

Fakultät für Physik und Astronomie
Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg

Diplomarbeit
im Studiengang Physik
vorgelegt von
Mike Georg Bernhardt
aus Kassel
Januar 2009

Kompakte Sterne in der Branenwelt

von Mike Georg Bernhardt

Die Diplomarbeit wurde ausgeführt an der
Landessternwarte Königstuhl

unter der Betreuung von
Herrn Prof. Max Camenzind

Korrigierte und erweiterte Fassung, 20. März 2009.

Zusammenfassung

Diese Arbeit behandelt kompakte Sterne in der Branenwelt. Die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen der stellaren Struktur werden für einen Stern auf der Brane hergeleitet. Um dieses Gleichungssystem zu schließen, wird angenommen, dass die Komponenten des projizierten Weyl-Tensors eine Art Zustandsgleichung $\mathcal{P} = w\mathcal{U}$ erfüllen, was eine Relation zwischen dem isotropen und anisotropen Druck des effektiven Weyl-Fluids darstellt. Schließlich werden die Branen-TOV-Gleichungen für Neutronensterne und Weiße Zwerge numerisch gelöst, wobei insbesondere der inhomogene Dichteverlauf im Sterninneren durch Verwendung realistischer Zustandsgleichungen der Sternmaterie berücksichtigt wird. Aus dem Vergleich mit Beobachtungsdaten ergeben sich Einschränkungen an die Parameter λ (Branspannung) und w des Modells.

Abstract

The following study focuses on compact stars in the braneworld. The Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations of stellar structure are derived for a star on the brane. In order to close this system of equations, I assume, that the components of the projected Weyl tensor obey an equation-of-state like relation $\mathcal{P} = w\mathcal{U}$, which is a relation between the isotropic and anisotropic pressure of the effective Weyl fluid. The brane-TOV equations are solved numerically for neutron stars and white dwarfs, taking into account the inhomogeneous density profile in the stellar interior via realistic equations of state for the stellar matter. Comparison with observational data leads to constraints on the parameters λ (the brane tension) and w of the model.

*Meiner Mutter
und dem Andenken meines Vaters
in Liebe und Dankbarkeit*

Ich danke . . .

- **Prof. Max Camenzind**, meinem Betreuer, dessen physikalische Intuition mir den Weg wies durch die Irrungen und Wirrungen der fünften Dimension.
- **Prof. Immo Appenzeller**, für die Begutachtung meiner Arbeit.
- **Dr. Karoline Lukaschek**, meiner persönlichen fünften Dimension, die meine Arbeit einem geisteswissenschaftlichen Blick unterzog. (LU!)
- **Steffen Brinkmann, Volker Gaibler, Mathias Herzog** und **Jamie O'Sullivan** für hilfreiche Programmier- und sonstige Computertipps.
- **Sven Ahrens** für anregende Gespräche über ART, den Weyltensor, das, was die Menschen im 21. Jahrhundert *Dunkle Energie* nannten . . . und Sinn und Unsinn des Bolognaprozesses.
- **Albert Einstein**, der mich zur Physik brachte.
- **Wolfgang Amadeus Mozart**, dessen Genie noch unergründlicher ist, als die tiefsten Abgründe der fünften Dimension.

Inhaltsverzeichnis

Ziel und Aufbau dieser Arbeit	15
I Einleitung	17
1 Historischer Überblick	17
1.1 Zusatzdimensionen und das Streben nach Vereinigung	17
1.2 Große Zusatzdimensionen	23
II Physik der Raumzeit	25
2 Allgemeine Relativitätstheorie	25
2.1 Differentialgeometrie	25
2.2 Gravitation	31
3 Relativistische Sterne	33
3.1 Metrik statischer, kugelsymmetrischer Systeme	33
3.2 Stellare Strukturgleichungen	35
3.3 Äußere Schwarzschild-Lösung	39
3.4 Innere Schwarzschild-Lösung	39
3.5 Numerische Lösung der TOV-Gleichungen	42
3.6 Neutronensterne	44
3.7 Weiße Zwerge	48
III Höherdimensionale Physik	51
4 Untermannigfaltigkeiten	51
4.1 Einbettung	51
4.2 Pushforward und Pullback	52
4.3 Induzierte Metrik I	53
5 Hyperflächen	54
5.1 Projektionsformalismus	54
5.2 Induzierte Metrik II	55
5.3 Äußere Krümmung	57
5.4 Kovariante Ableitung auf der Hyperfläche	58
5.5 Relationen von Gauß und Codacci	58
6 Branenwelten	61
6.1 Einführung	61
6.2 Effektive Feldgleichungen auf der Brane	61
6.3 Ideale Flüssigkeit auf der Brane	64
6.4 Energie-Impuls-Erhaltung auf der Brane	65

7	Sterne in der Branenwelt	67
7.1	Stellare Strukturgleichungen	67
7.2	Methode der Weyl-Zustandsgleichung	72
7.3	Analytische Außenraumlösung für $w = -2$	74
7.4	Numerische Lösung der Branen-TOV-Gleichungen	76
7.5	Neutronensterne	77
7.5.1	Ergebnisse der numerischen Berechnung	78
7.5.2	Besprechung der Ergebnisse	101
7.6	Weißer Zwerge	102
8	Zusammenfassung	104
IV	Anhänge	105
A	Ausführliche Rechnungen	105
A.1	Induzierte Metrik I auf der Zylinderoberfläche	105
A.2	Induzierte Metrik II auf der Zylinderoberfläche	106
A.3	Beweis der Symmetrie des äußeren Krümmungstensors	107
B	Notation	109
C	Konventionen	110
	Literaturverzeichnis	111

Abbildungsverzeichnis

1	Paralleltransport, 1. Methode	29
2	Paralleltransport, 2. Methode	29
3	Paralleltransport, 1. Methode	29
4	Paralleltransport, 2. Methode	29
5	Die Zustandsgleichung SLy	45
6	$\varrho(r)$ und $m(r)$ eines Neutronensterns	46
7	$R(\varrho_c)$, $M(\varrho_c)$ und $R(M)$ von Neutronensternen	47
8	$\varrho(r)$ und $m(r)$ eines Weißen Zwerges	48
9	$M(\varrho_c)$ von Weißen Zwergen	49
10	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -100$	78
11	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -100$	78
12	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -10$	79
13	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -10$	79
14	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -3$	80
15	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -3$	80
16	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -2$	81
17	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -2$	81
18	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -1$	82
19	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -1$	82
20	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,8$	83
21	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,8$	83
22	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,6$	84
23	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,6$	84
24	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,2$	85
25	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,2$	85
26	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0$	86
27	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0$	86
28	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0,2$	87
29	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0,2$	87
30	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 1$	88
31	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 1$	88
32	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 2$	89
33	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 2$	89
34	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 10$	90
35	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 10$	90
36	$\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 100$	91
37	$\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 100$	91
38	$\tilde{M}(\varrho_c)$, $R(\varrho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 10^{38}$ dyn/cm ²	92
39	$\tilde{M}(\varrho_c)$, $R(\varrho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 5 \cdot 10^{37}$ dyn/cm ²	93
40	$\tilde{M}(\varrho_c)$, $R(\varrho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 10^{37}$ dyn/cm ²	94
41	$\tilde{M}(\varrho_c)$, $R(\varrho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 5 \cdot 10^{36}$ dyn/cm ²	95

42	$\widetilde{M}(\varrho_c), R(\varrho_c), R(\widetilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 10^{36}$ dyn/cm ²	96
43	$\mathcal{U}(r)$ eines Neutronensterns für $\lambda = 10^{38}$ dyn/cm ²	97
44	$\widetilde{m}(r)$ außerhalb eines Neutronensterns für $\lambda = 10^{38}$ dyn/cm ²	98
45	$\widetilde{m}(r)$ außerhalb eines Neutronensterns für $\lambda = 10^{37}$ dyn/cm ²	99
46	$\widetilde{m}(r)$ außerhalb eines Neutronensterns für $\lambda = 10^{36}$ dyn/cm ²	100

Ziel und Aufbau dieser Arbeit

Die vorliegende Diplomarbeit beruht auf dem Branenwelt-Paradigma, wonach die Raumzeit als Hyperfläche einer fünfdimensionalen Bulk-Mannigfaltigkeit aufgefasst wird. In dieser Theorie nimmt man an, dass alle Teilchen und Wechselwirkungen auf die Hyperfläche, genannt *Brane*, beschränkt sind, die Gravitation jedoch ein fünfdimensionales Phänomen ist. Die Vorstellung der Allgemeinen Relativitätstheorie, dass eine gegebene Materieverteilung die Geometrie der Raumzeit festlegt, und aus der Geometrie ihrerseits die Bewegungsgleichungen von Testteilchen folgen, wird im Wesentlichen beibehalten. Demnach ruft die auf der Brane lokalisierte Materie eine Krümmung aller fünf Dimensionen hervor. Auf der Brane selbst wirkt sich nur ein effektiver, vierdimensionaler „Anteil“ der Gravitation aus, den man als Projektion der übergeordneten Feldgleichungen auf die Hyperfläche auffassen kann. Als effektives Gravitationsgesetz auf der Brane ergibt sich eine Modifikation der konventionellen Allgemeinen Relativitätstheorie. In der vorliegenden Arbeit soll insbesondere die Frage untersucht werden, wie sich dieses modifizierte Gravitationsgesetz auf die Struktur kompakter Sterne auswirkt, und welche Unterschiede sich im Vergleich zur Allgemeinen Relativitätstheorie ergeben.

Die bisher durchgeführten Studien über kompakte Sterne in der Branenwelt beschränkten sich entweder auf Schwarze Löcher, d.h. Vakuumlösungen der modifizierten Feldgleichungen, oder gingen von Sternen mit idealisierten Zustandsgleichungen aus – etwa der Annahme einer homogenen Energiedichte.¹ Davon abgrenzend lege ich den Schwerpunkt dieser Arbeit auf eine realistischere Behandlung der Sternmaterie durch Zustandsgleichungen, die den inhomogenen Dichteverlauf im Stern widerspiegeln. Dies wurde im Rahmen einer numerischen Behandlung der modifizierten Feldgleichungen realisiert.

Es zeigt sich, dass die auf die Branenwelt verallgemeinerten stellaren Strukturgleichungen im Gegensatz zu ihren allgemeinrelativistischen Pendanten ein unterbestimmtes Gleichungssystem bilden, das nur unter Annahme einer zusätzlichen Bedingung geschlossen werden kann. Zur Lösung dieses Problems wähle ich die Methode der Weyl-Zustandsgleichung, wodurch neben der Branenspannung λ ein weiterer Parameter w in das Modell einfließt. Ziel dieser Arbeit ist es, aus dem Vergleich der numerischen Ergebnisse mit Beobachtungsdaten eine Einschränkung der Parameterbereiche abzuleiten.

Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: In Teil I „Einleitung“ gebe ich einen historischen Überblick der Physik des vorigen Jahrhunderts unter besonderer Berücksichtigung der höherdimensionalen Modelle (Kapitel 1). In Teil II „Physik der Raumzeit“ wird zunächst ein kurzer Abriss der Allgemeinen Relativitätstheorie gegeben (Kapitel 2), und diese auf Sterne angewandt (Kapitel 3), d.h. es werden die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen, welche die Struktur relativisti-

¹Eine ausführliche Literaturbesprechung erfolgt in Abschnitt 7.2 auf Seite 72.

scher Sterne beschreiben, hergeleitet und analytisch für den Außenbereich eines Sterns sowie das Innere eines Sterns homogener Dichte gelöst. Schließlich wird ein numerisches Verfahren vorgestellt, mit dem die TOV-Gleichungen auch im Inneren von Sternen inhomogener Dichte gelöst werden können. Die Ergebnisse der numerischen Behandlung relativistischer Sterne dienen zum einen als Test dieses Verfahrens – die bekannten Eigenschaften von Neutronensternen und Weißen Zwergen werden korrekt reproduziert; zum anderen sollen sie später mit der Lösung der Branen-TOV-Gleichungen verglichen werden. Teil III „Höherdimensionale Physik“ behandelt zunächst die Einbettung von Untermannigfaltigkeiten in eine höherdimensionale Mannigfaltigkeit (Kapitel 4). Für den Spezialfall einer Hyperfläche (Kapitel 5) wird der Projektionsformalismus vorgestellt, und die Gauß-Codacci-Relationen hergeleitet. Auf das Branenwelt-Paradigma angewandt (Kapitel 6), führen diese auf die effektiven Feldgleichungen und die Energie-Impuls-Erhaltung auf der Brane. Von den effektiven Feldgleichungen ausgehend werden dann die Branen-TOV-Gleichungen hergeleitet (Kapitel 7) und numerisch gelöst. In der Zusammenfassung (Kapitel 8) stelle ich schließlich die erhaltenen Ergebnisse und Schlussfolgerungen zusammen. In den Anhängen finden sich einige ausführliche Rechnungen (A) sowie ein Überblick der verwendeten Notation (B) und Konventionen (C).

Teil I

Einleitung

»Die wissenschaftliche Begriffsbildung und Methode unterscheidet sich von der des Alltags lediglich durch größere Schärfe der Begriffe und Schlüsse, durch sorgfältigere und systematischere Auswahl des Erfahrungsmaterials sowie durch Sparsamkeit im logischen Sinne. Hierunter sei das Bestreben verstanden, alle Begriffe und Relationen auf möglichst wenige, logisch voneinander unabhängige Grundbegriffe und Axiome zurückzuführen.«
– Albert Einstein²

1 Historischer Überblick

1.1 Zusatzdimensionen und das Streben nach Vereinigung

Eines der Hauptmotive der Theoretischen Physik ist die Suche nach einer Vereinigung aller fundamentalen Wechselwirkungen. Als Vater dieses Programms gilt James Clerk Maxwell, dem es im 19. Jahrhundert gelang, **Elektrizität und Magnetismus**, die bis dahin als völlig verschiedene physikalische Phänomene angesehen wurden, mathematisch miteinander zu verknüpfen. Die Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= 0, & \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{1}{c} \partial_t \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, & \operatorname{rot} \vec{B} - \frac{1}{c} \partial_t \vec{E} &= \frac{4\pi}{c} \vec{j} \end{aligned} \quad (1.1)$$

bilden zusammen mit der Lorentz-Kraft $\vec{F}_L = q \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \times \vec{B} \right)$ ein Axiomensystem, aus dem alle elektrischen und magnetischen Vorgänge abgeleitet werden können. Die Struktur dieser Gleichungen brachte Albert Einstein dazu, grundlegend über das Wesen von Raum und Zeit nachzudenken, was schließlich zur Speziellen Relativitätstheorie [1] von 1905 führte. Ähnlich wie die Maxwell'schen Gleichungen Elektrizität und Magnetismus in einen mathematischen Zusammenhang setzen, werden in der Relativitätstheorie Raum und Zeit durch die Lorentztransformation miteinander verknüpft. Jedoch fehlte noch ein Schritt zu einer wirklichen Vereinigung der Konzepte Raum und Zeit auf der einen Seite und Elektrizität und Magnetismus auf der anderen. Beides gelang im Jahre 1908, als Hermann Minkowski [2] eine geometrische Interpretation der Speziellen Relativitätstheorie lieferte. Er schlug vor, Zeit als eine vierte Dimension aufzufassen und die bis dahin getrennten Begriffe Raum und Zeit zu einem neuen Begriff zu vereinigen – der *Raumzeit*.³ Minkowskis vierdimensionale Sichtweise führte zu einer sehr eleganten Formulierung der Speziellen Relativitätstheorie, in der

²A. Einstein, *Aus meinen späten Jahren*, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1979.

³Minkowski beginnt seinen Vortrag „Raum und Zeit“ [2] mit den viel zitierten Sätzen »Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von

beispielsweise die Lorentztransformation eine Interpretation als hyperbolische Drehung der vier Koordinatenachsen erhält, und sich relativistische Effekte wie die Zeitdilatation⁴ und die relativistische Energie-Impuls-Beziehung⁵ ganz natürlich aus der Invarianz des Skalarproduktes von Vierervektoren ergeben. Die Begriffe der Elektrodynamik lassen sich leicht in eine vierdimensionale Form bringen, in welcher die Maxwell'schen Gleichungen die Gestalt

$$\begin{aligned}\partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} &= 0, \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{c} j^\beta\end{aligned}\quad (1.2)$$

annehmen. Die darin auftretende tensorielle Größe

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}\quad (1.3)$$

übernimmt jene Rollen, die der Vektor \vec{E} des elektrischen Feldes und der Pseudovektor \vec{B} des magnetischen Induktionsfeldes in der dreidimensionalen Formulierung (1.1) innehaben. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass $F^{\alpha\beta}$ eine neue physikalische Größe darstellt, welche die getrennten Konzepte der Elektrizität und des Magnetismus zu einem einzigen Konzept vereinigt – dem *elektromagnetischen Feld*.

Im Jahre 1908 mag Minkowskis vierdimensionale Sichtweise von seinen Zeitgenossen noch als rein mathematische Spielerei aufgefasst worden sein – als bloße Änderung der Notation, der keine tiefere physikalische Bedeutung inneohnt. Albert Einstein nahm dieses Paradigma jedoch sehr ernst und schuf seine Theorie der Gravitation auf diesem vierdimensionalen Fundament. Seine im Jahre 1915 vollendete Allgemeine Relativitätstheorie [3]–[5] verknüpft die Geometrie der Raumzeit mit ihrem Masse- und Energieinhalt und stellt damit das Raumzeit-Konzept mit den Begriffen Masse und Energie auf die gemeinsame Stufe physikalischer Entitäten.

Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren.«

⁴Ortsvektor im Laborsystem: $x = (ct, \vec{x})$, und im Ruhesystem: $x' = (c\tau, 0)$.

$$\begin{aligned}\langle dx, dx \rangle &= c^2 dt^2 - d\vec{x}^2 \stackrel{!}{=} \langle dx', dx' \rangle = c^2 d\tau^2 \quad \curvearrowright \quad \frac{d\tau^2}{dt^2} = 1 - \frac{d\vec{x}^2}{c^2 dt^2} = 1 - \frac{v^2}{c^2} \\ &\quad \curvearrowright \quad dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.\end{aligned}$$

⁵Energie-Impuls-Vektor im Laborsystem: $p = (E/c, \vec{p})$, und im Ruhesystem: $p' = (mc, 0)$.

$$\langle p, p \rangle = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \stackrel{!}{=} \langle p', p' \rangle = m^2 c^2 \quad \curvearrowright \quad E^2 = m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2.$$

Die Physik zu Beginn des 20. Jahrhunderts kannte zwei fundamentale Wechselwirkungen, den **Elektromagnetismus und Gravitation**. Zu deren theoretischer Beschreibung standen zwei relativistische Feldtheorien zur Verfügung, die Maxwell'sche Theorie in ihrer manifest kovarianten Form (1.2) und Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie mit den Feldgleichungen

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}. \quad (1.4)$$

In Anbetracht des Erfolges bei der Vereinigung von Elektrizität und Magnetismus war der nächste logische Schritt, nach einer vereinigten Feldtheorie von Elektromagnetismus und Gravitation zu suchen. Es stellt keine Schwierigkeit dar, beide Theorien in einen formalen Zusammenhang zu setzen: Dazu müssen zunächst die Maxwell-Gleichungen an den Fall einer gekrümmten Raumzeit angepasst werden, was durch die Ersetzung der partiellen Ableitungen in (1.2) durch kovariante Ableitungen erfolgt.⁶ Des weiteren muss die gravitative Wirkung des elektromagnetischen Feldes berücksichtigt werden, indem zum Energie-Impuls-Tensor der Materie in (1.4) noch der elektromagnetische Energie-Impuls-Tensor

$$T_{\alpha\beta}^{\text{em}} = -\frac{1}{4\pi} (g^{\mu\nu} F_{\alpha\mu} F_{\beta\nu} - \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}), \quad (1.5)$$

hinzugefügt wird.⁷ Damit gelangt man zu den Einstein-Maxwell-Gleichungen

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= \kappa (T_{\alpha\beta}^{\text{mat}} + T_{\alpha\beta}^{\text{em}}), \\ \partial^\alpha F^{\beta\gamma} + \partial^\beta F^{\gamma\alpha} + \partial^\gamma F^{\alpha\beta} &= 0, \\ \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} &= \frac{4\pi}{c} j^\beta. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Durch dieses Gleichungssystem kommt jedoch noch kein einheitlicher Charakter von Elektromagnetismus und Gravitation zum Ausdruck. Die erste Gleichung besagt lediglich, dass der Energieinhalt des elektromagnetischen Feldes zur Krümmung der Raumzeit beiträgt, während die übrigen Gleichungen das elektromagnetische Feld näher beschreiben. Eine wirkliche Vereinigung der beiden Theorien ist erst erreicht, wenn sich die Einstein-Maxwell-Gleichungen deduktiv aus einem gemeinsamen Prinzip ergeben.

Inspiziert durch Minkowskis Vorgehensweise, eine vierte Dimension zum Zwecke der Vereinigung physikalischer Begriffe einzuführen, schlug Theodor Kaluza [6] im Jahre 1919 vor, eine Vereinheitlichung von Maxwell'scher und Einstein'scher Theorie in einem fünfdimensionalen Formalismus zu suchen.⁸ Seine

⁶Dies ist nur für die inhomogene Maxwellgleichung nötig; in der homogenen Maxwellgleichung heben sich die Terme mit den Christoffelsymbolen aufgrund der Antisymmetrie des Feldstärketensors gegenseitig weg, sodass nur die partiellen Ableitungen übrig bleiben.

⁷Auch darin wurde durch die Ersetzung der Minkowski-Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ durch eine allgemeine Metrik $g_{\alpha\beta}$ eine Verallgemeinerung auf die gekrümmte Raumzeit vorgenommen.

⁸Eine fünfdimensionale Herangehensweise zur Vereinigung von Maxwells Theorie mit dem Newton'schen Gravitationsgesetz wurde bereits im Jahre 1914 von Gunnar Nordström [7] vorgeschlagen.

Idee war es, das elektromagnetische 4er-Potential $A^\alpha = (\phi, \vec{A})$ als Komponenten des metrischen Tensors aufzufassen,

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\alpha\beta} + \xi A_\alpha A_\beta & \xi A_\alpha \\ \xi A_\beta & \xi \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

worin die Indizes A, B von 0 bis 4 laufen und die raumzeitlichen Indizes α, β wie üblich von 0 bis 3. ξ ist ein nicht näher bestimmtes Skalarfeld. Ferner verlangte er, dass die metrischen Komponenten nicht von der fünften Koordinate abhängen, was er als Zylinderbedingung bezeichnete:

$$\partial_4 g_{AB} = 0. \quad (1.8)$$

Als Grundgleichung dieser Theorie setzte er ein fünfdimensionales Vakuum an, was im Einstein'schen Sinne einem verschwindenden Ricci-Tensor entspricht:

$$R_{AB} = 0. \quad (1.9)$$

Für den Fall $\xi = -\kappa/2\pi = \text{const}$ ergeben sich daraus die Gleichungen

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}^{\text{em}}, \quad \nabla_\alpha F^{\alpha\beta} = 0, \quad F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} = 0, \quad (1.10)$$

wobei die Definition $F^{\alpha\beta} := \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$ ausgenutzt wurde.⁹ Die erste Gleichung entspricht der Einstein'schen Feldgleichung für ein elektromagnetisches Feld im materiefreien Raum; die zweite ist die inhomogene Maxwellgleichung in Abwesenheit von Ladungen und Strömen. Kaluzas Theorie reproduziert somit die Einstein-Maxwell-Gleichungen im Vakuum mit Ausnahme der inhomogenen Maxwellgleichung, deren Gültigkeit durch die Identifizierung des oben definierten Ausdrucks $F^{\alpha\beta}$ mit dem Feldstärketensor (1.3) implizit vorausgesetzt wird. Allerdings ist durch die dritte Gleichung in (1.10) eine erhebliche Einschränkung des elektromagnetischen Feldes gegeben, nämlich $\vec{E} = \vec{B}$, von der man sich nur durch zusätzliche Annahmen befreien kann. So etwa durch den Vorschlag Oskar Kleins [9], für die fünfte Dimension die Topologie eines Kreises anzunehmen.¹⁰

⁹Siehe Plebański & Krasinski [8], Seite 164 ff.

¹⁰Klein verfolgte damit eigentlich die Absicht, Kaluzas Theorie in einen Zusammenhang zur Quantenmechanik zu stellen. Bekanntlich sind die Energiezustände eines Teilchens quantisiert, sofern das Teilchen auf ein endliches Volumen beschränkt ist. Klein hoffte, durch eine zu einem Kreis endlichen Umfangs $2\pi\ell$ aufgewickelte Zusatzdimension die Quantisierung der elektrischen Ladung erklären zu können. Zur Größe dieses Umfangs gelangt man durch die folgende Überlegung. Aus der Periodizität der fünften Dimension χ folgt, dass jede physikalische Größe $\psi(x^\alpha, \chi)$ periodisch in χ ist, $\psi(x^\alpha, \chi) = \psi(x^\alpha, \chi + 2\pi\ell)$, und demnach in einer Fourier-Reihe entwickelt werden kann:

$$\psi(x^\alpha, \chi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(x^\alpha) e^{in\chi/\ell}. \quad (1.11)$$

Betrachtet man ein masseloses Skalarfeld, das die fünfdimensionale Wellengleichung ${}^{(5)}\square\psi = 0$ erfüllt, so folgt für die Fourier-Koeffizienten ψ_n eine vierdimensionale Klein-Gordon-Gleichung

Erinnern wir uns: In vier Dimensionen folgen die Einstein-Maxwell-Gleichungen aus dem Hamilton-Prinzip der extremalen Wirkung

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{2}{c} j_\alpha A^\alpha \right) + S_{\text{mat}}, \quad (1.14)$$

$$F^{\alpha\beta} := \partial^\alpha A^\beta - \partial^\beta A^\alpha$$

bei Variation nach den unabhängigen Variablen $g_{\alpha\beta}$, A^α und entsprechender Materie-Variablen. Auch hier ist die homogene Maxwellgleichung wieder in dem Ausdruck für $F^{\alpha\beta}$ implizit vorausgesetzt. In der Kaluza-Klein-Theorie lautet das fünfdimensionale Wirkungsintegral

$$\begin{aligned} S &= \int d^5x \sqrt{{}^{(5)}g} {}^{(5)}R \\ &= 2\pi\ell \int d^4x \sqrt{{}^{(5)}g} {}^{(5)}R \\ &= 2\pi\ell \int d^4x \sqrt{-g} \xi \left(R - \frac{\square\xi}{\xi} + \frac{\xi}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{\partial_\alpha \xi \partial^\alpha \xi}{2\xi^2} \right). \end{aligned} \quad (1.15)$$

Hierbei wurde im zweiten Schritt die Kreistopologie der fünften Dimension ausgenutzt; das Integral konnte ausgeführt werden, da die Metrik und der Ricci-Tensor laut Zylinderbedingung nicht von der fünften Koordinate abhängen. Im dritten Schritt wurden die Determinante ${}^{(5)}g$ und der Ricciskalar ${}^{(5)}R$ eingesetzt, die aus Kaluzas 5er-Metrik (1.7) folgen. Für den Fall $\xi = 1/2\pi = \text{const}$ reduziert sich die Wirkung auf

$$S = \ell \int d^4x \sqrt{-g} \left(R + \frac{1}{8\pi} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \quad (1.16)$$

und hat die Einstein-Maxwell-Gleichungen im Vakuum zur Folge. Für diesen Spezialfall stellt die Kaluza-Klein-Theorie somit eine einheitliche Feldtheorie des Elektromagnetismus und der Gravitation dar.

In der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts erfuhr die Physik eine erhebliche Erweiterung, zum einen durch die Entwicklung der Quantenmechanik zur Be-

mit der effektiven Masse m_n :

$${}^{(4)}\square\psi_n = m_n^2\psi_n, \quad m_n = \frac{n}{\ell}. \quad (1.12)$$

Vom vierdimensionalen Standpunkt aus betrachtet, besteht ψ demnach aus einer masselosen Null-Mode ψ_0 und einem Turm aus massiven Kaluza-Klein-Moden $\psi_{n \neq 0}$. Falls der Radius ℓ der Zusatzdimension hinreichend klein ist, treten die Kaluza-Klein-Moden jedoch erst bei entsprechend hohen Energien auf und nur die Null-Mode ist beobachtbar. Klein nahm als Größe der Zusatzdimension die Planck Länge an, $\ell \sim 10^{-35}$ m. Schätzt man ℓ aus der Tatsache ab, dass in Teilchenbeschleunigern bisher keine Kaluza-Klein-Moden von bekannten Teilchen angeregt wurden, so erhält man als obere Grenze

$$\ell \lesssim \mathcal{O}(\text{TeV}^{-1}) \sim 10^{-19} \text{ m}. \quad (1.13)$$

schreibung atomarer und subatomarer Vorgänge, zum anderen durch die Entdeckung der schwachen und starken Wechselwirkungen. Zusammen mit dem Elektromagnetismus und der Gravitation waren somit **vier fundamentale Wechselwirkungen** bekannt. Das Streben nach größtmöglicher Einheitlichkeit der Grundlagen führte zum Konzept des Eichfeldes, dessen Feldquanten, die Eichbosonen, als Vermittler der Wechselwirkungen aufgefasst werden. In diesem Rahmen gelang in den späten 40er Jahren die Formulierung einer relativistischen Quantenfeldtheorie des Elektromagnetismus (Quantenelektrodynamik – QED), die später zu einer vereinheitlichten Theorie der elektroschwachen Wechselwirkung ausgebaut werden konnte, und in den 70er Jahren die Formulierung der Quantenchromodynamik (QCD) als Eichfeldtheorie der starken Wechselwirkung.¹¹ Es hat sich als äußerst schwierig herausgestellt, auch die Gravitation als eine quantisierte Eichfeldtheorie zu formulieren. Einen Ansatz in dieser Richtung stellt beispielsweise die Loop-Quantengravitation dar.¹²

Bei der Suche nach einer Vereinigung aller fundamentalen Wechselwirkungen wurden auch Zusatzdimensionen in Betracht gezogen. Ein möglicher Kandidat einer „Theorie von allem“ enthält jedoch mehr Freiheitsgrade, als Kaluzas 5er-Metrik anbieten kann. Einen Ausweg bietet die Annahme von mehr als einer Zusatzdimension. Auf die Frage, wie viele Dimensionen benötigt werden, um das Standardmodell der Teilchenphysik mit der Gravitation nach einem Kaluza-Klein-Schema zu vereinigen, wurde 1981 eine Antwort von Edward Witten [12] gegeben: mindestens elf. Es bildeten sich zunächst mehrere höherdimensionale Vereinigungsprogramme heraus. Die Supergravitation, eine Kombination aus Allgemeiner Relativitätstheorie und Supersymmetrie, die von elf oder weniger Dimensionen ausgeht; die Stringtheorie, die nur in 26 Dimensionen konsistent ist und Bosonen beschreibt; und die fünf anomaliefreien Superstringtheorien (Typ I, Typ IIA, Typ IIB, SO(32) heterotisch und $E_8 \times E_8$ heterotisch). Letztere beschreiben Fermionen und Bosonen in einem zehndimensionalen Formalismus. Allen Ansätzen gemein ist die Annahme, dass die Zusatzdimensionen wie in der ursprünglichen Kaluza-Klein-Theorie auf der Planck-Skala kompaktifiziert sind. Im Gegensatz zur Kaluza-Klein-Theorie sind die Eichfelder jedoch an die Metrik gekoppelt, statt selbst Komponenten der Metrik zu sein. In dieses Theorien-Konglomerat wurde im Jahre 1994 eine neue Ordnung gebracht, was als zweite Superstring-Revolution bezeichnet wird: Man erkannte die Notwendigkeit, dass es neben den eindimensionalen Strings auch höherdimensionale Membranen, so genannte p -Branen, geben muss, die zusammen die fundamentalen Objekte der Theorie darstellen; ferner stellte sich heraus, dass die fünf Superstringtheorien miteinander über Dualitäten in Wechselbeziehungen stehen und im Limes kleiner Energien in die elfdimensionale Supergravitation übergehen. Dies führte zu der Interpretation, dass die **Vereinigung aller fundamentalen Wech-**

¹¹Zur historischen Entwicklung der Teilchenphysik siehe Dosch [10].

¹²Siehe Rovelli [11].

selwirkungen in einer elfdimensionalen Theorie erfolgen könnte, genannt M-Theorie, die den Superstringtheorien übergeordnet ist und die Supergravitation als Grenzfall kleiner Energien enthält.¹³

1.2 Große Zusatzdimensionen

Gegen Ende des 20. Jahrhunderts kamen neuartige, höherdimensionale Modelle auf, die man als **Branenwelten** bezeichnet.¹⁴ Diese basieren auf den Arbeiten von Hořava & Witten [14], [15], die ein elfdimensionales Superstring-Szenario gefunden hatten, in welchem die Teilchen und Eichfelder des Standardmodells mit Ausnahme des Gravitons auf eine zehndimensionale Hyperfläche, der so genannten Brane, beschränkt sind, sodass die elfte Dimension nicht kompakt sein muss. Die Sonderrolle der Gravitation, die als einzige Wechselwirkung den vollen, elfdimensionalen Bulk ausfüllt, ergibt sich wie folgt: Die Superstring- bzw. M-Theorie behandelt drei Arten fundamentaler Objekte – ringförmig geschlossene Strings, offene Strings mit frei liegenden Enden und höherdimensionale Branen. Eine bestimmte Gattung von Branen, die D-Branen, sind jene Orte, auf denen die Enden der offenen Strings lokalisiert sind. Während sich geschlossene Strings frei im elfdimensionalen Raum der Stringtheorie bewegen können, tendieren die offenen Strings dazu, ihre Enden an eine D-Brane zu heften. Die Standardmodell-Teilchen und Eichbosonen werden in der M-Theorie durch offene Strings repräsentiert; das Spin-2-Graviton ist jedoch ein geschlossener String.

Das erste Branenwelt-Szenario wurde im Jahre 1999 von Randall & Sundrum (**RS1** [16]) vorgeschlagen, die erkannt hatten, dass sich aus dem Materie-Confinement und der Sonderrolle des Gravitons eine natürliche Erklärung des Hierarchieproblems ergibt, also der Frage, warum die Gravitation so viel schwächer ist, als die drei anderen fundamentalen Wechselwirkungen.¹⁵ Sie gingen zunächst von einer endlichen Zusatzdimension aus, die aber nicht zu einem Kreis aufgewickelt ist, sondern von zwei Minkowski-Branen ($g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$) im Abstand L begrenzt wird. Den fünfdimensionalen Bulk fassten sie als Anti-de-Sitter-Raum auf, also ein 5D-Vakuum mit negativer kosmologischer Konstanten Λ_5 .¹⁶

¹³Zur Wahl des Namens M-Theorie schreiben Hořava & Witten [14]: »*As it has been proposed that the eleven-dimensional theory is a supermembrane theory but there are some reasons to doubt that interpretation, we will non-committally call it the M-theory, leaving to the future the relation of M to membranes.*«

¹⁴Siehe Maartens [13].

¹⁵Ein Jahr zuvor wurde zur Lösung des Hierarchieproblems ein sechsdimensionales Modell von Arkani-Hamed et al. [18] vorgeschlagen, wobei die beiden Zusatzdimensionen auf Skalen $100\ \mu\text{m} \dots 1\ \text{mm}$ kompaktifiziert sind, also deutlich größer sein können, als in herkömmlichen Kaluza-Klein-Theorien. Dieses Modell wird ebenfalls zu einem Branenmodell, wenn man den stringtheoretischen Confinement-Mechanismus annimmt, was in [18] aber nicht explizit getan wurde.

¹⁶Um auf den beiden Branen eine flache Minkowski-Metrik zu gewährleisten, müssen sie mit einer Spannung $\lambda = \lambda_1 = -\lambda_2$ ausgestattet sein, die mit der kosmologischen Konstanten abgestimmt ist: $\lambda^2 = -6\Lambda_5/\kappa_5^2$. Dabei ist κ_5 die Kopplungskonstante der Gravitation in fünf

In diesem Modell wird die Planck-Masse M_{Pl} , welche ein Maß für die Stärke der Gravitation in vier Dimensionen ist, zu einer effektiven Größe, die sich aus der fundamentalen Massenskala M_5 ableitet:

$$M_{\text{Pl}}^2 = M_5^3 \ell (1 - e^{-2L/\ell}). \quad (1.17)$$

Darin ist $\ell = \sqrt{-6/\Lambda_5}$ der AdS₅-Krümmungsradius. In fünf Dimensionen kann die Stärke der Gravitation also durchaus vergleichbar etwa zur schwachen Wechselwirkung werden; die effektive 4D-Gravitation wird jedoch durch Auftreten des Faktors $e^{-2L/\ell}$ abgeschwächt.

In einem zweiten Branenmodell zeigten Randall und Sundrum (**RS2** [17]), dass die kosmologische Bulk-Konstante Λ_5 die Kompaktifizierung der Zusatzdimension überflüssig macht, denn die Krümmung des Bulks hat eine effektive Lokalisierung der Gravitation in der Nähe der Brane zur Folge. Diesmal gingen sie von einer einzigen Minkowski-Brane aus (bzw. platzierten die zweite Brane bei $L \rightarrow \infty$). Die Bulk-Einsteingleichungen

$$G_{AB} := R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R g_{AB} = -\Lambda_5 g_{AB} \quad (1.18)$$

werden in Gauß'schen Normalkoordinaten $X^A = (x^\alpha, \chi)$ durch das Linienelement

$${}^{(5)}ds^2 = e^{-2|\chi|/\ell} \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta + d\chi^2 \quad (1.19)$$

gelöst. Wie man sieht, besitzt die Brane (bei $\chi = 0$) und jede dazu parallele 4D-Hyperfläche ($\chi \neq 0$) eine flache Minkowski-Metrik; jedoch schrumpft das 4er-Linienelement jeder dieser Hyperflächen, je größer der Abstand zur Brane wird. Demnach steuert aufgrund des exponentiellen „Warp-Faktors“ auch eine unendlich ausgedehnte Zusatzdimension nur einen endlichen Beitrag zum fünf-dimensionalen Volumen bei:¹⁷

$$\int d^5x \sqrt{-{}^{(5)}g} = 2 \int d^4x \int_0^\infty d\chi e^{-4\chi/\ell} = 2 \frac{e^{-4\chi/\ell}}{-4/\ell} \Big|_0^\infty \int d^4x = \frac{\ell}{2} \int d^4x. \quad (1.22)$$

Folglich kann sich die Gravitation zwar über die gesamte Bulk-Mannigfaltigkeit ausbreiten, aber die Verdünnung in Richtung der fünften Dimension, erstreckt sich nur auf ein begrenztes, effektives Volumen.

Dimensionen.

¹⁷Der metrische Tensor lautet

$$g_{AB} = e^{-2|\chi|/\ell} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} = e^{-2|\chi|/\ell} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & e^{2|\chi|/\ell} \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

und hat die Determinante

$${}^{(5)}g = -e^{-8|\chi|/\ell}. \quad (1.21)$$

Teil II

Physik der Raumzeit

»Zwei Dinge erfüllen das Gemüt mit immer neuer und zunehmender Bewunderung und Ehrfurcht, je öfter und anhaltender sich das Nachdenken damit beschäftigt: Der bestirnte Himmel über mir und das moralische Gesetz in mir.«

– Immanuel Kant¹⁸

2 Allgemeine Relativitätstheorie

2.1 Differentialgeometrie

Die Differentialgeometrie bildet das mathematische Gerüst der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die physikalische Raumzeit erfüllt alle Eigenschaften einer **Mannigfaltigkeit**; veranschaulicht bedeutet dies, dass die Raumzeit lokal wie der euklidische Raum \mathbb{R}^4 aussieht, d.h. sie ist lokal flach und kann in der Umgebung eines jeden ihrer Punkte durch 4-Tupel reeller Zahlen, so genannte Koordinaten, beschrieben werden. Eine solche Umgebung mit ihrem Koordinatensystem nennt man eine Karte. Da die Raumzeit gekrümmt sein kann, benötigt man im Allgemeinen mehrere, sich überlappende Karten zur vollständigen Beschreibung der Raumzeit.¹⁹

Auf der Raumzeit-Mannigfaltigkeit Σ können Kurven $C: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$, $\lambda \mapsto x^\alpha(\lambda)$ definiert werden. Durch die Ableitung von C nach dem Kurvenparameter λ im Punkt p ist ein **Tangentialvektor** an die Kurve in diesem Punkt gegeben:

$$v_p^\alpha = \left. \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right|_p. \quad (2.1)$$

Dieser Tangentialvektor ist kein Element der Mannigfaltigkeit (eine Mannigfaltigkeit ist kein Vektorraum, sondern eine Punktmenge); man muss sich eher an jedem Punkt p der Mannigfaltigkeit einen Vektorraum, den so genannten **Tangentialraum** $\mathcal{T}_p(\Sigma)$, angeheftet denken. $\mathcal{T}_p(\Sigma)$ ist die Menge der Tangentialvektoren aller durch p verlaufenden Kurven.

