

Inaugural – Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät

der

Ruprecht-Karls-Universität

Heidelberg

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker Kilian Kilger

aus Bad Langensalza

Tag der mündlichen Prüfung: 14.06.2010

THEMA

Die Vermutung von Chan-Chua und die Kombinatorik
von Windungselementen

Gutachter: Prof. Dr. Winfried Kohnen
Prof. Dr. Eberhard Freitag

ABSTRACT

In our work we find explicit bases for spaces of modular symbols for most levels smaller or equal than five. In the second part of this thesis we deduce from this explicit bases of spaces of elliptic cusp forms in terms of products of two Eisenstein series. We give applications of this to the theory of quadratic forms, especially to conjectures of Chan, Chua and Cooper. Furthermore we prove the linear independence of spaces of so called *periods* of elliptic cusp forms for levels greater than three under some technical conditions. In passing, we prove many interesting combinatorial identities about Stirling and Fibonacci numbers.

ZUSAMMENFASSUNG

In dieser Arbeit bestimmen wir explizite Basen von Räumen Modularer Symbole für fast alle Stufen kleiner gleich Fünf. Im zweiten Teil dieser Arbeit verwenden wir diese Resultate, um explizite Basen für Räume von Spitzenformen elliptischer Modulformen in Termen von Produkten zweier Eisenstein-Reihen anzugeben. Wir geben Anwendungen auf die Theorie der quadratischen Formen, insbesondere auf Vermutungen von Chan, Chua und Cooper. Wir beweisen weiterhin die lineare Unabhängigkeit von Räumen sogenannter *Perioden* elliptischer Modulformen der Stufen größer als Drei unter einigen technischen Bedingungen. Auf dem Weg beweisen wir einige interessante kombinatorische Identitäten über Stirling- und Fibonacci-Zahlen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	9
1.1	Einleitung	9
1.1.1	Perioden von Modulformen	9
1.1.2	Beweismethoden	11
1.1.3	Anwendungen	12
1.2	Danksagungen	13
1.3	Notationen	15
1.3.1	Grundlegendes	15
1.3.2	Der Binomialkoeffizient	15
1.3.3	Dirichlet-Charaktere	16
1.3.4	Modulformen	16
1.4	Modulare Symbole	17
1.4.1	Modulare Symbole	18
1.4.2	Manin-Symbole	19
1.4.3	Rand- und Spitzen-Symbole	20
1.4.4	Die Modulare Involution	22
1.4.5	Die Modulare Paarung	22
1.5	Eisenstein-Reihen	23
1.5.1	Eisenstein-Reihen der Stufe 1	23
1.5.2	Eisenstein-Reihen für Hauptkongruenzgruppen	24
1.5.3	Eisenstein-Reihen für $\Gamma_1(N)$	25
2	Explizite Basen von Räumen Modularer Symbole	27
2.1	Modulare Symbole der Stufe 1	27
2.2	Modulare Symbole der Stufe 2	28
2.3	Modulare Symbole der Stufe 3	50
2.3.1	Ein Erzeugendensystem im allgemeinen Fall	50
2.3.2	Eine Basis im Fall geraden Gewichtes	54
2.3.3	Eine Basis im Fall ungeraden Gewichtes	69
2.4	Modulare Symbole der Stufe 4	71
2.4.1	Eine Basis im Fall ungeraden Gewichtes	71
2.4.2	Eine Basis im Falle geraden Gewichtes	77
2.5	Modulare Symbole der Stufe 5	78
2.6	Zusammenfassung	84
3	Explizite Basen des Raumes der Spitzenformen	86
3.1	Die Rankin-Selberg Methode	86
3.2	Der Fall von Stufe 1	87
3.3	Der Fall von Stufe 2	89

3.4	Der Fall von Stufe 3	92
3.5	Der Fall von Stufe 4 und ungeradem Gewicht	95
3.6	Der Fall von Stufe 4 und geradem Gewicht	97
3.6.1	Ein Beispiel	99
4	Die einfachsten quadratischen Formen	101
4.1	Die Vermutung von Chan und Chua	101
4.2	Die Vermutung von Cooper	105
5	Die Lineare Unabhängigkeit der Perioden	106
6	Vermutungen	109
6.1	Jacobiformen vom Index 1	109
6.2	Siegelsche Modulformen vom Geschlecht 2	110
7	Appendix	113
7.1	Dimensionen von $S_k^{(2)}$ und $M_k^{(2)}$	113
7.2	Eine Identität von Fibonacci-Zahlen	114
7.3	Computerbeweise von hypergeometrischen Identitäten	125
7.4	Die Auflösung einer Rekursion	127
7.5	Die Splittung der Rankin-Faltung	130

1 Einführung

1.1 Einleitung

1.1.1 Perioden von Modulformen

Sei $S_k(N)$ der Raum der Spitzenformen vom Gewicht k zur Gruppe $\Gamma_0(N)$ und sei $f = \sum a_n q^n \in S_k(N)$. Mindestens ebenso wichtig wie f , sind die f zugeordneten L -Reihen

$$L_f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n(f)}{n^s},$$
$$D_f(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_n(f)^2}{n^s}.$$

Berühmte und klassische Anwendungen der Theorie der L -Reihen auf zahlentheoretische Fragestellungen finden sich etwa bei Hecke [Hec70], Tunnel [Tun83] oder Wiles [Wil95]. Gegenstand intensiver Forschung sind die (nach Deligne) kritischen Werte dieser L -Reihen, insbesondere wenn f eine Hecke-Eigenform ist. Beginnend mit den Arbeiten von Shimura [Shi59], Manin [Man73] und Sturm [Stu80] standen Rationalitätsfragen im Vordergrund des Interesses. Hida [Hid81] bringt die kritischen Werte von $D_f(s)$ mit einer Zahl in Verbindung, die Kongruenzen zwischen Modulformen misst. Die hohe Signifikanz dieser kritischen Werte wird in jüngster Zeit durch Vermutungen von Beilinson, Bloch-Kato und anderen unterstrichen. Die obigen L -Reihen sind dann die L -Reihen gewisser f zugeordneter Motive M_f und man hat (zum Teil nur vermutete) Formeln, die die kritischen Werte mit wichtigen arithmetischen Invarianten dieser Motive in Verbindung bringen. Diese so genannte Tamagawazahl-Vermutung ist ein motivisches Analogon der analytischen Klassenzahlformel (siehe [BK90], [Sch90], [DFG04]).

