

**INAUGURAL-DISSERTATION**  
zur  
**Erlangung der Doktorwürde**  
der  
**Naturwissenschaftlich-Mathematischen**  
**Gesamtfakultät**  
**der Ruprecht-Karls-Universität**  
**Heidelberg**

vorgelegt von  
**Dipl.-Phys. Johannes Schönke**  
aus Stralsund

**Tag der mündlichen Prüfung: 9.6.2010**



# Zur Entstehung von Sternen und protoplanetaren Scheiben

Gutachter: Prof. Dr. Werner M. Tscharnuter  
Prof. Dr. Peter Bastian

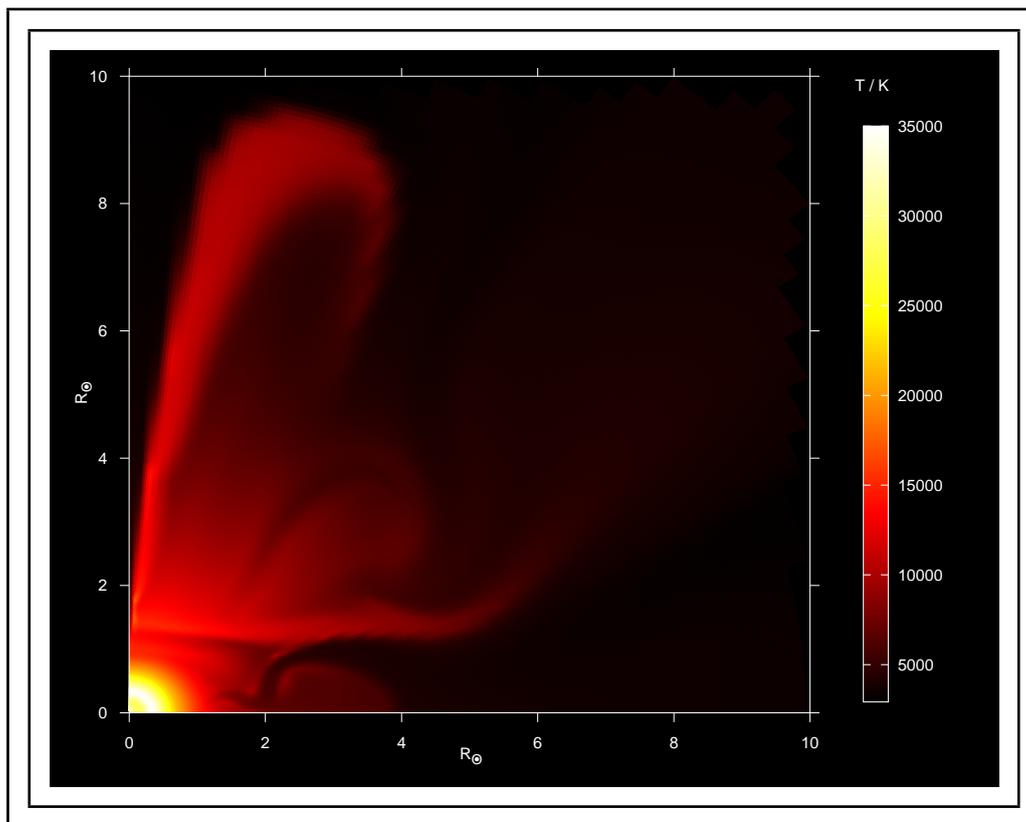


**Zusammenfassung.** Wir entwickeln einen gitterbasierten strahlungshydrodynamischen Code in axialer Symmetrie und modellieren den Kollaps eines rotierenden Molekülwolkenkerns. Als Anfangsbedingung dient eine überkritische Bonnor-Ebert-Sphäre mit einer Sonnenmasse, die mit einem maximalen Zentrifugalradius von 100 AE starr rotiert. In einer Parameterstudie variieren wir die verwendete  $\beta$ -Viskosität, um den Einfluß der turbulenten Viskosität und des entsprechenden viskosen Drehimpulstransportes zu untersuchen. Nach der anfänglichen Kontraktion der Molekülwolke und der anschließenden Bildung eines rotierenden, quasihydrostatischen ersten Kerns, hängt die weitere Entwicklung von der Größe der turbulenten Viskosität ab. Ohne Viskosität entwickelt sich eine zunehmend flachere Akkretionsscheibe, die in mehrere Ringe fragmentiert, von denen einer schließlich gravitativ kollabiert. Für  $\beta = 10^{-4}$  bildet sich ein einzelner Ring, der aufgrund der Wasserstoffdissoziation kollabiert. Bei  $\beta = 10^{-3}$  bildet sich ein zentraler Protostern nach der Wasserstoffdissoziation als Ergebnis einer säkularen Instabilität auf thermischer Zeitskala. Der erste Kern wird durch den Protostern langsam erwärmt, aber nicht zerstört. Für  $\beta = 10^{-2}$  entsteht der Protostern aus einer dynamischen Instabilität heraus und akkretiert kurzzeitig viel Material. Durch die entsprechende Wärmewirkung wird die Struktur des ersten Kerns vollständig zerstört und die Materie bis auf Radien von 500 AE ausgeworfen. Nach etwa  $10^4$  Jahren wird das Material reakkretiert und bildet dann eine massereiche protoplanetare Scheibe.

**Abstract.** We develop a grid-based radiation-hydrodynamics code with axial symmetry and model the collapse of a rotating molecular cloud core. As initial conditions we use a supercritical Bonnor-Ebert-Sphere of one solar mass, rotating uniformly with a maximum centrifugal radius of 100 AU. In a parameter study we vary the  $\beta$ -viscosity to investigate the influence of the turbulent viscosity and the respective viscous angular momentum transport. After a primary contraction of the cloud and the subsequent formation of a rotating, quasi-hydrostatic first core, the further evolution depends on the magnitude of the turbulent viscosity. Without viscosity, a flattening accretion disc forms, fragmenting into several rings. For  $\beta = 10^{-4}$ , a single ring forms and collapses due to hydrogen dissociation. For  $\beta = 10^{-3}$ , a central protostar forms after the dissociation as a result of a secular instability on a thermal timescale. The first core is heated up slowly but not destroyed by the protostar. For  $\beta = 10^{-2}$  the protostar forms out of a dynamical instability and has a strong and short accretion phase. Due to the resulting heat effect the structure of the first core is completely destroyed and its material thrown out to radii of 500 AU. After  $10^4$  years the matter comes back to form a massive protoplanetary disc.



# Zur Entstehung von Sternen und protoplanetaren Scheiben





Das erbsengroße Grabbeltier  
steigt unbemerkt aus dem Klavier.  
Es hat genug von der Musik  
und wirft sich auf Atomphysik.

---

*(Robert Gernhardt)*



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1	Beginn der Sternentstehung . . . . .	1
1.2	Frühere Untersuchungen . . . . .	2
1.2.1	Sphärisch symmetrische Kollapsrechnungen . . . . .	2
1.2.2	Rechnungen zum rotierenden Kollaps . . . . .	2
1.3	Ziele dieser Arbeit . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Eigengravitation . . . . .	5
2.2	Erhaltungsgleichungen im adiabatischen Fall . . . . .	5
2.3	Erhaltungsgleichungen mit Strahlungstransport . . . . .	6
2.4	Zustandsgleichung . . . . .	10
2.5	Opazität . . . . .	12
2.6	Drehimpulstransportproblem . . . . .	14
2.6.1	Gravitative Drehmomente . . . . .	14
2.6.2	Turbulenz . . . . .	15
2.6.3	Magnetfelder . . . . .	15
2.6.4	$\beta$ -Viskosität . . . . .	16
2.7	Künstliche Viskosität . . . . .	17
2.8	Zeitskalen . . . . .	18
2.9	Gravitationsinstabilitäten . . . . .	19
2.9.1	Kritische Gleichgewichte isothermer Gaskugeln . . . . .	19
2.9.2	Toomre-Instabilität dünner Gasscheiben . . . . .	20
2.10	Das gesamte Gleichungssystem im Überblick . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Technische Realisierung</b>	<b>23</b>
3.1	Räumliches Koordinatensystem . . . . .	23
3.1.1	Lokal uniformes Gitter in axialer Symmetrie . . . . .	23
3.1.2	Bemerkungen zum vollen 3D-Gitter in Kugelkoordinaten . . . . .	25
3.2	Diskretisierung auf einem gestaffelten Gitter . . . . .	26
3.2.1	Genauigkeit der Diskretisierung . . . . .	28
3.3	Auswertung der Materialfunktionen mittels Splines . . . . .	29
3.3.1	Birationale Spline-Interpolation . . . . .	29
3.4	Lösung der linearen Gleichungssysteme . . . . .	30
3.4.1	Versagen iterativer Lösungsmethoden . . . . .	30
3.4.2	Direkte Löser . . . . .	30
3.5	Separation dominanter Strukturen linearer Gleichungen . . . . .	32
3.5.1	Erläuterung am Beispiel der Poissongleichung . . . . .	32
3.5.2	Anwendung auf andere Gleichungen . . . . .	33

3.6	Der gesamte Algorithmus im Überblick . . . . .	34
3.7	Teil A: Bestimmung des Zeitschrittes . . . . .	34
3.8	Teil B: Lösung der Poissongleichung . . . . .	36
3.8.1	Sphärischer Anteil . . . . .	36
3.8.2	Nichtsphärischer Anteil . . . . .	36
3.8.3	Multipolentwicklung der nichtsphärischen Potentialrandwerte . . . . .	37
3.9	Teil C: Explizite Auswertung der Impulsquellen . . . . .	38
3.10	Teil D: Implizite Auswertung der Energiegleichungen . . . . .	39
3.10.1	Schritt 1: Advektions-, Diffusions- und Diffusionsarbeitsterm . . . . .	40
3.10.2	Schritt 2: Lösung der nichtlinearen Gleichungen . . . . .	43
3.11	Teil E: Transportschritt . . . . .	44
3.11.1	Explizites Finite-Volumen-Verfahren . . . . .	45
3.12	Teil F: Aktualisierungen und Ausgabe . . . . .	48
3.12.1	Aktualisierung der Materialfunktionen und der Energiebilanz . . . . .	48
3.12.2	Ausgabe . . . . .	48
3.13	Symmetrieanahmen . . . . .	48
3.13.1	Kugelsymmetrie . . . . .	48
3.13.2	Äquatorsymmetrie . . . . .	49
3.13.3	Rotationssymmetrie . . . . .	49
3.14	Randbedingungen . . . . .	50
3.14.1	Aus Symmetrieanahmen resultierende Randbedingungen . . . . .	50
3.14.2	Äußerer Rand . . . . .	50
3.14.3	Möglicher innerer Rand . . . . .	51
3.15	Anfangsbedingungen . . . . .	54
3.15.1	Überkritische Bonnor-Ebert-Sphäre . . . . .	54
3.15.2	Strahlungsgleichgewicht . . . . .	55
3.15.3	Starre Rotation . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Ergebnisse und Diskussion</b> . . . . .	<b>57</b>
4.1	Analytische Lösungen homogener Strömungen . . . . .	57
4.1.1	Radial lineare Strömungen . . . . .	58
4.1.2	Inkompressible Strömungen . . . . .	58
4.2	Testrechnungen . . . . .	59
4.2.1	Sphärischer Advektionstest . . . . .	59
4.2.2	Axialsymmetrischer Advektionstest . . . . .	60
4.2.3	Druckfreier sphärischer Gravitationskollaps . . . . .	62
4.2.4	Weitere Testrechnungen . . . . .	63
4.3	Allgemeines zu den Simulationen . . . . .	63
4.3.1	Die verschiedenen Entwicklungsphasen . . . . .	64
4.3.2	Kontrolle der Gesamtenergie . . . . .	65
4.3.3	Erläuterungen zu den Abbildungen . . . . .	65
4.4	Phase 0: Kontraktion der Bonnor-Ebert-Sphäre . . . . .	66
4.5	Simulation für $\beta = 0$ . . . . .	68
4.5.1	Phase 1 . . . . .	68
4.6	Simulation für $\beta = 10^{-4}$ . . . . .	78
4.6.1	Phase 1 . . . . .	78

4.6.2	Phase 2	84
4.7	Simulation für $\beta = 10^{-3}$	90
4.7.1	Phase 1	90
4.7.2	Phase 2	94
4.8	Simulation für $\beta = 10^{-2}$	104
4.8.1	Phase 1	104
4.8.2	Phase 2	108
4.8.3	Langzeitentwicklung der Phase 2	118
<b>5</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>123</b>
5.1	Die Ergebnisse im Überblick	123
5.2	Ausblick	126



# 1 Einleitung

## 1.1 Beginn der Sternentstehung

Der momentane Forschungsstand legt nahe, daß Sternentstehung in den Kernen von Molekülwolken stattfindet (siehe z.B. [Larson, 2003]). Diese Kerne stellen die am stärksten verdichteten Regionen in den oft filamentartigen Strukturen der Wolken dar. Die Massen- und Größenskalen reichen von ca.  $1 M_{\odot}$  und  $0.1 \text{ pc}$  bis hinauf zu etwa  $10^3 - 10^4 M_{\odot}$  und einigen  $\text{pc}$ . Je nach Größe können aus solchen Objekten dann Einzelsterne, kleine Mehrfachsysteme oder auch größere Sternhaufen entstehen. Mit charakteristischen Temperaturen von  $10 \text{ K}$  und Teilchenzahldichten von bis zu  $10^{11} \text{ m}^{-3}$ , sollten Molekülwolkenkerne, wenn sie rein druckstabilisiert wären, sehr schnell und effektiv kollabieren und neue Sterne bilden. Beobachtungen zeigen jedoch, daß die Sternentstehungsrate wesentlich kleiner ist als man annehmen sollte, nur ein paar Prozent der vorhandenen Masse werden tatsächlich zu Sternen. Das liegt vornehmlich daran, daß viele Molekülwolken sich keineswegs in Gleichgewichtskonfigurationen befinden, sondern vielmehr dynamisch schnell veränderliche, filamentartige Strukturen mit internen Überschallströmungen darstellen. Welchen Einfluß Magnetfelder, Turbulenz und Sternwinde bereits vorhandener benachbarter Sterne auf diese dynamischen Prozesse haben, ist immer noch ein sehr umstrittener Forschungsgegenstand [Larson, 2003]. Es existieren jedoch auch vergleichsweise ruhige, isolierte interstellare Molekülwolken, die so genannten Bok-Globulen [Bok and Reilly, 1947]. Diese Objekte befinden sich nahezu im hydrostatischen Gleichgewicht [Frerking et al., 1985] und gehören zu den kühlfsten uns bekannten Objekten im Universum.

Wird ein rotierender Molekülwolkenkern gravitativ instabil (z.B. durch Abkühlung oder durch eine Verdichtungsströmung), so kontrahiert er zunächst auf der Skala der Freifallzeit (siehe §2.8), bis die zentralen Bereiche optisch dick werden und sich ein adiabatischer erster Kern bildet, welcher von einer Akkretionsstoßfront umgeben ist. Erwärmen sich die zentralen Bereiche des ersten Kerns so stark, daß es zur Dissoziation von Wasserstoff kommt, werden diese Bereiche instabil und es folgt ein zweiter Kollaps, der zur Bildung eines protostellaren Kerns führt. Diese hier kurz umrissene Entwicklung hängt neben der Massenverteilung der Wolke auch stark von der Verteilung des Drehimpulses ab, sowie von den Transportmechanismen, die für die Umverteilung desselben sorgen. Der weitere zeitliche Verlauf nach dem zweiten Kollaps ist im Detail praktisch unbekannt, woraus sich einer der Beweggründe für diese Arbeit ergibt.

## 1.2 Frühere Untersuchungen

### 1.2.1 Sphärisch symmetrische Kollapsrechnungen

Die ersten numerischen Arbeiten zu diesem Thema gingen noch von einer rein isothermen Entwicklung aus und konnten daher nur die frühesten Phasen des Kollapses verfolgen (siehe z.B. [Bodenheimer and Sweigart, 1968]). Eine neue Qualität stellte die Rechnung von Larson ([Larson, 1969]) dar. Dieser konnte erstmals die globale Entwicklung des Kollapses einer kugelsymmetrischen Gasverteilung bis zum Ende der Hauptakkretionsphase des entstandenen Protosterns verfolgen. Dabei wurde der Strahlungstransport in der Diffusionsapproximation behandelt und für die Stoßfront des Protosterns eine Konstruktionsvorschrift entsprechend der bekannten adiabatischen Sprungbedingungen verwendet. Interessanterweise dauerte es dann über 30 Jahre, bis eine wiederum verbesserte Rechnung zum Thema erfolgte. In [Wuchterl and Tscharnuter, 2003] wurde die globale Entwicklung von der Molekülwolke bis zur Vor-Hauptreihen-Phase des Sterns mit einem selbstkonsistenten System von Gleichungen berechnet, ohne daß dabei künstliche Bedingungen für bestimmte Teile der Strömung angenommen werden mußten.

### 1.2.2 Rechnungen zum rotierenden Kollaps

Die ersten Versuche den Kollaps mit Rotation in mehrdimensionalen Rechnungen zu untersuchen wurden bereits vor 20 Jahren mit gitterbasierten Methoden unternommen, wobei insbesondere in 3D nur fragwürdige räumliche Auflösungen möglich waren (siehe z.B. [Boss, 1989], [Bodenheimer et al., 1990]). Allen neueren Arbeiten, egal ob sie gitterbasiert sind (z.B. [Saigo et al., 2008]) oder SPH<sup>1</sup>-Methoden verwenden (z.B. [Walch et al., 2009]), ist gemein, daß sie die zugrunde liegende Physik sehr vereinfachen (z.B. stückweise polytrope Zustandsgleichungen annehmen) und so die energetischen Verhältnisse vollkommen unzureichend beschreiben. Außerdem ist es nur in den Arbeiten von [Tscharnuter, 1987], [Bate, 1998], [Stamatellos et al., 2007] und [Saigo et al., 2008] überhaupt gelungen die Phase des zweiten Kollapses zu simulieren. Jedoch konnte auch in diesen Rechnungen die weitere Entwicklung des neu entstandenen Protosterns maximal für einen Zeitraum von einigen Tagen verfolgt werden. Die Besonderheit der Arbeit von [Tscharnuter, 1987] bestand darin, daß zum einen der Strahlungstransport (in der Diffusionsapproximation) und eine realistische Zustandsgleichung berücksichtigt wurde, zum anderen ein zeitlich voll implizites Verfahren mit einer Reihenentwicklung der Winkelanteile in orthogonale Polynome zum Einsatz kam (vgl. auch [Tscharnuter et al., 2009]).

---

<sup>1</sup>Smoothed Particle Hydrodynamics

## 1.3 Ziele dieser Arbeit

Wir möchten einen gitterbasierten, strahlungshydrodynamischen Code entwickeln, um die globale Entwicklung des Kollapses eines rotierenden Molekülwolkenkerns in allen räumlich relevanten Skalen zu modellieren. Dabei soll der wichtige Aspekt im Vordergrund stehen, daß wir ein in sich konsistentes Gleichungssystem verwenden, welches die zugrunde liegende Physik in möglichst realistischer Form berücksichtigt. Dies bedeutet, daß wir detaillierte Materialfunktionen (Zustandsgleichungen, Opazitäten) verwenden und den Strahlungstransport (zumindest in der Diffusionsapproximation) implementieren. Wir werden uns auf die Untersuchung axialsymmetrischer Konfigurationen beschränken, um dadurch im Gegenzug jedoch so hohe räumliche Auflösungen zu realisieren, daß wir den zweiten Kollaps und die Entstehung des Protosterns verfolgen können. Darüber hinaus möchten wir analysieren, welche Prozesse und Interaktionen es zwischen dem Protostern und dem ersten Kern während der allerersten Phase nach der Bildung des Zentralobjekts geben kann. Dazu wird es nötig sein, die Gesamtentwicklung des Systems nach dem zweiten Kollaps für einen Zeitraum zu berechnen, der weit über alles hinausgeht, was bisher in mehrdimensionalen Simulationen erreicht werden konnte.



## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Abschnitt möchten wir die verwendeten Gleichungen ableiten und ihre Beziehungen zu den physikalischen Gesetzen beleuchten. Wir gehen dabei auch auf die notwendigen Näherungen und Vereinfachungen ein, welche Teil einer jeden theoretischen Modellbildung sind.

### 2.1 Eigengravitation

Als primärer Energiequelle der zu untersuchenden Objekte kommt der Eigengravitation eine besondere Bedeutung zu. Für den uns interessierenden (nicht-relativistischen) Grenzfall ist die mathematische Behandlung der Gravitation denkbar einfach im Vergleich zu den noch folgenden Teilproblemen (Hydrodynamik und Strahlungstransport). Wie wir seit Newton wissen [[Newton, 1687](#)], läßt sich die klassische Gravitation als eine Zentralkraft zwischen Massenelementen beschreiben. Daher ist das resultierende Kraftfeld konservativ und besitzt somit ein skalares Potential, das Gravitationspotential  $\Phi$ . Aus diesem können wir dann wiederum über negative Gradientenbildung die Kraftkomponenten ableiten. Für eine kontinuierliche Massenverteilung mit der Massendichte  $\rho$  genügt  $\Phi$  der Poissongleichung

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho. \tag{2.1}$$

Zusammen mit der Randbedingung daß  $\Phi$  im Unendlichen verschwinden muß, ist die elliptische Differentialgleichung (2.1) eindeutig lösbar.

### 2.2 Erhaltungsgleichungen im adiabatischen Fall

Aus Gründen der Übersichtlichkeit betrachten wir zunächst die hydrodynamischen Gleichungen für den Fall daß die innere Energie ausschließlich durch Advektion, also Mitnahme durch die Strömung, transportiert werden kann (Adiabasie). Die Hinzunahme des Strahlungstransportes erfolgt dann im nächsten §2.3. Die Gleichungen der Hydrodynamik folgen direkt aus der Bilanz der grundlegenden Erhaltungsgrößen der klassischen Physik: Masse, Impuls und Energie. Die Massenbilanz, auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet,

bestimmt die Entwicklung der Massendichte  $\rho$  und lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2.2)$$

Die Impulsbilanz, gemeinhin auch Als Navier-Stokes-Gleichung bekannt, bestimmt die Entwicklung der Impulsdichte  $\rho \mathbf{v}$  und ergibt sich zu

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \mathbf{Q}. \quad (2.3)$$

Die Quellterme auf der rechten Seite von (2.3) entsprechen der Reihe nach der Druckkraft, der Gravitationskraft und den viskosen Spannungen, vermittelt durch den Spannungstensor

$$\mathbf{Q} = 2\rho\nu \left[ \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{1} \right], \quad (2.4)$$

wobei  $\nu$  die kinematische Viskosität (siehe §2.6.4 und §2.7),  $\nabla \mathbf{v}$  der symmetrisierte Tensor des Geschwindigkeitsgradienten und  $\mathbf{1}$  der Einheitstensor ist. Die Energiebilanz beschreiben wir mit Hilfe der inneren Energiedichte  $e$ , welche bestimmt ist durch

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{v}. \quad (2.5)$$

In (2.5) entsprechen die Quellterme der rechten Seite der Heizung durch Umsetzung von kinetischer in thermische Energie, zum einen durch Volumenarbeit gegen den Druck, zum anderen durch viskose Reibung.

## 2.3 Erhaltungsgleichungen mit Strahlungstransport

Nun erweitern wir die hydrodynamischen Gleichungen aus §2.2 um einen Energietransportmechanismus, den Strahlungstransport in der grauen (über alle Frequenzen integrierten), flußbegrenzten Diffusionsapproximation. Die Ableitung eines konsistenten strahlungshydrodynamischen Gleichungssystems in dieser Näherung ist in [Krumholz et al., 2007] sehr ausführlich dargestellt. Im Folgenden geben wir eine Zusammenfassung dieser Ableitung. Für die Unterteilung strahlungshydrodynamischer Systeme in spezifische Regime ist es sinnvoll, zwei dimensionslose Größen  $\tau$  und  $\beta$  zu definieren. Seien  $l$  und  $u$  die charakteristische Längenskala bzw. Geschwindigkeit des Systems, sowie  $l_f = 1/(\kappa\rho)$  die mittlere freie Weglänge der Photonen (mit der Opazität  $\kappa$ , siehe §2.5). Dann ist

$$\tau = \frac{l}{l_f} = l\kappa\rho$$

ein Maß für die mittlere optische Tiefe und

$$\beta = \frac{v}{c}$$

charakterisiert wie relativistisch das System ist. Da wir nur nicht-relativistische Objekte untersuchen wollen, gilt stets  $\beta \ll 1$ . Darüber hinaus unterscheiden wir drei Grenzfälle:

$$\tau \ll 1, \quad (\text{Freistrahllimit}), \quad (2.6)$$

$$\tau \gg 1, \quad \beta\tau \ll 1, \quad (\text{statisches Diffusionslimit}), \quad (2.7)$$

$$\tau \gg 1, \quad \beta\tau \gg 1, \quad (\text{dynamisches Diffusionslimit}). \quad (2.8)$$

Im *Freistrahllimit*, also in einer optisch dünnen Umgebung ( $\tau \ll 1$ ), gibt es nur eine sehr schwache Kopplung zwischen Strahlung und Materie, die Strahlung kann sich praktisch ungehindert mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Die Diffusionsapproximation ist für die Modellierung dieses Regimes eigentlich ungeeignet, man muß die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit Hilfe eines Flußlimiters auf  $c$  begrenzen (siehe unten). Im Diffusionsgrenzfall optisch dicker Umgebungen ( $\tau \gg 1$ ), unterscheiden wir zwischen dem *statischen Diffusionslimit*, in dem das Strömungsfeld so langsam ist, daß Diffusions-, Absorptions- und Emissionsprozesse dominieren im Vergleich zur Advektion von Strahlungsenergie und mechanischer Arbeit die diese Energie am Gas leistet, und andererseits dem *dynamischen Diffusionslimit* in dem die Verhältnisse gerade umgekehrt sind.

Ein gutes Beispiel für dynamische Diffusion ist das Innere eines Sterns. So hat unsere Sonne eine gesamte optische Tiefe von  $\tau \approx 10^{11}$  und Konvektions- sowie Rotationsgeschwindigkeiten  $u \gg 10^{-11}c = 3 \text{ mm s}^{-1}$ , liegt also weit im dynamischen Diffusionsbereich.

Die weitere Vorgehensweise in [Krumholz et al., 2007] besteht nun zunächst darin, die vollständigen strahlungshydrodynamischen Gleichungen bis zur zweiten Ordnung in  $\beta$  zu entwickeln. Anschließend wird die flußbegrenzte Diffusionsapproximation im mitbewegten System ausgewertet (denn nur dort ist sie, wenn überhaupt, gültig). Sei  $E_0$  die Strahlungsenergiedichte und  $\mathbf{F}_0$  der Strahlungsfluß, so lautet die Approximation

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{c\lambda}{\kappa\rho} \nabla E_0, \quad (2.9)$$

wobei die mit null indizierten Größen bezüglich des mitbewegten Systems zu verstehen sind, und  $\lambda$  ein möglicher Flußlimiter (hier nach [Levermore and Pomraning, 1981]) ist

$$\lambda = \frac{1}{s} \left( \coth s - \frac{1}{s} \right), \quad (2.10)$$

$$s = \frac{|\nabla E_0|}{\kappa\rho E_0} \quad (2.11)$$

Die weitere Herleitung ist jedoch unabhängig von der genauen funktionalen Abhängigkeit  $\lambda(s)$ . Allen Flußlimitern gemein ist die Eigenschaft, daß für  $s \rightarrow 0$ , also im optisch Dicken,  $\lambda \rightarrow 1/3$  gilt und wir mit (2.9) das Diffusionsgesetz erhalten. Wohingegen sich für  $s \rightarrow \infty$ , also im optisch Dünnen,  $\lambda \rightarrow 1/s$  ergibt und mit (2.9)  $\mathbf{F}_0 \rightarrow cE_0\mathbf{n}_0$  gilt, wobei  $\mathbf{n}_0$  der Einheitsvektor antiparallel zu  $\nabla E_0$  ist. Somit ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit begrenzt auf  $c$ . Der diesem  $\lambda$  entsprechende Strahlungsdrucktensor  $\mathbf{P}_0$  ergibt sich nach [Levermore, 1984] zu

$$\mathbf{P}_0 = \frac{E_0}{2} \left[ (1 - \tilde{f}) \mathbf{1} + (3\tilde{f} - 1) \mathbf{n}_0\mathbf{n}_0 \right]. \quad (2.12)$$

worin

$$\tilde{f} = \lambda + (\lambda s)^2 = \left( \coth s - \frac{1}{s} \right) \coth s \quad (2.13)$$

ein Maß für die Isotropie ist. Im optisch Dicken erhalten wir  $\tilde{f} \rightarrow 1/3$ , wodurch  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{1} E_0/3$  isotrop wird und alle nichtdiagonalen Einträge verschwinden. Im optisch Dünnen ergibt sich dagegen  $\tilde{f} \rightarrow 1$ , also ist  $\mathbf{P}_0 = E_0$  in Richtungen parallel zu  $\mathbf{n}_0$ , bzw.  $\mathbf{P}_0 = 0$  in Richtungen orthogonal zu  $\mathbf{n}_0$ . Aus Gründen der Übersichtlichkeit in den resultierenden Gleichungen führen wir noch die Abkürzung

$$f = \frac{3 - \tilde{f}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \coth s - \frac{1}{s} \right) \coth s \quad (2.14)$$

ein. Das optisch dünne Limit entspricht  $f \rightarrow 1$  und das optisch dicke  $f \rightarrow 4/3$ .

Nun folgt eine Lorentztransformation der mitbewegten Strahlungsfeldgrößen  $E_0$ ,  $\mathbf{F}_0$  und  $\mathbf{P}_0$  auf die entsprechenden Größen  $E$ ,  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{P}$  im ruhenden Bezugssystem. Im Rahmen der betrachteten Genauigkeit bei der Entwicklung nach  $\beta$  und  $\tau$  stellt sich heraus, daß sowohl  $E \approx E_0$  als auch  $\mathbf{P} \approx \mathbf{P}_0$  gilt. Jedoch muß der Strahlungsfluß im ruhenden System

$$\mathbf{F} = -\frac{c\lambda}{\kappa\rho} \nabla E + \mathbf{v}E + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} \quad (2.15)$$

lauten. Die letzten beiden Terme  $\mathbf{v}E + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}$  in (2.15) stellen die Advektion der Strahlungsenthalpie  $E + \mathbf{P}$  dar und dominieren den ersten Term (Strahlungsdiffusion) im Regime der dynamischen Diffusion.

Schließlich werden die transformierten Größen in die strahlungshydrodynamischen Gleichungen eingesetzt, um anschließend eine vollständige Analyse bezüglich der Skalierung in  $\beta$  und  $\tau$  vorzunehmen. Das Ziel besteht darin, am Ende ein System zu erhalten, daß in allen erläuterten Regimen (2.6)–(2.8) in erster Ordnung in  $\beta$  konsistent ist. Dies ist nicht trivial, da in der Entwicklung Terme auftreten die z.B. mit  $\beta^2\tau$  skalieren. Befänden wir uns beispielsweise im Regime der dynamischen Diffusion (2.8) wäre es falsch einen  $\beta^2\tau$ -Term zu vernachlässigen, während man alle  $\beta$ -Terme berücksichtigt, da ersterer Term

im Vergleich viel größer wäre.

Wir geben hier die letztendlich resultierenden Gleichungen an und verweisen für eine ausführliche Herleitung auf [Krumholz et al., 2007]. Zum einen wird die bisherige Impulsbilanz (2.3) um den Strahlungsdruck  $-\lambda\nabla E$  erweitert

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p - \rho \nabla \Phi + \nabla \cdot \mathbf{Q} \underbrace{-\lambda \nabla E}_{\text{neu}}. \quad (2.16)$$

Weiterhin wird die Bilanz der inneren Energiedichte (2.5) um mehrere Quellterme ergänzt und wir erhalten eine neue Gleichung für die Strahlungsenergiedichte  $E$ . Es ergibt sich

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{v} + \underbrace{c\kappa\rho (E - aT^4) + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E - f\kappa\rho \frac{v^2}{c} E}_{\text{neu}}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (f E \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left( \frac{c\lambda}{\kappa\rho} \nabla E \right) - c\kappa\rho (E - aT^4) - \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E + f\kappa\rho \frac{v^2}{c} E. \quad (2.18)$$

Die Konservierung der Energie bezüglich des Austausches von Strahlungsenergie und innerer Energie ist bis auf Maschinengenauigkeit durch die diesbezüglich konservative Formulierung der Gleichungen (2.17) und (2.18) gesichert. Denn die Quellen in der Strahlungsenergiebilanz haben entsprechende Senken in der inneren Energiebilanz oder umgekehrt. Die beiden anderen Terme in (2.18) entsprechen Advektions bzw. Diffusionsprozessen, sind also Oberflächenterme. Die einzelnen Ausdrücke in (2.18) erklären sich von links wie folgt: Nach der Zeitableitung haben wir die schon erwähnte Advektion der Strahlungsenthalpie  $E + \mathbf{P}$ , dann auf der rechten Seite natürlich die Strahlungsdiffusion, weiterhin die Emission und Absorption der Strahlung (also die Austauschprozesse mit der Materie), dann die Arbeit des Strahlungsfeldes während der Diffusion durch das Gas, und schließlich einen weiteren Arbeitsterm, der die neben der Diffusion auftauchenden Korrekturen des Flusses in (2.15) berücksichtigt.

Im Gegensatz zu den Energiegleichungen ist die Impulsbilanz (2.16) nicht konservativ (bezüglich der Strahlungsterme), da der Strahlungsdruck keinen entsprechenden Gegenpart besitzt. Dies begründet sich damit, daß in der Diffusionsapproximation zwar die Strahlung ihren Impuls auf das Gas übertragen kann, jedoch der Strahlungsimpuls nicht explizit betrachtet wird und daher ein Übertrag von Gasimpuls auf das Strahlungsfeld nicht berücksichtigt werden kann.

Der entscheidende Vorteil der Formulierung der Gleichungen (2.16)–(2.18) im ruhenden Bezugssystem besteht darin, daß eine direkte Verwendung in numerischen Algorithmen möglich ist (in denen meistens eine eulersche Formulierung der hydrodynamischen Gleichungen zum Einsatz kommt).

Die hier beschriebene Näherung des Strahlungstransportes stellt vom technischen Auf-

wand her einen Mittelweg zwischen verschiedenen Modellierungsmöglichkeiten dar. Einfachere Herangehensweisen (z.B. isotherme oder polytrope Modelle) sind definitiv nicht ausreichend für unsere Untersuchungen. Komplexere Ansätze (z.B. das Lösen der vollen Transportgleichung mit Hilfe der Theorie der kurzen Charakteristiken) sind in Verbindung mit mehrdimensionaler Hydrodynamik im Rahmen einer Dissertation vollkommen illusorisch, zumal wenn sie neu implementiert werden sollen.

## 2.4 Zustandsgleichung

Die in den Impuls- und Energiebilanzen (2.16)–(2.18) auftretenden Variablen Druck  $p$  und Temperatur  $T$  stellen abgeleitete Größen der primären thermodynamischen Variablen Dichte  $\rho$  und innerer Energiedichte  $e$  dar.  $p$  und  $T$  sind bis jetzt nicht näher bestimmt, wir benötigen also noch die Zustandsgleichung, welche uns die Zusammenhänge

$$p = p(\rho, e), \quad T = T(\rho, e) \quad (2.19)$$

liefert. Die Beziehungen (2.19) müssen, um die Sternentstehung beschreiben zu können, einen über viele Größenordnungen gehenden Dichtebereich ( $10^{-16} \dots +3 \text{ kg m}^{-3}$ ) und Temperaturbereich ( $10^{1 \dots 7} \text{ K}$ ) abdecken. Daher fassen diese Materialfunktionen in sich eine Vielzahl mikrophysikalischer Prozesse zusammen. Betrachten wir ein Gemisch aus Wasserstoff und Helium (und in Spuren vorhandenen schwereren Elementen) in der Gasphase, so sind wir unter anderem mit folgenden wichtigen thermodynamischen Prozessen konfrontiert (beginnend bei kleinen Temperaturen):

Bei  $T \lesssim 80 \text{ K}$  liegt der Wasserstoff zwar in molekularer Form vor, jedoch sind die inneren Freiheitsgrade der Rotation und Vibration des Moleküls praktisch „eingefroren“, d.h. die Temperaturen sind nicht ausreichend, um die nötigen Anregungsenergien zu liefern. Ab etwa 80 K werden die ersten Rotationsenergieniveaus angeregt, nach und nach kommen nun alle weiteren Rotationsmoden dazu. Der Prozess ist bei ca. 500 K abgeschlossen und sorgt für eine monoton ansteigende spezifische Wärme  $c_v$  des Gasgemisches. Es sei bemerkt, daß die Entwicklung der Rotationsfreiheitsgrade entscheidend vom Verhältnis von Orthowasserstoff (Kernspins sind parallel) zu Parawasserstoff (Kernspins sind antiparallel) abhängt. Der soeben beschriebene Ablauf gilt für ein Ortho:Para-Verhältnis von 3:1. Dieses Verhältnis wird bei der Bildung von  $\text{H}_2$  auf der Oberfläche kalter Staubpartikel angenommen [Flower et al., 2006]. Wenn aber die  $\text{H}_2$ -Moleküle die Möglichkeit haben in ihr thermodynamisches Gleichgewicht zu gelangen, dann verschiebt sich für sinkende Temperatur das Ortho:Para-Verhältnis zu Gunsten des Parawasserstoffes (im Gleichgewicht gibt es für  $T \rightarrow 0$  nur noch Parawasserstoff). Der erheblich variierende Verlauf der spezifischen Wärme (und der daraus folgende Adiabatenexponent) für verschiedene Ortho:Para-Verhältnisse kann die dynamische Stabilität von Objekten in diesem Temperaturbereich

maßgeblich beeinflussen. Da jedoch die Relevanz und die Zeitskalen der einzelnen Prozesse die zur Thermalisierung (d.h. zum Gleichgewicht) führen bislang unklar sind (vgl. [Boley et al., 2007]), müssen wir hier von einer detaillierteren Behandlung absehen. Wir gehen von einem festen Ortho:Para-Verhältnis von 3:1 aus.

Ab etwa 500 K können nach und nach die Vibrationsenergieniveaus angeregt werden, wodurch weitere Freiheitsgrade zur Verfügung stehen. Bei  $T \gtrsim 1500$  K müssen wir beachten, daß ein fließender Übergang zur Dissoziation des  $H_2$ -Moleküls stattfindet. Zum einen gilt es dann die zunehmende Anharmonizität der Molekülschwingungen zu berücksichtigen, zum anderen stehen nur endlich viele Anregungszustände zur Verfügung bevor die Dissoziation einsetzt. Oberhalb von etwa 2200 K ist der Wasserstoff vollständig dissoziiert. Die Dissoziation der  $H_2$ -Moleküle ist der erste Prozess (im Sinne steigender Temperaturen), der das mittlere Molekulargewich  $\mu$  erniedrigt.

Die Ionisation läßt sich mit der Saha-Gleichung beschreiben. Der Ionisationsgrad ist sowohl Temperatur- als auch Druckabhängig. Für reinen Wasserstoff erhalten wir z.B. in der Photosphäre unserer Sonne für einen Druck  $P \approx 6.8$  kPa und eine Temperatur  $T \approx 5636$  K praktisch neutralen Wasserstoff mit einem Ionisationsgrad von  $10^{-4}$ . Dagegen sind in einer tieferen Schicht unseres Sterns mit Werten von  $P \approx 156$  GPa und  $T \approx 7.15 \cdot 10^5$  K so gut wie alle Wasserstoffatome (zu einem Grad von 0.993) ionisiert (vgl. [Kippenhahn and Weigert, 1990]). Die erste Heliumionisation überlappt sich mit der Wasserstoffionisation, die zweite dagegen beginnt erst dann wenn der Wasserstoff vollständig ionisiert ist. Da nach der Saha-Formel mit steigendem Druck (bzw. steigender Teilchenzahldichte) die Rekombinationszeit und somit der Ionisationsgrad sinkt, gibt es Situationen in denen diese Formel versagt (z.B. im Zentrum unserer Sonne). Dies liegt daran, daß die Saha-Formel die Absenkung der Ionisationsenergien bei hohen Teilchenzahldichten nicht berücksichtigt: Wenn die Abstände zwischen den Ionen vergleichbar mit den Orbitalradien ihrer Elektronen sind, werden mit steigender Dichte nach und nach die höher angeregten Zustände nicht mehr gebunden sein. Es läßt sich leicht abschätzen daß im Zentrum unserer Sonne, wegen dieser so genannten Druckionisation, selbst der Grundzustand des Wasserstoffatoms nicht mehr gebunden ist. Man benutzt die Saha-Formel meist so lange bis der Ionisationsgrad ein Maximum erreicht und nimmt ab dann volle Ionisation an [Kippenhahn and Weigert, 1990].

Wie aus den Ergebnissen unserer Rechnungen ersichtlich sein wird, kommen wir nicht in Bereiche, in denen die Entartung der Elektronen eine Rolle spielt und brauchen diesen Zustand der Materie nicht zu berücksichtigen.

## 2.5 Opazität

Weiterhin taucht in den Energiebilanzen (2.17) und (2.18) die Opazität  $\kappa$  auf. In unseren Gleichungen entspricht  $\kappa$  einem spezifischen Wirkungsquerschnitt und hat somit die Dimension Fläche / Masse<sup>1</sup>. Um für unseren grauen Strahlungstransport eine geeignete Relation der Form

$$\kappa = \kappa(\rho, e) \quad (2.20)$$

zu erhalten, müssen wir den frequenzabhängigen spezifischen Wirkungsquerschnitt  $\kappa(\nu)$  auf geeignete Art und Weise über alle Frequenzen mitteln<sup>2</sup>. Ist  $\mathbf{F}_0$  wie in §2.3 der (frequenzintegrierte) Strahlungsfluß im mitbewegten System und  $\mathbf{F}_0(\nu)$  der entsprechende Fluß pro Frequenzintervall, dann ergibt sich eine flußerhaltende Mittelung für  $\kappa$  in dem wir

$$\kappa \mathbf{F}_0 = \int_0^\infty \kappa(\nu) \mathbf{F}_0(\nu) d\nu \quad (2.21)$$

fordern. Verwenden wir nun die Diffusionsapproximation (2.9) in frequenzabhängiger Form und gehen von einem Schwarzkörperspektrum aus, d.h.  $E_0(\nu) \propto B(\nu, T)$  (mit der Planckfunktion  $B(\nu, T)$ ), erhalten wir das Rosseland-Mittel

$$\kappa = \left( \int_0^\infty \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} d\nu \right) / \left( \int_0^\infty \frac{1}{\kappa(\nu)} \frac{\partial B(\nu, T)}{\partial T} d\nu \right), \quad (2.22)$$

es entspricht einem harmonischen Mittelwert, wobei jeder Beitrag mit  $\partial B(\nu, T)/\partial T$  gewichtet wird.

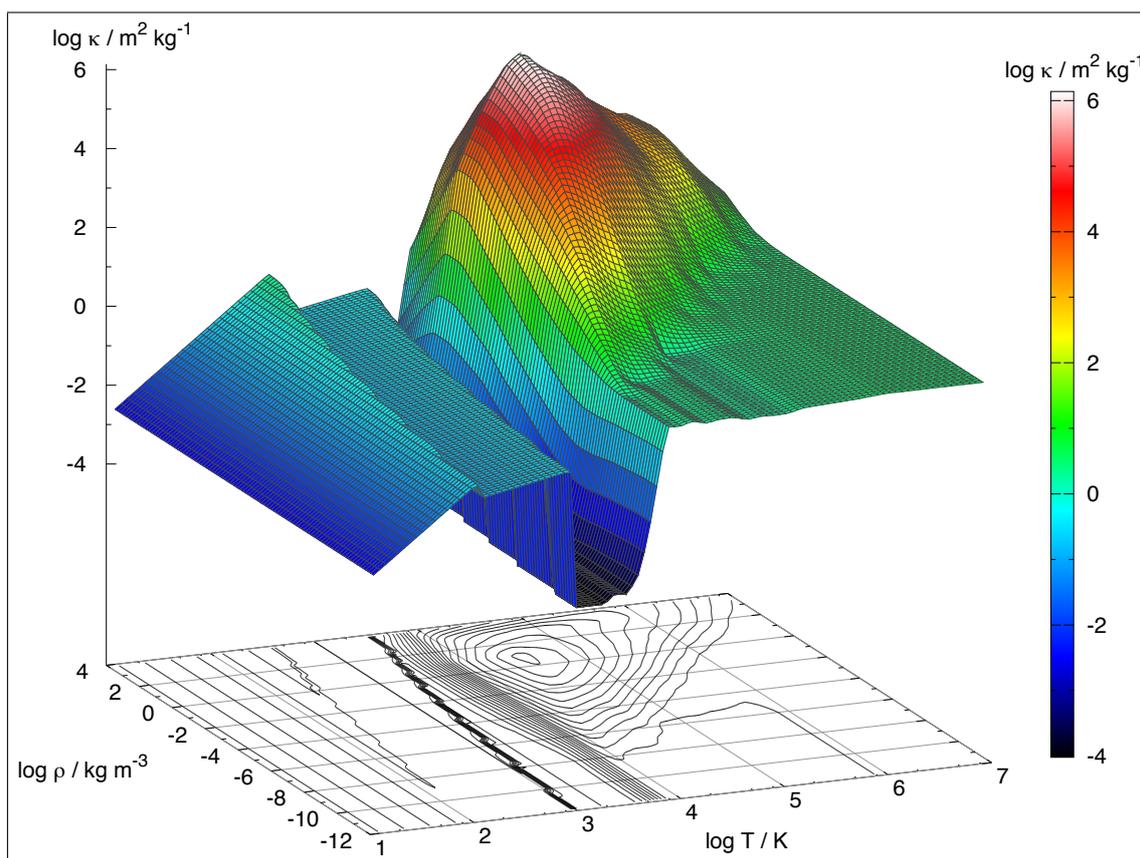
Werte für  $\kappa(\nu)$  (und daraus resultierende Werte für  $\kappa$  mittels (2.22)) sind zum einen durch experimentelle Absorptionsmessungen über die letzten Jahrzehnte immer genauer bestimmt worden, zum anderen aus theoretischen Überlegungen abgeleitet. Natürlich muß auch für die Opazität der in §2.4 erwähnte, sehr umfangreiche Dichte- und Temperaturbereich abgedeckt werden. Hier ein kurzer Überblick zu den wichtigsten Strahlungsabsorbern (wiederum beginnend bei kleinen Temperaturen):

Für  $T \lesssim 1400$  K liefern die vorhandenen Staubpartikel den wesentlichen Beitrag zur Absorption. Unterhalb der Verdampfungstemperatur von Wassereis sind die Staubkörner von diesem Eis überzogen und es gilt  $\kappa \propto T^2$ . Die Verdampfung von Wassereis zeigt (neben der Temperatur) eine leichte Dichteabhängigkeit, in typischen Regionen protoplanetarer Scheiben mit Dichten von ca.  $10^{-9} \text{ kg m}^{-3}$ , verdampft das Wassereis bei etwa 150 K [Tscharnuter and Gail, 2007].

Die überbleibenden Staubkörner bestehen zum Großteil aus Silikaten. Für diesen eisfreien Staubbereich wird  $\kappa \propto \sqrt{T}$  angenommen. Der Kondensationsgrad der Silikate (welche

<sup>1</sup>In vielen anderen Arbeiten wird auch die inverse mittlere freie Weglänge  $\kappa\rho$  als Opazität bezeichnet.

<sup>2</sup>Wir verwenden  $\nu$  nur in diesem Abschnitt als Symbol für die Frequenz, überall sonst ist  $\nu$  die Viskosität.



**Abbildung 2.1:** Das Rosseland-Mittel der Opazität  $\kappa$  in Abhängigkeit von der Dichte  $\rho$  und der Temperatur  $T$ . Die erste Flanke bei ca. 100–200 K entspricht der Verdampfung der Eismäntel von Staubkörnern. Die zweite Flanke etwa bei 1000 – 2000 K, hervorgerufen durch Staubverdampfung, erzeugt die Opazitätslücke. Der „Berg“ wird durch ionisierte Materie hervorgerufen (hauptsächlich  $\text{H}^-$ -Ionen). Der ebene Bereich jenseits von ca.  $10^4$  K entsteht durch Elektronenstreuung.

wir nicht weiter differenzieren) wird aus dem Kondensationsgrad für Eisen abgeleitet, da dieses bei nahezu der gleichen Temperatur verdampft wie das am längsten stabile Silikat Forsterit ( $\text{Mg}_2\text{SiO}_4$ ). Bei etwa 1400 K (für typische Dichten von ca.  $10^{-6} \text{ kg m}^{-3}$ ) ist sämtlicher Staub verdampft. Danach stehen zunächst nur die noch vorhandenen Moleküle als Absorber zur Verfügung, die wichtigsten von ihnen sind  $\text{H}_2$ ,  $\text{OH}$ ,  $\text{H}_2\text{O}$  und  $\text{CO}$ . Im Vergleich zum Staub stellen sie jedoch wesentlich schwächere Absorber dar. Aus diesem Grund öffnet sich nach der Staubverdampfung die so genannte „Opazitätslücke“ an der  $\kappa$  um mehr als 3 Größenordnungen sinkt [Tscharnuter and Gail, 2007] (siehe Abb. 2.1).

Ein die Staubopazitäten betreffender, wichtiger Punkt ist unsere vereinfachende Annahme, daß bei sinkenden Temperaturen die Neubildung des Staubes, also die Rekondensation instantan geschieht (sonst wäre unsere direkte Funktion  $\kappa(\rho, e)$  auch gar nicht möglich). Die Kondensation benötigt eigentlich Kondensationskeime, die je nach Umgebung eine

spezifische Bildungszeit haben. Wollten wir diese Kondensationsprozesse berücksichtigen, müssten wir zumindest einige zusätzliche Transportgleichungen für verschiedene chemische Spezies und das entsprechende chemische Reaktionsnetzwerk lösen, was eindeutig über den Rahmen dieser Arbeit hinaus ginge.

Erst wenn die Wasserstoffionisation einsetzt, steht das  $\text{H}^-$ -Ion als effektiver Absorber zur Verfügung: Ein relativ schwach (0.75 eV) an das Wasserstoffatom gebundenes zweites Elektron sorgt für einen „Gebunden-frei“-Übergang und läßt  $\kappa$  wieder um viele Größenordnungen steigen. Ein Maximum in  $\kappa$  wird erreicht, wenn ein erheblicher Teil der Wasserstoffatome ionisiert ist, da zur Bildung von  $\text{H}^-$  sowohl freie Elektronen als auch neutrale Wasserstoffatome benötigt werden. Natürlich tragen auch „Gebunden-frei“-Übergänge der anderen Atome (z.B. He) zur Absorption bei. Außerdem liefern Linienabsorptionen („Gebunden-gebunden“-Übergänge) für  $T \lesssim 10^6$  K einen wesentlichen Beitrag, zumal die Linien stark stoßverbreitert sind. Für noch höhere Temperaturen ( $T \approx 10^7$  K) sind dann „Frei-frei“-Übergänge maßgeblich, bis schließlich nur noch Elektronenstreuung vorhanden ist. Insgesamt sinkt  $\kappa$  aber nach dem „ $\text{H}^-$ -Maximum“ kontinuierlich bis zur (konstanten) Elektronenstreuung (vgl. [Kippenhahn and Weigert, 1990]). Natürlich hängen die Absorptionseigenschaften der ionisierten Materie auch von der Dichte ab, worauf wir an dieser Stelle aber nicht genauer eingehen wollen. So ergeben sich letztendlich auf der  $(\rho, T)$ -Karte die zwei Flanken der Eis- und Staubverdampfung, die Opazitätslücke und der typische „Kappaberg“, der durch ionisierte Materie entsteht (vgl. Abb. 2.1).

## 2.6 Drehimpulstransportproblem

Obwohl unsere heutige Sonne über 99.86 % der Gesamtmasse des Sonnensystems verfügt, besitzt sie nur noch 0.5 % des Gesamtdrehimpulses (der Großteil steckt im Bahndrehimpuls der Planeten). Es ist immer noch eine offene Frage, wie fast der gesamte Drehimpuls in die äußeren Regionen des Systems transportiert wurde.

### 2.6.1 Gravitative Drehmomente

Einen möglichen Mechanismus stellen gravitative Drehmomente dar. Diese werden hervorgerufen durch Spiralstrukturen in protostellaren Scheiben, wobei eruptivartig ein relativ kleiner Massenanteil mit überdurchschnittlich viel spezifischem Drehimpuls nach außen geschleudert, der überwiegende Teil der Masse jedoch weiter innen mit einem reduzierten Gesamtdrehimpuls „kompaktiert“ wird. Dies ist selbstverständlich ein dreidimensionales Phänomen, welches wir in unseren vornehmlich zweidimensionalen (axialsymmetrischen) Modellen leider nicht näher untersuchen können.

### 2.6.2 Turbulenz

Weiterhin kann Viskosität für einen Impulstransport sorgen. Allerdings entfaltet die molekulare Viskosität des Gases ihre Wirkung erst auf Längenskalen die viele Größenordnungen unter der heute möglichen räumlichen Auflösung von astrophysikalischen Simulationen liegt. Es ist aber davon auszugehen, daß Systeme wie protostellare Scheiben in hohem Maße turbulent sind und somit eine turbulente Viskosität vorhanden ist, die um ein Vielfaches größer ist als die molekulare. Da eine umfassende Theorie der Turbulenz leider immer noch nicht vorhanden ist und DNS<sup>3</sup> nicht möglich sind, müssen wir eine effektive turbulente Viskosität konstruieren, die unsere großskaligen Strömungen bestimmt. Die nächste, weniger rechenintensive Methode (nach DNS) mit der man effektive Viskositäten bestimmen kann, stellen LES (Large Eddy Simulations) dar, gefolgt von noch einfacheren Modellen wie Schließungsmethoden für die zeitlich gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. [Davidson, 2004]). Nun ist auch Turbulenz ein inhärent dreidimensionales Phänomen und die soeben erwähnten Methoden sind sozusagen „überambitioniert“, wenn wir uns im wesentlichen auf zweidimensionale Rechnungen beschränken müssen. Anders gesagt, die im Zweidimensionalen angenommene Axialsymmetrie stellt bereits eine solch starke Restriktion für das mögliche, großskalige Strömungsfeld dar, daß die genannten Turbulenzmodellierungen in ihrer Tiefe unnötig sind.

### 2.6.3 Magnetfelder

Es kommen auch Magnetfelder als Drehimpulstransportmechanismus in Frage. Die Abbremsung von rotierenden Sternen durch Magnetfelder ist schon seit längerer Zeit bekannt (siehe z.B. [Lüst and Schlüter, 1955]). Der Drehimpulstransport in Akkretionsscheiben dagegen ist bis heute ein umstrittener Forschungsgegenstand. Der vornehmlich diskutierte Mechanismus in diesem Zusammenhang ist die so genannte Magneto-Rotations-Instabilität (vgl. [Balbus and Hawley, 1991]), eine Scherinstabilität in differentiell rotierenden Scheiben, die schon für sehr (im astrophysikalischen Sinne) schwache Magnetfelder auftritt. Problematisch ist hier der Punkt, daß die Leitfähigkeit (korreliert mit dem Ionisationsgrad) der Materie in Akkretionsscheiben stark von der Umgebung beeinflusst wird. So können die äußeren Schichten von Scheiben durch die Strahlung des zentralen Protosterns oder benachbarter, massereicher Sterne ionisiert werden. Die äquatorialen, massiven und optisch dicken Bereiche der Scheibe erreicht die ionisierende Strahlung jedoch nicht, es entstehen neutrale Zonen, in denen das Magnetfeld praktisch nicht an die Materie gekoppelt ist. Dazu kommt wiederum der Punkt, daß auch Magnetfelder, und insbesondere die von ihnen hervorgerufenen, dynamischen Instabilitäten, grundsätzlich dreidimensio-

<sup>3</sup>Direkte Numerische Simulationen (DNS) lösen Strukturen tatsächlich bis hinunter zur Kolmogorovschen Mikroskala auf und stellen die bis heute rechenaufwendigsten Modellierungen der Navier-Stokes-Gleichungen dar.

nale Strukturen sind, es gilt analog die Schlußbemerkung aus §2.6.2 über die Turbulenz. Welchen Beitrag zur turbulenten Viskosität Magnetfelder auch immer haben mögen, wir verwenden an dieser Stelle unserer Arbeit die einzige künstliche Parametrisierung, die wir im folgenden Abschnitt erläutern.

### 2.6.4 $\beta$ -Viskosität

Wir beschränken uns hier auf eine der denkbar einfachsten Konstruktionen einer effektiven turbulenten Viskosität. Gehen wir davon aus, daß die wesentliche Turbulenz in den protostellaren- bzw. protoplanetaren Akkretionsscheiben entsteht (da hier die stärksten Scherströmungen auftreten), sollte es lohnen die entsprechende Reynoldszahl  $Re$  zu untersuchen.  $Re$  stellt das Verhältnis von Trägheitskräften zu viskosen Kräften dar. Sei  $s = r \sin \theta$  der senkrechte Abstand eines Punktes von der Rotationsachse unseres Systems,  $v_\phi$  die azimuthale Geschwindigkeit und  $\nu$  die kinematische Viskosität, dann ergibt sich

$$Re = \frac{s v_\phi}{\nu}. \quad (2.23)$$

Gehen wir von einer grundsätzlich sehr turbulenten Scheibe mit hohem  $Re$  aus, dann wird die Turbulenz die effektive Viskosität so lange erhöhen bis  $Re$  etwa auf die kritische Reynoldszahl  $Re_{\text{krit}}$  erniedrigt worden ist [Lynden-Bell and Pringle, 1974]. Im Umkehrschluß bedeutet dies, daß eine effektive Viskosität

$$\nu_{\text{eff}} := \beta s v_\phi \quad (2.24)$$

definiert werden kann, mit einer Konstanten  $\beta$ , die der Bedingung

$$\beta \lesssim \frac{1}{Re_{\text{krit}}} \quad (2.25)$$

genügt [Duschl et al., 2000]. Diese so genannte  $\beta$ -Viskosität (2.24) entspricht der maximal möglichen turbulenten Viskosität die durch die azimuthalen Scherströmungen allein hervorgerufen werden kann. Für typische Werte aus Labormessungen mit  $Re_{\text{krit}} \approx 10^{2\dots 3}$  folgt  $\beta \lesssim 10^{-2\dots -3}$ . Die  $\beta$ -Viskosität ist eine Verallgemeinerung der bekannten  $\alpha$ -Viskosität [Shakura and Sunyaev, 1973]. Die  $\alpha$ -Vorschrift leitet sich aus thermischen Eigenschaften der Scheibe ab,  $\nu_{\text{eff}} = \alpha c_s h$  mit der lokalen Schallgeschwindigkeit  $c_s$  und der Druckskalenhöhe  $h$ . Dieser Ansatz enthält jedoch keine Informationen über den Entstehungsmechanismus der Turbulenz. Es läßt sich zeigen, daß im Dissipationsgrenzfall, d.h. wenn die turbulenten Geschwindigkeiten kleiner als die Schallgeschwindigkeit sind (was i.allg. bei protostellaren Akkretionsscheiben anzunehmen ist), die  $\alpha$ -Viskosität den Grenzfall der  $\beta$ -Viskosität für verschwindende Eigengravitation darstellt (siehe [Duschl et al., 2000]). Besonders in unseren Simulationen, in denen anfänglich gar kein Zentralobjekt existiert,

ist die Eigengravitation von entscheidender Bedeutung für die Scheibe. Daher verwenden wir die  $\beta$ -Viskosität, und zwar in der noch etwas allgemeineren Form als in (2.24), nämlich

$$\nu_\beta = \beta r^2 \omega. \quad (2.26)$$

Wobei  $r$  nun der sphärische Radius (der Abstand vom Koordinatenursprung) und  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit ist. In der Scheibe ( $s \approx r$  und  $v_\phi \approx r\omega$ ) sind die Formulierungen (2.24) und (2.26) praktisch gleich. Darüber hinaus sehen wir  $r$  im Vergleich zu  $s$  als die grundlegendere Längenskala an und verwenden daher  $\nu_\beta$  aus (2.26) als unsere turbulente Viskosität.

