

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Ulrich Herbst
aus Landau i. d. Pfalz

Tag der mündlichen Prüfung: 28.10.2009

**Über die AGB-Entwicklung
metallfreier und extrem metallarmer
Sterne mittlerer Masse**

**Gutachter: Prof. Dr. Werner M. Tscharnuter
Prof. Dr. Norbert Christlieb**

Zusammenfassung. Wir legen eine Serie von Entwicklungsrechnungen für Sterne der Population III zwischen 2 und 10 Sonnenmassen von der Hauptreihe bis zum Heliumschalenbrennen vor. Zwei dieser Modelle verfolgen wir in die thermischen Pulse auf dem Asymptotischen Riesenast (TPAGB). Wir beobachten neben den thermischen Pulsen, dem dritten Dredge-up und dem Hot Bottom Burning insbesondere den »Carbon Ingestion Flash«, der eine Eigenheit extrem metallarmer Sternmodelle ist: Während eines thermischen Pulses entsteht eine zusätzliche Konvektionszone oberhalb der Wasserstoffschalenquelle. Sie reicht bis in kohlenstoffreiche Schichten und induziert so den Einstrom von Kohlenstoff in die noch sehr kohlenstoffarme Wasserstoffschalenquelle. Dadurch wird das Wasserstoffbrennen im CNO-Zyklus stark angefacht, und beide Schalenquellen erreichen gleichzeitig ein Maximum ihrer Aktivität. Dieses Phänomen findet nur bei den ersten thermischen Pulsen statt; durch den Dredge-up wird die Hülle rasch so weit angereichert, dass die weitere Entwicklung normal verläuft.

Die Relationen zwischen Kernmasse und Leuchtkraft bzw. Zwischenpulsdauer weichen bei unseren extrem metallarmen Modellen vom solaren Fall ab: Die Leuchtkraft ist um 10 bis 30 % geringer, die Zwischenpulsdauer um einen Faktor 6 bis 10 länger.

Der vorliegende Code berücksichtigt die Zeitabhängigkeit der konvektiven Mischung und löst alle Gleichungen für den Aufbau und die Entwicklung des Sterns implizit und gekoppelt.

Abstract. We present a series of evolutionary calculations for stars of population III with 2 to 10 solar masses from the main sequence to helium shell burning. Two of these models are continued onto the thermally pulsing asymptotic giant branch (TPAGB). We observe thermal pulses, third dredge-up and hot bottom burning as well as the »carbon ingestion flash«; the latter is exclusive to extremely metal poor stellar models: During a thermal pulse, an additional convection zone above the hydrogen shell source develops. This convection zone touches carbon rich layers and thus induces the influx of carbon into the extremely carbon poor hydrogen shell source. Hence, hydrogen burning via the CNO-cycle is strongly enhanced, and both shell sources reach an activity maximum at the same time. This phenomenon only occurs during the very first thermal pulses; the stellar envelope is soon enriched due to the third dredge-up, such that the further evolution is normal.

The relations between core mass and luminosity as well as interpulse period in our extremely metal poor models deviate from the solar case: The luminosity is lower by 10 to 30 %, the interpulse period longer by a factor 6 to 10.

The presented code takes the time dependence of convective mixing into account and solves all equations of stellar structure and evolution implicitly and simultaneously.

TELESCOPE. A device having a relation to the eye similar to that of the telephone to the ear, enabling distant objects to plague us with a multitude of needless details. Luckily it is unprovided with a bell summoning us to the sacrifice.

AMBROSE G. BIERCE, *The Devil's Dictionary*

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Sterne auf dem Asymptotischen Riesenast	1
1.2	Die Sterne der Population III	2
1.3	Zielsetzung der Arbeit	4
2	Grundlagen	5
2.1	Die Grundgleichungen des Sternaufbaus	5
2.1.1	Die Lagrangesche Koordinate	5
2.1.2	Massenerhaltung und die Poissongleichung	6
2.1.3	Die hydrostatische Gleichung	6
2.1.4	Die Energiegleichung	7
2.1.5	Die Transportgleichung	8
2.1.6	Die chemische Entwicklung	10
2.2	Die Zeitskalen der Sternentwicklung	13
2.2.1	Die hydrodynamische Zeitskala	13
2.2.2	Die Kelvin-Helmholtz-Zeit	14
2.2.3	Die nukleare Zeitskala	14
2.2.4	Vergleich der Zeitskalen	14
2.3	Die Randbedingungen	15
2.3.1	Ein einfaches Atmosphärenmodell	15
3	Materialfunktionen	17
3.1	Die Zustandsgleichung	17
3.1.1	Das ideale Gas	19
3.1.2	Das ideale Gas mit Strahlung	19
3.1.3	Partielle Ionisation	20
3.1.4	Partielle Entartung	20
3.2	Die Kernreaktionen	21
3.2.1	Das Wasserstoffbrennen	22
3.2.2	Das Heliumbrennen	24
3.2.3	Das Kohlenstoff- und Sauerstoffbrennen	24
3.3	Die Opazitäten	25
3.4	Die Neutrinoverluste	25
3.5	Der Massenverlust	25
4	Ein wenig Theorie	27
4.1	Der Virialsatz	27
4.2	Die thermische Stabilität von nuklearem Brennen	28

INHALTSVERZEICHNIS

4.2.1	Homolog benachbarte Sternmodelle	29
4.2.2	Die gravothermische spezifische Wärme	30
4.2.3	Die Stabilität des zentralen Brennens	31
4.2.4	Die Stabilität des Schalenbrennens	33
5	Numerisches Verfahren	35
5.1	Lösungsverfahren	35
5.1.1	Diskretisierung	35
5.1.2	Zeitschritt	36
5.1.3	Konvergenz und Diffusionskoeffizient	37
5.2	Gitterverfeinerung	38
5.2.1	Einfügen und Entfernen	38
5.2.2	Interpolation und Nachiteration	40
5.2.3	Unstetigkeiten in der Lösung	40
5.3	Massenverlust	41
5.4	Anfangsmodelle	41
5.5	Tests zur räumlichen und zeitlichen Schrittweite	42
6	Eigene Entwicklungsrechnungen für metallarme Sterne mittlerer Masse	45
6.1	Ein Modell der Population II	45
6.1.1	Parameter der Rechnung	45
6.1.2	Der Ablauf eines thermischen Pulses	47
6.1.3	Die gesamte TPAGB-Phase des $3 M_{\odot}$ -Modells	52
6.1.4	Die Abhängigkeit der Pulse von der Kernmasse	55
6.1.5	Die Post-AGB-Entwicklung	57
6.2	Modelle der Population III	59
6.2.1	Parameter der Rechnungen	59
6.2.2	Die Entwicklung eines $5 M_{\odot}$ -Sterns bis zum EAGB	60
6.2.3	Vergleich der Modelle mit verschiedenen Massen	72
6.2.4	Die Entwicklung eines $5 M_{\odot}$ -Sterns auf dem TPAGB	76
6.2.5	Zum $3 M_{\odot}$ -Modell der Population III	83
7	Zusammenfassung und Ausblick	89
7.1	Zusammenfassung und Diskussion	89
7.2	Ausblick	91
A	Verzeichnis der verwendeten Symbole	93
A.1	Physikalische Konstanten	93
A.2	Astronomische Konstanten	93
A.3	Variablen	94
	Abbildungsverzeichnis	97
	Literaturverzeichnis	99

Kapitel 1

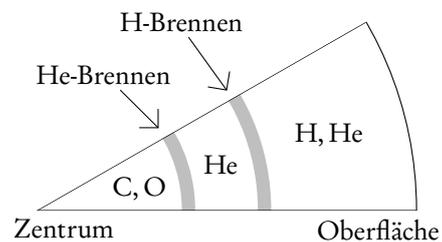
Einleitung

Bereits in den 1950er Jahren wurde die Idee entwickelt, dass der beobachtete, sehr unterschiedliche Metallgehalt¹ verschiedener Sternpopulationen in unserer Galaxis kaum anders als durch eine chemische Entwicklung des interstellaren Mediums, genauer gesagt eine Anreicherung der galaktischen Materie mit Elementen schwerer als Helium zu erklären ist. Schon Schwarzschild und Spitzer (1953) schlugen als Ort der dazu nötigen nuklearen Reaktionen die Sterne, besonders die Explosion massereicher Sterne als Supernovae, vor. In der epochemachenden Arbeit von Burbidge, Burbidge, Fowler und Hoyle (1957) wurde das Bild der Sterne als Quelle aller Elemente außer Wasserstoff und Helium² verfestigt und einzelne Elemente den sie erzeugenden Prozessen und verschiedenen Sterntypen zugeordnet.

Aus dieser Überlegung erwachsen zwei der interessantesten Fragen der stellaren Astrophysik: In welcher Hinsicht unterscheiden sich die metallarmen Sterne früherer Generationen von den später entstandenen Sternen, deren Zusammensetzung etwa der der Sonne gleicht? In welchen Sternen können welche Elemente erzeugt und an den Kosmos abgegeben werden?

1.1 Die Sterne auf dem Asymptotischen Riesenast

Die Sterne, deren Masse zu Beginn ihrer Entwicklung zwischen etwa 0,8 und 8 Sonnenmassen liegt, bilden, nachdem sie in ihrem Inneren zunächst Wasserstoff zu Helium und dieses in einer zweiten Stufe bei höherer Temperatur zu Kohlenstoff und Sauerstoff fusioniert haben, einen heißen und dichten Kern aus Kohlenstoff und Sauerstoff aus, der vom Druck des entarteten Elektronengases stabilisiert wird. Die aus ihrer Vorgeschichte resultierende innere Struktur ist nebenstehend skizziert³: Über dem Kern aus Kohlenstoff und Sauerstoff befindet sich eine dünne Schicht aus Helium, darüber wiederum die stellare Hülle, die aus weitgehend unprozessiertem Material, d. h. aus einem Gemisch von Wasserstoff und Helium, besteht.



Da sich die Sterne in dieser Spätphase ihrer Entwicklung im Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD) mit wachsender Leuchtkraft immer mehr dem Roten Riesenast annähern, spricht man hier vom Asymptotischen Riesenast, engl. »Asymptotic Giant Branch« oder kurz AGB. Der

¹In der Astronomie werden traditionell *alle Elemente außer Wasserstoff und Helium als Metalle bezeichnet*.

²Helium stammt zum größten Teil aus dem Urknall und zu einem kleineren Teil aus den Sternen.

³Die Skizze ist nicht maßstabsgerecht.

Name leitet sich also nicht von Eigenschaften dieser Sterne selbst, sondern von ihrer Lage im Hertzsprung-Russell-Diagramm ab.

Die AGB-Sterne verfügen, wie ebenfalls in der Skizze angedeutet, über zwei nukleare Energiequellen: Zum Ersten kann der Wasserstoff an der Untergrenze der stellaren Hülle zu Helium fusionieren; zum Zweiten kann aber auch Helium am Übergang zum Kern zu schwereren Elementen verbrannt werden. Nach der Aktivität dieser beiden Schalenquellen wird die AGB-Phase in zwei Abschnitte gegliedert. In der ersten Phase ist nur das Heliumbrennen aktiv, und es findet kein Wasserstoffbrennen statt, da die Temperatur zu gering ist. Dieser Abschnitt wird als »Early Asymptotic Giant Branch« (EAGB) bezeichnet. Im Verlauf der EAGB-Phase steigt die Temperatur am Fuß der Hülle soweit an, dass das Wasserstoffbrennen dort zündet. Wie Schwarzschild und Härm (1965) und Weigert (1966) unabhängig voneinander fanden, ist eine solche Konfiguration mit zwei aktiven Schalenquellen thermisch nicht stabil: Fast immer liefert das Wasserstoffbrennen den bei weitem überwiegenden Teil der benötigten Energie, es wird aber immer wieder quasiperiodisch durch Ausbrüche von Heliumbrennen unterbrochen. Diese Ausbrüche werden aufgrund der Natur der sie verursachenden Instabilität thermische Pulse genannt. Der zweite Teil der AGB-Entwicklung wird entsprechend als »Thermally Pulsing Asymptotic Giant Branch« (TPAGB) bezeichnet.

Im Gefolge der thermischen Pulse finden Mischvorgänge statt, die es unter günstigen Umständen erlauben, prozessiertes Material aus dem Inneren des Sterns an seine Oberfläche zu transportieren¹. Durch den Sternwind werden die im Stern entstandenen schweren Elemente dann an das interstellare Medium abgegeben. Die AGB-Sterne tragen so in nicht unerheblichem Maße zur Anreicherung der galaktischen Elementmischung bei. Dies betrifft ganz besonders die für das Leben fundamentalen Elemente Kohlenstoff und Stickstoff. Die AGB-Sterne sind außerdem auch der astrophysikalische Ort, an dem der *s*-Prozess stattfindet: In ihren Brennzone können im Zusammenhang mit den thermischen Pulsen neutronenreiche Kerne jenseits von Eisen gebildet werden. Die an das interstellare Medium abgegebenen Metalle kondensieren im Sternwind teilweise zu Staub (Ferrarotti und Gail, 2006; Zhukovska et al., 2008). Dadurch liefern die AGB-Sterne einen wesentlichen Beitrag zur Stauberzeugung, der möglicherweise schon im recht jungen Universum nicht vernachlässigbar war (Valiante et al., 2009).

Die klassischen Ergebnisse zur Entwicklung und Nukleosynthese der AGB-Sterne fanden ihren Niederschlag im Übersichtsartikel von Iben und Renzini (1983). Neuere Aspekte und Erkenntnisse zu diesen Fragen finden sich im Übersichtsartikel von Herwig (2005). Einsicht in die komplizierten Nukleosyntheseprozesse, besonders des *s*-Prozesses, in AGB-Sternen bieten Busso, Gallino und Wasserburg (1999). Das Buch von Habing und Olofsson (2003) stellt umfangreiche Artikel über viele Aspekte der AGB-Sterne zusammen.

1.2 Die Sterne der Population III

Nach dem modernen physikalischen Weltbild begann das Universum mit dem Urknall. Innerhalb weniger Minuten danach entstand die primordiale Elementmischung, die fast ausschließlich aus Wasserstoff und Helium bestand. Schwerere Elemente wurden bei diesen Nukleosyntheseprozessen allenfalls in kleinsten Spuren erzeugt.² Da, abgesehen vom Urknall selbst, allein

¹Dieser Vorgang wird als »Dredge-up« (deutsch etwa »hochschaufeln«) bezeichnet. In der Entwicklung eines Sterns gibt es mehrere Stadien, die einen solchen Dredge-up ermöglichen. Nach dem Ende des zentralen Wasserstoffbrennens spricht man vom ersten, nach dem Ende des zentralen Heliumbrennens vom zweiten und nach einem thermischen Puls vom dritten Dredge-up. Diese Namen werden unabhängig davon, ob und wie oft das Ereignis stattfindet, gebraucht.

²Die primordiale Elementmischung enthielt neben ¹H und ⁴He kleine Beimengungen von ²H, ³He und ⁷Li (für aktuelle Zahlenwerte s. z. B. Steigman, 2007). Der Massenanteil der Metalle war kleiner als 10⁻¹⁰.

1.2. DIE STERNE DER POPULATION III

in den Sternen Bedingungen herrschen, die Kernreaktionen in großem Umfang ermöglichen, wurde mit der Etablierung der Modelle zur Urknall-Nukleosynthese der Schluss, dass es eine erste Generation von Sternen gegeben haben muss, die aus metallfreiem Gas, also nur aus Wasserstoff und Helium, gebildet wurden, immer zwingender. Diese (nach wie vor hypothetische) Generation von Sternen wird in Fortsetzung einer von Baade eingeführten Klassifikation als Population III bezeichnet.

Wegen der Abwesenheit von Metallen und daher insbesondere von Staub im jungen Universum steht bei der Bildung der Sterne der Population III (in Anbetracht der dabei herrschenden Bedingungen) einzig molekularer Wasserstoff zur Kühlung zur Verfügung. Dies führt zu einer im Vergleich zur heutigen Sternentstehung deutlich größeren Jeans-Masse. Es wird daher allgemein angenommen, dass die Sterne der Population III sehr massereich waren; ihre charakteristische Masse lag in der Größenordnung von $100 M_{\odot}$ (z. B. Bromm und Larson, 2004). Allerdings sind trotz vieler Simulationsrechnungen weder der genaue Wert der charakteristischen Masse, noch die Form der Anfangs-Massen-Funktion bekannt. Es gibt auch Arbeiten, die Mechanismen vorschlagen, die zur Bildung von massearmen Sternen führen könnten, und die daher eine Anfangs-Massen-Funktion mit einem Nebenmaximum bei kleinen Massen um $1 M_{\odot}$ erwarten (Nakamura und Umemura, 2001). Bei welcher Metallizität der Übergang zur heutigen Anfangs-Massen-Funktion stattfand, ist ebenfalls noch unklar.

Nicht nur die Entstehung, sondern auch die weitere Entwicklung der Sterne der Population III weist Besonderheiten auf. Da sie ihre Entwicklung ohne Metalle beginnen, kann in ihrem Inneren der CNO-Zyklus nicht ablaufen. Das bedeutet, dass jeder Stern der Population III – unabhängig von seiner Masse und im Gegensatz zu Sternen solarer Zusammensetzung – zunächst nur auf die pp-Ketten als nukleare Energiequellen zurückgreifen kann. Da bei einem massereichen Stern dieser Prozess nicht ausreicht, um die durch die mechanische Struktur bestimmte Leuchtkraft zu erzeugen, ist der Stern gezwungen, durch Kontraktion zusätzlich Gravitationsenergie freizusetzen. Dadurch erhöht sich die Temperatur im Inneren, bis etwa 10^8 K erreicht werden und damit der 3α -Prozess in Gang kommt. Er trägt zu diesem Zeitpunkt *nicht* zur Energieproduktion bei. Seine Bedeutung besteht vielmehr darin, den bis jetzt immer noch metallfreien Stern mit ^{12}C anzureichern. Erreicht die Konzentration von Kohlenstoff einen Massenanteil von etwa 10^{-11} , so tritt zu den bisher bereits aktiven pp-Ketten noch der CNO-Zyklus hinzu. Auf die Fähigkeit genügend massereicher, metallfreier Sterne, sich den für den CNO-Zyklus nötigen Katalysator Kohlenstoff noch auf der Hauptreihe selbst zu erzeugen, hat bereits Ezer (1961) hingewiesen.

Auch spätere Entwicklungsphasen sind von der ursprünglichen Metallfreiheit nicht unbedingt unbeeinflusst. So wird z. B. vermutet, dass den Sternen der Population III mit Massen zwischen $140 M_{\odot}$ und $260 M_{\odot}$ auch eine grundsätzlich neue, aber bisher noch unbeobachtete Art der Supernova-Explosion, die Paarinstabilitäts-Supernova, offensteht (Heger et al., 2003).

Die Suche nach extrem metallarmen Sternen ist ein sehr aktives Arbeitsgebiet der beobachtenden Astronomie (z. B. Beers und Christlieb, 2005). Einer der zur Zeit metallärmsten, genauer gesagt eisenärmsten, bekannten Sterne ist HE 1327–2326. Laut der Analyse von Frebel et al. (2008) hat er einen Eisengehalt von $[\text{Fe}/\text{H}] < -5$, d. h. mehr als 100 000mal geringer als die Sonne¹.

Eine besonders interessante Klasse von Objekten sind Sterne, die zwar insgesamt metallarm sind, bei denen aber der Kohlenstoffanteil gegenüber der restlichen Elementmischung zum Teil um mehrere Größenordnungen erhöht ist. Sie werden als »Carbon Enhanced Metal Poor Stars« (CEMP) bezeichnet. Sterne mit $[\text{C}/\text{Fe}] > +1,0$ sind bei den metallarmen Sternen mit

¹Es ist $[A/B] := \log(n_A/n_B) - \log(n_A/n_B)_{\odot}$, wobei n_A , n_B die Anzahldichten der Elemente A, B bezeichnen und sich mit » \odot « gekennzeichnete Werte auf die Sonne beziehen.

$[\text{Fe}/\text{H}] < -2,0$ um ein vielfaches häufiger anzutreffen als bei den Sternen mit sonnenähnlicher Metallizität (Beers und Christlieb, 2005). Dies legt nahe, dass bereits im frühen Universum eine nennenswerte Menge Kohlenstoff erzeugt wurde. Eine mögliche Quelle dafür sind AGB-Sterne, die als Mitglieder von Doppelsternsystemen auf ihren masseärmeren und daher langlebigeren Begleiter kohlenstoffreiches Material übertragen können. Obwohl es auch andere Szenarien gibt, sprechen zwei Beobachtungen deutlich für die AGB-Sterne: Zum Ersten zeigen in einer Studie von Aoki et al. (2007) etwa 80 % der CEMP-Sterne auch eine Anreicherung von s -Elementen, deren natürliche Quelle ebenfalls die AGB-Sterne sind. Zum Zweiten finden Lucatello et al. (2005) bei auffällig vielen mit s -Elementen angereicherten CEMP-Sternen Variationen der Radialgeschwindigkeit, die auf Mitgliedschaft in einem Doppelsternsystem schließen lassen.¹

So sind die CEMP-Sterne, die zur Zeit von den Beobachtern eingehend untersucht werden, neben den Simulationen zur chemischen Entwicklung der Galaxis die Anwendungsmöglichkeit und Herausforderung für Modelle metallarmer AGB-Sterne.

1.3 Zielsetzung der Arbeit

Ziel der Arbeit ist die Berechnung von Modellen für die Entwicklung von Sternen mittlerer Masse, die bei ihrer Entstehung extrem metallarm oder vollständig metallfrei sind. Diese Modelle sollen bis in die thermischen Pulse und, falls möglich, bis ans Ende des TPAGB verfolgt werden. Dabei interessieren uns vor allem die im Stern erzeugten und durch den Sternwind an die umgebende interstellare Materie abgegebenen schwereren Elemente, insbesondere Kohlenstoff, Stickstoff und Sauerstoff. Die Nukleosynthese durch den s -Prozess ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Zur Berechnung der Modelle wird der Sternentwicklungscode von Straka (2002, 2004), der zunächst für massereiche Hauptreihensterne der Population III konzipiert war, erweitert, so dass er auch für die Spätphasen der Entwicklung von Sternen mittlerer Masse eingesetzt werden kann. Der wichtigste Bestandteil dieser Erweiterung ist der Einbau eines adaptiven Gitters, da die Verwendung eines festen Gitters (wie in Straka, 2002) für die AGB-Phase nicht mehr angemessen ist. Außerdem gehen wir von der von Straka (2002) verwendeten zeitabhängigen Konvektionstheorie ab und greifen auf die klassische Mischungswegtheorie zurück. Ebenso müssen die Zustandsgleichung erweitert und der Massenverlust durch den Sternwind implementiert werden. Sowohl die zeitabhängige Behandlung der konvektiven Mischung² als auch die vollständig gekoppelte Lösung aller Gleichungen wird dabei beibehalten.

¹Aoki et al. (2007) zeigen auch, dass die AGB-Sterne nicht für alle CEMP-Sterne verantwortlich zu machen sind. Außerdem sind die Details der Häufigkeitsprofile der CEMP-Sterne mit den gegenwärtigen AGB-Modellen nicht zu erklären.

²Auf die Wichtigkeit der zeitabhängigen Behandlung der konvektiven Mischung in diesem Kontext haben jüngst auch Campbell und Lattanzio (2008) hingewiesen.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Die Grundgleichungen des Sternaufbaus

In diesem Abschnitt werden die Grundgleichungen des hydrostatischen, sphärisch symmetrischen Sternaufbaus angegeben und kurz motiviert. Für detailliertere Betrachtungen sei auf die einschlägigen Lehrbücher von Cox und Giuli (neu herausgegeben von Weiss et al., 2004), Hansen und Kawaler (1994) sowie insbesondere auf Kippenhahn und Weigert (1990) verwiesen.

2.1.1 Die Lagrangesche Koordinate

Alle im Stern auftretenden Größen sind Funktionen des Ortes und der Zeit, bei sphärischer Symmetrie also von r und t . In der Sternentwicklung wird häufig statt der Eulerschen Koordinate r die Lagrangesche Koordinate m verwendet.¹ Die Lagrangesche Koordinate ist die innerhalb eines Radius r eingeschlossene Masse m , bei einer Massendichte $\rho(r, t)$ also

$$m(r, t) = 4\pi \int_0^r \rho(r, t) r^2 dr. \quad (2.1)$$

Die Größe $m(r, t)$ ist eine streng monoton wachsende Funktion von r , da der Integrand, abgesehen vom Punkt $r = 0$, positiv ist. Daher ist die Koordinatentransformation von (r, t) nach (m, t) zulässig. Ableitungen nach der Koordinate werden gemäß

$$\frac{\partial}{\partial m} = \frac{\partial r}{\partial m} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.2)$$

ineinander umgerechnet. Darüber hinaus gilt $m(0, t) = 0$, da der Integrand regulär ist, und $m(R, t) = M$, wo R den Sternradius und M die Sternmasse bezeichnet.

Die Verwendung der Lagrangeschen Koordinate bietet gegenüber der Eulerschen im wesentlichen zwei Vorteile: Zum einen hat das Problem, formuliert in Eulerscher Koordinate, einen freien Rand, nämlich den a priori unbekanntem und stark veränderlichen Sternradius, in Lagrangescher Koordinate dagegen einen festen Rand, die vorgegebene Sternmasse; zum anderen haben die Erhaltungsgleichungen und die Thermodynamik nur in massenfesten Koordinaten eine einfache Form, und es gibt keine Advektionsterme.

¹Die bemerkenswerte Ausnahme ist der Code von Eggleton (1971, 1972), in dem ein bewegliches Gitter verwendet wird, die Koordinate also weder Eulersch noch Lagrangesch ist.

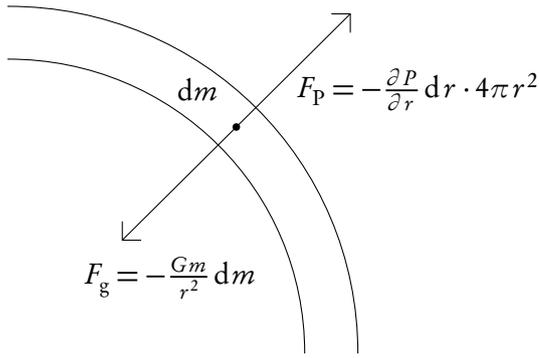


Abbildung 2.1: Zur hydrostatischen Gleichung.

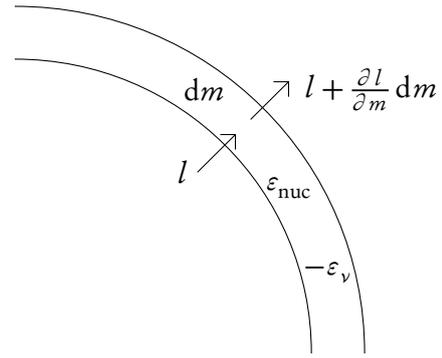


Abbildung 2.2: Zur Energiegleichung.

2.1.2 Massenerhaltung und die Poissongleichung

Die erste Gleichung zur Beschreibung des Sternaufbaus ist bereits bei der Koordinatenwahl angeklungen, denn aus Gl. (2.1) folgt unmittelbar

$$\frac{\partial r}{\partial m} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho}. \quad (2.3)$$

Ein Stern ist ein selbstgravitierendes System, d. h. die Gravitationskraft auf ein Massenelement dm muss aus der Massenverteilung berechnet werden. Im allgemeinen Fall ohne Symmetrie muss dazu die volle Poissongleichung gelöst werden. Im Fall von Kugelsymmetrie ist die Lösung der Poissongleichung besonders einfach, denn es ist

$$4\pi G\rho = \Delta\Phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), \quad (2.4)$$

und daher gilt unter Verwendung von Gl. (2.1) für die Schwerebeschleunigung

$$g = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \int_0^r 4\pi G\rho r^2 dr = \frac{Gm}{r^2}. \quad (2.5)$$

Insbesondere hängt die Schwerebeschleunigung g nur von der Radialkoordinate r und der eingeschlossenen Masse m ab. In diesem Sinn vertritt Gl. (2.3) hier die Poissongleichung.

2.1.3 Die hydrostatische Gleichung

Auf eine Kugelschale der Masse dm (s. Abb. 2.1) wirken zwei Kräfte: Druck und Gravitation. Daraus ergibt sich die Bewegungsgleichung für das Massenelement dm zu

$$dm \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial r} \frac{dm}{\rho} - \frac{Gm}{r^2} dm, \quad (2.6)$$

bzw. nach Kürzen von dm und in Lagrangescher Koordinate zu

$$\frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} = -\frac{\partial P}{\partial m} - \frac{Gm}{4\pi r^4}. \quad (2.7)$$

Wir nehmen im folgenden immer an, dass sich der Stern im hydrostatischen Gleichgewicht befindet, d. h. dass sich Druck- und Gravitationskraft gerade ausgleichen und die Trägheitskraft

2.1. DIE GRUNDGLEICHUNGEN DES STERNAUFBAUS

auf der linken Seite von Gl. (2.7) verschwindet. Damit erhalten wir eine Differentialgleichung für die Druckschichtung im Stern,

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}. \quad (2.8)$$

Die Annahme hydrostatischen Gleichgewichts wird durch ein Zeitskalenargument in Abschn. 2.2 gerechtfertigt.

2.1.4 Die Energiegleichung

Wir betrachten die Energiebilanz einer sphärischen Massenschale dm (s. Abb. 2.2). Die pro Massen- und Zeiteinheit durch nukleare Prozesse freigesetzte Energie wird mit ε_{nuc} bezeichnet, der Energiefluss durch die Oberfläche der Massenschale¹ mit l . Falls sich die nukleare Energieerzeugung und der Energieabstrom nach außen nicht ausgleichen, wird die Differenz der Massenschale als Wärme zugeführt bzw. entnommen. Bezeichnet dq die spezifische Wärmeänderung, so erhalten wir aus der Energiebilanz der Schale die Differentialgleichung

$$\frac{\partial l}{\partial m} = \varepsilon_{\text{nuc}} - \varepsilon_v - \frac{dq}{dt} = \varepsilon_{\text{nuc}} - \varepsilon_v + \varepsilon_g. \quad (2.9)$$

Hierbei haben wir für die Zeitableitung das gebräuchliche Symbol $\varepsilon_g := -dq/dt$ benutzt und zusätzlich berücksichtigt, dass im Stern entstehende Neutrinos diesen ungehindert verlassen können und daher eine Energiesenke ε_v verursachen. Die Vorzeichen sind so gewählt, dass sowohl ε_{nuc} als auch ε_v immer positiv sind; der Term ε_g kann beide Vorzeichen haben. Die nukleare Energieerzeugung ε_{nuc} wird aus einem Reaktionsnetzwerk berechnet, s. dazu S. 13.

Der Zeitterm ε_g muss nun noch durch Zustandsgrößen ausgedrückt werden. Mit der spezifischen inneren Energie u und dem spezifischen Volumen $v = 1/\rho$ gilt gemäß dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik

$$dq = du + P dv = du - \frac{P}{\rho^2} d\rho, \quad (2.10)$$

so dass wir schreiben können

$$\varepsilon_g = -\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.11)$$

Die häufig verwendete Gleichung²

$$dq = T ds = c_p dT - \frac{\delta}{\rho} dP \quad \text{und daher} \quad \varepsilon_g = -c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\delta}{\rho} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (2.12)$$

ist streng genommen nur korrekt, falls die chemische Zusammensetzung konstant bleibt, was aber i. allg. nicht der Fall ist. Vgl. dazu die Diskussion bei Straka (2002).

¹Bei sphärischer Symmetrie bietet es sich an, die Energiestromdichte F gleich über die Kugeloberfläche zu integrieren, so dass

$$l = \int r^2 d\Omega \cdot F = r^2 F_r \int d\Omega = 4\pi r^2 F_r = 4\pi r^2 F.$$

²mit $\delta = -\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{P,\mu}$ und $c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T}\right)_P$; vgl. Abschn. 3.1

2.1.5 Die Transportgleichung

Aus der Betrachtung der Energietransportprozesse im Stern wird eine Gleichung für die Temperaturschichtung $T(m)$ gewonnen. Zunächst wird dazu der Temperaturgradient $\partial T/\partial m$ unter Verwendung der hydrostatischen Gleichung (2.8) umformuliert,

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \frac{\partial P}{\partial m} \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{\partial P}{\partial m} \frac{T}{P} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla. \quad (2.13)$$

Hierbei bezeichnet ∇ den Temperaturgradienten der Schichtung,

$$\nabla := \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right). \quad (2.14)$$

Die so entstandene Transportgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla \quad (2.15)$$

hilft alleine noch nicht weiter, denn das Problem wurde lediglich von der Bestimmung von $\partial T/\partial m$ auf die Bestimmung von ∇ verschoben. Letzteres muss aus einer näheren Betrachtung der beteiligten Energietransportprozesse gewonnen werden. Die für Sterne relevanten Energietransportprozesse sind Strahlung und Konvektion, bei entartetem Elektronengas auch Wärmeleitung.

Radiativer Energietransport

Die freie Weglänge für ein Photon, d. h. die Strecke, die es zurücklegen kann, bevor es, statistisch betrachtet, wieder absorbiert wird, ist gegeben durch

$$\ell = \frac{1}{\kappa \rho}, \quad (2.16)$$

wobei κ die Rosselandsche Opazität¹ bezeichnet. Mit für das Sterninnere typischen Werten kommt man auf freie Weglängen von wenigen Zentimetern. Es ist daher möglich, den Strahlungstransport als Diffusion der Photonen durch den Stern zu betrachten, was die mathematische Behandlung erheblich vereinfacht. Die folgende Diffusionsapproximation kann auch mathematisch strenger als Näherungslösung der Strahlungstransportgleichung für optisch dicke Medien abgeleitet werden, so z. B. in Mihalas (1970, Kap. 1.6).

Das allgemeine Diffusionsgesetz verknüpft einen Strom \mathbf{j} mit dem Gradienten einer Dichte n ; es lautet

$$\mathbf{j} = -D \nabla n. \quad (2.17)$$

Der Diffusionskoeffizient D ist dabei das Produkt aus einer charakteristischen Länge und einer charakteristischen Geschwindigkeit, für Photonen also

$$D = \frac{1}{3} \ell v = \frac{c}{3\kappa \rho}. \quad (2.18)$$

¹Bezeichnet κ_ν die Opazität bei der Frequenz ν , so ist die Rosselandsche Opazität κ_R definiert durch

$$\frac{1}{\kappa_R} = \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} \frac{1}{\kappa_\nu} d\nu \bigg/ \int_0^\infty \frac{\partial B_\nu}{\partial T} d\nu.$$

$B_\nu(T)$ ist die Kirchhoff-Planck-Funktion. Da wir ausschließlich die Rosselandsche Opazität verwenden, lassen wir den Index »R« fort.

2.1. DIE GRUNDGLEICHUNGEN DES STERNAUFBAUS

Die diffundierende Größe ist die Energie des Strahlungsfeldes,

$$u_{\text{rad}} = aT^4. \quad (2.19)$$

Damit ergibt sich ein radiativer Energiefluss F_{rad} von

$$F_{\text{rad}} = -\frac{4ac}{3} \frac{T^3}{\chi\rho} \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (2.20)$$

Wird die lokale Leuchtkraft vollständig durch Strahlung transportiert, d. h. $l = 4\pi r^2 F_{\text{rad}}$, erhalten wir eine Gleichung der Form (2.15),

$$\frac{\partial T}{\partial m} = -\frac{3}{64\pi^2 ac} \frac{\chi l}{r^4 T^3} = -\frac{GmT}{4\pi r^4 P} \nabla_{\text{rad}}, \quad (2.21)$$

mit der Festsetzung des radiativen Gradienten zu

$$\nabla_{\text{rad}} := \frac{3}{16\pi ac G} \frac{\chi l P}{m T^4}. \quad (2.22)$$

Da Gl. (2.20) die Form einer Wärmeleitungsgleichung hat, kann der Energietransport durch Wärmeleitung berücksichtigt werden, indem man die Opazitäten für Strahlung und Wärmeleitung harmonisch mittelt, $1/\chi = 1/\chi_{\text{rad}} + 1/\chi_{\text{cond}}$.

Konvektiver Energietransport

Die Auftriebskraft, die heißere und daher weniger dichte Materie erfährt, kann unter Umständen zu einem makroskopischen Materie- und Energietransport durch Konvektion führen. Das klassische Kriterium dafür ist das Schwarzschildkriterium: Eine Schicht ist stabil gegen konvektive Bewegungen, falls

$$\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}}, \quad (2.23)$$

andernfalls nicht. Hierbei bezeichnet ∇_{ad} den Temperaturgradienten einer adiabatischen (isentropen) Schichtung, $\nabla_{\text{ad}} := (\partial \ln T / \partial \ln P)_s$. Findet zusätzlich zum radiativen Energietransport, der immer aktiv ist, auch ein konvektiver statt, so ist der tatsächliche Gradient der Schichtung kleiner als der radiative Gradient, $\nabla < \nabla_{\text{rad}}$. Im Falle effektiver Konvektion, wie sie für das tiefe Sterninnere typisch ist, ist diese Form des Energietransports so effizient, dass sich eine adiabatische Schichtung einstellt, $\nabla = \nabla_{\text{ad}}$. Bei ineffektiver Konvektion, wie sie in den stellaren Hüllen vorkommt, ist $\nabla_{\text{ad}} < \nabla < \nabla_{\text{rad}}$, und es muss zur Berechnung von ∇ ein Modell für den konvektiven Energietransport herangezogen werden. Wir benutzen hier die klassische Mischungswegtheorie, die von Prandtl, Biermann und Böhm-Vitense entwickelt wurde, auch wenn gegen sie eine Reihe von wohlbegründeten Argumenten vorgebracht werden kann.

Die Mischungswegtheorie ist eine grobe, durch eine Reihe von heuristischen Näherungen gewonnene Vorschrift zur Berechnung der Auswirkung des konvektiven Energietransports auf die Temperaturschichtung. Die Grundvorstellung ist dabei folgende: Ein Massenelement, dessen Temperatur etwas über der Umgebungstemperatur liegt, hat eine etwas geringere Dichte. Es bewegt sich daher unter dem Einfluss der Auftriebskraft nach oben, bis es sich nach einer Strecke ℓ_m , der Mischungslänge, mit dem umgebenden Material vermischt. Dabei gibt es seine überschüssige Wärme ab und trägt so zum Energietransport bei. Da durch Konvektion Materie transportiert wird, wirkt sie außerdem mischend.

Die Mischungswegtheorie nimmt an, dass die Mischungslänge ℓ_m ein Vielfaches der Druckskalenhöhe ist,

$$\ell_m = \alpha_M \cdot H_P \quad (2.24)$$

mit

$$H_P = -\frac{\partial r}{\partial \ln P} = -P \frac{\partial r}{\partial P} = \frac{r^2 P}{G m \rho}. \quad (2.25)$$

Dabei ist der Mischungswegparameter α_M ein freier Parameter, mit dessen Hilfe die Sternmodelle kalibriert werden können.

Besonders in höheren Schichten mit geringer Dichte ist zu berücksichtigen, dass ein konvektives Element schon »unterwegs« Energie an seine Umgebung abgibt. Die Mischungswegtheorie macht für den Zusammenhang zwischen Auftriebskraft und Geschwindigkeit sowie für den Energieverlust einfache Näherungen und kann damit den Schichtungsgradienten ∇ , die konvektive Geschwindigkeit v und den konvektiven Anteil des Flusses¹ bestimmen.

Unter Verwendung der beiden dimensionslosen Größen

$$U = \frac{3acT^3}{c_P \rho^2 \kappa \ell_m^2} \sqrt{\frac{8H_P}{g\delta}} \quad (2.26)$$

und

$$W = \nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}} \quad (2.27)$$

kommt die Mischungswegtheorie (vgl. Hofmeister, Kippenhahn und Weigert, 1964a; Kippenhahn und Weigert, 1990) zu der kubischen Gleichung

$$(\xi - U)^3 + \frac{8U}{9} (\xi^2 - U^2 - W) = 0. \quad (2.28)$$

Diese muss für die Hilfsgröße ξ gelöst werden, dann kann der Schichtungsgradient als

$$\nabla = \xi^2 - U^2 + \nabla_{\text{ad}} \quad (2.29)$$

berechnet werden. Die konvektive Geschwindigkeit ergibt sich zu

$$v = \ell_m \sqrt{\frac{g\delta}{8H_P}} (\xi - U). \quad (2.30)$$

2.1.6 Die chemische Entwicklung

Die bisher angegebenen Gleichungen beschreiben die Struktur eines Sterns bei einer gegebenen chemischen Zusammensetzung X_i . Hierbei bezeichnet X_i den Massenbruchteil der Spezies i . Da Sterne im allgemeinen nicht homogen sind, sind auch die X_i Funktionen der Lagrangeschen Koordinate m .

Die Entwicklung eines Sterns wird vor allem dadurch vorangetrieben, dass die thermonuklearen Reaktionen nicht nur Energie freisetzen, sondern auch Materie umwandeln, d. h. die chemische Zusammensetzung verändern. Der zweite Prozess, der die Zusammensetzung verändert, ist die Mischung. Sie kann zwar keine Nuklide erzeugen oder vernichten, aber sie

¹Die Aufteilung des Flusses in einen radiativen und einen konvektiven Anteil geht in die Sternaufbaugleichungen sonst nicht ein.

2.1. DIE GRUNDGLEICHUNGEN DES STERNAUFBAUS

von einem Ort zum anderen transportieren. Wir schreiben die Gleichung für die chemische Entwicklung symbolisch als

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{\text{nuc}} + \left(\frac{\partial X_i}{\partial t} \right)_{\text{mix}} \quad (2.31)$$

und erläutern im folgenden die Berechnung der beiden Beiträge. Für jede in der Berechnung eines Modells berücksichtigte Spezies muss eine solche Gleichung gelöst werden, falls man nicht auf Vereinfachungen wie z. B. Reaktionsgleichgewicht zurückgreifen will.

Mischung

Die Mischung der Elemente durch Konvektion kann, falls man nicht von der vereinfachenden Vorstellung instantaner Mischung Gebrauch machen will, als diffusiver Prozess behandelt werden (so z. B. Eggleton, 1972). Die eindimensionale Diffusionsgleichung lautet

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial X_i}{\partial r} \right) \quad (2.32)$$

oder in Massenkoordinate

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial m} \left(\sigma_D \frac{\partial X_i}{\partial m} \right) \quad (2.33)$$

mit

$$\sigma_D = (4\pi r^2 \rho)^2 D. \quad (2.34)$$

Für den Diffusionskoeffizienten D wird der Ansatz

$$D = \frac{1}{3} v \ell \quad (2.35)$$

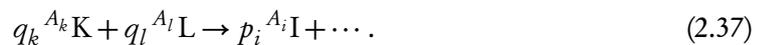
benutzt. Dabei ist v eine typische Geschwindigkeit und ℓ eine typische Länge des Diffusionsprozesses. Diese müssen aus der verwendeten Konvektionstheorie bestimmt werden. Im Rahmen der Mischungswegtheorie wählen wir für die Längenskala ℓ die Mischungslänge (2.24) und für die Geschwindigkeit v die konvektive Geschwindigkeit (2.30), also

$$D = \frac{1}{3} \ell_m^2 \sqrt{\frac{g \delta}{8H_p}} (\xi - U). \quad (2.36)$$

In gemäß dem Schwarzschildkriterium dynamisch stabilen Bereichen, $\nabla_{\text{rad}} < \nabla_{\text{ad}}$, findet keine Mischung statt, und es ist daher dort $D = 0$ zu setzen.

Kernreaktionen

Die für unsere Zwecke hinreichend allgemeine Reaktionsgleichung zur Erzeugung von Element i mit Massenzahl A_i und Symbol ${}^{A_i}\text{I}$ lautet



Hierbei darf einer der stöchiometrischen Koeffizienten q_k, q_l auch null sein. Die Punkte auf der rechten Seite stehen für weitere Produkte außer ${}^{A_i}\text{I}$. Reaktion (2.37) umfasst die für das

Sterninnere typischen Fälle:

$$\begin{aligned}
 q_k = 1, \quad q_l = 0 &: && \text{Zerfall eines Kerns,} \\
 q_k = 1, \quad q_l = 1 &: && \text{Fusion von zwei verschiedenen Kernen,} \\
 q_k = 2, \quad q_l = 0 &: && \text{Fusion von zwei gleichen Kernen,} \\
 q_k = 3, \quad q_l = 0 &: && \text{Fusion von drei gleichen Kernen.}
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Die durch diese Reaktion verursachte Änderungsrate der Teilchendichte n_i ist

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = \tilde{\lambda} n_k^{q_k} n_l^{q_l} \frac{p_i}{q_k! q_l!} \tag{2.39}$$

mit dem i. allg. temperaturabhängigen Proportionalitätsfaktor $\tilde{\lambda}$. Der Faktor $1/q_k! q_l!$ berücksichtigt die Ununterscheidbarkeit von Teilchen der gleichen Spezies. Der Faktor p_i berücksichtigt, dass bei einer Reaktion auch mehrere Kerne der Spezies i erzeugt werden können.

Die Teilchendichte n_i kann sich auch in Abwesenheit von Kernreaktionen durch Kompression und Expansion der Materie ändern. Es ist daher günstiger, das nukleare Netzwerk mit den Massenbruchteilen X_i zu formulieren. Der Übergang geschieht mithilfe der Formeln

$$\rho = \frac{\sum_i n_i A_i}{N_A} \quad \text{und} \quad X_i = \frac{n_i A_i}{\rho N_A}. \tag{2.40}$$

Die Ratengleichung (2.39) lautet dann

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = \lambda \rho^{q_k+q_l-1} \frac{A_i}{A_k^{q_k} A_l^{q_l}} \frac{p_i}{q_k! q_l!} X_k^{q_k} X_l^{q_l}, \tag{2.41}$$

wobei wie üblich (so z. B. in Angulo et al., 1999) die auftretende Potenz der Avogadrozahl N_A in die Reaktionsrate λ absorbiert wurde, $\lambda = \tilde{\lambda} N_A^{q_k+q_l-1}$.

Wird ein Kern der Spezies i vernichtet, liegt eine Reaktion der Form



vor. Hierbei darf i selbst nicht unter den durch Auslassungspunkte bezeichneten Produkten sein. Für die Änderungsrate der Teilchendichte n_i muss lediglich in Gl. (2.39) der Faktor p_i durch $-q_i$ ersetzt werden,

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\tilde{\lambda} n_i^{q_i} n_k^{q_k} \frac{q_i}{q_i! q_k!}. \tag{2.43}$$

Für den Massenbruchteil X_i heißt das

$$\frac{\partial X_i}{\partial t} = -\lambda \rho^{q_i+q_k-1} \frac{A_i}{A_i^{q_i} A_k^{q_k}} \frac{q_i}{q_i! q_k!} X_i^{q_i} X_k^{q_k}. \tag{2.44}$$

Um die vollständige Ratengleichung für eine Spezies i zu erhalten, muss über alle Reaktionen, an der sie beteiligt ist, summiert werden¹,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X_i}{\partial t} &= \sum_r \lambda_r \rho^{q_k+q_l-1} \frac{A_i}{A_k^{q_k} A_l^{q_l}} \frac{p_i}{q_k! q_l!} X_k^{q_k} X_l^{q_l} \\
 &\quad - \sum_r \lambda_r \rho^{q_i+q_k-1} \frac{A_i}{A_i^{q_i} A_k^{q_k}} \frac{q_i}{q_i! q_k!} X_i^{q_i} X_k^{q_k}.
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

¹Nicht nur die Reaktionsraten λ_r , sondern auch die Faktoren q und p sind für verschiedene Reaktionen verschieden. Dies durch einen weiteren Index, etwa $q_i^{(r)}$ oder $q_{i,r}$, kenntlich zu machen, macht die Gleichung so unleserlich, dass wir hier darauf verzichten.

2.2. DIE ZEITSKALEN DER STERNENTWICKLUNG

Setzt man für alle Reaktionen, an denen das Element i nicht beteiligt ist, p_i und q_i gleich null, so kann man die Summen formal über alle Reaktionen erstrecken.

Aus dem nuklearen Netzwerk wird auch die nukleare Energieerzeugung berechnet. Die pro Zeit- und Volumeneinheit erzeugte Energie ist das Produkt aus der Anzahl der Reaktionen pro Zeit- und Volumeneinheit mit der pro Reaktion freigesetzten Energie Q_r . Um auf die Energieerzeugung pro Masseneinheit zu kommen, muss noch durch die Dichte geteilt werden,

$$\varepsilon_{\text{nuc}} = \sum_r \tilde{\lambda}_r n_k^{q_k} n_l^{q_l} \frac{1}{q_k! q_l!} \frac{Q_r}{\rho}. \quad (2.46)$$

Die Umrechnung der Teilchendichten in Massenbruchteile ergibt

$$\varepsilon_{\text{nuc}} = \sum_r \lambda_r \rho^{q_k+q_l-1} X_k^{q_k} X_l^{q_l} \frac{1}{q_k! q_l!} \frac{1}{A_k^{q_k} A_l^{q_l}} N_A Q_r. \quad (2.47)$$

Bei Zerfällen ist λ die Zerfallsrate, also der Kehrwert der Lebensdauer, $\lambda = 1/\tau$. Bei Zweiteilchenreaktionen wird die Reaktionsrate λ als Mittel aus dem Wirkungsquerschnitt σ und der Boltzmannschen Geschwindigkeitsverteilung berechnet, $\lambda = N_A \langle \sigma v \rangle_T$. Sie hängt dann von der Temperatur ab.

2.2 Die Zeitskalen der Sternentwicklung

In den Gleichungen des Sternaufbaus treten mehrere Zeitableitungen auf. Ihnen können die folgenden Zeitskalen zugeordnet werden.