Eine bisher wenig beachtete Fragestellung ist es, inwieweit f durch die kritischen Werte $L_f(j)$ bestimmt ist. Für $N = 1$ hat man etwa die folgende (positive) Antwort (nach Eichler und Shimura).

Satz 1.1. *Sei $f \in S_k(1)$ und $L_f(2\ell) = 0$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$. Dann ist $f = 0$.*

Aus Dimensionsgründen kann ein solches Resultat für $N > 1$ im Allgemeinen nicht richtig sein. Man fasst daher $L_f(j)$ als ein gewisses Integral auf der Modulkurve $X_0(N)$ auf und betrachtet den Raum aller solchen Integrale. Eine algebraische Formalisierung dieses Gedankens liefert dann

einen durch Zykelnintegrale gegebenen Eichler-Shimura Isomorphismus

$$\psi : S_k(N) \rightarrow H_{\text{par}}^1(\Gamma_0(N), V_{k-2})^-. \quad (1)$$

Hierbei steht auf der rechten Seite ein gewisser Unterraum der parabolischen Gruppenkohomologie und V_{k-2} ist ein gewisser $\Gamma_0(N)$ -Modul.

Die oben gestellte Frage beantwortet sich damit trivialerweise wie folgt: Fasst man die ψ definierenden Integrale als *verallgemeinerte L -Werte* auf, verschwindet f genau dann, wenn $\psi(f)$ verschwindet. Es ist allerdings nicht ganz einfach, diese Theorie wieder auf klassische L -Reihen zu beziehen. Für $\Gamma_0(p)$, p prim und gerades Gewicht $k > 2$ hat man etwa den folgenden Satz von Kohnen und Martin [KM08], der mit Dirichlet-Charakteren getwistete L -Reihen involviert.

Satz 1.2. *Sei $f \in S_k(p)^{\text{new}}$ eine Eigenfunktion der Fricke-Involution. Sei $L_f(\ell, \psi) = 0$ für $1 \leq \ell \leq k-1$ und alle primitiven Charaktere ψ mod p mit $\psi(-1) = (-1)^\ell$ und sei $L_f(2\ell) = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{4}$. Dann ist $f = 0$.*

Die Sätze 1.1 und 1.2 sind nicht optimal. Fasst man die Abbildung $f \mapsto L_f(j)$ als Element des Dualraumes $S_k(N)^\vee$ auf, genügen z.B. im Fall $N = 1$ etwa $\lfloor \frac{k}{12} \rfloor$ statt $\frac{k-4}{2}$ L -Reihen, um $S_k(1)^\vee$ zu erzeugen.

Die Auswahl einer Basis ist allerdings nicht einfach. Die L -Reihen erfüllen komplizierte Relationen¹.

Folgende Fragestellungen liegen also nahe:

1. Für welche N erzeugen die Abbildungen $f \mapsto L_f(j)$ den Raum $S_k(N)^\vee$?
2. Was ist in diesen Fällen eine Basis?
3. Welche Relationen erfüllen die L -Reihen in allen anderen Fällen?

In dieser Arbeit sollen diese Fragen fast vollständig beantwortet werden. Klassische L -Reihen-Werte erzeugen den Raum $S_k(N, \psi)^\vee$ genau dann, wenn $N \leq 4$ ist. Wir werden in allen diesen Fällen eine explizite Basis angeben können². Für größere N stellen wir die folgende Vermutung auf.

Vermutung 1.2.1. *Sei $N \geq 4$ und k gerade. Dann sind die Abbildungen $f \mapsto L_f(2\ell + 1)$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$ (als Elemente von $S_k(N)^\vee$) linear unabhängig.*

¹Die Einfachste dieser Relationen kommt von der Funktionalgleichung her und setzt $L_f(j)$ mit $L_f(k-j)$ in Beziehung.

²Im Fall $N = 1$ oder $N = 2, k \equiv 2 \pmod{8}$ berufen wir uns auf Resultate von Fukuhara [Fuk07] und Fukuhara und Yang [FY09].

In dieser Richtung beweisen wir:

Satz 1.3. *Die Vermutung 1.2.1 ist richtig³, falls $N \geq 4$ und $k \leq 50$.*

Genauer werden wir (für $N > 5$) Vermutung 1.2.1 auf eine gewisse Identität von Bernoulli-Zahlen zurückführen. Es wäre interessant zu wissen, ob es einen arithmetischen Grund für den hinter Vermutung 1.2.1 stehenden Satz gibt.

Ähnliche Vermutungen kann man für die geraden Werte $L_f(2\ell)$ aufstellen. Diese sind aber mit den hier verwendeten Methoden schwieriger zu beweisen.

1.1.2 Beweismethoden

Um Basen des Dualraumes der Spitzenformen zu finden, verwenden wir die von Manin, Shokurov und Merel entwickelte Theorie der Modularen Symbole (siehe Abschnitt 1.4 für Referenzen). Modulare Symbole wurden ursprünglich von Birch und Manin entwickelt, um die Homologie von $X_0(N)$ zu berechnen. Später wurden diese von Shokurov auf sogenannte Kuga-Varietäten verallgemeinert. Durch eine kanonische Paarung mit dem Raum der Spitzenformen liefern diese eine geeignete Methode, um Aussagen über L -Reihen von Modulformen auf kombinatorische Fragestellungen zu reduzieren⁴.