## 2.7 Künstliche Viskosität

Stoßfronten, welche inhärente Phänomene einer jeden Akkretionsscheibe sind, stellen sich in den Lösungen unserer hydrodynamischen Gleichungen als Diskontinuitäten dar. Der Grund ist folgender: Auch wenn die Navier-Stokes-Gleichung (2.3) formal keine hyperbolische, sondern wegen den viskosen Spannungen (vermittelt durch  $\mathbf{Q}$ ) eine parabolische Differentialgleichung ist, wird die Längenskala auf der der diffusive Charakter der Gleichung zu Tage tritt durch die Viskosität bestimmt. Da (wie schon in §2.6.2 erwähnt) die molekulare Viskosität auf Längenskalen wirkt die einigen mittleren freien Weglängen der Gasteilchen entspricht, ist auch die Dicke der realen Stoßfront mit dieser Länge vergleichbar. Weil die räumliche Auflösung unserer Simulationen aus technischen Gründen (Rechenzeit) um etliche Größenordnungen über dieser Längenskala liegt, erhalten wir Unstetigkeiten in den Feldgrößen. Solche Strukturen können ein Problem für die numerische Stabilität des verwendeten Advektionsalgorithmus sein, insbesondere bei Finite-Volumen-Verfahren. Daher werden diese Diskontinuitäten durch einen künstlichen „viskosen Druck“, auf einer Längenskala die der lokalen Gitterweite der Simulation entspricht, geglättet. Die klassische Konstruktion eines solchen Druckes wird in [von Neumann and Richtmyer, 1950] für den eindimensionalen, kartesischen Fall beschrieben und lautet

$$p_{\text{visko}} = l^2 \rho \frac{\partial v}{\partial x} \min \left( \frac{\partial v}{\partial x}, 0 \right), \quad (2.27)$$

wobei  $l$  die typische Längenskala ist über die geglättet werden soll (eben einige Gitterweiten). Der Druck  $p_{\text{visko}} (\geq 0)$  ist nur größer null wenn  $\partial v / \partial x < 0$  gilt. Mit dem Abstand von einer Stoßfront (maximales  $\partial v / \partial x$ ) fällt  $p_{\text{visko}}$  wegen der quadratischen Abhängigkeit vom Geschwindigkeitsgradienten schnell ab. Die Verallgemeinerung auf mehrere Dimensionen und/oder krummlinige Koordinaten sollte nicht achtlos vorgenommen werden. Eine physikalisch motivierte Verallgemeinerung ist in [Tscharnuter and Winkler, 1979] zu finden. Dort wird der allgemeine viskose Spannungstensor  $\mathbf{Q}$  (2.4) mit der folgendermaßen

definierten künstlichen Viskosität

$$\nu_k = -l^2 \min(\nabla \cdot \mathbf{v}, 0) \quad (2.28)$$

zusammengebracht ( $l$  hat die gleiche Bedeutung wie in (2.27)). Es ergibt sich also mit (2.4) und (2.28) der Spannungstensor der künstlichen Viskosität zu

$$\mathbf{Q}_k = -2\rho l^2 \min(\nabla \cdot \mathbf{v}, 0) \left[ \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{1} \right]. \quad (2.29)$$

Für den eindimensionalen, kartesischen Fall<sup>4</sup> reduziert sich (2.29) auf<sup>5</sup>  $\mathbf{Q}_k = -\frac{4}{3}p_{\text{visko}}$ . Neben der faktischen Beinhaltung (bis auf einen Faktor 4/3) der klassischen Formulierung (2.27), weist die verallgemeinerte „künstliche Tensorviskosität“ (2.29) entscheidende Vorteile bei mehrdimensionalen und/oder krummlinigen Koordinaten auf. So ist die Divergenz  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  eine invariante, skalare Größe, und auch dem gesamten Tensor  $\mathbf{Q}_k$  kommt eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung zu; z.B. ist durch die Spurfreiheit von  $\mathbf{Q}_k$  sichergestellt daß eine homologe, sphärische Kontraktion ( $v_r \propto -r$ ) nicht durch künstliche Viskosität beeinflusst wird. Damit im Zusammenhang stehen ganz allgemeine Probleme die durch „geometrische Kompression“ in krummlinigen Koordinaten entstehen. Diese Probleme, welche insbesondere bei Akkretionsströmungen auftreten, werden durch die Tensorformulierung vollständig vermieden [Tscharnuter and Winkler, 1979].

## 2.8 Zeitskalen

Für ein jedes physikalisches System ist es hilfreich, die jeweils relevanten Zeitskalen zu betrachten, weshalb wir sie hier kurz darstellen. Da ist zum einen die Freifallzeit

$$\tau_{\text{ff}} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}}}, \quad (2.30)$$

die eine homogene Massenverteilung der Dichte  $\bar{\rho}$  braucht, um ausschließlich unter der Wirkung der Gravitation zu kollabieren (also formal unendliche Dichte zu erreichen). Andererseits gibt es die dynamische Zeitskala

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{R}{c_s}, \quad (2.31)$$

welche der Schalllaufzeit durch das betrachtete Objekt (mit räumlichem Ausmaß  $R$  und Schallgeschwindigkeit  $c_s$ ) entspricht. Es ist die Zeit, in der ein System auf mechanische

---

<sup>4</sup> $\nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla \mathbf{v} = \partial v / \partial x$ .

<sup>5</sup>Das Minuszeichen rührt von der Vorzeichenkonvention für  $\mathbf{Q}$  in der Navier-Stokes-Gleichung her.

Störungen reagiert. Des weiteren ist die thermische Zeitskala, die Kelvin-Helmholtz-Zeit

$$\tau_{\text{KH}} = \frac{e_{\text{ges}}}{L} \quad (2.32)$$

wichtig, die gleich dem Verhältnis von gesamter innerer Energie  $e_{\text{ges}} = \int e \, dV$  eines Objektes zu dessen abgestrahlter Leuchtkraft  $L$  ist.  $\tau_{\text{KH}}$  ist also die Zeit, die ein Objekt braucht, um soviel innere Energie abzustrahlen, daß es mit seiner Umgebung im thermischen Gleichgewicht ist. Es ist auch die Zeit, die eine thermische Fluktuation benötigt, um das Objekt zu durchlaufen, also eine Art „Wärmewellenlaufzeit“. Schließlich ist auch die viskose Zeitskala

$$\tau_{\text{visk}} = \frac{R^2}{\nu} \quad (2.33)$$

von Bedeutung, welche die Geschwindigkeit von diffusiven Prozessen (mit der Viskosität  $\nu$ ) charakterisiert, wie z.B. den Drehimpulstransport durch turbulente Viskosität. Die nukleare Zeitskala, die das Verhältnis von zur Verfügung stehender Energie aus Kernfusion zu abgestrahlter Leuchtkraft darstellt, spielt für unsere Untersuchungen keine Rolle, da in der von uns betrachteten Phase noch keine Kernreaktionen stattfinden.

## 2.9 Gravitationsinstabilitäten

Unter welchen Bedingungen eine gegebene Gasverteilung instabil gegen gravitativen Kollaps ist, spielt für unsere Modelle eine große Rolle. Insbesondere die Anfangsbedingungen müssen so gewählt werden, daß ein Kollaps überhaupt stattfindet.

### 2.9.1 Kritische Gleichgewichte isothermer Gaskugeln

Die Frage nach der Stabilität isothermer Systeme gegen gravitativen Kollaps, gewährleistet durch die entgegenwirkenden Druckkräfte, wurde theoretisch schon zu Beginn des letzten Jahrhunderts beleuchtet [Jeans, 1902]. Aus einer linearen Stabilitätsanalyse leitet Jeans die kritische Wellenlänge ab, oberhalb welcher eine infinitesimale Störung in Form einer ebenen Welle in einem homogenen, isothermen Gas (Massendichte  $\bar{\rho}$ , Schallgeschwindigkeit  $c_s$ ) zu einer zeitlich exponentiell anwachsenden Verdichtung führt. Diese weithin bekannte Jeans-Länge

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi}{G\bar{\rho}}} \propto c_s \tau_{\text{ff}} \quad (2.34)$$

und die aus ihr resultierende Jeans-Masse  $M_J \propto \bar{\rho} \lambda_J^3$ , liefern bereits eine gute Abschätzung für die Grenze zur gravitativen Instabilität. Man erkennt an (2.34) auch sofort den Zusammenhang zu den Zeitskalen (vgl. §2.8): Wird die dynamische Zeitskala  $\tau_{\text{dyn}} \propto \lambda_J / c_s$  (auf der die stabilisierenden Druckkräfte vermittelt werden) größer als die Freifallzeit  $\tau_{\text{ff}}$ , so findet der Druckausgleich zu „langsam“ statt, es kommt zum Kollaps.

Für exakte, quantitative Aussagen ist die Herleitung nach Jeans allgemein nicht geeignet, da die Ausgangskonfiguration in der Natur prinzipiell nicht realisierbar ist. Jeans geht von einer unendlich ausgedehnten homogenen Massendichte  $\rho_0$  aus, was auf Grund der Poisson-Gleichung nur für den Grenzfall  $\rho_0 \rightarrow 0$  möglich ist.

In diesem Sinne realistischere Systeme stellen kugelsymmetrische Konfigurationen dar, auch als Bonnor-Ebert-Sphären (BES) bekannt, vgl. [Bonnor, 1956], [Ebert, 1957]. Sie stellen hydrostatische Gleichgewichtskonfigurationen isothermer, sphärisch symmetrischer Gasverteilungen dar, welche sich auf der Schwelle zur Gravitationsinstabilität befinden. Die Struktur der BES wurde zum einen durch eine analog zur Jeans-Analyse durchgeführte, lineare Stabilitätsanalyse ermittelt ([Ebert, 1957]), zum anderen aus einer Analyse kritischer Punkte thermodynamischer Potentiale bestimmt ([Bonnor, 1956]). Durch die Angabe der Gesamtmasse sowie der Schallgeschwindigkeit ist eine BES eindeutig bestimmt.

### 2.9.2 Toomre-Instabilität dünner Gasscheiben

Auch die Frage nach der gravitativen Stabilität dünner Gasscheiben ist für uns von Belang. Dünn meint in diesem Fall, daß der senkrechte Abstand  $s$  von der Rotationsachse groß sein soll gegen die Druckskalenhöhe  $h$  der Scheibe, also  $s \gg h$ . Der Toomre-Parameter  $Q_T$  (vgl. [Toomre, 1964]) definiert die Bedingungen für die lokale Stabilität gegen axialsymmetrische Störungen. Es ergibt sich

$$Q_T = \frac{\varphi c_s}{\pi G \Sigma}, \quad (2.35)$$

mit der Epizykelfrequenz

$$\varphi = \sqrt{\frac{2\omega}{s} \frac{d}{ds}(s^2\omega)} \quad (2.36)$$

und der Oberflächendichte

$$\Sigma = \int_{-h}^h \rho dz. \quad (2.37)$$

Erhalten wir an einer Stelle der Scheibe einen Wert  $Q_T < 1$ , so ist die Scheibe dort gravitativ instabil. Dagegen sind Bereiche mit  $Q_T > 1$  stabil. Auch die Untersuchungen nach Toomre beruhen auf einer linearen Stabilitätsanalyse.

## 2.10 Das gesamte Gleichungssystem im Überblick

Nachdem alle Teile des zu betrachtenden Gleichungssystems erläutert worden sind, fassen wir zum Abschluß dieses Kapitels das Gesamtsystem noch einmal in einer Übersicht in [Tafel 1](#) zusammen.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{Q} - \rho \nabla \Phi - \lambda \nabla E \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{v} + c \kappa \rho (E - aT^4) + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E - f \kappa \rho \frac{v^2}{c} E \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (f E \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left( \frac{c \lambda}{\kappa \rho} \nabla E \right) - c \kappa \rho (E - aT^4) - \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E + f \kappa \rho \frac{v^2}{c} E \quad (2.41)$$

$$\Delta \Phi = 4\pi G \rho \quad (2.42)$$

$$\mathbf{Q} = 2\rho(\nu_\beta + \nu_k) \left[ \nabla \mathbf{v} - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{v}) \mathbb{1} \right], \quad \nu_\beta = \beta r^2 \omega, \quad \nu_k = -l^2 \min(\nabla \cdot \mathbf{v}, 0) \quad (2.43)$$

$$\lambda = \frac{1}{s} \left( \coth s - \frac{1}{s} \right), \quad f = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left( \coth s - \frac{1}{s} \right) \coth s, \quad s = \frac{|\nabla E|}{\kappa \rho E} \quad (2.44)$$

$$p = p(\rho, e), \quad T = T(\rho, e), \quad \kappa = \kappa(\rho, e). \quad (2.45)$$

**Tafel 1:** Das vollständige Gleichungssystem.

Die erste Gruppe (2.38)–(2.42) stellt die Erhaltungsgleichungen für die primären Größen Masse (2.38), Impuls (2.39), innere Energie (2.40) und Strahlungsenergie (2.41), sowie die Poissongleichung (2.42) dar. Die zweite Gruppe (2.43)–(2.45) enthält die Definitionen der aus den primären Größen abgeleiteten Variablen, welche in den Erhaltungsgleichungen vorkommen: Den viskosen Spannungstensor für  $\beta$ - und künstliche Viskosität  $\mathbf{Q}$  (2.43), den Strahlungsflußlimiter  $\lambda$  und den Advektionsfaktor der Strahlungsenthalpie  $f$  (2.44), die Zustandsgleichung für Temperatur  $T$  und Druck  $p$ , sowie die Opazität  $\kappa$  (2.45). Die einzigen freien Parameter in diesem System sind der Glättungsfaktor der künstlichen Viskosität  $l$  (welcher etwa der lokalen Zellweite des Gitters entsprechen sollte, also eigentlich bestimmt ist) und weiterhin der  $\beta$ -Viskositätswert in welchem unsere ganze Unwissenheit über die wahre Größe der effektiven turbulenten Viskosität steckt.  $\beta$  ist zumindest innerhalb eines Rahmens von etwa zwei Größenordnungen bestimmt (vgl. §2.6.4), muß aber definitiv in einer Parameterstudie untersucht werden, da der mögliche Variationsbereich einfach zu groß ist. Sind diese freien Parameter gewählt, stellen die Gleichungen (2.38)–(2.45) ein in sich geschlossenes System dar, dessen Lösung bei gegebenen Rand- und Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist. Technische Details zur Auswertung dieses Gleichungssystems werden im nun folgenden Kapitel 3 behandelt.



## 3 Technische Realisierung

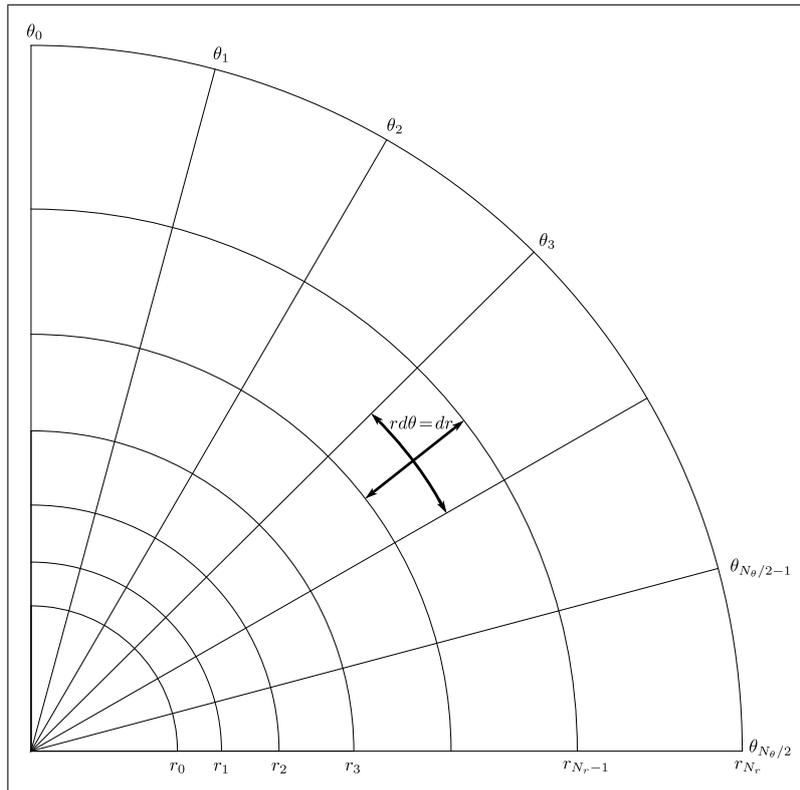
Nun gehen wir daran das in Kapitel 2 zusammengestellte Gleichungssystem (2.38)–(2.45) zu lösen. Ohne extreme Vereinfachungen sind die Aussichten analytische Lösungen für das System zu finden sehr bescheiden. Wir müssen daher auf geeignete numerische Methoden zurückgreifen, welche wir in diesem Kapitel im Detail beschreiben.

### 3.1 Räumliches Koordinatensystem

Wir verwenden eine gitterbasierte Methode, d.h. unsere physikalischen Variablen sind an diskreten Stützstellen im Raum definiert. Einer der wesentlichen Unterschiede unseres Ansatzes im Vergleich zu anderen Untersuchungen besteht in der speziellen Wahl des Koordinatensystems. Während heute viele hydrodynamische Simulationen auf kartesischen Gittern mit adaptiver Verfeinerung basieren (wie z.B. der FLASH-Code, siehe [Fryxell et al., 2000]), nutzen wir ein an das Problem angepasstes, statisches Gitter. Um unsere gegebenenfalls vorhandenen Symmetrieanahmen (vergl. §3.13) überhaupt realisieren zu können, brauchen wir natürlich den Azimutwinkel  $\phi$ . Somit kommen (exotische Systeme einmal ausgenommen) nur noch Zylinder- oder Kugelkoordinaten in Frage. Letztere bieten entscheidende Vorteile. Aufgrund der Unkenntnis exakter Anfangsbedingungen (vergl. §3.15), scheint es allemal plausibler, die Rechnung mit einem kugelförmigen Objekt zu beginnen als mit einem zylindrischen, da ersteres mit einer größeren Wahrscheinlichkeit in der Natur realisiert wird. Weiterhin wird der im Zentrum entstehende Protostern wegen seiner Eigengravitation annähernd rund sein, Kugelkoordinaten sind also angepasste Koordinaten. Ein weiterer Vorteil dieser Koordinaten besteht in der Tatsache, daß eine Multipolentwicklung des Gravitationsfeldes auf dem äußeren Rand (zur Bestimmung der Randwerte des Gravitationspotentials) in Kugelkoordinaten immer konvergiert, weil alle Quellen (Massenelemente) einen kleineren Abstand zum Koordinatenursprung ( $r=0$ ) haben als alle zu berechnenden Randpositionen. Dies ist in Zylinderkoordinaten nicht der Fall, wie man sich leicht überlegen kann.

#### 3.1.1 Lokal uniformes Gitter in axialer Symmetrie

Kugelkoordinaten bieten einen weiteren entscheidenden Vorteil bezüglich „Angepaßtheit“, numerischer Stabilität und Genauigkeit. Die zwei letztgenannten Punkte hängen empfind-



**Abbildung 3.1:** Ein gleichmäßig logarithmisches Gitter (3.3) für  $N_\theta = 12$  (d.h. 12 Winkelzellen auf  $180^\circ$  und somit 6 auf  $90^\circ$ ) und  $N_r = 6$ .

lich von der lokalen Form des Gitters ab. Gerade die Genauigkeit von finiten Differenzen, z.B. die quadratische Konvergenz mit der Zellweite bei zentralen Differenzen, ist streng nur gegeben bei äquidistanten Zellen (siehe auch Diskussion in §3.2.1). Weiterhin können Instabilitäten und Ungenauigkeiten durch „unförmige“ Zellen (solche deren räumliche Ausdehnung je nach Richtung stark variiert) hervorgerufen werden. Wie können wir nun ein lokal möglichst uniformes Gitter erzeugen, welches gleichzeitig so angepasst ist, daß es räumliche Skalen über mehr als sieben Größenordnungen sinnvoll darstellt? Für den axialsymmetrischen Fall ist ein solches Gitter in Kugelkoordinaten möglich.

Betrachten wir eine beliebige  $(r, \theta)$ -Ebene ( $\phi = \text{const.}$ ) eines Kugelkoordinatensystems, also schlicht zweidimensionale Polarkoordinaten, so läßt sich die Forderung nach lokaler Uniformität der Gitterzellen darstellen als Gleichheit der Länge der Linienelemente der Koordinatenrichtungen, d.h. in differentieller bzw. diskreter Form als

$$dr = r d\theta \quad \Rightarrow \quad r_{i+1} - r_i = \frac{1}{2}(r_{i+1} + r_i)\Delta\theta. \quad (3.1)$$

Diese Bedingung stellt sicher, daß die räumliche Ausdehnung jeder Zelle in Winkelrichtung genauso groß ist wie in radialer Richtung, vgl. Abb. 3.1. Seien die Winkelausdehnungen

$\Delta\theta$  konstant (eine notwendige Bedingung für lokale Uniformität) und mit  $N_\theta = \pi/\Delta\theta$  die Winkelauflösung (Anzahl der Winkelzellen auf  $180^\circ$ ) bezeichnet, dann können wir aus (3.1) sofort eine rekursive als auch explizite Formel für die Positionen der radialen Stützstellen ableiten

$$r_{i+1} = r_i \frac{2N_\theta + \pi}{2N_\theta - \pi} \quad \Rightarrow \quad r_i = r_0 \left( \frac{2N_\theta + \pi}{2N_\theta - \pi} \right)^i. \quad (3.2)$$

Wird neben dem minimalen Radius  $r_0$  ein maximaler Radius  $r_{N_r}$  (der Aussenrand des Rechengebietes) angegeben, so läßt sich (3.2) auch schreiben als

$$r_i = r_0 \left( \frac{r_{N_r}}{r_0} \right)^{i/N_r}, \quad (3.3)$$

mit der radialen Auflösung  $N_r$ . Der Vergleich von (3.2) und (3.3) führt direkt auf die Beziehung

$$\left( \frac{r_{N_r}}{r_0} \right)^{1/N_r} = \frac{2N_\theta + \pi}{2N_\theta - \pi}. \quad (3.4)$$

Somit sind nur drei der vier Größen  $r_0$ ,  $r_{N_r}$ ,  $N_r$  und  $N_\theta$  frei wählbar. Da wir im allgemeinen die räumliche Ausdehnung je nach physikalischer Fragestellung und gegebenen Anfangsbedingungen wählen werden, setzen wir  $r_0$  und  $r_{N_r}$  als gegeben voraus. So bleibt noch  $N_r$  oder  $N_\theta$  zu wählen und die jeweils andere Auflösung lautet dann nach (3.4)

$$N_\theta = \frac{\pi}{2} \frac{(r_{N_r}/r_0)^{1/N_r} + 1}{(r_{N_r}/r_0)^{1/N_r} - 1} \quad \text{oder} \quad N_r = \frac{\ln [r_{N_r}/r_0]}{\ln [(2N_\theta + \pi)/(2N_\theta - \pi)]}. \quad (3.5)$$

Natürlich sind die Resultate aus (3.5) praktisch nie von ganzzahligem Wert; daher ist eine entsprechende Rundung auf die nächstliegende ganze Zahl nötig. Wir haben nun durch unser gleichmäßig logarithmisches, radiales Gitter (3.3) ein lokal möglichst uniformes Gitter erhalten, im Grenzfall sehr hoher Auflösung ( $N_r, N_\theta$ ) ist es lokal praktisch quadratisch. Global gesehen haben wir in jeder räumlichen Größenordnung ein „selbstähnliches“ Gitter erzeugt, vgl. Abb. 3.1. Die relative Variation der radialen Zellweiten

$$\frac{r_{i+1} - r_i}{r_i - r_{i-1}} - 1 = \left( \frac{r_{N_r}}{r_0} \right)^{1/N_r} - 1 = \frac{2\pi}{2N_\theta - \pi} \quad (3.6)$$

ist unabhängig von der Position  $i$  und interessanterweise ausschließlich von  $N_\theta$  abhängig. Für nicht zu klein gewähltes  $N_\theta$  ist diese Größe etwa umgekehrt proportional zu  $N_\theta$ .

### 3.1.2 Bemerkungen zum vollen 3D-Gitter in Kugelkoordinaten

Ergänzen wir nun das soeben hergeleitete lokal uniforme Gitter in der  $(r, \theta)$ -Ebene um den Azimutwinkel  $\phi$ , gibt es leider keine Möglichkeit die Forderung nach lokaler Uniformität auf die dritte Dimension zu erweitern. Dies entspräche einem lokal kubischen Gitter –

es ist leicht einzusehen, daß sich aus einem solchen kubischen Gitter keine vollständige Füllung des dreidimensionalen Raumes in Kugelkoordinaten bewerkstelligen läßt. Sei  $\Delta\phi$  die (natürlich konstante) Azimutwinkelausdehnung und entsprechend  $N_\phi = 2\pi/\Delta\phi$  die Winkelauflösung (Anzahl der Winkelzellen auf  $360^\circ$ ), so können wir mit der Wahl  $\Delta\phi = \Delta\theta$  bzw.  $N_\phi = 2N_\theta$  zumindest im Äquatorbereich ein lokal uniformes, kubisches Gitter erzeugen.

### 3.2 Diskretisierung auf einem gestaffelten Gitter

Mit Blick auf die unterschiedlichen mathematischen Objekte (Skalare, Vektoren und Tensoren) mit denen verschiedene physikalische Felder eines Systems (z.B. einer Strömung) beschrieben werden, bietet es sich an, diesen Objekten bestimmte Positionen auf dem räumlichen Gitter zuzuordnen. Wir betrachten zur Erläuterung ein dreidimensionales, kubisches Gitter, wobei die drei zueinander orthogonalen Richtungen mit  $i, j, k$  indiziert werden; die Gitterzelle  $(i, j, k)$  dieses Gitters ist in Abb. 3.2 dargestellt. Die drei zur Anwendung kommenden Feldtypen, Skalarfeld, Vektorfeld und Tensorfeld, jeweils beschrieben durch ihre Komponenten

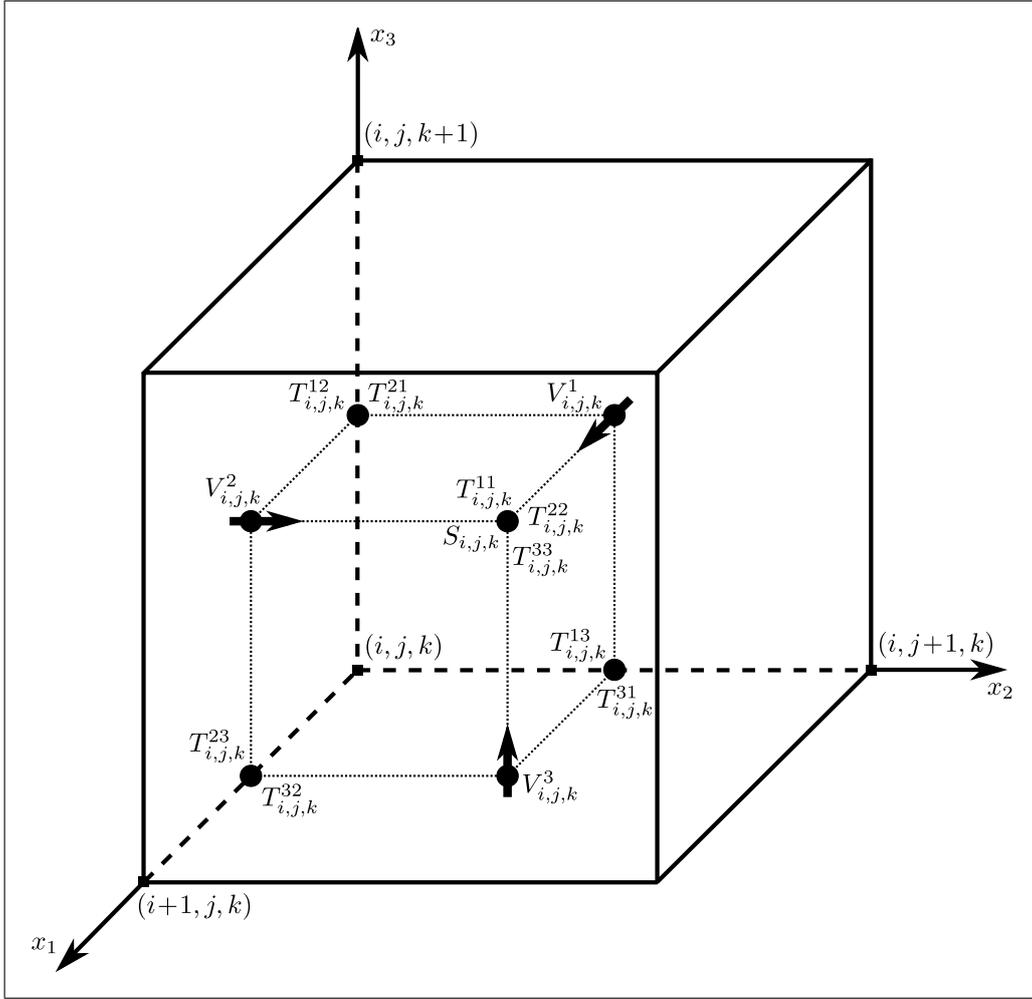
$$S_{i,j,k}, \quad \mathbf{V}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} V_{i,j,k}^1 \\ V_{i,j,k}^2 \\ V_{i,j,k}^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_{i,j,k} = \begin{pmatrix} T_{i,j,k}^{11} & T_{i,j,k}^{12} & T_{i,j,k}^{13} \\ T_{i,j,k}^{21} & T_{i,j,k}^{22} & T_{i,j,k}^{23} \\ T_{i,j,k}^{31} & T_{i,j,k}^{32} & T_{i,j,k}^{33} \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

werden in der Gitterzelle so positioniert wie in Abb. 3.2 dargestellt. Skalare und Hauptdiagonalelemente von Tensoren werden also im Zentrum der Zelle definiert, Vektorkomponenten zentral auf dem zu ihnen orthogonalen Oberflächenelement, und Querelemente von Tensoren auf den entsprechenden Zellkanten. Diese Anordnung hat den Vorteil, daß für viele Differentialoperationen bei der Diskretisierung einfachere, ganz „natürliche“ Differenzenformeln entstehen. Hier einige Beispiele: Der Gradient eines skalaren Feldes, also eine Zuordnung  $\mathbf{V} = \nabla S$  lautet für die erste Komponente

$$V_{i,j,k}^1 = \frac{S_{i,j,k} - S_{i-1,j,k}}{x_{i,j,k}^1 - x_{i-1,j,k}^1}, \quad (3.8)$$

wobei  $x_{i,j,k}^1$  der ersten Komponente der Raumkoordinate von  $S_{i,j,k}$  entspricht. Die Divergenz eines Vektorfeldes, d.h. Zuordnungen der Form  $S = \nabla \cdot \mathbf{V}$  ergeben sich zu

$$S_{i,j,k} = \frac{1}{\text{Vol}_{i,j,k}} \left( \text{Fl}_{i+1,j,k}^1 V_{i+1,j,k}^1 - \text{Fl}_{i,j,k}^1 V_{i,j,k}^1 + \text{Fl}_{i,j+1,k}^2 V_{i,j+1,k}^2 - \text{Fl}_{i,j,k}^2 V_{i,j,k}^2 + \text{Fl}_{i,j,k+1}^3 V_{i,j,k+1}^3 - \text{Fl}_{i,j,k}^3 V_{i,j,k}^3 \right), \quad (3.9)$$



**Abbildung 3.2:** Definition von Skalaren ( $S_{i,j,k}$ ), Vektor- ( $V_{i,j,k}^m$ ) und Tensorkomponenten ( $T_{i,j,k}^{mn}$ ) der Gitterzelle  $(i, j, k)$  auf einem kubischen, gestaffelten Gitter.

hier ist  $\text{Fl}_{i,j,k}^m$  das der Vektorkomponente  $V_{i,j,k}^m$  zugeordnete (ihm orthogonale) Oberflächenelement und  $\text{Vol}_{i,j,k}$  das Volumen der Gitterzelle. Die Divergenz eines Tensorfeldes, also eine Zuordnung  $\mathbf{V} = \nabla \cdot \mathbf{T}$  lautet für die erste Komponente

$$\begin{aligned}
 V_{i,j,k}^1 = \frac{1}{\text{Vol}_{i-\frac{1}{2},j,k}} & \left( \text{Fl}_{i+\frac{1}{2},j,k}^1 T_{i,j,k}^{11} - \text{Fl}_{i-\frac{1}{2},j,k}^1 T_{i-1,j,k}^{11} + \right. \\
 & \text{Fl}_{i-\frac{1}{2},j+1,k}^2 T_{i,j+1,k}^{21} - \text{Fl}_{i-\frac{1}{2},j,k}^2 T_{i,j,k}^{21} + \\
 & \left. \text{Fl}_{i-\frac{1}{2},j,k+1}^3 T_{i,j,k+1}^{31} - \text{Fl}_{i-\frac{1}{2},j,k}^3 T_{i,j,k}^{31} \right). \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Mit der Indizierung  $i \pm \frac{1}{2}$  ist die Verschiebung der Volumen- und Oberflächenelemente um plus bzw. minus eine halbe Zellenlänge in die  $i$ -Richtung gemeint (jede Tensorkomponente liegt daher zentral auf dem mit ihr multiplizierten Oberflächenelement).

### 3.2.1 Genauigkeit der Diskretisierung

Da es sich bei allen oben beschriebenen Diskretisierungen um zentrale Differenzen handelt, ist zumindest für ein äquidistantes kartesisches Gitter hiermit eine räumliche Konvergenz zweiter Ordnung erreicht, d.h. der Diskretisierungsfehler sinkt mit  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

Es bleibt zu erwähnen daß mit der soeben erläuterten Diskretisierung schon für nicht-äquidistante Gitter die zweite Ordnung in der Genauigkeit nicht mehr zu erreichen ist. Dies kann man sich ganz leicht verdeutlichen, denn für nicht-äquidistante Zellen liegen z.B. die Zelloberflächen nicht mehr zentral zwischen zwei Zellmitten. Bezüglich unseres in §3.1.1 eingeführten lokal uniformen Gitters in Kugelkoordinaten, ist die radiale Zellweite die einzig variierende (sie wächst monoton). Der Abschätzung des Fehlers dient die relative Variation dieser Zellweite, gegeben durch (3.6). Es ist davon auszugehen daß wir mit sinkender Variation immer näher an die Konvergenz zweiter Ordnung kommen. Bei allen Rechnungen ist die räumliche Auflösung mindestens so hoch gewählt (nämlich  $N_\theta > 64$ ), daß die relative Variation der radialen Zellweiten kleiner als 5% ist, vgl. (3.6). Wir nehmen an daß bei einer solch kleinen Variation der entstehende Fehler zu vernachlässigen ist.

Mit diesem Thema in engem Zusammenhang stehen Probleme die für krummlinige Koordinatensysteme (also auch unsere Kugelkoordinaten) auftreten, und sehr ausführlich in [Mönchmeyer and Müller, 1989] diskutiert werden. Dort wird gezeigt, daß skalare Größen dem Volumenzentrum einer Zelle zugeordnet werden sollten, welches nur im Falle kartesischer Systeme mit dem geometrischen Zentrum übereinstimmt<sup>1</sup>. Noch allgemeiner gesagt, sollten z.B. die Koordinaten der Massendichte am besten im Massenzentrum (Schwerpunkt) der Zelle positioniert werden. Interessanterweise läßt sich zeigen, daß für eine beliebige (unbekannte) Massenverteilung in einer Zelle das Volumenzentrum eine Näherung zweiter Ordnung für das Massenzentrum ist (dies gilt natürlich für alle skalaren Größen, nicht nur für die Masse). Verwendet man nun diese Volumenzentren (und darüber hinaus auch noch nötige neue Oberflächenzentren) dann erhält man in krummlinigen Koordinaten ein zwangsläufig nicht-äquidistantes Gitter. Es ist dann mit erheblichem Aufwand möglich eine Diskretisierung zweiter Ordnung zu konstruieren, vgl. [Mönchmeyer and Müller, 1989]. In dieser Arbeit ist eine solche Methode aus zeitlichen Gründen nicht zur Anwendung gekommen. Jedoch ist die Untersuchung von Diskretisierungsmethoden in der Nähe von Koordinatensingularitäten (insbesondere in Kugelkoordinaten) ein wichtiges Thema für zukünftige Untersuchungen.

---

<sup>1</sup>Das dies z.B. für Kugelkoordinaten nicht der Fall ist, sieht man leicht ein, wenn man die innersten „Tortenstückzellen“ betrachtet.

### 3.3 Auswertung der Materialfunktionen mittels Splines

Sowohl die Zustandsgleichungen  $p(\rho, e)$  und  $T(\rho, e)$ , als auch die Opazität  $\kappa(\rho, e)$  werden aus einer zweidimensionalen Spline-Interpolation bestimmt. Die nötigen Daten zur Erstellung der Splines sind freundlicherweise von Herrn Tscharnuter zur Verfügung gestellt worden.

#### 3.3.1 Birationale Spline-Interpolation

Wir verwenden rationale Basisfunktionen dritter Ordnung (siehe [Späth, 1991]). Der entsprechend vierdimensionale Vektor dieser Basisfunktionen hat auf dem Einheitsintervall  $[0, 1]$  die Form

$$\varphi_\alpha(z) = \left( 1 - z, \quad z, \quad \frac{(1-z)^3}{1+\alpha z}, \quad \frac{z^3}{1+\alpha(1-z)} \right), \quad (3.11)$$

mit dem zusätzlichen freien Parameter  $\alpha > -1$ . Für  $\alpha \rightarrow \infty$  erhalten wir lineare Basisfunktionen. Über  $\alpha$  lassen sich möglicherweise auftretende Oszillationen für unstetige Daten dämpfen. Eine beliebige, zweidimensionale Funktion  $g_{i,j}$  auf einem diskreten, rechteckigen Gitter  $(x_i, y_j)$  läßt sich nun in jedem Gitterintervall  $x_i \leq x \leq x_{i+1}$  und  $y_j \leq y \leq y_{j+1}$  interpolieren als

$$G(x, y) = \varphi_\alpha \left( \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \right) I_{i,j} \varphi_\alpha^T \left( \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \right). \quad (3.12)$$

Die 16 Koeffizienten der für jedes Gitterintervall zu bestimmenden  $4 \times 4$  Matrix  $I_{i,j}$  ergeben sich zum einen aus der offensichtlichen Forderung  $G(x_i, y_j) = g_{i,j}$ , welche vier Bedingungen liefert. Die restlichen zwölf Bedingungen folgen aus der Vorgabe der beiden partiellen Ableitungen und der gemischten Ableitung in allen vier Eckpunkten jedes Gitterintervalls. Geben wir auf den Rändern des Gesamtgebietes des Gitters die Normalenableitungen von  $G(x, y)$ , sowie an den Ecken die gemischten Ableitungen vor, so läßt sich (zusammen mit der  $C^2$ -Forderung für  $G(x, y)$  in jedem Gitterpunkt) die Matrix  $I_{i,j}$  eindeutig bestimmen. Die Lösung erfordert die Berechnung mehrerer tridiagonaler, linearer Gleichungssysteme. Die beschriebene Vorgehensweise liefert uns eine bis zur vierten Gemischten Ableitung ( $G_{xxyy}$ ) stetige Funktion. Wir haben auch direkten Zugriff auf die partiellen Ableitungen, da hierfür nur die Vektoren der Basisfunktionen (analytisch) abgeleitet werden müssen. Insbesondere für die Newton-Iteration in §3.10.2 sind die ersten Ableitungen, z.B.  $\partial p / \partial e$  nötig, welche (neben der zweiten Gemischten Ableitung  $G_{xy}$ ) sogar glatt sind (da  $G \in C^2$ ). Die Koeffizientenmatrix  $I_{i,j}$  wird für jede Materialfunktion einmal berechnet und kann dann für alle Zeiten benutzt werden. Ein geringer zusätzlicher Aufwand, während der späteren Verwendung in der laufenden Rechnung, entsteht durch die nötige Suche nach dem Gitterintervall (i,j) indem man sich gerade befindet. Insgesamt stellt dieser Spline-Algorithmus eine effiziente und sehr genaue Bestimmung der Materialfunktionen dar.

## 3.4 Lösung der linearen Gleichungssysteme

Sowohl bei der Lösung der Poissongleichung als auch der Strahlungsenergiegleichung stehen wir vor der Aufgabe, ein umfangreiches lineares Gleichungssystem der Form

$$A \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (3.13)$$

zu lösen. Im dreidimensionalen Fall (mit der räumlichen Auflösung  $N_r \times N_\theta \times N_\phi$ , vgl. §3.1) ist  $A$  eine schwach besetzte  $N_r N_\theta N_\phi \times N_r N_\theta N_\phi$  Matrix. Weiterhin hat  $A$  eine symmetrische Besetzungsstruktur mit sieben Diagonalbändern. Im Falle der Poissongleichung ist  $A$  außerdem symmetrisch und positiv definit, was sich leicht mit Hilfe der Geršgorin-Kreise abschätzen läßt.

### 3.4.1 Versagen iterativer Lösungsmethoden

Bei der Wahl eines geeigneten Lösungsverfahrens für (3.13) gilt es die Eigenheiten unserer Simulationen zu berücksichtigen. Zum einen haben wir es mit räumlichen Skalen zu tun, welche über viele Größenordnungen gehen, zum anderen gibt es physikalische Größen (insbesondere die Opazität, vgl. §2.5), welche räumlich stark variieren. Dies resultiert in extrem inhomogenen und anisotropen Einträgen in der Matrix  $A$ . Daraus folgt im Allgemeinen eine schlechte Konditionszahl für  $A$ . In unseren Untersuchungen hat sich herausgestellt, daß diese Umstände ein sinnvolles Verwenden iterativer Lösungsverfahren praktisch unmöglich machen. Auch moderne iterative Verfahren, wie z.B. die Familie der Krylov-Unterraumverfahren (mit bekannten Vertretern wie z.B. dem Konjugierte-Gradienten-Verfahren), haben selbst mit Vorkonditionierern ständige Konvergenzprobleme, was verständlich ist, da die Konvergenzeigenschaften stark von der Kondition der Matrix abhängen. Zwar läßt sich die Poissongleichung mit verschiedenen Mitteln, wie radialen räumlichen Skalierungen oder der Separation kugelsymmetrischer Anteile (siehe §3.5), noch in den Griff bekommen, für die Strahlungsenergiegleichung führen jedoch selbst diese Mittel nicht zum Ziel.

### 3.4.2 Direkte Löser

In den letzten Jahren sind (zusammen mit der rasanten Entwicklung der Prozessortechnologie) vermehrt so genannte direkte Löser in Erscheinung getreten, deren „Urform“ die bekannte Gauß-Elimination ist. Diese Verfahren bieten den Vorteil, daß sie praktisch die exakte Lösung des Gleichungssystems liefern, im Gegensatz zu iterativen Näherungsverfahren. Daher sind sie auch nicht anfällig für die im letzten §3.4.1 erläuterten Probleme iterativer Löser. An dieser Stelle soll noch einmal betont werden, daß die hohe numerische Genauigkeit der Ergebnisse eine notwendige Bedingung ist um für die Strahlungsenergie-

gleichung überhaupt brauchbare Resultate zu erhalten.

Es ist weithin bekannt daß der rechnerische Aufwand für eine vollbesetzte  $n \times n$ -Matrix bei der Gauß-Elimination etwa mit  $n^3$  wächst, was das Verfahren in diesem Fall schnell unpraktikabel werden läßt. Doch man nutzt in unserem Fall die nur sehr dünne Besetzungsstruktur der Matrix aus. Es geht darum den Eintrag (die nötigen neu zu besetzenden Einträge beim Faktorisieren der Matrix) möglichst gering zu halten. Allgemein gliedert sich ein direktes Lösungsverfahren in drei Schritte:

1. Füllreduktionsanalyse und symbolische Faktorisierung. Mittels Pivotisierung wird die Besetzungsstruktur so modifiziert daß der nötige Eintrag so klein wie möglich bleibt. Hierfür ist natürlich nur die Besetzungsstruktur der Matrix nötig.
2. Numerische Faktorisierung. Der aufwendigste Teil des Verfahrens, in dem nun auch die numerischen Werte der Matrixeinträge benötigt werden.
3. Lösung des Systems durch Vor- und Rücksubstitution. Mit der nun vorliegenden Faktorisierung der Matrix und der rechten Seite des Gleichungssystems (dem Vektor **b** in (3.13)) wird der Lösungsvektor **x** bestimmt.

Ein weiterer Vorteil direkter Löser ist ihre erfreuliche Eigenschaft, daß je nach Problemstellung manche der Lösungsschritte 1 bis 3 nur ein einziges Mal (für die gesamte Simulation) ausgeführt werden müssen. So führt die Diskretisierung der Poissongleichung, auf einem statischen Gitter, wie wir es verwenden, auf eine Matrix  $A$  mit konstanter Besetzungsstruktur sowie konstanten Werten (lediglich geometrische Faktoren des Laplace-Operators). Daher müssen die Schritte 1 und 2 nur einmal durchgeführt werden, d.h. die einmal bestimmte Faktorisierung von  $A$  ist für alle Zeiten gültig und bleibt gespeichert. Ausschließlich Schritt 3 muß in jedem Zeitschritt der Simulation mit einer neuen rechten Seite **b** (die mit der Massendichte variiert) vollzogen werden. Da Schritt 3 vom zeitlichen Aufwand her praktisch zu vernachlässigen ist, bedeutet dies, daß der gesamte Aufwand zur Lösung der Poissongleichung im Vergleich zu allen anderen Berechnungen eine untergeordnete Rolle spielt. Für die Strahlungsenergiegleichung kann leider nur der Schritt 1 ein für allemal durchgeführt werden, da nur die Besetzungsstruktur immer gleich bleibt. Die Werte dagegen ändern sich in jedem Zeitschritt und die Schritte 2 und 3 müssen immer wieder neu vollzogen werden. Daher ist der zeitlich größte Rechenaufwand eindeutig der Lösung des Strahlungstransportes zuzuordnen.

Eine optimale Implementierung eines direkten Löser ist durchaus nicht trivial und immer noch ein intensiv erforschter Zweig der numerischen Mathematik. Insbesondere die Cache<sup>2</sup>-Effizienz ist von entscheidender Bedeutung für die Geschwindigkeit des Verfahrens. Ist z.B. der Eintrag zu groß, so daß die momentan zu speichernden Daten nicht mehr

---

<sup>2</sup>Cache: Eine Hierarchie von kleinen, schnellen, dem Prozessor direkt zur Verfügung stehenden Speichern.

in den Cache passen, müssen diese ausgelagert werden auf den größeren, aber auch viel langsameren Arbeitsspeicher. Auf die algorithmischen Feinheiten (wie z.B. Supernode-Verfahren) der Implementierung wollen wir an dieser Stelle nicht eingehen. Natürlich setzt die verfügbare Computertechnologie immer Grenzen; für einen heute aktuellen Prozessor sind direkte Löser bei einem 2D-System für Probleme mit bis zu  $N = 10^5$  Unbekannten praktikabel (Der Aufwand steigt in 2D mit  $N^{3/2}$ ). Das entspricht in diesem Fall schon recht passablen Auflösungen von etwa  $300 \times 300$ . Dagegen skaliert für ein 3D-System der Aufwand mit  $N^2$ , wodurch sich nur noch sehr fragwürdige Auflösungen realisieren lassen. Der von uns verwendete Löser heißt PARDISO<sup>3</sup> (PARallel sparse DIrect SOLver) und wurde an der Universität Basel entwickelt. Er läuft sowohl auf Einzel- als auch auf Mehrkernprozessoren (und skaliert im parallelen Mehrkernbetrieb sehr gut).

## 3.5 Separation dominanter Strukturen linearer Gleichungen

Ursprünglich aus der Not heraus geboren, daß iterative Näherungsverfahren zur Lösung unserer linearen Gleichungssysteme so miserable Konvergenzeigenschaften aufweisen (vgl. §3.4.1), haben wir eine Methode entwickelt, die ganz allgemein die Genauigkeit der Lösung erhöht, sowie die anderen nötigen Lösungsverfahren mit „vereinfachten“ Aufgaben konfrontiert. Das Verfahren funktioniert für beliebige lineare partielle Differentialgleichungen. Die Idee ist folgende: Nehmen wir an, eine bestimmte Koordinatenrichtung eines Systems enthält die dominanten Strukturen, d.h. die Feldgrößen variieren in dieser Richtung viel stärker als in alle anderen Richtungen. Dann ist es sinnvoll diese dominierenden Strukturen in der einen Dimension abzuspalten vom restlichen System, um sie separat auszuwerten.

### 3.5.1 Erläuterung am Beispiel der Poissongleichung

Wir möchten das Verfahren direkt an einem passenden Beispiel veranschaulichen, der Poissongleichung in Kugelkoordinaten. Betrachten wir den typischen Fall, daß eine hohe, kugelsymmetrische Massenkonzentration im Zentrum des Systems existiert, umgeben von einer verhältnismäßig kleinen Masse die nicht kugelsymmetrisch ist (z.B. eine Akkretionsscheibe). Dann teilen wir das gesamte Feld der Massendichte  $\rho(r, \theta, \phi)$  auf in einen sphärischen Anteil

$$\rho^0(r) := \min_{\theta, \phi} [\rho(r, \theta, \phi)] \quad (3.14)$$

und einen nichtsphärischen Rest

$$\rho^{\text{res}}(r, \theta, \phi) := \rho(r, \theta, \phi) - \rho^0(r). \quad (3.15)$$

---

<sup>3</sup><http://www.pardiso-project.org>

Anschaulich bedeutet dies, daß wir uns in jeder Kugelschale die kleinste Massendichte bestimmen ( $\rho^0$ ) und diese dann von der Massendichteverteilung in der Kugelschale subtrahieren, um die Restmassendichte ( $\rho^{\text{res}}$ ) zu erhalten. Den sphärischen Anteil des Gravitationspotentials können wir uns jetzt sehr einfach und direkt mittels Gauß-Elimination aus dem sphärischen Teil der Poissongleichung

$$\Delta\Phi^0(r) = 4\pi G\rho^0(r) \quad (3.16)$$

bestimmen. Das Restpotential muß mit einer geeigneten Methode (siehe §3.4) aus der verbleibenden nichtsphärischen Poissongleichung

$$\Delta\Phi^{\text{res}}(r, \theta, \phi) = 4\pi G\rho^{\text{res}}(r, \theta, \phi) \quad (3.17)$$

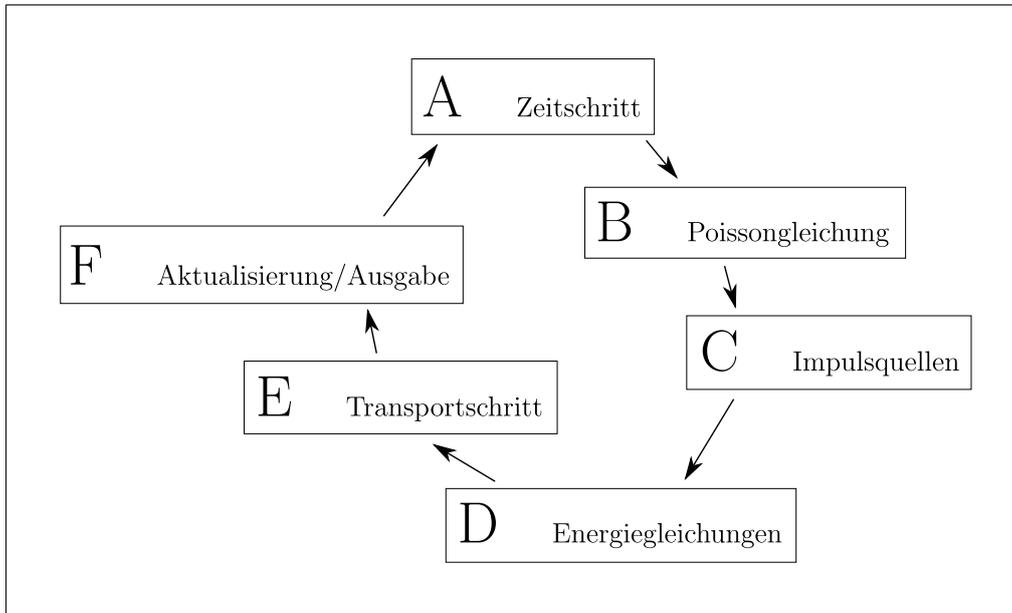
errechnet werden. Das Gesamtpotential lautet dann natürlich

$$\Phi(r, \theta, \phi) = \Phi^0(r) + \Phi^{\text{res}}(r, \theta, \phi). \quad (3.18)$$

Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt klar auf der Hand. Haben wir es z.B. mit einer sphärischen Akkretionsströmung zu tun, steckt praktisch die gesamte, auf dynamischer Zeitskala variierende Struktur der Lösung im sphärischen Anteil (3.16). Der nichtsphärische Rest (3.17) verändert sich auf einer viel längeren Zeitskala. Nutzt man nun für die viel aufwendiger zu lösende Restgleichung (3.17) ein iteratives Verfahren, so sind bei langsamerer zeitlicher Variation der Lösung, selbstverständlich viel weniger Iterationen pro Zeitschritt nötig. Dadurch sind extreme Verkürzungen des absoluten Zeitaufwandes für die Lösung der Poissongleichung möglich. Je nach Struktur der momentanen Lösung konnten wir Beschleunigungsfaktoren zwischen 10 und 80(!) erreichen. Aber auch bei Verwendung direkter Löser (§3.4.2) für (3.17) hat diese Methode Vorteile, wenn es um die Genauigkeit der Ergebnisse geht. Bedenkt man nämlich, daß ja der Gradient des Potentials  $\Phi$  in die Impulsbilanz eingeht, dann wäre man im Falle einer stark kugelsymmetrischen Struktur (die nicht separiert wurde) bei der Gradientenbildung in eine der Winkelrichtungen ( $\theta$  oder  $\phi$ ) schnell mit einer Differenz großer Zahlen konfrontiert, eine numerisch nicht erwünschte Situation. Mit unserer Methode kommt jedoch in den „Winkelgradienten“ der dominierende sphärische Anteil  $\Phi^0(r)$  gar nicht mehr vor, sondern nur noch  $\Phi^{\text{res}}$ , was genauere Ergebnisse der Impulsbilanz in Winkelrichtung zur Folge hat.

#### 3.5.2 Anwendung auf andere Gleichungen

Eine prinzipiell analoge Methode für komplexere Gleichungen (wie die der Strahlungsenergie) wurde von uns auch abgeleitet, jedoch ist das Vorgehen in diesem Fall etwas



**Abbildung 3.3:** Der Ablauf eines Zeitschrittes unseres Programms. Die Teilschritte A – F sind in §3.7 – §3.12 erläutert.

unübersichtlicher und trickreicher<sup>4</sup>. Da wir nicht mehr auf iterative Löser angewiesen sind, und der soeben erwähnte „Gradientenaspekt“ für die Strahlungsenergie nur strahlungsdruckdominierte Systeme betrifft, verwenden wir die Separationsmethode momentan nur für die Poissongleichung. Nichtsdestoweniger gibt es sicherlich noch andere Probleme, für die dieses Verfahren in Zukunft sinnvoll eingesetzt werden kann.

### 3.6 Der gesamte Algorithmus im Überblick

Wir kommen nun zur ausführlichen Beschreibung des Ablaufs eines Zeitschrittes. Dies entspricht dem einmaligen Durchlauf der Hauptschleife unseres Programms. Eine Übersicht zu den in den nächsten Abschnitten erläuterten Teilschritten ist in Abb. 3.3 zu sehen. Wir verwenden ein Mehrschrittverfahren, d.h. der Transportschritt E wird getrennt von den anderen (die Erhaltungsgleichungen betreffenden) Schritten C und D ausgewertet (C und D werden zusammen oft auch als Quellschritt bezeichnet).

### 3.7 Teil A: Bestimmung des Zeitschrittes

Der hydrodynamische Zeitschritt eines expliziten Verfahrens ist aus Gründen der numerischen Stabilität begrenzt. Die hyperbolischen Anteile der verwendeten Gleichungen erfordern, daß der Zeitschritt so klein gewählt wird, daß eine Druckwelle mit der adiabatischen

<sup>4</sup>Gewisse Anteile der sphärischen Lösung tauchen als Quellterme in der nichtsphärischen Gleichung auf.

