + h\nu \rightarrow H_2^+ + e^-$	$\sigma_{ff}(H_2) = \sigma_{ff}(H)$ (ass.)
	ff(H_3)	$H_3^+ + e^- + h\nu \rightarrow H_3^+ + e^-$	$\sigma_{ff}(H_3) = \sigma_{ff}(H)$ (ass.)
	ff(He_2)	$He_2^+ + e^- + h\nu \rightarrow He_2^+ + e^-$	$\sigma_{ff}(He_2) = \sigma_{ff}(H)$ (ass.)
	ff(He_2^+)	$He^+ + He + h\nu \rightarrow He^+ + He$	Stancil (1994b)
	ff(He)	$He + e^- + h\nu \rightarrow He + e^-$	John (1994)
	ff(He)	$He^+ + e^- + h\nu \rightarrow He^+ + e^-$	$\sigma_{ff}(He) = \sigma_{ff}(H)$ (ass.)
ff(He^+)	$He^{++} + e^- + h\nu \rightarrow He^{++} + e^-$	$\sigma_{ff}(He^+) = \sigma_{ff}(H)$ (ass.)	
gebunden-frei	bf(H^-)	$H^- + h\nu \rightarrow H + e^-$	$\lambda < 1.6419 \mu\text{m}$, Wishart (1979) Fit aus John (1988)
	bf(H)	$H + h\nu \rightarrow H^+ + e^-$	Gray (1992), g_{bf} aus Mihalas (1967), Karzas und Latter (1961)
	bf(H_2)	$H_2 + h\nu \rightarrow H_{2,diss}^*$	$h\nu > 15.4 \text{ eV}$, Yan et al. (1998, 2001)
	bf(H_2^+)	$H_2^+ + h\nu \rightarrow H^+ + H$	Stancil (1994b)
	bf(He)	$He + h\nu \rightarrow He^+ + e^-$	Hunger und van Blerkom (1967)
	bf(He^+)	$He^+ + h\nu \rightarrow He^{++} + e^-$	Hunger und van Blerkom (1967)
	bf(He_2^+)	$He_2^+ + h\nu \rightarrow He^+ + He$	Stancil (1994b)
	bf(Li)	$Li + h\nu \rightarrow Li^+ + e^-$	2s und 2p Zustand: Peach et al. (1988) wasserstoffähnlich anderenfalls
gebunden-gebunden	bb(H_3^+)	$H_3^+ + h\nu \rightarrow H_3^{+,*}$	Neale et al. (1996)
	bb(H_2)	$H_2 + h\nu \rightarrow H_2^*$	A_{21} aus Wolniewicz et al. (1998) Energieniveaus aus der Molecular Opacity Database UGAMOP (http://www.physast.uga.edu/ugamop/)
	bb(HD)	$HD + h\nu \rightarrow HD^*$	A_{21} aus Abgrall et al. (1982) Energieniveaus: Stancil und Dalgarno (1997b)
	bb(LiH)	$LiH + h\nu \rightarrow LiH^*$	A_{21} aus Zemke und Stwalley (1980) unter Berücksichtigung von Bougleux und Galli (1997) Energieniveaus aus Dalgarno et al. (1996)
	bb(H)	$H + h\nu \rightarrow H^*$	Wiese et al. (1966), Stark broadening aus Stehlé und Hutcheon (1999)
	bb(He)	$He + h\nu \rightarrow He^*$	NIST (Martin et al., 1999)
	bb(Li)	$Li + h\nu \rightarrow Li^*$	NIST (Martin et al., 1999)
	bb(Li^+)	$Li^+ + h\nu \rightarrow Li^{+,*}$	NIST (Martin et al., 1999)
	Kollisions-induzierte Absorption	CIA(H_2/H_2)	$H_2 + H_2 + h\nu \rightarrow H_2 + H_2$
CIA(H_2/He)		$H_2 + He + h\nu \rightarrow H_2 + He$	Borysow et al. (1989): RV 0 \rightarrow 1 $40 < T < 1000 \text{ K}$, $20 < \nu < 15000 \text{ cm}^{-1}$ Borysow und Frommhold (1989): RV OT $40 < T < 1000 \text{ K}$, $20 < \nu < 20000 \text{ cm}^{-1}$ Borysow et al. (1988): RT $40 < T < 1000 \text{ K}$, $20 < \nu < 5000 \text{ cm}^{-1}$ Jørgensen et al. (2000): alle Übergänge $1000 < T < 7000 \text{ K}$, $25 < \nu < 200088 \text{ cm}^{-1}$
CIA(H/He)		$H + He + h\nu \rightarrow H + He$	Gustafsson und Frommhold (2001) $1500 < T < 10000 \text{ K}$, $50 < \nu < 11000 \text{ cm}^{-1}$
CIA(H_2/H)		$H_2 + H + h\nu \rightarrow H_2 + H$	Gustafsson und Frommhold (2003) $1000 < T < 2500 \text{ K}$, $100 < \nu < 10000 \text{ cm}^{-1}$

Tabelle 3.3.: Absorptionsprozesse. Tabelle aus Mayer und Duschl (2004a).

Wir benutzen die Linienliste von mehr als drei Millionen Linien (Neale et al., 1996). Diese bin-
nen wir in Frequenzintervalle von 10 cm^{-1} . Tests mit verschiedenen Bingrößen (siehe Abb 3.4) von
 $200 \dots 0.1 \text{ cm}^{-1}$ haben keine signifikant verschiedene Ergebnisse für das Rosselandmittel gebracht,
daher benutzen wir diese geglätteten Absorptionskoeffizienten in tabellierter Form $\kappa(\nu, T)$. Dadurch
sparen wir sehr viel Rechenzeit, ohne an Genauigkeit zu verlieren.

Wegen der zahlreichen Linien sieht die durch $\text{bb}(\text{H}_3^+)$ Übergänge hervorgerufene Absorption un-
terhalb einer gewissen Frequenzauflösung wie kontinuierliche Absorption aus. Für das Planckmittel
benutzen wir den integrierten Absorptionskoeffizient (siehe 3.4).

3.3.3. Verwendete Daten und Extrapolationen

Alle berücksichtigen Absorptions- und Streuprozesse sind in Tabelle 3.3 aufgeführt. Wenn nicht an-
ders angegeben, verwenden wir die tabellierten Daten und interpolieren bikubisch. Jenseits der ta-
bellierten Daten verwenden wir Extrapolationen. Die Anzahl der verwendeten Linien für gebunden-
gebunden Übergänge von H_2 , HD, LiH, H, He, Li, Li^+ und H_3^+ sind 4631, 7034, 1008, 137, 333, 142,
140 und 3070573.

Für Absorption durch frei-frei Übergänge extrapolieren wir für kleine Frequenzen $\kappa_\nu \propto \nu^{-2}$, da
 $\kappa_{\nu,ff} \propto \nu^{-3}(1 - e^{-h\nu/(k_B T)}) \propto \nu^{-2}$ (John, 1994). Für CIA zitieren wir die Publikationen, die die De-
tails beschreiben, welche zur Berechnung der Tabellen geführt haben¹. Wir verwenden die dort zum
Download bereitstehenden Daten mit Ausnahme von CIA (H_2/He), wo wir mittels der verfügbaren
Programmen die Tabellen über einen weiten Frequenz- und Temperaturbereich selbst erzeugt haben.

Wir extrapolieren CIA nach $\kappa_\nu \propto \nu^2$ für $\nu \rightarrow 0$, da nach Meyer et al. (1989)

$$\gamma(\omega) = \frac{4\pi^3}{3hc} n_A n_B \omega g(\omega, T) \left(1 - e^{-\frac{h\omega}{2\pi k_B T}}\right)$$

für kleine Frequenzen proportional zu $\omega \left(1 - e^{-\frac{h\omega}{2\pi k_B T}}\right) \propto \omega^2 \propto \nu^2$ ist. Die häufig verwendeten BC-
Linienprofile $g_{BC}(\omega, T)$ (Birnbaum und Cohen, 1976; Borysov et al., 1985) sind für niedrige Fre-
quenzen konstant. Für Rayleighstreuung niedriger Frequenz extrapolieren wir klassisch $\kappa_\nu \propto \nu^4$.

3.4. Der integrierte Absorptionskoeffizient

Betrachten wir ein Atom/Molekül mit zwei Energieniveaus E_1 und E_2 relativ zum Grundzustand. Der
Absorptionskoeffizient α_ν [cm^{-1}] für den Übergang $2 \rightarrow 1$ ist

$$\alpha_\nu = \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \Phi(\nu) n_1 A_{12} \left(1 - e^{-\frac{h\nu_{12}}{k_B T}}\right),$$

wobei $\Phi(\nu)$ das Linienprofil, n_1 die Teilchendichte von Zustand 1, A_{12} der Einstein A Koeffizient und
 ν_{12} die Übergangsfrequenz. Bezüglich des Grundzustandes läßt sich dies wie folgt schreiben:

$$\alpha_\nu = \frac{g_1}{g_0} \frac{c^2}{8\pi\nu^2} \Phi(\nu) n_0 A_{12} \left(e^{-\frac{E_1}{k_B T}} - e^{-\frac{E_2}{k_B T}}\right).$$

In Einheiten der gesamtem Teilchendichte der Spezies $n = \sum_i n_i = \frac{n_0}{g_0} \sum_i g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}} = \frac{n_0}{g_0} Q(T)$ ist

$$\alpha_\nu = g_1 \frac{c^2}{8\pi\nu^2} Q(T) \Phi(\nu) n A_{12} \left(e^{-\frac{E_1}{k_B T}} - e^{-\frac{E_2}{k_B T}}\right).$$

¹Eine Liste aller verfügbaren CIA Daten befindet sich unter <http://www.astro.ku.dk/~aborysov/programs/>.

Mittels $g_1 A_{12} = g_2 A_{21}$ können wir leicht in den mehr gebräuchlichen Einstein A -Koeffizient für spontane Emission, A_{21} , umformen.

Für das Planckmittel nehmen wir weiterhin an, daß B_ν und damit ν über die Linienbreite konstant ist, d.h. die Linie sei sehr schmal. Desweiteren benutzen wir die Normiertheit des Linienprofils ($\int_0^\infty \Phi(\nu) d\nu = 1$). Dann ist der Beitrag des $2 \rightarrow 1$ Übergangs ($k = \nu/c$ ist die Wellenzahl)

$$\begin{aligned}
 \kappa_{P,L}(\rho, T) &= \frac{1}{\rho} \frac{\int_\nu \alpha_\nu B_\nu d\nu}{\int_\nu B_\nu d\nu} \\
 &= \frac{1}{\sigma \rho T^4} \int_\nu \alpha_\nu B_\nu d\nu \\
 &= \frac{n}{\sigma \rho T^4} \sum_{1 \rightarrow 2} g_1 \frac{1}{8\pi k_{1 \rightarrow 2}^2 Q(T)} A_{12} \left(e^{-\frac{E_1}{k_B T}} - e^{-\frac{E_2}{k_B T}} \right) B_\nu \\
 &= \frac{hcn}{4\pi \sigma \rho T^4 Q(T)} \sum_{1 \rightarrow 2} g_1 A_{12} \left(e^{-\frac{E_1}{k_B T}} - e^{-\frac{E_2}{k_B T}} \right) \frac{k_{1 \rightarrow 2}}{e^{\frac{hck_{1 \rightarrow 2}}{k_B T}} - 1}. \quad (3.7)
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis, multipliziert mit $\frac{\rho}{n}$, hängt allein von der Temperatur ab. Einmal berechnet für die betreffenden Spezies mit Summation über alle Linien für das gewählte Temperaturgitter, kann $\kappa_{P,L}(\rho, T)$ direkt zum Kontinuums Planckmittel addiert werden, da die Planckmittelung linear ist.

3.5. Absorptionskoeffizienten

Wir berechnen zunächst die Summen der monochromatischen Absorptions- und Streukoeffizienten κ_a und κ_s für alle Absorptions- und Streuprozesse:

$$\begin{aligned}
 \kappa_a(\nu, \rho, T) &= \frac{1}{\rho} \sum_i \sigma_{a,1,i}(\nu, T) n_j(\rho, T) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{\rho} \sum_i \sigma_{a,2,i}(\nu, T) n_j(\rho, T) n_k(\rho, T) \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \right) \quad (3.8)
 \end{aligned}$$

$$\kappa_s(\nu, \rho, T) = \frac{1}{\rho} \sum_i \sigma_{s,1,i}(\nu, T) n_j(\rho, T). \quad (3.9)$$

Die Indizes "1" und "2" zeigen Ein- und Zweikörperabsorption (z.B. CIA) an. Für Absorption korrigieren wir mit dem Faktor für stimulierte Emission ($1 - e^{-h\nu/(k_B T)}$, siehe Mihalas, 1978), sofern diese Korrektur nicht schon in den tabellierten Daten enthalten ist.

3.6. Planckfunktion

In Abb. 3.6 zeigen wir die Planckfunktion für verschiedenen Temperaturen als Funktion der Frequenz. Sie ist gegeben durch

$$B_\nu = 2h\nu^3 c \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}, \quad (3.10)$$

und geht für kleine Frequenzen ν in die Rayleigh-Jeans Näherung über,

$$B_{\nu \rightarrow 0} = 2\nu^2 k_B T, \quad (3.11)$$

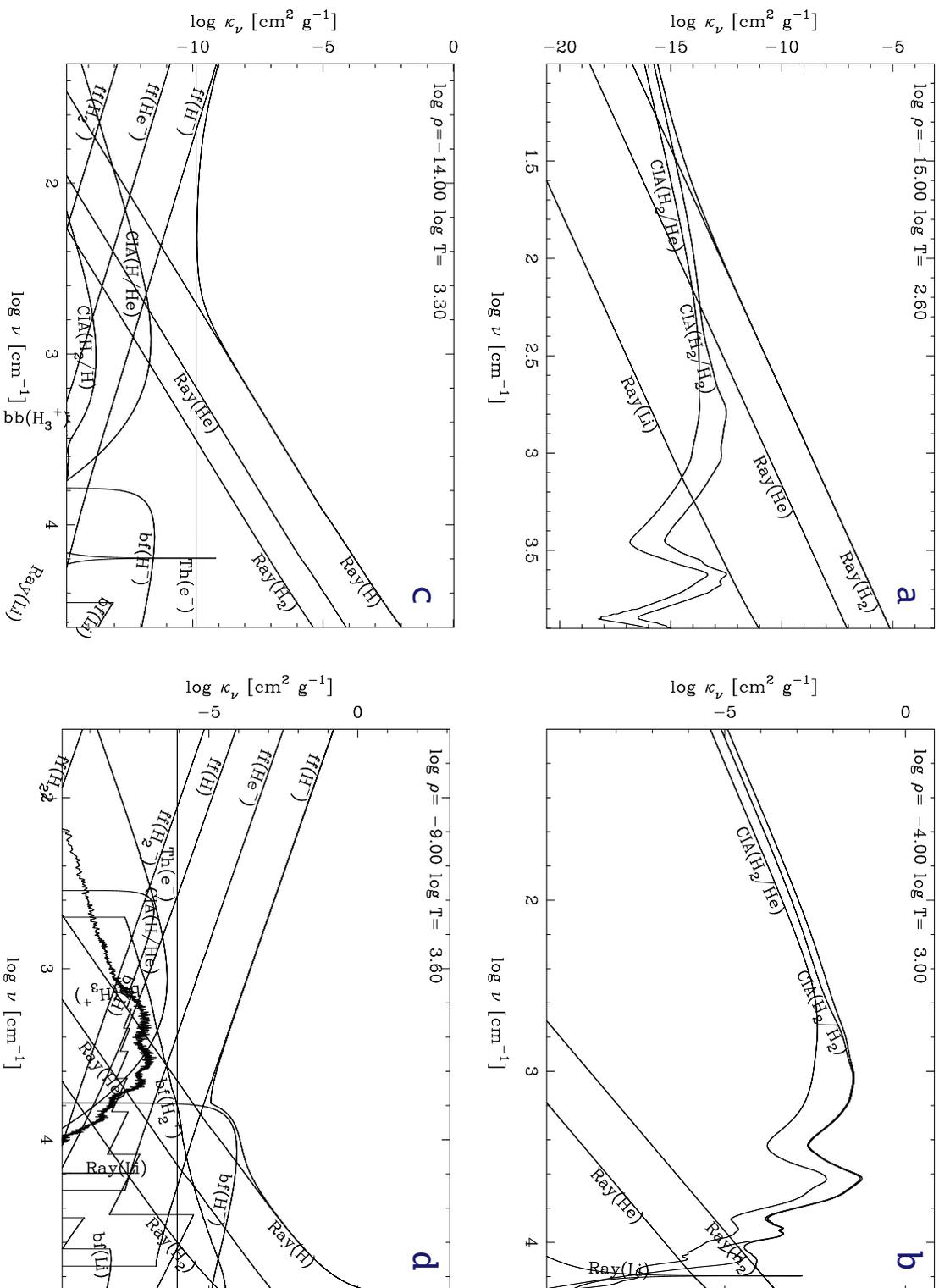


Abbildung 3.5.: Monochromatische Absorptionskoeffizienten $\kappa_a(\nu, \rho, T) + \kappa_s(\nu, \rho, T)$ ohne Linien für verschiedene Dichten und Temperaturen: $(\log \rho, \log T) =$ **(a)** $(-15.0, 2.60)$, **(b)** $(-4.0, 3.00)$, **(c)** $(-14.0, 3.30)$, **(d)** $(-9.0, 3.60)$. Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

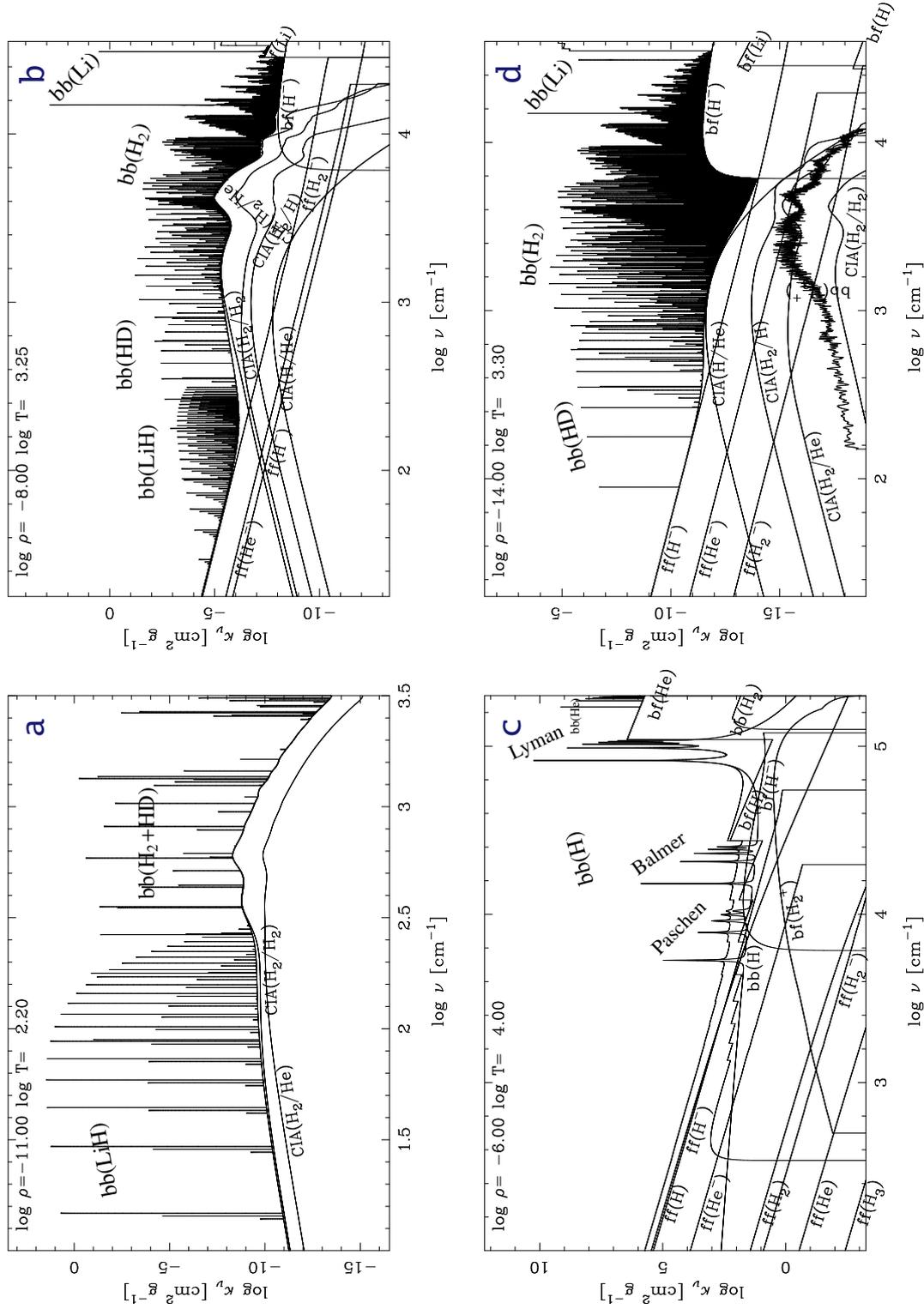


Abbildung 3.6.: Monochromatische Absorptionskoeffizienten $\kappa_\nu(\nu, \rho, T)$: ($\log \rho, \log T$) = (a) (-11.0, 2.20), (b) (-8.0, 3.25), (c) (-6.0, 4.00), (d) (-14.0, 3.30). Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

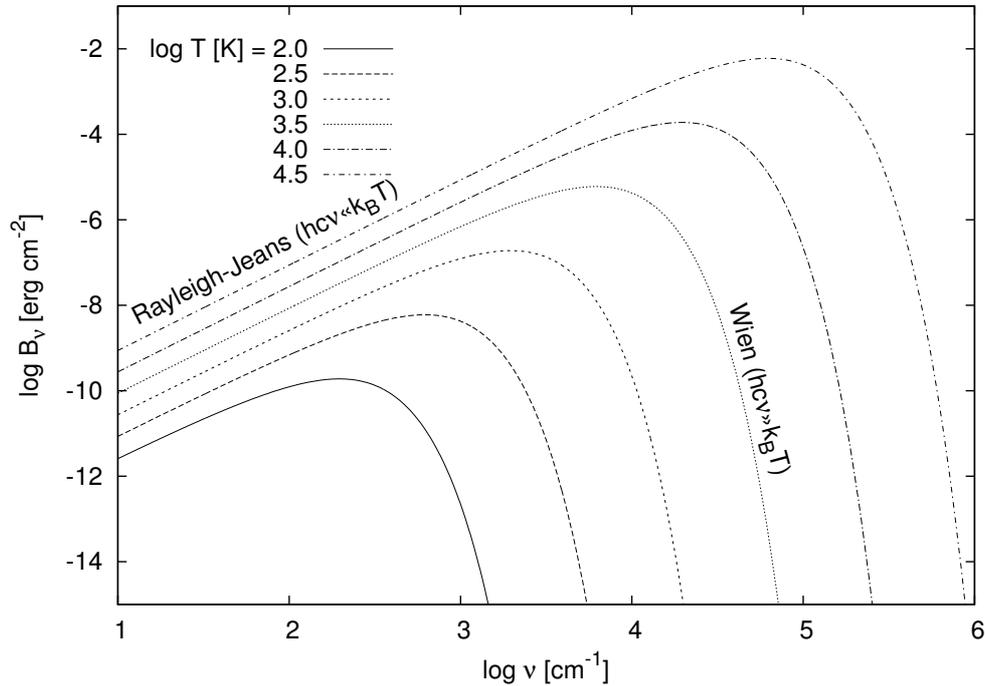


Abbildung 3.7.: Planck Funktion für verschiedenen Temperaturen

während für große Frequenzen sich die Wiensche Näherung

$$B_{\nu \gg 0} = 2h\nu^3 c e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \quad (3.12)$$

ergibt. Das Maximum der Planckfunktion, abhängig von der Frequenz, ergibt sich für $\nu = \nu_{\max}$

$$\nu_{\max}^{-1} T_{\max} = 5.098 \text{ mm K} , \quad (3.13)$$

oder in etwas handlicherer Form

$$\nu_{\max} = 1962 \left(\frac{T_{\max}}{1000 \text{ K}} \right) \text{ cm}^{-1} .$$

Schreibt man die Planckfunktion in Abhängigkeit der Wellenlänge, ergibt sich wegen $B_\nu d\nu = B_\lambda d\lambda$ eine etwas verschiedene Proportionalitätskonstante in (3.13) von 2.8978 mm K.

3.7. Rosseland- und Planckmittel

Aus den monochromatischen Absorptions- und Streukoeffizienten können wir nun zwei frequenz-unabhängige Mittel angeben, die Rosseland- und Planckmittel der Opazität

$$\frac{1}{\kappa_R(\rho, T)} = \frac{3\pi}{4\sigma T^3} \int_0^\infty \frac{1}{\kappa_s + \kappa_a} \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu \quad (3.14)$$

$$\kappa_P(\rho, T) = \frac{1}{\sigma T^4} \int_0^\infty \kappa_a B_\nu d\nu + \sum_i \kappa_{P,L_i} , \quad (3.15)$$

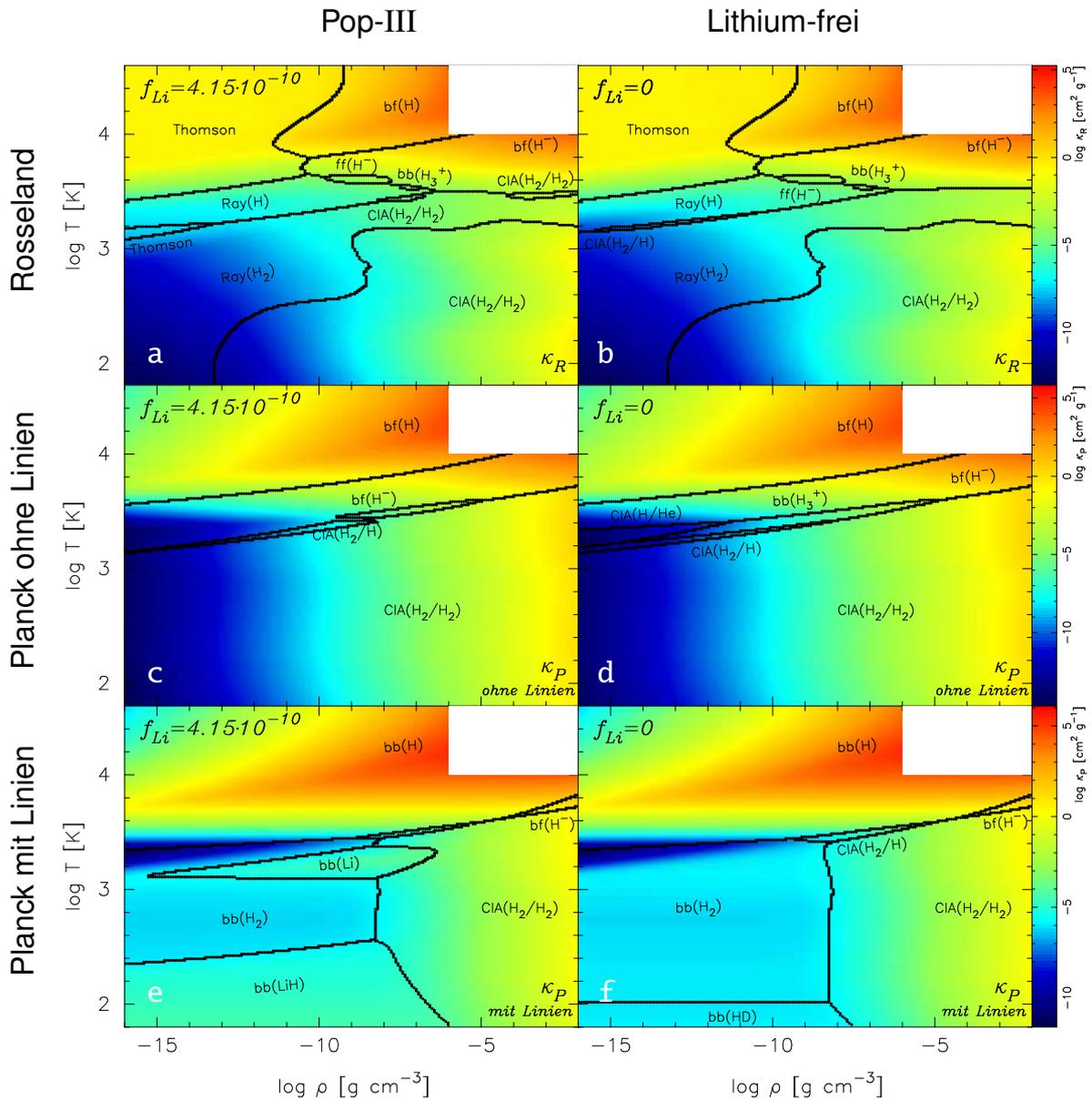


Abbildung 3.8.: Rosseland- und Planckmittel für Pop-III- (links, **a, c, e**) und Lithium-freie Zusammensetzung (rechts, **b,d,f**). (**a+b**) zeigen Rosselandmittel, (**c+d**) Planckmittel ohne Linien, (**e+f**) Planckmittel mit Linien. Der jeweils dominierende Absorptionsmechanismus ist mit eingezeichnet. Die weißen Flächen entsprechen Gebieten, in denen keine Opazität berechnet wurde. Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

wobei die Vorfaktoren der Integrale die Normalisierungsbedingungen

$$\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu = \frac{4\sigma T^3}{3\pi} \quad \int_0^\infty B_\nu d\nu = \sigma T^4$$

darstellen. Diese Mittel werden dann tabelliert (siehe Anhang A) und stehen für eine Benutzung in Strahlungstransportrechnungen zur Verfügung.

Abbildung 3.8 zeigt die Rosseland- und Planckmittel (Planckmittel ohne und mit Moleküllinien) im Vergleich zwischen Pop-III- und Lithium-freier Komposition. In Abbildung 3.9 wird der Unterschied quantifiziert.

3.7.1. Rosselandmittel

Die Rosselandmittel in Abb. 3.8a+b können grob in vier Teile, getrennt durch die Linien $\rho \approx 10^{-9} \text{ g cm}^{-3}$ und $T \approx 3000 \text{ K}$ eingeteilt werden. Für niedrige Dichten dominiert Streuung, während im Bereich hoher Dichte der Übergang von Absorption durch gebunden-frei-Übergängen zu CIA erfolgt.

Im mittleren Temperaturbereich ($\approx 3000 \text{ K}$) findet man einen sehr starken Temperaturgradienten im Rosselandmittel. Dieser wird einerseits hervorgerufen durch den bei niedrigeren Dichten scharfen Übergang von H_2 zu H und e^- , der deutlich wird im Einfluß von Rayleighstreuung an H_2 und H bzw. Thomsonstreuung. Für höhere Dichten wird der Gradient durch den Einfluß von H^- und gebunden-frei-Übergängen von H bewerkstelligt.