2.2.1 Die hydrodynamische Zeitskala

Die Bewegungsgleichung (2.7) bestimmt die dynamische Entwicklung des Objekts. Die Zeitskala für eine Entwicklung ohne den stabilisierenden Druckterm ist die Freifallzeit. Sie ist auch die Zeit, in der ein Massenelement von der Sternoberfläche allein unter dem Einfluss der Schwerkraft ins Zentrum fiel. Sie kann aus Gl. (2.7) zu

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}}} \quad (2.48)$$

abgeleitet werden. Die charakteristische Zeit, die vom Druckterm allein, d. h. bei Vernachlässigung der Schwerkraft in Gl. (2.7) vorgegeben wird, ist die Schalllaufzeit durch den Stern,

$$\tau_{\text{schall}} = \frac{R}{c_s} \approx R \sqrt{\frac{\bar{\rho}}{P}}. \quad (2.49)$$

Im hydrostatischen Gleichgewicht kompensieren sich Druck- und Gravitationskraft, und daher sind die Freifallzeit und die Schalllaufzeit vergleichbar. Dies ist dann auch die Zeitskala, auf der der Stern auf eine Störung seines mechanischen Gleichgewichts reagiert und dieses wiederherstellt,

$$\tau_{\text{hydr}} \approx \tau_{\text{ff}} \approx \tau_{\text{schall}} \approx \sqrt{\frac{R^3}{GM}}. \quad (2.50)$$

Typische Werte reichen von Sekunden für Weiße Zwerge über etwa eine halbe Stunde im Fall der Sonne bis zu wenigen Wochen bei ausgedehnten Riesensternen. Solange alle anderen, bei der Sternentwicklung auftretenden Zeitskalen deutlich länger sind, darf man annehmen, dass sich nach irgendeiner Änderung das hydrostatische Gleichgewicht instantan wieder einstellt.

2.2.2 Die Kelvin-Helmholtz-Zeit

Die Kelvin-Helmholtz-Zeit ist die Zeit, die ein Stern brauchte, um seine gesamte innere Energie E_i abzustrahlen. Nach dem Virialsatz (s. Abschn. 4.1) ist diese von der gleichen Größenordnung wie die Gravitationsenergie, $E_i = -E_g/2$. Daher ist

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{E_i}{L} \approx -\frac{E_g}{L} \approx \frac{GM^2}{2RL}. \quad (2.51)$$

Auf dieser Zeitskala entwickelt sich ein Stern, dem keine nuklearen Energiequellen zur Verfügung stehen. Die Kelvin-Helmholtz-Zeit ist auch die Zeitskala, die eine Temperaturfluktuation benötigt, um vom Sterninneren an die Oberfläche zu diffundieren. Innerhalb dieser Zeit werden Störungen der Temperaturverteilung ausgeglichen. Die Kelvin-Helmholtz-Zeit der Sonne beträgt etwa 16 Millionen Jahre.

Falls die Zeitskala, auf der die Entwicklung des Sterns abläuft, deutlich über der Kelvin-Helmholtz-Zeit liegt, spielt die Zeitableitung ε_g in der Energiegleichung (2.9) keine Rolle. Der Stern kann dann als im thermischen Gleichgewicht befindlich angesehen werden.

2.2.3 Die nukleare Zeitskala

Kann ein Stern den Bruchteil η seiner Gesamtmasse M durch Kernfusion in Energie umsetzen, so ergibt sich bei der Leuchtkraft L eine charakteristische Zeit von

$$\tau_n = \eta \frac{Mc^2}{L}. \quad (2.52)$$

Bei der Fusion von Wasserstoff zu Helium werden etwa 8 ‰ der Masse in Energie umgewandelt, und nur etwa 10 % der Gesamtmasse des Sterns werden tatsächlich prozessiert, so dass $\eta \approx 0,0008$. Die nukleare Zeitskala ist für einen Hauptreihenstern die mit Abstand längste Zeitskala; für die Sonne beträgt sie etwa 10^{10} Jahre.

2.2.4 Vergleich der Zeitskalen

Für die meiste Zeit im Leben eines Sterns, nämlich insbesondere während der Phase des zentralen Wasserstoff- und Heliumbrennens ist

$$\tau_{\text{hydr}} \ll \tau_{\text{KH}} \ll \tau_n. \quad (2.53)$$

Dann ist nicht nur die Hydrostatik eine gute Näherung, sondern auch der Zeitterm ε_g in der Energiegleichung ist vernachlässigbar. Während die Hydrostatik auch in weiteren Stadien der Sternentwicklung eine berechnete Annahme bleibt¹, trifft dies für das thermische Gleichgewicht nicht zu. Sowohl der Übergang vom zentralen Brennen zum Schalenbrennen als auch jedes Zünden eines neuen Brennens ist mit einer Phase thermischen Ungleichgewichts verbunden. Insbesondere trifft dies auf die AGB-Entwicklung und – wie der Name bereits andeutet – auf die dort stattfindenden thermischen Pulse zu. Hier müssen in Gl. (2.9) auch die Zeitableitungen berücksichtigt werden.

Die hier angegebenen Zeitskalen beziehen sich immer auf den ganzen Stern. Sie sind daher nur ausschlaggebend, falls auch tatsächlich der ganze Stern (oder doch wenigstens der überwiegende Teil) an dem entsprechenden Prozess teilnimmt. Das ist jedoch besonders in den

¹Dies gilt nicht mehr bei inhärent dynamischen Prozessen wie Kollaps, Explosion und Pulsationen. Mit ihnen befassen wir uns nicht.

2.3. DIE RANDBEDINGUNGEN

späten Entwicklungsstadien nicht mehr der Fall. Dann müssen die entsprechenden Zeitskalen einzelner Teile des Sterns berücksichtigt werden. So kann z. B. bei Schalenbrennen zwar die globale nukleare Zeitskala (also die Gesamtzeit für diese Entwicklungsphase) deutlich länger als die Kelvin-Helmholtz-Zeit sein, während die lokale nukleare Zeitskala (d. i. die Zeit, in der sich die Schalenquelle um eine mit ihrer Dicke vergleichbare Strecke nach außen brennt) vergleichbar oder gar kürzer sein kann. In diesem Fall bestimmen dann die nuklearen Prozesse die Zeitschrittwahl bei der numerischen Integration.

2.3 Die Randbedingungen

Zur eindeutigen Lösung der vier Strukturgleichungen (2.3), (2.8), (2.9) und (2.15) sind vier Randbedingungen nötig, nämlich für die Größen r , P , l und T . Zwei dieser Randbedingungen können im Zentrum bei $m = 0$ gestellt werden und sind einfach zu formulieren.

1. Bei $m = 0$ gilt $r = 0$; d. h. es befindet sich keine Punktmasse im Sternzentrum.
2. Ebenso gilt bei $m = 0$ auch $l = 0$; d. h. es befindet sich keine Punktquelle im Sternzentrum.

Die Größen r und l können mithilfe von Gl. (2.3) bzw. (2.9) nahe dem Zentrum als Funktionen von m entwickelt werden und verhalten sich wie

$$r \propto m^{1/3} \quad \text{bzw.} \quad l \propto m. \quad (2.54)$$

Die beiden anderen Randbedingungen müssen an der Oberfläche gestellt werden, da weder der Zentraldruck noch die Zentraltemperatur a priori festgelegt sind. Es müssen also Werte für Druck und Temperatur bei $m = M$ vorgegeben werden.

3. Die Temperatur in der Photosphäre muss gleich der Effektivtemperatur T_{eff} sein; diese ist wiederum durch das Stefan-Boltzmann-Gesetz mit der Gesamtleuchtkraft L und dem Radius R verbunden,

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eff}}^4. \quad (2.55)$$

4. Der Druck an der Oberfläche muss mit einem Atmosphärenmodell berechnet werden.

Die äußeren Randbedingungen sind – im Gegensatz zu den inneren – nicht explizit.

Die Randbedingungen für die mit der Differentialgleichung (2.31) zu berechnende Entwicklung der Massenanteile X_i lauten

$$\left(\frac{\partial X_i}{\partial m} \right) = 0 \quad \text{bei } m = 0 \text{ und bei } m = M. \quad (2.56)$$

2.3.1 Ein einfaches Atmosphärenmodell

Das einfachste Atmosphärenmodell ist die graue, geometrisch dünne Atmosphäre in Eddingtonscher Näherung. Die hydrostatische Gleichung (hier in Eulerscher Koordinate),

$$\frac{dP}{dr} = -g\rho, \quad (2.57)$$

ergibt zusammen mit der Definition der optischen Tiefe,

$$\frac{d\tau}{dr} = -\kappa\rho, \quad (2.58)$$

eine Differentialgleichung für den Druck¹,

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{g}{\chi}. \quad (2.59)$$

Setzen wir weiter den Gesamtdruck als Summe aus Gas- und Strahlungsdruck ein,

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = P_{\text{gas}} + \frac{a}{3} T^4, \quad (2.60)$$

so erhalten wir eine Differentialgleichung für den Gasdruck,

$$\frac{dP_{\text{gas}}}{d\tau} = \frac{g}{\chi} - \frac{4a}{3} T^3 \frac{dT}{d\tau}, \quad (2.61)$$

in der allerdings die Ableitung der Temperatur nach der optischen Tiefe auftaucht. Für die Temperaturschichtung wird nun die Eddingtonsche Näherung (z. B. Mihalas, 1970, Kap. 2.3),

$$\left(\frac{T}{T_{\text{eff}}} \right)^4 = \frac{3}{4} \left(\tau + \frac{2}{3} \right), \quad (2.62)$$

eingesetzt. Diese ist so beschaffen, dass $T(\tau = 2/3) = T_{\text{eff}}$. Integration der Gl. (2.61) von $\tau = 0$ bis $\tau = 2/3$ ergibt die gewünschte Randbedingung für den Druck. Da voraussetzungsgemäß die Atmosphäre geometrisch dünn sein soll, kann die Schwerebeschleunigung als konstant betrachtet werden, $g = GM/R^2$.

¹Die optische Tiefe τ darf als Koordinate verwendet werden, da $\tau(r)$ streng monoton fallend ist.

Kapitel 3

Materialfunktionen

In dem im vorigen Kapitel dargestellten Gleichungssystem treten einige Materialfunktionen auf, deren Beschaffenheit die Lösung ganz wesentlich mitbestimmen. Diese sind

- die Zustandsgleichung, da von den Zustandsgrößen ρ , T , P und u nur zwei unabhängig sind und außerdem die thermodynamischen Größen c_p , δ und ∇_{ad} benötigt werden,
- die Daten, die in die Berechnung der Kernreaktionen eingehen, insbesondere die Reaktionsraten $\lambda(T)$,
- die Rosselandsche Opazität $\kappa(T, \rho, X_i)$,
- die Neutrinoverlustrate $\varepsilon_\nu(T, \rho, X_i)$,
- die bisher noch nicht erwähnte Massenverlustrate \dot{M} , die durch den Sternwind hervorgerufen wird.

3.1 Die Zustandsgleichung

In den Sternaufbaugleichungen treten die Dichte ρ , der Druck P und die Temperatur T sowie bei der hier verwendeten Form der Energiegleichung (2.11) auch die innere Energie u auf. Von diesen Größen sind nur zwei unabhängig, der Zusammenhang zwischen ihnen wird durch die thermische Zustandsgleichung

$$P = P(\rho, T, X_i) \quad (3.1)$$

und die kalorische Zustandsgleichung

$$u = u(\rho, T, X_i) \quad (3.2)$$

hergestellt. In die Zustandsgleichung geht auch die chemische Zusammensetzung X_i ein, oft über das mittlere Molekulargewicht μ .

Im vorhandenen Code von Straka (2002) werden die Dichte ρ und die innere Energie u als Variablen verwendet, weshalb die Zustandsgleichungen in der Form

$$P = P(\rho, u, X_i) \quad (3.3)$$

bzw.

$$T = T(\rho, u, X_i) \quad (3.4)$$

benötigt werden. Diese sind durch die im folgenden angegebenen Gleichungen der Form (3.1), (3.2) eindeutig festgelegt, können aber oft nicht geschlossen angegeben werden.

KAPITEL 3. MATERIALFUNKTIONEN

Die Eigenschaften der Materie werden häufig durch thermodynamische Ableitungen charakterisiert. In der stellaren Astrophysik sind dazu folgende Definitionen gebräuchlich¹:

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_{T, \mu}, \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_{P, \mu}, \quad \varphi = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu} \right)_{T, P}. \quad (3.5)$$

Mithilfe dieser Größen lässt sich jede Zustandsgleichung $\rho = \rho(P, T, \mu)$ in differentieller Form schreiben,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T} + \varphi \frac{d\mu}{\mu}. \quad (3.6)$$

Die differentielle Zustandsgleichung wird bei den theoretischen Betrachtungen in Kap. 4 nützlich sein.

Weitere wichtige Größen sind die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck, die mit Hilfe der spezifischen Enthalpie h definiert ist²,

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_p - \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p, \quad (3.7)$$

sowie der adiabatische Gradient

$$\nabla_{\text{ad}} = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln P} \right)_s = \frac{P \delta}{\rho T c_p}. \quad (3.8)$$

Für die Lösung der Sternaufbaugleichungen benötigen wir δ und c_p sowie ∇_{ad} , das sich aus den vorgenannten gemäß Gl. (3.8) sofort berechnen lässt.

Der Anteil des Gasdrucks am Gesamtdruck wird oft mit β abgekürzt,

$$\beta = \frac{P_{\text{gas}}}{P} = \frac{P_{\text{gas}}}{P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}}}. \quad (3.9)$$

¹Die Astrophysik weicht hier von sonst in der Physik üblichen Definitionen und Bezeichnungen ab. Außerhalb der Astrophysik setzt man gewöhnlich für die isotherme Kompressibilität

$$\kappa = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln P} \right)_T$$

und für den Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T} \right)_p.$$

²Mit der Definition der Enthalpie, $h = u + Pv$, und dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik, $dq = du + P dv$, kann man schreiben

$$dh = du + P dv + v dP = dq + v dP$$

und kommt so zu dem für eine Wärmekapazität anschaulicheren Ausdruck

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_p = \left. \frac{dq}{dT} \right|_p.$$

Diese Gleichung ist mit Vorsicht zu behandeln, denn dq ist kein vollständiges Differential.

3.1. DIE ZUSTANDSGLEICHUNG

3.1.1 Das ideale Gas

Das ideale Gas hat eine sehr einfache Zustandsgleichung, die aber in vielen Fällen das Sterninnere recht gut beschreibt. Wir werden es im Zusammenhang mit den analytischen Überlegungen in Kap. 4 verwenden. Das ideale Gas erfüllt die Zustandsgleichung

$$P = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T. \quad (3.10)$$

Die Definitionen der thermodynamischen Ableitungen (3.5) sind gerade so gewählt, dass für das ideale Gas gilt

$$\alpha = 1, \quad \delta = 1, \quad \varphi = 1. \quad (3.11)$$

Ist das Gas einatomig, d. h. ohne innere Freiheitsgrade, so gilt für die innere Energie

$$u = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T. \quad (3.12)$$

Damit ergibt sich

$$c_p = \frac{5}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \quad \text{und} \quad \nabla_{\text{ad}} = \frac{2}{5}. \quad (3.13)$$

3.1.2 Das ideale Gas mit Strahlung

In großen Teilen des Sterns kann die Sternmaterie als einatomiges ideales Gas, das vollständig ionisiert ist, beschrieben werden. Für den Druck, der sich aus Gas- und Strahlungsdruck zusammensetzt, gilt hier

$$P = P_{\text{gas}} + P_{\text{rad}} = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \rho T + \frac{a}{3} T^4. \quad (3.14)$$

Dabei ist μ das mittlere Molekulargewicht. Bezeichnet X_i den Massenbruchteil der Spezies i , Z_i ihre Kernladungszahl und A_i ihre Kernmasse¹, so gilt im hier behandelten Fall vollständiger Ionisation

$$\mu = \left(\sum_i \frac{X_i (1 + Z_i)}{A_i} \right)^{-1}. \quad (3.15)$$

Die kalorische Zustandsgleichung lautet

$$u = u_{\text{gas}} + u_{\text{rad}} = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T + \frac{a T^4}{\rho}. \quad (3.16)$$

Die beiden weiteren benötigten thermodynamischen Größen sind

$$\delta = \frac{4 - 3\beta}{\beta} = \frac{P + a T^4}{P - \frac{a}{3} T^4} \quad (3.17)$$

und

$$c_p = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} \left(\frac{3}{2} + \frac{3(1 - \beta)(4 + \beta)}{\beta^2} + \frac{4 - 3\beta}{\beta^2} \right). \quad (3.18)$$

Wir verwenden diese Zustandsgleichung im Bereich $T > 10^6$ K und $\rho < 5 \text{ g cm}^{-3}$.

¹Der Unterschied zwischen der Kernmasse und der Atommasse ist für unsere Zwecke vernachlässigbar.

3.1.3 Partielle Ionisation

Bei kleinen Temperaturen ist die Materie nicht mehr vollständig ionisiert. Da sich das Gas weiter ideal verhält, bleibt Gl. (3.14) gültig; es muss aber das mittlere Molekulargewicht nicht mehr nach Gl. (3.15), sondern unter Berücksichtigung der Ionisationsgrade berechnet werden. Letztere werden mithilfe der Saha-Gleichung ermittelt. Ebenso muss bei der kalorischen Zustandsgleichung der Energie, die bei der Ionisierung aufgewendet bzw. bei der Rekombination freigesetzt wird, Rechnung getragen werden.

Im Code von Straka (2002, 2004) wird nur die Ionisation von Wasserstoff und Helium berücksichtigt. Da wir uns hauptsächlich für (jedenfalls bei ihrer Entstehung) extrem metallarme Sterne interessieren, erwarten wir von dieser Vereinfachung keine großen Fehler.

Diese Form der Zustandsgleichung wird für Temperaturen $T < 10^6$ K verwendet.

3.1.4 Partielle Entartung

Die Kerne der entwickelten Sterne erreichen Dichten, bei denen das Elektronengas partiell entartet. Um AGB-Modelle berechnen zu können, musste deshalb die Zustandsgleichung entsprechend erweitert werden. Bei partieller Entartung des Elektronengases setzt sich der Druck aus drei Beiträgen zusammen,

$$P = P_{\text{ion}} + P_e + P_{\text{rad}}. \quad (3.19)$$

Der Strahlungsdruck ist unverändert

$$P_{\text{rad}} = \frac{a}{3} T^4. \quad (3.20)$$

Die Ionen verhalten sich weiterhin wie ein einatomiges ideales Gas, so dass

$$P_{\text{ion}} = \frac{\mathfrak{R}}{\mu_0} \rho T, \quad (3.21)$$

wobei nun allerdings das mittlere Molekulargewicht der Ionen einzusetzen ist,

$$\mu_0 = \left(\sum_i \frac{X_i}{A_i} \right)^{-1}. \quad (3.22)$$

Der Druckbeitrag des partiell entarteten Elektronengases ist

$$P_e = \frac{8\pi}{3h^3} (2m_e kT)^{3/2} kT F_{3/2}(\psi), \quad (3.23)$$

mit der durch

$$F_\nu(\psi) = \int_0^\infty \frac{x^\nu}{e^{x-\psi} + 1} dx \quad (3.24)$$

definierten Fermi-Dirac-Funktion F_ν , die vom Entartungsparameter ψ abhängt. Die innere Energie u setzt sich, wie der Druck, aus den Beiträgen von Strahlung,

$$u_{\text{rad}} = \frac{aT^4}{\rho}, \quad (3.25)$$

3.2. DIE KERNREAKTIONEN

Ionengas,

$$u_{\text{ion}} = \frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu_0} T, \quad (3.26)$$

und Elektronengas,

$$u_e = \frac{4\pi}{\rho h^3} (2m_e kT)^{3/2} kT F_{3/2}(\psi), \quad (3.27)$$

zusammen:

$$u = u_{\text{ion}} + u_e + u_{\text{rad}}. \quad (3.28)$$

Da neben den bisher gebrauchten Größen ρ , u , P und T nun noch der Entartungsparameter ψ auftaucht, ist eine weitere Gleichung nötig, um das System zu schließen. Diese ist ein Ausdruck für die Dichte,

$$\rho = \frac{4\pi}{h^3} \mu_e m_u (2m_e kT)^{3/2} F_{1/2}(\psi). \quad (3.29)$$

Hier bezeichnet μ_e das mittlere Molekulargewicht pro freiem Elektron; bei vollständiger Ionisierung ist

$$\mu_e = \left(\sum_i \frac{X_i Z_i}{A_i} \right)^{-1}. \quad (3.30)$$

Mithilfe von Gl. (3.29) kann die Temperatur aus Gl. (3.28) eliminiert werden; aus der verbleibenden Gleichung kann dann ψ (allerdings nicht in geschlossener Form) bestimmt werden. Insbesondere folgt aus Gl. (3.29), dass der Entartungsgrad ψ nur von einer festen Kombination der Temperatur T und der Elektronendichte $n_e = \rho / \mu_e m_u$ abhängt,

$$F_{1/2}(\psi) \propto n_e T^{-3/2}. \quad (3.31)$$

Für den Ausdehnungskoeffizienten und die Wärmekapazität ergeben sich die Ausdrücke

$$\delta = \frac{\left(P_{\text{ion}} + 4P_{\text{rad}} + \frac{5}{2}P_e \right) \frac{d \ln F_{1/2}}{d \ln F_{3/2}} - \frac{3}{2}P_e}{P_{\text{ion}} \frac{d \ln F_{1/2}}{d \ln F_{3/2}} + P_e} \quad (3.32)$$

bzw.

$$c_p = \frac{\mathfrak{R}}{\mu_0} \frac{1}{P_{\text{ion}}} \left(\frac{5\delta}{2} (P_e + P_{\text{ion}}) + (6 + 4\delta)P_{\text{rad}} \right). \quad (3.33)$$

Die Entartung des Elektronengases wird ab einer Dichte von $\rho > 5 \text{ g cm}^{-3}$ berücksichtigt; dies entspricht in unseren Sternmodellen etwa einem Entartungsgrad von $\psi = -5$.

3.2 Die Kernreaktionen

In den 1930er Jahren wurde klar, dass die Kernfusion die wesentliche Energiequelle der Sterne ist. Alle anderen, vor der Entdeckung der Kernfusion vorgeschlagenen Energiequellen wie z. B. chemische Energie oder Gravitationsenergie reichen nicht aus, um das aus geologischen Beobachtungen bekannte Mindestalter der Sonne zu erklären. Die Freisetzung von Gravitationsenergie durch Kontraktion spielt für die Entwicklung der Sterne in einigen kurzen Episoden eine wesentliche Rolle, ist aber in einer Energiebilanz über die gesamte Lebensdauer des Sterns irrelevant.

Die Freisetzung von Energie durch Fusion von zwei leichten Atomkernen zu einem schwereren ist möglich, da die Bindungsenergie pro Nukleon als Funktion der Nukleonenzahl A zunächst ansteigt. Bei einer Kernfusionsreaktion wird dann Energie frei, da die Nukleonen im Produktkern stärker gebunden sind. Bei der Eisengruppe um ^{56}Fe ist das Maximum der Bindungsenergie erreicht, für größere Massenzahlen nimmt sie wieder ab. Durch Kernfusion über $A = 56$ hinaus kann also keine Energie mehr gewonnen werden, es handelt sich im Gegenteil um endotherme Prozesse. Besteht die Materie eines Sterns nur noch aus solchen Kernen, verfügt er über keine nukleare Energiequelle mehr.

Zur Fusion zweier Kerne müssen sich beide so nahe kommen, dass die Kernkräfte mit ihrer sehr kurzen Reichweite von 10^{-15} m wirksam werden. Dazu muss der Potentialwall der Coulombabstoßung überwunden werden. Dies wird durch das Zusammenspiel zweier Faktoren ermöglicht. Zum Ersten unterliegen die Geschwindigkeiten der beteiligten Teilchen der Maxwell-Boltzmann-Verteilung; insbesondere hat ein endlicher, wenn auch kleiner Bruchteil eine Geschwindigkeit deutlich höher als die mittlere quadratische Geschwindigkeit $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{3k_B T / \mu}$. Zum Zweiten ermöglicht der quantenmechanische Tunneleffekt, dass auch eine Barriere, die höher ist als die kinetische Energie des Teilchens, überwunden werden kann.

Die Höhe der Coulombbarriere ist proportional zum Produkt der Kernladungen der Reaktionspartner, und die Tunnelwahrscheinlichkeit sinkt wiederum exponentiell mit der Höhe der Barriere. Dies hat zur Folge, dass die für eine Reaktion notwendige Mindesttemperatur mit der Ladung der beteiligten Kerne deutlich ansteigt und außerdem der Reaktionsquerschnitt stark von der Temperatur abhängt.

Die frei werdende Bindungsenergie wird zunächst als kinetische Energie der Produktnuklide sowie als Positronen, γ -Quanten oder Neutrinos abgegeben. Diese Energieformen werden dann im dichten Sterninneren thermalisiert; eine Ausnahme bilden hier die Neutrinos, welche den Stern ungehindert verlassen.

3.2.1 Das Wasserstoffbrennen

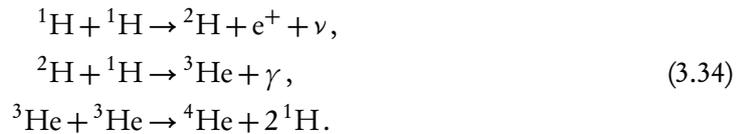
Die erste nukleare Energiequelle im Leben eines Sterns¹ ist die Fusion von Wasserstoff zu Helium. Sie wurde von Eddington bereits vor der Entwicklung der Kernphysik und der Quantenmechanik als Energiequelle der Sonne vorgeschlagen. Der Verlauf der Bindungsenergie als Funktion der Nukleonenzahl macht klar, dass bei dieser Reaktion bereits der größte Teil der durch Fusion verfügbaren Energie abgerufen wird. Das Wasserstoffbrennen ist daher die mit Abstand ergiebigste nukleare Energiequelle der Sterne.

Es gibt zwei Reaktionsgruppen für das Wasserstoffbrennen: die pp-Ketten und den CNO-Zyklus. Summarisch erzeugen alle pp-Ketten ebenso wie der CNO-Zyklus (von Leptonen und γ -Quanten einmal abgesehen) aus vier Protonen einen Heliumkern. Die dabei freigesetzte Energie unterscheidet sich allerdings. Aufgrund der unterschiedlichen Temperaturabhängigkeit der Reaktionen dominieren die pp-Ketten die Energieproduktion in Sternen unterhalb von etwa $1,5 M_\odot$, darüber (zumindest bei Sternen der Population II oder jünger) der CNO-Zyklus. Im Gegensatz zu den pp-Ketten, die auch in reinem Wasserstoff ablaufen können, braucht der CNO-Zyklus katalytisch wirkende Metallkerne, die er nicht selbst erzeugen kann. Daraus resultiert eine qualitative Abweichung der Entwicklung metallfreier und extrem metallarmer Sterne vom gewohnten Bild.

¹abgesehen vom Deuteriumbrennen, das wegen der geringen Deuteriumhäufigkeit aber nur ein sehr kleines Energiereservoir nutzbar machen kann

3.2. DIE KERNREAKTIONEN

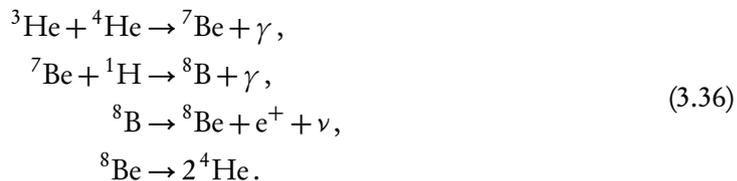
Die pp-Ketten. Die energetisch wichtigste der pp-Ketten, pp 1, umfasst die drei Reaktionen



Sie wurde 1938 von Bethe und Critchfield entdeckt. Neben dieser Reaktionsfolge gibt es ausgehend von ${}^3\text{He}$ noch zwei weitere Möglichkeiten, die Erzeugung von ${}^4\text{He}$ abzuschließen, nämlich pp 2 mit den Reaktionen

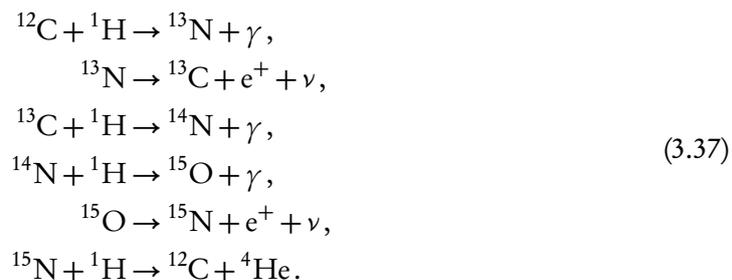


und pp 3,



Der den drei pp-Ketten gemeinsame Flaschenhals ist der erste Schritt, die Erzeugung von Deuterium, weil dazu innerhalb einer Stoßzeit von 10^{-21} s eines der beiden Protonen einen spontanen β^+ -Zerfall ausführen muss. Die je erzeugtem Heliumkern freigesetzte Energie beträgt bei der ersten pp-Kette 26,20 MeV, bei der zweiten 25,61 MeV und bei der dritten 19,76 MeV. Zur Wichtigkeit der drei Zweige bei verschiedenen Temperaturen s. Straka (2002).

Der CNO-Zyklus. Ebenfalls im Jahr 1938 entdeckten Bethe und von Weizsäcker unabhängig voneinander den CNO-Zyklus. Er umfasst die Reaktionen



Die involvierten C-, N- und O-Kerne wirken als Katalysatoren, ihre Gesamtmenge wird durch die Reaktionen des CNO-Zyklus nicht verändert, sondern nur die Anzahlverhältnisse untereinander. Die langsamste Reaktion des CNO-Zyklus ist der Protoneneinfang von ${}^{14}\text{N}$; daher liegen im Gleichgewicht etwa 99 % der CNO-Kerne als ${}^{14}\text{N}$ vor. Die Energieausbeute beträgt 25,03 MeV pro erzeugtem Heliumkern.

Die beiden β^+ -Zerfallsreaktionen laufen auf sehr kurzen Zeitskalen (einige Minuten) ab, so dass es in aller Regel für die Berechnung eines Sternmodells ohne weiteres möglich ist, sie als instantan zu betrachten. Es gibt neben dem Hauptzyklus (3.37) noch höhere Zyklen derselben Art. Sie sind vom energetischen Standpunkt aus von untergeordneter Bedeutung, für die Elementsynthese hingegen nicht unbedingt.

3.2.2 Das Heliumbrennen

Bei Temperaturen über 10^8 K setzt die Fusion von Helium ein. Die Hauptreaktion des Heliumbrennens ist die Fusion von drei Heliumkernen zu einem Kohlenstoffkern,



In der Realität ist dieser sogenannte 3α -Prozess kein Dreierstoß; die Wahrscheinlichkeit, dass sich drei α -Teilchen innerhalb einer Stoßzeit von etwa 10^{-21} s am selben Ort (d. h. in einem Volumen von etwa 1 fm^3) befinden, ist beliebig gering. Die Reaktion erfolgt als zwei Zweierstöße, zunächst



Der hoch angeregte ^8Be -Kern hat eine Lebensdauer von einigen 10^{-16} s, innerhalb der er ein weiteres α -Teilchen einfangen und sich dadurch stabilisieren kann,



Wegen der sehr kurzen Lebensdauer des ^8Be -Kerns ist es vollauf gerechtfertigt, anzunehmen, dass sich die Reaktion



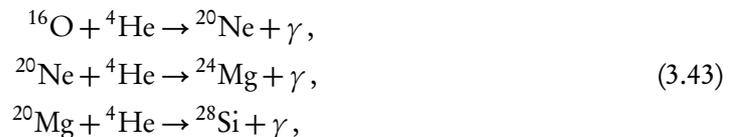
im Gleichgewicht befindet, und den Gesamtprozess effektiv als Dreierstoß zu behandeln.

Sobald eine gewisse Menge Kohlenstoff entstanden ist, kann aus diesem durch Einfang eines weiteren α -Teilchens auch Sauerstoff erzeugt werden,



Diese Reaktion benötigt eine etwas höhere Temperatur als der 3α -Prozess, weil die beteiligten Kerne höher geladen sind. Die Rate, mit der eine Reaktion abläuft, hängt aber gemäß Gl. (2.41) auch von den Massenbruchteilen der Edukte ab. Für (3.42) ist sie proportional zu $X_{\text{C}} \cdot X_{\text{He}}$, für den 3α -Prozess dagegen zu X_{He}^3 . Deshalb findet die Sauerstoffherzeugung via (3.42) besonders am Ende des Heliumbrennens, wenn der Heliumanteil bereits deutlich gesunken ist, statt; sie übernimmt dann auch die Energieerzeugung vom 3α -Prozess. Die Energieausbeute der Reaktionen (3.38) und (3.42) beträgt 7,28 MeV bzw. 7,16 MeV.

Die weiteren α -Einfänge zu noch schwereren Kernen,



haben (weil im Spektrum des Produktkerns kein geeigneter Drehimpulszustand vorhanden ist) sehr kleine Querschnitte und sind nur bei sehr hohen Temperaturen möglich. Energetisch sind sie unbedeutend.

3.2.3 Das Kohlenstoff- und Sauerstoffbrennen

Die Asche des Heliumbrennens besteht aus ^{12}C und ^{16}O , möglicherweise bei schweren Sternen mit einer kleinen Beimengung von ^{20}Ne . Erreicht ein Stern Temperaturen von mehr als etwa $5 \cdot 10^8$ K, so kommt es zur Fusion von Kohlenstoff und Sauerstoff. Es gibt hier eine ganze Reihe von möglichen Reaktionen, deren Produkte Mg, Na, Ne, Si u. a. sind. Das Kohlenstoff- und Sauerstoffbrennen findet nur in massereichen Sternen statt.

3.3 Die Opazitäten

Im Sternentwicklungsprogramm von Straka (2002, 2004) werden die Opazitäten für Temperaturen unterhalb 10^8 K den Tafeln der Opacity-Project-Kollaboration (s. Badnell et al., 2005, und dort angegebene Literatur) entnommen. Dort ist der Logarithmus der Rosselandschen Opazität für eine feste Elementmischung¹ über $\log T$ und $\log R = \log \rho / T_6^3$ mit $T_6 = T \cdot 10^{-6}$ tabelliert. Durch Verwendung mehrerer Tafeln mit verschiedenen Werten für Wasserstoff- und Heliumanteil X_{H} und X_{He} wird der Änderung der Zusammensetzung Rechnung getragen. Die Veränderung der Metallhäufigkeiten wird nicht berücksichtigt. Die Interpolation erfolgt mit kubischen Splines.

Im Bereich hoher Temperaturen, $T > 10^8$ K, werden die Fitformeln von Iben (1975) an die Daten von Hubbard und Lampe (1969) und Canuto (1970) verwendet. Gleiches gilt für die wieder abkühlenden C/O-Kerne, genauer für sehr dichte Bereiche mit $\rho > 10^6 \text{ g cm}^{-3}$.

3.4 Die Neutrinoverluste

Bei hohen Dichten und Temperaturen werden im Sterninneren Neutrinos erzeugt. Diese durchdringen die Sternmaterie ohne Wechselwirkung, verlassen den Stern und bilden so eine Energiesenke, der in der Energiegleichung (2.9) als $-\varepsilon_\nu$ Rechnung getragen wird². Zur Erzeugung dieser Neutrinos trägt eine ganze Reihe von Prozessen bei. Straka (2004) entnimmt die Raten $\varepsilon_\nu(\rho, T, X_i)$ für die vorliegende Version seines Programms aus Itoh et al. (1996).

3.5 Der Massenverlust

Während der Massenverlust für die Entwicklung eines Sterns von nicht zu großer Masse in den meisten Phasen keine große Rolle spielt, ist er für die AGB-Entwicklung ein entscheidender Faktor. Einerseits ist der Massenverlust der Mechanismus, über den AGB-Sterne zur Anreicherung des interstellaren Mediums beitragen. Andererseits (und das ist für den Stern selbst von viel größerer Bedeutung) führt der Sternwind zum vollständigen Verlust der stellaren Hülle. Insbesondere wird das Ende der AGB-Phase durch den Massenverlust herbeigeführt. Ohne den Massenverlust müsste der C/O-Kern eines Sterns von mehr als etwa $1,4 M_\odot$ immer weiter anwachsen, bis er die Chandrasekhar-Grenze erreicht, und dann als Supernova explodieren. Diese wäre dem zugrunde liegenden Mechanismus nach vom Typ Ia, müsste aber zusätzlich Wasserstofflinien aufweisen. Ein solches Ereignis ist noch nie beobachtet worden.³ Es ist also unerlässlich, den Massenverlust in eine AGB-Rechnung einzubeziehen.

Oft wird zur Beschreibung des Massenverlustes die Formel von Reimers (1975) verwendet,

$$\dot{M} = \eta_{\text{R}} \cdot \frac{L_* R_*}{M_*}. \quad (3.44)$$

Leuchtkraft, Radius und Masse des Sterns sind in solaren Einheiten einzusetzen, um den Massenverlust in Sonnenmassen pro Jahr zu erhalten. Der Reimers-Parameter η_{R} muss dabei an die Entwicklungsphase des Sterns angepasst werden, ein typischer Wert ist $\eta_{\text{R}} = 2 \cdot 10^{-13}$.

¹Die OP-Kollaboration stellt freundlicherweise unter <http://opacities.osc.edu/rmos.shtml> ein Web-Interface zur Verfügung, mit dessen Hilfe man sich Rosselandsche Opazitäten für beliebige Mischungen berechnen lassen kann.

²Auch bei den nuklearen Fusionsreaktionen entstehen Neutrinos, die den Stern verlassen und Energie mitnehmen. Dieser Energieverlust wird im Q-Wert der jeweiligen Reaktion berücksichtigt.

³Für die ohnehin unbeobachteten Sterne der Population III greift dieses Argument nicht. Für sie gibt es Modellrechnungen, die eine Supernova dieser Art für möglich halten (Lau, Stancliffe und Tout, 2008).

KAPITEL 3. MATERIALFUNKTIONEN

Schröder und Cuntz (2005, 2007) geben eine theoretische Motivation für eine abgewandelte Reimers-Formel,

$$\dot{M} = \eta \cdot \frac{L_* R_*}{M_*} \cdot \left(\frac{T_{\text{eff}}}{4000 \text{ K}} \right)^{3,5} \cdot \left(1 + \frac{g_{\odot}}{4300 \cdot g_*} \right), \quad (3.45)$$

mit $\eta = 8 \cdot 10^{-14} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$; g_* und g_{\odot} stehen für die Schwerebeschleunigung an der Oberfläche des Sterns bzw. der Sonne. Schröder und Cuntz (2005) nehmen von ihrer Analyse ausdrücklich pulsationsgetriebene und massive, staubgetriebene Winde aus.

Kapitel 4

Ein wenig Theorie

Nachdem nun die Grundgleichungen, die Aufbau und Entwicklung der Sterne bestimmen, und die Physik, die in sie eingeht, erläutert worden sind, soll in diesem Kapitel auf der Basis sehr vereinfachter, aber analytisch behandelbarer Modelle ein Einblick in die Frage nach der thermischen Stabilität der thermonuklearen Reaktionen in Sternen gewonnen werden.

Mit dieser Frage hat es folgendes auf sich: Die Raten, mit denen die Kernreaktionen ablaufen, sind, wie in Abschn. 3.2 kurz angedeutet wurde, mit der Temperatur zum Teil rasant steigende Funktionen. Man möchte daher naiv vermuten, dass eine Erhöhung der Temperatur zu einer erhöhten Freisetzung von Energie, also zu einer Erhöhung der inneren Energie und damit zu einer weiteren Erhöhung der Temperatur führen sollte. Dies hätte unübersehbare Konsequenzen: Der Stern müsste in einer thermonuklearen Explosion zerrissen werden. Das ist offensichtlich nicht der Fall, im Gegenteil läuft das Brennen der Sterne (zumindest der nicht allzu schweren) langsam und gleichmäßig über viele Millionen von Jahren ab. Warum und unter welchen Bedingungen ist das so?

4.1 Der Virialsatz

Der Virialsatz macht nur globale Aussagen über die Verteilung der Energie eines Systems, lässt aber gerade dadurch einen einfachen Einblick in grundlegende Zusammenhänge zu. Er folgt durch Multiplikation der hydrostatischen Gleichung (2.8),

$$\frac{\partial P}{\partial m} = -\frac{Gm}{4\pi r^4}, \quad (4.1)$$

mit dem Faktor $4\pi r^3$ und anschließender Integration über den gesamten Stern. Die linke Seite ergibt

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial m} dm = 4\pi r^3 P \Big|_0^M - \int_0^M 12\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m} P dm = - \int_0^M 3 \frac{P}{\rho} dm, \quad (4.2)$$

wobei partielle Integration und die Massengleichung (2.3) verwendet wurden. Die Randterme verschwinden, da einerseits für den inneren Rand $r(m=0) = 0$ und andererseits für den äußeren Rand $P(m=M) = 0$ gilt¹. Mit der Zustandsgleichung des einatomigen idealen Gases,

¹Letzteres ist nur eine Näherung, denn eigentlich ist $P(m=M) = P_{\text{ext}} \neq 0$. Der äußere Druck ist, verglichen mit den anderen Termen, vernachlässigbar klein. Betrachtet man nur einen Teil des Sterns, kann es notwendig sein, auch diesen Term zu berücksichtigen.

Gln. (3.10) und (3.12), kann der Integrand weiter umgeformt werden zu

$$\frac{P}{\rho} = \frac{\mathfrak{R}}{\mu} T = \frac{2}{3} u. \quad (4.3)$$

Damit ergibt sich für die linke Seite schließlich

$$\int_0^M 4\pi r^3 \frac{\partial P}{\partial m} dm = - \int_0^M 3 \frac{P}{\rho} dm = -2 \int_0^M u dm = -2E_i, \quad (4.4)$$

wobei $E_i := \int_0^M u dm$ die gesamte innere Energie des Sterns bezeichnet. Auf der rechten Seite erscheint nach der Integration die Gravitationsenergie,

$$- \int_0^M 4\pi r^3 \frac{Gm}{4\pi r^4} dm = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = E_g. \quad (4.5)$$

Die Energie $-E_g$ würde benötigt, um die einzelnen Massenelemente des Sterns ins Unendliche zu zerstreuen.

Der Virialsatz für einen Stern aus einatomigem idealem Gas im hydrostatischen Gleichgewicht lautet also

$$-2E_i = E_g. \quad (4.6)$$

Daher gilt für die Gesamtenergie des Systems

$$W = E_i + E_g = -E_i = \frac{1}{2} E_g. \quad (4.7)$$

Insbesondere ist ein System mit $W < 0$ gravitativ gebunden. Für die vom Stern abgestrahlte Energie gilt nun

$$L = - \frac{dW}{dt} = \dot{E}_i = -\frac{1}{2} \dot{E}_g. \quad (4.8)$$

Die Leuchtkraft L ist immer größer als null, da der heiße Stern wegen des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik in das viel kältere Universum strahlen muss. Wir sehen an Gl. (4.8), dass dies – entgegen der Intuition – mit einer Zunahme der inneren Energie verbunden ist. Der Versuch, durch Abstrahlung von Energie ein Gleichgewicht mit der kälteren Umgebung herzustellen, führt bei einem Stern also nicht zu einer Anpassung seiner Temperatur an die Umgebung, sondern im Gegenteil zu weiterer Aufheizung. Umgekehrt verursacht die Zufuhr zusätzlicher Energie eine Abkühlung des Sterns. Gleichung (4.8) zeigt ebenso, dass bei Kontraktion des Sterns nur die Hälfte der dabei frei werdenden potentiellen Energie nach außen abgegeben wird; der Rest geht in innere Energie, d. h. er heizt den Stern auf.

4.2 Die thermische Stabilität von nuklearem Brennen

In diesem Abschnitt wird gezeigt, wie mit einem vereinfachten und daher analytisch handhabbaren Modell Einblicke in die Frage der Stabilität nuklearer Brennprozesse in Sternen gewonnen werden können. Wir folgen im wesentlichen der sehr klaren Darstellung von Kippenhahn und Weigert (1990). Für diese Analyse benötigen wir das Konzept homolog benachbarter Sternmodelle, welches im folgenden kurz erläutert wird.

4.2.1 Homolog benachbarte Sternmodelle

Ausgangspunkt ist das Gleichungssystem aus Massengleichung (2.3) und hydrostatischer Gleichung (2.8). Seien $r(m)$, $P(m)$, $\rho(m)$ und $\tilde{r}(m)$, $\tilde{P}(m)$, $\tilde{\rho}(m)$ zwei Lösungen dieses Gleichungssystems. Wir wollen annehmen, dass sich beide Lösungen nur wenig unterscheiden, genauer sei

$$\begin{aligned}\tilde{r} &= r + dr = r \cdot (1 + x), \\ \tilde{P} &= P + dP = P \cdot (1 + y), \\ \tilde{\rho} &= \rho + d\rho = \rho \cdot (1 + z)\end{aligned}\tag{4.9}$$

wobei

$$x, y, z \ll 1\tag{4.10}$$

gelte und außerdem x, y, z unabhängig von m seien. Die chemische Zusammensetzung der beiden Lösungen soll gleich sein. Unter diesen Voraussetzungen¹ können Beziehungen zwischen x, y, z abgeleitet werden.

Nach Voraussetzung erfüllen $\tilde{r}, \tilde{\rho}$ die Massengleichung (2.3),

$$\frac{d\tilde{r}}{dm} = \frac{1}{4\pi\tilde{r}^2\tilde{\rho}}.\tag{4.11}$$

Einsetzen des Ansatzes (4.9) ergibt

$$(1+x)\frac{dr}{dm} = \frac{1}{4\pi r^2\rho} \frac{1}{(1+x)^2(1+z)},\tag{4.12}$$

wobei wir benutzt haben, dass x nicht von m abhängt. Da auch r, ρ die Gl. (2.3) erfüllen, folgt sofort

$$(1+x)^3 = (1+z)^{-1},\tag{4.13}$$

und weiter wegen Gl. (4.10)

$$z = -3x.\tag{4.14}$$

Analog erhalten wir aus der hydrostatischen Gleichung (2.8) einen Zusammenhang zwischen x und y ,

$$y = -4x.\tag{4.15}$$

Die aus der Druck- und Dichteänderung folgende Temperaturänderung kann mithilfe der differentiellen Zustandsgleichung (3.6) bei fester Zusammensetzung,

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dP}{P} - \delta \frac{dT}{T},\tag{4.16}$$

bestimmt werden. Aus ihr und den oben gewonnenen Relationen folgt der Zusammenhang

$$\frac{dT}{T} = \frac{1}{\delta} \left(\alpha \frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} \right) = -\frac{4\alpha - 3}{\delta} \frac{dr}{r}.\tag{4.17}$$

¹Bei näherem Hinsehen erkennt man, dass es ausreicht anzunehmen, die Druckstörung y sei klein und unabhängig von m . Die entsprechende Aussage für x und z folgt dann.

Falls angenommen werden kann, dass α und δ vom Ort m unabhängig sind, ist dies auch für die Temperaturänderung dT/T der Fall. Zusammenfassend gelten also bei homologer Störung eines Modells die Relationen

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3\frac{dr}{r}, \quad \frac{dP}{P} = -4\frac{dr}{r}, \quad \frac{dT}{T} = -\frac{4\alpha - 3}{\delta} \frac{dr}{r}. \quad (4.18)$$

Zwei homologe Modelle dürfen nicht ohne weiteres als in der Zeit aufeinander folgende Zustände desselben Objekts angesehen werden, es handelt sich lediglich um zwei eng benachbarte Gleichgewichtszustände. Ob – und wenn ja, wie – der eine im Rahmen der zeitabhängigen Gleichungen in den anderen übergeht, ist mit diesen Überlegungen nicht festzustellen.

4.2.2 Die gravothermische spezifische Wärme

Mithilfe der obigen Überlegungen kann man einen Ausdruck für die Änderung der Temperatur eines Sterns bei Wärmezufuhr bzw. -abgabe, also seine spezifische Wärme, angeben. Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lässt sich auch mit Temperatur und Druck als unabhängigen Variablen schreiben (siehe Kippenhahn und Weigert, 1990, Kap. 4),

$$dq = du + Pdv = c_p \left(dT - \frac{T}{P} \nabla_{\text{ad}} dP \right). \quad (4.19)$$

Nehmen wir nun an, dass die Temperatur des Sterns gestört wird und er darauf mit einer homologen Veränderung reagiert, so gilt gemäß Gln. (4.18)

$$\frac{dP}{P} = \frac{4\delta}{4\alpha - 3} \frac{dT}{T}, \quad (4.20)$$

und wir erhalten aus dem ersten Hauptsatz

$$dq = c_p \cdot \left(1 - \nabla_{\text{ad}} \frac{4\delta}{4\alpha - 3} \right) dT. \quad (4.21)$$

Offenbar ist die Größe

$$c_g := c_p \cdot \left(1 - \nabla_{\text{ad}} \frac{4\delta}{4\alpha - 3} \right) \quad (4.22)$$

die gesuchte, sogenannte gravothermische spezifische Wärme, denn es ist $dq = c_g dT$. Zur Bestimmung einer spezifischen Wärme muss auch immer die physikalische Bedingung, unter der Wärme zugeführt wird, angegeben werden. Während man im Labor üblicherweise den Druck oder das Volumen konstant hält, ist die für einen Stern angemessene Bedingung die Einhaltung des hydrostatischen Gleichgewichts zwischen Druck- und Schwerkraft.

Für ein einatomiges ideales Gas ergibt sich mit Gln. (3.11) und (3.13)

$$c_g = -\frac{3}{5} c_p = -\frac{3}{2} \frac{\mathfrak{R}}{\mu} < 0. \quad (4.23)$$

Diese Analyse bestätigt die mit Hilfe des Virialsatzes gewonnene Aussage, dass bei einem hydrostatischen Stern aus idealem Gas jede Wärmezufuhr mit einer Verringerung der Temperatur beantwortet wird. Es sei an dieser Stelle betont, dass die (gegebenenfalls negative) spezifische Wärme c_g keine Eigenschaft der Sternmaterie als solcher ist, sondern eine Eigenschaft des Sterns

4.2. DIE THERMISCHE STABILITÄT VON NUKLEAREM BRENNEN

als selbstgravitierendes Objekt. Die »gewöhnliche« Wärmekapazität c_p des Gases ist immer positiv!