Schallgeschwindigkeit  $c_s = \sqrt{(\partial p / \partial \rho)_s}$ , unter Berücksichtigung der lokalen Strömungsgeschwindigkeit  $\mathbf{v}$ , die Länge einer Zelle des Gitters in einem Zeitschritt nicht zu durchlaufen vermag. Dies führt zur Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung, der Grenzschriftweite (vgl. z.B. [LeVeque, 2002])

$$\Delta t_d^{\text{hyp}} = \min_{i,j,k} \left( \frac{\Delta x_d}{c_s + |v_d|} \right), \quad d = 1, 2, 3, \quad (3.19)$$

wobei  $d$  die räumlichen Dimensionen indiziert,  $\Delta x_d$  die jeweilige Zellweite des Gitters ist, und  $v_d$  die entsprechende Geschwindigkeitskomponente darstellt. Das Minimum ist über alle Zellen des Gitters (indiziert mit  $i, j, k$ ) zu verstehen. Weiterhin ist der Zeitschritt beschränkt durch die parabolischen Anteile der Gleichungen (diffusive Terme, charakterisiert durch den Diffusionskoeffizienten  $D$ ). Hier gilt für die Grenzschriftweite

$$\Delta t_d^{\text{para}} = \min_{i,j,k} \left( \frac{\Delta x_d^2}{4D} \right), \quad d = 1, 2, 3. \quad (3.20)$$

Der aktuell zu verwendende Zeitschritt ergibt sich dann zu

$$\Delta t = \sigma \min \left( \Delta t_1^{\text{hyp}}, \Delta t_2^{\text{hyp}}, \Delta t_3^{\text{hyp}}, \Delta t_1^{\text{para}}, \Delta t_2^{\text{para}}, \Delta t_3^{\text{para}} \right). \quad (3.21)$$

Der Sicherheitsfaktor  $\sigma (< 1)$  darf in mehrdimensionalen Simulationen leider nicht so knapp bemessen sein wie im eindimensionalen Fall. Eine rigorose Ableitung der Grenzschriftweiten (3.19) und (3.20) ist nämlich nur im 1D Fall möglich, schon in 2D stellt sie nur eine Faustregel dar.  $\sigma$  wird wiederum adaptiv in Abhängigkeit von der zeitlichen Variabilität der Temperatur wie folgt bestimmt: Ist

$$\delta_T = \max_{i,j,k} (\Delta T / T) \quad (3.22)$$

die maximale relative Variation der Temperatur von einem Zeitschritt zum nächsten,  $\epsilon_T$  die maximal erlaubte Variation,  $\sigma_{\text{max}}$  der maximalen Sicherheitsfaktor, sowie  $\eta_T$  der Spannungsfaktor, dann definieren wir den rekursiven Regelungsalgorithmus

$$\sigma = \begin{cases} \sigma \epsilon_T / \delta_T, & \text{falls } \delta_T > \epsilon_T, \\ \min(\sigma_{\text{max}}, \sigma \eta_T), & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.23)$$

Wir verwenden  $\epsilon_T = 0.01$ ,  $\sigma_{\text{max}} = 0.6$  und  $\eta_T = 1.01$ . Ist die Temperaturvariation größer als erlaubt, wird  $\sigma$  soweit reduziert, daß bei gleichen Verhältnissen im nächsten Zeitschritt die Variation gerade nicht über den Grenzwert stiege. Ist keine Reduzierung nötig, steigt  $\sigma$  mittels  $\eta_T$  langsam an, kann jedoch nicht größer als  $\sigma_{\text{max}}$  werden. Dieser Algorithmus hat sich als sehr stabil und zuverlässig erwiesen.

## 3.8 Teil B: Lösung der Poissongleichung

Wie in §3.5 diskutiert, teilen wir die Lösung der Poissongleichung (2.42) in einen sphärischen und einen nichtsphärischen Teil. Im Folgenden beschreiben wir das Vorgehen im Detail.

### 3.8.1 Sphärischer Anteil

Der kugelsymmetrische Teil der Poissongleichung (3.16) stellt eine gewöhnliche Differentialgleichung dar und läßt sich durch zweifache Integration lösen. Nachdem wir die sphärische Masse  $M^0(r)$  innerhalb einer jeden Kugelschale mit Radius  $r$

$$M^0(r) = 4\pi \int_0^r \rho^0 \tilde{r}^2 d\tilde{r} \quad (3.24)$$

bestimmt haben, können wir

$$\frac{d\Phi^0(r)}{dr} = \frac{GM^0(r)}{r^2} \quad (3.25)$$

von außen ( $r_{Nr}$ ) nach innen ( $r = 0$ ) mit der Randbedingung  $\Phi^0(r_{Nr}) = -GM^0(r_{Nr})/r_{Nr}$  integrieren. Die Diskretisierung folgt direkt aus dem in §3.2 angegebenen Schema.

### 3.8.2 Nichtsphärischer Anteil

Unter Verwendung der in §3.2 eingeführten Diskretisierung für die verschiedenen Differentialoperatoren, können wir den nichtsphärischen Teil der Poissongleichung (3.17) als ein System von Differenzgleichungen formulieren. Da der Laplace-Operator eine Hintereinanderausführung der Operationen Gradient und Divergenz ist ( $\Delta = \nabla \cdot \nabla$ ), ergibt sich aus den Gleichungen (3.8) und (3.9) und dem aus ihnen folgendermaßen definierten Differenzenoperator

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{i,j,k}(S_{i,j,k}) := & \text{Fl}_{i+1,j,k}^1 \frac{S_{i+1,j,k} - S_{i,j,k}}{x_{i+1,j,k}^1 - x_{i,j,k}^1} - \text{Fl}_{i,j,k}^1 \frac{S_{i,j,k} - S_{i-1,j,k}}{x_{i,j,k}^1 - x_{i-1,j,k}^1} + \\ & \text{Fl}_{i,j+1,k}^2 \frac{S_{i,j+1,k} - S_{i,j,k}}{x_{i,j+1,k}^2 - x_{i,j,k}^2} - \text{Fl}_{i,j,k}^2 \frac{S_{i,j,k} - S_{i,j-1,k}}{x_{i,j,k}^2 - x_{i,j-1,k}^2} + \\ & \text{Fl}_{i,j,k+1}^3 \frac{S_{i,j,k+1} - S_{i,j,k}}{x_{i,j,k+1}^3 - x_{i,j,k}^3} - \text{Fl}_{i,j,k}^3 \frac{S_{i,j,k} - S_{i,j,k-1}}{x_{i,j,k}^3 - x_{i,j,k-1}^3}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

die diskrete Form von (3.17) zu

$$-\mathcal{A}_{i,j,k}(\Phi_{i,j,k}^{\text{res}}) = -4\pi G \rho_{i,j,k}^{\text{res}} \text{Vol}_{i,j,k}. \quad (3.27)$$

Ordnen wir die  $\Phi_{i,j,k}^{\text{res}}$  aller Gitterzellen  $(i, j, k)$  in einem Vektor  $\Phi^{\text{res}}$  und ordnen wir alle Massenelemente  $\rho_{i,j,k}^{\text{res}} \text{Vol}_{i,j,k}$  genauso in einem Vektor  $\mathbf{m}^{\text{res}}$ , so entspricht (3.27) einem

linearen Gleichungssystem

$$A\Phi^{\text{res}} = -4\pi G\mathbf{m}^{\text{res}}. \quad (3.28)$$

In dem wir das Volumenelement  $\text{Vol}_{i,j,k}$  in (3.27) auf die rechte Seite bringen, ist die Matrix  $A$  symmetrisch. Durch das in (3.27) eingeführte Minuszeichen wird  $A$  positiv definit, besitzt also nur positive Eigenwerte. Dies muß so sein, da immer  $\Phi^{\text{res}} < 0$  und  $\mathbf{m}^{\text{res}} > 0$  gilt. Das System (3.28) wird nun wie in §3.4 beschrieben (zusammen mit den im nächsten Absatz diskutierten Randbedingungen) gelöst.

### 3.8.3 Multipolentwicklung der nichtsphärischen Potentialrandwerte

Im Falle der Poissongleichung haben wir es neben Neumann-Randbedingungen, welche aus Symmetrieanahmen (siehe §3.13) folgen und Normalenableitungen der gesuchten Funktion auf dem Rand festlegen, mit Dirichlet-Randbedingungen zu tun, bei denen Funktionswerte selbst vorgegeben werden. Sowohl der äußere als auch der gegebenenfalls vorhandene innere Rand (siehe §3.14) wird durch Dirichlet-Randbedingungen bestimmt. Die nötigen Potentialrandwerte ergeben sich aus einer Multipolentwicklung.

#### Äußerer Rand

Wir nehmen an, daß sich außerhalb unseres kugelförmigen Simulationsbereiches mit Radius  $r_{N_r}$  keine Masse befindet, bzw. daß diese Masse so weit entfernt ist, daß sie keinen bemerkbaren Einfluß auf unser System hat. In diesem Außenbereich ( $r \geq r_{N_r}$ , gekennzeichnet mit „>“) entspricht das Restpotential  $\Phi_{>}^{\text{res}}$  also einer harmonischen Funktion, d.h. einer Funktion die der Laplacegleichung  $\Delta\Phi_{>}^{\text{res}} = 0$  genügt. Daher ergibt sich die Außenlösung durch eine Multipolentwicklung der nichtsphärischen Dichteanteile  $\rho^{\text{res}}$  (3.15)

$$\Phi_{>}^{\text{res}}(r, \theta, \phi) = -4\pi G \sum_{l,m} \frac{Y_l^m}{2l+1} \frac{\mu_{>}^{lm}}{r^{l+1}}, \quad \mu_{>}^{lm} = \int_0^{r_{N_r}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^{\text{res}} Y_l^{m*} r^{l+2} \sin\theta \, dr d\theta d\phi, \quad (3.29)$$

mit den äußeren Multipolmomenten  $\mu_{>}^{lm}$  und den bekannten Kugelflächenfunktionen  $Y_l^m = Y_l^m(\theta, \phi)$ . Bis zu welcher Ordnung  $l$  (und dementsprechend  $-l \leq m \leq l$ ) wir  $\Phi_{>}^{\text{res}}$  entwickeln, hängt von der Konvergenz der Reihe (3.29) ab, also davon, wie schnell die einzelnen Terme gegen null streben. Da in unseren Simulationen die von der Kugelsymmetrie maßgeblich abweichenden Strukturen in einem zentralen Bereich zu finden sind, der etwa um einen Faktor 100 kleiner ist als der äußere Rand ( $r_{N_r}$ ), ist praktisch nur der Monopolterm ( $l=0$ ) relevant, entsprechend  $\Phi_{>}^{\text{res}} \approx -G\mu_{>}^{00}/r = -GM_{\text{ges}}^{\text{res}}/r$  (das Monopolmoment  $\mu_{>}^{00}$  ist natürlich gleich der gesamten nichtsphärischen Masse  $M_{\text{ges}}^{\text{res}}$ ). Trotzdem berücksichtigen wir alle Terme bis zu  $l=8$ . Im axialsymmetrischen Fall ist  $m \equiv 0$ , bei Äquatorsymmetrie sind nur Terme mit geradem  $l$  von null verschieden.

### Möglicher innerer Rand

Schneiden wir ein Loch (mit Radius  $r_L$ ) in den zentralen Bereich unseres Systems (siehe §3.14.3), müssen wir spekulieren, wie die Massenverteilung in diesem Loch aussieht. Aufgrund fehlender Informationen ist die einzig plausible Annahme die der kugelsymmetrischen Verteilung. Da in diesem Fall allerdings der Massenanteil des Loches vollständig im separierten, sphärischen Teil des Potentials enthalten ist, besteht für das Restpotential im Innenbereich ( $r \leq r_L$ , gekennzeichnet mit „<“)  $\Phi_{<}^{\text{res}}$  die gleiche Situation wie für  $\Phi_{>}^{\text{res}}$  am Außenrand, d.h. die nichtsphärische Dichteverteilung im Loch ist null und es gilt die Laplacegleichung  $\Delta\Phi_{<}^{\text{res}} = 0$ . Somit können wir eine analoge Multipolentwicklung der nichtsphärischen Dichteanteile (außerhalb des Loches) durchführen und erhalten die innere Lösung

$$\Phi_{<}^{\text{res}}(r, \theta, \phi) = -4\pi G \sum_{l,m} \frac{Y_l^m}{2l+1} \mu_{<}^{lm} r^l, \quad \mu_{<}^{lm} = \int_{r_L}^{r_{Nr}} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^{\text{res}} Y_l^{m*} r^{1-l} \sin\theta \, dr d\theta d\phi, \quad (3.30)$$

mit den inneren Multipolmomenten  $\mu_{<}^{lm}$ . Im Gegensatz zum Außenrand können nichtsphärische Strukturen am Lochrand direkt anschließen (also dem Rand sehr nahe liegen) weshalb eine Beschränkung auf den Monopolterm in diesem Fall praktisch nicht möglich ist. Es werden so viele Ordnungen mitgenommen bis die relative Variation von  $\Phi_{<}^{\text{res}}$  kleiner als  $10^{-3}$  ist. Die am Ende des vorherigen Absatzes angesprochenen Symmetriefolgerungen gelten natürlich auch für die innere Lösung.

## 3.9 Teil C: Explizite Auswertung der Impulsquellen

Da im Quellschritt die Dichte  $\rho$  zeitlich konstant ist, vereinfacht sich die Auswertung der Impulsquellen (also der rechten Seite der Impulsbilanz (2.39)) zu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \left( -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{Q} - \lambda \nabla E \right) - \nabla \Phi + \mathbf{K}. \quad (3.31)$$

Der zusätzliche Vektor  $\mathbf{K}$  bezeichnet die Krümmungsterme. Sie entsprechen den „Inertialkräften“ in krummlinigen Koordinatensystemen und ergeben sich formal aus dem Advektionsterm  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v})$  in (2.39), indem die Divergenz auf den Tensor des Impulsflusses  $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$  wirkt. Konkret gilt in integraler Form

$$\int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \, dV = \int \rho \mathbf{K} \, dV + \int \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}). \quad (3.32)$$

Der zweite Term auf der rechten Seite in (3.32) beschreibt nun ausschließlich die Advektion der Impulskomponenten in die einzelnen Koordinatenrichtungen (über die entsprechenden

Oberflächenelemente) und wird direkt in dieser integralen Form im Transportschritt verwendet. Wir erhalten z.B. in Kugelkoordinaten, mit den Geschwindigkeitskomponenten  $\mathbf{v} = (v_r, v_\theta, v_\phi) = (u, v, w)$ , für  $\mathbf{K}$  den Ausdruck

$$\mathbf{K}_{\text{Kugelk.}} = \left( \frac{v^2 + w^2}{r}, \frac{w^2}{r \tan \theta}, 0 \right). \quad (3.33)$$

Die Diskretisierung der Gleichung (3.31) erfolgt wie in §3.2 erläutert, allerdings ist die zeitliche Differenzierung nicht zentriert sondern vorwärts gerichtet. Wir erhalten Gleichungen folgender Art, z.B. für die erste Geschwindigkeitskomponente

$$\frac{u_{i,j,k}^{n+q} - u_{i,j,k}^n}{\Delta t} = - \frac{2}{\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k}} \frac{p_{i,j,k} - p_{i-1,j,k}}{x_{i,j,k}^1 - x_{i-1,j,k}^1} + \dots \quad (3.34)$$

Alle im Quellschritt (Teil C und D) aktualisierten Größen erhalten den Zeitindex  $n+q$ . Nötige räumliche Mittelungen aufgrund des gestaffelten Gitters (in (3.34) z.B. für  $\rho$ ) werden arithmetisch durchgeführt. Für eine ausführliche Darstellung aller Differenzgleichungen verweisen wir auf die Dokumentation des ZEUS-Codes [Hayes et al., 2006] welchem wir in diesem Schritt direkt folgen. Die expliziten Ausdrücke für die Komponenten des Tensors  $\mathbf{Q}$  sind in [Tscharnuter and Winkler, 1979] zu finden.

### 3.10 Teil D: Implizite Auswertung der Energiegleichungen

Wollten wir die Strahlungsdiffusion mit einem expliziten Schema behandeln, ergäbe sich mit (3.20) und einem Diffusionskoeffizienten  $D = c l_f = c/(\kappa\rho)$  eine zeitliche Grenzschrittweite von

$$\Delta t_{\text{Strahlung}} \propto \frac{\Delta x^2}{4c l_f} = \frac{\Delta x^2 \kappa \rho}{4c} = \frac{\Delta x \Delta \tau}{4c}, \quad (3.35)$$

die ganz anschaulich, proportional der Lichtlaufzeit durch eine Gitterzelle ( $\Delta x/c$ ), multipliziert mit der effektiven optischen Tiefe der Zelle ( $\Delta \tau$ ) ist. Es ist klar daß diese Zeitskala im allgemeinen um Größenordnungen kleiner ist, als die der hydrodynamischen Skala. Daher lösen wir die Strahlungsenergiegleichung und die mit ihr verkoppelte innere Energiegleichung zeitlich implizit. Wir sind also mit dem vollen System (2.40)–(2.41)

$$\frac{\partial e}{\partial t} \left[ + \nabla \cdot (e \mathbf{v}) \right] = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{v} + c\kappa\rho (E - aT^4) + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E - f\kappa\rho \frac{v^2}{c} E, \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (f E \mathbf{v}) = \nabla \cdot \left( \frac{c\lambda}{\kappa\rho} \nabla E \right) - c\kappa\rho (E - aT^4) - \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E + f\kappa\rho \frac{v^2}{c} E, \quad (3.37)$$

konfrontiert. Nur der Advektionsterm der inneren Energie (in eckigen Klammern) wird erst später im Transportschritt behandelt. Dies hat den Vorteil daß nur für  $E$  räumliche

Ableitungen vorkommen und somit nur ein lineares Gleichungssystem für diese eine Größe entsteht, und nicht eines für beide Größen ( $E$  und  $e$ ). Der entsprechende Advektionsterm für  $E$  hätte auch in den expliziten Transportschritt verlegt werden können. Jedoch gibt es (auch dank des robusten direkten Löser) keinen Grund, die Advektion für  $E$  nicht in einem Gang zusammen mit den Diffusions- und Arbeitstermen selbstkonsistent durchzuführen. Innerhalb dieses Teils verwenden wir abermals ein Mehrschrittverfahren. Zunächst lösen wir das lineare Gleichungssystem, welches aus den Termen mit räumlichen Ableitungen in (3.37) resultiert, mit dem Zwischenergebnis  $E^*$  (Schritt 1). Dann verwenden wir  $E^*$  um die nichtlinearen Gleichungen mittels Newton-Verfahren auszuwerten (Schritt 2).

### 3.10.1 Schritt 1: Advektions-, Diffusions- und Diffusionsarbeitsterm

Es gilt also zunächst den Teil von (3.37) auszuwerten, der räumliche Ableitungen enthält, etwas umsortiert entspricht das

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \left( f E \mathbf{v} - \frac{c\lambda}{\kappa\rho} \nabla E \right) + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E = 0. \quad (3.38)$$

In diesem Schritt werden alle Größen in (3.38), außer natürlich  $E$ , als konstant angenommen und vor der Berechnung aus den aktuell vorhandenen anderen Größen bestimmt. Wir verwenden also insbesondere  $\mathbf{v} = \mathbf{v}^{n+q}$ , sowie  $f = f(E^n, \kappa^n \rho^n)$  und  $\lambda = \lambda(E^n, \kappa^n \rho^n)$  (vgl. (2.44)).

#### Mittlung der Opazitäten auf Zelloberflächen

Eine besondere Bedeutung kommt an dieser Stelle der Größe  $\chi = \kappa\rho = 1/l_f$  zu, die in (3.38) an den Oberflächen der Gitterzellen benötigt wird. Sie bestimmt wie stark z.B. Strahlung aus einem heißen, optisch dünnen Gebiet, in ein kühles, optisch dickes Gebiet eindringt. Die Mittelungsmethode, welche das dicke oder das dünne Gebiet stärker gewichten kann, hat einen erheblichen Einfluß auf den Diffusionsprozess. Das harmonische Mittel hat sich als das physikalisch sinnvollste herausgestellt

$$\chi = \frac{2\chi^l \chi^r}{\chi^l + \chi^r} \quad \text{oder} \quad l_f = \frac{1}{2} \left( l_f^l + l_f^r \right). \quad (3.39)$$

Die hochgestellten Indizes (l,r) bezeichnen die der Oberfläche links und rechts benachbarten, in den Zellmitten definierten, skalaren Größen. Die zweite Formulierung in (3.39) ist nichts weiter als das arithmetische Mittel der mittleren freien Weglängen. Dies ist wiederum sehr anschaulich: Wir mitteln (im eigentlichen, arithmetischen Sinn) also „Durchsichtigkeiten“ (Größen wie  $l_f$ ) und nicht Opazitäten.

### Das lineare Gleichungssystem

Die zeitlich voll implizite Formulierung von (3.38) entspricht

$$\frac{E^* - E^n}{\Delta t} + \nabla \cdot \left( f E^* \mathbf{v} - \frac{c\lambda}{\kappa\rho} \nabla E^* \right) + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E^* = 0. \quad (3.40)$$

Verwenden wir wieder die in §3.2 eingeführten Diskretisierung und definieren den Differenzenoperator (hier der Übersichtlichkeit wegen nur gezeigt für eine Dimension)

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_i(S_i) := S_i + \Delta t & \left[ \frac{\text{Fl}_{i+1}^1}{\text{Vol}_i} \left( f_{i+1} \frac{S_{i+1} + S_i}{2} u_{i+1} - \frac{c\lambda_{i+1}}{\kappa_{i+1}\rho_{i+1}} \frac{S_{i+1} - S_i}{x_{i+1}^1 - x_i^1} \right) \right. \\ & - \frac{\text{Fl}_i^1}{\text{Vol}_i} \left( f_i \frac{S_i + S_{i-1}}{2} u_i - \frac{c\lambda_i}{\kappa_i\rho_i} \frac{S_i - S_{i-1}}{x_i^1 - x_{i-1}^1} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2} \left( \lambda_{i+1} u_{i+1} \frac{S_{i+1} - S_i}{x_{i+1}^1 - x_i^1} + \lambda_i u_i \frac{S_i - S_{i-1}}{x_i^1 - x_{i-1}^1} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.41)$$

und erweitern ihn problemlos auf die anderen Dimensionen  $\mathcal{B}_i(S_i) \rightarrow \mathcal{B}_{i,j,k}(S_{i,j,k})$ , so ergibt sich die Diskrete Form von (3.40) zu

$$\mathcal{B}_{i,j,k}(E_{i,j,k}^*) = E_{i,j,k}^n. \quad (3.42)$$

Betrachten wir nun analog zu §3.8.2 alle Elemente aus  $E_{i,j,k}^*$  und  $E_{i,j,k}^n$  jeweils in Vektoren  $\mathbf{E}^*$  und  $\mathbf{E}^n$  geordnet, so entspricht (3.42) einem linearen Gleichungssystem

$$B\mathbf{E}^* = \mathbf{E}^n. \quad (3.43)$$

Die Matrix  $B$  ist im Gegensatz zu  $A$  in (3.28) leider nicht symmetrisch. Das System (3.43) wird nun wieder wie in §3.4 beschrieben gelöst. Die dazu nötigen Randbedingungen diskutieren wir in den beiden folgenden Absätzen.

### Äußere Randbedingung

Wir nehmen an, daß unser System am äußeren Rand ( $r = r_{N_r}$ ) frei abstrahlen kann in eine Umgebung, welche sich im thermodynamischen Gleichgewicht mit einer Temperatur  $T = T_{\text{ext}}$  befindet. In diesem Fall ist die Randbedingung für  $E$  gegeben durch (vgl. [Yorke, 1980])

$$E(r_{N_r}) = aT_{\text{ext}}^4 + \frac{2F_r(r_{N_r})}{c}, \quad (3.44)$$

mit der radialen Komponente  $F_r$  des Strahlungsflusses  $\mathbf{F}$ . Unter Verwendung von (2.15) mit  $v_r(r_{N_r})=0$  (vgl. §3.14), können wir (3.44) schreiben als

$$E(r_{N_r}) = aT_{\text{ext}}^4 - \frac{2\lambda}{\kappa\rho} \left. \frac{\partial E}{\partial r} \right|_{r_{N_r}}. \quad (3.45)$$

Hier haben wir es mit einer, für unser System nur an dieser Stelle vorkommenden, gemischten Randbedingung zu tun. In (3.45) kommt sowohl der Funktionswert  $E$ , als auch die Normalenableitung  $\partial E/\partial r$  vor, in gewissem Sinne eine Mischung von Dirichlet- und Neumann-Randbedingung. (3.45) wird direkt mit in das lineare Gleichungssystem (3.43) eingebaut und somit auch voll implizit behandelt.

### Mögliche innere Randbedingung

Falls wir wiederum ein Loch (mit Radius  $r_L$ ) in den zentralen Bereich des Systems schneiden (siehe §3.14.3), müssen wir Annahmen über das Strahlungsfeld auf dem Lochrand machen. Nehmen wir an, wir haben uns eine Gesamtleuchtkraft des Loches  $L_L$  beschafft, dann müssen wir uns überlegen, wie diese integrale Größe  $L_L$  in eine Verteilung des radialen Strahlungsflusses  $F_r(r_L, \theta, \phi)$  auf dem Rand übersetzt werden kann. Da wir die Struktur des Strahlungsfeldes im Loch nicht kennen, nutzen wir die (bekannte) mittlere freie Weglänge der Strahlung  $l_f(r_L, \theta, \phi)$  als Gewicht, um uns eine Verteilung zu bestimmen. Zusammen mit dem Oberflächenelement  $dS_L = r_L^2 \sin\theta d\theta d\phi$  verwenden wir dann

$$F_r(r_L, \theta, \phi) = L_L \frac{l_f}{\oint l_f dS_L}. \quad (3.46)$$

Vergleiche von (3.46) mit dem tatsächlichen radialen Strahlungsfluß (ohne Loch mit bekanntem  $L_L$ ) zeigen, daß insbesondere für zentrale, im Vergleich zum Radius  $r_L$  sehr kleine Strahlungsquellen, die Formulierung (3.46) eine ausgezeichnete Näherung ist. Auch bei extrem inhomogenen Verteilungen von  $l_f$  auf dem Rand, z.B. hervorgerufen durch eine Akkretionsscheibe am Äquator, ergibt der Vergleich nur relative Abweichungen unter 5%. Das Problem liegt eher in der Definition einer vernünftigen Vorschrift für  $L_L$ . Wir verwenden die folgende Abschätzung

$$L_L = \dot{M}(r_L) \left[ \frac{1}{2} v_r^2(r_L) + GM_L \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_L} \right) \right] + L_0, \quad (3.47)$$

mit der Massenakkretionsrate  $\dot{M}$  und der Lochmasse  $M_L$ , welche bekannt sind, sowie dem mittleren Akkretionsradius  $r_a$  und der Grundleuchtkraft  $L_0$ , die nicht bekannt sind. Der erste Term in (3.47) entspricht dem Eintrag der kinetischen Energie die letztlich umgesetzt werden muß, der zweite Term stellt die Gravitationsenergie dar, die auf dem Weg der Ma-

terie vom Lochrand zum mittleren Akkretionsradius noch frei wird. Der Akkretionsradius kann aus der Form des zentralen Objektes abgeschätzt werden (bevor wir dieses ausschneiden). Die Grundleuchtkraft kann aus der thermischen Struktur des Objektes (über die effektive Temperatur) ebenso geschätzt werden (siehe auch Kapitel 4). Natürlich sind die Größen  $r_a$  und  $L_0$  mit der Zeit veränderlich und über längere Zeiträume müßte man eine Vorhauptreihenentwicklung des zentralen Objektes mit einbeziehen, was weit über den Rahmen dieser Arbeit hinaus führen würde.

Für die endgültige Formulierung der Randbedingung bezüglich  $E$  benötigen wir wieder (2.15), jedoch vernachlässigen wir in diesem Fall die Advektionsterme, verwenden also nur  $F_r \approx -c\lambda/(\kappa\rho) \partial E/\partial r$ . Dies ist gerechtfertigt, weil unser Rand nie ein Gebiet mit dynamischer Diffusion erfassen wird und die Advektionsterme daher vernachlässigbar sind. Somit erhalten wir letztlich eine Neumann-Randbedingung der Form

$$\left. \frac{\partial E}{\partial r} \right|_{r_L} = -\frac{\kappa\rho}{c\lambda} F_r(r_L, \theta, \phi). \quad (3.48)$$

### 3.10.2 Schritt 2: Lösung der nichtlinearen Gleichungen

Die verbleibenden Teile der Gleichungen (3.36) und (3.37) sind nun rein skalarer Natur<sup>5</sup> und können unabhängig für jede Gitterzelle ausgewertet werden.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{Q} : \nabla \mathbf{v} + c\kappa\rho (E - aT^4) + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E^* - f\kappa\rho \frac{v^2}{c} E, \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -c\kappa\rho (E - aT^4) + f\kappa\rho \frac{v^2}{c} E. \quad (3.50)$$

Wir verwenden folgende Abkürzungen für die in diesem Schritt konstanten Größen:

$$z := -\nabla \cdot \mathbf{v}^{n+q} \Delta t, \quad \varepsilon := (\mathbf{Q} : \nabla \mathbf{v}^{n+q} + \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla E^*) \Delta t, \quad x := c\rho \Delta t, \quad y := 1 - f v^2 / c^2.$$

In voll impliziter Form lautet das System (3.49) und (3.50) dann

$$e - e^n = zp + \varepsilon + x\kappa (yE - aT^4), \quad (3.51)$$

$$E - E^* = -x\kappa (yE - aT^4), \quad (3.52)$$

wobei wir alle, eigentlich mit dem Zeitindex  $n+q$  zu indizierenden, variablen Größen der Übersichtlichkeit wegen einfach ohne Index schreiben. Dies sind neben  $e$  und  $E$  die Variablen  $p$ ,  $T$  und  $\kappa$ , welche alle zum neuen Zeitpunkt gesucht werden. Wir stellen (3.52) nach  $E$  um und setzen in (3.51) ein. Aus der entstehenden Gleichung definieren wir die Funktion

$$\Gamma(e) := -e + e^n + zp + \varepsilon + \frac{x\kappa}{1 + yx\kappa} (yE^* - aT^4) = 0. \quad (3.53)$$

<sup>5</sup>Man beachte daß  $E^*$  in (3.49) eine im vorherigen Schritt berechnete, jetzt als konstant angenommene Größe ist.

Da uns sowohl Zustandsgleichung  $p(\rho, e)$  bzw.  $T(\rho, e)$  als auch Opazität  $\kappa(\rho, e)$  als Funktionen von  $e$  zur Verfügung stehen, ist  $\Gamma(e) = 0$  tatsächlich eine nur von  $e$  abhängige, nichtlineare Gleichung. Gleichung (3.53) läßt sich sehr effizient mit dem Newton-Verfahren lösen. Die Ableitung von  $\Gamma(e)$  lautet

$$\Gamma'(e) = \frac{\partial \Gamma}{\partial e} = -1 + z \frac{\partial p}{\partial e} + \frac{x\kappa}{1 + yx\kappa} \left( \frac{1}{\kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial e} \frac{yE^* - aT^4}{1 + yx\kappa} - 4aT^3 \frac{\partial T}{\partial e} \right). \quad (3.54)$$

Nun können wir die Lösung von (3.53) iterativ bestimmen mit der Vorschrift

$$e_{\xi+1} = e_{\xi} - \frac{\Gamma(e_{\xi})}{\Gamma'(e_{\xi})}. \quad (3.55)$$

Als Startwert verwenden wir  $e_0 = e^n$ . Man beachte, daß in jedem Iterationsschritt sowohl die Werte für die Funktionen  $p(\rho, e)$ ,  $T(\rho, e)$  und  $\kappa(\rho, e)$ , als auch deren partielle Ableitungen nach  $e$  neu bestimmt werden müssen (siehe §3.3). Es werden so viele Iterationen durchgeführt, bis ein definiertes Genauigkeitskriterium erfüllt ist. Wir verwenden die maximale, relative Variation

$$\delta_e = \max_{i,j,k} \left| 1 - \frac{e_{\xi}}{e_{\xi+1}} \right| \quad (3.56)$$

als ein solches Kriterium. Ist  $\delta_e$  kleiner als eine untere Schranke  $\epsilon_e$ , beenden wir die Iteration. Für unsere Rechnungen haben wir  $\epsilon_e = 10^{-5}$  gewählt.

Nachdem nun das neue  $e$  bestimmt worden ist, können wir aus den daraus folgenden neuen Werten für  $T$  und  $\kappa$  über (3.52) auch direkt das neue  $E$  bestimmen.

### 3.11 Teil E: Transportschritt

Die letzten noch auszuwertenden Teile des gesamten Gleichungssystems bestimmen die Advektion der Masse, des Impulses und der inneren Energie. In integraler Form lauten die jeweils entsprechenden Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}, \quad (3.57)$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho \mathbf{v} dV = - \int \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}), \quad (3.58)$$

$$\frac{d}{dt} \int \rho e dV = - \int \rho e \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.59)$$

### 3.11.1 Explizites Finite-Volumen-Verfahren

Wir verwenden ein explizites Finite-Volumen-Verfahren um die Gleichungen (3.57-3.59) zu lösen. Nehmen wir beispielsweise (3.57), dann ergibt sich die entsprechende diskrete Form zu

$$\begin{aligned} \left( \rho_{i,j,k}^{n+1} - \rho_{i,j,k}^n \right) \frac{\text{Vol}_{i,j,k}}{\Delta t} = & \text{Fl}_{i,j,k}^1 \mathcal{F}_{i,j,k}^{n+1/2} - \text{Fl}_{i+1,j,k}^1 \mathcal{F}_{i+1,j,k}^{n+1/2} + \\ & \text{Fl}_{i,j,k}^2 \mathcal{G}_{i,j,k}^{n+1/2} - \text{Fl}_{i,j+1,k}^2 \mathcal{G}_{i,j+1,k}^{n+1/2} + \\ & \text{Fl}_{i,j,k}^3 \mathcal{H}_{i,j,k}^{n+1/2} - \text{Fl}_{i,j,k+1}^3 \mathcal{H}_{i,j,k+1}^{n+1/2}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

mit den zeitlich gemittelten Flüssen  $\mathcal{F}^{n+1/2}$ ,  $\mathcal{G}^{n+1/2}$  und  $\mathcal{H}^{n+1/2}$ , welche natürlich unter anderem auch von  $\rho$  abhängen. Man beachte, daß die Formulierung (3.60) einem global konservativen Schema entspricht. Jeder Beitrag der eine Gitterzelle über eine Oberfläche verläßt, kommt gerade einer benachbarten Zelle zu. Somit bleiben alle physikalischen Erhaltungsgrößen (Masse, Impuls und Energie) während des Advektionsprozesses auch wirklich bis auf Maschinengenauigkeit erhalten.

#### Dimensionale Teilung

Eine der einfachsten Methoden um in mehrdimensionalen Problemen die Advektion durchzuführen, ist die dimensionale Teilung (“dimensional splitting”, vgl. [LeVeque, 2002]). Der gesamte Transportschritt wird einfach in mehreren, nacheinander ausgeführten, eindimensionalen Advektionsschritten vollzogen. Dabei geht die in einem Teilschritt aktualisierte Größe direkt in die Berechnung des nächsten Schrittes ein. Sei z.B. aus (3.60) der Advektionsoperator in die 1-Richtung definiert als

$$\mathcal{X}(\rho_{i,j,k}^n) := \rho_{i,j,k}^n + \frac{\Delta t}{\text{Vol}_{i,j,k}} \left( \text{Fl}_{i,j,k}^1 \mathcal{F}_{i,j,k}^{n+1/2} - \text{Fl}_{i+1,j,k}^1 \mathcal{F}_{i+1,j,k}^{n+1/2} \right) \quad (3.61)$$

und analog dazu für die beiden anderen Richtungen die Operatoren  $\mathcal{Y}$  und  $\mathcal{Z}$ . Der erste Teilschritt hieße dann  $\rho_{i,j,k}^* = \mathcal{X}(\rho_{i,j,k}^n)$ , der zweite  $\rho_{i,j,k}^{**} = \mathcal{Y}(\rho_{i,j,k}^*)$  und der letzte  $\rho_{i,j,k}^{n+1} = \mathcal{Z}(\rho_{i,j,k}^{**})$ . Dieses Vorgehen führt nur dann nicht zu einem zusätzlichen Fehler, wenn die einzelnen Operatoren  $\mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}$  und  $\mathcal{Z}$  vertauschen. Eine Symmetrisierung (für die in unserem Fall nicht vertauschenden Operatoren) ist jedoch sehr einfach zu realisieren, indem die Reihenfolge der einzelnen Operatoren in drei Zeitschritten einmal durchpermutiert wird, also  $\mathcal{Z}\mathcal{Y}\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}\mathcal{X}\mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{X}\mathcal{Z}\mathcal{Y} \rightarrow \dots$  (siehe [LeVeque, 2002]).

#### Advektionsschema und van-Leer-Limiter

Im folgenden beschränken wir unsere Diskussion auf eine Dimension, da die anderen Richtungen vollkommen analog ausgewertet werden. Mit der soeben erläuterten dimensional

Teilung ergibt sich dann der gesamte Transportschritt. Das entscheidende Problem besteht darin, in (3.61) eine geeignete Näherung für den zeitlich gemittelten Fluß  $\mathcal{F}^{n+1/2}$  auf den Zelloberflächen zu finden. Wir verwenden die folgende Konstruktion

$$\mathcal{F}_i^{n+1/2} = u_i^{n+q} \tilde{\rho}_i, \quad (3.62)$$

wobei die Geschwindigkeit  $u$  wegen des gestaffelten Gitters ja schon prinzipiell auf den Zelloberflächen definiert ist<sup>6</sup>. Es bleibt die Aufgabe, die sowohl räumlich (auf die Zelloberflächen), als auch zeitlich gemittelte Dichte  $\tilde{\rho}_i$  zu bestimmen. Verwenden wir stückweise lineare Interpolationen für den momentanen Verlauf von  $\rho$ , so läßt sich  $\tilde{\rho}$  darstellen als

$$\tilde{\rho}_i = \begin{cases} \rho_{i-1} + \frac{1}{2}(x_i - x_{i-1} - u_i \Delta t) d\rho_{i-1}, & \text{falls } u_i > 0, \\ \rho_i - \frac{1}{2}(x_{i+1} - x_i + u_i \Delta t) d\rho_i, & \text{falls } u_i < 0. \end{cases} \quad (3.63)$$

Diese Gleichung beschreibt nichts weiter als die zeitlichen Mittelwerte  $\tilde{\rho}$  auf den Zelloberflächen, die durch die Advektion der stückweise linearen Funktionen mit den Steigungen  $d\rho$  während eines Zeitschrittes  $\Delta t$  entstehen (siehe Abb. 3.4). Über die Definition der Steigungen  $d\rho$  lassen sich nun wiederum verschiedene Advektionsschemata realisieren, bestenfalls ein Schema zweiter Ordnung.

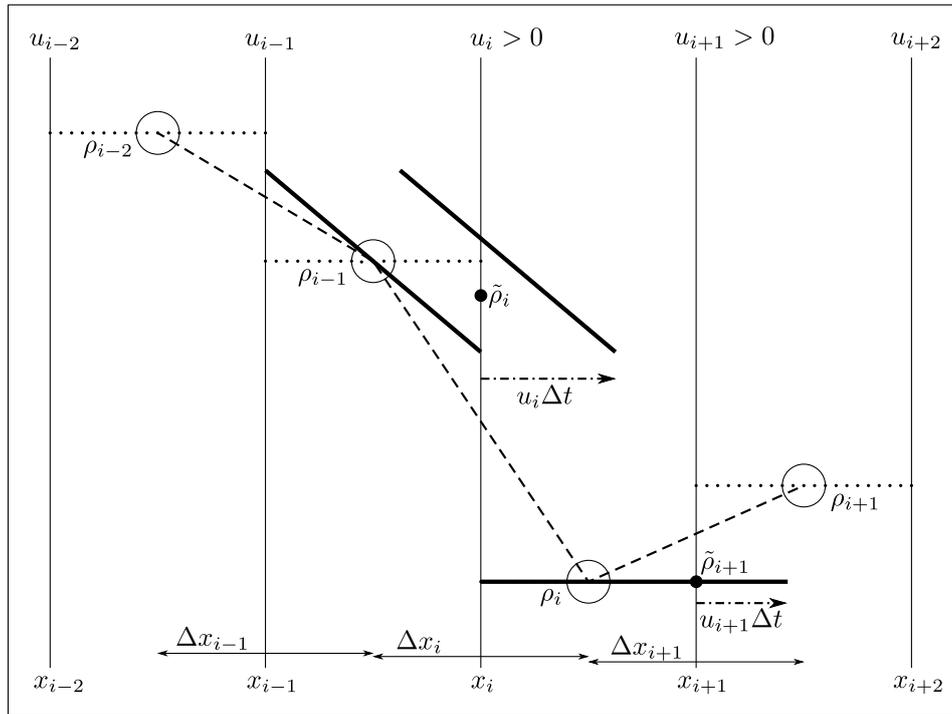
Setzen wir  $d\rho \equiv 0$  entspricht das natürlich stückweise konstanten Interpolationen und wir erhalten die so genannte Aufwind- oder auch „Donor-cell“-Methode, ein stabiles Verfahren erster Ordnung, welches jedoch äußerst diffusiv ist. Verwenden wir dagegen die Steigung auf der Oberfläche selbst, in Form des Gradienten

$$\nabla \rho_i = (\rho_i - \rho_{i-1}) / \Delta x_i, \quad (3.64)$$

also  $d\rho_{i-1} = \nabla \rho_i$  für  $u_i > 0$  bzw.  $d\rho_i = \nabla \rho_i$  für  $u_i < 0$ , so erhalten wir die klassische Lax-Wendroff-Methode. Diese ergibt sich formal aus der Taylor-Entwicklung der Advektionsgleichung  $\rho_t + u\rho_x = 0$  bis zur zweiten Ordnung, wodurch das Verfahren (bei Verwendung zentraler Differenzen) automatisch von zweiter Ordnung ist. Der Nachteil des Schemas besteht darin, daß die Verringerung (bzw. höchstens die Erhaltung) der totalen Variation<sup>7</sup> einer zu advektierenden Funktion  $\rho$  nicht immer gegeben ist, d.h. das Verfahren ist im allgemeinen nicht TVD. Dies äußert sich insbesondere in der Nähe von Diskontinuitäten, in Form von destabilisierenden Oszillationen, vgl. [LeVeque, 2002]. Wollen wir ein stabiles Schema zweiter Ordnung konstruieren, bieten sich nichtlineare TVD-Limiter an. Einer der bekanntesten ist der van-Leer-Limiter (vgl. [van Leer, 1977]), der das harmonische Mittel

<sup>6</sup> $u$  ist allerdings nicht zeitlich gemittelt.

<sup>7</sup>Allgemein mit dem Attribut TVD (“total variation diminishing”) bezeichnet.



**Abbildung 3.4:** Zur Konstruktion von  $\tilde{\rho}$ . Gepunktete Linien stellen Zellmittelwerte von  $\rho$  dar, gestrichelte Linien die Steigungen  $\nabla \rho$ . Die fett gedruckten Linien sind die Steigungen  $d\rho$  nach van Leer (3.65) zu Beginn und zum Ende eines Zeitschrittes, Strich-Punkt-Pfeile die entsprechenden Verschiebevektoren.

der benachbarten Steigungen bildet

$$d\rho_i = \begin{cases} \frac{2\nabla\rho_i\nabla\rho_{i+1}}{\nabla\rho_i+\nabla\rho_{i+1}}, & \text{falls } \nabla\rho_i\nabla\rho_{i+1} > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.65)$$

Da für das harmonische Mittel im Allgemeinen und deshalb auch für (3.65) immer die Abschätzung  $|d\rho_i| \leq 2 \min(|\nabla\rho_i|, |\nabla\rho_{i+1}|)$  gilt, überschreiten die so definierten Steigungen nie die Zellmittelwerte benachbarter Zellen. Für Extrema oder allgemein verschwindende Steigungen ist auch die van-Leer-Steigung null und das Verfahren reduziert sich an diesen Stellen auf das Aufwind-Verfahren (vgl. Zelle  $i$  in Abb. 3.4). Dadurch ist auch die TVD-Eigenschaft gegeben und somit die Monotonizität der Methode, d.h. eine monotone Funktion  $\rho$  ist es nach dem Advektionsschritt immer noch.

### Konsistente Advektion

Geht es darum neben der Masse die verbleibenden Variablen (Impuls und Energie) zu transportieren, bietet sich eine Vorgehensweise an, die unter der Bezeichnung „konsistente Advektion“ (siehe z.B. [Norman and Winkler, 1986]) bekannt ist. Dabei wird der schon

bestimmte Massenfluß (3.62) mit den jeweils spezifischen Größen (also pro Masseneinheit) multipliziert. Wir verwenden demnach die spezifische innere Energie  $e^s = e/\rho$  um uns ganz analog zur Masse in (3.63) eine gemittelte Größe  $\tilde{e}^s$  zu beschaffen. Der Fluß der inneren Energie lautet dann einfach  $\tilde{e}_i^s \mathcal{F}_i^{n+1/2} = \tilde{e}_i^s u_i^{n+q} \tilde{\rho}_i$ , somit wird die innere Energie lokal konsistent mit der Masse transportiert.

Genauso verfahren wir mit den Impulskomponenten, die in spezifische Impulse umgeformt werden. In kartesischen Koordinaten sind das direkt die Geschwindigkeitskomponenten, in krummlinigen Koordinaten zum Teil auch spezifische Drehimpulse. Durch das gestaffelte Gitter werden einige Mittelungen bei der Umrechnung der Impulse in Geschwindigkeiten und der Bestimmung der Impulsflüsse nötig. Für die ausführliche Darstellung aller Formeln verweisen wir wiederum auf die Dokumentation des ZEUS-Codes [Hayes et al., 2006].

## 3.12 Teil F: Aktualisierungen und Ausgabe

### 3.12.1 Aktualisierung der Materialfunktionen und der Energiebilanz

Nachdem nun das Gesamte Gleichungssystem (2.38)–(2.45) ausgewertet ist, müssen noch einige abgeleitete Größen wie  $p$ ,  $T$  und  $\kappa$  mit Hilfe von  $\rho$  und  $e$  aktualisiert werden. Weiterhin sind die Energieverluste durch Abstrahlung über den äußeren Rand zu bilanzieren.

### 3.12.2 Ausgabe

Wie oft, also nach welchem Zeitintervall eine Ausgabe stattfindet, hängt natürlich maßgeblich vom momentanen Zustand des Modellsystems ab, insbesondere von dessen aktuellen Zeitskalen. Für die verschiedenen Phasen der Rechnungen sind ganz grundsätzlich verschiedene Zeitskalen von Bedeutung. Wir gehen bei der Darstellung der Ergebnisse in Kapitel 4 ausführlich auf diesen Aspekt ein. Auch die Wahl der Ausgabegrößen (aus einer schier unendlichen Zahl von Möglichkeiten) wird in diesem Kapitel ersichtlich.

## 3.13 Symmetrieanahmen

Räumliche Symmetrien können sehr hilfreich sein bei der theoretischen Untersuchung physikalischer Systeme. Nimmt man eine bestimmte Symmetrie an und wählt das Koordinatensystem entsprechend, lassen sich bedeutende Einsparungen im numerischen Rechenaufwand erreichen.

### 3.13.1 Kugelsymmetrie

Die restriktivste Symmetrieforderung ist die der sphärischen Symmetrie. In der klassischen Theorie des Sternaufbaus und auch in den schon erwähnten sphärischen Kollapsrechnungen

(siehe §1.2) kommt sie zur Anwendung. Die Rechtfertigung einer jeden Symmetrieanahme ist immer eng verbunden mit der Frage nach der Sinnhaftigkeit einer solchen Konfiguration. Spätestens bei der Betrachtung rotierender Systeme, verliert die Kugelsymmetrie diesen Sinn. Da es einer der Hauptaspekte unserer Arbeit ist, die Kugelsymmetrie (durch Rotation) zu brechen, taucht sie nur in Testrechnungen auf (siehe §4.2).

### 3.13.2 Äquatorsymmetrie

Betrachten wir ein rotierendes System, bei dem die zentrale Ebene senkrecht zur Rotationsachse eine Symmetrieebene ist, sprechen wir allgemein von Äquatorsymmetrie. Die Existenz und Stabilität einer solchen Symmetrie wird seit langer Zeit erforscht. Das bekannte Lichtenstein-Theorem (vgl. [Lichtenstein, 1933]) beweist die Existenz dieser Symmetrieebene für Gleichgewichtskonfigurationen starr rotierender, selbstgravitierender Flüssigkeiten (d.h. mit konstanter Dichte). Dieser Existenzbeweis läßt sich ausweiten auf nur von der vertikalen Richtung (parallel zur Rotationsachse) unabhängige Winkelgeschwindigkeiten und eine große Klasse von Dichteverteilungen, siehe [Wavre, 1932] bzw. [Lebovitz, 1967]. Trotzdem gibt es bis heute keinen allgemeinen Beweis dafür, daß es nicht zu einer Symmetriebrechung kommen kann, insbesondere für weit vom Gleichgewicht entfernte Systeme ist diese Brechung sogar sehr wahrscheinlich. Da jedoch in von uns durchgeführten Vergleichsrechnungen keine signifikanten Symmetriebrechungen zu finden sind, nehmen wir allgemein Äquatorsymmetrie an.

### 3.13.3 Rotationssymmetrie

Die letzte für uns relevante Symmetrie ist die Axial- oder auch Rotationssymmetrie. Von ihr ist, im Gegensatz zur Äquatorsymmetrie, definitiv bekannt, daß sie jenseits bestimmter struktureller Grenzen (z.B. kritische Verhältnisse von Rotations- zu Gravitationsenergie) gebrochen wird. Jedoch sind die charakteristischen Stabilitätsgrenzen auch wieder nur für spezielle Körper (z.B. homogene Flüssigkeiten) bekannt.

Wir verwenden die Axialsymmetrie in fast allen unseren Rechnungen. Der Grund dafür ist allerdings rein technischer Natur: Mit den uns momentan zur Verfügung stehenden Mitteln ist es praktisch nicht möglich, numerische Rechnungen mit akzeptabler räumlicher Auflösung für volle 3D Systeme (ohne Symmetrieanahmen) durchzuführen. In diesem Fall wären wir nämlich mit mindestens  $10^6 - 10^7$  Unbekannten konfrontiert. Insbesondere die Lösung linearer Gleichungssysteme dieser Größe ist mit „normaler“ Computerhardware heute vollkommen utopisch, da wir ja die Lösung in jedem Zeitschritt durchführen müssen, und es sich in unseren Rechnungen um typischerweise  $10^7 - 10^8$  solcher Zeitschritte handelt.

## 3.14 Randbedingungen

Zu jeder Differentialgleichung werden Randbedingungen benötigt, um eine eindeutige Lösung bestimmen zu können. Wir haben es mit zwei grundsätzlich verschiedenen Arten von Randbedingungen zu tun. Die einen folgen aus angenommenen Symmetrien, die anderen sind nötig, da wir nur einen endlichen Raumbereich modellieren können (Außenrand) bzw. einen bestimmten inneren Bereich nicht mehr betrachten wollen.

### 3.14.1 Aus Symmetrieanahmen resultierende Randbedingungen

Ganz egal ob es sich um einen Symmetriepunkt (Kugelsymmetrie), eine Symmetrieachse (Rotationssymmetrie) oder eine Symmetrieebene (Äquatorsymmetrie) handelt, das prinzipielle Vorgehen ist immer das Gleiche. Folgende Größen müssen auf der Symmetriegrenze identisch null sein: Die Normalenableitungen von Skalaren, die Normalenableitungen der Tangentialkomponenten von Vektoren, sowie die Normalenkomponenten der Vektoren. Dies läßt sich mit Hilfe unseres gestaffelten Gitters leicht realisieren, indem das Gitter jenseits der Symmetriegrenzen um „Spiegelzellen“ erweitert wird. Skalare und Tangentialkomponenten von Vektoren erhalten in diesen Spiegelzellen die gleichen Werte wie ihre „realen“ Opponenten, die Normalenkomponenten der Vektoren sind dagegen direkt auf der Symmetriegrenze definiert und werden null gesetzt. Die Aktualisierung dieser Spiegelwerte muß nach jedem Teilschritt (in dem die entsprechenden realen Größen verändert wurden) durchgeführt werden.

Eine Besonderheit ergibt sich für die azimutale Komponente der Geschwindigkeit (bei Rotationssymmetrie) an der Achse. Ihr Spiegelwert muß gleich dem negativen des realen Wertes sein, damit sie auf der Achse gleich null ist.

### 3.14.2 Äußerer Rand

Wir sind schon ausführlich auf die Randwerte des Gravitationspotentials eingegangen (siehe §3.8.3), welches im Unendlichen null sein soll. Weiterhin haben wir die Randbedingungen für das Strahlungsfeld diskutiert (vgl. §3.10.1) und lassen das System frei in die Umgebung abstrahlen.

Was die verbleibenden Größen  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  und  $e$  betrifft, so nehmen wir den äußeren, kugelförmigen Rand als eine starre, reibungsfreie Wand an. Es findet also kein Materialtransport über den äußeren Rand statt, wodurch die Abstrahlung die einzige Form von Energieverlust für das System darstellt. Die Realisierung einer solchen Randbedingung funktioniert zufällig vollkommen analog zur eben beschriebenen Vorgehensweise bei Randbedingungen durch Symmetrien. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit, also die Radialgeschwindigkeit ist auf dem Rand null. Die Werte aller anderen Größen werden auf die jenseits des Randes liegenden Spiegelzellen kopiert.

Diese Randbedingung ist vollkommen unproblematisch und beeinflusst die Modelle praktisch nicht. Die äußersten Simulationsbereiche entledigen sich langsam ihrer Masse, durch eine nahezu konstante, radial nach innen gerichtete Beschleunigung, die in eine einwärts gerichtete Überschallströmung übergeht. Diese Strömung trennt den Außenbereich, im Sinne von „materiellem Informationstransport“, von allen noch so radikalen Vorgängen in den zentralen Bereichen ab. Es kommt also in unseren Rechnungen nie zu auswärts gerichteten Strömungen, die auf irgendeine Art die äußeren Regionen erreichen könnten<sup>8</sup>. Somit können Informationen unser System nur in Form von Strahlung verlassen. Womöglich ändert sich das, wenn man z.B. magnetische Felder berücksichtigt und dann vielleicht polare Materieauswürfe in Form von Jets entstehen.

### 3.14.3 Möglicher innerer Rand

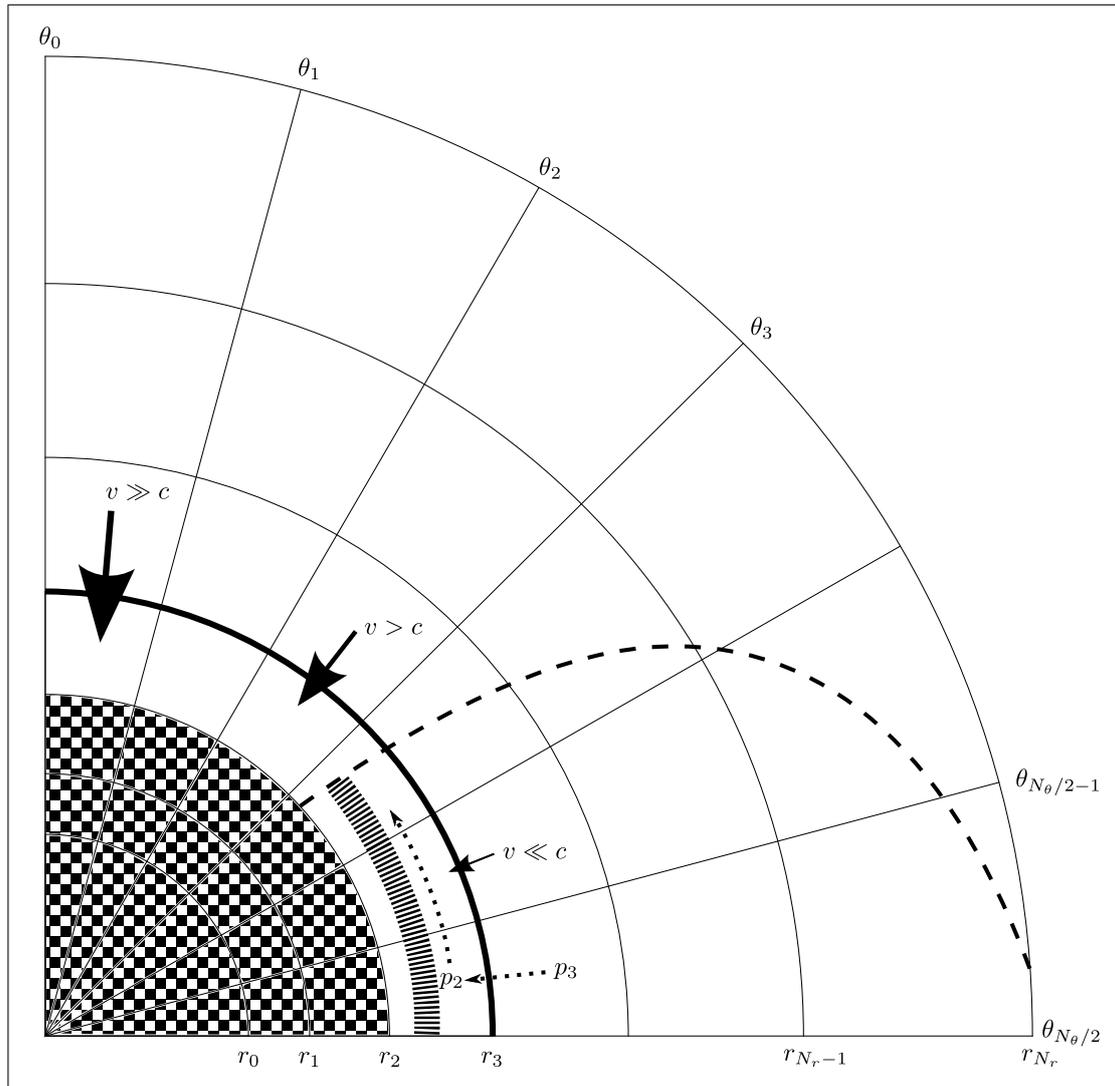
Auch für einen inneren Rand haben wir die Randbedingungen des Gravitationspotentials (siehe §3.8.3) und des Strahlungsfeldes (vgl. §3.10.1) schon eingehend erläutert. Wir sind bis jetzt die Erklärung schuldig geblieben, wieso wir unter Umständen überhaupt ein Loch in den zentralen Teil unseres Rechengebietes schneiden wollen.