Der Tangentialvektor (2.1) kann auch in einer koordinatenunabhängigen Schreibweise angegeben werden:²⁰

$$v = \frac{d}{d\lambda}. \quad (2.2)$$

Fasst man die Basisvektoren $e_{(\alpha)}$ als die Tangentialvektoren an die durch p verlaufenden Koordinatenlinien auf, also jenen Kurven, längs derer sich nur die

¹⁸I. Kant, *Kritik der praktischen Vernunft*, Beschlus.

¹⁹Eine Analogie ist die Erde, deren Oberfläche nicht in einer einzigen Karte dargestellt werden kann.

²⁰Im Folgenden lasse ich den Index p weg. v bezeichnet dann das Tangentialvektorfeld an die Kurve C .

Koordinate x^α ändert und die anderen konstant bleiben, sodass x^α selbst als Kurvenparameter herangezogen werden kann, ergibt sich in dieser Notation²¹

$$e_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} =: \partial_\alpha. \quad (2.3)$$

Aus (2.2) folgt mit der Kettenregel

$$v = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = v^\alpha e_{(\alpha)}, \quad (2.4)$$

was als die Entwicklung des Tangentialvektors nach den Basisvektoren interpretiert werden kann. Die vier Zahlen $dx^\alpha/d\lambda$ sind die Koordinaten von v bezüglich der Basis $\{e_{(\alpha)}\}$.

Um die Länge eines Vektors und Winkel zwischen zwei Vektoren angeben zu können, muss auf dem Tangentialraum ein Skalarprodukt definiert sein. Dies geschieht durch Einführen der **Metrik** g . In der Sprache der Differentialgeometrie ist g eine 2-Form, also eine bilineare Funktion, die zwei Vektoren aus demselben Tangentialraum eine reelle Zahl, nämlich ihr Skalarprodukt, zuordnet, $g: \mathcal{T}_p(\Sigma) \times \mathcal{T}_p(\Sigma) \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$, mit

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= g(v, w) \\ &= g(v^\alpha e_{(\alpha)}, w^\beta e_{(\beta)}) \\ &= v^\alpha w^\beta g(e_{(\alpha)}, e_{(\beta)}) \\ &= g_{\alpha\beta} v^\alpha w^\beta, \end{aligned} \quad (2.5)$$

wobei im dritten Schritt die Bilinearität ausgenutzt, und im vierten Schritt die Bezeichnung $g(e_{(\alpha)}, e_{(\beta)}) =: g_{\alpha\beta}$ eingeführt wurde.

Die Wirkung der Metrik auf einen einzigen Vektor interpretiert man wie folgt: Durch $\tilde{v}(\cdot) = g(v, \cdot)$ wird ein so genannter Kovektor oder dualer Vektor definiert, der ein Element des dualen Tangentialraumes $\tilde{\mathcal{T}}_p(\Sigma)$ ist. Auf einen Vektor $w \in \mathcal{T}_p(\Sigma)$ angewandt, liefert er das Skalarprodukt

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle &= \tilde{v}(w) \\ &= \tilde{v}(w^\beta e_{(\beta)}) \\ &= \tilde{v}(e_{(\beta)}) w^\beta \\ &= v_\beta w^\beta, \end{aligned} \quad (2.6)$$

wobei die Schreibweise $\tilde{v}(e_{(\beta)}) = g(v^\alpha e_{(\alpha)}, e_{(\beta)}) = v^\alpha g_{\alpha\beta} =: v_\beta$ eingeführt wurde. Ein Dualvektor ist eine 1-Form, d.h. eine lineare Funktion, die einem Vektor aus $\mathcal{T}_p(\Sigma)$ eine reelle Zahl zuordnet.

Eine Mannigfaltigkeit, auf deren Tangentialräumen ein Skalarprodukt definiert ist, nennt man Riemann'sche Mannigfaltigkeit, wenn das Skalarprodukt

²¹Der Index α nummeriert die Basisvektoren. Er steht in Klammern, damit man ihn nicht mit einem Komponentenindex verwechselt.

positiv definit ist. Die Raumzeit ist eine **Pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit**, denn das Skalarprodukt eines Vierervektors mit sich selbst kann positiv, negativ oder Null sein. Daraus ergibt sich die Unterscheidung in raumartige, zeitartige und lichtartige Vierervektoren.^{22, 23}

Durch die Abbildung $\Theta: \Sigma \rightarrow \Sigma$, $x^\alpha \mapsto x^{\alpha'}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ sei ein Basiswechsel auf Σ gegeben. Für die Basisvektoren folgt mit der Kettenregel

$$e_{(\alpha)} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} e_{(\alpha')} \quad \curvearrowright \quad e_{(\alpha')} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} e_{(\alpha)}. \quad (2.7)$$

In (2.4) eingesetzt, ergibt sich das Transformationsverhalten eines Vektors bezüglich dieser Koordinatentransformation:

$$v = v^\alpha e_{(\alpha)} = v^\alpha \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} e_{(\alpha')} = v^{\alpha'} e_{(\alpha')} \quad \curvearrowright \quad v^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} v^\alpha. \quad (2.8)$$

Ein Vergleich von (2.7) mit (2.8) zeigt, dass sich die Vektorkomponenten genau gegenläufig zu den Basisvektoren transformieren. Man nennt v^α daher auch die **kontravarianten Komponenten** von v . Das Transformationsverhalten eines Dualvektors folgt aus der Forderung, dass das Skalarprodukt invariant unter Koordinatentransformationen ist:

$$\langle v, w \rangle = v_\alpha w^\alpha \stackrel{!}{=} v_{\alpha'} w^{\alpha'} = v_{\alpha'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} w^\alpha \quad \curvearrowright \quad v_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} v_\alpha. \quad (2.9)$$

Dies ist identisch mit dem Transformationsverhalten der Basisvektoren (2.7). Man nennt v_α deshalb die **kovarianten Komponenten** von v .

Ein für die Physik zentraler Begriff ist die Differentiation von Funktionen und Vektorfeldern. Durch (2.4) wurde der Tangentialvektor an die Kurve $C: \mathbb{R} \rightarrow \Sigma$, $\lambda \mapsto x^\alpha(\lambda)$ als Ableitungsoperator nach dem Kurvenparameter eingeführt. Dieser kann auf eine skalare Funktion $f: \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, $x^\alpha \mapsto f(x^\alpha)$ angewandt werden, was eine reelle Zahl ergibt:

$$v(f) = v^\alpha \partial_\alpha f = \langle v, \nabla f \rangle =: \nabla_v f. \quad (2.10)$$

Durch $v(f)$ ist also die **Richtungsableitung** des Skalarfeldes f längs v gegeben. Setzt man die Komponenten $v^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ ein, so ergibt sich

$$\nabla_v f = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} = \frac{df}{d\lambda}, \quad (2.11)$$

²²Die Zuordnung hängt von der Signatur der Metrik ab. Setzt man $\eta = 1$ für die Signatur $(-, +, +, +)$ und $\eta = -1$ für die Signatur $(+, -, -, -)$, so gilt

$$\eta x_\alpha x^\alpha \begin{cases} > 0 \curvearrowright x^\alpha \text{ ist raumartig,} \\ = 0 \curvearrowright x^\alpha \text{ ist lichtartig,} \\ < 0 \curvearrowright x^\alpha \text{ ist zeitartig.} \end{cases}$$

²³Diese Eigenschaft des Skalarproduktes – also die unterschiedlichen Vorzeichen für Raum- und Zeitkoordinaten in der Metrik – ist eine physikalische Notwendigkeit, denn sie bestimmt die kausale Struktur der Raumzeit.

wobei das Skalarfeld f nun als Funktion auf den Parametern $\lambda \in \mathbb{R}$ aufgefasst wurde, statt auf den Punkten von Σ . Die totale Ableitung von f (genauer: von $f \circ C$) nach dem Kurvenparameter von C entspricht also der Richtungsableitung von f entlang des Tangentialvektors an C .

Im \mathbb{R}^4 steht zusätzlich die Richtungsableitung eines Vektorfeldes w entlang der Kurve C zur Verfügung:

$$\nabla_v w = \frac{dw}{d\lambda} := \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{w(\lambda + d\lambda) - w(\lambda)}{d\lambda}. \quad (2.12)$$

Im Falle der Raumzeit – oder einer allgemeinen Mannigfaltigkeit – ist zu bedenken, dass dieser Differentialquotient nur dann wohldefiniert ist, wenn die beiden Vektoren $w(\lambda + d\lambda)$ und $w(\lambda)$ dem gleichen Tangentialraum angehören. Im \mathbb{R}^4 ist dies der Fall, nicht aber in einer gekrümmten Mannigfaltigkeit. Um den Differentialquotienten zu bilden, muss einer von beiden Vektoren in geeigneter Weise in den Tangentialraum des anderen Vektors transportiert werden. Bildlich gesprochen muss ein **Zusammenhang** zwischen verschiedenen Tangentialräumen definiert sein. Man kann dann schreiben

$$\nabla_v w = \frac{Dw}{d\lambda} := \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{\bar{w}_{\lambda+d\lambda}(\lambda) - w(\lambda)}{d\lambda}, \quad (2.13)$$

wobei $\bar{w}_{\lambda+d\lambda}(\lambda)$ der Vektor ist, der aus $w(\lambda + d\lambda)$ durch Paralleltransport vom Punkt $x^\alpha(\lambda + d\lambda)$ nach $x^\alpha(\lambda)$ entsteht. $\nabla_v w$ bezeichnet die so genannte **kovariante Ableitung** des Vektorfeldes w längs v . Ein Zusammenhang zwischen verschiedenen Tangentialräumen besteht, wenn die kovarianten Ableitungen aller Basisvektoren entlang aller Basisvektoren – also $\nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)}$ für alle α, β – gegeben sind. Als Ableitungsoperator genügt ∇_v der Produktregel, und es gilt

$$\begin{aligned} \nabla_v w &= \nabla_v w^\alpha e_{(\alpha)} \\ &= (\nabla_v w^\alpha) e_{(\alpha)} + w^\alpha \nabla_v e_{(\alpha)} \\ &= v^\beta \frac{\partial w^\alpha}{\partial x^\beta} e_{(\alpha)} + w^\alpha v^\beta \nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

worin ausgenutzt wurde, dass die kovariante Ableitung einer Vektorkomponente, $\nabla_v w^\alpha$, der normalen Richtungsableitung (2.10) entspricht. Der Vektor $\nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)}$ kann nach den Basisvektoren $e_{(\gamma)}$ entwickelt werden:

$$\nabla_{e_{(\beta)}} e_{(\alpha)} = \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma e_{(\gamma)}. \quad (2.15)$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$ nennt man **Christoffelsymbole**. Mit ihnen ergibt sich aus (2.14) die γ -Komponente der kovarianten Ableitung zu

$$(\nabla_v w)^\gamma = v^\beta \partial_\beta w^\gamma + w^\alpha v^\beta \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \frac{dw^\gamma}{d\lambda} + w^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma, \quad (2.16)$$

wobei im zweiten Schritt die Komponenten $v^\beta = dx^\beta/d\lambda$ des Tangentialvektors eingesetzt und die Kettenregel angewandt wurde. Betrachten wir als Spezialfall die kovariante Ableitung entlang $e_{(\beta)}$, also $\nabla_{e_{(\beta)}} =: \nabla_\beta$; sie lautet

$$(\nabla_\beta w)^\gamma = \partial_\beta w^\gamma + w^\alpha \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma. \quad (2.17)$$

Im Folgenden werde ich zur Vereinfachung die Klammer weglassen und für die kovariante Ableitung einfach $\nabla_\beta w^\gamma$ schreiben; man sollte jedoch im Hinterkopf behalten, dass damit nicht die Ableitung der w^γ -Komponente gemeint ist (was einfach die partielle Ableitung $\partial_\beta w^\gamma$ ist), sondern die γ -Komponente der kovarianten Ableitung von w !

Die kovariante Ableitung ermöglicht es, den Begriff des **Paralleltransportes** eines Vektors eindeutig zu definieren:²⁴ Man sagt, ein Vektor w sei entlang der Kurve C parallel transportiert, wenn die kovariante Ableitung in Richtung des Tangentialvektors v dieser Kurve verschwindet, $\nabla_v w = 0$. Eine Kurve, entlang derer der Tangentialvektor selbst parallel transportiert ist, $\nabla_v v = 0$, heißt

²⁴Scheinbar gibt es auf Mannigfaltigkeiten verschiedene Möglichkeiten, die Parallelverschiebung eines Vektors zu definieren: Als Beispiel einer Mannigfaltigkeit denke man an einen Halbkreis mit dem Tangentialvektor w im Punkt p . Unter Paralleltransport dieses Vektors zum Punkt q kann man entweder eine solche Verschiebung verstehen, die die Richtung des Vektors beibehält, wie in Abbildung 1 gezeigt; oder man versteht darunter eine Verschiebung wie in Abbildung 2, sodass der Vektor während des Transportes immer tangential zu jener Kurve bleibt, entlang derer er verschoben wird.



Abb. 1: Paralleltransport, 1. Methode **Abb. 2:** Paralleltransport, 2. Methode

Die erste Variante mag vernünftig erscheinen, da die Vektoren w und \hat{w} in Abbildung 1 tatsächlich parallel sind; jedoch hängt dieses Urteil von der Art der Einbettung der Mannigfaltigkeit ab! Der Halbkreis kann ohne Änderung seiner inneren Geometrie zu einer Linie abgerollt werden – wie in Abbildung 3 und 4 dargestellt (der Riemannstensor einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit ist Null; der Halbkreis hat also keine innere Krümmung, sondern nur eine durch die Art der Einbettung bestimmte äußere Krümmung). Dies zeigt, dass die von der euklidischen Geometrie geprägte Anschauung der Begriffe Parallelität und Parallelverschiebung nicht ohne weiteres auf Mannigfaltigkeiten übertragbar ist. Stattdessen müssen diese Begriffe durch innere Eigenschaften der Mannigfaltigkeit definiert werden; so geschehen in der 2. Methode aus Abbildung 2 und 4. In diesem Sinne sind die Vektoren w und \bar{w} zueinander parallel.



Abb. 3: Paralleltransport, 1. Methode **Abb. 4:** Paralleltransport, 2. Methode

Geodäte. Wie aus (2.16) ersichtlich, erfüllt sie die Kurvengleichung

$$\frac{d^2 x^\gamma}{d\lambda^2} + \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0. \quad (2.18)$$

Unter einer Geodäte kann man sich die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten der Mannigfaltigkeit vorstellen. Im euklidischen Raum sind dies Geraden; auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit können Geodäten jedoch gekrümmt sein.

Ein Charakteristikum der euklidischen Geometrie ist das Parallelenaxiom: Zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt; parallele Geraden schneiden sich nie. Für die Geodäten auf einer Mannigfaltigkeit ist dies im Allgemeinen nicht zutreffend. Aus dem nichtlinearen Verhalten des Abstandsvektors benachbarter Geodäten – der so genannten **geodätischen Abweichung** – kann ein Maß für die Krümmung der Mannigfaltigkeit abgeleitet werden. Dazu betrachtet man eine Familie von Geodäten, deren Punkte durch $x^\alpha(\lambda, \zeta)$ gegeben seien, wobei λ die Geodäten parametrisiert und ζ den Übergang zwischen verschiedenen Geodäten. Neben dem Tangentialvektor $v^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$ gibt es in jedem Punkt einen Abstandsvektor $u^\alpha = dx^\alpha/d\zeta$ zwischen verschiedenen Geodäten. Der Ausdruck $\nabla_v u$ hat dann die Bedeutung einer relativen Geschwindigkeit zweier Geodäten, und $\nabla_v \nabla_v u = D^2 u/d\lambda^2$ entspricht der relativen Beschleunigung. Es gilt

$$\frac{D^2 u}{d\lambda^2} = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_{(\alpha)} v^\beta v^\gamma u^\delta \quad (2.19)$$

mit dem **Riemann'schen Krümmungstensor**

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} := \partial_\gamma \Gamma_{\delta\beta}^\alpha - \partial_\delta \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + \Gamma_{\gamma\varepsilon}^\alpha \Gamma_{\delta\beta}^\varepsilon - \Gamma_{\delta\varepsilon}^\alpha \Gamma_{\gamma\beta}^\varepsilon. \quad (2.20)$$

Man bezeichnet eine Mannigfaltigkeit als gekrümmt, wenn der zugehörige Riemannstensor von Null verschiedene Komponenten besitzt.²⁵ Der Riemannstensor beschreibt die intrinsische Krümmung einer Mannigfaltigkeit – im Unterschied zur äußeren Krümmung, die eine Folge der Einbettung in einen höherdimensionalen Raum und somit keine direkte Eigenschaft der Mannigfaltigkeit selbst ist. Weitere Konsequenzen der Krümmung einer Mannigfaltigkeit sind die Wegabhängigkeit des Paralleltransportes von Vektoren und die Nichtvertauschbarkeit der kovarianten Ableitung. Auf ein Vektorfeld w angewandt bedeutet dies²⁶

$$(\nabla_\gamma \nabla_\delta - \nabla_\delta \nabla_\gamma) w = R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} e_{(\alpha)} w^\beta. \quad (2.21)$$

²⁵Diese Aussage ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem, denn ein Tensor, der in einem Koordinatensystem von Null verschiedene Komponenten besitzt, hat auch in jedem anderen Koordinatensystem nichtverschwindende Komponenten – einen Tensor kann man nicht wegstornieren! Diese Eigenschaft folgt aus dem Tensor-Transformationsverhalten $A^{\alpha'}{}_{\beta'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} A^\alpha{}_\beta$.

²⁶Ich gehe grundsätzlich von verschwindender Torsion aus, also $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma$, was von den Christoffelsymbolen als Zusammenhangskomponenten automatisch erfüllt wird.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie und insbesondere in der Branentheorie spielt ein weiterer Krümmungstensor eine wichtige Rolle, nämlich der **Weyltensor**. Dieser ergibt sich aus dem Riemannstensor durch Abziehen aller Kontraktionen:

$$C_{\alpha\beta\gamma\delta} := R_{\alpha\beta\gamma\delta} - g_{\alpha[\gamma}R_{\delta]\beta} - R_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta} + \frac{1}{3}Rg_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta} \quad (2.22)$$

mit dem Riccitensor $R_{\alpha\beta} := R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$ und dem Ricciskalar $R := g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$.²⁷ Der Weyltensor ist so konstruiert, dass all seine Spuren ($C^\beta{}_{\beta\gamma\delta}$, $C^\gamma{}_{\beta\gamma\delta}$, $C^\delta{}_{\beta\gamma\delta}$ etc.) verschwinden; er ist also der spurfreie Anteil des Riemannstensors und besitzt auch dessen Symmetrieeigenschaften. Darüber hinaus ist er invariant unter konformen (= winkeltreuen) Transformationen, d.h. zu einer Metrik $g_{\alpha\beta}$ gehört der gleiche Weyltensor wie zur Metrik $\Omega^2 g_{\alpha\beta}$, mit einer beliebigen Funktion $\Omega = \Omega(x^0, x^1, x^2, x^3)$. Die physikalische Bedeutung des Weyltensors werde ich im nächsten Kapitel noch näher erläutern.

2.2 Gravitation

Die Allgemeine Relativitätstheorie liefert eine geometrische Erklärung der Gravitation, indem sie die Krümmung der Raumzeit mit einer vorgegebenen Materieverteilung in Beziehung setzt. Die Kopplung zwischen Materie und Krümmung kommt durch die **Einstein'schen Feldgleichungen**

$$G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}, \quad \kappa := 8\pi G \quad (2.24)$$

zum Ausdruck.²⁸ Eine äquivalente Formulierung der Feldgleichungen erhält man durch Bildung der Spur, also Multiplikation von (2.24) mit $g^{\alpha\beta}$ und Summation über beide Indizes: $R - \frac{1}{2}R\delta^\alpha{}_\alpha = R - 2R = -R = \kappa T^\alpha{}_\alpha =: \kappa T$. Einsetzen in (2.24) ergibt

$$R_{\alpha\beta} = \kappa(T_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Tg_{\alpha\beta}). \quad (2.25)$$

Man kann zeigen, dass sich Testteilchen, die keinen äußeren Kräften unterworfen sind, stets entlang geodätischer Linien bewegen, ihre Trajektorien also der Gleichung

$$\frac{d^2x^\gamma}{d\lambda^2} + \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma = 0 \quad (2.26)$$

²⁷Gleichung (2.22) gilt nur in vier Dimensionen. In n Dimensionen lautet der Weyltensor

$$C_{abcd} = R_{abcd} - \frac{2}{n-2}(g_{a[c}R_{d]b} + R_{a[c}g_{d]b}) + \frac{2}{(n-1)(n-2)}{}^{(n)}Rg_{a[c}g_{d]b}, \quad (2.23)$$

mit den Indizes $a, b, c, d = 0, 1, \dots, n-1$.

²⁸Ich gehe davon aus, dass die kosmologische Konstante – wenigstens in den für uns interessanten Situationen im Inneren und in der näheren Umgebung eines Sterns – vernachlässigbar klein ist.

genügen, wobei λ die Bahnkurve parametrisiert.^{29, 30} Kombiniert man dies mit den Einstein'schen Feldgleichungen, so ergibt sich folgendes Bild: Materie (Masse und Energie) krümmt die Raumzeit; in einer gekrümmten Raumzeit sind die kürzesten Verbindungen zwischen zwei Punkten – die Geodäten – im Allgemeinen keine Geraden mehr, sondern Kurven; Photonen und massive Körper bewegen sich entlang dieser gekrümmten Geodäten; dies erweckt den Anschein einer Kraftwirkung. Die Newton'sche Schwerkraft wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie somit als Scheinkraft interpretiert.

Man beachte, dass durch die Einsteingleichungen (2.24) bzw. (2.25) Materie nicht an den Riemanntensor gekoppelt wird, der die intrinsische Krümmung der Raumzeit beschreibt, sondern an den Riccitenor. Zerlegt man den Riemanntensor wie in Gleichung (2.22) in den Weyltensor, Riccitenor und Ricciskalar,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\alpha[\gamma}R_{\delta]\beta} + R_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta} - \frac{1}{3}Rg_{\alpha[\gamma}g_{\delta]\beta}, \quad (2.27)$$

so sieht man, dass der Krümmungsanteil, der nicht durch die Einsteingleichungen festgelegt wird, mit dem Weyltensor übereinstimmt. Dieser ist jedoch nicht völlig unbestimmt: Da der Riemanntensor die Bianchi-Identität $\nabla_{[\varepsilon}R_{\alpha\beta]\gamma\delta} = 0$ erfüllt, hängt der Weyltensor über die Beziehung

$$\nabla^\alpha C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \nabla_{[\gamma}R_{\delta]\beta} + \frac{1}{6}g_{\beta[\gamma}\nabla_{\delta]}R \quad (2.28)$$

vom Riccitenor ab.³¹ Mit den Einsteingleichungen (2.25) folgt dann der Zusammenhang zwischen der Materieverteilung und Weylkrümmung:

$$\nabla^\alpha C_{\alpha\beta\gamma\delta} = \kappa(\nabla_{[\gamma}T_{\delta]\beta} + \frac{1}{3}g_{\beta[\gamma}\nabla_{\delta]}T). \quad (2.29)$$

Im Gegensatz zum Riccitenor, der mit dem Energie-Impuls-Tensor durch einen algebraischen Ausdruck verknüpft ist, ist der Weyltensor über eine Differentialgleichung an Materie gekoppelt. Zu einem vorgegebenen Energie-Impuls-Tensor gibt es somit mehrere Lösungen für den Weyltensor. Wie man an den Einsteingleichungen (2.24) und (2.25) sieht, gilt bei Abwesenheit jeglicher Materie, also verschwindendem Energie-Impuls-Tensor

$$G_{\alpha\beta} = 0, \quad R_{\alpha\beta} = 0, \quad R = 0. \quad (2.30)$$

Aus der Definition des Weyltensors (2.22) folgt in diesem Falle

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = C_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.31)$$

Im Vakuum ist der Weyltensor also mit dem Riemanntensor identisch. Folglich wird durch den Weyltensor die Krümmung in Vakuumregionen der Raumzeit beschrieben – wie z.B. Gezeiteneffekte und Gravitationswellen.

²⁹Siehe Weinberg [19], Seite 70–77.

³⁰Testteilchen sind Photonen oder massive Körper, die eine vernachlässigbare Krümmung der Raumzeit verursachen. Für die zeitartigen Bahnkurven massiver Testteilchen kann man als Kurvenparameter die Eigenzeit τ wählen.

³¹Siehe Carroll [20], Seite 169 f.

3 Relativistische Sterne

3.1 Metrik statischer, kugelsymmetrischer Systeme

Wir betrachten den idealen Fall eines statischen und kugelsymmetrischen Sterns, suchen also nach Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen in Regionen der Raumzeit mit diesen Eigenschaften. Die gesuchte Metrik sollte in großer Entfernung zum Stern in die Minkowski-Metrik übergehen, das in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) ausgedrückte Linienelement demnach gegen

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (3.1)$$

streben. Die Forderungen nach Statik und Rotationssymmetrie sind erfüllt, wenn wir für das Linienelement in der Umgebung des Sterns den Ansatz

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\bar{\Lambda}} dr^2 + e^{2\Theta} r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \quad (3.2)$$

wählen, wobei Φ , $\bar{\Lambda}$ und Θ Funktionen von r sind.³² Die Freiheit in der Wahl des Koordinatensystems kann dazu ausgenutzt werden, den Faktor $e^{2\Theta}$ verschwinden zu lassen. Dazu definieren wir zunächst eine neue radiale Koordinate $\bar{r} := e^{\Theta} r$, mit dem Differential

$$d\bar{r} = e^{\Theta} dr + e^{\Theta} r d\Theta = (1 + r\Theta') e^{\Theta} dr. \quad (3.3)$$

Die Substitution von r durch \bar{r} in (3.2) ergibt dann

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + \frac{e^{2(\bar{\Lambda}-\Theta)}}{(1+r\Theta')^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2), \quad (3.4)$$

worin Φ , $\bar{\Lambda}$ und Θ nun als Funktionen von \bar{r} aufgefasst werden. Schließlich können noch die folgenden Umbenennungen vorgenommen werden

$$\bar{r} \rightarrow r, \quad \frac{e^{2(\bar{\Lambda}-\Theta)}}{(1+r\Theta')^2} \rightarrow e^{2\Lambda}, \quad (3.5)$$

und wir erhalten das einfachere, aber ebenso allgemeine Linienelement

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.6)$$

Die oben definierten raumzeitlichen Polarkoordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ nennt man **Schwarzschildkoordinaten** oder auch Krümmungskoordinaten.³³ Aus dem

³² Φ , $\bar{\Lambda}$ und Θ treten hier als Argumente der Exponentialfunktion auf, was den Vorteil hat, dass man dem Linienelement direkt die Signatur der Metrik $(-, +, +, +)$ ansieht.

³³Die anschauliche Bedeutung der Schwarzschild- r -Koordinate ist die folgende (siehe Misner et al. [21], Seite 595 ff): Sei P ein Punkt, durch den eine Kugeloberfläche mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung gelegt wurde, und A_0 deren Flächeninhalt, gemessen in Eigenlängen. Für die Schwarzschild- r -Koordinate von P gilt dann $4\pi r^2 = A_0$.

zugehörigen **metrischen Tensor**

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

und dessen Inverse

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

ergeben sich die **Christoffelsymbole** $\Gamma_{\alpha\beta}^{\delta} := \frac{1}{2} g^{\delta\gamma} (\partial_{\alpha} g_{\beta\gamma} + \partial_{\beta} g_{\gamma\alpha} - \partial_{\gamma} g_{\alpha\beta})$

$$\begin{aligned} \Gamma_{tr}^t &= \Phi', & \Gamma_{tt}^r &= \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)}, & \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} &= r^{-1}, \\ \Gamma_{rr}^r &= \Lambda', & \Gamma_{\varphi\varphi}^{\vartheta} &= -\sin \vartheta \cos \vartheta, \\ \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -r e^{-2\Lambda}, & \Gamma_{r\varphi}^{\varphi} &= r^{-1}, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta, & \Gamma_{\vartheta\varphi}^{\varphi} &= \cos \vartheta \sin^{-1} \vartheta, \end{aligned} \quad (3.9)$$

und daraus der **Riemantensor** $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\delta} := \partial_{\gamma} \Gamma_{\delta\beta}^{\alpha} - \partial_{\delta} \Gamma_{\gamma\beta}^{\alpha} + \Gamma_{\gamma\epsilon}^{\alpha} \Gamma_{\delta\beta}^{\epsilon} - \Gamma_{\delta\epsilon}^{\alpha} \Gamma_{\gamma\beta}^{\epsilon}$

$$\begin{aligned} R^t{}_{rtr} &= \Phi' \Lambda' - \Phi'' - \Phi'^2, & R^r{}_{\vartheta r\vartheta} &= r \Lambda' e^{-2\Lambda}, \\ R^t{}_{\vartheta t\vartheta} &= -r \Phi' e^{-2\Lambda}, & R^r{}_{\varphi r\varphi} &= r \Lambda' e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta, \\ R^t{}_{\varphi t\varphi} &= -r \Phi' e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta, & R^{\vartheta}{}_{\varphi\vartheta\varphi} &= (1 - e^{-2\Lambda}) \sin^2 \vartheta, \end{aligned} \quad (3.10)$$

der **Ricci tensor** $R_{\alpha\beta} := R^{\gamma}{}_{\alpha\gamma\beta}$

$$\begin{aligned} R_{tt} &= (\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi' \Lambda' + 2\Phi' r^{-1}) e^{2(\Phi-\Lambda)}, \\ R_{rr} &= -\Phi'' - \Phi'^2 + \Phi' \Lambda' + 2\Lambda' r^{-1}, \\ R_{\vartheta\vartheta} &= (r \Lambda' - r \Phi' - 1) e^{-2\Lambda} + 1, \\ R_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \vartheta R_{\vartheta\vartheta}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

der **Ricciskalar** $R := R_{\alpha\beta} g^{\alpha\beta}$

$$R = -2 \left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi' \Lambda' + 2 \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + \frac{1 - e^{2\Lambda}}{r^2} \right) e^{-2\Lambda}, \quad (3.12)$$

und schließlich der **Einsteintensor** $G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}$

$$\begin{aligned} G_{tt} &= (2r \Lambda' - 1 + e^{2\Lambda}) r^{-2} e^{2(\Phi-\Lambda)}, \\ G_{rr} &= (2r \Phi' + 1 - e^{2\Lambda}) r^{-2}, \\ G_{\vartheta\vartheta} &= \left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi' \Lambda' + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right) r^2 e^{-2\Lambda}, \\ G_{\varphi\varphi} &= \sin^2 \vartheta G_{\vartheta\vartheta}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Alle übrigen, nicht genannten Komponenten sind Null.

3.2 Stellare Strukturgleichungen

Die Struktur statischer und kugelsymmetrischer Sterne wird durch einen Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung beschrieben, den so genannten **Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen**³⁴

$$m' = 4\pi r^2 \varrho, \quad (3.14)$$

$$\Phi' = \frac{Gm + 4\pi Gr^3 p}{r(r - 2Gm)}, \quad (3.15)$$

$$p' = -(\varrho + p)\Phi', \quad (3.16)$$

die zusammen mit einer Zustandsgleichung der Sternmaterie

$$p = p(\varrho) \quad (3.17)$$

ein geschlossenes Gleichungssystem für die vier unbekannt Funktionen $m(r)$, $\varrho(r)$, $p(r)$ und $\Phi(r)$ bilden. Das zugehörige Linienelement lautet

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.18)$$

Während die Zustandsgleichung eine Materialeigenschaft ist, die ich als gegeben voraussetze, lassen sich die drei stellaren Strukturgleichungen direkt aus den Einstein'schen Feldgleichungen ableiten, wenn man für den Energie-Impuls-Tensor den einer idealen Flüssigkeit ansetzt:

$$T_{\alpha\beta} = (\varrho + p)u_\alpha u_\beta + pg_{\alpha\beta}. \quad (3.19)$$

Darin bezeichnen $\varrho := \varrho_0 + \varepsilon$ die totale Massen-Energiedichte, die sich aus der Massendichte ϱ_0 und der inneren Energiedichte ε zusammensetzt, p den Druck und u^α die 4er-Geschwindigkeit des Flüssigkeitselementes im betrachteten Raumpunkt. Im statischen Fall ruht jedes Flüssigkeitselement bezüglich des gewählten Koordinatensystems, und die 4er-Geschwindigkeit hat nur eine t -Komponente, $u^\alpha = u^t \delta_t^\alpha$. Aus der Normierung $u_\alpha u^\alpha = -1$ folgt dann

$$u^\alpha = e^{-\Phi} \delta_t^\alpha, \quad u_\alpha = -e^\Phi \delta_\alpha^t, \quad (3.20)$$

und der Energie-Impuls-Tensor lautet

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pe^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pr^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pr^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

³⁴Im Folgenden durch TOV-Gleichungen abgekürzt.

Setzt man diesen zusammen mit dem Einsteintensor (3.13) in $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$ ein, so erhält man die drei Gleichungen³⁵

$$(2r\Lambda' - 1 + e^{2\Lambda})e^{-2\Lambda} = \kappa r^2 \varrho, \quad (3.22)$$

$$(2r\Phi' + 1 - e^{2\Lambda})e^{-2\Lambda} = \kappa r^2 p, \quad (3.23)$$

$$\left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right) e^{-2\Lambda} = \kappa p. \quad (3.24)$$

Schreibt man (3.22) wie folgt um ($\kappa = 8\pi G$ eingesetzt)

$$8\pi G r^2 \varrho = 1 - e^{-2\Lambda} + 2r\Lambda' e^{-2\Lambda} = \left[r(1 - e^{-2\Lambda}) \right]' \quad (3.25)$$

und führt die Bezeichnung

$$r(1 - e^{-2\Lambda}) =: 2Gm(r) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r} \quad (3.26)$$

ein, so folgt die TOV-Gleichung $m'(r) = 4\pi r^2 \varrho$ und das Linienelement (3.18). Als Lösung dieser TOV-Gleichung erhalten wir die so genannte **totale Masse**

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho(r), \quad (3.27)$$

die man als relativistisches Analogon der Masse-Energie innerhalb des Kugelradius r interpretiert,³⁶ wobei die Integrationskonstante $m(0) = 0$ gesetzt wurde.³⁷ Stellt man (3.23) nach Φ' um und setzt $e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2Gm}{r}$ ein, so ergibt sich die zweite TOV-Gleichung, $\Phi' = \frac{Gm + 4\pi G r^3 p}{r(r - 2Gm)}$. Die dritte TOV-Gleichung kann

³⁵Die $\varphi\varphi$ -Komponenten-Gleichung entspricht der $\vartheta\vartheta$ -Gleichung (3.24), und die nichtdiagonalen Komponenten von $G_{\alpha\beta}$ und $T_{\alpha\beta}$ führen auf Gleichungen, die trivial erfüllt sind ($0 = 0$).

³⁶Im Unterschied zur Newton'schen Masse

$$m_N(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho_0(r) \quad (3.28)$$

fließt in die totale Masse neben der Massendichte ϱ_0 auch die innere Energiedichte ε ein, $\varrho := \varrho_0 + \varepsilon$. Ferner unterscheidet sich (3.27) von der Ruhemasse

$$m_0(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho_0(r) e^{\Lambda(r)}, \quad (3.29)$$

und der so genannten gravitativen Masse

$$m_G(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho(r) e^{\Lambda(r)}, \quad (3.30)$$

bei denen die Integration über das Eigenvolumenelement $dV = 4\pi r^2 e^{\Lambda} dr$ ausgeführt wird.

³⁷ Ich folge der Argumentation von Misner et al. [21], Seite 602: $m(0) = 0$ impliziert eine physikalisch akzeptable Geometrie ohne Singularität im Ursprung, denn für kleine r ist $\varrho(r) \approx \text{const}$, folglich gilt $m(r) = \frac{4}{3}\pi \varrho_c r^3$ mit $\varrho_c := \varrho(0)$, und das räumliche Linienelement lautet (mit der Abkürzung $d\Omega^2 := d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2$)

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 = \left(1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_c r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \approx dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.31)$$

aus der Kombination von (3.22)–(3.24) hergeleitet werden. Man stellt zunächst (3.22) und (3.23) wie folgt um

$$2r\Lambda' = (\kappa r^2 \varrho - 1)e^{2\Lambda} + 1, \quad (3.33)$$

$$2r\Phi' = (\kappa r^2 p + 1)e^{2\Lambda} - 1 \quad (3.34)$$

und leitet (3.34) nach r ab

$$\begin{aligned} 2\Phi' + 2r\Phi'' &= 2\Lambda'(\kappa r^2 p + 1)e^{2\Lambda} + (2\kappa r p + \kappa r^2 p')e^{2\Lambda} \\ &= 2\Lambda'(2r\Phi' + 1) + (2\kappa r p + \kappa r^2 p')e^{2\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

wobei im zweiten Schritt wieder (3.34) eingesetzt wurde. Umstellen nach Φ''

$$\Phi'' = 2\Phi'\Lambda' - \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + (\kappa p + \frac{1}{2}\kappa r p')e^{2\Lambda} \quad (3.36)$$

und Einsetzen in (3.24) liefert zunächst

$$\begin{aligned} \kappa p e^{2\Lambda} &= 2\Phi'\Lambda' - \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + (\kappa p + \frac{1}{2}\kappa r p')e^{2\Lambda} + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \\ &= \Phi'^2 + \Phi'\Lambda' + (\kappa p + \frac{1}{2}\kappa r p')e^{2\Lambda} \end{aligned} \quad (3.37)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} p' &= -\frac{\Phi'^2 + \Phi'\Lambda'}{\frac{1}{2}\kappa r e^{2\Lambda}} = -\frac{2r\Phi' + 2r\Lambda'}{\kappa r^2 e^{2\Lambda}} \Phi' \\ &= -\frac{(\kappa r^2 p + 1)e^{2\Lambda} - 1 + (\kappa r^2 \varrho - 1)e^{2\Lambda} + 1}{\kappa r^2 e^{2\Lambda}} \Phi' \\ &= -(\varrho + p)\Phi', \end{aligned} \quad (3.38)$$

wobei im dritten Schritt (3.33) und (3.34) eingesetzt wurden. Alternativ lässt sich diese Gleichung auch aus der Energie-Impuls-Erhaltung $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$ herleiten.³⁸ Berechnet man die kovariante Ableitung des Energie-Impuls-Tensors

$$\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = \partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha T^{\lambda\beta} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta T^{\alpha\lambda} \quad (3.39)$$

mit

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho e^{-2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^{-2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

während $m(0) \neq 0$ eine im Ursprung singuläre Raummetrik zur Folge hat,

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \approx -\frac{r dr^2}{2Gm(0)} + r^2 d\Omega^2. \quad (3.32)$$

³⁸Die Energie-Impuls-Erhaltung ist keine zusätzliche Bedingung, sondern sie folgt aus der Bianchi-Identität $\nabla_\alpha G^{\alpha\beta} = 0$ und den Einsteingleichungen $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}$.

und den Christoffelsymbolen (3.9), so liefert nur die $\beta = r$ -Komponente eine nichttriviale erfüllte Gleichung, nämlich

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \nabla_\alpha T^{\alpha r} = \partial_\alpha T^{\alpha r} + \Gamma_{\alpha\lambda}^\alpha T^{\lambda r} + \Gamma_{\alpha\lambda}^r T^{\alpha\lambda} \\
&= \partial_r T^{rr} + (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\vartheta r}^\vartheta + \Gamma_{\varphi r}^\varphi) T^{rr} \\
&\quad + \Gamma_{tt}^r T^{tt} + \Gamma_{rr}^r T^{rr} + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r T^{\vartheta\vartheta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r T^{\varphi\varphi} \\
&= \partial_r (p e^{-2\Lambda}) + (\Phi' + \Lambda' + r^{-1} + r^{-1}) p e^{-2\Lambda} \\
&\quad + \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)} \varrho e^{-2\Phi} + \Lambda' p e^{-2\Lambda} - r e^{-2\Lambda} p r^{-2} - r e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta p r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \\
&= [p' - 2\Lambda' p + (\Phi' + \Lambda' + 2r^{-1}) p + \Phi' \varrho + \Lambda' p - 2p r^{-1}] e^{-2\Lambda} \\
&= [p' + (\varrho + p)\Phi'] e^{-2\Lambda}, \tag{3.41}
\end{aligned}$$

was wieder auf $p' = -(\varrho + p)\Phi'$ führt.