Die auftretenden kombinatorischen Probleme erfordern eine Vielzahl verschiedener Lösungsstrategien. Der Fall der Stufe 2 erfordert eine umständliche Rechnung mit Kongruenzen von Binomialkoeffizienten mod 2. Die Lösung für Stufe 3 ist am ehesten dem Gebiet der hypergeometrischen Funktionen und orthogonalen Polynome zuzuordnen. Im Fall der Stufe 4 beweisen wir eine interessante Identität über Binomialkoeffizienten und Stirling-Zahlen. Im Fall der Stufe 5 müssen wir das charakteristische Polynom einer Matrix von Binomialkoeffizienten in Termen von Fibonacci-Zahlen berechnen. Wir führen dazu den sogenannten *geraden Fibonomialkoeffizienten* ein und beweisen eine nicht-triviale Identität desselben, siehe Appendix 7.2.

³Für $N \in \{4, 5\}$ werden wir Varianten des Theorems ohne Einschränkungen an k beweisen.

⁴Ich weiß nicht, inwieweit die in dieser Arbeit bewiesenen Resultate auch ohne Modulare Symbole gezeigt werden können. Dazu müsste man, insbesondere für höhere Stufen, die Theorie der Eisenstein-Reihen besser verstehen. Diese erzeugen auf mysteriöse Art und Weise Relationen zwischen den Perioden der Spitzenformen. Dieses Phänomen wurde von Kohlen und Zagier in [KZ84] im Falle der Stufe 1 genauer untersucht. Die Theorie der Modularen Symbole wird hier im Wesentlichen als eine elegante Möglichkeit benutzt, den Effekt der Eisenstein-Reihen aus der Theorie zu eliminieren.

Um die lineare Unabhängigkeit von Perioden zu beweisen, eignet sich die Theorie der Modularen Symbole nicht. Für den Beweis von Satz 1.3 greifen wir daher auf die klassische Theorie der Periodenpolynome zurück, wie sie etwa bei Kohnen, Zagier, Antoniadis und Fukuhara verwendet wird, siehe [KZ84], [Ant92], [FY09].

In der Beweisfindung habe ich von Computeralgebrasystemen Gebrauch gemacht. Hier sind insbesondere MATHEMATICA [Wol08], SAGE [The09] und MAGMA [Com09] zu nennen. Außerdem habe ich extensiv Neil J.A. Sloanes *Online Encyclopaedia of Integer Sequences* [Slo09] verwendet.

1.1.3 Anwendungen

In dieser Arbeit geben wir eine wichtige Anwendung der oben genannten Sätze. Eine ursprüngliche Motivation der Theorie der Modulformen ist es, die Fourierkoeffizienten von Spitzenformen zu verstehen, die oft wichtige arithmetische Funktionen kodieren. Dies gilt heute umso mehr, als man den Zusammenhang zwischen Hecke-Eigenwerten von Eigenformen und wichtigen Daten von Darstellungen der absoluten Galoisgruppe globaler Körper kennt. Es wäre daher wünschenswert, eine Basis des Raumes $S_k(N)$ zu haben, deren Fourierkoeffizienten aus möglichst einfachen arithmetischen Funktionen bestehen.

Mittels der Theorie der Torischen Varietäten beweisen Borisov und Gunnels in [BG03], dass jede Modulform vom Gewicht $k > 2$ bzgl. $\Gamma_1(N)$ als Linearkombination von Produkten von höchstens *zwei* Eisenstein-Reihen geschrieben werden kann. Dieses Resultat wurde im Fall $\Gamma_0(p)$ von Kohnen und Martin [KM08] wesentlich verbessert. Im zweiten Teil dieser Arbeit präzisieren wir diese allgemeine Aussage und geben explizite Basen von $S_k(\Gamma_1(N))$ in Termen von den (cuspidalen Anteilen von) Produkten zweier Eisenstein-Reihen, falls $N \in \{1, 2, 3, 4\}$. Selbst der Fall $N = 1$ dieses Resultates ist neu, besonders bedeutsam sind aber die Fälle $N = 2$, $N = 3$ und $N = 4$. Dann implizieren die Resultate dieser Arbeit nämlich bekannte Vermutungen von Chan und Chua sowie Cooper, die wir nun beschreiben wollen. Sei dazu

$$\vartheta(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2}, \quad (q = e^{2\pi iz})$$

die klassische Theta-Funktion vom Gewicht $\frac{1}{2}$. Ihre Bedeutung erlangt sie vor allem durch die kombinatorische Identität

$$\vartheta^{2k}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{2k}(n) q^n \in M_k(\Gamma_1(4)).$$

Hierbei ist $r_{2k}(n)$ die Darstellungsanzahl von n durch die wohl einfachste quadratische Form

$$Q_1(x_1, \dots, x_{2k}) = \sum_{i=1}^{2k} x_i^2.$$

Ist k klein, so kann man ϑ^{2k} als Linearkombination von Eisenstein-Reihen ausdrücken und erhält so eine explizite Formel der Darstellungsanzahlen $r_{2k}(n)$ in Termen von Teilersummen. In [Mil96, Mil02] greift Milne dieses Thema wieder auf und gibt explizite Formeln für $r_{2k}(n)$, wenn k die Form $k = 2j^2$ oder $k = 2j^2 + 2j$ besitzt. Hierbei benutzt er vor allem die Theorie der elliptischen und hypergeometrischen Funktionen. Seine Formeln stellen $r_{2k}(n)$ in Termen von j explizit gegebenen Produkten von Teilersummen dar.

In [CC03] vermuten Chan und Chua, dass ϑ^{2k} eine Linearkombination von $\frac{k}{4} - 1$ Produkten *zweier* Eisenstein-Reihen auf $\Gamma_1(4)$ ist. Diese Vermutung wird von Kohnen und Imamoglu in [KI05] für $4 \mid k$ in etwas schwächerer Form bewiesen⁵. Im zweiten Teil dieser Arbeit beweisen⁶ wir die Chan-Chua Vermutung für alle k . Dies gibt insbesondere neue Formeln für r_{2k} in Termen von Cauchy-Faltungen von Teilersummen für *alle* k .