#### Extrem limitierte Zeitschritte

Ohne zu sehr auf die Ergebnisse in Kapitel 4 vorgreifen zu wollen, können wir uns Situationen vorstellen, in denen ein zentrales Objekt (im allgemeinen ein Protostern) den maximal möglichen Zeitschritt (vgl. §3.7) dominiert (also extrem klein hält<sup>9</sup>). Nun muß allerdings diese dynamische Zeitskala des Protosterns nicht zwangsläufig die interessierende Skala sein, zumal wenn es sich um eine quasistationäre Akkretionsströmung handelt. Die Veränderung der Struktur, sowohl des Sterns als auch weiter außen liegender Objekte (z.B. protoplanetarer Scheiben), vollzieht sich mit Sicherheit auf sehr viel längeren Zeitskalen als der dynamischen. Leider sind wir durch unser explizites Verfahren in einer solchen Situation an den extrem kleinen dynamischen Zeitschritt gebunden, es sei denn, wir schneiden den zentralen Bereich (samt Protostern) aus. Das eine solch rabiate Methode eine Unmenge neuer Probleme mit sich bringt und wir sehr viele Informationen über unser System verlieren, versteht sich von selbst. Wir sehen diese Vorgehensweise als interessante, inhaltliche Erweiterung einer bestehenden Simulation an. Ohne diese Erweiterung würde die Simulation, innerhalb eines vernünftigen rechenzeitlichen Rahmens, keine neuen Ergebnisse liefern (eben wegen der Zeitschrittlimitierung). Dieser zusätzliche Teil einer Rechnung soll aber definitiv nicht den inhaltlichen Schwerpunkt bei der Diskussion der Ergebnisse ausmachen.

<sup>8</sup>Dies ist natürlich nicht selbstverständlich und hängt von den Anfangsbedingungen ab.

<sup>9</sup>wegen sehr feiner räumlicher Auflösung, hoher Temperaturen bzw. Schallgeschwindigkeiten und extrem großer Akkretionsgeschwindigkeiten



**Abbildung 3.5:** Der innerere Rand und die Konstruktion eines Stauwalls. Gezeigt ist ein Quadrant eines meridionalen Schnittes, die Unterkante markiert den Äquator. Die gestrichelte Linie stellt die Oberfläche eines quasihydrostatischen Objektes in Äquaturnähe dar. Die fett gedruckte Linie ist der innere Rand (bei  $r_L = r_3$ ), der karierte Bereich das ausgeschnittene Loch, die Zellen dazwischen sind noch zum Loch gehörende Spiegelzellen. Die vollen Pfeile deuten das Geschwindigkeitsfeld an. Die gepunkteten Pfeile bezeichnen die Lage und den Konstruktionsweg des Stauwalls (fett gestreifter Bogen): Ausgehend vom realen Äquatordruck  $p_3$  bestimmen wir den Druck  $p_2$  unter Annahme von Hydrostatik zwischen beiden Zellen. Dann wird über  $p_2$  eine hydrostatische Schichtung  $p(\theta)$  in negativer  $\theta$ -Richtung bis zu einer Druckskalenhöhe berechnet (siehe Text).

### Komplexe Ausströmungsrandbedingung

Wir müssen nun die verbleibenden Größen  $\rho$ ,  $\mathbf{v}$  und  $e$  auf dem inneren Rand betrachten und versuchen eine sinnvolle Randbedingung anzugeben. Dies ist ungleich komplizierter als am äußeren Rand, denn wir haben es mit einer sehr heterogenen Randstruktur zu tun.

Wie wir in Kapitel 4 sehen werden, befindet sich zu dem Zeitpunkt, wo wir einen inneren Rand schaffen, im Äquatorbereich ein quasihydrostatisches Objekt (im allgemeinen eine Akkretionsscheibe), siehe Abb 3.5. Bewegen wir uns auf dem Rand vom Äquator zum Pol, gibt es beim Verlassen der Akkretionsscheibe einen abrupten Übergang von kleinen Unterschallströmungen zu einer einwärts gerichteten Überschallströmung, die zum Pol hin immer stärker wird. Die Formulierung einer Randbedingung ist äußerst schwierig, weil sich je nach Strömungsgeschwindigkeit (Unter-/Überschall) die ganze Art der Bedingung ändert. In Überschallbereichen weisen alle Charakteristiken aus dem Rechengebiet, es ist keine Angabe einer Randbedingung nötig. Dagegen ist in Unterschallbereichen mindestens eine Charakteristik in das Rechengebiet gerichtet und wir benötigen eine so genannte nichtreflektierende Randbedingung (NRR), d.h. eine Bedingung derart, daß die Amplitude der in das Rechengebiet hinein gerichteten Wellenkomponente null ist. Die Formulierung einer NRR ist insbesondere für mehrdimensionale, große Gleichungssysteme eine heikle Angelegenheit und noch nicht ausgiebig erforscht. Dazu kommt die (zeitlich veränderliche) Position des Übergangs in eine Überschallströmung.

### Konstruktion eines „Stauwalls“

Aufgrund der soeben erläuterten Widrigkeiten, haben wir eine eigene Randbedingung entwickelt, die sich an den noch vorhandenen Informationen über das am Äquator befindliche, quasihydrostatische Objekt orientiert. Wir konstruieren einen Druckverlauf  $p(\theta)$  (eine Art „Stauwall“) in den Spiegelzellen jenseits des Randes, beginnend am Äquator, vgl. Abb 3.5. Dazu nehmen wir an, daß die Akkretionsscheibe in  $\theta$ -Richtung hydrostatisch geschichtet ist, was innerhalb einer Druckskalenhöhe tatsächlich eine gute Näherung darstellt. Außerhalb einer Druckskalenhöhe setzen wir die Drücke in den Spiegelzellen gleich den entsprechenden Drücken in den realen Zellen, was einer „Freifall“ Bedingung entspricht und die vorhandenen Überschallströmungen ohnehin nicht beeinflußt.

Indem wir direkt den Druck (und nicht die innere Energie) der Spiegelzellen vorgeben, welcher die Dynamik auf dem Rand maßgeblich bestimmt, vereinfachen wir das Vorgehen. Die Massendichte  $\rho$  hat nämlich nun keinen direkten Einfluß mehr auf die Kräftebilanz (nur über das Gravitationspotential, welches jedoch anderweitig bestimmt wird), und kann in den Spiegelzellen einfach auf den Wert der entsprechenden realen Zellen gesetzt werden. Weiterhin ist durch die Druckvorgabe nun die Kräftebilanz auf dem Rand, und somit auch die Geschwindigkeit, eindeutig bestimmt, Strömungen aus dem Loch in das Rechengebiet hinein werden allerdings nicht erlaubt (es gilt immer  $v_r(r_L) \leq 0$ ).

Unsere Formulierung der Randbedingung funktioniert erstaunlich gut und ruft bei der Einführung keine erheblichen hydrodynamischen Störungen hervor. Durch die Einbeziehung des Äquatordrucks und der Druckskalenhöhe in die Konstruktion von  $p(\theta)$ , haben wir eine plausible Verbindung zu den gegebenen Strukturen hergestellt.

### 3.15 Anfangsbedingungen

Anfangsbedingungen sind letztlich auch nur Randbedingungen, nämlich Randbedingungen der Zeit. Sie sind ebenso entscheidend für die Entwicklung des betrachteten Systems wie alle ihre räumlichen Entsprechungen. Wir sind schon ganz zu Beginn (vgl. §1.1) der Frage nachgegangen, welche Anfangskonfiguration vernünftig ist, also welchen initialen Zustand wir einer Gasmasse an der Grenze zur gravitativen Instabilität zuschreiben. Es gibt Objekte die aus einer nahezu hydrostatischen Konfiguration in den Gravitationskollaps starten (Bok-Globulen). Andererseits kann wie erwähnt auch eine dynamische Vorgeschichte, und somit ein weit vom Gleichgewicht entfernter Zustand während des beginnenden Kollapses existieren.

#### 3.15.1 Überkritische Bonnor-Ebert-Sphäre

Wir haben uns für eine leicht gravitativ instabile Bonnor-Ebert-Sphäre (BES) entschieden, da sie einem wohldefinierten, nachvollziehbaren Zustand des Systems entspricht, siehe §2.9.1. Aus den vorgegeben Parametern des Wolkenkerns, der Gesamtmasse  $M_w$ , der Temperatur  $T_w$  und dem Molekulargewicht<sup>10</sup>  $\mu_w$  ermitteln wir zunächst die isotherme Schallgeschwindigkeit

$$c_{\text{iso}} = \sqrt{\mathcal{R}T_w/\mu_w}, \quad (3.66)$$

und dann die Zentraldichte der entsprechenden BES, vgl. [Ebert, 1957]

$$\rho_c \approx 13.4 \frac{c_{\text{iso}}^6}{G^3 M_w^2}. \quad (3.67)$$

Von dieser Zentraldichte ausgehend, bestimmen wir das hydrostatische Gleichgewicht in Kugelsymmetrie durch numerische Integration entlang des radialen Gitters (3.3) mit einem festen  $r_0$  (Radius der innersten Zelle), einer festen Auflösung  $N_r$  und einem variablen maximalen Radius  $r_{N_r}$ . Ist das  $r_{N_r}$  gefunden (mittels Iteration), bei dem die Gesamtmasse gleich der gewünschten ist, also  $M(r_{N_r}) = M_w$  gilt, haben wir sowohl unser radiales Gitter, als auch unsere gewünschte radiale Dichteverteilung der BES erhalten.

Überkritisch, d.h. gravitativ instabil, wird die Wolke, indem wir die soeben erläuterte Prozedur für eine um den Faktor  $\varsigma$  höhere Temperatur  $T_w \rightarrow \varsigma T_w$  durchführen, später aber die Rechnung mit  $T_w$  starten. Wir haben für unsere Rechnungen den Wert  $\varsigma = 1.3$  gewählt.

---

<sup>10</sup> $\mu_w$  wird für eine typische Anfangsdichte von z.B.  $\approx 10^{-16} \text{ kg m}^{-3}$  aus der Zustandsgleichung bestimmt

### 3.15.2 Strahlungsgleichgewicht

Da wir von Isothermie ausgehen (BES sind prinzipiell isotherm), gilt überall  $T = T_w$  und wir können uns aus  $\rho(r)$  und  $T$  sofort  $e(r)$  beschaffen. Mit der schon in §3.10.1 besprochenen Annahme, daß die äußere Umgebung des Systems sich im thermischen Gleichgewicht mit der Temperatur  $T_{\text{ext}}$  befindet, bietet es sich an,  $T_{\text{ext}} = T_w$  zu setzen. Somit gibt es zu Beginn keinen Netto-Strahlungsfluß ( $\mathbf{F}=0$ ) und die konstante Strahlungsenergiedichte lautet (nach Stefan-Boltzmann) schlicht

$$E = aT_w^4. \quad (3.68)$$

### 3.15.3 Starre Rotation

Auch für das Geschwindigkeitsfeld wählen wir eine möglichst nachvollziehbare, wohldefinierte Anfangsbedingung, indem wir starre Rotation annehmen, d.h. die ganze Wolke rotiert zu Beginn mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ . Die anderen Geschwindigkeitskomponenten  $v_r$  und  $v_\theta$  sind null. Es hat sich als vorteilhaft erwiesen, nicht direkt  $\omega$  als Anfangsparameter zu verwenden, sondern den Zentrifugalradius

$$R_z = \frac{\omega^2 r_{Nr}^4}{GM_w}, \quad (3.69)$$

der die Zentrifugalbarriere für die Massenelemente mit dem größten spezifischen Drehimpuls  $\omega r_{Nr}^2$  darstellt. Diese Elemente, welche sich am weitesten von der Drehachse entfernt befinden (also am Äquator ganz außen), können aufgrund der Zentrifugalkräfte der Achse nicht näher kommen als  $R_z$ . Dieser Radius ist sehr anschaulich, definiert er doch eine obere Grenze für die räumliche Ausdehnung eines stationär rotierenden Objektes (z.B. einer Akkretionsscheibe), wenn es rein fliehkraftunterstützt ist.



## 4 Ergebnisse und Diskussion

### 4.1 Analytische Lösungen homogener Strömungen

Wir möchten dieses Kapitel mit einigen analytischen Untersuchungen beginnen, deren Ergebnisse hilfreich sein werden für die Advektionstests unserer numerischen Algorithmen (§4.2.1). Die Resultate werden an dieser Stelle aufgeführt, da wir sie in der entsprechenden Literatur nicht finden konnten. Es wird die Transportgleichung

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \nabla \cdot (q\mathbf{v}) = 0 \quad (4.1)$$

eines skalaren Dichtefeldes  $q$  in Kugelkoordinaten und axialer Symmetrie betrachtet. Wir beschränken uns dabei auf ein räumlich homogenes  $q$  (also  $\nabla q = 0$ ), wofür wir die Bezeichnung „homogene Strömung“ verwenden. Dabei muß  $q$  nicht zwangsläufig zeitlich konstant sein, dies wäre nur ein Spezialfall (die inkompressible Strömung). Insgesamt ergibt sich dann aus (4.1)

$$\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) = 0. \quad (4.2)$$

Nun werden Geschwindigkeitsfelder der Form

$$v_r(r, \theta) = a_1(r)b_1(\theta), \quad v_\theta(r, \theta) = a_2(r)b_2(\theta) \quad (4.3)$$

gesucht, für die sich in (4.2)

$$\frac{1}{q} \frac{\partial q}{\partial t} + k = 0 \quad \Leftrightarrow \quad q = q_0 e^{-kt} \quad (4.4)$$

ergibt, mit einer beliebigen Konstanten<sup>1</sup>  $k \in \mathbb{R}$ . Damit ist sichergestellt, daß  $q$  homogen bleibt und ausschließlich von der Zeit abhängt (der inkompressible Fall entspricht  $k=0$ ). Aus (4.2)–(4.4) folgt somit die Bedingung

$$b_1 \left( \frac{2a_1}{r} + \frac{\partial a_1}{\partial r} \right) + \frac{a_2}{r} \left( b_2 \cot \theta + \frac{\partial b_2}{\partial \theta} \right) = k. \quad (4.5)$$

---

<sup>1</sup> $k$  könnte prinzipiell auch zeitabhängig sein, wir wählen es hier aber konstant.

Unter Berücksichtigung der nötigen Randbedingungen für die Geschwindigkeitskomponenten

$$v_r(0, \theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_1(0) = 0, \quad (4.6)$$

$$v_\theta(r, 0) = v_\theta(r, \pi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b_2(0) = b_2(\pi) = 0, \quad (4.7)$$

konnten wir zwei Lösungsfamilien für (4.5) ermitteln.

#### 4.1.1 Radial lineare Strömungen

Eine offensichtliche Familie von Lösungen für das Problem ist die mit  $a_1 = a_2 = r$ . In diesem Fall reduziert sich (4.5) auf die Bedingung

$$3b_1 + b_2 \cot \theta + \frac{db_2}{d\theta} = k. \quad (4.8)$$

Natürlich ist (4.8) nicht eindeutig bestimmt, da diese Gleichung zwei unabhängige Funktionen  $b_1$  und  $b_2$  enthält. Wir können also unter Berücksichtigung der Randbedingung (4.7)  $b_2$  frei wählen und uns dann  $b_1$  aus (4.8) berechnen. Eine mögliche Wahl für  $b_2$  (neben unendlich vielen anderen<sup>2</sup>) ist die Funktionenschar

$$b_2 = \beta \sin(m\theta), \quad (\beta \in \mathbb{R}, \quad m = 0, 1, 2, \dots), \quad (4.9)$$

woraus über (4.8)

$$b_1 = \frac{1}{3} [k - \beta \sin(m\theta) \cot \theta - \beta m \cos(m\theta)] \quad (4.10)$$

folgt. Zwei Geschwindigkeitsfelder dieser Art verwenden wir für unsere Advektionstests. Natürlich kann jede Lösung linear kombiniert werden mit einer beliebigen Anzahl von Lösungen für  $k=0$  (siehe unten) und ergibt dann wieder eine Lösung, da (4.8) linear ist.

#### 4.1.2 Inkompressible Strömungen

Eine noch vielfältigere Lösungsfamilie erhalten wir für den inkompressiblen Fall  $k=0$ . Die Bedingung (4.5) läßt sich dann z.B. aufspalten in zwei Bedingungen der Form

$$a_2 = -2a_1 - r \frac{da_1}{dr}, \quad (4.11)$$

$$b_1 = b_2 \cot \theta + \frac{db_2}{d\theta}. \quad (4.12)$$

Analog zu (4.8) sind (4.11) und (4.12) nicht eindeutig bestimmt. Demnach können wir wiederum unter Berücksichtigung der Randbedingungen (4.6) und (4.7)  $a_1$  und  $b_2$  frei

---

<sup>2</sup>z.B.  $b_2 \propto \theta(\pi - \theta)$

wählen, um dann  $a_2$  und  $b_1$  aus (4.11) und (4.12) zu berechnen. Durch die nun vorhandene Möglichkeit auch die radialen Abhängigkeiten frei zu bestimmen, können wir sogar abgeschlossene Strömungen beschreiben. Wählen wir z.B.

$$a_1 = \alpha \sin(\pi r/r_0), \quad (\alpha, r_0 \in \mathbb{R}), \quad (4.13)$$

verschwindet die Radialgeschwindigkeit für den Radius  $r = r_0$ . Natürlich sind auch hier beliebige Linearkombinationen von Lösung wieder Lösungen. Wir könnten an dieser Stelle noch eine Vielzahl von interessanten Strömung diskutieren, jedoch belassen wir es aus Zeitgründen bei dieser kurzen Erläuterung.

## 4.2 Testrechnungen

Bei der völligen Neuentwicklung eines Computerprogramms ist es ratsam, verschiedene Testrechnungen durchzuführen, um mögliche Programmierfehler zu finden und die Stabilität und Konvergenz von numerischen Verfahren zu testen. In den folgenden Tests verwenden wir schon das lokal uniforme Gitter (siehe §3.1.1), welches wir später auch in unseren Modellrechnungen einsetzen.

### 4.2.1 Sphärischer Advektionstest

Wir beginnen mit einem kugelsymmetrischen Test des Advektionsschemas und verwenden die Ergebnisse aus §4.1 mit  $q = \rho$ , betrachten also den Transport einer homogenen Masendichte. Im Sinne der Lösungen in §4.1.1 entspricht dies  $m=0$  und somit einem radialen Geschwindigkeitsfeld der Form  $v_r = \frac{k}{3}r$  ( $k \in \mathbb{R}$  beliebig). Wir starten bei  $t = 0$  mit einer räumlich homogenen Dichteverteilung  $\rho_0$ . Die exakte Lösung lautet dann nach (4.4)

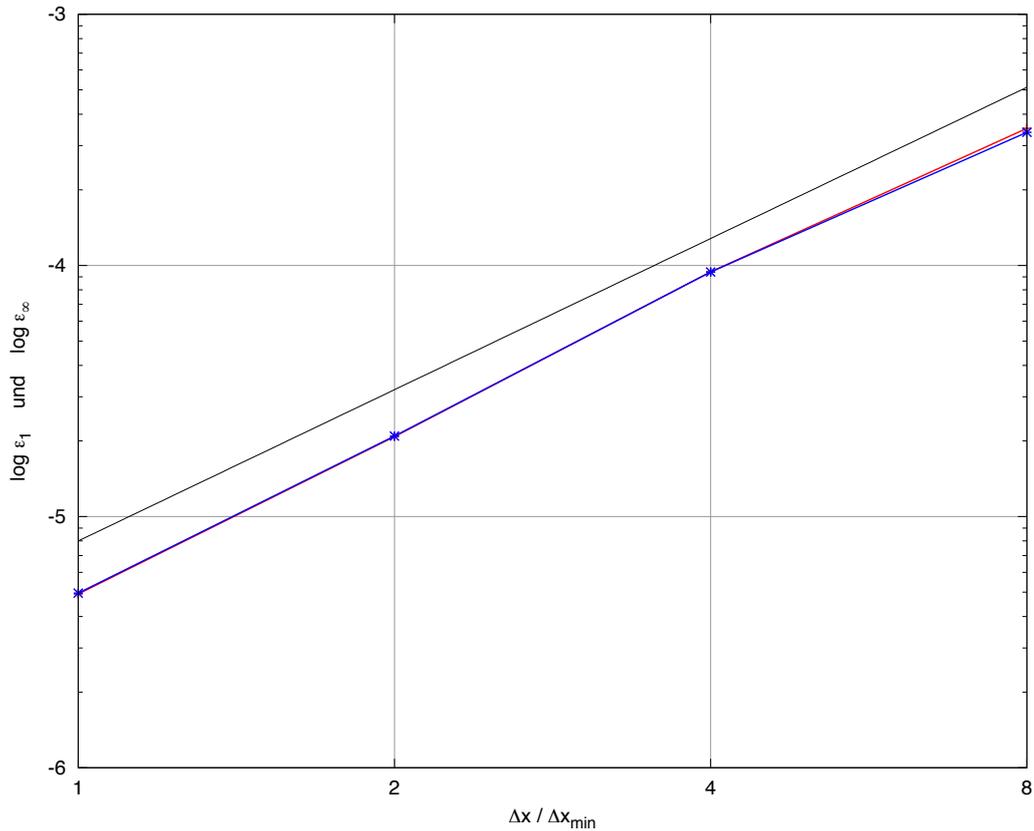
$$\rho^{\text{ex}}(t) = \rho_0 e^{-kt}. \quad (4.14)$$

Wir wählen  $k > 0$  (eine verdünnende Auswärtsströmung) und lassen die Rechnung laufen bis  $kt_{\text{max}} = 6$ . Dies entspricht nach (4.14) einer Verringerung der Dichte um einen Faktor von  $e^6 \approx 400$ . Zur Quantifizierung des Fehlers berechnen wir zunächst (aus der numerisch bestimmten Dichte  $\rho_i^{\text{num}}$ ) den lokalen Dichtefehler jeder Zelle  $i$

$$Err_i = \rho_i^{\text{num}}(t_{\text{max}}) - \rho^{\text{ex}}(t_{\text{max}}). \quad (4.15)$$

Wir analysieren sowohl die 1-Norm als auch die Maximumnorm, jeweils definiert als

$$\|Err\|_1 = \sum_i \text{Vol}_i |Err_i|, \quad \|Err\|_\infty = \max_i |Err_i|. \quad (4.16)$$

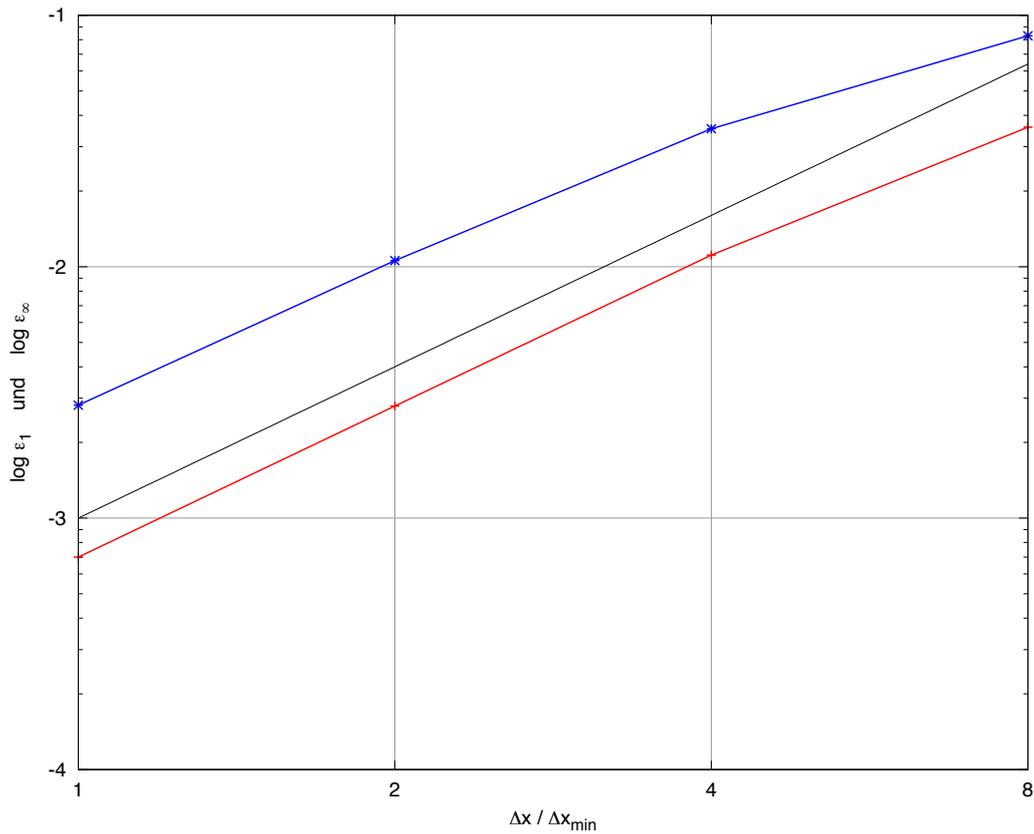


**Abbildung 4.1:** Relativer Fehler  $\varepsilon_1$  in der 1-Norm (rot) und  $\varepsilon_\infty$  in der Maximumnorm (blau) für den sphärischen Advektionstest für verschiedene Gitterweiten  $\Delta x$ . Die schwarze Linie entspricht der Steigung 2, d.h. der Konvergenz mit  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

Die 1-Norm ist besonders wichtig für Erhaltungsgleichungen (unser Fall), da sie den Gesamtfehler der zu erhaltenden Größe (hier die Masse) darstellt. Die Maximumnorm gibt Auskunft über die lokale Konvergenz der numerischen Lösung, weil diese Norm der größten lokalen Abweichung entspricht. Abb. 4.1 zeigt zum einen den relativen Massenfehler  $\varepsilon_1 = \|Err\|_1 / M_{\text{ges}}(t_{\text{max}})$ , zum anderen die größte relative Dichteabweichung  $\varepsilon_\infty = \|Err\|_\infty / \rho^{\text{ex}}(t_{\text{max}})$  für verschiedene räumliche Auflösungen. Wie man sieht, sind  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_\infty$  praktisch identisch und das Verfahren konvergiert in beiden Normen mit  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ . Somit ist auch die lokale Konvergenz äußerst zufriedenstellend.

#### 4.2.2 Axialsymmetrischer Advektionstest

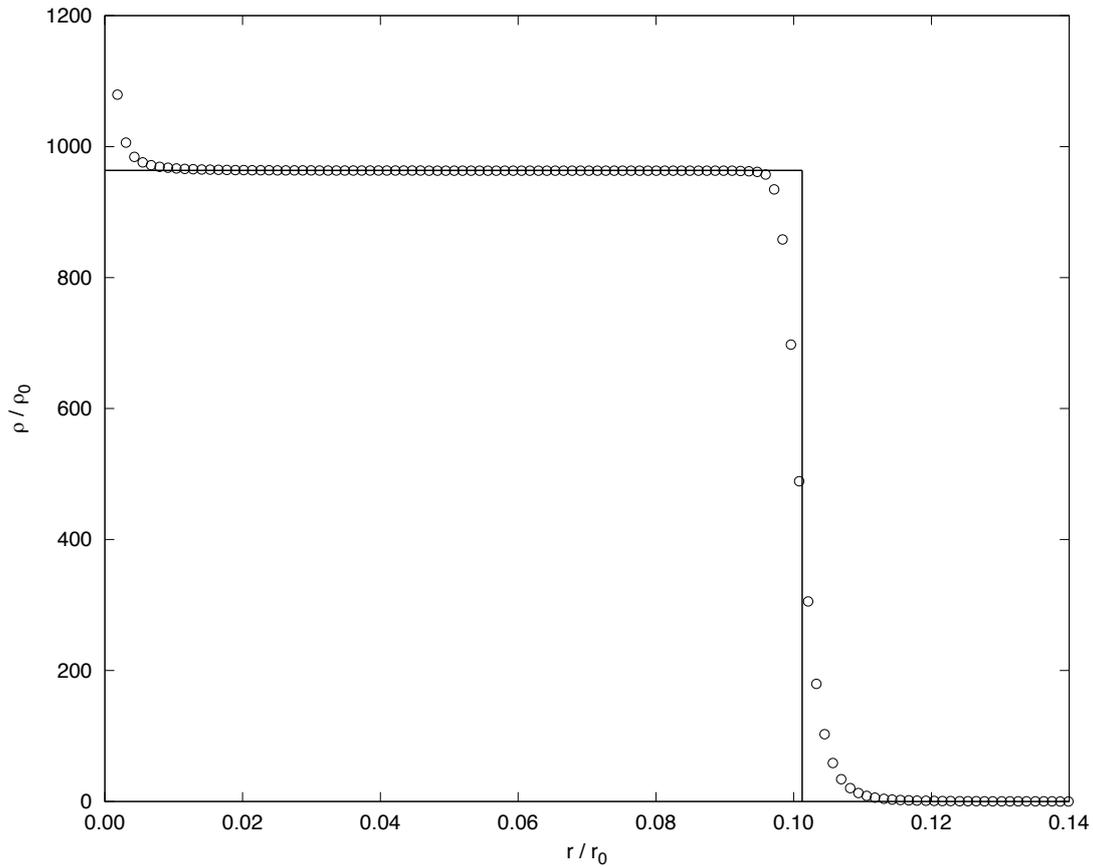
Eine Erweiterung des sphärischen Tests (§4.2.1) auf den axialsymmetrischen Fall (mit  $v_\theta \neq 0$ ) erhalten wir, indem wir nach §4.1.1 z.B. eine Strömung mit  $m=2$  und  $\beta = -k/8$  betrachten ( $k \in \mathbb{R}$  beliebig). Das Geschwindigkeitsfeld lautet dann



**Abbildung 4.2:** Relativer Fehler  $\varepsilon_1$  in der 1-Norm (rot) und  $\varepsilon_\infty$  in der Maximumnorm (blau) für den axialsymmetrischen Advektionstest für verschiedene Gitterweiten  $\Delta x$ . Die schwarze Linie entspricht wieder der Steigung 2, d.h. der Konvergenz mit  $\mathcal{O}(\Delta x^2)$ .

$$v_r = \frac{k}{4} r (1 + \cos^2 \theta), \quad v_\theta = -\frac{k}{4} r \sin \theta \cos \theta. \quad (4.17)$$

Wir wählen wieder  $k > 0$ . Die Rechnung läuft diesmal bis  $kt_{\max} = 8$ , die Dichte verringert sich also nach (4.4) um einen Faktor  $e^8 \approx 3000$ . Analog zu §4.2.1 ist in Abb. 4.2 der relative Massenfehler  $\varepsilon_1 = \|Err\|_1 / M_{\text{ges}}(t_{\max})$  und die größte relative Dichteabweichung  $\varepsilon_\infty = \|Err\|_\infty / \rho^{\text{ex}}(t_{\max})$  für verschiedene räumliche Auflösungen dargestellt. Diesmal ist ein deutlicher Unterschied zwischen den Normen zu erkennen.  $\varepsilon_\infty$  ist im Mittel um einen Faktor 4 größer als  $\varepsilon_1$  und erreicht auch nur eine maximale Konvergenzordnung von 1.91. Zurückzuführen ist das auf größere Diskretisierungsfehler in  $\theta$ -Richtung an der Rotationsachse, welche wir schon in §3.2.1 diskutiert haben. Daß die Fehler allgemein viel größer sind als im sphärischen Fall, ist nur zum Teil mit der mehrdimensionalen Advektion zu erklären, denn wir haben es auch mit einem anderen Strömungsfeld und einem längeren Zeitintervall zu tun. Insgesamt sind die Fehler und Konvergenzraten akzeptabel.



**Abbildung 4.3:** Zum druckfreien sphärischen Gravitationskollaps. Dichteverteilung der numerischen Rechnung (Kreise) zum Zeitpunkt  $t=0.985 t_{\text{ff}}$ . Die analytische Lösung (4.18) ist als Linie dargestellt.

### 4.2.3 Druckfreier sphärischer Gravitationskollaps

Nun betrachten wir eine Kugel, die zum Zeitpunkt  $t = 0$  den Radius  $r_0$  und die homogene Massendichte  $\rho_0$  hat, und durch Eigengravitation kollabiert. Entgegen wirkende Druckkräfte werden nicht angenommen. Dieses klassische Testproblem hat die analytische Lösung (z.B. zu finden in [Stone and Norman, 1992])

$$r = r_0 \cos^2 x, \quad \rho = \rho_0 \cos^{-6} x, \quad x + \frac{1}{2} \sin(2x) = t \sqrt{\frac{8}{3} G \rho_0}. \quad (4.18)$$

Dabei ist  $r$  der aktuelle äußere Radius und  $\rho$  die momentane homogene Dichte innerhalb der Kugel. Für  $x = \pi/2$  haben wir die Freifallzeit  $t = t_{\text{ff}}$  (vgl. §2.8) erreicht und die gesamte Masse befindet sich im Ursprung ( $r = 0$ ). Dies ist ein anspruchsvoller, radialer Advektionstest, da sowohl eine Dichtediskontinuität als auch eine variable Impulsverteilung über unser statisches Gitter bewegt wird. Die Lösung der Poissongleichung wird hier in diesem Sinne nicht getestet, weil wir in sphärischer Symmetrie die wirkenden Gravitationskräfte

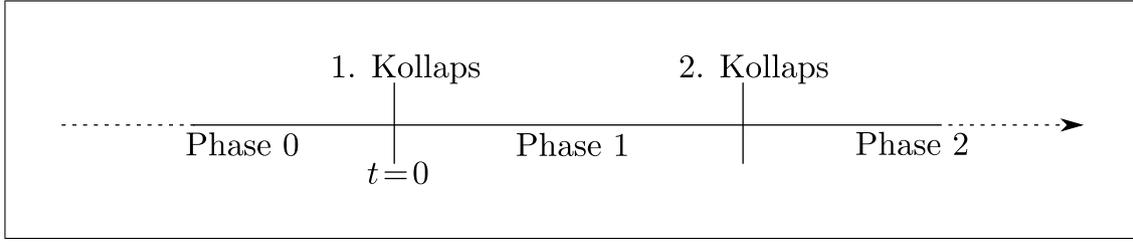
numerisch exakt angeben können. Wir setzen für die Testrechnung  $r_0 = \rho_0 = G = 1$  und berechnen die Entwicklung bis  $t = 0.535 = 0.985 t_{\text{ff}}$ , was einem Dichteanstieg von etwa drei Größenordnungen entspricht. Der Vergleich von numerischer und analytischer Lösung ist in Abb. 4.3 zu sehen. Die diffusive Verbreiterung der Diskontinuität hält sich wegen unserem Advektionsschema 2. Ordnung in Grenzen und entspricht etwa der anderer Rechnungen. Die mittlere Position der Diskontinuität stimmt sehr gut mit der exakten Lösung überein. Auch der Wert der homogenen Dichte weicht innerhalb eines weiten Bereichs der Kugel um weniger als 0.5 % vom analytischen Wert ab. Die Abweichungen im zentralen Bereich (für  $r \rightarrow 0$ ) sind wohlbekannt und wurden genauso in anderen Testrechnungen gefunden (siehe z.B. [Stone and Norman, 1992]). Dieser Fehler steht wieder in direktem Zusammenhang mit der Diskretisierung unseres gestaffelten Gitters und wird in §3.2.1 erläutert. Störungen dieser Art haben keinen bedeutenden Einfluß auf unsere Simulationen, da Strömungen bis ins Zentrum nur in zeitlich sehr kurzen Phasen auftreten, worauf lange Phasen folgen, in denen das Zentrum praktisch hydrostatisch ist. In den statischen Phasen sind die entstandenen Störungen wieder verschwunden, weil sich ein mechanisches Gleichgewicht eingestellt hat.

#### 4.2.4 Weitere Testrechnungen

Wir haben noch andere Tests durchgeführt, welche z.B. die numerische Lösung der Poissongleichung überprüfen oder die implizite Auswertung der Strahlungsdiffusion testen. Alle Testrechnungen liefern akzeptable Ergebnisse. Da es an dieser Stelle aber vornehmlich um die Anwendung unseres Programms auf realistische, physikalische Probleme gehen soll, sehen wir von einer Aufführung sämtlicher Testrechnungen ab.

### 4.3 Allgemeines zu den Simulationen

In einer Parameterstudie haben wir vier Simulationen durchgeführt, in denen die  $\beta$ -Viskosität (vgl. §2.6.4) sukzessive erhöht wird, beginnend bei  $\beta = 0$ , über  $\beta = 10^{-4}$  und  $\beta = 10^{-3}$  bis  $\beta = 10^{-2}$ . Diese Studie ist nötig, da  $\beta$  ein freier Parameter ist, den wir nicht aus grundlegenden Überlegungen ableiten können. Alle anderen Anfangsparameter werden für jede Simulation exakt gleich angenommen: Der Wolkenkern mit der Struktur einer leicht überkritischen Bonnor-Ebert-Sphäre hat eine Masse von  $M_w = 1 M_\odot$ , eine Temperatur von  $T_w = 10 \text{ K}$  und einen Zentrifugalradius von  $R_z = 100 \text{ AE}$  (siehe §3.15). Weiterhin nehmen wir Axial- und Äquatorsymmetrie an (vgl. §3.13). Das Gitter hat eine räumliche Auflösung von  $N_r = 320$  und  $N_\theta = 70$ , die innerste Zelle hat eine Ausdehnung von  $r_0 = 0.1 R_\odot$  und der äußere Rand der Simulation liegt bei  $r_{N_r} \approx 8700 \text{ AE}$ . Das Verhältnis von größter zu kleinster Zellweite ist  $2 \cdot 10^7$ .



**Abbildung 4.4:** Zur Definition der zeitlichen Entwicklungsphasen.

### 4.3.1 Die verschiedenen Entwicklungsphasen

Zunächst möchten wir einen Überblick zu den Entwicklungsphasen geben. Für den betrachteten Zeitraum der Simulationen lassen sich grob drei zeitliche Phasen definieren (vgl. Abb. 4.4): In der Phase 0 kontrahiert die Bonnor-Ebert-Sphäre langsam, wobei die Freifallzeit hier die bestimmende Zeitskala ist. Diese Phase wird beendet durch das Einsetzen des 1. Kollapses, dessen Beginn wir definieren als den Zeitpunkt an dem

$$\min_{\theta, \phi} \left( \int_0^{r_{Nr}} \kappa \rho \, dr \right) \geq \frac{2}{3} \quad (4.19)$$

gilt, also jede radiale, vom Außenrand bis zum Zentrum gemessene, optische Tiefe für alle Winkelrichtungen mindestens  $2/3$  ist. Zu diesem Zeitpunkt entsteht erstmals ein optisch dickes Objekt. Für uns beginnt an diesem Punkt auch die „Zeitrechnung“ (es wird  $t=0$  gesetzt), weil die vergleichsweise lange Phase 0 in jeder Rechnung identisch ist und die interessanten Strukturen sich erst nach Beginn des ersten Kollapses in sehr viel kürzerer als der Freifallzeit bilden. Die Definition (4.19) ist die natürliche, dreidimensionale Verallgemeinerung des Null-Alter-Konzeptes der Sternentstehung in [Wuchterl and Tscharnuter, 2003]. Phase 1 (die also bei  $t=0$  startet) beginnt mit dem 1. Kollaps und beinhaltet die Bildung des ersten, hydrostatischen Kerns. Je nach Struktur dieses Kerns kann es dann, nach einer Akkretionsphase und der Aufheizung der inneren Bereiche, zur Dissoziation der Wasserstoffmoleküle kommen, wodurch eine dynamische Instabilität möglich ist, die den 2. Kollaps einleitet. Nach unserer Definition ist dieser Zeitpunkt erreicht, wenn die Maximaltemperatur der Simulation erstmals 2000 K erreicht. Phase 2 beginnt also mit dem 2. Kollaps und enthält (unter Umständen) die Bildung eines zweiten, kompakten, protostellaren Kerns. Wir werden für jede Rechnung detailliert auf die Phasen 1 und 2 eingehen.

### 4.3.2 Kontrolle der Gesamtenergie

Eine hilfreiche Methode um die Güte unserer Simulationen zu prüfen, stellt die Kontrolle der Gesamtenergiebilanz dar. Dazu summieren wir alle Energiebeiträge auf, unter der Berücksichtigung der insgesamt abgestrahlten Energie  $\epsilon_{\text{ab}}$  über den äußeren Rand

$$\epsilon_{\text{ges}} = \epsilon_{\text{int}} + \epsilon_{\text{rad}} + \epsilon_{\text{pot}} + \epsilon_{\text{kin}} + \epsilon_{\text{ab}} = \int \left( e + E + \frac{1}{2}\rho\Phi + \frac{1}{2}\rho v^2 \right) dV + \int_0^t \left( \oint_{r_{N_r}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \right) dt. \quad (4.20)$$

Wir betrachten dann die Abweichung der Gesamtenergie von ihrem initialen Wert (für  $t=0$ ) relativ zur insgesamt umgesetzten Energie. Da die zur Verfügung stehende Energie ausschließlich aus potentieller Energie stammt, entspricht die umgesetzte Energie direkt dem Verlust an potentieller Energie seit Beginn der Rechnung. Es ergibt sich also der relative Gesamtenergiefehler

$$\Delta\epsilon_{\text{rel}}(t) := \frac{\epsilon_{\text{ges}}(t) - \epsilon_{\text{ges}}(0)}{|\epsilon_{\text{pot}}(t) - \epsilon_{\text{pot}}(0)|}. \quad (4.21)$$

### 4.3.3 Erläuterungen zu den Abbildungen

In den folgenden Abschnitten wird es im wesentlichen zwei Sorten von Abbildungen geben. Die einen zeigen zeitliche Verläufe von globalen Größen (wie z.B. Leuchtkraft, Energieverhältnisse, usw.) oder von Feldgrößen an bestimmten Orten, bzw. mit extremen Werten (wie z.B. Zentral- oder Maximaltemperatur). Die andere Sorte von Abbildungen stellt ganze räumliche Verteilungen von einzelnen Feldgrößen zu bestimmten Zeitpunkten, meist in einer zeitlichen Sequenz, dar. Weil wir sowohl von Axial- als auch Äquatorsymmetrie ausgehen, können wir in meridionalen Schnitten der nördlichen Hemisphäre sämtliche Informationen über den momentanen Zustand einer Feldgröße erfassen. Die Rotationsachse befindet sich dann am linken, der Äquator am unteren Rand des Bildes. Die in den farbskalierten Werten der Größen erkennbare Datendichte steht in direktem Zusammenhang mit der räumlichen Auflösung des Rechengitters, die einzelnen Farbzellen entsprechen also den Größen der Gitterzellen. Bei der Wahl der Wertebereiche und der Frage nach linearer bzw. logarithmischer Darstellung, stand immer der Aspekt im Vordergrund, möglichst viele Informationen über die momentane Struktur einer Größe herauszuarbeiten. Jede mögliche Darstellung hat Vor- und Nachteile.

#### 4.4 Phase 0: Kontraktion der Bonnor-Ebert-Sphäre

Die Phase 0 unterscheidet sich für verschiedene Werte von  $\beta$  praktisch nicht, weil die Rotationsgeschwindigkeiten noch zu klein sind, um eine nennenswerte turbulente Viskosität zu erzeugen. Daher diskutieren wir diese Phase unabhängig, bevor wir auf die einzelnen Rechnungen eingehen.

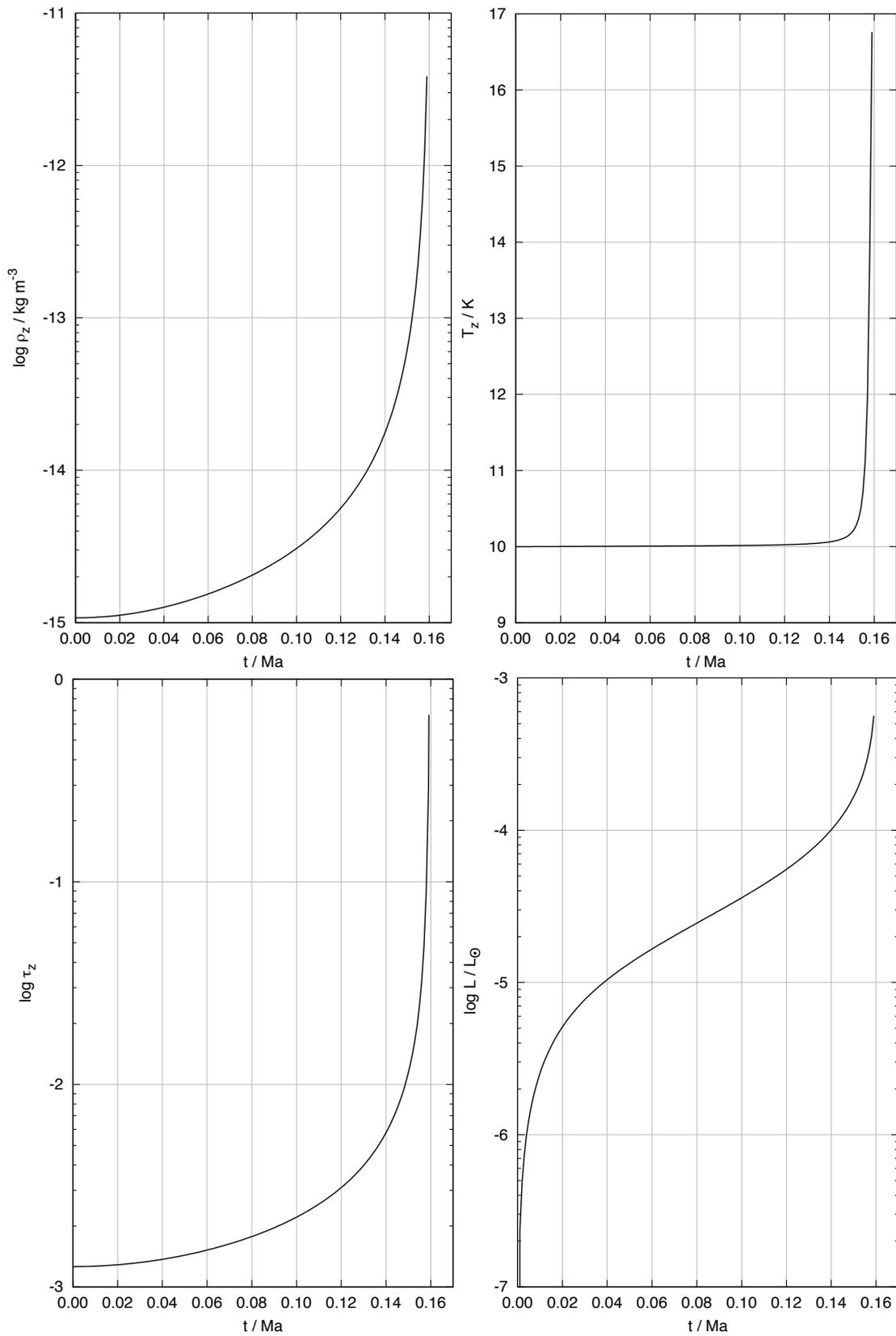
Die gesamte Phase dauert ca. 0.16 Ma, was etwa 1.2 Freifallzeiten entspricht. Da die anfängliche Rotationsperiode der Wolke ( $2\pi/\omega$ ) von ca. 7 Ma sehr lang ist verglichen mit der Freifallzeit, verläuft die Strömung nahezu sphärisch für die meisten Bereiche der Wolke. In Phase 0 gilt dies sogar bis in die zentralen Bereiche innerhalb der Zentrifugalbarriere ( $r \lesssim 100$  AE), die Strömung entspricht dort in sehr guter Näherung einer homogenen Strömung, wie wir sie in §4.1.1 diskutiert haben. Erst in den Phasen 1 und 2 zeigen sich dann in den zentralen Bereichen starke Abweichungen von der sphärischen Strömung.

In Abb. 4.5 sind die zeitlichen Verläufe der Zentraldichte, der Zentraltemperatur, der (minimalen) zentralen optischen Tiefe (diese entspricht der linken Seite von (4.19)) und der gesamten Leuchtkraft am Außenrand wiedergegeben. Die Dichte steigt (die äußersten Bereiche einmal ausgenommen) etwa homogen um 3 bis 4 Größenordnungen, während die gesamte Wolke praktisch isotherm bleibt. Erst in den letzten  $10^4$  Jahren erhöht sich die Temperatur leicht von 10 K auf knapp 17 K. Die Erklärung dafür findet sich in der zentralen optischen Tiefe  $\tau_z$ , diese bleibt bis auf die letzten  $10^4$  Jahre unterhalb von 0.01, die gesamte Wolke ist also optisch dünn und die durch Kompression erzeugte Wärme kann direkt an die Umgebung abgestrahlt werden. Die thermische Zeitskala ist die längste Zeit der Phase 0 noch sehr kurz im Vergleich zur Freifallzeit, erst zum Ende hin werden beide Skalen vergleichbar.

An den zeitlich extrem scharf definierten, starken Veränderungen der Variablen zum Ende der Phase 0 (besonders gut zu erkennen an  $\tau_z$  in Abb. 4.5) zeigt sich, daß die Definition eines Zeitbeginns nach (4.19) an dieser Stelle sehr sinnvoll ist.

Zum Ende der Phase 0 hat die rasch ansteigende, radiale Kollapseschwindigkeit schon Werte von maximal  $450 \text{ m s}^{-1}$  (bei Radien von ca. 140 AE) erreicht, was bei den entsprechenden Temperaturen immerhin einer Mach-Zahl von etwa 2.3 entspricht. Die Bildung des ersten Kerns steht unmittelbar bevor.

#### 4.4 Phase 0: Kontraktion der Bonnor-Ebert-Sphäre



**Abbildung 4.5:** Zeitlicher Verlauf von zentraler Dichte und Temperatur, sowie zentraler optischer Tiefe und gesamter Leuchtkraft für die Phase 0.

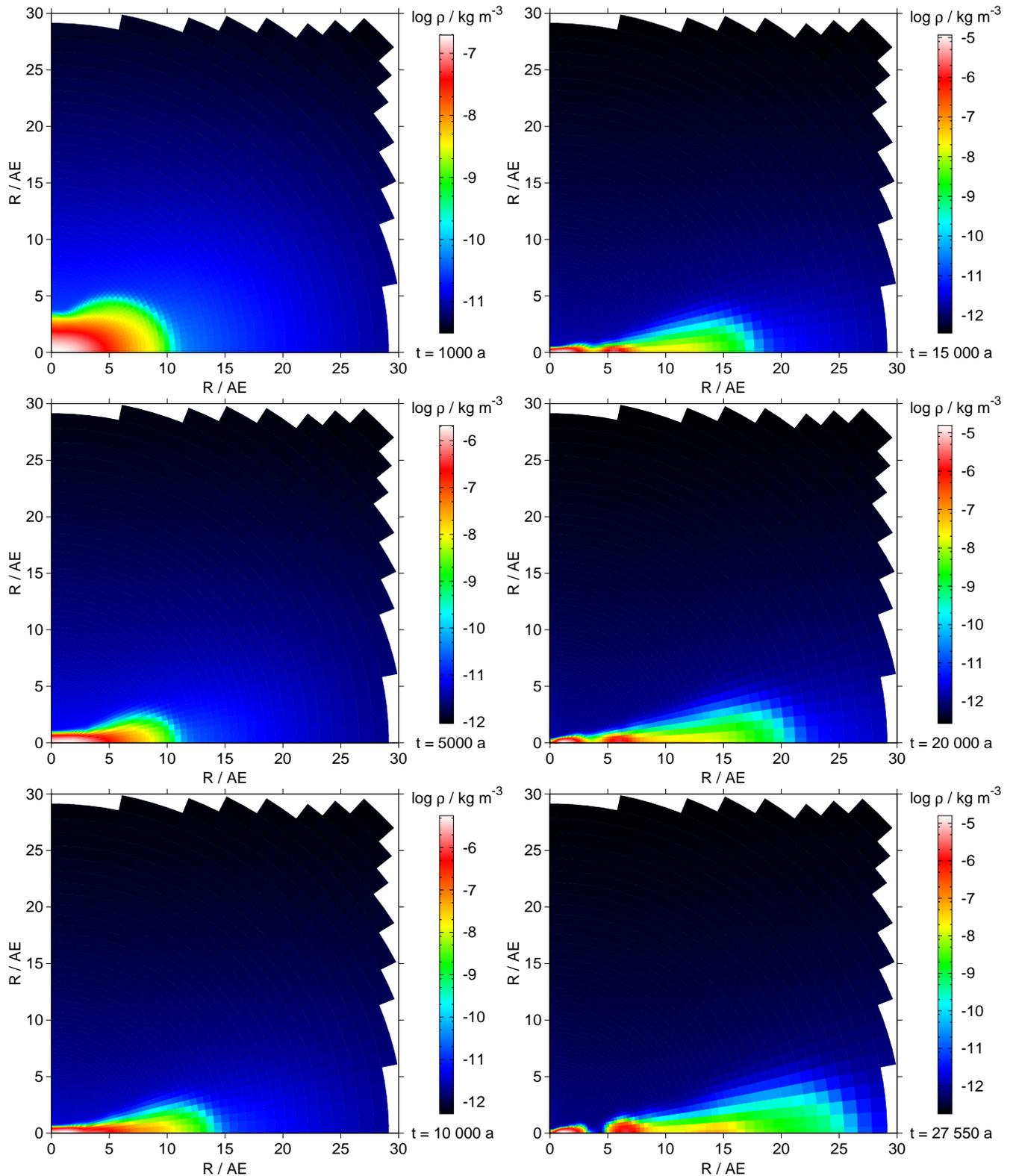
## 4.5 Simulation für $\beta = 0$

Wir beginnen mit der Rechnung für  $\beta = 0$ , es gibt also in diesem Fall überhaupt keinen Drehimpulstransport (der Drehimpuls wird also nur advektiert und bleibt gebunden an das jeweilige Massenelement). Es stellt sich heraus, daß der in Phase 1 entstehende hydrostatische erste Kern es im Laufe seiner Entwicklung nicht schafft, seine Maximaltemperatur in den Bereich von 2000 K zu bringen, sodaß es keine Phase 2 gibt. Die Gründe dafür werden aus den Verläufen der Phase 1 ersichtlich.

### 4.5.1 Phase 1

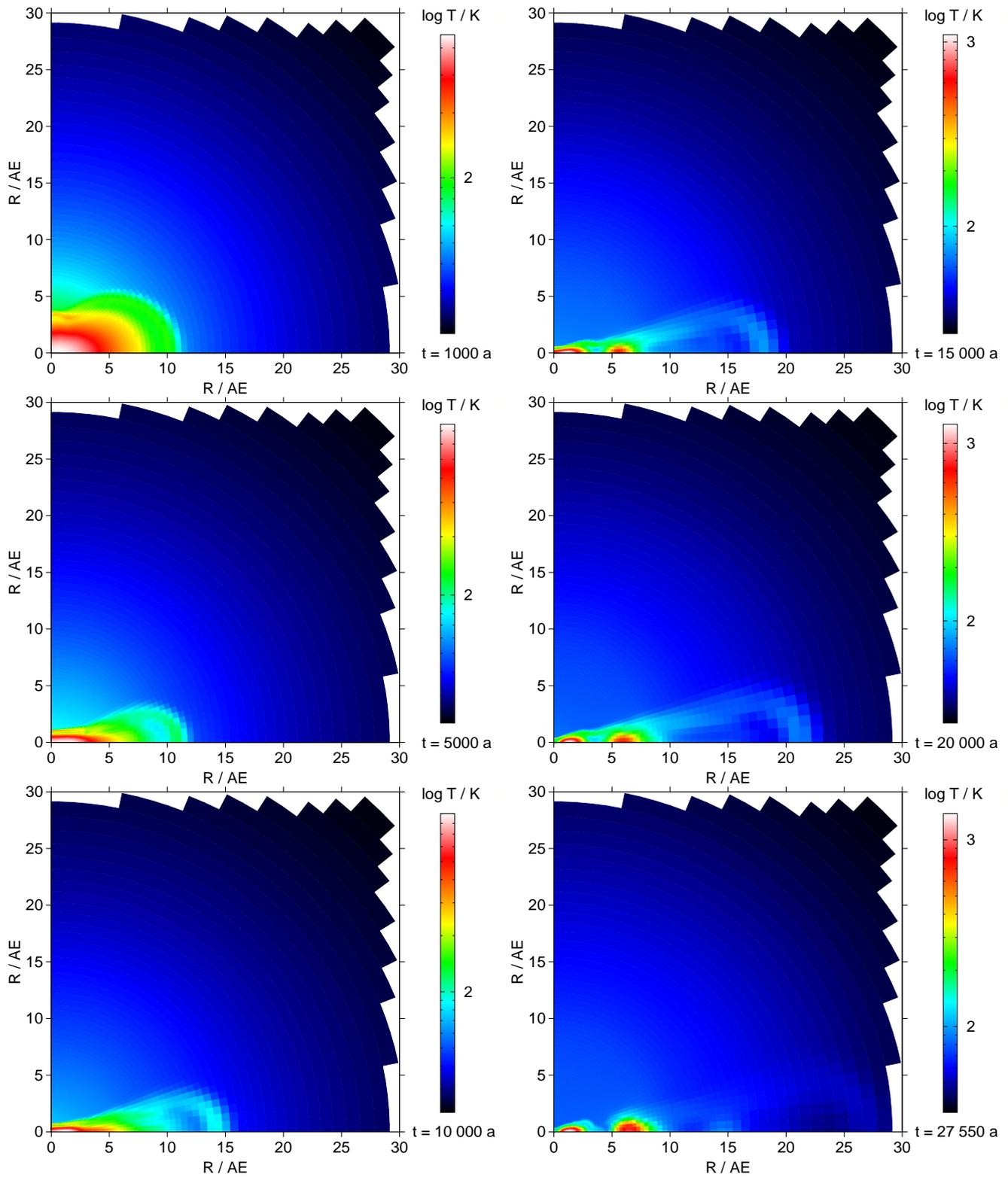
#### Entwicklung der Massendichte

In Abb. 4.6 ist die zeitliche Entwicklung der Massendichte des ersten Kerns dargestellt. Es entsteht ein immer stärker abgeplattetes Objekt, nach etwa 5 ka hat sich eine quasistationäre, dünne Akkretionsscheibe entwickelt. Das Dichtemaximum befindet sich zu diesem Zeitpunkt schon nicht mehr im Zentrum, sondern liegt ca. 1.5 AE entfernt von diesem auf dem Äquator. Die Scheibe wächst weiter durch das kontinuierlich von außen auftreffende Material. Bei etwa 14 ka findet auf dynamischer Zeitskala (innerhalb einiger Jahrzehnte) eine Restrukturierung statt: Die Scheibe spaltet sich bei etwa 4 AE auf und bildet eine ringartige Verdichtung bei ca. 6 AE. Ausgelöst durch diese Störung, beginnt auch die weiter innen liegende, massivste Scheibenstruktur sich in einem längeren Prozess (zwischen etwa 14 und 17 ka) vom Zentrum zu trennen und eine grob ringartige Form anzunehmen. Nach ca. 27 ka sind die beiden Ringe so massereich geworden, daß sie den Bereich zwischen sich extrem „leergesaugt“ haben; es läßt sich die Bildung eines dritten Ringes bei 14 AE erahnen. Insgesamt hat sich das Akkretionsobjekt bis auf einen Radius von 27 AE ausgedehnt. Nach 27.55 ka wird der mittlere Ring (bei 6 AE) gravitativ instabil und kollabiert. An dieser Stelle endet unsere Rechnung, da wir außerhalb des Zentrums nicht die nötige räumliche Auflösung besitzen um den Kollaps des Ringes zu verfolgen. Ohnehin würde die Axialsymmetrie spätestens im Moment des Ringkollapses gebrochen, sodaß die weitere Verfolgung desselben von rein „akademischem“ Interesse wäre.