Im Vergleich von Pop-III- und Lithium-freier Zusammensetzung sieht man nun bei $1000 - 3000 \text{ K}$ den indirekten Einfluß von Lithium auf die Wasserstoffspezies (vgl. 3.2.2). Bei ho-

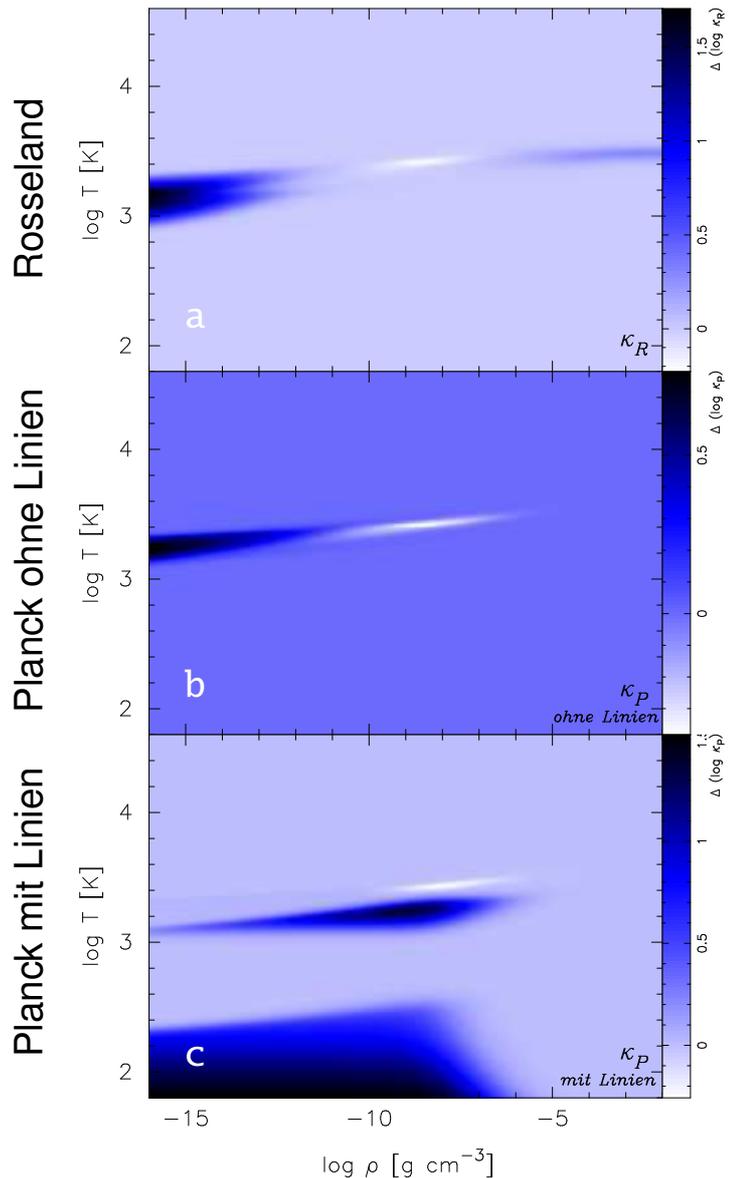


Abbildung 3.9.: Differenz der Pop-III-Opazitäten im Vergleich zur Lithium-freier Komposition: (a) Rosselandmittel, (b) Planckmittel ohne Linien, (c) Planckmittel mit Linien. Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

hen Dichten setzt die Wichtigkeit von H^- schon bei niedrigeren Temperaturen ein, während bei niedrigen Dichten Thomsonstreuung dominiert, noch ehe Rayleighstreuung an atomarem Wasserstoff einsetzt. Ein Blick auf Abb. 3.9a verdeutlicht dies und zeigt zudem noch den negativen Einfluß von Lithium auf das Rosselandmittel durch die Zerstörung von H_3^+ .

3.7.2. Planckmittel ohne Linien

Vernachlässigt man bei der Berechnung der Planckmittel den Einfluß von Linienabsorption, ergeben sich Abb. 3.8c+d. die Differenz aus beiden findet sich in Abb. 3.9b.

Der Einfluß der verschiedenen Absorptionsmechanismen folgt sehr schön einem dreiteiligen Schema, korrespondierend zum molekül-, atom- und ionendominierten Gebiet. Der dominierende Einfluß im moleküldominierten Gebiet ist CIA (hauptsächlich H_2/H_2), im atomar dominierten Gebiet ist es Absorption durch gebunden-frei Übergänge von H^- . Im ionendominierten Gebiet haben schließlich die gebunden-frei-Übergänge von atomarem Wasserstoff den größten Einfluß. Der Einfluß von CIA bzw. das Nicht-Vorhandensein von anderen Absorptionsmechanismen führt dazu, daß die Opazität für niedrige Temperaturen und Dichten unter alle Grenzen fällt (proportional zur Dichte).

An der Grenze von molekularem zu atomarem Gebiet bei niedrigen Dichten befindet sich ein lokales Minimum in Opazität, bewirkt durch die schnelle Dissoziation von H_2 und den verzögert folgenden Aufbau von H^- .

Der Vergleich beider chemischen Zusammensetzungen zeigt Ähnlichkeiten mit dem Rosselandmittel. Jedoch wird die Abweichung bei niedrigen Dichten nun allein durch H^- hervorgerufen, während die Abweichung bei hohen Dichten nun von CIA komplett verdeckt wird. Der Einfluß der H_3^+ -Zerstörung ist auch hier zu sehen. Die Abweichungen sind hier bei weitem nicht so groß wie bei den Rosselandmitteln.

3.7.3. Planckmittel mit Linien

Das Hinzufügen von Linienabsorption verändert die Planckmittel sehr stark: Die Möglichkeit von Linienabsorption erzeugt im Lithium-freien Fall (Abb. 3.8f) nahezu ein Plateau bei niedrigen Temperaturen und Dichten, während bei höheren Dichten nach wie vor der Einfluß der zur Dichte proportionalen CIA zu sehen ist. Bei extrem niedrigen Temperaturen (unter 100 K) findet man den Einfluß von HD bei Lithium-freier Zusammensetzung, da der niedrigst liegende Quadrupolübergang von H_2 (bei 510 K) dann schon zu weit im Wienschen Teil der Planckfunktion liegt und damit weggedämpft wird. Dafür kommt dann HD ins Spiel, dessen niedrigst liegender Dipolübergang bei 128 K liegt. Trotz der geringen Häufigkeit von Deuterium, verglichen mit Wasserstoff, ist hier HD der dominierende Absorber.

Verglichen mit Pop-III-Zusammensetzung, ergeben sich die weitaus interessantesten und größten Unterschiede zum Lithium-freien Fall: Obwohl der Übergang von atomarem Lithium vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand erst bei 6708 Å erfolgt, ist der Einsteinkoeffizient dieses Übergangs so stark, daß er die Absorption durch Quadrupolübergänge von H_2 bis zu einem Faktor von 20 übertrifft (Fig. 3.9c). Jedoch hält dieser Effekt für größere Temperaturen nicht an, da Lithium ionisiert. Unterhalb von ca. 1000 K ist der 6708 Å-Übergang noch zu weit im Wien-Limit der Planckfunktion und wird daher noch weggedämpft. Unterhalb von ca. 300 K setzt der Einfluß von LiH ein, welches ein noch größeres Dipolmoment als HD besitzt und gleichzeitig dessen Grundzustandsübergang bei 15 K liegt. Die Absorption durch LiH ist bis zu 30 mal stärker als die durch H_2 .

Im Hochtemperaturbereich (atomarer und ionendominierter Bereich) ist nun die Absorption durch gebunden-gebunden Übergänge von atomarem Wasserstoff am größten.

3.8. Einfluß von verschiedenen Lithiumanteilen auf die Opazität

Wir haben im vergangenen Abschnitt den Einfluß von Lithium auf die Opazität für Pop-III-Materie gezeigt. Wir haben im wesentlichen folgende Effekte identifiziert:

- frühe Ionisation von Lithium (daraus resultierend Erhöhung von H^- -Häufigkeit)
- Zerstörung von H_3^+ in Anwesenheit von Lithium
- 6708 Å gebunden-gebunden-Übergang von atomarem Lithium
- molekulare Absorption von LiH

Die ersten beiden Mechanismen zeigen sich sowohl im Rosseland- als auch im Planckmittel, während die letzteren beiden nur die Planckmittel mit Linienabsorption beeinflussen.

Wie anfangs (siehe 3.1) beschrieben, ergibt sich für Lithium einerseits nach wie vor eine Diskrepanz zwischen Ergebnissen aus CMB+SBBN und direkten Messungen. Andererseits ist der Lithiumanteil sehr stark vom kosmologischen Parameter abhängig.

Daher haben wir die Abweichung von Lithium-freier Zusammensetzung für verschiedene Lithiumanteile in allen drei Opazitätsberechnungen untersucht (Abb. 3.10). Die positiven Abweichungen ($\Delta \log \kappa > 0$) relativ zur Lithium-freien Zusammensetzung zeigen eine stete Zunahme mit wachsendem Lithiumanteil. Die negativen Abweichungen jedoch erreichen ein Minimum für einen Lithiumanteil $f_{Li} \approx 5 \cdot 10^{-10}$. Für kleinere f_{Li} nimmt der Einfluß der H_3^+ -Zerstörung, welche zur Erniedrigung der Opazität führt, zu, während für größere f_{Li} dieser Effekt durch den gebunden-gebunden-Übergang von atomarem Lithium bei 6708 Å überdeckt wird.

3.9. Vergleich mit anderen primordialen Opazitätsrechnungen

Es existieren bereits mehrere Opazitätsrechnungen für primordiale Materie. Diese sind zum einen beschränkt im Temperatur- und Dichtebereich. Alle bislang veröffentlichten primordialen Opazitäten sind für Temperaturen größer als 1000 K gerechnet. Ziel der vorliegenden Opazitätsrechnungen war es, ein umfassendes Set an Opazitäten zu schaffen, vergleichbar Semenov et al. (2003) im Falle der Pop-I-Zusammensetzung.

Andererseits ergeben sich mit fortschreitendem Verständnis der Absorptionsprozesse immer wieder auch Veränderungen in den Opazitätsmitteln. So fehlte beispielsweise in den Paczynski-Mischungen ($Z=0$, variierende X und Y) der Opazitäten von Cox und Tabor (1976) jegliche molekulare Absorption. Neuere Rechnungen (Stahler et al., 1986, und spätere) berücksichtigen molekulare Absorption (vorwiegend kollisionsinduzierte Absorption, CIA). Die Opazitäten von Stahler et al. (1986) bis Harris et al. (2004) spiegeln die Entwicklung im Verständnis dieser Absorption wider. Mit letzteren Opazitäten schließlich wurde die Wichtigkeit von H_3^+ gezeigt. Schon Lenzuni et al. (1991) konnte zeigen, daß für höhere Dichten und Temperaturen um die 2500 K H_3^+ das häufigste positiv geladene Ion ist (vgl. Abb. 3.2d). Harris et al. (2004) konnten auf die mittlerweile berechneten neuesten Energieniveaus und Einsteinkoeffizienten der diversen (≈ 3 Millionen !) Linien zurückgreifen. Bei allen diesen Rechnungen fehlt jedoch der Niedertemperaturbereich und die Berücksichtigung von Lithium.

Um Gleiches mit Gleichem vergleichen zu können, haben wir für die folgenden Vergleiche immer die entsprechenden Opazitätstabellen für Lithium-freie Zusammensetzung berechnet².

²Positive(negative) Abweichungen bedeuten, daß die Opazität aus der Literatur größer(kleiner) ist als unsere Opazität.

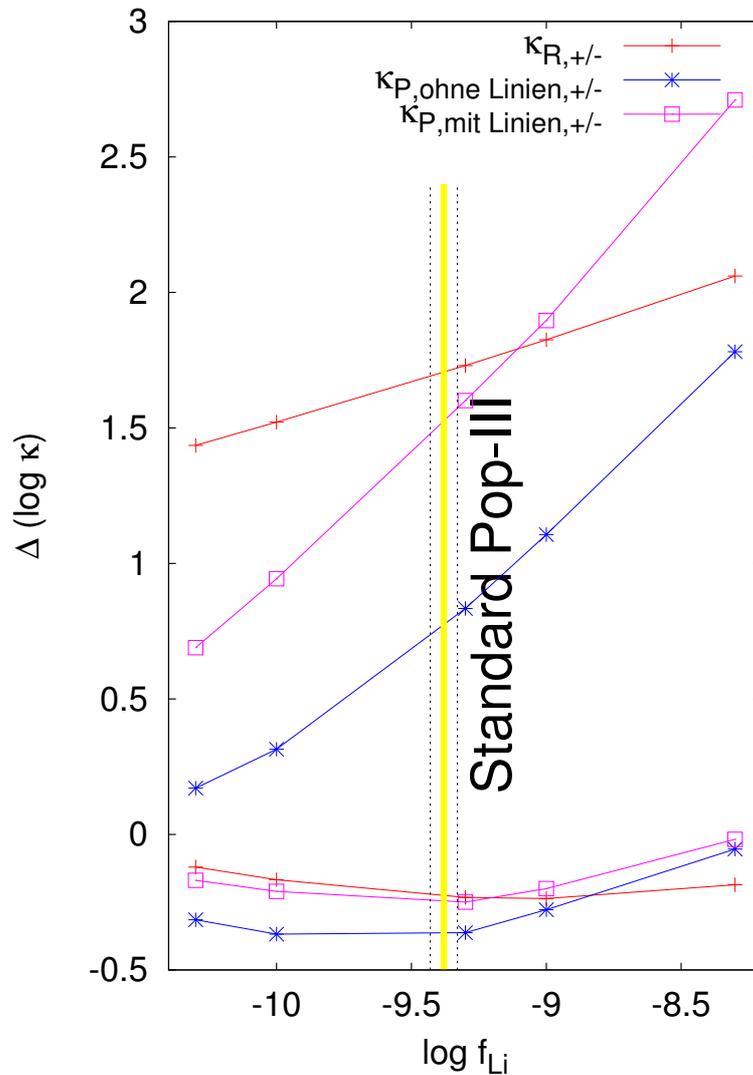


Abbildung 3.10.: Maximale Abweichung von Lithium-freier Zusammensetzung für verschiedene Lithiumbruchteile. $\Delta(\log \kappa) > 0$ bezeichnet positive Abweichung relativ zur Lithium-freien Zusammensetzung, $\Delta(\log \kappa) < 0$ bezeichnet eine negative Abweichung. Die Pop-III-Häufigkeit von Lithium nach Coc et al. (2004) ist mit angegeben. Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

Längs einer Linie, gegeben durch $(\log \rho, \log T) = (-15, 3.2) \rightarrow (-2, 3.8)$, ergeben sich in allen Opazitätsplots größere Abweichungen. Diese wird durch den Übergang von vorwiegend in molekularer Form zu in atomarer Form vorliegender Materie hervorgerufen, welcher mit einem massiven Anstieg der Opazität einhergeht. Dieser Anstieg, der einem relativ flachen Verlauf für niedrigere Temperaturen folgt, wird durch bikubische Interpolation nur bedingt gut wiedergegeben. Ein weiterer Grund für diese Abweichungen liegt in der berücksichtigten H_3^+ Absorption (3.3.2) und der neu berechneten Gleichgewichtskonstante für $\text{H}_2^+ + \text{H}_2 \leftrightarrow \text{H}_3^+ + \text{H}$ (vgl. 3.2.1).

3.9.1. Stahler et al. (1986)

Der Vergleich des Rosselandmittels der vorliegenden Opazitäten mit den Rechnungen von Stahler et al. (1986) (siehe Abb. 3.12a) zeigt eine mehr oder weniger gute Übereinstimmung ($\pm 50\%$). Die negative Abweichung für hohe Temperaturen kommt durch den wachsenden Einfluß von durch Starkereffekt verbreiterten Wasserstofflinien zustande, die Abweichungen bei niedrigeren Temperaturen rühren von der Verwendung älterer CIA Daten (Linsky, 1969; Patch, 1971) her.

3.9.2. Lenzuni et al. (1991)

Die Abweichung durch die älteren CIA Daten sind hier im Rosselandmittel (Abb. 3.12b) deutlich geringer, da Lenzuni et al. (1991) schon die teilweise verfügbaren ab-initio-Daten verwendete. Für die höheren Temperaturen gilt wieder dasselbe wie für Stahler et al. (1986).

Im Planckmittel (Abb. 3.12b) treten größere Abweichungen für Temperaturen unterhalb 3000 K auf. Diese werden durch die Berücksichtigung der Absorption von H_2 -Quadrupolübergängen verursacht. Die Abweichungen für höhere Temperaturen und geringe Dichten rühren von der dort stark hervortretenden Linienabsorption von atomarem Wasserstoff her.

3.9.3. Alexander und Ferguson (1994) & Iglesias und Rogers (1996)

Stellvertretend für die großen Opazitätsrechnungen durch das OP-Projekt (Seaton, 1987) und OPAL (Rogers und Iglesias, 1992) für viele Parameterkombinationen X, Y und Z haben wir mit den Z=0-Niedertemperaturopazitäten von Alexander und Ferguson (1994) ($\log T < 4.0$) und darüber ($\log T > 4.0$) mit Iglesias und Rogers (1996) verglichen. In Abb. 3.12d ist im Rosselandmittel die viel bessere Übereinstimmung bei hohen Temperaturen (Stark-Effekt) erkennbar. Für niedrigere Temperaturen finden sich Abweichungen am Übergang von atomarer zu molekularer Materie (s.o.). Für kleine Temperaturen und kleine Dichten scheint eine Opazitätsquelle unbekannter Herkunft zu existieren. Möglicherweise läßt sich

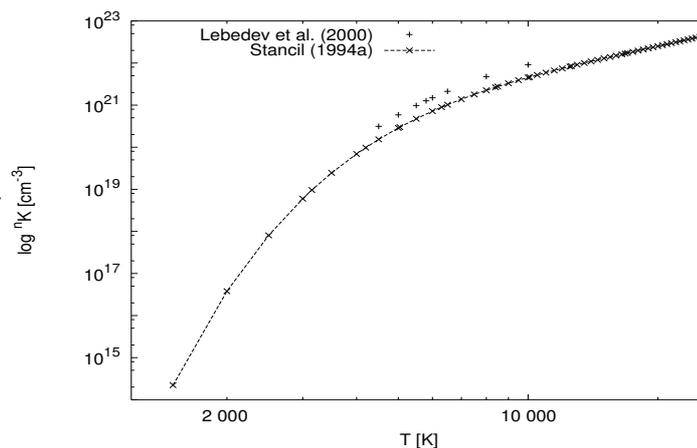


Abbildung 3.11.: Vergleich der Gleichgewichtskonstanten von Stancil (1994a) und Lebedev et al. (2000) für das Gleichgewicht $\text{H}_2^+ \leftrightarrow \text{H}^+ + \text{H}$.

diese aber auf Interpolationsfehler zurückführen. Für das Planckmittel (Abb. 3.12e) läßt sich die Aussage für Lenzuni et al. (1991) wiederholen.

3.9.4. Harris et al. (2004)

Nicht überraschend ist die mit Abstand beste Übereinstimmung mit den neuesten verfügbaren Opazitäten. Im CIA dominierten Bereich sind die Opazitäten praktisch identisch (Abweichungen kleiner 5%). Jedoch ergibt sich eine merkwürdige, in keinem anderen Vergleich auftauchende Abweichung bei hohen Temperaturen und hohen Dichten. Diese läßt sich einerseits auf zwei verschiedene Methoden zur Berechnung der H_3^+ -Häufigkeit bei Harris et al. (2004) zurückführen, die nicht 100% kompatibel sind. Andererseits könnte es sich auch um den Einfluß der unterschiedlichen Quellen für H_2^+ handeln. Allein die bei Harris et al. (2004) verwendeten Daten für die Gleichgewichtskonstante für $H_2^+ \leftrightarrow H^+ + H$ (Lebedev et al., 2000) weicht schon um bis zu einem Faktor 3 von Stancil (1994a) ab (vgl. Fig. 3.11). Dies ergibt eine um diesen Faktor erhöhte H_2^+ -Häufigkeit, welche mittels $ff(H_2^+)$ und $bf(H_2^+)$ die Opazität beeinflusst.

3.10. Chemisches Gleichgewicht

Wie eingangs (siehe Abschnitt 3.1) in diesem Kapitel schon erwähnt, besteht primordiale Materie vorwiegend aus Wasserstoff und Helium mit kleineren Beimengungen von Deuterium und Lithium.

Die hier berechnete Opazität für Pop-III-Materie hängt bei Temperaturen unterhalb von 1000 K maßgeblich von H_2 , HD und LiH ab.

Wir wissen jedoch, daß H_2 -Bildung eine oberflächenkatalytische Reaktion ist, die auf den Oberflächen von Eis- und Staubkörnern stattfindet. Staub und Eis können sich nur aus schwereren Elementen bilden, die sich erst durch Kernfusion entstehen. Daher standen diese erst ab der zweiten Sterngeneration zur Verfügung. Aus diesem Grund ist die H_2 -Bildung im frühen Universum stark unterdrückt (siehe Glover, 2003, für einen interessanten Vergleich). Sie mußte allein in der Gasphase stattfinden. Gute Referenzen über die Chemie im frühen Universum sind z.B. Galli und Palla (1998); Seager et al. (1999, 2000); Stancil et al. (1996, 1998). Einen Review geben Lepp et al. (2002).

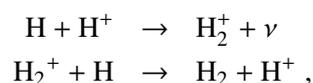
Im Folgenden soll überprüft werden, für welche Dichten und Temperaturen chemisches Gleichgewicht innerhalb einer Frei-fall-Zeitskala

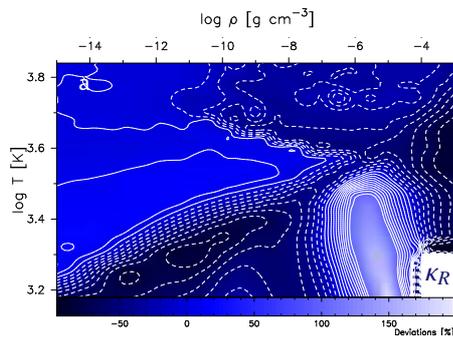
$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} = 425 \text{ yr} \cdot \left(\frac{\rho}{10^{-14} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.16)$$

erreicht werden kann.

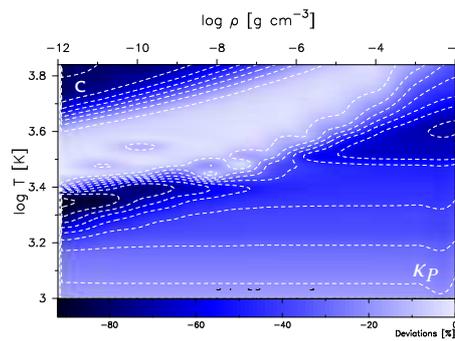
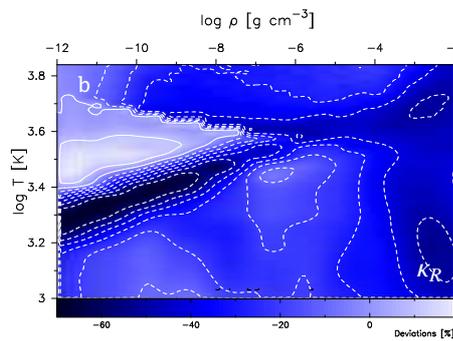
3.10.1. H_2

Die Bildung von H_2 in Abwesenheit von Staub und Eis ist stark unterdrückt. Sie kann nur in der Gasphase stattfinden. Bei hohen Temperaturen bildet sich H_2 über H_2^+ (Saslaw und Zipoy, 1967)

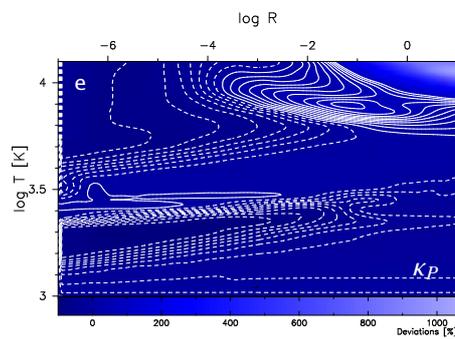
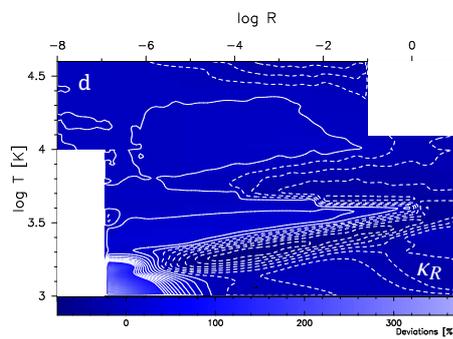




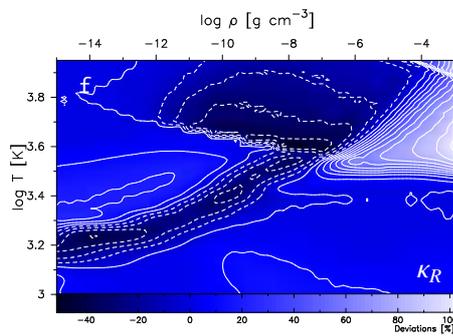
Stahler et al. (1986)



Lenzuni et al. (1991)



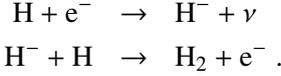
Alexander & Ferguson (1994) and Iglesias & Rogers (1996)



Harris et al. (2004)

Abbildung 3.12.: Vergleich der Opazitäten mit existierenden Rechnungen für Lithium-freie Zusammensetzung. Rosselandmittel links (a, b, d, f), Planckmittel rechts (c, e). Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

während bei niedrigeren Temperaturen die H₂-Bildung über H⁻ erfolgt (Peebles und Dicke, 1968; McDowell, 1961; Pagel, 1959)



Für hohe Dichten ($n > 10^8 \text{ cm}^{-3}$) wird die Bildung von H₂ durch Mehrkörperstöße effizienter als die Bildung via H₂⁺/H⁻ (Palla et al., 1983).



Für die Dichten, die im Kontext dieser Arbeit von Belang sind ($\rho > 10^{-16} \text{ g cm}^{-3}$), sind die Mehrkörperstöße der dominierende Teil in der H₂-Bildung. Mit Rate k_4 aus Palla et al. (1983) folgt

$$\tau_{\text{H}_2} = 2420 \text{ yr} \cdot \left(\frac{T}{300 \text{ K}} \right) \left(\frac{\rho}{10^{-14} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-2} . \quad (3.19)$$

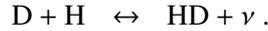
Damit unterschätzen wir eventuell die H₂ Bildungszeitskala. Jedoch verkürzt sich mit steigendem H₂ Anteil die Zeitskala weiter, da eine weitere 3-Körperreaktion (k_6 aus Palla et al., 1983, (3.18)) ebenfalls H₂ bildet.

Setzt man diese Zeit mit der Frei-Fall-Zeit (Gl. 3.16) gleich, folgt eine kritische Dichte

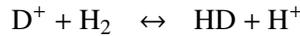
$$\rho_{\text{crit,H}_2} = 3.2 \cdot 10^{-14} \text{ g cm}^{-3} \cdot \left(\frac{T}{300 \text{ K}} \right)^{\frac{2}{3}} .$$

3.10.2. HD

HD kann im Gegensatz zu H₂ direkt durch radiative Assoziation gebildet werden (Stancil und Dalgarno, 1997b) gemäß



Jedoch finden sowohl Galli und Palla (2002) als auch Lepp et al. (2002), daß die Bildung für HD durch radiative Assoziation nur kleine Beiträge zur Gesamtbildungsrate ergibt. Bei Galli und Palla (2002) wird HD bei niedrigen Dichten vorwiegend über Reaktionen von Ionen mit neutralen Teilchen



und bei höheren Dichten über die Neutral-neutral-Reaktionen



gebildet.

Für die Abschätzung der HD-Bildungszeitskala benutzen wir Reaktionsrate (1) aus Galli und Palla (2002) und bekommen bei $T = 300 \text{ K}$ für die Neutral-neutral Reaktion $\text{D} + \text{H}_2 \rightarrow \text{HD} + \text{H}$

$$\tau_{\text{HD}} = 1.97 \cdot 10^3 \text{ yr} \cdot \left(\frac{\rho}{10^{-14} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{f_{\text{H}_2}}{10^{-5}} \right)^{-1} .$$

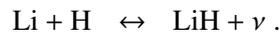
Analog folgt eine kritische Dichte

$$\rho_{\text{crit,HD}} = 2.1 \cdot 10^{-13} \text{ g cm}^{-3} \cdot \left(\frac{f_{\text{H}_2}}{10^{-5}} \right)^{-2} .$$

Da unsere Pop-III-Opazität aber nur maßgeblich von der H₂- und LiH-Häufigkeit abhängt, ist die genaue Bildungszeitskala von HD hier unerheblich.

3.10.3. LiH

LiH wird durch radiative Assoziation gebildet (Dalgarno et al., 1996; Stancil und Dalgarno, 1997a)



Für einen detaillierten Überblick über die Lithium-Chemie siehe Stancil et al. (1996). Wir benutzen Rate (20) daraus für die radiative Assoziation und erhalten

$$\tau_{\text{LiH}} = 140 \text{ yr} \cdot \left(\frac{\rho}{10^{-14} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{-1} \left(\frac{T}{300 \text{ K}} \right)^{-0.28} ,$$

und wiederum die kritische Dichte

$$\rho_{\text{crit,LiH}} = 1.1 \cdot 10^{-15} \text{ g cm}^{-3} \cdot \left(\frac{T}{300 \text{ K}} \right)^{-0.56} .$$

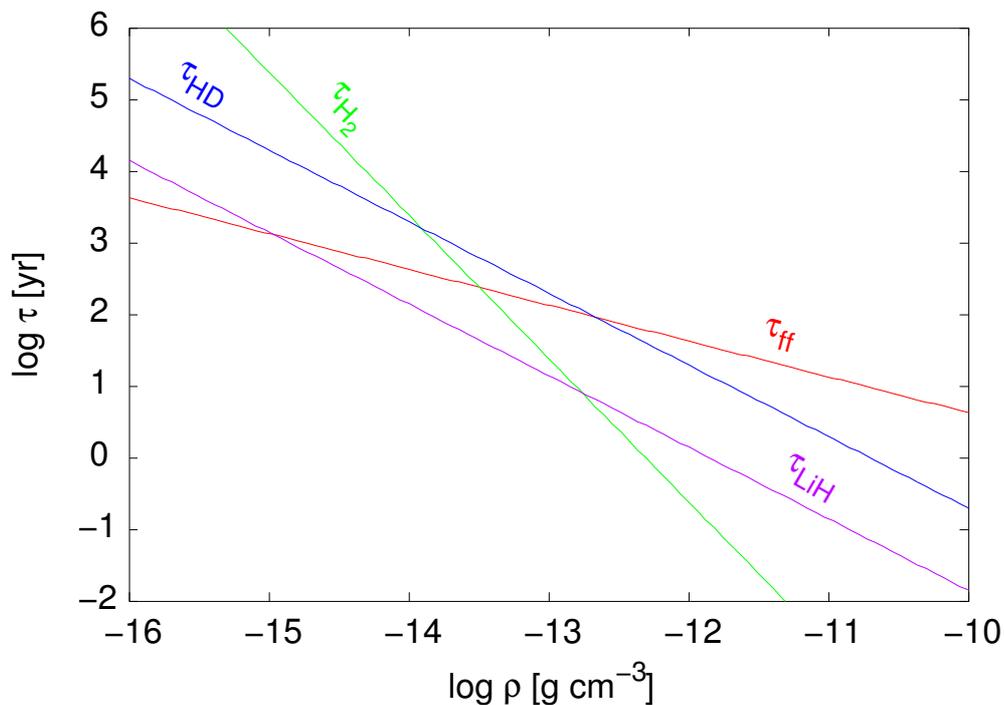


Abbildung 3.13.: Molekülbildungszeitskala bei $T=300 \text{ K}$. Abbildung aus Mayer und Duschl (2004a).