Die beiden TOV-Gleichungen für Φ' und p' können zu einer Gleichung für das hydrostatische Gleichgewicht des Sterns kombiniert werden:³⁹

$$p' = -\frac{(\varrho + p)(Gm + 4\pi G r^3 p)}{r(r - 2Gm)}. \tag{3.42}$$

Etwas anschaulicher wird diese Gleichung, wenn man sie in der Form

$$p' = -\frac{Gm\varrho}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\varrho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} \tag{3.43}$$

oder, wenn auch noch die TOV-Gleichung $dm = 4\pi r^2 \varrho dr$ eingesetzt wird,

$$4\pi r^2 dp = -\frac{Gm dm}{r^2} \left(1 + \frac{p}{\varrho}\right) \left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m}\right) \left(1 - \frac{2Gm}{r}\right)^{-1} \tag{3.44}$$

schreibt. Man denke sich eine Kugelschale des Sterns mit Radius r und Dicke dr . Der Druck am inneren Rand der Kugelschale sei $p(r)$ und der am äußeren Rand $p(r) - dp$. Auf der linken Seite von (3.44) steht die Kraft, die aufgrund der Druckdifferenz dp auf die Kugelschale wirkt. Diese Kraft wird durch die Terme auf der rechten Seite ausbalanciert: Dabei ist der erste Faktor die Newton'sche Gravitationskraft, die zwischen der totalen Masse $m(r)$ innerhalb des Radius r und der Masse dm der Kugelschale wirkt; die drei anderen Faktoren können als allgemeinrelativistische Korrekturen aufgefasst werden, die eine betragsmäßige Vergrößerung des Druckgradienten im Vergleich zum Newton'schen Grenzfall $p' = -Gm\varrho_0/r^2$ bewirken. Folgt man dem Druckverlauf von der Oberfläche zum Zentrum des Sterns, so ergibt die relativistische Berechnung einen stärkeren Anstieg als die Newton'sche Vorhersage. Da der Druck selbst als Korrekturterm einfließt, wird die Abweichung vom Newton'schen Limes umso größer, je größer der Druck ist. Dies hat zur Folge, dass relativistische Sterne kompakter sind und ab einer kritischen Gesamtmasse instabil werden, da der Druck im Zentrum dann beliebig groß würde.

³⁹Diese Gleichung wurde erstmals von Oppenheimer und Volkoff [22] hergeleitet und wird daher auch als Oppenheimer-Volkoff-Gleichung bezeichnet.

3.3 Äußere Schwarzschild-Lösung

Eine analytische Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen im Außenbereich eines statischen, kugelsymmetrischen Sterns wurde erstmals von Karl Schwarzschild [23] gefunden. Seine Lösung wird üblicherweise aus den Einsteingleichungen im Vakuum, $R_{\alpha\beta} = 0$, hergeleitet, sie folgt aber auch aus den TOV-Gleichungen: Da Dichte und Druck außerhalb des Sterns verschwinden, gilt

$$m' = 0 \quad \leadsto \quad m(r \geq R) = \text{const} = m(R) =: M, \quad (3.45)$$

wobei mit R der Radius des Sterns bezeichnet wurde. Die TOV-Gleichung für Φ' lautet dann

$$\Phi' = \frac{GM}{r(r - 2GM)}, \quad (3.46)$$

was mit der Randbedingung $e^{2\Phi(\infty)} = 1$, also $\Phi(\infty) = 0$, integriert werden kann:

$$\Phi(r) = \int_{\infty}^r dr \Phi' = \int_{\infty}^r dr \frac{GM}{r^2(1 - \frac{2GM}{r})}. \quad (3.47)$$

Mit der Substitution

$$\xi := 1 - \frac{2GM}{r} \quad \leadsto \quad \frac{d\xi}{dr} = \frac{2GM}{r^2} \quad \leadsto \quad dr = d\xi \frac{r^2}{2GM} \quad (3.48)$$

erhalten wir

$$\Phi(r) = \int_1^{\xi} \frac{d\xi}{2\xi} = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) \quad \leadsto \quad e^{2\Phi} = 1 - \frac{2GM}{r}, \quad (3.49)$$

und aus (3.18) folgt dann das Schwarzschild'sche Linienelement für $r > R$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (3.50)$$

3.4 Innere Schwarzschild-Lösung

Wie in Abschnitt 3.2 bereits erwähnt, benötigt man zur Lösung der TOV-Gleichungen im Inneren eines Sterns die Zustandsgleichung der Sternmaterie. Eine analytische Lösung wurde von Karl Schwarzschild [24] für eine homogene Dichteverteilung hergeleitet, also für die Zustandsgleichung

$$\rho = \text{const} =: \rho_* \quad \text{für alle } p(r), \quad (3.51)$$

was der Fall ist, wenn der Stern aus einer inkompressiblen Flüssigkeit besteht, oder sich aus Schichten unterschiedlicher Zusammensetzungen aufbaut, deren

Zustandsgleichungen gerade die geforderte homogene Dichte trotz variierenden Druckes ergeben. Die totale Masse (3.27) im Inneren des Sterns ist dann

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho_*, \quad (3.52)$$

und die Gleichung des hydrostatischen Gleichgewichts (3.42) lautet

$$p' = -\frac{\frac{4}{3}\pi G r (\varrho_* + p)(\varrho_* + 3p)}{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2}. \quad (3.53)$$

Integration unter Berücksichtigung der Randbedingung $p(R) = 0$, liefert

$$\begin{aligned} \int_r^R dp \frac{1}{(\varrho_* + p)(\varrho_* + 3p)} &= -\frac{4}{3}\pi G \int_r^R dr \frac{r}{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2} \\ \curvearrowright \frac{1}{2\varrho_*} \ln \left(\frac{\frac{1}{3}\varrho_* + p}{\varrho_* + p} \right) \Big|_r^R &= \frac{1}{4\varrho_*} \ln \left(1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2 \right) \Big|_r^R \\ \curvearrowright \frac{\varrho_* + p(r)}{\varrho_* + 3p(r)} &= \sqrt{\frac{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* R^2}{1 - \frac{8}{3}\pi G \varrho_* r^2}} = \sqrt{\frac{1 - r_S R^{-1}}{1 - r_S r^2 R^{-3}}} \end{aligned} \quad (3.54)$$

mit dem Schwarzschildradius $r_S := 2GM$. Durch Umstellen nach $p(r)$ ergibt sich

$$p(r) = \varrho_* \frac{\sqrt{1 - r_S R^{-1}} - \sqrt{1 - r_S r^2 R^{-3}}}{\sqrt{1 - r_S r^2 R^{-3}} - 3\sqrt{1 - r_S R^{-1}}}. \quad (3.55)$$

Die metrische Funktion $e^{2\Phi}$ erhält man durch Integration der TOV-Gleichung $p' = -(\varrho_* + p)\Phi'$ mit den Randbedingungen $\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln(1 - r_S/R)$ (am Rand muss die innere Metrik stetig in die äußere Schwarzschildmetrik (3.49) übergehen) und $p(R) = 0$

$$\begin{aligned} \Phi(r) &= \Phi(R) + \int_r^R dr \frac{p'}{(\varrho_* + p)} \\ &= \Phi(R) + \ln(\varrho_* + p) \Big|_r^R \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{r_S}{R} \right) + \ln \left(\frac{\varrho_*}{\varrho_* + p(r)} \right) \\ &= \ln \left(-\frac{1 + p(r)\varrho_*^{-1}}{\sqrt{1 - r_S R^{-1}}} \right). \end{aligned} \quad (3.56)$$

Mit (3.55) ist das Ergebnis

$$e^{2\Phi} = \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{r_S}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{r_S r^2}{R^3}} \right)^2, \quad (3.57)$$

und das Linienelement für $r < R$ lautet

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{2GM}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{2GM r^2}{R^3}} \right)^2 dt^2 \\ & + \left(1 - \frac{2GM r^2}{R^3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Wie man sieht, tritt im Zentrum des Sterns bei $r = 0$ keine Singularität auf (sofern ein Stern mit endlichem Radius R betrachtet wird).

Eine interessante Eigenschaft dieser Lösung ergibt sich aus dem Grenzwertverhalten von Gleichung (3.54), wenn man den zentralen Druck $p_c := p(0)$ gegen unendlich laufen lässt. In diesem Limes gilt

$$\frac{r_S}{R} = 1 - \left(\frac{\varrho_* + p_c}{\varrho_* + 3p_c} \right)^2 \rightarrow \frac{8}{9} \quad \text{für } p_c \rightarrow \infty. \quad (3.59)$$

Jeder stabile Stern homogener Dichte, dessen zentraler Druck einen endlichen Wert hat, erfüllt daher die Relation⁴⁰

$$\frac{r_S}{R} < \frac{8}{9} \quad \rightsquigarrow \quad \frac{GM}{R} < \frac{4}{9}. \quad (3.60)$$

Wie man sieht, gilt $r_S < R$, d.h. der Schwarzschildradius eines solchen Sterns liegt in seinem Inneren, und somit treten weder in der inneren Metrik (3.58), noch in der äußeren (3.50) Koordinatensingularitäten auf. Mit $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \varrho_*$ ergibt sich aus (3.60) ein maximaler Radius und eine maximale Masse für einen Stern homogener Dichte:

$$R_{\max} = (3\pi G \varrho_*)^{-1/2}, \quad M_{\max} = \frac{4}{9} (3\pi G^3 \varrho_*)^{-1/2}. \quad (3.61)$$

Es ist denkbar, dass ein anfangs stabiler Stern durch das Aufsammeln von Materie – beispielsweise von einem Begleitstern – diese Grenzwerte überschreitet, somit instabil wird und kollabiert. Eine derartige Vorhersage existiert in der Newton'schen Gravitationstheorie nicht. Setzt man für ϱ_* die mittlere Dichte der Sonne ($\approx 1 \text{ g/cm}^3$) bzw. die eines typischen Weißen Zwergs ($\approx 10^6 \text{ g/cm}^3$) und Neutronensterns ($\approx 10^{15} \text{ g/cm}^3$) ein, erhält man die folgenden Werte:

$\varrho_* \text{ [g/cm}^3\text{]}$	R_{\max}	M_{\max}
1	$543 R_\odot$	$10^8 M_\odot$
10^6	$0,5 R_\odot$	$10^5 M_\odot$
10^{15}	11,95 km	$3,6 M_\odot$

In Abschnitt 3.6 wird die maximale Masse eines Neutronensterns mit inhomogener Dichteverteilung numerisch ermittelt. Das Ergebnis lautet $M_{\max} = 2,047 M_\odot$ bei einer zentralen Dichte von $\varrho_c = 2,85 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$.

⁴⁰Man kann zeigen, dass die Relation $GM/R < 4/9$ für alle Sterne gilt und nicht nur für Sterne mit homogener Dichte. Siehe Weinberg [19], Seite 331 ff.

3.5 Numerische Lösung der TOV-Gleichungen

Für realistische Sternmodelle mit einer inhomogenen Dichteverteilung existieren keine analytischen Lösungen der TOV-Gleichungen; man greift daher zu numerischen Verfahren. Falls die Zustandsgleichung der Sternmaterie als analytische Funktion $p = p(\varrho)$ gegeben ist,⁴¹ gilt

$$p(r) = p(\varrho(r)) \quad \curvearrowright \quad p' = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \varrho' \quad \curvearrowright \quad \varrho' = p' \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)^{-1}, \quad (3.62)$$

und die TOV-Gleichungen ergeben das Gleichungssystem

$$m' = 4\pi r^2 \varrho, \quad (3.63)$$

$$p' = - \frac{(c^2 \varrho + p)(Gm + 4\pi Gr^3 p/c^2)}{r(c^2 r - 2Gm)}, \quad (3.64)$$

$$\varrho' = - \frac{(c^2 \varrho + p)(Gm + 4\pi Gr^3 p/c^2)}{r(c^2 r - 2Gm)} \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)^{-1}, \quad (3.65)$$

$$\Phi' = \frac{Gm + 4\pi Gr^3 p/c^2}{r(c^2 r - 2Gm)}, \quad (3.66)$$

worin die Lichtgeschwindigkeit c wieder explizit eingesetzt wurde. Die ersten drei Differentialgleichungen sind unabhängig von Φ und können durch ein numerisches Verfahren wie dem Runge-Kutta-Algorithmus⁴² integriert werden. Dabei startet man im Zentrum des Sterns mit den Anfangswerten

$$m(0) = 0, \quad \varrho(0) = \varrho_c, \quad p(0) = p(\varrho_c), \quad (3.73)$$

⁴¹Zustandsgleichungen für Neutronensternmaterie liegen in der Regel nur in tabellarischer Form vor, an die bestenfalls eine analytische Funktion angefitet werden kann. Einen solchen Fit werde ich im Folgenden verwenden.

⁴²Der Runge-Kutta-Algorithmus (RK4) ist ein Verfahren zur approximativen Lösung eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung in x ,

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}). \quad (3.67)$$

Sind die Werte der gesuchten Funktionen $\mathbf{y}(x)$ in einem Startpunkt x_0 bekannt, $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$, so ergeben sich die Werte von \mathbf{y} bei $x_{n+1} = x_n + h$ aus der Iteration

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{y}_n + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \mathcal{O}(h^5), \quad (3.68)$$

mit

$$\mathbf{k}_1 = h \cdot \mathbf{f}(x_n, \mathbf{y}_n), \quad (3.69)$$

$$\mathbf{k}_2 = h \cdot \mathbf{f}(x_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1), \quad (3.70)$$

$$\mathbf{k}_3 = h \cdot \mathbf{f}(x_n + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2), \quad (3.71)$$

$$\mathbf{k}_4 = h \cdot \mathbf{f}(x_n + h, \mathbf{y}_n + \mathbf{k}_3). \quad (3.72)$$

Der RK4-Algorithmus ist eine Methode 4. Ordnung in der Schrittweite h ; der Fehler in jeder Iteration ist $\mathcal{O}(h^5)$, während sich der totale Verfahrensfehler zu $\mathcal{O}(h^4)$ aufsummiert.

wobei ϱ_c beliebig vorgegeben werden kann, und $p(\varrho_c)$ aus der Zustandsgleichung folgt.⁴³ Man führt die Iteration bis zum Rand des Sterns aus, der durch die Bedingung $p(R) = 0$ definiert ist. Als Ergebnis erhält man den Verlauf von $m(r)$, $p(r)$ und $\varrho(r)$ zu jedem Iterationsschritt r . Variiert man den Startwert ϱ_c , so erhält man eine Sequenz von Lösungen, also Sterne mit unterschiedlichen Radien R und Gesamtmassen $M := m(R)$.

Bei der Φ' -Gleichung handelt es sich um ein Randwertproblem, statt eines Anfangswertproblems wie bei den drei anderen Gleichungen, denn nicht der Wert $\Phi(0)$ im Zentrum ist bekannt, sondern $\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2GM/c^2R)$. Da in Gleichung (3.66) Φ selbst nicht auftritt, sondern nur die Ableitung Φ' , kann zu jeder Lösung $\Phi(r)$ eine beliebige Konstante addiert werden, was zu einer neuen Lösung von Gleichung (3.66) führt. Diese Konstante ist so zu wählen, dass die Randbedingung $\Phi(R) = \frac{1}{2} \ln(1 - 2GM/c^2R)$ erfüllt wird. Möchte man den Verlauf von $\Phi(r)$ im Inneren des Sterns ermitteln, so integriert man zunächst das volle Differentialgleichungssystem (3.63)–(3.66) numerisch mit einem beliebigen Startwert $\Phi_1(0)$, bildet mit den erhaltenen Werten für R , $m(R)$, und $\Phi(R)$ die Differenz

$$\Delta\Phi = \frac{1}{2} \ln\left(1 - \frac{2Gm(R)}{c^2R}\right) - \Phi(R) \quad (3.75)$$

und lässt schließlich eine zweite Iteration laufen, bei der man den Startwert

$$\Phi_2(0) = \Phi_1(0) + \Delta\Phi \quad (3.76)$$

verwendet. Die zweite Iteration liefert dann den korrekten Verlauf von $\Phi(r)$ mit dem gewünschten Übergang in die äußere Schwarzschildlösung.

Im Folgenden betrachten wir Neutronensterne und Weiße Zwerge – jene kompakten Endzustände der stellaren Entwicklung, deren Struktur im Wesentlichen von der Gravitation bestimmt wird. Strahlungstransport- oder Konvektionsvorgänge bleiben unberücksichtigt; ferner verwende ich temperaturunabhängige Zustandsgleichungen und beschränke mich damit auf kalte Neutronensterne bzw. kalte Weiße Zwerge.

Das hier verwendete numerische Verfahren – ein in C implementierter Runge-Kutta-Algorithmus vierter Ordnung – werde ich später auch auf kompakte Sterne in der Branenwelt anwenden und die dort erhaltenen numerischen Ergebnisse mit den hier dargelegten Eigenschaften konventioneller Neutronensterne und Weißer Zwerge vergleichen.

⁴³Da in den TOV-Gleichungen (3.64)–(3.66) r im Nenner steht, kann die Iteration nicht genau im Zentrum des Sterns beginnen. Ich definiere daher ein kleines r_0 und gehe davon aus, dass Dichte und Druck im Volumen $\frac{4}{3}\pi r_0^3$ annähernd konstant sind, sodass für den ersten Iterationsschritt die Werte

$$r_0, \quad m_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3 \varrho_c, \quad \varrho_0 = \varrho_c, \quad p_0 = p(\varrho_c) \quad (3.74)$$

verwendet werden können.

3.6 Neutronensterne

Bei der numerischen Integration der TOV-Gleichungen verwende ich die Zustandsgleichung SLy von Douchin & Haensel [25], die den Zusammenhang zwischen Dichte und Druck im Kern und der Kruste des Neutronensterns approximativ wiedergibt. Wie Haensel & Potekhin [26] gezeigt haben, können die tabellarisch vorliegenden Werte von SLy durch die Funktion

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{1 + a_4\xi} f(a_5(\xi - a_6)) \\ & + (a_7 + a_8\xi) f(a_9(a_{10} - \xi)) \\ & + (a_{11} + a_{12}\xi) f(a_{13}(a_{14} - \xi)) \\ & + (a_{15} + a_{16}\xi) f(a_{17}(a_{18} - \xi)) \end{aligned} \quad (3.77)$$

angefittet werden, wobei die Abkürzungen $\zeta := \log p$, $\xi := \log \varrho$ und

$$f(x) = (e^x + 1)^{-1} \quad (3.78)$$

verwendet wurden. Die Werte der 18 Parameter a_i lauten:

$$\begin{array}{lll} a_1 = 6,22 & a_7 = 19,105 & a_{13} = 4,3 \\ a_2 = 6,121 & a_8 = 0,8938 & a_{14} = 14,08 \\ a_3 = 0,005925 & a_9 = 6,54 & a_{15} = 27,80 \\ a_4 = 0,16326 & a_{10} = 11,4950 & a_{16} = -1,653 \\ a_5 = 6,48 & a_{11} = -22,775 & a_{17} = 1,50 \\ a_6 = 11,4971 & a_{12} = 1,5707 & a_{18} = 14,67 \end{array} \quad (3.79)$$

Neben der Zustandsgleichung selbst benötigen wir in (3.65) auch deren Ableitung nach ϱ . Mit

$$p = 10^\zeta, \quad \zeta = \zeta(\xi(\varrho)), \quad \xi(\varrho) = \log \varrho \quad (3.80)$$

gilt nach der Kettenregel

$$\frac{dp}{d\varrho} = \frac{\partial 10^\zeta}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \cdot \frac{d\xi}{d\varrho} = 10^\zeta \ln 10 \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{\xi \ln 10} = \frac{p}{\xi} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}. \quad (3.81)$$

Die Ableitung $\partial \zeta / \partial \xi$ kann direkt aus (3.77) berechnet werden. Sie lautet

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = & \frac{(a_2\xi + 3a_3\xi^2)(1 + a_4\xi) - a_4(a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3)}{(1 + a_4\xi)^2} f(x_1) \\ & - \frac{a_1 + a_2\xi + a_3\xi^3}{1 + a_4\xi} a_5 e^{x_1} f^2(x_1) \\ & + a_8 f(x_2) + (a_7 + a_8\xi) a_9 e^{x_2} f^2(x_2) \\ & + a_{12} f(x_3) + (a_{11} + a_{12}\xi) a_{13} e^{x_3} f^2(x_3) \\ & + a_{16} f(x_4) + (a_{15} + a_{16}\xi) a_{17} e^{x_4} f^2(x_4), \end{aligned} \quad (3.82)$$

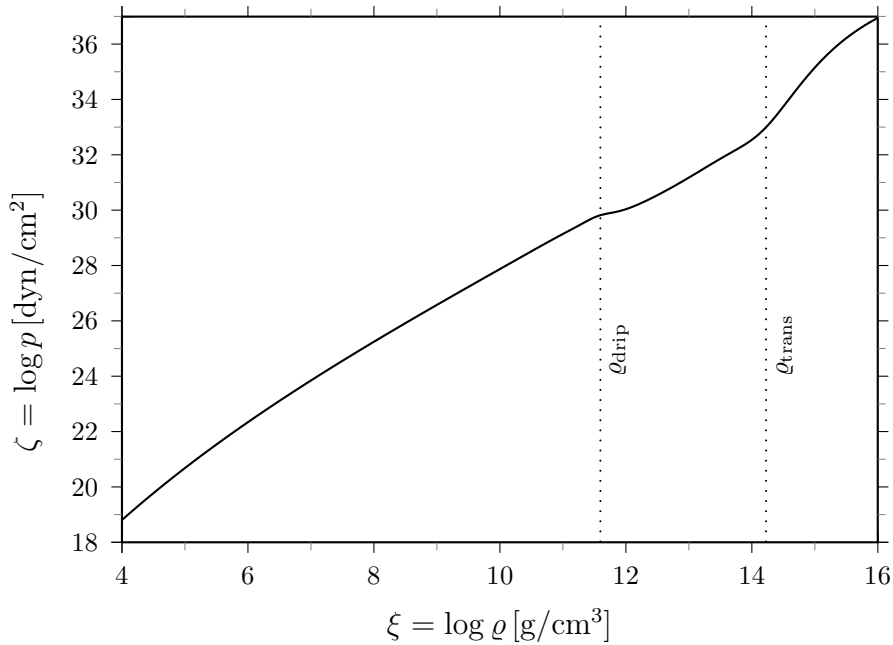


Abb. 5: Die Zustandsgleichung SLy zur Beschreibung der Neutronensternmaterie

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} x_1 &= a_5(\xi - a_6), & x_3 &= a_{13}(a_{14} - \xi), \\ x_2 &= a_9(a_{10} - \xi), & x_4 &= a_{17}(a_{18} - \xi). \end{aligned} \quad (3.83)$$

Die Zustandsgleichung SLy in ihrer durch Gleichung (3.77) gegebenen analytischen Form ist in Abbildung 5 dargestellt. Sie beschreibt die Materie eines Neutronensterns von der äußeren Kruste ($\rho \approx 10^4 \text{ g/cm}^3$) bis zum Zentrum, wo die Energiedichte bei ca. 0,5- bis 10-facher Kerndichte ($\approx 2,5 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$) liegt. Die Materie der **äußeren Kruste** besteht – wie auch das Innere eines Weißen Zwergs – aus einem entarteten Elektronengas und Atomkernen, die ein Kristallgitter bilden. Außen herrschen ^{56}Fe -Kerne vor, während weiter innen mit zunehmender Dichte immer neutronenreichere Kerne auftreten. Der Übergang von der äußeren zur **inneren Kruste** bei $\rho_{\text{drip}} \approx 4 \cdot 10^{11} \text{ g/cm}^3$ ist in Abbildung 5 durch ein plötzliches Abflachen der Zustandsgleichung zu erkennen. Ab dieser Dichte „tröpfeln“ Neutronen aus den Atomkernen, und ein Gas aus Neutronen und Elektronen füllt den Raum zwischen neutronenreichen Atomkernen. Mit steigender Energiedichte wächst der Anteil freier Neutronen, bis sich die Atomkerne ab einer Übergangsdichte von etwa $\rho_{\text{trans}} \approx 1,7 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$ aufzulösen beginnen, und sich eine stark inkompressible Neutronenflüssigkeit bildet, der noch ein kleiner Anteil an Protonen und Elektronen beigemischt ist. Aus dieser Materie besteht der **Kern** des Neutronensterns.⁴⁴

⁴⁴Siehe auch Camenzind [27], Seite 188, 242 f.

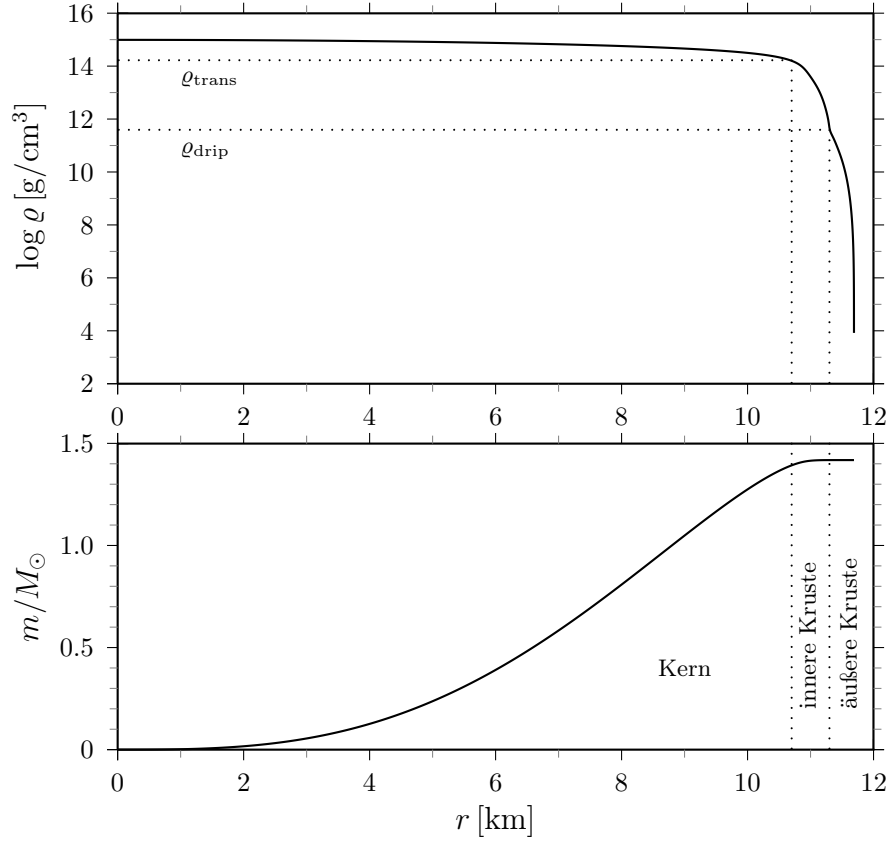


Abb. 6: Energiedichte $\rho(r)$ und totale Masse $m(r)$ eines Neutronensterns mit $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$

In Abbildung 6 sind die Ergebnisse der numerischen Integration des Differentialgleichungssystems (3.63)–(3.65) für einen Stern mit $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$ dargestellt: Sein Dichteprofil $\rho(r)$ und der Verlauf der totalen Masse $m(r)$ vom Zentrum bis zum Rand des Sterns. Für diese zentrale Energiedichte erhalten wir einen Neutronenstern mit Radius $R = 11,689 \text{ km}$ und Gesamtmasse $M = 1,418 M_\odot$. Er besteht aus einem $10,67 \text{ km}$ großen Kern, einer etwa 630 m dicken inneren Kruste und einer ca. 390 m dicken äußeren Kruste. Wie in Abbildung 6 oben zu sehen ist, grenzt sich die innere Kruste durch einen plötzlichen, sehr starken Abfall der Dichte bei $r = 10,67 \text{ km}$ (ρ_{trans}) deutlich vom Kern ab; den Übergang von der inneren zur äußeren Kruste markiert ein abruptes Abflachen der Dichte bei $r = 11,30 \text{ km}$ (ρ_{drip}).

Variiert man die zentrale Dichte im Intervall $\rho_c/\rho_{\text{nuc}} = [1, 14]$, so erhält man eine Sequenz von Neutronensternen unterschiedlicher Größen und Massen. In Abbildung 7 sind Radius R und Gesamtmasse M als Funktionen der Zentralsdichte ρ_c aufgetragen, sowie R in Abhängigkeit von M . In der so erzeugten Sequenz von Lösungen sind jedoch nicht alle Konfigurationen stabil. Eine notwendige Bedingung, damit es sich bei einer Lösung $M(\rho_c)$ um eine instabile

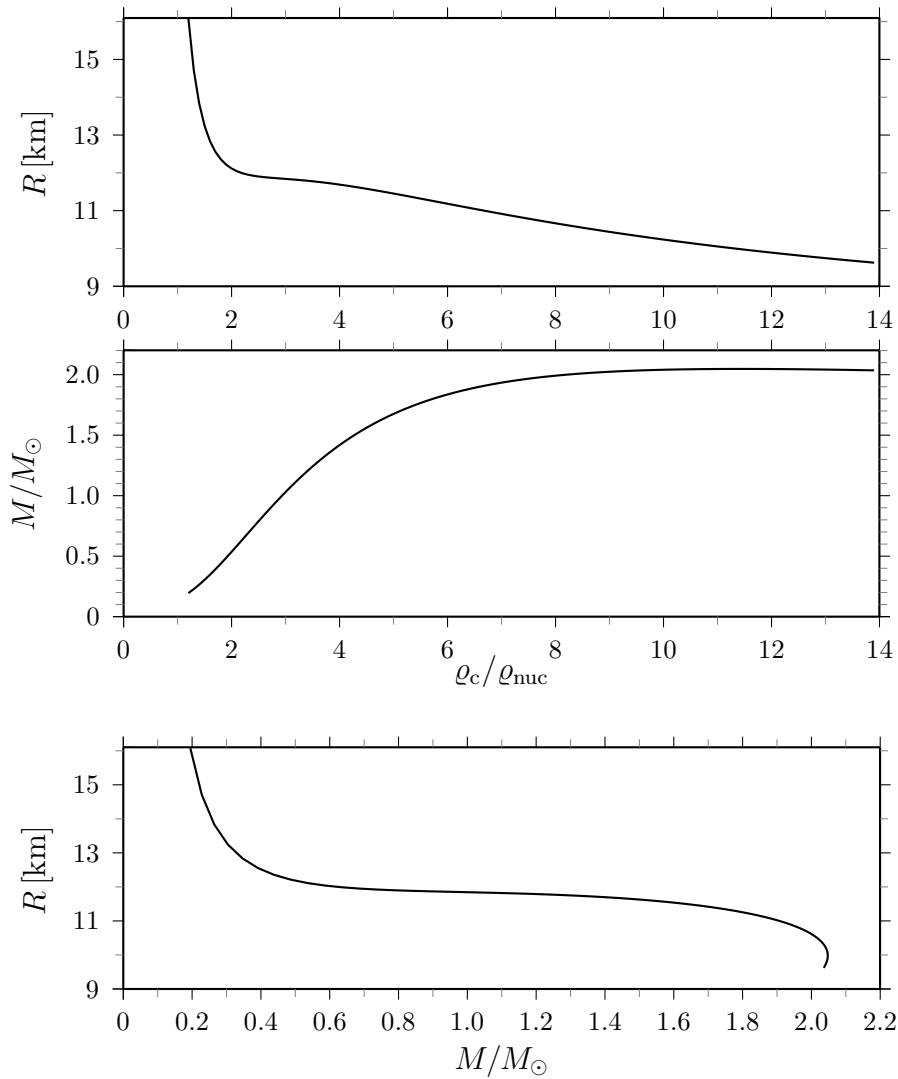


Abb. 7: $R(\rho_c)$, $M(\rho_c)$ und $R(M)$ von Neutronensternen unterschiedlicher Zentraldichten

Konfiguration handelt, lautet

$$\frac{dM(\rho_c)}{d\rho_c} < 0. \quad (3.84)$$

Das Maximum der $M(\rho_c)$ -Kurve in Abbildung 7 stellt demnach den massereichsten noch stabilen Neutronenstern mit $M_{\text{max}} = 2,047 M_\odot$ dar. Es liegt bei etwa 11,4-facher Kerndichte, d.h. bei $\rho_c = 2,85 \cdot 10^{15} \text{ g/cm}^3$, und einem Sternradius von $R = 9,986 \text{ km}$. Im $R(M)$ -Diagramm entspricht es dem Punkt, in dem die Kurve rückläufig wird. Eine wichtige Vorhersage der Allgemeinen Relativitätstheorie ist, dass Konfigurationen mit höheren Zentraldichten instabil sind.

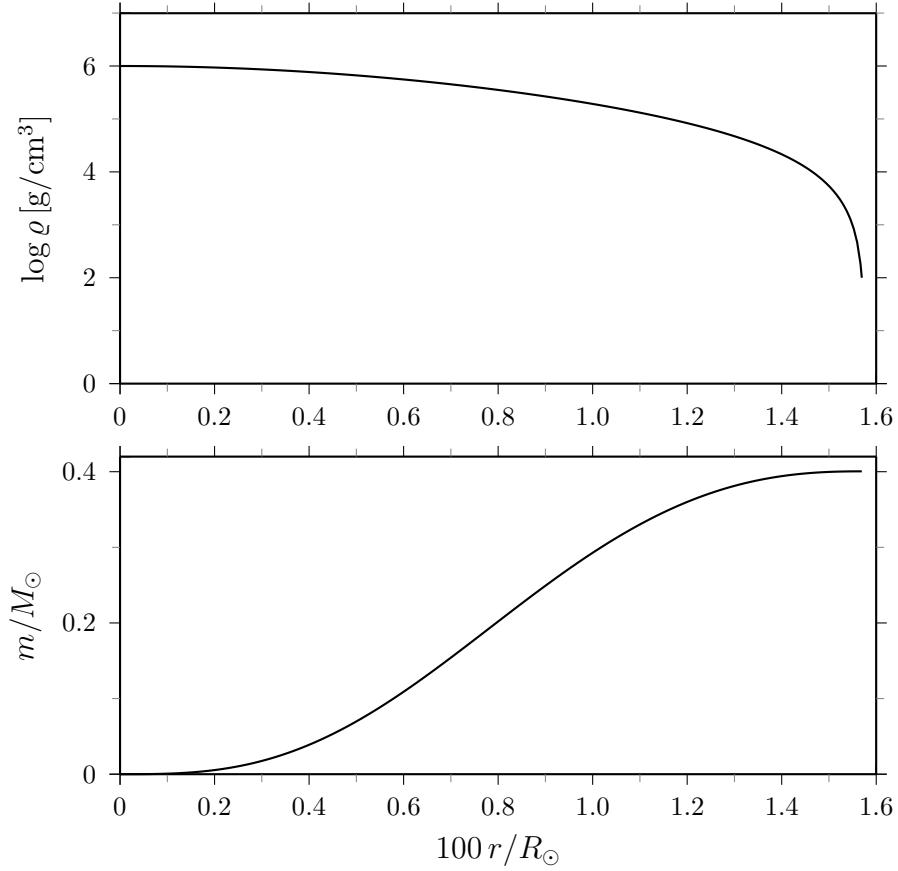


Abb. 8: Dichte $\rho(r)$ und totale Masse $m(r)$ eines Weißen Zwerges mit $\rho_c = 10^6 \text{ g/cm}^3$

3.7 Weiße Zwerge

Zur numerischen Integration der TOV-Gleichungen für Weiße Zwerge verwende ich die Zustandsgleichung⁴⁵

$$p(\varrho) = \frac{m_e c^2}{\Lambda_e} \frac{1}{8\pi^2} \left[\sqrt{1 + \xi^2} \left(\frac{2}{3} \xi^2 - 1 \right) \xi + \ln \left(\sqrt{1 + \xi^2} + \xi \right) \right], \quad (3.85)$$

$$\xi = 1,0088 \cdot 10^{-2} \left(\frac{\varrho}{\mu_e} \right)^{1/3}$$

mit der Comptonwellenlänge des Elektrons $\Lambda_e = \hbar/m_e c$ und dem mittleren Molekulargewicht pro Elektron $\mu_e \approx 2$. Für einen Weißen Zwerg der zentralen Dichte $\rho_c = 10^6 \text{ g/cm}^3$ ergibt sich der in Abbildung 8 gezeigte Verlauf der Energiedichte $\rho(r)$ und totalen Masse $m(r)$. Eine Variation der zentralen Dichte führt auf die in Abbildung 9 gezeigte Sequenz von Lösungen $M(\rho_c)$. Auch in diesem Fall gibt es eine maximale Masse, die in etwa bei der Chandrasekhar-Grenze von $1,4 M_\odot$ liegt.

⁴⁵Siehe Camenzind [27], Seite 154 ff.

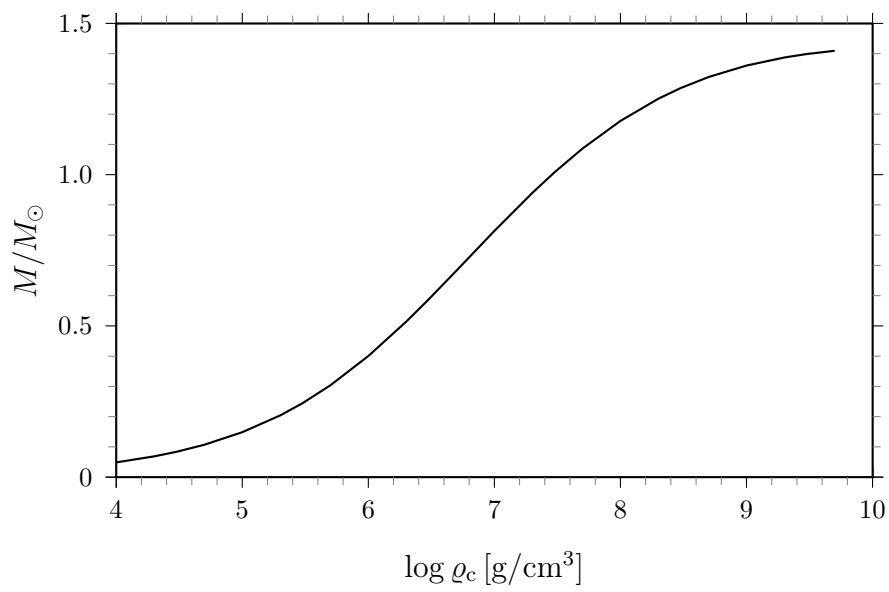


Abb. 9: Gesamtmasse $M(\rho_c)$ von Weißen Zwergen mit variierender Zentral-dichte

Teil III

Höherdimensionale Physik

»Es ist nicht das Wissen, sondern das Lernen, nicht das Besitzen, sondern das Erwerben, nicht das Da-Seyn, sondern das Hinkommen, was den größten Genuß gewährt. Wenn ich eine Sache ganz ins Klare gebracht und erschöpft habe, so wende ich mich davon weg, um wieder ins Dunkle zu gehen; so sonderbar ist der nimmersatte Mensch, hat er ein Gebäude vollendet, so ist es nicht, um nun ruhig darin zu wohnen, sondern um ein anderes anzufangen.«
 – Carl Friedrich Gauß⁴⁶

4 Untermannigfaltigkeiten

4.1 Einbettung

In Kapitel 6 werde ich das Paradigma der Branenwelt einführen, in dem die Raumzeit als vierdimensionale Untermannigfaltigkeit aufgefasst wird, die in eine höherdimensionale Mannigfaltigkeit, dem so genannten Bulk, eingebettet ist. Im Allgemeinen versteht man unter einer **Einbettung** eine Abbildung

$$\Phi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}, \quad x^a \mapsto X^A(x^0, x^1, \dots, x^{d-1}) \quad (4.1)$$

von der Untermannigfaltigkeit \mathcal{N} in die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , wobei die (lokalen) Koordinaten x^a (mit $a = 0, 1, \dots, d-1$) auf \mathcal{N} und X^A (mit $A = 0, 1, \dots, D-1$) auf \mathcal{M} eingeführt wurden.

Im Grunde können wir \mathcal{N} mit dem in \mathcal{M} eingebetteten Bild $\widehat{\mathcal{N}} := \Phi(\mathcal{N})$ identifizieren und damit auch alle Punkte $x \in \mathcal{N}$ mit ihren Bildern $X = \Phi(x) \in \widehat{\mathcal{N}}$. Somit kann jeder Punkt von \mathcal{N} auch durch Koordinaten bezüglich einer Basis von \mathcal{M} dargestellt werden. Wir werden im Folgenden die Bezeichnung $\widehat{\mathcal{N}}$ dennoch verwenden, um den Unterschied in der Koordinatendarstellung zu betonen: Durch die d Koordinaten x^a wird der Punkt $x \in \mathcal{N}$ bezüglich einer Basis von \mathcal{N} dargestellt, während die D Koordinaten X^A denselben Punkt $x = X \in \widehat{\mathcal{N}}$ bezüglich einer Basis von \mathcal{M} ausdrücken.

Sofern sich die Untermannigfaltigkeit nicht selbst schneidet, ist die Einbettung Φ injektiv, d.h. jeder Punkt von \mathcal{N} wird eindeutig einem Punkt von \mathcal{M} zugeordnet, und es existiert dann eine inverse Abbildung $\Phi^{-1}: \widehat{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{N}$. Man beachte, dass der Definitionsbereich von Φ^{-1} auf das Bild $\widehat{\mathcal{N}} = \Phi(\mathcal{N})$ beschränkt ist, da Φ im Allgemeinen nicht surjektiv auf ganz \mathcal{M} abbildet und damit auch nicht bijektiv ist.⁴⁷

⁴⁶F. Schmidt, P. Stäckel (eds.), *Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauß und Wolfgang Bolyai*, B. G. Teubner, Leipzig, 1899, Seite 92.

⁴⁷Als Beispiel denke man an den \mathbb{R}^3 mit kartesischen Koordinaten $X^A = (X, Y, Z)$. Die Punkte der X, Y -Ebene bilden die Untermannigfaltigkeit \mathbb{R}^2 und können durch Koordinaten $x^a = (x, y)$ angegeben werden. Eine Einbettung ist dann z.B. $\Phi: (x, y) \mapsto (X, Y, 0)$ mit der Inversen $\Phi^{-1}: (X, Y, 0) \mapsto (x, y)$.