**Abbildung 4.6:** Entwicklungssequenz der Massendichte im meridionalen Schnitt (Rotationsachse links, Äquator unten) für die Rechnung mit  $\beta=0$ . Man beachte die Anpassung der Farbskala an den Dichtebereich. Reihenfolge der Bilder: Erst links abwärts, dann rechts abwärts.

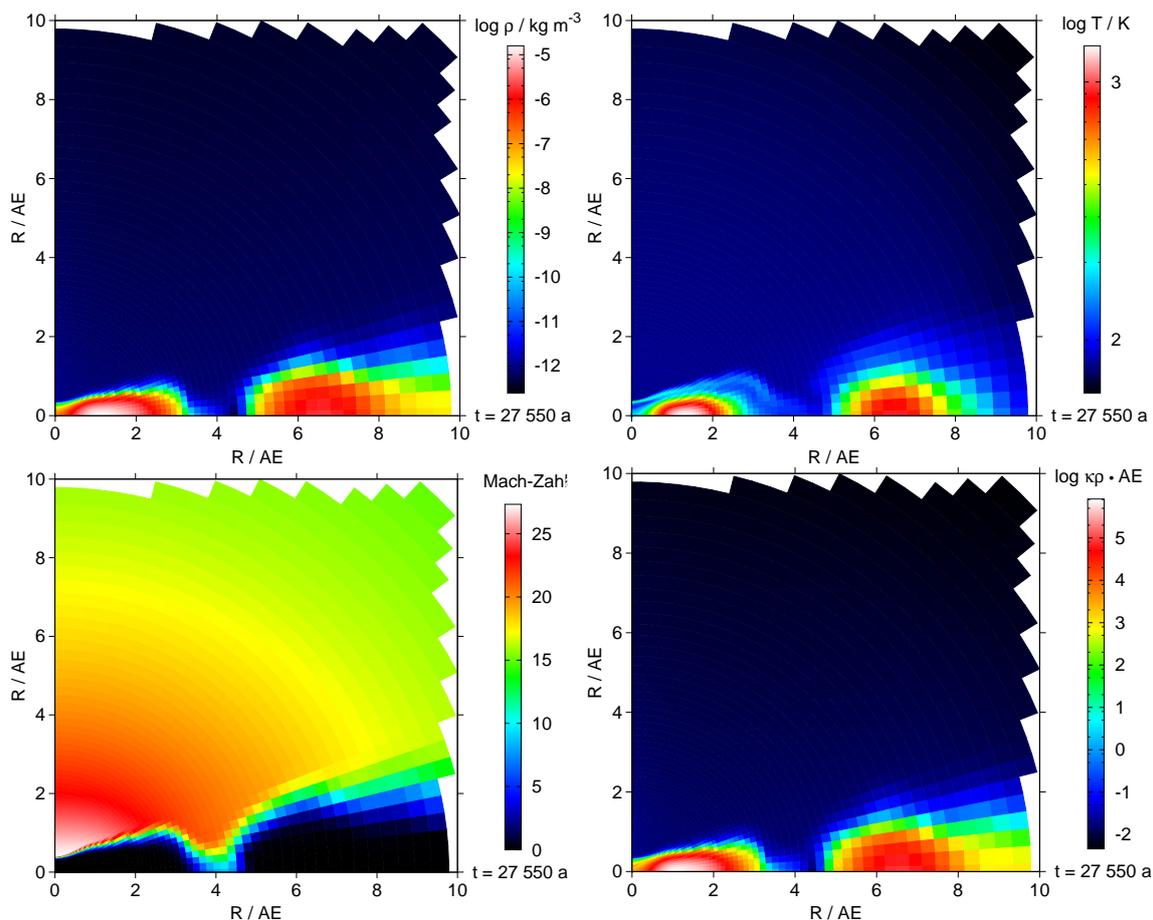
#### 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.7:** Entwicklungssequenz der Temperatur für die Rechnung mit  $\beta=0$  (Zeitpunkte analog zu Abb. 4.6). Man beachte die Anpassung der Farbskala an den Temperaturbereich.

### Entwicklung der Temperaturverteilung

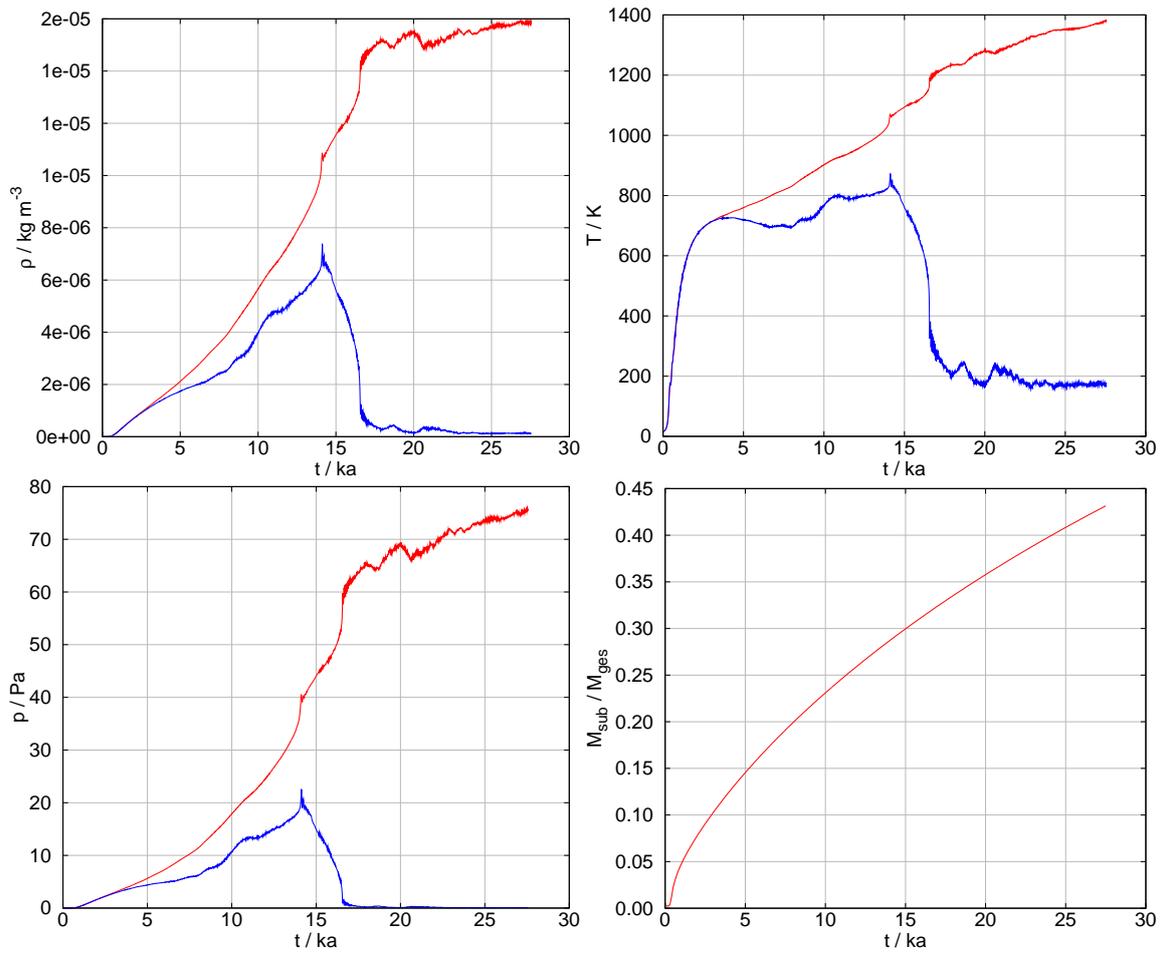
Abb. 4.7 zeigt die Temperaturverteilung für die gleichen Zeitpunkte und räumlichen Ausschnitte wie in Abb. 4.6. Die Oberfläche der Akkretionsscheibe läßt sich gut erkennen an den im Vergleich zu ihrer Umgebung heißeren Oberflächenschichten. Das es von der Oberfläche einwärts in das Objekt zunächst kühler wird, erklärt sich dadurch, daß es zwei Wärmequellen gibt: Zum einen die besagten heißen Oberflächenschichten, welche durch die Akkretionsstoßfront entstehen, zum anderen die Heizung aus den inneren Bereichen des Objekts, die durch Kontraktion hervorgerufen wird. Die Akkretionswärme wird zum Großteil abgestrahlt und liefert keinen wesentlichen Beitrag zur Aufheizung der inneren Bereiche. Die Temperaturen bleiben während der gesamten Rechnung unterhalb von 1400 K, was sich schlicht damit begründen läßt, daß die Wärmeabstrahlung sehr effizient möglich ist, denn die langgestreckte, flache Akkretionsscheibe hat eine große Oberfläche. Daher kommt es auch nie zu einer Phase 2 ( $T > 2000$  K). Noch deutlicher als bei der Massendichte kann man in den Temperaturverteilungen die Ringstrukturen erkennen, welche die heißesten Regionen darstellen. Auch hier läßt sich die Bildung eines dritten Ringes bei etwa 14 AE zum Ende der Rechnung (bei 27.55 ka) erkennen. Weiterhin zeigt sich, daß Scheibenbereiche außerhalb der Ringe mit der Zeit vollständig auskühlen, dadurch sind die äußeren Scheibenregionen ( $> 10$  AE) zum Ende der Rechnung thermisch kaum noch identifizierbar. Die optische Tiefe dieser Außengebiete ist einfach nicht groß genug, um über den gesamten Zeitraum die thermische Struktur zu erhalten.



**Abbildung 4.8:** Die inneren 10 AE zum Ende ( $t = 27.55$  ka) der Rechnung für  $\beta = 0$ . Dargestellt sind wiederum meridionale Schnitte für die Massendichte (links oben), die Temperatur (rechts oben), die Mach-Zahl  $|\mathbf{v}|/c_s$  (links unten) und der Absorptionskoeffizient der Strahlung (rechts unten).

### Die zentralen Bereiche zum Ende der Rechnung

Für den Endpunkt der Rechnung (bei 27.55 ka) sind in Abb. 4.8 noch einmal die Verteilungen der Massendichte und der Temperatur, sowie die Mach-Zahl und der Absorptionskoeffizient der Strahlung für die innersten 10 AE dargestellt. Gut an der „Temperaturhaube“ über dem innersten Ring zu erkennen, ist der schon angesprochene Zusammenhang zwischen den heißen Oberflächenschichten und der Lage der Akkretionsstoßfront (die man anhand der Mach-Zahl gut abschätzen kann). Es werden in der Polregion Mach-Zahlen von bis zu 27 erreicht. Die optische Tiefe der beiden Ringe kann man mit Hilfe des Absorptionskoeffizienten abschätzen auf etwa  $10^5$ . Diese große optische Tiefe ist der Grund dafür, daß die Ringe im Verlauf der Rechnung ihre Wärme nicht so schnell abstrahlen und weiter kontrahieren können.

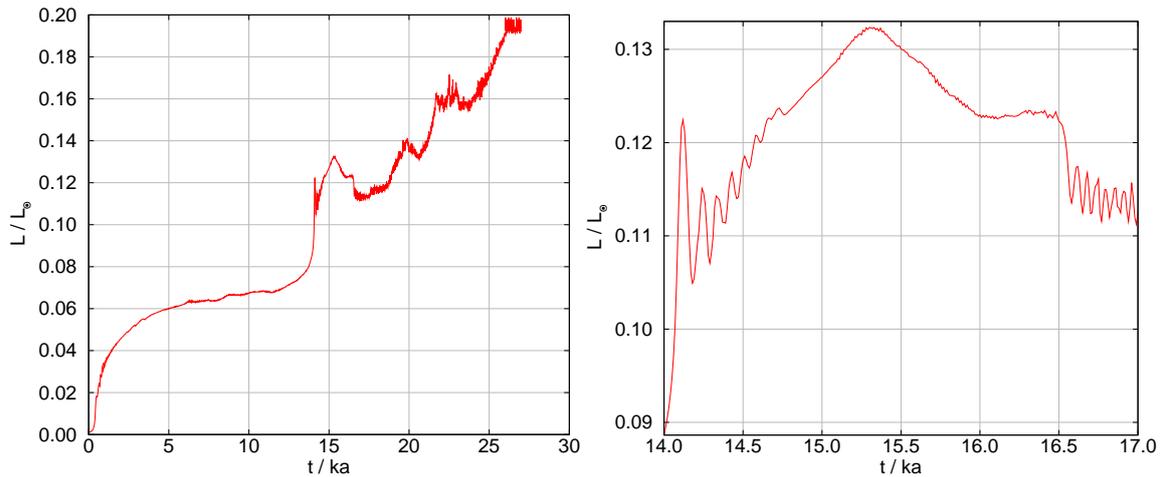


**Abbildung 4.9:** Die ersten drei Bilder zeigen jeweils den maximalen (rot) und zentralen (blau) Wert der Massendichte, der Temperatur und des Druckes im zeitlichen Verlauf für die Rechnung mit  $\beta=0$ . Das vierte Bild (rechts unten) gibt die subsonische Masse (also die Summe aller Massenelemente im Unterschallbereich) relativ zur Gesamtmasse an.

### Überblick zu den zeitlichen Verläufen

Abb. 4.9 zeigt den maximalen und zentralen Wert der Massendichte, der Temperatur und des Druckes im zeitlichen Verlauf. Die Maximalwerte entsprechen durchweg den Werten im innersten Ring. Die verschiedenen schon angesprochenen Ereignisse spiegeln sich in den Darstellungen wider. Die Trennung von Maximal- und Zentralgrößen findet schon nach ca. 3 ka statt. Der Punkt der dynamischen Ringbildung bei 14 ka macht sich als scharfes globales Maximum der Zentralgrößen bemerkbar, hervorgerufen durch die Störungen, welche die Restrukturierung bewirkt. Der länger andauernde Prozess der Bildung des innersten Ringes zwischen etwa 14 und 17 ka ist ganz deutlich erkennbar an der rapiden Absenkung der Zentralwerte in diesem Zeitbereich. Es wird also Materie aus dem Zentrum in den sich bildenden Ring gezogen.

Außerdem ist in Abb. 4.9 noch die subsonische Masse zu sehen (d.h. die Summe aller

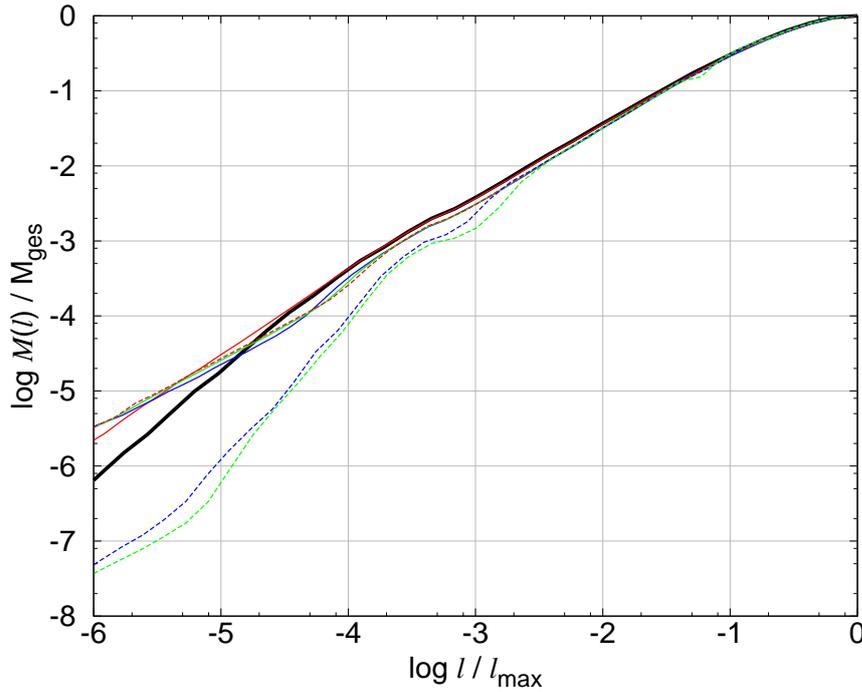


**Abbildung 4.10:** Die Gesamtleuchtkraft im zeitlichen Verlauf der Rechnung für  $\beta = 0$ , rechts ein Ausschnitt der dynamischen Phase der Ringbildung.

Massenelemente im Unterschallbereich), welche eine sehr gute Näherung für die Gesamtmasse der Akkretionsscheibe ist. Der Verlauf dieser Kurve wird ausschließlich durch die Anfangsbedingungen der Wolke bestimmt<sup>3</sup>, da die Materie praktisch im freien Fall mit hoher Überschallgeschwindigkeit auf die Scheibe trifft. Die Entwicklung der Scheibe selbst beeinflusst die Akkretionsströmung somit nicht im Geringsten, da die einzig denkbare Wirkung durch die Strahlung hervorgerufen werden könnte, jedoch ist dieser Prozess bei den vorhandenen Leuchtkräften völlig zu vernachlässigen. Während der Rechnung haben sich gut 43 % der gesamten Wolkenmasse in der Akkretionsscheibe gesammelt.

Der zeitliche Verlauf der Leuchtkraft ist in Abb. 4.10 dargestellt. Man sieht wie die Strahlungsleistung nach der ersten Bildungsphase der Scheibe (ab ca. 5 ka) zunächst nur schwach ansteigt. Einen ganz enormen Einfluß hat dann erst wieder die dynamische Ringbildung bei 14 ka, welche für einen starken Anstieg der Leuchtkraft sorgt. Insbesondere im vergrößerten Ausschnitt (rechte Seite der Abb. 4.10) sieht man deutlich die „Auswingsphase“ der dynamischen Restrukturierung in Form von gedämpften Schwingungen zwischen 14 und 14.7 ka. Es hat sich herausgestellt (und an diesem Beispiel sieht man es sehr gut) daß die Gesamtleuchtkraft eine integrale Kenngröße ist, die äußerst empfindlich auf jede noch so kleine Strukturveränderung des Systems reagiert. Weiterhin enthält der vergrößerte Ausschnitt auch den durch die erste Ringbildung angestoßenen Prozess der Bildung des innersten Ringes zwischen 14.7 und 16.6 ka. Dieser Prozess findet weitgehend auf thermischer Zeitskala statt, erst bei 16.5 ka setzt die dynamische Phase ein, welche die innere Ringbildung abschließt (gut zu erkennen durch den plötzlichen Leuchtkraftabfall). Die dar-

<sup>3</sup>Dies gilt, solange es nicht zu Auswürfen aus der Scheibe im Überschallbereich kommt (siehe spätere Rechnungen). Die aus einer Ausgleichsrechnung folgende, optimale Potenzfunktion der Kurve für die subsonische Masse in Abb. 4.9 hat die Form  $M/M_{\odot} = 0.2346 [(t - 300 \text{ a})/(10^4 \text{ a})]^g$ , wobei g kurioserweise bis zur dritten Nachkommastelle dem Goldenen Schnitt  $(\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180 \dots$  entspricht.

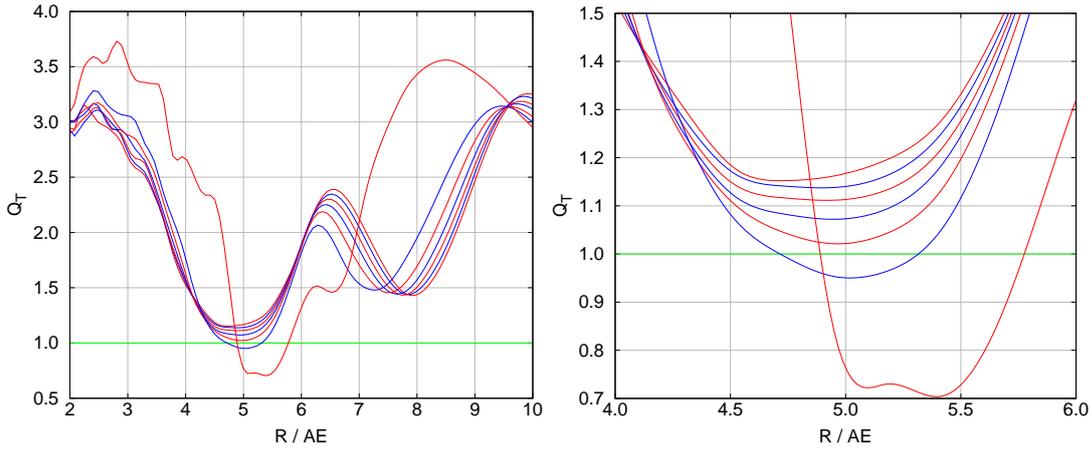
**Abbildung 4.11:**

Das Spektrum des spezifischen Drehimpulses  $l = \omega r^2 \sin^2 \theta$ , definiert als  $M(l) := \int_0^l dM(l)$ . Die verschiedenen Zeitpunkte entsprechen den folgenden Kurven: Initiale BES (schwarz), 0 a (rot), 5 ka (blau), 10 ka (grün), 15 ka (rot gestrichelt), 20 ka (blau gestrichelt) und 25 ka (grün gestrichelt).

auf folgenden, nicht abklingenden Schwingungen sind das Ergebnis von ständig angeregten Pulsationen der neuen Struktur im Zentrum: Vergleichbar mit einem thermischen „Trommelfell“, liegt die heiße Oberflächenschicht der Akkretionsfront nun über einem kühleren Gebiet mit sehr geringer Dichte (im Vergleich zur Ringdichte), siehe Temperaturverteilung in Abb. 4.8. Verschiedenste Konvektionsströmungen in diesem Gebiet sorgen nun für die erwähnten dynamischen Anregungen und die daraus folgenden Pulsationen. Das Phänomen bleibt über den gesamten Zeitraum der Rechnung bestehen, ist aber in der Gesamtdarstellung der Leuchtkraft (linke Seite der Abb. 4.10) als vermeintliches Rauschen getarnt, da die zeitliche Auflösung der Abbildung zu gering ist.

Abb. 4.11 zeigt das Spektrum des spezifischen Drehimpulses ( $l = \omega r^2 \sin^2 \theta$ ) in Form der Massenanteile  $M(l)$  mit einem spezifischen Drehimpuls von höchstens  $l$ . Da für eine nicht-viskose, axialsymmetrische Strömung die Funktion  $M(l)$  theoretisch zeitlich konstant ist, können wir (anhand der auftretenden Abweichungen vom initialen Verlauf von  $M(l)$ ) die Güte der lokalen Drehimpulserhaltung prüfen (siehe [Norman et al., 1980]). Es zeigt sich, daß zu allen Zeiten weniger als 1% der Gesamtmasse von maßgeblichen Störungen betroffen ist. Bis zu einer Zeit von 15 ka gibt es aufgrund der numerischen Diffusion nur eine relativ geringe Umverteilung von spezifischem Drehimpuls in Bereichen von  $l \approx 10^{-6} \dots 10^{-4} l_{\max}$ . Diese Phase schließt auch noch die dynamische Bildung des ersten Ringes mit ein. Erst die Ausbildung des zweiten inneren Ringes im Zeitraum zwischen 15 und 20 ka sorgt für einen deutlichen Abfall des Spektrums für  $l \lesssim 10^{-3} l_{\max}$ . Dies bedeutet, daß beim Abzug des Materials aus dem Zentrum zuviel spezifischer Drehimpuls advektiert worden ist.

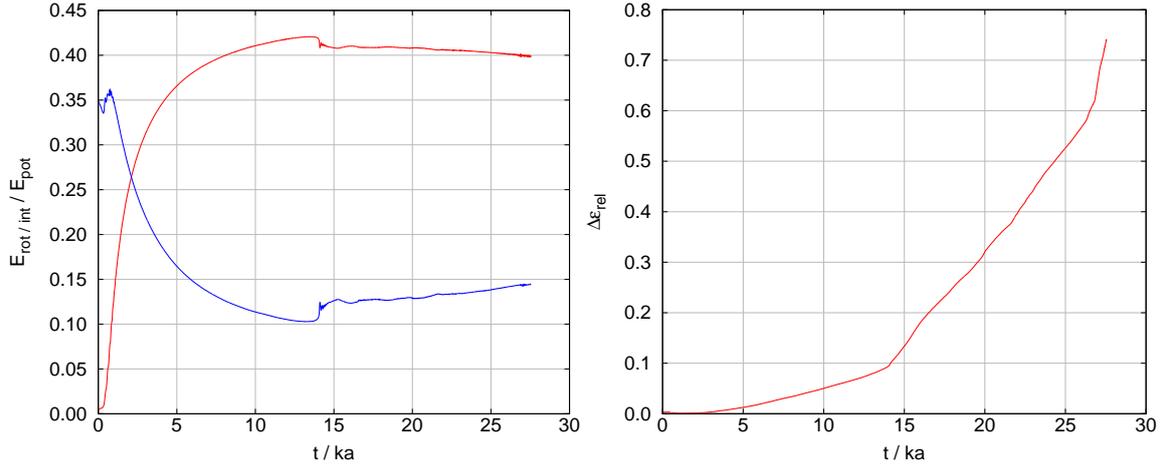
#### 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.12:** Der Toomre-Parameter  $Q_T$  (siehe §2.9.2) der Akkretionsscheibe in Abhängigkeit vom Abstand von der Drehachse während der dynamischen Phase der Ringbildung. Die grüne Linie markiert die Stabilitätsgrenze ( $Q_T < 1$  ist instabil). Die verschiedenen Kurven entsprechen festen Zeitpunkten, und zwar 13.5 bis 14.1 ka (in Schritten von 0.1 ka). Die Reihenfolge der abwechselnd roten und blauen Kurven erkennt man daran, daß sie sich im Bereich von 4.5–5.5 AE der Stabilitätsgrenze von oben nähern und diese zwischen 13.9 und 14.0 ka schneiden (siehe Vergrößerung rechts).

Ein Vergleich unserer Ergebnisse zur ersten Ringbildung mit theoretischen Überlegungen zur Stabilität dünner Gasscheiben ist möglich, indem wir den zeitlichen Verlauf des Toomre-Parameters (siehe §2.9.2) untersuchen, welcher in Abb. 4.12 dargestellt ist. Wir finden eine ausgezeichnete Übereinstimmung des Beginns der dynamischen Ringbildung mit dem Zeitpunkt von 13.93 ka, ab dem dieser Scheibenbereich nach Toomre instabil wird. An den beschleunigten Veränderungen in den Verläufen von  $Q_T$  (zu erkennen, da die Kurven in zeitlich äquidistanten Abständen dargestellt sind) und der völlig neuen Struktur der letzten Kurve (für 14.1 ka), zeigt sich deutlich die Restrukturierung und ihr dynamischer Charakter. Es lassen sich aus den Formen der Kurven sogar Informationen über das prinzipielle Ereignis ableiten: Eine kritische Verdichtung bei ca. 5 AE hat sich mit einer stabilen Verdichtung bei 7 bis 8 AE ( $Q_T \approx 1.5$ ) vereinigt. Die daraus entstandene kompakte Verdichtung (der erste Ring) befindet sich anfänglich im Bereich von 5 bis 6 AE. Die Umgebung ( $R < 5$  AE und  $R > 7$  AE) ist nun stabiler ( $Q_T$  ist gestiegen), denn Material ist aus diesen Bereichen abgezogen worden.

Abb. 4.13 zeigt einige energetisch relevante Verläufe. Die Verhältnisse  $\Xi_{\text{rot}} := |\epsilon_{\text{rot}}/\epsilon_{\text{pot}}|$  und  $\Xi_{\text{int}} := |\epsilon_{\text{int}}/\epsilon_{\text{pot}}|$  weisen ein nahezu spiegelbildliches Verhalten auf. Während  $\Xi_{\text{rot}}$  innerhalb der ersten 10 ka stark ansteigt, fällt  $\Xi_{\text{int}}$  ab. Daß  $\Xi_{\text{rot}}$  nicht beliebig weiter anwachsen kann, liegt daran, daß immer mehr Massenelemente ihre Zentrifugalbarriere erreichen, der Abfall von  $\Xi_{\text{int}}$  wird beschränkt durch die mit zunehmender optischer Tiefe der Scheibe einhergehende, verbesserte „Wärmespeicherfähigkeit“. Die erste dynamische Ringbildung



**Abbildung 4.13:** Zeitverläufe der Rechnung für  $\beta = 0$ . Linkes Bild: Der Betrag der Verhältnisse von Rotationsenergie zu potentieller Energie (rot), bzw. innerer Energie zu potentieller Energie (blau). Rechtes Bild: Der relative Gesamtenergiefehler (siehe §4.3.2).

bei 14 ka ist auch hier deutlich zu erkennen. Weil bei diesem Prozess mehr Materie von der Drehachse wegbewegt wird als auf sie zu (vgl. Abb. 4.6), sinkt  $\Xi_{\text{rot}}$  leicht. Dagegen steigt  $\Xi_{\text{int}}$  an, da der neu gebildete, kompaktere Ring thermisch besser isoliert ist als die vorherige Konfiguration.

Die rechte Seite der Abb. 4.13 zeigt den relativen Gesamtenergiefehler  $\Delta \varepsilon_{\text{rel}}$ , den wir in §4.3.2 eingeführt haben. Jenseits der ersten Ringbildung bei 14 ka steigt  $\Delta \varepsilon_{\text{rel}}$  merklich stärker an, was sich damit begründen läßt, daß die in diesen Bereichen sehr beschränkte räumliche Auflösung für eine Ringstruktur sich noch negativer auswirkt als eine Scheibenstruktur. Kurz vor Ende der Rechnung bei etwa 26 ka ist noch ein steilerer Anstieg zu erkennen, der wiederum mit mangelnder räumlicher Auflösung eines in diesem Sinne noch widrigeren Zustandes zu begründen ist: Die Lücke zwischen erstem und zweitem Ring ist so „leergeräumt“, daß die Akkretionsfront praktisch bis zum Äquator reicht und die dortigen Strömungsverhältnisse sich bei weitem nicht auflösen lassen (siehe Abb. 4.8). Zu den doch sehr großen Werten von  $\Delta \varepsilon_{\text{rel}}$  (die vielleicht bis zu 14 ka mit etwa 9 % akzeptabel sind) hier noch zwei Bemerkungen: Erstens sind während der gesamten Rechnung mehr als 34 Millionen Zeitschritte berechnet worden, die durch die Stabilitätsbedingung des expliziten Verfahrens nötig sind. Daß sich ein globaler Fehler wie  $\Delta \varepsilon_{\text{rel}}$  mit jedem neuen Zeitschritt weiter aufsummiert ist nicht zu vermeiden. Jede explizite numerische Rechnung wird in ihrem Verlauf immer weiter von der wahren Lösung abweichen. Zweitens ist unser Algorithmus (und speziell das räumliche Gitter und dessen Auflösung) nicht optimiert für einen Rechnungsverlauf dieser Art. Damit ist z.B. die Entstehung von kompakten Objekten (wie Ringen) außerhalb des Zentrums gemeint, aber auch einfach die absolute Länge der Rechnung. Für die weiteren Simulationen (mit  $\beta \neq 0$ ) ist unser Programm in diesem

Sinne besser geeignet, was sich dann auch in viel kleineren Werten von  $\Delta\varepsilon_{\text{rel}}$  widerspiegelt.

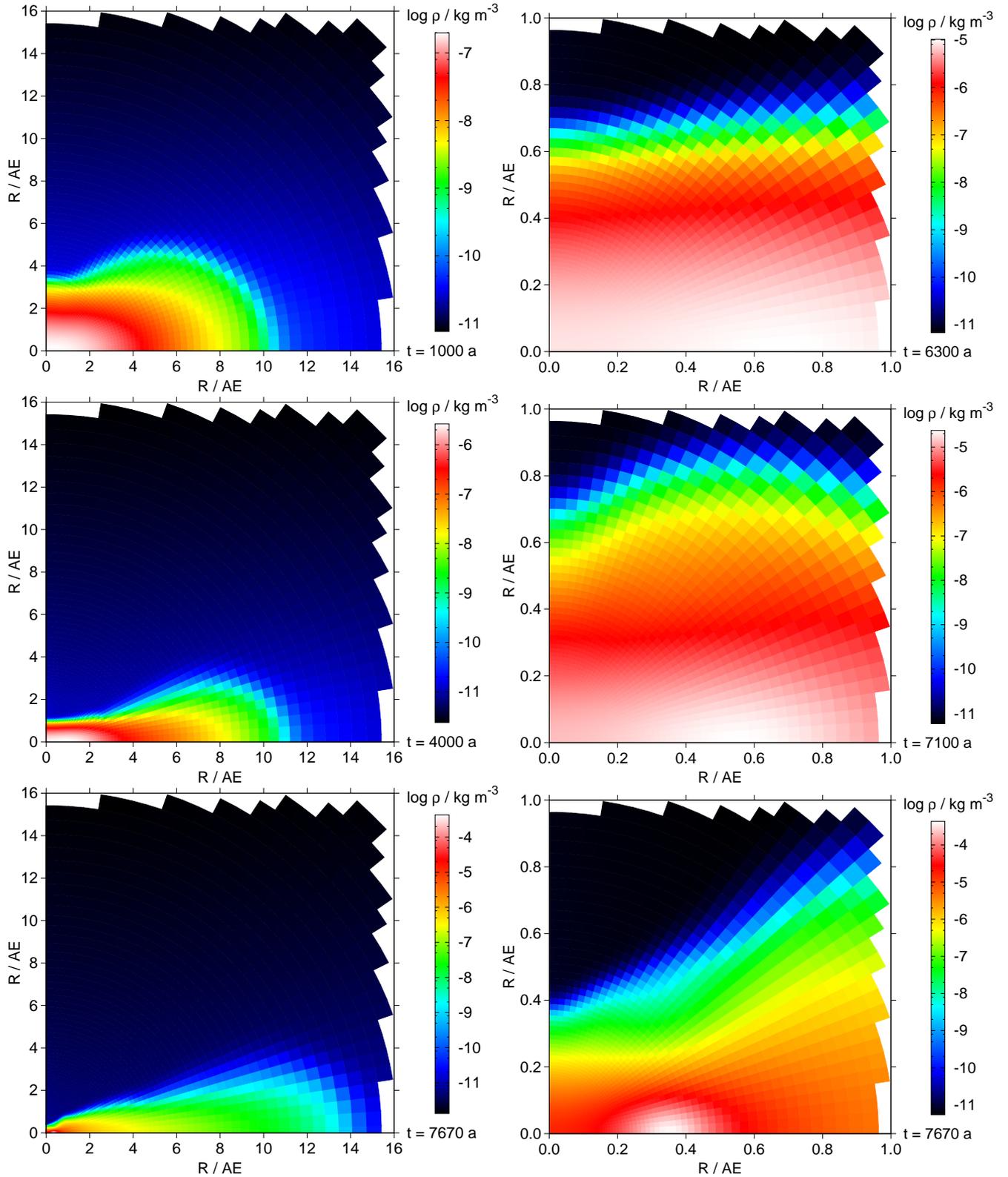
## 4.6 Simulation für $\beta = 10^{-4}$

Schon eine vergleichsweise kleine turbulente Viskosität mit  $\beta = 10^{-4}$  sorgt für eine qualitativ andere Entwicklung der Akkretionsscheibe. Nun kommt es auch zu Temperaturerhöhungen, die die Staubverdampfung ermöglichen. Außerdem wird die Phase 2 der Wasserstoffdissoziation erreicht, die bei 7.67 ka beginnt.

### 4.6.1 Phase 1

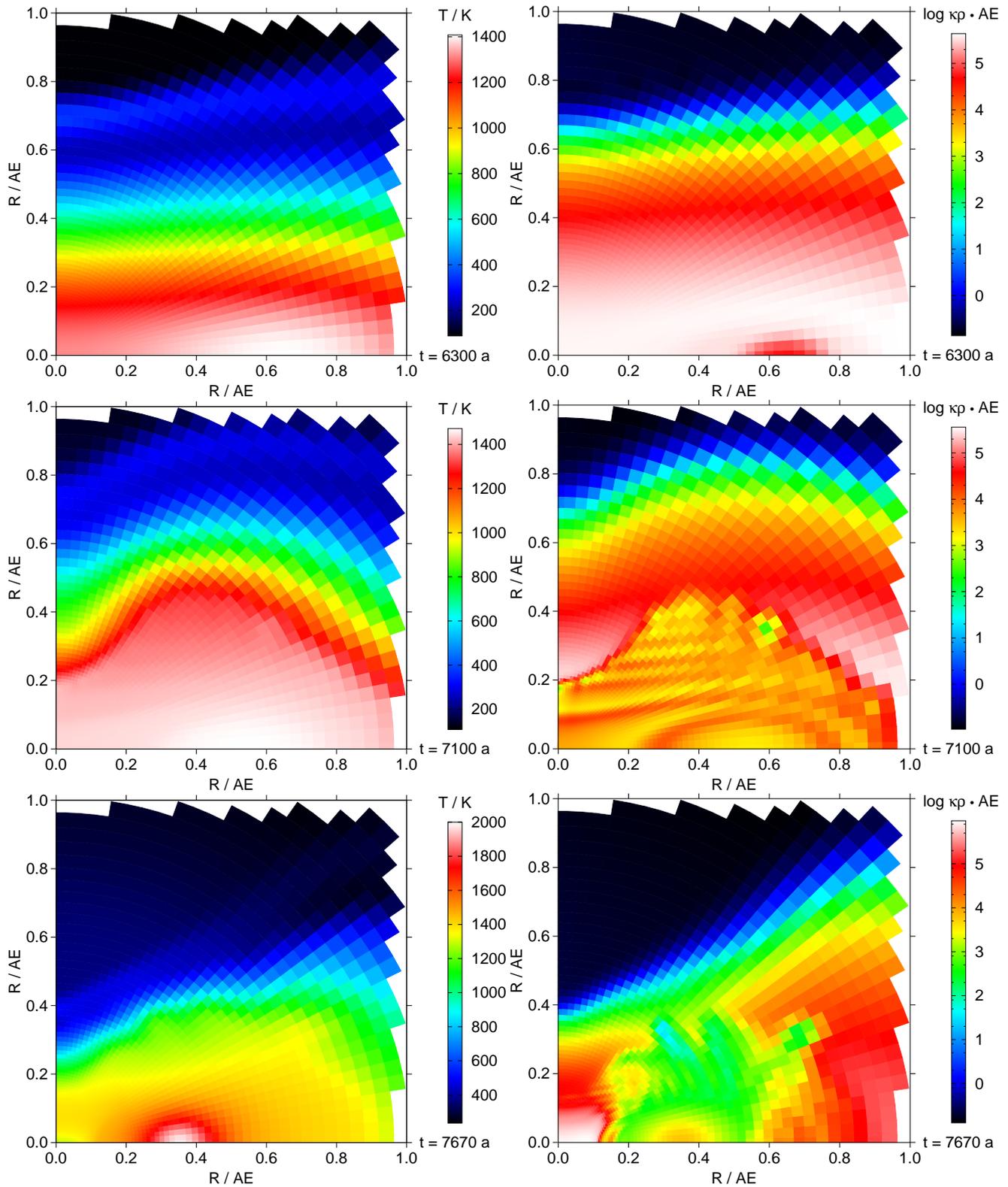
#### Entwicklung der Massendichte

In Abb. 4.14 ist die zeitliche Entwicklung der Massendichte der Akkretionsscheibe dargestellt. An dem Gesamtverlauf auf der linken Seite der Abbildung erkennen wir, daß die Entwicklung der äußeren Scheibenregionen praktisch analog zur Rechnung mit  $\beta = 0$  verläuft. Dies sollte so sein, da die viskose Zeitskala (vgl. §2.8)  $\tau_{\text{visk}} = 1/(\beta\omega)$  im Außenbereich ( $R \gtrsim 5 \text{ AE}$ ) mit etwa 100 ka noch groß ist im Vergleich zur bisherigen Akkretionszeit von 7–8 ka. Nur in den inneren Regionen ( $R \lesssim 1 \text{ AE}$ ) erreichen wir Werte von  $\tau_{\text{visk}} < 10 \text{ ka}$  und bemerken daher aufgrund des Drehimpulstransportes eine etwas mehr zum Zentrum konzentrierte Verdichtung (verglichen mit  $\beta = 0$ ). Die somit etwas kompaktere Zentralregion heizt sich dementsprechend stärker auf und wir erreichen bei 6.3 ka Temperaturen von über 1400 K, bei denen die Staubverdampfung einsetzt. Diesen Prozess und seine Wirkung diskutieren wir gleich noch im Detail, die Folgen für die Dichte sind auf der rechten Seite der Abb. 4.14 zu sehen: Die innere Scheibe „bläht“ sich zunächst auf und sinkt dann stark in sich zusammen.



**Abbildung 4.14:** Entwicklungssequenz der Massendichte im meridionalen Schnitt für die Rechnung mit  $\beta=10^{-4}$ . Linke Seite: Überblick zur gesamten Phase 1 für  $R < 16$  AE. Rechte Seite: Die Wirkung der Staubverdampfung zum Ende der Phase 1 für  $R < 1$  AE. Man beachte die Anpassung der Farbskala an den Dichtebereich.

#### 4 Ergebnisse und Diskussion

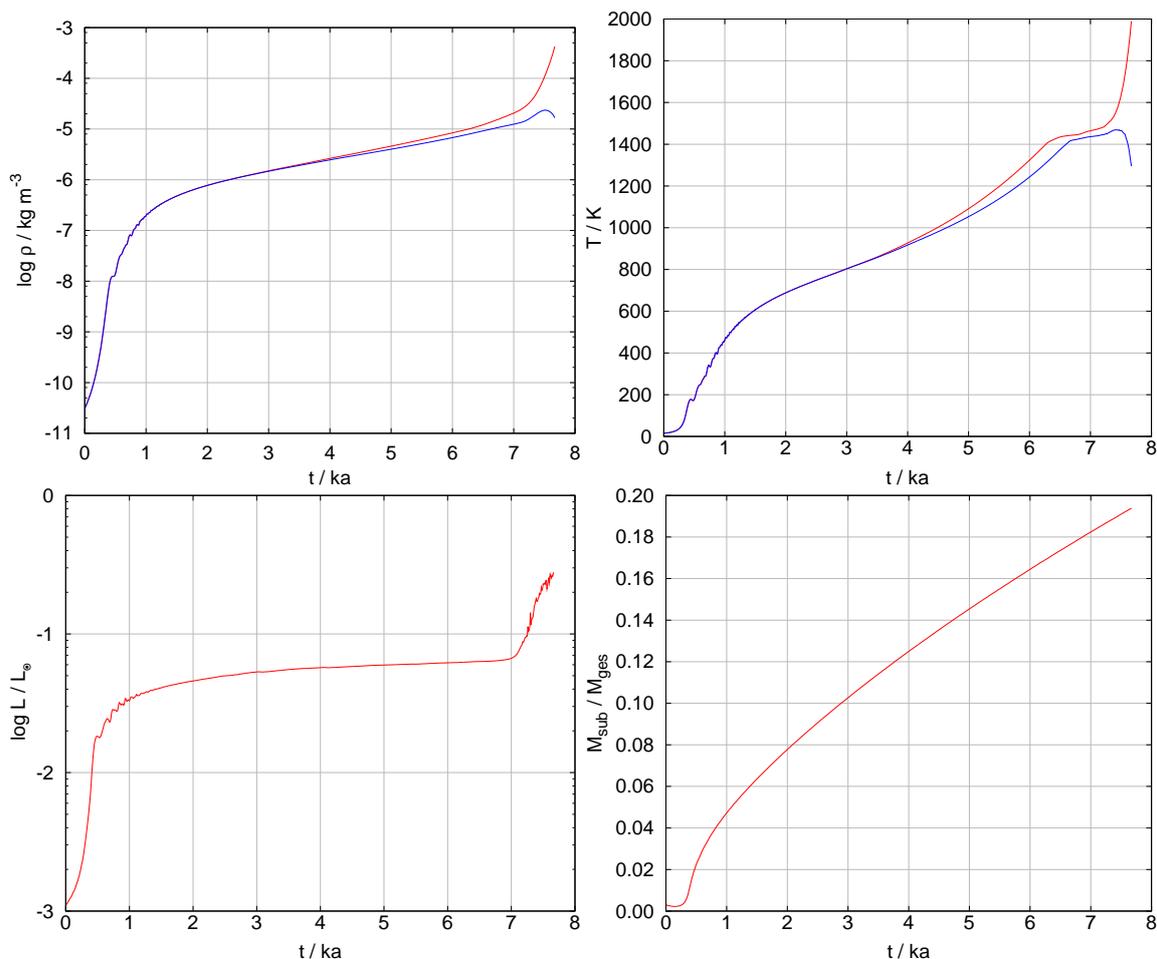


**Abbildung 4.15:** Die Wirkung der Staubverdampfung zum Ende der Phase 1 für  $R < 1$  AE (analog zur rechten Seite der Abb. 4.14). Linke Seite: Die Temperaturverteilung. Rechte Seite: Der Absorptionskoeffizient der Strahlung. Man beachte die Anpassung der Farbskala an die Wertebereiche.

### Die thermische Restrukturierung durch Staubverdampfung

Abb. 4.15 zeigt die Temperatur und den Absorptionskoeffizienten ab dem Punkt der Staubverdampfung bei 6.3 ka (zu sehen sind die selben Zeitpunkte wie auf der rechten Seite der Abb. 4.14). Nun erklären sich die soeben angesprochene Aufblähung und das spätere Zusammensinken wie folgt: Erreicht die Verdichtung bei ca 0.65 AE Temperaturen von etwa 1400 K, beginnt an dieser Stelle der Staub zu verdampfen (gut zu erkennen rechts oben in Abb. 4.15). Dadurch sinkt der Absorptionskoeffizient rasch um mehrere Größenordnungen, was zur Folge hat, daß die Wärme in dem nun optisch dünneren, staubfreien Bereich effektiver diffundieren kann. Somit dehnt sich diese Region schnell aus. Das Ganze stellt eine thermische Restrukturierung dar, der staubfreie Bereich ist nahezu isotherm (er weist zumindest viel kleinere Temperaturgradienten auf als die Umgebung). Bei 7.1 ka (siehe Mitte der Abb. 4.15) befindet sich die Scheibe gerade in dieser Restrukturierung. Die interessanten Wellenstrukturen für den Absorptionskoeffizienten im staubfreien Bereich entstehen, weil diese Region eine Art Hohlraum für Wärmewellen darstellt. Der Rand des staubfreien Bereichs reflektiert wegen der plötzlichen Zunahme des Absorptionskoeffizienten einen Großteil der ankommenden Wärme. Darum bilden sich stehende Wärmewellen aus, die allerdings in der Temperaturverteilung höchstens zu erahnen sind, da ihre Amplitude sehr gering ist. Dagegen sieht man diese Wellen im Absorptionskoeffizienten sehr deutlich, weil dieser sich in diesem Temperaturbereich stark mit der Temperatur verändert (entsprechend den steilen Flanken der Opazitätslücke, vgl. Abb. 2.1). Womöglich wären diese Strukturen nicht so deutlich vorhanden, wenn der Staub sich bei Abkühlung nicht instantan wieder bilden würde (siehe Bemerkung §2.5).

Natürlich führt die thermische Restrukturierung auch zu dynamischen Prozessen. Insbesondere an der Grenze der staubfreien Zone sorgen große Temperaturgradienten für enorme Konvektionsströmungen. Ab etwa 7.2 ka erreichen einzelne staubfreie Gasmassen durch Konvektion sporadisch immer wieder die Oberflächenbereiche der Scheibe, und schaffen dadurch einen optisch dünnen Kanal, also eine Art „Ablaßventil“ für die Wärme. Dadurch sinkt die Scheibe in sich zusammen. Zufällig genau zum Ende der Phase 1 bei 7.67 ka (wo die Maximaltemperatur 2000 K erreicht), bildet sich ein zeitlich stabiler, staubfreier Kanal und die Konvektion beruhigt sich (siehe Abb 4.15 unten). Interessanterweise ist in der Phase der Staubverdampfung zwischen 6.3 und 7.67 ka die anfängliche Verdichtung bei etwa 0.65 AE „gewandert“ und zu einem prägnanten Ring bei ca 0.35 AE geworden, welcher nun in einer von ihm staubfrei gehaltenen Lücke in der Scheibe weiter kontrahieren kann.

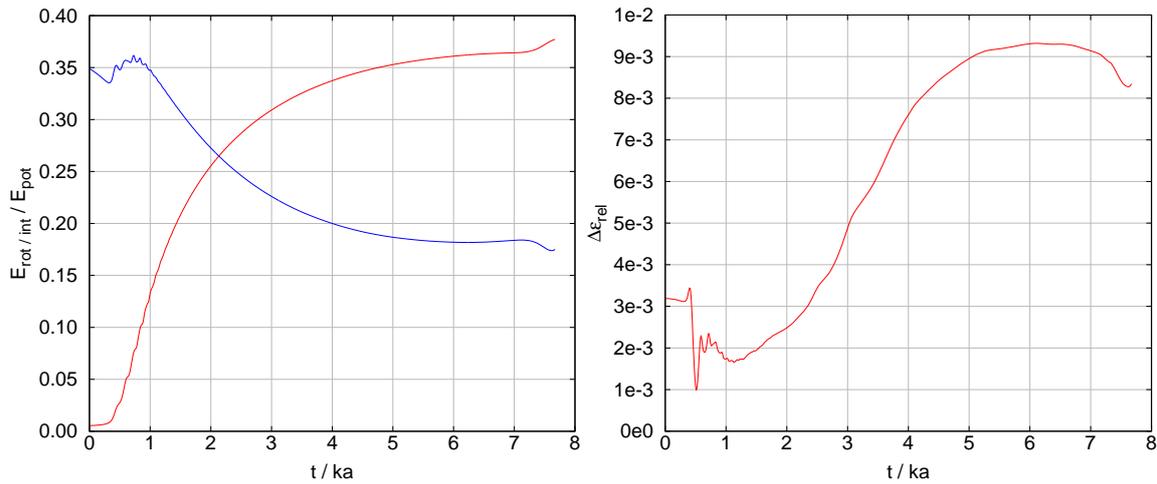


**Abbildung 4.16:** Zeitverläufe in Phase 1 der Rechnung für  $\beta = 10^{-4}$ . Die oberen Bilder zeigen jeweils den maximalen (rot) und zentralen (blau) Wert der Massendichte und der Temperatur. Links unten ist die Gesamtleuchtkraft dargestellt, rechts unten die subsonische Masse relativ zur Gesamtmasse.

### Überblick zu den zeitlichen Verläufen

In Abb. 4.16 oben sind die maximalen und zentralen Werte der Dichte und der Temperatur zu sehen. Die Aufspaltung von Maximal- und Zentralwerten ist bei weitem nicht mehr so markant wie für  $\beta = 0$ . Im Temperaturverlauf läßt sich gut die Phase der Staubverdampfung erkennen, zunächst wird bei ca. 6.3 ka die Steigung des Maximalwertes geringer, dann bei 6.7 ka auch die des Zentralwertes. Die Temperatur muß in diesem Phase langsamer steigen, da sich die Wärme über einen größeren Bereich verteilt. Die ab etwa 7.2 ka erfolgende, rapide Zunahme der maximalen Dichte und Temperatur, sowie die etwas verzögerte Abnahme der Zentralwerte, ist dem entstehenden Ring zuzuschreiben.

Links unten in Abb. 4.16 ist die Leuchtkraft dargestellt. Sie verläuft nahezu identisch wie für  $\beta = 0$  bis zu dem Zeitpunkt, wo sich die staubfreie Zone voll ausgebildet hat und die Leuchtkraft merklich zunimmt. Die erkennbaren Fluktuationen ab ca. 7.2 ka sind auf



**Abbildung 4.17:** Zeitverläufe in Phase 1 der Rechnung für  $\beta = 10^{-4}$ . Linkes Bild: Der Betrag der Verhältnisse von Rotationsenergie zu potentieller Energie (rot), bzw. innerer Energie zu potentieller Energie (blau). Rechtes Bild: Der relative Gesamtenergiefehler (siehe §4.3.2).

die im letzten Abschnitt erwähnten, durch Konvektion sporadisch auftauchenden, optisch dünnen Kanäle zurückzuführen.

Die rechts unten in Abb. 4.16 gezeigte subsonische Masse entwickelt sich in dieser Phase 1 genau wie für die Rechnung mit  $\beta = 0$ , weil sie (wie dort schon erwähnt) nur von den Anfangsbedingungen der Wolke bestimmt wird (solange es keine Auswurfprozesse gibt). Abb. 4.17 stellt wiederum die energetischen Verläufe dar. Die auf der linken Seite gezeigten Verhältnisse  $\Xi_{\text{rot}} := |\epsilon_{\text{rot}}/\epsilon_{\text{pot}}|$  und  $\Xi_{\text{int}} := |\epsilon_{\text{int}}/\epsilon_{\text{pot}}|$  verlaufen zunächst qualitativ ähnlich wie für  $\beta = 0$ , allerdings steigt  $\Xi_{\text{rot}}$  nicht so stark an, was direkt mit dem Drehimpulstransport korreliert ist. Weiterhin fällt  $\Xi_{\text{int}}$  im Vergleich nicht so stark ab, da wie schon gesagt das entstehende Objekt kompakter ist und sich stärker aufheizt. Der Anstieg von  $\Xi_{\text{rot}}$  zum Ende der Phase bei 7.2 ka erklärt sich aus der beschriebenen Ringbildung und Verschiebung der höchsten Massendichte Richtung Drehachse. Die Absenkung von  $\Xi_{\text{int}}$  bei 7.2 ka ist der Staublückenbildung in der Scheibe, also dem „Durchbruch“ der staubfreien Zone zuzuschreiben, die letztlich Tendenz des erneuten Anstiegs wiederum der Ringbildung. Die rechte Seite der Abb. 4.17 stellt den relativen Gesamtenergiefehler dar. Hier zeigen sich die größten Unterschiede zur Rechnung mit  $\beta = 0$ . Der Fehler bleibt in dieser Phase unter 1% (für  $\beta = 0$  war er nach 8 ka schon auf 3.5% angestiegen). Begründen läßt sich das einmal damit, daß der verwendete Zeitschritt etwas kleiner ist, da die Maximaltemperatur (und somit die Schallgeschwindigkeit) höher liegt und sich an einer Stelle befindet, die eine höhere räumliche Auflösung besitzt (näher am Zentrum). Andererseits finden bedeutende Prozesse, wie z.B. die Staubverdampfung und die Ringbildung, in einer weiter innen liegenden Region statt (verglichen mit  $\beta = 0$ ) und sind daher räumlich besser aufgelöst.

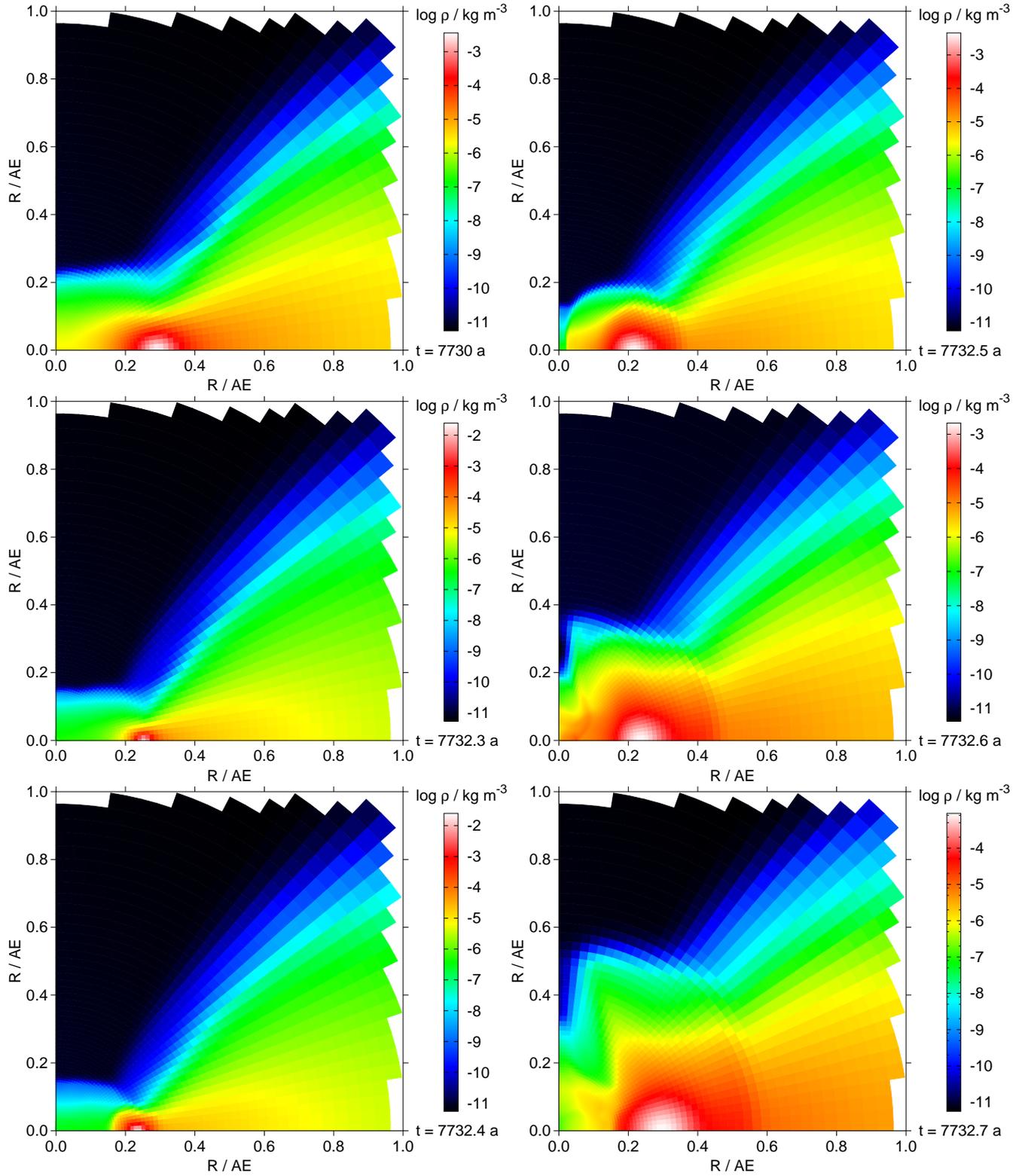
## 4.6.2 Phase 2

### Der Kollaps des Ringes

Nachdem die Phase 1 mit der Ausbildung eines Ringes zu Ende gegangen ist, kontrahiert dieser Ring weiter quasistationär im überwiegenden Teil der Phase 2. Dabei akkretiert er nicht direkt das von außen kommende Material, dieses fällt weiterhin auf die Oberfläche der Akkretionsscheibe, welche nach der thermischen Restrukturierung in Phase 1 nun eine zum Zentrum hin noch stärker geneigte Struktur besitzt (dazu vergleiche man die Bilder rechts oben und rechts unten in Abb. 4.14). In den Abb. 4.18 und 4.19 ist links oben die Dichte- bzw. Temperaturverteilung für einen Zeitpunkt (7.73 ka) dargestellt, zu dem der erwähnte quasistationäre Prozess noch läuft.