Ein Analogon der Vermutung von Chan und Chua für die Theta-Reihe der quadratischen Form

$$Q_2(x_1, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k (x_i^2 + x_i y_i + y_i^2)$$

stammt von Cooper [Coo08]. Die entsprechende Theta-Reihe ist eine Modulform auf $\Gamma_1(3)$. Die Vermutung wird durch diese Arbeit auf ähnliche Art und Weise gelöst.

1.2 Danksagungen

Ich bedanke mich recht herzlich bei Prof. Dr. Kohnen für das Thema, vielfache Ratschläge und einige Jahre gute und herzliche Zusammenarbeit. Ebenso möchte ich meiner Frau Katja danken, die diese Arbeit korrekturgelesen hat und mich auch sonst hervorragend unterstützt. Ich bedanke mich

⁵Kohnen und Imamoglu geben ein Erzeugendensystem für $S_k(2)$ in Termen von Produkten zweier Eisenstein-Reihen an. Mit einem Trick kann ϑ^{2k} dann durch diese Eisenstein-Reihen linear kombiniert werden. Wir werden in dieser Arbeit sogar eine *Basis* von $S_k(2)$ in Termen von Produkten zweier Eisenstein-Reihen finden.

⁶Wir benötigen aber eine etwas größere Anzahl von Eisenstein-Reihen. Dies ist dem Umstand geschuldet, dass wir direkt mit $\Gamma_1(4)$ arbeiten und nicht mit Räumen von Modulformen der Stufe 2 und nicht-trivialem Multiplikatorsystem.

außerdem beim gesamten Mathematischen Institut und meinen Kollegen für diese schöne Atmosphäre und viele nicht-mathematische und mathematische Gespräche. Mein besonderer Dank gilt Patrick Forré, Jochen Gärtner, Johannes Bartels, Athanasios Bouganis, Peter Barth, Johannes Schmitt, Denis Vogel und Michael Maier.

1.3 Notationen

1.3.1 Grundlegendes

Wie üblich bezeichnen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ und \mathbb{C} die natürlichen, ganzen, reellen und komplexen Zahlen. Sind $a, b \in \mathbb{Z}$, so ist (a, b) der größte gemeinsame Teiler von a, b . Mitunter schreiben wir auch $\text{ggT}(a, b)$. Ist R ein Ring, so bezeichnen wir die Einheiten von R mit R^\times und setzen $R^* = R \setminus \{0\}$. Den R -Modul der $n \times m$ Matrizen mit Einträgen aus R bezeichnen wir mit $\text{Mat}(n \times m, R)$. Matrizen $A = (a_{ij})$ werden manchmal mit dem Eintrag $(i, j) = (0, 0)$ und mitunter mit $(i, j) = (1, 1)$ beginnen. Wir werden dies in jedem Einzelfall getrennt festlegen.

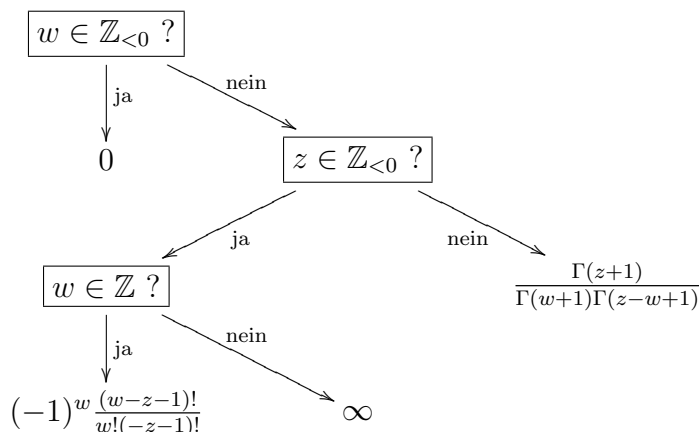
Wir werden in dieser Arbeit mit i meistens einen Index bezeichnen. Sehr selten bezeichnet i auch die imaginäre Einheit. Dies ist genau dann der Fall, wenn i als πi oder $i\infty$ auftritt. Eine Verwechslungsgefahr ist daher nicht gegeben.

1.3.2 Der Binomialkoeffizient

Wir definieren den Binomialkoeffizienten (siehe [GKP94, Eq. (5.90)]) als die Funktion

$$\binom{z}{w} : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}, (z, w) \mapsto \binom{z}{w} \stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{\substack{u \rightarrow z \\ u \neq z}} \lim_{\substack{v \rightarrow w \\ v \neq w}} \frac{\Gamma(u+1)}{\Gamma(v+1)\Gamma(u-v+1)}.$$

Man beachte die wichtige Reihenfolge der Limiten auf der rechten Seite. Konkret kann man den Binomialkoeffizienten $\binom{z}{w}$ mittels des folgenden Flussdiagramms berechnen.



Besonders oft benutzen wir stillschweigend

$$n \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left(\binom{n}{k} = 0 \Leftrightarrow (k > n \vee k < 0) \right).$$

1.3.3 Dirichlet-Charaktere

Wir bezeichnen den trivialen Dirichlet-Charakter mod N mit $\mathbf{1}_N$. Der prinzipale Charakter, d.h. der triviale Charakter mod 1 wird mit $\mathbf{1}_1$ bezeichnet. Jedem Charakter χ mod N ist die L -Reihe

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \frac{1}{n^s}$$

zugeordnet. Diese konvergiert für $\operatorname{Re}(s) \gg 0$, kann aber zu einer meromorphen Funktion auf ganz \mathbb{C} fortgesetzt werden. Wir bezeichnen diese meromorphe Fortsetzung ebenfalls mit $L(s, \chi)$.