Allerdings könnte sich diese Zeitskala verkürzen und damit sich die kritische Dichte weiter verringern, wenn 3-Körper-Reaktionsraten zur Bildung von LiH verfügbar werden (siehe Diskussion in Stancil et al., 1996).

3.10.4. Diskussion

Wir haben berechnet, daß die Molekülbildung von H_2 und LiH für Dichten größer als $3.2 \cdot 10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$ innerhalb einer Frei-Fall-Zeitskala gravitativ instabiler, primordialer Molekülwolken stattfindet. Die

Bildung von HD hängt wesentlich vom H_2 -Anteil ab. Jedoch ist der Einfluß von HD auf die Pop-III-Opazität gering. Daher ist es für die Argumentation hier unerheblich, ob HD schon voll ausgebildet ist.

Für die atomaren Spezies zeigen die o.g. Rechnungen zur Chemie im frühen Universum übereinstimmend, daß Wasserstoff bei $z \approx 1200$, Helium bei $z \approx 2500$, Deuterium bei $z \approx 1200$ und Lithium bei $z \leq 100$ rekombiniert — z.B. Werte aus Lepp et al. (2002) gemäß Modell III von Stancil et al. (1996). Für Rotverschiebungen $z = 17 \pm 5$, für die man in WMAP Daten Reionisation sieht (Spergel et al., 2003), welche mit Pop-III-Sternentwicklung assoziiert wird, sollten damit alle beteiligten Spezies anfänglich vollständig rekombiniert sein.

Abhängig von Dichte und Temperatur sollten damit die Spezies der Elemente für Dichten größer als $3.2 \cdot 10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$ im chemischen Gleichgewicht sein. Wir fassen die Ergebnisse hinsichtlich der Molekülbildungszeitskala in Abb. 3.13 zusammen.

3.11. Implikationen für die Kühlung primordialer Materie

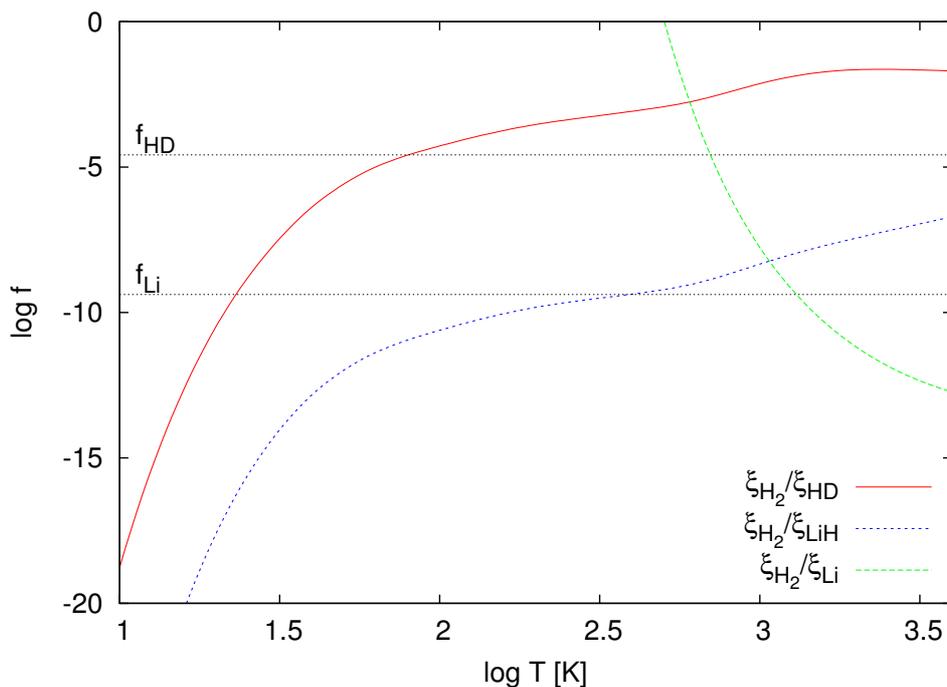


Abbildung 3.14.: Verhältnisse ξ_B/ξ_A von H_2 relativ zu HD, LiH und Li. Die waagrechten Linien entsprechen dem in Pop-III-Materie vorhandenen Bruchteil von Lithium- und Deuteriumatomen.

In Gleichung 3.7 wurde der integrierte Absorptionskoeffizient hergeleitet. Wir können diese Gleichung formal schreiben als

$$\kappa_{P,L}(\rho, T) = \frac{n}{\rho} \xi(T),$$

wo wir sämtliche Temperaturabhängigkeiten mit Hilfe der Funktion $\xi(T)$ berücksichtigt haben.

Für zwei Spezies A und B können wir bei gegebener Dichte das Verhältnis bilden und bekommen

$$\frac{\kappa_{P,L,A}(\rho, T)}{\kappa_{P,L,B}(\rho, T)} = \frac{n_A \xi_A(T)}{n_B \xi_B(T)}.$$

Da wir wissen, daß die LTE-Kühlfunktion proportional zum Planckmittel multipliziert mit σT^4 ist (cf. Ripamonti und Abel, 2004), kann aus obigem Verhältnis eine Bedingung für n_A/n_B abgeleitet werden, ab der beispielsweise Spezies A die Kühlung dominiert. Dann muß

$$\frac{\kappa_{P,L,A}(\rho, T)}{\kappa_{P,L,B}(\rho, T)} > 1$$

sein, und wir erhalten

$$\frac{n_A}{n_B} > \frac{\xi_B(T)}{\xi_A(T)}.$$

In Abb. 3.14 haben wir das Verhältnis $\xi_B(T)/\xi_A(T)$ für $B=H_2$ und $A=\{HD, LiH, Li\}$ inklusive dem in Pop-III-Materie üblichen Deuterium- und Lithiumanteil geplottet. Wir finden, daß für Temperaturen $T < T_{\text{crit,HD}} \approx 100$ K HD-Kühlung überwiegt, wenn auch nur das primordiale Teilchenzahlverhältnis von Deuterium zu Wasserstoff für $n_{\text{HD}}/n_{\text{H}_2}$ erreicht wird. Für LiH und Li ergibt sich dementsprechend $T < T_{\text{crit,LiH}} \approx 400$ K sowie $T > T_{\text{crit,Li}} \approx 1250$ K.

Diese Befunde könnten eine deutliche Veränderung in den Ergebnissen bisheriger primordialer Kollapsrechnungen bewirken, da diese Beiträge von Lithium nicht berücksichtigt haben. In Nicht-Gleichgewichtsschemie wird anfänglich das Verhältnis n_{H_2}/n_{Li} noch viel größer sein, da Lithium vorwiegend neutral ist und H_2 noch relativ zum Gleichgewichtswert unterhäufig ist (typisch sind Bruchteile von $10^{-4} \dots 10^{-3}$, vgl. Palla et al., 1983). Dadurch kann sich der Einfluß von atomarem Lithium noch ein gutes Stück zu niedrigeren Temperaturen verschieben. Das Ergebnis von LiH hängt einmal mehr wieder von den zu erwartenden 3-Körper-Reaktionen (siehe Abschnitt 3.10.3) ab. Schaffen es diese, LiH schneller als H_2 zu produzieren, so sollten sich auch bei niedrigeren Temperaturen große Änderungen im Kühlverhalten ergeben.

4. Modelle

In diesem Kapitel finden nun die in Kapitel 3 berechneten Opazitäten ihre Anwendung auf das in Kapitel 2 vorgestellte Akkretionsscheibenmodell. Zunächst wird die Lösungsmethode skizziert, um das Gleichungssystem des Modells zu lösen (Abschnitt 4.1). Danach wird in Abschnitt 4.2 die Struktur beschrieben. In Abschnitt 4.3 werden die Lösungen auf thermische, thermisch-viskose und gravitative Instabilitäten untersucht. Mittels der Scheiben-Zeitskalen können in Abschnitt 4.4 weitere mögliche Instabilitäten und Inkonsistenzen gefunden werden. Besonderer Wert wird hier auf die Molekülbildungszeitskala gelegt.

In Abschnitt 4.5 schließlich wird der Einfluß verschiedener Lithiumbruchteile in primordialer Materie untersucht.

4.1. Lösungsmethode

Wir können das Gleichungssystem in Tabelle 2.1 in 2 Gleichungen, nur abhängig von Dichte und Temperatur, umformen. Darin tritt als "radiale Koordinate" nur $\Omega_K^2 = \frac{GM}{r^3}$ auf.

$$f(\rho, T) = G \left(\frac{M}{4\rho r^3} + \pi \right) \left(\frac{\dot{M}}{3\pi v_t} \right)^2 - \left[\rho \frac{k_B T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma T^4}{3c\tau_{\text{eff}}} \left(\frac{\kappa_R \dot{M}}{6\pi v_t} + \frac{4}{3} \right) \right] \quad (4.1)$$

$$g(\rho, T) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM\dot{M}}{r^3} - \frac{4\sigma}{3\tau_{\text{eff}}} T^4. \quad (4.2)$$

4.1.1. Generalisierte Koordinate q

Wir definieren daher

$$q := \sqrt[3]{\frac{r^3}{M}} = 1 \text{ AU } M_\odot^{-1/3} \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right) \left(\frac{M}{1 M_\odot} \right)^{-1/3}$$

als eine generalisierte Koordinate und können damit Dichte, Temperatur und Flächendichte (siehe unten) sowie alle davon abgeleiteten Größen unabhängig von der Zentralmasse angeben. Ein radialer Abstand von $q = 1 \text{ AU } M_\odot^{-1/3}$ entspricht beispielsweise $r = 1 \text{ AU}$ bei einem Zentralobjekt von 1 Sonnenmasse sowie $r = 10 \text{ AU}$ bei einem von 1000 Sonnenmassen. Um aus einer Scheibenlösung die Lösung für das 10^3 fache der Zentralmasse zu bestimmen, muß diese einfach um eine Größenordnung nach außen verschoben. Um aus h/q h/r zu bestimmen, muß durch $(M/M_\odot)^{1/3}$ dividiert werden. Daher verschiebt sich für das 10^3 fache der Zentralmasse die h/r um eine Dekade in radialer Richtung nach außen, das Verhältnis h/r verringert sich hierbei um eine Größenordnung. Ähnliches gilt für die viskose Zeitskala (2.34): Für einen gegebenen Abstand q skaliert sie mit $(M/M_\odot)^{2/3}$, d.h. bei einer gegebenen Akkretionsrate folgt für die 10^3 fache Zentralmasse, daß der radiale Abstand r um eine Dekade nach außen wandert und die viskose Zeitskala um einen Faktor 10^2 zunimmt.

Durch die beiden Gleichungen (4.1) und (4.2) sind an einem bestimmten Abstand q Lösungen $(\rho, T)_i$ definiert.

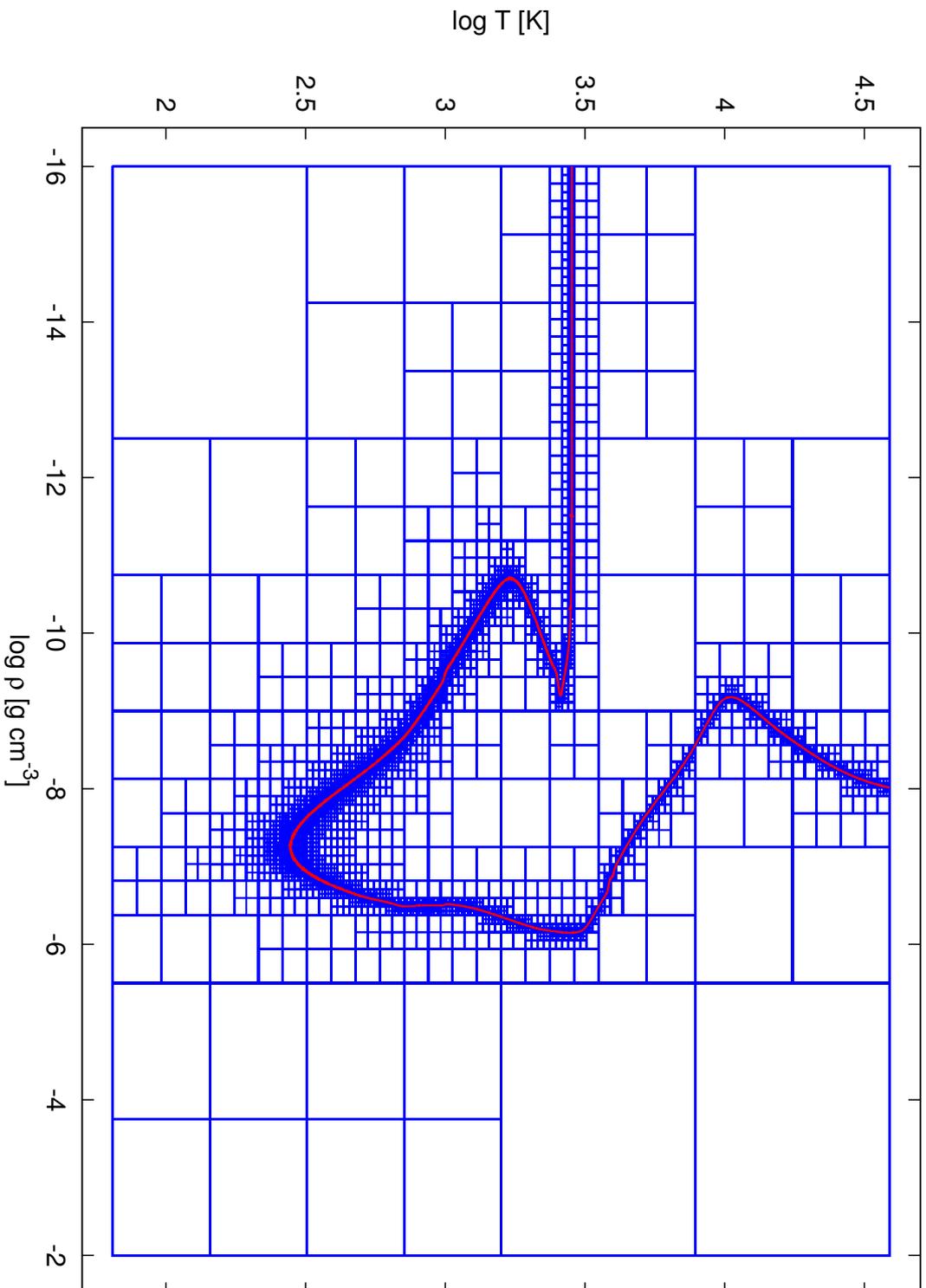


Abbildung 4.1.: 2D Intervallschmelungsverfahren am Beispiel einer stationären Pop-III-Akkretionsscheibe mit einer Akkretionsrate von $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und $\alpha = 0.01$.

Jedoch tritt die effektive optische Tiefe (2.15) und die Viskosität (2.24) auf. Die in den Bestimmungsgleichungen auftretende Flächendichte Σ koppelt mittels (2.22) an die Viskosität. Somit ergibt sich noch eine implizite Gleichung für die Viskosität. Diese muß für jedes (ρ, T) gelöst werden. Daraus kann dann die effektive optische Tiefe bestimmt werden.

4.1.2. Bestimmung der Viskosität

Ausgehend von der Viskosität (2.24)

$$\begin{aligned} \nu_t &= \alpha \frac{c_s^2}{\Omega} \\ &= \frac{\alpha}{\Omega} \left[\frac{kT}{\mu m_p} + \frac{4\sigma T^4}{3c\rho\tau_{\text{eff}}(\nu_t)} \left(\frac{\kappa_R \dot{M}}{6\pi\nu_t} + \frac{4}{3} \right) \right] \end{aligned}$$

folgt unter Benutzung von 2.22

$$\begin{aligned} \tau_{\text{eff}} &= \frac{\kappa_R \dot{M}}{6\pi\nu_t} + \frac{4}{3} + \frac{4\pi\nu_t}{\kappa_p \dot{M}} \\ &= \frac{T_1 + T_2\nu_t + T_3\nu_t^2}{\nu_t}, \end{aligned}$$

mit

$$T_1 = \frac{\kappa_R \dot{M}}{6\pi}, \quad T_2 = \frac{4}{3} \quad \text{und} \quad T_3 = \frac{4\pi}{\kappa_p \dot{M}}.$$

Definiert man

$$C_g = \frac{kT}{\mu m_p}, \quad C_r = \frac{4\sigma T^4}{3c\rho} \quad \text{sowie} \quad C_0 = \frac{\alpha}{\Omega},$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \nu_t &= C_0 \left[C_g + C_g \frac{T_1 + T_2\nu_t}{T_1 + T_2\nu_t + T_3\nu_t^2} \right] \\ \Leftrightarrow 0 &= T_3\nu_t^3 + (T_2 - C_0 C_g T_3)\nu_t^2 + (T_1 - C_0 T_2 (C_g + C_r))\nu_t - C_0 T_1 (C_g + C_r). \quad (4.3) \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann nun für gegebene Temperatur und Dichte gelöst werden.

4.1.3. 2D-Intervallschachtelungsverfahren

Um die Gleichungen (4.1) und (4.2) lösen zu können, wäre ein Newton-Verfahren numerisch stabil und einfach zu implementieren. Jedoch sind wir in dieser Arbeit an physikalischen Instabilitäten interessiert (vgl. Abschnitt 2.9), die sich unter Umständen auf die Numerik der Lösungsmethode übertragen können. Ein Newtonverfahren (eine Art von Fixpunktiteration) zur Lösung von (4.1) und (4.2) würde das Finden von beispielsweise thermisch instabilen Lösungen verhindern (siehe Diskussion in 2.9).

Daher verwenden wir ein zweidimensionales Intervallschachtelungsverfahren in (ρ, T) , welches alle Lösungen findet, ob physikalisch stabil oder nicht. Weitere Untersuchungen können dann zeigen, welche Bereiche im physikalischen Sinne stabil sind.

In Abbildung 4.1 zeigen wir das Prinzip dieser Methode:

- ① Die Lösung soll an einem bestimmten Radius r bestimmt werden.
- ② Definiere ein Anfangsrechteck in der (ρ, T) -Ebene.
- ③ Unterteilung in 2×2 Unterrechtecke.
- ④ Überprüfe, ob mindestens ein Vorzeichenwechsel von f und g entlang des Randes eines dieser 4 Rechtecke existiert, dabei simultane Lösung von (4.3) mittels Newtonverfahren.
 - a) Wenn ja, dann zu ③ mit diesem Unterrechteck.
 - b) Wenn nicht, dann
- ⑤ Iterationsende.

4.2. Allgemeines

Die Abbildungen 4.2, 4.3, 4.4 und 4.5 zeigen Scheibenmodelle für verschiedene Akkretionsraten. Wir wollen im Folgenden grundlegende Eigenschaften im Vergleich zwischen Pop-III-Opazität mit und ohne Linienbeiträge sowie Pop-I-Opazität diskutieren.

4.2.1. Scheibenmodelle für hohe Temperaturen

Für hohe Temperaturen ($T > 10^4$ K) sind die Scheibenmodelle für gleiche Akkretionsrate nahezu unabhängig von der chemischen Zusammensetzung. In diesem Temperaturbereich sind vorwiegend Wasserstoff und Helium die dominierenden Absorptionsquellen. Für Pop-I-Zusammensetzung ergibt sich eine zusätzlich Absorption durch schwerere Elemente. Sie beeinflusst jedoch die Scheibenlösung nur marginal (vgl. Abb. 4.4a-c).

4.2.2. Isotherme äußere Scheibe

Aus Abb. 4.2, 4.3 und 4.4a+c ist ersichtlich, daß Pop-III-Scheiben einen nahezu radial isothermen, optisch dünnen Bereich haben.

Ersetzt man in der Energiegleichung (4.2) τ_{eff} durch $\frac{2}{3\tau_{\text{P}}}$ und approximiert die Plancksche optische Tiefe durch $\tau_{\text{P}} = \frac{1}{2}\Sigma\kappa_{\text{P},0}\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{A_{\text{P}}}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{B_{\text{P}}}$, so erhält man

$$T = T_0 \left(\frac{9\alpha k_{\text{B}}}{8\sigma T_0^3 \kappa_{\text{P},0} \mu m_{\text{p}}} \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-A_{\text{P}}} \right)^{\frac{1}{B_{\text{P}}+3}}. \quad (4.4)$$

Für alle Absorptionsmechanismen ist $0 \leq A_{\text{P}} \leq 1$. Die Temperaturabhängigkeit der Opazität B_{P} kann jedoch deutlich verschieden sein. Nach Bell und Lin (1994) überstreicht die Temperaturabhängigkeit der Rosselandmittel für Pop-I-Zusammensetzung den Bereich $-24 \leq B_{\text{R}} \leq 10$.

Im Bereich der Isothermie der äußeren Scheibe zeigt sich schon aus Abb. 4.3a+b, daß κ_{P} einen sehr großen, positiven Temperaturgradienten aufweist. Vernachlässigen wir die Dichteabhängigkeit ($A_{\text{P}} = 0$), so können wir die Planckopazität approximieren durch

$$\kappa_{\text{P}} = \kappa_{\text{P},0} \left(\frac{T}{3000 \text{ K}} \right)^{B_{\text{P}}},$$

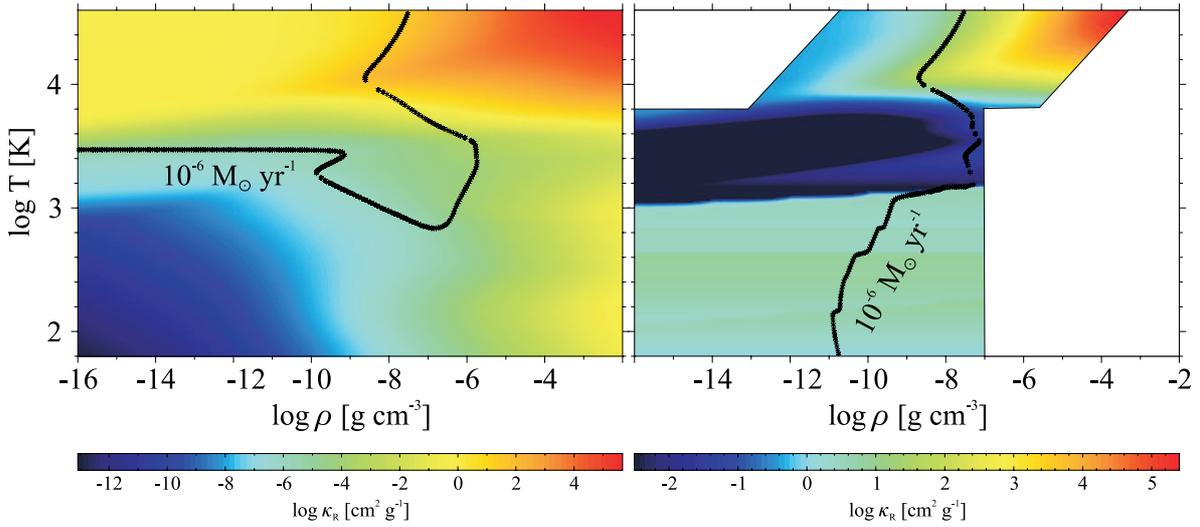


Abbildung 4.2.: Akkretionsscheibenmodelle für Pop-III- (links, Mayer und Duschl, 2004a, ohne Linien) und Pop-I-Opazität (rechts, Semenov et al., 2003) für eine Akkretionsrate von $10^{-6} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ und $\alpha = 0.01$. Abbildung aus Mayer und Duschl (2004b).

mit $\kappa_{P,0} = 10^{-8.4} \text{ g cm}^{-2}$ und $B_P = 22$. Durch die große Temperaturabhängigkeit B_P wird der Term in der Klammer in (4.4) nahe 1 und wir erhalten

$$T = 3440 \text{ K} \cdot \left(\left(\frac{\alpha}{0.01} \right) \left(\frac{M}{1 M_{\odot}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{1 \text{ AU}} \right)^{-\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{25}} = 3440 \text{ K} \cdot \left(\left(\frac{\alpha}{0.01} \right) \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^{-\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{25}}. \quad (4.5)$$

Für die Temperatur gilt daher $T \propto q^{-3/50}$. Damit ist die Isothermie in den äußeren Gebieten von Pop-III-Scheiben gezeigt. Bei der Vergrößerung des radialen Abstands um 4 Größenordnungen sinkt die Temperatur nur um einen Faktor 1.7.

Eine Isothermie dieser Art wurde schon von Stahler et al. (1986) in Rechnungen des sphärischen Kollapses eines primordialen Protosterns gezeigt. Obwohl der prinzipielle Mechanismus (die starke Temperaturabhängigkeit der Opazität) derselbe ist, bezieht sich im Falle von Scheibenakkretion die Isothermie auf die Temperatur in der Mittelebene, während sie im sphärischen Kollaps in der Photosphäre des Protosterns auftritt.

Für Pop-I-Akkretionsscheiben ergibt sich keine Isothermie bei 3000 K, da bei diesen Temperaturen schon Moleküle wie CO, TiO und H₂O absorbieren (vgl. Abb. 4.2 rechts). Diese weichen die starke Temperaturabhängigkeit auf, und erlauben es damit der Scheibe, zu kühlen (vgl. Abb. 4.4b). Der Temperaturverlauf für Pop-I-Akkretionsscheiben in Abb. 4.4b zeigt jedoch einen ähnlichen Effekt. Für Temperaturen unter 1000 K ergeben sich immer wieder schmale isotherme Bereiche. Diese können allesamt mit steilen Gradienten in der Opazität, hervorgerufen durch das Verdampfen von Eis, Silikaten, Troilit usw. identifiziert werden.