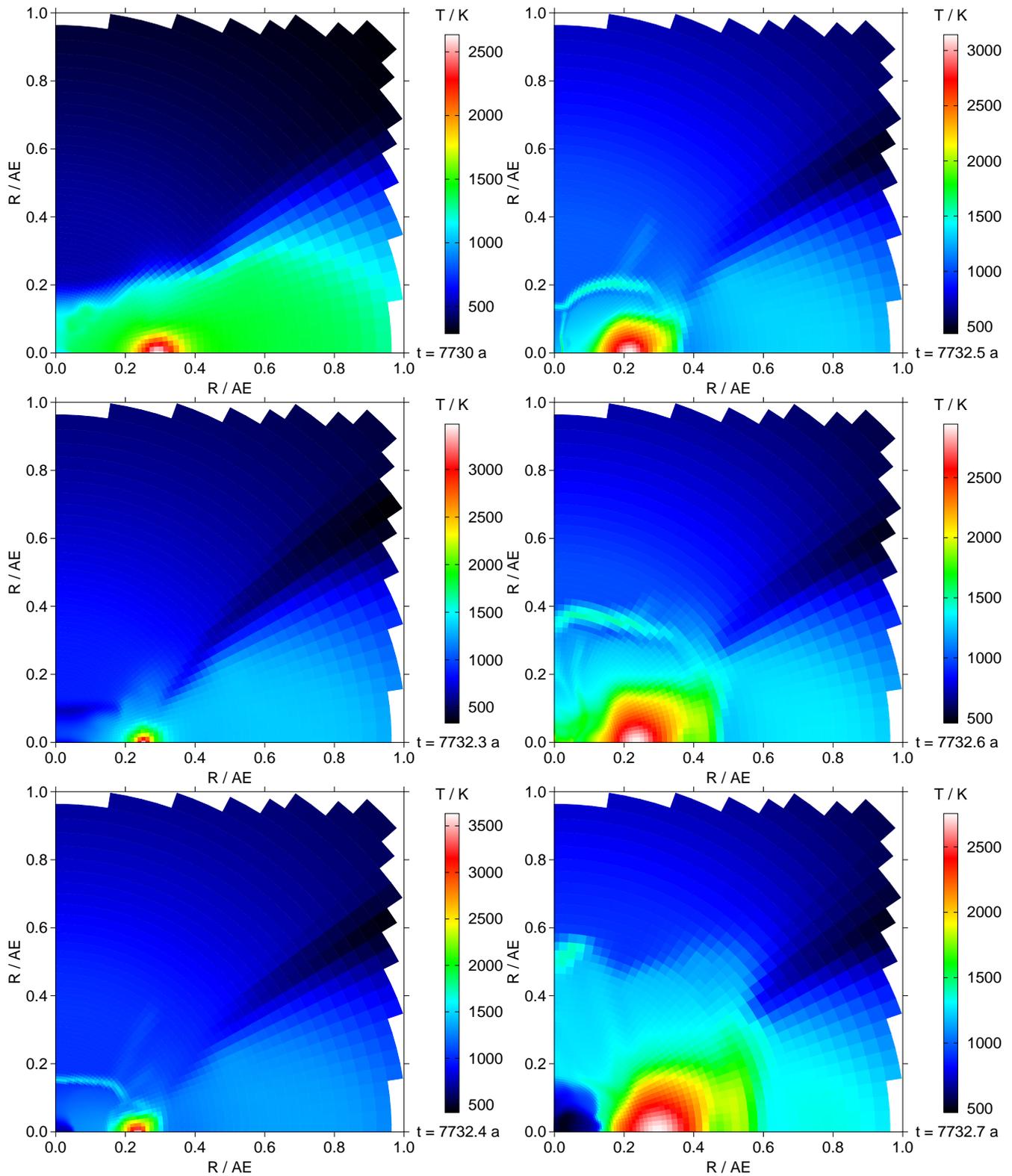
Exakt bei 7732.3 a, also 62.3 a nachdem die Phase 2 beginnt, setzt eine dynamische Instabilität in den Außenbereichen des Ringes ein (Abb. 4.18 und 4.19 Mitte links). Hervorgerufen wird sie durch die Schichten im Ring die zu diesem Zeitpunkt eine Temperatur von 2000 bis 2200 K besitzen, in denen also gerade die Wasserstoffdissoziation stattfindet (dies betrifft nicht die zentralen Ringbereiche, welche bereits Temperaturen von über 3000 K erreicht haben). Die über der Dissoziationsschicht liegenden Bereiche sind es, die zu diesem Zeitpunkt kollabieren, d.h. mit Überschallgeschwindigkeit Richtung Ringzentrum stürzen.

Schon 0.1 a (also etwa 5 Wochen, was der lokalen Freifallzeit entspricht) nach dem Beginn des Kollapses, erreichen die Dichte und die Temperatur im Ring ihre Höchstwerte mit  $\rho_{\max} \approx 2.5 \cdot 10^{-2} \text{ kg m}^{-3}$  und  $T_{\max} \approx 3600 \text{ K}$  (Abb. 4.18 und 4.19 links unten). Diese Werte entsprechen höchstwahrscheinlich nicht den tatsächlichen Spitzenwerten, jedoch haben wir nur Datenausgaben in Zeitintervallen von 0.1 a erzeugt und können die Werte (ohne die entsprechende Phase mit feineren Ausgabeintervallen neu zu berechnen) nicht genauer bestimmen. Der Zeitschritt verringert sich in dieser Phase auf Werte von weniger als 20 s. Daß der Kollaps sich nicht weiter vollzieht, liegt an der bei weitem nicht ausreichenden räumlichen Auflösung in diesem Bereich. Stattdessen kommt es zu einer Explosion im Ringzentrum, die in den verbleibenden Darstellungen auf den rechten Seiten der Abb. 4.18 und 4.19 in zeitlichen Abständen von 0.1 a zu sehen sind. Die Phase der Explosion hat natürlich keine Relevanz mehr für etwaige Aussagen über die Entwicklung des Systems, da die numerischen Unzulänglichkeiten unserer Rechnung für diesen Prozess verantwortlich sind. Wir stellen diese Ergebnisse hier hauptsächlich dar, um zu zeigen, daß unser Programm derartige Extremsituationen problemlos (d.h. ohne abzustürzen) verkraftet und somit sehr robust ist.

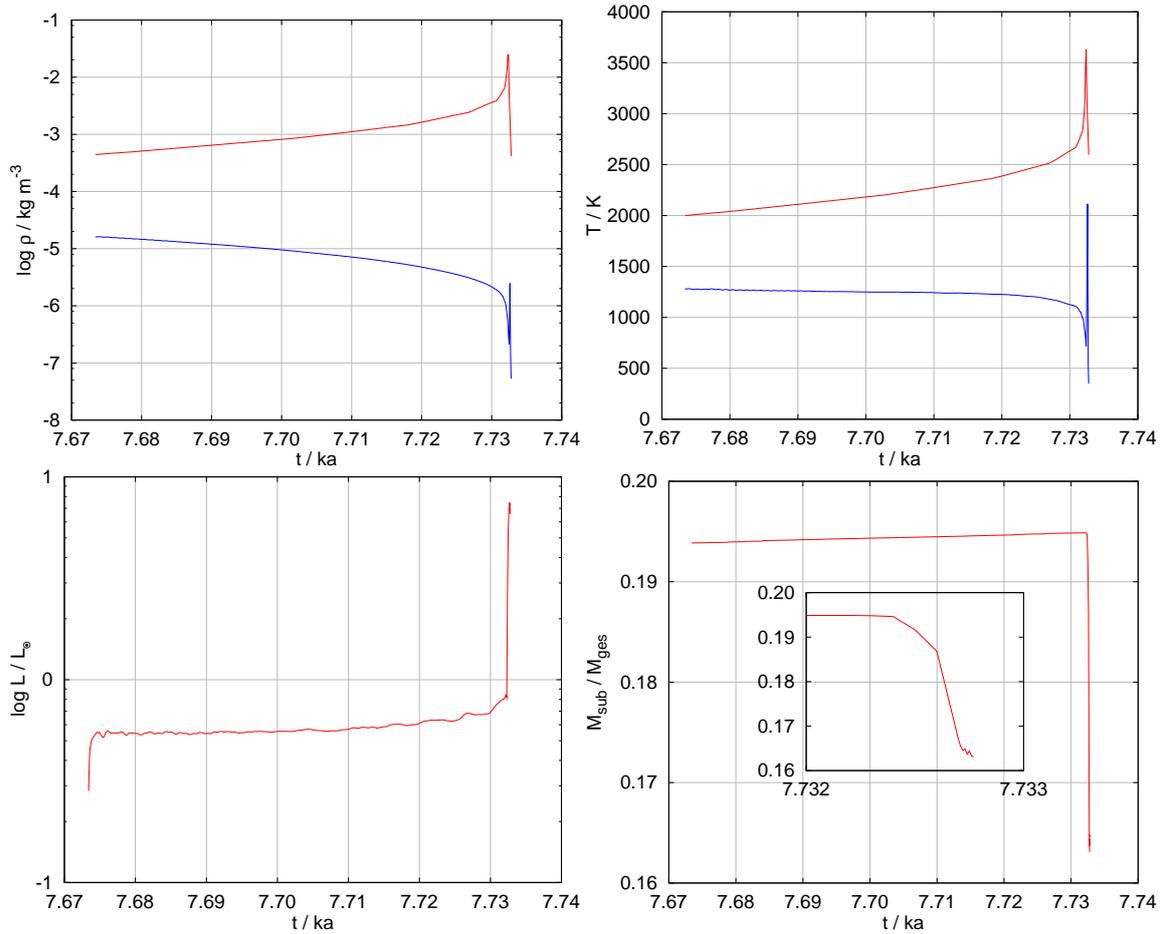


**Abbildung 4.18:** Entwicklungssequenz der Massendichte im meridionalen Schnitt für die Rechnung mit  $\beta = 10^{-4}$ . Der Kollaps und die anschließende Explosion des Ringes zum Ende der Rechnung in Phase 2. Man beachte die Anpassung der Farbskala an den Dichtebereich.

#### 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.19:** Entwicklungssequenz der Temperatur für die Rechnung mit  $\beta = 10^{-4}$ . Der Kollaps und die anschließende Explosion des Ringes zum Ende der Rechnung in Phase 2. Man beachte die Anpassung der Farbskala an den Temperaturbereich.

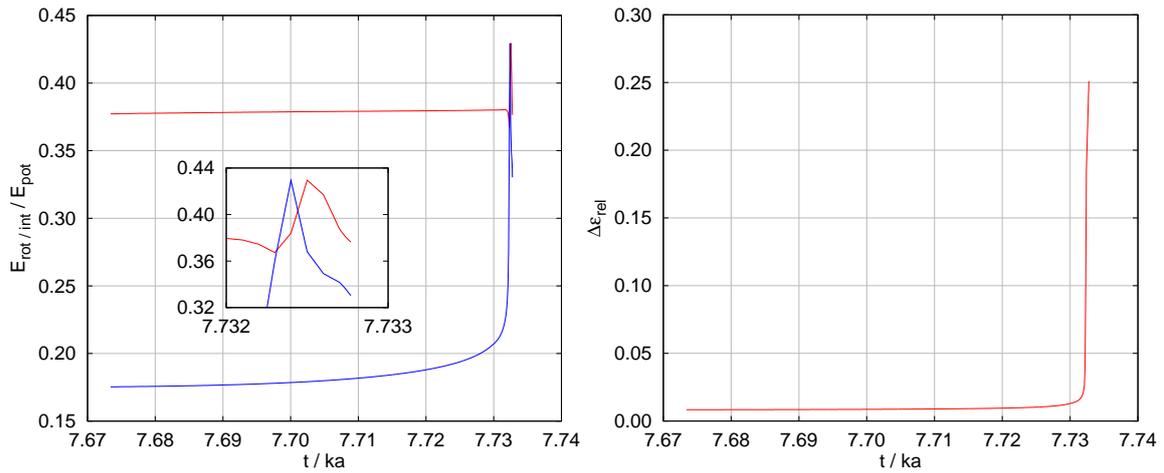


**Abbildung 4.20:** Zeitverläufe in Phase 2 der Rechnung für  $\beta=10^{-4}$ . Die oberen Bilder zeigen jeweils den maximalen (rot) und zentralen (blau) Wert der Massendichte und der Temperatur. Links unten ist die Gesamtleuchtkraft dargestellt, rechts unten die subsonische Masse relativ zur Gesamtmasse.

### Überblick zu den zeitlichen Verläufen

Die Verläufe der Maximal- und Zentralwerte für Dichte und Temperatur (Abb. 4.20 oben) entsprechen dem soeben erläuterten Ablauf der Phase 2. Deutlich ist der dynamische Kollaps am Ende dieser nur gut 60 a umfassenden Phase zu erkennen. Links unten in Abb. 4.20 ist die Leuchtkraft zu sehen. Der Sprung ganz zu Beginn der Phase entspricht noch dem Zeitpunkt, wo eine stabile staubfreie Lücke in der Scheibe entstanden ist und die Abstrahlung somit stärker wird. Während des Kollapses steigt die Leuchtkraft auf über  $7L_{\odot}$ . Die subsonische Masse (Abb. 4.20 rechts unten) zeigt in der Kollapsphase erstmalig eine Abweichung von ihrem bekannten (im Falle einer ungestörten Akkretion zu erwartenden) Verhalten. In der Explosionsphase verringert sie sich stark, weil Materie mit Überschallgeschwindigkeit aus der Akkretionsscheibe befördert wird.

#### 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.21:** Zeitverläufe in Phase 2 der Rechnung für  $\beta = 10^{-4}$ . Linkes Bild: Der Betrag der Verhältnisse von Rotationsenergie zu potentieller Energie (rot), bzw. innerer Energie zu potentieller Energie (blau). Rechtes Bild: Der relative Gesamtenergiefehler (siehe §4.3.2).

Auch in den energetischen Verläufen schlägt sich der Ringkollaps eindeutig nieder. Abb. 4.21 links stellt wieder die Energieverhältnisse  $\Xi_{rot}$  und  $\Xi_{int}$  dar. An der Entwicklung des relativen Gesamtenergiefehlers erkennt man, daß der Ringkollaps mit unserem Programm nicht vernünftig nachvollzogen werden kann: Innerhalb kürzester Zeit wächst der Fehler in der Kollapsphase von unter 1% auf 25%. Für uns ist jedoch die wichtigste Erkenntnis, daß es überhaupt zu einer gravitativen Instabilität kommt. Es ist nicht unser Ziel die weitere Entwicklung einer solchen Konfiguration, mit einem kompakten Objekt außerhalb des Zentrums zu untersuchen, zumal die Erhaltung der Axialsymmetrie (wie schon in der vorherigen Rechnung erwähnt) in der Realität spätestens während des Ringkollapses nicht mehr gewährleistet ist.



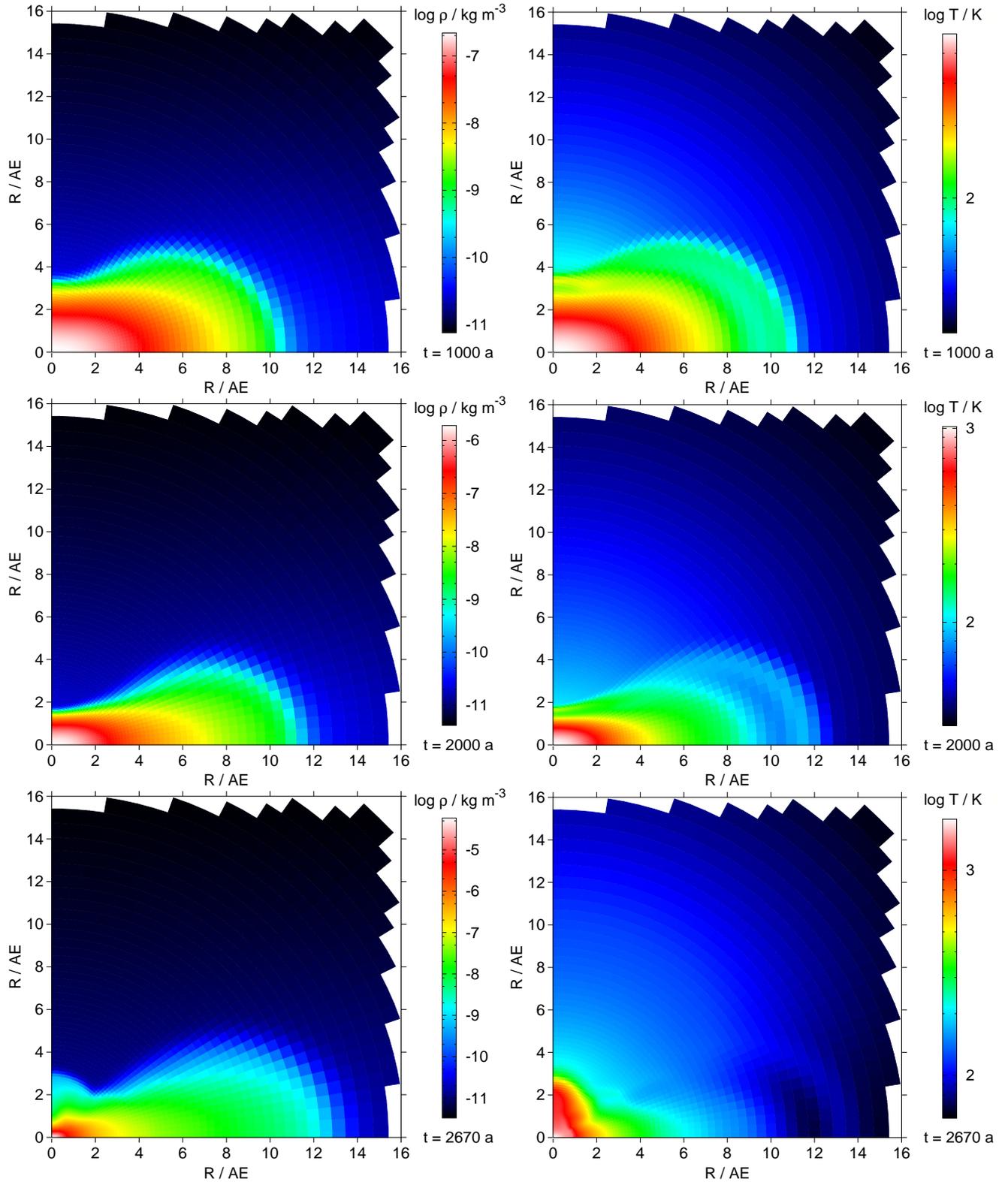
## 4.7 Simulation für $\beta = 10^{-3}$

Die weitere Erhöhung der turbulenten Viskosität führt für uns insofern zu einer neuen Qualität der Rechnung, als nun nach der Entstehung des ersten Kerns in der weiteren Entwicklung ein noch sehr viel kompakteres Objekt im Zentrum (und eben nicht außerhalb von diesem) entsteht. Da unser Programm (und im Speziellen unser räumliches Gitter) für diesen Fall ausgelegt ist, können wir die Entstehung und frühe Entwicklung dieses neuen, noch kompakteren Objektes verfolgen.

### 4.7.1 Phase 1

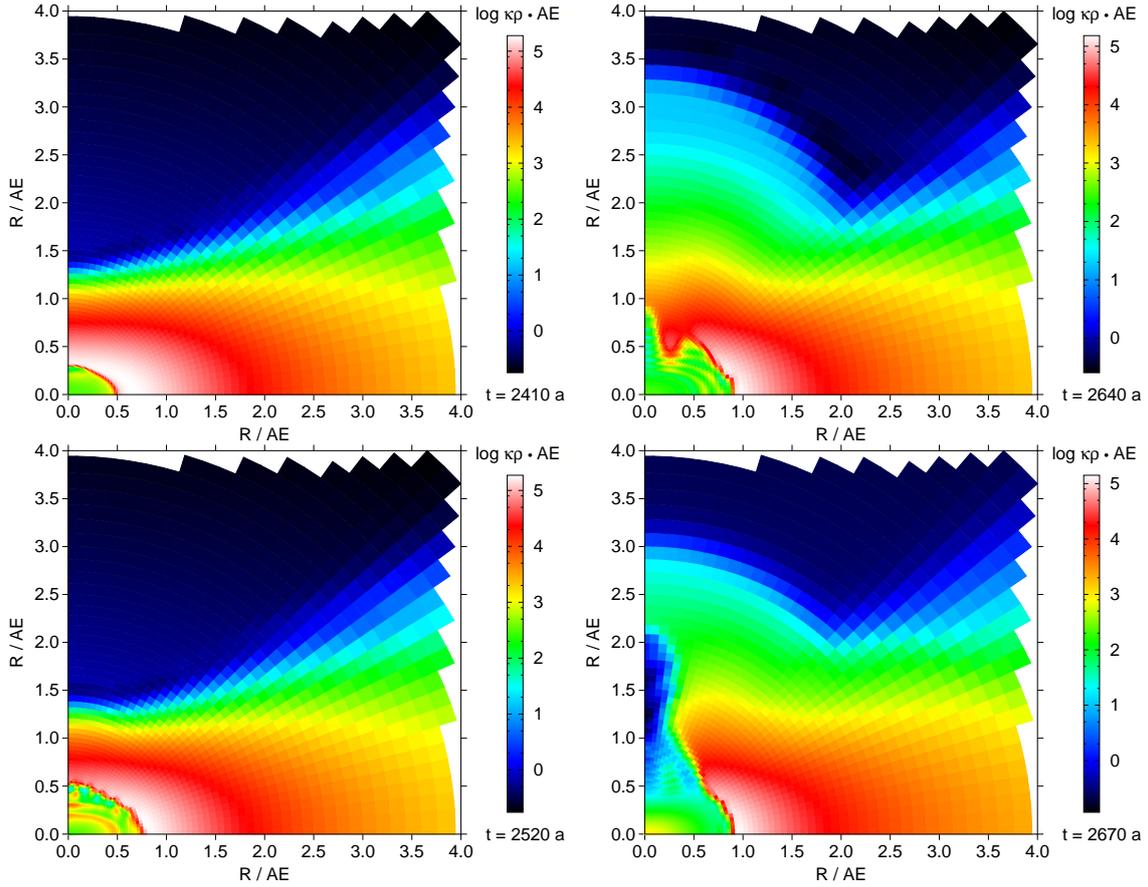
#### Entwicklung der Massendichte und der Temperaturverteilung

Die globale Entwicklung der Massendichte sowie der Temperatur des ersten Kerns ist in Abb. 4.22 dargestellt. Der Hauptunterschied zur Rechnung mit  $\beta = 10^{-4}$  besteht darin, daß sowohl Dichte- als auch Temperaturmaximum mit der Zeit nicht mehr aus dem Zentrum „wandern“ (die Maximalwerte sind also immer im Zentrum zu finden), da der Drehimpulstransport auf noch kürzerer Zeitskala stattfindet. Aus diesem Grund ist die Zentralregion im Vergleich zur vorherigen Rechnung wiederum etwas kompakter geworden, und es werden schon nach etwa 2380 a die Bedingungen für die Staubverdampfung im Zentrum erreicht. Dies führt wieder zu einer Aufblähung der polaren Gebiete des ersten Kerns. Bei ca. 2650 a, kurz vor Ende der Phase 1 (bei 2670 a) beginnen die aufgeblähten Scheibenregionen dann plötzlich zusammenzufallen.



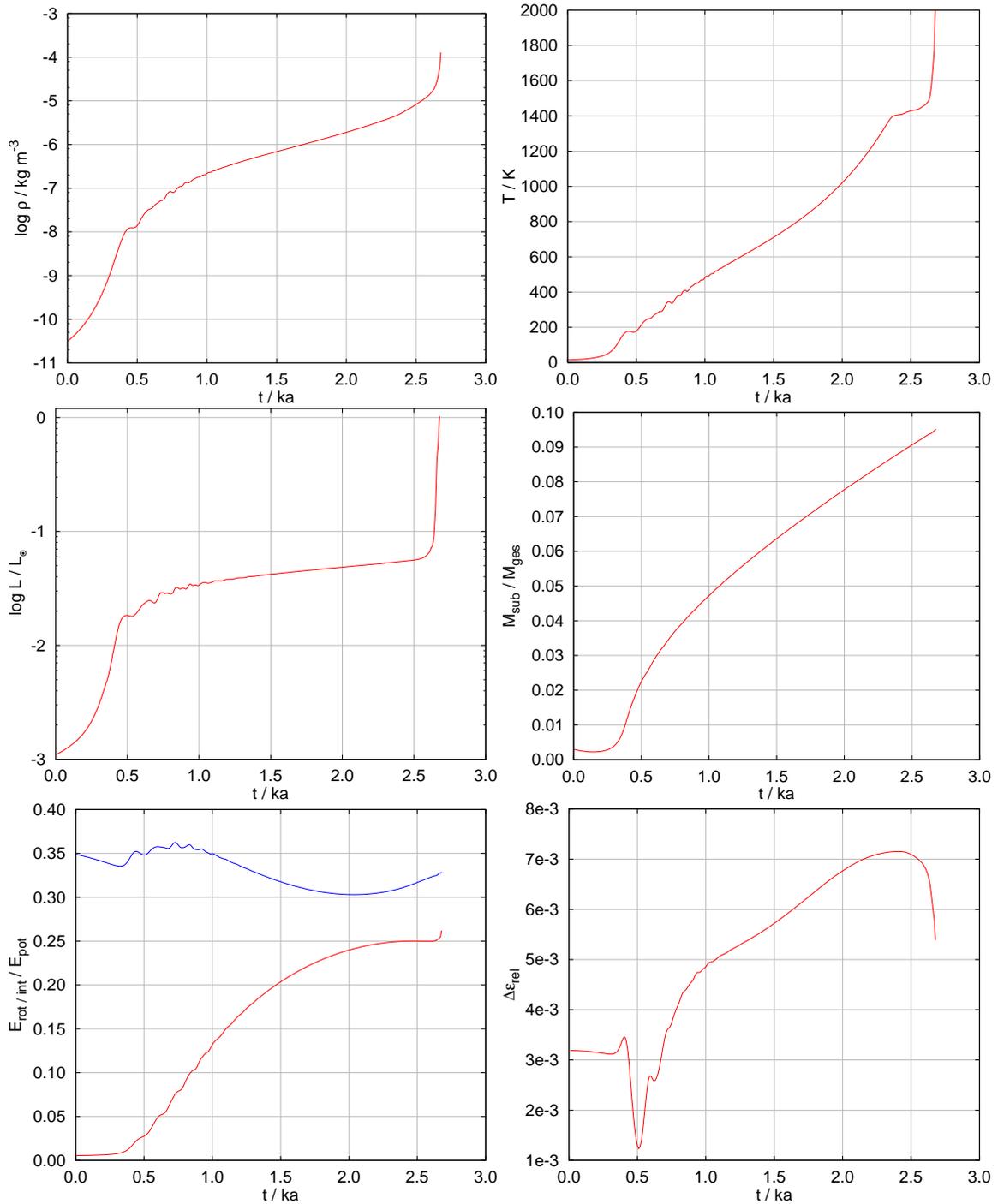
**Abbildung 4.22:** Entwicklungssequenz im meridionalen Schnitt für die Rechnung mit  $\beta=10^{-3}$ . Überblick zur Phase 1, mit der Bildung des ersten Kerns und dem Beginn der zentralen Staubverdampfung. Linke Seite: Massendichte. Rechte Seite: Temperatur. Man beachte die Anpassung der Farbskala an die Wertebereiche.

#### 4 Ergebnisse und Diskussion

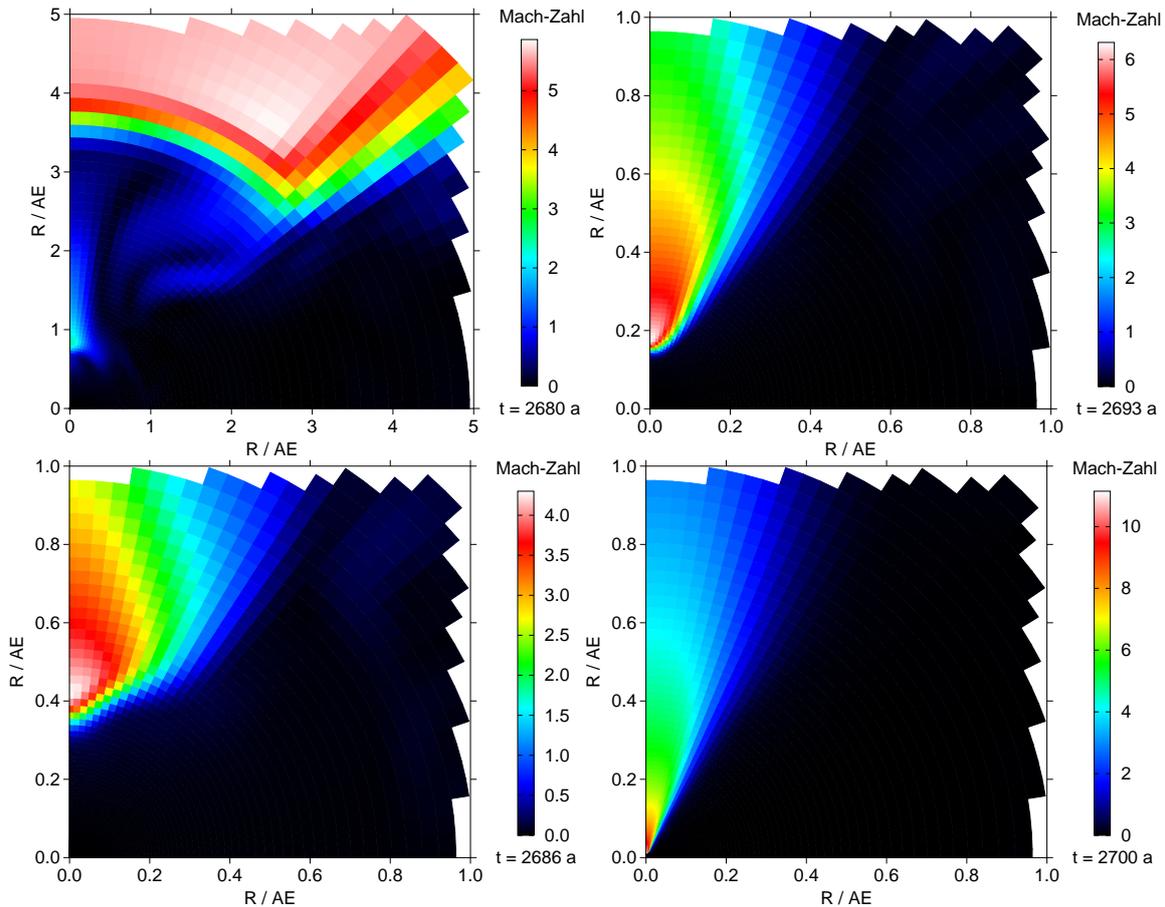


**Abbildung 4.23:** Die Entwicklung der zentralen Staubverdampfung zum Ende der Phase 1 für die Rechnung mit  $\beta = 10^{-3}$ . Gezeigt ist der Absorptionskoeffizient.

Die detaillierte Entwicklung der staubfreien Zone in Phase 1 ist in Abb. 4.23 mit Hilfe des Absorptionskoeffizienten dargestellt. Zunächst stellt der Übergang vom staubfreien zum staubigen Bereich einen nahezu glatten Rand dar (Abb. 4.23 links oben). Erreicht der lokale Temperaturgradient auf dem Rand einen kritischen Wert (was offensichtlich am Pol zuerst geschieht), wird die Schichtung dynamisch instabil und es kommt zu Konvektionsbewegungen. Die Oberflächenschichten des ersten Kerns dehnen sich nun rasch aus. Zum Ende der Phase 1 dringen einzelne, optisch dünne Konvektionszonen zur Kernoberfläche vor, es kommt direkt am Pol zum „Durchbruch“ der Staubverdampfung und Strahlung kann nun effektiv in den polnahen Regionen abgegeben werden (Abb. 4.23 rechts unten). In Abb. 4.24 oben sind die Maximalwerte der Dichte und der Temperatur zu sehen. Diese steigen wie erwartet schneller an als in der vorherigen Rechnung. Sowohl Leuchtkraft und subsonische Masse (Abb. 4.24 Mitte) als auch der Gesamtenergiefehler (Abb. 4.24 unten rechts) zeigen in dieser Phase keine prinzipiell neuen Verläufe, verglichen mit der vorherigen Rechnung. Zu erwähnen bleibt, daß für  $\beta = 10^{-3}$  erstmals  $\Xi_{\text{int}} > \Xi_{\text{rot}}$  für alle Zeiten gilt (Abb. 4.24 unten links), eine direkte Folge des effektiveren Drehimpulstransportes.



**Abbildung 4.24:** Zeitverläufe in Phase 1 der Rechnung für  $\beta=10^{-3}$ . Die oberen Bilder zeigen den maximalen (in diesem Fall identisch mit dem zentralen) Wert der Massendichte und der Temperatur. In der Mitte sind die Gesamtleuchtkraft sowie die subsonische Masse relativ zur Gesamtmasse dargestellt. Unten links ist der Betrag der Verhältnisse von Rotationsenergie zu potentieller Energie (rot), bzw. innerer Energie zu potentieller Energie (blau) zu sehen, unten rechtes der relative Gesamtenergiefehler (siehe §4.3.2).

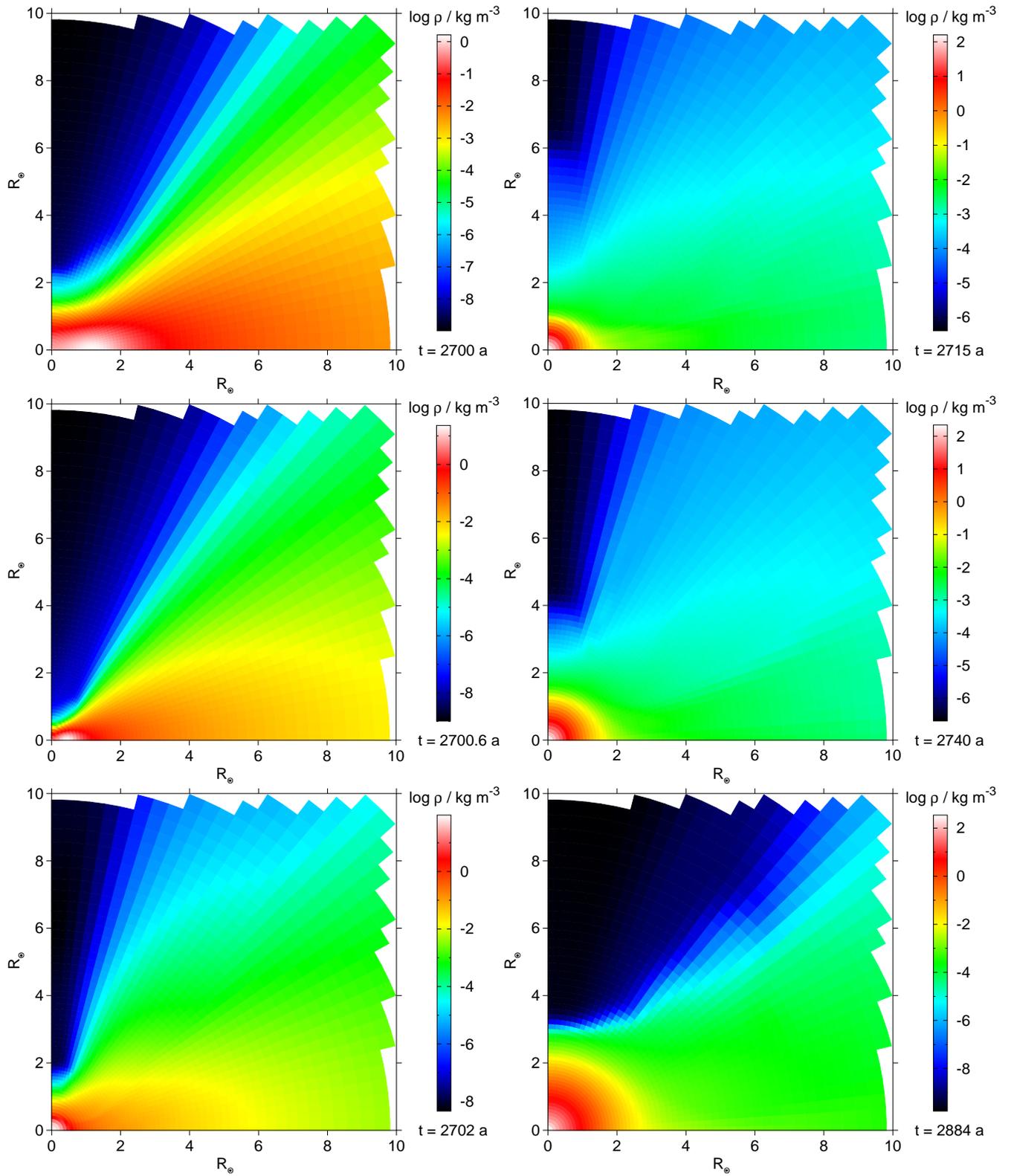


**Abbildung 4.25:** Die „kriechende“ Akkretionsfront zu Beginn der Phase 2 der Rechnung mit  $\beta = 10^{-3}$ , welche zur Bildung des zweiten Kerns führt. Gezeigt ist jeweils die Mach-Zahl. Man beachte den größeren räumlichen Ausschnitt von 5 AE (oben links) im Vergleich zu den anderen Bildern (1 AE), sowie die Anpassung der Farbskala an den Wertebereich.

#### 4.7.2 Phase 2

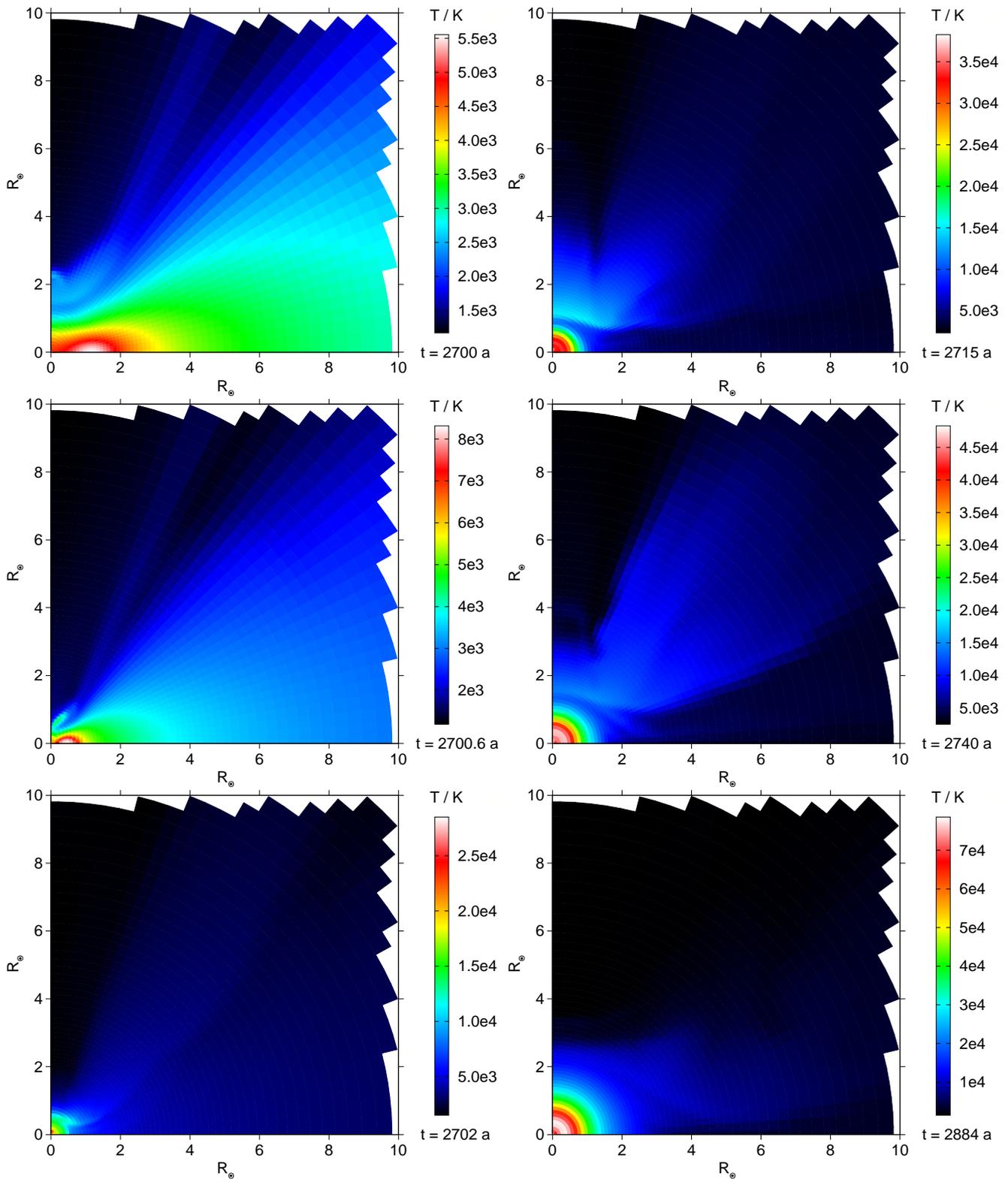
Mit der einsetzenden Wasserstoffdissoziation beginnt ein für diese Parameterstudie einmaliger Prozess, welcher in Abb. 4.25 dargestellt ist: Bei 2680 a bildet sich am Pol eine einwärts gerichtete Überschallströmung mit einer Akkretionsfront bei  $R \approx 0.7$  AE. Diese Akkretionsfront bewegt sich nun innerhalb der nächsten 20 a (also definitiv nicht auf dynamischer Zeitskala<sup>4</sup>) in gewissem Sinne „kriechend“ ins Zentrum. Die Geschwindigkeit der Überschallströmung nimmt dabei kontinuierlich zu (siehe Abb. 4.25). Wir haben es hier augenscheinlich mit einer säkularen Instabilität zu tun, die wohl auf thermischer Zeitskala abläuft, wenngleich die Abschätzung dieser Skala nicht direkt möglich ist. Die viskose Zeitskala  $1/(\beta\omega)$  liegt jedoch bei ca. 180 a und ist somit deutlich länger als 20 a. Erst einige Sonnenradien vor dem Zentrum wird der Prozess bei 2700 a gestoppt durch den Widerstand des dissoziierten Materials und die Bildung eines neuen, kompakten Objektes.

<sup>4</sup>Durch die Geometrie liegt der kritische Adiabatenexponent weit unter  $4/3$ , es kommt nicht zum Kollaps.



**Abbildung 4.26:** Entwicklungssequenz der Massendichte in Phase 2 für die Rechnung mit  $\beta=10^{-3}$ . Gezeigt ist die Entstehung des Protosterns. Man beachte die räumliche Skala (in Sonnenradien) und die Anpassung der Farbskala an den Dichtebereich.

#### 4 Ergebnisse und Diskussion



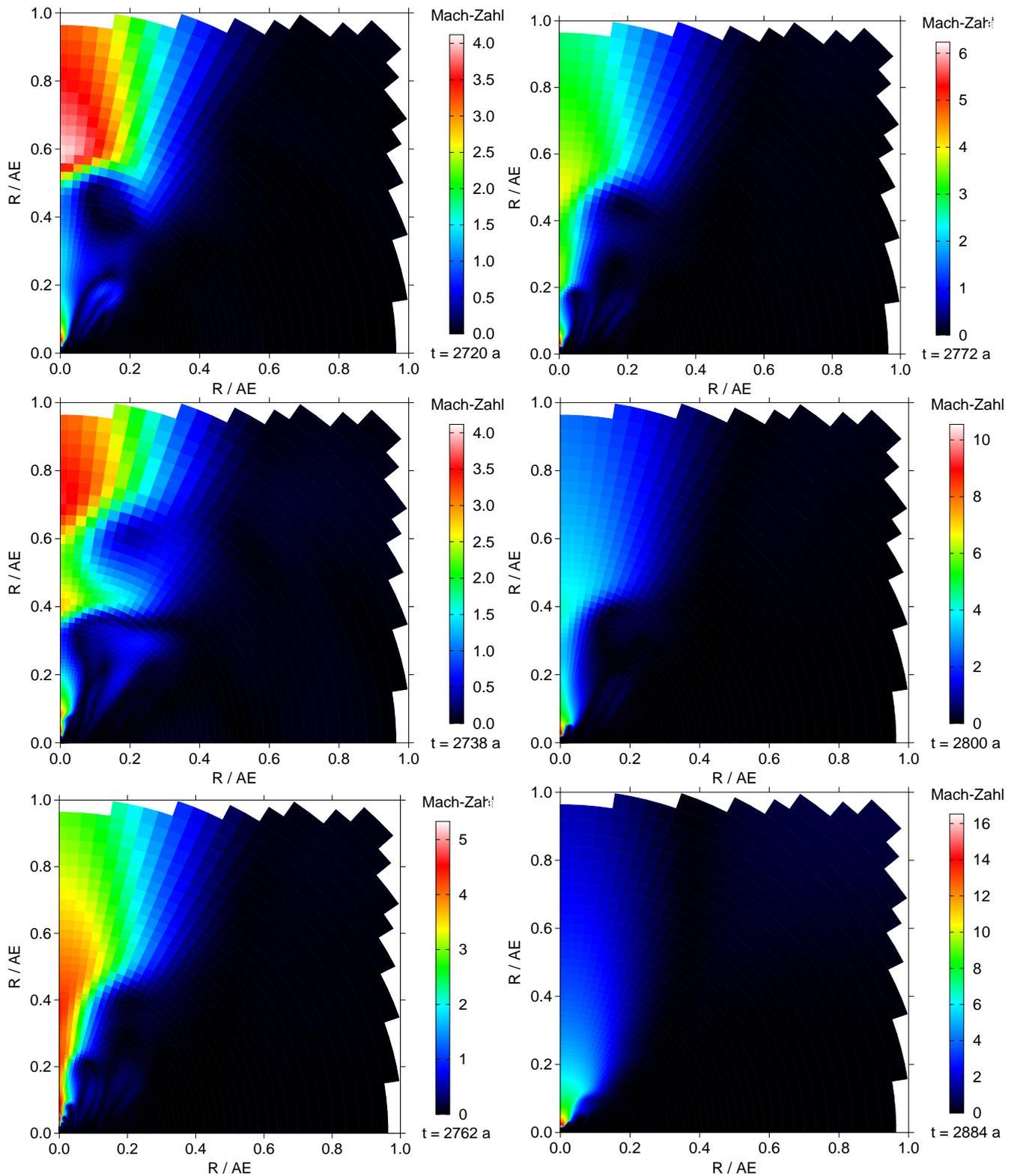
**Abbildung 4.27:** Entwicklungssequenz der Massendichte in Phase 2 für die Rechnung mit  $\beta = 10^{-3}$ . Gezeigt ist die Entstehung des Protosterns. Man beachte die räumliche Skala (in Sonnenradien) und die Anpassung der Farbskala an den Temperaturbereich.

### Die Entstehung des Protosterns

Die Abb. 4.26 und 4.27 zeigen in Form von Dichte- und Temperaturverteilungen die Bildung des Protosterns ab dem Moment wo die soeben beschriebene, kriechende Akkretionsfront das Zentrum erreicht. Interessanterweise hat die Form der Dichteverteilung bei 2700 a (4.26 oben links) eine gewisse Ähnlichkeit mit der der Rechnung für  $\beta=10^{-4}$  kurz vor der dynamischen Ringbildung bei 7730 a (Abb. 4.18 oben links), jedoch haben wir es nun mit einer viel kleineren räumlichen Skala (um einen Faktor 20) zu tun und die Dichten liegen um knapp 3 Größenordnungen höher. Es kommt nicht zu einer Ringbildung wie in der vorherigen Rechnung. Die Verdichtung, welche sich bei etwa  $1 R_{\odot}$  außerhalb des Zentrums am Äquator gebildet hat, bewegt sich innerhalb von 2 a zurück ins Zentrum (Abb. 4.26 Mitte links und unten links). Auch in der Temperaturverteilung wird dieser Prozess sehr deutlich (Abb. 4.27 Mitte links und unten links).

Ab diesem Zeitpunkt (2702 a) erfolgt die Hauptakkretion von Material in einem äußerst schmalen, trichterförmigen Bereich um die Drehachse (Abb. 4.26 oben rechts und Mitte rechts). Weiterhin wird durch den Drehimpulstransport am Äquator auf viskoser Zeitskala Masse ins Zentrum befördert. Dies ist gut zu erkennen an den kühlen Bereichen entlang des Äquators (Abb. 4.27 oben rechts und Mitte rechts). Insgesamt sind die ersten 170 a nach der Bildung des Protosterns geprägt von vielfältigen, turbulenten Konvektionsströmungen oberhalb des Zentralobjektes, was sich durch die stark variierenden Temperaturverteilungen in diesen Bereichen bemerkbar macht. Erst etwa 180 a nach der Bildung des Protosterns, bei ca. 2880 a beruhigt sich das Geschehen und eine mehr und mehr stationäre Konfiguration stellt sich ein. Die Akkretionsfront ist nun nicht mehr so eng um die Drehachse konzentriert, die Dichte des einfallenden Materials ist stark gesunken (Abb. 4.26 unten rechts). Auch die Temperaturverteilung stellt sich jetzt weitaus geordneter dar (Abb. 4.27 unten rechts). Der Grund für diese allgemeine Beruhigung liegt in der Abnahme der Akkretionsrate, wobei diese Abnahme wiederum aus der Entwicklung der äußeren Bereiche der Simulation resultiert (siehe unten).

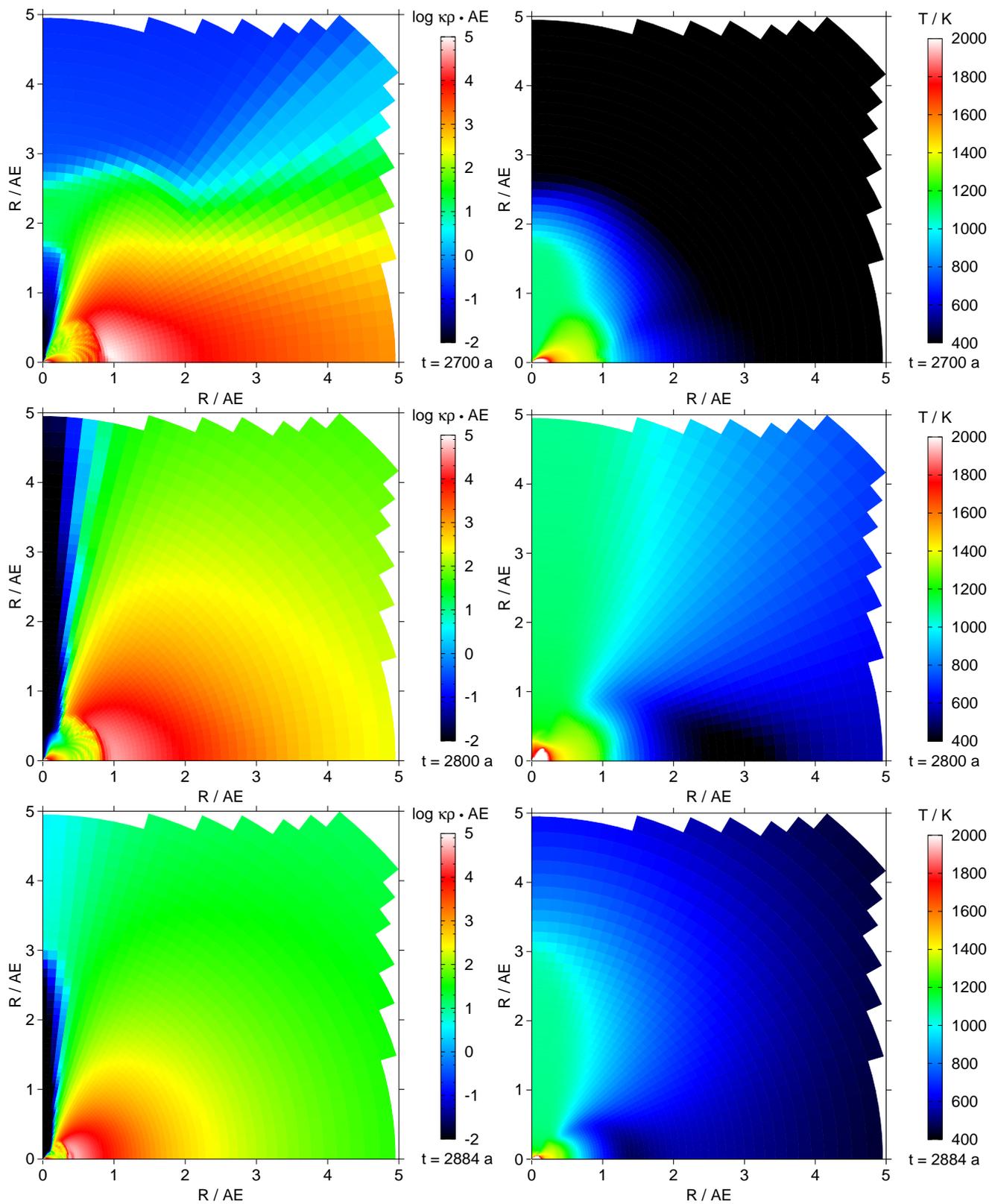
#### 4 Ergebnisse und Diskussion



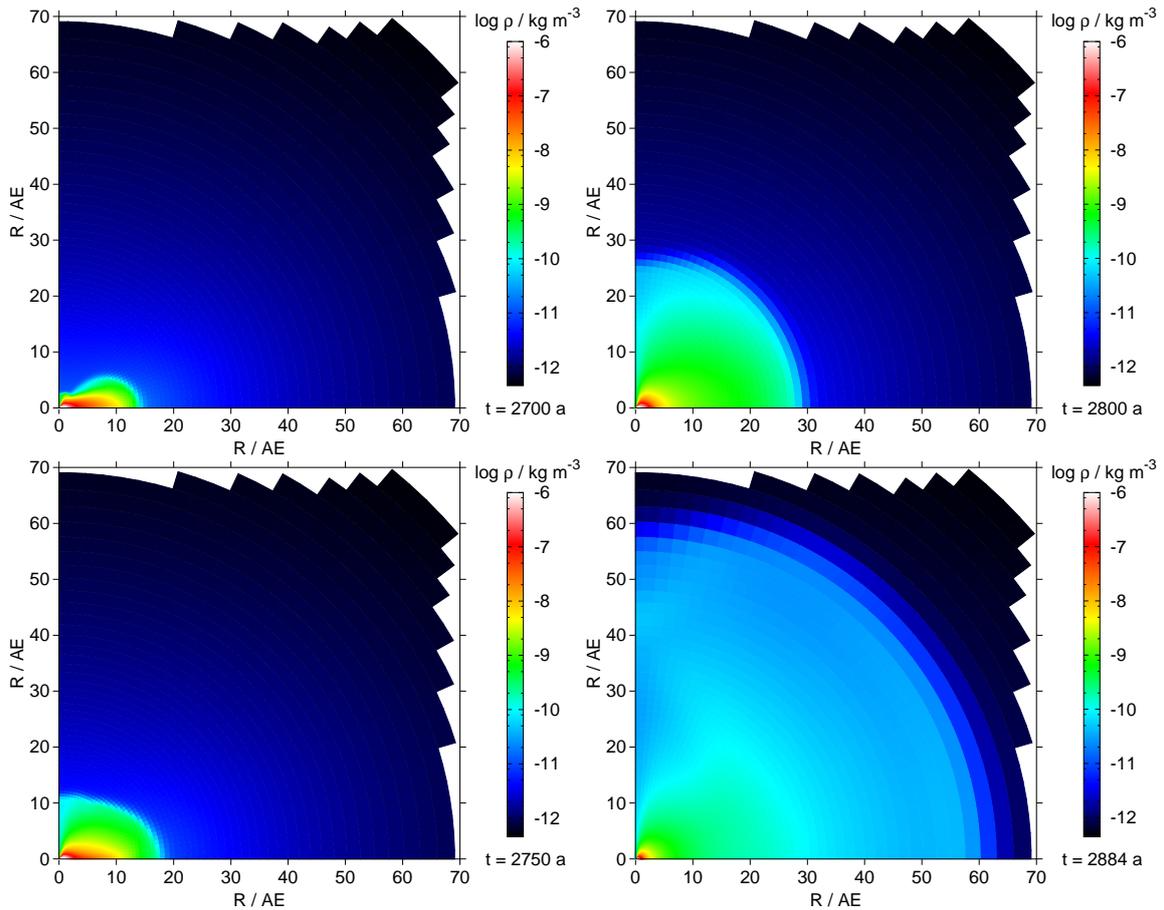
**Abbildung 4.28:** Einige Beispiele für die vielfältigen Strömungsmuster im Akkretions-trichter während der Phase 2. Gezeigt ist jeweils die Mach-Zahl.

### Die Vielfalt der instationären Akkretionsströmungen

Wie schon im letzten Abschnitt angedeutet, stellen die ersten 170 a nach der Entstehung des kompakten Zentralobjektes eine sehr turbulente Phase im Bereich der polaren Akkretionsströmung dar. Zur Verdeutlichung dessen ist in Abb. 4.28 mit Hilfe der Mach-Zahl der Verlauf dieser Phase anhand einiger beispielhafter Strömungsmuster veranschaulicht. Man sieht ein höchst instationäres System bestehend aus unzähligen Konvektionsströmungen, deren Gestalt sich ständig verändert. Teilweise sind über dem Zentrum entlang der Drehachse bis zu drei Zonen mit Überschallströmungen zu sehen, unterbrochen von Bereichen im Unterschall. Das Entstehen und die Interaktion dieser einzelnen Zonen basiert auf einem einfachen Mechanismus: Gehen wir von der Stoßfront direkt oberhalb des Protosterns aus und nehmen an, daß die Akkretion so stark ist, daß der durch die entsprechende Erwärmung hervorgerufene Druck die einfallende Materie in einer bestimmten Höhe zum Halt bringt. Es bildet sich dann in dieser Höhe eine neue Stoßfront. Dieser Prozess kann jetzt „stockwerkartig“ nach oben weiter fortgesetzt werden und zur Bildung von weiteren Stoßfronten führen, jedoch lösen sich die unteren Akkretionsfronten mit der Zeit auf, da kein neues Material nachströmt. Die Konstruktion stürzt also regelmäßig in sich zusammen und baut sich erneut auf. Dies führt zwangsläufig zu einer chaotischen Entwicklung des Strömungsbildes. Die einzelnen „Stockwerke“ haben aufgrund ihrer Lage und ihres Wärmehaushaltes unterschiedliche Existenzzeiten, wodurch die Bildung und Vernichtung der einzelnen Zonen in typischen Oszillationen mit verschiedenen Frequenzen z.B. im Verlauf der Leuchtkraft wieder zu finden ist (siehe unten). Wie erwähnt beruhigt sich dann nach ca. 180 a dieses Spektakel wegen der abnehmenden Akkretionsrate, und wir erhalten nur noch eine Stoßfront direkt über dem Protostern (Abb. 4.28 unten rechts).