4.2 Pushforward und Pullback

Durch $C: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$, $\lambda \mapsto x^a(\lambda)$ sei eine Kurve auf \mathcal{N} gegeben, und

$$v = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^a} = v^a e_{(a)} \quad (4.2)$$

sei der Tangentialvektor an diese Kurve. Da \mathcal{N} in \mathcal{M} eingebettet ist, kann C ebenso als Kurve auf $\widehat{\mathcal{N}} \subset \mathcal{M}$ aufgefasst werden, was wir als Komposition

$$\widehat{C} := \Phi \circ C: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \lambda \mapsto X^A(x^0(\lambda), \dots, x^{d-1}(\lambda)) \quad (4.3)$$

schreiben können. Mit der Kettenregel folgt für den Tangentialvektor an \widehat{C}

$$\widehat{v} = \frac{d}{d\lambda} = \frac{dx^a}{d\lambda} \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial X^A} = \widehat{v}^A e_{(A)} \quad \rightsquigarrow \quad \widehat{v}^A = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} v^a. \quad (4.4)$$

Im Folgenden bezeichne ich den Tangentialvektor an C mit dem gleichen Buchstaben wie jenen an \widehat{C} , setze also $\widehat{v} \equiv v$, weil es sich um die gleiche Kurve und damit auch um den gleichen Tangentialvektor handelt. Die beiden Vektoren unterscheiden sich lediglich in ihrer Komponentendarstellung: $v = v^a e_{(a)}$, $\widehat{v} = v^A e_{(A)}$. Durch die Einbettung $\Phi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ wird demnach eine Abbildung

$$\Phi^*: \mathcal{T}_p(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{T}_p(\mathcal{M}), \quad v^a \mapsto v^A = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} v^a \quad (4.5)$$

induziert, die man als **Pushforward** bezeichnet.⁴⁸

Betrachten wir nun eine 1-Form auf dem Tangentialraum $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$, d.h. den Dualvektor

$$\tilde{v}: \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad w \mapsto \tilde{v}(w) = \langle v, w \rangle. \quad (4.6)$$

Beschränkt man diese 1-Form auf Vektoren aus $\mathcal{T}_p(\widehat{\mathcal{N}})$, also solche, die sich aus dem Pushforward eines Vektors w von $\mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ nach $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ ergeben, so kann man schreiben

$$\langle v, w \rangle = v_A w^A = v_A \frac{\partial X^A}{\partial x^a} w^a = v_a w^a \quad \rightsquigarrow \quad v_a = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} v_A. \quad (4.7)$$

⁴⁸Eine alternative Herleitung ist die folgende: Man betrachtet die Basisvektoren von $\mathcal{T}_p(\widehat{\mathcal{N}})$. Aufgrund der Einbettung $\Phi: x^a \mapsto X^A(x^0, \dots, x^{d-1})$ gilt mit der Kettenregel

$$e_{(a)} = \frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial}{\partial X^A} = e_{(a)}^A e_{(A)},$$

was man als Entwicklung des Vektors $e_{(a)}$ nach den Basisvektoren $e_{(A)}$ auffassen kann, d.h. $e_{(a)}^A := \partial X^A / \partial x^a$ sind die Komponenten von $e_{(a)} \in \mathcal{T}_p(\widehat{\mathcal{N}})$ bezüglich der Basis $\{e_{(A)}\}$ von $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$. Für einen Vektor $v \in \mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ gilt dann

$$v = v^a e_{(a)} = v^a e_{(a)}^A e_{(A)} = v^a \frac{\partial X^A}{\partial x^a} e_{(A)} = v^A e_{(A)} \quad \rightsquigarrow \quad v^A = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} v^a.$$

Eine 1-Form auf $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ kann somit durch die Einbettung $\Phi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$ nach $\mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ zurückgezogen werden, was man **Pullback** nennt und formal wie folgt schreibt:

$$\Phi_*: \tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{N}), \quad v_A \mapsto v_a = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} v_A. \quad (4.8)$$

Eine geometrische Interpretation des Pullback liefert die Schreibweise aus Fußnote 48:

$$v_a = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} v_A = e_{(a)}^A v_A = \langle e_{(a)}, v \rangle. \quad (4.9)$$

Die Pullback-Komponenten v_a ergeben sich demnach aus der Projektion von v auf die Basisvektoren von $\mathcal{T}_p(\hat{\mathcal{N}})$.

Da die Einbettung Φ im Allgemeinen nicht bijektiv ist, gibt es von Vektoren nur ein Pushforward von $\mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ nach $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$, aber kein Pullback von $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ nach $\mathcal{T}_p(\mathcal{N})$. Für Dualvektoren gibt es umgekehrt nur ein Pullback, aber kein Pushforward. Wir werden in Kapitel 5 sehen, dass für Hyperflächen als Spezialfälle von Untermannigfaltigkeiten eine Art Pullback von Vektoren durch den Projektionsformalismus gegeben ist.

Die Konzepte Pushforward und Pullback können auf Tensoren verallgemeinert werden, indem Gleichung (4.5) bzw. (4.8) für jeden Index angewandt wird:

$$\text{Pushforward:} \quad T^{AB\dots} = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial X^B}{\partial x^b} \dots T^{ab\dots}, \quad (4.10)$$

$$\text{Pullback:} \quad S_{ab\dots} = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial X^B}{\partial x^b} \dots S_{AB\dots}. \quad (4.11)$$

Auch hier habe ich wieder den gleichen Buchstaben T für den auf $\mathcal{T}_p(\mathcal{N}) \times \dots \times \mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ definierten Tensor und den auf $\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \times \dots \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ definierten Pushforward-Tensor gewählt (analog für S), da durch die verschiedenen Indizes (Großbuchstaben laufen von 0 bis $D-1$, Kleinbuchstaben von 0 bis $d-1$) keine Verwechslungsgefahr besteht.

Man beachte, dass für gemischte Tensoren, also solche mit oberen und unteren Indizes, im Allgemeinen weder ein Pushforward noch ein Pullback existiert.

4.3 Induzierte Metrik I

Es sei \mathcal{M} eine D -dimensionale Mannigfaltigkeit mit der Metrik g_{AB} , und \mathcal{N} eine d -dimensionale Untermannigfaltigkeit, die in \mathcal{M} eingebettet ist. Durch das Pullback von g_{AB} ist eine Metrik auf der Untermannigfaltigkeit gegeben. Deren Komponenten lauten gemäß Gleichung (4.11)

$$g_{ab} = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial X^B}{\partial x^b} g_{AB}. \quad (4.12)$$

Man nennt g_{ab} die auf der Untermannigfaltigkeit **induzierte Metrik**.

In Anhang A.1 auf Seite 105 wird als Beispiel die induzierte Metrik einer Zylinderoberfläche im euklidischen Raum berechnet.

5 Hyperflächen

5.1 Projektionsformalismus

Wir wenden uns nun dem Spezialfall zu, dass die Untermannigfaltigkeit \mathcal{N} von der Kodimension 1 ist, also in eine Mannigfaltigkeit \mathcal{M} der Dimension $D = d+1$ eingebettet ist. Eine solche Untermannigfaltigkeit nennt man eine **Hyperfläche**.

Mit P bezeichne ich den Tensor, der jeden Tangentialvektor der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} auf einen Tangentialvektor der Hyperfläche $\widehat{\mathcal{N}}$ projiziert:⁴⁹

$$P: \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{T}_p(\widehat{\mathcal{N}}), \quad v \mapsto v_{\parallel} = Pv. \quad (5.1)$$

Betrachten wir nun die Zerlegung eines Vektors $v \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ in den Anteil v_{\parallel} , der tangential zu $\widehat{\mathcal{N}}$ ist, und den Anteil v_{\perp} , der senkrecht auf $\widehat{\mathcal{N}}$ steht, also ein Vielfaches des Normalenvektors n ist:⁵⁰

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp} = Pv + \sigma \langle n, v \rangle n, \quad (5.2)$$

wobei der Faktor $\sigma := \langle n, n \rangle = \pm 1$ angibt, ob der Normalenvektor raum- oder zeitartig ist. Für die Komponenten bezüglich einer Basis von $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ gilt

$$\begin{aligned} v^A &= v_{\parallel}^A + v_{\perp}^A \\ &= P_B^A v^B + \sigma n_B v^B n^A \\ &= (P_B^A + \sigma n^A n_B) v^B \\ &\stackrel{!}{=} \delta_B^A v^B. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Daraus folgt die explizite Form des **Projektionstensors**

$$P_B^A = \delta_B^A - \sigma n^A n_B. \quad (5.4)$$

Ein Projektionstensor ist idempotent, muss also die Eigenschaft $P^2 = P$ erfüllen, in Komponenten ausgedrückt $P_C^A P_B^C = P_B^A$. Mit (5.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} P_C^A P_B^C &= (\delta_C^A - \sigma n^A n_C) (\delta_B^C - \sigma n^C n_B) \\ &= \delta_B^A - \sigma n^A n_B (2 - \sigma n_C n^C) \\ &= P_B^A. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Dies rechtfertigt das Auftreten des Faktors σ in Gleichung (5.2). Würde er fehlen, bzw. wäre überall $\sigma = 1$ gesetzt, so wäre $P^2 = P$ nur für raumartige, jedoch nicht für zeitartige Normalenvektoren mit $n_C n^C = -1$ erfüllt, was man an (5.5) direkt ablesen kann.

⁴⁹Wie oben angekündigt, verwende ich hier die Bezeichnung $\widehat{\mathcal{N}}$ statt \mathcal{N} , um zu verdeutlichen, dass die Anwendung des Projektionstensors die $d+1$ Koordinaten $v_{\parallel}^A = P_B^A v^B$ zur Folge hat und nicht die d Koordinaten v_{\parallel}^a , durch welche v_{\parallel} ebenfalls ausgedrückt werden kann.

⁵⁰Die Hyperfläche kann durch ein Normalenvektorfeld $n(x) \in \mathcal{T}_x(\mathcal{M})$, mit $x \in \widehat{\mathcal{N}}$, definiert werden. Wir betrachten hier den Normalenvektor im Punkt p .

Der Projektionstensor (5.4) kann ebenso dazu verwendet werden, einen Kovektor von \mathcal{M} auf einen Kovektor von $\hat{\mathcal{N}}$ zu projizieren

$$P: \tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_p(\hat{\mathcal{N}}), \quad \tilde{v} \mapsto \tilde{v}_{\parallel} = P\tilde{v}, \quad (5.6)$$

denn es gilt

$$\begin{aligned} v_{\parallel A} &= g_{AC} v_{\parallel}^C = g_{AC} P_B^C v^B \\ &= g_{AC} (\delta_B^C - \sigma n^C n_B) v^B \\ &= v_A - \sigma n_A n_B v^B \\ &= (\delta_A^B - \sigma n_A n^B) v_B \\ &= P_A^B v_B. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Schließlich lässt sich der Projektionsformalismus auch auf Tensoren höherer Stufe verallgemeinern – insbesondere auf gemischte Tensoren. Betrachten wir beispielsweise den Tensor T^A_B , d.h. die bilineare Abbildung

$$T: \tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\tilde{v}, w) \mapsto T^A_B v_A w^B \quad (5.8)$$

und definieren einen Tensor \hat{T}^A_B durch

$$\hat{T}^A_B := P_C^A P_B^D T^C_D, \quad (5.9)$$

dann gilt

$$\hat{T}^A_B v_A w^B = T^A_B v_{\parallel A} w_{\parallel}^B. \quad (5.10)$$

Die durch \hat{T} gegebene, bilineare Abbildung entspricht also der Abbildung T , wenn man letztere auf die Tangentialvektoren bzw. dualen Tangentialvektoren der Hyperfläche einschränkt. In diesem Sinne ist \hat{T} eine Projektion von T auf die Hyperfläche.⁵¹ Allgemein lautet die Projektion eines Tensors $S^{AB\dots}_{CD\dots}$

$$\hat{S}^{AB\dots}_{CD\dots} = P_E^A P_F^B \dots P_C^G P_D^H \dots S^{EF\dots}_{GH\dots}, \quad (5.12)$$

d.h. für jeden Index wird ein Projektionstensor multipliziert.

5.2 Induzierte Metrik II

Betrachten wir das Skalarprodukt zweier Tangentialvektoren v_{\parallel} und w_{\parallel} der Hyperfläche $\hat{\mathcal{N}}$

$$\langle v_{\parallel}, w_{\parallel} \rangle = g_{ab} v_{\parallel}^a w_{\parallel}^b. \quad (5.13)$$

⁵¹Die Abbildung \hat{T} ist ebenso wie T auf $\tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ definiert

$$\hat{T}: \tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\tilde{v}, w) \mapsto T^A_B v_{\parallel A} w_{\parallel}^B \quad (5.11)$$

und nicht etwa nur auf $\tilde{\mathcal{T}}_p(\hat{\mathcal{N}}) \times \mathcal{T}_p(\hat{\mathcal{N}})$.

v_{\parallel} und w_{\parallel} sind ebenfalls Tangentialvektoren der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} . Das Skalarprodukt kann folglich auch mit den Komponenten bezüglich einer Basis von $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ berechnet werden:

$$\langle v_{\parallel}, w_{\parallel} \rangle = g_{AB} v_{\parallel}^A w_{\parallel}^B. \quad (5.14)$$

Aus der höherdimensionalen Sichtweise ergeben sich $v_{\parallel}, w_{\parallel} \in \mathcal{T}_p(\hat{\mathcal{N}})$ aus der Projektion der Vektoren $v, w \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ auf den Tangentialraum der Hyperfläche. Also gilt

$$\langle v_{\parallel}, w_{\parallel} \rangle = g_{CD} v_{\parallel}^C w_{\parallel}^D = g_{CD} P_A^C P_B^D v^A w^B = \hat{g}_{AB} v^A w^B \quad (5.15)$$

mit der auf die Hyperfläche projizierten Metrik

$$\begin{aligned} \hat{g}_{AB} &:= P_A^C P_B^D g_{CD} \\ &= (\delta_A^C - \sigma n^C n_A) (\delta_B^D - \sigma n^D n_B) g_{CD} \\ &= g_{AB} - \sigma n_A n_B. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Wie man an Gleichung (5.15) sieht, ist \hat{g}_{AB} eine Bilinearform, die den Vektoren $v, w \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ das Skalarprodukt $\langle v_{\parallel}, w_{\parallel} \rangle$ ihrer auf $\mathcal{T}_p(\hat{\mathcal{N}})$ projizierten Vektoren zuordnet. Wendet man \hat{g}_{AB} direkt auf Vektoren aus $\mathcal{T}_p(\hat{\mathcal{N}})$ an, so gilt wegen $\langle n, v_{\parallel} \rangle = \langle n, w_{\parallel} \rangle = 0$

$$\hat{g}_{AB} v_{\parallel}^A w_{\parallel}^B = g_{AB} v_{\parallel}^A w_{\parallel}^B - \sigma n_A v_{\parallel}^A n_B w_{\parallel}^B = g_{AB} v_{\parallel}^A w_{\parallel}^B. \quad (5.17)$$

In diesem Falle spielt \hat{g}_{AB} demnach die Rolle einer Metrik auf $\hat{\mathcal{N}}$. Wechselt man zu den Koordinaten auf der Hyperfläche, berechnet also die Pullback-Komponenten \hat{g}_{ab} , so gilt

$$\begin{aligned} \hat{g}_{ab} &= \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial X^B}{\partial x^b} \hat{g}_{AB} \\ &= \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial X^B}{\partial x^b} P_A^C P_B^D g_{CD} \\ &= \frac{\partial X^C}{\partial x^a} \frac{\partial X^D}{\partial x^b} g_{CD} = g_{ab}, \end{aligned} \quad (5.18)$$

wobei $\frac{\partial X^A}{\partial x^a} P_A^C = \frac{\partial X^A}{\partial x^a} (\delta_A^C - \sigma n^C n_A) = \frac{\partial X^C}{\partial x^a} - \sigma n^C n_a = \frac{\partial X^C}{\partial x^a}$ und $n_a = 0$ (der Normalenvektor hat keinen zu \mathcal{N} tangentialen Anteil) ausgenutzt wurde.

Man kann \hat{g}_{AB} als eine Erweiterung der induzierten Metrik g_{ab} von \mathcal{N} nach \mathcal{M} ansehen: Während g_{ab} eine Bilinearform auf $\mathcal{T}_p(\mathcal{N}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ ist, erstreckt sich der Definitionsbereich von \hat{g}_{AB} auf $\mathcal{T}_p(\mathcal{M}) \times \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$.⁵² Damit stellt \hat{g}_{AB} gewissermaßen die auf dem Bild $\hat{\mathcal{N}}$ der Hyperfläche induzierte Metrik dar. In der Literatur wird jedoch üblicherweise sowohl g_{ab} wie auch \hat{g}_{AB} als **induzierte Metrik** der Hyperfläche bezeichnet.

In Anhang A.2 auf Seite 106 wird dies am Beispiel der Zylinderoberfläche im \mathbb{R}^3 verdeutlicht.

⁵² g_{ab} kann als $d \times d$ -Matrix und \hat{g}_{AB} als $(d+1) \times (d+1)$ -Matrix geschrieben werden.

5.3 Äußere Krümmung

Eine Hyperfläche besitzt neben der inneren auch eine äußere Krümmung. Letztere hängt von der Art der Einbettung ab, kann also durch das Normalenvektorfeld an die Hyperfläche ausgedrückt werden. Man definiert den äußeren Krümmungstensor K auf der Hyperfläche durch⁵³

$$K(v_{\parallel}, w_{\parallel}) := \langle v_{\parallel}, \nabla_{w_{\parallel}} n \rangle \quad (5.19)$$

mit den Tangentialvektoren $v_{\parallel}, w_{\parallel} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{N})$, dem Normalenvektor $n \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ und der kovarianten Ableitung längs w_{\parallel} , $\nabla_{w_{\parallel}} = \langle w_{\parallel}, \nabla \rangle = w_{\parallel}^b \nabla_b$. Es gilt

$$K(v_{\parallel}, w_{\parallel}) = \langle v_{\parallel}^a e_{(a)}, w_{\parallel}^b \nabla_b n \rangle = \langle e_{(a)}, \nabla_b n \rangle v_{\parallel}^a w_{\parallel}^b = K_{ab} v_{\parallel}^a w_{\parallel}^b. \quad (5.20)$$

Bezüglich der Basis $\{e_{(a)}\}$ von $\mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ hat K damit die Komponenten

$$K_{ab} = \langle e_{(a)}, \nabla_b n \rangle. \quad (5.21)$$

Der äußere Krümmungstensor ist symmetrisch: $K_{ab} = K_{ba}$. Ein Beweis dieser Eigenschaft ist in Anhang A.3 auf Seite 107 gegeben.

Die äußere Krümmung (5.19) ist als Bilinearform auf $\mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ definiert, kann aber zu einer Bilinearform auf $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ erweitert werden, indem man ausnutzt, dass v_{\parallel} und w_{\parallel} auch Tangentialvektoren von \mathcal{M} sind und sich aus der Projektion der Vektoren $v, w \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ auf den Tangentialraum $\mathcal{T}_p(\widehat{\mathcal{N}})$ ergeben:

$$\begin{aligned} K(v_{\parallel}, w_{\parallel}) &= \langle e_{(C)}, \nabla_D n \rangle v_{\parallel}^C w_{\parallel}^D \\ &= \langle e_{(C)}, \nabla_D n \rangle P_A^C P_B^D v^A w^B = \widehat{K}_{AB} v^A w^B, \end{aligned} \quad (5.22)$$

wobei

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{AB} &= P_A^C P_B^D \langle e_{(C)}, \nabla_D n \rangle \\ &= (\delta_A^C - \sigma n^C n_A) (\delta_B^D - \sigma n^D n_B) \langle e_{(C)}, \nabla_D n \rangle \\ &= \langle e_{(A)}, \nabla_B n \rangle - \sigma \langle e_{(A)}, \nabla_n n \rangle n_B - \sigma n_A \underbrace{\langle n, \nabla_B n \rangle}_{=0} + n_A \underbrace{\langle n, \nabla_n n \rangle}_{=0} n_B \\ &= \langle e_{(A)}, \nabla_B n \rangle - \sigma \langle e_{(A)}, \nabla_n n \rangle n_B \end{aligned} \quad (5.23)$$

die Komponenten von K bezüglich der Basis $\{e_{(A)}\}$ von $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ sind. In der Standardbasis gilt $e_{(A)}^C = \delta_A^C$, und die Komponenten von \widehat{K} lauten dann

$$\widehat{K}_{AB} = P_A^C P_B^D \nabla_D n_C = \nabla_B n_A - \sigma n_B \nabla_n n_A, \quad (5.24)$$

⁵³Das Vorzeichen ist Konvention; Gourgoulhon [28] und Misner et al. [21] definieren K durch

$$K(v_{\parallel}, w_{\parallel}) := -\langle v_{\parallel}, \nabla_{w_{\parallel}} n \rangle.$$

was auch wie folgt ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{AB} &= \nabla_B n_A - \sigma n_B n^C \nabla_C n_A \\ &= [\delta_B^C - \sigma n_B n^C] \nabla_C n_A \\ &= P_B^C \nabla_C n_A.\end{aligned}\tag{5.25}$$

5.4 Kovariante Ableitung auf der Hyperfläche

Es seien wieder $v_{\parallel}, w_{\parallel} \in \mathcal{T}_q(\mathcal{N})$ zwei Tangentialvektoren der Hyperfläche, und ∇ bezeichne die kovariante Ableitung auf \mathcal{M} . Zur kovarianten Ableitung auf der Hyperfläche kommt man durch eine Zerlegung des Vektors $u := \nabla_{w_{\parallel}} v_{\parallel} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$ in einen zur Hyperfläche tangentialen und einen dazu senkrechten Anteil:

$$u = u_{\parallel} + u_{\perp} = Pu + \sigma \langle n, u \rangle n.\tag{5.26}$$

Für die beiden Anteile gilt

$$\begin{aligned}u_{\parallel}^A &= P_B^A u^B = P_B^A \nabla_{w_{\parallel}} v_{\parallel}^B \\ &= P_B^A w_{\parallel}^C \nabla_C v_{\parallel}^B = w_{\parallel}^D P_B^A P_D^C \nabla_C v_{\parallel}^B \\ &= w_{\parallel}^D \widehat{\nabla}_D v_{\parallel}^A = \widehat{\nabla}_{w_{\parallel}} v_{\parallel}^A,\end{aligned}\tag{5.27}$$

$$u_{\perp} = \sigma \langle n, \nabla_{w_{\parallel}} v_{\parallel} \rangle n = -\sigma \langle v_{\parallel}, \nabla_{w_{\parallel}} n \rangle n = -\sigma K(v_{\parallel}, w_{\parallel}) n.\tag{5.28}$$

Dabei folgt der vorletzte Schritt aus

$$\begin{aligned}\langle n, v_{\parallel} \rangle = 0 &\quad \curvearrowright \quad \nabla \langle n, v_{\parallel} \rangle = \langle \nabla n, v_{\parallel} \rangle + \langle n, \nabla v_{\parallel} \rangle = 0 \\ &\quad \curvearrowright \quad \langle n, \nabla v_{\parallel} \rangle = -\langle v_{\parallel}, \nabla n \rangle.\end{aligned}\tag{5.29}$$

Gleichung (5.28) liefert eine weitere, geometrische Interpretation des äußeren Krümmungstensors $K(v_{\parallel}, w_{\parallel})$ als den zur Hyperfläche senkrechten Anteil der kovarianten Ableitung $\nabla_{w_{\parallel}} v_{\parallel}$. Die kovariante Ableitung auf der Hyperfläche u_{\parallel} lautet damit

$$\widehat{\nabla}_{w_{\parallel}} v_{\parallel} = \nabla_{w_{\parallel}} v_{\parallel} + \sigma K(v_{\parallel}, w_{\parallel}) n.\tag{5.30}$$

5.5 Relationen von Gauß und Codacci

Auf einer gekrümmten Mannigfaltigkeit kommt durch den Riemanntensor die Nichtvertauschbarkeit der kovarianten Ableitung zum Ausdruck:

$$R^A{}_{BCD} v^B = (\nabla_C \nabla_D - \nabla_D \nabla_C) v^A.\tag{5.31}$$

Gleiches muss für den Riemanntensor der Hyperfläche gelten:

$$\widehat{R}^A{}_{BCD} v_{\parallel}^B = (\widehat{\nabla}_C \widehat{\nabla}_D - \widehat{\nabla}_D \widehat{\nabla}_C) v_{\parallel}^A.\tag{5.32}$$

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass sich die kovariante Ableitung auf der Hyperfläche $\widehat{\mathcal{N}}$ aus der Projektion der kovarianten Ableitung auf \mathcal{M} ergibt:

$$\widehat{\nabla}_D v_{\parallel}^A = P_D^H P_E^A \nabla_H v_{\parallel}^E. \quad (5.33)$$

Für die zweite Ableitung auf der Hyperfläche gilt dann

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_C \widehat{\nabla}_D v_{\parallel}^A &= \widehat{\nabla}_C (P_D^H P_E^A \nabla_H v_{\parallel}^E) \\ &= P_C^G P_D^I P_J^A \nabla_G (P_I^H P_E^J \nabla_H v_{\parallel}^E) \\ &= P_C^G P_D^I P_E^A (\nabla_G P_I^H) \nabla_H v_{\parallel}^E + P_C^G P_D^H P_J^A (\nabla_G P_E^J) \nabla_H v_{\parallel}^E \\ &\quad + P_C^G P_D^H P_E^A \nabla_G \nabla_H v_{\parallel}^E, \end{aligned} \quad (5.34)$$

wobei die Idempotenz (5.5) des Projektionstensors ausgenutzt wurde. Mit

$$\begin{aligned} P_C^G P_D^I (\nabla_G P_I^H) &= P_C^G P_D^I \nabla_G (\delta_I^H - \sigma n_I n^H) \\ &= -\sigma P_C^G \underbrace{P_D^I n_I}_{=0} \nabla_G n^H - \sigma P_C^G P_D^I (\nabla_G n_I) n^H \\ &= -\sigma \widehat{K}_{CD} n^H \end{aligned} \quad (5.35)$$

und entsprechend

$$P_C^G P_J^A (\nabla_G P_E^J) = -\sigma \widehat{K}_C^A n_E \quad (5.36)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_C \widehat{\nabla}_D v_{\parallel}^A &= -\sigma \widehat{K}_{CD} P_E^A n^H \nabla_H v_{\parallel}^E - \sigma \widehat{K}_C^A n_E P_D^H \nabla_H v_{\parallel}^E + P_C^G P_D^H P_E^A \nabla_G \nabla_H v_{\parallel}^E \\ &= -\sigma \widehat{K}_{CD} P_E^A \nabla_n v_{\parallel}^E + \sigma \widehat{K}_C^A \widehat{K}_{DE} v_{\parallel}^E + P_C^G P_D^H P_E^A \nabla_G \nabla_H v_{\parallel}^E, \end{aligned} \quad (5.37)$$

worin erneut von (5.29) Gebrauch gemacht wurde. Wir konstruieren nun den Riemanntensor der Hyperfläche gemäß (5.32). Da der äußere Krümmungstensor symmetrisch ist, $\widehat{K}_{CD} = \widehat{K}_{DC}$, hebt sich der erste Summand in (5.37) bei der Symmetrisierung bezüglich C und D weg. Übrig bleibt

$$\begin{aligned} \widehat{R}_{BCD}^A v_{\parallel}^B &= 2\sigma \widehat{K}_{[C}^A \widehat{K}_{D]B} v_{\parallel}^B + 2P_{[C}^G P_{D]}^H P_E^A \nabla_G \nabla_H v_{\parallel}^E \\ &= 2\sigma \widehat{K}_{[C}^A \widehat{K}_{D]B} v_{\parallel}^B + 2P_C^G P_D^H P_E^A \nabla_{[G} \nabla_{H]} v_{\parallel}^E \\ &= 2\sigma \widehat{K}_{[C}^A \widehat{K}_{D]B} v_{\parallel}^B + P_C^G P_D^H P_E^A R_{FGH}^E v_{\parallel}^F \\ &= 2\sigma \widehat{K}_{[C}^A \widehat{K}_{D]B} v_{\parallel}^B + P_C^G P_D^H P_E^A P_B^F R_{FGH}^E v_{\parallel}^B. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Dies gilt für beliebige Tangentialvektoren v_{\parallel}^B der Hyperfläche. Schließlich erhalten wir die **Gauß-Relation**

$$\widehat{R}_{BCD}^A = P_E^A P_B^F P_C^G P_D^H R_{FGH}^E + \sigma \widehat{K}_C^A \widehat{K}_{DB} - \sigma \widehat{K}_D^A \widehat{K}_{CB}. \quad (5.39)$$

Wie man sieht, reicht es nicht, den Riemannstensor von \mathcal{M} gemäß (5.12) auf die Hyperfläche zu projizieren; dies liefert den ersten Summanden in (5.39) und ist nur für verschwindende äußere Krümmung mit dem Riemannstensor von $\widehat{\mathcal{N}}$ identisch. Bildet man die Spur über den ersten und dritten Index, so ergibt sich die **kontrahierte Gauß-Relation**

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{AB} &= P_A^F P_E^G P_B^H R_{FGH}^E + \sigma \widehat{K} \widehat{K}_{BA} - \sigma \widehat{K}_B^C \widehat{K}_{CA} \\ &= P_A^F P_B^H R_{FH} - \sigma P_A^F P_B^H n_E n^G R_{FGH}^E + \sigma \widehat{K} \widehat{K}_{AB} - \sigma \widehat{K}_{AC} \widehat{K}_B^C, \quad (5.40)\end{aligned}$$

wobei $P_E^G = \delta_E^G - \sigma n_E n^G$ ausgenutzt wurde. Aus der kontrahierten Gauß-Relation folgt schließlich ein Ausdruck für den Ricciskalar der Hyperfläche:

$$\begin{aligned}({}^d R) &= ({}^{d+1} R) - 2\sigma n^F n^H R_{FH} + n_E n^F n^G n^H R_{FGH}^E \\ &\quad + \sigma \widehat{K}^2 - \sigma \widehat{K}_{AC} \widehat{K}^{AC}. \quad (5.41)\end{aligned}$$

Zwei weitere, wichtige Zusammenhänge zwischen dem Riemann- bzw. Riccistensor von \mathcal{M} und dem äußeren Krümmungstensor von $\widehat{\mathcal{N}}$ können wie folgt hergeleitet werden:

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla}_A \widehat{K}_B^C &= \widehat{\nabla}_A (P_B^G \nabla_G n^C) \\ &= P_A^D P_B^E P_F^C \nabla_D (P_E^G \nabla_G n^F) \\ &= -\sigma P_F^C \widehat{K}_{AB} n^G \nabla_G n^F + P_A^D P_B^E P_F^C \nabla_D \nabla_G n^F, \quad (5.42)\end{aligned}$$

wobei (5.25), (5.12) und (5.35) angewandt wurden. Symmetrisierung bezüglich A und B ergibt die **Codacci-Relation**

$$\begin{aligned}2\widehat{\nabla}_{[A} \widehat{K}_{B]}^C &= 2P_{[A}^D P_{B]}^E P_F^C \nabla_D \nabla_E n^F \\ &= 2P_A^D P_B^E P_F^C \nabla_{[D} \nabla_{E]} n^F \\ &= P_A^D P_B^E P_F^C n^G R_{GDE}^F. \quad (5.43)\end{aligned}$$

Aus der Codacci-Relation erhält man durch Kontraktion der Indizes A und C

$$\begin{aligned}2\widehat{\nabla}_{[A} \widehat{K}_{B]}^A &= P_F^D P_B^E n^G R_{GDE}^F \\ &= (\delta_F^D - \sigma n_F n^D) P_B^E n^G R_{GDE}^F \\ &= P_B^E n^G R_{GDE}^D - \sigma P_B^E n_F n^G n^D R_{GDE}^F. \quad (5.44)\end{aligned}$$

Aufgrund der Antisymmetrie des Riemannstensors in seinen ersten beiden Indizes verschwindet der zweite Summand, und wir erhalten

$$\widehat{\nabla}_A \widehat{K}_B^A - \widehat{\nabla}_B \widehat{K} = P_B^C n^D R_{CD}. \quad (5.45)$$

Dies ist die **kontrahierte Codacci-Relation**.

6 Branenwelten

6.1 Einführung

Im Folgenden verwende ich ein Branenmodell, das im Wesentlichen dem RS2-Modell von Randall & Sundrum [17] entspricht und auf den folgenden drei Grundannahmen beruht.

1. Die vierdimensionale Raumzeit Σ ist eine **Hyperfläche**, die in einer fünfdimensionalen Mannigfaltigkeit, dem so genannten Bulk, eingebettet ist.⁵⁴

2. Die **Feldgleichungen der Gravitation** haben in ihrer fünfdimensionalen Verallgemeinerung die gleiche Form wie in vier Dimensionen; sie lauten

$$G_{AB} = -\Lambda_5 g_{AB} + \kappa_5 T_{AB}. \quad (6.1)$$

3. Materie, d.h. alle durch das Standardmodell beschriebenen Teilchen, sowie die Eichbosonen der fundamentalen Wechselwirkungen mit Ausnahme des Gravitons, sind auf die Σ -Hyperfläche beschränkt. Damit bildet die Raumzeit eine **Brane** im Sinne der Stringtheorie. In den Feldgleichungen kommt dieses Materie-Confinement phänomenologisch durch den Energie-Impuls-Tensor

$$T_{AB} = \delta(\chi) \hat{\tau}_{AB}, \quad \hat{\tau}_{AB} := -\lambda \hat{g}_{AB} + \hat{T}_{AB} \quad (6.2)$$

zum Ausdruck; hierbei wurde ein lokales Koordinatensystem gewählt, welches die Richtung der fünften Dimension durch χ kennzeichnet und die Brane bei $\chi = 0$ positioniert. \hat{g}_{AB} und \hat{T}_{AB} sind die Metrik und der Energie-Impuls-Tensor der Brane, ausgedrückt bezüglich Koordinaten der fünfdimensionalen Bulk-Mannigfaltigkeit. Für λ gibt es zwei Interpretationen – je nach vier- oder fünfdimensionalem Standpunkt: Für einen auf die Brane beschränkten Beobachter spielt λ die Rolle einer kosmologischen Konstanten, während ein Bulk-Beobachter λ als Branenspannung auffassen kann. Die Gravitation ist von dem Confinement nicht betroffen; ihre Wirkung erstreckt sich auf die volle, fünfdimensionale Bulk-Mannigfaltigkeit, d.h. Materie auf der Brane verursacht Krümmung in allen fünf Dimensionen.

Es liegt in der Natur der Sache, dass ich mich nicht auf Minkowski-Branen beschränken kann, was den hauptsächlichen Unterschied zum RS2-Modell ausmacht. Die in den RS1 und RS2-Modellen vorgenommene Feinabstimmung der Branenspannung mit der kosmologischen Bulk-Konstanten ist also nicht nötig, sodass auch auf der Brane eine kosmologische Konstante Λ_4 auftreten kann.

6.2 Effektive Feldgleichungen auf der Brane

Durch die Feldgleichungen (6.1) ist eine fünfdimensionale Beschreibung der Gravitation gegeben. Natürlich beinhaltet dies auch die Wirkung, die die Gravitation auf der Brane entfaltet – also dort, wo die Materie im Bulk lokalisiert

⁵⁴Ich gehe von einer raumartigen fünften Dimension mit $\sigma = 1$ aus. Für Branenmodelle mit zeitartiger Zusatzdimension siehe Seikel [29] und Seikel & Camenzind [30].

ist. Mathematisch erhält man diesen vierdimensionalen „Anteil“ der Gravitation durch die Projektion der Bulk-Feldgleichungen auf die Brane, d.h. einer Anwendung des in Kapitel 5 eingeführten Projektionsformalismus. Als Resultat dieser Projektion ergeben sich die effektiven, vierdimensionalen Feldgleichungen, die ein auf die Brane beschränkter Beobachter als vollständiges Gravitationsgesetz interpretieren würde.

Bei der Herleitung der induzierten Branen-Feldgleichungen folge ich Shiromizu, Maeda & Sasaki [31]. Man konstruiert zunächst den Einsteintensor der Brane $\widehat{G}_{AB} := \widehat{R}_{AB} - \frac{1}{2}{}^{(4)}R\widehat{g}_{AB}$ aus der kontrahierten Gauß-Relation (5.40) und dem Ausdruck (5.41) für den Ricci-Tensor (mit $\sigma = 1$):

$$\begin{aligned}\widehat{G}_{AB} &= P_A^C P_B^D (R_{CD} - \frac{1}{2}{}^{(5)}Rg_{CD}) - P_A^C P_B^D n_E n^F R^E{}_{CFD} \\ &\quad + \widehat{g}_{AB} n^C n^D R_{CD} + \widehat{\mathcal{K}}_{AB},\end{aligned}\quad (6.3)$$

wobei ich die Abkürzung

$$\widehat{\mathcal{K}}_{AB} := \widehat{K}\widehat{K}_{AB} - \widehat{K}_A^C \widehat{K}_{CB} - \frac{1}{2}\widehat{g}_{AB}(\widehat{K}^2 - \widehat{K}_{CD}\widehat{K}^{CD}) \quad (6.4)$$

eingeführt habe. Mit dem Bulk-Weyltensor

$$C_{ABCD} = R_{ABCD} - \frac{2}{3}(g_{A[C}R_{D]B} + R_{A[C}g_{D]B}) + \frac{1}{6}{}^{(5)}Rg_{A[C}g_{D]B} \quad (6.5)$$

bzw. dessen Projektion auf die Brane

$$\begin{aligned}\widehat{E}_{AB} &:= P_A^C P_B^D n_E n^F C^E{}_{CFD} \\ &= P_A^C P_B^D n_E n^F R^E{}_{CFD} - \frac{1}{3}\widehat{g}_{AB}n^C n^D R_{CD} \\ &\quad - \frac{1}{3}P_A^C P_B^D (R_{CD} - \frac{1}{4}{}^{(5)}Rg_{CD})\end{aligned}\quad (6.6)$$

kann (6.3) wie folgt geschrieben werden:

$$\widehat{G}_{AB} = \frac{2}{3}(P_A^C P_B^D + \widehat{g}_{AB}n^C n^D - \frac{1}{4}\widehat{g}_{AB}g^{CD})G_{CD} + \widehat{\mathcal{K}}_{AB} - \widehat{E}_{AB}. \quad (6.7)$$

Setzt man den Bulk-Einsteintensor (6.1) und den Energie-Impuls-Tensor (6.2) ein, ergibt sich (mit $\widehat{\tau}_{AB}n^A = 0$)

$$\widehat{G}_{AB} = -\frac{1}{2}\Lambda_5\widehat{g}_{AB} + \frac{2}{3}\kappa_5\delta(\chi)(\widehat{\tau}_{AB} - \frac{1}{4}{}^{(4)}\tau\widehat{g}_{AB}) + \widehat{\mathcal{K}}_{AB} - \widehat{E}_{AB}. \quad (6.8)$$

In dieser Gleichung treten nur noch Tensoren der Brane auf; drückt man deren Komponenten bezüglich Koordinaten der Brane aus, erhält man

$$G_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\Lambda_5g_{\alpha\beta} + \frac{2}{3}\kappa_5\delta(\chi)(\tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}\tau g_{\alpha\beta}) + \mathcal{K}_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}. \quad (6.9)$$

Der singuläre Charakter des Energie-Impuls-Tensors (6.2) führt auf die so genannte Israel-Junction-Condition [32] für den äußeren Krümmungstensor

$$K_{\alpha\beta}^+ - K_{\alpha\beta}^- = -\kappa_5(\tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\tau g_{\alpha\beta}), \quad K_{\alpha\beta}^\pm := \lim_{\chi \rightarrow \pm 0} K_{\alpha\beta}. \quad (6.10)$$

Geht man davon aus, dass die Brane den Bulk in zwei identische Teile schneidet (bzw. in Spiegelbilder, wenn man in den beiden Halbräumen entsprechende Koordinaten einführt, sodass die Normalenvektoren entgegengerichtet sind: $n^- = -n^+$; dies bezeichnet man als Z_2 -Symmetrie), so gilt

$$K_{\alpha\beta}^- = -K_{\alpha\beta}^+, \quad (6.11)$$

und der äußere Krümmungstensor ergibt sich eindeutig aus der Materieverteilung auf der Brane:⁵⁵

$$K_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\kappa_5(\tau_{\alpha\beta} - \frac{1}{3}\tau g_{\alpha\beta}) = -\frac{1}{2}\kappa_5[T_{\alpha\beta} + \frac{1}{3}(\lambda - T)g_{\alpha\beta}]. \quad (6.12)$$

Schließlich erhalten wir daraus die **effektiven Feldgleichungen**

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda g_{\alpha\beta} + \kappa T_{\alpha\beta} + \frac{6\kappa}{\lambda} S_{\alpha\beta} - E_{\alpha\beta}, \quad (6.13)$$

mit

$$\Lambda := \frac{1}{2}(\Lambda_5 + \frac{1}{6}\kappa_5^2\lambda^2), \quad \kappa := \frac{1}{6}\kappa_5^2\lambda \quad (6.14)$$

und

$$S_{\alpha\beta} := \frac{1}{12}TT_{\alpha\beta} - \frac{1}{4}T_{\alpha\mu}T^\mu{}_\beta + \frac{1}{24}g_{\alpha\beta}(3T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} - T^2). \quad (6.15)$$

Die ersten beiden Summanden in (6.13) geben das Gravitationsgesetz der Allgemeinen Relativitätstheorie wieder, jedoch treten in der Branenwelt zwei Korrekturterme hinzu: $S_{\alpha\beta}$ ist quadratisch im Energie-Impuls-Tensor und macht sich bei Energiedichten bemerkbar, die in der Größenordnung der Branenspannung liegen; der projizierte Weyl-Tensor $E_{\alpha\beta}$ stellt, vom Branen-Standpunkt aus betrachtet, eine nicht-lokale Korrektur dar, denn er enthält Informationen über das Gravitationsfeld außerhalb der Brane – z.B. sich durch den Bulk ausbreitende Gravitationswellen. Im Grenzfall

$$\lambda \rightarrow \infty, \quad \kappa_5 \rightarrow 0, \quad E_{\alpha\beta} \rightarrow 0 \quad (6.16)$$

(mit endlichem κ) ist die Gravitation auf der Brane lokalisiert und die effektiven Feldgleichungen gehen in die Einstein-Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie über.