4.2.3. Oberflächendichte Σ und Skalenhöhe h/r

Im isothermen Außenbereich fällt weiterhin auf, daß die Oberflächendichte Σ und das Verhältnis h/r gemäß einem Potenzgesetz zunimmt bzw. abfällt (siehe Abb. 4.4d+f). Gemäß der Drehimpulslei-

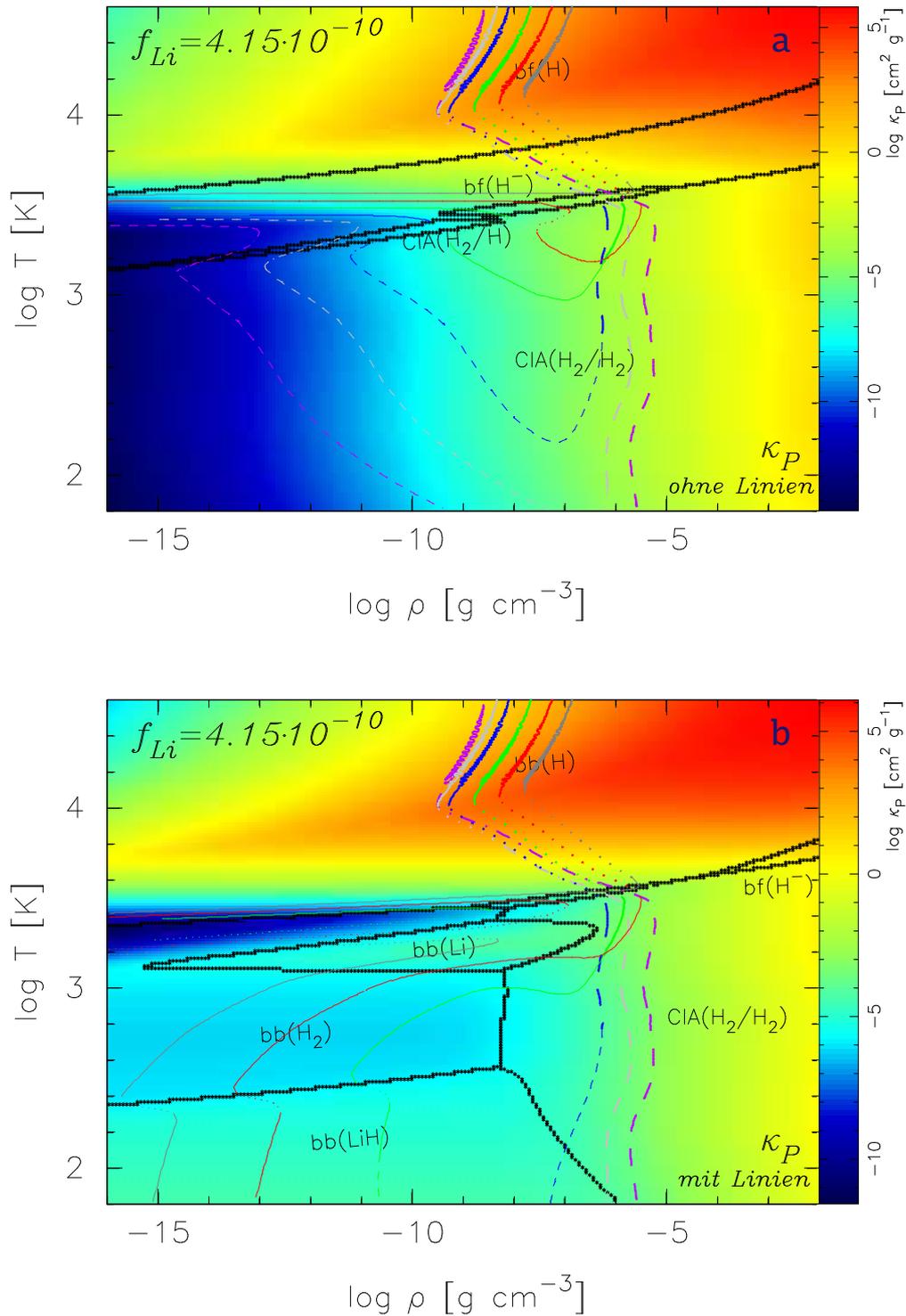


Abbildung 4.3.: Scheibenmodelle für $\alpha = 0.01$ in der (ρ, T) -Ebene für Akkretionsraten von 10^{-10} , 10^{-8} , 10^{-6} , 10^{-4} , 10^{-3} und $10^{-2} M_{\odot} \text{yr}^{-1}$ mit κ_P (a) ohne und (b) mit Linien für Pop-III-Zusammensetzung. Dicke(dünne) Linien stehen für optisch dicke(dünne) Lösungen, gestrichelte Linien für KSG-Lösungen, gepunktete Linien für thermisch instabile Lösungen sowie gestrichelpunktete Linien für KSG- und thermisch instabile Lösungen. Als Hintergrund ist das zugehörige Planckmittel κ_P zu sehen.

chung (2.22) und der Viskositätsparametrisierung (2.24) ist

$$\begin{aligned}\Sigma &= \frac{\dot{M}\Omega}{3\pi\alpha c_s^2} \\ &= 4.7 \cdot 10^2 \text{ g cm}^{-2} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01}\right)^{-1} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-6} \text{ M}_\odot \text{ yr}^{-1}}\right) \left(\frac{q}{1 \text{ AU M}_\odot^{-\frac{1}{3}}}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}}\right)^{-1}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Radiale Selbstgravitation (FSG) wird dann wichtig, wenn das Verhältnis M_d/M den Wert 1 übersteigt. Die Scheibenmasse, approximiert durch $M_d = \Sigma r^2$ ist dann größer als die Zentralmasse M (z.B. Duschl et al., 2000). Für den isothermen Ast folgt, daß ab einem Radius r_{FSG} radiale Selbstgravitation wichtig wird:

$$r_{\text{FSG}} > 3.6 \cdot 10^2 \text{ AU} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01}\right)^{-2} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-3} \text{ M}_\odot \text{ yr}^{-1}}\right)^{-2} \left(\frac{M}{1 \text{ M}_\odot}\right) \left(\frac{T}{3440 \text{ K}}\right)^2.\quad (4.7)$$

Hierbei haben wir angenommen, daß FSG erst nach dem Erreichen des isothermen Astes einsetzt. Für das Verhältnis h/q folgt mittels den Ergebnissen aus Tab. 2.5 für NSG/KSG

$$\begin{aligned}\frac{h}{q} &= \left[1, \frac{1}{2} Q_T\right] \frac{c_s}{\Omega q} \propto \left[1, \frac{1}{2} Q_T\right] q^{\frac{1}{2}} \\ \frac{h}{r} &= 0.18 \cdot \left[1, \frac{1}{2} Q_T\right] \left(\frac{r}{1 \text{ AU}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M}{1 \text{ M}_\odot}\right)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}\quad (4.8)$$

konsistent mit Abb. 4.5a+c. Es ist den Formeln zu entnehmen, daß für KSG $\frac{h}{r}$ aufgrund des kleineren Toomre-Parameters kleiner wird. Für $r > r_{\text{thin}}$ bricht daher die Näherung geometrisch dünner Scheiben zusammen:

$$r_{\text{thin}} > 30 \text{ AU} \cdot \left[1, \frac{1}{2} Q_T\right]^{-2} \left(\frac{M}{1 \text{ M}_\odot}\right).\quad (4.9)$$

4.2.4. Optische Tiefe

Pop-III-Scheiben haben eine bedeutend geringere optische Tiefe in den äußeren Bereichen als Pop-I-Scheiben (vgl. Abb. 4.4g-i). Dies liegt an der um Größenordnungen kleineren Opazität für Pop-III-Materie, hervorgerufen durch das Fehlen von Staub und Eis, welches beide gute Absorber sind. Dadurch werden exotischere Absorptionsmechanismen wie CIA oder pure Linienabsorption der Moleküle auch bei diesen niederen Temperaturen bedeutende Absorptionsquellen, wenn auch auf relativ zu Pop-I auf viel geringerem Absolutwert.

4.2.5. Minimaltemperatur

Pop-III-Scheiben besitzen abhängig von der Akkretionsrate eine Minimaltemperatur, berücksichtigt man nur Pop-III-Opazität ohne Linien (vgl. Fig. 4.3a). In der Akkretionsscheibe muß mit der nach außen abnehmenden Dissipationsrate auch die Abstrahlung abnehmen. Ab einem gewissen Punkt ist die Absorption durch CIA so ineffizient (Absorption proportional zur Dichte), daß sie sich in optisch dünne Emission verkehrt. Dies führt zum Anstieg der Temperatur, bis die Scheibe den isothermen äußeren Bereich erreicht.

Mittels Linienkühlung jedoch verschwindet die Minimaltemperatur und die vormals geschlossene Linien in der (ρ, T) -Ebene öffnen sich zu zwei stabilen Ästen: Isothermer Akkretion bei ca. 3000 K sowie Pop-I-ähnliche über Moleküllinien und CIA kühlende Akkretion (vgl. Fig. 4.3b).

Für Linienabsorption hat man mittels des integrierten Absorptionskoeffizienten (vgl. 3.4) die Abhängigkeit $\kappa_P = f_P(T)$. Aus Abb. 4.3 ist ersichtlich, daß die Scheibe optisch dünn ist, wenn sie das Gebiet mit dominierender Linienabsorption trifft.

Aus der Energiegleichung (2.19) mit Hilfe der effektiven optischen Tiefe (2.15) für den optisch dünnen Fall und der Viskositätsparametrisierung (2.24) folgt

$$\frac{9}{8} \alpha c_s^2 \Omega_K = 2 \sigma \kappa_P T^4 .$$

Da für die niedrigen Temperaturen und Dichten Gasdruck überwiegt, finden wir

$$f_P(T) T^3 = \frac{9}{16} \frac{\alpha k_B}{\mu m_p \sigma} \Omega_K . \quad (4.10)$$

An einem gewissen radialen Abstand $q = \Omega_K^{-3/2}$ ist im optisch dünnen, liniendominierten Fall somit die Temperatur allein vom Verlauf der Planckmittel bestimmt und ergibt damit unabhängig von der Dichte, Flächendichte, Akkretionsrate das gleiche Ergebnis (vgl. Fig. 4.4c für $\dot{M} = 10^{-10} \dots 10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$). Dies trifft nicht auf den Übergang von LiH- nach H₂-Absorption zu. Dort ist das Planckmittel von der Dichte abhängig (vgl. Abb. 4.3), da die Dissoziation von LiH von der gegebenen Dichte abhängt.

Pop-I-Scheiben bleiben aufgrund von Staubabsorption im Wesentlichen optisch dick. Dann ergibt die Energiegleichung (2.19)

$$\begin{aligned} \frac{9}{8} \Sigma \alpha c_s^2 \Omega_K &= \frac{8 \sigma}{3 \Sigma \kappa_R} T^4 \\ \Leftrightarrow \frac{T^3}{\kappa_R} &= \frac{27}{64} \frac{\alpha k_B}{\mu m_p \sigma} \Sigma^2 \Omega_K . \end{aligned} \quad (4.11)$$

Obwohl für Absorption durch Staub und Eis das Rosselandmittel nur von der Temperatur abhängig ist (vgl. Tab. 2.4), hängt die Temperatur noch von der Flächendichte ab. Daher ergibt sich hier keine charakteristische Temperatur bei einem gegebenen Abstand q .

4.2.6. Äußere radiale Grenze der unter 3440 K kühlenden Akkretionsscheiben

Mit der im optisch dünnen Fall von der Akkretionsrate unabhängigen Temperatur können wir eine äußere radiale Grenze für die linienkühlenden Gebiete der Akkretionsscheibe definieren. Das ist der Radius, für den die Temperatur unter 60 K sinkt. Aus Fig. 4.4c erkennt man

$$q_{\text{out}, \alpha=0.01} \approx 25 \text{ AU } M_\odot^{-\frac{1}{3}} . \quad (4.12)$$

Für die CIA-dominierten Scheiben oberhalb $10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ kann man das Rosselandmittel approximieren durch (vgl. Tabelle A.1)

$$\kappa_{R, \text{CIA}} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \left(\frac{\rho}{10^{-5} \text{ g cm}^{-3}} \right) .$$

Hier vernachlässigen wir die Temperaturabhängigkeiten. Diese Approximation ist gültig, solange die Opazität nicht genauer als auf einen Faktor 2 bekannt sein muß. Mit $\kappa_0 = 3 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1}$, $\rho_0 =$

$10^{-5} \text{ g cm}^{-3}$ und $h_0 = 10^{10} \text{ cm}$ kann die Dichte- in eine Oberflächendichteabhängigkeit transformiert werden. Wir machen von (2.38) für KSG und der Drehimpulsgleichung (2.22) mit (2.24) Gebrauch und erhalten ($\Sigma_0 = 2\rho_0 h_0 = 2 \cdot 10^5 \text{ g cm}^{-2}$)

$$\kappa_{R,CIA} = \kappa_0 \frac{\rho}{\rho_0} = \kappa_0 \frac{\Sigma}{\Sigma_0} \frac{h_0}{h} = \kappa_0 \frac{\Sigma}{\Sigma_0} \frac{2h_0\Omega}{Q_T c_s} = \kappa_0 \frac{\dot{M}\Omega}{3\pi\alpha\Sigma_0} \frac{2h_0\Omega}{Q_T c_s^3} = \kappa_0 \frac{2G\dot{M}^2 h_0 \Omega^2}{9\pi\alpha^2 c_s^6 \Sigma_0}.$$

Aus der Energiegleichung (2.19) mit (2.24) für den optisch dicken Fall ($\tau_R \gg 1$)

$$\begin{aligned} \frac{8\sigma T^4}{3\kappa_R} &= \frac{9}{8} \alpha c_s^2 \Sigma^2 \Omega = \frac{1}{8\pi^2} \alpha \frac{\dot{M}^2 \Omega^3}{\alpha^2 c_s^2} \\ \Leftrightarrow \frac{12\sigma T^4 \pi \alpha^2 c_s^6 \Sigma_0}{\kappa_0 G \dot{M}^2 h_0 \Omega^2} &= \frac{\alpha \dot{M}^2 \Omega^3}{8\pi^2 \alpha^2 c_s^2} \\ \Leftrightarrow M^4 &= \frac{96\pi^3 \alpha^3 \sigma T^8 k_B^4 \Sigma_0}{\mu^4 m_p^4 \kappa_0 G h_0 \Omega^5} \\ \Leftrightarrow \dot{M}_{CIA} &= 2 \cdot 10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_\odot^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{5}{4}} \left(\frac{T}{100 \text{ K}} \right)^2. \quad (4.13) \end{aligned}$$

4.2.7. Die Grenze zwischen optisch dick und optisch dünn

Wie aus Abb. 4.3b ersichtlich, findet für $\rho_0 \approx 10^{-8} \text{ g cm}^{-3}$ der Wechsel vom CIA-dominierten zum von Linienabsorption dominierten Teil statt. Weiterhin nehmen wir in guter Näherung an, daß bei dieser kritischen Dichte der Übergang von optisch dick nach optisch dünn stattfindet. Dann nimmt die effektive optische Tiefe (2.15) ein Minimum an. Für $\tau_R \approx \tau_P = 1$ folgt $\tau_{\text{eff}} \approx 3$.

Aus der Energiegleichung (2.19) folgt damit unter Benutzung der Drehimpulsgleichung (2.22) und der Zustandsgleichung (2.18) für $P_{\text{gas}} \approx P$

$$\frac{3}{8\pi} \dot{M} \Omega_K^2 = \frac{4\sigma}{9} T^4 = \frac{4\sigma}{9} c_s^8 \left(\frac{\mu m_p}{k_B} \right)^4. \quad (4.14)$$

Die Schallgeschwindigkeit können wir jedoch auch mit der Drehimpulsgleichung (2.22) und dem Verhältnis h/r (2.38) ausdrücken:

$$c_s^2 = \frac{\dot{M} \Omega_K}{3\pi\alpha\Sigma} = \frac{\dot{M} \Omega_K^2}{6\pi\alpha\rho \left[1, \frac{1}{2} Q_T \right] c_s} \quad \Leftrightarrow \quad c_{s,\text{NSG}}^3 = \frac{\dot{M} \Omega_K^2}{6\pi\alpha\rho} \quad \Leftrightarrow \quad c_{s,\text{NSG}}^6 = \frac{G \dot{M}^2 \Omega_K^2}{9\pi^2 \alpha^2 \rho}.$$

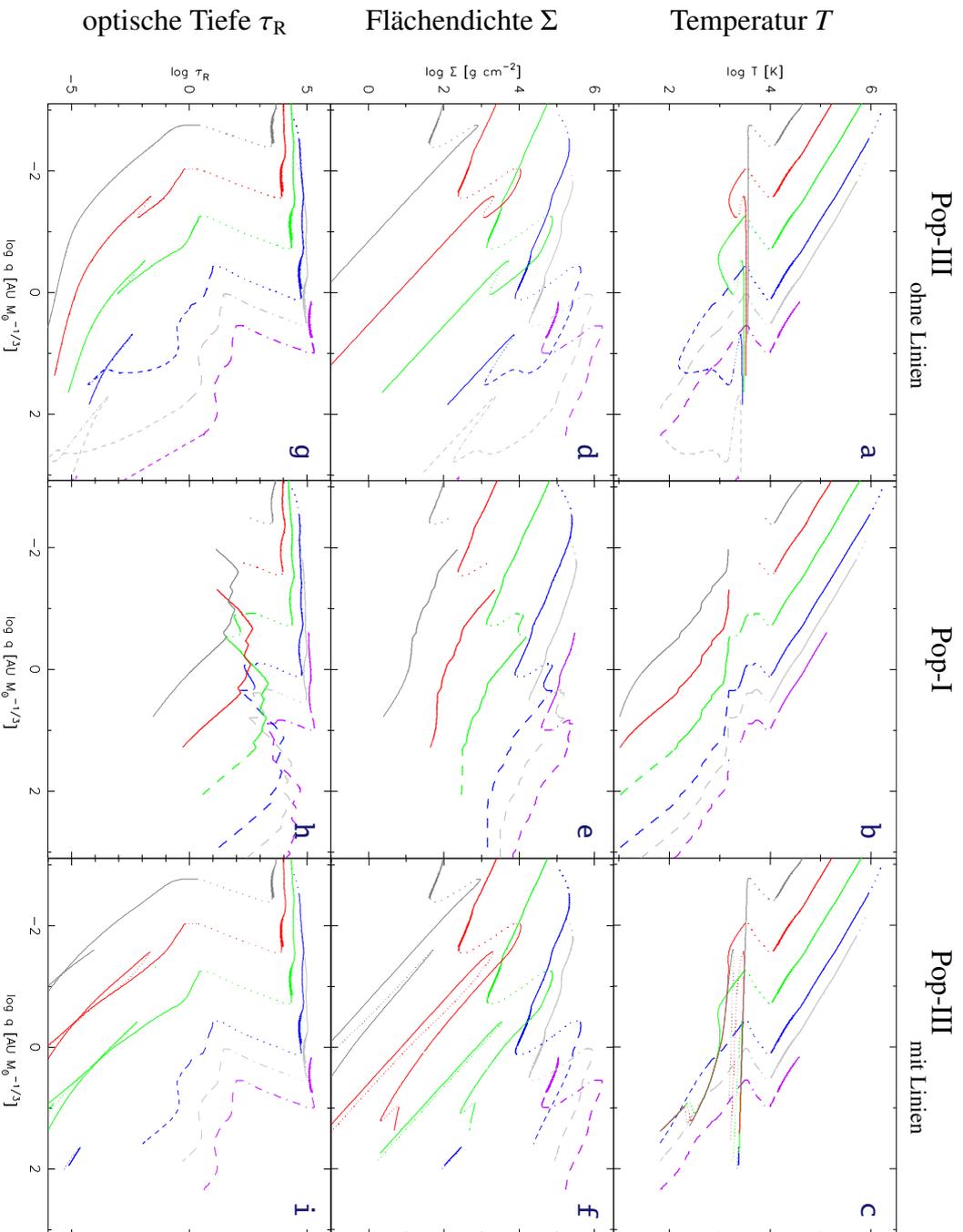


Abbildung 4.4.: Temperatur T , Flächendichte Σ und Rosseland optische Tiefe τ_R für Scheibenmodelle mit Akkretionsraten von 10^{-10} , 10^{-8} , 10^{-6} , 10^{-4} , 10^{-3} und $10^{-2} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$. Bedeutung der Linientypen wie in Abb. 4.3. $\alpha = 0.01$.

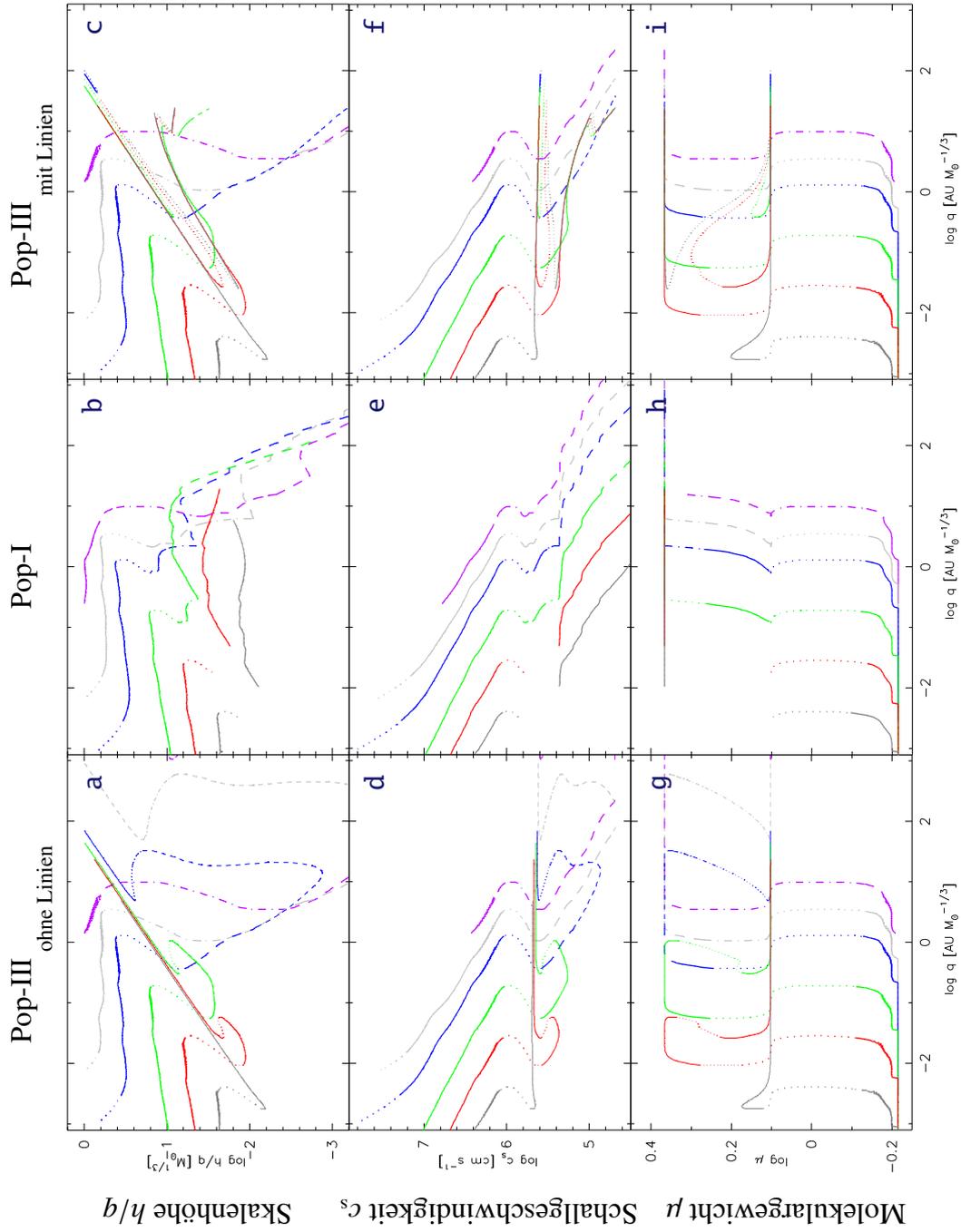


Abbildung 4.5.: Verhältnis h/q , Schallgeschwindigkeit c_s und mittleres Molekulargewicht μ für Scheibenmodelle mit Akkretionsraten von 10^{-10} , 10^{-8} , 10^{-6} , 10^{-4} , 10^{-3} und $10^{-2} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$. Bedeutung der Linientypen wie in Abb. 4.3. $\alpha = 0.01$.

Eingesetzt in (4.14) folgt

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\text{NSG}} &= \left(\frac{32\pi\sigma}{27} \left(\frac{\mu m_p}{k_B} \right)^4 \right)^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{1}{6\pi\alpha\rho} \right)^{-\frac{8}{5}} \Omega_K^{-2} \\ &= 7.0 \cdot 10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{\frac{8}{5}} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_\odot^{-\frac{1}{3}}} \right)^3 \left(\frac{\rho}{10^{-8} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{\frac{3}{5}},\end{aligned}\quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\text{KSG}} &= \left(\frac{32\pi\sigma}{27} \left(\frac{\mu m_p}{k_B} \right)^4 \right)^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{G}{9\pi^2\alpha^2\rho} \right)^{-\frac{4}{5}} \Omega_K^{-\frac{2}{5}} \\ &= 6.1 \cdot 10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_\odot^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{5}} \left(\frac{\rho}{10^{-8} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{\frac{4}{5}}.\end{aligned}\quad (4.16)$$

4.3. Stabilität

Im Folgenden sollen die in Abschnitt 2.9 eingeführten Instabilitätskriterien Anwendung auf Pop-III-Scheiben finden. Die Diskussion findet ausschließlich für Pop-III-Opazität mit Linienabsorption statt.

4.3.1. Thermische Stabilität

Für Pop-III-Scheiben existieren 4 thermische Instabilitäten:

Lightman-Eardley-Instabilität

Lightman und Eardley (1974) fanden eine thermisch-viskose Instabilität, als sie in der Shakura-Sunyaev-Viskosität den Druck durch die Summe aus Gas- und Strahlungsdruck ersetzen. Diese tritt jedoch nur bei sehr hohen Temperaturen auf, wo die Opazität durch Thomson-Streuung dominiert ist (vgl. Tab. 2.4). Daher wird diese bei Akkretionsscheiben um Pop-III-Sterne kaum auftreten, da schon der Stern Ausdehnungen von ca. $10^{-3} \dots 10^{-1}$ AU besitzt, abhängig von seiner Masse. Jedoch wird diese Instabilität auftreten im Fall von Akkretion auf schwarze Löcher.

H⁻-Instabilität

Das ist die bekannte, auch in Pop-I-Scheiben vorkommende Instabilität, welche durch den starken Temperaturgradienten in der Opazität beim Übergang von molekularer zu ionisierter Materie hervorgerufen wird. Sie tritt auf für Temperaturen $T \approx 10^{3.5} \dots 10^{4.0}$ K (vgl. Tab. 2.4, Abb. 4.3, 4.4a-c). Im Falle von Pop-I-Zusammensetzung gibt es noch weitere, durch molekulare Absorption (CO, TiO, H₂O, etc.) hervorgerufene Instabilitäten, die sich bis zu $T = 1000$ K erstrecken. Diese Instabilität tritt für alle Akkretionsraten auf, läßt man die Möglichkeit außer acht, daß dieser Teil der Scheibe schon innerhalb des Sterns liegen könnte.

Verwenden wir den Fit von Bell und Lin (1994) an das Rosselandmittel κ_R für den Bereich von H⁻-Absorption,

$$\kappa_R = 50 \text{ cm}^2 \text{ g}^{-1} \cdot \left(\frac{\rho}{10^{-7} \text{ g cm}^{-3}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{T}{10^4 \text{ K}} \right)^{10}.$$

Mit Hilfe der Drehimpulsgleichung (2.22) und der Viskositätsparametrisierung (2.24) folgt aus (4.11)

$$\begin{aligned} \dot{M}^2 &= \frac{64\pi^2\sigma T^4 \alpha k_B T}{3\kappa_R \mu m_p \Omega_K^3} \\ \Leftrightarrow \dot{M}_{H^-} &= 2.5 \cdot 10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01}\right) \left(\frac{T}{10^4 \text{ K}}\right)^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_\odot^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{9}{4}}. \end{aligned}$$

An einem gegebenen Abstand tritt die H^- -Instabilität für Akkretionsraten zwischen $\dot{M}_{H^-}(10^4 \text{ K})$ und $\dot{M}_{H^-}(10^{3.5} \text{ K})$,

$$\dot{M}_{H^-} = (2.5 \cdot 10^{-5} \dots 4.4 \cdot 10^{-4}) M_\odot \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01}\right) \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_\odot^{-\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{9}{4}}, \quad (4.17)$$

auf unter der Voraussetzung, daß Gasdruck dominiert. Für die typischen Dichten und Temperaturen ist dies gut erfüllt (vgl. Gleichung 2.17).

H₂/Li-H-Instabilität

Abbildung Abb. 4.3a+b zeigt eine weitere thermische Instabilität am Übergang von molekularer zu atomarer Materie an. H_2 dissoziiert, während die Opazität durch atomaren Wasserstoff noch nicht stark genug ist. Der in diesem Bereich dadurch stattfindende Abfall der Opazität (vgl. Abschnitt 3.7.2) induziert diese Instabilität. Das Instabilitätskriterium für $P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$ und $\tau_P \ll 1$ in Tabelle 2.2 zeigt dies bereits an ($B_P < -3$ für $A_P = 0$). In Abschnitt 4.5 wird ersichtlich werden, daß atomares Lithium diese Instabilität beeinflusst.

LiH-H₂-Instabilität

Für Pop-III-Opazität mit Linien existiert noch eine weitere thermische Instabilität. Diese wird durch den Temperaturgradienten in der Opazität an der Grenze von H_2 - zu LiH-Linienabsorption hervorgerufen (Abb. 4.3b). Er ist stark negativ, daher ergibt sich eine thermische Instabilität. Diese Instabilität wirkt jedoch nur bei niedrigen Akkretionsraten ($\dot{M} \leq 10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1}$). Bei höheren Akkretionsraten verbleibt die Akkretion im Bereich von CIA und ist optisch dick.

Die Lightman-Eardley- und die H^- -Instabilität ergeben sich (nahezu) unabhängig von der chemischen Zusammensetzung, während die H_2 /Li-H- und LiH- H_2 -Instabilität nur für Pop-III-Materie auftritt. Letztere tritt nur für Akkretionsraten unterhalb von $10^{-5} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ auf.

4.3.2. Viskose Instabilität

Nach dem Instabilitätskriterium (2.30) wird die Scheibe viskos instabil, wenn sich bei einer lokalen Erhöhung(Verringerung) der Akkretionsrate die Flächendichte sinkt(steigt).

In Abb. 4.7 haben wir die Akkretionsrate \dot{M} versus Flächendichte Σ geplottet. Viskose Instabilitäten treten an der Grenze zwischen thermisch stabilen und instabilen Lösungen auf. Für $q = 0.01 \text{ AU } M_\odot^{-1/3}$ ergibt sich unabhängig von der Opazität die Lightman-Eardley-Instabilität (vgl. Abschnitt 4.3.1). Zur Illustration der möglichen Übergänge haben wir in Abb. 4.6 die möglichen Übergänge bei Erreichen instabiler Lösungen exemplarisch dargestellt.

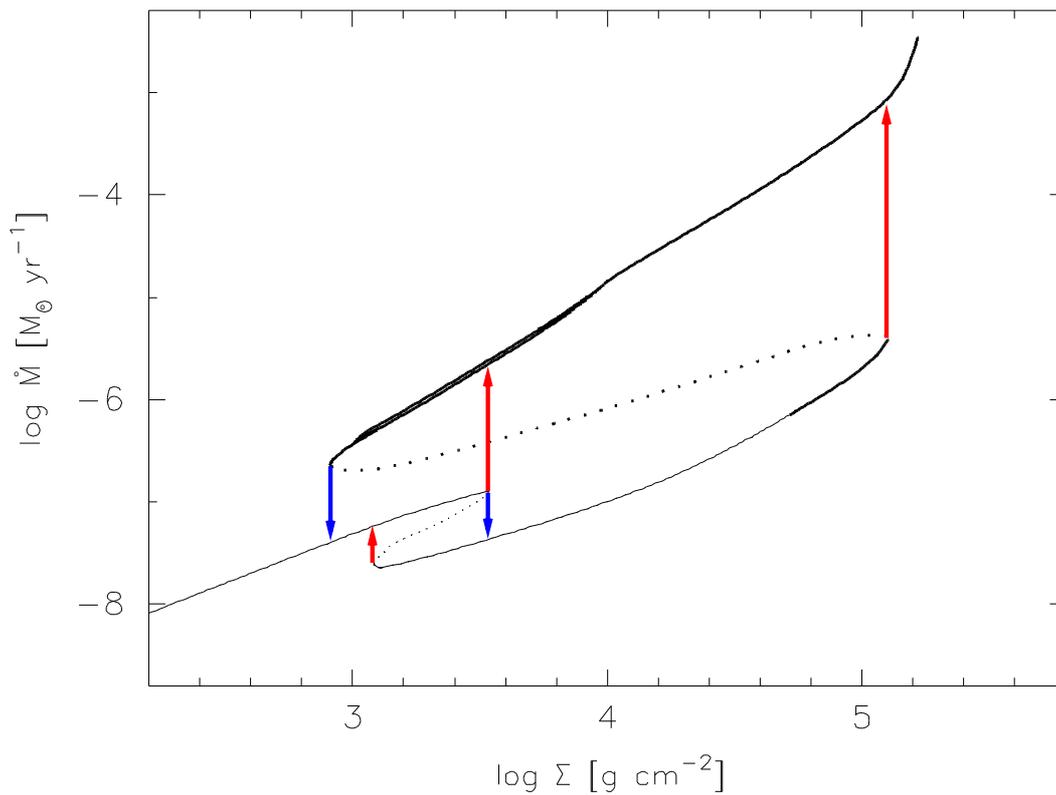


Abbildung 4.6.: Akkretionsrate \dot{M} versus Flächendichte Σ bei $q = 0.1 \text{ AU } M_{\odot}^{-1/3}$ für Pop-III-Opazität ohne Linien (vgl. Abb. 4.7d). Mit eingezeichnet sind die möglichen Übergänge, wenn die Scheibe die kritische Flächendichte Σ über-/unterschreitet. Übergänge auf einen heißeren Ast sind rot dargestellt, Übergänge auf eine kühleren Ast sind blau dargestellt. Bedeutung der Linientypen wie in Abb. 4.3. $\alpha = 0.01$.