**Abbildung 4.29:** Die Entwicklung des Absorptionskoeffizienten (links) und der Temperatur (rechts) für die zentralen Bereiche des ersten Kerns in der Phase 2 für die Rechnung mit  $\beta = 10^{-3}$ . Teile der Scheibenstruktur bleiben erhalten.

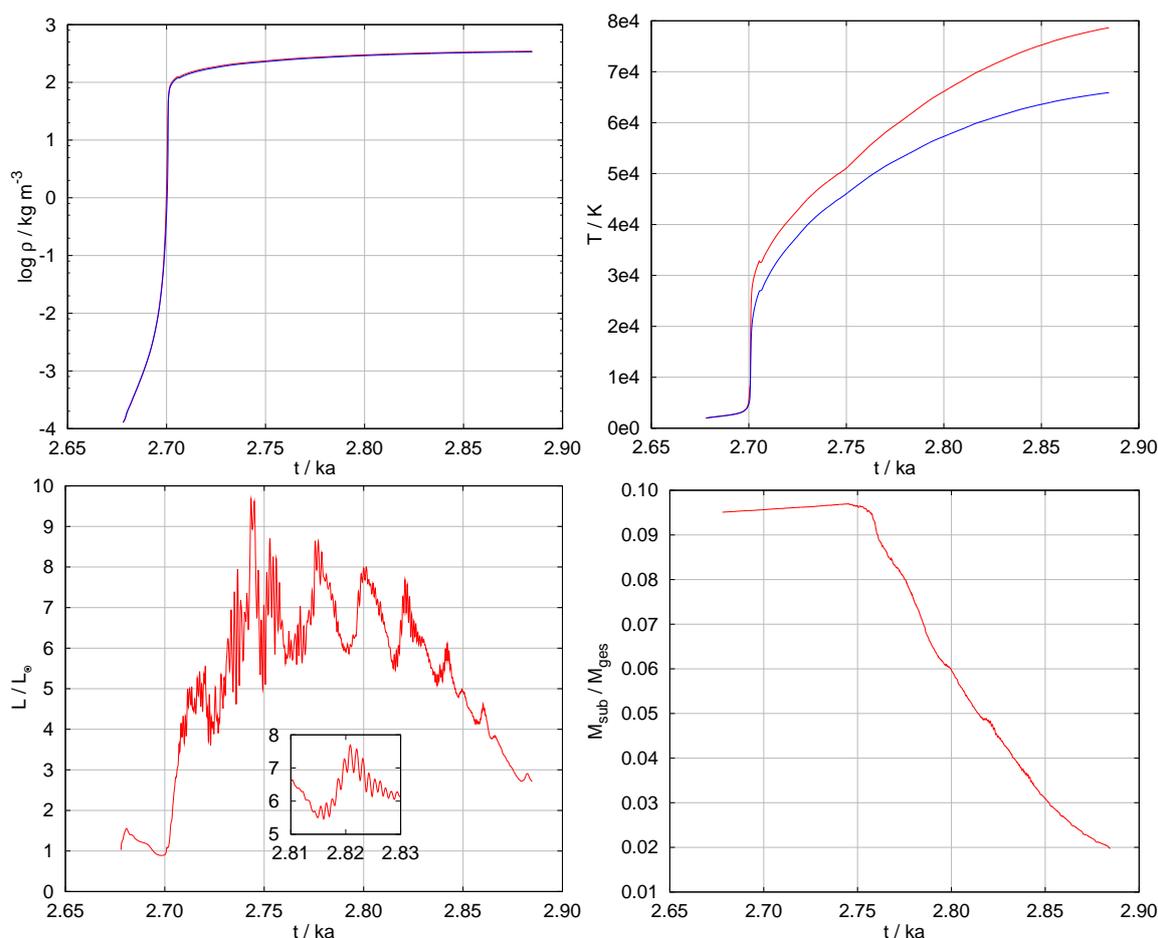


**Abbildung 4.30:** Die globale Entwicklung der Massendichte in der Phase 2. Gezeigt ist die Aufblähung und Verdünnung der äußeren Teile des ersten Kerns durch das Zentralobjekt.

### Die Entwicklung des ersten Kerns

Abb. 4.29 zeigt den Absorptionskoeffizienten und die Temperatur der inneren Bereiche des ersten Kerns unter dem Einfluß des Protosterns. Auch in einer sehr aktiven Phase des Zentralobjekts (bei 2800 a) schirmen die optisch dichtesten Bereiche der Scheibe bei etwa 1 AE die weiter außen liegenden Zonen von der Wärmewirkung des Protosterns ab. Trotzdem kommt es natürlich zu einer Erwärmung der Gesamtregion und einer Verdünnung der Scheibe durch Expansion. Der Hauptteil der Wärme wird jedoch entlang des optisch dünnen Kanals an der Drehachse abgeführt. Teile der inneren Scheibenstruktur bleiben die gesamte Phase lang erhalten. Die Expansion der äußeren Teile des ersten Kerns ist in Abb. 4.30 zu sehen. Zum Ende der Rechnung haben sich die äußeren Schichten bis auf 70 AE ausgedehnt. Die Verdünnung der Materie betrifft natürlich auch die Bereiche nahe der Drehachse, von denen Material direkt auf den Protostern akkretiert. Eben diese Verdünnung und die resultierende Abnahme der Akkretionsrate sorgt für die erwähnte Beruhigung der Akkretionszone direkt oberhalb des Zentralobjektes.

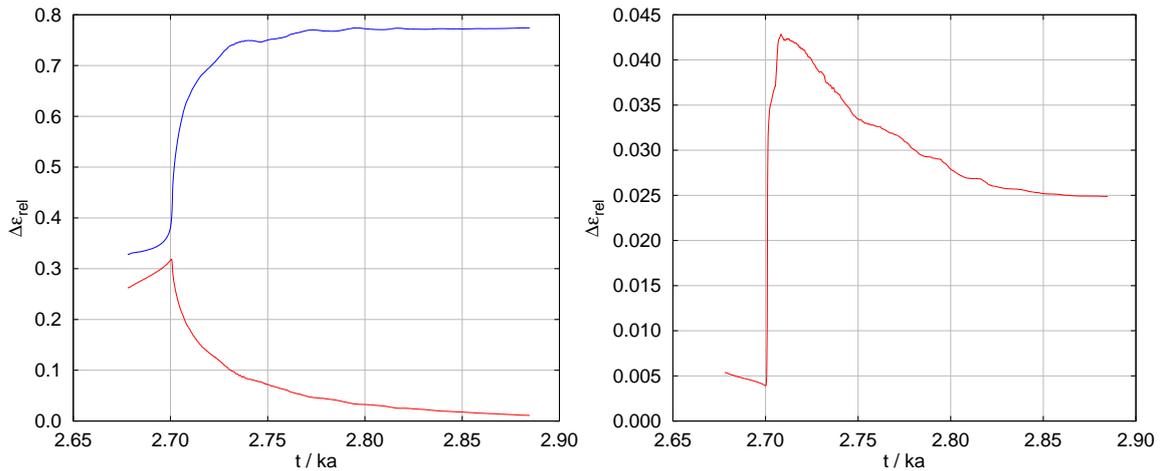
## 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.31:** Zeitverläufe in Phase 2 der Rechnung für  $\beta = 10^{-3}$ . Die oberen Bilder zeigen jeweils den maximalen (rot) und zentralen (blau) Wert der Massendichte und der Temperatur. Links unten ist die Gesamtleuchtkraft dargestellt, rechts unten die subsonische Masse relativ zur Gesamtmasse.

### Überblick zu den zeitlichen Verläufen

Die säkulare Instabilität zwischen 2.68 und 2.7 ka zu Beginn der Phase 2 schlägt sich deutlich in den zeitlichen Verläufen der Maximal- und Zentralwerte von Dichte und Temperatur nieder (Abb. 4.31 oben). Die Veränderungen in Dichte und Temperatur verlaufen nämlich während der Instabilität auf thermischer Zeitskala, erst bei der Bildung des Protosterns bei genau 2.7 ka gehen die Vorgänge auf dynamischer Zeitskala vonstatten. Daß die Zentraltemperatur im weiteren Verlauf deutlich unter der Maximaltemperatur liegt (auch schon in Abb. 4.27 zu erkennen), hängt damit zusammen, daß die stärkste Heizung aus den äußeren Schichten des Protosterns im Bereich der Akkretionsfront erfolgt, die zentralen Zonen des Sterns jedoch so optisch dick sind, daß die Zentraltemperatur sich erst auf der extrem langen lokalen thermischen Zeitskala ( $> 10^7$  a) anpaßt und somit immer hinter der Maximaltemperatur „zurückbleibt“.



**Abbildung 4.32:** Zeitverläufe in Phase 2 der Rechnung für  $\beta = 10^{-3}$ . Linkes Bild: Der Betrag der Verhältnisse von Rotationsenergie zu potentieller Energie (rot), bzw. innerer Energie zu potentieller Energie (blau). Rechtes Bild: Der relative Gesamtenergiefehler (siehe §4.3.2).

In der Leuchtkraft (Abb. 4.31 unten links) stellt sich die säkulare Instabilität sogar als abnehmender Verlauf dar. Die durch Kompression entstehende Wärme dient direkt der Dissoziation von Wasserstoff. Nach der Bildung des Protosterns beginnt die äußerst aktive Phase der instationären Akkretionsströmungen, wodurch eine Vielzahl sich überlagernder Oszillationen durch die verschiedenen Akkretionszonen entsteht (siehe Diskussion zu Abb. 4.28). Die kürzesten Periodendauern betragen etwa 1 a (siehe vergrößerter Ausschnitt) und sind der innersten Akkretionszone direkt über dem Protostern zuzuordnen. Zum Ende der Rechnung ist eindeutig eine Beruhigung zu beobachten.

Die subsonische Masse zeigt ab etwa 2.75 ka ein fallendes Verhalten, da die expandierenden Teile des äußeren, ersten Kerns ab hier beginnen sich mit Überschall auswärts zu bewegen. Große Teile des ehemals quasistatischen<sup>5</sup> Kerns geraten in Bewegung, sodaß am Ende der Rechnung nur noch 2 % der Masse subsonisch sind. Die Tendenz zur Beendigung des Auswurfes ist zu erkennen.

In Abb. 4.32 sind die energetischen Verhältnisse zu sehen. Die Bildung des Protosterns sorgt für einen raschen Anstieg von  $\Xi_{\text{int}}$ , welches sich mit der Zeit bei 0.77 stabilisiert.  $\Xi_{\text{rot}}$  erreicht während des Kollapses kurzzeitig einen Wert von 0.32, sinkt dann aber kontinuierlich wegen des Transportes von Drehimpuls aus dem Zentrum.

Der Verlauf des relativen Gesamtenergiefehlers (Abb. 4.32 rechts) verdeutlicht, daß auch die Entstehung eines kompakten Objektes im Zentrum des Gitters an die technischen Grenzen der Möglichkeiten unseres Verfahrens geht. Wie z.B. in Abb. 4.27 zu sehen, ist die räumliche Auflösung der zentralsten Bereiche das Mindeste, was für die Verfolgung

<sup>5</sup>abgesehen von der Rotationsbewegung

eines solch extremen Prozesses wie der Bildung des Protosterns nötig ist. Der maximale Fehler von unter 5 % erscheint uns aber insgesamt akzeptabel.

Das die Ergebnisse dieser Rechnung hier nur für einen Zeitraum von knapp 200 a nach dem Entstehen des Zentralobjektes dargelegt werden können, liegt einfach daran, daß die Simulation zur Zeit der Verfassung dieser Arbeit noch läuft, aktuellere Daten also noch nicht zur Verfügung stehen.

### 4.8 Simulation für $\beta = 10^{-2}$

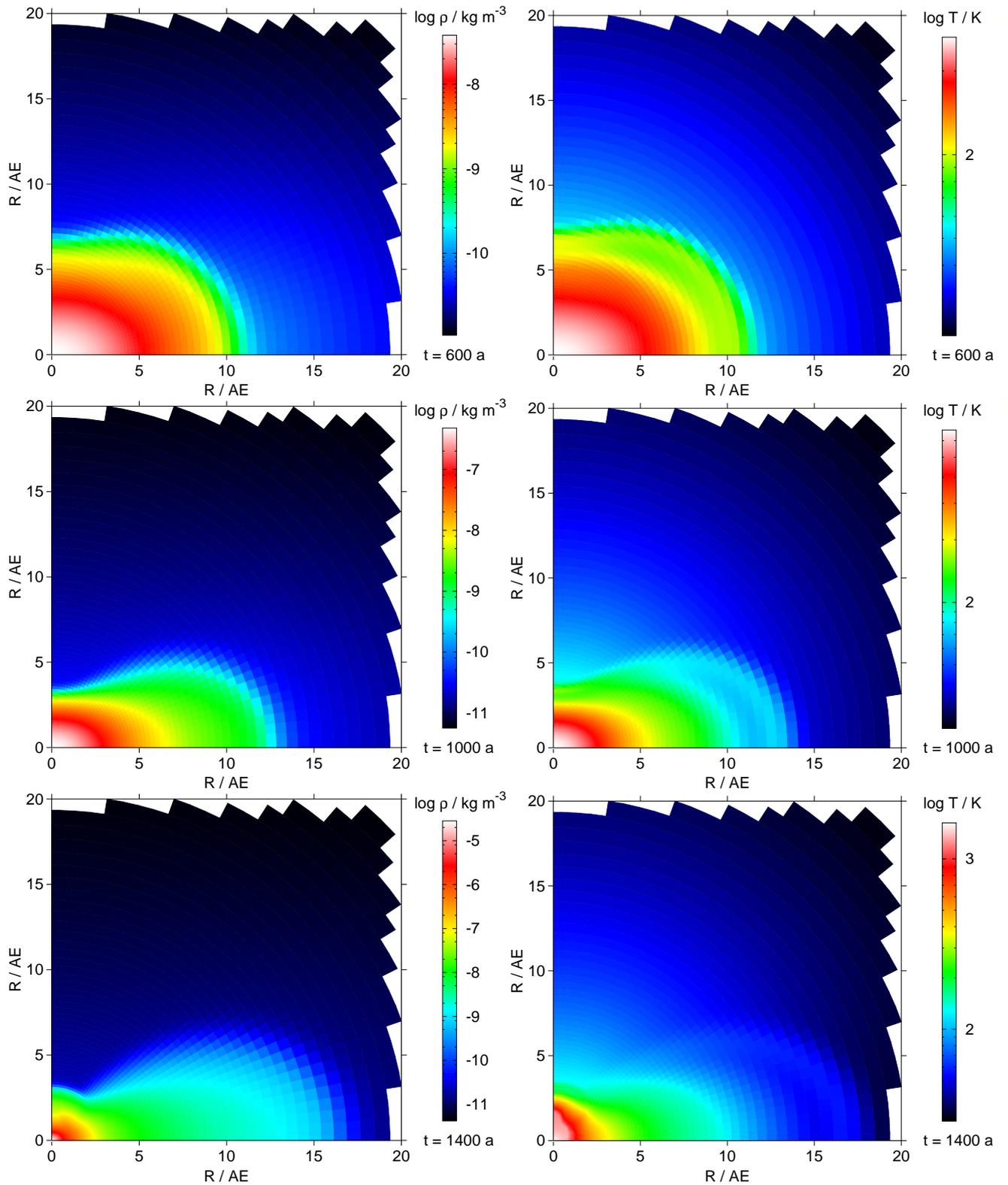
Die letzte Rechnung mit der größten turbulenten Viskosität dieser Parameterstudie zeigt wiederum eine andere qualitative Entwicklung als alle vorherigen Simulationen. Die Phase 1 ist wegen des zügigeren Aufheizens des ersten Kerns noch einmal verkürzt auf nur 1.4 ka. Die Phase 2 läßt sich in dieser Rechnung zeitlich weiter unterteilen, weshalb wir einen eigenen Abschnitt für die Langzeitentwicklung (§4.8.3) eingefügt haben.

#### 4.8.1 Phase 1

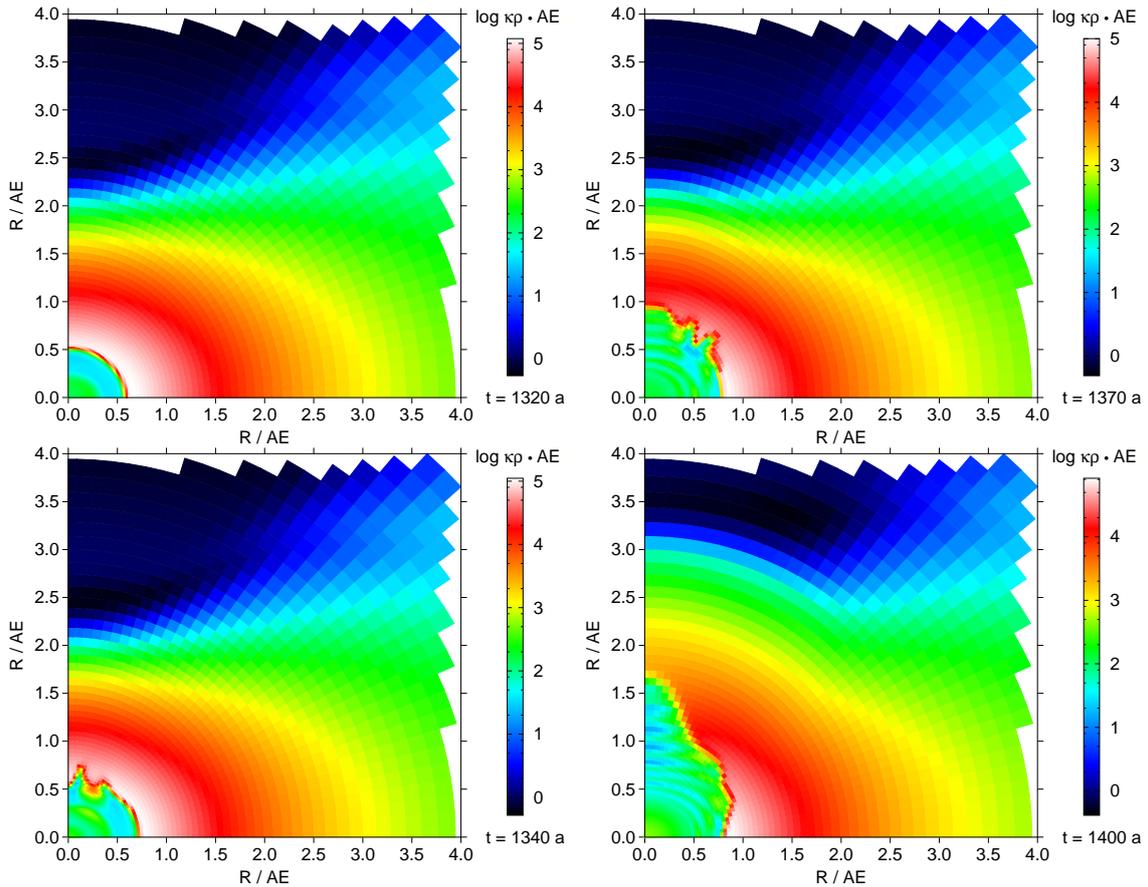
##### Entwicklung der Massendichte und der Temperaturverteilung

Die Abb. 4.33 zeigt den zeitlichen Verlauf von Massendichte und Temperatur bis zum Ende der Phase 1. Ein genauer Vergleich der Struktur des ersten Kerns nach 1 ka (Mitte links der Abb. 4.33) mit z.B. dem gleichen Zeitpunkt in der Rechnung für  $\beta = 10^{-4}$  (Abb. 4.14 links oben) zeigt, daß die zentralen Bereiche nun sphärischer geworden sind, sich die maximale Ausdehnung des Objekts am Äquator jedoch von ca. 11 auf 13.5 AE vergrößert hat. Dies ist verständlich, denn der viskose Drehimpulstransport findet praktisch nur innerhalb des Kerns statt. Der Drehimpuls wird aus den inneren in die äußeren Bereiche (fern der Drehachse) des Objekts transportiert, aber nicht darüber hinaus.

Eine Differenzierung von maximaler und zentraler Dichte bzw. Temperatur findet natürlich auch hier (wie schon in der Rechnung mit  $\beta = 10^{-3}$ ) nicht mehr statt, die Zentralwerte sind gleichermaßen die Maximalwerte. Die im Vergleich zu allen vorherigen Rechnungen kompaktesten (der Kugelform am nächsten kommenden) Zentralbereiche sorgen für einen rasanten Anstieg der Zentraltemperatur, sodaß die Staubverdampfung schon nach etwa 1.28 ka beginnt. Die aus der internen Restrukturierung während der Staubverdampfung folgende Aufblähung der Oberflächenschichten in der Polregion ist in der Dichteverteilung (Abb. 4.33 links unten) zu erkennen. Die zentrale Temperaturverteilung erhält dadurch eine leicht konische Form (Abb. 4.33 rechts unten)



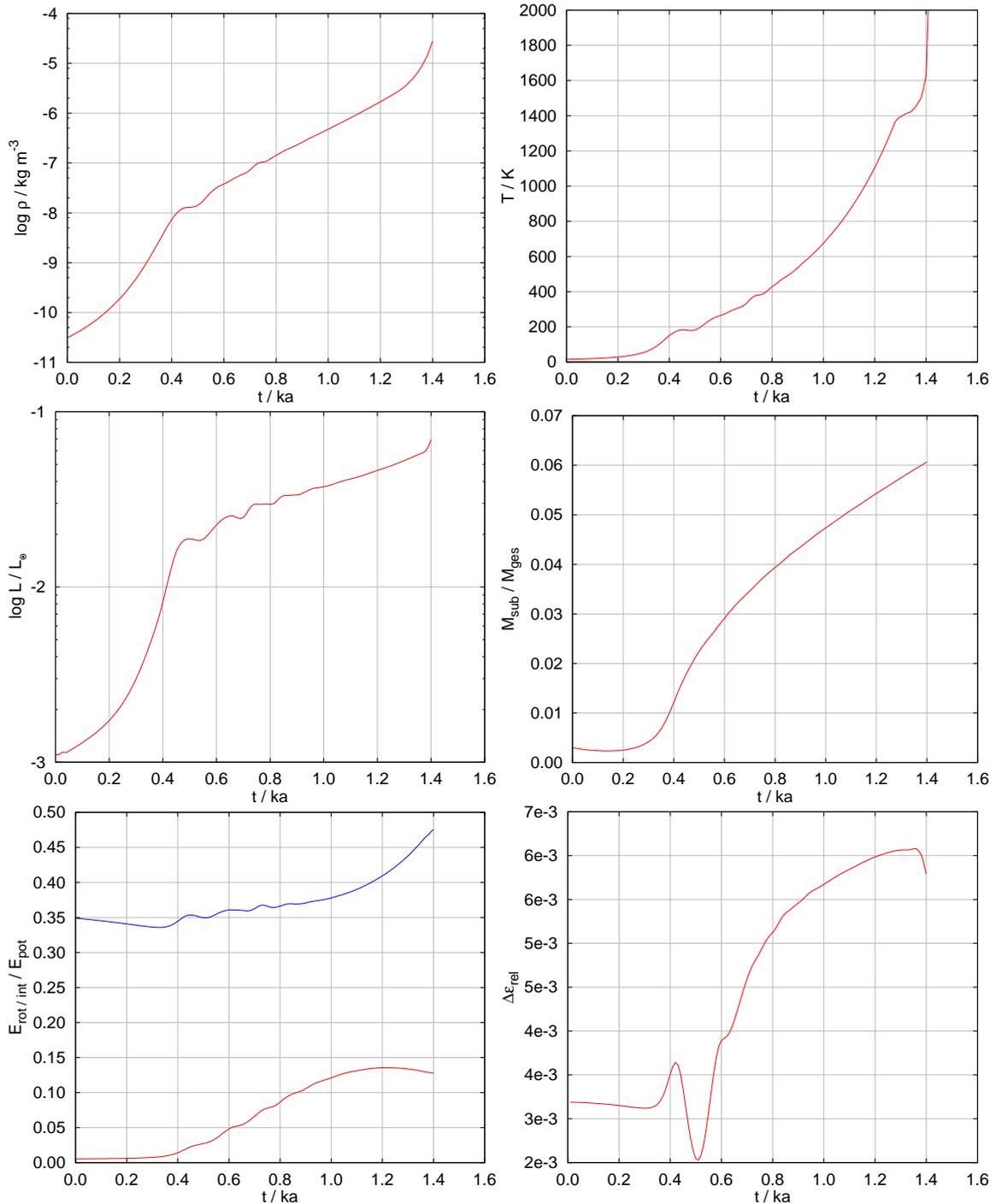
**Abbildung 4.33:** Entwicklungssequenz im meridionalen Schnitt für die Rechnung mit  $\beta=10^{-2}$ . Überblick zur Phase 1, mit der Bildung des ersten Kerns und dem Beginn der zentralen Staubverdampfung. Linke Seite: Massendichte. Rechte Seite: Temperatur. Man beachte die Anpassung der Farbskala an die Wertebereiche.



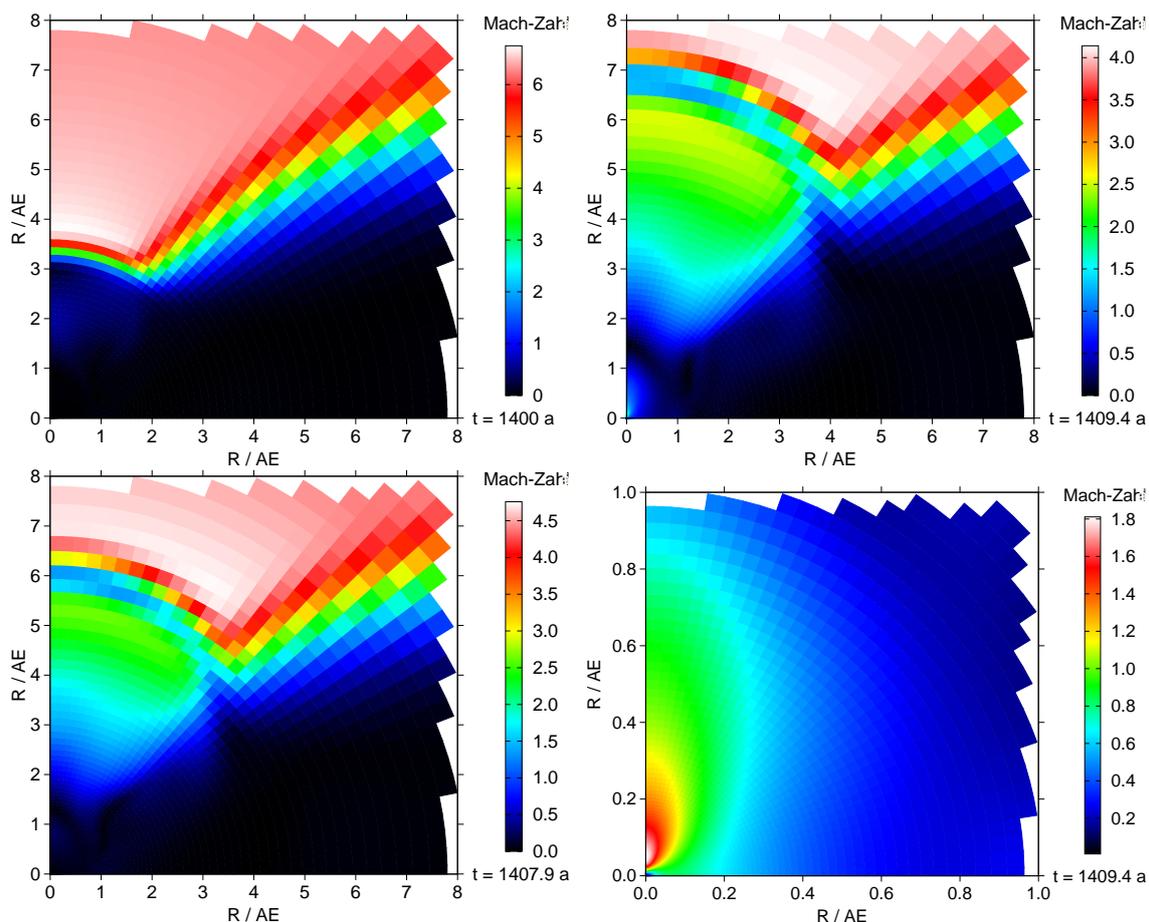
**Abbildung 4.34:** Die Entwicklung der zentralen Staubverdampfung zum Ende der Phase 1 für die Rechnung mit  $\beta=10^{-2}$ . Gezeigt ist der Absorptionskoeffizient.

Die Entwicklung der staubfreien Zone, dargestellt in Abb. 4.34, verläuft zunächst so wie schon in der Rechnung mit  $\beta=10^{-3}$  beschrieben. Allerdings wird aufgrund der viel rasanteren Zunahme der Temperatur der kritische Temperaturgradient und somit der Beginn der Konvektionsbewegungen viel schneller erreicht. Die staubfreie Zone breitet sich in Polrichtung am raschesten aus. Da jedoch im Gegensatz zur vorherigen Rechnung wegen des jetzt früheren Zeitpunktes der Staubverdampfung die Dicke des ersten Kerns (bzw. Höhe desselben über dem Äquator) noch bedeutend größer ist, dringen die Konvektionszonen nicht mehr bis zur Oberfläche vor, es kommt zu keinem „Durchbruch“ der optisch dünnen Zone mehr. Die über dem staubfreien Bereich liegenden Schichten werden daher stark aufgebläht (Abb. 4.34 rechts unten) und auch im weiteren Verlauf extrem beschleunigt.

Die Abb. 4.35 zeigt im oberen Teil die zeitlichen Verläufe der maximalen Dichte bzw. Temperatur, welche (wie schon erwähnt) auch in dieser Rechnung den zentralen Werten entsprechen. Die Zeit zwischen Staubverdampfung und beginnendem zweiten Kollaps ist (im Vergleich zur vorherigen Rechnung) nochmals verkürzt auf nur noch etwa 100 a. Leuchtkraft, subsonische Masse sowie die energetischen Verhältnisse (Abb. 4.35 Mitte und unten) stellen sich prinzipiell ähnlich dar wie in der vorherigen Rechnung.



**Abbildung 4.35:** Zeitverläufe in Phase 1 der Rechnung für  $\beta=10^{-2}$ . Die oberen Bilder zeigen den maximalen (in diesem Fall identisch mit dem zentralen) Wert der Massendichte und der Temperatur. In der Mitte sind die Gesamtleuchtkraft sowie die subsonische Masse relativ zur Gesamtmasse dargestellt. Unten links ist der Betrag der Verhältnisse von Rotationsenergie zu potentieller Energie (rot), bzw. innerer Energie zu potentieller Energie (blau) zu sehen, unten rechtes der relative Gesamtenergiefehler (siehe §4.3.2).

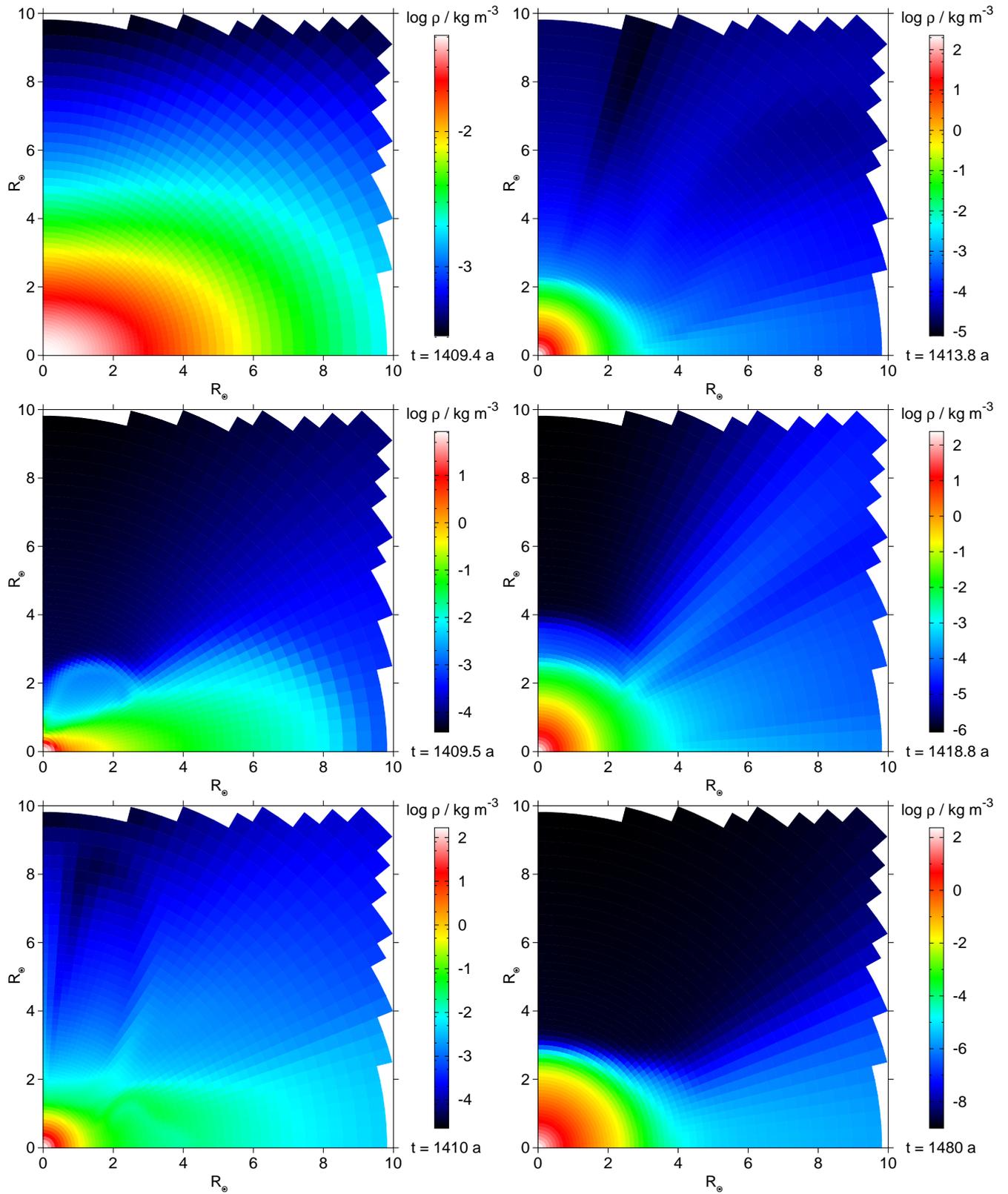


**Abbildung 4.36:** Links: Die dynamischen Auswirkungen der Staubverdampfung für zwei Zeitpunkte zu Beginn der Phase 2. Rechts: Der dynamische Zustand während dem Einsetzen des zweiten Kollapses in einem räumlichen Ausschnitt von 8 bzw. 1 AE. Gezeigt ist jeweils die Mach-Zahl.

#### 4.8.2 Phase 2

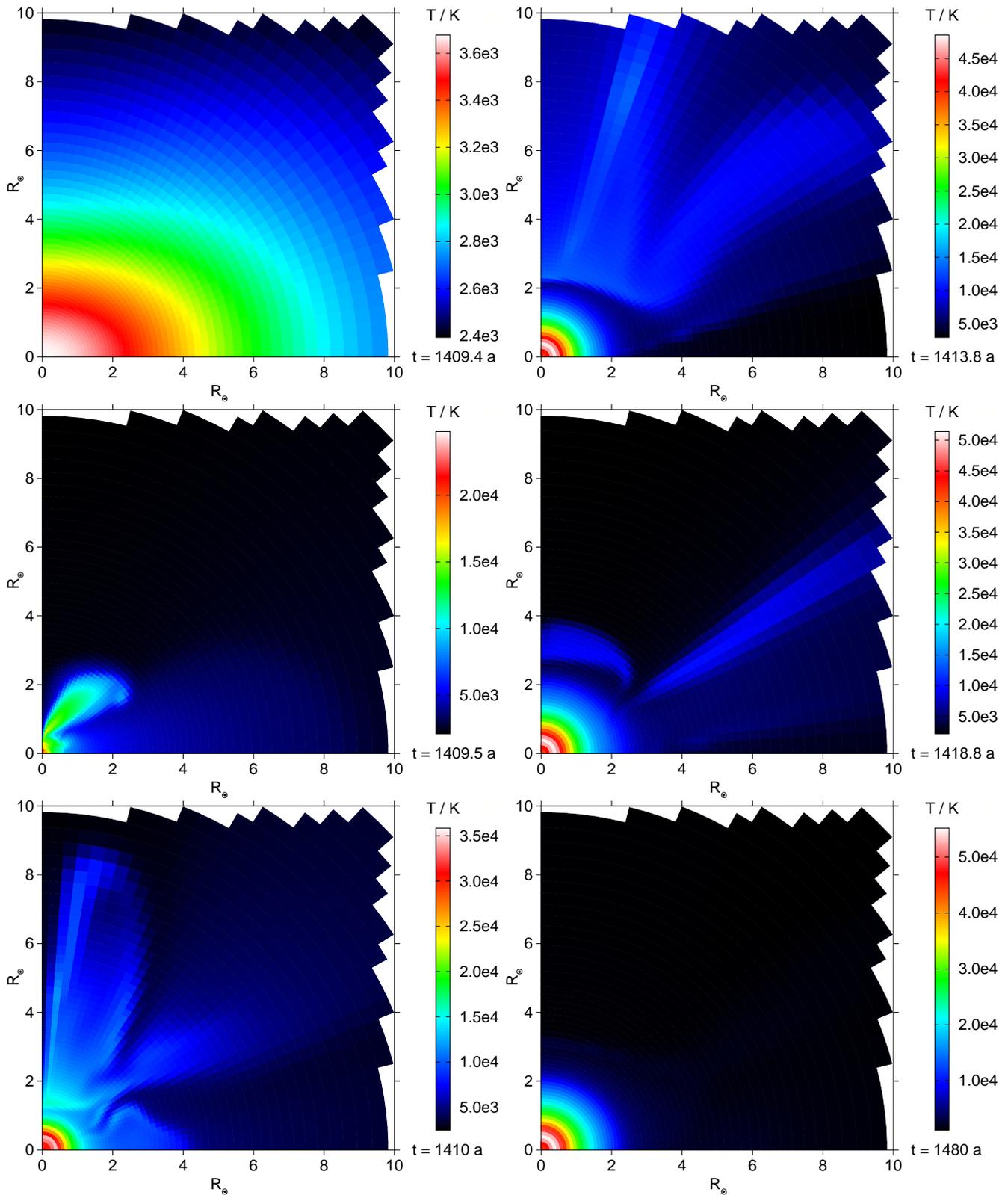
Die Phase 2 wird die ersten 9 a nach ihrem Beginn (bei 1.4 ka) noch einzig und allein bestimmt von den Auswirkungen der extrem schnellen Staubverdampfung. Da wie schon erwähnt in dieser Rechnung die staubfreien Zonen nicht an die Oberfläche vordringen können und somit diesmal kein „Abläßventil“ für die Wärme entsteht, entwickelt die Aufblähung der polaren Kernbereiche immer mehr den Charakter einer Explosion. Dies ist gut in Abb. 4.36 links zu erkennen, die Mach-Zahl der auswärts gerichteten Bewegung erreicht innerhalb kurzer Zeit Werte von etwa 2.5. Zeitlich überlagert wird die Auswärtsbewegung dann ab etwa 1409 a vom zweiten Kollaps, der ganz zentral, innerhalb von  $R < 1$  AE beginnt (Abb. 4.36 rechts).

Das Ergebnis des zweiten Kollapses ist ein protostellares Objekt, dessen Entstehung und die ersten 70 a seines Bestehens in den Abb. 4.37 und 4.38 in Form von Dichte- Temperaturverteilungen zu sehen sind.



**Abbildung 4.37:** Entwicklungssequenz der Massendichte in Phase 2 für die Rechnung mit  $\beta=10^{-2}$ . Gezeigt ist die Entstehung des Protosterns. Man beachte die räumliche Skala (in Sonnenradien) und die Anpassung der Farbskala an den Dichtebereich.

#### 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.38:** Entwicklungssequenz der Temperatur im meridionalen Schnitt in Phase 2 für die Rechnung mit  $\beta = 10^{-2}$ . Gezeigt ist die Entstehung des Protosterns. Man beachte die räumliche Skala (in Sonnenradien) und die Anpassung der Farbskala an den Temperaturbereich.

## Die Entstehung des Protosterns

Mit dynamischen Zeitskalen bis hinunter zu Stunden, stellt die Bildung des Protosterns das extremste Ereignis der gesamten Rechnung dar, die möglichen numerischen Zeitschritte verringern sich bis auf unter eine Minute. Innerhalb von wenigen Tagen steigt die zentrale Dichte um mehr als fünf Größenordnungen, die zentrale Temperatur um mehr als eine Größenordnung.

Zunächst bildet sich bei etwa 1410 a ein sehr lang gestrecktes Objekt (Abb. 4.37 links), da der Drehimpuls innerhalb von nur einigen Wochen nicht ausreichend abtransportiert werden kann. Charakteristisch für die ersten Jahre nach der Bildung des Protosterns sind die großräumigen, höchst variablen Konvektionsströmungen die in einem radialen Bereich zwischen 1 und  $10 R_{\odot}$  existieren (Abb. 4.37 und 4.38 links unten). Diese Strömungen sind vergleichbar mit „Wettererscheinungen“, es sind heiße, etwas weniger dichte Winde, die in einer kühleren und dichteren Umgebung wehen. Erkennen kann man das daran, daß die Dichteverteilung lokal einer Art „Negativ“ der Temperaturverteilung entspricht (besonders deutlich in Abb. 4.37 und 4.38 unten links und oben rechts zu sehen). Betrachtet man den Druck, so ist dieser praktisch glatt im Vergleich zu diesen Verteilungen, die Windströmungen sind nicht erkennbar.

Auf viskoser Zeitskala wird nun innerhalb einiger Jahre auch viel Material entlang des Äquators in das Zentralobjekt transportiert. Dies zeigt sich einmal daran, daß der Protostern seine längliche Form verliert und sphärischer wird, andererseits auch an der kühlen Äquatorzone, entlang welcher das Gas von außen ins Zentrum gelangt (siehe Abb. 4.37 und 4.38 oben rechts). Bis jetzt (bei etwa 1414 a, also knapp 5 a nach dem zweiten Kollaps) hat sich noch keine stabile Akkretionsfront über der Polregion des Protosterns gebildet. Stattdessen kommt das Material, gestört durch die starken Konvektionsströmungen, immer noch an sehr unterschiedlichen Stellen vom Pol ins Zentrum, z.B. in sehr spitzen Trichtern an der Rotationsachse.

Erst bei etwa 1419 a (also knapp 10 a nach dem zweiten Kollaps) hat sich um den Protostern ein weiträumig stabiles Strömungsfeld ausgebildet, was auch auf die sich nun stark verringernde Akkretionsrate zurückzuführen ist (näheres dazu im nächsten Absatz). Mit Hilfe der Abb. 4.38 Mitte rechts läßt sich die entstandene stationäre Strömung erläutern: Im Polbereich hat sich eine heiße „Kappe“ bei ca.  $3 R_{\odot}$  gebildet, die aus der darüber liegenden Akkretionsfront bei ca.  $4 R_{\odot}$  resultiert. Diese Kappe erstreckt sich von der Drehachse aus bis zu etwa  $\theta \approx 55^{\circ}$ . Dann folgt ein kühler, schmaler „Spalt“ ( $\theta \approx 55^{\circ} - 60^{\circ}$ ), in dem Material mit Überschall einwärts bis zu Radien von  $2 R_{\odot}$  vordringt, wo es durch vielfältige Konvektionsströmungen zur Ruhe kommt. Bei  $\theta \approx 60^{\circ}$  hat sich ein lang gestreckter, bis über  $10 R_{\odot}$  reichender, heißer, radialer Strahl gebildet. Er entsteht durch eine Auswärtsströmung, welche heißes Material aus dem Zentralobjekt befördert. In den darunter liegenden Bereichen existieren wiederum kleinskalige Konvektionsbereiche, die

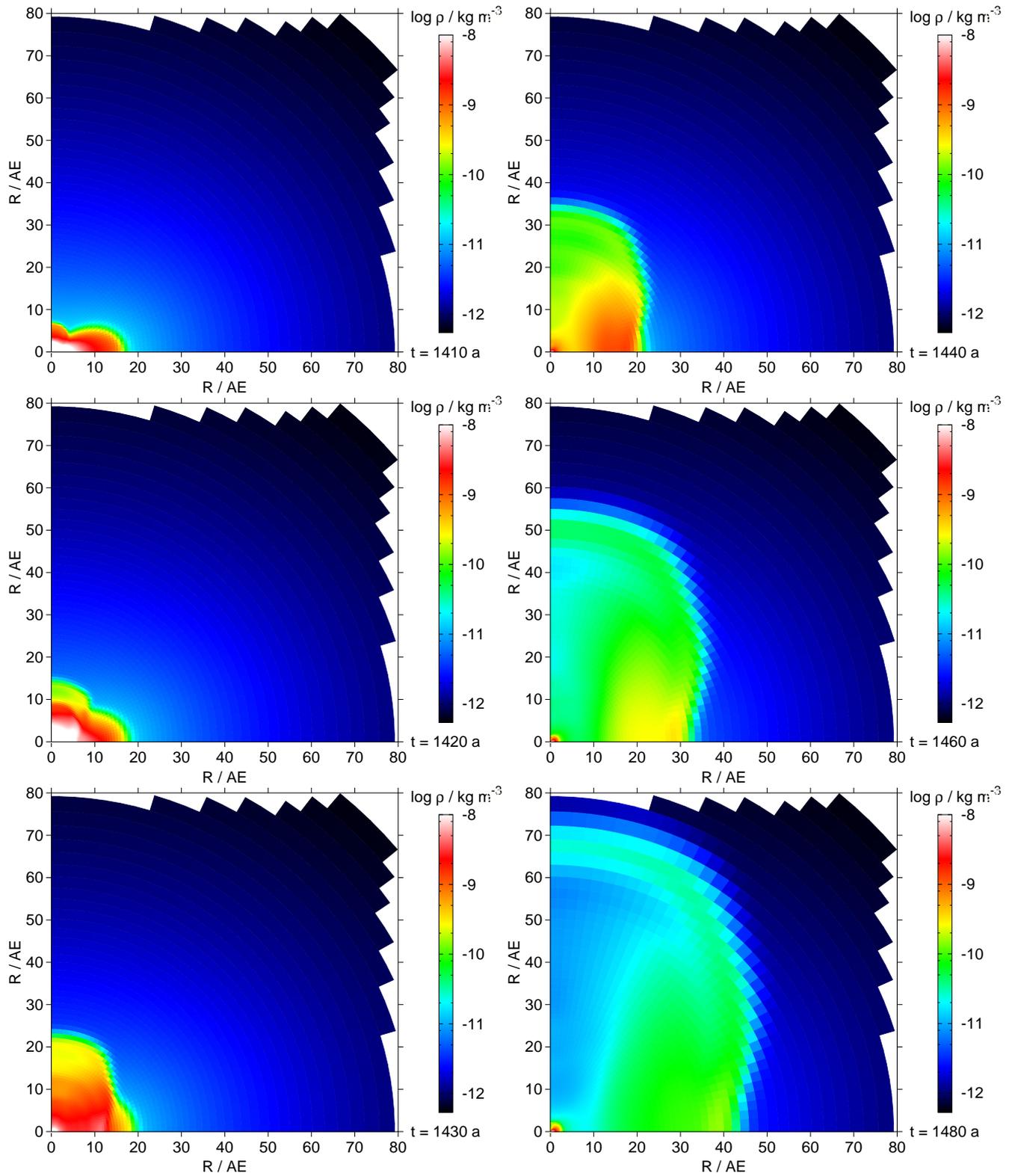
zum Äquator hin in eine immer noch stetige Einströmung (auf viskoser Zeitskala) von Scheibenmaterial übergehen.

Die soeben beschriebenen Strukturen verflüchtigen sich in den nächsten Jahrzehnten, und etwa 70 a nach dem zweiten Kollaps bleibt ein nahezu rundes Zentralobjekt mit einer sehr massearmen Scheibe im Äquatorbereich zurück (siehe Abb. 4.37 und 4.38 unten rechts). Die Beruhigung des Geschehens ist auf die nun praktisch vernachlässigbar kleine Akkretionsrate zurückzuführen. Den Grund für den Rückgang dieser Rate erläutern wir im folgenden.

#### **Die Entwicklung des ersten Kerns nach dem zweiten Kollaps**

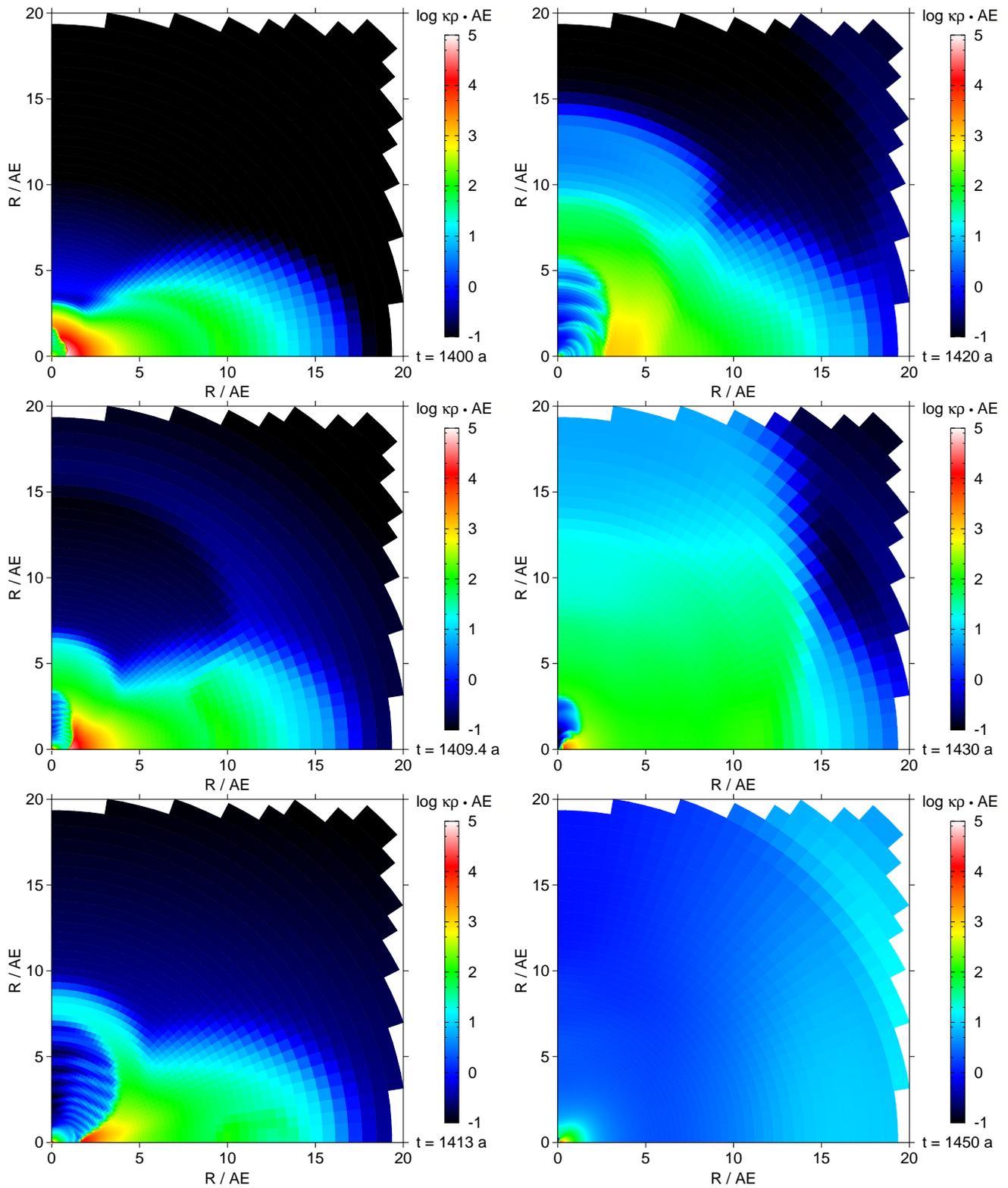
Die Gesamtentwicklung des ersten Kerns nach der Entstehung des Protosterns ist mit Hilfe der Massendichte in Abb. 4.39 dargestellt. Zunächst ist bei 1410 a noch ausschließlich die Wirkung der Staubverdampfung zu erkennen durch die Aufblähung der Polregion. Etwa 10 a nach dem zweiten Kollaps, bei 1420 a, läßt sich eine auch am Äquator bemerkbare, starke Umformung feststellen, die schon alle Bereiche bis  $R \approx 10$  AE erfasst hat. Dieser ganze Zentralbereich des Kerns dehnt sich nahezu sphärisch aus, hervorgerufen durch die Aufheizung der Materie durch den zentralen Protostern. Im weiteren Verlauf führt die fortschreitende Ausdehnung zu einer völligen Zerstörung der Struktur des ersten Kerns (siehe Abb. 4.39 bei 1430 bis 1480 a). Die auswärts strömende Materiefront wird etwas länglicher in Polrichtung, da zum einen die vorherige Auswärtsbewegung am Pol durch die Staubverdampfung schon einen zusätzlichen vertikalen Impuls erzeugt hat, und zum anderen am Äquator viel mehr Material in Bewegung zu bringen ist und dieses sich auch langsamer erwärmt (siehe nächster Absatz). Mit der Zeit ist (zunächst am Pol) eine Schalenbildung der ausströmenden Materie zu beobachten (Abb. 4.39 bei 1460 und 1480 a), weil die weiter innen liegende Materie eine höhere Geschwindigkeit besitzt.

Nun erklärt sich auch der Abfall der Akkretionsrate einige Jahrzehnte nach der Bildung des Protosterns: Das zentrale Objekt hat durch seine thermische Wirkung (nicht durch den Strahlungsdruck, dieser ist im Vergleich zum thermischen Druck vollkommen vernachlässigbar) seine gesamte Umgebung von Materie „freigeblasen“ und kann somit kein Material mehr akkretieren. Erst nachdem der größte Teil der Materie nach außen befördert und die Akkretionsleuchtkraft des Protosterns sich erheblich reduziert hat, kann sich in den zentralen Äquatorbereichen ( $R < 3$  AE) eine neue, kleine und extrem massearme Akkretionsscheibe aus dem verbliebenen Material ausbilden (Abb. 4.39 unten rechts).



**Abbildung 4.39:** Entwicklungssequenz der Massendichte in Phase 2 für die Rechnung mit  $\beta = 10^{-2}$ . Gezeigt ist die Vernichtung der Scheibenstruktur des ersten Kerns durch den zentralen Protostern und der Materieauswurf.

#### 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.40:** Entwicklungssequenz des Absorptionskoeffizienten in Phase 2 für die Rechnung mit  $\beta=10^{-2}$ . Gezeigt ist die Vernichtung der Scheibenstruktur des ersten Kerns durch den zentralen Protostern.

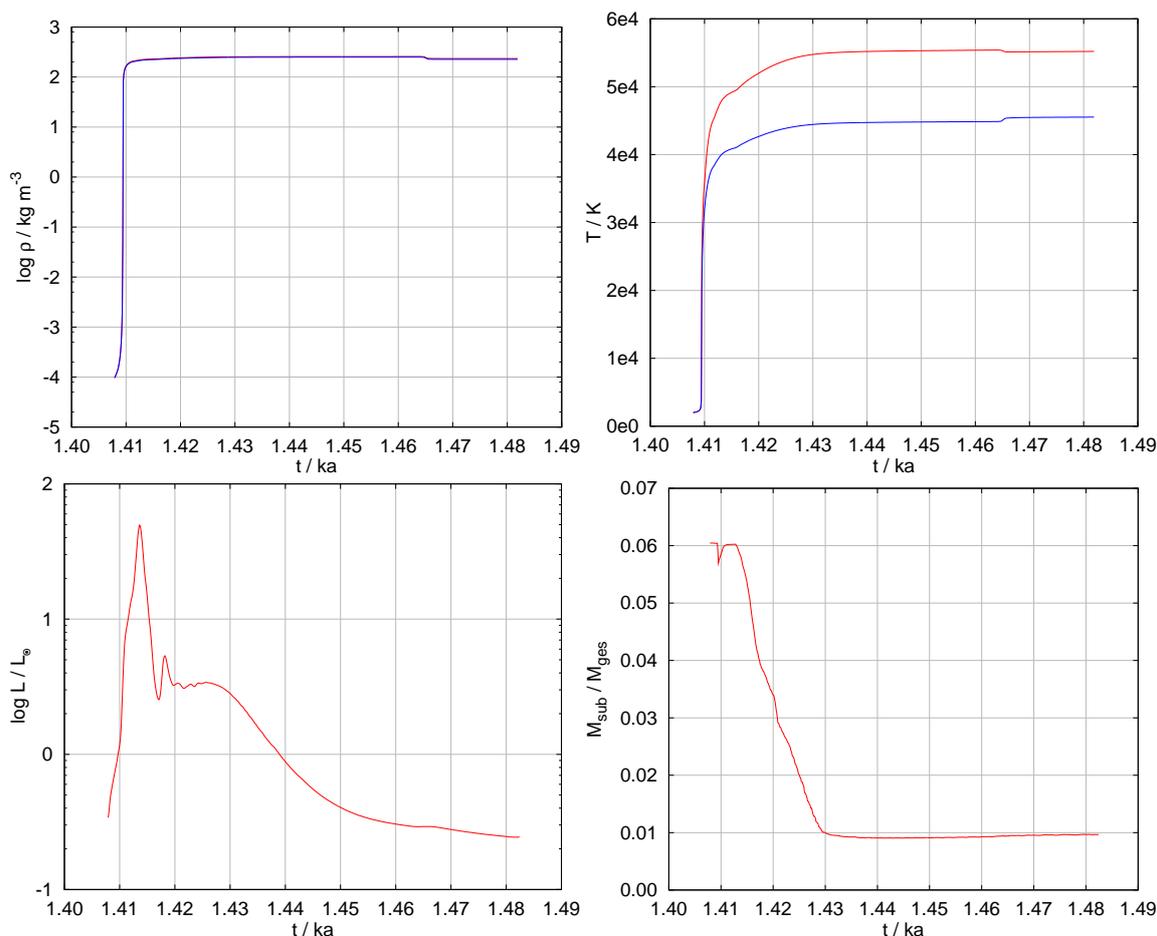
Der Prozess der Zerstörung des ersten Kerns ist noch einmal im Detail in Abb. 4.40 dargestellt. Der dort gezeigte Absorptionkoeffizient verdeutlicht besonders gut die Wirkung des Protosterns auf die Umgebung. Vor dem zweiten Kollaps bei 1400 a fällt zunächst die etwa konische, staubfreie Zentralregion auf. Außerdem zeigt sich die Eisgrenze, welche am Pol bei etwa 3 bis 4 AE vom Zentrum durch ein lokales Minimum (dunkler Streifen) zu erkennen ist und sich dann innerhalb des Kerns weiter verfolgen läßt, bis sie den Äquator bei etwa 9 AE vom Zentrum erreicht. Bis zu dem Moment wo der zweite Kollaps einsetzt (1409.4 a) hat sich die staubfreie Zone zu einem vertikal langgezogenen Bereich entwickelt. Dies passiert, weil sich die Zone entlang des Pols sehr viel leichter ausdehnen kann, wegen der optisch weniger dichten Materie im Vergleich zum Äquator, wo direkt außerhalb des staubfreien Bereichs die optisch dichtesten Gebiete überhaupt liegen. Sehr gut ist die Ausdehnung der Eisgrenze oberhalb des Kerns zu sehen, die nun schon Radien von bis zu 15 AE erreicht.