Man kann die Terme auf der rechte Seite von (6.13) zu einem effektiven Energie-Impuls-Tensor zusammenfassen,

$$T_{\alpha\beta}^{\text{eff}} := T_{\alpha\beta} + \frac{6}{\lambda}S_{\alpha\beta} - \frac{1}{\kappa}E_{\alpha\beta}, \quad (6.17)$$

sodass die induzierten Feldgleichungen die Form der konventionellen Einstein-Gleichungen annehmen

$$G_{\alpha\beta} = -\Lambda g_{\alpha\beta} + \kappa T_{\alpha\beta}^{\text{eff}}. \quad (6.18)$$

⁵⁵Ich verwende $K_{\alpha\beta}^+$ und lasse das +-Zeichen weg.

6.3 Ideale Flüssigkeit auf der Brane

Ich werde nun zeigen, dass für den Fall einer idealen Flüssigkeit auf der Brane auch der effektive Energie-Impuls-Tensor eine Flüssigkeit beschreibt, jedoch im Allgemeinen keine ideale. Zunächst notiere ich die allgemeine Form des Energie-Impuls-Tensors einer Flüssigkeit:

$$T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta + p h_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta} + q_\alpha u_\beta + q_\beta u_\alpha \quad (6.19)$$

mit der Massen-Energiedichte ϱ , dem isotropen Druck p , dem anisotropen Druck $\pi_{\alpha\beta}$, der 4er-Energiestromdichte q^α und der 4er-Geschwindigkeit u^α des Flüssigkeitselementes im betrachteten Raumpunkt.⁵⁶ Dabei ist

$$h_\alpha^\beta = \delta_\alpha^\beta + u_\alpha u^\beta \quad \text{bzw.} \quad h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad (6.20)$$

der Projektionstensor auf die zum 4er-Geschwindigkeitsfeld senkrechte Hyperfläche. Für eine ideale Flüssigkeit ($\pi_{\alpha\beta} = 0$, $q_\alpha = 0$) gilt

$$T_{\alpha\beta} = (\varrho + p)u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}, \quad (6.21)$$

und der Korrekturterm $S_{\alpha\beta}$ vereinfacht sich in diesem Falle zu

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{12} [\varrho^2 u_\alpha u_\beta + (\varrho^2 + 2\varrho p)h_{\alpha\beta}]. \quad (6.22)$$

Der auf die Brane projizierte Weyltensor kann ähnlich wie der Energie-Impuls-Tensor einer Flüssigkeit (6.19) zerlegt werden,

$$-\frac{1}{\kappa} E_{\alpha\beta} = \mathcal{U}(u_\alpha u_\beta + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}) + \mathcal{P}_{\alpha\beta} + \mathcal{Q}_\alpha u_\beta + \mathcal{Q}_\beta u_\alpha, \quad (6.23)$$

und beschreibt demnach ein effektives „Weyl-Fluid“⁵⁷ mit der Energiedichte \mathcal{U} , dem isotropen Druck $\frac{1}{3}\mathcal{U}$, dem anisotropen Druck $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ und der Energiestromdichte \mathcal{Q}^α :

$$\mathcal{U} := -u^\mu u^\nu E_{\mu\nu}, \quad (6.24)$$

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} := \left(\frac{1}{3}h_{\alpha\beta}h^{\mu\nu} - h_{(\alpha}^\mu h_{\beta)}^\nu\right)E_{\mu\nu}, \quad (6.25)$$

$$\mathcal{Q}_\alpha := h_\alpha^\mu u^\nu E_{\mu\nu}. \quad (6.26)$$

Schließlich ergibt sich aus (6.21), (6.22) und (6.23) ein effektiver Energie-Impuls-Tensor, der ebenfalls wie der einer Flüssigkeit aussieht:

$$T_{\alpha\beta}^{\text{eff}} = \varrho^{\text{eff}}u_\alpha u_\beta + p^{\text{eff}}h_{\alpha\beta} + \pi_{\alpha\beta}^{\text{eff}} + q_\alpha^{\text{eff}}u_\beta + q_\beta^{\text{eff}}u_\alpha \quad (6.27)$$

⁵⁶ $\pi_{\alpha\beta}$ ist der spurfreie Anteil des räumlichen Spannungstensors, ausgedrückt in raumzeitlichen Koordinaten.

⁵⁷ Man spricht auch von „Dunkler Strahlung“, da zwischen der Weyl-Energiedichte $\varrho^* = \mathcal{U}$ und dem isotropen Weyl-Druck $p^* = \frac{1}{3}\mathcal{U}$ eine Strahlungs-Zustandsgleichung $p^* = \frac{1}{3}\varrho^*$ besteht.

mit

$$\varrho^{\text{eff}} := \varrho + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \mathcal{U}, \quad (6.28)$$

$$p^{\text{eff}} := p + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \frac{\mathcal{U}}{3}, \quad (6.29)$$

$$\pi_{\alpha\beta}^{\text{eff}} := \mathcal{P}_{\alpha\beta}, \quad (6.30)$$

$$q_{\alpha}^{\text{eff}} := \mathcal{Q}_{\alpha}. \quad (6.31)$$

Aufgrund der im Allgemeinen nicht verschwindenden Weyl-Terme $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$ und \mathcal{Q}_{α} können effektive Anisotropien auftreten, auch wenn die Materie auf der Brane eine ideale Flüssigkeit ist.

Die Form des effektiven Energie-Impuls-Tensors (6.27) bleibt erhalten, wenn die Materie auf der Brane durch den allgemeineren Energie-Impuls-Tensor (6.19) beschrieben wird; allerdings ergeben sich dann kompliziertere Ausdrücke für die effektiven Größen (6.28)–(6.31).⁵⁸

6.4 Energie-Impuls-Erhaltung auf der Brane

Auf der Brane gibt es zwei **Energie-Impuls-Erhaltungssätze**,

$$\nabla_{\alpha} T_{\text{eff}}^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla_{\alpha} T^{\alpha\beta} = 0. \quad (6.32)$$

Die erste Gleichung folgt aus der Bianchi-Identität $\nabla_{\alpha} G^{\alpha\beta} = 0$ und den effektiven Feldgleichungen (6.18). Der zweite Erhaltungssatz ist eine Implikation der kontrahierten Codacci-Relation (5.45), den Bulk-Feldgleichungen (6.1) und dem aus der Z_2 -Symmetrie folgenden äußeren Krümmungstensor (6.12); dies rechnet man wie folgt nach:

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla}_A \widehat{K}_B^A - \widehat{\nabla}_B \widehat{K} &= P_B^C n^D R_{CD} \\ &= P_B^C n^D \left(\frac{1}{2} {}^{(5)}R g_{CD} - \Lambda_5 g_{CD} + \kappa_5 T_{CD} \right) \\ &= P_B^C n^D g_{CD} \left(\frac{1}{2} {}^{(5)}R - \Lambda_5 \right) + \kappa_5 \delta(\chi) \underbrace{\widehat{\tau}_{CD} n^D}_{=0} P_B^C \\ &= \underbrace{P_B^C n_C}_{=0} \left(\frac{1}{2} {}^{(5)}R - \Lambda_5 \right) = 0. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Da in dieser Gleichung nur noch Tensoren der Brane auftreten, können wir sie auch in Branen-Koordinaten ausdrücken

$$\nabla_{\alpha} K_{\beta}^{\alpha} - \nabla_{\beta} K = 0. \quad (6.34)$$

Hebt man den Index β (durch Multiplikation mit $g^{\beta\gamma}$, Summation über β und Umbenennung $\gamma \rightarrow \beta$) und setzt den äußeren Krümmungstensor (6.12) sowie

⁵⁸Siehe Maartens [33].

dessen Spur $K = -\frac{1}{2}\kappa_5(\frac{4}{3}\lambda - \frac{1}{3}T)$ ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 0 &= \nabla_\alpha K^{\alpha\beta} - \nabla^\beta K \\
 &= -\frac{1}{2}\kappa_5 [\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} - \frac{1}{3}g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha T + \frac{1}{3}\nabla^\beta T] \\
 &= -\frac{1}{2}\kappa_5 \nabla_\alpha T^{\alpha\beta},
 \end{aligned} \tag{6.35}$$

also die Erhaltung des Energie-Impulstensors, $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$.

7 Sterne in der Branenwelt

7.1 Stellare Strukturgleichungen

In Kapitel 3 betrachteten wir relativistische Sterne, deren Struktur durch die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen beschrieben werden. Diese folgen aus den Einstein'schen Feldgleichungen unter der Bedingung, dass der metrische Tensor und der Energie-Impuls-Tensor zeitunabhängig und symmetrisch bezüglich räumlicher Drehungen um den Koordinatenursprung sind, und die Sternmaterie als ideale Flüssigkeit modelliert werden kann. Ich werde nun untersuchen, inwiefern sich die stellaren Strukturgleichungen ändern, wenn die modifizierten Einsteingleichungen

$$G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}^{\text{eff}}, \quad T_{\alpha\beta}^{\text{eff}} := T_{\alpha\beta} + \frac{6}{\lambda} S_{\alpha\beta} - \frac{1}{\kappa} E_{\alpha\beta} \quad (7.1)$$

zugrunde gelegt werden.⁵⁹ Die Branen-Metrik und der Energie-Impuls-Tensor auf der Brane mögen weiterhin die Bedingungen der Statik und Kugelsymmetrie erfüllen, sodass für das Linienelement in Schwarzschild-Koordinaten $(t, r, \vartheta, \varphi)$ der Ansatz (3.6) gewählt werden kann:

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + e^{2\Lambda(r)} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (7.2)$$

Der metrische Tensor hat demnach die Form

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (7.3)$$

und folglich sind die Christoffelsymbole, die Komponenten des Riemann-, Ricci- und Einsteintensors sowie der Ricciskalar dieselben wie im relativistischen Fall.⁶⁰ Der Stern bestehe aus einer idealen Flüssigkeit, beschrieben durch den Energie-Impuls-Tensor $T_{\alpha\beta} = \varrho u_\alpha u_\beta + p h_{\alpha\beta}$, in Matrixschreibweise

$$T_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \varrho e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Damit lautet der $S_{\alpha\beta}$ -Korrekturterm $S_{\alpha\beta} = \frac{1}{12} [\varrho^2 u_\alpha u_\beta + (\varrho^2 + 2\varrho p) h_{\alpha\beta}]$, bzw.

$$S_{\alpha\beta} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} \varrho^2 e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\varrho^2 + 2\varrho p) e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\varrho^2 + 2\varrho p) r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\varrho^2 + 2\varrho p) r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (7.5)$$

⁵⁹Ich gehe davon aus, dass die kosmologische Konstante auf der Brane vernachlässigt werden kann.

⁶⁰Siehe (3.9)–(3.13) auf Seite 34.

Der zweite Korrekturterm, der projizierte Weyl-Tensor (6.23), vereinfacht sich unter den Annahmen der Statik und Kugelsymmetrie, da diese

$$\mathcal{Q}_\alpha = 0 \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_{\alpha\beta} = \mathcal{P}(r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}) \quad (7.6)$$

zur Folge haben, wobei $r_\alpha = e^\Lambda \delta_\alpha^r$ der auf Eins normierte Radialvektor ist. Er lautet somit $-\frac{1}{\kappa}E_{\alpha\beta} = \mathcal{U}(u_\alpha u_\beta + \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}) + \mathcal{P}(r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta})$, oder

$$-\frac{1}{\kappa}E_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{U}e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(\mathcal{U} + 2\mathcal{P})e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(\mathcal{U} - \mathcal{P})r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3}(\mathcal{U} - \mathcal{P})r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

(7.4), (7.5) und (7.7) ergeben zusammen den effektiven Energie-Impuls-Tensor (6.17) für den Fall einer idealen Flüssigkeit auf der Brane:

$$T_{\alpha\beta}^{\text{eff}} = \left(\varrho + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \mathcal{U} \right) u_\alpha u_\beta + \left(p + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \frac{\mathcal{U} - \mathcal{P}}{3} \right) h_{\alpha\beta} + \mathcal{P}r_\alpha r_\beta. \quad (7.8)$$

Als Matrix geschrieben lautet er

$$T_{\alpha\beta}^{\text{eff}} = \begin{pmatrix} \varrho^{\text{eff}}e^{2\Phi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_\perp^{\text{eff}}e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\parallel^{\text{eff}}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\parallel^{\text{eff}}r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}, \quad (7.9)$$

mit den Abkürzungen

$$\varrho^{\text{eff}} := \varrho + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \mathcal{U}, \quad (7.10)$$

$$p_\perp^{\text{eff}} := p + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \frac{\mathcal{U} + 2\mathcal{P}}{3}, \quad (7.11)$$

$$p_\parallel^{\text{eff}} := p + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \frac{\mathcal{U} - \mathcal{P}}{3} = p_\perp^{\text{eff}} - \mathcal{P}. \quad (7.12)$$

Setzt man diesen effektiven Energie-Impuls-Tensor zusammen mit dem Einstein-tensor (3.13) in $G_{\alpha\beta} = \kappa T_{\alpha\beta}^{\text{eff}}$ ein, so erhält man die drei Gleichungen

$$(2r\Lambda' - 1 + e^{2\Lambda})e^{-2\Lambda} = \kappa r^2 \varrho^{\text{eff}}, \quad (7.13)$$

$$(2r\Phi' + 1 - e^{2\Lambda})e^{-2\Lambda} = \kappa r^2 p_\perp^{\text{eff}}, \quad (7.14)$$

$$\left(\Phi'' + \Phi'^2 - \Phi'\Lambda' + \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} \right) e^{-2\Lambda} = \kappa p_\parallel^{\text{eff}}, \quad (7.15)$$

die eine Verallgemeinerung von (3.22)–(3.24) darstellen. Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 3.2, leiten sich daraus die Branen-TOV-Gleichungen ab. Zunächst schreibe ich (7.13) wie folgt um (mit $\kappa = 8\pi G$)

$$8\pi G r^2 \varrho^{\text{eff}} = 1 - e^{-2\Lambda} + 2r\Lambda'e^{-2\Lambda} = \left[r(1 - e^{-2\Lambda}) \right]' \quad (7.16)$$

und führe die Bezeichnung

$$r(1 - e^{-2\Lambda}) =: 2G\tilde{m}(r) \quad \curvearrowright \quad e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2G\tilde{m}(r)}{r} \quad (7.17)$$

ein. Daraus folgt die erste Branen-TOV-Gleichung

$$\tilde{m}'(r) = 4\pi r^2 \varrho^{\text{eff}}, \quad (7.18)$$

deren formale Lösung die effektive Masse liefert:

$$\tilde{m}(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \left(\varrho + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \mathcal{U} \right). \quad (7.19)$$

Darin wurde die Integrationskonstante $\tilde{m}(0)$ mit dem gleichen Argument Null gesetzt wie die totale Masse $m(0)$ im relativistischen Fall.⁶¹ Umstellen von (7.14) nach Φ' und Einsetzen von (7.17) liefert die zweite Branen-TOV-Gleichung

$$\Phi' = \frac{G\tilde{m} + 4\pi G r^3 p_{\perp}^{\text{eff}}}{r(r - 2G\tilde{m})}. \quad (7.20)$$

Die dritte Branen-TOV-Gleichung ergibt sich aus der Kombination von (7.13)–(7.15). Man stellt zunächst (7.13) und (7.14) wie folgt um

$$2r\Lambda' = (\kappa r^2 \varrho^{\text{eff}} - 1)e^{2\Lambda} + 1, \quad (7.21)$$

$$2r\Phi' = (\kappa r^2 p_{\perp}^{\text{eff}} + 1)e^{2\Lambda} - 1, \quad (7.22)$$

leitet (7.22) nach r ab und löst nach Φ'' auf

$$\Phi'' = 2\Phi'\Lambda' - \frac{\Phi' - \Lambda'}{r} + [\kappa p_{\perp}^{\text{eff}} + \frac{1}{2} \kappa r (p_{\perp}^{\text{eff}})'] e^{2\Lambda}. \quad (7.23)$$

In (7.15) eingesetzt, ergibt sich

$$\kappa p_{\parallel}^{\text{eff}} e^{2\Lambda} = \kappa (p_{\perp}^{\text{eff}} - \mathcal{P}) e^{2\Lambda} = \Phi'^2 + \Phi'\Lambda' + [\kappa p_{\perp}^{\text{eff}} + \frac{1}{2} \kappa r (p_{\perp}^{\text{eff}})'] e^{2\Lambda}, \quad (7.24)$$

und daraus die Branen-TOV-Gleichung

$$\begin{aligned} (p_{\perp}^{\text{eff}})' + \frac{2\mathcal{P}}{r} &= -\frac{\Phi'^2 + \Phi'\Lambda'}{\frac{1}{2} \kappa r e^{2\Lambda}} = -\frac{2r\Phi' + 2r\Lambda'}{\kappa r^2 e^{2\Lambda}} \Phi' \\ &= -\frac{(\kappa r^2 p_{\perp}^{\text{eff}} + 1)e^{2\Lambda} - 1 + (\kappa r^2 \varrho^{\text{eff}} - 1)e^{2\Lambda} + 1}{\kappa r^2 e^{2\Lambda}} \Phi' \\ &= -(\varrho^{\text{eff}} + p_{\perp}^{\text{eff}}) \Phi'. \end{aligned} \quad (7.25)$$

⁶¹Siehe Fußnote 37 auf Seite 36.

Man kann diese Gleichung alternativ auch aus der Erhaltung des effektiven Energie-Impuls-Tensors $\nabla_\alpha T_{\text{eff}}^{\alpha\beta} = 0$ herleiten. Die Rechnung erfolgt völlig analog zu (3.41) auf Seite 38:

$$\begin{aligned}
0 &\stackrel{!}{=} \partial_r T_{\text{eff}}^{rr} + (\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{rr}^r + \Gamma_{\vartheta r}^\vartheta + \Gamma_{\varphi r}^\varphi) T_{\text{eff}}^{rr} \\
&\quad + \Gamma_{tt}^r T_{\text{eff}}^{tt} + \Gamma_{rr}^r T_{\text{eff}}^{rr} + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r T_{\text{eff}}^{\vartheta\vartheta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r T_{\text{eff}}^{\varphi\varphi} \\
&= \partial_r (p_\perp^{\text{eff}} e^{-2\Lambda}) + (\Phi' + \Lambda' + r^{-1} + r^{-1}) p_\perp^{\text{eff}} e^{-2\Lambda} \\
&\quad + \Phi' e^{2(\Phi-\Lambda)} \varrho^{\text{eff}} e^{-2\Phi} + \Lambda' p_\perp^{\text{eff}} e^{-2\Lambda} \\
&\quad - r e^{-2\Lambda} p_\parallel^{\text{eff}} r^{-2} - r e^{-2\Lambda} \sin^2 \vartheta p_\parallel^{\text{eff}} r^{-2} \sin^{-2} \vartheta \\
&= [(p_\perp^{\text{eff}})' - 2\Lambda' p_\perp^{\text{eff}} + (\Phi' + \Lambda' + 2r^{-1}) p_\perp^{\text{eff}} + \Phi' \varrho^{\text{eff}} + \Lambda' p_\perp^{\text{eff}} - 2p_\parallel^{\text{eff}} r^{-1}] e^{-2\Lambda} \\
&= [(p_\perp^{\text{eff}})' + (\varrho^{\text{eff}} + p_\perp^{\text{eff}}) \Phi' + 2\mathcal{P} r^{-1}] e^{-2\Lambda}. \tag{7.26}
\end{aligned}$$

Im Unterschied zum allgemeinrelativistischen Fall gilt in der Branenwelt noch eine weitere Erhaltungsgleichung, nämlich $\nabla_\alpha T^{\alpha\beta} = 0$. Diese hat, wie in (3.41) vorgerechnet, die konventionelle TOV-Gleichung

$$p' = -(\varrho + p)\Phi' \tag{7.27}$$

zur Folge, die demnach auch in der Branenwelt noch gültig ist. Insgesamt erhalten wir somit die vier **Branen-TOV-Gleichungen**

$$\tilde{m}' = 4\pi r^2 \left(\varrho + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \mathcal{U} \right), \tag{7.28}$$

$$\Phi' = \frac{G\tilde{m} + 4\pi G r^3 \left[p + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \frac{1}{3}(\mathcal{U} + 2\mathcal{P}) \right]}{r(r - 2G\tilde{m})}, \tag{7.29}$$

$$\mathcal{U}' = -2\mathcal{P}' - \frac{6\mathcal{P}}{r} - (4\mathcal{U} + 2\mathcal{P})\Phi' - 3\frac{\varrho + p}{\lambda} \varrho', \tag{7.30}$$

$$p' = -(\varrho + p)\Phi' \tag{7.31}$$

und das Linienelement

$$ds^2 = -e^{2\Phi(r)} dt^2 + \left(1 - \frac{2G\tilde{m}(r)}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \tag{7.32}$$

Dabei ergibt sich Gleichung (7.30) wie folgt aus (7.25):

$$\begin{aligned}
-\frac{2\mathcal{P}}{r} &= (p_\perp^{\text{eff}})' + (\varrho^{\text{eff}} + p_\perp^{\text{eff}}) \Phi' \\
&= p' + \frac{1}{\lambda} (p' \varrho + p \varrho' + \varrho \varrho') + \frac{1}{3} (\mathcal{U}' + 2\mathcal{P}') \\
&\quad + \left[\varrho + p + \frac{1}{\lambda} \varrho(\varrho + p) + \frac{1}{3} (4\mathcal{U} + 2\mathcal{P}) \right] \Phi' \\
&= \underbrace{p' + (\varrho + p)\Phi'}_{=0} + \frac{1}{\lambda} \varrho \left[\underbrace{p' + (\varrho + p)\Phi'}_{=0} \right] \\
&\quad + \frac{1}{3} (\mathcal{U}' + 2\mathcal{P}') + \frac{1}{3} (4\mathcal{U} + 2\mathcal{P}) \Phi' + \frac{1}{\lambda} (\varrho + p) \varrho', \tag{7.33}
\end{aligned}$$

worin die Terme über den geschweiften Klammern gemäß (7.27) verschwinden.

Vergleicht man die Branen-TOV-Gleichungen (7.28)–(7.31) mit den TOV-Gleichungen (3.14)–(3.16) der Allgemeinen Relativitätstheorie, so ergeben sich die folgenden Unterschiede:

1. Wir sahen in Kapitel 3, dass eine relativistische Behandlung der Sternstruktur eine Uminterpretation des Masse-Begriffes zur Folge hat. Es ist weder die Newton'sche Masse (3.28), noch deren relativistisches Analogon, die Ruhemasse (3.29), noch die gravitative Masse-Energie (3.30), die in die Strukturgleichungen einfließt und letztlich messbar ist, sondern die totale Masse (3.27)

$$m(r) = 4\pi \int_0^r dr r^2 \varrho. \quad (7.34)$$

In der Branenwelt findet eine weitere **Uminterpretation der Masse** statt. Physikalische Relevanz als Masse-Energie des Sterns hat die in den Branen-TOV-Gleichungen und dem Linienelement auftretende effektive Masse (7.19)

$$\tilde{m}(r) = m(r) + 4\pi \int_0^r dr r^2 \left(\frac{\varrho^2}{2\lambda} + \mathcal{U} \right). \quad (7.35)$$

Für Sterne in der Branenwelt ergeben sich daraus zwei Unterschiede zu ihren relativistischen Pendanten: Zum einen hat im Allgemeinen die effektive Gesamtmasse $\tilde{M} := \tilde{m}(R)$ eines Branensterns einen anderen Wert als die totale Masse $M := m(R)$ eines ansonsten gleich beschaffenen relativistischen Sterns; zum anderen kann der Einfluss des in \tilde{m} auftretenden \mathcal{U} -Terms ein gänzlich anderes Verhalten der Außenraumlösung bewirken, nämlich Lösungen mit variierender Massenfunktion $\tilde{m}(r) \neq \text{const.}$ Die beiden letztgenannten Punkte sind die wesentlichen Resultate dieser Diplomarbeit und werden in den folgenden Abschnitten ausführlicher behandelt.

2. Aus der Kombination von (7.29) mit (7.31) erhält man eine modifizierte Gleichung des **hydrostatischen Gleichgewichts** des Sterns

$$p' = - \frac{(\varrho + p)(G\tilde{m} + 4\pi Gr^3 [p + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \frac{1}{3}(\mathcal{U} + 2\mathcal{P})])}{r(r - 2G\tilde{m})}, \quad (7.36)$$

welche im Limes $\lambda \rightarrow \infty$, $\kappa_5 \rightarrow 0$, $E_{\alpha\beta} \rightarrow 0$ (mit endlichem κ) in den allgemeinrelativistischen Ausdruck (3.42) übergeht

$$p' = - \frac{(\varrho + p)(Gm + 4\pi Gr^3 p)}{r(r - 2Gm)}. \quad (7.37)$$

Die darin auftretenden Druck-Korrekturen $p\varrho/\lambda$ und $\varrho^2/2\lambda$ sind positiv und bewirken – für sich genommen – einen größeren Betrag des Druckgradienten, d.h. eine stärkere Komprimierung der Materie und somit eine Reduktion des Sternradius im Vergleich zum relativistischen Fall. Der Einfluss dieser lokalen

Korrekturterme wird, je nach Vorzeichen des Weyl-Terms $\frac{1}{3}(\mathcal{U} + 2\mathcal{P})$, verstärkt, unterdrückt oder ins Gegenteil verkehrt.

3. Die konventionellen TOV-Gleichungen ergeben zusammen mit einer Zustandsgleichung der Materie ein geschlossenes System aus vier Gleichungen für die vier unbekannt Funktionen $m(r)$, $\varrho(r)$, $p(r)$ und $\Phi(r)$. Die Branen-TOV-Gleichungen stellen hingegen ein **unterbestimmtes Gleichungssystem** dar: fünf Gleichungen für sechs unbekannt Funktionen $\tilde{m}(r)$, $\varrho(r)$, $p(r)$, $\Phi(r)$ und die beiden Weyl-Terme $\mathcal{U}(r)$ und $\mathcal{P}(r)$. Um das Gleichungssystem zu schließen, muss eine zusätzliche Bedingung für die Weyl-Terme \mathcal{U} und/oder \mathcal{P} gegeben sein.

7.2 Methode der Weyl-Zustandsgleichung

Wie im letzten Abschnitt erwähnt, bilden die Branen-TOV-Gleichungen kein geschlossenes Gleichungssystem. Zur Lösung dieses Problems wurden verschiedene Ansätze vorgeschlagen:

Germani & Maartens [34] untersuchen zwei Fälle: Verschwindende Weyl-Terme im Inneren des Sterns, $\mathcal{U}^- = 0$, $\mathcal{P}^- = 0$ und verschwindende Weyl-Terme im Außenbereich, $\mathcal{U}^+ = 0$, $\mathcal{P}^+ = 0$. Den ersten Fall wenden sie auf Sterne homogener Dichte an und leiten eine innere Lösung her sowie zwei äußere Lösungen, die sich beide von der äußeren Schwarzschild-Lösung unterscheiden. Der zweiten Fall führt, ebenfalls auf Sterne homogener Dichte angewandt, zu einer inneren Lösung, die im Außenbereich in die Schwarzschild-Metrik übergeht.

Ovalle [35] schlägt vor, eine zusätzliche Bedingung für \mathcal{U} und \mathcal{P} aus der Forderung abzuleiten, dass jede Lösung der Branen-TOV-Gleichungen die Gestalt $e^{-2\Lambda} = 1 - \frac{2Gm(r)}{r} + \frac{1}{\lambda}$ (Bulkeffekte) mit der totalen Masse (7.34) haben sollte, was im Limes $\lambda \rightarrow \infty$ offensichtlich in die Allgemeine Relativitätstheorie übergeht. In einem nachfolgenden Aufsatz [36] konstruiert er mit dieser Methode eine analytische, innere Lösung für Sterne mit inhomogener Dichteverteilung. Er verwendet allerdings keine realistische Zustandsgleichung der Sternmaterie, sondern wählt Potenzreihenansätze für $\varrho(r)$ und $p(r)$, die zu analytisch lösbaaren Integralen führen.

Deruelle [37] wählt den Ansatz $\mathcal{P} = -\frac{3\alpha+2}{4}\mathcal{U}$ mit einem Parameter α und löst damit die Branen-TOV-Gleichungen für Sterne mit homogener Dichte.⁶²

Einen ähnlichen Ansatz verwendet Whisker in seiner Doktorarbeit [38]. Er fordert $\mathcal{P} = \frac{\gamma-1}{2}\mathcal{U}$ und wendet dies auf Schwarze Löcher auf der Brane an, betrachtet also Vakuum-Lösungen der Branen-TOV-Gleichungen.

In dieser Arbeit folge ich Deruelle und Whisker und nehme an, dass die beiden Weyl-Terme \mathcal{U} und \mathcal{P} eine Art Zustandsgleichung der Form

$$\mathcal{P} = w\mathcal{U} \tag{7.38}$$

erfüllen. Es sei betont, dass dies nicht die Zustandsgleichung zwischen der Ener-

⁶²Ich habe die Notation von Deruelle an die hier verwendete angepasst.

giedichte $\varrho^* = \mathcal{U}$ und dem isotropen Druck $p^* = \frac{1}{3}\mathcal{U}$ des Weyl-Fluids ist, die bereits durch (6.23) festgelegt wird: $p^* = \frac{1}{3}\varrho^*$. Durch Gleichung (7.38) wird vielmehr eine Beziehung zwischen den isotropen und anisotropen Anteilen des Weyl-Drucks hergestellt:⁶³

$$\mathcal{P}_t^t = 0, \quad \mathcal{P}_r^r = \frac{2}{3}w\mathcal{U} = 2wp^*, \quad \mathcal{P}_\vartheta^\vartheta = \mathcal{P}_\varphi^\varphi = -\frac{1}{3}w\mathcal{U} = -wp^*. \quad (7.41)$$

Unter dieser Annahme bilden die Branen-TOV-Gleichungen zusammen mit einer Zustandsgleichung der Sternmaterie ein geschlossenes Gleichungssystem. Sie lauten:

$$\tilde{m}' = 4\pi r^2 \left(\varrho + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \mathcal{U} \right), \quad (7.42)$$

$$\Phi' = \frac{G\tilde{m} + 4\pi Gr^3 \left[p + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{\varrho^2}{2\lambda} + \frac{1+2w}{3}\mathcal{U} \right]}{r(r - 2G\tilde{m})}, \quad (7.43)$$

$$\mathcal{U}' = -\frac{3}{1+2w} \left[2w\mathcal{U}r^{-1} + \frac{2}{3}(2+w)\mathcal{U}\Phi' + \frac{1}{\lambda}(\varrho + p)\varrho' \right], \quad (7.44)$$

$$p' = -(\varrho + p)\Phi'. \quad (7.45)$$

Wie man sieht, verschwindet der \mathcal{U} -Korrekturterm in (7.43) für $w = -1/2$, jedoch muss dieser Fall ausgeschlossen werden, da sonst Gleichung (7.44) nicht definiert ist. Des weiteren fällt auf, dass im Falle $w = -2$ der Φ' -Term in (7.44) verschwindet, sodass das Gleichungssystem im Außenbereich, wo außerdem der ϱ' -Term Null ist, leicht analytisch lösbar wird, was ich im nächsten Kapitel vorrechnen werde. Der Fall $w = 0$ entspricht einem idealen Weyl-Fluid mit verschwindendem anisotropen Weyl-Druck $\mathcal{P}_{\alpha\beta}$. Die numerische Berechnung wird zeigen, dass dieser Fall jedoch ein sehr ungewöhnliches Verhalten der effektiven Masse zur Folge hat, nämlich ein – für Branenspannungen $\lambda \lesssim 10^{38}$ dyn/cm² sehr starkes – Anwachsen der Masse im Außenbereich des Sterns.⁶⁴

In Abgrenzung zu den bisher durchgeführten Untersuchungen über Sterne in der Branenwelt beschränke ich mich in der vorliegenden Arbeit nicht auf Sterne

⁶³Dies sieht man wie folgt. Gemäß (7.6) lautet der anisotrope Weyl-Druck

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta} = \mathcal{P}(r_\alpha r_\beta - \frac{1}{3}h_{\alpha\beta}) = \mathcal{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}e^{2\Lambda} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3}r^2 \sin^2 \vartheta \end{pmatrix}. \quad (7.39)$$

Hebt man den Index β und setzt (7.38) ein, ergibt sich

$$\mathcal{P}_\alpha^\beta = \mathcal{P}_{\alpha\gamma} g^{\gamma\beta} = \mathcal{P} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} w\mathcal{U} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad (7.40)$$

⁶⁴Siehe Abbildung 44–46 auf Seite 98 ff.

konstanter Dichte, sondern verwende Zustandsgleichungen, die dem inhomogenen Dichteverlauf im Inneren des Sterns Rechnung tragen.⁶⁵ Dies ist insbesondere deshalb interessant, weil der Dichtegradient in der Differentialgleichung für \mathcal{U} (7.44) als Quellterm auftritt.

7.3 Analytische Außenraumlösung für $w = -2$

Außerhalb des Sterns gilt $\varrho = 0$ und $p = 0$. Für den Fall, dass die Weyl-Terme eine Zustandsgleichung $\mathcal{P} = w\mathcal{U}$ mit $w = -2$ erfüllen, vereinfachen sich die Branen-TOV-Gleichungen im Außenbereich zu

$$\tilde{m}' = 4\pi r^2 \mathcal{U}, \quad (7.46)$$

$$\Phi' = \frac{G\tilde{m} - 4\pi Gr^3 \mathcal{U}}{r(r - 2G\tilde{m})}, \quad (7.47)$$

$$\mathcal{U}' = -\frac{4\mathcal{U}}{r}. \quad (7.48)$$

Diese Gleichungen können problemlos analytisch gelöst werden. Die Integration von Gleichung (7.48) liefert

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{U}}{dr} = -\frac{4\mathcal{U}}{r} &\quad \leadsto \quad \int_R^r \frac{d\mathcal{U}}{\mathcal{U}} = -4 \int_R^r \frac{dr}{r} \quad \leadsto \quad \ln\left(\frac{\mathcal{U}(r)}{\mathcal{U}(R)}\right) = \ln\left(\frac{r}{R}\right)^{-4} \\ &\quad \leadsto \quad \mathcal{U}(r) = \mathcal{U}(R) \left(\frac{R}{r}\right)^4, \end{aligned} \quad (7.49)$$

und in (7.46) eingesetzt ergibt sich die effektive Masse

$$\begin{aligned} \tilde{m}' = 4\pi \mathcal{U}(R) \frac{R^4}{r^2} &\quad \leadsto \quad \tilde{m}(r) - \tilde{m}(R) = 4\pi \mathcal{U}(R) R^4 \int_R^r \frac{dr}{r^2} \\ &\quad \leadsto \quad \tilde{m}(r) = \tilde{m}(R) + 4\pi \mathcal{U}(R) R^4 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right). \end{aligned} \quad (7.50)$$

Für Φ wähle ich den Ansatz

$$e^{2\Phi} = 1 - \frac{2G\tilde{m}(r)}{r}. \quad (7.51)$$

Differentiation nach r zeigt, dass damit (7.47) erfüllt ist:

$$\begin{aligned} 2\Phi' e^{2\Phi} &= \frac{2G\tilde{m}}{r^2} - \frac{2G\tilde{m}'}{r} = \frac{2G\tilde{m}}{r^2} - 8\pi Gr\mathcal{U} \\ \leadsto \quad \Phi' &= \frac{\frac{G\tilde{m}}{r^2} - 4\pi Gr\mathcal{U}}{1 - \frac{2G\tilde{m}}{r}} = \frac{G\tilde{m} - 4\pi Gr^3 \mathcal{U}}{r(r - 2G\tilde{m})}. \end{aligned} \quad (7.52)$$

⁶⁵Die Annahme konstanter Dichte liegt auch der Arbeit von Azam & Sami [39] zugrunde. Ponce de Leon [40], [41] geht sogar von einer konstanten effektiven Dichte (7.10) aus. Wiseman [42] setzt für die Energiedichte im Stern die Funktion $\varrho(r) = \varrho_c \exp(- (r/\xi)^{10})$ an, was einer nahezu konstanten Dichte im Inneren des Sterns entspricht, die am Rand sehr abrupt, aber stetig, zu Null wird. Creek et al. [43] verwenden eine Zustandsgleichung der Form $p(r) = w(r)\varrho(r)$.

Mit (7.51) hat das Linienelement somit in jedem Punkt $r > R$, d.h. überall auf der durch r gegebenen Kugelschale, die Form des Schwarzschild'schen Linienelementes (3.50)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2G\tilde{m}}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G\tilde{m}}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (7.53)$$

jedoch ist die darin auftretende Masse \tilde{m} nicht die konstante Gesamtmasse $\tilde{m}(R)$ des Sterns wie in der äußeren Schwarzschild-Lösung, sondern eine Funktion des Radius r . Schreibt man mit (7.50) die r -Abhängigkeit explizit aus, so ergeben sich die metrischen Funktionen

$$\begin{aligned} e^{2\Phi} = e^{-2\Lambda} &= 1 - \frac{2G\tilde{m}}{r} \\ &= 1 - \frac{2G[\tilde{m}(R) + 4\pi\mathcal{U}(R)R^4(\frac{1}{R} - \frac{1}{r})]}{r} \\ &= 1 - \frac{2G[\tilde{m}(R) + 4\pi\mathcal{U}(R)R^3]}{r} + \frac{8\pi G\mathcal{U}(R)R^4}{r^2} \\ &= 1 - \frac{2G\tilde{m}_\infty}{r} + \frac{Q}{r^2} \end{aligned} \quad (7.54)$$

mit

$$\tilde{m}_\infty := \tilde{m}(R) + 4\pi\mathcal{U}(R)R^3, \quad Q := \kappa\mathcal{U}(R)R^4, \quad (7.55)$$

und das Linienelement lautet

$$\begin{aligned} ds^2 &= -\left(1 - \frac{2G\tilde{m}_\infty}{r} + \frac{Q}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G\tilde{m}_\infty}{r} + \frac{Q}{r^2}\right)^{-1} dr^2 \\ &\quad + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Diese Lösung hat formale Ähnlichkeit mit der Reissner-Nordström-Metrik [44], [45] einer elektrischen Punktladung, mit dem Unterschied, dass in (7.56) die „Ladung“ Q linear auftritt, statt quadratisch wie in der Reissner-Nordström-Lösung.⁶⁶ Für $Q = 0$, d.h. verschwindendem Weyl- \mathcal{U} am Sternrand, ist (7.56)

⁶⁶Auf Schwarze Löcher angewandt, ist ein Charakteristikum der Lösung (7.56) für $Q > 0$ das Auftreten zweier Ereignishorizonte bei den Nullstellen von $e^{-2\Lambda}$,

$$r_\pm = G\tilde{m}_\infty \pm \sqrt{G^2\tilde{m}_\infty^2 - Q}, \quad 0 \leq r_- \leq r_+ \leq r_S := 2G\tilde{m}_\infty, \quad (7.57)$$

die beide innerhalb des Schwarzschildradius liegen. In der Branenwelt gibt es zusätzlich den Fall $Q < 0$, der in der Reissner-Nordström-Lösung aufgrund der quadratisch auftretenden Ladung ausgeschlossen ist. Dies hat zur Folge, dass es nur noch einen Horizont gibt (der andere wäre negativ), der außerhalb des Schwarzschildradius liegt:

$$r_+ = G\tilde{m}_\infty + \sqrt{G^2\tilde{m}_\infty^2 + |Q|} > r_S. \quad (7.58)$$

Der Horizont des Schwarzen Loches hat dann eine größere Oberfläche als im Schwarzschild-Fall; d.h. die Bulkeffekte erhöhen die Entropie und verringern die Temperatur des Schwarzen Loches. Siehe Dadhich et al. [46].

mit der Schwarzschild-Metrik identisch. Eine numerische Berechnung wird jedoch zeigen, dass für $w = -2$ im Allgemeinen $\mathcal{U}(R) < 0$ und somit $Q < 0$ gilt.⁶⁷ Folglich nimmt die effektive Masse im Außenbereich des Sterns ab. Gemäß Gleichung (7.50) strebt sie mit r^{-1} ihrem Grenzwert $\tilde{m}_\infty < \tilde{m}(R)$ entgegen.