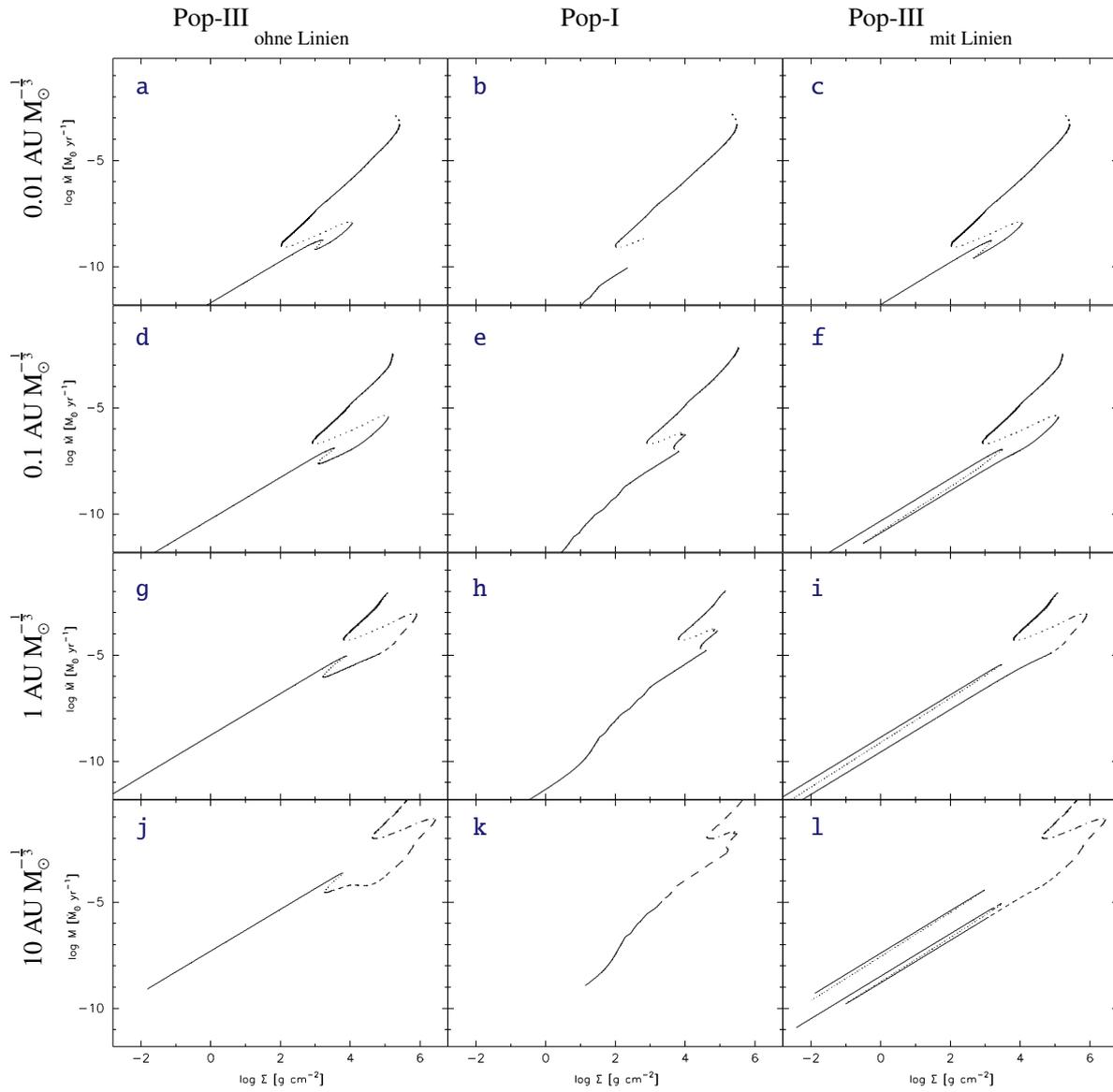


Abbildung 4.7.: Akkretionsrate \dot{M} versus Flächendichte Σ für radiale Abstände q von **(a-c)** 0.01 , **(d-f)** 0.1 , **(g-i)** 1 und **(j-l)** $10 \text{ AU } M_{\odot}^{-1/3}$. Bedeutung der Linientypen wie in Abb. 4.3. $\alpha = 0.01$.

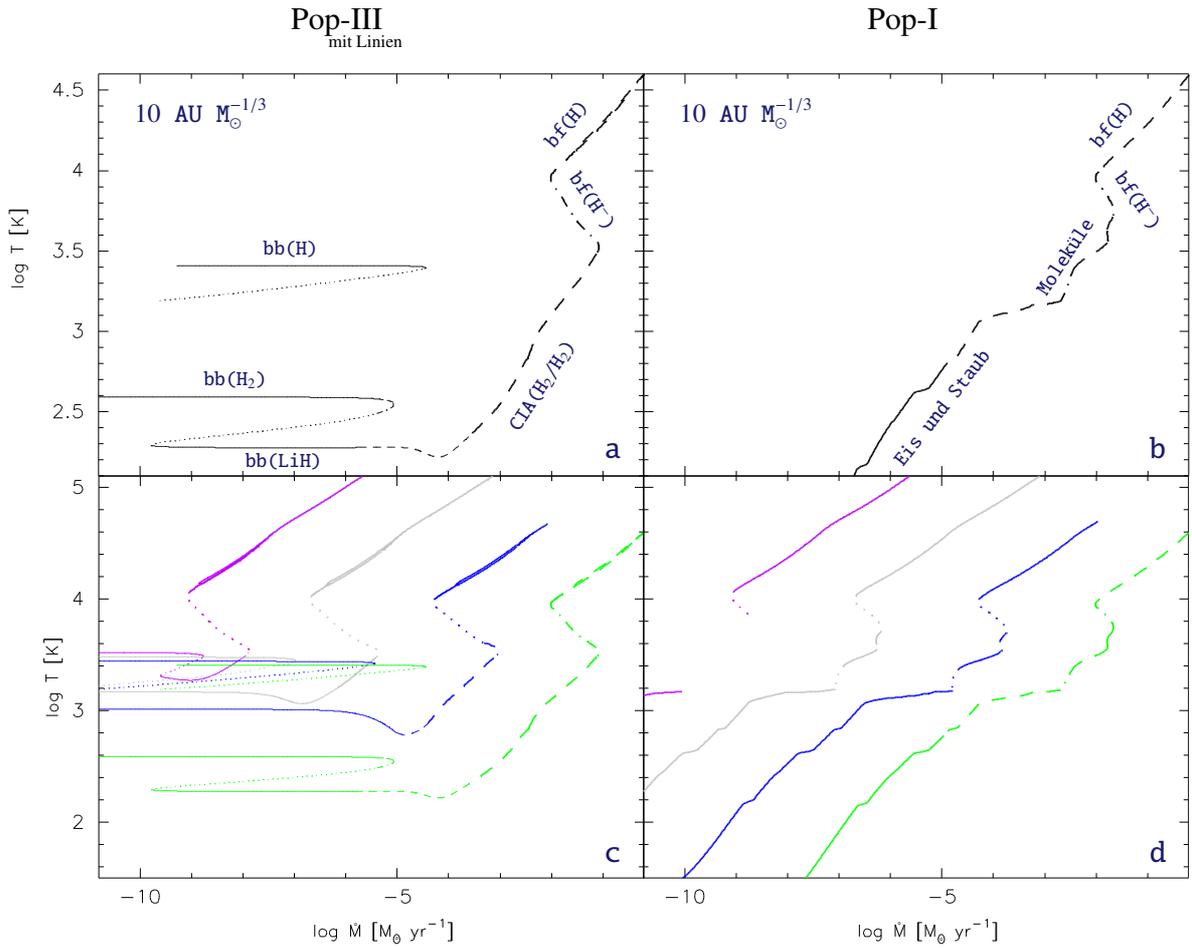


Abbildung 4.8.: **(a+b)** : Scheibentemperatur T versus Akkretionsrate \dot{M} für $q = 10 \text{ AU } M_{\odot}^{-1/3}$. Mit eingezeichnet sind die bei diesen Temperaturen dominierenden Absorptionsmechanismen. Bedeutung der Linientypen wie in Abb. 4.3. **(c+d)** : $T(\dot{M})$ für $q = 0.01, 0.1, 1$ und $10 \text{ AU } M_{\odot}^{-1/3}$. $\alpha = 0.01$.

Bei Pop-III-Scheiben ändert sich bei Erreichen der H^- -Instabilität die Akkretionsrate um bis zu 3 Größenordnungen, während bei Pop-I nur eine Änderung um 1-2 Größenordnungen möglich ist. Dies liegt vorwiegend am Vorhanden- bzw. Nichtvorhandensein der Moleküle CO, TiO und H_2O .

Für den Fall niedriger Akkretionsrate treten bei Pop-III-Scheiben wiederum die bekannten thermischen Instabilitäten auf. Interessanterweise scheint es bei Pop-III-Scheiben relativ weit außen (Abb. 4.71) für $-1 < \log \Sigma [\text{gcm}^{-2}] < 3$ fünf koexistierende Lösungen zu geben. Die 3 Lösungen bei niedrigeren Akkretionsraten resultieren aus der LiH- H_2 -Instabilität (Abschnitt 4.3.1), die 2 restlichen aus der $\text{H}_2/\text{Li-H}$ -Instabilität (Abschnitt 4.3.1).

Dabei sind die stabilen Äste isotherm in Bezug auf die Akkretionsrate, da in der Energiegleichung (2.13) für $\tau_{\text{R}} \ll 1$, $P \approx P_{\text{gas}}$ und Linienabsorption jegliche Dichteabhängigkeit verschwindet (vgl. Abb. 4.8 sowie Abschnitt 4.2.5).

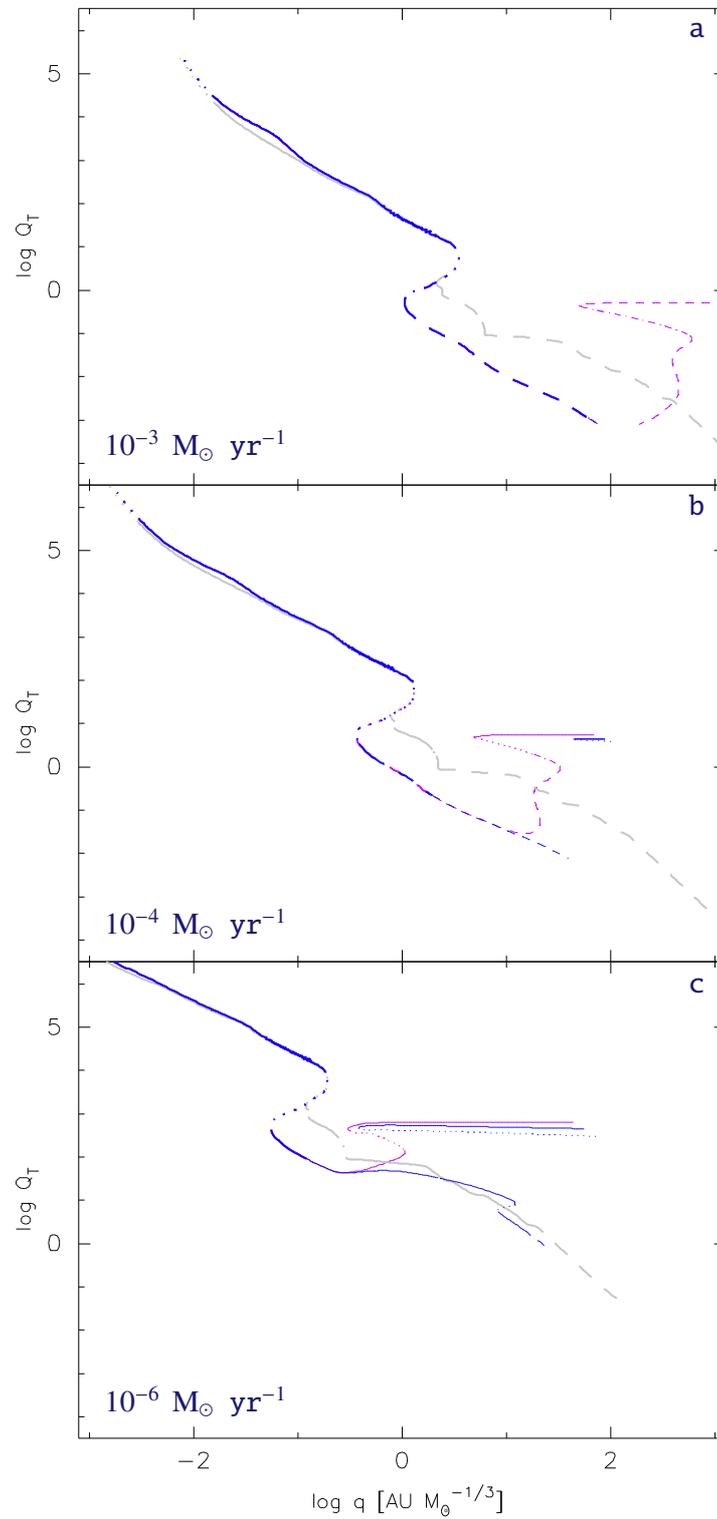


Abbildung 4.9.: Toomre-Parameter Q_T für Akkretionsraten von **(a)** $10^{-3} M_\odot \text{ yr}^{-1}$, **(b)** $10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ und **(c)** $10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ für Pop-I-Opazität, Pop-III-Opazität ohne Linien und Pop-III-Opazität mit Linien. Bedeutung der Linientypen wie in Abb. 4.3. $\alpha = 0.01$.

4.3.3. Gravitationsinstabilität

In Kapitel 2 wurde schon ausführlich die Gravitationsinstabilität, charakterisiert durch den Toomre-Parameter Q_T (2.31), und deren Auswirkungen auf die Turbulenz (Abschnitt 2.7.2) sowie den Widerspruch mit der klassischen Bedingung für Fragmentation über den Vergleich von thermischer und dynamischer Zeitskala (Ende von Kapitel 2) besprochen. Das Auftreten von vertikaler Selbstgravitation reduziert den Toomre-Parameter unter 2 und induziert daher Fragmentation in der Scheibe, sobald Q_T den Wert von 1 unterschreitet. In 2.7.2 haben wir gesehen, daß die Turbulenz supersonisch wird, sobald $Q_T < 2\alpha$ wird. Aus Abb. 4.9 leiten wir ab, daß in unserem Fall ($\alpha = 0.01$) die Turbulenz für die meisten Gebiete in der Scheibe subsonisch ist (Ausnahme Teile der Niedertemperaturlösung für Akkretionsraten von 10^{-3} und $10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}$).

Mit den Überlegungen in Kapitel 4.2.3, (2.4) und (2.24) können wir den Toomre-Parameter Q_T für den äußeren isothermen Bereich angeben:

$$Q_T = \frac{c_s \Omega}{\pi G \Sigma} = \frac{3\alpha c_s^3}{G \dot{M}} = 10.7 \left(\frac{\alpha}{0.01} \right) \left(\frac{\dot{M}}{10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}} \right)^{-1} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (4.18)$$

Für Akkretionsraten größer als $10^{-3} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ ($\alpha = 0.01$) ist damit der komplette äußere Bereich Toomre-instabil. Eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft des Toomre-Kriteriums im Rahmen der hier verwendeten Viskositätsparametrisierung ist, daß die Scheibe instabil wird bei einem Überschreiten der Akkretionsrate oder dem Unterschreiten der Temperatur.

Die Temperatur selbst ist von der Akkretionsrate abhängig. Wir können jedoch dennoch sagen, daß im Rahmen der verwendeten Viskositätsparametrisierung (2.24) die Scheibe für Akkretionsraten kleiner als $10^{-6} M_\odot \text{ yr}^{-1}$ niemals KSG wird, setzt man eine Minimaltemperatur von 60 K sowie $\alpha = 0.01$ voraus.

4.4. Zeitskalen

4.4.1. Abschätzung der chemischen Reaktionszeitskala

Da die Molekülbildung für Pop-III-Materie, insbesondere die von H_2 , im Vergleich zu Pop-I-Materie weniger effizient ist (vgl. Abschnitt 3.10), müssen wir zusätzlich zu den in der Akkretionsscheibe vorhandenen Zeitskalen noch die Molekülbildungszeitskala berechnen, um abschätzen zu können, ob auf den Scheibenzeitskalen die Molekülbildung überhaupt möglich ist ($\tau_{\text{chem}} \ll \tau_{\text{disk}}$). Diese Molekülbildungszeitskala dient hier als Approximation der chemischen Reaktionszeitskala.

Zunächst schreiben wir die Temperatur T als Funktion der Dichte ρ . Aus der Drehimpulsgleichung (2.4), der Viskositätsparametrisierung (2.24) und h/r (2.38) folgt

$$\dot{M} = 3\pi\alpha \frac{c_s^2}{\Omega} \Sigma = 6\pi\alpha \frac{c_s^2}{\Omega} \rho h = 6\pi\alpha \rho \left[1, \frac{1}{2} Q_T \right] \frac{c_s^3}{\Omega^2}. \quad (4.19)$$

Damit

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{G M \dot{M}}{6\pi\alpha r^3 \left[1, \frac{1}{2} Q_T \right]} \left(\frac{\mu m_p}{k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2.5 \cdot 10^{-8} \text{ g cm}^{-3}}{\left[1, \frac{1}{2} Q_T \right]} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{-1} \left(\frac{\dot{M}}{10^{-4} M_\odot \text{ yr}^{-1}} \right) \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_\odot^{-\frac{1}{3}}} \right)^{-3} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^{-\frac{3}{2}}, \quad (4.20) \end{aligned}$$

bzw.

$$\dot{M}_{\text{NSG}} = 4 \cdot 10^{-9} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\rho}{10^{-12} \text{ g cm}^{-3}} \right) \left(\frac{\alpha}{0.01} \right) \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^3 \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Mit Hilfe von (4.20) folgt aus (3.19)

$$\tau_{\text{H}_2} = 0.14 \text{ s} \cdot \left[1, \frac{1}{2} Q_{\text{T}} \right]^2 \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{-2} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^6 \left(\frac{\dot{M}}{10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}} \right)^{-2} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^4.$$

4.4.2. Bedingung für chemische Gleichgewicht

Die Annahme von chemischen Gleichgewicht ist für Temperaturen kleiner als 3000 K gerechtfertigt, wenn die H₂-Bildungszeitskala kürzer als die hydrostatische Zeitskala τ_z (2.33) für NSG/KSG ist:

$$\tau_z = 5.0 \cdot 10^6 \text{ s} \cdot \left[1, \frac{1}{2} Q_{\text{T}} \right] \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Mit (3.19) und dem Resultat aus Tabelle 2.5 für τ_z folgt

$$\tau_{\text{H}_2} < \tau_z \quad (4.21)$$

$$\Leftrightarrow \dot{M}_{\text{crit, H}_2, \text{NSG}} > 1.7 \cdot 10^{-8} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{-1} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{9}{4}} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^2 \quad (4.22)$$

$$\Leftrightarrow \dot{M}_{\text{crit, H}_2, \text{KSG}} > 2.0 \cdot 10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{9}{8}} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^{\frac{7}{4}}. \quad (4.23)$$

4.4.3. Chemo-thermische Instabilitäten

Eine notwendige Bedingung für chemo-thermische Instabilität (Sabano und Yoshii, 1977) ist, daß die chemische Reaktions- und die thermische Zeitskala (2.35)

$$\tau_{\text{th}} = \frac{9}{8\alpha} \frac{1}{\Omega_{\text{K}}} = 5.7 \cdot 10^8 \text{ s} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{-1} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

vergleichbar sind:

$$\tau_{\text{H}_2} \approx \tau_{\text{th}}, \quad (4.24)$$

$$\Leftrightarrow \dot{M}_{\text{crit, ch-th(H}_2), \text{NSG}} \approx 1.6 \cdot 10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{\alpha}{0.01} \right)^{-1} \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{9}{4}} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^2 \quad (4.25)$$

$$\Leftrightarrow \dot{M}_{\text{crit, ch-th(H}_2), \text{KSG}} \approx 8.37 \cdot 10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1} \cdot \left(\frac{q}{1 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}} \right)^{\frac{9}{8}} \left(\frac{T}{3440 \text{ K}} \right)^{\frac{7}{4}}. \quad (4.26)$$

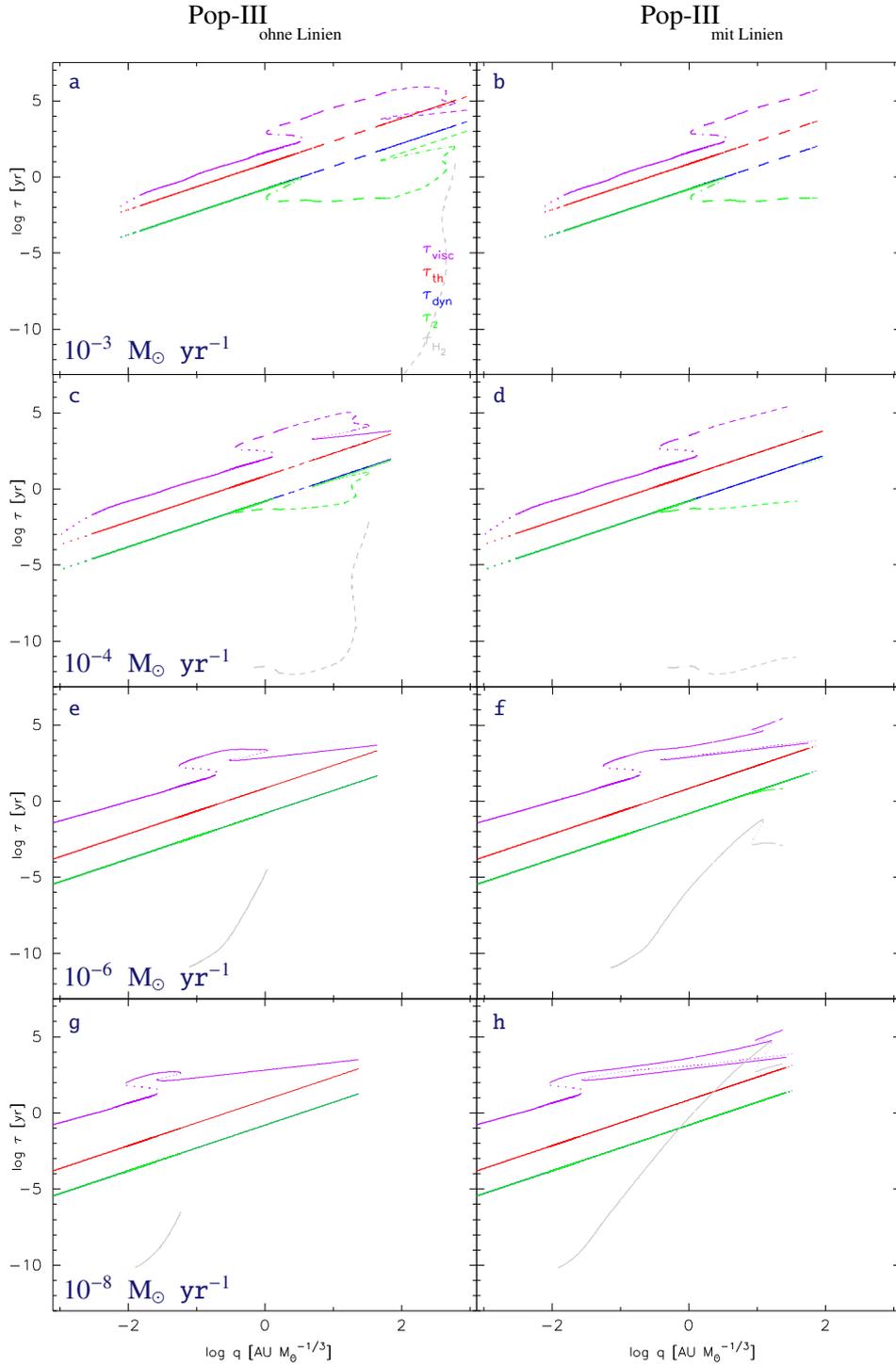


Abbildung 4.10.: Viskose Zeitskala τ_{visc} (für $1 M_{\odot}$), thermische Zeitskala τ_{th} , dynamische Zeitskala τ_{dyn} , hydrostatische Zeitskala τ_{z} und H_2 -Bildungszeitskala τ_{H_2} , stellvertretend für die chemische Reaktionszeitskala, für Scheibenmodelle mit Akkretionsraten von **(a+b)** 10^{-3} , **(c+d)** 10^{-4} , **(e+f)** 10^{-6} und **(g+h)** $10^{-8} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ für Pop-III-Opazität mit und ohne Linien. Bedeutung der Linientypen wie in Abb. 4.3. $\alpha = 0.01$.

4.4.4. Diskussion

In Abschnitt 2.10 haben wir bereits verschiedene Zeitskalen eingeführt. Wir haben gesehen, daß im Falle von KSG die hydrostatische Zeitskala (2.33) kürzer als die dynamische Zeitskala (2.32) wird.

Abb. 4.10 faßt die Zeitskalen für verschiedene Pop-III-Modelle zusammen. Mit zunehmender Akkretionsrate (von unten nach oben) steigt der Einfluß der Selbstgravitation und damit entkoppelt die hydrostatische von der dynamischen Zeitskala. Weiterhin wird die viskose und thermische Zeitskala mit steigender Akkretionsrate immer ähnlicher. Das liegt an der Zunahme des Verhältnisses $\frac{h}{r}$ (vgl. Abb. 4.5a+c sowie Tab. 2.5).

Für $10^{-3} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ wird die Scheibenlösung für $q > 10^2 \text{ AU } M_{\odot}^{-\frac{1}{3}}$ inkonsistent, da dort $\tau_{\text{visc}} > \tau_{\text{th}}$ wird. Dies gilt jedoch nur für $1 M_{\odot}$ Zentralmasse. Für andere Zentralmassen ergeben sich viskose Zeitskalen, die relativ dazu mit $(M/M_{\odot})^{2/3}$ skalieren. Bei $10^3 M_{\odot}$ ist daher am gegebenen Abstand q die viskose Zeitskala 10^2 mal so lang wie bei einer Zentralmasse von $1 M_{\odot}$. Da die anderen Zeitskalen bei gegebenem q nicht von der Zentralmasse abhängen, wird ersichtlich, daß konsistente stationäre Akkretionscheibenmodelle für hohe Akkretionsraten auch hohe Zentralmassen bedingen.

Die Annahme von chemischem Gleichgewicht ist für Akkretionsraten größer als $10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ gut erfüllt.

4.5. Einfluß von verschiedenen Lithiumbruchteilen

Bislang wurden die Scheibenmodelle nur für die primordiale (Pop-III) chemische Zusammensetzung untersucht. In Abb. 4.11 werden nun Plots von $T(\dot{M})$ bei verschiedenen radialen Abständen und verschiedenen Lithium-Bruchteilen gezeigt.

Abb. 4.11a+b zeigen größere Unterschiede im Bereich der Linienabsorption durch atomares Lithium. Im Fall von Abb. 4.11b ergeben sich für $\dot{M} < 10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und $f_{\text{Li}} \gtrsim 4.15 \cdot 10^{-10}$ zwei stabile, isotherme Lösungen. Die für höhere Temperatur am Übergang von H_2/Li zu H auftretende Lösung ist die bekannte, auch radial isotherme Lösung (siehe Abschnitt 4.2.2), während die für niedrigere Temperaturen ($\approx 1000 \text{ K}$) auftretende durch atomares Lithium verursacht wird.

Mit fortschreitendem radialen Abstand wechselt die Niedertemperaturlösung ins H_2 -Linien-dominierte Gebiet, um sich schließlich in Abb. 4.11d in über H_2 und LiH kühlende Lösungen aufzuspalten.

4.6. Zusammenfassung

Diese Erkenntnisse sind in Abbildung (4.12) zusammengefaßt. Mit Ausnahme des FSG- und $(h/r > 1)$ -Kriteriums in (4.7) und (4.8) können alle unabhängig von der Zentralmasse mittels der generalisierten Koordinate q wiedergegeben werden.

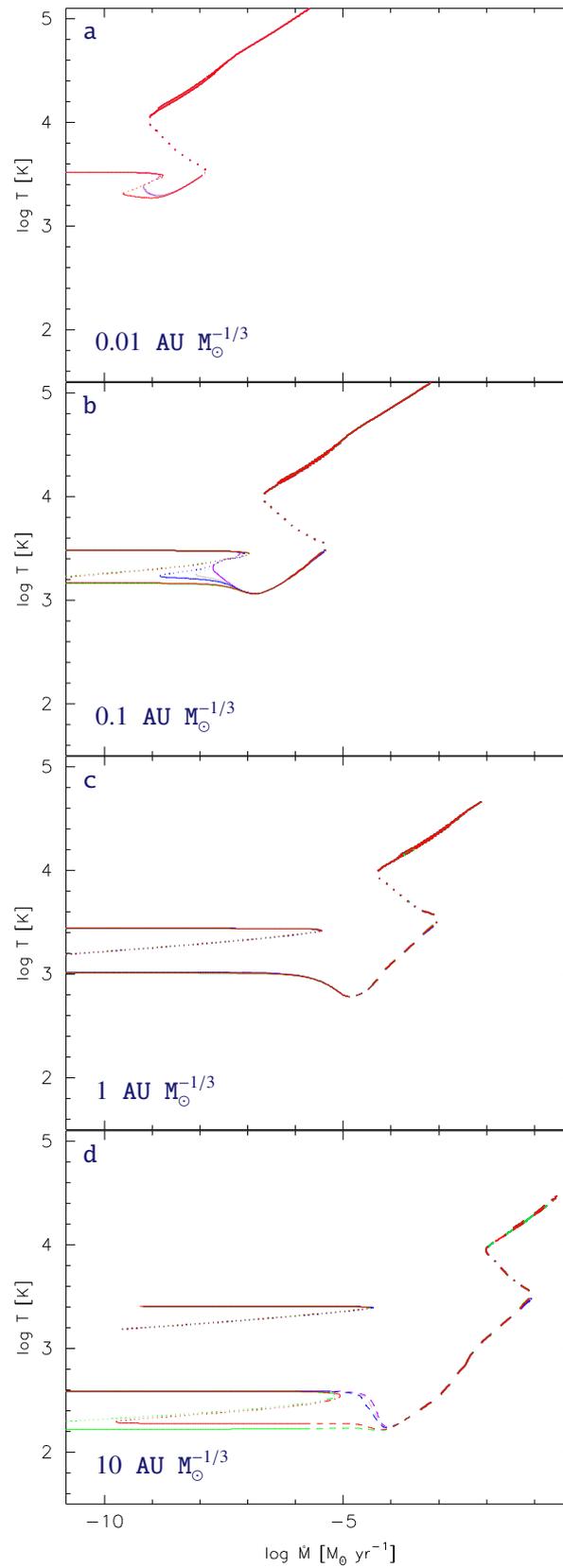


Abbildung 4.11.: Temperatur T versus \dot{M} bei (a) $q = 0.01$, (b) $q = 0.1$, (c) $q = 1$ sowie (d) $q = 10 \text{ AU } M_{\odot}^{-1/3}$ für einen Lithiumanteil von $f_{\text{Li}} = 0, 5 \cdot 10^{-11}, 10^{-10}, 5 \cdot 10^{-10}$ und $4.15 \cdot 10^{-11}$ (Pop-III).