1.3.4 Modulformen

Hauptreferenz für elliptische Modulformen ist das Buch [DS05] von Diamond und Shurman. Die obere Halbebene wird mit \mathfrak{H} und das darauf definierte invariante Volumenelement mit $dV = y^{-2} dx \wedge dy$ bezeichnet. Die übliche Operation einer Matrix $\alpha \in \operatorname{Gl}_2^+(\mathbb{Q})$ auf einem $z \in \mathfrak{H}$ mittels Möbiustransformation bezeichnen wir mit $\alpha \langle z \rangle$. Ein solches α operiert auf Funktionen $f : \mathfrak{H} \rightarrow \mathbb{C}$ durch den Slashoperator

$$(f|_k \alpha)(z) = (\det \alpha)^{k/2} j(\alpha, z)^{-k} f(\alpha \langle z \rangle).$$

Hierbei ist $j(\alpha, z)$ der übliche Automorphiefaktor. Ist k aus dem Zusammenhang klar, etwa wenn f eine Modulform vom Gewicht k ist, schreiben wir auch $f|_k$ statt $f|_k \alpha$.

Ist $\Gamma \subset \operatorname{Sl}_2(\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von endlichem Index, so bezeichnen wir den Raum der (holomorphen) Modulformen (resp. Spitzenformen) vom Gewicht k bezüglich Γ mit $M_k(\Gamma)$ (resp. $S_k(\Gamma)$). Für ein gegebenes $N \in \mathbb{N}$

benutzen wir die Untergruppen

$$\begin{aligned}\Gamma(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv b \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma_0(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N} \right\}, \\ \Gamma_1(N) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) \mid c \equiv 0 \pmod{N}, a \equiv d \equiv 1 \pmod{N} \right\}.\end{aligned}$$

Für Modulformen (resp. Spitzenformen) bezüglich $\Gamma_0(N)$ schreiben wir $M_k(N)$ (resp. $S_k(N)$). Ist χ ein Dirichlet-Charakter modulo N , so sind $M_k(N, \chi)$ (resp. $S_k(N, \chi)$) die Räume von Modulformen (resp. Spitzenformen) auf $\Gamma_1(N)$, die sich auf $\Gamma_0(N)/\Gamma_1(N) \cong \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ mittels χ transformieren. Wir bezeichnen den Raum der Altformen (resp. den Raum der Neuf Formen) bzgl. $\Gamma_1(N)$ mit $S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{old}}$ (resp. $S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{new}}$), siehe [DS05, Chapter 5]. Für andere Gruppen benutzen wir eine ähnliche Notation. Wie allgemein üblich verstehen wir unter einer Neuf orm eine normalisierte Hecke-Eigenform in $S_k(\Gamma_1(N))^{\mathrm{new}}$, d.h. insbesondere eine Eigenform bezüglich *aller* Hecke-Operatoren T_n ($n \in \mathbb{N}$). Dies ist auch die ursprüngliche Definition von Atkin und Lehner, siehe die Definition nach Lemma 18 in [AL70].

Den n -ten Fourierkoeffizienten einer Funktion $f \in M_k(N)$ bezeichnen wir mit $a_n(f)$. Ist also $f \in M_k(\Gamma_1(N))$, so besitzt f eine Fourierentwicklung der Form $f = \sum_{n \geq 0} a_n(f)q^n$. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, setzen wir für $f \in S_k(\Gamma_1(N))$ und einen Dirichlet-Charakter $\chi \pmod{N}$

$$L_f(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) \frac{a_n(f)}{n^s}.$$

Ist $\chi = \mathbf{1}_1$ der prinzipale Charakter, schreiben wir $L_f(s)$ statt $L_f(s, \mathbf{1}_1)$. Wie bereits im Abschnitt über Dirichlet-Charaktere angedeutet, unterscheiden wir nicht zwischen $L_f(s, \chi)$ und der maximalen meromorphen Fortsetzung.

1.4 Modulare Symbole

In diesem Abschnitt wiederholen wir die Theorie der Modularen Symbole. Ursprünglich wurde diese für Gewicht 2 von Birch [Bir71] entwickelt, um die Birch und Swinnerton-Dyer Vermutungen numerisch zu überprüfen. Manin [Man72] benutzte die Theorie um Rationalitätsaussagen für automorphe L -Reihen zu beweisen. Wegweisend bei der Berechnung Modularer Symbole im Gewicht 2 Fall waren Cremonas Buch [Cre97a] und Artikel [Cre97b].

Die Theorie wurde zuerst von Merel [Mer94] auf den Fall höheren

Gewichtes verallgemeinert. Merel baut dabei wesentlich auf Arbeiten von Shokurov [Sho76a], [Sho76b], [Sho80] auf, die die Homologietheorie von Kuga-Varietäten benutzen. Einen rein kohomologischen Zugang, der ohne Kuga-Varietäten auskommt, findet man bei Wiese [Wie09].

Modulare Symbole sind heute das wesentliche Instrument, um Modulformen und deren Perioden mit dem Computer zu berechnen. Die im Folgenden beschriebene Theorie wurde zuerst von William Stein in die Computeralgebrasysteme SAGE [The09] und MAGMA [Com09] implementiert und von ihm benutzt, um Invarianten modularer abelscher Varietäten zu berechnen [Ste00].

Es gibt allerdings eine wachsende Anzahl von Veröffentlichungen, in denen mittels dieser Theorie auch qualitative Resultate erzielt wurden. Als Beispiel sei hier das schon in der Einleitung zitierte Paper von Borisov und Gunnels [BG03] über Torische Modulformen genannt.

1.4.1 Modulare Symbole

Sei $\Gamma \subset \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$ eine Kongruenzuntergruppe und $k \geq 2$. Sei \mathbb{M} die Gruppe, die als Quotient der freien abelschen Gruppe in den Symbolen $\{\alpha, \beta\}$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$) modulo den Relationen

$$\{\alpha, \beta\} + \{\beta, \gamma\} + \{\gamma, \alpha\} = 0, \quad (\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})),$$

entsteht. In \mathbb{M} gilt automatisch $\{\alpha, \beta\} = -\{\beta, \alpha\}$ und $\{\alpha, \alpha\} = 0$. Setze

$$\mathbb{M}_k = \mathbb{C}[X, Y]_{k-2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{M},$$

wobei $\mathbb{C}[X, Y]_{k-2}$ der komplexe Vektorraum der homogenen Polynome vom Grad $k - 2$ in den Variablen X, Y ist. Die Gruppe $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Q})$ operiert auf \mathbb{M}_k vermittels

$$g \circ (P \otimes \{\alpha, \beta\}) = P(dX - bY, -cX + aY) \otimes \{g(\alpha), g(\beta)\}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Der Quotientenraum $\mathbb{M}_k(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathbb{M}_k$ heißt *Vektorraum der Modularen Symbole* vom Gewicht k für Γ (über \mathbb{C}).