Eine weitere Konsequenz der negativen gravothermischen Wärme ist die Tatsache, dass für ein solches Objekt keine Möglichkeit existiert, mit seiner Umgebung in ein thermisches Gleichgewicht zu kommen. Ist das Objekt etwa heißer als seine Umgebung, so muss es aufgrund des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik Energie abgeben. Dies führt aber wegen der negativen spezifischen Wärme zu einer Erhöhung der Temperatur und damit nicht zur Verringerung des Ungleichgewichts, sondern im Gegenteil zu seiner Vergrößerung.¹

Wenn das Gas entartet, sinken die Größen α und δ , so dass der zweite Term in der Klammer von Gl. (4.22) dem Betrag nach kleiner und die spezifische Wärme c_g positiv wird. Nun bewirkt jede Wärmezufuhr eine Erhöhung der Temperatur. Da aber mit der Temperatur auch die nukleare Energieerzeugungsrate ansteigt und dadurch wiederum zusätzliche Wärme freigesetzt wird, kann es hier zur einer instabilen Situation kommen. Dies wird im folgenden Abschnitt unter Einbeziehung der Transport- und der Energiegleichung – bisher sind nur hydrostatische und Poissongleichung verwendet worden – detaillierter betrachtet.

4.2.3 Die Stabilität des zentralen Brennens

Ein einfaches Modell für einen Stern mit zentralem Brennen ist in Abb. 4.1 skizziert. Die Energieerzeugung des Sterns findet in einer kleinen zentralen Kugel der Masse m bei der Temperatur T mit der Rate ε statt. Der diese Kugel verlassende Energiefluss sei l und werde allein durch radiativen Transport getragen. Im ungestörten Zustand herrsche thermisches Gleichgewicht, also $m\varepsilon = l$.

Im folgenden wird untersucht, unter welchen Bedingungen der Stern thermisch stabil bzw. instabil gegenüber einer Störung der Temperatur T ist. Dafür spielt die Abhängigkeit der Energieerzeugung und der Opazität von den thermodynamischen Gegebenheiten eine große Rolle. Sie wird durch die folgenden Ableitungen, für die in Tab. 4.1 einige typische Werte angegeben sind, ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_P &:= \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln P} \right)_T, & \kappa_P &:= \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln P} \right)_T, \\ \varepsilon_T &:= \left(\frac{\partial \ln \varepsilon}{\partial \ln T} \right)_P, & \kappa_T &:= \left(\frac{\partial \ln \kappa}{\partial \ln T} \right)_P. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Wir wollen annehmen, dass auch unter der Störung dT das hydrostatische Gleichgewicht erhalten bleibt, so dass die Antwort der Größen ρ und P auf sie den Homologierelationen Gl. (4.18) folgt. Darüber hinaus wird die Temperaturänderung dT aber auch die Energieerzeugungsrate ε sowie den Energiefluss l durch die Kugeloberfläche verändern.

Die aus der Temperaturänderung dT und der damit verbundenen Druckänderung dP resultierende Änderung der nuklearen Energieerzeugung kann mit den logarithmischen Ableitungen Gln. (4.24) als

$$\varepsilon(T + dT, P + dP) = \varepsilon(T, P) \cdot \left(1 + \varepsilon_T \frac{dT}{T} + \varepsilon_P \frac{dP}{P} \right) \quad (4.25)$$

geschrieben werden. Für die Opazität κ gilt eine analoge Gleichung.

Die durch die Störung des Gleichgewichts hervorgerufene Änderung des Flusses l durch die Oberfläche der Kugel kann mit der Transportgleichung berechnet werden. Da wir von rein

¹Dieselbe Argumentation zeigt auch, dass das thermische Gleichgewicht unter diesen Umständen – sollte es zufällig vorhanden sein – nicht stabil ist.

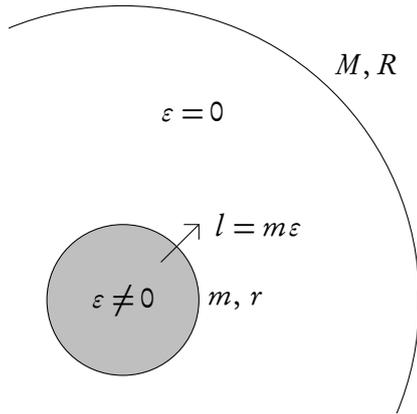


Abbildung 4.1: Skizze eines Sterns mit zentraler Energiequelle.

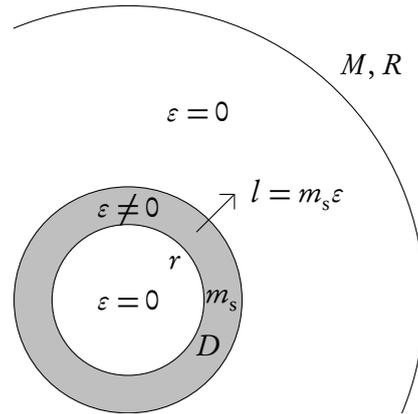


Abbildung 4.2: Skizze eines Sterns mit Schalenquelle.

radiativem Energietransport ausgehen, verwenden wir die Transportgleichung (2.21),

$$l = -\frac{64\pi^2 ac}{3} \frac{r^4 T^3}{\chi} \frac{\partial T}{\partial m}. \quad (4.26)$$

In dieser Gleichung wird wieder eine Störung gemäß dem Ansatz (4.9) eingesetzt. Für die Temperatur- und Leuchtkraftstörung wird analog dazu

$$\tilde{T} = T + dT = (1 + \theta)T, \quad (4.27)$$

$$\tilde{l} = l + dl = (1 + \lambda)l \quad (4.28)$$

angesetzt. Wieder sollen θ , λ unabhängig von m sein. Wir erhalten für die Änderung des Flusses im Fall einer kleinen Störung

$$\lambda = 4x + 4\theta - x_T \theta - x_P y. \quad (4.29)$$

Mithilfe der Homologierelationen Gl. (4.18) können alle Änderungen durch die relative Temperaturänderung ausgedrückt werden und es ergibt sich für die Änderung des Flusses

$$\frac{dl}{l} = \left[4 - x_T - (1 + x_P) \frac{4\delta}{4\alpha - 3} \right] \frac{dT}{T}. \quad (4.30)$$

Nun können wir die Energiebilanz der zentralen Kugel der Masse m in Anwesenheit der Störung betrachten. Der zusätzlichen Energieerzeugung $m d\varepsilon$ steht der um dl erhöhte Fluss gegenüber, die Differenz beider muss vom Wärmereservoir bereitgestellt bzw. aufgenommen werden, also ist

$$m d\varepsilon - dl = m \frac{dq}{dt} = m c_g \frac{dT}{dt}, \quad (4.31)$$

und unter Verwendung von $m\varepsilon = l$ und Gln. (4.25), (4.30) erhalten wir schließlich

$$\frac{m c_g}{l} \frac{dT}{dt} = \left[(\varepsilon_T + x_T - 4) + \frac{4\delta}{4\alpha - 3} \cdot (\varepsilon_P + x_P + 1) \right] \frac{dT}{T}. \quad (4.32)$$

Der Term in eckigen Klammern ist, wie man sich mithilfe der in Tab. 4.1 angegebenen Werte überzeugen kann, in allen für Sterne typischen Situationen positiv, und meistens ist ε_T der

4.2. DIE THERMISCHE STABILITÄT VON NUKLEAREM BRENNEN

Größe	typische Werte	Gültigkeitsbereich/Prozess
ε_T	6...3,5	$T_6 \approx 5 \dots 20$, pp-Kette
ε_T	23...13	$T_6 \approx 10 \dots 50$, CNO-Zyklus
ε_T	40...19	$T_8 \approx 1 \dots 2$, 3α -Prozess
ε_p	2	Wasserstoffbrennen, nicht entartet
ε_p	3	Heliumbrennen, nicht entartet
χ_T	0	Thomson-Streuung
χ_T	-3,5	Frei-frei-Übergänge
χ_p	0	Thomson-Streuung

Tabelle 4.1: Typische Werte von ε_T , ε_p , χ_T , χ_p unter verschiedenen Umständen.

führende Beitrag. Der durch die Störung erhöhte Energieabfluss kann also nicht die erhöhte Energieproduktion kompensieren. Damit ist das Brennen stabil, falls die gravothermische spezifische Wärme negativ ist, $c_g < 0$; andernfalls liegt eine instabile Situation vor¹, denn eine positive Störung dT verursacht dann einen weiteren Temperaturanstieg, $dT/dt > 0$.

Auf die Unvereinbarkeit von aktiven nuklearen Energiequellen und thermischem Gleichgewicht in der entarteten Materie Weißer Zwerge hat Mestel (1952) nachdrücklich hingewiesen.

4.2.4 Die Stabilität des Schalenbrennens

Abbildung 4.2 zeigt ein einfaches Modell für einen Stern mit einer Schalenquelle. Auf dem Kern mit Radius r liegt eine Schale der Dicke D , in der die Energieerzeugung stattfindet, darüber befindet sich die Hülle. Die Masse der Schale sei m_s , der Fluss an ihrer Oberfläche $l = m_s \varepsilon$. Es wird angenommen, dass die Hülle auf eine Störung in der Schalenquelle mit einer homologen Expansion bzw. Kontraktion reagiert, während der Kern unverändert bleibt.

Beim zentralen Brennen war der Zusammenhang zwischen Radius- und Dichteänderung

$$\frac{d\rho}{\rho} = -3 \frac{dr}{r}. \quad (4.33)$$

Betrachten wir nun statt einer Vollkugel lediglich eine dünne Kugelschale mit $D \ll r$, ändert sich dieser Zusammenhang. Nun ist

$$\rho = \frac{m_s}{V} = \frac{m_s}{4\pi r^2 D} \quad (4.34)$$

und daher gilt bei einer Ausdehnung der Schale um dD

$$d\rho = -\frac{m_s}{4\pi r^2} \frac{dD}{D^2} = -\rho \frac{dD}{D}. \quad (4.35)$$

Die darüber liegenden Schichten werden dadurch um $dr = dD$ angehoben, so dass wir für die Dichteänderung in der Schale

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dD}{D} = -\frac{r}{D} \frac{dr}{r} \quad (4.36)$$

¹Betrachtet man anstelle von nuklearer Energieerzeugung die Neutrinoverluste in einem ausgebrannten Kern, so bleibt Gl. (4.32) gültig. Da nun aber der Fluss an der Kugeloberfläche negativ ist, $l = -m\varepsilon_\nu < 0$, ist die Situation genau umgekehrt. Insbesondere ist die Neutrinoerzeugung in einem entarteten Kern mit $c_g > 0$ stabil.

schreiben können. Da die Ausdehnung der darüber liegenden Hülle als homolog angenommen wird, gilt für die Druckänderung in der Schale weiterhin die Homologierelation aus (4.18), und wir erhalten mit der differentiellen Zustandsgleichung (4.16) den Zusammenhang

$$\frac{dP}{P} = \frac{4\delta}{4\alpha - r/D} \frac{dT}{T}. \quad (4.37)$$

Verglichen mit dem zentralen Brennen, Gl. (4.20), steht anstelle der 3 im Nenner die Größe r/D , sonst ändert sich nichts. Damit erhalten wir für die gravothermische spezifische Wärme der Schalenquelle

$$c_g = c_p \left(1 - \nabla_{\text{ad}} \frac{4\delta}{4\alpha - r/D} \right) \quad (4.38)$$

und für ihre Energiebilanz

$$\frac{m_s c_g}{l} \frac{dT}{dt} = \left[(\varepsilon_T + \kappa_T - 4) + \frac{4\delta}{4\alpha - r/D} (\varepsilon_P + \kappa_P + 1) \right] \frac{dT}{T}. \quad (4.39)$$

Der Term in eckigen Klammern gibt an, ob die zusätzliche Energieerzeugung den erhöhten Energieabstrom überwiegt. Bei hinreichend kleinem D/r wird der zweite Beitrag negativ, so dass sich der Wert des gesamten Terms verglichen mit zentralem Brennen verringert. Das bedeutet, dass eine dünne Schale die zusätzlich erzeugte Energie leichter abgibt als eine Vollkugel. Da die Energieerzeugung proportional zum Volumen ist, aber der Abstrom über die Oberfläche erfolgt, ist dies durchaus plausibel. Auch bei Schalenbrennen ist ε_T der dominierende Term und der gesamte Ausdruck ist positiv. Daher ist der entscheidende Punkt bei der Frage nach der Stabilität des Brennens auch bei einer Schalenquelle die gravothermische spezifische Wärme c_g .

Wie eine zentrale Quelle kann auch eine Schalenquelle durch Entartung instabil werden, denn bei Entartung geht δ nach null und daher wird c_g positiv. Eine Schalenquelle kann aber auch völlig ohne den Einfluss von Entartung thermisch instabil werden, denn selbst bei idealem Gas mit $\alpha = \delta = 1$, $\nabla_{\text{ad}} = 2/5$ wird die spezifische Wärme c_g positiv, wenn nur D/r klein genug ist. Diese rein geometrisch verursachte Instabilität ist der Auslöser für die zuerst von Schwarzschild und Härm (1965) und Weigert (1966) gefundenen thermischen Pulse der AGB-Sterne.

Kapitel 5

Numerisches Verfahren

5.1 Lösungsverfahren

Das gegebene Problem ist ein steifes System von gekoppelten, nichtlinearen, partiellen Differentialgleichungen. Bezüglich der Zeit handelt es sich um ein Anfangswertproblem, bezüglich der Ortskoordinate um ein Randwertproblem. Die verwendeten Lösungsverfahren haben sich seit Beginn der rechnergestützten Bearbeitung von Problemen der Sternentwicklung durch Hofmeister, Kippenhahn und Weigert (1964a,b,c) und Eggleton (1971, 1972) in vieler Hinsicht kaum verändert: Die Differentialgleichungen werden zu Differenzgleichungen diskretisiert. Man erhält dadurch ein großes System von (nichtlinearen) algebraischen Gleichungen. Dieses wiederum wird als Nullstellensuche aufgefasst und mit dem Newton-Raphson-Verfahren gelöst. Zur Berechnung der dazu benötigten Jacobi-Matrix verwenden wir das Tool ADF95 von Straka (2005). Die auftretenden linearen Gleichungssysteme werden mit dem GMRES-Verfahren (z. B. Meister, 1999) in der Implementierung des Programmpaketes LIMEX von Ehrig und Nowak (2002) gelöst. Für die Zeitintegration wird das implizite Eulerschema verwendet, d. h. die Zeitterme sind reine Rückwärtsdifferenzen.

Im Sternentwicklungsprogramm von Straka (2002), das für diese Arbeit modifiziert und erweitert wurde, werden alle Gleichungen für die Struktur und die Entwicklung des Sterns gekoppelt gelöst. Die Zeitabhängigkeit der konvektiven Mischung wird berücksichtigt. Von einer zeitabhängigen Konvektionstheorie, wie sie von Straka (2002) verwendet wurde, gehen wir jedoch in dieser Arbeit wegen des Aufwands an Rechenzeit ab. Die Kernreaktionen sind von Straka (2002) als ein Netzwerk implementiert; die Annahme von Reaktionsgleichgewicht zwischen verschiedenen Spezies wird nicht gemacht. Lediglich die β -Zerfälle werden bei den in Kap. 6 gezeigten Modellen als instantan betrachtet, da dies die Rechenzeit verkürzt; auf diese Vereinfachung kann bei künftigen Rechnungen problemlos verzichtet werden.

5.1.1 Diskretisierung

Als unabhängige Ortsvariable wird im ganzen Stern bis zur Oberfläche bei $\tau = 2/3$ die Lagrangesche Koordinate m aus Gl. (2.1) verwendet.¹ Die abhängigen Variablen, nach denen gelöst wird, sind die Radialkoordinate r , die Dichte ρ , der Druck P , die innere Energie u , die lokale Leuchtkraft l und die chemische Zusammensetzung X_i . Alle anderen in den Gleichungen auftretenden Größen müssen aus diesen berechnet werden, ebenso alle ihre Ableitungen, die

¹Im Code von Hofmeister, Kippenhahn und Weigert (1964a) wird der äußerste Teil des Sterns mit einem vereinfachten Gleichungssystem, welches insbesondere $\varepsilon_g = 0$ annimmt, über den Druck P von außen nach innen integriert und mit einem Schießverfahren an die innere Lösung angepasst.

für das Newton-Raphson-Verfahren zur Lösung des linearisierten Gleichungssystems benötigt werden.

Es wird ein gestaffeltes Gitter verwendet, bei dem die vektoriellen Größen auf den Zellrändern und die skalaren Größen in den Zellmittelpunkten definiert sind. Bei den Variablen ist daher die Einteilung wie folgt: auf den Zellrändern liegen m , r und l , in den Zellmittelpunkten ρ , P , u und X_i . Die Differenzen einer Größe sind immer am jeweils anderen Ort definiert. Wird eine Größe an der anderen Stelle benötigt, wird das arithmetische Mittel verwendet.

Für fast alle abgeleiteten Größen ergibt sich aus ihrer Definition ein natürlicher Ort. Dies ist nicht der Fall für den radiativen Gradienten ∇_{rad} , da in ihn nicht nur thermodynamische Größen, sondern auch der Fluss l eingeht. Er wird wie die vektoriellen Größen auf den Zellrändern definiert. Dasselbe gilt für den Schichtungsgradienten ∇ . Auch bei der Auswertung des Schwarzschildkriteriums muss man sich für einen der beiden Orte entscheiden. Wir nehmen den Vergleich zwischen dem radiativen und dem adiabatischen Gradienten an den Zellrändern vor.

5.1.2 Zeitschritt

Bei impliziten Verfahren gibt es keine von der Mathematik vorgegebene, strikte Regel für die Zeitschrittwahl vergleichbar der CFL-Zahl bei expliziter Hydrodynamik. Wir verwenden die häufig benutzte Vorschrift, dass die relative Änderung keiner der Variablen pro Zeitschritt an irgendeinem Ort mehr als eine gegebene Obergrenze s_{max} betragen soll. Ist eine der Änderungen größer, wird die Schrittweite für den nächsten Schritt halbiert. Sind alle Änderungen kleiner als die Hälfte der vorgegebenen Schranke, wird die Schrittweite um den Faktor 1,5 erhöht. Für die Rechnungen wurde als Standard $s_{\text{max}} = 0,1$ gewählt. In Abschn. 5.5 finden sich einige Tests zu den Auswirkungen der Wahl des Zeitschrittes.

Zur Zeitschrittwahl sind noch einige Bemerkungen zu machen:

- Es wird immer nur die Länge des zukünftigen Zeitschrittes angepasst. Ist für einen Zeitschritt das Konvergenzkriterium einmal erfüllt, so wird das Modell nicht verworfen, auch wenn im nachhinein die Änderungen über der vorgegebenen Schranke liegen.
- Die genannte Regelung erlaubt es nicht, dass eine Größe ihr Vorzeichen wechselt, weil in diesem Fall die Änderung mehr als 100 % beträgt. Da ein Vorzeichenwechsel beim lokalen Fluss l aber durchaus vorkommt, muss hier eine Ausnahme zugelassen werden: Alle Werte von l , für die $l < 0,01L$ gilt, wurden ab dem ersten Auftreten einer Schalenquelle nicht in das Kriterium für die Zeitschrittwahl einbezogen.
- Bei aktiver Wasserstoffschalenquelle stammt oft die strengste Beschränkung des Zeitschrittes aus der Abnahme von Wasserstoff am unteren Ende der Schalenquelle. Da dies teilweise zu inakzeptabel kleinen Zeitschritten führt, wurde auch hier großzügiger vorgefahren.
- Die Einhaltung des Zeitschrittkriteriums garantiert weder die Konvergenz des Verfahrens noch die Richtigkeit der Lösung. Konvergenzprobleme können, ganz besonders beim Aufbau einer Konvektionszone, die Verwendung eines erheblich kleineren Zeitschrittes notwendig machen. Umgekehrt ist es, wie in den vorigen Punkten angedeutet, unter Umständen durchaus möglich oder sogar nötig, einen größeren Zeitschritt zu erzwingen.

Zusätzliche Einzelheiten sowie Abweichungen von den genannten Vorschriften sind bei den einzelnen Rechnungen angegeben.

5.1.3 Konvergenz und Diffusionskoeffizient

Frost und Lattanzio (1996) schreiben in ihrem Artikel mit erfrischender Offenheit: »Note that convergence difficulties are often found in stellar evolution calculations, especially for AGB models. They are usually not reported in publications until they become so severe as to prohibit further evolution.« Dieser Aussage kann ich nur beipflichten.

Solange ein Sternmodell keine Konvektionszone enthält, ist die Konvergenz gut, d. h. es genügen ein bis drei Iterationen, um die gesuchte Lösung zu bestimmen. Die durch das Kriterium aus 5.1.2 vorgegebene Schrittweite mit $s_{\max} = 0,1$ kann voll ausgenutzt werden. Diese Aussage ist auch richtig, wenn vorhandene Konvektionszonen ihren Umfang (immer in der Massenkoordinate gedacht) nicht ändern oder kleiner werden.

Konvergenzprobleme treten auf, wenn eine Konvektionszone entsteht oder sich ausdehnt. In dieser Situation wird ein vorher nicht durchmischter Bereich des Sterns auf einer sehr kurzen Zeitskala gemischt, und es entsteht an den Rändern der Konvektionszone eine Diskontinuität in der chemischen Zusammensetzung und damit auch in der Dichte und anderen Größen, die sich bei weiterer Ausdehnung der Konvektionszone verschiebt. Diese Schwierigkeiten sind ganz eindeutig mit der Mischung verbunden: Wird sie testweise ausgeschaltet, indem man für den Mischungskoeffizienten $D = 0$ setzt, verschwinden auch die Konvergenzprobleme.

Der Grund liegt möglicherweise darin, dass – wenn auch die konvektive Mischung selbst als zeitabhängiger Prozess behandelt wird – die Ausbildung der Konvektion immer noch als instantan modelliert wird. Dieser Einschaltvorgang ist nicht differenzierbar, und daher sind in den Ableitungen, die dem Newton-Raphson-Verfahren übergeben werden, nicht genügend Informationen über das System enthalten, um eine Lösung zu finden.

Bei Verwendung des aus der Mischungswegtheorie abgeleiteten Ausdrucks Gl. (2.36) für den Mischungskoeffizienten waren die Konvergenzprobleme so groß, dass Rechnungen nicht möglich waren; er musste daher abgeändert werden. Durch Multiplikation von Gl. (2.36) mit dem Faktor

$$\left(\frac{\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla_{\text{rad}}} \right)^2 \quad (5.1)$$

konnten die Konvergenzprobleme immerhin soweit eingedämmt werden, dass Rechnungen möglich waren.¹ Die Vorschrift stützt die Konvergenz dadurch, dass der Diffusionskoeffizient zum Rand der Konvektionszone hin auf einem breiteren Bereich abfällt. Das macht den Einschaltvorgang (d. h. das Durchmischen eines vorher inhomogenen Bereichs) glatter.

Der Faktor ist so gewählt, dass er zum Zentrum einer Konvektionszone hin nach eins geht und somit dort weniger Einfluss ausübt. Er bleibt dennoch oft bei 0,1 oder darunter, so dass ein Einfluss dieser Vorschrift auf das Ergebnis nicht ausgeschlossen werden kann. Um die Folgen der Änderung des eigentlich zu integrierenden Gleichungssystems abschätzen zu können, wurde ein Teil der Rechnung des $5 M_{\odot}$ -Modells der Population III, das wir in Abschn. 6.2.2 ausführlich darstellen, mit verschiedenen Diffusionskoeffizienten D wiederholt:

$$\text{Standard: } D = D_{\text{MLT}} \cdot \left(\frac{\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla_{\text{rad}}} \right)^2 .$$

$$\text{Test 1: } D = 0,1 \cdot D_{\text{MLT}} \cdot \left(\frac{\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla_{\text{rad}}} \right)^2 .$$

¹Schon Eggleton (1972) verwendet als Mischungskoeffizient $D = \text{const.} \cdot (\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}})^2$ »for numerical convenience«.

$$\text{Test 2: } D = 5 \cdot D_{\text{MLT}} \cdot \left(\frac{\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla_{\text{rad}}} \right)^2.$$

$$\text{Test 3: } D = D_{\text{MLT}} \cdot \left(\frac{\nabla_{\text{rad}} - \nabla_{\text{ad}}}{\nabla_{\text{rad}}} \right)^3.$$

Mit D_{MLT} ist der Ausdruck Gl. (2.36) gemeint. Rechnungen mit noch weiter erhöhtem oder an den Rändern weniger stark gedämpftem Mischungskoeffizient wurden versucht, konnten aber wegen Konvergenzproblemen nicht durchgeführt werden.

Die Unterschiede zwischen den verschiedenen Varianten sind kleiner als die zwischen den in Abschn. 5.5 dargestellten Testrechnungen mit verschiedenem Zeitschritt bzw. verschieden feinem Gitter. Wir schließen daraus, dass der modifizierte Ausdruck für den Diffusionskoeffizienten die Lösung nur gering beeinflusst. Selbst bei der stärksten verwendeten Glättung (Test 3) beträgt der Gradient des Wasserstoffgehalts in der Konvektionszone während des zentralen Wasserstoffbrennens nur einige 10^{-6} bis einige 10^{-5} ; ähnliches gilt für das zentrale Heliumbrennen.

Mit fortschreitender Entwicklung des Sterns verschärft sich auch das beschriebene Konvergenzproblem. Während die Konvektionszone des Wasserstoffbrennens mit dem modifizierten Mischungskoeffizienten noch recht gut zu behandeln ist, bereitet die pulsinduzierte Konvektionszone der thermischen Pulse so große Probleme, dass dort der Mischungskoeffizient noch stärker (nämlich mit der dritten Potenz, wie in Test 3) geglättet werden musste. Die oben genannten Tests erstrecken sich nicht auf die TPAGB-Phase.

5.2 Gitterverfeinerung

Ein Stern auf dem AGB weist – im Gegensatz zu einem Hauptreihenstern – eine komplexe innere Struktur auf. Die Ausdehnung der einzelnen Strukturen ist sehr unterschiedlich. Man vergleiche z. B. den ausgebrannten, relativ homogenen C/O-Kern, der etwa 0,5 bis $1 M_{\odot}$ umfasst, mit der Wasserstoffschalenquelle, in der sich auf wenigen Promille einer Sonnenmasse Größen wie Dichte oder Druck um acht und mehr Größenordnungen ändern. Darüber hinaus stehen diese Strukturen nicht still, sondern bewegen sich relativ zur Massenkoordinate.

Es ist klar, dass ein solches Sternmodell nicht mit einem einmal zu Beginn der Rechnung festgelegten, starren Gitter berechnet werden kann. Das Gitter überall so fein zu machen, wie man es zur Auflösung der steilsten Gradienten braucht, wäre mit einem untragbaren Verbrauch an Speicher und Zeit sowie vermutlich neuen numerischen Schwierigkeiten verbunden. Daher muss die Verteilung der Gitterpunkte im Lauf der Rechnung an die Struktur der Lösung angepasst werden.

5.2.1 Einfügen und Entfernen

Für die Anpassung des Gitters an die physikalische Struktur des Sternmodells haben wir uns für die Methode des Einfügens und Entferns von Punkten¹ entschieden. Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Überschreitet der Quotient der Werte einer Variablen an zwei benachbarten Punkten eine gegebene Schranke, so ist zwischen diesen beiden Punkten ein neuer Punkt einzufügen. Unterschreiten die Quotienten für alle Variablen an einem Punkt

¹Diese Methode wurde bereits von Hofmeister, Kippenhahn und Weigert (1964a) verwendet, für technische Details vgl. Kippenhahn, Weigert und Hofmeister (1967). Der Code von Eggleton (1971) verwendet ein bewegliches Gitter; dort werden die Lösung des Gleichungssystems und die Anpassung des Gitters (bei konstanter Punktzahl) simultan bewerkstelligt.

5.2. GITTERVERFEINERUNG

(nach links und nach rechts) eine untere Schranke, so kann dieser Punkt entfernt werden. Die verwendeten Kriterien für einzufügende Punkte sind im einzelnen:

Druck: Der Druckverlauf muss immer ausreichend aufgelöst werden; bei zu wenig Punkten kommt es früher oder später zum Programmabbruch, da die Rechnung nicht mehr konvergiert. Der Druck wird außerdem als Vertreter für die anderen thermodynamischen Größen benutzt, denn falls P hinreichend aufgelöst ist, so ist das auch für μ , ρ und T der Fall. Ein zusätzlicher Punkt wird eingefügt, falls für den Druck an zwei benachbarten Punkten i und $i + 1$ gilt

$$\left| \log \frac{P_{i+1}}{P_i} \right| > 0,12. \quad (5.2)$$

Das Kriterium für P tritt meistens in den äußersten Schichten der Hülle oder am Übergang zwischen Kern und Hülle auf.

Radialkoordinate: Hier wurde als Kriterium für einen zusätzlichen Punkt

$$\left| \log \frac{r_{i+1}}{r_i} \right| > 0,2 \quad (5.3)$$

gesetzt. Dieses Kriterium tritt selten in Erscheinung.

Ionisationsgrade: Gilt für die Ionisationsgrade f^{H} , f^{He^+} und $f^{\text{He}^{++}}$ von Wasserstoff und Helium

$$|f_{i+1} - f_i| > 0,1, \quad (5.4)$$

wird ein Punkt eingefügt. Dieses Kriterium wird benutzt, um die obere Hülle aufzulösen. Im Sterninneren bleibt es wegen vollständiger Ionisation wirkungslos.

Opazität: Ein neuer Punkt wird ebenfalls eingefügt, falls für die Opazität an benachbarten Punkten

$$\left| \log \frac{\kappa_{i+1}}{\kappa_i} \right| > 0,2 \quad (5.5)$$

gilt. Dieses Kriterium wird nur außen (oberhalb $0,9 \cdot M$) angewendet. Es wurde aufgrund folgender Beobachtung eingeführt: Bei der Entwicklung zum Roten Riesen dehnt sich der Stern stark aus, die Effektivtemperatur sinkt, und es bilden sich in der oberen Hülle Gebiete mit nur teilweiser Ionisation aus. Es kam in dieser Entwicklungsphase oft zu Programmabbrüchen wegen Nichtkonvergenz sehr weit außen, typischerweise in den letzten 10 Punkten. Nach willkürlicher Einfügung zusätzlicher Punkte dort lief die Rechnung weiter, bis das gleiche wieder passierte. Obiges Kriterium erhöht die Auflösung in den obersten Schichten, und das (rein erfahrungsgemäß) in einer Art und Weise, die das beschriebene Problem fast immer verschwinden lässt oder doch wenigstens stark mäßigt. Was der Grund für dieses Konvergenzproblem ist, und warum es sich so zumindest abschwächen lässt, wurde nicht weiter untersucht.

Energieerzeugung: Um die Schalenquellen in den Spätphasen der Entwicklung gut aufzulösen, wurden zwei Kriterien auf die Energieerzeugung gesetzt; zum einen soll der Unterschied von einem zum nächsten Gitterpunkt nicht zu groß sein,

$$\left| \log \frac{\varepsilon_{\text{nuc},i+1}}{\varepsilon_{\text{nuc},i}} \right| \leq 0,1, \quad (5.6)$$

zum anderen soll in jeder Massenschale nur ein kleiner Teil der gesamten Energieerzeugung stattfinden,

$$\left| \varepsilon_{\text{nuc},i+1} - \varepsilon_{\text{nuc},i} \right| \leq 0,03 \max \varepsilon_{\text{nuc}}. \quad (5.7)$$

Ist eines dieser beiden Kriterien verletzt, wird ein weiterer Punkt eingefügt.

5.2.2 Interpolation und Nachiteration

Für die eingefügten Punkte müssen die Werte der Variablen interpoliert werden. Da ein gestaffeltes Gitter verwendet wird, müssen auch beim Entfernen von Punkten Werte interpoliert werden. Die Massenbruchteile X_i für häufige Elemente mit $X_i > 0,01$ werden linear interpoliert, für seltene Elemente logarithmisch. Alle anderen Variablen werden ebenfalls linear interpoliert. Die Verwendung von Interpolationsformeln höherer Ordnung hat sich nicht bewährt.

Es ist zu bedenken, dass aus der Lösung eines diskretisierten Gleichungssystems selbst durch Weglassen von Punkten keine Lösung des neuen Gleichungssystems wird, um so weniger ist das beim Einfügen von Punkten der Fall. Um die Störung, die häufiges Einfügen und Entfernen in die Modelle einbringt, zu vermindern, führen wir eine Nachiteration durch, die sicherstellt, dass auch nach der Veränderung des Gitters wieder eine Lösung des ebenfalls veränderten diskretisierten Gleichungssystems vorliegt. Dazu behalten wir den Zeitterm ε_g aus dem abgeschlossenen Zeitschritt bei und interpolieren ihn linear auf das neue Gitter. Dann lösen wir das System der Sternaufbaugleichungen mit dem vorgegebenen ε_g und bei konstanter chemischer Zusammensetzung. Damit liegt bereits zum Beginn des nun folgenden Zeitschritts ein Modell vor, das sich im hydrostatischen Gleichgewicht befindet und dessen thermische Struktur von der Gitteranpassung möglichst wenig beeinflusst wurde.

5.2.3 Unstetigkeiten in der Lösung

Die Gleichungen des Sternaufbaus erzwingen die Stetigkeit oder Differenzierbarkeit einer Reihe von Variablen. So sind z. B. der Druck, die Radialkoordinate, die Temperatur und die Leuchtkraft differenzierbare Funktionen der Lagrangeschen Koordinate. Dies ist selbstverständlich nichts Besonderes, im Gegenteil wird man von der Lösung eines Differentialgleichungssystems generell erwarten, dass sie differenzierbar ist.

Durch die Verwendung des strikten Schwarzschildkriteriums erlaubt (oder vielmehr erzwingt) man aber Konfigurationen mit unstetigem Verlauf der chemischen Zusammensetzung. Diese Unstetigkeit zieht sich durch die funktionalen Zusammenhänge weiter in andere Größen: Dichte, innere Energie, mittleres Molekulargewicht, Opazität, radiativer Gradient und selbst die nukleare Energieerzeugung können ebenfalls unstetig sein. Das muss beim Einfügen von Punkten berücksichtigt werden, denn man darf nicht zulassen, dass die dafür konzipierte Routine versucht, eine echte Diskontinuität aufzulösen. Dies führt auf die eine oder andere Weise zu unbrauchbaren Ergebnissen oder zum Programmabbruch.

Auf dem TPAGB tritt dieses Problem verstärkt auf, da dort regelmäßig Konvektionszonen entstehen und wieder verschwinden. Das hat mich dazu bewogen, in dieser Phase doch wieder auf ein in gewissem Maße festes Gitter zurückzugreifen. Für bestimmte Bereiche, z. B. die Wasserstoffschalenquelle oder die Konvektionsgrenze, wird eine feste Zellengröße festgesetzt. Der Bereich, in dem diese einzuhalten ist, wandert dann mit der entsprechenden Struktur mit. Der Vorteil besteht darin, dass zusätzliche Punkte an einem Ort eingefügt werden, wo die Gradienten noch flach sind. Wenn die aufzulösende Struktur diesen Ort erreicht, sind die notwendigen Gitterpunkte bereits vorhanden. Dadurch wird das Programm deutlich stabiler. Es gibt natürlich auch Nachteile: Die Zellengrößen für die aufzulösenden Gebiete werden

bisher von Hand gesetzt und müssen daher gegebenenfalls während der Rechnung angepasst werden. Die mit den Kriterien aus 5.2.1 gesetzten Ziele für die Auflösung konnten nicht überall erreicht werden. Außerdem werden deutlich mehr Punkte verwendet als unbedingt notwendig wären, denn an einigen Stellen ist das Gitter viel zu fein. Daher dauert jeder einzelne Zeitschritt länger und die Schrittweite ist kleiner. Die gewonnene Stabilität wird mit mehr Rechenzeit erkauft. Bei der Gitteranpassung besteht, besonders im Kontext der thermischen Pulse, noch Verbesserungsbedarf.

5.3 Massenverlust

Der Massenverlust wird zwischen den Zeitschritten ausgeführt. Wollte man auch den neuen Wert der Sternmasse simultan mit allen anderen Größen bestimmen, so wäre man mit einem Problem mit freiem Rand konfrontiert. Da die Schrittweite deutlich kleiner ist als die Zeitskalen, auf denen sich Leuchtkraft, Radius und Masse des Sterns verändern, ist es möglich, durch diese Art der Implementierung den festen Rand beizubehalten.

Physikalisch gesehen wird der Massenabfluss aus den obersten Schichten des Sterns gespeist. Man kann aber nicht einfach die äußersten Massenschalen abnehmen, denn das Modell soll durch den Massenverlust möglichst wenig gestört werden. Insbesondere möchte man nicht, dass sich die Ionisationszonen bezüglich des Gitters deutlich verschieben, da man dann gezwungen wäre, im Anschluss wiederum das Gitter an das »neue« Modell anzupassen.

Daher gehen wir folgendermaßen vor: Für ein konvergiertes Modell wird anhand von Formel (3.45) und der Schrittweite h des abgeschlossenen Zeitschrittes die in dieser Zeit verlorene Masse berechnet, $\Delta M = h \cdot \dot{M}$. Diese wird anteilig aus allen Massenschalen der äußeren 10 % der Sternmasse entnommen. Notwendige Voraussetzungen für die Zulässigkeit dieser Vorgehensweise sind:

- Die Hülle muss homogen zusammengesetzt sein, da man andernfalls Material mit einer anderen als der Oberflächenzusammensetzung wegnimmt. Dies ist wegen der Durchmischung der konvektiven Hülle immer gut erfüllt.
- Der Bereich, aus dem der Massenverlust (technisch) gespeist wird, muss kleiner als die Hülle sein, denn man darf auf keinen Fall Material aus dem Kern oder den Schalenquellen wegnehmen. Zum Ende der AGB-Phase, wenn die Hülle sehr klein wird, muss daher dieses Reservoir entsprechend angepasst werden.

Bei Verwendung der Nachiteration (s. 5.2.2) muss die Anpassung des Gitters vor der Anwendung der Massenverlustroutine durchgeführt werden; die umgekehrte Reihenfolge führt zu Störungen insbesondere der Leuchtkraft. Bei sehr massearmer Hülle begrenzt der Massenverlust den Zeitschritt; unterhalb einer gewissen Hüllenmasse muss er dann abgeschaltet werden. Die Implementierung des Massenverlustes beeinträchtigt die Konvergenz des Newton-Raphson-Verfahrens nicht. Die Ersetzung von Gl. (3.45) durch eine andere Berechnung der Massenverlustrate ist ohne weiteres möglich.

5.4 Anfangsmodelle

Als Anfangsmodelle werden polytrope Gaskugeln¹ mit Index $n = 3$ verwendet. Die Integration der Lane-Emden-Gleichung bei vorgegebener Masse und vorgegebenem Radius liefert bereits die komplette mechanische Struktur, also die Variablen ρ , P und r als Funktionen von m .

¹z. B. in Kippenhahn und Weigert (1990), Kap. 19

Der Startwert für die innere Energie u wird mit der Zustandsgleichung des idealen Gases berechnet. Der Startwert für den lokalen Fluss l wird aus der Transportgleichung für rein radiativen Transport bestimmt. Die chemische Zusammensetzung ist zu Beginn homogen; sie ist im Einzelnen bei den jeweiligen Rechnungen angegeben.

Die Punkteverteilung der Anfangsmodelle ist weitgehend äquidistant, lediglich nahe dem Zentrum und nahe der Oberfläche werden kleinere Massenschalen verwendet. Die Anfangsmodelle haben etwa 400 Punkte.

Für den Radius der Anfangsmodelle wird ein Vielfaches des Radius eines Hauptreihensterns vorgegeben. Während der Entwicklung zum Hauptreihenstern sollten Abhängigkeiten von den Details des Anfangsmodells ausgeglichen werden.

Ein Anfangsmodell mit $2M_{\odot}$ wurde erzeugt, indem auf ein Anfangsmodell mit $3M_{\odot}$ die Massenverlustroutine mit einer hohen Massenverlustrate, $\dot{M} = 10^{-3} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$, angewendet wurde. Dabei wurde die Masse nicht wie in Abschn. 5.3 beschrieben aus der Hülle entnommen, sondern der ganze Stern wurde gleichmäßig als Reservoir benutzt.

5.5 Tests zur räumlichen und zeitlichen Schrittweite

Zum Test der Zuverlässigkeit der numerischen Integration in Hinblick auf die Wahl des Zeitschritts und der räumlichen Diskretisierung wurde ein Teil der Rechnung des $5M_{\odot}$ -Modells¹ der Population III mit verschiedenen Parametern ausgeführt. Für alle Tests wurde die Gitterverfeinerung unterhalb 0,8 der Sternmasse deaktiviert. Das Gitter ist dort fest und (mit Ausnahme der innersten Massenschalen) äquidistant. Im äußeren Bereich oberhalb 0,8 der Sternmasse wurde die Gitterverfeinerung wie immer eingesetzt, weil hier andernfalls Konvergenzprobleme und seltsames Verhalten bei der Entwicklung zum Roten Riesen drohen.

Für die Größe der Massenschalen und das Zeitschrittkriterium wurden verschiedene Werte gewählt, im Einzelnen:

Test 1: Unterhalb 0,8 der Sternmasse wird das Gitter des Anfangsmodells beibehalten; dort ist (außer bei den innersten Massenschalen) $\Delta m = 3,5 \cdot 10^{31} \text{ g} = 0,018 M_{\odot}$.

Test 2: Unterhalb 0,8 der Sternmasse wurden noch auf der Vorhauptreihe alle Zellen einmal halbiert, d. h. $\Delta m = 1,75 \cdot 10^{31} \text{ g} = 0,009 M_{\odot}$. Danach wurde auch hier das Gitter nicht mehr verändert.

Test 3: Gitter wie in Test 1, aber $s_{\text{max}} = 0,05$ statt wie sonst 0,1.

Test 4: Gitter wie in Test 2, aber $s_{\text{max}} = 0,05$ statt wie sonst 0,1.

Eine Veränderung der räumlichen Diskretisierung beeinflusst durch das in 5.1.2 angegebene Kriterium auch die Wahl des Zeitschrittes. Daher unterscheiden sich Test 1 und Test 2 bzw. Test 3 und Test 4 nicht nur in der räumlichen, sondern auch in der zeitlichen Schrittweite. Die Tests 1 und 3 bzw. 2 und 4 unterscheiden sich nur in der Wahl des Zeitschritts.

Beim Übergang ins Riesenstadium entwickelt der Stern einerseits einen Kern von hoher Dichte und andererseits eine sehr verdünnte Hülle. Der Übergangsbereich zwischen beiden wird sehr klein und der Druckgradient dort entsprechend groß; so groß, dass die Rechnung mit konstantem, äquidistantem Gitter nicht mehr fortgesetzt werden kann. Daher ist der Vergleich der Rechnung mit Gitteranpassung mit den Tests ohne Gitteranpassung bzw. letzterer untereinander nur bis zu einem gewissen Punkt der Entwicklung möglich.

¹Diese Rechnung wird in Abschn. 6.2.2 ausführlich beschrieben.

5.5. TESTS ZUR RÄUMLICHEN UND ZEITLICHEN SCHRITTWEITE

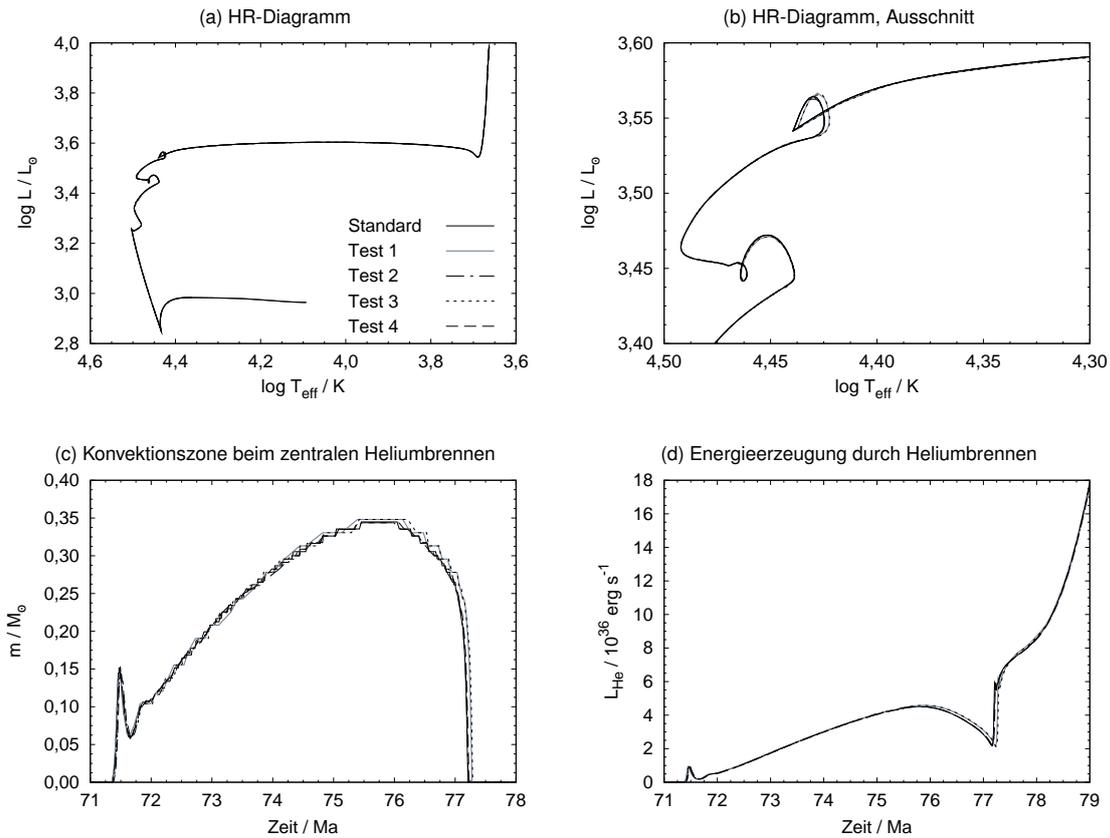


Abbildung 5.1: Tests zur Stabilität der Rechnungen bei Änderung von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung: Gesamtes HRD und zentrales Heliumbrennen.

Das HRD in Abb. 5.1a zeigt die gesamte Entwicklung, soweit sie für die Tests gerechnet wurde. Auf diesem Maßstab ist, wie zu erwarten, kein Unterschied erkennbar. Im Ausschnitt 5.1b ist die deutlichste Abweichung zwischen den verschiedenen Rechnungen gezeigt. Sie ist mit dem Ende des zentralen Heliumbrennens verbunden. Ein Blick in das Sterninnere, besonders auf die zentrale Konvektionszone in Abb. 5.1c, gibt Aufschluss über die Ursache.

Bei den beiden Rechnungen mit grobem Gitter dauert das Heliumbrennen etwa $6 \cdot 10^4$ a länger als bei den anderen. Außerdem ist die maximale Ausdehnung der Konvektionszone hier um $4 \cdot 10^{-3} M_{\odot}$ größer. Da jede Konvektionszone immer eine ganze Anzahl von Massenschalen umfasst, schränkt das vorgegebene Gitter auch die möglichen Größen der Konvektionszonen ein. Die längere Dauer des Heliumbrennens ist eine Folge der größeren Konvektionszone, weil dadurch mehr Helium verbrannt werden kann. Bei einer Gesamtdauer des zentralen Heliumbrennens von $5,8 \cdot 10^6$ a und einer maximalen Ausdehnung der Konvektionszone von $0,345 M_{\odot}$ beträgt die Abweichung der Rechnungen voneinander etwa 1%. Dieser Unterschied wirkt sich auf die Energieerzeugung (Abb. 5.1d) aus und verursacht so die Abweichungen im HRD.

An der Energieerzeugung in Abb. 5.1d wird sichtbar, dass am Ende des Heliumbrennens bei 77,2 Ma die Differenz zwischen den einzelnen Rechnungen am größten ist und sich danach wieder verringert. Ein kleiner Unterschied bleibt aber weiter bestehen. So schwankt der Zeitpunkt, bei dem die Hülle konvektiv instabil wird, um $\pm 1 \cdot 10^4$ a, wie Abb. 5.2a zeigt. Das gleiche gilt natürlich für die Änderung der Zusammensetzung an der Sternoberfläche durch den zweiten Dredge-up in Abb. 5.2b,c,d.