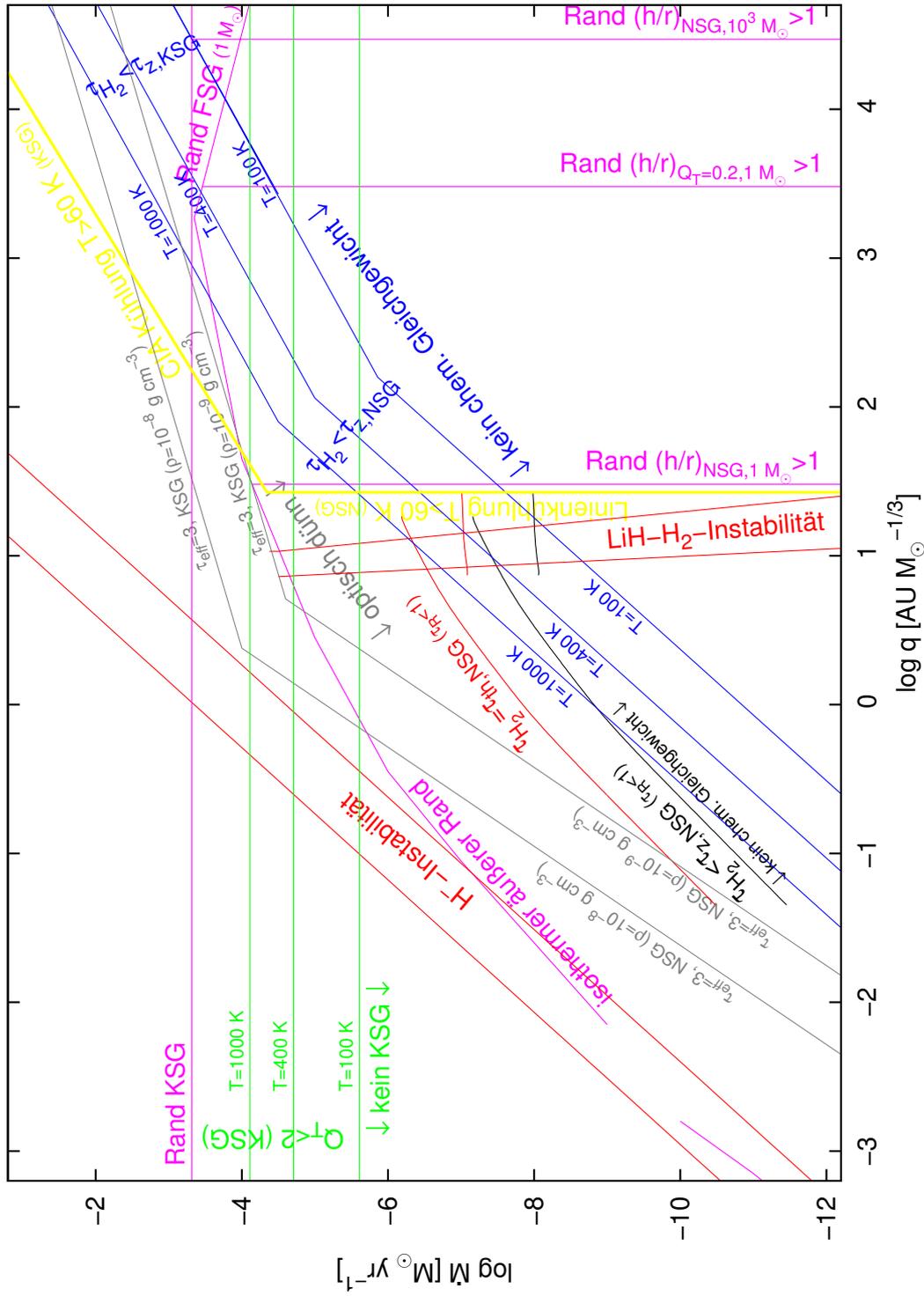


Abbildung 4.12.: Pop-III-Akkretionsscheibenmodell $\alpha = 0.01$ für verschiedene Akkretionsraten \dot{M} und radiale Abstände r . Die Beschriftung der Linien wurde auf der dem Kriterium entsprechenden Seite vorgenommen.

5. Zusammenfassung und Diskussion

5.1. Akkretionsscheiben

Es wurde ein Modell für stationäre Akkretionsscheiben entwickelt, welches dem Standardmodell (Pringle, 1981) geometrisch dünner Scheiben in Einzonenapproximation entspricht. Die Dissipationsenergie wird dabei lokal durch Strahlung abgegeben. Konvektion findet hier keine Berücksichtigung. Dieses Modell wurde durch zwei wesentliche Dinge erweitert.

Zum einen wurde vertikale Selbstgravitation mitberücksichtigt, d.h. das hydrostatische Gleichgewicht ist nicht nur das Gleichgewicht zwischen vertikalem Druckgradienten und der Vertikalkomponente der Zentralkraft, sondern zusätzlich noch der durch die lokale Massenverteilung entstehenden Kraft. Durch die Berücksichtigung von vertikaler Selbstgravitation werden Akkretionsscheiben Toomre-instabil, sobald die vertikale Beschleunigung durch die lokale Massenverteilung über die Vertikalkomponente der Zentralkraft dominiert. Dann wird der Toomre-Parameter kleiner als 2. Für Werte kleiner als ungefähr 1 (Der genaue Wert ist noch in der Diskussion) kann die Scheibe daher fragmentieren. Für Werte des Toomre-Parameters größer als 1 ist die Akkretionsscheibe stabil gegen Fragmentation.

Im Rahmen der von Shakura und Sunyaev (1973) vorgeschlagenen Viskositätsbeschreibung finden wir unter Annahme von isotroper Turbulenz (turbulente Längenskala gleich der Skalenhöhe), daß für Toomre-Parameter kleiner als 2α ($\alpha < 1$ ist der Viskositätsparameter) die turbulente Geschwindigkeit supersonisch wird. Da supersonische Turbulenz Schockwellen entwickelt, welche das Medium auf subsonische Werte relaxieren, ist dies ein Hinweis auf den von Paczynski (1978), Bertin (1997) sowie Bertin und Lodato (1999) vorgeschlagenen Selbstregulierungsmechanismus für selbstgravitierende Scheiben.

Weiterhin wurde im Fall von vertikaler Selbstgravitation eine Entkopplung der dynamischen von der hydrostatischen Zeitskala gefunden. Auf die Modellierung von voll selbstgravitierenden Scheiben wurde verzichtet.

Die zweite Modifikation betrifft den Übergang zu optisch dünnen Scheiben. In diesem Fall geht der Strahlungsdruck gegen Null, da die Photonen nicht mehr streuen und dadurch keinen Druck mehr ausüben können. Die Abstrahlung geht von der gewöhnlichen Strahlungsdiffusion in Volumenemission über.

Approximiert man lokal die Rosseland- und Planckmittel der Opazität durch Potenzgesetze ($\kappa_{R/P} \propto \rho^{A_{R/P}} T^{B_{R/P}}$), können Stabilitätskriterien für thermische und viskose Instabilität hergeleitet werden, die nur von den Koeffizienten $A_{R/P}$ und $B_{R/P}$ abhängen. Für die Grenzfälle optisch dick/dünn sowie im strahlungs- und gasdruckdominiertem Fall ergeben sich handliche Formeln. Im gasdruckdominiertem Fall konnte unabhängig von optisch dick/dünn gezeigt werden, daß eine viskose eine thermische Instabilität bedingt. Damit ist die landläufige Bezeichnung thermisch-viskose Instabilität gerechtfertigt. Für die thermischen Instabilitäten wurde gezeigt, daß im optisch dicken Fall stark positive Temperaturgradienten Instabilität verursachen, während im optisch dünnen Fall dies durch stark negative Temperaturgradienten hervorgerufen wird. Im $B_{R/P} - A_{R/P}$ -Diagramm liegt im gasdruckdominierten Fall zwischen dem Gebiet von Stabilität und thermischer Instabilität immer ein thermisch-viskose

instabiles Gebiet. Daher wird er Übergang zur thermischen Instabilität immer von einer thermisch-viskosen Instabilität begleitet, da die Opazitätsmittel sich kontinuierlich ändern.

5.2. Primordiale Opazität

Für die Modellierung primordialer Akkretionsscheiben benötigt man Materialfunktionen für die chemische Zusammensetzung primordialer Materie, beispielsweise die Opazität. Da frühere Rechnungen nur begrenzte Temperatur- und Dichtebereiche abdeckten, wurde ein Satz von Opazitäten für Temperaturen von 60-40 000 K und Dichten von $10^{-16} \dots 10^{-2} \text{ g cm}^{-3}$ berechnet. Die Grundannahmen in den Rechnungen sind chemisches und lokales thermodynamisches Gleichgewicht.

Die chemische Zusammensetzung der primordialen Elemente (Wasserstoff, Helium und Lithium) wurde aus der Kombination von WMAP und SBBN Ergebnissen beschafft.

Dabei wurde ein bislang unberücksichtigter Einfluß von Lithium gefunden. Obwohl Lithium nur wenig mehr als 10^{-10} zur Teilchendichte beiträgt, hat es aufgrund seiner im Vergleich zu Wasserstoff und Helium grundlegend verschiedenen physikalischen Eigenschaften großen Einfluß auf die Opazität.

Lithium ionisiert als Mitglied der Alkali-Elemente sehr früh und beeinflusst durch die zur Verfügung stehenden Elektronen das chemische Gleichgewicht. Es erhöht einerseits die H^- -Häufigkeit, andererseits erniedrigt es die Häufigkeit von H_3^+ -Ionen. Dieser Mechanismus hat Einfluß auf das Rosseland- und Planckmittel der Opazität gleichermaßen und tritt bei Temperaturen zwischen 1000 und 3000 K auf.

Atomares Lithium besitzt einen Übergang bei 6708 Å. Dieser liegt zwar für die Temperaturen, für die Lithium vorwiegend atomar vorliegt, weit außerhalb der Sensitivität der Planckfunktion (Äquivalenttemperatur ca. 20 000 K). Da aber unterhalb von 1000 K nur molekulare Absorption stattfindet (Staub fehlt aufgrund der Abwesenheit schwerer Elemente), die für H_2 ungleich schwächer ist im Vergleich zu Staubabsorption, und zudem der Einsteinkoeffizient dieses Übergangs 6 Größenordnungen größer ist als der vergleichbarer H_2 Quadrupolübergänge, kann dieser Übergang die Opazität für niedrige Dichten und Temperaturen um die 1000 K dominieren.

Für Temperaturen unter 500 K schwindet der Einfluß von H_2 Absorption, da der am tiefsten liegende Übergang von H_2 eine Äquivalenttemperatur von 511 K besitzt. Für noch niedrigere Temperaturen hat man HD (128 K) oder LiH (15 K). Es zeigt sich, daß für die gewählte Pop-III-Zusammensetzung HD nur eine untergeordnete Rolle spielt, jedoch LiH die Opazität unterhalb von 400 K dominiert.

Der Vergleich mit anderen Opazitätsrechnungen ohne Berücksichtigung von Lithium ergibt im Wesentlichen eine mit dem Publikationsjahr zunehmende Übereinstimmung. Dies liegt vor allem an den Verbesserungen in der Modellierung von CIA-Absorption und dem Verständnis von H_3^+ .

Ein wesentlicher Punkt der vorliegenden Opazitätsrechnungen ist die Annahme des chemischen Gleichgewichts. Für primordiale Materie wissen wir jedoch, daß Molekülbildung stark unterdrückt ist. Insbesondere die Bildung von H_2 , normalerweise eine oberflächenkatalytische Reaktion kann in Abwesenheit von Oberflächen (Staub, Eis, etc.) nicht ablaufen. Daher muß H_2 auf exotischer Art und Weise gebildet werden. Dies geschieht entweder über die ionischen Reaktionskanäle via H^- und H_2^+ für niedrige bzw. hohe Temperaturen und niedriger Dichte. Bei hohen Dichten setzen jedoch Dreikörperreaktionen ein, welche effizient atomaren in molekularen Wasserstoff konvertieren. Für HD und LiH sind die ionischen/neutralen Zweikörper-Reaktionskanäle ebenfalls bekannt, jedoch fehlen hier Informationen über Dreikörperreaktionen vollständig.

Abschätzungen für typische Molekülbildungszeitskalen mit den zur Verfügung stehenden Reaktionsraten zeigen, daß für $\rho > 3.2 \cdot 10^{-14} \text{ g cm}^{-3}$ eine Molekülbildungszeitskala innerhalb einer Freifall-Zeitskala abläuft.

Ein weiteres Ergebnis dieser Rechnungen sind Abschätzungen über das Kühlverhalten von primordialer Materie. Viele Autoren (Bromm et al., 1999; Abel et al., 2000, etc.) finden unter alleiniger Berücksichtigung der Wasserstoffchemie einen bevorzugten Zustand primordialer Materie von $T = 200$ K und $n = 10^4$ cm⁻³. Weitere Kühlung ist mit H₂ nicht oder nur noch schwerlich möglich. Primordiale Materie ist hier in einem quasihydrostatischen Zustand. Daher ist dieser Zustand der Ausgangspunkt für den Kollaps, da die einzige Möglichkeit für die Überwindung dieses Zustands der gravitative Kollaps per Jeans-Instabilität ist. Die charakteristische Jeansmasse beträgt 700 M_⊙. Durch simplen Vergleich mit heutigen Molekülwolken, die aufgrund von CO auf 10 K kühlen können, kann man schließen, daß die ersten Sterne massereich gewesen sein müssen.

Die vorliegenden Opazitäten für Linienabsorption können benutzt werden, um LTE Kühlfunktionen zu berechnen. Die Kühlfunktion ist im Wesentlichen proportional zum Planckmittel multipliziert mit σT^4 . Aufgrund der Linearität des Planckmittels kann man die Kühlfunktion pro Spezies angeben, nur abhängig von der Temperatur. Bildet man das Verhältnis von Kühlfunktion von Spezies A zu Spezies B, so ergibt sich eine Proportionalität zum Quotienten von Teilchendichte sowie einem temperaturabhängigen Term $\xi(T)$, bestimmt durch Einsteinkoeffizienten, Besetzungszahlwahrscheinlichkeiten und Zustandssummen von Spezies A zu Spezies B. Nimmt man weiterhin an, daß beispielsweise das Verhältnis der Teilchendichte von Spezies A zu Wasserstoff nie den Wert f_A übersteigen kann, so ist die Kühlung von Spezies A relativ zu H₂ effektiver, wenn $n_A/n_{H_2} > \xi_{H_2}/\xi_A$ ist. Setzt man als obere Grenzen für n_A/n_{H_2} lediglich die primordialen Elementhäufigkeiten voraus, so findet man, daß für Temperaturen kleiner als 100 K Kühlung durch HD relativ zu H₂ dominiert, jedoch schon für Temperaturen unter 400 K LiH effektiver kühlt als H₂. Dies wird noch weiter vervollständigt mit dem Befund, daß für Temperaturen über 1250 K Li-Atome weitaus besser kühlen als H₂-Moleküle.

Sämtliche Argumentation geht einmal mehr von chemischem Gleichgewicht aus. Im Nichtgleichgewicht ist beispielsweise H₂ unterhäufig (Bruchteile 10⁻⁴ der Häufigkeit von atomarem Wasserstoff), daher sind die als Obergrenze angenommenen primordialen Häufigkeitsverhältnisse nur untere Abschätzungen. Für einen H₂-Bruchteil von 10⁻⁴ würden sich die Temperaturgrenze für effiziente Li-Atom-Kühlung auf 600 K senken.

5.3. Primordiale Akkretionsscheibenmodellierung

Die berechnete Opazität für primordiale Materie wurde zusammen mit einer Pop-I-Opazität benutzt, um Modelle für Pop-I- und Pop-III-Akkretionsscheiben mit und ohne Linienabsorption zu berechnen. Diese Modelle wurden abhängig von einer generalisierten Ortskoordinate (die die Zentralmasse mitbeinhaltet) dargestellt. Dies erlaubt die leichte Transformation der Ergebnisse auf andere Zentralmassen.

Der Vergleich zwischen Pop-I- und Pop-III-Scheiben zeigt nahezu dasselbe Verhalten für Temperaturen über 10⁴ K modulo geringfügigen Abweichungen durch die Absorption von schwereren Elementen im Fall von Pop-I-Materie. Unterhalb von 10⁴ K treten jedoch die Unterschiede zwischen Pop-I- und Pop-III-Akkretionsscheiben deutlich hervor. Für Pop-I-Scheiben folgt auf die H⁻-Instabilität Molekül-Absorption mit anschließender weiterer Kühlung durch Staub und Eis und die Scheibe bleibt im wesentlichen optisch dick.

Für Akkretionsraten über 10⁻⁵ M_⊙ yr⁻¹ sind die unter 3000 K kühlenden äußeren Gebiete der Pop-III-Scheibe durch CIA(H₂/H₂)-Absorption dominiert und größtenteils optisch dick und KSG. Je größer die Akkretionsrate, desto größer die Ausdehnung der Scheibe. Die einzige Instabilität ist die H⁻-Instabilität. Die Chemie ist vollständig im Gleichgewicht.

Unter 10⁻⁵ M_⊙ yr⁻¹ ist die äußere unter 3000 K kühlende Scheibe durch Linienkühlung dominiert.

Zwischen $10^{-5} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ und $10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ tritt die thermische LiH-H₂-Instabilität auf. Die Chemie ist noch im Gleichgewicht. Um $10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ wird im Bereich der LiH-H₂-Instabilität die thermische Zeitskala gleich der chemischen Reaktionszeitskala. Dies könnte chemothermische Instabilitäten bewirken. Unter $10^{-7} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ ist die Chemie in den äußeren linien-kühlenden Gebieten nicht mehr im Gleichgewicht.

Unter $10^{-6} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ tritt im Rahmen der hier verwendeten α -Viskosität unabhängig von der chemischen Zusammensetzung, jedoch für $\alpha = 0.01$, keine KSG-Lösung mehr auf — vorausgesetzt die Scheibe erreicht Temperaturen von 60 K.

Pop-III-Scheiben besitzen zusätzlich einen äußeren, isothermen Bereich mit Temperaturen von ca. 3440 K. Er tritt auf für Akkretionsraten kleiner als $10^{-4} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$. Das auftretende Zusammenbrechen der dünne-Scheiben-Näherung tritt mit zunehmender Zentralmasse bei immer größeren Abständen auf. Für Akkretionsraten größer als $10^{-9} M_{\odot} \text{ yr}^{-1}$ ist die Hochtemperaturlösung ($T > 3000$ K) direkt mit der unter 3000 K kühlenden stabilen Lösung verbunden. Darunter geht die Hochtemperaturlösung direkt in die isotherme Akkretion über. Der linienkühlende Teil der Lösung tritt parallel dazu, aber getrennt, auf.

Die Untersuchung der thermischen und thermisch-viskosen Instabilitäten zeigte, daß für Pop-III-Scheiben im Gegensatz zu Pop-I-Scheiben aufgrund des Fehlens molekularer Absorption durch CO, H₂O, TiO etc. die durch die H⁻-Instabilität möglichen Akkretionsratensprünge deutlich größer sind. Pop-I-Scheiben haben dennoch die Möglichkeit, direkt aus dem staubdominierten Gebiet ($T \approx 1000$ K) auf den heißen Ast ($T \approx 10^4$ K) zu springen unter starker Zunahme der Akkretionsrate. Jedoch bleibt selbst in diesem Fall die zu erwartenden Akkretionsratensprünge immer noch hinter denen für Pop-III-Scheiben zurück.

5.4. Ausblick

Mit der genauen und detaillierten Kenntnis der Struktur und Stabilität von Pop-III-Akkretionsscheiben kann nun die zeitabhängige Modellierung angegangen werden. Charakteristische Akkretionsraten, bei denen diverse Physik berücksichtigt werden muß (chemische Reaktionen, dünne-Scheibennäherung ungültig, ...), und bei der die charakteristischen Instabilitäten auftreten, wurden identifiziert. Die zeitabhängige Modellierung kann dazu in einem 1+1-dimensionalen Code angegangen werden, der die zeitabhängige viskose und thermische Entwicklung der Scheibe berücksichtigt. Dabei könnte man die z-Struktur mit auflösen, um den Einfluß von Konvektion auf den Energietransport zu untersuchen. Desweiteren muß man sich um die mögliche Irradiation des Zentralsterns auf die isotherm akkretierenden Teile der Scheibe kümmern. Das ultimative Ziel dieser Arbeit sollte die Kopplung mit Pop-III-Sternentwicklungsrechnungen (vgl. Straka, 2002) sein. Damit können Fragen der akkretierbaren Masse und Feedbackmechanismen untersucht werden. Der letztendlich einzig freie Parameter sollte die Akkretionsrate sein, mit der die Akkretionsscheibe gefüttert wird.

Während dies aber eher eine große Anforderung an die Modellierung und Numerik der Simulation stellt, erscheinen im Rahmen der Ergebnisse der Opazitätsberechnung weitere, im Vergleich dazu kleinere Projekte interessant: Die gefundene, möglicherweise für manche Akkretionsraten gefundene chemo-thermische Instabilität für LiH-H₂ bedarf einer Stabilitätsanalyse.

Der in den Opazitätsrechnungen gefundene Einfluß von Li auf die Kühlung von primordialem Gas sollte in Kollapsrechnungen mitberücksichtigt und dessen Einfluß auf die Entwicklung abgeschätzt werden. Das Gleiche gilt für LiH. Um das Modell möglichst einfach zu halten, könnte man einen ähnlichen Ansatz wie Palla et al. (1983) verwenden, d.h. die kollabierende Wolke in einer Einzonennäherung beschreiben. Dadurch sollten sich grundlegende Änderungen durch die hinzugefügte

Külmöglichkeiten abschätzen lassen. Wird ein Einfluß von Li bzw. LiH gefunden, so verändert dies die IMF der Pop-III-Sterne hin zu kleineren Massen.

A. Opazitätstabellen

log T [K]	log ρ [g cm ⁻³]															
	-16.00	-15.00	-14.00	-13.00	-12.00	-11.00	-10.00	-9.00	-8.00	-7.00	-6.00	-5.00	-4.00	-3.00	-2.00	
1.80	-13.05	-12.62	-12.11	-11.51	-10.73	-9.79	-8.79	-7.79	-6.79	-5.79	-4.79	-3.79	-2.79	-1.79	-0.79	
1.90	-12.77	-12.35	-11.86	-11.29	-10.53	-9.58	-8.58	-7.59	-6.59	-5.59	-4.59	-3.59	-2.59	-1.59	-0.58	
2.00	-12.48	-12.08	-11.60	-11.06	-10.29	-9.34	-8.35	-7.36	-6.36	-5.36	-4.36	-3.36	-2.36	-1.36	-0.36	
2.10	-12.22	-11.82	-11.36	-10.83	-10.08	-9.15	-8.18	-7.19	-6.20	-5.20	-4.20	-3.20	-2.20	-1.20	-0.20	
2.20	-11.95	-11.57	-11.11	-10.60	-9.89	-8.99	-8.05	-7.10	-6.14	-5.17	-4.18	-3.18	-2.18	-1.18	-0.18	
2.30	-11.68	-11.32	-10.87	-10.37	-9.69	-8.84	-7.97	-7.10	-6.23	-5.32	-4.38	-3.41	-2.42	-1.42	-0.43	
2.40	-11.41	-11.06	-10.61	-10.13	-9.49	-8.70	-7.91	-7.14	-6.37	-5.57	-4.72	-3.79	-2.80	-1.80	-0.80	
2.50	-11.14	-10.80	-10.36	-9.88	-9.28	-8.55	-7.84	-7.16	-6.50	-5.80	-5.01	-4.08	-3.09	-2.09	-1.09	
2.60	-10.86	-10.54	-10.10	-9.62	-9.06	-8.39	-7.74	-7.15	-6.55	-5.89	-5.04	-4.07	-3.07	-2.07	-1.07	
2.70	-10.58	-10.27	-9.84	-9.36	-8.82	-8.20	-7.61	-7.09	-6.56	-5.88	-4.98	-4.00	-3.00	-2.00	-1.00	
2.80	-10.29	-10.00	-9.57	-9.10	-8.58	-8.00	-7.45	-6.98	-6.47	-5.74	-4.80	-3.82	-2.82	-1.83	-0.82	
2.90	-9.93	-9.72	-9.30	-8.83	-8.32	-7.78	-7.27	-6.83	-6.30	-5.49	-4.54	-3.59	-2.62	-1.63	-0.63	
3.00	-8.81	-8.93	-8.92	-8.56	-8.07	-7.54	-7.06	-6.62	-6.01	-5.16	-4.30	-3.47	-2.55	-1.60	-0.63	
3.10	-7.76	-7.87	-8.00	-8.06	-7.77	-7.29	-6.82	-6.36	-5.68	-4.91	-4.26	-3.54	-2.76	-1.94	-1.06	
3.20	-7.40	-7.40	-7.40	-7.38	-7.25	-6.95	-6.55	-6.08	-5.41	-4.82	-4.33	-3.71	-3.08	-2.34	-1.63	
3.30	-7.12	-7.11	-7.11	-7.08	-6.93	-6.57	-6.22	-5.78	-5.21	-4.76	-4.37	-3.86	-3.33	-2.69	-2.17	
3.40	-6.16	-6.33	-6.49	-6.62	-6.62	-6.41	-6.14	-5.84	-5.20	-4.71	-4.30	-3.85	-3.41	-2.92	-2.53	
3.50	-4.52	-4.84	-5.12	-5.36	-5.56	-5.66	-5.60	-5.38	-4.95	-4.52	-4.14	-3.70	-3.21	-2.73	-2.35	
3.60	-2.54	-3.00	-3.43	-3.82	-4.16	-4.40	-4.42	-4.16	-3.75	-3.02	-2.60	-2.28	-1.90	-1.55	-1.22	
3.70	-0.86	-1.26	-1.72	-2.18	-2.62	-2.94	-2.78	-2.41	-1.97	-1.50	-1.04	-0.61	-0.30	0.04	0.35	
3.80	-0.53	-0.53	-0.60	-0.82	-1.15	-1.42	-1.41	-1.13	-0.74	-0.33	0.13	0.58	1.00	1.32	1.62	
3.90	-0.52	-0.52	-0.52	-0.49	-0.37	-0.16	0.00	0.19	0.43	0.73	1.09	1.50	1.95	2.33	2.50	
4.00	-0.49	-0.49	-0.51	-0.51	-0.43	-0.07	0.63	1.24	1.54	1.77	2.01	2.33	2.51	2.92	3.23	
4.10	-0.49	-0.49	-0.49	-0.48	-0.46	-0.28	0.28	1.17	2.02	2.54	2.85					
4.20	-0.49	-0.49	-0.49	-0.48	-0.46	-0.38	-0.02	0.71	1.69	2.67	3.33					
4.30	-0.47	-0.48	-0.49	-0.48	-0.46	-0.40	-0.20	0.38	1.31	2.35	3.38					
4.40	-0.46	-0.46	-0.46	-0.46	-0.46	-0.40	-0.25	0.18	1.04	2.10	3.20					
4.50	-0.46	-0.46	-0.46	-0.46	-0.45	-0.40	-0.23	0.13	0.91	1.94	3.06					
4.60	-0.46	-0.46	-0.46	-0.46	-0.45	-0.43	-0.27	0.16	0.92	1.91	2.99					

Tabelle A.1.: Rosselandmittel der Opazität $\log \kappa_R$ [cm² g⁻¹] für primordiale (Pop-III) chemische Zusammensetzung (siehe Tabelle 3.1).

log T [K]	log ρ [g cm ⁻³]															
	-16.00	-15.00	-14.00	-13.00	-12.00	-11.00	-10.00	-9.00	-8.00	-7.00	-6.00	-5.00	-4.00	-3.00	-2.00	
1.80	-14.39	-13.39	-12.39	-11.39	-10.39	-9.39	-8.39	-7.39	-6.39	-5.39	-4.39	-3.39	-2.39	-1.39	-0.39	
1.90	-14.18	-13.18	-12.18	-11.18	-10.18	-9.18	-8.18	-7.18	-6.18	-5.18	-4.18	-3.18	-2.18	-1.18	-0.18	
2.00	-14.03	-13.03	-12.03	-11.03	-10.03	-9.03	-8.03	-7.03	-6.03	-5.03	-4.03	-3.03	-2.03	-1.03	-0.03	
2.10	-13.92	-12.92	-11.92	-10.92	-9.92	-8.92	-7.92	-6.92	-5.92	-4.92	-3.92	-2.92	-1.92	-0.92	0.08	
2.20	-13.84	-12.84	-11.84	-10.84	-9.84	-8.84	-7.84	-6.84	-5.84	-4.84	-3.84	-2.84	-1.84	-0.84	0.16	
2.30	-13.79	-12.79	-11.79	-10.79	-9.79	-8.79	-7.79	-6.79	-5.79	-4.79	-3.79	-2.79	-1.79	-0.79	0.21	
2.40	-13.78	-12.78	-11.78	-10.78	-9.78	-8.78	-7.78	-6.78	-5.78	-4.78	-3.78	-2.78	-1.78	-0.78	0.22	
2.50	-13.80	-12.80	-11.80	-10.80	-9.80	-8.80	-7.80	-6.80	-5.80	-4.80	-3.80	-2.80	-1.80	-0.80	0.20	
2.60	-13.84	-12.84	-11.84	-10.84	-9.84	-8.84	-7.84	-6.84	-5.84	-4.84	-3.84	-2.84	-1.84	-0.84	0.16	
2.70	-13.87	-12.87	-11.87	-10.87	-9.87	-8.87	-7.87	-6.87	-5.87	-4.87	-3.87	-2.87	-1.87	-0.87	0.13	
2.80	-13.88	-12.88	-11.88	-10.88	-9.89	-8.89	-7.89	-6.89	-5.89	-4.89	-3.88	-2.88	-1.88	-0.88	0.12	
2.90	-13.85	-12.85	-11.85	-10.85	-9.85	-8.85	-7.85	-6.85	-5.85	-4.85	-3.85	-2.85	-1.85	-0.85	0.15	
3.00	-13.75	-12.75	-11.75	-10.75	-9.75	-8.75	-7.75	-6.75	-5.75	-4.75	-3.75	-2.75	-1.75	-0.75	0.25	
3.10	-13.59	-12.61	-11.61	-10.60	-9.60	-8.60	-7.60	-6.60	-5.60	-4.60	-3.60	-2.60	-1.60	-0.60	0.40	
3.20	-13.80	-12.76	-11.64	-10.54	-9.51	-8.51	-7.50	-6.50	-5.50	-4.50	-3.50	-2.50	-1.50	-0.50	0.50	
3.30	-14.06	-13.06	-12.06	-11.05	-9.97	-8.72	-7.53	-6.46	-5.44	-4.43	-3.43	-2.43	-1.43	-0.43	0.57	
3.40	-12.33	-11.82	-11.30	-10.73	-10.05	-9.19	-8.22	-7.18	-5.82	-4.56	-3.47	-2.44	-1.43	-0.43	0.57	
3.50	-9.70	-9.22	-8.73	-8.23	-7.73	-7.23	-6.72	-6.19	-5.51	-4.60	-3.69	-2.57	-1.50	-0.47	0.54	
3.60	-6.65	-6.57	-6.39	-6.08	-5.66	-5.19	-4.70	-4.21	-3.71	-3.21	-2.72	-2.23	-1.52	-0.53	0.49	
3.70	-3.71	-3.52	-3.46	-3.42	-3.36	-3.23	-2.96	-2.58	-2.12	-1.63	-1.14	-0.69	-0.33	0.12	0.71	
3.80	-3.49	-2.52	-1.66	-1.18	-1.00	-0.94	-0.89	-0.81	-0.63	-0.31	0.11	0.57	1.01	1.37	1.76	
3.90	-3.93	-2.94	-1.94	-0.95	-0.02	0.62	0.89	0.99	1.04	1.12	1.30	1.61	2.02	2.40	2.74	
4.00	-4.29	-3.30	-2.34	-1.38	-0.38	0.60	1.52	2.13	2.38	2.47	2.54	2.66	2.89	3.23	3.54	
4.10	-4.74	-3.74	-2.74	-1.74	-0.75	0.20	1.17	2.14	2.95	3.39	3.55					
4.20	-5.18	-4.18	-3.18	-2.18	-1.18	-0.18	0.81	1.77	2.72	3.60	4.14					
4.30	-5.40	-4.54	-3.60	-2.61	-1.61	-0.61	0.39	1.39	2.37	3.31	4.18					
4.40	-5.75	-4.75	-3.76	-2.82	-1.95	-1.00	0.00	1.00	2.00	2.99	3.93					
4.50	-6.13	-5.13	-4.13	-3.13	-2.13	-1.15	-0.25	0.68	1.67	2.67	3.66					
4.60	-6.45	-5.45	-4.45	-3.45	-2.45	-1.45	-0.45	0.53	1.46	2.42	3.41					