Gut 3 Jahre nach dem zweiten Kollaps (1413 a) hat sich durch die stark gestiegene Leuchtkraft des Protosterns die staubfreie Zone weit ausgedehnt und dringt (vom Pol her kommend) auch in die massivsten und optisch dicksten Zonen im Äquatorbereich vor. Der Prozess der Scheibenzerstörung, wird durch eine positive Rückkopplung bei diesem Prozess stark beschleunigt: Ist der Staub in einem Gebiet verdampft, so kann die Strahlung des Protosterns die Region leicht weiter erwärmen, die Gasmassen dehnen sich aus und verdünnen dadurch das Gebiet, wodurch die Strahlung wiederum noch leichter in die Region eindringen kann. Zu diesem Zeitpunkt haben wir etwa das Maximum der Leuchtkraft des Zentralobjekts erreicht, die Eisgrenze liegt zu dieser Zeit weit außerhalb des dargestellten Gebietes (nur in den äußeren Scheibenbereichen am Äquator, zwischen 9 und 14 AE läßt sich eine ringförmige, eishaltige Zone ausmachen.)

Bei 1420 a ist die Struktur des inneren Teils des ersten Kerns schon verloren gegangen, auch die äquatorialen Zonen sind stark verdünnt. Da die Leuchtkraft aufgrund der zurückgegangenen Akkretionsrate nun wieder abgenommen hat, ist die staubfreie Zone kleiner geworden. Auch die Eisgrenze ist wieder in das dargestellte Gebiet zurückgekehrt und liegt bei etwa 20 AE. 20 Jahre nach dem Kollaps (1430 a) ist nun auch die Struktur der äußeren Zonen des ersten Kerns vollständig zerstört. Man erkennt gut die auswärts strömende Materiefrent, indem man mit Abb. 4.39 unten links vergleicht. Die Leuchtkraft hat sich weiter reduziert, dementsprechend ist die staubfreie Zone weiter geschrumpft. Bei 1450 a stellt sich praktisch die gesamte Region des ehemaligen ersten Kerns als nahezu strukturloses Gebiet dar. Nur in den Zentralen Bereichen ( $R < 3$  AE) bildet sich (wie schon erwähnt) eine kleine, neue Akkretionsscheibe aus dem verbliebenen Restmaterial.

Auch jegliche thermische Struktur ist mit dem ersten Kern verschwunden, eine praktisch sphärisch symmetrische Temperaturverteilung, vorgegeben vom zentralen Protostern, bestimmt die gesamte Region.

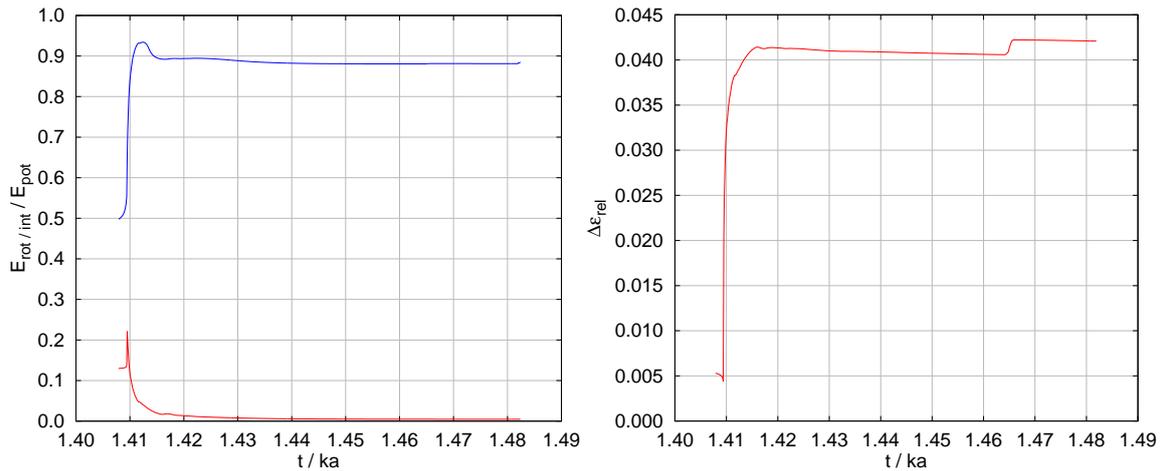
## 4 Ergebnisse und Diskussion



**Abbildung 4.41:** Zeitverläufe in Phase 2 der Rechnung für  $\beta = 10^{-2}$ . Die oberen Bilder zeigen jeweils den maximalen (rot) und zentralen (blau) Wert der Massendichte und der Temperatur. Links unten ist die Gesamtleuchtkraft dargestellt, rechts unten die subsonische Masse relativ zur Gesamtmasse.

### Überblick zu den zeitlichen Verläufen

Die Maximal- und Zentralwerte von Dichte und Temperatur werden in der Phase 2 der Rechnung natürlich vom zentralen Protostern bestimmt, sie sind in Abb. 4.41 oben wiedergegeben. Mehr als deutlich zeichnet sich der Moment des zweiten Kollapses ab. Die Zentraltemperatur nach dem Kollaps liegt auch hier wieder deutlich unter der Maximaltemperatur, was wir wie in der vorherigen Rechnung mit der äußeren Heizung durch die Akkretionsfront und der sehr langen thermischen Zeitskala im Zentrum des Protosterns begründen können. Der plötzliche, kleine Sprung in den Zustandsgrößen bei etwa 1465 a muß wohl in Zusammenhang mit den Eigenschaften der Zustandsgleichung stehen, wir konnten keine anderen Gründe, wie z.B. einen Strukturwandel im Konvektionsfeld oder Ähnliches, finden.



**Abbildung 4.42:** Zeitverläufe in Phase 2 der Rechnung für  $\beta = 10^{-2}$ . Linkes Bild: Der Betrag der Verhältnisse von Rotationsenergie zu potentieller Energie (rot), bzw. innerer Energie zu potentieller Energie (blau). Rechtes Bild: Der relative Gesamtenergiefehler (siehe §4.3.2).

Abb. 4.41 unten links zeigt den Verlauf der Leuchtkraft. Gut ist das Maximum bei 1413 a in der Hauptakkretionsphase zu sehen, die Strahlungsleistung erreicht hier etwa  $50 L_{\odot}$ . Nach dem Ausschwingen in eine kurze, quasistationäre Akkretionsphase, sinkt ab etwa 1425 a die Akkretionsrate und daher auch die Leuchtkraft.

Die subsonische Masse in Abb. 4.41 unten rechts verdeutlicht nochmals den Verlust des ersten Kerns. Der erste kleine Abfall bei 1410 a markiert den Beginn des zweiten Kollapses, der nachfolgende, massive Abfall spiegelt die zunehmend mit Überschall nach außen drängende Materiefrent wieder. Bei ca. 1430 a bleibt nur noch das Zentralobjekt übrig, welches demnach etwa 1% der Gesamtmasse in sich vereint.

Die energetische Verhältnisse sind in Abb. 4.42 wiedergegeben.  $\Xi_{\text{rot}}$  steigt direkt während des zweiten Kollapses kurz auf ca. 0.22, sinkt dann jedoch wegen des effektiven Drehimpulstransportes rasch unter 0.05.  $\Xi_{\text{int}}$  steigt beim Kollaps auf etwa 0.93 und stabilisiert sich dann auf knapp unter 0.9. Der beständige, sehr hohe Wert erklärt sich aus der extrem großen optischen Tiefe des Protosterns, wodurch dieser seine innere Energie sehr effektiv speichert.

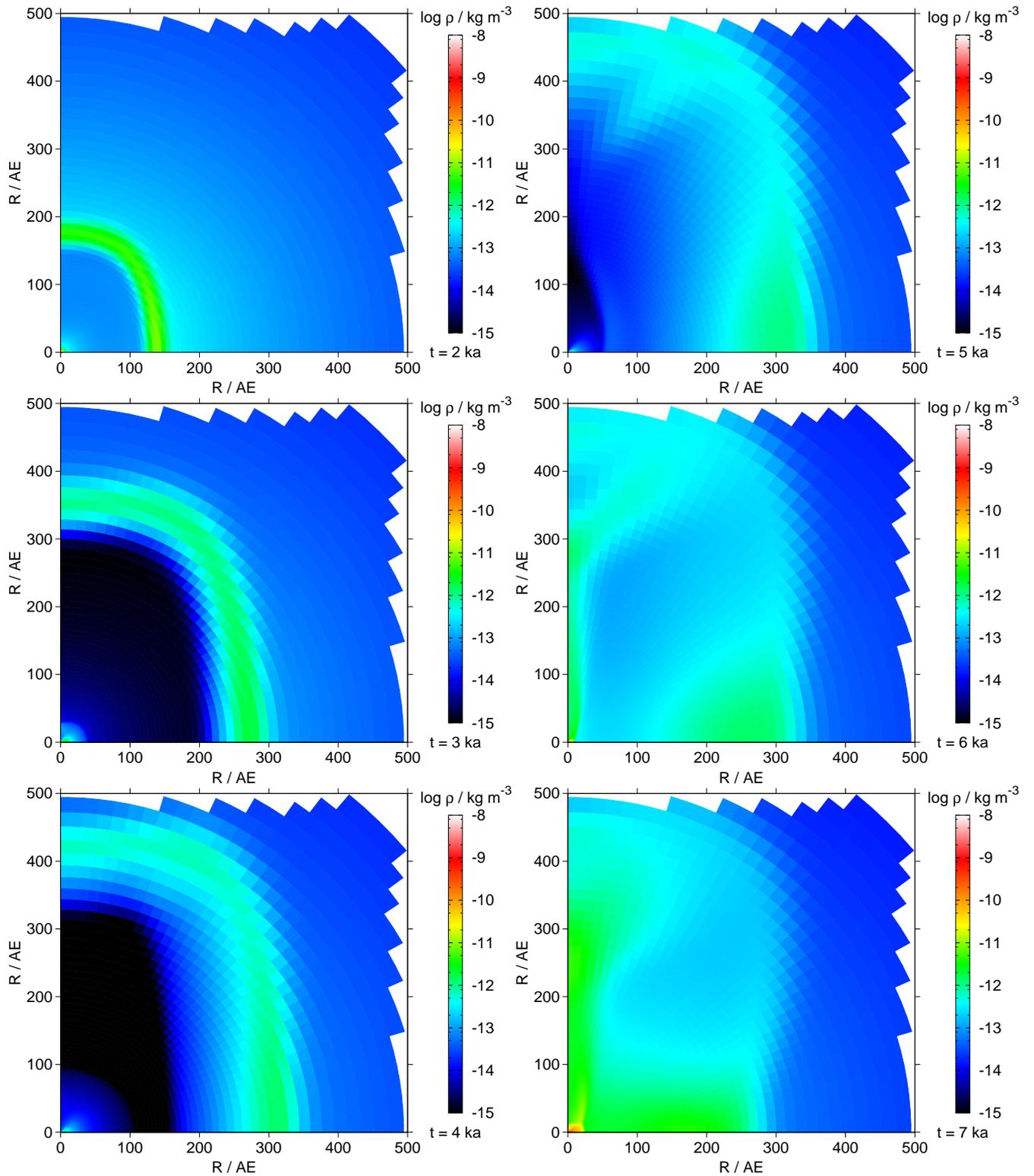
Der in Abb. 4.42 rechts dargestellte relative Gesamtfehler, macht wiederum deutlich, daß der zweite Kollaps zwar eine große Herausforderung an unseren Algorithmus stellt, jedoch der Gesamtfehler in akzeptablen Grenzen (unter 5%) bleibt.

### 4.8.3 Langzeitentwicklung der Phase 2

Nachdem sich die innersten Regionen der Simulationen nun in einem quasistationären Zustand befinden, ist der Punkt erreicht, welchen wir schon in §3.14.3 diskutiert haben. Der Protostern bestimmt durch seine feine räumliche Auflösung und seine hohen Temperaturen den größtmöglichen Zeitschritt des expliziten Verfahrens. In der hier betrachteten Rechnung ergibt sich dadurch ein konkreter Zeitschritt von etwa 2 Minuten. Wir interessieren uns aber für die weitere Entwicklung der ausgeworfenen Materie des ersten Kerns, die sich (wie wir sehen werden) auf Zeitskalen von ballistischen Bewegungen vollzieht, also wieder grob auf der Skala der Freifallzeit. Um diese Zeiträume von einigen 10 ka zu untersuchen, schneiden wir nun zum Zeitpunkt  $t = 1482$  a ein Loch bei  $r_L = 0.7$  AE in das Zentrum des Rechengebietes und konstruieren uns eine innere Randbedingung wie in §3.14.3 erläutert. Dadurch vergrößert sich der maximal mögliche Zeitschritt auf ca. 4 Tage, was einem Faktor von etwa 3000 entspricht. Jetzt haben wir die Möglichkeit in vertretbarer Rechenzeit die weitere Entwicklung zu verfolgen.

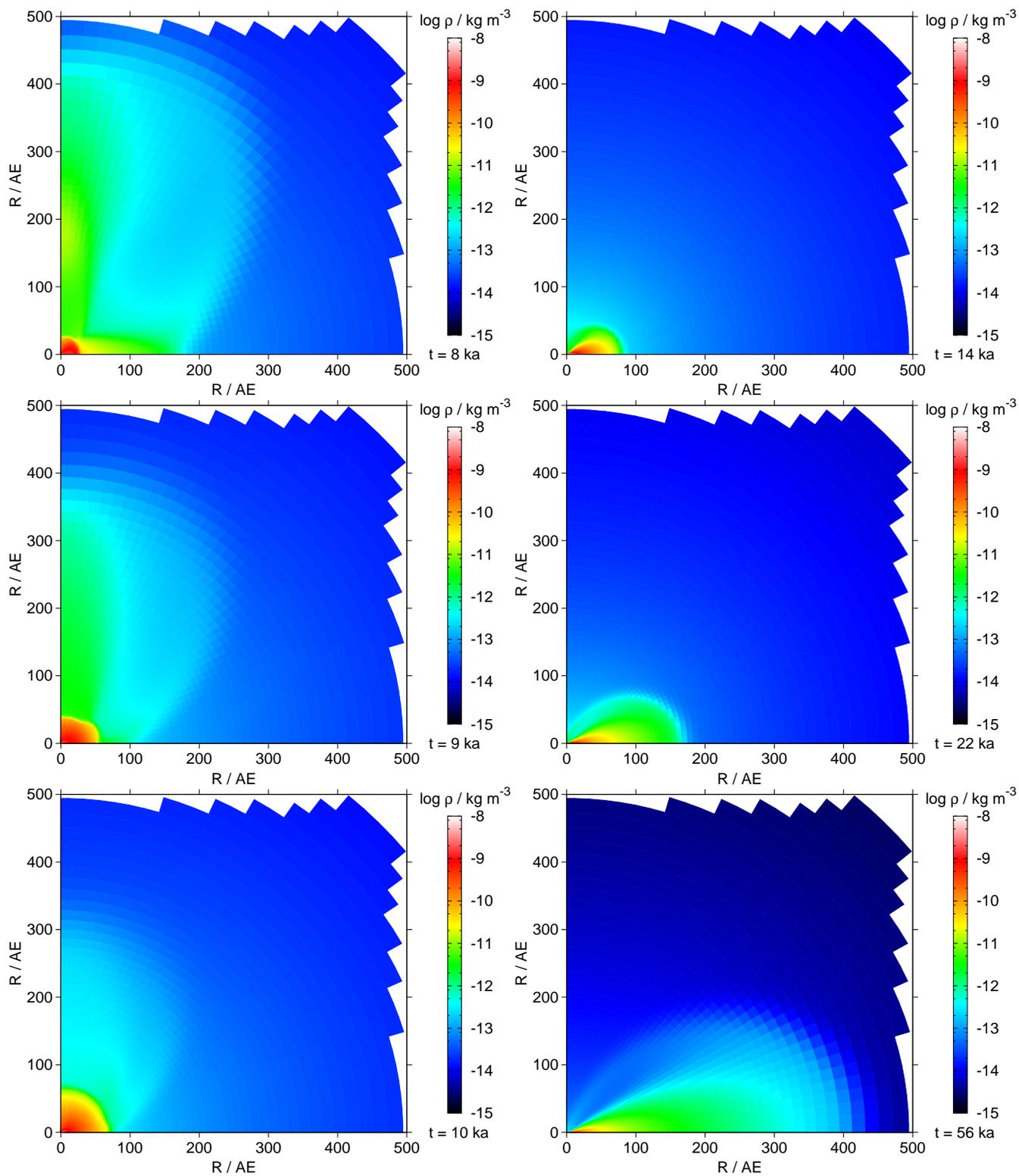
#### Auswurf und Rückkehr der Materie des ehemaligen ersten Kerns

In Abb. 4.43 und 4.44 ist der gesamte Prozess des Materieauswurfs (angetrieben durch den zentralen Protostern) und die Rückkehr der Materie, sowie die Ausbildung einer neuen Akkretionsscheibe dargestellt. Man sieht wie sich bei 2 ka eine prägnante Materieschale gebildet hat, da die nachströmenden Gasmassen stärker nach außen beschleunigt werden als die Materie an der äußeren Front. Bei 3 ka ist der Raum innerhalb der Schale extrem verdünnt, die verbliebene Materie ist auf die neu gebildete, massearme, zentrale Akkretionsscheibe gefallen. Nach 4 ka beginnen die inneren Teile der Materieschale bereits wieder Richtung Zentrum zu fallen. Bei etwa 5 ka hat der gesamte Auswurfprozess seinen Umkehrpunkt, also seine maximale räumliche Ausdehnung von ca. 500 AE am Pol und 400 AE am Äquator erreicht. Vergleichen wir dies mit der Größe des Rechengebietes von  $R \approx 8700$  AE, so sehen wir, daß der äußere Rand der Simulation weit von den Geschehnissen entfernt ist und die Randbedingungen keinen Einfluß haben auf die Entwicklung. Man kann zu diesem Zeitpunkt eine sich von der allgemeinen Bewegung absetzende Verdichtung, ca. 300 bis 400 AE über dem Äquator erkennen. Die entsprechende Strömung steuert auf die Drehachse zu. Nach 6 ka hat sich daraus ein Materiestrom entwickelt, der schlauchförmig an der Drehachse Material Richtung Zentrum transportiert. Ab etwa 7 ka sorgt die im Zentrum ankommende Materie durch Akkretion auf die vorhandene, massearme Akkretionsscheibe für einen starken Anstieg der Massendichte in der Scheibe. Auch vom Äquator her strömt nun viel Material innerhalb einer sehr weiträumigen, homogenen Scheibe in die zentralen Bereiche, wodurch sich zu dieser Zeit insgesamt eine Art „kreuzförmiger“ Einfall im meridionalen Schnitt ergibt (siehe Abb. 4.43 bei 7 ka).

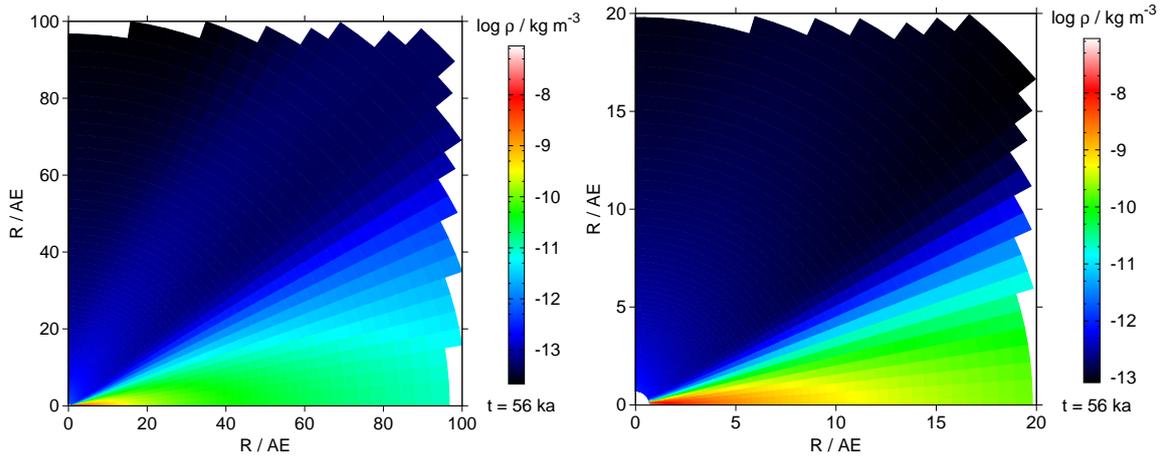


**Abbildung 4.43:** Sequenz der Langzeitentwicklung der Massendichte im meridionalen Schnitt für die Phase 2 der Rechnung mit  $\beta = 10^{-2}$ . Man sieht den Auswurf und die anschließende Rückkehr der Materie (Fortsetzung in Abb. 4.44).

#### 4 Ergebnisse und Diskussion



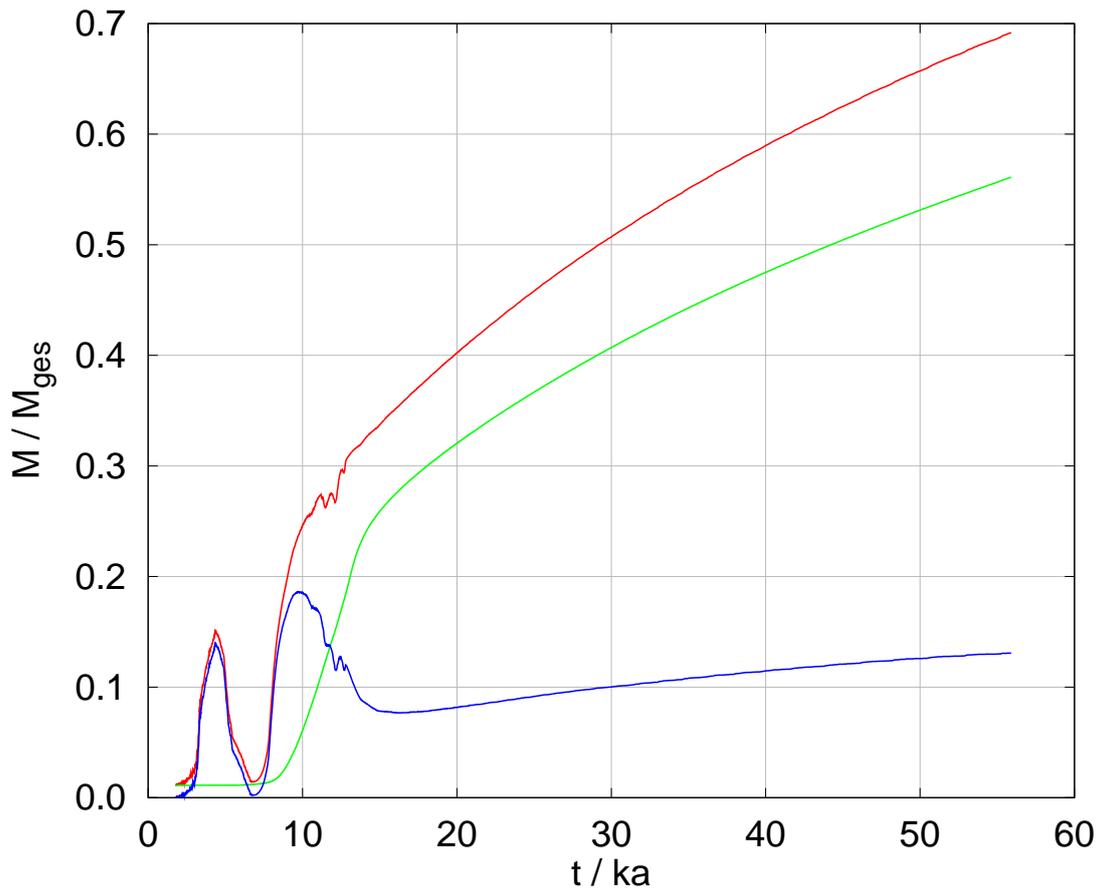
**Abbildung 4.44:** Fortsetzung der Abb. 4.43. Gezeigt ist die Reakkretion der ausgeworfenen Materie und die Bildung einer neuen Scheibe.



**Abbildung 4.45:** Die Dichtestruktur der inneren Teile der neu gebildeten Scheibe zum Ende der Rechnung für  $\beta = 10^{-2}$ .

Bei 8 ka hat sich ein neuer, nahezu sphärischer Kern um das Zentrum gebildet mit einem Radius von ca. 25 AE. Es strömt weiterhin Material entlang der Drehachse und vom Äquator her auf diesen neuen Kern. Nach 9 ka beginnen auch die am weitesten nach außen geworfenen Massenelemente sich zurück zum Zentrum zu bewegen, die Reakkretion im Äquatorbereich ist nahezu abgeschlossen. Bei 10 ka ist auch die Akkretion durch den schlauchförmigen Strom an der Drehachse beendet, es werden die letzten, zuvor ausgestoßenen Gasmassen auf den neuen Kern reakkretiert. Gleichzeitig strömen die inneren Bereiche des neuen Kerns über den inneren Rand ins Zentrum. Dies passiert natürlich hauptsächlich in den Polbereichen, weshalb sich der neue Kern zum Teil auflöst und nach etwa 14 ka eine neue, bis auf etwa 90 AE ausgedehnte Akkretionsscheibe entsteht. Die Scheibe wächst nun durch neu von außen einfallendes (nicht zuvor ausgestoßenes) Material. Nach 22 ka hat sie sich auf ca. 180 AE ausgedehnt, nach 56 ka auf etwa 420 AE. Die Temperaturverteilung dieser neu entstandenen Konfiguration ist weitgehend kugelsymmetrisch (vom Zentrum bestimmt) und weist keine nennenswerten Strukturen in der Scheibe auf, denn diese ist nicht optisch tief genug um eine eigene thermische Struktur aufzubauen. Die Eisgrenze liegt zum Ende der Rechnung nach 56 ka bei etwa 35 AE.

In Abb. 4.45 sind noch zwei vergrößerte Ausschnitte der Dichteverteilung in der Scheibe zum Ende der Rechnung zu sehen. Im rechten Bild erkennt man die Ausmaße des zentralen Loches mit einem Radius von 0.7 AE.



**Abbildung 4.46:** Zeitverläufe der verschiedenen Massenanteile in der Langzeitentwicklung der Phase 2 der Rechnung für  $\beta=10^{-2}$ . Zu sehen ist die gesamte subsonische Masse (rot), ihr Anteil außerhalb des Loches (blau) bzw. im Loch (grün), jeweils relativ zur Gesamtmasse.

Der zeitliche Verlauf der subsonischen Masse und ihrer Anteile innerhalb und außerhalb des Loches sind in Abb. 4.46 dargestellt. Das erste Maximum in der Gesamtmasse bei etwa 4 ka entspricht dem Umkehrpunkt der ausgeworfenen Massenschale. Da die Materie danach wieder mit Überschall Richtung Zentrum fliegt, sinkt die subsonische Masse außerhalb des Loches praktisch auf null, um nach ca. 7 ka wieder stark zu steigen (der neue Kern entsteht). Kurz danach beginnt auch die Lochmasse sich zu vergrößern, weil die zentralen Bereiche des Kerns zum Teil in das Loch strömen. Daher sinkt die subsonische Masse außerhalb des Loches ab etwa 10 ka auch wieder, die Lochmasse dagegen wächst weiter. Nach ca. 15 ka haben sich die Verhältnisse stabilisiert und die Massen der neu entstandenen Akkretionsscheibe sowie des Loches wachsen weiter durch Akkretion von frisch einfallendem Material (die subsonische Masse außerhalb des Loches entspricht nun direkt der Scheibenmasse). Zum Ende der Rechnung nach 56 ka sind bereits insgesamt 69% der Gesamtmasse akkretiert worden, davon entfallen 56% auf das Zentralobjekt (im Loch) und immerhin 13% auf die neu gebildete, protoplanetare Scheibe.

# 5 Zusammenfassung und Ausblick

## 5.1 Die Ergebnisse im Überblick

Um die Entwicklung einer gravitativ instabilen, rotierenden Gasmasse zu untersuchen, haben wir für diese Arbeit einen strahlungshydrodynamischen Code entwickelt. Unter der Annahme von axialer Symmetrie und der Wahl eines geeigneten räumlichen Gitters, ist es uns zum ersten Mal gelungen eine globale Rechnung durchzuführen, die vom ursprünglichen Objekt (einem Molekülwolkenkern) ausgehend, den gesamten zeitlichen Verlauf bis zur Entstehung eines Protosterns, und die ersten etwa hundert Jahre der Entwicklung desselben, nachvollzieht. Dabei ist zu betonen, daß wir ein einziges, in sich konsistentes Gleichungssystem für alle Phasen der Rechnung verwendet haben, in dem der Strahlungstransport (in der Diffusionsapproximation) berücksichtigt wurde, und eine detaillierte Zustandsgleichung für das Gasgemisch zum Einsatz kam. Ein wichtiger Aspekt, der die Durchführung der Simulationen erst ermöglicht hat, ist die Verwendung von direkten Lösern zur Lösung der auftretenden linearen Gleichungssysteme.

Als Anfangsmodell eines Molekülwolkenkerns dient uns eine leicht überkritische Bonnor-Ebert-Sphäre, mit einer Masse von  $1 M_{\odot}$  und einer Temperatur von 10 K. Dieses Objekt rotiert zu Beginn starr, mit einem maximalen Zentrifugalradius von 100 AE. Die Rechnungen stellen eine Parameterstudie dar, in der wir den Einfluß der turbulenten Viskosität auf die Entwicklung des Systems (bei immer gleichem Anfangsmodell) untersuchen. Um die turbulente Viskosität zu beschreiben, haben wir das parametrische Modell der  $\beta$ -Viskosität verwendet und die Simulationen für die Werte  $\beta = 0, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$  durchgeführt. Wichtige Erkenntnisse dieser Rechnungen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen:

- Der Kollaps einer kritischen Gleichgewichtskonfiguration (wie einer Bonnor-Ebert-Sphäre) beginnt in den Außenbereichen des Objekts. Ein sich zur Überschallströmung entwickelndes, einwärts gerichtetes Geschwindigkeitsfeld beginnt sich vom äußersten Rand her aufzubauen. Jeder Ansatz, der auf dem bekannten „Inside-out-Kollaps“ (vgl. [Shu, 1977]) beruht (der schon von einer vollkommen widersinnigen, in der Natur nicht realisierten Anfangsbedingung ausgeht), muß grundsätzlich falsch sein. Obwohl er eigentlich keine neue Erkenntnis darstellt, wird dieser Punkt hier nochmals betont, da in den Vorstellungen vieler Astrophysiker der Inside-out-Kollaps bis heute einem plausiblen Szenario entspricht, was er jedoch nicht ist.

- In engem Zusammenhang mit dem ersten Punkt steht die Erkenntnis, daß die Massenakkretionsrate für ein entstehendes Zentralobjekt vollkommen unabhängig von der Entwicklung desselben ist<sup>1</sup>. Der Einfall von Material erfolgt mit Überschallgeschwindigkeit auf ballistischen Bahnen. Die einzigen Parameter, die die Art des Einfalls bestimmen, sind die anfängliche Massen- und Drehimpulsverteilung des Molekülwolkenkerns. In unseren Rechnungen finden wir Werte von etwa  $10^{-4} M_{\odot}/a$  zu Beginn der Entstehung eines Zentralobjekts, bis hinunter zu  $10^{-6} M_{\odot}/a$  für die spätesten Phasen die wir untersucht haben. Natürlich geht die Akkretionsrate mit der Zeit gegen null, da nur eine endliche Menge an Material zur Verfügung steht. Somit ist die Rate keinesfalls eine Konstante, sondern zeitlich stark variabel. Dies steht wiederum in absolutem Gegensatz zur Vorgabe der Akkretionsrate im Falle des Inside-out-Kollapses, bei dem  $\dot{M} = 0.975 c_s^3/G$  eine Konstante ist ([Shu, 1977]). Der Kollaps entspricht wie gesagt einer starken Überschallströmung und hat aber auch gar nichts mit der Schallgeschwindigkeit  $c_s$  des Gases zu tun. Daher ergeben Arbeiten, welche vom Inside-out-Kollaps ausgehen, um z.B. die Entstehung von protoplanetaren Scheiben zu untersuchen (siehe z.B. [Nakamoto and Nakagawa, 1994]), völlig falsche, um etwa eine Größenordnung (!) zu lange Bildungszeiten für das Zentralobjekt und die Scheibe. Unsere Rechnungen zeigen, daß etwa  $6 \cdot 10^4$  Jahre nach Beginn der Akkretion bereits über 70% der Gesamtmasse das Zentrum bzw. die Akkretionsscheibe erreicht haben.
- Der erste Abschnitt aller Rechnungen, von uns mit Phase 0 bezeichnet, verläuft auf Freifallzeitskala (in unserem Fall dauert er etwa  $1.6 \cdot 10^5$  Jahre) und ist noch unabhängig von  $\beta$ . Die gesamte Konfiguration kontrahiert in dieser Phase, wobei die Zentraldichte sich um mehr als drei Größenordnungen erhöht, die Temperatur jedoch praktisch konstant bleibt, da das Objekt optisch dünn ist. Erreicht die zentrale optische Tiefe  $2/3$ , beginnt die neue Phase 1, alle folgenden Zeitangaben beziehen sich auf diesen Startpunkt ( $t=0$ ).
- Nach wenigen 100 Jahren in Phase 1 bildet sich der erste Kern, ein rotierendes, quasihydrostatisches Objekt. Die weitere Entwicklung hängt stark von der Größe der turbulenten Viskosität ab, die für eine Umverteilung des Drehimpulses innerhalb des ersten Kerns sorgt.
- Für  $\beta = 0$  entwickelt sich der erste Kern zu einer immer flacher werdenden Akkretionsscheibe. Diese beginnt ab etwa  $1.4 \cdot 10^4$  Jahren durch gravitative Scheibeninstabilitäten in mehrere Ringe zu fragmentieren, von denen einer nach ca.  $2.8 \cdot 10^4$  Jahren wiederum kollabiert durch eine weitere Gravitationsinstabilität. Die Maxi-

---

<sup>1</sup>solange wir nicht massereiche Sterne betrachten, bei denen der Strahlungsdruck wichtig ist

maltemperatur erreicht nie Werte über 1400 K, weshalb es auch nie zu einer Phase der Staubverdampfung bzw. der Wasserstoffdissoziation kommt.

- Bei  $\beta = 10^{-4}$  sorgt der nun mögliche, viskose Drehimpulstransport insbesondere in den zentralen Bereichen des ersten Kerns für eine etwas kompaktere Struktur. Durch die somit stärkere Erwärmung, werden Temperaturen erreicht, die nach 6300 Jahren die Staubverdampfung ermöglichen. Daraus folgt wegen der stark veränderten, optischen Eigenschaften in den inneren Kernbereichen eine Restrukturierung, an deren Ende eine ringförmige Verdichtung am Äquator, unweit des Zentrums steht. Nach etwa 7700 Jahren wird der Ring aufgrund der Wasserstoffdissoziation gravitativ instabil und kollabiert.
- Für  $\beta = 10^{-3}$  findet die Erwärmung der zentralen Bereiche des ersten Kerns noch schneller statt, sodaß schon nach etwa 2400 Jahren die Staubverdampfung und die entsprechende Restrukturierung der inneren Kernbereiche beginnt. Durch die Wasserstoffdissoziation setzt nach 2680 Jahren eine säkulare Instabilität ein, an deren Ende (20 Jahre später) die Bildung eines protostellaren Objekts im Zentrum steht. Dieser Protostern akkretiert Material ausschließlich in einer engen, trichterförmigen Zone um die Drehachse und gibt den größten Teil seiner Strahlung in einem optisch dünnen Kanal in Polrichtung ab. Durch die Wärmewirkung des Protosterns expandieren weite Bereiche des ersten Kerns und verdünnen sich stark, jedoch bleiben die inneren ( $\approx 1$  AE), sehr dichten Bereiche erhalten und schirmen die weiter außen liegenden, äquaturnahen Gebiete von der Wärmewirkung ab. Etwa 200 Jahre nach der Bildung des Protosterns läßt die Aktivität desselben stark nach, da durch die Verdünnung der einfallenden Gasmassen die Akkretionsrate kontinuierlich sinkt.
- Bei  $\beta = 10^{-2}$  ergibt sich die rasanteste Entwicklung des ersten Kerns, da die zentralen Bereiche noch kompakter, und die dortige viskose Heizung noch stärker ist. Der somit frühe Beginn der Staubverdampfung nach ca. 1300 Jahren und die folgende Restrukturierung sorgen für eine massive Expansion der polaren Kernbereiche. Zeitlich überlagert wir dieser Prozess nach etwa 1400 Jahren von einer dynamischen Instabilität der innersten ( $< 1$  AE) Gebiete, aus der der zentrale Protostern hervorgeht. Durch eine kurzzeitige (etwa 10 Jahre dauernde), massive Akkretion und die daraus resultierenden Leuchtkräfte, sorgt der Protostern durch seine Wärmewirkung innerhalb von 70 Jahren für die Zerstörung der gesamten Struktur des ersten Kerns und den Auswurf des Kernmaterials. Dieses Material wird bis auf Radien von ca. 500 AE befördert, bevor es umkehrt und nach etwa  $10^4$  Jahren wieder das Zentrum erreicht. Nach ca.  $6 \cdot 10^4$  Jahren ist bereits der Großteil des vorhandenen Wolkenmaterials (gut 70%) akkretiert worden. Es hat sich eine massereiche Scheibe mit einer Ausdehnung von mehr als 400 AE gebildet, die etwa 13% der Masse in sich vereint.

- Die Dauer der Phase 1 zwischen der Entstehung des ersten Kerns und der Bildung eines protostellaren Objekts hängt wiederum stark von der Größe der turbulenten Viskosität ab. Gehen wir davon aus, daß auch die beobachteten Ringbildungen ohne Symmetriebeschränkungen zur Fragmentation und raschen Bildung eines Protosterns (oder eines Mehrfachsystems) führen würden, so können wir insgesamt feststellen, daß besagte Phase maximal etwa  $10^4$  Jahre (für geringe Viskosität) dauert, jedoch auch schon nach  $10^3$  Jahren (für hohe Viskosität) beendet sein kann.
- Die Veränderungen der optischen Eigenschaften, insbesondere durch die Staubverdampfung, haben schon im Vorfeld einen großen Einfluß auf den Entstehungsprozess des Protosterns. Ein entscheidender Punkt an dieser Stelle ist die Frage, ob (und wenn ja, wann) sich aus dem Zentrum ein staubfreier, optisch dünner Weg zum effektiven Transport der Wärme bilden kann.
- Ein Protostern muß nicht zwangsläufig aus einer dynamischen Instabilität heraus entstehen, er kann sich auch auf thermischer Zeitskala bilden (siehe Rechnung mit  $\beta = 10^{-3}$ ).
- Der Einfluß des Protosterns auf die Struktur des ersten Kerns und der entstandenen Akkretionsscheibe kann allein durch die Wärmewirkung sehr stark sein und bis zur Zerstörung besagter Strukturen führen. Wir müssen uns von der Vorstellung verabschieden, daß sich eine Akkretionsscheibe einfach ungestört nach der Entstehung eines Protosterns weiterentwickelt.

## 5.2 Ausblick

Wie jede wissenschaftliche Arbeit wirft auch diese neue Fragen auf. Außerdem gibt es natürlich viele Möglichkeiten, das angenommene theoretische Modell zu erweitern und zu verfeinern, sowie die Lösungsmethoden weiter zu entwickeln. Wir wollen zum Abschluß einige diesbezügliche Anmerkungen machen:

- An der Beschränkung für den Zeitschritt zeigt sich das Dilemma der expliziten Verfahren, wenn es darum geht, einen vollständigen Kollaps eines Molekülwolkenkerns mit der Entstehung des Protosterns im Zentrum zu simulieren. Wir sind in unserem Fall nach der Entstehung des Zentralobjekts mit Zeitschritten von Minuten konfrontiert, wollen aber eigentlich die zeitliche Entwicklung auf einer Skala von etwa  $10^5$  bis  $10^6$  Jahren verfolgen. Ein zeitlich vollständig implizites Verfahren zur Lösung der Gleichungen wäre geeignet dieses Problem zu lösen, falls sich bezüglich des Protosterns eine quasistationäre Akkretionsphase einstellt und der Zeitschritt unabhängig von der dynamischen Zeitskala des Sterns gewählt werden kann. Mit Hilfe der ro-

busten direkten Löser für lineare Gleichungssysteme ist ein voll implizites Verfahren auch für eine zweidimensionale Simulation durchaus realisierbar.

- Natürlich besteht der Wunsch, die hier vorgestellten Rechnungen auch ohne Symmetrieanahmen (also „tatsächlich“ in 3D) durchzuführen. Die dabei auftretenden technischen Schwierigkeiten, welche wir schon an verschiedenen Stellen in dieser Arbeit angesprochen haben, sind zahlreich. Neben den offensichtlichen Problemen, wie z.B. dem Umgang mit den äußerst umfangreichen Datenmengen oder der Notwendigkeit eines effizient parallelisierten Gesamtalgorithmus, deuten sich mindestens zwei weitere an: Da ist zum einen die Frage nach der Wahl des räumlichen Gitters, wobei jedes dieser Gitter seine Vor- und Nachteile mit sich bringt, insbesondere bezüglich der lokalen Uniformität, der möglichen Koordinatensingularitäten und der Diskretisierungsfehler. Außerdem müssen die auftretenden linearen Gleichungssysteme gelöst werden, was aber in 3D nicht mehr effizient mit direkten Lösern möglich ist. Wahrscheinlich müßten dann Mehrgitterverfahren verwendet werden.
- Mit einem 3D-Code könnten wir den wichtigen Mechanismus des Drehimpulstransportes durch Gravitationsdrehmomente in Spiralstrukturen untersuchen (vgl. §2.6.1) und damit auch klären, wie lange die in dieser Arbeit untersuchten Scheiben stabil sind gegen nichtaxialsymmetrische Störungen. Auch die Bedingungen zur Bildung von Doppel- oder Mehrfachsternsystemen ließen sich dann erforschen.
- Weiterhin wäre die Hinzunahme eines Turbulenzmodells wichtig (siehe §2.6.2), um die wahre Größe der turbulenten Viskosität zu ermitteln und somit die  $\beta$ -Vorschrift überflüssig zu machen.
- Gerade für die Untersuchung der Akkretionszone des Protosterns ist die Frage nach dem Einfluß von Magnetfeldern wichtig, da die vorhandene Materie in diesem Bereich zu großen Teilen ionisiert ist. Durch die Berücksichtigung der elektromagnetischen Effekte könnten wahrscheinlich auch neue Phänomene, wie z.B. Jets entlang der Rotationssachse, beobachtet werden. Außerdem wären dadurch weitere Möglichkeiten des Drehimpulstransportes denkbar (vgl. §2.6.3).
- Eine verbesserte Modellierung des Strahlungstransportes, z.B. durch die Methode der kurzen Charakteristiken, würde für komplexe räumliche Konfigurationen mit optisch sehr dünnen Zonen (wie in der Rechnung für  $\beta = 10^{-3}$ ) noch realistischere Ergebnisse ermöglichen, da durch die berücksichtigte Richtcharakteristik der Strahlung auch Abschattungseffekte (z.B. durch die Scheibe) darstellbar wären.
- Der Staub und die häufigsten chemischen Verbindungen (wie  $\text{H}_2$ , OH,  $\text{H}_2\text{O}$  und CO) haben einen starken Einfluß auf die optischen Eigenschaften, solange die Materie

nicht ionisiert ist. Die detaillierte Modellierung der einzelnen chemischen Spezies in reaktiven Strömungen (mittels Advektions-Diffusions-Gleichungen und chemischen Reaktionsnetzwerken) ermöglicht es erstens, die optischen Eigenschaften (d.h. die Opazitäten) direkt und konsistent aus den Häufigkeiten von Verbindungen abzuleiten, und zweitens, die allgemeine chemische Entwicklung des entstehenden Systems aus Stern und protoplanetarer Scheibe zu untersuchen.

# Literaturverzeichnis

- [Balbus and Hawley, 1991] Balbus, S. A. and Hawley, J. F. (1991). A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution. *ApJ*, 376:214–233. [2.6.3](#)
- [Bate, 1998] Bate, M. R. (1998). Collapse of a Molecular Cloud Core to Stellar Densities: The First Three-dimensional Calculations. *ApJ*, 508:L95–L98. [1.2.2](#)
- [Bodenheimer and Sweigart, 1968] Bodenheimer, P. and Sweigart, A. (1968). Dynamic Collapse of the Isothermal Sphere. *ApJ*, 152:515–522. [1.2.1](#)
- [Bodenheimer et al., 1990] Bodenheimer, P., Yorke, H. W., Rozyczka, M., and Tohline, J. E. (1990). The formation phase of the solar nebula. *ApJ*, 355:651–660. [1.2.2](#)
- [Bok and Reilly, 1947] Bok, B. J. and Reilly, E. F. (1947). Small Dark Nebulae. *ApJ*, 105:255–257. [1.1](#)
- [Boley et al., 2007] Boley, A. C., Hartquist, T. W., Durisen, R. H., and Michael, S. (2007). The Internal Energy for Molecular Hydrogen in Gravitationally Unstable Protoplanetary Disks. *ApJ*, 656:L89–L92. [2.4](#)
- [Bonnor, 1956] Bonnor, W. B. (1956). Boyle’s Law and gravitational instability. *MNRAS*, 116:351–359. [2.9.1](#)
- [Boss, 1989] Boss, A. P. (1989). Evolution of the solar nebula. I - Nonaxisymmetric structure during nebula formation. *ApJ*, 345:554–571. [1.2.2](#)
- [Davidson, 2004] Davidson, P. A. (2004). *Turbulence : an introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press. [2.6.2](#)
- [Duschl et al., 2000] Duschl, W. J., Strittmatter, P. A., and Biermann, P. L. (2000). A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *A&A*, 357:1123–1132. [2.6.4](#)
- [Ebert, 1957] Ebert, R. (1957). Zur Instabilität kugelsymmetrischer Gasverteilungen. Mit 2 Textabbildungen. *Zeitschrift für Astrophysik*, 42:263–272. [2.9.1](#), [3.15.1](#)

- [Flower et al., 2006] Flower, D. R., Pineau Des Forêts, G., and Walmsley, C. M. (2006). The importance of the ortho:para H<sub>2</sub> ratio for the deuteration of molecules during preprotostellar collapse. *A&A*, 449:621–629. [2.4](#)
- [Frerking et al., 1985] Frerking, M. A., Langer, W. D., and Wilson, R. W. (1985). Structure and dynamics of the BOK globule B335. *Icarus*, 61:22–26. [1.1](#)
- [Fryxell et al., 2000] Fryxell, B., Olson, K., Ricker, P., Timmes, F. X., Zingale, M., Lamb, D. Q., MacNeice, P., Rosner, R., Truran, J. W., and Tufo, H. (2000). FLASH: An Adaptive Mesh Hydrodynamics Code for Modeling Astrophysical Thermonuclear Flashes. *ApJS*, 131:273–334. [3.1](#)
- [Hayes et al., 2006] Hayes, J. C., Norman, M. L., Fiedler, R. A., Bordner, J. O., Li, P. S., Clark, S. E., ud-Doula, A., and Mac Low, M. (2006). Simulating Radiating and Magnetized Flows in Multiple Dimensions with ZEUS-MP. *ApJS*, 165:188–228. [3.9](#), [3.11.1](#)
- [Jeans, 1902] Jeans, J. H. (1902). The Stability of a Spherical Nebula. *Royal Society of London Philosophical Transactions Series A*, 199:1–53. [2.9.1](#)
- [Kippenhahn and Weigert, 1990] Kippenhahn, R. and Weigert, A. (1990). *Stellar Structure and Evolution*. Kippenhahn, R. and Weigert, A. [2.4](#), [2.5](#)
- [Krumholz et al., 2007] Krumholz, M. R., Klein, R. I., McKee, C. F., and Bolstad, J. (2007). Equations and Algorithms for Mixed-frame Flux-limited Diffusion Radiation Hydrodynamics. *ApJ*, 667:626–643. [2.3](#), [2.3](#), [2.3](#)
- [Larson, 1969] Larson, R. B. (1969). Numerical calculations of the dynamics of collapsing proto-star. *MNRAS*, 145:271–295. [1.2.1](#)
- [Larson, 2003] Larson, R. B. (2003). The physics of star formation. *Reports on Progress in Physics*, 66:1651–1697. [1.1](#)
- [Lebovitz, 1967] Lebovitz, N. R. (1967). Rotating Fluid Masses. *ARA&A*, 5:465–480. [3.13.2](#)
- [LeVeque, 2002] LeVeque, R. J. (2002). *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*. Cambridge University Press. [3.7](#), [3.11.1](#), [3.11.1](#), [3.11.1](#)
- [Levermore, 1984] Levermore, C. D. (1984). Relating Eddington factors to flux limiters. *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, 31:149–160. [2.3](#)
- [Levermore and Pomraning, 1981] Levermore, C. D. and Pomraning, G. C. (1981). A flux-limited diffusion theory. *ApJ*, 248:321–334. [2.3](#)

- [Lichtenstein, 1933] Lichtenstein, L. (1933). *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, von Leon Lichtenstein ... mit 4 Abbildungen*. Berlin, J. Springer, 1933. [3.13.2](#)
- [Lüst and Schlüter, 1955] Lüst, R. and Schlüter, A. (1955). Drehimpulstransport durch Magnetfelder und die Abbremsung rotierender Sterne. Mit 4 Textabbildungen. *Zeitschrift für Astrophysik*, 38:190–211. [2.6.3](#)
- [Lynden-Bell and Pringle, 1974] Lynden-Bell, D. and Pringle, J. E. (1974). The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *MNRAS*, 168:603–637. [2.6.4](#)
- [Mönchmeyer and Müller, 1989] Mönchmeyer, R. and Müller, E. (1989). A Conservative Second-Order Difference Scheme for Curvilinear Coordinates - Part One - Assignment of Variables on a Staggered Grid. *A&A*, 217:351–367. [3.2.1](#)
- [Nakamoto and Nakagawa, 1994] Nakamoto, T. and Nakagawa, Y. (1994). Formation, early evolution, and gravitational stability of protoplanetary disks. *ApJ*, 421:640–650. [5.1](#)
- [Newton, 1687] Newton, I. (1687). *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Royal Society London. [2.1](#)
- [Norman et al., 1980] Norman, M. L., Wilson, J. R., and Barton, R. T. (1980). A new calculation on rotating protostar collapse. *ApJ*, 239:968–981. [4.5.1](#)
- [Norman and Winkler, 1986] Norman, M. L. and Winkler, K. (1986). 2-D Eulerian Hydrodynamics with Fluid Interfaces, Self-Gravity and Rotation. In K.-H. A. Winkler & M. L. Norman, editor, *Astrophysical Radiation Hydrodynamics*, pages 187–216. [3.11.1](#)
- [Saigo et al., 2008] Saigo, K., Tomisaka, K., and Matsumoto, T. (2008). Evolution of First Cores and Formation of Stellar Cores in Rotating Molecular Cloud Cores. *ApJ*, 674:997–1014. [1.2.2](#)
- [Shakura and Sunyaev, 1973] Shakura, N. I. and Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. *A&A*, 24:337–355. [2.6.4](#)
- [Shu, 1977] Shu, F. H. (1977). Self-similar collapse of isothermal spheres and star formation. *ApJ*, 214:488–497. [5.1](#)
- [Späth, 1991] Späth, H. (1991). *Zweidimensionale Spline-Interpolations-Algorithmen*. München, R. Oldenbourg Verlag, 1991. [3.3.1](#)
- [Stamatellos et al., 2007] Stamatellos, D., Whitworth, A. P., Bisbas, T., and Goodwin, S. (2007). Radiative transfer and the energy equation in SPH simulations of star formation. *A&A*, 475:37–49. [1.2.2](#)

- [Stone and Norman, 1992] Stone, J. M. and Norman, M. L. (1992). ZEUS-2D: A radiation magnetohydrodynamics code for astrophysical flows in two space dimensions. I - The hydrodynamic algorithms and tests. *ApJS*, 80:753–790. [4.2.3](#), [4.2.3](#)
- [Toomre, 1964] Toomre, A. (1964). On the gravitational stability of a disk of stars. *ApJ*, 139:1217–1238. [2.9.2](#)
- [Tscharnuter, 1987] Tscharnuter, W. M. (1987). A collapse model of the turbulent presolar nebula. *A&A*, 188:55–73. [1.2.2](#)
- [Tscharnuter and Gail, 2007] Tscharnuter, W. M. and Gail, H.-P. (2007). 2-D preplanetary accretion disks. I. Hydrodynamics, chemistry, and mixing processes. *A&A*, 463:369–392. [2.5](#)
- [Tscharnuter et al., 2009] Tscharnuter, W. M., Schönke, J., Gail, H., Trieloff, M., and Lüttjohann, E. (2009). Protostellar collapse: rotation and disk formation. *A&A*, 504:109–113. [1.2.2](#)
- [Tscharnuter and Winkler, 1979] Tscharnuter, W. M. and Winkler, K. (1979). A method for computing selfgravitating gas flows with radiation. *Computer Physics Communications*, 18:171–199. [2.7](#), [2.7](#), [3.9](#)
- [van Leer, 1977] van Leer, B. (1977). Towards the Ultimate Conservative Difference Scheme. IV. A New Approach to Numerical Convection. *Journal of Computational Physics*, 23:276–299. [3.11.1](#)
- [von Neumann and Richtmyer, 1950] von Neumann, J. and Richtmyer, R. D. (1950). A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamic Shocks. *Journal of Applied Physics*, 21:232–237. [2.7](#)
- [Walch et al., 2009] Walch, S., Burkert, A., Whitworth, A., Naab, T., and Gritschneder, M. (2009). Protostellar discs formed from rigidly rotating cores. *MNRAS*, 400:13–25. [1.2.2](#)
- [Wavre, 1932] Wavre, R. (1932). *Figures planetaires et geodesie*. Paris, Gauthier-Villars et cie, 1932. [3.13.2](#)
- [Wuchterl and Tscharnuter, 2003] Wuchterl, G. and Tscharnuter, W. M. (2003). From clouds to stars. Protostellar collapse and the evolution to the pre-main sequence I. Equations and evolution in the Hertzsprung-Russell diagram. *A&A*, 398:1081–1090. [1.2.1](#), [4.3.1](#)
- [Yorke, 1980] Yorke, H. W. (1980). Numerical solution of the equation of radiation transfer in spherical geometry. *A&A*, 86:286–294. [3.10.1](#)

# Danksagung

Zunächst möchte ich Herrn Prof. Werner M. Tscharnuter für die ausgezeichnete Betreuung meiner Arbeit danken. Seine weitreichenden Kenntnisse und Erfahrungen haben durch zahlreiche Diskussionen maßgeblich zum Gelingen beigetragen. Auch für die weit über fachliche Grenzen gegangenen Gespräche bin ich sehr dankbar. Außerdem weiß ich die Freiheit zu schätzen, die er mir bezüglich der Entwicklung meines Themas zugestanden hat. In Zeiten einer zunehmenden Verschulung der Universitäten, die mittlerweile auch das Doktorandenstudium erfaßt hat, bin ich froh, nicht zur Teilnahme an jenem lächerlichen Theater gezwungen worden zu sein, welches meint durch seine herbeigeredeteten „Synergieeffekte“ eine neue „Exzellenz“ produzieren zu können. Vor allem die theoretische wissenschaftliche Arbeit war und ist sehr individuell geprägt und verlangt ein hohes Maß an eigenverantwortlichem Denken.

Herrn Prof. Peter Bastian gilt mein Dank für die sehr angenehmen und aufschlußreichen Diskussionen zu Aspekten der numerischen Mathematik. Sein Hinweis zur Nutzung direkter Löser zur Lösung der linearen Gleichungssysteme hat den Erfolg meiner Arbeit überhaupt erst möglich gemacht.

Herrn Prof. Hans-Peter Gail danke ich für den durch viele Diskussionen möglichen Einblick in sein umfangreiches Wissen zu physikalischen und chemischen Problemen aller Art.

Mein Dank gilt auch der Deutsche Forschungsgemeinschaft, die durch die Finanzierung im Rahmen der Forschergruppe 759 diese Arbeit ermöglicht hat.

Gregor danke ich für seine Freundschaft, unsere vielen heiteren Gespräche über Alles und Jeden, die unzähligen Kinobesuche und seine beispiellose Hilfsbereitschaft. Meinen jetzigen und ehemaligen Zimmerkollegen Uli, Lana und Katya danke ich für ein angenehmes und auch amüsanter Arbeitsklima. Philipp danke ich zum einen dafür, daß wir beide es geschafft haben den Beginn einer AG-übergreifenden Zusammenarbeit zu realisieren und zum anderen für die Hilfe bei Problemen mit jenen, heute nicht mehr zu durchschauenden Rechenmaschinen. In diesem Zusammenhang möchte ich mich auch bei Emanuel für die vielfachen technischen Rettungsmaßnahmen bedanken.

Weiterhin danke ich meiner ganzen Familie für die bedingungslose Unterstützung, die ich seit jeher erfahren habe, auch wenn es schwer ist zu verstehen was ich eigentlich tue.

Mein besonders herzlicher Dank gilt natürlich Isabel, für unsagbar Vieles.