7.4 Numerische Lösung der Branen-TOV-Gleichungen

Für eine gegebene Zustandsgleichung $p = p(\varrho)$ der Sternmaterie und der Bedingung $\mathcal{P} = w\mathcal{U}$ erhalten wir aus den Branen-TOV-Gleichungen ein geschlossenes System gewöhnlicher Differentialgleichungen,

$$\tilde{m}' = 4\pi r^2 \left(\varrho + \frac{c^2 \varrho^2}{2\lambda} + \frac{\mathcal{U}}{c^2} \right), \quad (7.59)$$

$$p' = - \frac{(c^2 \varrho + p) (G\tilde{m} + 4\pi Gr^3 [\frac{p}{c^2} + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{c^2 \varrho^2}{2\lambda} + \frac{1+2w}{3c^2} \mathcal{U}])}{r(c^2 r - 2Gm)}, \quad (7.60)$$

$$\varrho' = - \frac{(c^2 \varrho + p) (G\tilde{m} + 4\pi Gr^3 [\frac{p}{c^2} + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{c^2 \varrho^2}{2\lambda} + \frac{1+2w}{3c^2} \mathcal{U}])}{r(c^2 r - 2Gm)} \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right)^{-1}, \quad (7.61)$$

$$\mathcal{U}' = - \frac{3}{1+2w} [2w\mathcal{U}r^{-1} + \frac{2}{3}(2+w)\mathcal{U}\Phi' + \frac{c^2}{\lambda}(c^2 \varrho + p)\varrho'], \quad (7.62)$$

$$\Phi' = \frac{G\tilde{m} + 4\pi Gr^3 [\frac{p}{c^2} + \frac{p\varrho}{\lambda} + \frac{c^2 \varrho^2}{2\lambda} + \frac{1+2w}{3c^2} \mathcal{U}]}{r(c^2 r - 2G\tilde{m})}, \quad (7.63)$$

welches wie die konventionellen TOV-Gleichungen numerisch integriert werden kann. Das Untersystem (7.59)–(7.62) ist unabhängig von Φ und kann separat gelöst werden. Als Anfangswerte wählt man $\tilde{m}(0) = 0$, $\varrho(0) = \varrho_c$, $p(0) = p(\varrho_c)$ und $\mathcal{U}(0) = 0$ und führt die Iteration vom Zentrum bis zum Sternrand durch, bzw. über den Rand des Sterns hinaus, da sich \mathcal{U} und \tilde{m} , wie wir gesehen haben, im Außenbereich noch ändern.⁶⁸

Problematisch ist die Integration der Φ' -Gleichung, da außer für $w = -2$ keine analytische Außenraumlösung bekannt ist, und somit die benötigte Randbedingung $\Phi(R)$ fehlt, um einen stetigen Übergang von der inneren zur äußeren Metrik herzustellen. Ich beschränke mich daher auf die Lösung des Systems (7.59)–(7.62), worin ohnehin alle Informationen über die Sternstruktur enthalten sind.

Das bereits an Neutronensternen und Weißen Zwergen erprobte numerische Verfahren zur Lösung der TOV-Gleichungen kann leicht auf den vorliegenden Fall erweitert werden. Man muss lediglich die Korrekturterme sowie die zusätzliche Gleichung für \mathcal{U}' hinzufügen.

⁶⁷Siehe Abbildung 43 auf Seite 97.

⁶⁸Es stellt sich heraus, dass ein Startwert $\mathcal{U}(0) \neq 0$ sehr stark abgedämpft wird, sodass seine $U(r)$ -Kurve bereits nach wenigen Iterationsschritten in die vom Koordinatenursprung ausgehende $U(r)$ Kurve übergeht.

7.5 Neutronensterne

Wie im allgemeinrelativistischen Fall verwende ich zur Beschreibung der Neutronensternmaterie die Zustandsgleichung SLy in ihrer durch Gleichung (3.77) gegebenen analytischen Form. Neben dem Parameter ρ_c , dessen Variation zu einer Sequenz von Lösungen mit verschiedenen Massen und Radien führt, enthält das verwendete Branenmodell noch zwei weitere Parameter: die Branenspannung λ und den Parameter w aus (7.38). Diese Parameter werden nun systematisch variiert, wobei ich wie folgt vorgehe:

Zunächst betrachte ich das Innere eines Neutronensterns mit fester Zentraldichte $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$. Auf den Seiten 78 bis 91 sind jeweils zwei Diagramme abgedruckt; im oberen ist das Dichteprofil $\rho(r)$, im unteren der Verlauf der effektiven Masse $\tilde{m}(r)$ aufgetragen. Auf jeder Seite wird der Parameter w festgehalten, und die Branenspannung zwischen 10^{35} und 10^{38} dyn/cm^2 variiert. Beim Weiterblättern schreitet man den Parameterbereich von w ab. Dabei nähern wir uns von großen negativen Werten kommend ($w = -100, -10, -3, -2, -1$) der bei $w = -0,5$ liegenden Singularität, in deren Nähe eine feinere Schrittweite gewählt wurde ($-0,8, -0,6, -0,2, 0, 0,2$), und entfernen uns wieder in Richtung großer Werte ($1, 2, 10, 100$).

Danach wird die Sequenz von Lösungen bei variierender Zentraldichte betrachtet. Die Seiten 92 bis 96 enthalten jeweils drei Diagramme; von oben nach unten ist $R(\rho_c)$, $M(\rho_c)$ und $R(M)$ dargestellt. Diesmal wird auf jeder Seite die Branenspannung festgehalten und der w -Parameter variiert. Auf den Folgeseiten durchläuft man verschiedene Branenspannungen.

Auf Seite 97 ist der Verlauf des Weyl-Terms $\mathcal{U}(r)$ eines Neutronensterns mit $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$ für eine Branenspannung von $\lambda = 10^{38} \text{ dyn/cm}^2$ und verschiedene Werte von w dargestellt. Wie man sieht, ist \mathcal{U} am Sternrand im Allgemeinen nicht Null. Dies hat zur Folge, dass die effektive Masse im Außenbereich nicht konstant ist.

Auf den Seiten 98 bis 100 ist schließlich der Verlauf der effektiven Masse außerhalb eines Neutronensterns der Zentraldichte $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$ dargestellt. Auf jeder Seite wird der w -Parameter bei festgehaltener Branenspannung variiert. Letztere ändert sich über die nachfolgenden Seiten.

Eine Besprechung der Ergebnisse folgt im Anschluss an die Diagramme auf Seite 101.

7.5.1 Ergebnisse der numerischen Berechnung

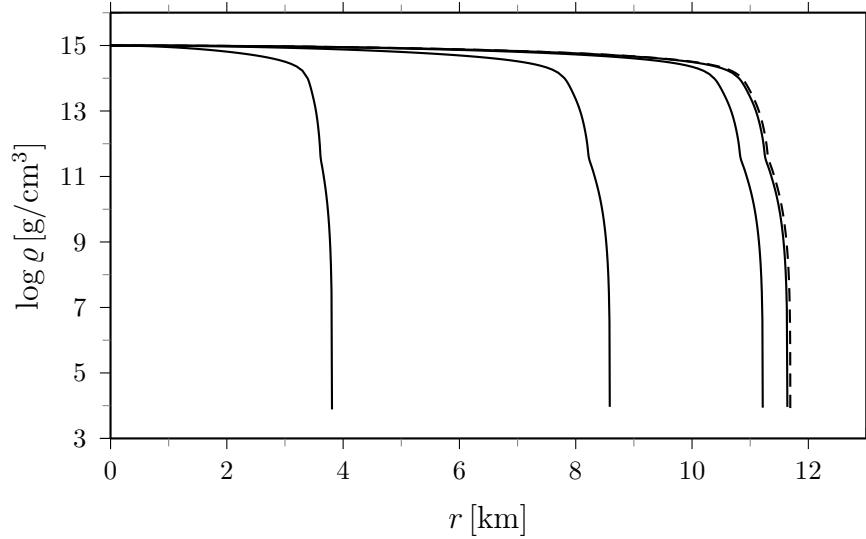


Abb. 10: Dichte $\rho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -100$ und (von links nach rechts) λ [dyn/cm 2] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} . Gestrichelt ist der konventionelle Neutronenstern gleicher Zentraldichte gezeigt

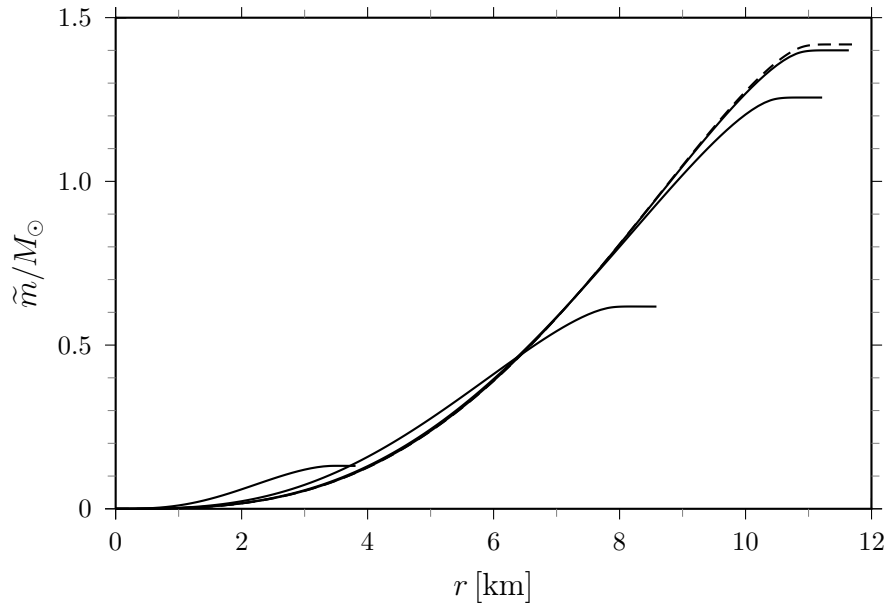


Abb. 11: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -100$ und (von unten nach oben) λ [dyn/cm 2] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} . Gestrichelt ist die totale Masse $m(r)$ des konventionellen Neutronensterns gleicher Zentraldichte $\rho_c = 10^{15}$ g/cm 3 gezeigt

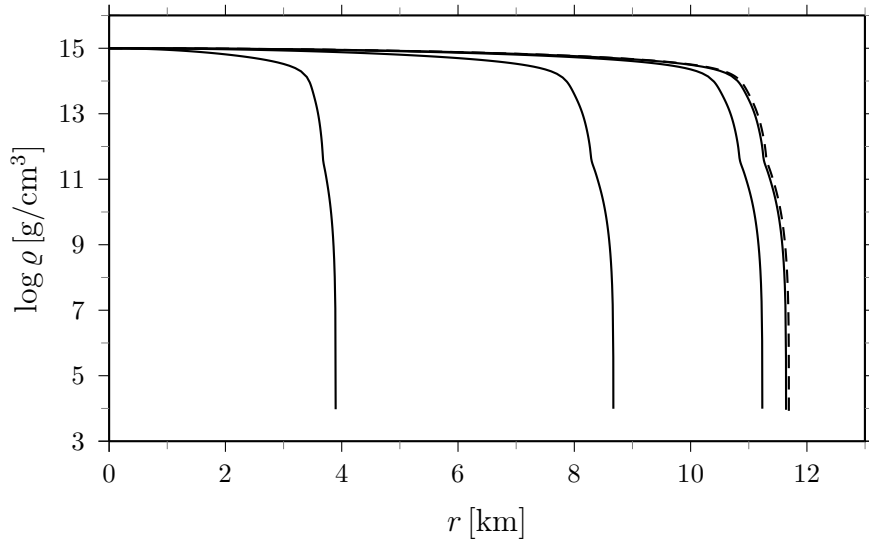


Abb. 12: Dichte $\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -10$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

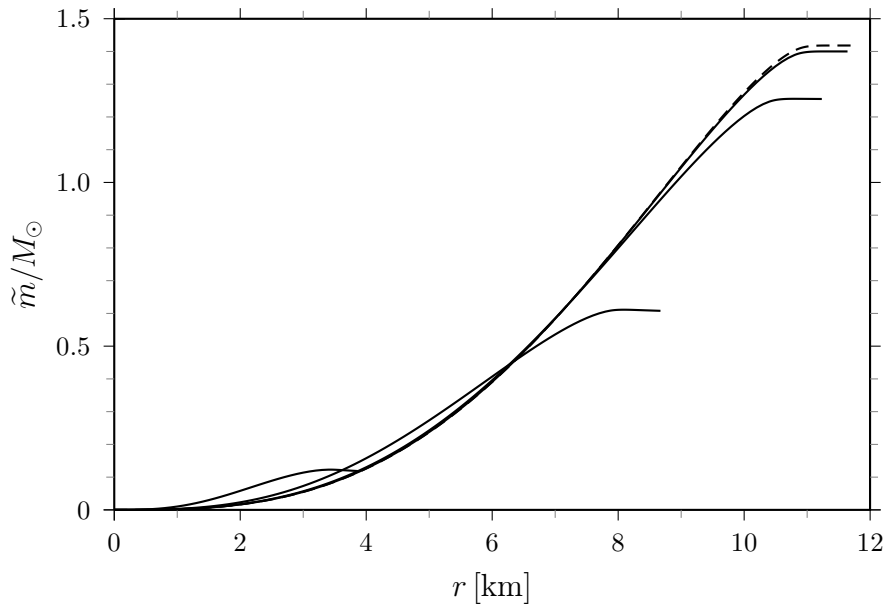


Abb. 13: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -10$ und (von unten nach oben) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

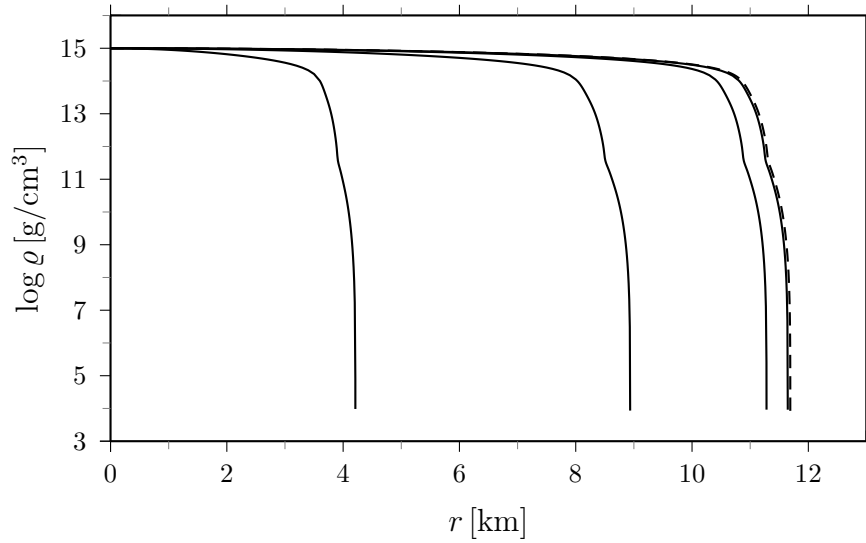


Abb. 14: Dichte $\rho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -3$ und (von links nach rechts) λ [dyn/cm²] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

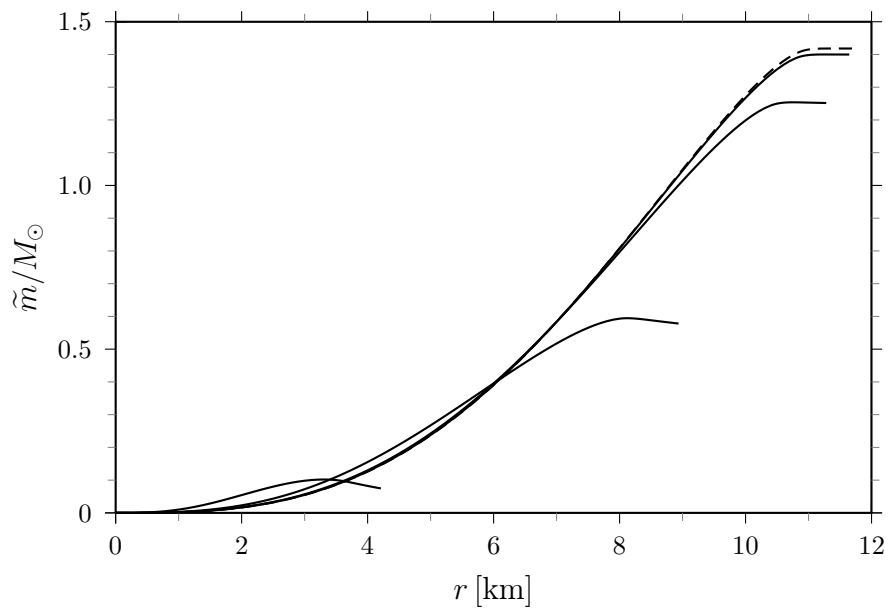


Abb. 15: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -3$ und (von unten nach oben) λ [dyn/cm²] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

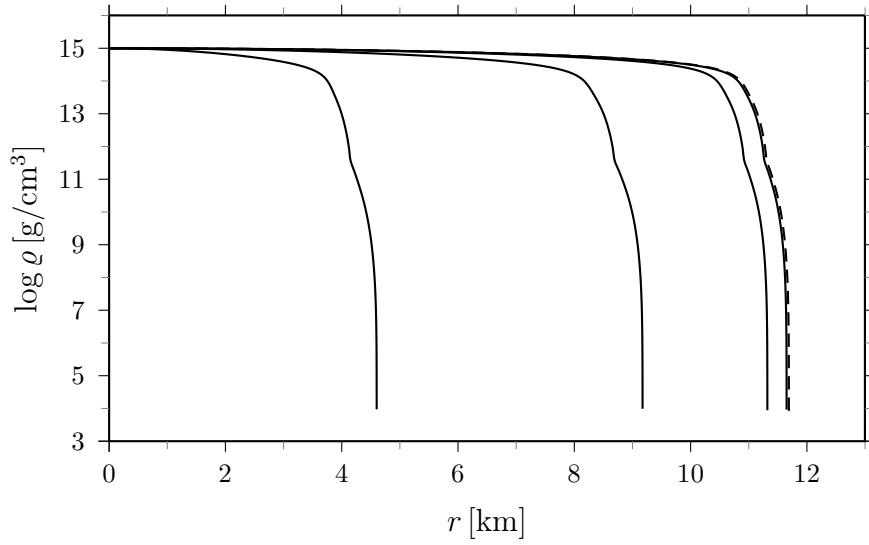


Abb. 16: Dichte $\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -2$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

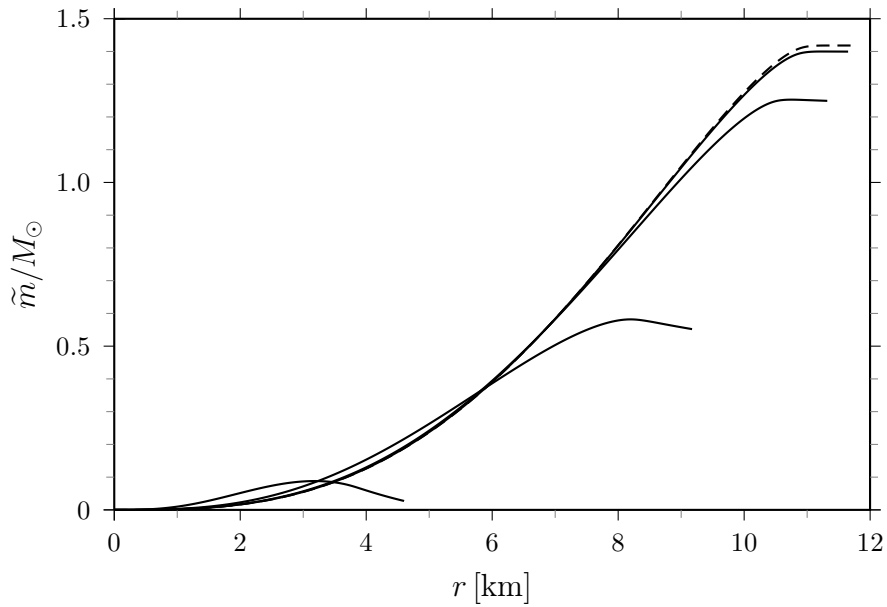


Abb. 17: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -2$ und (von unten nach oben) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

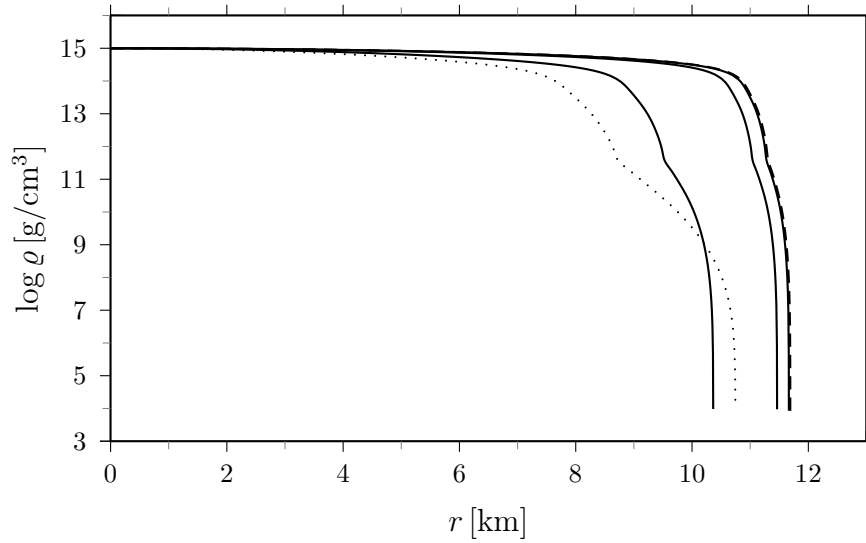


Abb. 18: Dichte $\rho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -1$ und (von links nach rechts) λ [dyn/cm^2] = $5 \cdot 10^{35}$ (gepunktet), 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

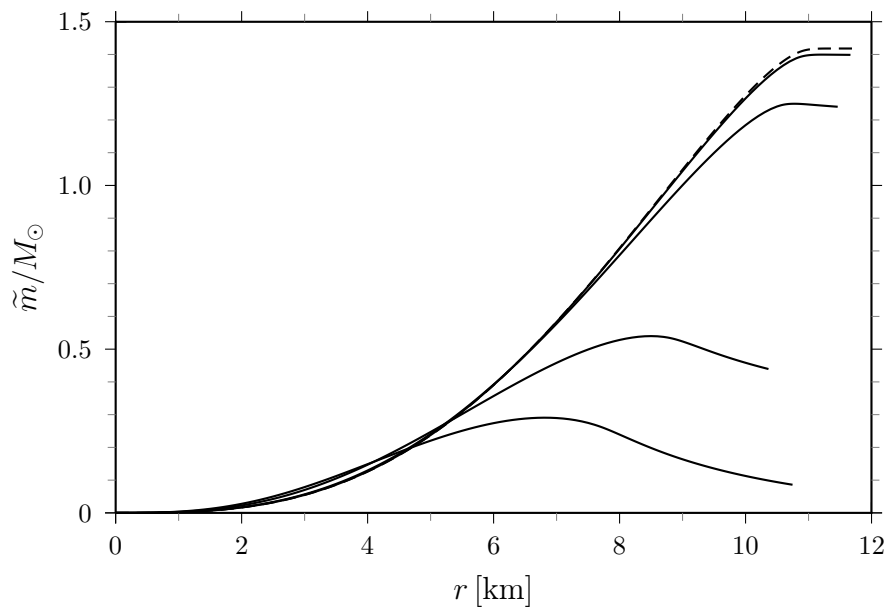


Abb. 19: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -1$ und (von unten nach oben) λ [dyn/cm^2] = $5 \cdot 10^{35}$, 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

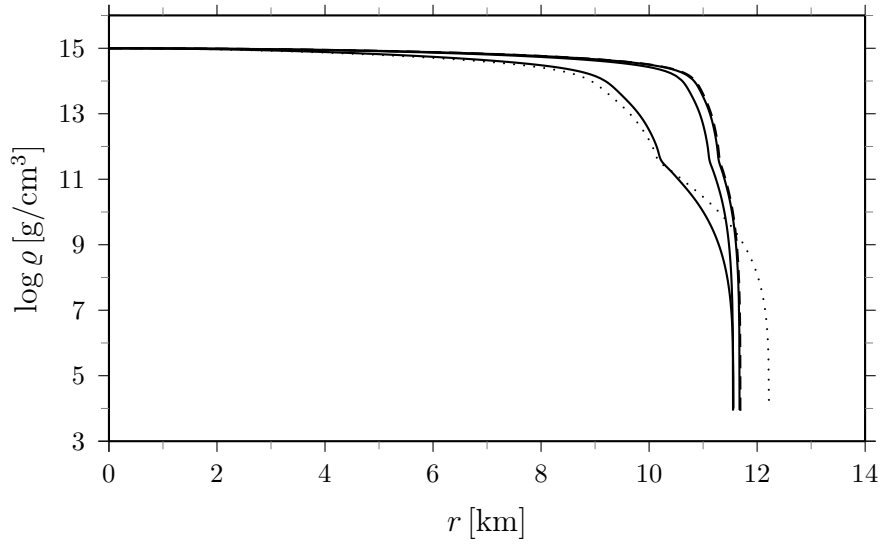


Abb. 20: Dichte $\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,8$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 8 \cdot 10^{35}$ (gepunktet), 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

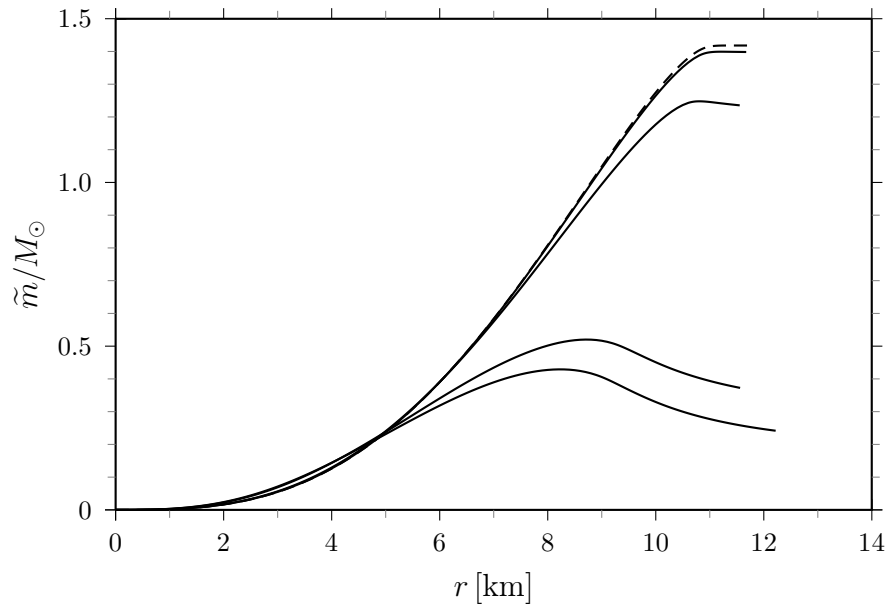


Abb. 21: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,8$ und (von unten nach oben) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 8 \cdot 10^{35}$, 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

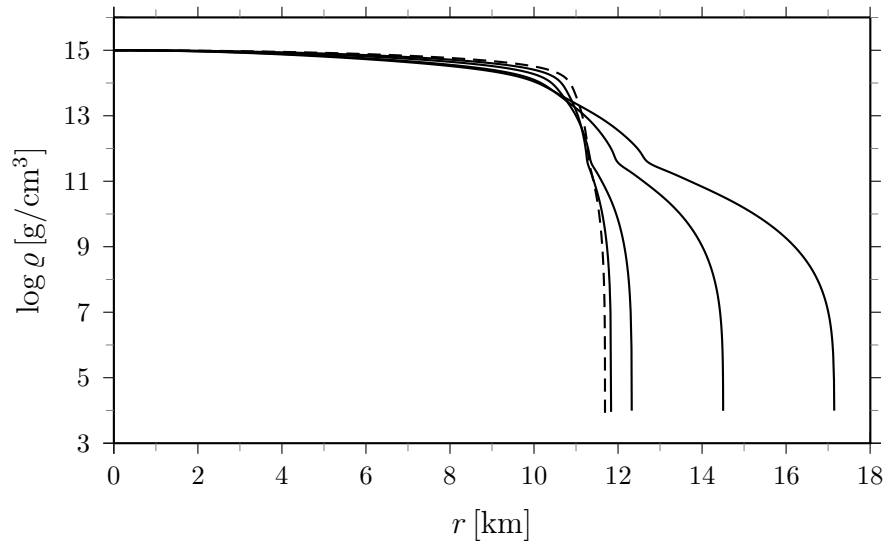


Abb. 22: Dichte $\rho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,6$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 5 \cdot 10^{36}, 2 \cdot 10^{36}, 10^{36}, 8 \cdot 10^{35}$.

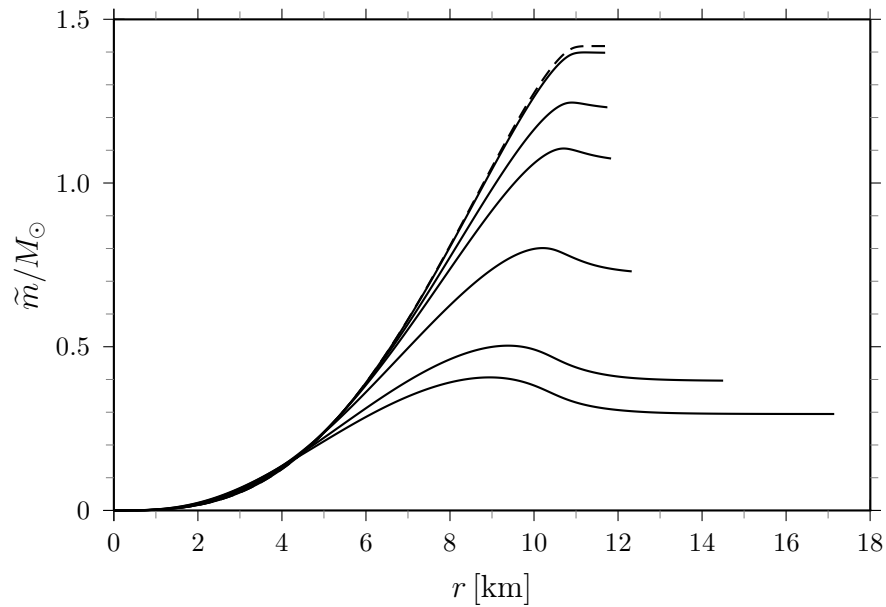


Abb. 23: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,6$ und (von unten nach oben) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 8 \cdot 10^{35}, 10^{36}, 2 \cdot 10^{36}, 5 \cdot 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

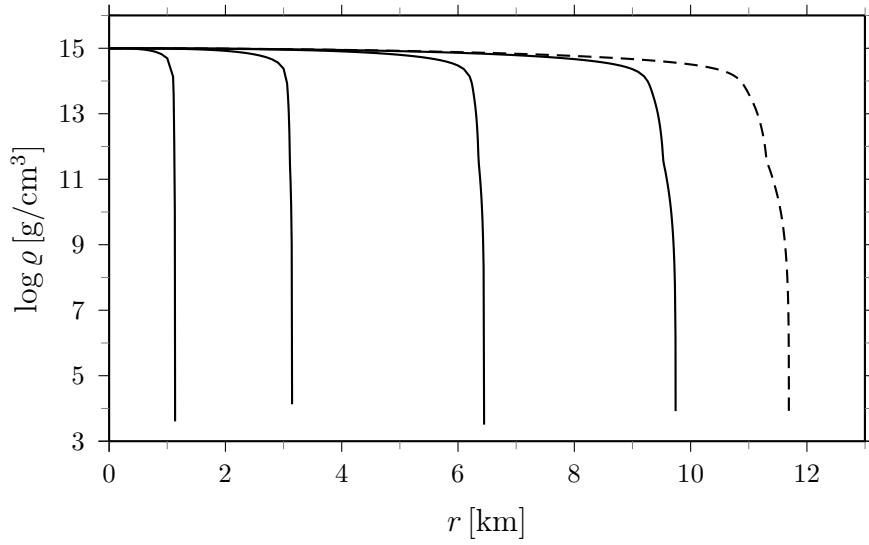


Abb. 24: Dichte $\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,2$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn}/\text{cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

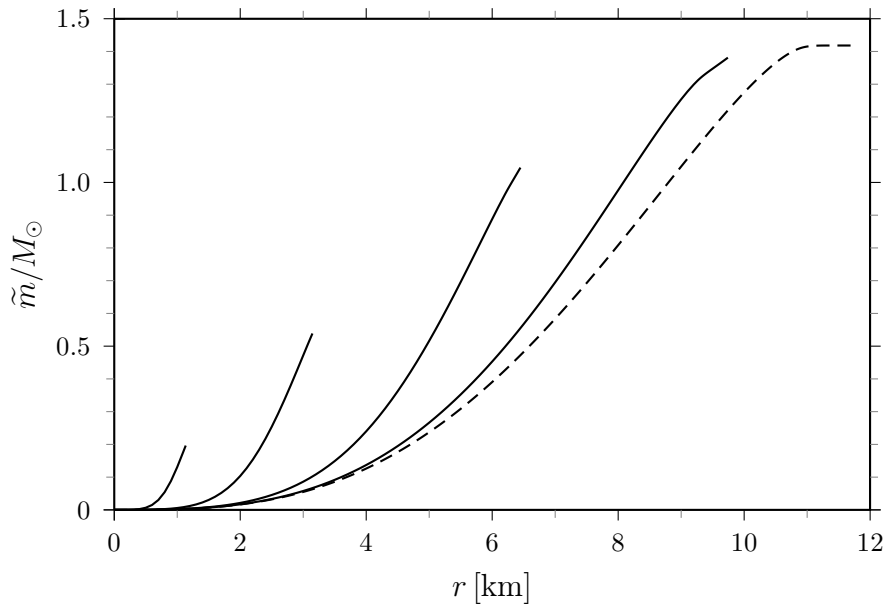


Abb. 25: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = -0,2$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn}/\text{cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

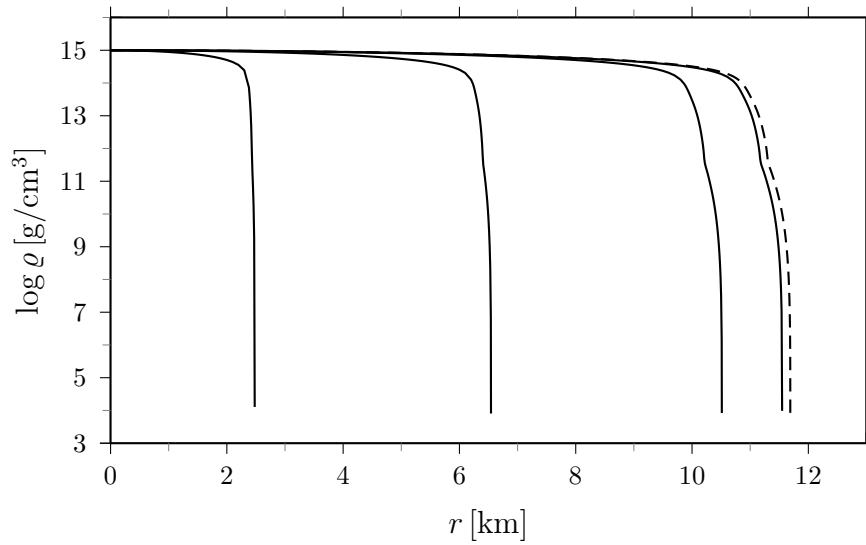


Abb. 26: Dichte $\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0$ und (von links nach rechts) λ [dyn/cm²] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

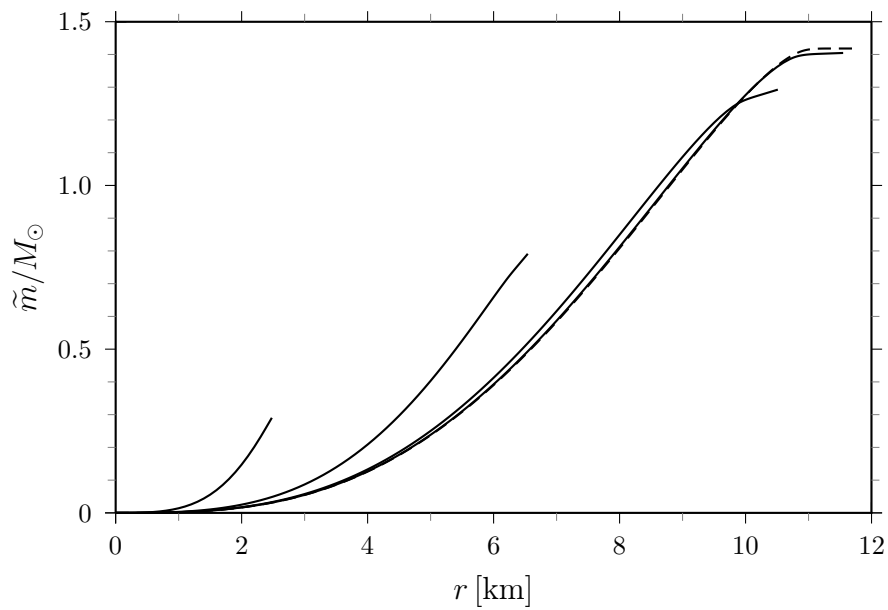


Abb. 27: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0$ und (von links nach rechts) λ [dyn/cm²] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

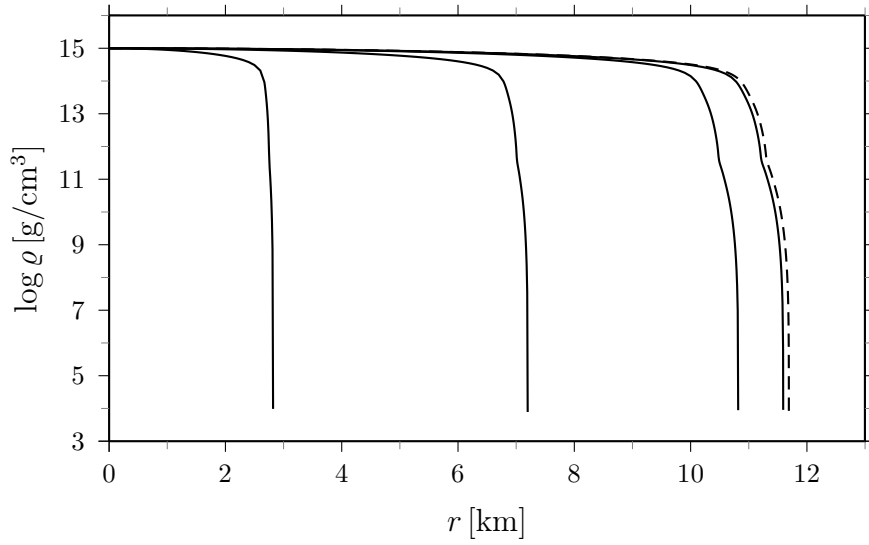


Abb. 28: Dichte $\rho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0,2$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

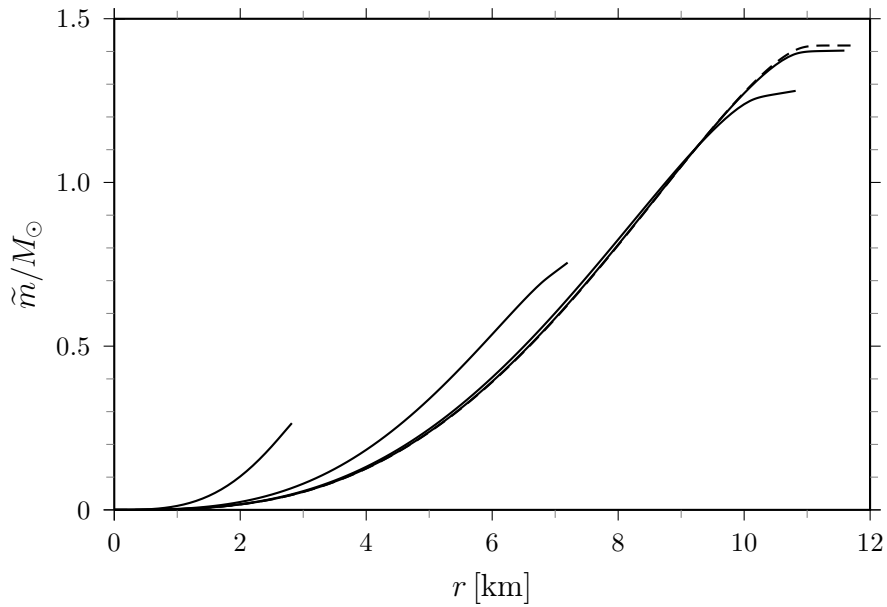


Abb. 29: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 0,2$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