KAPITEL 5. NUMERISCHES VERFAHREN

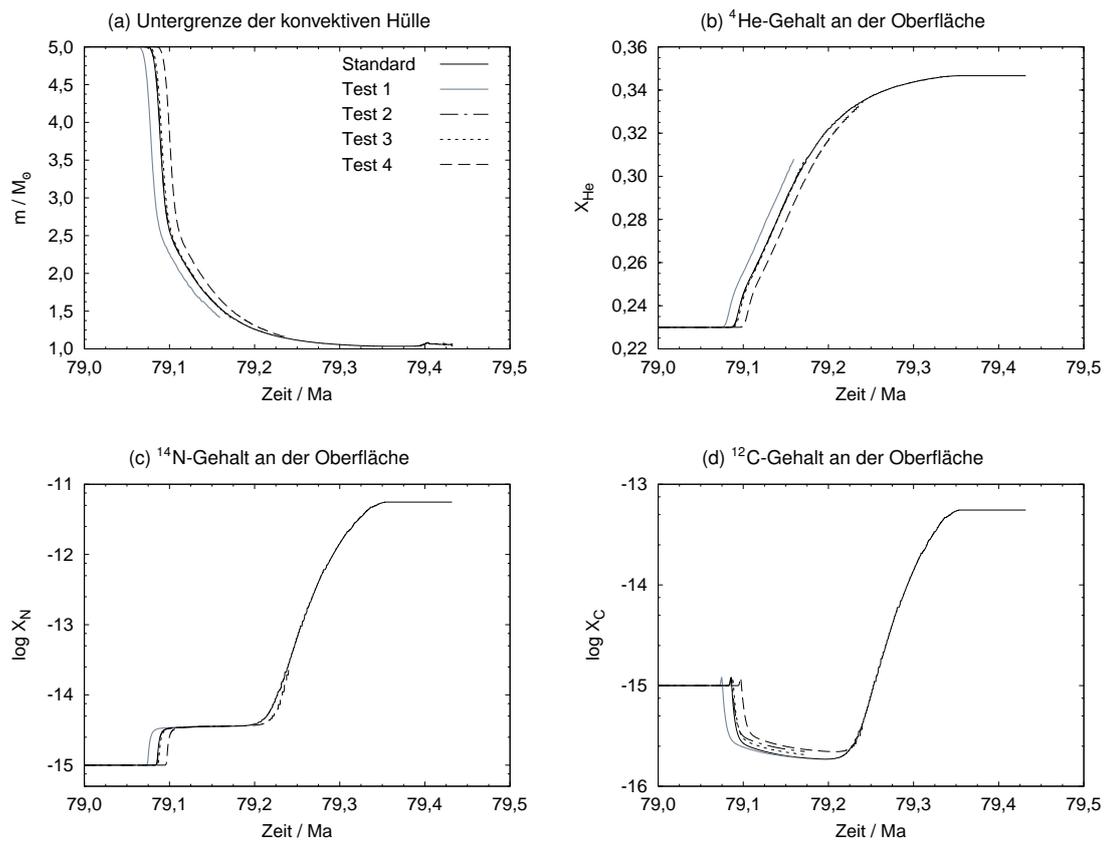


Abbildung 5.2: Tests zur Stabilität der Rechnungen bei Änderung von räumlicher und zeitlicher Diskretisierung: Zweiter Dredge-up.

Der zweite Dredge-up kann mit den Modellen mit festem Gitter aus dem oben erwähnten Grund nicht bis zum Ende verfolgt werden, so dass die Oberflächenszusammensetzung nach beendetem Dredge-up nicht verglichen werden kann. Soweit die Ergebnisse des Dredge-up hier verglichen werden können, deuten die gemachten Tests darauf hin, dass, abgesehen von der Zeitverschiebung, kein nennenswert anderes Ergebnis zu erwarten ist.

Kapitel 6

Eigene Entwicklungsrechnungen für metallarme Sterne mittlerer Masse

Wir zeigen in diesem Kapitel die mit dem oben beschriebenen Code durchgeführten Modellrechnungen für die Entwicklung von metallarmen Sternen mittlerer Masse.

6.1 Ein Modell der Population II

In diesem Abschnitt zeigen wir ein Modell eines extrem metallarmen, aber nicht vollständig metallfreien Sterns von drei Sonnenmassen. Die Metallizität des Anfangsmodells beträgt $Z = 10^{-5}$, die relativen Häufigkeiten der Metalle entsprechen den solaren Werten. Da diese Rechnung sehr zeitaufwendig war, wurde nur das kleinste mögliche nukleare Netzwerk verwendet, d. i. Wasserstoffbrennen durch den CNO-Zyklus und Heliumbrennen zu Kohlenstoff und Sauerstoff. In der TPAGB-Phase mussten sowohl bei der räumlichen als auch bei der zeitlichen Diskretisierung Zugeständnisse an die Laufzeit gemacht werden. Der Mischungskoeffizient musste noch stärker als in Abschn. 5.1.3 beschrieben geglättet werden. Mit allen genannten Einschränkungen konnte dieses Modell aber von der Vorhauptreihe bis zum letzten Puls auf dem TPAGB und weiter bis zum Weißen Zwerg verfolgt werden.

Wir beschreiben nach der Angabe der Parameter der Rechnung in 6.1.1 zunächst den Ablauf eines einzelnen thermischen Pulses in 6.1.2, dann die gesamte TPAGB-Phase des Modells in 6.1.3. Nach einer kurzen Betrachtung der Beziehungen zwischen Kernmasse und Leuchtkraft bzw. Periode (Abschn. 6.1.4) folgt zum Schluss ein Blick auf die Post-AGB-Entwicklung (Abschn. 6.1.5).

6.1.1 Parameter der Rechnung

Anfangsmodell. Die Anfangswerte für die Strukturvariablen P , ρ , r , u und l werden aus einer Polytrope vom Index $n = 3$ wie in Abschn. 5.4 beschrieben gewonnen.

Chemische Zusammensetzung. Das Anfangsmodell ist chemisch homogen. Die Anfangswerte für die chemische Zusammensetzung sind in der folgenden Tabelle¹ angegeben. Die Mischung der Metalle entspricht einer auf eine Metallizität von $Z = 10^{-5}$ skalierten solaren Zusammensetzung.

¹Der Wert für Wasserstoff wird genau genommen als $X_{\text{H}} = 1,0 - \sum_{i \neq \text{H}} X_i$ berechnet.

Spezies	^1H	^2H	^3He	^4He	^{12}C
Anfangswert X_i	0,73	$1,0 \cdot 10^{-17}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	0,27	$2,46 \cdot 10^{-6}$

Spezies	^{13}C	^{14}N	^{15}N	^{16}O
Anfangswert X_i	$2,71 \cdot 10^{-8}$	$6,47 \cdot 10^{-7}$	$2,39 \cdot 10^{-9}$	$5,14 \cdot 10^{-6}$

Kernreaktionen. Das nukleare Netzwerk enthält keine pp-Ketten, sondern nur den CNO-Zyklus, Gln. (3.37), wobei alle β -Zerfälle als instantan behandelt werden; außerdem die Fusion von Helium zu Kohlenstoff und Sauerstoff, Gln. (3.38) und (3.42). Die Reaktionsraten sind die von der NACRE-Kollaboration (Angulo et al., 1999) veröffentlichten. Zur Auswirkung der Vernachlässigung der pp-Ketten auf die Ergebnisse der Rechnung siehe unten.

Opazitäten. Für die Opazitäten im Bereich $T < 10^8$ K werden Tafeln der OP-Kollaboration (Badnell et al., 2005) mit einer auf $Z = 10^{-5}$ skalierten solaren Zusammensetzung verwendet. Änderungen der Metallhäufigkeiten durch den dritten Dredge-up werden nicht berücksichtigt.

Mischungslänge. Der Mischungswegparameter wurde auf $\alpha_M = 1,5$ gesetzt.

Massenverlust. Der Massenverlust wird ab dem Riesenast gemäß der in Gl. (3.45) angegebenen Massenverlustformel von Schröder und Cuntz (2005) berücksichtigt. Vor dem Riesenstadium findet in unserer Rechnung kein Massenverlust statt.

Gitter. Im Gebiet um die Schalenquellen wird, wie in Abschn. 5.2.3 bereits angedeutet, mit einem Gitter gearbeitet, dem für die verschiedenen Bereiche entsprechende Maschenweiten vorgegeben sind. Die Anpassung des Gitters wird nur in der Zwischenpulsphase vorgenommen. In dieser Zeit werden bereits genügend Punkte an den Ort des nächsten Pulses gebracht, so dass während des eigentlichen Ausbruchs das Gitter fest gelassen werden kann. Bei diesem Verfahren kann nicht garantiert werden, dass die von den unter 5.2.1 genannten Kriterien geforderte Feinheit des Gitters tatsächlich erreicht wird; dies war bei der vorliegenden Rechnung auch nicht der Fall.

Zeitschritt. Während der AGB-Phase wird der Zeitschritt, wo immer möglich, größer gewählt, als es das Kriterium in Abschn. 5.1.2 vorgibt. Insbesondere werden die Änderungsraten der Häufigkeiten der Elemente mit $X_i < 10^{-4}$ für die Bestimmung des Zeitschritts nicht berücksichtigt.

Zur Vernachlässigung der pp-Ketten. Für das hier gezeigte Modell eines Sterns der Population II wurden die pp-Ketten nicht berücksichtigt. Durch eine spätere Kontrolle stellte sich heraus, dass dies bei einem Stern von nur $3 M_\odot$ nicht zulässig ist. Daraufhin wurde die Rechnung unter Berücksichtigung der pp-Ketten von der Vorhauptreihe bis zum ersten thermischen Puls wiederholt. An diesem Punkt in ihrer Entwicklung sind sich die beiden Modelle so ähnlich, dass wir auf eine erneute Rechnung der TPAGB-Phase (d. h. des bei weitem aufwendigsten Teils der Rechnung) für dieses Modell verzichtet haben.

Wir vergleichen im folgenden kurz die beiden Rechnungen an dem Zeitpunkt, an dem das Heliumbrennen am Ende des EAGB sein Maximum erreicht. Dort finden wir zwei wesentliche Unterschiede: Erstens unterscheidet sich die Entwicklungszeit, die bis hier vergangen ist; ohne die pp-Ketten ist sie um etwa 5 % kürzer. Zweitens ist die Zusammensetzung des ausgebrannten Kerns verschieden; ohne pp-Ketten erhalten wir im Zentrum ein Massenverhältnis C:O von

6.1. EIN MODELL DER POPULATION II

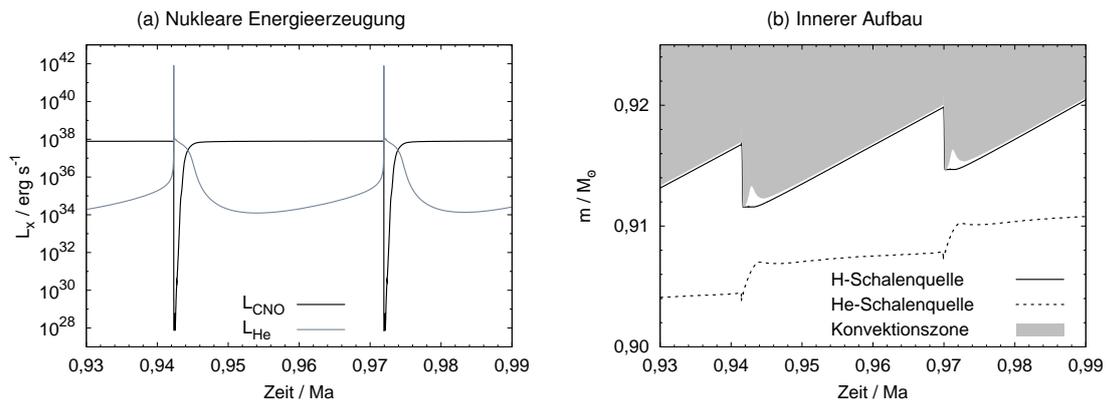


Abbildung 6.1: Thermische Pulse 22 und 23: Aktivität und Lage der Schalenquellen.

1:3, mit pp-Ketten von 1:2. Beide Unterschiede sind darauf zurückzuführen, dass im Falle der Vernachlässigung der pp-Ketten die Temperatur im Stern höher ist.

Das unterschiedliche Alter ist für die weitere Entwicklung ohne Bedeutung. Die zentrale Zusammensetzung des Kerns beeinflusst die weitere Entwicklung ebenfalls nicht¹, denn es kommt nur auf Dichte, Temperatur und Masse des Kerns an. Auch beim detaillierteren Vergleich einer Reihe von für die Sternstruktur wichtigen Größen finden wir nur geringe Differenzen: Radius und Leuchtkraft, Effektiv- und Zentraltemperatur sowie die Masse des wasserstoff- bzw. heliumfreien Kerns und des radiativen Kerns weichen um nicht mehr als 1,3 % voneinander ab.

Die durch den zweiten Dredge-up beeinflussten Metallhäufigkeiten der Hülle vor dem ersten thermischen Puls unterscheiden sich um bis zu einem Faktor fünf. Da aber während der TPAGB-Phase durch den dritten Dredge-up die Metalle stark (z. T. um mehrere Größenordnungen) angereichert werden, spielt die zu Beginn des TPAGB vorhandene Konzentration nur eine sehr untergeordnete Rolle. Die relativen Unterschiede der Metallhäufigkeiten am Ende der Entwicklung dürften daher höchstens wenige Prozent betragen. Dabei sollten die Elemente ^{12}C , ^{14}N und ^{16}O am wenigsten betroffen sein, da ihre Konzentrationen sich nach dem zweiten Dredge-up nur sehr wenig unterscheiden (^{14}N und ^{16}O) bzw. sie im dritten Dredge-up besonders stark angereichert werden (^{12}C).

Wir halten es daher für durchaus zulässig und angemessen, die mit den pp-Ketten bis zum Ende des EAGB gerechnete Entwicklung und die TPAGB-Rechnung ohne pp-Ketten aneinander zu heften, wie wir es insbesondere auch für das HRD in Abb. 6.14c getan haben.

6.1.2 Der Ablauf eines thermischen Pulses

Wir beschreiben zunächst den Ablauf eines einzelnen thermischen Pulses am Beispiel der Pulse 22 und 23 unserer Rechnung. Abbildung 6.1a zeigt die nukleare Energieerzeugung, aufgeteilt nach Wasserstoff- und Heliumbrennen, als Funktion der Zeit². Zu erkennen ist eine vergleichsweise lange Phase mit nahezu konstanter Rate des Wasserstoffbrennens – die Zwischenpulsphase –, die quasi-periodisch (vgl. dazu Abb. 6.10a) durch kurze Ausbrüche von Heliumbrennen – die thermischen Pulse – unterbrochen wird. In Abbildung 6.1b ist die innere Struktur des Sterns am Übergang vom Kern zur Hülle dargestellt: Über dem entarteten C/O-

¹Für die nächste Brennphase, das Kohlenstoffbrennen, wäre das Verhältnis C:O sicherlich von Bedeutung, aber da unser Modell den Kohlenstoff nicht zündet, sind wir hiervon nicht betroffen.

²Der Zeitnullpunkt dieser und der folgenden Abbildungen liegt, sofern nicht anders angegeben, kurz vor dem ersten thermischen Puls.

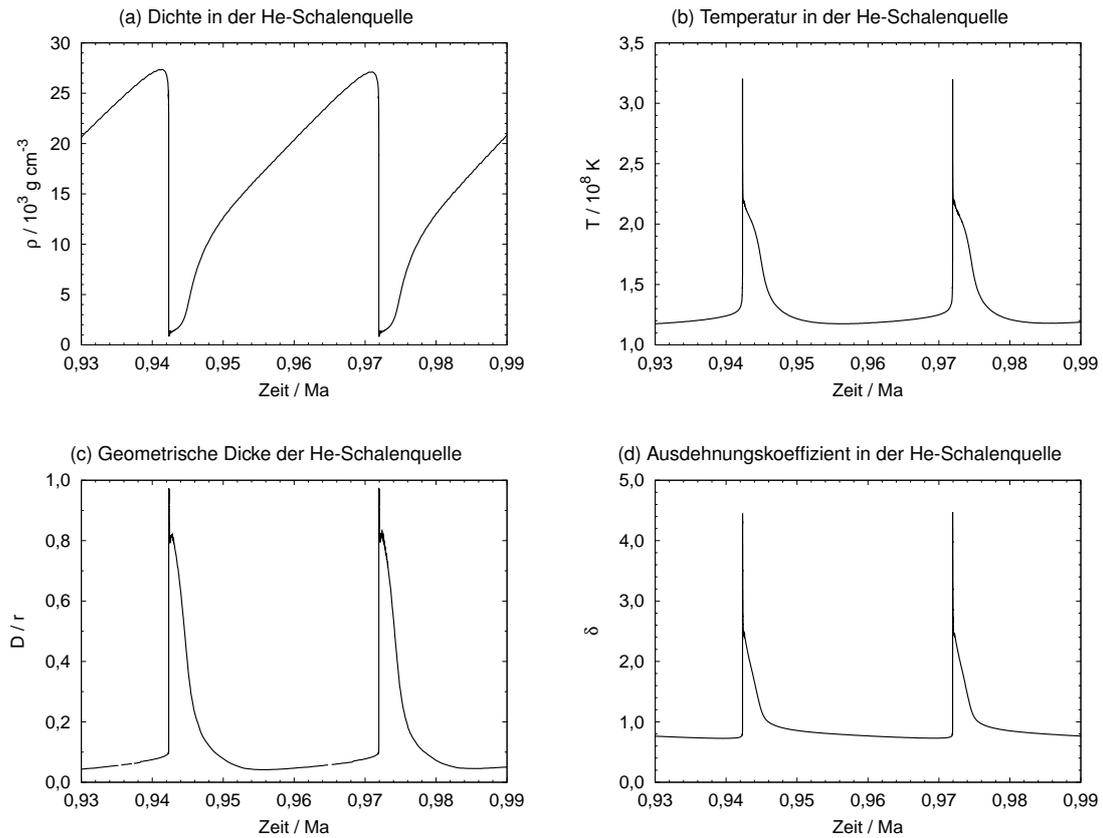


Abbildung 6.2: Thermische Pulse 22 und 23: Heliumschalenquelle.

Kern liegt zuerst die Heliumschalenquelle, darüber die Wasserstoffschalenquelle. Zwischen beiden befindet sich eine Schicht aus Helium, die Heliumzwischenenschale. Die konvektive Hülle ist blau dargestellt; die pulsinduzierte Konvektionszone ist bei diesem Maßstab nicht zu erkennen. Das Kippenhahn-Diagramm Abb. 6.7 zeigt einige Aspekte der Sternstruktur wesentlich deutlicher. In Abbildung 6.1b ist lediglich der Ort maximaler Energieerzeugung durch den jeweiligen nuklearen Prozess eingezeichnet. Die Ausdehnung der brennenden Schichten in Masse und Radius kann den Abbildungen 6.3 und 6.4 entnommen werden, die die nukleare Energieproduktionsrate während der beiden Pulse als Funktion von Ort und Zeit zeigen.

In der Zwischenpulsphase (im gezeigten Beispiel von 0,945 bis 0,972 Ma) ist nur die Wasserstoffschalenquelle aktiv. Die Leistung der Heliumschalenquelle ist vernachlässigbar klein. Durch das Wasserstoffbrennen wächst die Masse der Heliumschicht zwischen den beiden Schalenquellen an. Das führt zu einer Kompression der (jetzt noch inaktiven) Heliumschalenquelle. In ihr steigen mit dem Druck auch die Dichte (Abb. 6.2a) deutlich, die Temperatur (Abb. 6.2b) und die Energieerzeugungsrate (Abb. 6.1a) leicht an.

Laut den Überlegungen in Abschn. 4.2.4 ist bei einer geometrisch dünnen Schalenquelle mit einer thermischen Instabilität zu rechnen. Ein einfaches, homologes Modell ergab¹ als notwendiges Kriterium $D/r < 1/4$. Abbildung 6.2c zeigt nun ein Maß D/r für die geometrische Dicke der Heliumschalenquelle. Als Dicke D wird die geometrische Ausdehnung des Bereichs, in dem heftiges Heliumbrennen mit $\varepsilon_{\text{He}} > 500 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ stattfindet, betrachtet. Diese wird durch die Radialkoordinate r der Untergrenze dieses Bereichs geteilt. Die Heliumschalenquelle

¹für eine Schalenquelle aus idealem Gas, vgl. Gl. (4.38) mit $\alpha = \delta = 1$

6.1. EIN MODELL DER POPULATION II

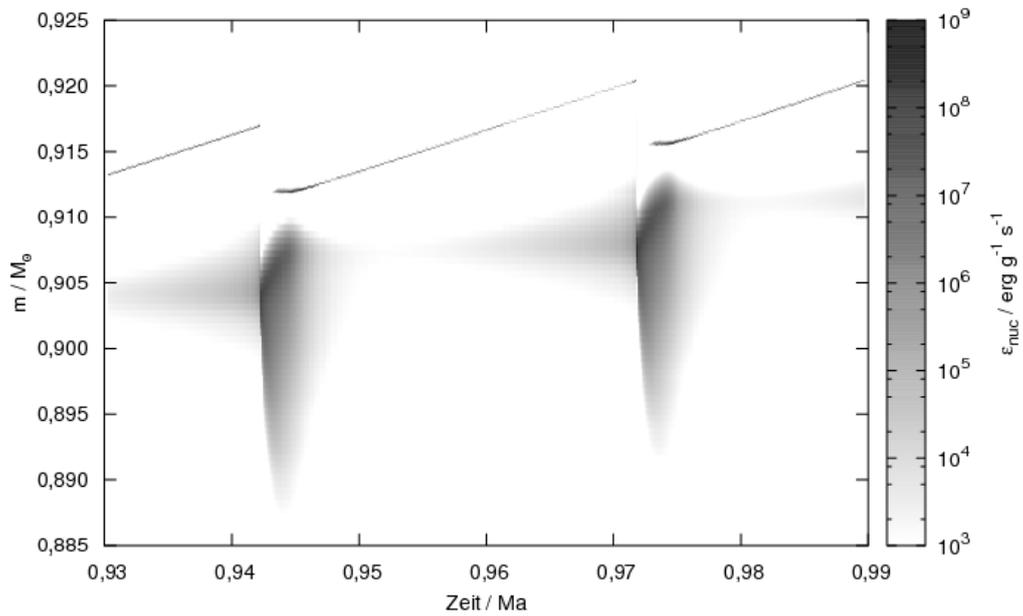


Abbildung 6.3: Thermische Pulse 22 und 23: Nukleare Energieproduktion als Funktion von Zeit und Lagrangescher Koordinate. Bereiche mit $\epsilon_{\text{nuc}} < 10^3 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ sind nicht ausgewiesen.

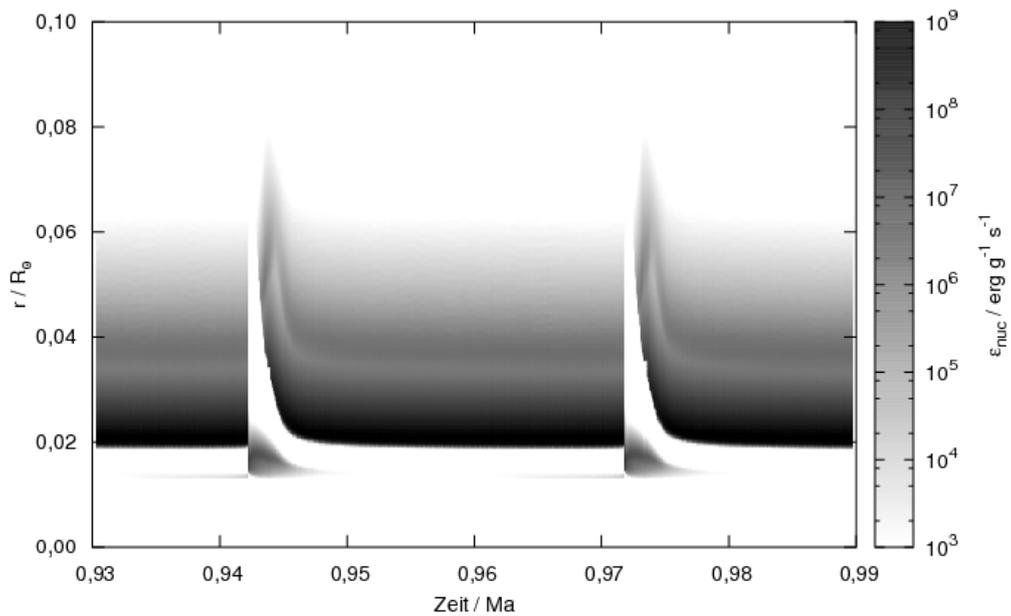


Abbildung 6.4: Thermische Pulse 22 und 23: Nukleare Energieproduktion als Funktion von Zeit und Eulerscher Koordinate. Bereiche mit $\epsilon_{\text{nuc}} < 10^3 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ sind nicht ausgewiesen.

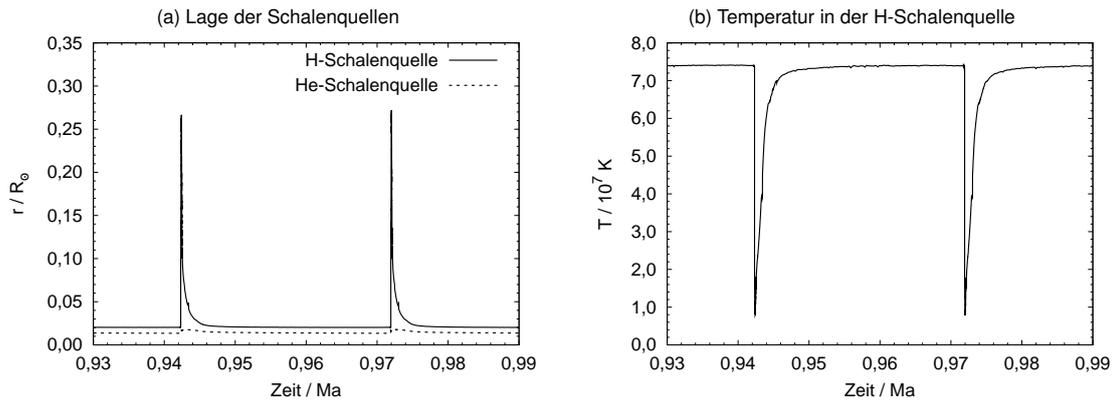


Abbildung 6.5: Thermische Pulse 22 und 23: Wasserstoffschalenquelle.

erfüllt die Voraussetzung für Instabilität.¹ Die geometrische Dicke der beiden Schalenquellen lässt sich auch in Abb. 6.4 erkennen. Abbildung 6.2d zeigt den Ausdehnungskoeffizienten δ in der Heliumschalenquelle. Er bleibt immer deutlich über null, so dass er nicht als Ursache der Instabilität in Frage kommt. Die Erhöhung der gravothermischen spezifischen Wärme wird also tatsächlich von der Geometrie der Quelle, und nicht von der Entartung verursacht.²

Wenn die Heliumschalenquelle thermisch instabil geworden ist, führt jede weitere Erhöhung der Temperatur zu einer Erhöhung der Energieerzeugung; diese kann beträchtlich sein, da der 3α -Prozess sehr stark von der Temperatur abhängt (ε_T liegt zwischen 20 und 40). Die dadurch frei werdende Wärme kann aber weder durch Arbeitsleistung, d. h. durch Ausdehnung und Anheben der darüber liegenden Schichten, noch durch Abstrahlung abgeführt werden, sondern erzwingt im Gegenteil eine weitere Temperaturerhöhung. Mit anderen Worten, die gravothermische spezifische Wärme ist positiv. Hat dieser Prozess einmal begonnen, so läuft er sehr schnell ab. Der eigentliche Ausbruch der Heliumschalenquelle, in dem die Leistung des Heliumbrennens, L_{He} , um einen Faktor 10^4 ansteigt, dauert nur wenige Jahre.

Die Temperatur in der Heliumschale steigt laut Abb. 6.2b auf über $3 \cdot 10^8$ K an. Das bewirkt neben der bereits beschriebenen Steigerung der Energieproduktion auch eine deutliche Ausdehnung der Materie, die am Dichteabfall in Abb. 6.2a zu erkennen ist. Dadurch werden die wasserstoffreichen Schichten weit nach außen geschoben; dort ist die Temperatur zu gering für das Wasserstoffbrennen, und die Wasserstoffschalenquelle erlischt vollständig. Die Abbildungen 6.5a,b zeigen dazu die Radialkoordinate und die Temperatur der Wasserstoffschalenquelle.

Durch die Ausdehnung der Heliumschalenquelle (vgl. Abb. 6.4) während des Pulses wird aber auch eine der notwendigen Voraussetzungen der thermischen Instabilität, die geringe geometrische Dicke (Abb. 6.2c), aufgehoben. Die gravothermische spezifische Wärme wird wieder negativ, und das Heliumbrennen regelt sich für eine kurze Zeit auf das Niveau des Wasserstoffbrennens der Zwischenpulsphase ein (vgl. Abb. 6.1a). Das kann nicht lange anhalten, denn bereits im Maximum des Pulses wurde ein großer Teil des in der Zwischenschale vorrätigen Heliums verbrannt. Die Wasserstoffschalenquelle sinkt bezüglich geometrischer Koordinate wieder nach innen (Abb. 6.5a), erreicht dadurch die für die Kernreaktionen notwendige Temperatur (Abb. 6.5b), hier etwa $7,3 \cdot 10^7$ K, und zündet erneut.

¹Zum Vergleich: Für die Wasserstoffschalenquelle ergibt dieselbe Definition einen Wert von $D/r \sim 2,5$. (Da wir für r die Untergrenze der Schalenquelle eingesetzt haben, kann D/r durchaus größer als eins sein.) Eine zentrale Quelle verhält sich wie $D/r = 1/3$; vgl. Gln. (4.22) und (4.38).

²Während des Ausbruchs ist die Temperatur in der Heliumschalenquelle so hoch, dass lokal der Strahlungsdruck wichtig wird, $\beta \sim 0,5$; dies verursacht die Spitzen in δ , vgl. Gl. (3.17).

6.1. EIN MODELL DER POPULATION II

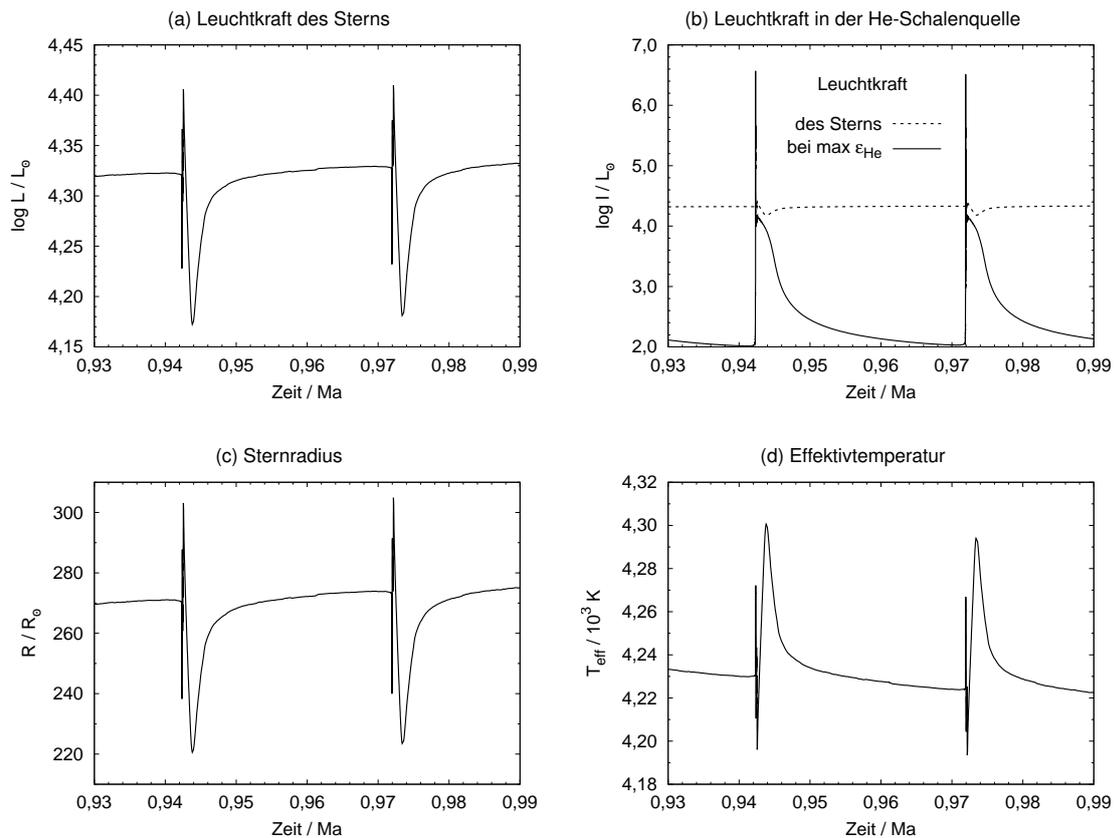


Abbildung 6.6: Thermische Pulse 22 und 23: Leuchtkraft, Radius und Effektivtemperatur.

Mit aktiver Wasserstoff- und inaktiver Heliumschalenquelle ist nun für eine – zumindest verglichen mit der Pulsdauer – lange Zeit, hier etwa $26 \cdot 10^3$ Jahre, ein stabiler Zustand erreicht, ehe der nächste Puls beginnt.

Die Vorgänge im Inneren bleiben nicht ohne Auswirkungen auf den Rest des Sterns. Die Abbildungen 6.6a,b zeigen die Gesamtleuchtkraft des Sterns und die lokale Leuchtkraft am Ort der Heliumschalenquelle im Vergleich. In der Zwischenpulsphase ist der Beitrag des Heliumbrennens zur Gesamtleuchtkraft gering, aber in der Spitze des Pulses übertrifft er sie um mehr als zwei Größenordnungen. Die lokale Leuchtkraft in der Heliumschalenquelle verändert sich erheblich stärker als die Gesamtleuchtkraft des Sterns; der bei weitem größte Teil der im Ausbruch der Heliumschalenquelle zusätzlich erzeugten Energie wird also vom Stern, vor allem in der Hülle, wieder absorbiert. Das bewirkt eine dem Puls folgende Ausdehnung der Sternhülle (Abb. 6.6c) und eine entsprechende Änderung der Effektivtemperatur (Abb. 6.6d).

Besonders wichtig für die Auswirkungen der thermischen Pulse auf die chemische Entwicklung des Sterns ist das Verhalten der Konvektionszonen. Sie sind im Kippenhahn-Diagramm Abb. 6.7 dargestellt. Da die Heliumschalenquelle während des Ausbruchs eine räumlich stark konzentrierte Energiequelle ist, bildet sich oberhalb davon eine kleine Konvektionszone aus. Sie reicht bei ihrer maximalen Ausdehnung bis in die Heliumschalenquelle hinein und vermischt die im wesentlichen aus Helium bestehende Zwischenschale mit stark an Kohlenstoff angereichertem Material. Die Erzeugung von Sauerstoff findet im unteren Bereich der Heliumschalenquelle statt, so dass das eingemischte Material deutlich weniger Sauerstoff als Kohlenstoff enthält. Die Durchmischung in der pulsinduzierten Konvektionszone beeinflusst den Verlauf des Pulses, indem sie frisches Helium in die Brennzona bringt.

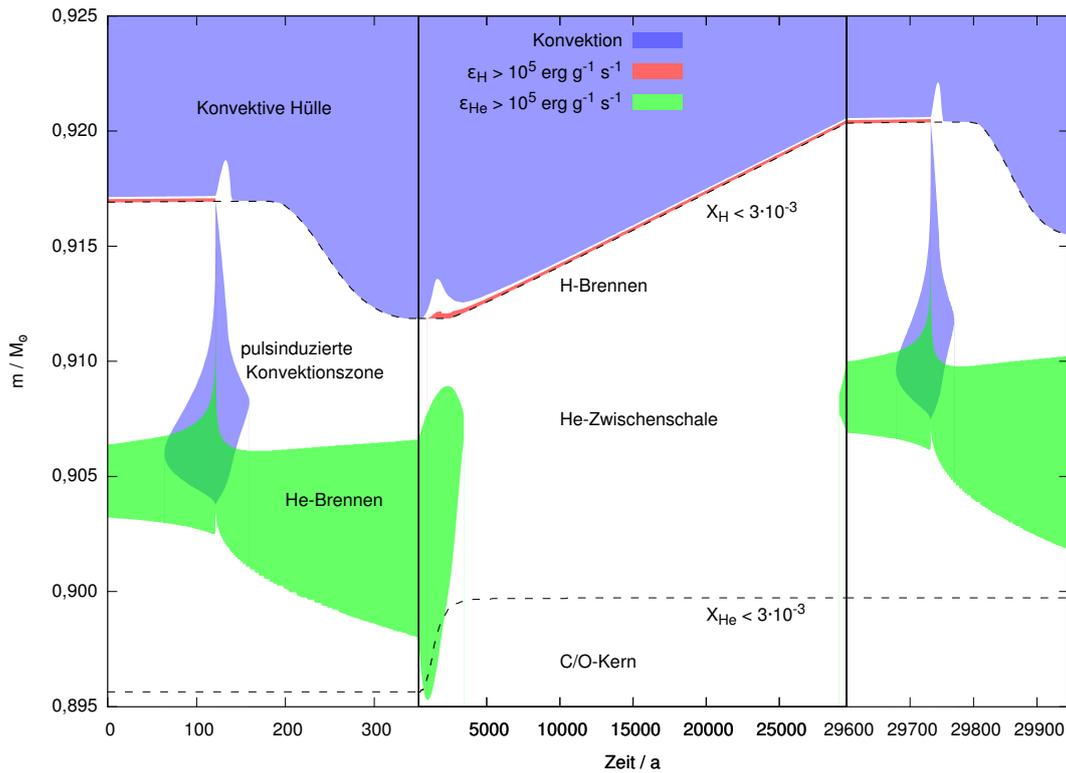


Abbildung 6.7: Thermische Pulse 22 und 23: Kippenhahn-Diagramm zur Lage der Konvektionszonen und der Schalenquellen. Der Zeitnullpunkt dieser Abbildung liegt der Übersichtlichkeit halber verglichen mit den anderen Abbildungen dieses Abschnitts bei $9,422 \cdot 10^5$ a. Man beachte außerdem den wechselnden Maßstab der Zeitachse.

Die äußere Konvektionszone weicht am Maximum des Pulses zunächst etwas zurück. Sobald die gesamte nukleare Energieerzeugung wieder das Niveau der Zwischenpulsphase erreicht hat, dehnt sie sich aus, zunächst bis zur vormaligen Wasserstoffschalenquelle, und dann noch deutlich darüber hinaus. Jetzt befördert sie das prozessierte Material der Heliumzwischen- schale in die Hülle und damit auch an die Oberfläche. Dieser dritte Dredge-up führt zu einer Anreicherung der Hülle mit schweren Elementen. Das sind vor allem: ^4He als Asche des die Zwischen- schale aufbauenden Wasserstoffbrennens, ^{12}C , das durch die pulsinduzierte Kon- vektionszone in die Zwischenschale gebracht wurde, und ^{14}N als mit Abstand häufigstes der katalytischen Elemente des CNO-Zyklus.

Auch wenn nach der Ausbildung einer thermisch stabilen Wasserstoffschalenquelle am Ende eines Pulses der Zyklus wieder von vorn beginnt, sind die Pulse nur quasi-periodisch, denn nach jedem Puls ändert sich, falls der dritte Dredge-up stattfindet, die Zusammensetzung und damit die Opazität der Hülle und, was noch wichtiger ist, die Masse des C/O-Kerns (s. dazu auch Abschn. 6.1.4).

6.1.3 Die gesamte TPAGB-Phase des $3 M_{\odot}$ -Modells

Der Zeitnullpunkt der Abbildungen in diesem Abschnitt liegt kurz vor dem ersten thermischen Puls. Abbildung 6.8 zeigt die Entwicklung von Leuchtkraft, Radius und Effektivtemperatur während der gesamten TPAGB-Phase des $3 M_{\odot}$ -Modells. Der Stern führt in der vorliegenden Rechnung innerhalb von 1,25 Ma insgesamt 35 thermische Pulse aus. Die ersten drei Pulse

6.1. EIN MODELL DER POPULATION II

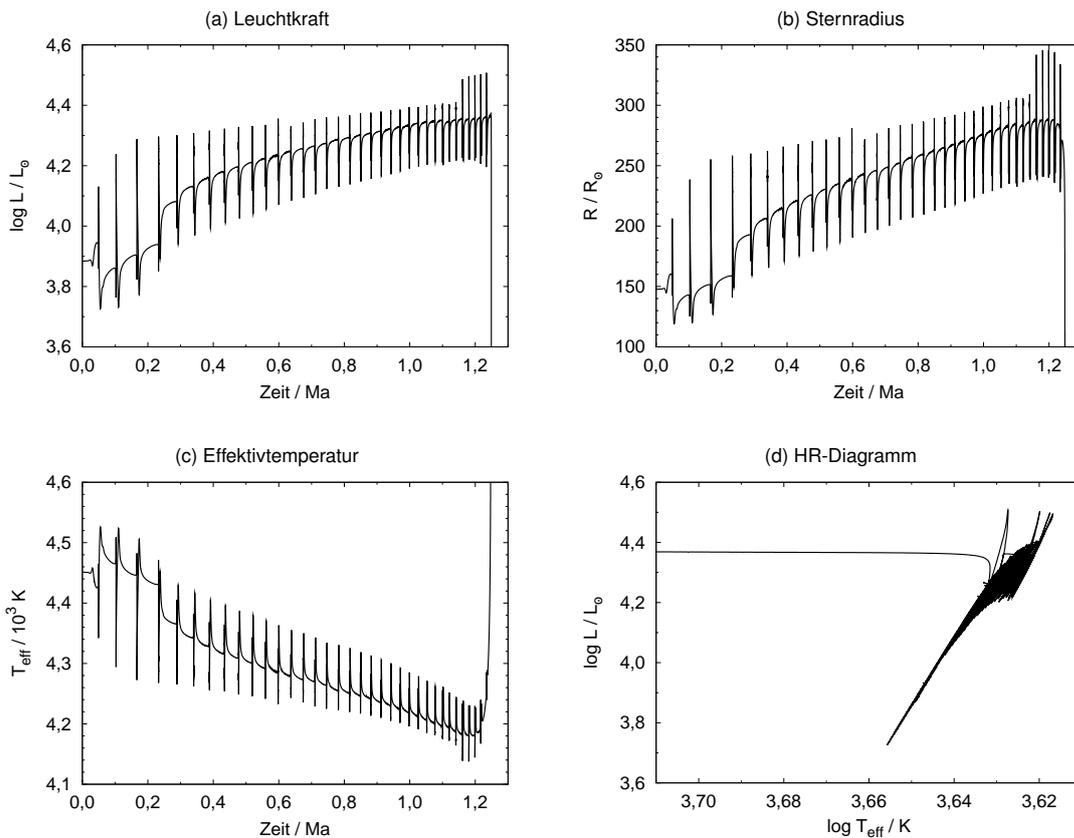


Abbildung 6.8: TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Leuchtkraft, Sternradius, Effektivtemperatur und HRD.

weichen etwas von der recht klaren Regelmäßigkeit der späteren ab. Mit fortschreitender Entwicklung wird die Periode der Pulse kürzer, die Leuchtkraft größer und die Effektivtemperatur kleiner. Die letzten fünf Pulse haben deutlich höhere Leuchtkraftspitzen als ihre Vorgänger. Nach dem 35. Puls heizt sich die Sternoberfläche bei gleich bleibender Leuchtkraft auf, der Stern bewegt sich im HRD Abb. 6.8d nach links und beendet damit die TPAGB-Phase. Die Rechnung konnte noch weiter in die Post-AGB-Phase verfolgt werden, s. dazu Abschn. 6.1.5.

Der Verlauf und vor allem das Ende der TPAGB-Phase werden stark vom Massenverlust geprägt. Zu Beginn der AGB-Entwicklung ist er noch sehr gering, und die Gesamtmasse hat sich gegenüber der Anfangsmasse von $3 M_{\odot}$ nur um $0,05 M_{\odot}$ verringert, wie in Abb. 6.9a zu sehen ist. Im weiteren Verlauf der AGB-Entwicklung wachsen die Leuchtkraft und der Radius bei sinkender Masse an. Gemäß Gl. (3.45) steigt dadurch die in Abb. 6.9b gezeigte Massenverlustrate an und erreicht am Ende des TPAGB in der Zwischenpulsphase etwa $10^{-5} M_{\odot} \text{ a}^{-1}$. In den Ausbrüchen selbst ist die Rate zwar höher, aber dies ist wegen der sehr kurzen Dauer der Pulse ohne sichtbare Auswirkung auf die Gesamtmasse. Nach 35 Pulsen ist die Hülle nahezu vollständig abgeblasen worden, und damit endet die Phase der thermischen Pulse.

Die hier verwendete Massenverlustformel von Schröder und Cuntz (2005, 2007) ist für AGB-Sterne nur so lange geeignet, wie ihr Wind nicht pulsations- oder staubgetrieben ist. Sie beschreibt insbesondere nicht die am Ende der AGB-Entwicklung erwartete Superwindphase (Renzini, 1981; Renzini und Voli, 1981). Für zukünftige Rechnungen sollten in dieser Phase andere Beschreibungen der Massenverlustrate herangezogen werden, z. B. Vassiliadis und Wood (1993); s. dazu auch Abschn. 7.2.

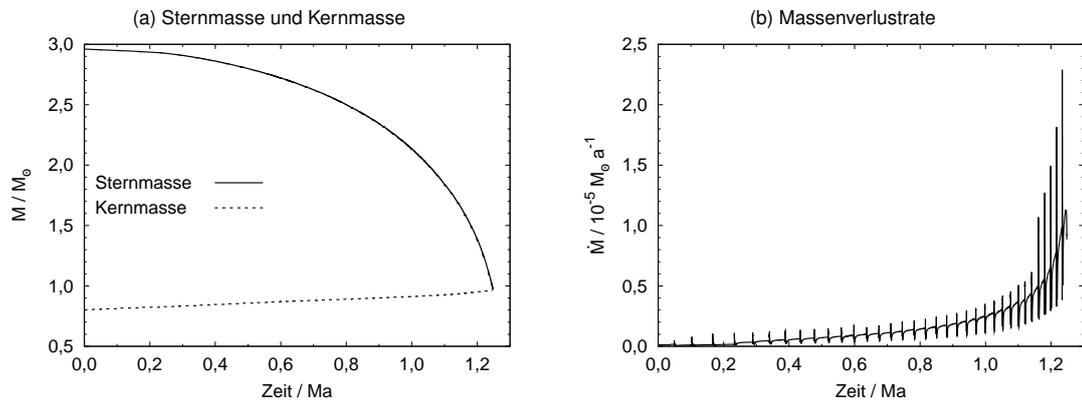


Abbildung 6.9: TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Masse und Massenverlust.

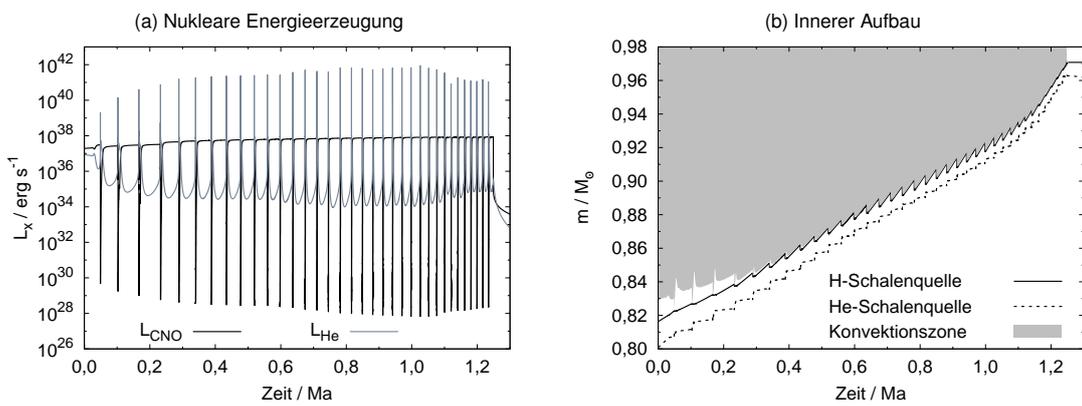


Abbildung 6.10: TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Aktivität und Lage der Schalenquellen.

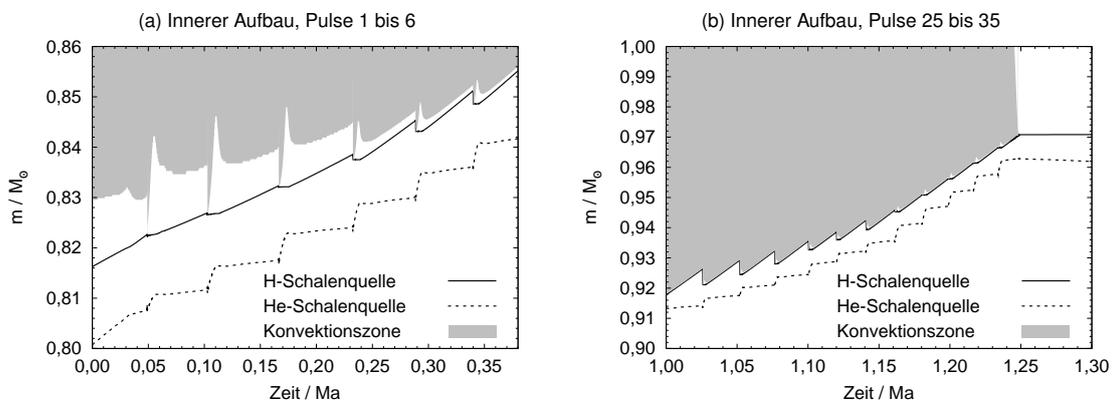


Abbildung 6.11: TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Zum dritten Dredge-up.