Hinweis: In der obigen Konstruktion kann man \mathbb{C} durch einen beliebigen kommutativen Ring ersetzen und erhält einen analogen Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma, R)$. Insbesondere trägt $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ eine kanonische ganzzahlige Struktur. Wir werden davon allerdings im Folgenden keinen Gebrauch machen.

1.4.2 Manin-Symbole

Modulare Symbole der Form

$$[P, g] := g \circ (P \otimes \{0, \infty\}) \in \mathbb{M}_k(\Gamma), \quad (P \in \mathbb{C}[X, Y]_{k-2}, g \in \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})),$$

heißen *Manin-Symbole*. Aufgrund des sogenannten *Manin-Tricks* wird $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ durch Manin-Symbole erzeugt. Man kann zeigen, dass das Symbol $[P, g]$ nur von der Linksnebenklasse von g modulo Γ abhängt. In dieser Arbeit ist meist $\Gamma = \Gamma_1(N)$. In diesem Fall hat man die Isomorphie

$$\begin{aligned} \Gamma_1(N) \backslash \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) &\rightarrow \{(c, d) \mid (c, d) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2, (c, d, N) = 1\}, \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (c, d) \bmod N. \end{aligned}$$

Wir schreiben auch (i, c, d) an Stelle von $[X^i Y^{k-2-i}, \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}]$. Definitionsgemäß hängt (i, c, d) nur von $(c, d) \bmod N$ ab und

$$\{(i, c, d) \mid 0 \leq i \leq k-2, (c, d) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2, (c, d, N) = 1\}$$

erzeugt $\mathbb{M}_k(\Gamma)$. Der folgende Satz von Shokurov und Merel ist einer der wichtigsten Sätze der Theorie der Modularen Symbole. Durch ihn wird die Theorie der Modulformen algebraisiert und damit, etwa auf dem Computer, berechenbar gemacht.

Satz 1.4 (Shokurov, Merel). *Die Manin-Symbole von $\Gamma_1(N)$ erfüllen folgende drei Sets an Relationen.*

$$(I) \quad (i, c, d) + (-1)^i (k-2-i, d, -c) = 0.$$

$$(II) \quad \begin{aligned} (i, c, d) + (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} (j, d, -c-d) \\ + (-1)^{k-2-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, -c-d, c) = 0. \end{aligned}$$

$$(III) \quad (i, c, d) - (-1)^{k-2} (i, -c, -d) = 0.$$

Weiterhin sind dies alle Relationen zwischen Manin-Symbolen von $\Gamma_1(N)$, d.h. $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(N))$ ist der Quotient des von den Symbolen (i, c, d) erzeugten komplexen Vektorraumes modulo den oben angegebenen Relationen I, II und III.

Beweis. Dies ist die Spezialisierung der Resultate aus [Mer94, Proposition 1 und Proposition 3] auf den Fall $\Gamma = \Gamma_1(N)$. Merels Resultat nutzt die Theorie der Kuga-Varietäten von Shokurov und ist damit relativ schwer zugänglich. Einen elementaren (kohomologischen) Zugang gibt Wiese [Wie09]. \square

Man bemerke, dass das dritte Set an Relationen in unserem Fall durch zweimalige Anwendung des ersten Sets von Relationen folgt. Es ist leicht zu sehen, dass die Modularen Symbole die angegebenen Relationen erfüllen. Es ist aber sehr viel schwieriger zu beweisen, dass dies tatsächlich alle Relationen sind. Wir werden die nicht-triviale Implikation des Satzes an keiner Stelle dieser Arbeit verwenden.

1.4.3 Rand- und Spitzen-Symbole

Wir gehen analog zu Abschnitt 1.4.1 vor. Sei \mathbb{B} die freie abelsche Gruppe in den Symbolen $\{\alpha\}$, wobei $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$. Setze

$$\mathbb{B}_k = \mathbb{C}[X, Y]_{k-2} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{B}.$$

Dann operiert $\mathrm{Gl}_2(\mathbb{Q})$ auf \mathbb{B}_k durch

$$g \circ (P \otimes \{\alpha\}) = P(dX - bY, -cX + aY) \otimes \{g(\alpha)\}, \quad g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Der Vektorraum $\mathbb{B}_k(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathbb{B}_k$ heißt *Vektorraum der Randsymbole* vom Gewicht k für Γ (über \mathbb{C}). Man hat eine Rand-Abbildung

$$\delta : \mathbb{M}_k(\Gamma) \rightarrow \mathbb{B}_k(\Gamma), \quad P \otimes \{\alpha, \beta\} \mapsto P \otimes \{\beta\} - P \otimes \{\alpha\}.$$

Der Kern von δ heißt *Vektorraum der Spitzen-Symbole* vom Gewicht k für Γ (über \mathbb{C}) und wird mit $\mathbb{S}_k(\Gamma)$ bezeichnet.

Lemma 1.5 (Merel). *Für $k > 2$ ist δ surjektiv und man hat eine exakte Sequenz*

$$0 \rightarrow \mathbb{S}_k(\Gamma) \rightarrow \mathbb{M}_k(\Gamma) \xrightarrow{\delta} \mathbb{B}_k(\Gamma) \rightarrow 0.$$

Für $k = 2$ erhält man eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow \mathbb{S}_2(\Gamma) \rightarrow \mathbb{M}_2(\Gamma) \xrightarrow{\delta} \mathbb{B}_2(\Gamma) \xrightarrow{\lambda \otimes \{\alpha\} \mapsto \lambda} \mathbb{C} \rightarrow 0.$$

Beweis. Siehe [Mer94, Proposition 5]. □

Sei R_k die Äquivalenzrelation auf $\mathbb{C}[\Gamma \backslash \mathbb{Q}^2]$, die $[\Gamma \begin{pmatrix} \lambda u \\ \lambda v \end{pmatrix}]$ mit $\text{sign}(\lambda)^k [\Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}]$ für $\lambda \in \mathbb{Q}^\times$ identifiziert. Bezeichne den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}[\Gamma \backslash \mathbb{Q}^2]/R_k$ mit $B_k(\Gamma)$. Dann gilt

Lemma 1.6 (Merel).