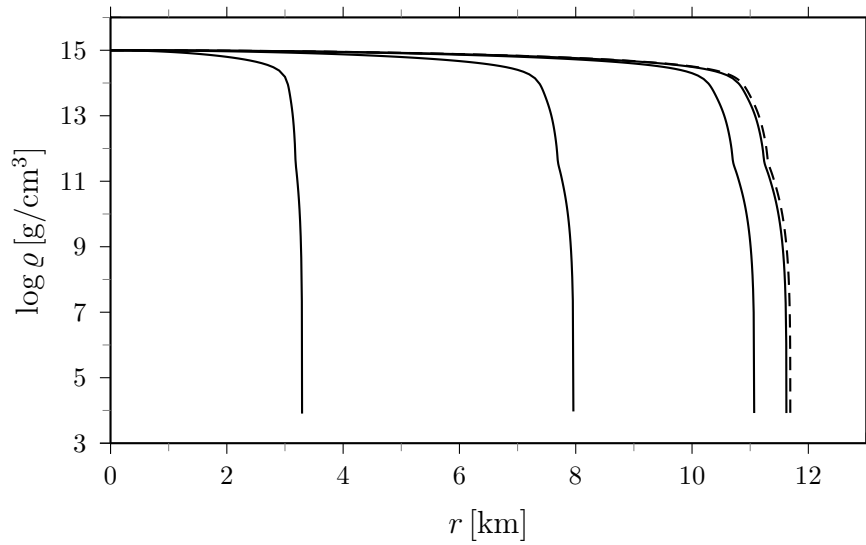


Abb. 30: Dichte $\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 1$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn}/\text{cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

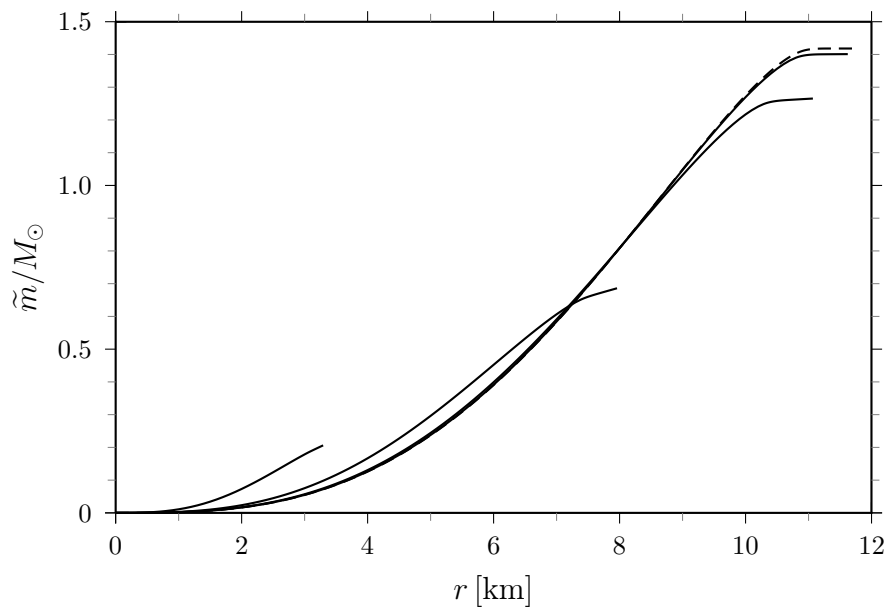


Abb. 31: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 1$ und (von unten nach oben) $\lambda [\text{dyn}/\text{cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

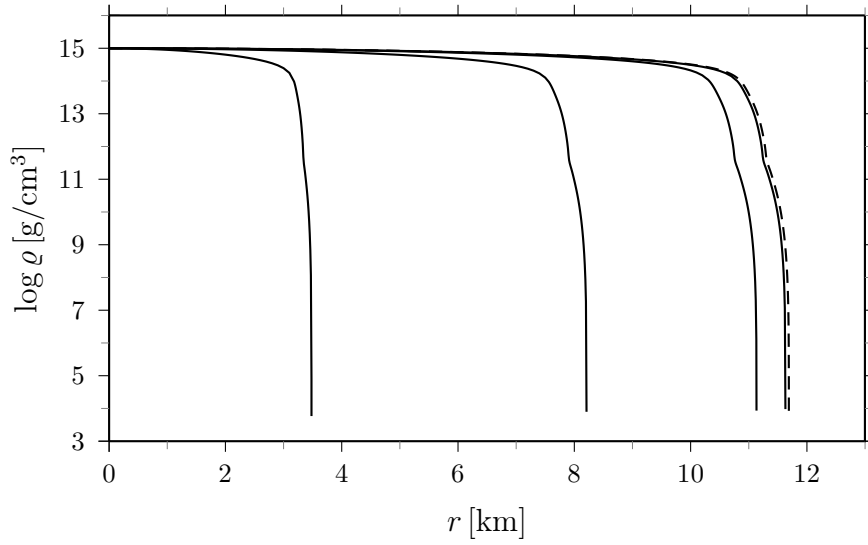


Abb. 32: Dichte $\rho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 2$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

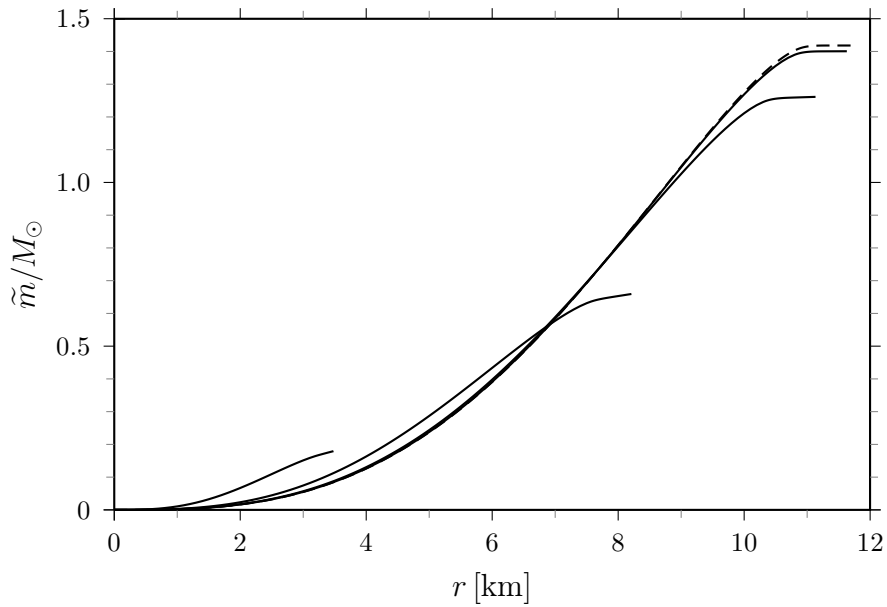


Abb. 33: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 2$ und (von unten nach oben) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

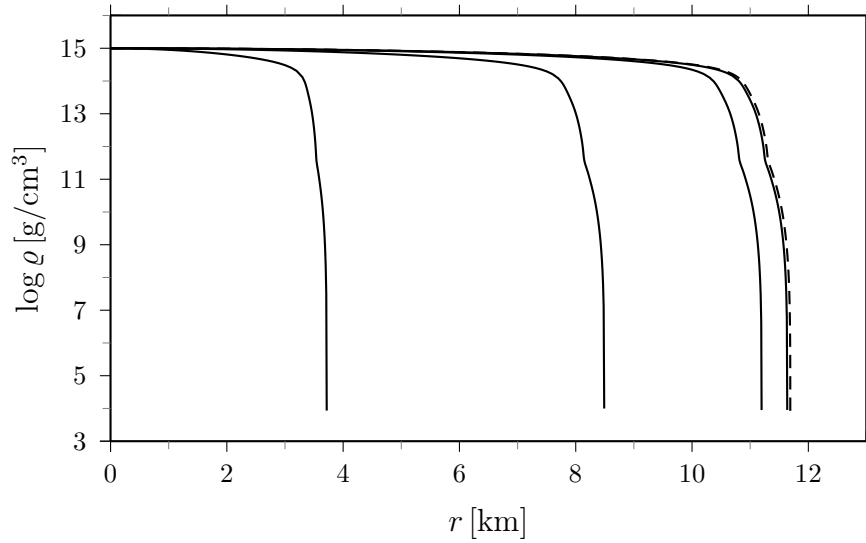


Abb. 34: Dichte $\rho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 10$ und (von links nach rechts) λ [dyn/cm²] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

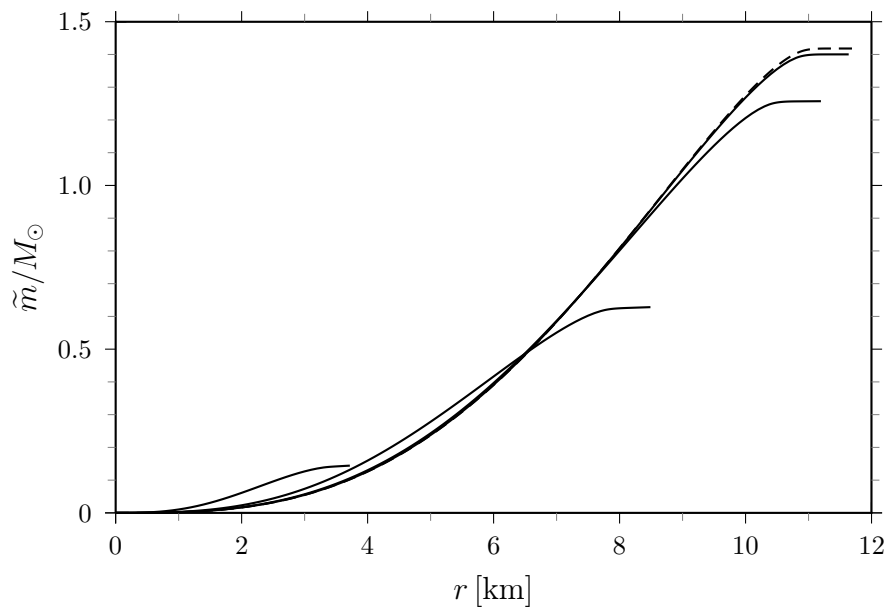


Abb. 35: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 10$ und (von unten nach oben) λ [dyn/cm²] = 10^{35} , 10^{36} , 10^{37} , 10^{38} .

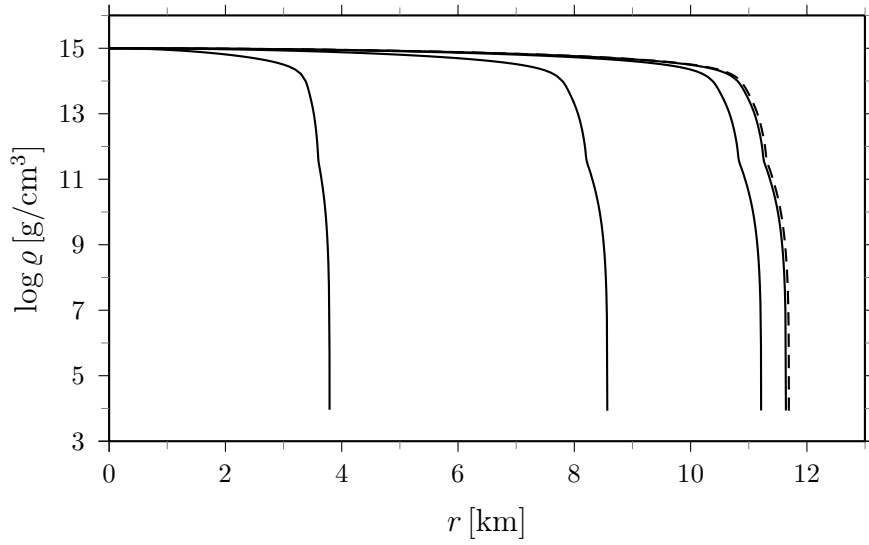


Abb. 36: Dichte $\varrho(r)$ eines Neutronensterns für $w = 100$ und (von links nach rechts) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

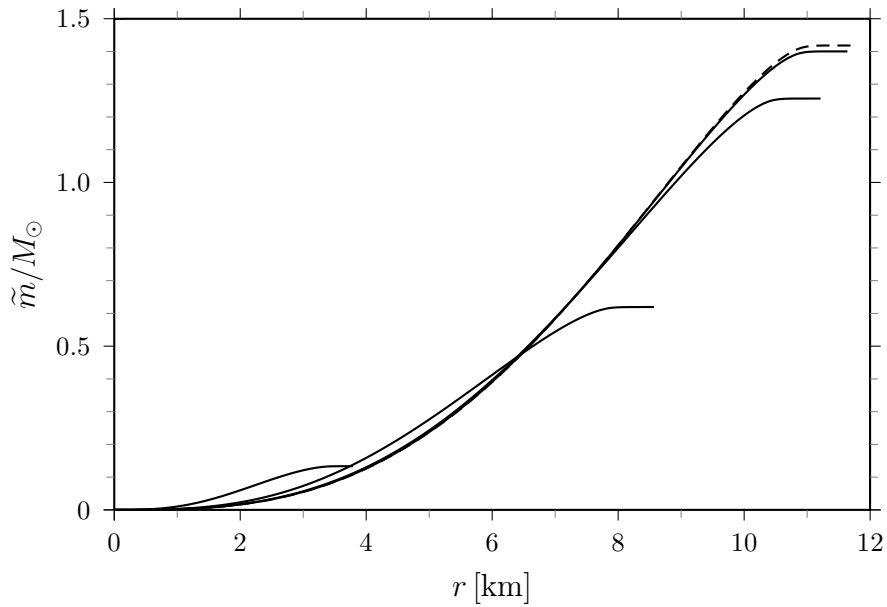


Abb. 37: Effektive Masse $\tilde{m}(r)$ eines Neutronensterns für $w = 100$ und (von unten nach oben) $\lambda [\text{dyn/cm}^2] = 10^{35}, 10^{36}, 10^{37}, 10^{38}$.

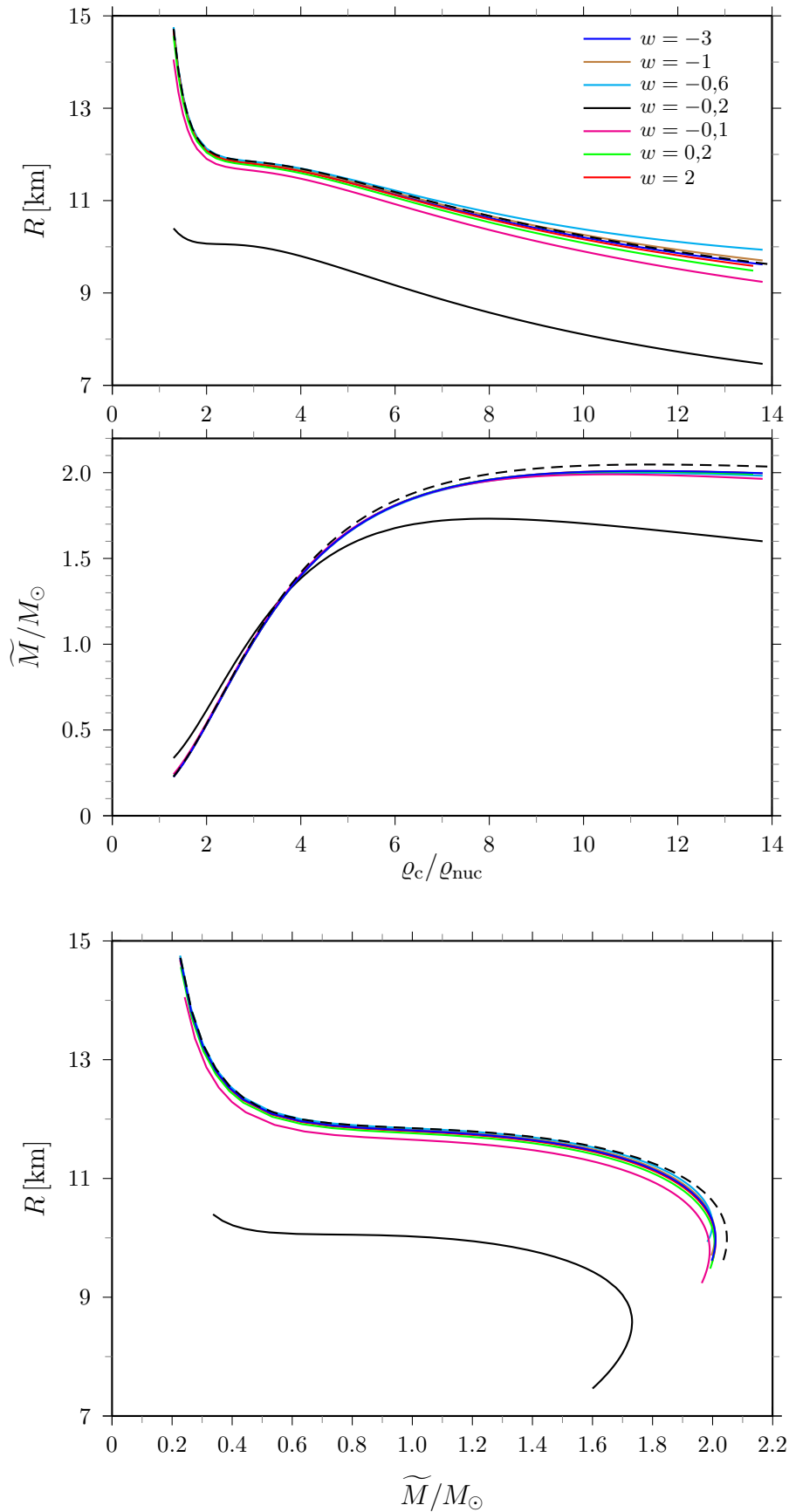


Abb. 38: $\tilde{M}(\varrho_c)$, $R(\varrho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 10^{38}$ dyn/cm². Gestrichelt eingezeichnet sind konventionelle Neutronensterne

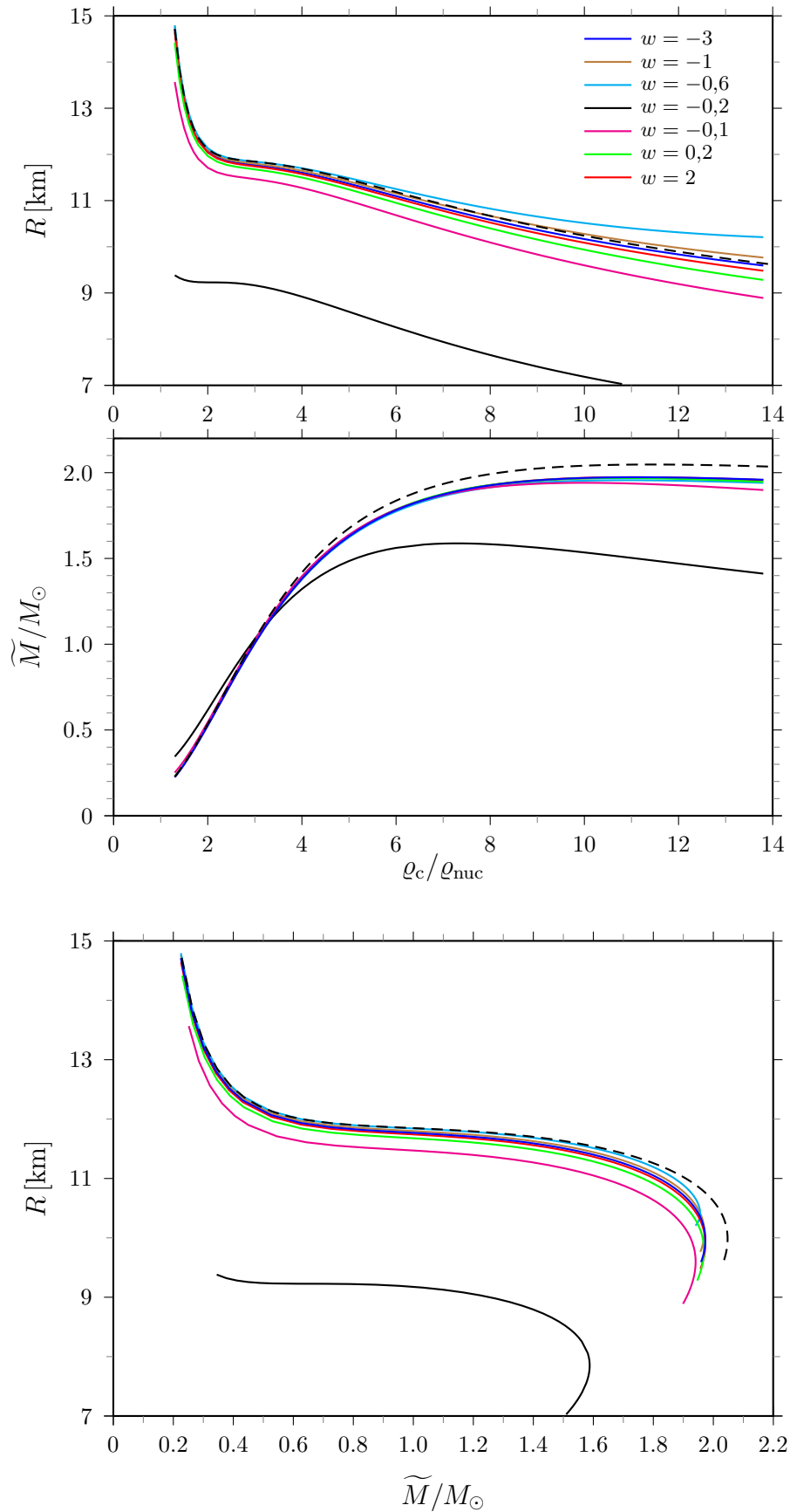


Abb. 39: $\tilde{M}(\rho_c)$, $R(\rho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 5 \cdot 10^{37} \text{ dyn/cm}^2$

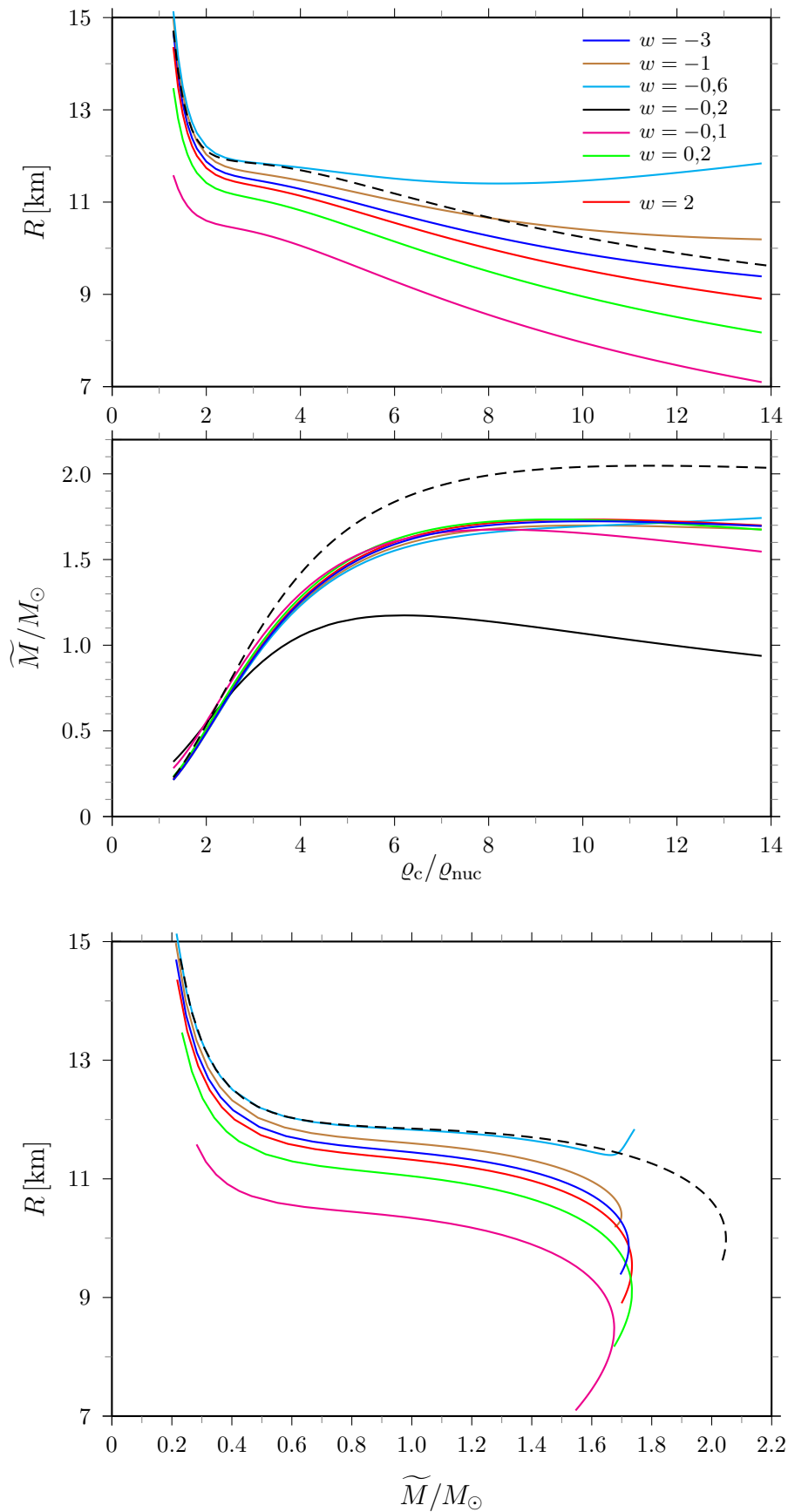


Abb. 40: $\tilde{M}(\rho_c)$, $R(\rho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 10^{37} \text{ dyn/cm}^2$

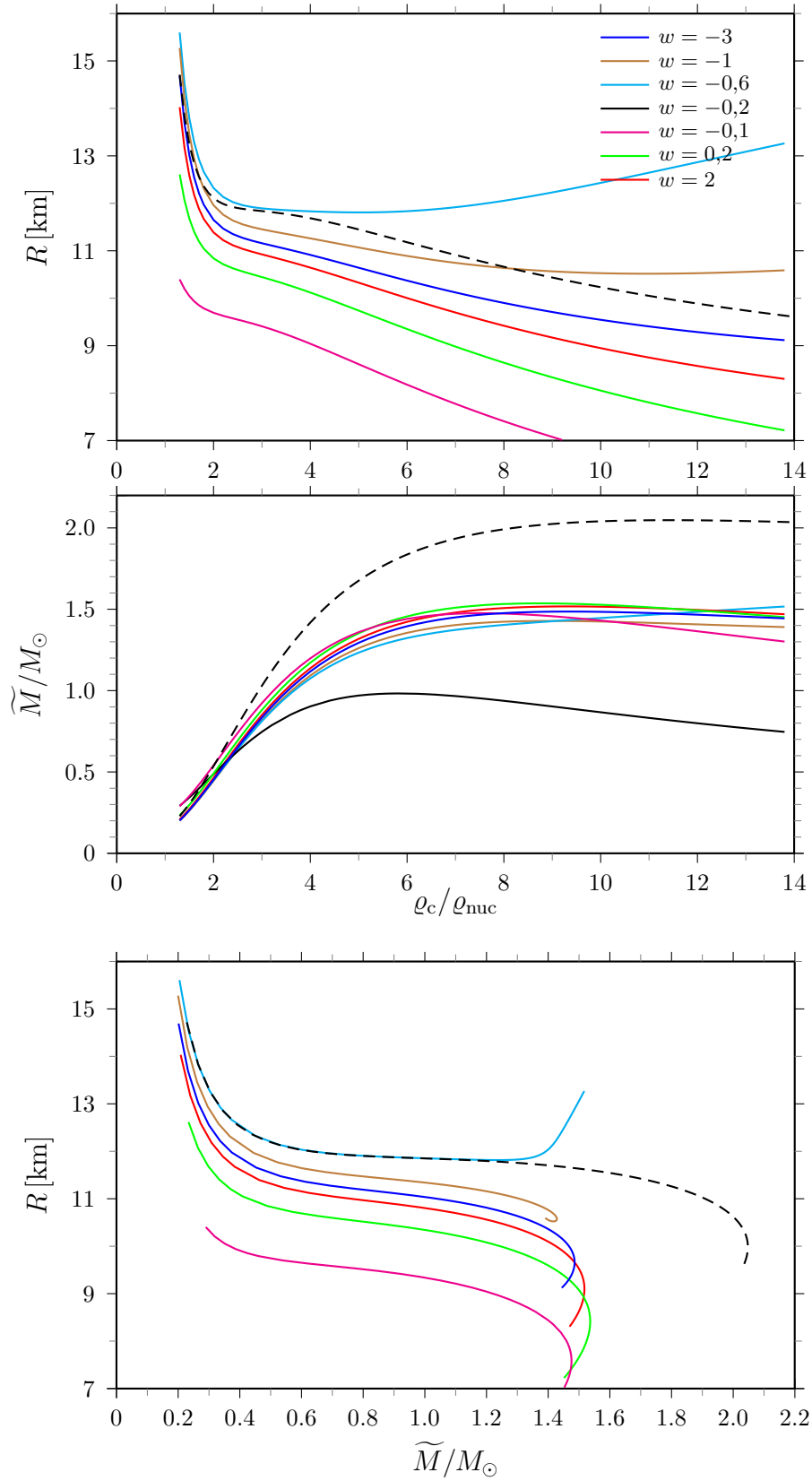


Abb. 41: $\tilde{M}(\rho_c)$, $R(\rho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 5 \cdot 10^{36} \text{ dyn/cm}^2$

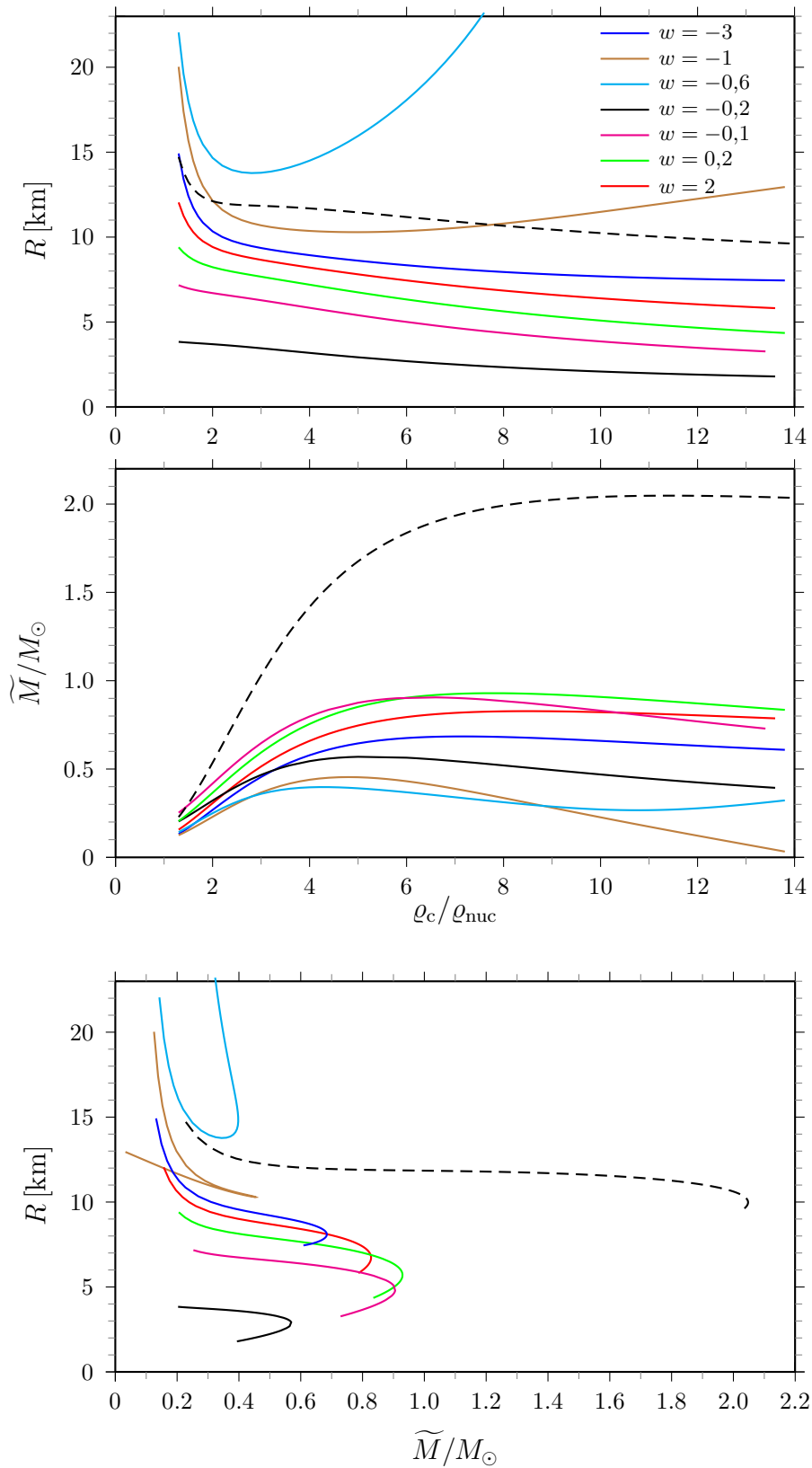


Abb. 42: $\tilde{M}(\rho_c)$, $R(\rho_c)$, $R(\tilde{M})$ von Neutronensternen für $\lambda = 10^{36} \text{ dyn/cm}^2$

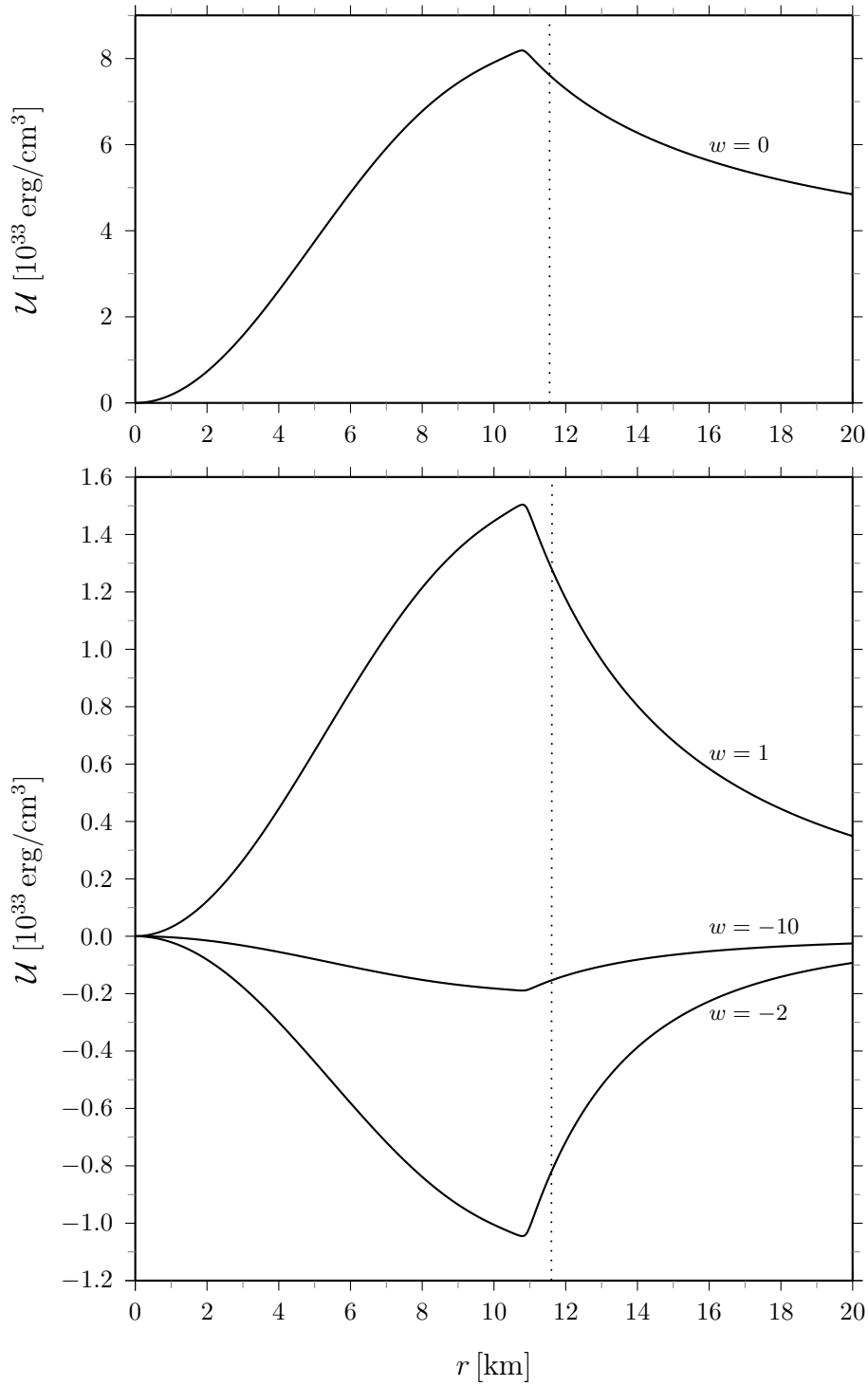


Abb. 43: $\mathcal{U}(r)$ eines Neutronensterns ($\rho_c = 10^{15}$ g/ cm^3) für $\lambda = 10^{38}$ dyn/ cm^2 . Die gepunktete Linie markiert den Sternrand

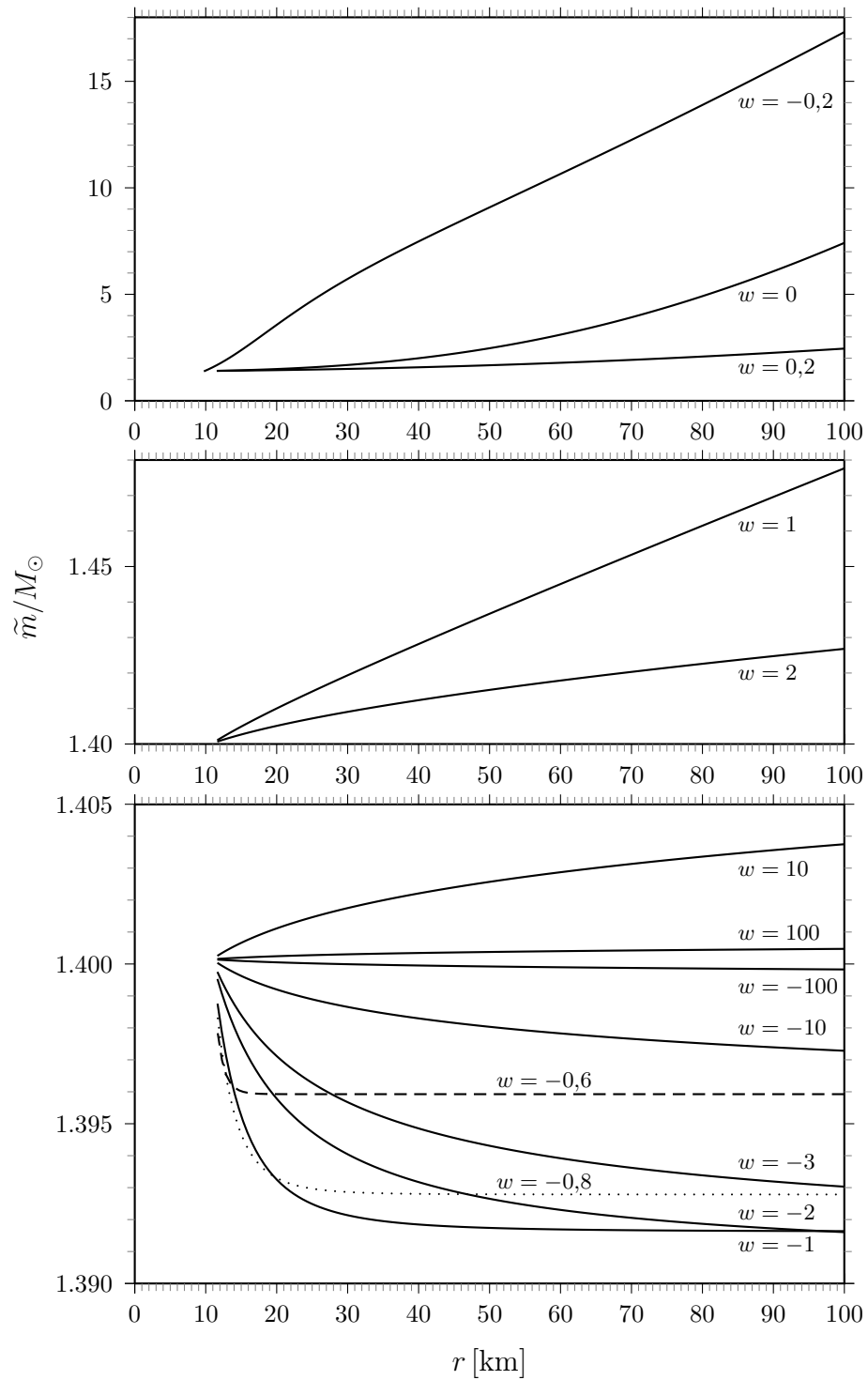


Abb. 44: Verlauf der effektiven Masse $\tilde{m}(r)$ außerhalb eines Neutronensterns ($\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$) für $\lambda = 10^{38} \text{ dyn/cm}^2$