6.1. EIN MODELL DER POPULATION II

Abbildung 6.10a zeigt die wechselnde Aktivität der beiden Schalenquellen, 6.10b ihre Lage bezüglich Lagrangescher Koordinate sowie die äußere Konvektionszone. Aus dem Ausschnitt mit den ersten sechs Pulsen (Abb. 6.11a) wird ersichtlich, dass nach dem vierten thermischen Puls der dritte Dredge-up einsetzt. Nach diesem und den folgenden Pulsen wird ein Teil der Heliumzwischenenschale in die Hülle gemischt. Dadurch wird die Hülle – wie bereits beim zweiten Dredge-up – weiter mit Helium angereichert, so dass sein in Abb. 6.12a gezeigter Massenanteil während des gesamten TPAGB von 27 % auf 35 % steigt. Im Gegenzug sinkt der Wasserstoffbruchteil von 73 % auf 64 %. Die Heliumzwischenenschale besteht aber nicht nur aus Helium, sondern enthält nach der Durchmischung in der pulsinduzierten Konvektionszone auch etwa 15 % Kohlenstoff und etwas Sauerstoff. Die Hülle wird daher mit Kohlenstoff, Stickstoff aus der Wasserstoffschalenquelle und Sauerstoff angereichert. Der Kohlenstoffgehalt, der vor den thermischen Pulsen $2 \cdot 10^{-7}$ betrug, erreicht am Ende des AGB mit 0,9 % rund das doppelte des solaren Wertes (Abb. 6.12b). Stickstoff- und Sauerstoffhäufigkeit bleiben deutlich unter den solaren Werten.¹

Abbildung 6.12c zeigt das Anzahlverhältnis von ^{12}C zu verschiedenen anderen Nukliden. Bei diesem extrem metallarmen Modell reicht bereits ein dritter Dredge-up aus, um den Übergang vom O- zum C-Stern auszulösen, denn bei einem so geringen primordialen Sauerstoffgehalt genügt eine sehr kleine Menge von durch den Dredge-up in die Hülle gebrachtem Kohlenstoff aus, um das Verhältnis $n_{\text{C}}/n_{\text{O}}$ über eins zu treiben. Dieses Verhältnis steigt weiter, bis zum Schluss mehr als 100 C-Atome auf ein O-Atom kommen.

Im Schnittbild Abb. 6.11b ist zu erkennen, dass die Untergrenze der konvektiven Hülle nach den Pulsen 31 bis 35 die Wasserstoffschalenquelle zunächst nur noch geringfügig, später überhaupt nicht mehr unterschreitet. Daher folgt dem 31. Puls nur noch ein sehr schwacher Dredge-up, und bei den letzten vier Pulsen findet überhaupt kein Dredge-up statt. Die Zusammensetzung der Hülle verändert sich nicht mehr (s. Abb. 6.12a,b). Diese fünf letzten Pulse sind genau diejenigen, die in den Abbildungen 6.8a,b durch höhere Leuchtkraft und größeren Radius auffallen. In der $M_{\text{c}}-L_{\text{ip}}$ - bzw. $M_{\text{c}}-\tau_{\text{ip}}$ -Relation (s. Abschn. 6.1.4 unten) weichen sie nicht von den anderen Pulsen ab; der Knick in der $M_{\text{c}}-L$ -Relation ist nicht mit ihnen verbunden.

Insgesamt wurden vom Beginn der thermischen Pulse bis zum vollständigen Verlust der stellaren Hülle durch den Sternwind $1,99 M_{\odot}$ Sternmaterie abgetragen. Diese Bestand aus $1,33 M_{\odot}$ Wasserstoff und $0,65 M_{\odot}$ Helium. An Metallen wurden $1,27 \cdot 10^{-2} M_{\odot}$ Kohlenstoff (mit einem Isotopenverhältnis 1:2700), $3,35 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$ Stickstoff und $1,60 \cdot 10^{-4} M_{\odot}$ Sauerstoff abgegeben.

6.1.4 Die Abhängigkeit der Pulse von der Kernmasse

Einige wesentliche Eigenschaften der thermischen Pulse hängen (neben der Metallizität) vor allem von der Masse des wasserstofffreien Kerns, M_{c} , ab. Die Hülle reagiert zwar auf die periodische Änderung der in sie hinein fließenden Energiemenge, ihre eigene Beschaffenheit hat aber auf die Pulse nur geringe Auswirkungen. Paczyński (1970, 1975) fand, dass insbesondere die Leuchtkraft in der Zwischenpulsphase, L_{ip} , und die Dauer der Zwischenpulsphase, τ_{ip} , stark mit der Kernmasse korrelieren. Für die Existenz einer Kernmassen-Leuchtkraft-Beziehung bei Sternen mit einem kompakten Kern und (einer oder zwei) Schalenquellen wurde von Refsdal

¹Der ^{12}C -Anteil steigt nach dem vierten Puls auf $X_{\text{C}} \sim 8 \cdot 10^{-5}$, s. Abb. 6.12b. Damit verlaufen die folgenden Pulse wie im vorigen Abschnitt dargestellt, mit lediglich quantitativen Abweichungen vom Fall solarer Zusammensetzung. Während der ersten drei Pulse beträgt X_{C} nur $2 \cdot 10^{-7}$. Bei einer so geringen ^{12}C -Konzentration treten zusätzliche Phänomene auf (nämlich eine weitere Konvektionszone oberhalb der Wasserstoffschalenquelle und der Carbon Ingestion Flash), auf die wir hier nicht eingehen wollen. Wir behandeln sie im Rahmen unseres $5 M_{\odot}$ -Modells der Population III in Abschn. 6.2.4, da sie dort prominenter auftreten, hier aber nur eine Randerscheinung sind.

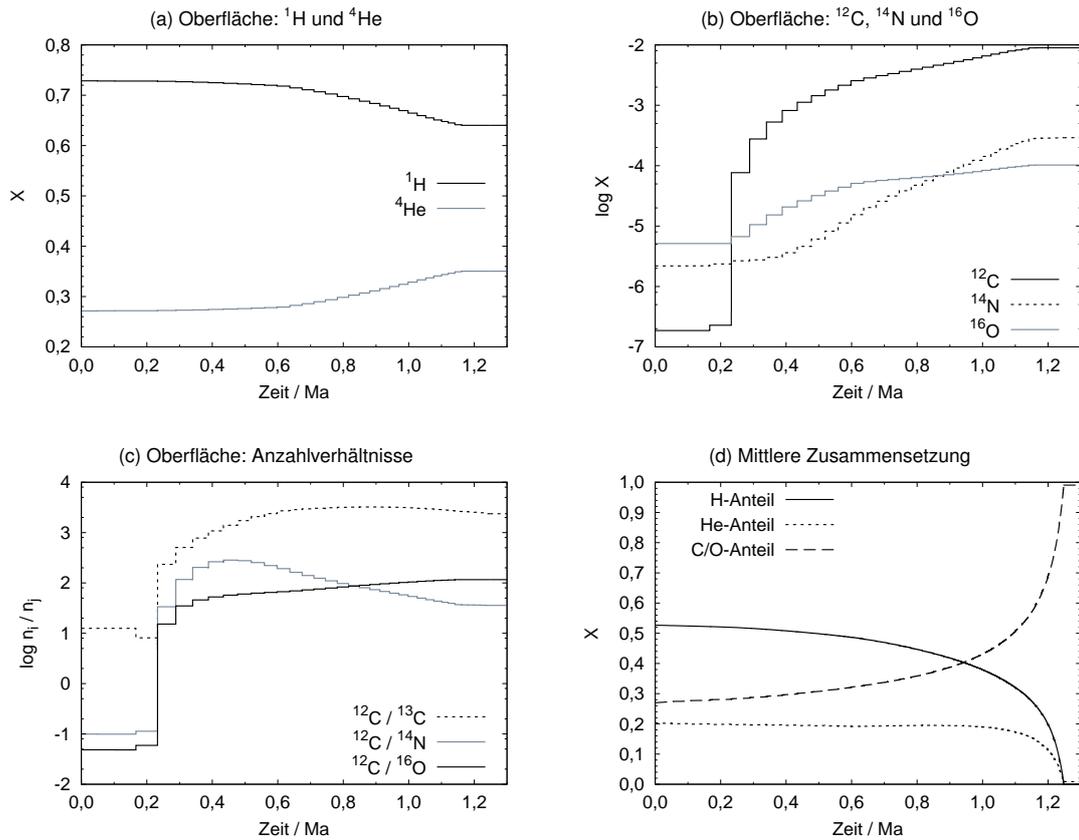


Abbildung 6.12: TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Zusammensetzung an der Oberfläche und mittlere Zusammensetzung.

und Weigert (1970) bzw. Kippenhahn (1981) eine theoretische Begründung auf der Basis von Homologieüberlegungen gegeben. Ausführliche Betrachtungen ähnlicher Natur, besonders auch unter Einbeziehung der Abhängigkeit von der Metallizität und des Falls $Z = 0$, wurden von Marigo (2000) angestellt. Eine etwas anders angelegte Ableitung findet man bei Tuchman, Glasner und Barkat (1983).

Abbildung 6.13 zeigt die Zwischenpulsdauer τ_{ip} und die Zwischenpulsleuchtkraft L_{ip} als Funktionen der Kernmasse M_c für das vorliegende Modell. Für die M_c - τ_{ip} -Beziehung ergibt ein Fit durch alle Punkte

$$\log \tau_{\text{ip}}[\text{a}] = -4,09 M_c [M_{\odot}] + 8,19. \quad (6.1)$$

Die ersten drei Pulse, die sich auch in anderen Eigenschaften (vgl. z. B. Abb. 6.8) von den nachfolgenden unterscheiden und denen kein Dredge-up folgt, weichen hier ebenfalls ab. Ansonsten wird die lineare Abhängigkeit gut reproduziert, und es ist keine systematische Änderung im Verlauf der AGB-Entwicklung zu erkennen. Die Ursache der Streuung ist vermutlich in der Numerik zu suchen.

Auch bei der Kernmassen-Leuchtkraft-Beziehung weichen die ersten drei Pulse deutlich, der vierte leicht von der für die folgenden Pulse geltenden Relation ab. Für die Pulse 5 bis 24 finden wir die Relation

$$L_{\text{ip}}[L_{\odot}] = 1,10 \cdot 10^5 \cdot (M_c [M_{\odot}] - 0,724). \quad (6.2)$$

Mit dem 25. Puls flacht die Kurve deutlich ab, es stellt sich aber wieder ein linearer Zusammen-

6.1. EIN MODELL DER POPULATION II

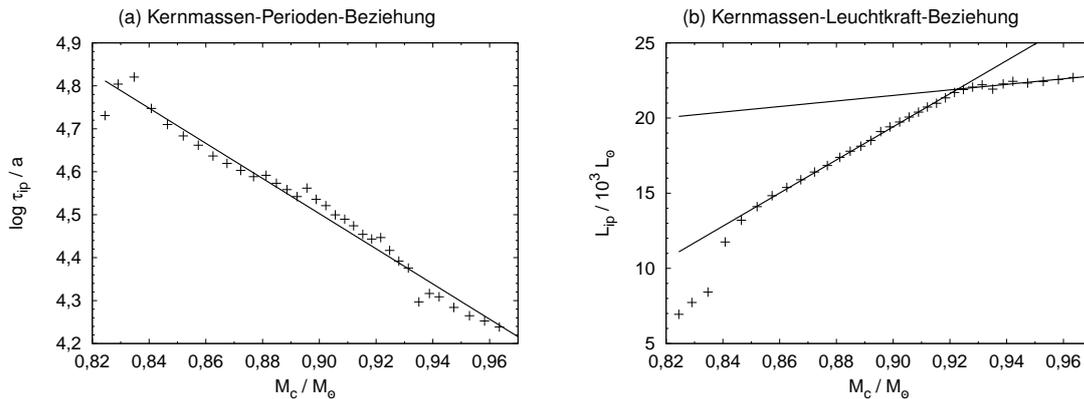


Abbildung 6.13: TPAGB des $3 M_\odot$ -Modells: Abhängigkeit der Pulse von der Kernmasse.

hang ein. Wir finden hier

$$L_{ip}[L_\odot] = 1,84 \cdot 10^4 \cdot (M_c[M_\odot] + 0,266) . \quad (6.3)$$

Es gibt im Verhältnis zwischen Kernmasse und Periode Abb. 6.13a kein mit dem Übergang von (6.2) nach (6.3) korreliertes Ereignis. Dieser hängt auch nicht mit dem Ende des dritten Dredge-up zusammen, da dieses erst beim 31. Puls eintritt.

Für einen Vergleich mit Relationen aus der Literatur s. Abschn. 6.2.5

6.1.5 Die Post-AGB-Entwicklung

Direkt nach dem 35. Puls beträgt die Hüllenmasse nur noch gut $0,1 M_\odot$. Bevor der nächste Puls einsetzen kann, sinkt sie durch den Sternwind¹ und das Wasserstoffbrennen auf $5 \cdot 10^{-5} M_\odot$; dann erlischt das Wasserstoffbrennen. Damit endet die Phase der thermischen Pulse. In einigen Rechnungen (z. B. Iben et al., 1983; Renzini, 1990; Herwig et al., 1999) findet nach dem Abbiegen vom Riesenast nach links noch ein später Puls statt. Dies ist in unserer Rechnung nicht der Fall.

Wenn die den heißen C/O-Kern verdeckende Hülle immer dünner wird, steigt für kurze Zeit die in Abb. 6.14a gezeigte Effektivtemperatur des Sterns auf mehr als $3 \cdot 10^5$ K an. Dabei bleibt die Leuchtkraft (Abb. 6.14b) zunächst konstant und der Stern wird kurzfristig zu einem heißen und leuchtkräftigen Stern links oben im HRD (Abb. 6.14c). Der Verlust der Hülle lässt den Stern innerhalb von etwa 1000 Jahren von den mehr als $200 R_\odot$ eines Roten Riesen auf $0,02 R_\odot$ schrumpfen (Abb. 6.14d), denn der allein zurückbleibende Kern ist – zumindest was seine mechanische Struktur betrifft – bereits ein Weißer Zwerg.

Nachdem die Kernreaktionen erloschen sind (s. Abb. 6.14e), da die Temperatur des wenigen noch vorhandenen Wasserstoffs und Heliums zu gering ist, verfügt der Stern nur noch über gravitative Energiequellen; auch diese sind nicht groß, da der C/O-Kern bereits stark entartet ist. Der Stern kann nur noch seinen jetzigen Energieinhalt abstrahlen und kühlt als Weißer Zwerg von $0,971 M_\odot$ aus.

¹Aus technischen Gründen wurde der Massenverlust bei einer Hüllenmasse von $3,5 \cdot 10^{-4} M_\odot$ abgeschaltet.

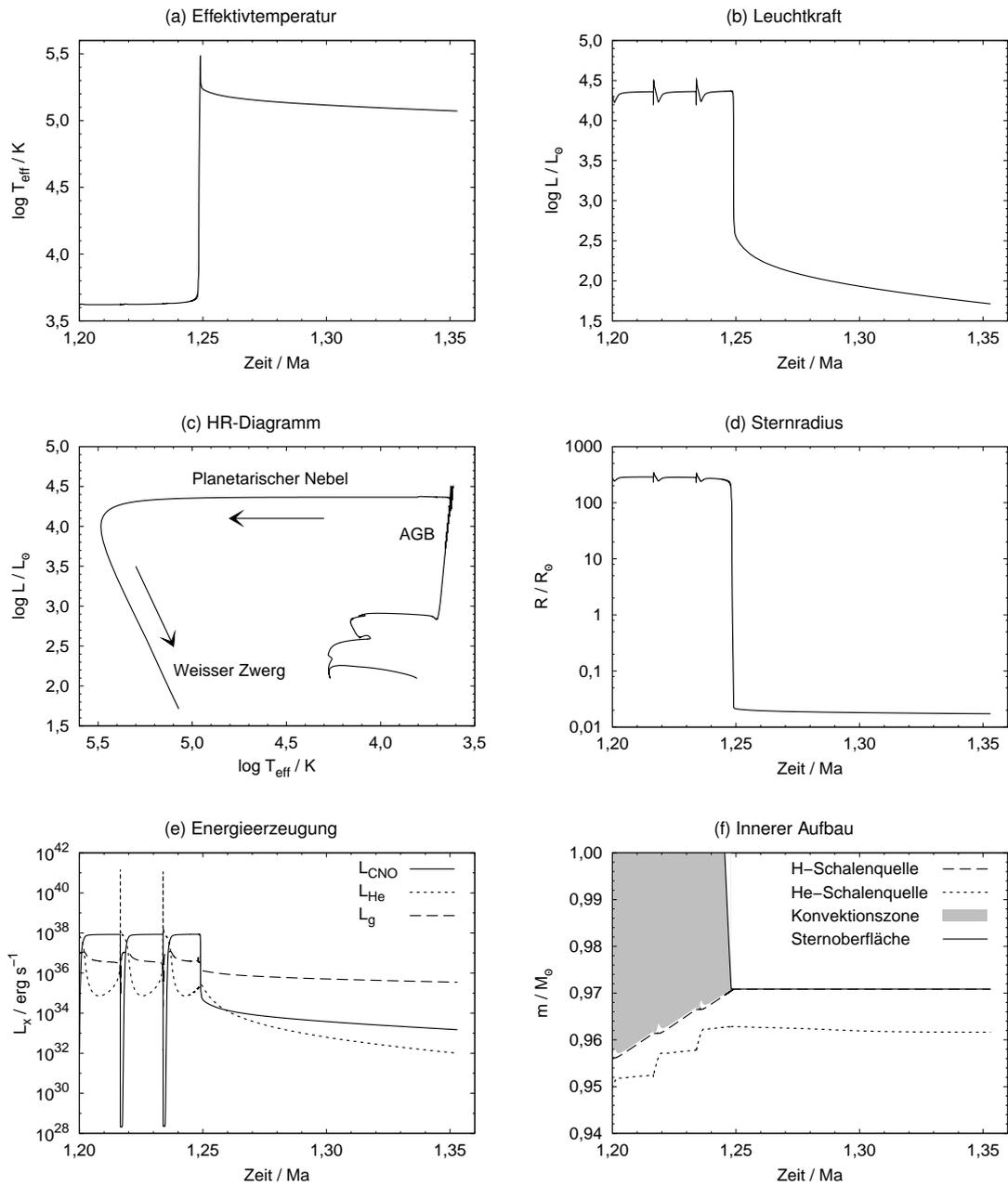


Abbildung 6.14: Post-AGB-Entwicklung des $3 M_{\odot}$ -Modells.

6.2 Modelle der Population III

Wir haben Modelle für Sterne der Population III, d. h. für Sterne, die bei ihrer Entstehung völlig metallfrei sind, im Bereich von 2 bis $10 M_{\odot}$ in Schritten von $1 M_{\odot}$ berechnet. Die Modelle mit 3 bzw. $5 M_{\odot}$ wurden bis weit in die TPAGB-Phase verfolgt, alle anderen lediglich bis zum EAGB. Nach einer kurzen Zusammenfassung der Parameter der Rechnungen (Abschn. 6.2.1) besprechen wir die Entwicklung des $5 M_{\odot}$ -Modell bis zum EAGB in Abschn. 6.2.2 und vergleichen in Abschn. 6.2.3 alle unsere Modelle der Population III miteinander. Nach der Darstellung der TPAGB-Phase des $5 M_{\odot}$ -Modells (Abschn. 6.2.4) schließen wir mit einem kurzen Blick auf das $3 M_{\odot}$ -Modell (Abschn. 6.2.5).

6.2.1 Parameter der Rechnungen

Anfangsmodelle. Die Anfangswerte für die Strukturvariablen P , ρ , r , u und l werden für alle Sternmodelle aus polytropen Modellen wie in Abschn. 5.4 beschrieben gewonnen.

Chemische Zusammensetzung. Die Anfangsmodelle sind chemisch homogen. Die Anfangswerte für die chemische Zusammensetzung sind in der folgenden Tabelle¹ angegeben. Die Sterne sind zu Beginn ihrer Entwicklung metallfrei.

Spezies	¹ H	² H	³ He	⁴ He	sonst
Anfangswert X_i	0,77	$1,0 \cdot 10^{-17}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	0,23	$1,0 \cdot 10^{-15}$

Kernreaktionen. Das nukleare Netzwerk enthält die Reaktionen der Ketten pp 1, pp 2 und pp 3 sowie den CNO-Zyklus, außerdem die Fusion von Helium zu Kohlenstoff und Sauerstoff; insgesamt also die Gl. (3.34), (3.35), (3.36), (3.37), (3.38) und (3.42). Dabei werden alle β -Zerfälle und der Zerfall ${}^8\text{Be} (\alpha) {}^4\text{He}$ innerhalb von pp 3 als instantan behandelt. Die Reaktionsraten sind die von der NACRE-Kollaboration (Angulo et al., 1999) veröffentlichten; die Rate der Reaktion ${}^7\text{Be} (e^-, \nu) {}^7\text{Li}$ ist aus Bahcall (1989) entnommen.

Opazitäten. Wir verwenden für die ganze Rechnung die OP-Tafeln mit $Z = 0$, d. h. die Änderung der Metallhäufigkeiten im Verlauf der Entwicklung wird nicht berücksichtigt. Für die inneren Regionen des Sterns, die zum C/O-Kern werden, ist das kein Problem, da dort ohnehin nicht die OP-Tafeln, sondern Fitformeln verwendet werden (s. Abschn. 3.3). Die Änderung des Metallgehaltes in der Hülle durch den Dredge-up kann beträchtlich sein und hat über die Opazität wieder Auswirkungen auf die Effektivtemperatur, den Massenverlust usw. Dies bleibt in der vorliegenden Arbeit unberücksichtigt.

Mischungslänge. Der Mischungswegparameter wurde auf $\alpha_M = 1,5$ gesetzt.

Massenverlust. In den Modellen mit 3 bzw. $5 M_{\odot}$, die bis zum TPAGB verfolgt wurden, wird der Massenverlust ab dem Riesenast gemäß der in Gl. (3.45) angegebenen Massenverlustformel von Schröder und Cuntz (2005) berücksichtigt. Die anderen Rechnungen enthalten keinen Massenverlust.

¹Der Wert für Wasserstoff wird genau genommen als $X_{\text{H}} = 1,0 - \sum_{i \neq \text{H}} X_i$ berechnet.

Gitter. Bis zum Einsetzen des Wasserstoffschalenbrennens wird das Gitter unterhalb 0,8 der Sternmasse nicht verändert. Während des zentralen Wasserstoffbrennens sind neben den im Anfangsmodell gesetzten keine zusätzlichen Punkte nötig, da in dieser Entwicklungsphase alle Größen noch recht flache Funktion der Massenkoordinate m sind. Oberhalb 0,8 der Sternmasse wird das Gitter wie in Abschn. 5.2 beschrieben angepasst. Ab dem Übergang zum Schalenbrennen wird die Gitterverfeinerung auf den ganzen Stern angewandt, so dass auch die Schalenquellen gut aufgelöst sind. Zu den Schwierigkeiten der Gitteranpassung auf dem TPAGB s. Abschn. 5.2.3.

Zeitschritt. Auf der Hauptreihe werden zur Bestimmung der Schrittweite alle Variablen wie in 5.1.2 erläutert berücksichtigt. Ab dem Wasserstoffschalenbrennen wird der lokale Fluss l bei $l < 0,01L$ nicht mehr berücksichtigt, auf dem TPAGB bereits bei $l < 0,1L$. Ebenso werden auf dem TPAGB die Änderungsraten der Häufigkeiten der Elemente mit $X_i < 10^{-4}$ für die Bestimmung des Zeitschritts nicht berücksichtigt.

6.2.2 Die Entwicklung eines $5M_{\odot}$ -Sterns der Population III bis zum EAGB

Wir beschreiben im folgenden die Entwicklung unseres Modells eines Sterns der Population III von $5M_{\odot}$. Der Zeitnullpunkt der Abbildungen in diesem Abschnitt ist der Beginn der Rechnung. Wir bezeichnen mit

$$L_x := \int_0^M \varepsilon_x dm \quad (6.4)$$

die über den gesamten Stern integrierte Energieproduktionsrate durch den mit x spezifizierten Prozess. Als Index x stehen »pp« und »CNO« für die pp-Ketten bzw. den CNO-Zyklus, »H« für alle Reaktionen des Wasserstoffbrennens, »He« für das Heliumbrennen, »nuc« für die gesamte nukleare Energieproduktion, »g« für den Zeitterm der Energiegleichung und zuletzt » ν « für die Neutrinoverluste. Trotz der Wahl des Buchstabens L handelt es sich, mit Ausnahme von L_{ν} , nicht um Leuchtkräfte. Mit den obigen Bezeichnungen gilt aber $L = L_{\text{nuc}} - L_{\nu} + L_g$.

Die Vorhauptreihenentwicklung

Da für das Anfangsmodell ein Vielfaches des Radius des Hauptreihensterns gewählt wurde, enthalten die Rechnungen auch einen Teil der Vorhauptreihenentwicklung. Auf diesem Weg sollten alle Abhängigkeiten von den Details des Anfangsmodells bis zu dem Zeitpunkt, ab dem man tatsächlich von einem Stern sprechen kann (d. i. das Zünden des Wasserstoffbrennens), »vergessen« sein.

Zu Beginn der Rechnung ist die Zentraltemperatur noch zu gering, um Fusionsreaktionen zu ermöglichen. Die einzige Energiequelle ist dann die Freisetzung von Gravitationsenergie; der Stern kontrahiert also und heizt sich dabei auf, wie in Abb. 6.15a,b zu sehen ist. Dies tut er solange, bis bei ungefähr $2 \cdot 10^7$ K das Wasserstoffbrennen durch die pp-Ketten einsetzt. Die Temperatur steigt noch weiter, bis bei einer Zentraltemperatur von etwa $4,5 \cdot 10^7$ K die nukleare Energieproduktion ausreicht, um den Stern ins thermische Gleichgewicht zu bringen. Dann ist, wie Abb. 6.15c zeigt, die gravitative Energieerzeugung gegenüber der nuklearen vernachlässigbar klein. Mit Einsetzen der Kernreaktionen und Erreichen des thermischen Gleichgewichts ändert sich die Zeitskala der Sternentwicklung; dann ist nicht mehr die Kelvin-Helmholtz-Zeit, sondern die nukleare Zeitskala ausschlaggebend.

Für unsere Modelle wollen wir mit einer gewissen Willkür den Zeitpunkt, zu dem die gesamte gravitative Energieproduktion kleiner als 1 % der nuklearen ist, d. h.

$$L_g < 0,01 \cdot L_{\text{nuc}}, \quad (6.5)$$

6.2. MODELLE DER POPULATION III

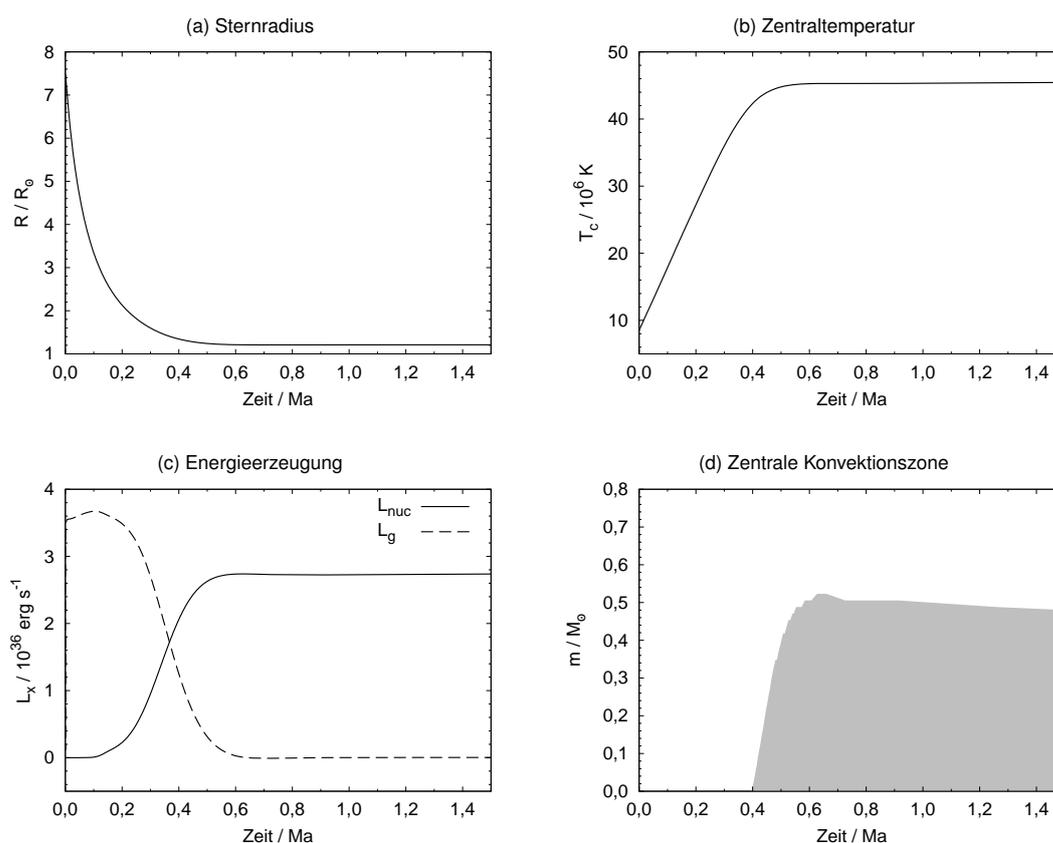


Abbildung 6.15: Stern der Population III mit $5M_{\odot}$: Vorhauptreihenentwicklung.

als Beginn der Hauptreihe auffassen. Der Stern ist dann zwar schon nicht mehr ganz homogen, aber die Abweichungen davon sind noch sehr gering; der zentrale Wasserstoffgehalt ist von anfänglich 77,0 % auf nun 76,8 % gefallen. Im vorliegenden Modell ist die Hauptreihe nach $6 \cdot 10^5$ Jahren¹ erreicht.

Während die nukleare Energieproduktion ansteigt, wird der Fluss im tiefen Inneren des Sterns so groß, dass der radiative Energietransport nicht mehr ausreicht und eine in Abb. 6.15d gezeigte zentrale Konvektionszone entsteht. Sie erreicht ihre maximale Ausdehnung gleichzeitig mit dem Beginn der Hauptreihenphase. Auf der Hauptreihe selbst wird sie dann langsam kleiner.

Im HRD Abb. 6.16a ist die Vorhauptreihenphase verbunden mit einer Entwicklung hin zu höherer Effektivtemperatur bei zunächst etwa konstanter, später leicht absinkender Leuchtkraft. Letzteres liegt daran, dass auf der Vorhauptreihe die Freisetzung von Gravitationsenergie höher war als die nukleare Energieerzeugung auf der frühen Hauptreihe (vgl. Abb. 6.15c). Zu Beginn der Hauptreihenentwicklung befindet sich der Stern im HRD Abb. 6.16a und im ρ_c - T_c -Diagramm Abb. 6.16b am mit A bezeichneten Punkt.

Das zentrale Wasserstoffbrennen ohne CNO-Zyklus

Von 0,6 bis 59 Ma ist die Fusion von Wasserstoff durch die Reaktionen der pp-Ketten die einzige Energiequelle des Sterns. In dieser Phase wird das Sterninnere heiß genug, um kleine Mengen ^{12}C zu erzeugen, die später den CNO-Zyklus in Gang setzen werden.

¹Das ist die Zeitspanne, die unser Anfangsmodell braucht, um auf die Hauptreihe zu gelangen; sie ist nicht notwendig identisch mit der realen Dauer der Vorhauptreihenentwicklung, mit der wir uns auch nicht weiter befassen.

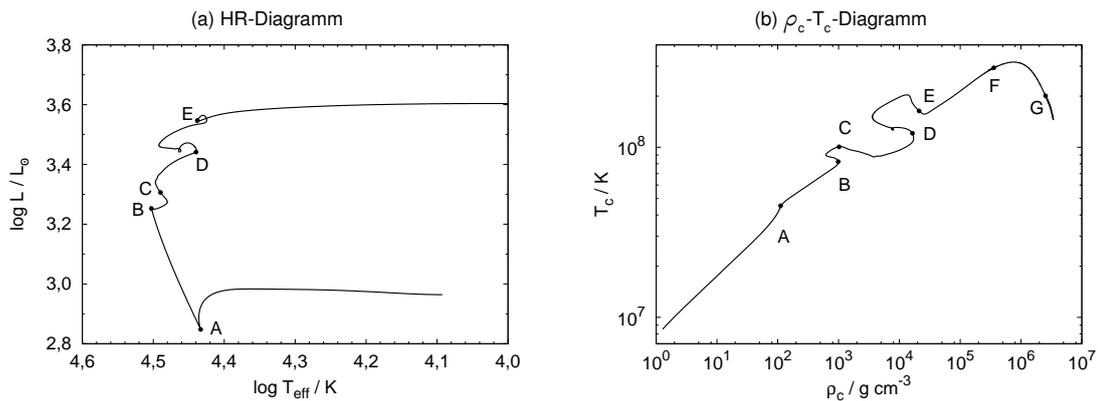


Abbildung 6.16: Stern der Population III mit $5M_{\odot}$: Hertzsprung-Russell-Diagramm und ρ_c - T_c -Diagramm. Die bezeichneten Punkte sind: A. Beginn des Wasserstoffbrennens. B. Einsetzen des CNO-Zyklus. C. Übergang vom zentralen zum Schalenbrennen. D. Beginn des Heliumbrennens. E. Übergang vom zentralen zum Schalenbrennen. F. Erreichen der Hayashi-Linie. G. Maximale Leuchtkraft auf dem Riesenast. Vgl. auch Abb. 6.22d.

Abbildung 6.17a zeigt die Massenanteile der Elemente ^{12}C , ^{14}N und ^{16}O im Sternzentrum. Der zentrale Kohlenstoffgehalt erhöht sich von der Vorhauptreihe bis zu 46 Ma nur äußerst geringfügig, da bis hier die Temperatur zu niedrig ist, um durch den 3α -Prozess zusätzlichen Kohlenstoff zu erzeugen. Bei etwa 46 Ma hat die in Abb. 6.17b gezeigte Zentraltemperatur $6,5 \cdot 10^7$ K erreicht, und der Kohlenstoffanteil nimmt nun merklich zu, bis er bei 59 Ma einen Massenbruchteil von $3,5 \cdot 10^{-12}$ erreicht hat. Der Anteil von ^{14}N ist auf $1,0 \cdot 10^{-10}$ angestiegen. Dies liegt daran, dass die katalytischen Elemente des CNO-Zyklus zwar als ^{12}C erzeugt, dann aber rasch in hauptsächlich ^{14}N umgewandelt werden, da dort das Gleichgewicht des CNO-Zyklus liegt. Zur Erzeugung von ^{16}O reicht die Temperatur in dieser Phase mit bis zu $8 \cdot 10^7$ K noch nicht aus.

Die nun vorhandenen, geringen Mengen von ^{12}C und ^{14}N reichen aus, die weitere Entwicklung des Sterns entscheidend zu beeinflussen. Bei 59 Ma wird laut Abb. 6.17c die Energieerzeugung aus dem CNO-Zyklus spürbar; sie beträgt dann etwa 1 % der Energieerzeugung aus den pp-Ketten.

Der 3α -Prozess, der für diese Entwicklung verantwortlich ist, ist energetisch völlig unbedeutend. Selbst bei der nach 59 Ma erreichten Zentraltemperatur von $8 \cdot 10^7$ K liegt sein Beitrag immer noch zehn Größenordnungen unter dem der pp-Kette.

Der in Abbildung 6.17d dargestellte Sternradius hat sich in dieser Phase weiterer Aufheizung des Sterns von $1,2$ auf $1,4R_{\odot}$ vergrößert. Diese Ausdehnung scheint der allgemeinen Überlegung, nach der die innere Aufheizung mit einer Kontraktion einhergeht¹, zu widersprechen. Der Grund dafür ist der folgende: In solchen Überlegungen wird zur Vereinfachung die Zusammensetzung konstant gehalten, d. h. es werden Modelle mit gleicher Masse und verschiedenem Radius, aber gleicher und homogener Zusammensetzung betrachtet. Diese Annahmen treffen bei einer echten Entwicklungsrechnung natürlich nicht zu. Die chemische Zusammensetzung ist weder homogen im Ort, noch konstant in der Zeit. Tatsächlich wird trotz größer werdendem Radius Gravitationsenergie freigesetzt, wie in Abb. 6.17e zu sehen ist. Dies steht wieder im Einklang mit der wachsenden Zentraltemperatur.

Beim Zünden des CNO-Zyklus am Ende dieser Phase wird L_g in Abb. 6.17e negativ, was das Ende der Aufheizung anzeigt. Dem Betrag nach bleibt der Term aber klein, nämlich immer

¹vgl. Abschn. 4.1

6.2. MODELLE DER POPULATION III

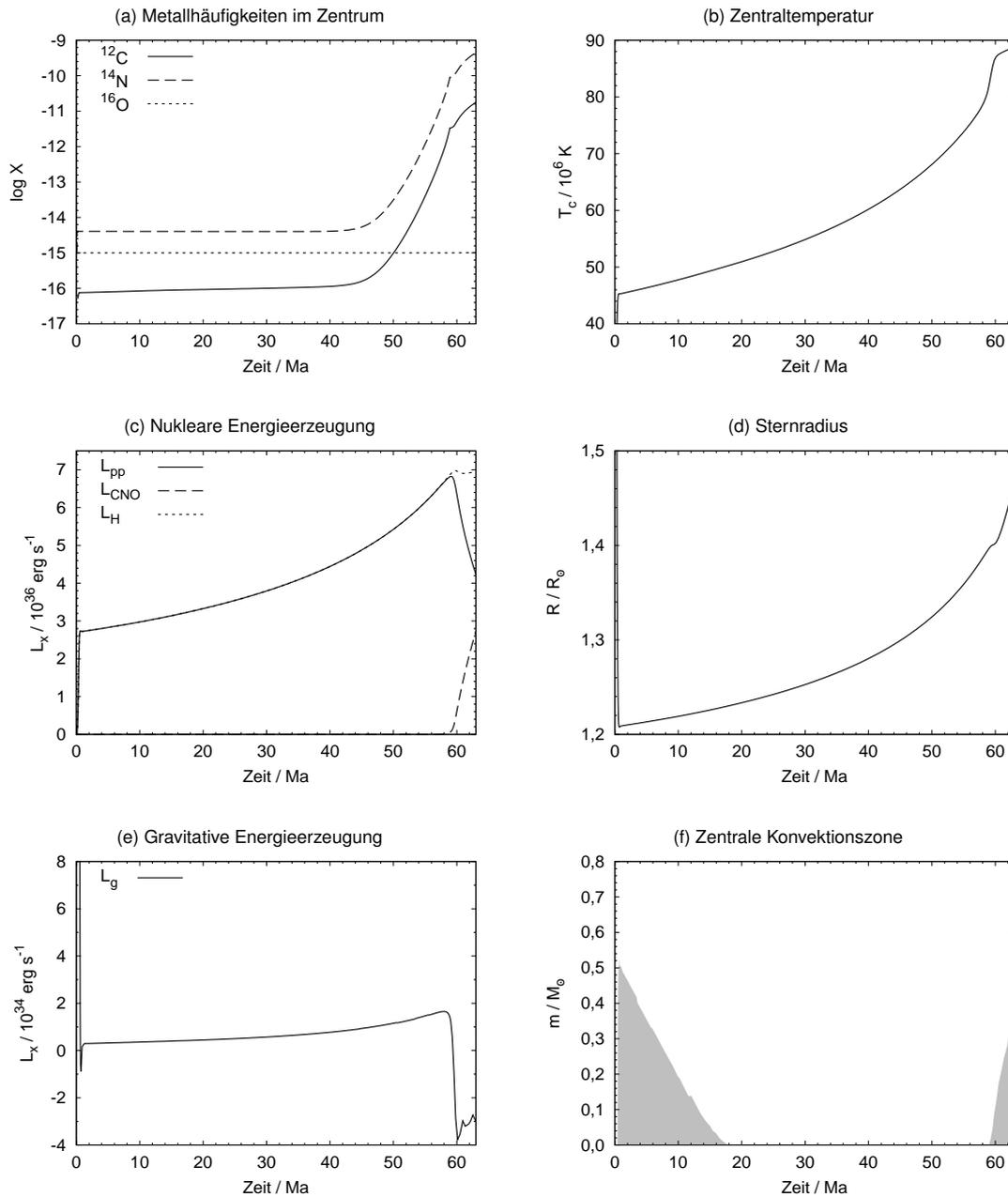


Abbildung 6.17: Stern der Population III mit $5 M_\odot$; Zentrales Wasserstoffbrennen ohne CNO-Zyklus.

unter 0,3 % der nuklearen Energieerzeugung in Abb. 6.17c; der Stern bleibt also nahe beim thermischen Gleichgewicht.

Die zentrale Konvektionszone ist in Abb. 6.17f gezeigt. Sie erreicht zu Beginn der Hauptreihenphase ihre maximale Ausdehnung, wird dann mit der Zeit kleiner und verschwindet bei 17,5 Ma vollständig. Beim Einsetzen des CNO-Brennens liegt wieder eine stark konzentrierte Energiequelle im Zentrum vor, so dass sich dort erneut eine Konvektionszone bildet.

Bis zum Einsetzen des CNO-Brennens bei 59 Ma hat dieser Stern bereits einen großen Teil seiner Hauptreihenentwicklung hinter sich, denn der zentrale Wasserstoffanteil ist bereits auf 10,5 % gesunken, der mittlere auf 61 %. Er hat sich in dieser Zeit im HRD Abb. 6.16a zu

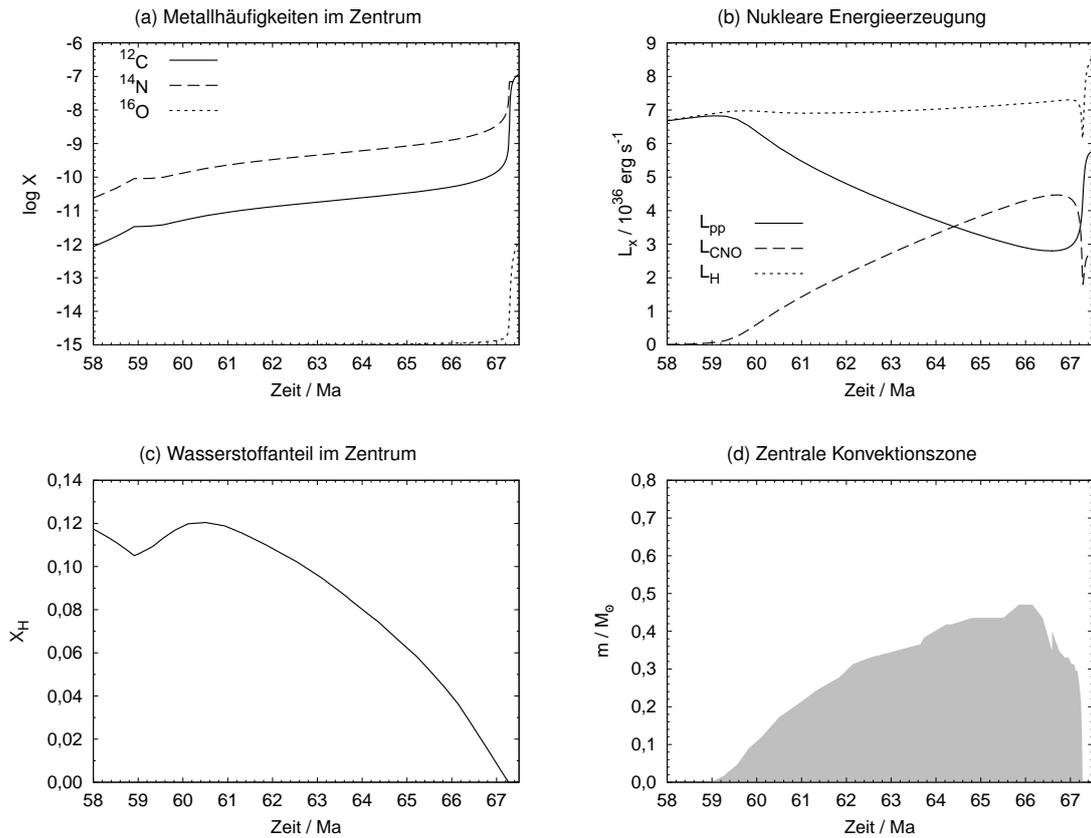


Abbildung 6.18: Stern der Population III mit $5 M_\odot$: Zentrales Wasserstoffbrennen mit CNO-Zyklus.

höheren Werten von Leuchtkraft und Effektivtemperatur entwickelt. Im Gegensatz zu der hier gezeigten Rechnung eines metallfreien Sterns sinkt bei einem Stern der Population I oder II die Effektivtemperatur während der Hauptreihenentwicklung. Der Stern der Population III verhält sich anders: Da ihm der CNO-Zyklus als Energiequelle nicht zur Verfügung steht, ist er gezwungen, sich weiter aufzuheizen. Dabei steigt mit der Zentral- auch die Effektivtemperatur an. Der Stern befindet sich im HR- und ρ_c - T_c -Diagramm Abb. 6.16 nun am Punkt B.

Das zentrale Wasserstoffbrennen mit CNO-Zyklus

Da nun immerhin eine kleine Menge von Kohlenstoff und Stickstoff vorhanden ist, bezieht der Stern seine Energie aus Wasserstofffusion sowohl durch die pp-Ketten als auch durch den CNO-Zyklus, bis bei 67,25 Ma der Brennstoff aufgebraucht ist.

Da ^{12}C und ^{14}N im nuklear aktiven Zentrum des Sterns weiter angereichert werden (s. Abb. 6.18a), nimmt auch die Energieproduktion des CNO-Zyklus kontinuierlich zu, während die der pp-Ketten abnimmt. Wie Abbildung 6.18b zeigt, liegen bei 64,5 Ma beide gleich auf, danach übertrifft der CNO-Zyklus die pp-Ketten und erreicht bei 66,5 Ma ein Maximum. Aber auch hier haben beide noch die gleiche Größenordnung. Die gesamte nukleare Energieproduktion verändert sich in dieser Zeit nur wenig¹; es ändert sich vor allem das Verhältnis, in dem die beiden relevanten Prozesse beitragen.

¹Hier wird deutlich, dass (zumindest bei einem Hauptreihenstern) im wesentlichen die mechanische Struktur die Leuchtkraft festlegt und der Stern gezwungen ist, durch Veränderung der Temperatur im Inneren die durch Kernreaktionen frei werdende Energie dem anzupassen! Vgl. Kippenhahn und Weigert (1990), Kap. 20.2.

6.2. MODELLE DER POPULATION III

Die nukleare Energieproduktion ist in Abbildung 6.23 als Funktion der Zeit und des Ortes (d. h. der Massenkoordinate) dargestellt. Durch die stetige Zunahme der Temperatur im Sterninneren bis zum Einsetzen des CNO-Zyklus vergrößert sich der Bereich, in dem die Kernreaktionen ablaufen; ab dann wird er wieder kleiner. Die Aktivität des CNO-Zyklus ist wegen seiner starken Temperaturabhängigkeit sehr viel mehr zum Zentrum hin konzentriert als die der pp-Ketten.

Bis zum Beginn des CNO-Brennens bei 59 Ma war der zentrale Wasserstoffanteil, wie ihn Abb. 6.18c zeigt, auf 10,5 % abgesunken. Nun wird er wieder etwas höher und erreicht bei 60,5 Ma etwa 12 %. Der Grund dafür ist die in Abb. 6.18d dargestellte Konvektionszone, die beim Einsetzen des CNO-Zyklus entsteht. Sie mischt weniger stark prozessiertes und damit wasserstoffreiches Material ins Zentrum. Die Konvektionszone verschwindet bei etwa 67,2 Ma wieder.

Nachdem das CNO-Brennen eingesetzt hat, wird L_g negativ, bleibt dabei aber dem Betrag nach klein (vgl. Abb. 6.17e). Dementsprechend kommt es zu einer Ausdehnung des Kerns, die Zentraldichte sinkt von 1000 g cm^{-3} auf 600 g cm^{-3} . Die Zentraltemperatur wächst langsamer, die Effektivtemperatur sinkt leicht und die Leuchtkraft stagniert. Der Stern bewegt sich in den Diagrammen Abb. 6.16 von B nach C. Bei einem Alter von 67,25 Ma ist der Wasserstoff im Zentrum aufgebraucht. Das zentrale Wasserstoffbrennen und damit die Hauptreihenphase der Entwicklung des Sterns sind beendet.

Das Wasserstoffschalensbrennen

Bei etwa 67,25 Ma findet der Übergang vom zentralen Wasserstoffbrennen zum Schalensbrennen statt. Dieses dauert an, bis im ausgebrannten Kern die Temperatur ausreicht, um das Heliumbrennen zu zünden.

Beim Übergang selbst befindet sich der Stern für eine kurze Episode von etwa $4 \cdot 10^5$ Jahren nicht im thermischen Gleichgewicht, wie das Maximum von L_g in Abb. 6.19a zeigt. Der Zeiterm erreicht etwa 30 % der nuklearen Energieerzeugung. Durch die Reorganisation vom zentralen zum Schalensbrennen wird Energie frei, denn der ausgebrannte Kern kontrahiert und überschreitet bald eine Dichte von $3 \cdot 10^3 \text{ g cm}^{-3}$ (s. Abb. 6.19b). Die in Abbildung 6.19c gezeigte Zentraltemperatur sinkt am Beginn des Schalensbrennens zunächst ab. Sie steigt danach erst langsam wieder an, um dann am Ende dieser Phase die zum Zünden von Helium notwendige Temperatur recht schnell zu erreichen.

Abbildung 6.19a zeigt die einzelnen Beiträge zur Energieerzeugung. Der CNO-Zyklus findet ausschließlich in einer Schalenquelle, die nur wenig Masse enthält (vgl. Abb. 6.24), statt, während die pp-Ketten in einem viel ausgedehnteren Bereich aktiv sind. Daher dominieren im Schalensbrennen zunächst wieder die pp-Ketten die Energieerzeugung. Die gesamte nukleare Energieproduktion steigt direkt mit dem Beginn des Schalensbrennens sprunghaft, danach langsamer an; sie erreicht zum Ende des Wasserstoffschalensbrennens fast den doppelten Wert vom Ende des zentralen Wasserstoffbrennens. Im Verlauf des Schalensbrennens steigt der Beitrag des CNO-Zyklus wieder an und übertrifft schließlich die pp-Ketten um einen Faktor drei.

Abbildung 6.24 zeigt die Energieproduktionsrate ε_{nuc} als Funktion der Zeit und der Massenkoordinate, so dass man die Lage der Energiequellen verfolgen kann. Zu Beginn des Schalensbrennens liegt die Wasserstoffschalensquelle auf einem Heliumkern von $0,35 M_{\odot}$. Die Wasserstoffschalensquelle brennt dann nach außen, und ihre Asche vergrößert die Masse des ausgebrannten Kerns.