Tabelle A.2.: Planckmittel der Opazität $\log \kappa_{\text{P}}$ [cm² g⁻¹] für die primordiale (Pop-III) chemische Zusammensetzung (siehe Tabelle 3.1) ohne Linien.

log T [K]	log ρ [g cm ⁻³]														
	-16.00	-15.00	-14.00	-13.00	-12.00	-11.00	-10.00	-9.00	-8.00	-7.00	-6.00	-5.00	-4.00	-3.00	-2.00
1.80	-4.36	-4.36	-4.36	-4.36	-4.36	-4.36	-4.36	-4.36	-4.36	-4.32	-4.07	-3.34	-2.38	-1.39	-0.39
1.90	-4.54	-4.54	-4.54	-4.54	-4.54	-4.54	-4.54	-4.53	-4.53	-4.45	-4.02	-3.16	-2.18	-1.18	-0.18
2.00	-4.71	-4.71	-4.71	-4.71	-4.71	-4.71	-4.71	-4.71	-4.69	-4.54	-3.95	-3.02	-2.03	-1.03	-0.03
2.10	-4.89	-4.89	-4.89	-4.89	-4.89	-4.89	-4.89	-4.88	-4.85	-4.60	-3.88	-2.92	-1.92	-0.92	0.08
2.20	-5.06	-5.06	-5.06	-5.06	-5.06	-5.06	-5.05	-5.05	-4.99	-4.63	-3.81	-2.83	-1.84	-0.84	0.16
2.30	-5.39	-5.29	-5.24	-5.22	-5.22	-5.22	-5.22	-5.21	-5.11	-4.65	-3.77	-2.79	-1.79	-0.79	0.21
2.40	-6.01	-5.98	-5.90	-5.75	-5.57	-5.45	-5.40	-5.36	-5.23	-4.68	-3.77	-2.78	-1.78	-0.78	0.22
2.50	-6.08	-6.08	-6.08	-6.07	-6.05	-5.98	-5.86	-5.68	-5.39	-4.73	-3.79	-2.80	-1.80	-0.80	0.20
2.60	-6.13	-6.13	-6.13	-6.13	-6.13	-6.12	-6.10	-6.00	-5.60	-4.80	-3.83	-2.84	-1.84	-0.84	0.16
2.70	-6.16	-6.16	-6.16	-6.16	-6.16	-6.16	-6.15	-6.08	-5.68	-4.84	-3.87	-2.87	-1.87	-0.87	0.13
2.80	-6.15	-6.15	-6.15	-6.15	-6.15	-6.15	-6.14	-6.07	-5.69	-4.86	-3.88	-2.88	-1.88	-0.88	0.12
2.90	-6.05	-6.05	-6.05	-6.05	-6.05	-6.05	-6.05	-5.99	-5.64	-4.82	-3.85	-2.85	-1.85	-0.85	0.15
3.00	-5.91	-5.91	-5.91	-5.91	-5.91	-5.91	-5.91	-5.85	-5.52	-4.72	-3.74	-2.75	-1.75	-0.75	0.25
3.10	-5.73	-5.57	-5.51	-5.48	-5.48	-5.48	-5.47	-5.44	-5.23	-4.55	-3.60	-2.60	-1.60	-0.60	0.40
3.20	-8.02	-7.06	-6.31	-5.82	-5.27	-4.83	-4.65	-4.58	-4.52	-4.23	-3.46	-2.50	-1.50	-0.50	0.50
3.30	-11.02	-10.02	-9.02	-8.02	-7.07	-6.32	-5.79	-5.08	-4.33	-3.84	-3.29	-2.41	-1.43	-0.43	0.57
3.40	-12.05	-11.51	-10.91	-10.20	-9.34	-8.39	-7.42	-6.53	-5.62	-4.51	-3.44	-2.42	-1.43	-0.43	0.57
3.50	-9.69	-9.21	-8.72	-8.22	-7.72	-7.22	-6.71	-6.18	-5.50	-4.59	-3.69	-2.57	-1.50	-0.47	0.54
3.60	-6.65	-6.57	-6.39	-6.08	-5.66	-5.19	-4.70	-4.21	-3.71	-3.21	-2.72	-2.23	-1.52	-0.53	0.49
3.70	-3.71	-3.52	-3.46	-3.42	-3.36	-3.23	-2.96	-2.58	-2.12	-1.63	-1.14	-0.69	-0.33	0.12	0.71
3.80	-3.49	-2.52	-1.66	-1.18	-1.00	-0.94	-0.89	-0.81	-0.63	-0.31	0.11	0.57	1.01	1.37	1.76
3.90	-3.84	-2.93	-1.94	-0.95	-0.02	0.62	0.89	0.99	1.04	1.12	1.30	1.61	2.02	2.40	2.74
4.00	-3.87	-2.91	-2.08	-1.32	-0.38	0.61	1.52	2.13	2.38	2.47	2.54	2.66	2.89	3.23	3.54
4.10	-4.53	-3.53	-2.53	-1.54	-0.58	0.28	1.18	2.14	2.95	3.39	3.55				
4.20	-5.08	-4.08	-3.08	-2.08	-1.08	-0.08	0.90	1.81	2.73	3.60	4.14				
4.30	-5.39	-4.50	-3.55	-2.55	-1.55	-0.56	0.44	1.44	2.41	3.33	4.18				
4.40	-5.75	-4.75	-3.76	-2.81	-1.93	-0.97	0.02	1.02	2.02	3.01	3.94				
4.50	-6.13	-5.13	-4.13	-3.13	-2.13	-1.15	-0.24	0.69	1.68	2.68	3.67				
4.60	-6.45	-5.45	-4.45	-3.45	-2.45	-1.45	-0.45	0.53	1.47	2.43	3.42				

Tabelle A.3.: Planckmittel der Opazität $\log \kappa_{\text{P}}$ [cm² g⁻¹] für die primordiale (Pop-III) chemische Zusammensetzung (siehe Tabelle 3.1) mit Linien.

B. Thermische und viskose Instabilität

Wir haben in 4.1 2 Gleichungen entwickelt (Gln. 4.1 und 4.2). Mittels der Drehimpulsgleichung (2.22) kann diese in ein System aus 3 Gleichungen in ρ , T und Σ geschrieben werden :

$$P = \rho \frac{k_B T}{\mu m_p} + \frac{4\sigma T^4}{3c\tau_{\text{eff}}} \left(\tau_R + \frac{4}{3} \right) = G \left(\frac{M}{4\rho r^3} + \pi \right) \Sigma^2 \quad (\text{B.1})$$

$$Q^+ = \frac{9}{8} \nu_t \Sigma \Omega^2 = \frac{4\sigma}{3\tau_{\text{eff}}} T^4 = Q^- \quad (\text{B.2})$$

$$\dot{M} = 3\pi \nu_t \Sigma . \quad (\text{B.3})$$

Hier ist ν_t und $\tau_{\text{eff}/R/P}$ jeweils eine Funktion von ρ , T und Σ . Im Folgenden soll \bar{x} für $\log x$ stehen.

B.1. Viskose Instabilität

Unser Instabilitätskriterium (2.30) für viskose Instabilität benötigt die Ableitung

$$\left(\frac{\partial \log \dot{M}}{\partial \log \Sigma} \right)_{P, Q^+ = Q^-} = \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{\Sigma}} . \quad (\text{B.4})$$

Gleichungen B.1 und B.2 liefern uns die Variation in Q^+ , Q^- und P :

$$\begin{aligned} \delta \bar{Q}^+ &= \left(\frac{\partial \bar{\nu}_t}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \bar{\nu}_t}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \bar{\nu}_t}{\partial \bar{\Sigma}} + 1 \right) \delta \bar{\Sigma} , \\ \delta \bar{Q}^- &= \left[\left(4 - \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial \bar{T}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} - \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} - \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial \bar{\Sigma}} \right] \delta \bar{\Sigma} , \\ \text{und } \delta P &= \rho \frac{k_B T}{\mu m_p} \left[\left(1 - \frac{\partial \mu}{\partial \rho} \right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} \right] \delta \bar{\Sigma} \\ &\quad + \frac{4\sigma}{3c\tau_{\text{eff}}} T^4 \left(\tau_R + \frac{4}{3} \right) \left[-\frac{\partial \bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \left(4 - \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial \bar{T}} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} - \frac{\partial \bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial \bar{\Sigma}} \right] \delta \bar{\Sigma} \\ &\quad + \frac{4\sigma \tau_R}{3c\tau_{\text{eff}}} T^4 \left(\frac{\partial \bar{\tau}_R}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \bar{\tau}_R}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \bar{\tau}_R}{\partial \bar{\Sigma}} \right) \delta \bar{\Sigma} \\ &= 2G \left[\pi + \frac{M}{4\rho r^3} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} \right) \right] \Sigma^2 \delta \bar{\Sigma} . \end{aligned}$$

Mit den Abkürzungen

$$P_{\text{gas}} = \rho \frac{k_B T}{\mu m_p} , \quad P_{\text{rad}} = \frac{4\sigma}{3c\tau_{\text{eff}}} T^4 \left(\tau_R + \frac{4}{3} \right) , \quad P_c = \frac{GM}{4\rho r^3} \Sigma^2 \quad \text{und} \quad P_{\text{KSG}} = \pi G \Sigma^2 ,$$

sowie

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = P_c + P_{\text{KSG}} , \quad \beta_P = \frac{P_{\text{gas}}}{P} \quad \text{und} \quad \eta_{\text{KSG}} = \frac{P_c}{P} = \frac{M}{4\pi \rho r^3 + M} ,$$

können wir die letzte Beziehung etwas kompakter schreiben:

$$\delta\bar{P} = \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\rho}} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{\Sigma}} + \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{T}} \frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\Sigma}} + \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\Sigma}} = 2 - \eta_{\text{KSG}} \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{\Sigma}}, \quad (\text{B.5})$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\rho}} &= \beta_{\text{P}} \left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + (1 - \beta_{\text{P}}) \left(-\frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{\rho}} + \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{R}} + \frac{4}{3}} \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{R}}}{\partial\bar{\rho}}\right) \\ \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{T}} &= \beta_{\text{P}} \left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{T}}\right) + (1 - \beta_{\text{P}}) \left(4 - \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{T}} + \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{R}} + \frac{4}{3}} \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{R}}}{\partial\bar{T}}\right) \\ \text{und} \quad \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\Sigma}} &= (1 - \beta_{\text{P}}) \left(-\frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{\Sigma}} + \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{R}} + \frac{4}{3}} \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{R}}}{\partial\bar{\Sigma}}\right) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tau_{\text{R/P}} &= \frac{1}{2} \sum_{\text{K}_{0,\text{R/P}}} \rho^{A_{\text{R/P}}} T^{B_{\text{R/P}}} & \tau_{\text{eff}} &= \tau_{\text{R}} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3\tau_{\text{P}}} \\ \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{R/P}}}{\partial\bar{\rho}} &= A_{\text{R/P}} & \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial(\bar{\rho}, \bar{T}, \bar{\Sigma})} &= \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{eff}}} \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{R}}}{\partial(\bar{\rho}, \bar{T}, \bar{\Sigma})} - \frac{2}{3\tau_{\text{P}}\tau_{\text{eff}}} \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{P}}}{\partial(\bar{\rho}, \bar{T}, \bar{\Sigma})} \\ \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{R/P}}}{\partial\bar{T}} &= B_{\text{R/P}} & \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{\rho}} &= A_{\text{R}} \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{eff}}} - A_{\text{P}} \frac{2}{3\tau_{\text{P}}\tau_{\text{eff}}} \\ \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{R/P}}}{\partial\bar{\Sigma}} &= 1 & \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{T}} &= B_{\text{R}} \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{eff}}} - B_{\text{P}} \frac{2}{3\tau_{\text{P}}\tau_{\text{eff}}} \\ & & \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{\Sigma}} &= \frac{\tau_{\text{R}}}{\tau_{\text{eff}}} - \frac{2}{3\tau_{\text{P}}\tau_{\text{eff}}} \end{aligned}$$

Unsere gesuchte Ableitung (Gl. B.4) muß nun die beiden Nebenbedingungen erfüllen:

$$\delta(Q^+ - Q^-) = 0 \quad \text{und} \quad \delta P = 0.$$

Wir bekommen damit folgende 2 Gleichungen ($x = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial\bar{\Sigma}}, y = \frac{\partial\bar{T}}{\partial\bar{\Sigma}}$)

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0 \\ Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial\bar{v}_t}{\partial\bar{\rho}} + \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{\rho}} & D &= \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\rho}} + \eta_{\text{KSG}} \\ B &= \frac{\partial\bar{v}_t}{\partial\bar{T}} + \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{T}} - 4 & E &= \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{T}} \\ C &= \frac{\partial\bar{v}_t}{\partial\bar{\Sigma}} + \frac{\partial\bar{\tau}_{\text{eff}}}{\partial\bar{\Sigma}} + 1 & F &= \frac{\partial\bar{P}}{\partial\bar{\Sigma}} - 2 \end{aligned}$$

und den Viskositätsableitungen für α -Viskosität (2.24):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\rho}} &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} - 1 \\ \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{T}} &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} \\ \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\Sigma}} &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\Sigma}}.\end{aligned}$$

Interessanterweise ist

$$\frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\rho}} = D - (\eta_{\text{KSG}} + 1) \quad \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{T}} = E \quad \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\Sigma}} = F + 2.$$

Das lineare Gleichungssystem hat eine Lösung, falls $AE - BD \neq 0$. Dann ist

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} = x = \frac{BF - CE}{AE - BD} \quad \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} = y = \frac{CD - AF}{AE - BD}.$$

Schließlich muß die Ableitung in (B.4) entwickelt werden:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \log \dot{M}}{\partial \log \bar{\Sigma}}\right)_{P, Q^+ = Q^-} &= \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{\Sigma}} \\ &= \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{v}_t} \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{v}_t} \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \dot{M}}{\partial \bar{v}_t} \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\Sigma}} + 1 \\ &= \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\rho}} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{T}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{\Sigma}} + \frac{\partial \bar{v}_t}{\partial \bar{\Sigma}} + 1 \\ &= [D - (\eta_{\text{KSG}} + 1)] \frac{BF - CE}{AE - BD} + E \frac{CD - AF}{AE - BD} + F + 3 \\ &= \frac{(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF)}{AE - BD} + 3.\end{aligned}\tag{B.6}$$

Auf eine weitere Vereinfachung der Ableitung wird verzichtet, da die Terme sonst sehr unhandlich werden. Mittels der Definitionen von A, B, C, D, E und F sowie der weiteren in diesem Abschnitt berechneten Ableitungen kann das Kriterium ausgerechnet werden. Explizit haben wir nur interessante Grenzfälle betrachtet (siehe Tabellen 2.3 und 2.4).

B.2. Thermische Instabilität

Die Bedingung für thermische Instabilität (2.29) erfordert die Ableitung

$$\left(\frac{d \log Q^+}{d \log T}\right)\Big|_P - \left(\frac{d \log Q^-}{d \log T}\right)\Big|_P > 0\tag{B.7}$$

unter der Nebenbedingung $\delta P = 0$. Diese liefert sofort

$$\delta \bar{P} = D \delta \bar{\rho} + E \delta \bar{T} = 0 \quad \delta \bar{\rho} = -\frac{E}{D} \delta \bar{T}.$$

Entwickelt man die Ableitung (B.7), folgt

$$\left(\frac{d \log Q^+}{d \log T} \right) \Big|_P - \left(\frac{d \log Q^-}{d \log T} \right) \Big|_P = \left(\frac{\partial \bar{Q}^+}{\partial \bar{\rho}} - \frac{\partial \bar{Q}^-}{\partial \bar{\rho}} \right) \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{T}} + \left(\frac{\partial \bar{Q}^+}{\partial \bar{T}} - \frac{\partial \bar{Q}^-}{\partial \bar{T}} \right) = -\frac{AE}{D} + B.$$

Es ist ersichtlich, daß $D = \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} > 0$ gilt (vorausgesetzt $\frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} < 1$). Damit wird unser Kriterium für thermische Instabilität

$$AE - BD < 0. \quad (\text{B.8})$$

Wie auch im vorangegangenen Abschnitt wurde auf die explizite Angabe des Kriteriums verzichtet. Interessante Grenzfälle finden sich in den Tabellen 2.2 und 2.4).

Es ist jedoch auffällig, daß in unserer Ableitung des Kriteriums für thermische Instabilität (B.8) das Vorzeichen desselben Terms (AE-BD) eine Rolle spielt wie im Falle der viskosen Instabilität (B.6). Ob es jedoch einen stringenten Zusammenhang gibt, soll im Folgenden untersucht werden.

B.3. Zusammenhang zwischen thermischer und viskoser Instabilität

Im Folgenden wollen wir für die Grenzfälle optisch dick und optisch dünn nach Zusammenhängen zwischen beiden Instabilitäten suchen. Für viskose Instabilität hatten wir (B.6)

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \log \dot{M}}{\partial \log \Sigma} \right)_{P, Q^+ = Q^-} &= \frac{(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF)}{AE - BD} + 3 \\ &= \frac{(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD)}{AE - BD}. \end{aligned}$$

B.3.1. optisch dick ($\tau_R \gg 1$)

$$\begin{aligned} AE - BD &= \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} - 1 + A_R \right) \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - 4 + B_R \right) \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} + \eta_{\text{KSG}} \right) \\ &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} (A_R - 1 - \eta_{\text{KSG}}) - \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} + \eta_{\text{KSG}} \right) (B_R - 4) \\ &= \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) + 4(1 - \beta_P) \right) (A_R - 1 - \eta_{\text{KSG}}) - \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} \right) + \eta_{\text{KSG}} \right) (B_R - 4) \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{aligned} CE - BF &= \left(2 + \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\Sigma}} \right) \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} + B_R - 4 \right) \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\Sigma}} - 2 \right) \\ &= 4 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - (B_R - 4) \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\Sigma}} - 2 \right) \\ &= 4 \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) + 4(1 - \beta_P) \right) + 2(B_R - 4) \\ (\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) &= 4 \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) + 4(1 - \beta_P) \right) (\eta_{\text{KSG}} + 1) + 2(\eta_{\text{KSG}} + 1)(B_R - 4) \end{aligned}$$

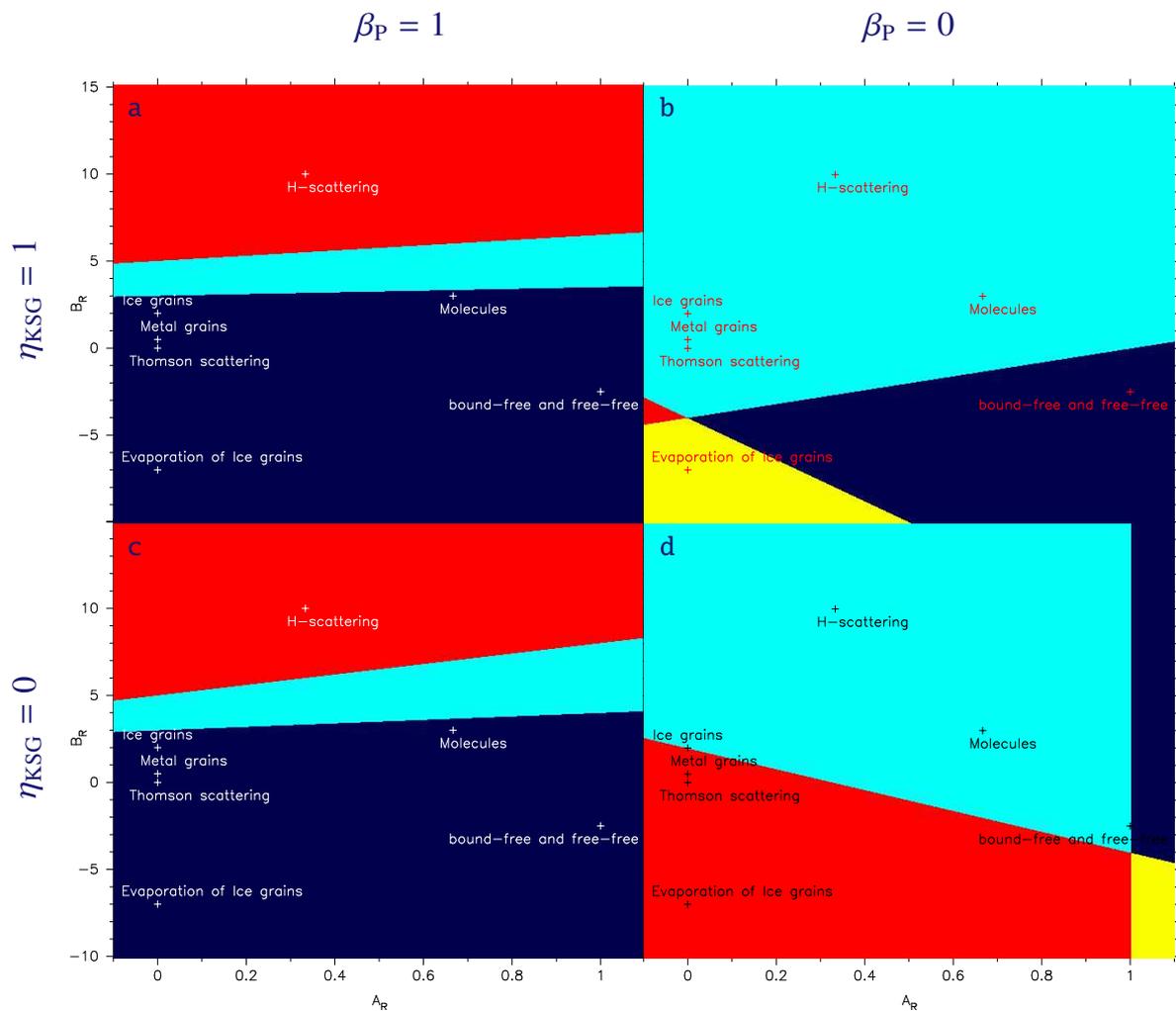


Abbildung B.1.: Illustration der Instabilitätsbedingungen ($\tau_R \gg 1$) für bestimmte Grenzfälle, abhängig von A_R und B_R : **(a)** $\beta_P = 1, \eta_{KSG} = 1$, **(b)** $\beta_P = 0, \eta_{KSG} = 1$, **(c)** $\beta_P = 1, \eta_{KSG} = 0$, **(d)** $\beta_P = 0, \eta_{KSG} = 0$. Blaue Gebiete zeigen thermische und viskose Stabilität und, rote Gebiete sind thermisch instabil, hellblaue Bereiche sind thermisch-viskos instabil und gelbe Bereiche sind viskos instabil. Die Kreuze zeigen die Temperatur- und Dichteabhängigkeiten der Bell und Lin (1994) Fits an das Rosselandmittel der Opazität (vgl. Tabelle 2.4).

$$\begin{aligned}
(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD) &= 4\left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{T}}\right) + 4(1 - \beta_{\text{P}})\right)(\eta_{\text{KSG}} + 1) \\
&\quad + 2(\eta_{\text{KSG}} + 1)(B_{\text{R}} - 4) \\
&\quad + 3\left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{T}}\right) + 4(1 - \beta_{\text{P}})\right)(A_{\text{R}} - 1 - \eta_{\text{KSG}}) \\
&\quad - 3\left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + \eta_{\text{KSG}}\right)(B_{\text{R}} - 4) \\
&= \left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{T}}\right) + 4(1 - \beta_{\text{P}})\right)(3A_{\text{R}} + \eta_{\text{KSG}} + 1) \\
&\quad + (B_{\text{R}} - 4)\left(2 - \eta_{\text{KSG}} - 3\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right)\right) \quad (\text{B.10})
\end{aligned}$$

- 1.Fall: $AE - BD > 0$, $(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD) < 0$

$$(B_{\text{R}} - 4) < \frac{\left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{T}}\right) + 4(1 - \beta_{\text{P}})\right)(A_{\text{R}} - 1 - \eta_{\text{KSG}})}{\left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + \eta_{\text{KSG}}\right)}$$

$$\left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{T}}\right) + 4(1 - \beta_{\text{P}})\right) < -\frac{B_{\text{R}} - 4}{3A_{\text{R}} + 1 + \eta_{\text{KSG}}}\left(2 - \eta_{\text{KSG}} - 3\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right)\right)$$

$$(3A_{\text{R}} + 1 + \eta_{\text{KSG}})\left(\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + \eta_{\text{KSG}}\right) < \left(3\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + \eta_{\text{KSG}} - 2\right)(A_{\text{R}} - 1 - \eta_{\text{KSG}})$$

$$(2\eta_{\text{KSG}} + 2)A_{\text{R}} < -(1 + \eta_{\text{KSG}})\left(4\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + 2\eta_{\text{KSG}} - 2\right)$$

$$A_{\text{R}} < -\frac{1}{2}\left(4\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + 2\eta_{\text{KSG}} - 2\right)$$

- (a) Für $\beta_{\text{P}} = 1$ ($P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$) ist die rechte Seite immer negativ. Da es keinen Absorptionseffekt mit $A_{\text{R}} < 0$ gibt, tritt dieser Fall niemals ein.
- (b) Für $\beta_{\text{P}} = 0$ ($P_{\text{gas}} \ll P_{\text{rad}}$) jedoch kann $A_{\text{R}} < C$ mit $C > 0$ eintreten, insbesondere für $\eta_{\text{KSG}} = 0$.
- 2.Fall: $AE - BD < 0$, $(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD) > 0$

Die Argumentation ist hier analog modulo entgegengesetztes Vorzeichen, wir bekommen

$$A_{\text{R}} > -\frac{1}{2}\left(4\beta_{\text{P}}\left(1 - \frac{\partial\bar{\mu}}{\partial\bar{\rho}}\right) + 2\eta_{\text{KSG}} - 2\right)$$

- (a) Für $\beta_{\text{P}} = 1$ ($P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$) ist die rechte Seite immer negativ. Da für alle physikalisch relevanten Absorptionseffekte $0 \leq A_{\text{R}} \leq 1$ gilt, ist dies der Fall für viskose Instabilität.
- (b) Für $\beta_{\text{P}} = 0$ ($P_{\text{gas}} \ll P_{\text{rad}}$) jedoch kann $A_{\text{R}} > C$ mit $0 \leq C \leq 1$ eintreten.

Für physikalisch relevante Absorptionsmechanismen trifft im gasdruckdominierten Fall ($\beta_{\text{P}} = 1$) nur Fall 2a zu. Dieser gilt nur unter der Bedingung $AE - BD < 0$. Die Bedingung für thermische Instabilität (B.8) fordert aber gerade $AE - BD < 0$. Damit ist gezeigt, daß eine viskos instabile Scheibe auch thermisch instabil ist, solange $\beta_{\text{P}} = 1$ gilt. Dies gerechtfertigt in diesem Falle die Bezeichnung thermisch-viskose Instabilität, allerdings (noch) unter der Maßgabe, daß die Scheibe optisch dick ist. Im strahlungsdruckdominierten Fall ($\beta_{\text{P}} = 0$) jedoch kann jedoch sowohl Fall 1b als auch 2b zutreffen.