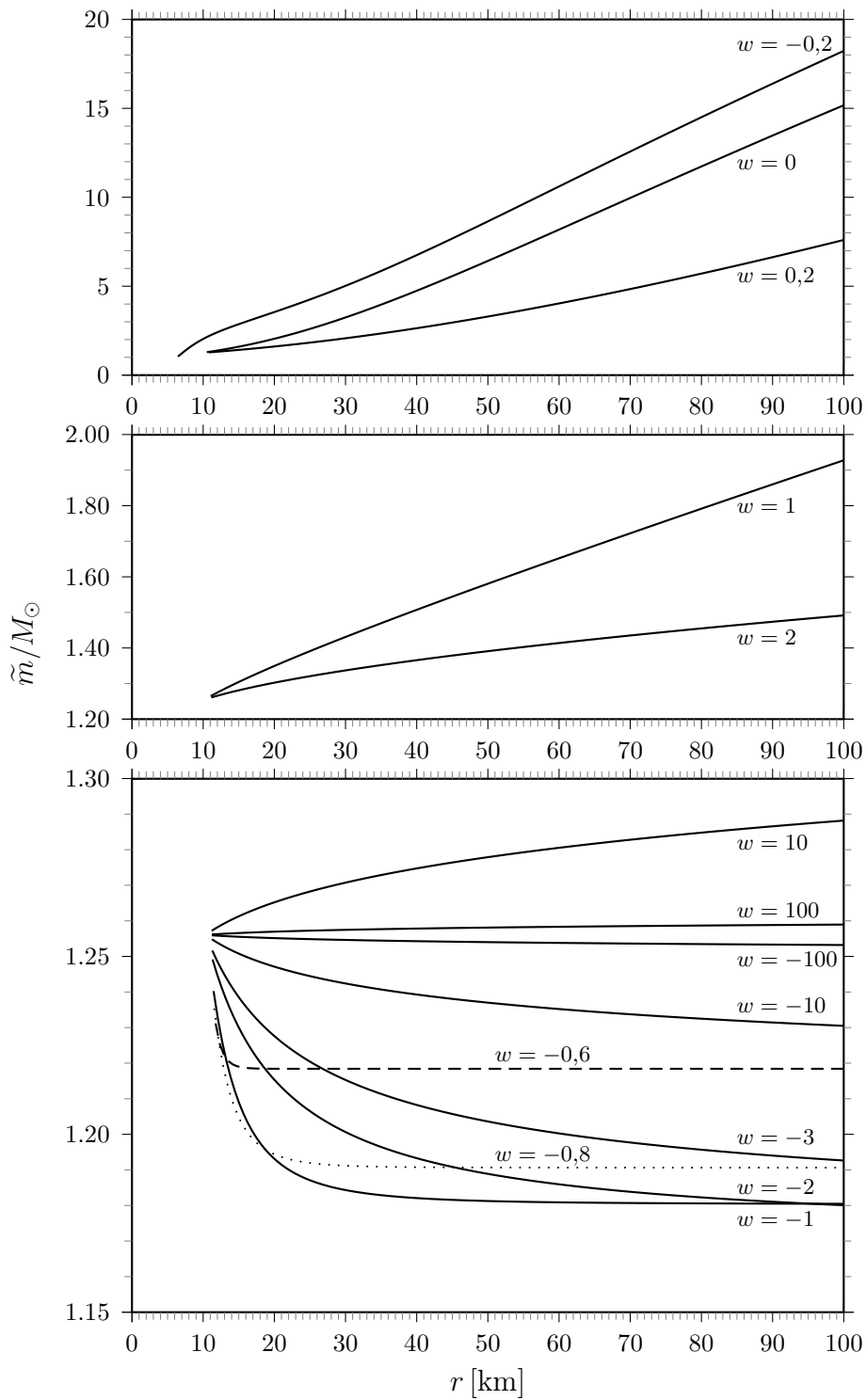


Abb. 45: Verlauf der effektiven Masse $\tilde{m}(r)$ außerhalb eines Neutronensterns ($\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$) für $\lambda = 10^{37} \text{ dyn/cm}^2$

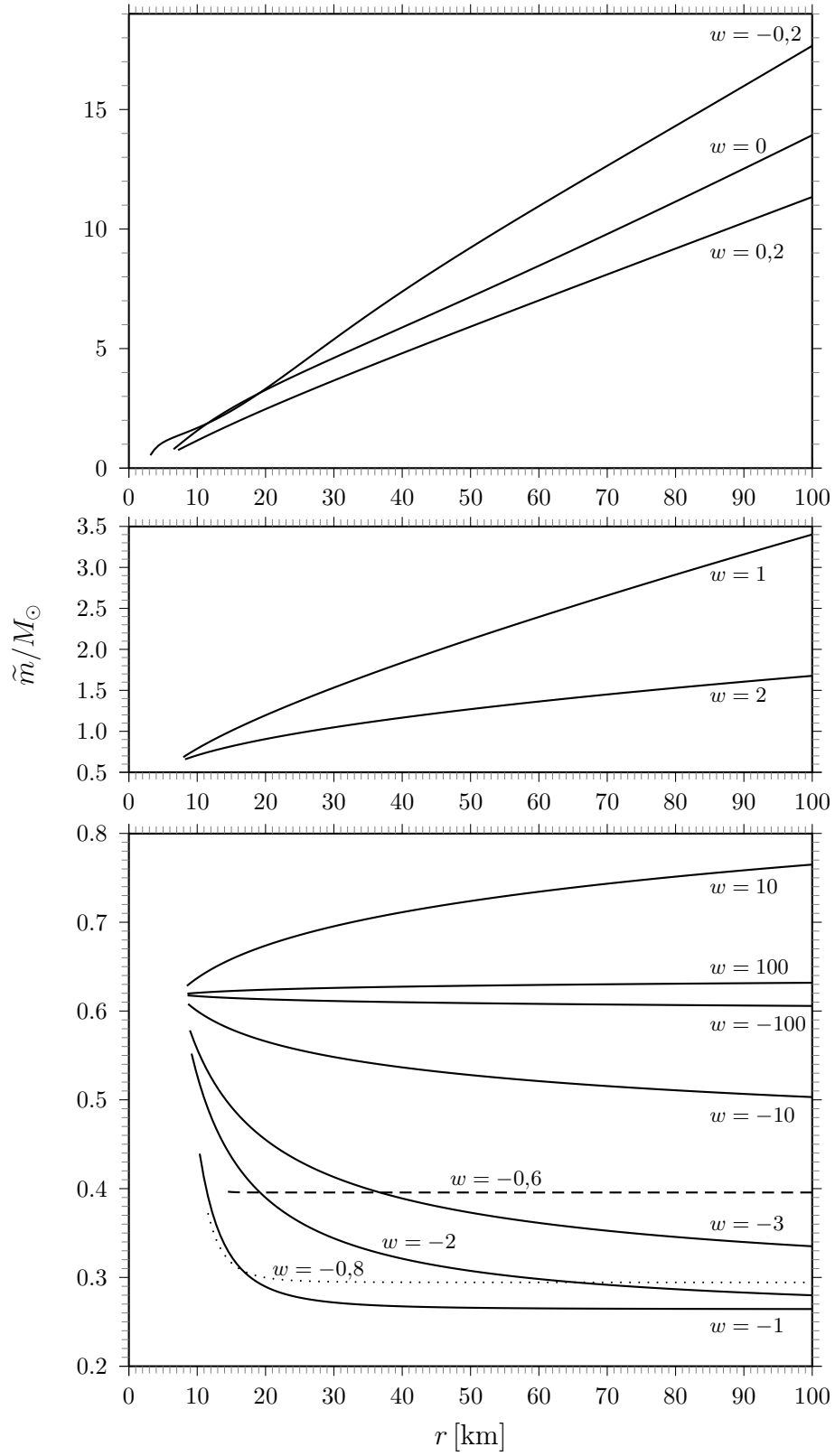


Abb. 46: Verlauf der effektiven Masse $\tilde{m}(r)$ außerhalb eines Neutronensterns ($\rho_c = 10^{15}$ g/cm³) für $\lambda = 10^{36}$ dyn/cm²

7.5.2 Besprechung der Ergebnisse

Die Diagramme auf den vorangegangenen Seiten vermitteln einen Eindruck, wie die Lösungen der Branen-TOV-Gleichungen für Neutronensterne von den Parametern des Modells abhängen.

Betrachten wir zunächst den Parameter w , über den folgende Aussagen getroffen werden können:

- $w = -0,5$ ist ausgeschlossen, da Gleichung (7.44) in diesem Falle nicht definiert ist.
- Werte aus dem Intervall $-1 \lesssim w \lesssim 1$ ergeben Lösungen, die sich deutlich voneinander unterscheiden können (Abbildung 18–31). Für $|w| > 10$ treten die Unterschiede immer mehr in den Hintergrund. Insbesondere spielt für große Werte das Vorzeichen von w keine Rolle mehr.
- Die Sternradien sind im Allgemeinen kleiner als die von konventionellen Neutronensternen. Dies gilt für fast alle Werte von w mit Ausnahme des Intervalls $-1 \lesssim w < -0,5$.
- Die effektive Sternmasse $\widetilde{M} = \widetilde{m}(R)$ ist fast für den gesamten Parameterbereich von w kleiner als die totale Masse M eines konventionellen Neutronensterns. Eine Ausnahme bilden Werte aus $-0,5 < w \lesssim -0,1$. Wie aus Abbildung 38–42 ersichtlich, haben diese für den Fall $\varrho_c/\varrho_{\text{nuc}} \lesssim 4$ Sterne mit größeren Massen zur Folge als deren relativistische Pendants.
- Eine generische Eigenschaft der Branen-TOV-Gleichungen sind Lösungen mit einer nicht-konstanten effektiven Masse im Außenbereich des Sterns (Abbildung 44–46). Dies folgt aus dem Nichtverschwinden des Weyl-Terms \mathcal{U} am Sternrand, was in Abbildung 43 zu sehen ist.
- Für alle $w < -0,5$ nimmt die Masse außerhalb des Sterns ab und strebt einem konstanten Grenzwert \widetilde{m}_∞ entgegen, der für den Fall $w = -2$ durch den analytischen Ausdruck (7.55) gegeben ist. Folglich geht jede dieser Lösungen asymptotisch in die Schwarzschild-Lösung über. \widetilde{m}_∞ hängt jedoch vom gewählten Parameter ab. Im Limes für $|w| \rightarrow \infty$ gilt $\widetilde{m}_\infty \rightarrow \widetilde{m}(R)$, d.h. die effektive Masse wird annähernd konstant.
- Für $w > -0,5$ nimmt die effektive Masse außerhalb des Sterns zu. Dieser Anstieg ist für Werte aus dem Intervall $-0,5 < w \lesssim 1$ beträchtlich. Beispielsweise ergibt eine Integration für den Fall des isotropen Weyl-Fluids $w = 0$, dass sogar bei hoher Branenspannung (10^{39} dyn/cm²) die effektive Masse im Abstand $r \approx 20\,000$ km über 3 000 Sonnenmassen beträgt und nahezu linear weiterwächst.

Den Einfluss der Branenspannung λ auf die Lösungen der Branen-TOV-Gleichungen kann man wie folgt beschreiben:

- Für die innere Lösung werden Unterschiede im Dichteprofil und Massenverlauf erst für Branenspannungen $\lambda \lesssim 10^{39} \text{ dyn/cm}^2$ deutlich. Die relativen Abweichungen zwischen Neutronensternen im Branenmodell und konventionellen Neutronensternen liegen dann im Promille-Bereich.⁶⁹
- Eine untere Grenze an die Branenspannung kann aus den in Abbildung 38–42 aufgetragenen Daten abgeleitet werden – der Sequenz von Lösungen mit variierender Zentraldichte. Wie man sieht, sinkt die maximale Masse mit sinkender Branenspannung. Diese Eigenschaft ist zudem nur wenig vom w -Parameter abhängig. Für eine Branenspannung von 10^{36} dyn/cm^2 (Abbildung 42) sagt das Branenmodell voraus, dass alle Konfigurationen mit Massen größer als $\approx 0,9 M_\odot$ instabil sind. Diese Vorhersage steht jedoch nicht im Einklang mit Beobachtungsdaten, da bereits größere Neutronensternmassen bestimmt wurden.⁷⁰ Die Branenspannung muss mindestens $\approx 5 \cdot 10^{36} \text{ dyn/cm}^2$ betragen, um Neutronensternmassen von $1,35 M_\odot$ zuzulassen, bzw. sogar 10^{37} dyn/cm^2 , wenn man maximale Massen von $1,75 M_\odot$ (der unteren Grenze der von Guver et al. [48] bestimmten Masse) zulässt.

7.6 Weiße Zwerge

Die numerische Behandlung Weißer Zwerge in der Branenwelt reproduziert im Wesentlichen die Ergebnisse der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die Branen-TOV-Gleichungen wurden für einen Weißen Zwerg mit $\rho_c = 10^6 \text{ g/cm}^3$ und vier verschiedenen Kombinationen der Parameter λ und w numerisch gelöst. In allen Fällen ergibt sich für den Radius und die effektive Masse

$$100 R/R_\odot = 1,569423, \quad \widetilde{M}/M_\odot = 0,400487. \quad (7.64)$$

Diese Werte decken sich innerhalb der ausgegebenen Genauigkeit von sechs Nachkommastellen exakt mit den Ergebnissen der zuvor durchgeführten Berechnung eines konventionellen Weißen Zwerges gleicher Zentraldichte.

Dieses Resultat ist nicht verwunderlich wenn man die Größenordnung der Korrekturterme abschätzt. Betrachten wir beispielsweise die effektive Dichte

$$\rho^{\text{eff}} := \rho + \frac{c^2 \rho^2}{2\lambda} + \frac{\mathcal{U}}{c^2}. \quad (7.65)$$

⁶⁹Exemplarisch vergleiche ich die Lösung der Branen-TOV-Gleichungen für die zentrale Dichte $\rho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$ und den Parametern $\lambda = 10^{39} \text{ dyn/cm}^2$, $w = -3$ mit der konventionellen Lösung. Es ergeben sich die Werte $R_{5D} = 11,685060 \text{ km}$, $R_{4D} = 11,689380 \text{ km}$ und $\widetilde{M}_{5D} = 1,416306 M_\odot$, $M_{4D} = 1,418166 M_\odot$. Die relativen Abweichungen betragen dann: $\Delta R/R_{4D} = 0,37\%$, $\Delta M/M_{4D} = 1,31\%$.

⁷⁰Studien zur Bestimmung von Neutronensternmassen kommen beispielsweise auf folgende Werte: $M/M_\odot = 1,35 \pm 0,04$ [47]; $M/M_\odot = 1,84 \pm 0,09$ [48], $M/M_\odot = 1,7$ oder $1,4$ [49].

Der ϱ^2 -Korrekturterm ist im Zentrum des Sterns am größten. Für einen Weißen Zwerg mit $\varrho_c = 10^6 \text{ g/cm}^3$ und einer Branenspannung zwischen 10^{35} und 10^{38} dyn/cm^2 liegt er im Bereich $4,5 \cdot 10^{-3}$ bis $4,5 \cdot 10^{-6}$, was einer relativen Dichtekorrektur von $4,5 \cdot 10^{-9}$ bis $4,5 \cdot 10^{-12}$ entspricht. Zum Vergleich: Im Zentrum eines Neutronensterns mit $\varrho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$ liegt die relative Dichtekorrektur zwischen $4,5$ und $4,5 \cdot 10^{-3}$. Die Größenordnung des \mathcal{U} -Korrekturterms lässt sich an den errechneten Daten ablesen. In der nachfolgenden Tabelle ist für die vier untersuchten Konfigurationen aufgeführt, wie groß das Minimum von \mathcal{U} ist, bei welcher Dichte es liegt, wie groß die ϱ^2 - und \mathcal{U} -Korrekturterme sind und wie groß die relative Dichtekorrektur an dieser Stelle insgesamt ist (alle Zahlenwerte sind in den entsprechenden cgs-Einheiten aufgeführt; $\Delta\varrho := \frac{c^2\varrho^2}{2\lambda} + \frac{\mathcal{U}}{c^2}$):

λ	w	\mathcal{U}_{\min}	$\varrho(\mathcal{U}_{\min})$	$c^2\varrho^2/2\lambda$	\mathcal{U}_{\min}/c^2	$\Delta\varrho/\varrho$
10^{38}	-2	$-6,8 \cdot 10^{14}$	$4,6 \cdot 10^5$	$9,5 \cdot 10^{-7}$	$-7,6 \cdot 10^{-7}$	$4,1 \cdot 10^{-13}$
10^{36}	-2	$-6,8 \cdot 10^{16}$	$4,6 \cdot 10^5$	$9,5 \cdot 10^{-5}$	$-7,6 \cdot 10^{-5}$	$4,1 \cdot 10^{-11}$
$2 \cdot 10^{35}$	-2	$-3,4 \cdot 10^{17}$	$4,6 \cdot 10^5$	$4,8 \cdot 10^{-4}$	$-3,8 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-10}$
$2 \cdot 10^{35}$	-0,8	$-8,9 \cdot 10^{17}$	$5,8 \cdot 10^5$	$7,6 \cdot 10^{-4}$	$-9,9 \cdot 10^{-4}$	$-4 \cdot 10^{-10}$

Zum Vergleich dazu ein Neutronenstern mit $\varrho_c = 10^{15} \text{ g/cm}^3$: Für die Parameterwerte $\lambda = 10^{38} \text{ dyn/cm}^2$ und $w = -2$ ergibt sich $\mathcal{U}_{\min} \approx -1,0 \cdot 10^{33} \text{ erg/cm}^3$ (vergleiche Abbildung 43) und $\varrho(\mathcal{U}_{\min}) \approx 1,1 \cdot 10^{14} \text{ g/cm}^3$. Damit ergeben sich folgende Korrekturen (in entsprechenden cgs-Einheiten):

$$\frac{c^2\varrho^2}{2\lambda} \approx 5,1 \cdot 10^{10}, \quad \frac{\mathcal{U}_{\min}}{c^2} \approx -1,2 \cdot 10^{12}, \quad \frac{\Delta\varrho}{\varrho} \approx -1,0\%. \quad (7.66)$$

8 Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit untersuchte die Struktur kompakter Sterne im Rahmen des Branenwelt-Paradigmas. Von den modifizierten Einsteingleichungen (7.1) ausgehend wurden die Tolman-Oppenheimer-Volkoff-Gleichungen eines statischen und kugelsymmetrischen Sterns auf der Brane (7.28)–(7.31) hergeleitet. Diese bilden ein unterbestimmtes Differentialgleichungssystem, das im Gegensatz zu den konventionellen TOV-Gleichungen (3.14)–(3.16) nicht allein durch eine Zustandsgleichung der Sternmaterie geschlossen werden kann; es muss eine zusätzliche Bedingung an die Weyl-Terme \mathcal{U} und \mathcal{P} gestellt werden, etwa durch die Annahme einer Art Zustandsgleichung $\mathcal{P} = w\mathcal{U}$, welche die isotropen und anisotropen Anteile des Weyl-Drucks in einen linearen Zusammenhang stellt.

Die numerische Lösung der Branen-TOV-Gleichungen führt auf Sterne, die im Vergleich zu konventionellen Neutronensternen kleinere Radien R und kleinere effektive Massen $\widetilde{M} = \widetilde{m}(R)$ haben, d.h. sie sind insgesamt kompakter. Diese Aussage ist fast für den gesamten Parameterbereich von w gültig; Ausnahmen bilden Werte in der Nähe des auszuschließenden Falles $w = -0,5$. Die Abweichungen vom allgemeinrelativistischen Fall sind umso größer, je kleiner die Branenspannung ist. Für $\lambda = 10^{39}$ dyn/cm² liegen die relativen Abweichungen von Radius und Masse im Promille-Bereich. Darüber liegende Werte der Branenspannung reproduzieren praktisch den Fall konventioneller Sterne.

Die höhere Kompaktheit hat zur Folge, dass in der Sequenz von Lösungen mit variierender Zentraldichte kleinere maximale Massen vorkommen, und somit bei kleineren Zentraldichten bereits instabile Konfigurationen auftreten. Aus diesem Verhalten lässt sich eine untere Grenze für die Branenspannung ableiten, die nur schwach vom w -Parameter abhängt: Für $\lambda \gtrsim 5 \cdot 10^{36}$ dyn/cm² sind die vorhergesagten maximalen Massen gerade noch mit den beobachteten Massen von Neutronensternen vereinbar. Ein Unterschreiten dieser Grenze steht im Widerspruch zu Beobachtungsdaten.⁷¹

Die numerischen Berechnungen zeigen, dass im Allgemeinen der Weyl-Term \mathcal{U} am Sternrand nicht verschwindet, was zur Folge hat, dass die effektive Masse außerhalb des Sterns nicht konstant ist, sondern je nach gewähltem w -Parameter ab- oder zunimmt.

Für den Fall $w = -2$ wurde eine analytische Lösung für den Außenbereich des Sterns angegeben. Diese hat auf jeder Sphäre mit Radius r die Form einer Schwarzschild-Metrik, in der jedoch eine nicht konstante Masse auftritt. Schreibt man die r -Abhängigkeit der Masse explizit aus, so erhält man eine Lösung, die formal mit der Reissner-Nordström-Metrik übereinstimmt. Die darin vorkommende „Gezeitenladung“ Q entspricht im Wesentlichen dem Weyl- \mathcal{U} am Sternrand.

⁷¹Eine Behandlung von idealisierten Sternen mit homogener Dichte liefert eine untere Grenze von $\lambda > 1,04 \cdot 10^{35}$ dyn/cm² [34]. Dieser Wert erscheint auf der Basis der vorliegenden Resultate jedoch als zu klein.

Teil IV

Anhänge

»Zu wissen, wie man es macht, ist nicht schwer. Schwer ist nur, es zu machen.«
– Chinesisches Sprichwort

A Ausführliche Rechnungen

A.1 Induzierte Metrik I auf der Zylinderoberfläche

Als Beispiel für die Einbettung einer Untermannigfaltigkeit in eine höherdimensionale Mannigfaltigkeit betrachten wir eine Zylinderoberfläche im dreidimensionalen euklidischen Raum \mathbb{R}^3 . In kartesischen Koordinaten $X^A = (X, Y, Z)$ ist die Metrik des \mathbb{R}^3 $g_{AB} = \delta_{AB}$. Wechseln wir zu Zylinderkoordinaten $X^{A'} = (r, \phi, Z)$, führen also die Koordinatentransformation $\Theta: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $X^A \mapsto X^{A'}(X, Y, Z)$ mit

$$\Theta: (X, Y, Z) \mapsto (r, \phi, Z) = (\sqrt{X^2 + Y^2}, \arctan \frac{Y}{X}, Z) \quad (\text{A.1})$$

$$\Theta^{-1}: (r, \phi, Z) \mapsto (X, Y, Z) = (r \cos \phi, r \sin \phi, Z) \quad (\text{A.2})$$

aus, so transformiert sich die Metrik gemäß

$$g_{A'B'} = \frac{\partial X^A}{\partial X^{A'}} \frac{\partial X^B}{\partial X^{B'}} g_{AB} = J_{A'}^A \delta_{AB} J^B_{B'}. \quad (\text{A.3})$$

Aus (A.2) folgt die Jacobimatrix $J^A_{A'} := \partial X^A / \partial X^{A'}$

$$J^A_{A'} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{A'}^A = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -r \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

und damit lautet die euklidische Metrik in Zylinderkoordinaten

$$g_{A'B'} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -r \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi & 0 \\ \sin \phi & r \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.5})$$

Mit (A.5) ergibt sich das Linienelement ${}^{(3)}ds^2 = g_{A'B'} dX^{A'} dX^{B'} = dr^2 + r^2 d\phi^2 + dZ^2$.

Nun berechnen wir die auf der Zylinderoberfläche induzierte Metrik. Die Koordinaten auf dem Zylinder bezeichnen wir mit $x^a = (\varphi, z)$. Seine Oberfläche wird durch die Bedingung $X^2 + Y^2 = R^2$ (mit $R = \text{const}$) definiert, was durch die Einbettung

$$\Phi: (\varphi, z) \mapsto (X, Y, Z) = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z) \quad (\text{A.6})$$

zum Ausdruck kommt. Daraus folgt die Jacobimatrix $J^A_a := \partial X^A / \partial x^a$

$$J^A_a = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & 0 \\ R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_a^A = \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.7})$$

und die auf der Zylinderoberfläche induzierte Metrik lautet

$$\begin{aligned} g_{ab} &= \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial X^B}{\partial x^b} g_{AB} = J_a^A \delta_{AB} J^B_b \\ &= \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -R \sin \varphi & 0 \\ R \cos \varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Mit (A.8) ergibt sich das Linienelement $^{(2)}ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = R^2 d\varphi^2 + dz^2$.

A.2 Induzierte Metrik II auf der Zylinderoberfläche

Zur Veranschaulichung des Zusammenhanges zwischen der auf \mathcal{N} induzierten Metrik g_{ab} und der auf $\widehat{\mathcal{N}}$ induzierten Metrik \widehat{g}_{AB} betrachten wir wieder eine im euklidischen Raum eingebettete Zylinderoberfläche. Der Normalenvektor im Punkt $p = (X, Y, Z)$ ist

$$n_A = \frac{1}{R}(X, Y, 0), \quad R = \sqrt{X^2 + Y^2} = \text{const.} \quad (\text{A.9})$$

Nach Gleichung (5.16) lautet die induzierte Metrik dann

$$\widehat{g}_{AB} = g_{AB} - n_A n_B = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} Y^2 & -XY & 0 \\ -XY & X^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Etwas anschaulicher wird diese Matrix, wenn man sie in Zylinderkoordinaten schreibt, also die Koordinatentransformation Θ aus dem vorigen Abschnitt durchführt. Wir drücken die zugehörige Jacobimatrix (A.4) durch die kartesischen Koordinaten (X, Y, Z) aus,

$$J^A_{A'} = \begin{pmatrix} X/r & -Y & 0 \\ Y/r & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{A'}^A = \begin{pmatrix} X/r & Y/r & 0 \\ -Y & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.11})$$

und nutzen die übliche Transformationsgleichung für die Komponenten eines

zweifach kovarianten Tensors,

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_{A'B'} &= \frac{\partial X^A}{\partial X^{A'}} \frac{\partial X^B}{\partial X^{B'}} \widehat{g}_{AB} = J_{A'}^A \widehat{g}_{AB} J^B_{B'} \\
&= \begin{pmatrix} X/r & Y/r & 0 \\ -Y & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} Y^2 & -XY & 0 \\ -XY & X^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X/r & -Y & 0 \\ Y/r & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})
\end{aligned}$$

In (5.18) wurde bereits allgemein gezeigt, dass das Pullback von \widehat{g}_{AB} , also die Komponenten \widehat{g}_{ab} , mit denen der induzierten Metrik g_{ab} übereinstimmen. Für das obige Beispiel (A.10) sieht die Rechnung wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
\widehat{g}_{ab} &= \frac{\partial X^A}{\partial x^a} \frac{\partial X^B}{\partial x^b} \widehat{g}_{AB} = J_a^A \widehat{g}_{AB} J^B_b \\
&= \begin{pmatrix} -Y & X & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} Y^2 & -XY & 0 \\ -XY & X^2 & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Y & 0 \\ X & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} X^4 + 2X^2Y^2 + Y^4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = g_{ab}, \quad (\text{A.13})
\end{aligned}$$

wobei die Jacobimatrix (A.7) in kartesischen Koordinaten ausgedrückt wurde.

A.3 Beweis der Symmetrie des äußeren Krümmungstensors

Der Normalenvektor erfüllt $\langle n, n \rangle = \sigma = \pm 1$, und damit gilt

$$\begin{aligned}
\nabla \langle n, n \rangle &= \langle \nabla n, n \rangle + \langle n, \nabla n \rangle = 0 \\
\curvearrowright \quad \langle n, \nabla n \rangle &= -\langle \nabla n, n \rangle = -\langle n, \nabla n \rangle \\
\curvearrowright \quad \langle n, \nabla n \rangle &= 0. \quad (\text{A.14})
\end{aligned}$$

Folglich steht die kovariante Ableitung des Normalenvektors senkrecht auf dem Normalenvektor, liegt also im Tangentialraum der Hyperfläche und kann durch Koordinaten der Hyperfläche ausgedrückt werden,

$$\nabla n = (\nabla n)^a e_{(a)}. \quad (\text{A.15})$$

Damit können die Komponenten des äußeren Krümmungstensors (5.21) folgendermaßen geschrieben werden (in der Standardbasis $e_{(a)}^c = \delta_a^c$):

$$K_{ab} = \langle e_{(a)}, \nabla_b n \rangle = (\nabla_b n)_a \quad \text{bzw.} \quad K^a_b = (\nabla_b n)^a. \quad (\text{A.16})$$

Die Symmetrie des äußeren Krümmungstensors ergibt sich dann wie folgt

$$\begin{aligned}
K_{ab} &= g_{ac} K^c{}_b \\
&= \langle e_{(a)}, e_{(c)} \rangle K^c{}_b \\
&= \langle e_{(a)}, K^c{}_b e_{(c)} \rangle \\
&= \langle e_{(a)}, (\nabla_b n)^c e_{(c)} \rangle \\
&= \langle e_{(a)}, \nabla_b n \rangle \\
&= -\langle \nabla_b e_{(a)}, n \rangle \\
&= -\langle \Gamma_{ab}^c e_{(c)}, n \rangle \\
&= -\langle \Gamma_{ba}^c e_{(c)}, n \rangle \\
&= K_{ba}.
\end{aligned} \tag{A.17}$$

In der zweiten Zeile steht die Definition des metrischen Tensors; in der sechsten Zeile wurde ausgenutzt, dass die Basisvektoren $e_{(a)}$ senkrecht zum Normalenvektor sind, $\langle e_{(a)}, n \rangle = 0$, und somit

$$\begin{aligned}
\nabla \langle e_{(a)}, n \rangle &= \langle \nabla e_{(a)}, n \rangle + \langle e_{(a)}, \nabla n \rangle = 0 \\
\curvearrowright \langle e_{(a)}, \nabla n \rangle &= -\langle \nabla e_{(a)}, n \rangle
\end{aligned} \tag{A.18}$$

gilt; in der siebten Zeile wurde die Definition der Christoffelsymbole (2.15) eingesetzt, in der achten Zeile deren Symmetrie ausgenutzt.

B Notation

Symbol	Bedeutung
$a := b$	a wird durch b definiert
$a =: b$	b wird durch a definiert
$f(x) \equiv g(x)$	Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sind identisch, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle x des Definitionsbereichs
\mathcal{M}	Mannigfaltigkeit der Dimension D
\mathcal{N}	Untermannigfaltigkeit bzw. Hyperfläche der Dimension d
Σ	Raumzeit-Mannigfaltigkeit
$\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$	Tangentialraum an \mathcal{M} im Punkt $p \in \mathcal{M}$
$\tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M})$	Dualer Tangentialraum an \mathcal{M} im Punkt $p \in \mathcal{M}$
$\Phi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$	Einbettung der Untermannigfaltigkeit \mathcal{N} in \mathcal{M}
$\Phi^*: \mathcal{T}_p(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$	Pushforward von Vektoren aus $\mathcal{T}_p(\mathcal{N})$ nach $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$
$\Phi_*: \tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M}) \rightarrow \tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{N})$	Pullback von Dualvektoren aus $\tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{M})$ nach $\tilde{\mathcal{T}}_p(\mathcal{N})$
$\hat{\mathcal{N}} := \Phi(\mathcal{N})$	Bild von \mathcal{N} in \mathcal{M}
$A, B, \dots = 0, \dots, D - 1$	Tensoren-Indizes
$a, b, \dots = 0, \dots, d - 1$	Tensoren-Indizes
$\alpha, \beta, \dots = 0, 1, 2, 3$	Tensoren-Indizes
$g_{AB}, g_{ab}, g_{\alpha\beta}$	Metrischer Tensor der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}, \mathcal{N} bzw. Σ
${}^{(D)}R, {}^{(d)}R, {}^{(4)}R$	Ricciskalar der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}, \mathcal{N} bzw. Σ
\hat{g}_{AB}	Metrischer Tensor der Untermannigfaltigkeit $\hat{\mathcal{N}}$, ausgedrückt in Koordinaten bezüglich einer Basis von $\mathcal{T}_p(\mathcal{M})$
$n = n(x)$	Normalenvektorfeld an eine Hyperfläche im Punkt x
$\sigma = \langle n, n \rangle = \pm 1$	Signatur des Normalenvektors. n ist raumartig für $\sigma = 1$ und zeitartig für $\sigma = -1$
$v, w \in \mathcal{T}_p(\mathcal{M})$	Tangentialvektoren der Mannigfaltigkeit \mathcal{M}
$v_{\parallel}, w_{\parallel} \in \mathcal{T}_p(\mathcal{N})$	Tangentialvektoren der Hyperfläche \mathcal{N}

C Konventionen

- Summenkonvention: Über gleiche ko- und kontravariante Indizes wird summiert
- Signatur der 4D-Metrik: $(-, +, +, +)$
- Signatur der 5D-Metrik: $(-, +, +, +, +)$
- Lichtgeschwindigkeit: $c = 1$
- Riemanntensor: $R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} := \partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\delta\beta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} + \Gamma^\alpha_{\gamma\varepsilon} \Gamma^\varepsilon_{\delta\beta} - \Gamma^\alpha_{\delta\varepsilon} \Gamma^\varepsilon_{\gamma\beta}$
- Riccitenor: $R_{\alpha\beta} := R^\gamma{}_{\alpha\gamma\beta}$
- Einstein'sche Feldgleichungen: $G_{\alpha\beta} := R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta} = 8\pi G T_{\alpha\beta}$
- Äußerer Krümmungstensor: $K(v_{\parallel}, w_{\parallel}) := \langle v_{\parallel}, \nabla_{w_{\parallel}} n \rangle$, $K_{ab} = (\nabla_b n)_a$
- Symmetrisierung: $A_{(ab)} = \frac{1}{2!} (A_{ab} + A_{ba})$,
 $A_{(abc)} = \frac{1}{3!} (A_{abc} + A_{bca} + A_{cab} + A_{acb} + A_{cba} + A_{bac})$ etc.
- Antisymmetrisierung: $B_{[ab]} = \frac{1}{2!} (B_{ab} - B_{ba})$,
 $B_{[abc]} = \frac{1}{3!} (B_{abc} + B_{bca} + B_{cab} - B_{acb} - B_{cba} - B_{bac})$ etc.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys. **17**, 891 (1905)
- [2] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, Phys. Z. **9**, 762 (1908)
- [3] A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. **44**, 778 (1915)
- [4] A. Einstein, *Zur allgemeinen Relativitätstheorie (Nachtrag)*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. **46**, 799 (1915)
- [5] A. Einstein, *Die Feldgleichungen der Gravitation*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. **48**, 844 (1915)
- [6] T. Kaluza, *Zum Unitätsproblem der Physik*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Math.-Phys. Kl., 966 (1921)
- [7] G. Nordström, *Über die Möglichkeit, das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld zu vereinigen*, Phys. Z. **15**, 504 (1914)
- [8] J. Plebański, A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne u.a., 2006
- [9] O. Klein, *Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*, Zs. f. Phys. **37**, 895 (1926)
- [10] H. G. Dosch, *Jenseits der Nanowelt*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005
- [11] C. Rovelli, *Loop Quantum Gravity*, Living Rev. Relativity, **11**, (2008), 5.
<http://www.livingreviews.org/lrr-2008-5>
- [12] E. Witten, *Search for a realistic Kaluza-Klein theory*, Nucl. Phys. B **186**, 412 (1981)
- [13] R. Maartens, *Brane-World Gravity*, Living Rev. Relativity, **7**, (2004), 7
<http://www.livingreviews.org/lrr-2004-7>
- [14] P. Hořava, E. Witten, *Heterotic and type I string dynamics from eleven dimensions*, Nucl. Phys. B **460**, 506 (1996)
arXiv:hep-th/9510209
- [15] P. Hořava, E. Witten, *Eleven-dimensional supergravity on a manifold with boundary*, Nucl. Phys. B **475**, 94 (1996)
arXiv:hep-th/9603142

- [16] L. Randall, R. Sundrum, *A Large Mass Hierarchy from a Small Extra Dimension*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999)
arXiv:hep-ph/9905221v1
- [17] L. Randall, R. Sundrum, *An Alternative to Compactification*, Phys. Rev. Lett. **83**, 4690 (1999)
arXiv:hep-th/9906064v1
- [18] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, G. Dvali, *The Hierarchy Problem and New Dimensions at a Millimeter*, Phys. Lett. B **429**, 263 (1998)
arXiv:hep-ph/9803315v1
- [19] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto, 1972
- [20] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, San Francisco, Boston, New York u.a., 2004
- [21] C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman & Company, San Francisco, 1973
- [22] J. R. Oppenheimer, G. M. Volkoff, *On Massive Neutron Cores*, Phys. Rev. **55**, 374 (1939)
- [23] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 189 (1916)
- [24] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Phys.-Math. Kl., 424 (1916)
- [25] F. Douchin, P. Haensel, *A unified equation of state of dense matter and neutron star structure*, A&A **380**, 151 (2001)
arXiv:astro-ph/0111092v2
- [26] P. Haensel, A. Y. Potekhin *Analytical representations of unified equations of state of neutron-star matter*, A&A **428**, 191 (2004)
arXiv:astro-ph/0408324v2
- [27] M. Camenzind, *Compact Objects in Astrophysics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007
- [28] É.ourgoulhon, *3+1 Formalism and Bases of Numerical Relativity*, (2007)
arXiv:gr-qc/0703035v1
- [29] M. Seikel, *Branenkosmologie als alternative Erklärung der dunklen Energie*, Diplomarbeit, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg, (2006)
<http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/6230>

-
- [30] M. Seikel, M. Camenzind, *Braneworlds with timelike extra-dimension*, (2008)
arXiv:astro-ph/0811.4629v1
- [31] T. Shiromizu, K. Maeda, M. Sasaki, *The Einstein Equations on the 3-Brane World*, Phys. Rev. D **62**, 024012 (2000)
arXiv:gr-qc/9910076v3
- [32] W. Israel, *Singular hypersurfaces and thin shells in general relativity*, Nuovo Cimento B **44**, 1 (1966)
- [33] R. Maartens, *Cosmological Dynamics on the brane*, Phys. Rev. D **62**, 084023 (2000)
arXiv:hep-th/0004166v3
- [34] C. Germani, R. Maartens, *Stars in the braneworld*, Phys. Rev. D **64**, 124010 (2001)
arXiv:hep-th/0107011v3
- [35] J. Ovalle, *Searching Exact Solutions for Compact Stars in Braneworld: a conjecture*, Mod. Phys. Lett. A **23** 3247 (2008)
arXiv:gr-qc/0703095v3
- [36] J. Ovalle, *Non-uniform Braneworld Stars: an Exact Solution*, (2008)
arXiv:gr-qc/0809.3547v1
- [37] N. Deruelle, *Stars on branes: the view from the brane*, (2001)
arXiv:gr-qc/0111065v1
- [38] R. Whisker, *Braneworld Black Holes*, PhD thesis, University of Durham, (2006)
arXiv:gr-qc/0810.1534v1
- [39] M. Azam, M. Sami, *Manybody treatment of white dwarf and neutron stars on the brane*, Phys. Rev. D **72** 024024 (2005)
arXiv:gr-qc/0502026v3
- [40] J. Ponce de Leon, *Stellar models with Schwarzschild and non-Schwarzschild vacuum exteriors*, Grav. Cosmol. **14**, 65 (2008)
arXiv:gr-qc/0711.0998v1
- [41] J. Ponce de Leon, *Static exteriors for nonstatic braneworld stars*, Class. Quant. Grav. **25**, 075012 (2008)
arXiv:gr-qc/0711.4415v2
- [42] T. Wiseman, *Relativistic Stars in Randall-Sundrum Gravity*, Phys. Rev. D **65**, 124007 (2002)
arXiv:hep-th/0111057v2

-
- [43] S. Creek, R. Gregory, P. Kanti, B. Mistry, *Braneworld Stars and Black Holes*, *Class. Quant. Grav.* **23**, 6633 (2006)
arXiv:hep-th/0606006v1
- [44] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, *Ann. Phys.* **50**, 106 (1916)
- [45] G. Nordström, *On the energy of the gravitational field in Einstein's theory*, *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.* **20**, 1238 (1918)
- [46] N. Dadhich, R. Maartens, P. Papadopoulos, V. Rezanian, *Black holes on the brane*, *Phys. Lett. B* **487**, 1 (2000)
arXiv:hep-th/0003061v3
- [47] S. E. Thorsett, D. Chakrabarty, *Neutron star masses measurements. I. Radio pulsars*, *ApJ* **512**, 288 (1999)
arXiv:astro-ph/9803260v1
- [48] T. Guver, F. Ozel, A. Cabrera-Lavers, P. Wroblewski, *The Distance, Mass, and Radius of the Neutron Star in 4U 1608-52*, (2008)
arXiv:astro-ph/08011.3979v1
- [49] R. Ozel, T. Guver, D. Psaltis, *The Mass and Radius of the Neutron Star in EXO 1745-248*, (2008)
arXiv:astro-ph/0810.1521v1

Erklärung

Ich versichere, dass ich diese Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe.

Heidelberg, den 23. Januar 2009.

M. G. Bernhardt