Die Leuchtkraft nimmt zusammen mit der nuklearen Energieerzeugung während des Schalensbrennens deutlich zu. Der Stern dehnt sich langsam aus und kühlt dabei ein wenig ab (s. Abb. 6.19d–f), d. h. er bewegt sich im HRD nach rechts auf die Hayashi-Linie zu. Er erreicht am Ende des Wasserstoffschalensbrennens in den Diagrammen Abb. 6.16 den Punkt D.

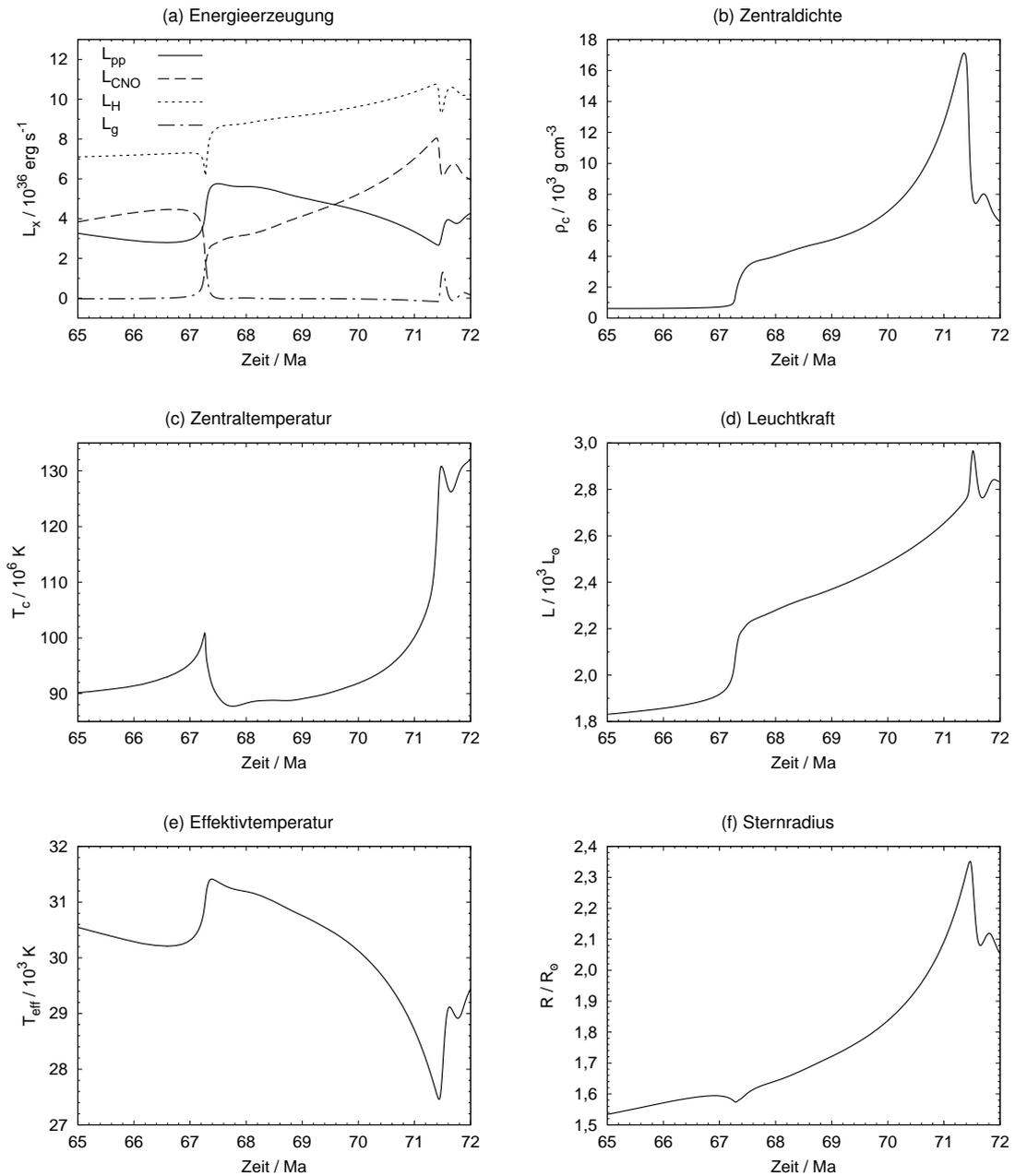


Abbildung 6.19: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Wasserstoffschalenbrennen.

Das zentrale Heliumbrennen

Bei 71,4 Ma ist der Kern so weit kontrahiert, dass er eine Dichte von $\rho_c = 1,7 \cdot 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ und eine Temperatur von $T_c = 1,3 \cdot 10^8 \text{ K}$ erreicht hat (s. Abb. 6.20a). Nun kann das Heliumbrennen zünden, und der 3α -Prozess wird zum ersten Mal auch energetisch bedeutsam, wie Abb. 6.20b zeigt. Es liegt zu diesem Zeitpunkt keine Entartung vor – der Entartungsgrad im Zentrum beträgt nur $\psi_c = 0,25$ –, so dass das Heliumbrennen ruhig zündet und kein Flash stattfindet. Das Brennen zündet zentral, da das Maximum der Temperatur im Zentrum liegt. Mit dieser neuen, stark konzentrierten Energiequelle entsteht wieder eine zentrale Konvektionszone (s. Abb. 6.20c).

6.2. MODELLE DER POPULATION III

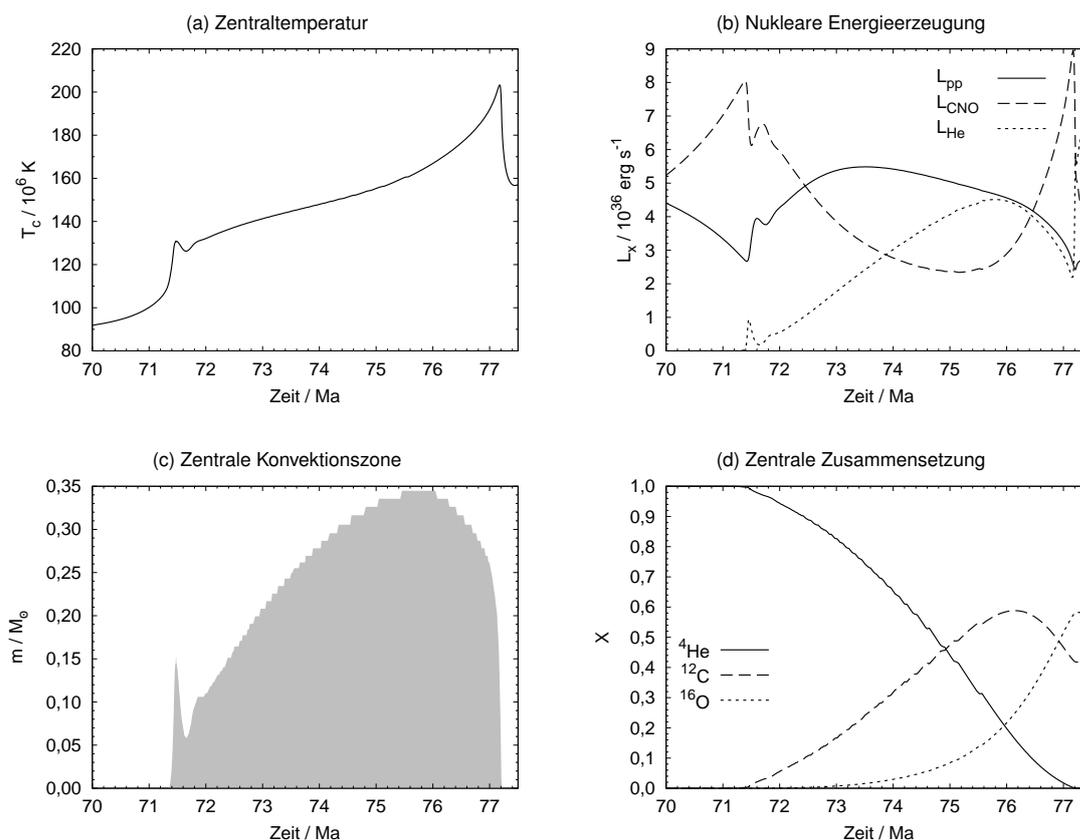


Abbildung 6.20: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Zentrales Heliumbrennen.

Auch das Zünden von Helium verursacht eine kurze Episode thermischen Ungleichgewichts, in der der gravitative Beitrag zur Energieerzeugung bis zu 10 % beträgt (s. Abb. 6.19a). Nachdem nun wieder eine zentrale Energiequelle vorhanden ist, endet die (bei diesem Stern sehr kurze) Phase der Expansion.

Im HRD in Abb. 6.16a ist zu sehen, dass dieser $5 M_{\odot}$ -Stern – ganz im Gegensatz zu einem Stern gleicher Masse, aber solarer Metallizität – nicht auf den ersten Riesenast kommt; er erreicht nur den mit D bezeichneten Punkt. Aufgrund seiner Vorgeschichte hat er am Ende des zentralen Wasserstoffbrennens eine deutlich höhere Zentraltemperatur als sein solares Gegenstück. Daher ist die nötige Temperatur zum Zünden des Heliumbrennens schneller erreicht. Der Stern hat nicht genügend Zeit, um sich deutlich auszudehnen; er schafft es laut Abb. 6.19f lediglich auf $2,35 R_{\odot}$. Das hat zur Folge, dass dieses Modell jetzt keine äußere Konvektionszone ausbildet und daher insbesondere der erste Dredge-up nicht stattfindet.

Abbildung 6.20d zeigt die chemische Zusammensetzung im Zentrum. Dort wird ^4He zunächst nur in ^{12}C , später auch in ^{16}O umgewandelt. Die Erzeugung von ^{16}O benötigt zwar höhere Temperaturen als der 3α -Prozess, aber wegen der unterschiedlichen Abhängigkeit von der Heliumhäufigkeit¹ kommt sie zum Ende des Heliumbrennens doch zum Zug, und ein Teil des bis dahin erzeugten Kohlenstoffs wird in Sauerstoff umgewandelt. So steigt der zentrale Kohlenstoffgehalt zunächst bis auf 59 % bei 76 Ma an, sinkt dann aber wieder ab. Der Sauerstoffgehalt wächst erst später, dann aber kontinuierlich an. Am Ende des zentralen Heliumbrennens bei 77,2 Ma beträgt das Verhältnis der Massenbruchteile von C:O im Sternzentrum 42:58.

¹vgl. Abschn. 3.2.2

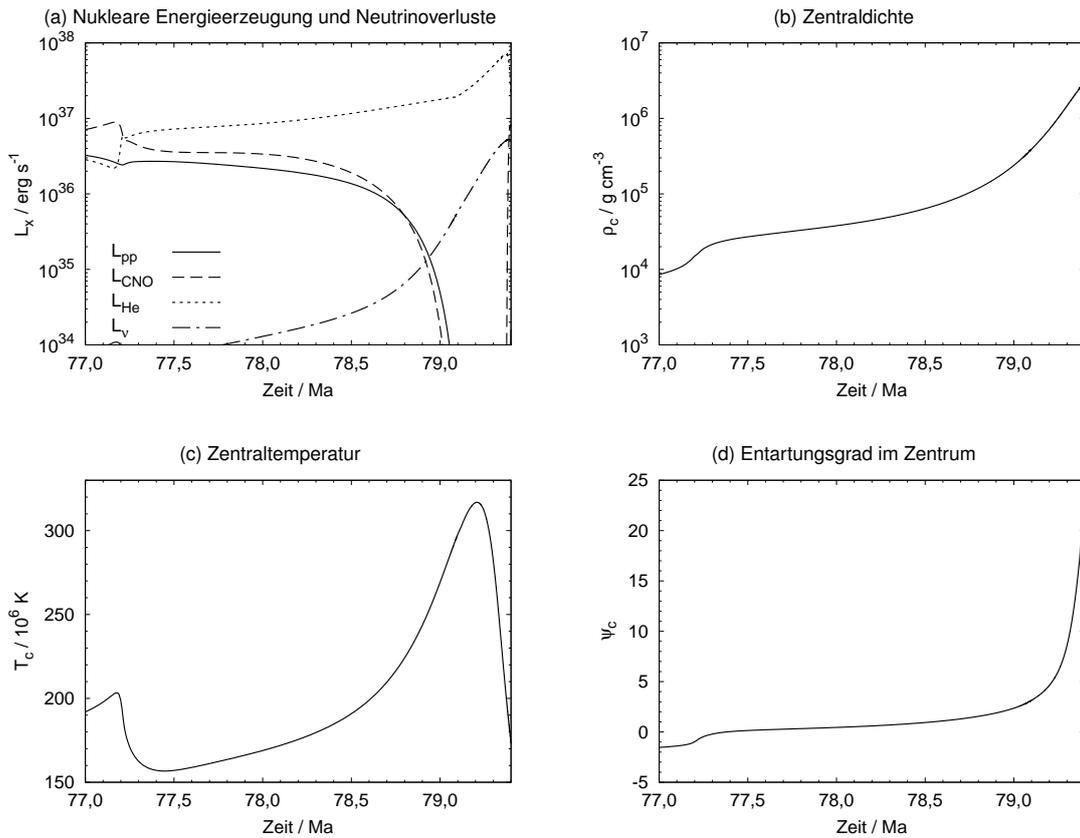


Abbildung 6.21: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Heliumschalenbrennen.

Ab 72,5 Ma nimmt auch der mittlere Heliumanteil ab. Trotzdem wird die Energie zu diesem Zeitpunkt noch hauptsächlich durch Wasserstoffbrennen erzeugt, da diese Energiequelle ergiebiger¹ ist. Während dieser Phase bleibt das Wasserstoffbrennen die dominierende Energiequelle.

Das Heliumschalenbrennen

Bei 77,2 Ma sinkt der in Abb. 6.20d gezeigte zentrale Heliumgehalt auf null, und entsprechend erlischt dort das Heliumbrennen ebenso wie die Konvektionszone (Abb. 6.20c). Der Übergang vom zentralen Heliumbrennen zum Schalenbrennen findet statt, wie auch in Abb. 6.24 zu erkennen ist. Der Stern befindet sich in den Diagrammen Abb. 6.16 am Ort E.

Die Abbildungen 6.20b und 6.21a zeigen die Beiträge der verschiedenen Reaktionen zur Energieproduktion. Am Ende des zentralen Heliumbrennens sinkt mit dem Heliumgehalt auch die dadurch erzeugte Energie bei gleichzeitiger Verstärkung des Brennens in der Wasserstoffschalenquelle ab. Mit Einsetzen des Heliumschalenbrennens übernimmt das Heliumbrennen den Hauptanteil der Energieerzeugung. Diese Entwicklung setzt sich fort, das Heliumbrennen nimmt weiter zu, während das Wasserstoffbrennen weiter abnimmt. Bei etwa 79 Ma liegt der Beitrag des Wasserstoffbrennens unter 1 %.

Bis jetzt waren die Neutrinoverluste ohne Belang: Die Neutrinoleuchtkraft L_{ν} (ebenfalls in Abb. 6.21a dargestellt) lag bis 78,5 Ma unter 1 % der Leuchtkraft des Sterns, bei 79 Ma

¹Bei der Erzeugung eines Heliumkerns aus Wasserstoff werden etwa 25 MeV frei, bei der Fusion von drei Heliumkernen zu Kohlenstoff nur etwa 7,3 MeV.

6.2. MODELLE DER POPULATION III

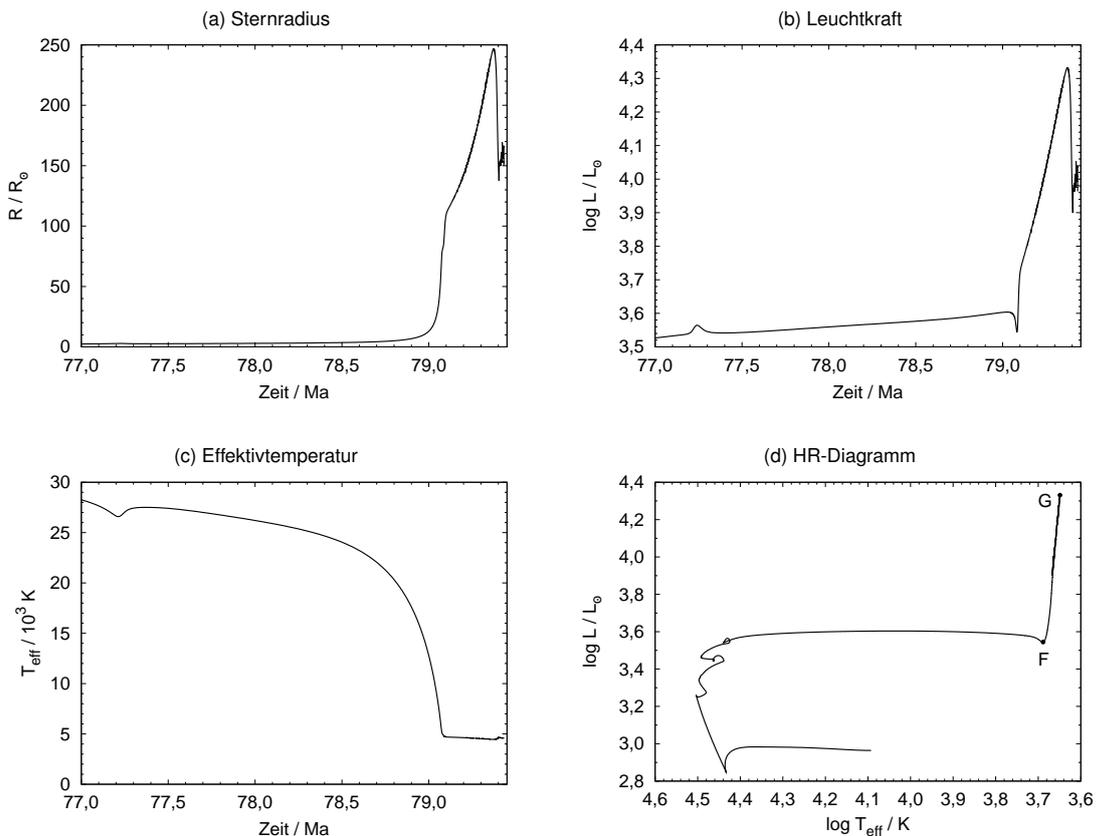


Abbildung 6.22: Stern der Population III mit $5M_{\odot}$: Heliumschalenbrennen. Zu den im HRD eingezeichneten Punkten vgl. Abb. 6.16.

etwas über 1 % davon. Sie nimmt weiter zu, erreicht bei 79,4 Ma ihr Maximum mit 20 % der Leuchtkraft, und sinkt danach wieder ab.

Der Stern besteht nun aus zwei sehr unterschiedlichen Teilen, dem dichten und heißen Kern aus Kohlenstoff und Sauerstoff sowie der Hülle aus Wasserstoff und Helium, die sich abkühlt und verdünnt. Zwischen beiden befindet sich die Heliumschalenquelle.

Der Kern. Die Zentraldichte in Abb. 6.21b erhöht sich kontinuierlich von etwa $2 \cdot 10^4 \text{ g cm}^{-3}$ direkt nach Beginn des Heliumschalenbrennens auf $3 \cdot 10^6 \text{ g cm}^{-3}$ bei 79,4 Ma. Die Zentraltemperatur ist in Abb. 6.21c dargestellt. Sie sinkt bei 77,2 Ma zunächst auf $1,55 \cdot 10^8 \text{ K}$ ab, steigt dann aber wieder an. Bei 79,2 Ma wird mit $3,17 \cdot 10^8 \text{ K}$ das Maximum der Zentraltemperatur erreicht; es liegt noch unterhalb der für das Kohlenstoffbrennen nötigen Temperatur. Die Neutrinoverluste sind im Kern nicht mehr zu vernachlässigen, sie wirken kühlend und lassen die Zentraltemperatur wieder absinken. Außerdem wird das Maximum der Temperatur nicht mehr im Zentrum angenommen. Solange die Temperatur mit der Dichte anstieg, war der Kern allenfalls leicht entartet, mit Einsetzen der Abkühlung kommt es schnell zu starker Entartung, wie Abb. 6.21d zeigt.

Der C/O-Kern wird durch die Asche der Heliumschalenquelle immer weiter vergrößert. Er wächst, wie Abb. 6.24 zeigt, von $0,245M_{\odot}$ zum Beginn des Schalenbrennens auf $1,01M_{\odot}$ beim neuerlichen Zünden der Wasserstoffschalenquelle.

Die Hülle. Die Abbildungen 6.22a–c zeigen die für das HRD wichtigen Größen. Der Sternradius wächst während des Heliumbrennens immer weiter an: bis 79 Ma nur wenig auf etwa $12R_{\odot}$, danach deutlich schneller bis zu einem Maximum von $245R_{\odot}$ bei 79,373 Ma. Die

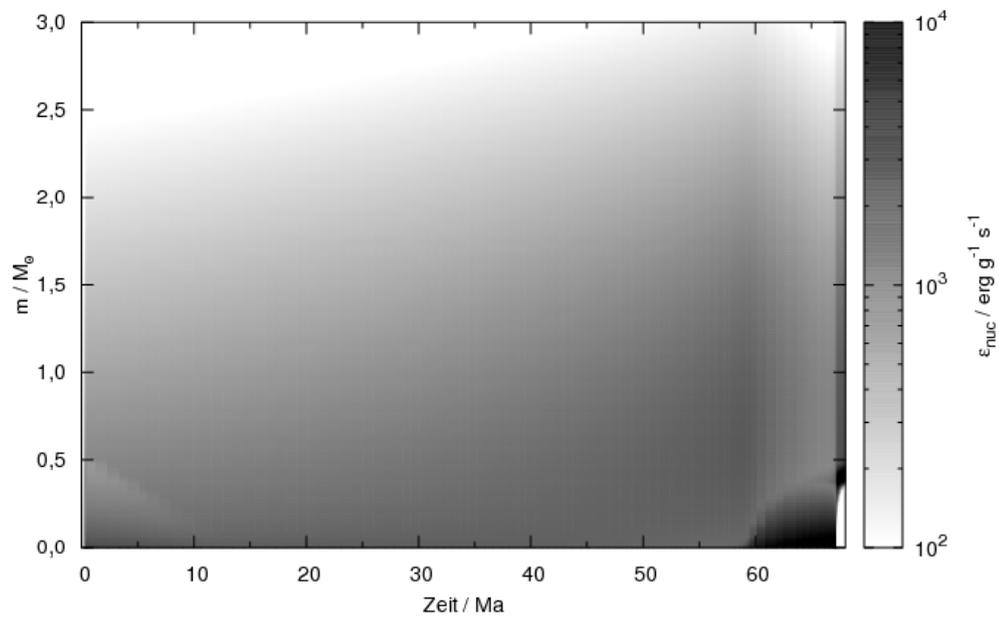


Abbildung 6.23: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Nukleare Energieproduktion als Funktion von Zeit und Massenkoordinate während der Hauptreihe. Es ist nur der Bereich $m \leq 3 M_{\odot}$ dargestellt. Bei $\epsilon_{\text{nuc}}(m, t) < 10^2 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ bzw. $\epsilon_{\text{nuc}}(m, t) > 10^4 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ wird nicht mehr farblich differenziert.

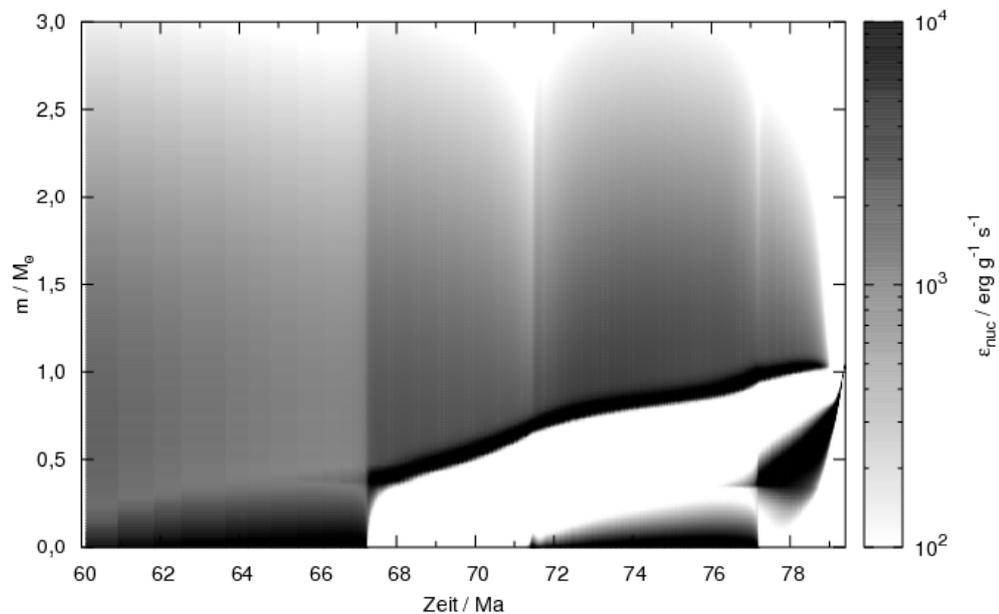


Abbildung 6.24: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Nukleare Energieproduktion als Funktion von Zeit und Massenkoordinate am Ende und nach der Hauptreihe. Es ist nur der Bereich $m \leq 3 M_{\odot}$ dargestellt. Bei $\epsilon_{\text{nuc}}(m, t) < 10^2 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ bzw. $\epsilon_{\text{nuc}}(m, t) > 10^4 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$ wird nicht mehr farblich differenziert.

6.2. MODELLE DER POPULATION III

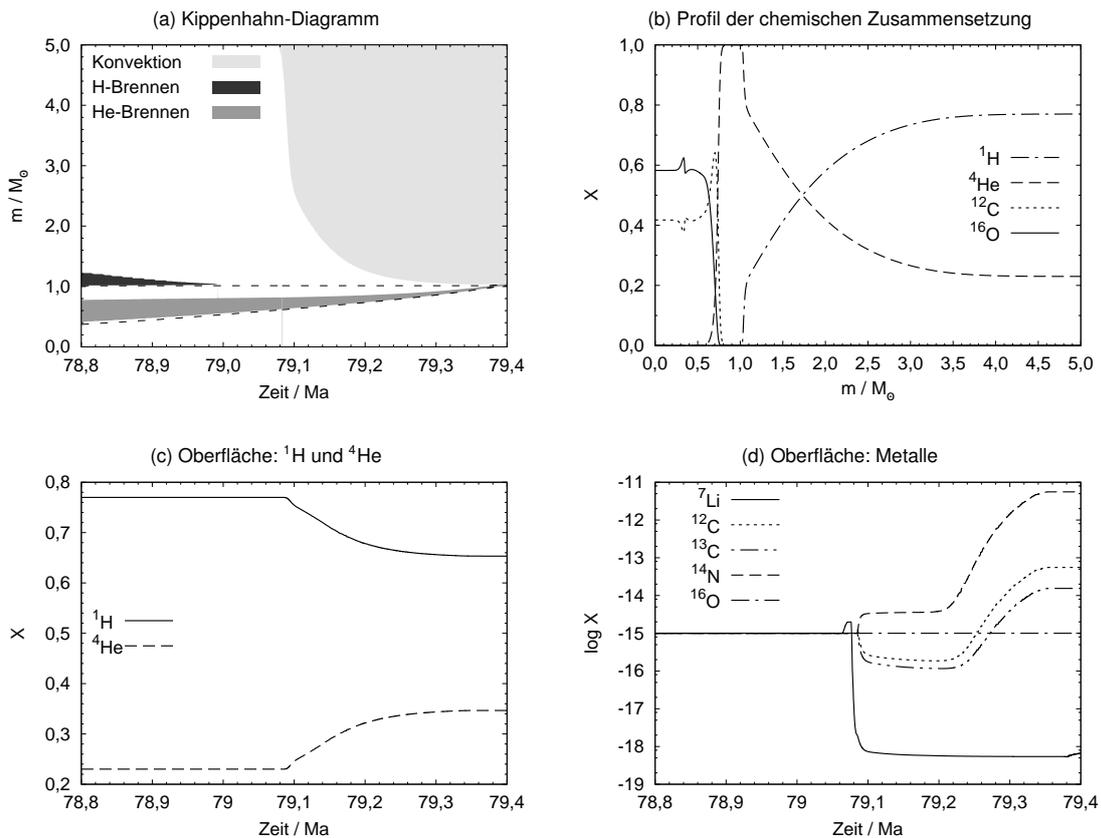


Abbildung 6.25: Stern der Population III mit $5M_{\odot}$: Zweiter Dredge-up. Zu (a): Nukleare Energieproduktion ist eingezeichnet, wo $\varepsilon_{\text{nuc}} > 500 \text{ erg g}^{-1} \text{ s}^{-1}$; die schwarzen Linien bezeichnen den wasserstoff- bzw. heliumfreien Kern. Zu (b): Bei einem Alter von 79 Ma.

Leuchtkraft zeigt eine ähnliche Entwicklung. Die Effektivtemperatur sinkt unter 5000 K. Das Zwischenmaximum der Leuchtkraft am Beginn des Schalenbrennens bei 77,2 Ma und das entsprechende Minimum der Effektivtemperatur resultieren im HRD in einer kleinen Schleife, Punkt E in Abb. 6.16a.

Der Stern erreicht nach etwa 79,05 Ma die Hayashi-Linie (Punkt F in den Abbildungen 6.16b und 6.22d). Ab nun ändert sich die Effektivtemperatur nur noch wenig, aber die Leuchtkraft wächst auf maximal $21,5 \cdot 10^3 L_{\odot}$ an, und der Stern steigt auf dem zweiten Riesenast nach oben, wie das HRD in Abb. 6.22d zeigt.

Der zweite Dredge-up

Bei 79,08 Ma ist die Oberflächentemperatur so weit gesunken, dass die äußersten Schichten konvektiv instabil werden. Eine Konvektionszone bildet sich aus, vergrößert sich und dringt in das Sterninnere vor (s. Abb. 6.25a). Sobald die konvektive Hülle sich bis in Gebiete, die zuvor nuklear prozessiert wurden, ausgeweitet hat, wird durch die mit den (turbulenten) Konvektionsbewegungen einhergehende Mischung das prozessierte Material an die Oberfläche transportiert. Dieser zweite Dredge-up setzt bei 79,09 Ma ein, wenn die äußere Konvektionszone bis zur Massenkoordinate $m = 3,5 M_{\odot}$ reicht.

Da die Entwicklung dieses Sterns bei recht hohen Temperaturen stattgefunden hat, konnten in einem großen Teil des Sterns zumindest die pp-Ketten aktiv werden, wie die Abbildun-

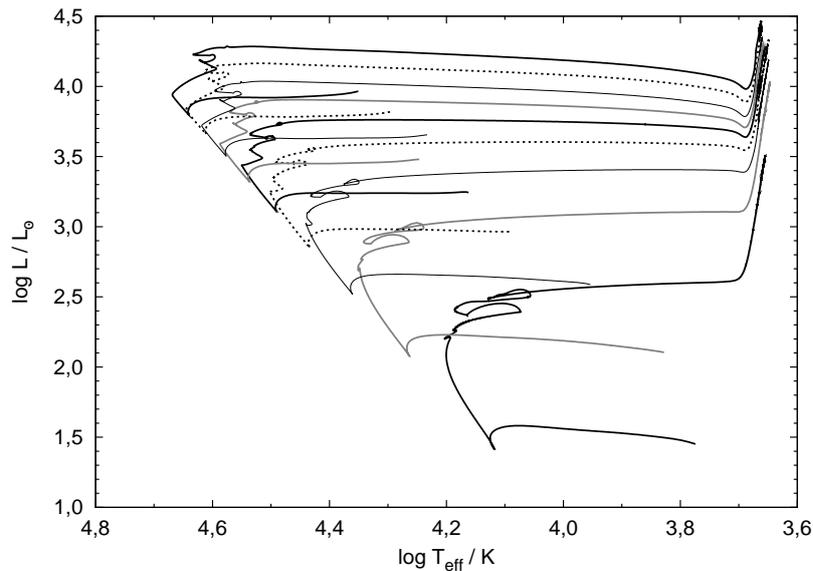


Abbildung 6.26: HR-Diagramm der Modelle der Population III mit 2 bis $10 M_{\odot}$, von unten nach oben in Schritten von $1 M_{\odot}$.

gen 6.23 und 6.24 zeigen. Der durch das Wasserstoffbrennen prozessierte Bereich erstreckt sich dementsprechend weit nach außen. Abbildung 6.25b zeigt die chemische Zusammensetzung des Sterns als Funktion der Massenkoordinate kurz vor dem zweiten Dredge-up. Das an die Oberfläche gebrachte Material ist vor allem deutlich mit ${}^4\text{He}$ angereichert. Daher steigt der Heliumgehalt an der Oberfläche vom ursprünglichen Wert 23,0 % im zweiten Dredge-up auf 34,7 %, umgekehrt sinkt der Wasserstoffgehalt von 77,0 % auf 65,3 % (s. Abb. 6.25c). Die Elemente des CNO-Zyklus werden leicht angereichert¹: Nach dem zweiten Dredge-up betragen die in Abb. 6.25d dargestellten Massenbruchteile von ${}^{12}\text{C}$ und ${}^{14}\text{N}$ an der Oberfläche $5,6 \cdot 10^{-14}$ bzw. $5,6 \cdot 10^{-12}$. Ihr Anzahlverhältnis von 1:86 entspricht dem Gleichgewichtsverhältnis des CNO-Zyklus bei etwa $3 \cdot 10^7$ K, das gleiche gilt für das Anzahlverhältnis von ${}^{13}\text{C}$ zu ${}^{12}\text{C}$ mit einem Wert von 1:4. Der Sauerstoffgehalt bleibt unverändert. Eventuell vorhandenes primordiales Lithium wird bei Einsetzen des Dredge-up praktisch vollkommen zerstört.

6.2.3 Vergleich der Modelle der Population III mit verschiedenen Massen

Rechnungen von der Vorhauptreihe bis zum Ende der EAGB-Phase wurden für Sterne zwischen 2 und $10 M_{\odot}$ im Abstand von $1 M_{\odot}$ ausgeführt.² Abbildung 6.26 zeigt die Spuren dieser Modelle im HR-Diagramm. Die Hauptreihe und der Riesenast (die Hayashi-Linie) sind deutlich zu erkennen. Die Modelle zeigen kaum qualitative Unterschiede. Insbesondere bleiben alle Modelle vom ersten Riesenast weit entfernt. Mit kleiner werdender Masse werden jedoch die Schleifen, die in Abb. 6.16a zwischen den Punkten C und E liegen, etwas länger. Der Knick, der den Übergang vom pp- zum CNO-Brennen markiert (Punkt B in Abb. 6.16a), tritt mit steigender Masse früher ein. So sind etwa beim $8 M_{\odot}$ -Modell der »linksläufige« und der »rechtsläufige« Teil der Hauptreihenentwicklung bereits gleich lang. Im Gegensatz dazu gibt es bei den massearmen Modellen mit 2 bzw. $3 M_{\odot}$ diesen Knick überhaupt nicht mehr. (Vgl. dazu die Diskussion der Abb. 6.28 und 6.29 weiter unten.)

¹Der vor dem Dredge-up in Abb. 6.25d für alle Metalle gleiche Wert ist der im Anfangsmodell gesetzte.

²Hier wurde bei allen Modellen, auch bei den Modellen mit 3 und $5 M_{\odot}$, kein Massenverlust berücksichtigt.

6.2. MODELLE DER POPULATION III

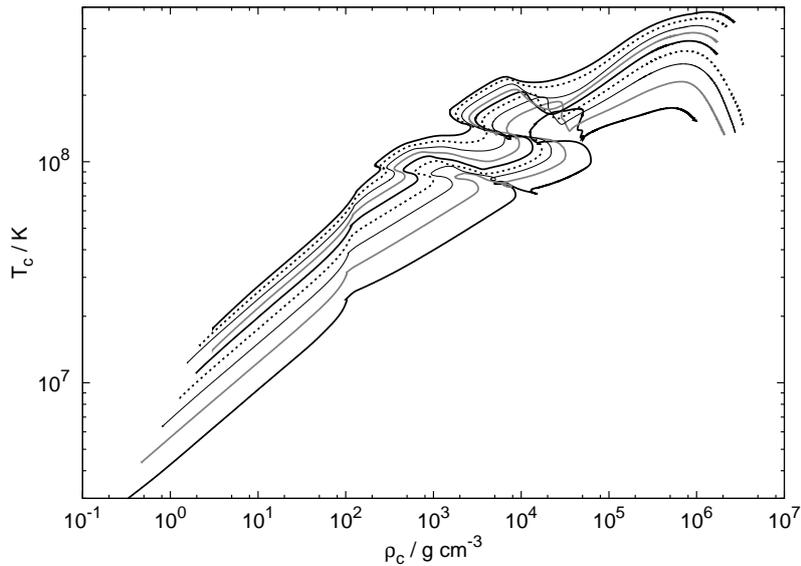


Abbildung 6.27: ρ_c - T_c -Diagramm der Modelle der Population III mit 2 bis $10 M_\odot$, von unten nach oben in Schritten von $1 M_\odot$.

Das ρ_c - T_c -Diagramm mit den Modellen der Population III ist in Abbildung 6.27 gezeigt. Mit steigender Sternmasse steigt auch die Zentraltemperatur der Modelle an. Außerdem werden die Kurven weicher und ihre Struktur tritt weniger stark hervor als bei den massearmen Sternen. Die Sterne mit 9 und $10 M_\odot$ erreichen das Kohlenstoffbrennen, das Modell mit $8 M_\odot$ vermutlich ebenfalls. Die Sterne mit $7 M_\odot$ und weniger erreichen das Kohlenstoffbrennen dagegen nicht.

Die Verteilung der nuklearen Energieproduktion auf die verschiedenen Prozesse als Funktion der Zeit zeigen die Abbildungen 6.28 und 6.29 für alle Modelle separat. Daraus lassen sich die Dauer der Hauptreihenphase, t_{HR} , und der Beginn des Heliumbrennens, t_{He} , ablesen. Sie sind in der folgenden Tabelle angegeben.

M/M_\odot	2	3	4	5	6	7	8	9	10
t_{CNO}/Ma	-	(248)	(118)	64,3	41,2	28,4	20,7	15,7	12,2
t_{HR}/Ma	765	233	113	67,2	45,6	33,8	26,7	22,1	18,8
t_{He}/Ma	785	249	121	71,4	47,3	34,5	27,0	22,2	18,9
t_{HeS}/Ma	816	261	128	77,2	52,2	38,2	29,8	24,4	20,7
$t_{\text{EAGB}}/\text{Ma}$	828	266	131	79,1	53,5	39,2	30,4	24,8	20,9

Tabelle 6.1: Einige Zeitskalen der Population-III-Sterne im Vergleich.

Je massereicher ein Stern ist, desto höher ist seine Leuchtkraft (Abb. 6.26), und desto mehr ist er auf den CNO-Zyklus als Energiequelle angewiesen. Da aber auch die Zentraltemperatur mit der Masse zunimmt (Abb. 6.27), ist es leichter, die für die Erzeugung von Kohlenstoff nötige Temperatur zu erreichen. Dementsprechend wird die Zeit, die bis zum Einsetzen des CNO-Zyklus vergeht, – auch relativ zur gesamten Dauer der Hauptreihenentwicklung – mit steigender Masse kürzer. Als Maß für diese Zeit ist der Zeitpunkt t_{CNO} , zu dem erstmals auf der Hauptreihe $L_{\text{CNO}} > L_{\text{pp}}$ gilt, in der obigen Tabelle angegeben¹. Während beim $10 M_\odot$ -Stern nur etwa zwei Drittel der Hauptreihen-Lebensdauer von den pp-Ketten dominiert werden,

¹Der Wert von t_{CNO} ist eingeklammert, falls $L_{\text{CNO}} > L_{\text{pp}}$ erst nach dem Ende der Hauptreihe eintritt.

KAPITEL 6. EIGENE ENTWICKLUNGSRECHNUNGEN FÜR METALLARME STERNE

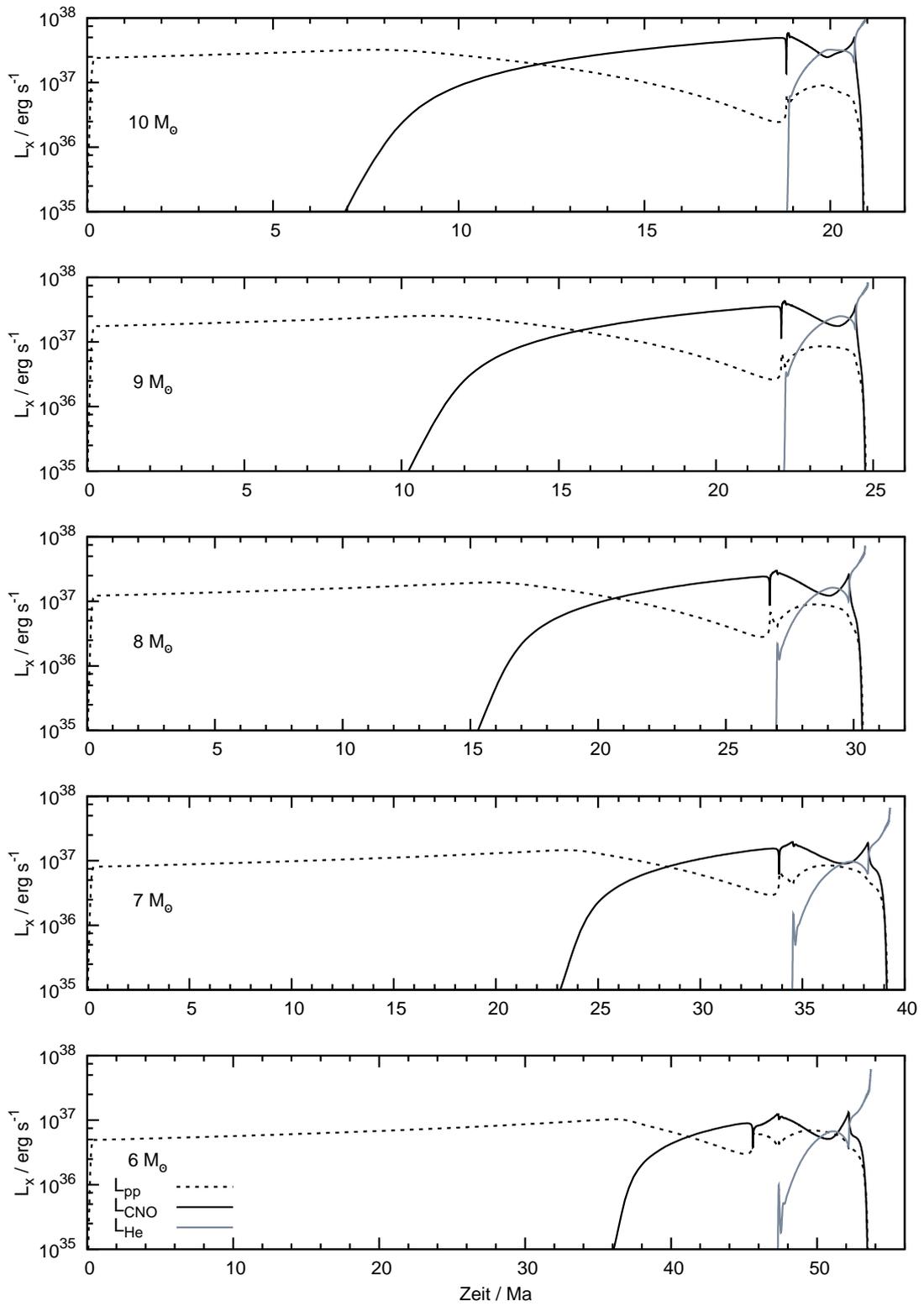


Abbildung 6.28: Verlauf der nuklearen Energieerzeugung bei den Modellen der Population III von 6 bis 10 M_{\odot} .

6.2. MODELLE DER POPULATION III

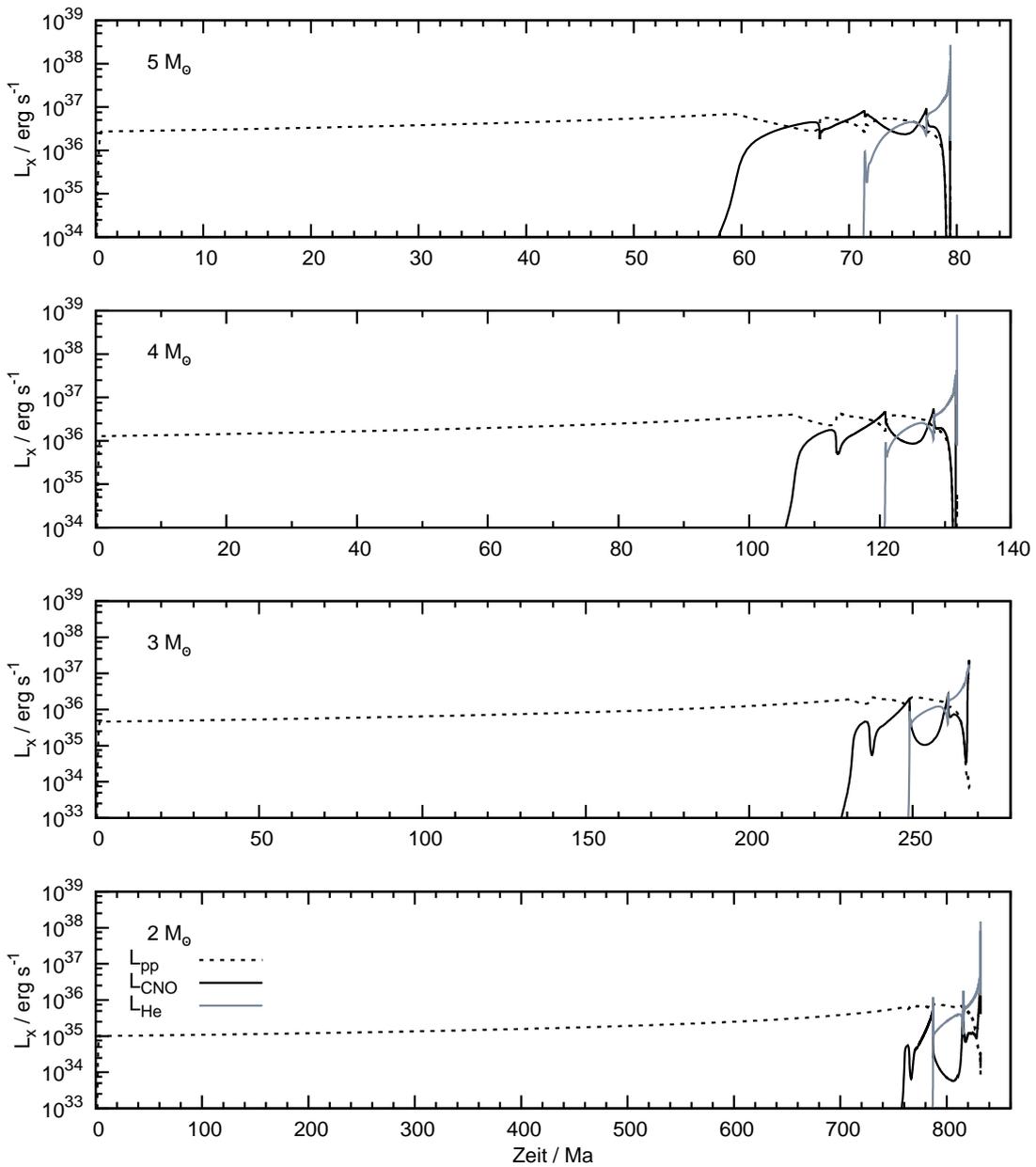


Abbildung 6.29: Verlauf der nuklearen Energieerzeugung bei den Modellen der Population III von 2 bis $5 M_{\odot}$.

ist dies beim $5 M_{\odot}$ -Modell bereits für 90% der Fall. Bei den Sternen mit $4 M_{\odot}$ und weniger bleibt auf der Hauptreihe immer $L_{CNO} < L_{pp}$; beim $2 M_{\odot}$ -Modell gilt dies sogar noch für das Wasserstoffschalenbrennen.

Tabelle 6.1 gibt außerdem den Zeitpunkt des Übergangs vom zentralen Heliumbrennen zum Heliumschalenbrennen, t_{HeS} , an. Als letztes ist das Erreichen der Hayashi-Linie zur Zeit t_{EAGB} verzeichnet.

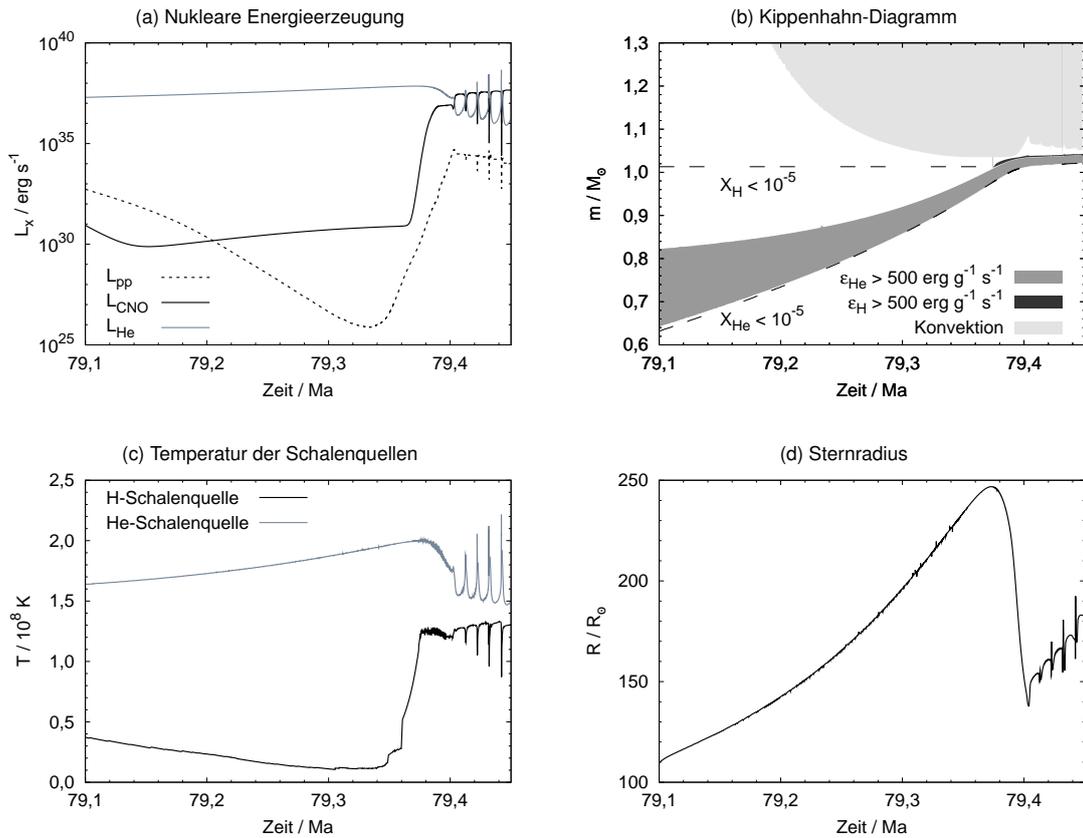


Abbildung 6.30: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Übergang vom EAGB zum TPAGB.