B.3.2. optisch dünn ($\tau_R \ll 1$)

$$\begin{aligned}
AE - BD &= \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} - 1 - A_P \right) \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - 4 - B_P \right) \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} + \eta_{\text{KSG}} \right) \\
&= -(A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}}) \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} + (B_P + 4) \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\rho}} + \eta_{\text{KSG}} \right) \\
&= -(A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}}) \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) + (1 - \beta_P) (B_P + 4) \right) \\
&\quad + (B_P + 4) \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} \right) + A_P (1 - \beta_P) + \eta_{\text{KSG}} \right) \\
&= (B_P + 4) \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} \right) + A_P (1 - \beta_P) + \eta_{\text{KSG}} - (1 - \beta_P) (A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}}) \right) \\
&\quad - \beta_P (A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}}) \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) \\
&= (B_P + 4) \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} \right) + \eta_{\text{KSG}} - (1 - \beta_P) (1 + \eta_{\text{KSG}}) \right) \\
&\quad - \beta_P (A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}}) \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) \tag{B.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
CE - BF &= \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\Sigma}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} - B_P - 4 \right) \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\Sigma}} - 2 \right) \\
&= 2 \frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{T}} + \left(\frac{\partial \bar{P}}{\partial \bar{\Sigma}} - 2 \right) (B_P + 4) \\
&= 2 \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) + (1 - \beta_P) (B_P + 4) \right) + (B_P + 4) (-2 + (1 - \beta_P)) \\
&= 2\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) + (B_P + 4) (1 - 3\beta_P) \tag{B.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD) &= (\eta_{\text{KSG}} + 1) \left(2\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) + (B_P + 4) (1 - 3\beta_P) \right) \\
&\quad + 3(B_P + 4) \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} \right) + \eta_{\text{KSG}} - (1 - \beta_P) (1 + \eta_{\text{KSG}}) \right) \\
&\quad - 3\beta_P (A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}}) \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) \\
&= (B_P + 4) ((1 - 3\beta_P) (\eta_{\text{KSG}} + 1)) \\
&\quad + 3(B_P + 4) \left(\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} \right) + \eta_{\text{KSG}} - (1 - \beta_P) (\eta_{\text{KSG}} + 1) \right) \\
&\quad + 2\beta_P (\eta_{\text{KSG}} + 1) \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) - 3\beta_P (A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}}) \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) \\
&= (B_P + 4) \left(3\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{\rho}} \right) + \eta_{\text{KSG}} - 1 \right) \\
&\quad - \beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \bar{T}} \right) (\eta_{\text{KSG}} + 1 + 3A_P) \tag{B.13}
\end{aligned}$$

- 1.Fall: $AE - BD > 0$, $(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD) < 0$

$$(B_P + 4) > \frac{\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial T}\right) (A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}})}{\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \rho}\right) + \eta_{\text{KSG}} - (1 - \beta_P)(1 + \eta_{\text{KSG}})}$$

$$(B_P + 4) < \frac{\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial T}\right) (\eta_{\text{KSG}} + 1 + 3A_P)}{\left(3\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \rho}\right) + \eta_{\text{KSG}} - 1\right)}$$

$$\frac{\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \rho}\right) + \eta_{\text{KSG}} - (1 - \beta_P)(1 + \eta_{\text{KSG}})}{\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial T}\right) (A_P + 1 + \eta_{\text{KSG}})} > \frac{\left(3\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \rho}\right) + \eta_{\text{KSG}} - 1\right)}{\beta_P \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial T}\right) (\eta_{\text{KSG}} + 1 + 3A_P)}.$$

- (a) Für $\beta_P = 1$ ($P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$) folgt

$$A_P > \frac{(\eta + 1) \left(2\eta - 1 + 2 \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \rho}\right)\right)}{2\eta + 1},$$

Für verschwindenden Dichte-Gradienten von μ ergibt sich $A_P > 1$. Dieser Fall ist für keinen realistischen Absorptionsmechanismus erfüllt. Falls der Dichte-Gradienten von μ nicht verschwindet (Er ist entweder Null oder negativ), folgt $A_P > C$ mit $C > 1$. Dann ist dieser Fall nicht länger allgemeingültig.

- (b) Für $\beta_P = 0$ ($P_{\text{gas}} \ll P_{\text{rad}}$) folgt

$$0 > 0.$$

Das ist nicht verwunderlich: Die beiden Terme $AE - BD$ und $(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD)$ haben dasselbe Vorzeichen.

- 2.Fall: $AE - BD < 0$, $(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD) > 0$

- (a) Für $\beta_P = 1$ ($P_{\text{gas}} \gg P_{\text{rad}}$) folgt analog wie Fall 1a, nur mit umgekehrten Ungleichheitszeichen:

$$A_P < \frac{(\eta + 1) \left(2\eta - 1 + 2 \left(1 - \frac{\partial \bar{\mu}}{\partial \rho}\right)\right)}{2\eta + 1},$$

Die Argumentation ist invers zu 1a: Für verschwindenden Dichtegradienten von μ ist $A_P < 1$. Dann ist dieser Fall für alle realistisch auftretenden Absorptionsmechanismen gültig. Bei Vorhandensein eines Gradienten kann dieser Fall jedoch nur noch eingeschränkt gültig sein, da sich dann die kleinste obere Schranke unter 1 senkt.

- (b) Für $\beta_P = 0$ ($P_{\text{gas}} \ll P_{\text{rad}}$) folgt

$$0 > 0.$$

Das ist nicht verwunderlich: Die beiden Terme $AE - BD$ und $(\eta_{\text{KSG}} + 1)(CE - BF) + 3(AE - BD)$ haben dasselbe Vorzeichen.

Damit haben wir hier wiederum die Koinzidenz von viskoser mit thermischer Instabilität auch im optisch dünnen Limes gezeigt, allerdings mit der Einschränkung, daß der Dichtegradienten von μ verschwinden muß. Alleine Fall 2a ist physikalisch relevant.

Es ist dadurch bewiesen, daß im gasdruckdominierten Fall eine viskos instabile Scheibe auch thermisch instabil ist, unabhängig von optisch dick und dünn. Damit ist die Bezeichnung thermisch-viskose Instabilität gerechtfertigt. Eine Einschränkung folgt aus der Tatsache, daß der Dichtegradient des mittleren Molekulargewichts verschwinden muß

Literaturverzeichnis

- Abel, T., Bryan, G. L., und Norman, M. L. (2000). The Formation and Fragmentation of Primordial Molecular Clouds. *ApJ*, 540:39–44.
- Abel, T., Bryan, G. L., und Norman, M. L. (2002). The Formation of the First Star in the Universe. *Science*, 295:93–98.
- Abgrall, H., Roueff, E., und Viala, Y. (1982). Vibration-rotation transition probabilities for the ground electronic $X^1\Sigma^+$ state of HD. *A&AS*, 50:505–522.
- Alexander, D. R. und Ferguson, J. W. (1994). Low-temperature Rosseland opacities. *ApJ*, 437:879–891.
- Artemova, I. V., Bisnovatyi-Kogan, G. S., Bjoernsson, G., und Novikov, I. D. (1996). Structure of Accretion Disks with Optically Thick–Optically Thin Transitions. *ApJ*, 456:119–123.
- Balbus, S. A. und Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, 376:214–233.
- Bell, K. L. (1980). The free-free absorption coefficient of the negative pion of molecular hydrogen. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 13(9):1859–1865.
- Bell, K. L. und Berrington, K. A. (1987). Free-free absorption coefficient of the negative hydrogen ion. *Journal of Physics B: Atomic and Molecular Physics*, 20(4):801–806.
- Bell, K. R. und Lin, D. N. C. (1994). Using FU Orionis outbursts to constrain self-regulated protostellar disk models. *ApJ*, 427:987–1004.
- Bergeron, P. und Leggett, S. K. (2002). Model Atmosphere Analysis of Two Very Cool White Dwarfs. *ApJ*, 580:1070–1076.
- Bertin, G. (1997). Self-regulated Accretion Disks. *ApJ*, 478:L71–L74.
- Bertin, G. und Lodato, G. (1999). A class of self-gravitating accretion disks. *A&A*, 350:694–704.
- Bertout, C., Basri, G., und Bouvier, J. (1988). Accretion disks around T Tauri stars. *ApJ*, 330:350–373.
- Biermann, M. (2001). *Akkretionsscheiben-Modelle mit einer verallgemeinerten, Reynolds-kritischen Turbulenz in aktiven galaktischen Kernen und um Protosterne*. PhD thesis, ITA, Heidelberg University.
- Birnbaum, G. und Cohen, E. R. (1976). Theory of line shape in pressure-induced absorption. *Canadian Journal of Physics*, 54:593–602.

- Bisnovatyi-Kogan, G. S. und Lovelace, R. V. E. (2001). Advective accretion disks and related problems including magnetic fields. *New Astronomy Review*, 45:663–742.
- Bonifacio, P., Pasquini, L., Spite, F., Bragaglia, A., Carretta, E., Castellani, V., Centuriòn, M., Chieffi, A., Claudi, R., Clementini, G., D’Antona, F., Desidera, S., François, P., Gratton, R. G., Grundahl, F., James, G., Lucatello, S., Sneden, C., und Straniero, O. (2002). The lithium content of the globular cluster NGC 6397. *A&A*, 390:91–101.
- Borysow, A. (2002). Collision-induced absorption coefficients of H₂ pairs at temperatures from 60 K to 1000 K. *A&A*, 390:779–782.
- Borysow, A. und Frommhold, L. (1989). Collision-induced infrared spectra of H₂-He pairs at temperatures from 18 to 7000 K. II - Overtone and hot bands. *ApJ*, 341:549–555.
- Borysow, A., Frommhold, L., und Moraldi, M. (1989). Collision-induced infrared spectra of H₂-He pairs involving 0-1 vibrational transitions and temperatures from 18 to 7000 K. *ApJ*, 336:495–503.
- Borysow, A., Jorgensen, U. G., und Fu, Y. (2001). High-temperature (1000-7000 K) collision-induced absorption of H₂ pairs computed from the first principles, with application to cool and dense stellar atmospheres. *J. Quant. Spec. Radiat. Transf.*, 68:235–255.
- Borysow, A., Jorgensen, U. G., und Zheng, C. (1997). Model atmospheres of cool, low-metallicity stars: the importance of collision-induced absorption. *A&A*, 324:185–195.
- Borysow, J., Frommhold, L., und Birnbaum, G. (1988). Collision-induced rototranslational absorption spectra of H₂-He pairs at temperatures from 40 to 3000 K. *ApJ*, 326:509–515.
- Borysow, J., Trafton, L., Frommhold, L., und Birnbaum, G. (1985). Modeling of pressure-induced far-infrared absorption spectra Molecular hydrogen pairs. *ApJ*, 296:644–654.
- Bougleux, E. und Galli, D. (1997). Lithium hydride in the early Universe and in protogalactic clouds. *MNRAS*, 288:638–648.
- Bromm, V., Coppi, P. S., und Larson, R. B. (1999). Forming the First Stars in the Universe: The Fragmentation of Primordial Gas. *ApJ*, 527:L5–L8.
- Bromm, V., Coppi, P. S., und Larson, R. B. (2002). The Formation of the First Stars. I. The Primordial Star-forming Cloud. *ApJ*, 564:23–51.
- Burles, S., Nollett, K. M., und Turner, M. S. (2001). Big Bang Nucleosynthesis Predictions for Precision Cosmology. *ApJ*, 552:L1–L5.
- Calvet, N., Muzerolle, J., Briceño, C., Hernández, J., Hartmann, L., Saucedo, J. L., und Gordon, K. D. (2004). The Mass Accretion Rates of Intermediate-Mass T Tauri Stars. *AJ*, 128:1294–1318.
- Chandra, S., Gaur, V. P., und Pande, M. C. (1991). Partition functions of the H₃⁺ molecular ion. *J. Quant. Spec. Radiat. Transf.*, 45:57–60.
- Clarke, C. J. und Bromm, V. (2003). The characteristic stellar mass as a function of redshift. *MNRAS*, 343:1224–1230.

- Coc, A., Vangioni-Flam, E., Descouvemont, P., Adahchour, A., and Angulo, C. (2004). Updated Big Bang Nucleosynthesis Compared with Wilkinson Microwave Anisotropy Probe Observations and the Abundance of Light Elements. *ApJ*, 600:544–552.
- Cox, A. N. (2000). *Allen's astrophysical quantities*. Allen's astrophysical quantities, 4th ed. Publisher: New York: AIP Press; Springer, 2000. Edited by Arthur N. Cox. ISBN: 0387987460.
- Cox, A. N. und Tabor, J. E. (1976). Radiative opacity tables for 40 stellar mixtures. *ApJS*, 31:271–312.
- Cyburt, R. H., Ellis, J., Fields, B. D., und Olive, K. A. (2003). Updated nucleosynthesis constraints on unstable relic particles. *Phys. Rev. D*, 67(10):103521–+.
- Cyburt, R. H., Fields, B. D., und Olive, K. A. (2004). Solar neutrino constraints on the BBN production of Li. *Phys. Rev. D*, 69(12):123519–+.
- Dalgarno, A., Kirby, K., und Stancil, P. C. (1996). The radiative association of Li^+ and H, Li and H^+ and Li and H. *ApJ*, 458:397–400.
- Dalgarno, A. und Williams, D. A. (1962). Rayleigh Scattering by Molecular Hydrogen. *ApJ*, 136:690–692.
- Duschl, W. J., Strittmatter, P. A., und Biermann, P. L. (2000). A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *A&A*, 357:1123–1132.
- Galli, D. und Palla, F. (1998). The chemistry of the early Universe. *A&A*, 335:403–420.
- Galli, D. und Palla, F. (2002). Deuterium chemistry in the primordial gas. *Planet. Space Sci.*, 50:1197–1204.
- Gammie, C. F. (2001). Nonlinear Outcome of Gravitational Instability in Cooling, Gaseous Disks. *ApJ*, 553:174–183.
- Glover, S. C. O. (2003). Comparing Gas-Phase and Grain-catalyzed H_2 Formation. *ApJ*, 584:331–338.
- Goodman, J. (2003). Self-gravity and quasi-stellar object discs. *MNRAS*, 339:937–948.
- Gray, D. F. (1992). *The observation and analysis of stellar photospheres*. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 1992. 2nd ed.
- Gustafsson, M. und Frommhold, L. (2001). Infrared Absorption Spectra of Collisionally Interacting He and H Atoms. *ApJ*, 546:1168–1170.
- Gustafsson, M. und Frommhold, L. (2003). The H_2 -H infrared absorption bands at temperatures from 1000 K to 2500 K. *A&A*, 400:1161–1162.
- Harris, G. J., Lynas-Gray, A. E., Miller, S., und Tennyson, J. (2004). The Effect of the Electron Donor H_3^+ on the Pre-Main-Sequence and Main-Sequence Evolution of Low-Mass, Zero-Metallicity Stars. *ApJ*, 600:1025–1034.
- Hartmann, L. und Kenyon, S. J. (1985). On the nature of FU Orionis objects. *ApJ*, 299:462–478.
- Hartmann, L. und Kenyon, S. J. (1987). Further evidence for disk accretion in FU Orionis objects. *ApJ*, 312:243–253.

- Hawley, J. F., Gammie, C. F., und Balbus, S. A. (1995). Local Three-dimensional Magnetohydrodynamic Simulations of Accretion Disks. *ApJ*, 440:742–763.
- Hersant, F., Gautier, D., und Huré, J. (2001). A Two-dimensional Model for the Primordial Nebula Constrained by D/H Measurements in the Solar System: Implications for the Formation of Giant Planets. *ApJ*, 554:391–407.
- Huber, K. P. und Herzberg, G. (1979). *Molecular spectra and molecular structure: IV. Constants of diatomic molecules*. van Nostrand Reinhold Company, 1st edition.
- Hunger, K. und van Blerkom, D. (1967). A Pure Helium Model Stellar Atmosphere. *Zeitschrift für Astrophysik*, 66:185–199.
- Iglesias, C. A. und Rogers, F. J. (1996). Updated Opal Opacities. *ApJ*, 464:943–953.
- John, T. L. (1988). Continuous absorption by the negative hydrogen ion reconsidered. *A&A*, 193:189–192.
- John, T. L. (1994). The Free-Free Absorption Coefficients of the Negative Helium Ion. *MNRAS*, 269:871–878.
- Jørgensen, U. G., Hammer, D., Borysow, A., und Falkesgaard, J. (2000). The atmospheres of cool, helium-rich white dwarfs. *A&A*, 361:283–292.
- Karzas, W. J. und Latter, R. (1961). Electron Radiative Transitions in a Coulomb Field. *ApJS*, 6:167–212.
- Kenyon, S. J. und Hartmann, L. W. (1991). The dusty envelopes of FU Orionis variables. *ApJ*, 383:664–673.
- Kissel, L. (2000). RTAB: the Rayleigh scattering database. *Radiation Physics and Chemistry*, 59:185–200.
- Lebedev, V. S., Presnyakov, L. P., und Sobel’Man, I. I. (2000). Photodissociative Absorption by H_2^+ in the Solar Photosphere. *Astronomy Reports*, 44:338–347.
- Lenzuni, P., Chernoff, D. F., und Salpeter, E. E. (1991). Rosseland and Planck mean opacities of a zero-metallicity gas. *ApJS*, 76:759–801.
- Lepp, S. H., Stancil, P. C., und Dalgarno, A. (2002). Atomic and Molecular Processes in the Early Universe. *Journal of Physics B Atomic Molecular Physics*, 35:57–80.
- Lightman, A. P. und Eardley, D. M. (1974). Black Holes in Binary Systems: Instability of Disk Accretion. *ApJ*, 187:L1–3.
- Lin, D. N. C. und Papaloizou, J. C. B. (1996). Theory of Accretion Disks II: Application to Observed Systems. *ARA&A*, 34:703–748.
- Linsky, J. L. (1969). On the Pressure-Induced Opacity of Molecular Hydrogen in Late-Type Stars. *ApJ*, 156:989–1005.
- Martin, W. C., Fuhr, J. R., Musgrove, A., Sugar, J., und Wiese, J. L. (1999). *NIST Atomic Spectra Database (NIST Standard Reference Database 78) 2.0*. NIST.

- Mayer, M. und Duschl, W. (2004a). Rosseland and planck mean opacities for primordial matter. submitted to MNRAS.
- Mayer, M. und Duschl, W. (2004b). Stationary population III accretion discs. accepted by MNRAS, astro-ph/0406501.
- McDowell, M. R. (1961). *Observatory*, 81:240–+.
- Meyer, F. und Meyer-Hofmeister, E. (1981). On the Elusive Cause of Cataclysmic Variable Outbursts. *A&A*, 104:L10–12.
- Meyer, W., Frommhold, L., und Birnbaum, G. (1989). Rototranslational absorption spectra of H₂-H₂ pairs in the far infrared. *Phys. Rev. A*, 39:2434–2448.
- Mihalas, D. (1967). Statistical-Equilibrium Model Atmospheres for Early-Type Stars. I. Hydrogen Continua. *ApJ*, 149:169–190.
- Mihalas, D. (1978). *Stellar atmospheres*. San Francisco, W. H. Freeman and Co., 1978. 650 p., 2 edition.
- Moos, H. W., Sembach, K. R., Vidal-Madjar, A., York, D. G., Friedman, S. D., Hébrard, G., Kruk, J. W., Lehner, N., Lemoine, M., Sonneborn, G., Wood, B. E., Ake, T. B., André, M., Blair, W. P., Chayer, P., Gry, C., Dupree, A. K., Ferlet, R., Feldman, P. D., Green, J. C., Howk, J. C., Hutchings, J. B., Jenkins, E. B., Linsky, J. L., Murphy, E. M., Oegerle, W. R., Oliveira, C., Roth, K., Sahnou, D. J., Savage, B. D., Shull, J. M., Tripp, T. M., Weiler, E. J., Welsh, B. Y., Wilkinson, E., und Woodgate, B. E. (2002). Abundances of Deuterium, Nitrogen, and Oxygen in the Local Interstellar Medium: Overview of First Results from the FUSE Mission. *ApJS*, 140:3–17.
- Nakamura, F. und Umemura, M. (2001). On the Initial Mass Function of Population III Stars. *ApJ*, 548:19–32.
- Nakamura, F. und Umemura, M. (2002). The Stellar Initial Mass Function in Primordial Galaxies. *ApJ*, 569:549–557.
- Neale, L., Miller, S., und Tennyson, J. (1996). Spectroscopic Properties of the H₃⁺ Molecule: A New Calculated Line List. *ApJ*, 464:516–520.
- Neale, L. und Tennyson, J. (1995). A High-Temperature Partition Function for H₃⁺. *ApJ*, 454:L169–173.
- Omukai, K. und Palla, F. (2003). Formation of the First Stars by Accretion. *ApJ*, 589:677–687.
- Paczynski, B. (1978). A model of selfgravitating accretion disk. *Acta Astronomica*, 28:91–109.
- Pagel, B. E. J. (1959). Note on the collisional dissociation of the H⁻ Ion in the solar atmosphere. *MNRAS*, 119:609–611.
- Palla, F., Salpeter, E. E., und Stahler, S. W. (1983). Primordial star formation - The role of molecular hydrogen. *ApJ*, 271:632–641.
- Patch, R. W. (1968). Partition Functions of the Ground Electronic States of H₃⁺ and H₂⁺. *J. Chem. Phys.*, 49.

- Patch, R. W. (1971). Absorption coefficients for hydrogen—II. Calculated pressure-induced H₂-H₂ vibrational absorption in the fundamental region. *J. Quant. Spec. Radiat. Transf.*, 11:1331–1353.
- Peach, G., Saraph, H. E., und Seaton, M. J. (1988). Atomic data for opacity calculations. IX. The lithium isoelectronic sequence. *Journal of Physics B Atomic Molecular Physics*, 21:3669–3683.
- Peebles, P. J. E. und Dicke, R. H. (1968). Origin of the Globular Star Clusters. *ApJ*, 154:891–908.
- Pettini, M. und Bowen, D. V. (2001). A New Measurement of the Primordial Abundance of Deuterium: Toward Convergence with the Baryon Density from the Cosmic Microwave Background? *ApJ*, 560:41–48.
- Pringle, J. E. (1976). Thermal instabilities in accretion discs. *MNRAS*, 177:65–71.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion discs in astrophysics. *ARA&A*, 19:137–162.
- Reeves, H., Audouze, J., Fowler, W. A., und Schramm, D. N. (1973). On the Origin of Light Elements. *ApJ*, 179:909–930.
- Ripamonti, E. und Abel, T. (2004). Fragmentation and the formation of primordial protostars: the possible role of collision-induced emission. *MNRAS*, 348:1019–1034.
- Rogers, F. J. und Iglesias, C. A. (1992). Rosseland mean opacities for variable compositions. *ApJ*, 401:361–366.
- Ryan, S. G., Beers, T. C., Olive, K. A., Fields, B. D., und Norris, J. E. (2000). Primordial Lithium and Big Bang Nucleosynthesis. *ApJ*, 530:L57–L60.
- Ryan, S. G., Norris, J. E., und Beers, T. C. (1999). The Spite Lithium Plateau: Ultrathin but Postprimordial. *ApJ*, 523:654–677.
- Rybicki, G. B. und Lightman, A. P. (1979). *Radiative processes in astrophysics*. New York, Wiley-Interscience, 1979. 393 p.
- Sabano, Y. und Yoshii, Y. (1977). Thermal Instability in a Pre-Galactic Gas Cloud. *PASJ*, 29:207–220.
- Saslaw, W. C. und Zipoy, D. (1967). *Nature*, 216:967–+.
- Seager, S., Sasselov, D. D., und Scott, D. (1999). A New Calculation of the Recombination Epoch. *ApJ*, 523:L1–L5.
- Seager, S., Sasselov, D. D., und Scott, D. (2000). How Exactly Did the Universe Become Neutral? *ApJS*, 128:407–430.
- Seaton, M. (1987). Atomic data for opacity calculations: I. General description. *Journal of Physics B Atomic Molecular Physics*, 20:6363–6378.
- Semenov, D., Henning, T., Helling, C., Ilgner, M., und Sedlmayr, E. (2003). Rosseland and Planck mean opacities for protoplanetary discs. *A&A*, 410:611–621.
- Shakura, N. I. und Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24:337–355.

- Sidhu, K. S., Miller, S., und Tennyson, J. (1992). Partition functions and equilibrium constants for H_2^+ and H_2D^+ . *A&A*, 255:453–456.
- Spergel, D. N., Verde, L., Peiris, H. V., Komatsu, E., Nolta, M. R., Bennett, C. L., Halpern, M., Hinshaw, G., Jarosik, N., Kogut, A., Limon, M., Meyer, S. S., Page, L., Tucker, G. S., Weiland, J. L., Wollack, E., und Wright, E. L. (2003). First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *ApJS*, 148:175–194.
- Spite, F. und Spite, M. (1982). Abundance of lithium in unevolved halo stars and old disk stars - Interpretation and consequences. *A&A*, 115:357–366.
- Stahler, S. W., Palla, F., und Salpeter, E. E. (1986). Primordial stellar evolution - The protostar phase. *ApJ*, 302:590–605.
- Stancil, P. (1994a). Partition functions and dissociation equilibrium constants for H_2^+ and He_2^+ . *J. Quant. Spec. Radiat. Transf.*, 51:655–658.
- Stancil, P. (1996). Partition functions and equilibrium constants for LiH and LiH^+ . *J. Quant. Spec. Radiat. Transf.*, 54:849–852.
- Stancil, P. C. (1994b). Continuous absorption by He_2^+ and H_2^+ in cool white dwarfs. *ApJ*, 430:360–370.
- Stancil, P. C. und Dalgarno, A. (1997a). Stimulated Radiative Association of Li and H in the Early Universe. *ApJ*, 479:543–546.
- Stancil, P. C. und Dalgarno, A. (1997b). The Radiative Association of H and D. *ApJ*, 490:76–78.
- Stancil, P. C., Lepp, S., und Dalgarno, A. (1996). The Lithium Chemistry of the Early Universe. *ApJ*, 458:401–406.
- Stancil, P. C., Lepp, S., und Dalgarno, A. (1998). The Deuterium Chemistry of the Early Universe. *ApJ*, 509:1–10.
- Stehlé, C. und Hutcheon, R. (1999). Extensive tabulations of Stark broadened hydrogen line profiles. *A&AS*, 140:93–97.
- Straka, C. (2002). *Thermonukleares Brennen und Mischen mit einer zeitabhängigen Konvektionstheorie in massereichen Population-III-Sternen*. PhD thesis, ITA, Heidelberg University.
- Sutherland, R. S. (1998). Accurate free-free Gaunt factors for astrophysical plasmas. *MNRAS*, 300:321–330.
- Tennyson, J. und Sutcliffe, B. T. (1984). *Mol. Phys.*, 51:887–+.
- Thévenin, F., Charbonnel, C., de Freitas Pacheco, J. A., Idiart, T. P., Jasniewicz, G., de Laverny, P., und Plez, B. (2001). VLT observations of turnoff stars in the globular cluster NGC 6397. *A&A*, 373:905–915.
- Theis, C. und Orlova, N. (2004). Are galactic disks dynamically influenced by dust? *A&A*, 418:959–978.
- Toomre, A. (1964). On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, 139:1217–1238.

- Uehara, H. und Inutsuka, S. (2000). Does Deuterium Enable the Formation of Primordial Brown Dwarfs? *ApJ*, 531:L91–L94.
- Van Kranendonk, J. (1957a). *Physica*, 23:825.
- Van Kranendonk, J. (1957b). *Physica*, 24:347.
- Van Kranendonk, J. und Kiss, Z. J. (1959). *Canadian J. Phys.*, 37:1187.
- Wiese, W. L., Smith, M. W., und Glennon, B. M. (1966). *Atomic transition probabilities. Vol.: Hydrogen through Neon. A critical data compilation.* NSRDS-NBS 4, Washington, D.C.: US Department of Commerce, National Bureau of Standards, 1966.
- Wishart, A. W. (1979). The bound-free photo-detachment cross-section of H^- . *MNRAS*, 187:59P–610P.
- Wolniewicz, L., Simbotin, I., und Dalgarno, A. (1998). Quadrupole transition probabilities for the excited rovibrational states of H_2 . *ApJS*, 115:293–313.
- Yan, M., Sadeghpour, H. R., und Dalgarno, A. (1998). Photoionization Cross Sections of He and H_2 . *ApJ*, 496:1044–1050.
- Yan, M., Sadeghpour, H. R., und Dalgarno, A. (2001). Erratum: Photoionization Cross Sections of He and H_2 . *ApJ*, 559:1194–1194.
- Zemke, W. T. und Stwalley, W. C. (1980). Radiative transition probabilities, lifetimes, and dipole moments for all vibrational levels in the $X^1\Sigma^+$ state of 7LiH . *J. Chem. Phys.*, 73:5584–5590.

Danksagung

Zuerst möchte ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. W. J. Duschl bedanken für die Betreuung, die aber auch stets viel Raum für Freiheit in der Bearbeitung ließ. In vielen Diskussionen während der alltäglichen Kaffeerrunde mit Teilen der WJD-Gruppe konnte ich immer wieder von seiner Begeisterung und seinem Interesse an der Astronomie profitieren. Vielen Dank für die vielfältige Förderung während der Doktorarbeit, sei es durch die Überlassung eines Notebooks, die Ermöglichung der Teilnahme an wissenschaftlichen Tagungen, etc. Besonders hervorheben möchte ich die Reise zum deutsch-chinesischen Workshop über "The Multiwavelength View on AGN" nach Lijiang, China im August 2002 mit einem Zwischenstop in Peking, den Besuch bei Prof. Dr. Jim E. Pringle am Institute of Astronomy in Cambridge, UK, im Rahmen eines "EARA Marie Curie visiting Fellowship for postgraduate students" von September bis Dezember 2003, aber auch den Workshop des SFB 439 im Kloster Irsee im Juli 2003.

Herrn Prof. Dr. I. Appenzeller gilt mein Dank für die Bereitschaft, das Zweitgutachten zu erstellen.

Ein weiterer Dank gilt Herrn Prof. Dr. W. M. Tscharnuter für sein Interesse an meiner Arbeit und die sehr guten Anregungen im Rahmen des Montagsseminars.

Ein ganz besonderer Dank geht an Herrn Dr. Christian W. Straka (jetzt am Astronomy Department, Yale University) für viele interessante, fachlich interessante und anregende Diskussionen. Es war immer ein sehr interessanter Austausch sowohl fachlicher als auch privater Natur, in denen ich von den Problemen in der Pop-III-Sternentwicklung erfahren konnte, aber auch viele Anregungen für meine Arbeit bekommen habe.

Hence many thanks to Prof. Dr. Jim E. Pringle, who used to be my host at the Institute of Astronomy during my four-months-stay in late 2003. Thanks for his hospitality, many stimulating discussions, the opportunity to work in a very nice environment and attending an excellent lecture. Hopefully the work will be continued soon.

Bedanken möchte ich mich auch bei den Mitgliedern der Arbeitsgruppe, besonders bei Dr. Franck Hersant und Hannes Horst für viele nette und interessante Abende bei Raclette etc. Dr. Franck Hersant sei weiterhin für viele fachliche Diskussionen über Turbulenz etc. gedankt.

Bei meiner Zimmerkollegin, Alexandra Tachil, möchte ich mich für die sehr gute Arbeitsatmosphäre und viele interessante Gespräche über Tischtennis und Volleyball etc. bedanken sowie bei Sebastian F. Hönig für den Blickwinkel eines Beobachters.

Bedanken möchte ich mich bei den Instituten für Umweltpophysik, für theoretische Physik und dem Kirchhoff-Institut für Physik für die zeitweilige Überlassung einer Doktorandenstelle, die die Finanzierung dieser Arbeit erst ermöglicht hat.

Ein großer Dank gilt auch meinen Eltern für ihre fortwährende Unterstützung und Interesse an meiner Arbeit.