1. Es gibt einen kanonischen Isomorphismus komplexer Vektorräume

$$\mu : \mathbb{B}_k(\Gamma) \rightarrow B_k(\Gamma), P \otimes \left\{ \frac{u}{v} \right\} \mapsto P(u, v) \left[\Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right].$$

2. Ist k gerade, hat man einen kanonischen Isomorphismus

$$B_k(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}[\mathbb{Q} \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})], \left[\Gamma \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right] \mapsto \frac{a \frac{u}{v} + b}{c \frac{u}{v} + d}.$$

Man hat dann insbesondere $\dim B_k(\Gamma) = \#\{\text{Spitzen von } \Gamma\}$.⁷

3. Definiere $\tilde{\delta} : \mathbb{M}_k(\Gamma) \rightarrow B_k(\Gamma)$ auf Manin-Symbolen durch

$$\tilde{\delta}([P, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}]) = P(1, 0) \left[\Gamma \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \right] - P(0, 1) \left[\Gamma \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right].$$

Dann ist $\tilde{\delta}$ wohldefiniert und das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{M}_k(\Gamma) & \xrightarrow{\delta} & \mathbb{B}_k(\Gamma) \\ & \searrow \tilde{\delta} & \swarrow \mu \\ & & B_k(\Gamma) \end{array}$$

kommutiert. Insbesondere ist $\mathbb{S}_k(\Gamma) = \ker \tilde{\delta}$.

Beweis. Siehe [Mer94, Proposition 6]. □

Insbesondere der dritte Teil des vorigen Lemmas ist sehr nützlich um den Raum der Spitzensymbole zu berechnen.

⁷Vorsicht: Entgegen der entsprechenden Behauptung in [Mer94, p. 66] ist die letzte Aussage für k ungerade i.A. falsch. Besitzt Γ irreguläre Spitzen und ist k ungerade, so ist $\dim B_k(\Gamma)$ gleich der Anzahl der regulären Spitzen.

1.4.4 Die Modulare Involution

Auf $\mathbb{M}_k(\Gamma)$ gibt es eine Involution η , die auf Manin-Symbolen durch

$$\eta^*([P, (c, d)]) = [P(-X, Y), (-u, v)] \quad (2)$$

definiert ist. Wie üblich bezeichnen $\mathbb{S}_k(\Gamma)^\pm$ und $\mathbb{M}_k(\Gamma)^\pm$ die ± 1 Eigenräume von η^* .

Vorsicht: In Merels Arbeit (siehe [Mer94, Proposition 12]) wird die Modulare Involution noch mit einem Minuszeichen versehen. Merels $+1$ -Eigenräume sind also unsere -1 -Eigenräume und umgekehrt. Wir folgen mit unserer Konvention der Konvention von William Stein [Ste07] und Borisov und Gunnels [BG03].

1.4.5 Die Modulare Paarung

Seien $S_k(\Gamma)$ (resp. $\overline{S_k(\Gamma)}$) der Raum der holomorphen (resp. der antiholomorphen) Spitzenformen vom Gewicht k zur Gruppe Γ . Man hat die kanonische Paarung

$$(S_k(\Gamma) \times \overline{S_k(\Gamma)}) \times \mathbb{M}_k(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$((f, \bar{g}), P \otimes \{\alpha, \beta\}) \mapsto \int_\alpha^\beta f(z)P(z, 1)dz + \int_\alpha^\beta \overline{g(z)}P(\bar{z}, 1)d\bar{z}.$$

Der folgende Satz ist eine Variante des bekannten Eichler-Shimura Theorems.

Satz 1.7 (Shokurov, Merel). *Die Folgenden induzierten Paarungen sind perfekt:*

$$(S_k(\Gamma) \times \overline{S_k(\Gamma)}) \times \mathbb{S}_k(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C},$$

$$S_k(\Gamma) \times \mathbb{S}_k(\Gamma)^+ \rightarrow \mathbb{C},$$

$$S_k(\Gamma) \times \mathbb{S}_k(\Gamma)^- \rightarrow \mathbb{C}.$$

Beweis. Siehe [Mer94, Theorem 3] und [Mer94, Proposition 8]. □

Für die Anwendungen benötigen wir noch eine Formel, welche die Dimension des Raumes der Modularen (Spitzen-) Symbole mit der Dimension des Raumes der Modulformen in Beziehung setzt. Das folgende Lemma ist unter Experten sicherlich wohlbekannt. Da es in der Literatur keine Referenz gibt, sei es hier mit Beweis aufgeführt.

Lemma 1.8. *Es gilt*

1. $\dim \mathbb{S}_k(\Gamma_1(N)) = 2 \dim S_k(\Gamma_1(N))$.
2. $\dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(N)) = \dim M_k(\Gamma_1(N)) + \dim S_k(\Gamma_1(N))$.
3. $\dim \mathbb{S}_k(\Gamma_1(N))^+ = \dim \mathbb{S}_k(\Gamma_1(N))^- = \dim S_k(\Gamma_1(N))$.