6.2.4 Die Entwicklung eines $5 M_{\odot}$ -Sterns der Population III auf dem TPAGB

Nach dem Exkurs zu Modellen anderer Masse kommen wir zurück zu unserer Rechnung eines Sternmodells mit $5 M_{\odot}$ und zeigen die Ergebnisse zum TPAGB.

Das Zünden der Wasserstoffschalenquelle auf dem AGB

Der Massenverlust wurde mit der Formel von Schröder und Cuntz (2005, vgl. auch Abschn. 3.5) bestimmt und ab Punkt F im HRD Abb. 6.22d berücksichtigt. Bis zum ersten Puls verliert der Stern nur $0,05 M_{\odot}$. Dementsprechend zeigen sich in der Entwicklung bis hier keine erkennbaren Unterschiede zwischen einer Rechnung mit und einer Rechnung ohne Massenverlust. Der Massenverlust wird erst später relevant.

Gleichzeitig mit seiner maximalen Ausdehnung erreicht der Sterns bei 79,373 Ma auch das Maximum seiner Leuchtkraft und das Minimum seiner Effektivtemperatur (s. Abb. 6.22a–c). Zum selben Zeitpunkt erreicht auch das Heliumbrennen L_{He} seinen größten Wert. Das Wasserstoffbrennen nimmt zwar bereits seit kurzer Zeit wieder zu, ist aber noch vernachlässigbar klein ($L_{\text{He}} \sim 7 \cdot 10^4 L_{\text{H}}$, s. Abb. 6.30a).

Abbildung 6.30b zeigt in einem Schnitt durch den Stern die Lage der Schalenquellen und der Konvektionszonen. Parallel zur Ausdehnung der äußeren Konvektionszone ins Sterninnere arbeitet sich die Heliumschalenquelle mit der Zeit weiter nach außen und wird dabei (in Masse) immer dünner. Die Lage der inaktiven Wasserstoffschalenquelle bleibt währenddessen unverändert. Dadurch erhöht sich die Temperatur am Übergang zwischen wasserstoffarmer

6.2. MODELLE DER POPULATION III

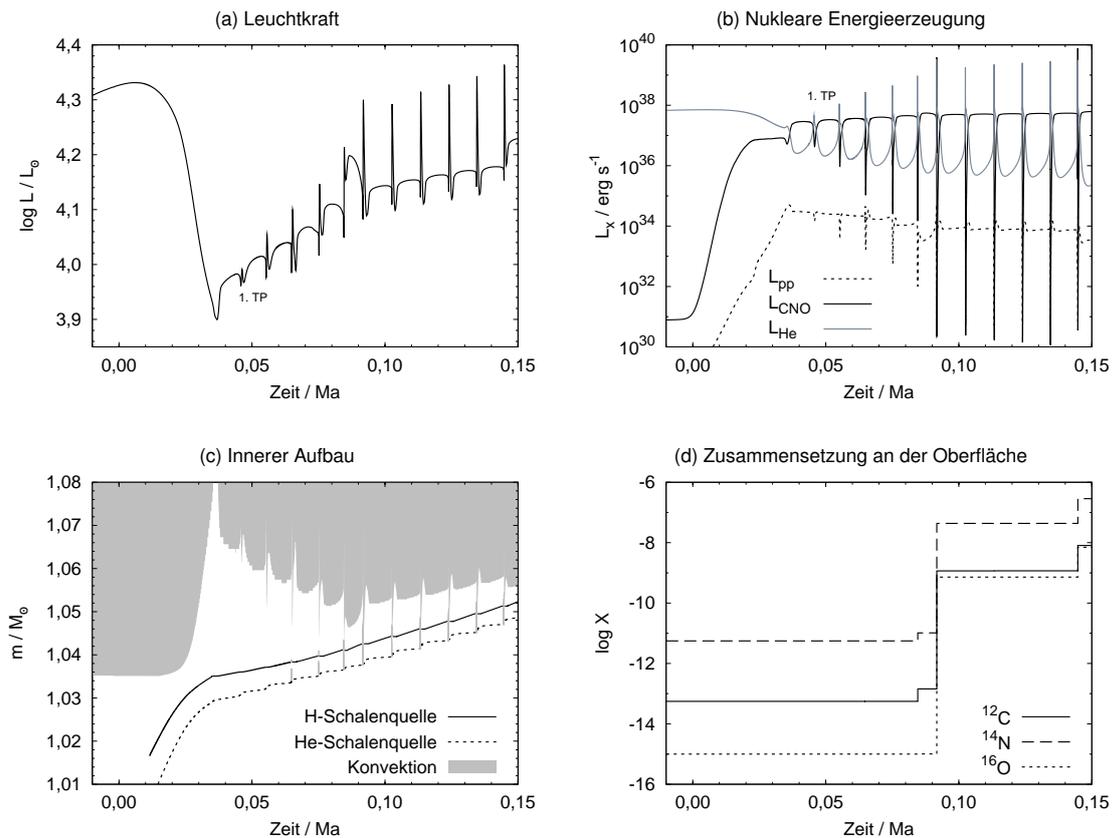


Abbildung 6.31: Stern der Population III mit $5M_{\odot}$: Die ersten thermischen Pulse. Zu (c): Die Wasserstoffschalenquelle ist nur eingezeichnet, wo $L_{\text{H}} > 10^{35} \text{ erg s}^{-1}$.

und wasserstoffreicher Materie, wie in Abb. 6.30c gezeigt, bis dort das Wasserstoffbrennen wieder zündet. Im vorliegenden Modell beginnt dieser steile Anstieg des Wasserstoffbrennens laut Abb. 6.30a bei 79,367 Ma. Nach wenig mehr als 10^4 a nimmt das Heliumbrennen, wie auch die nukleare Energieproduktion insgesamt, ab, und die konvektive Hülle zieht sich ein wenig nach außen zurück. Die Wasserstoffschalenquelle wandert wieder nach außen. Der Radius sinkt bis 79,404 Ma auf $138 R_{\odot}$ ab (Abb. 6.30d). Mit dem erneuten Zünden des Wasserstoffbrennens ist die EAGB-Phase beendet. Im Folgenden setzen wir den Zeitnullpunkt, insbesondere der Abbildungen, bei 79,367 Ma.

Der Beginn der TPAGB-Phase

Die TPAGB-Phase beginnt mit einer Serie von fünf relativ schwachen Pulsen. Im Verlauf dieser ersten Pulse wachsen, wie Abb. 6.31a zeigt, sowohl die Leuchtkraft in der Zwischenpulsphase als auch die Leuchtkraftspitzen der Pulse zügig an.¹ Das gleiche gilt für die Maxima des Heliumbrennens in den Pulsen, Abb. 6.31b. Bei den folgenden Pulsen verlangsamt sich diese Zunahme deutlich.

Die ersten beiden Pulse sind so schwach, dass sie keine pulsinduzierte Konvektionszone aufweisen. Ab dem dritten Puls bildet sich eine pulsinduzierte Konvektionszone; sie ist beim dritten und vierten Puls aber noch deutlich kleiner als die Heliumzwischenchale. Ab dem fünften Puls umfasst sie die gesamte Heliumzwischenchale.

¹Die Zwischenpulsphase nach dem fünften Puls fällt sichtlich als abweichend ins Auge; siehe dazu S. 80.

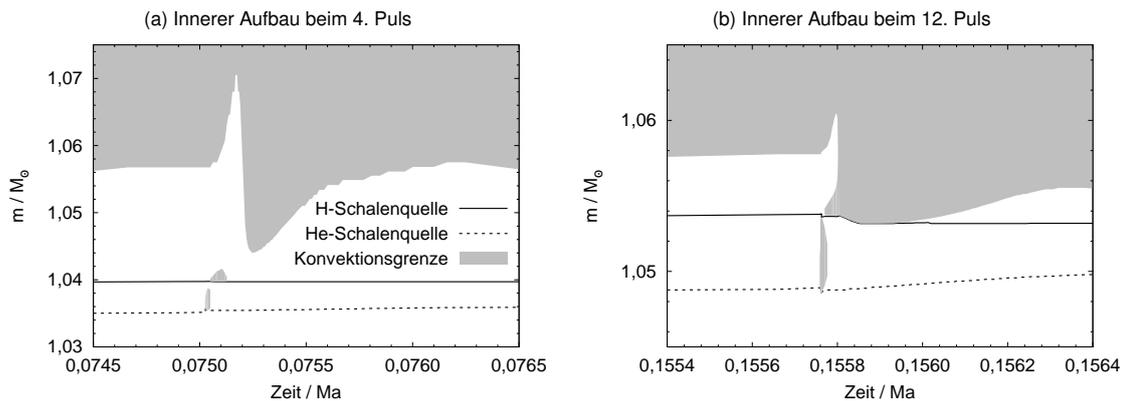


Abbildung 6.32: Stern der Population III mit $5M_{\odot}$: Konvektionszonen während des vierten und zwölften Pulses.

Die konvektive Hülle dehnt sich bereits in Folge der ersten vier schwachen Pulse nach innen aus, erreicht aber nicht die Wasserstoffschalenquelle (Abb. 6.31c); der dritte Dredge-up findet jetzt, wie auch die Oberflächenzusammensetzung in Abb. 6.31d zeigt, also noch nicht statt. Nach dem sechsten Puls setzt der dritte Dredge-up ein, und der ^{12}C -Gehalt der Hülle wird von $\sim 10^{-13}$ auf $\sim 10^{-9}$ angehoben.

Die Konvektionszonen und der »Carbon Ingestion Flash«

Im Zusammenhang mit den thermischen Pulsen tritt bei dem hier gezeigten Modell eines Population-III-Sterns neben der üblichen pulsinduzierten Konvektionszone zwischen den beiden Schalenquellen (vgl. Abb. 6.7) auch oberhalb der Wasserstoffschalenquelle eine Konvektionszone auf. Die Abbildungen 6.32a,b illustrieren die Lage und Abfolge der Konvektionszonen. Das linke Bild zeigt den vierten Puls; hier findet noch kein Dredge-up statt. Mit dem Abklingen der pulsinduzierten Konvektionszone entsteht eine Konvektionszone oberhalb der Wasserstoffschalenquelle. In der rechten Abbildung (zwölfter Puls) geschieht im wesentlichen das gleiche; die zusätzliche Konvektionszone verbindet sich aber während des hier stattfindenden Dredge-up mit der konvektiven Hülle. Die Entstehung dieser zusätzlichen Wasserstoffkonvektionszone ist eine Eigenheit metallfreier und extrem metallarmer Sterne; sie wurde bereits von Chieffi et al. (2001) und Siess et al. (2002) gefunden.

Die Wasserstoffkonvektionszone hat in unserer Rechnung besonders im sechsten Puls erhebliche Folgen. Die pulsinduzierte Konvektionszone ist bei diesem Puls voll ausgebildet, sie umfasst bei ihrer maximalen Ausdehnung die gesamte Zwischenschale. Sie besteht dann aus etwa 85 % Helium, 15 % Kohlenstoff und einer Spur Sauerstoff. Die danach entstehende Wasserstoffkonvektionszone dehnt sich so weit nach innen aus, dass sie bis in die Heliumzwischenschale hineinreicht (Abb. 6.33a) und so eine kleine Menge Kohlenstoff in die Wasserstoffschalenquelle bringt. Die Wasserstoffschalenquelle ist zu diesem Zeitpunkt, wie Abb. 6.34a zeigt, noch extrem metallarm; ihr Kohlenstoffgehalt liegt bei 10^{-8} . Der eingemischte Kohlenstoff aus der Zwischenschale lässt den Kohlenstoffanteil in der Wasserstoffschalenquelle auf mehr als 10^{-4} ansteigen. Dadurch wird das Wasserstoffbrennen stark angefacht, und es tritt, wie in Abb. 6.33b bzw. Abb. 6.34c,d zu sehen ist, gleichzeitig mit dem thermischen Puls auch ein Maximum des Wasserstoffbrennens auf! Chieffi et al. (2001) bezeichnen dieses Phänomen als »Carbon Ingestion Flash«, Siess et al. (2002) als »Carbon Injection Flash«.¹

¹Auch bei dem als »Helium Flash Driven Deep Mixing« oder »Dual Shell Flash« bezeichneten Ereignis, das von

6.2. MODELLE DER POPULATION III

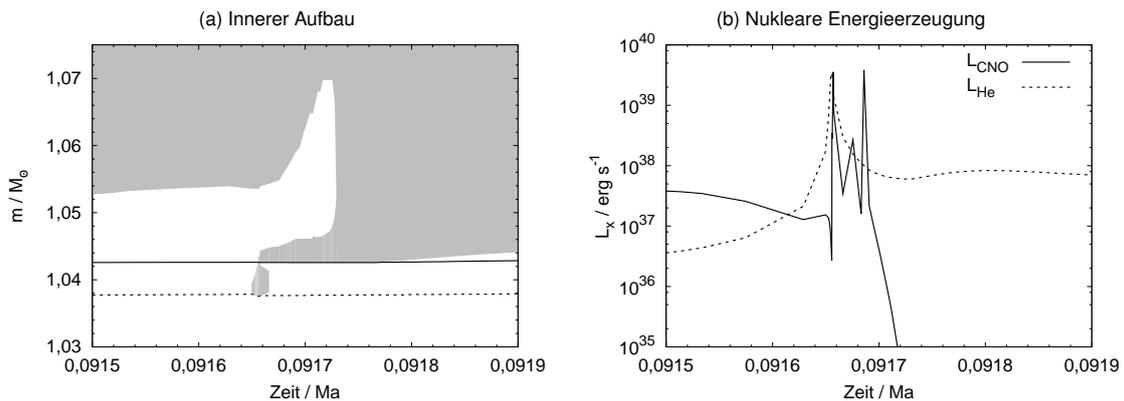


Abbildung 6.33: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Carbon Ingestion Flash beim sechsten Puls.

Im dem sechsten Puls folgenden Dredge-up wird das Material der Wasserstoffschalenquelle mit der Hülle vermischt, und der Kohlenstoffgehalt in der Schalenquelle sinkt wieder unter 10^{-8} ab. Der Dredge-up reichert bei diesem Puls die Hülle noch nicht stark genug an, um in der Folge eine normale AGB-Entwicklung zu ermöglichen. Wir beobachten in derselben Rechnung einen weiteren Carbon Ingestion Flash beim elften Puls (Abb. 6.34a,c). Danach ist die Kohlenstoffkonzentration so hoch, dass die Pulse normal verlaufen.

Auch beim zwölften und den weiteren Pulsen steigt der Kohlenstoffanteil in der Wasserstoffschalenquelle stark an (Abb. 6.34a), aber in diesem Fall wird der Kohlenstoff erst eingemischt, nachdem die Temperatur der Wasserstoffschalenquelle auf etwa $3 \cdot 10^7$ K gesunken ist, und hat damit keine vergleichbare Wirkung.

Siess et al. (2002) finden in einigen ihrer Rechnungen ebenfalls mehrere Carbon Ingestion Flashes. Diese treten dort allerdings immer bei unmittelbar aufeinander folgenden Pulsen auf, während in unserer Rechnung vier Pulse ohne Carbon Ingestion Flash dazwischen liegen. Sowohl Chieffi et al. (2001) als auch Siess et al. (2002) berichten, dass das Auftreten des Carbon Ingestion Flash bei Verwendung des klassischen Schwarzschildkriteriums von der numerischen Behandlung, Zellen- und Zeitschrittgröße abhängt. Die Hinzunahme einer (wenn auch nur geringen) zusätzlichen Mischung über die Grenzen der Konvektionszonen hinaus vermindere bzw. vermeide diese numerischen Effekte.

In Abb. 6.33b sind mehrere Maxima von L_{CNO} zu erkennen. Das ist sicherlich numerisch bedingt, denn bei der hier verwendeten Beschreibung der konvektiven Mischung (Schwarzschildkriterium) und numerischer Integration der Gleichungen wird der Kohlenstoff nicht kontinuierlich, sondern sozusagen »portionsweise« in die Wasserstoffschalenquelle gespült. Bei dieser Vorgehensweise sind außerdem Auswirkungen der verwendeten Auflösung auf das Ergebnis der Rechnung zu erwarten. Auch hier dürfte die Berücksichtigung des Überschießens der Konvektion glättend wirken.

Des weiteren zeigt Abb. 6.34a, dass im Lauf der Entwicklung die Kohlenstoffkonzentration, die sich während der Zwischenpulsphase in der Wasserstoffschalenquelle befindet, durch den Dredge-up ansteigt. Parallel dazu sinkt die Temperatur, die während des ruhigen Wasserstoffbrennens der Zwischenpulsphase in der Wasserstoffschalenquelle herrscht (Abb. 6.34b), ab. Am Anfang der Sequenz wird also der fehlende Katalysator Kohlenstoff – genau wie bei der frühen Hauptreihenentwicklung – durch die höhere Temperatur kompensiert. Im Verlauf der ersten

Fujimoto et al. (2000), Suda et al. (2004), Campbell und Lattanzio (2008) u. a. beschrieben wird, erreichen beide Schalenquelle gleichzeitig ein Maximum der Energieerzeugung, der Ablauf ist im Detail – insbesondere was die Konvektionszonen betrifft – aber anders. Ob beide verwandt sind, wird zur Zeit diskutiert (Lau et al., 2009).

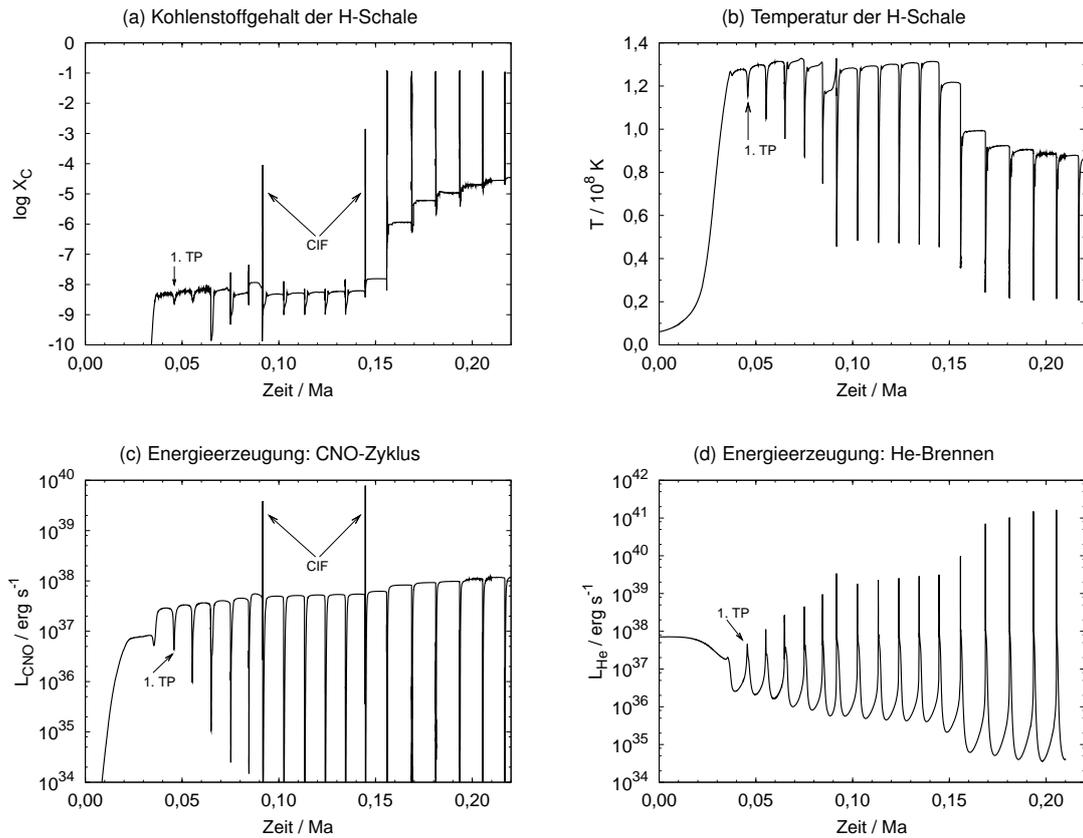


Abbildung 6.34: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Zur Entwicklung der Wasserstoffschalenquelle. Die Abbildungen (a) und (b) zeigen Kohlenstoffgehalt bzw. Temperatur an dem Punkt, an dem (vom Zentrum her kommend) der Wasserstoffanteil 30 % erreicht.

Pulse passt sich die thermische Struktur an eine starke Änderung der Zusammensetzung so an, dass sich die insgesamt erzeugte Energie nur moderat ändert. Auf die Eigenschaft des Sterns, dass weniger die Leuchtkraft aus den Gegebenheiten der Energiequellen folgt, als vielmehr die mechanische Struktur die benötigte Leuchtkraft vorgibt, auf deren Erzeugung sich das Gesamtsystem dann einstellt, werden wir hier erneut hingewiesen.

Bei den ersten Pulsen ist laut Abb. 6.34b die Temperatur der Wasserstoffschalenquelle so hoch, dass dort der 3α -Prozess aktiv ist und somit Kohlenstoff in der Wasserstoffschalenquelle selbst erzeugt wird. Da die Energieerzeugung sehr empfindlich von der Kohlenstoffkonzentration abhängt, wird hier die Effektivität des Wasserstoffbrennens durch den 3α -Prozess kontrolliert.

In Abbildung 6.34 findet sich auch die Erklärung für die auffällige Zwischenpulsphase nach dem fünften Puls (vgl. Abb. 6.31). In diesem Puls wurde zwar Kohlenstoff in die Wasserstoffschalenquelle gemischt, jedoch nicht so viel, als dass dies als Carbon Ingestion Flash in der Energieerzeugung deutlich bemerkbar geworden wäre. Der Kohlenstoffgehalt in der Wasserstoffschalenquelle ist nach diesem Puls etwa doppelt so hoch wie vorher, und wir finden deshalb, trotz einer Verringerung der Temperatur um $\sim 8\%$ immer noch eine Verstärkung des Wasserstoffbrennens um $\sim 18\%$. Diese bewirkt dann die in Abb. 6.31a zu sehende Vergrößerung der Leuchtkraft. Da nur ein sehr kleiner Bereich mit ^{12}C angereichert wurde, und die Wasserstoffschalenquelle diesen am Ende der Zwischenpulsphase zu verlassen droht, steigt die Temperatur der Wasserstoffschalenquelle dann an, um die Verringerung des Metallgehaltes wieder auszugleichen. Bei den folgenden Pulsen wiederholt sich dieses Ereignis nicht, da bei diesen der dem Puls folgende Dredge-up die Wasserstoffschalenquelle mit der Hülle homogenisiert.

6.2. MODELLE DER POPULATION III

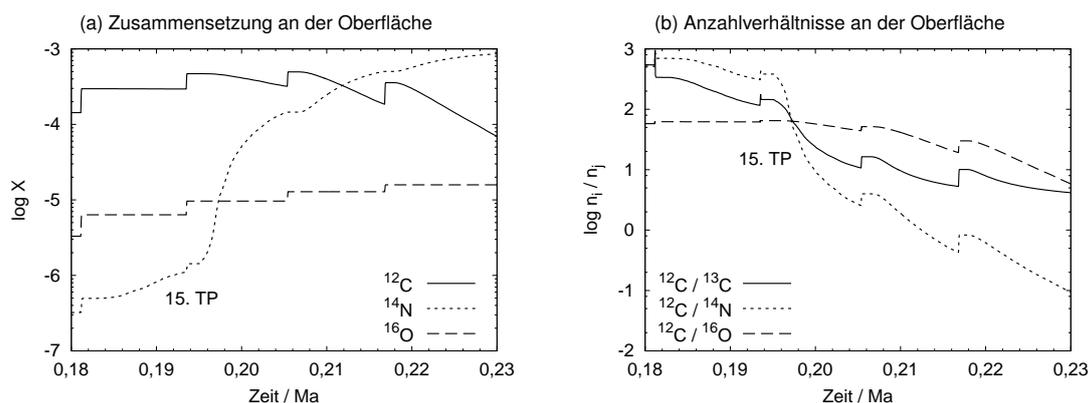


Abbildung 6.35: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: Änderung der Zusammensetzung an der Oberfläche durch Hot Bottom Burning.

Auch unser $3 M_{\odot}$ -Modell aus Abschn. 6.1 mit einer immer noch geringen Metallizität von $Z = 10^{-5}$ weist die zusätzliche Konvektionszone auf, wenn auch nur bei den ersten vier Pulsen. Zudem findet dort beim dritten und vierten Puls je ein Carbon Ingestion Flash statt. Diese sind allerdings recht schwach: Das Wasserstoffbrennen steigt zwar auf etwa das zehnfache des Wertes in der Zwischenpulsphase an, bleibt aber um mehr als einen Faktor 100 unter dem Ausbruch des Heliumbrennens.

Das »Hot Bottom Burning«

Bei massereichen AGB-Sternen kommt es vor, dass die Temperatur an der Untergrenze der konvektiven Hülle hoch genug ist, um die Reaktionen des Wasserstoffbrennens zuzulassen. Oder anders ausgedrückt, die äußere Konvektionszone und die Wasserstoffschalenquelle überlappen einander. Diese Situation wird als »Hot Bottom Burning« bezeichnet.

Hot Bottom Burning hat großen Einfluss auf die Zusammensetzung der Hülle. Das Hüllmaterial zirkuliert permanent durch die Wasserstoffschalenquelle und wird dort prozessiert. Insbesondere wird unter diesen Umständen durch die Reaktionen des CNO-Zyklus der Kohlenstoff der stellaren Hülle in Stickstoff umgewandelt. Unter günstigen Umständen kann durch den Cameron-Fowler-Mechanismus (Cameron und Fowler, 1971) ^7Li erzeugt werden. In unserer Rechnung ist letzteres nicht der Fall.

Im vorliegenden Modell setzt nach dem 14. Puls das Hot Bottom Burning ein. Abbildung 6.35a zeigt die Zusammensetzung an der Oberfläche. Der Kohlenstoffgehalt steigt durch den Dredge-up nach jedem Puls sprunghaft an, sinkt aber danach durch Hot Bottom Burning zwar langsamer, aber nicht weniger deutlich wieder ab. Da die Sauerstoffkonzentration vom Hot Bottom Burning nicht beeinflusst wird, fällt in den Zwischenpulsphasen das Anzahlverhältnis von Kohlenstoff zu Sauerstoff ebenfalls wieder ab. Ein Stern kann durch diesen Prozess (wieder) vom C-Stern zum O-Stern werden. Hot Bottom Burning erhöht außerdem das Isotopenverhältnis von ^{13}C zu ^{12}C .

Entarteter Puls und Abbruch der Rechnung

Nach dem 17. Puls setzt die Serie der regelmäßigen thermischen Pulse aus (Abb. 6.36a,b). Die Temperatur in der Heliumschalenquelle (Abb. 6.36c) ist zu niedrig, als dass – trotz geringer geometrischer Dicke – ein thermischer Puls stattfinden kann. Jetzt hat das Hot Bottom Burning genügend Zeit, in der gesamten Hülle die Gleichgewichtszusammensetzung der C- und

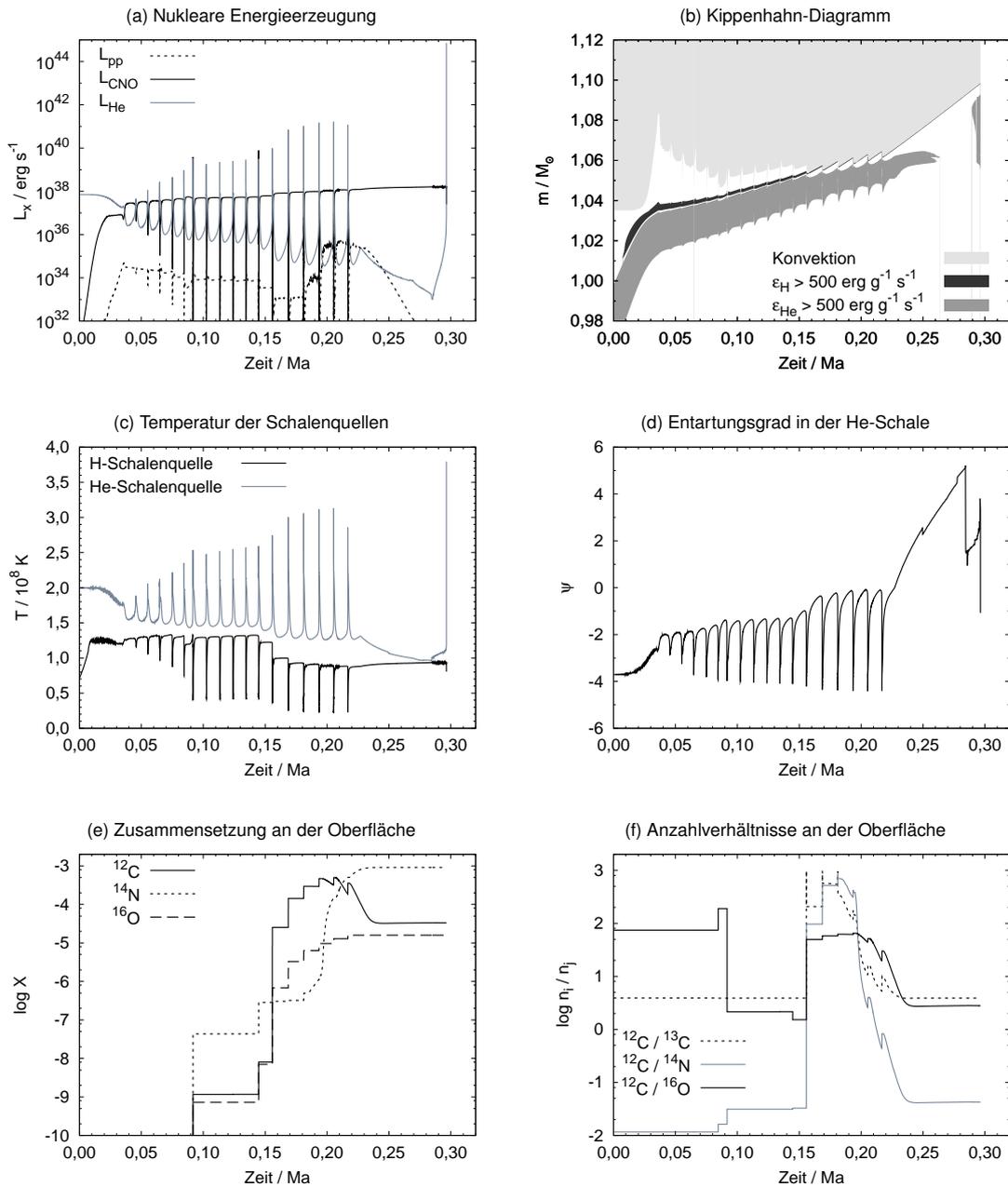


Abbildung 6.36: Stern der Population III mit $5 M_{\odot}$: TPAGB-Entwicklung mit entartetem Puls am Ende der Rechnung.

N-Isotope zu erreichen (Abb. 6.36,f). Die Heliumschalenquelle ist inzwischen mäßig entartet (ψ bis zu etwa 5, Abb. 6.36d), so dass der nach einer um ein Vielfaches verlängerten Zwischenpulsphase dann doch noch folgende 18. Puls außerordentlich heftig zu werden droht. An der Untergrenze der pulsinduzierten Konvektionszone scheint bei diesem 18. thermischen Puls eine Temperatur von mehr als $4 \cdot 10^8$ K, also ausreichend für das Kohlenstoffbrennen, erreicht zu werden. Da an dieser Stelle aber starke Probleme bezüglich der räumlichen Auflösung auftreten, ist diese Aussage mit großer Vorsicht zu behandeln.

Auch Frost et al. (1998) sowie Siess et al. (2002) berichten über dergestalt verlängerte Zwischenpulsphasen in ihren Modellen metallarmer AGB-Sterne. In beiden genannten Arbeiten

können die Rechnungen über diese als »Degenerate Pulses« bezeichneten Ereignisse hinaus fortgesetzt werden. Bei ihnen kommt es auch nicht zur Zündung des Kohlenstoffs. Chieffi et al. (2001) berichten nicht von solchen Ereignissen in ihren Rechnungen.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde diese Rechnung aus mehreren Gründen nicht fortgesetzt. Zum einen ist mit zusätzlichen technischen Schwierigkeiten zu rechnen: Es wären zur Auflösung der Temperaturspitze an der Untergrenze der Konvektionszone nochmals erheblich mehr Punkte notwendig; der Zeitschritt wird, ebenfalls wegen der Temperaturspitze, sehr klein; die Konvergenzeigenschaften des Codes werden bei einem heftigen Puls in teilweise entarteter Materie sicher nicht besser; die Reaktionen des C- und O-Brennens müssten zusätzlich berücksichtigt werden. Da bei den thermischen Pulsen die lange Rechenzeit ohnehin bereits ein großes Problem ist, scheint mir die weitere Berechnung dieses Modells mit der gegenwärtigen Version des Codes nicht möglich. Zum anderen können auch inhaltliche Bedenken angemeldet werden: Das Modell hat eine Metallizität erreicht, bei der die verwendeten Opazitäten und Massenverlustraten nicht mehr angemessen sind, und es sollte zunächst überprüft werden, ob eine neue Rechnung mit in dieser Hinsicht verbesserten Daten das gleiche Verhalten zeigt.

Abschließend gibt die folgende Abbildung 6.37 eine Übersicht über die gesamte Entwicklung des $5 M_{\odot}$ -Modells der Population III, soweit sie gerechnet werden konnte.

6.2.5 Zum $3 M_{\odot}$ -Modell der Population III

Auch das Modell der Population III mit $3 M_{\odot}$ wurde bis auf den TPAGB verfolgt. Hier trat kein entarteter Puls auf, und die Rechnung konnte bis zum Weißen Zwerg fortgesetzt werden. Wir werden die Entwicklung dieses Sternmodells nicht im einzelnen besprechen, sondern nennen in diesem Abschnitt lediglich einige Details.

Abbildung 6.38 gibt zunächst einen Überblick über die gesamte Entwicklung des Sterns; gezeigt sind integrierte Energieerzeugung, Temperatur und Dichte im Zentrum, Effektivtemperatur und Radius. Das abschließende Kippenhahn-Diagramm gibt Auskunft über die Konvektionszonen und Brenngebiete¹. Das Hertzsprung-Russell-Diagramm und das ρ_c - T_c -Diagramm folgen in Abb. 6.40.

An der Darstellung der Energieproduktionsrate als Funktion der Zeit in Abb. 6.38 sind die thermischen Pulse deutlich zu erkennen. Die von ihnen durch den dritten Dredge-up verursachte Änderung der Zusammensetzung der stellaren Hülle ist in Abbildung 6.39 gezeigt. Hot Bottom Burning tritt bei diesem Modell nicht auf.

Bei den ersten beiden Pulsen findet ein starker, bei den folgenden drei ein schwächerer Carbon Ingestion Flash statt. Danach ist der Kohlenstoffgehalt der Hülle (Abb. 6.39b) auf einige 10^{-5} gestiegen, und die weitere Entwicklung verläuft normal.

Für die in Abbildung 6.41a gezeigte Kernmassen-Perioden-Beziehung ergibt ein Fit durch alle Pulse

$$\log \tau_{\text{ip}}[\text{a}] = -3,27 M_c [M_{\odot}] + 7,39. \quad (6.6)$$

Bei der Kernmassen-Leuchtkraft-Beziehung finden wir, ähnlich wie in Abschn. 6.1.4, wieder zwei Bereiche, in denen verschiedene lineare Relationen gelten; bei den Pulsen 6 bis 28 erhalten wir

$$L_{\text{ip}}[L_{\odot}] = 8,74 \cdot 10^4 \cdot (M_c [M_{\odot}] - 0,680), \quad (6.7)$$

ab dem 28. Puls ist die Leuchtkraft nahezu unabhängig von der Kernmasse,

$$L_{\text{ip}}[L_{\odot}] = 4,37 \cdot 10^3 \cdot (M_c [M_{\odot}] + 4,54). \quad (6.8)$$

¹Die Schalenquellen enthalten während der TPAGB-Phase so wenig Masse, dass sie im Kippenhahn-Diagramm leider nur schlecht oder gar nicht zu sehen sind.

KAPITEL 6. EIGENE ENTWICKLUNGSRECHNUNGEN FÜR METALLARME STERNE

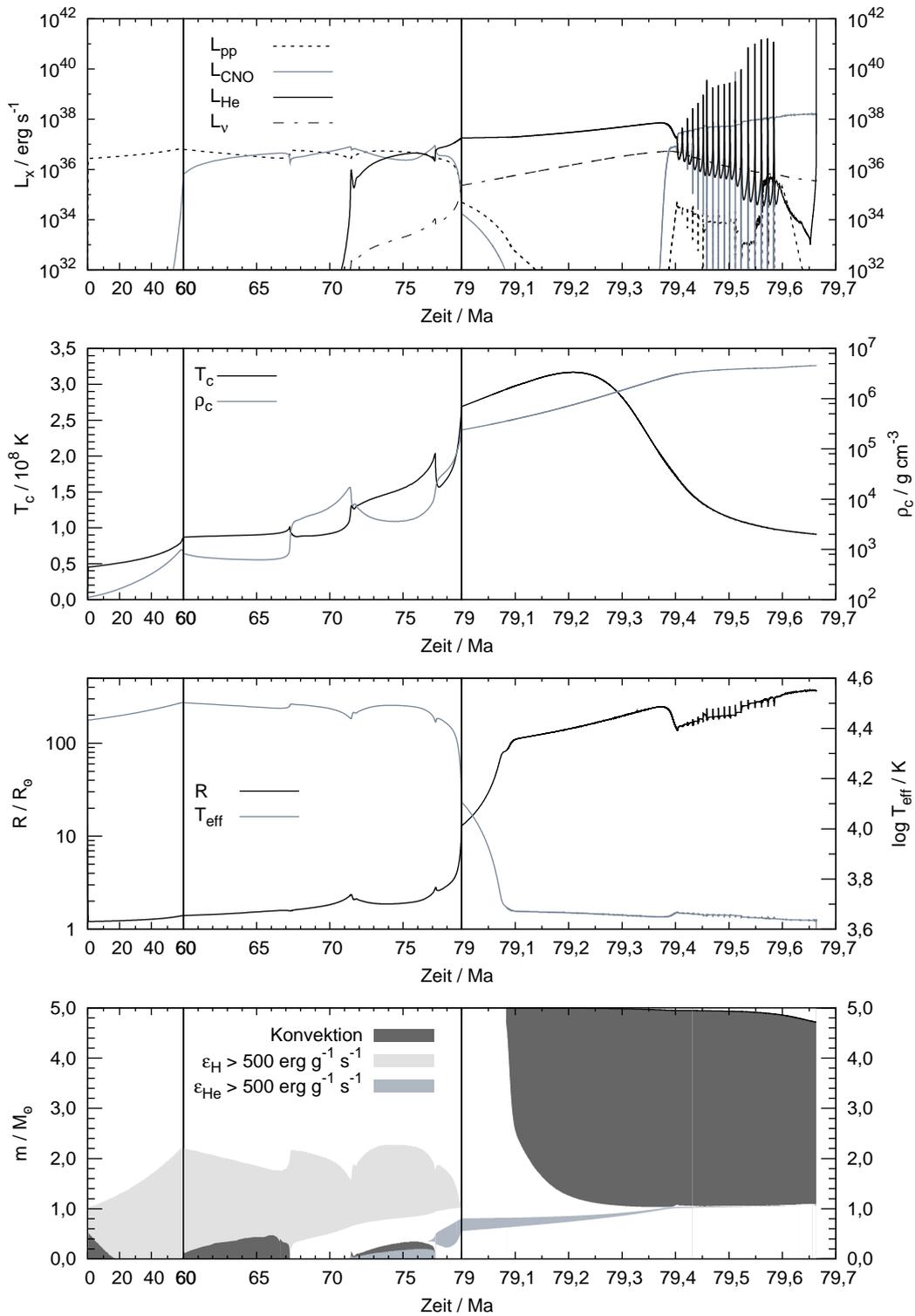


Abbildung 6.37: Übersicht über die Entwicklung des $5 M_{\odot}$ -Modells der Population III. Von oben nach unten: Nukleare Energieerzeugung und Neutrinoverluste, Zentraltemperatur und Zentraldichte, Sternradius und Effektivtemperatur, Kippenhahn-Diagramm.

6.2. MODELLE DER POPULATION III

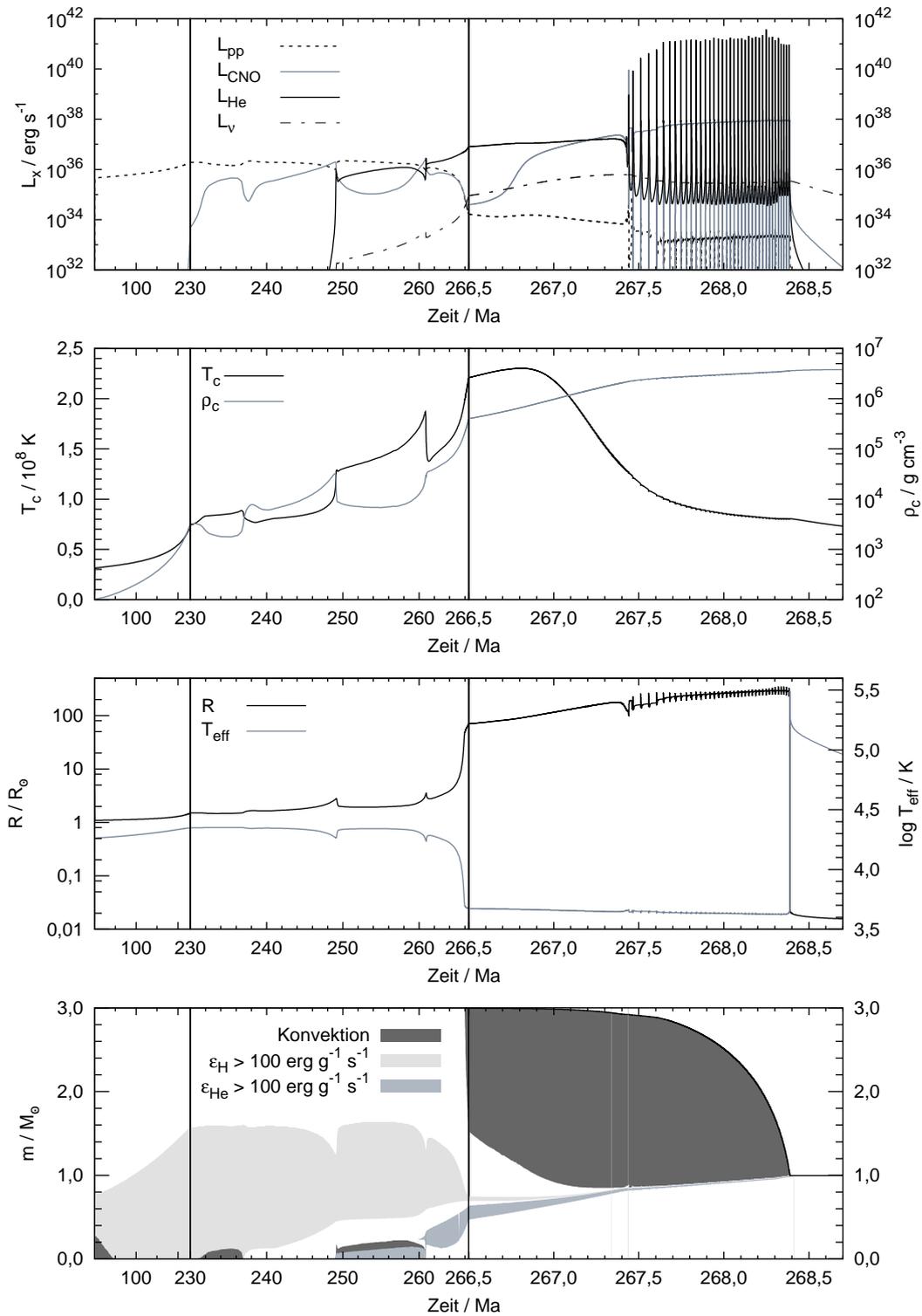


Abbildung 6.38: Übersicht über die Entwicklung des $3 M_{\odot}$ -Modells der Population III. Von oben nach unten: Nukleare Energieerzeugung und Neutrinoverluste, Zentraltemperatur und Zentraldichte, Sternradius und Effektivtemperatur, Kippenhahn-Diagramm.

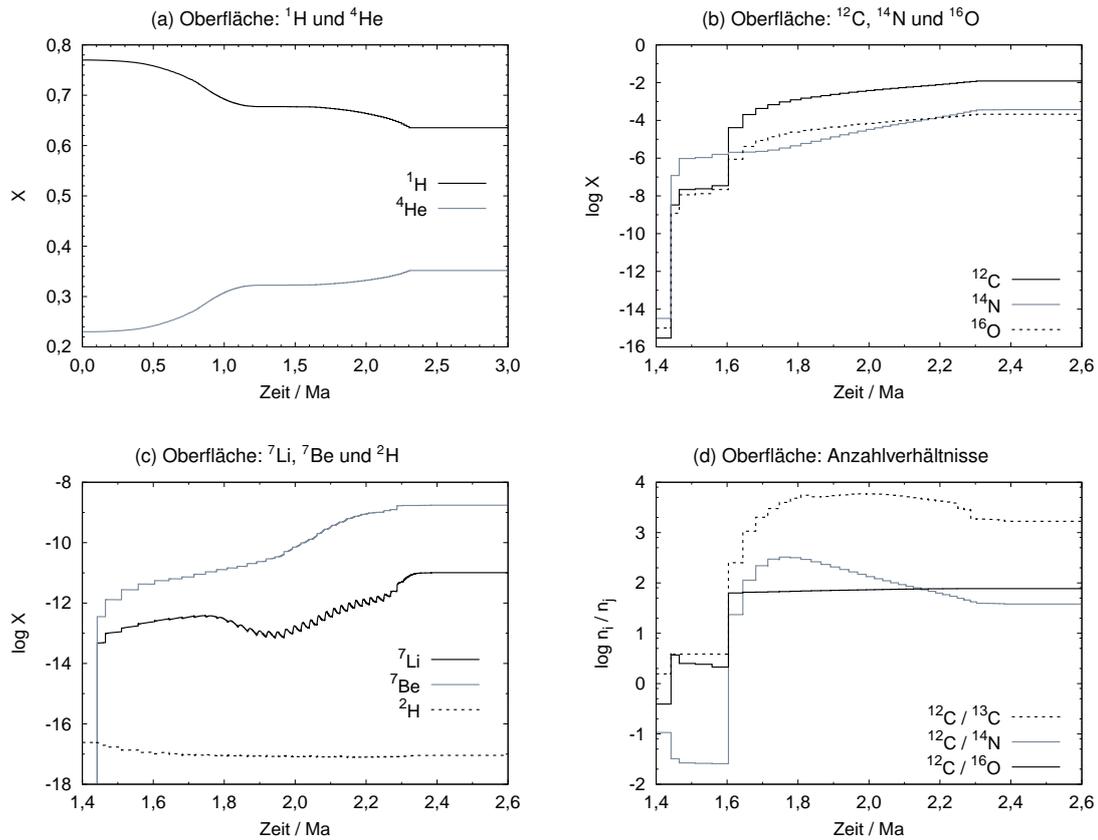


Abbildung 6.39: Stern der Population III mit $3 M_{\odot}$: Dritter Dredge-up. Der Zeitnullpunkt liegt bei einem Alter von 266 Ma.

Die ersten beiden Pulse, bei denen der Kohlenstoffgehalt der Hülle noch extrem gering ist und bei denen ein starker Carbon Ingestion Flash stattfindet, weichen deutlich von den Relationen für die nachfolgenden Pulse ab.

Zum Vergleich sind in den Diagrammen Abb. 6.42 neben den Werten aus unseren beiden Rechnungen mit $3 M_{\odot}$ verschiedene Relationen aus der Literatur dargestellt. Gegenüber Modellen mit etwa solarer Metallizität ist die Leuchtkraft um 10 bis 30 % verringert, die Zwischenpulsdauer um einen Faktor 6 bis 10 erhöht. Die metallizitätsabhängige Formel von Wagenhuber und Groenewegen (1998) ergibt mit $Z = 10^{-4}$ (d. i. die Untergrenze ihres Gültigkeitsbereiches) zumindest bei der M_c - L_{ip} -Relation eine recht gute Übereinstimmung.

Die vom $3 M_{\odot}$ -Modell der Population III an das interstellare Medium abgegebene Materie von $2,002 M_{\odot}$ setzt sich wie in der folgenden Tabelle 6.2 angegeben zusammen. Der verbleibende Weiße Zwerg hat eine Masse von $0,998 M_{\odot}$.

Spezies	^1H	^3He	^4He	^7Be	^7Li
Masse M/M_{\odot}	1,30	$7,0 \cdot 10^{-5}$	0,683	$1,8 \cdot 10^{-9}$	$7,4 \cdot 10^{-12}$
Spezies	^{12}C	^{13}C	^{14}N	^{15}N	^{16}O
Masse M/M_{\odot}	$1,5 \cdot 10^{-2}$	$7,2 \cdot 10^{-6}$	$3,8 \cdot 10^{-4}$	$9,2 \cdot 10^{-9}$	$2,7 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.2: Zusammensetzung der vom $3 M_{\odot}$ -Stern an das interstellare Medium abgegebenen Materie.

6.2. MODELLE DER POPULATION III

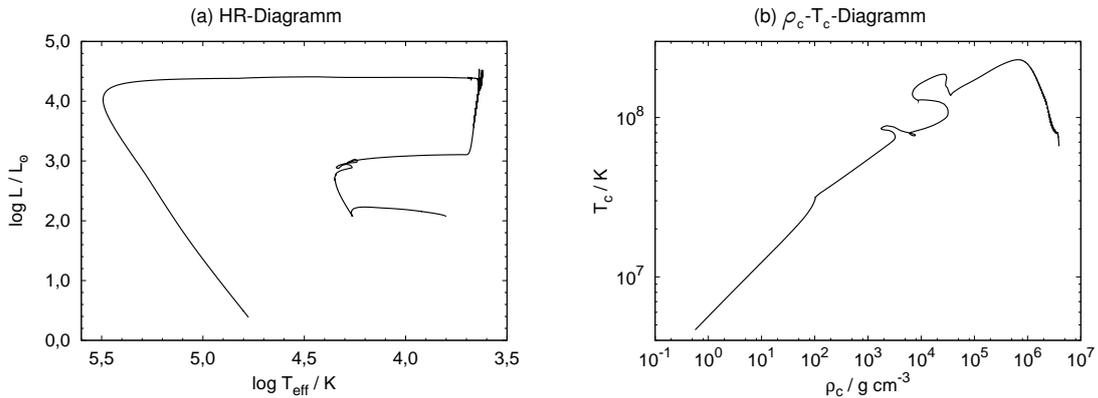


Abbildung 6.40: Stern der Population III mit $3 M_{\odot}$: HR-Diagramm und ρ_c - T_c -Diagramm.

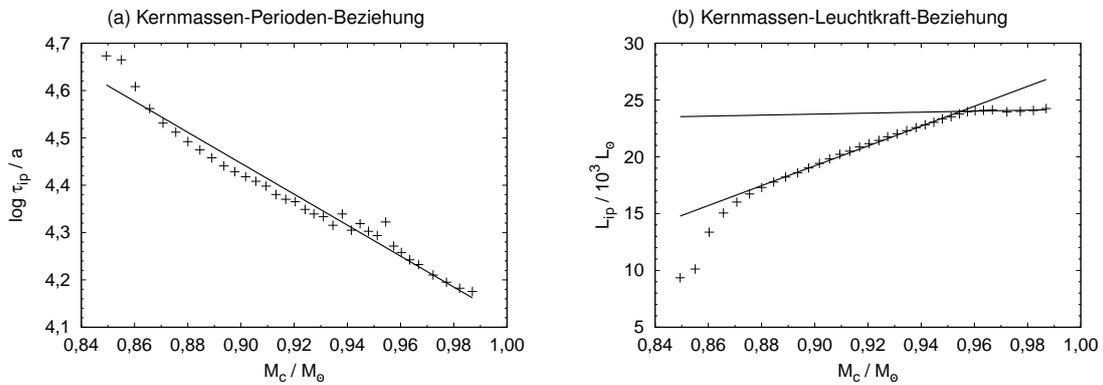


Abbildung 6.41: Stern der Population III mit $3 M_{\odot}$: Abhängigkeit der Pulse von der Kernmasse.

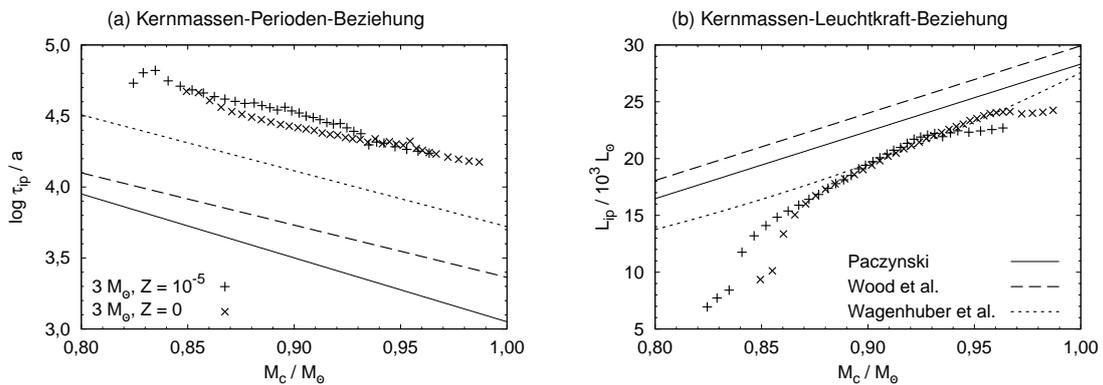


Abbildung 6.42: Abhängigkeit der Pulse metallarmer Sterne von der Kernmasse. Zum Vergleich mit unseren Modellen (schwarze Kreuze) sind Relationen aus der Literatur angegeben: Paczyński (1970, 1975) in rot ($Z = 0,03$), Wood und Zarro (1981) in grün ($Z = 0,02$), Wagenhuber und Groenewegen (1998) in blau ($Z = 10^{-4}$, Korrekturterme für Hot Bottom Burning usw. vernachlässigt).

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

7.1 Zusammenfassung und Diskussion

Für diese Arbeit wurde der von Christian Straka im Rahmen seiner Dissertation entwickelte und im Anschluss noch erweiterte Sternentwicklungscode (Straka, 2002, 2004) teilweise abgeändert und weiter ausgebaut. Zunächst wurde die Zustandsgleichung um die partielle, nicht-relativistische Entartung des Elektronengases erweitert und zur zeitabhängigen Beschreibung der konvektiven Mischung die klassische Mischungswegtheorie implementiert. Von der von Straka (2002) ursprünglich verwendeten zeitabhängigen Konvektionstheorie (Kuhfuß, 1986; Wuchterl und Feuchtinger, 1998) wurde kein Gebrauch gemacht. Ebenso wurde der Code um eine Routine zur Berücksichtigung des Massenverlustes durch den Sternwind erweitert. Die wichtigste Erweiterung des Codes ist der Einbau eines adaptiven Gitters zur Anpassung der Punkteverteilung an die physikalische Struktur der Lösung.

Gegenüber der zu Beginn der Arbeit vorliegenden Version des Codes wird jetzt zur Integration des Differentialgleichungssystems nicht mehr der Extrapolations-Integrator LIMEX vom Zuse-Zentrum Berlin (Ehrig und Nowak, 2002), sondern das klassische Newton-Raphson-Verfahren verwendet.¹ Letzteres ist zwar ein erheblich simpleres Verfahren, aber daher auch genügsamer und stabiler in der Handhabung. Einige Subroutinen des Codes wurden im Sinne einer Beschleunigung um- oder völlig neu geschrieben.

Es sei an dieser Stelle noch einmal betont, dass in diesem Code die Zeitabhängigkeit der konvektiven Mischung berücksichtigt wird und dass alle Gleichungen für Struktur und Entwicklung des Sterns gekoppelt gelöst werden.

Mit den genannten Erweiterungen des Codes war es möglich, Modelle für extrem metallarme Sterne mittlerer Masse (zwischen 2 und $10 M_{\odot}$) zu berechnen. Ein Modell der Population III mit $5 M_{\odot}$ konnte bis auf den TPAGB, zwei Modelle mit $3 M_{\odot}$ (Metallizität $Z = 10^{-5}$ bzw. $Z = 0$) bis zum Weißen Zwerg, dem letzten Entwicklungsstadium der Sterne in diesem Massenbereich, gebracht werden. Die Ergebnisse dieser Rechnungen fassen wir wie folgt zusammen:

- Unsere Modelle bestätigen – wie andere vorher –, dass auch bei den Sternen der Population III thermische Pulse auftreten. In frühen theoretischen und numerischen Arbeiten von Chieffi und Tornambé (1984) bzw. Fujimoto et al. (1984) war dies bei Sternen mit einer Kernmasse von mehr als $0,73 M_{\odot}$ für unwahrscheinlich gehalten worden.
- Der dritte Dredge-up ist in unseren Modellen effizient genug, um nennenswerte Mengen Kohlenstoff in die stellare Hülle zu bringen. Die beiden Modelle mit $3 M_{\odot}$ erreichen

¹Die Routinen zur Lösung linearer Gleichungssysteme aus dem LIMEX-Paket von Ehrig und Nowak (2002) werden weiterhin benutzt.

zum Ende ihrer Entwicklung etwa solare Metallizität, jedoch mit einer völlig anderen Zusammensetzung. Auch in allen Modellen von Campbell und Lattanzio (2008) mit mehr als $1,3 M_{\odot}$ findet der dritte Dredge-up statt. Lau et al. (2009) erwähnen ein Modell mit $5 M_{\odot}$ und $Z = 10^{-8}$, das keinen dritten Dredge-up zeigt; da dieses aber ihr einziges Modell zwischen 3 und $6 M_{\odot}$ ohne Dredge-up ist, ist die Relevanz nicht ganz klar.

- Unser Modell der Population III mit $5 M_{\odot}$ zeigt Hot Bottom Burning, das Modell mit $3 M_{\odot}$ jedoch nicht. Im Gegensatz dazu finden Campbell und Lattanzio (2008) auch bei $3 M_{\odot}$ Hot Bottom Burning.
- Beim Zünden des Wasserstoffbrennens am Ende des EAGB und bei den ersten thermischen Pulse ist in den Modellen der Population III die Wasserstoffschalenquelle so heiß, dass in ihr durch den 3α -Prozess Kohlenstoff erzeugt wird, d. h. das Wasserstoffbrennen wird durch den 3α -Prozess gesteuert und findet bei außergewöhnlich hohen Temperaturen statt. (Gerade darin erkannten Chieffi und Tornambé (1984) und Fujimoto et al. (1984) einen Mechanismus, der die thermischen Pulse verhindern kann.) Schon bei recht geringer, von null verschiedener Metallizität ist dies deutlich schwächer ausgeprägt: Während im $3 M_{\odot}$ -Modell mit $Z = 0$ das Wasserstoffbrennen bei bis zu $1,2 \cdot 10^8$ K stattfindet, erreicht das Modell mit $Z = 10^{-5}$ lediglich $9,35 \cdot 10^7$ K.
- Wir beobachten übereinstimmend mit Rechnungen von Chieffi et al. (2001), Siess et al. (2002), Lau et al. (2009) zu Beginn der TPAGB-Phase eines metallfreien oder extrem metallarmen Sterns Phänomene, die bei höherer Metallizität nicht mehr auftreten. Dabei handelt es sich zunächst um eine zusätzliche Konvektionszone, die direkt oberhalb der Wasserstoffschalenquelle liegt. Ihre Existenz ermöglicht den Einstrom von Kohlenstoff in die noch sehr kohlenstoffarme Wasserstoffschalenquelle. Durch die plötzliche Erhöhung der Kohlenstoffkonzentration wird die Aktivität des CNO-Zyklus stark angefacht und es entsteht gleichzeitig mit dem Ausbruch des Heliumbrennens beim thermischen Puls auch ein Maximum des Wasserstoffbrennens, das mit ersterem durchaus vergleichbar ist. Dieses Phänomen tritt in unseren Modellen mehrmals (aber immer nur bei sehr geringem Kohlenstoffgehalt, $X_C \lesssim 3 \cdot 10^{-7}$) auf; hat die Hülle durch den Dredge-up einen Kohlenstoffanteil von etwa 10^{-5} erreicht, verlaufen die Pulse und die weitere Entwicklung des Sterns normal. Dieser Vorgang ist in der Literatur je nach Autor unter den Namen »Carbon Ingestion Flash« und »Carbon Injection Flash« beschrieben worden. Während bei Lau et al. (2009) die metallreichsten Modelle mit Carbon Ingestion Flash $Z = 10^{-6}$ haben, zeigt unser $3 M_{\odot}$ -Modell mit $Z = 10^{-5}$ immerhin noch schwache Carbon Ingestion Flashes. Das liegt wohl daran, dass in unserem Modell durch den zweiten Dredge-up der Kohlenstoffgehalt der Hülle auf $Z = 10^{-7}$ gesunken ist.
- Für den genannten Carbon Ingestion Flash sind Einflüsse der Numerik, d. h. der verwendeten Auflösung und der Implementierung der Mischung, zu erwarten. Wie stark sie sich auf das Gesamtergebnis auswirken, ist offen. Campbell und Lattanzio (2008) gehen noch weiter und werfen die Frage auf, ob eindimensionale, hydrostatische Rechnungen diesem Phänomen überhaupt gerecht werden können.
- Unterschiede zu den Modellen von Chieffi et al. (2001) und Siess et al. (2002) sind die kürzere Dauer des zentralen Heliumbrennens und die größere Masse des Kerns zu Beginn des TPAGB. Diese Punkte wird man den Materialfunktionen (s. u.) zuschreiben müssen.
- In unserem Modell mit $5 M_{\odot}$ tritt ein sogenannter entarteter Puls auf: Während einer Zwischenpulsphase sinkt die Temperatur der Heliumschalenquelle so weit ab, dass,

7.2. AUSBLICK

obwohl alle anderen Voraussetzungen für die thermische Instabilität gegeben sind, für lange Zeit kein Puls stattfindet. Bei dieser Abkühlung entartet die Heliumschalenquelle teilweise, so dass der mit Verzögerung dann doch folgende Puls besonders heftig wird. In unserer Rechnung konnte dieses Ereignis nicht bewältigt werden. Vergleichbare Ereignisse sind auch in anderen Arbeiten beschrieben worden (Frost et al., 1998; Siess et al., 2002). Es gibt aber andererseits Serien von Rechnungen, in denen nichts Vergleichbares auftritt; jedenfalls berichten Chieffi et al. (2001); Campbell und Lattanzio (2008); Lau et al. (2009) nicht von dergleichen Phänomenen. Sowohl bei Frost et al. (1998) als auch bei Siess et al. (2002) tritt, ebenso wie in dieser Arbeit, der entartete Puls immer bald nach dem Einsetzen des Hot Bottom Burning auf.

- Eher am Rande bemerkten wir, dass die innere Struktur, die das $3 M_{\odot}$ -Modell mit $Z = 10^{-5}$ am Ende des EAGB besitzt, von der Berücksichtigung der pp-Ketten nicht abhängt, obwohl deren Vernachlässigung während der vorherigen Entwicklungsphasen aus energetischer Sicht nicht zulässig ist.
- Bei den beiden Modellen mit $3 M_{\odot}$, die bis zum Ende der AGB-Phase berechnet werden konnten, knickt die Kernmassen-Leuchtkraft-Relation zum Ende der thermischen Pulse bei recht hohen Kernmassen ab und wird deutlich flacher. Insgesamt liegt die Leuchtkraft um 10 bis 30 % unter den von Paczyński (1970) und Wood und Zarro (1981) angegebenen Relationen, die für Sterne von ungefähr solarer Metallizität gelten. Die Periode der thermischen Pulse ist um etwa einen Faktor zehn (verglichen mit Paczyński, 1975) bzw. sechs (verglichen mit Wood und Zarro, 1981) länger.

7.2 Ausblick

Auf der Hand liegt (neben der weiteren Untersuchung des $5 M_{\odot}$ -Modells der Population III aus Abschn. 6.2.4) der Wunsch, eine ganze Serie von Entwicklungsrechnungen mit verschiedenen Massen und Metallizitäten auszuführen. Davor sollten jedoch zwei wichtige Punkte angegangen werden:

- Der Code kann und sollte unbedingt weiter beschleunigt werden, denn die Strukturen, die die Entwicklung eines Sterns auf dem TPAGB vorantreiben, sind (in Masse) sehr klein und verlangen deshalb nach hoher räumlicher Auflösung und kleinen Zeitschritten. Die heftigen Änderungen in den Pulsen konvergieren oft nur langsam, so dass viele Iterationen nötig sind. Die Rechenzeit ist bei thermischen Pulsen durchaus ein Problem.
- Die Gitter-Routine zur Anpassung der Punkteverteilung an die physikalische Struktur des Sterns sollte weiter verbessert werden. Nach wie vor ist die Auflösung nicht überall gleich gut, d. h. an manchen Orten wären (noch) kleinere Zellen wünschenswert, während an anderen Gitterpunkte gewissermaßen unnötig mitgeschleppt werden. Außerdem ist der Vorgang der Gitteranpassung selbst nicht immer störungsfrei.

Die beiden vorgenannten Punkte sollten es dann auch ermöglichen,

- Rechnungen mit höherer Auflösung sowie
- Rechnungen mit größeren und detaillierteren nuklearen Netzwerken auszuführen. Insbesondere die Einbeziehung der höheren Zyklen des Wasserstoffbrennens (also des OF-, NeNa- und MgAl-Zyklus) könnte im Zusammenhang mit der sehr hohen Temperatur in der Wasserstoffschalenquelle am Beginn der TPAGB-Phase der Population-III-Sterne interessant sein.

Die verwendeten Materialfunktionen können verbessert und erweitert werden:

- Bei tiefen Temperaturen sollten die Opazitäten von Ferguson et al. (2005) verwendet werden.
- Für die Opazität entarteter Materie gibt es neuere Daten bei Cassisi et al. (2007).
- Gerade bei metallarmen Sternen kann die relative Änderung der Zusammensetzung der Hülle während des TPAGB sehr hoch sein. Sie weicht außerdem sehr stark von der (skalierten) solaren Zusammensetzung, für die Opazitätstabellen häufig erstellt werden, ab. Es ist daher wünschenswert, die Opazität auch an den sich verändernden Metallanteil und dessen Zusammensetzung anzupassen, zumindest soweit die verfügbaren Daten das zulassen, s. dazu die Arbeiten von Marigo (2002) und Cristallo et al. (2007).
- Es gibt deutlich aufwändigere und detailliertere Formen der Zustandsgleichung, die, zum Teil tabelliert, zum Teil als Code, veröffentlicht sind. Die Verwendung einer solchen Zustandsgleichung, etwa der der OPAL-Kooperation (Rogers et al., 1996), sollte erwogen werden.
- Da der Sternwind auf die an das interstellare Medium abgegebene Masse (und damit auch auf die Masse des zurückbleibenden Weißen Zwerges und auf die Frage nach der Möglichkeit einer Supernova vom Typ I.5) größten Einfluss hat, sollten unbedingt andere, an den TPAGB besser angepasste Massenverlustformeln für pulsations- und staubgetriebene Winde verwendet werden, vgl. z. B. Vassiliadis und Wood (1993), Marigo und Girardi (2007), Wachter et al. (2008).

Darüber hinaus gibt es noch eine Reihe von anderen Punkten:

- Von besonderem Interesse ist die Verbindung der für diese Arbeit erstellten Gitterroutine mit dem von Straka (2002) implementierten zeitabhängigen Konvektionsmodell (Kuhfuß, 1986; Wuchterl und Feuchtinger, 1998). Damit hätte man die Möglichkeit, in einem was Physik und Numerik betrifft identischen Code die Auswirkungen verschiedener Beschreibungen der Konvektion – insbesondere einer zeitunabhängigen und einer zeitabhängigen – zu testen.
- In dieser Arbeit wurde die konservativste Form der Mischung, nämlich nur in gemäß dem Schwarzschildkriterium instabilen Gebieten, verwendet. Überschießen, Semikonvektion, rotationsinduzierte Mischung und andere zusätzliche Mischprozesse werfen mehr Fragen auf, als hier auch nur genannt werden könnten. Zumindest die Implementierung von exponentiellem Überschießen in unseren Code sollte mit geringem Aufwand möglich sein.
- Ebenso ausgeklammert blieb die Nukleosynthese durch den *s*-Prozess. Die Erzeugung der dafür notwendigen Neutronen resultiert aus einem Zusammenwirken von Kernreaktionen und Mischung, für dessen Verständnis die Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit dieser Vorgänge sicher nicht unwichtig ist. (Eine sehr interessante Serie von Rechnungen zum *s*-Prozess bei verschiedenen Metallizitäten findet man bei Cristallo et al., 2009.)
- Ein großer Teil der AGB-Sterne ist variabel, wenn auch auf sehr unterschiedlichem Niveau. Eine Stabilitätsanalyse unserer Modelle mit dem Code von Gamgami (2007) oder gar eine dynamische Pulsationsrechnung mit einem weiteren Code desselben Autors wären sicher von großem Interesse.

Anhang A

Verzeichnis der verwendeten Symbole

In diesem Anhang sind alle in dieser Arbeit häufiger verwendeten Symbole mit ihrer Bedeutung und ihrer Einheit zusammengestellt. Sofern es sich dabei um eine physikalische oder astronomische Konstante handelt, ist der Zahlenwert angegeben. Eine Zusammenstellung der aktuellen Werte der Naturkonstanten und ihrer Fehler findet man auf der Homepage der Particle Data Group, <http://pdg.lbl.gov>.

A.1 Physikalische Konstanten

	Bedeutung	cgs	SI
a	Strahlungskonstante	$7,5658 \cdot 10^{-15} \text{ erg cm}^{-3} \text{ K}^{-4}$	$7,5658 \cdot 10^{-16} \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-4}$
c	Lichtgeschwindigkeit	$2,9979 \cdot 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$	$2,9979 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$
G	Gravitationskonstante	$6,6742 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g}^{-1} \text{ s}^{-2}$	$6,6742 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$
h	Plancksches Wirkungsquantum	$6,6261 \cdot 10^{-27} \text{ erg s}$	$6,6261 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$
k	Boltzmann-Konstante	$1,3807 \cdot 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$	$1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
m_e	Elektronenmasse	$9,1094 \cdot 10^{-28} \text{ g}$	$9,1094 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
m_u	Atomare Masseneinheit	$1,6605 \cdot 10^{-24} \text{ g}$	$1,6605 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
N_A	Avogadrozahl	$6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$6,0221 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
\mathfrak{R}	Allgemeine Gaskonstante	$8,3145 \cdot 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$	$8,3145 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
σ	Stefan-Boltzmann-Konstante	$5,6704 \cdot 10^{-5} \text{ erg s}^{-1} \text{ cm}^{-2} \text{ K}^{-4}$	$5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

Die obigen Konstanten sind nicht alle voneinander unabhängig, denn es gelten die Beziehungen

$$\mathfrak{R} = N_A k,$$

$$\sigma = 2\pi^5 k^4 / 15 h^3 c^2,$$

$$a = 4\sigma / c,$$

$$N_A \cdot m_u = 1 \text{ g mol}^{-1}.$$

A.2 Astronomische Konstanten

	Bedeutung	cgs	SI
L_\odot	Sonnenleuchtkraft	$3,846 \cdot 10^{33} \text{ erg s}^{-1}$	$3,846 \cdot 10^{26} \text{ W}$
M_\odot	Sonnenmasse	$1,988 \cdot 10^{33} \text{ g}$	$1,988 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
R_\odot	Sonnenradius	$6,961 \cdot 10^{10} \text{ cm}$	$6,961 \cdot 10^8 \text{ m}$

Im Gegensatz zu den unter A.1 genannten Größen sind L_\odot , M_\odot und R_\odot keine fundamentalen Naturkonstanten, sondern lediglich günstige und gebräuchliche Einheiten.

A.3 Variablen

Für jedes Symbol nennen wir neben seiner Bedeutung auch seine Einheit im in der Astronomie immer noch üblichen cgs-System und im SI. Die angegebene Einheit ist möglichst aus Basiseinheiten zusammengesetzt; die in der Praxis (bei Beobachtungen oder Messungen, in Tabellenwerk usw.) verwendete Einheit kann durchaus eine andere sein. In der letzten Spalte ist der Umrechnungsfaktor von cgs- nach SI-Einheiten angegeben.

Es lässt sich kaum vermeiden, den ein oder anderen Buchstaben in verschiedenen Bedeutungen zu verwenden; der Kontext sollte jedoch Klarheit schaffen.

	Bedeutung	cgs-Einheit	SI-Einheit	
A	Atomgewicht ¹	g mol^{-1}	kg mol^{-1}	10^{-3}
α	isotherme Kompressibilität	1	1	1
α_M	Mischungswegparameter	1	1	1
β	Anteil des Gasdrucks am Gesamtdruck	1	1	1
c_g	gravothermische spezifische Wärme	$\text{erg g}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	10^{-4}
c_p	spezifische Wärme bei konstantem Druck	$\text{erg g}^{-1} \text{K}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$	10^{-4}
D	Diffusionskoeffizient	$\text{cm}^2 \text{s}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	10^{-4}
D	Dicke einer Schalenquelle	cm	m	10^{-2}
δ	Ausdehnungskoeffizient	1	1	1
E_i	innere Energie	erg	J	10^{-7}
E_g	Gravitationsenergie	erg	J	10^{-7}
ε_g	gravitative Energieproduktion	$\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$	10^{-4}
ε_{nuc}	nukleare Energieproduktion	$\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$	10^{-4}
ε_ν	Neutrinoverluste	$\text{erg g}^{-1} \text{s}^{-1}$	$\text{J kg}^{-1} \text{s}^{-1}$	10^{-4}
ε_P	Druckabhängigkeit von ε_{nuc}	1	1	1
ε_T	Temperaturabhängigkeit von ε_{nuc}	1	1	1
F_{rad}	radiativer Fluss	$\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$	$\text{J m}^{-2} \text{s}^{-1}$	10^{-3}
Φ	Gravitationspotential	$\text{cm}^2 \text{s}^{-2}$	$\text{m}^2 \text{s}^{-2}$	10^{-4}
g	Schwerebeschleunigung	cm s^{-2}	m s^{-2}	10^{-2}
h	spezifische Enthalpie	erg g^{-1}	J kg^{-1}	10^{-4}
H_P	Druckskalenhöhe	cm	m	10^{-2}
κ	(Rosselandsche) Opazität	$\text{cm}^2 \text{g}^{-1}$	$\text{m}^2 \text{kg}^{-1}$	10^{-1}
κ_P	Druckabhängigkeit von κ	1	1	1
κ_T	Temperaturabhängigkeit von κ	1	1	1
l	(lokale) Leuchtkraft	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L	Gesamtleuchtkraft	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L_{CNO}	integrierte Energieproduktion des CNO-Zyklus	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L_g	integrierte gravitative Energieproduktion	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L_{H}	integrierte Energieproduktion des H-Brennens	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L_{He}	integrierte Energieproduktion des He-Brennens	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L_{nuc}	integrierte nukleare Energieproduktion	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L_ν	Neutrinoleuchtkraft	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
L_{pp}	integrierte Energieproduktion der pp-Ketten	erg s^{-1}	J s^{-1}	10^{-7}
ℓ_m	Mischungslänge	cm	m	10^{-2}
λ	Reaktionsrate ²	$\text{cm}^3 \text{mol}^{-1} \text{s}^{-1}$	$\text{m}^3 \text{mol}^{-1} \text{s}^{-1}$	10^{-6}
m	(eingeschlossene) Masse, Lagrange-Koordinate	g	kg	10^{-3}
M	Gesamtmasse	g	kg	10^{-3}

A.3. VARIABLEN

	Bedeutung	cgs-Einheit	SI-Einheit	
\dot{M}	Massenverlustrate	g s^{-1}	kg s^{-1}	10^{-3}
μ	mittleres Molekulargewicht ¹	g mol^{-1}	kg mol^{-1}	10^{-3}
μ_0	mittleres Molekulargewicht pro Ion ¹	g mol^{-1}	kg mol^{-1}	10^{-3}
μ_e	mittleres Molekulargewicht pro Elektron ¹	g mol^{-1}	kg mol^{-1}	10^{-3}
n	Teilchendichte	cm^{-3}	m^{-3}	10^6
∇	Schichtungsgradient	1	1	1
∇_{ad}	adiabatischer Gradient	1	1	1
∇_{rad}	radiativer Gradient	1	1	1
P	Druck	dyn cm^{-2}	N m^{-2}	10^{-1}
P_e	Elektronendruck	dyn cm^{-2}	N m^{-2}	10^{-1}
P_{gas}	Gasdruck	dyn cm^{-2}	N m^{-2}	10^{-1}
P_{ion}	Ionendruck	dyn cm^{-2}	N m^{-2}	10^{-1}
P_{rad}	Strahlungsdruck	dyn cm^{-2}	N m^{-2}	10^{-1}
ψ	Entartungsparameter	1	1	1
q	spezifische Wärmemenge	erg g^{-1}	J kg^{-1}	10^{-4}
Q	Wärmetönung	erg	J	10^{-7}
r	Radialkoordinate, Euler-Koordinate	cm	m	10^{-2}
ρ	Dichte	g cm^{-3}	kg m^{-3}	10^3
s	spezifische Entropie	$\text{erg K}^{-1} \text{g}^{-1}$	$\text{J K}^{-1} \text{kg}^{-1}$	10^4
σ_{D}	Diffusionskoeffizient	$\text{g}^2 \text{s}^{-1}$	$\text{kg}^2 \text{s}^{-1}$	10^{-3}
t	Zeit	s	s	1
T	Temperatur	K	K	1
T_{eff}	Effektivtemperatur	K	K	1
τ	optische Tiefe	1	1	1
τ_{hydr}	hydrodynamische Zeitskala	s	s	1
τ_{KH}	Kelvin-Helmholtz-Zeit	s	s	1
τ_{n}	nukleare Zeitskala	s	s	1
u	spezifische innere Energie	erg g^{-1}	J kg^{-1}	10^{-4}
u_e	spezifische Energie der Elektronen	erg g^{-1}	J kg^{-1}	10^{-4}
u_{ion}	spezifische Energie der Ionen	erg g^{-1}	J kg^{-1}	10^{-4}
u_{rad}	spezifische Energie des Strahlungsfeldes	erg g^{-1}	J kg^{-1}	10^{-4}
v	spezifisches Volumen	$\text{cm}^3 \text{g}^{-1}$	$\text{m}^3 \text{kg}^{-1}$	10^3
v	konvektive Geschwindigkeit	cm s^{-1}	m s^{-1}	10^{-2}
W	Gesamtenergie des Sterns	erg	J	10^{-7}
X	Massenbruchteil	1	1	1
Z	Kernladungszahl	1	1	1

Das Symbol $\log x$ meint immer den dekadischen Logarithmus; der natürliche Logarithmus ist stets mit $\ln x$ bezeichnet.

¹Die Größen A_i , μ , μ_0 , μ_e , wie sie z. B. in den Gln. (2.40), (3.10), (3.12) auftreten, bezeichnen genau genommen Molmassen. Da im cgs-System die Masse eines Teilchens in atomaren Masseneinheiten und die Molmasse in g mol^{-1} den gleichen Zahlenwert haben, ist man hier etwas nachlässig und benutzt z. B. das Symbol A_i sowohl für die Massenzahl eines Elements als auch für seine Molmasse. Im SI liegt zwischen diesen beiden Größen aber ein Faktor 10^3 , denn die Molmasse muss in kg mol^{-1} eingesetzt werden. Man muss dann sorgfältig zwischen beiden unterscheiden.

²Die angegebene Einheit bezieht sich nur auf Zweiteilchenreaktionen. Für eine n -Teilchenreaktion gilt $[\lambda] = (\text{cm}^3 \text{mol}^{-1})^{n-1} \text{s}^{-1}$.

Abbildungsverzeichnis

2.1	Zur hydrostatischen Gleichung	6
2.2	Zur Energiegleichung	6
4.1	Skizze eines Sterns mit zentraler Energiequelle	32
4.2	Skizze eines Sterns mit Schalenquelle	32
5.1	Zur Stabilität der Rechnungen bei Änderung der Diskretisierung I	43
5.2	Zur Stabilität der Rechnungen bei Änderung der Diskretisierung II	44
6.1	Thermische Pulse 22 und 23: Aktivität und Lage der Schalenquellen	47
6.2	Thermische Pulse 22 und 23: Heliumschalenquelle	48
6.3	Thermische Pulse 22 und 23: Energieproduktion $\varepsilon_{\text{nuc}}(m, t)$	49
6.4	Thermische Pulse 22 und 23: Energieproduktion $\varepsilon_{\text{nuc}}(r, t)$	49
6.5	Thermische Pulse 22 und 23: Wasserstoffschalenquelle	50
6.6	Thermische Pulse 22 und 23: Leuchtkraft, Radius und Effektivtemperatur	51
6.7	Thermische Pulse 22 und 23: Kippenhahn-Diagramm	52
6.8	TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Leuchtkraft, Radius, Effektivtemperatur, HRD	53
6.9	TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Masse und Massenverlust	54
6.10	TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Aktivität und Lage der Schalenquellen	54
6.11	TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Zum dritten Dredge-up	54
6.12	TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Zusammensetzung an der Oberfläche	56
6.13	TPAGB des $3 M_{\odot}$ -Modells: Abhängigkeit der Pulse von der Kernmasse	57
6.14	Post-AGB-Entwicklung des $3 M_{\odot}$ -Modells	58
6.15	Pop III, $5 M_{\odot}$: Vorhauptreihenentwicklung	61
6.16	Pop III, $5 M_{\odot}$: HR-Diagramm und ρ_c - T_c -Diagramm	62
6.17	Pop III, $5 M_{\odot}$: Zentrales Wasserstoffbrennen ohne CNO-Zyklus	63
6.18	Pop III, $5 M_{\odot}$: Zentrales Wasserstoffbrennen mit CNO-Zyklus	64
6.19	Pop III, $5 M_{\odot}$: Wasserstoffschalenbrennen	66
6.20	Pop III, $5 M_{\odot}$: Zentrales Heliumbrennen	67
6.21	Pop III, $5 M_{\odot}$: Heliumschalenbrennen	68
6.22	Pop III, $5 M_{\odot}$: Heliumschalenbrennen	69
6.23	Pop III, $5 M_{\odot}$: Energieproduktion $\varepsilon_{\text{nuc}}(m, t)$ auf der Hauptreihe	70
6.24	Pop III, $5 M_{\odot}$: Energieproduktion $\varepsilon_{\text{nuc}}(m, t)$ nach der Hauptreihe	70
6.25	Pop III, $5 M_{\odot}$: Zweiter Dredge-up	71
6.26	HR-Diagramm der Modelle der Population III mit 2 bis $10 M_{\odot}$	72

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

6.27 ρ_c - T_c -Diagramm der Modelle der Population III mit 2 bis $10 M_\odot$	73
6.28 Nukleare Energieerzeugung bei den Modellen von 6 bis $10 M_\odot$	74
6.29 Nukleare Energieerzeugung bei den Modellen von 2 bis $5 M_\odot$	75
6.30 Pop III, $5 M_\odot$: Übergang vom EAGB zum TPAGB	76
6.31 Pop III, $5 M_\odot$: Die ersten thermischen Pulse	77
6.32 Pop III, $5 M_\odot$: Konvektionszonen während des vierten und zwölften Pulses . . .	78
6.33 Pop III, $5 M_\odot$: Carbon Ingestion Flash beim sechsten Puls	79
6.34 Pop III, $5 M_\odot$: Zur Entwicklung der Wasserstoffschalenquelle	80
6.35 Pop III, $5 M_\odot$: Änderung der Zusammensetzung durch Hot Bottom Burning . .	81
6.36 Pop III, $5 M_\odot$: TPAGB-Entwicklung mit entartetem Puls	82
6.37 Übersicht über die Entwicklung des $5 M_\odot$ -Modells der Population III	84
6.38 Übersicht über die Entwicklung des $3 M_\odot$ -Modells der Population III	85
6.39 Pop III, $3 M_\odot$: Dritter Dredge-up	86
6.40 Pop III, $3 M_\odot$: HR-Diagramm und ρ_c - T_c -Diagramm	87
6.41 Pop III, $3 M_\odot$: Abhängigkeit der Pulse von der Kernmasse	87
6.42 Abhängigkeit der Pulse metallarmer Sterne von der Kernmasse	87

Literaturverzeichnis

- Angulo, C., Arnould, M., Rayet, M., Descouvemont, P., Baye, D., Leclercq-Willain, C., Coc, A., Barhoumi, S., Aguer, P., Rolfs, C., Kunz, R., Hammer, J. W., Mayer, A., Paradellis, T., Kossionides, S., Chronidou, C., Spyrou, K., Degl'Innocenti, S., Fiorentini, G., Ricci, B., Zavatarelli, S., Providencia, C., Wolters, H., Soares, J., Grama, C., Rahighi, J., Shotton, A. und Laméhi Rächti, M., 1999, *Nucl. Phys. A*, **656**, 3.
- Aoki, W., Beers, T. C., Christlieb, N., Norris, J. E., Ryan, S. G. und Tsangarides, S., 2007, *Astrophys. J.*, **655**, 492.
- Badnell, N. R., Bautista, M. A., Butler, K., Delahaye, F., Mendoza, C., Palmeri, P., Zeippen, C. J. und Seaton, M. J., 2005, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **360**, 458.
- Bahcall, J. N., 1989, *Neutrino Astrophysics*, Cambridge University Press.
- Beers, T. C. und Christlieb, N., 2005, *Annu. Rev. Astro. Astrophys.*, **43**, 531.
- Bromm, V. und Larson, R. B., 2004, *Annu. Rev. Astro. Astrophys.*, **42**, 79.
- Burbidge, E. M., Burbidge, G. R., Fowler, W. A. und Hoyle, F., 1957, *Rev. Mod. Phys.*, **29**, 547.
- Busso, M., Gallino, R. und Wasserburg, G. J., 1999, *Annu. Rev. Astro. Astrophys.*, **37**, 239.
- Cameron, A. G. W. und Fowler, W. A., 1971, *Astrophys. J.*, **164**, 111.
- Campbell, S. W. und Lattanzio, J. C., 2008, *Astron. & Astrophys.*, **490**, 769.
- Canuto, V., 1970, *Astrophys. J.*, **159**, 641.
- Cassisi, S., Potekhin, A. Y., Pietrinferni, A., Catelan, M. und Salaris, M., 2007, *Astron. & Astrophys.*, **661**, 1094.
- Chieffi, A., Domínguez, I., Limongi, M. und Straniero, O., 2001, *Astrophys. J.*, **554**, 1159.
- Chieffi, A. und Tornambé, A., 1984, *Astrophys. J.*, **287**, 745.
- Cristallo, S., Straniero, O., Gallino, R., Piersanti, L., Domínguez, I. und Lederer, M. T., 2009, *Astrophys. J.*, **696**, 797.
- Cristallo, S., Straniero, O., Lederer, M. T. und Aringer, A., 2007, *Astrophys. J.*, **667**, 489.
- Eggleton, P. P., 1971, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **151**, 351.
- Eggleton, P. P., 1972, *Mon. Not. R. Astr. Soc.*, **156**, 361.
- Ehrig, R. und Nowak, U., 2002, *LIMEX Version 4.3B*, Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik, Berlin, URL <http://www.zib.de/ehrig/software.html>.

LITERATURVERZEICHNIS

- Ezer, D., 1961, *Astrophys. J.*, **133**, 159.
- Ferguson, J. W., Alexander, D. R., Allard, F., Barman, T., Bodnarik, J. G., Hauschildt, P. H., Heffner-Wong, A. und Tamanai, A., 2005, *Astrophys. J.*, **623**, 585.
- Ferrarotti, A. S. und Gail, H.-P., 2006, *Astron. & Astrophys.*, **447**, 553.
- Frebel, A., Collet, R., Eriksson, K., Christlieb, N. und Aoki, W., 2008, *Astrophys. J.*, **684**, 588.
- Frost, C. A. und Lattanzio, J. C., 1996, *Astrophys. J.*, **473**, 383.
- Frost, C. A., Lattanzio, J. C. und Wood, P. R., 1998, *Astrophys. J.*, **500**, 355.
- Fujimoto, M. Y., Iben, Jr., I., Chieffi, A. und Tornambé, A., 1984, *Astrophys. J.*, **287**, 749.
- Fujimoto, M. Y., Ikeda, Y. und Iben, I. J., 2000, *Astrophys. J. Lett.*, **529**, 25.
- Gangami, F., 2007, *Stabilitätsverhalten massereicher Population-III-Sterne*, Dissertation, Universität Heidelberg, URL <http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/7500>.
- Habing, H. J. und Olofsson, H. (Hg.), 2003, *Asymptotic Giant Branch Stars*, Springer.
- Hansen, C. J. und Kawaler, S. D., 1994, *Stellar Interiors. Physical Principles, Structure, and Evolution*, Springer.
- Heger, A., Fryer, C. L., Woosley, S. E., Langer, N. und Hartmann, D. H., 2003, *Astrophys. J.*, **591**, 288.
- Herwig, F., 2005, *Annu. Rev. Astro. Astrophys.*, **43**, 435.
- Herwig, F., Blocker, T., Langer, N. und Driebe, T., 1999, *Astron. & Astrophys.*, **349**, L5.
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R. und Weigert, A., 1964a, *Z. Astrophys.*, **59**, 215.
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R. und Weigert, A., 1964b, *Z. Astrophys.*, **59**, 242.
- Hofmeister, E., Kippenhahn, R. und Weigert, A., 1964c, *Z. Astrophys.*, **60**, 57.
- Hubbard, W. B. und Lampe, M., 1969, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **18**, 297.
- Iben, Jr., I., 1975, *Astrophys. J.*, **196**, 525.
- Iben, Jr., I., Kaler, J. B., Truran, J. W. und Renzini, A., 1983, *Astrophys. J.*, **264**, 605.
- Iben, Jr., I. und Renzini, A., 1983, *Annu. Rev. Astro. Astrophys.*, **21**, 271.
- Itoh, N., Hayashi, H., Nishikawa, A. und Kohyama, Y., 1996, *Astrophys. J. Suppl. Ser.*, **102**, 411.
- Kippenhahn, R., 1981, *Astron. & Astrophys.*, **102**, 293.
- Kippenhahn, R. und Weigert, A., 1990, *Stellar Structure and Evolution*, Springer.
- Kippenhahn, R., Weigert, A. und Hofmeister, E., 1967, in B. Alder, S. Fernbach und M. Rotenberg (Hg.), *Methods in Computational Physics*, Band 7, S. 129, Academic Press, New York.
- Kuhfuß, R., 1986, *Astron. & Astrophys.*, **160**, 116.

LITERATURVERZEICHNIS

- Lau, H. H. B., Stancliffe, R. J. und Tout, C. A., 2008, Mon. Not. R. Astr. Soc., **385**, 301.
- Lau, H. H. B., Stancliffe, R. J. und Tout, C. A., 2009, Mon. Not. R. Astr. Soc., **396**, 1046.
- Lucatello, S., Tsangarides, S., Beers, T. C., Carretta, E., Gratton, R. G. und Ryan, S. G., 2005, *Astrophys. J.*, **625**, 825.
- Marigo, P., 2000, *Astron. & Astrophys.*, **360**, 617.
- Marigo, P., 2002, *Astron. & Astrophys.*, **387**, 507.
- Marigo, P. und Girardi, L., 2007, *Astron. & Astrophys.*, **469**, 239.
- Meister, A., 1999, *Numerik linearer Gleichungssysteme*, Vieweg, Braunschweig.
- Mestel, L., 1952, Mon. Not. R. Astr. Soc., **112**, 583.
- Mihalas, D., 1970, *Stellar Atmospheres*, Freeman, San Francisco.
- Nakamura, F. und Umemura, M., 2001, *Astrophys. J.*, **548**, 19.
- Paczynski, B., 1970, *Acta Astron.*, **20**, 47.
- Paczynski, B., 1975, *Astrophys. J.*, **202**, 558.
- Refsdal, S. und Weigert, A., 1970, *Astron. & Astrophys.*, **6**, 426.
- Reimers, D., 1975, *Mem. Soc. R. Sci. Liège*, **8**, 369.
- Renzini, A., 1981, in I. Iben, Jr. und A. Renzini (Hg.), *Physical Processes in Red Giants*, S. 431, Reidel, Dordrecht.
- Renzini, A., 1990, in C. Cacciari und G. Clementini (Hg.), *Confrontation Between Stellar Pulsation and Evolution. Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, Band 11, S. 549.
- Renzini, A. und Voli, M., 1981, *Astron. & Astrophys.*, **94**, 175.
- Rogers, F. J., Swenson, F. J. und Iglesias, C. A., 1996, *Astrophys. J.*, **456**, 902.
- Schröder, K.-P. und Cuntz, M., 2005, *Astrophys. J. Lett.*, **630**, 73.
- Schröder, K.-P. und Cuntz, M., 2007, *Astron. & Astrophys.*, **465**, 593.
- Schwarzschild, M. und Härm, R., 1965, *Astrophys. J.*, **142**, 855.
- Schwarzschild, M. und Spitzer, L., 1953, *The Observatory*, **73**, 77.
- Siess, L., Livio, M. und Lattanzio, J., 2002, *Astrophys. J.*, **570**, 329.
- Steigman, G., 2007, *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, **57**, 463.
- Straka, C. W., 2002, *Thermonukleares Brennen und Mischen mit einer zeitabhängigen Konvektionstheorie in massereichen Population-III-Sternen*, Dissertation, Universität Heidelberg, URL <http://www.ub.uni-heidelberg.de/archiv/1902>.
- Straka, C. W., 2004, in W. J. Duschl (Hg.), *1st Arizona/Heidelberg Symposium - The High Redshift Frontier*.

LITERATURVERZEICHNIS

- Straka, C. W., 2005, *Computer Physics Communications*, **168**, 123.
- Suda, T., Aikawa, M., Machida, M. N., Fujimoto, M. Y. und Iben, I. J., 2004, *Astrophys. J.*, **611**, 476.
- Tuchman, Y., Glasner, A. und Barkat, Z., 1983, *Astrophys. J.*, **268**, 356.
- Valiante, R., Schneider, R., Bianchi, S. und Andersen, A. C., 2009, arXiv:0905.1691.
- Vassiliadis, E. und Wood, P. R., 1993, *Astrophys. J.*, **413**, 641.
- Wachter, A., Winters, J. M., Schröder, K.-P. und Sedlmayr, E., 2008, *Astron. & Astrophys.*, **486**, 497.
- Wagenhuber, J. und Groenewegen, M. A. T., 1998, *Astron. & Astrophys.*, **340**, 183.
- Weigert, A., 1966, *Z. Astrophys.*, **64**, 395.
- Weiss, A., Hillebrandt, W., Thomas, H.-C. und Ritter, H., 2004, *Cox & Giuli's Principles of Stellar Structure*, Cambridge Scientific Publishers.
- Wood, P. R. und Zarro, D. M., 1981, *Astrophys. J.*, **247**, 247.
- Wuchterl, G. und Feuchtinger, M. U., 1998, *Astron. & Astrophys.*, **340**, 419.
- Zhukovska, S., Gail, H.-P. und Trieloff, M., 2008, *Astron. & Astrophys.*, **479**, 453.

Danksagung

Mein erster Dank gilt Herrn Prof. Werner M. Tscharnuter für ein interessantes und spannendes Thema, in noch größerem Maße aber für seine kenntnisreiche, umsichtige und geduldige Betreuung meiner Arbeit sowie viele aufschlussreiche und anregende Diskussionen.

Herrn Prof. Norbert Christlieb danke ich für seine Bereitschaft, das Zweitgutachten zu erstellen.

Herrn Prof. Hans-Peter Gail danke ich für eine Reihe von Hinweisen, Bemerkungen und Diskussionen.

Herrn Prof. Michael Scholz gilt mein Dank für seine Hilfe bei der Finanzierung meiner Arbeit im Rahmen des DFG-Projektes »Zeitabhängigkeit der Atmosphärenstruktur von M-Typ Mira-Variablen«, außerdem für sein Interesse an meiner Arbeit und seinen Humor.

Völlig unmöglich wäre diese Arbeit ohne Dr. Christian Straka gewesen, von dem nicht nur die Ausgangsversion des verwendeten Computerprogramms stammt, sondern der sich außerdem die Zeit genommen hat, im Rahmen zweier Treffen viele wichtige und hilfreiche Diskussionen mit mir zu führen. Vielen Dank!

Für viele interessante und nützliche Diskussionen – fachliche und auch weit darüber hinausgehende – danke ich besonders meinen Kollegen Farid Gamgami und Gunter Kaliwoda.

Allen jetzigen und vormaligen Mitarbeitern am Institut für Theoretische Astrophysik, besonders natürlich meinen Zimmerkollegen Gunter, Svitlana, Johannes und Ekaterina, danke ich für ein angenehmes, freundliches und nicht zuletzt auch unterhaltsames Arbeitsklima.

Der Mannschaft von der Kaffeepause (deren namentliche Aufzählung den Rahmen sprengen würde) danke ich für Bereicherungen und Horizonterweiterungen auf allen nur denkbaren intellektuellen Ebenen.

Den Systemadministratoren Dominikus Heinzeller, Tobias Illenseer, Robi Banerjee und vor allem Emanuel Ziegler gilt mein Dank (und meine Bewunderung) für ihre Zauberkräfte, mit denen sie diese undurchschaubaren Kisten am Laufen halten.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft gilt mein Dank für die Finanzierung dieser Arbeit, teils im Rahmen des Projektes »Zeitabhängigkeit der Atmosphärenstruktur von M-Typ Mira-Variablen«, teils im Sonderforschungsbereich 439 »Galaxien im jungen Universum«.

Nicht zuletzt danke ich auch meinen Eltern und Geschwistern für ihre Unterstützung, ohne die ein solches Vorhaben kaum zu schaffen ist.

Ganz besonders herzlich möchte ich mich bei Dir, Dorothea, für Deine Zuneigung und Anteilnahme und für alles gemeinsam Erlebte bedanken.