Beweis. Sei $\Gamma = \Gamma_1(N)$. Nach Satz 1.7 gibt es eine perfekte Paarung

$$(S_k(\Gamma) \times \overline{S_k(\Gamma)}) \times \mathbb{S}_k(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Daraus folgt 1. Man hat weiterhin Isomorphismen

$$\mathbb{M}_k(\Gamma) \cong H^1(\Gamma, \mathbb{C}[X, Y]_{k-2})$$

(siehe [Wie09]) und

$$H^1(\Gamma, \mathbb{C}[X, Y]_{k-2}) \cong M_k(\Gamma) \oplus \overline{S_k(\Gamma)}$$

(siehe z.B. [Hid93, Thm. 2, Chapt. 6.3]). Das impliziert 2. Die dritte Aussage folgt aus Satz 1.7. \square

1.5 Eisenstein-Reihen

In dieser Arbeit werden wir die verschiedensten Typen von Eisenstein-Reihen benötigen. In diesem Abschnitt werden wir die dazu verwendeten Notationen klären.

Ich orientiere mich dabei an den Büchern von Diamond und Shurman [DS05, Chapter 4] und Miyake [Miy06, Chapter 7].

1.5.1 Eisenstein-Reihen der Stufe 1

Sei $P_+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ der „positive“ Teil der parabolischen Untergruppe von $\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})$. Wir definieren für gerades $k \geq 4$ die Eisenstein-Reihen

$$G_k(z) = \sum_{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(cz + d)^k} \in M_k(1),$$

$$E_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(cz + d)^k} = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in P_+ \setminus \mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z})} j(\gamma, z)^{-k} = \frac{G_k(z)}{2\zeta(k)}. \quad (3)$$

Das folgende Lemma ist wohlbekannt.

Lemma 1.9. Die Fourierentwicklung von E_k ist für jedes gerade $k \geq 4$ durch den Ausdruck

$$E_k(z) = 1 - \frac{2k}{B_k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n)q^n, \quad \sigma_k(n) := \sum_{\substack{d|n \\ d>0}} d^k$$

gegeben.

Die im Lemma gegebene Fourier-Entwicklung für E_k konvergiert auch für $k = 2$. Wir setzen daher

$$E_2(z) = 1 - 24 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(n)q^n.$$

Es ist E_2 keine Modulform im klassischen Sinne, aber z.B. eine p -adische Modulform im Sinne von Serre [Ser72]. Man hat aber das folgende Lemma.

Lemma 1.10. Für jedes $t \in \mathbb{N}$ und jedes $k \geq 2$ ist

$$E_{k,t}^L(z) = E_k(z) - tE_k(tz) \in M_k(t)$$

eine Modulform der Stufe t , nicht-trivial für $t > 1$.

1.5.2 Eisenstein-Reihen für Hauptkongruenzgruppen

Fixiere eine Stufe $N \in \mathbb{N}$ und ein Gewicht $k > 2$. Setze $\epsilon_N = 1/2$, wenn $N \in \{1, 2\}$ und sonst 1. Für ein $v \in \mathbb{Z}^2$ bezeichne \bar{v} die Restklasse in $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2$. Sei im folgenden stets

$$\bar{v} \in \{(c, d) \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \mid (c, d, N) = 1\} = \{w \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^2 \mid \text{ord}(w) = N\}.$$

Wir definieren in diesem Fall die Eisenstein-Reihe

$$G_k^{\bar{v}}(z) := \sum_{\substack{(c,d) \equiv v \pmod{N} \\ (c,d) \neq (0,0)}} \frac{1}{(cz + d)^k} \in M_k(\Gamma(N)). \quad (4)$$

Analog zu (3) hat man auch hier eine normalisierte Version. Ist $v = (c, d)$ und ist $\delta \in \text{Sl}_2(\mathbb{Z})$ mit unterer Zeile (c, d) gewählt, so definiert man

$$E_k^{\bar{v}}(z) := \epsilon_N \sum_{\substack{(c,d) \equiv v \pmod{N} \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(cz + d)^k} = \epsilon_N \sum_{\gamma \in P_+ \cap \Gamma(N) \setminus \Gamma(N)\delta} j(\gamma, z)^{-k}.$$

Der Zusammenhang zwischen $G_k^{\bar{v}}$ und $E_k^{\bar{v}}$ ist hier allerdings komplizierter. Man hat

$$E_k^{\bar{v}} = \epsilon_N \sum_{n \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^\times} \zeta_+^n(k, N) G_k^{n-1\bar{v}}(z).$$

Hierbei ist

$$\zeta_+^n(k, N) = \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv n \pmod{N}}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^k}.$$

Satz 1.11. Die Fourierentwicklung von $G_k^{\bar{v}}$ ist für $v = (c, d)$ durch

$$G_k^{\bar{v}}(z) = \delta(c) \zeta^d(k) + \frac{C_k}{N^k} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^{\bar{v}}(n) q_N^n, \quad (q_N = e^{2\pi iz/N})$$

gegeben. Hierbei ist

$$\delta(c) = \begin{cases} 1 & c \equiv 0 \pmod{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \zeta^d(k) = \sum_{\substack{m \equiv d \pmod{N} \\ m \neq 0}} \frac{1}{m^k},$$

und

$$C_k = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}, \quad \sigma_{k-1}^{\bar{v}}(n) = \sum_{\substack{m|n \\ n/m \equiv c \pmod{N}}} \text{sgn}(m) m^{k-1} \mu_N^{d \cdot m}.$$

Hierbei wird in den definierenden Summen von ζ^d und $\sigma_{k-1}^{\bar{v}}$ über positive und negative Werte von m summiert und $\mu_N = e^{2\pi i/N}$.

Die Eisenstein-Reihen $G_k^{\bar{v}}$ haben das folgende übersichtliche Transformationsverhalten unter Modultransformationen.

Satz 1.12. Für jedes $\alpha \in Sl_2(\mathbb{Z})$ gilt $G_k^{\bar{v}}|_\alpha = G_k^{\bar{v}\alpha}$.

1.5.3 Eisenstein-Reihen für $\Gamma_1(N)$

Sei N und k wie im Abschnitt 1.5.2 gewählt. Sei ψ ein Charakter modulo N mit $\psi(-1) = (-1)^k$. Der Prototyp einer Eisenstein-Reihe für $\Gamma_1(N)$ ist die Reihe

$$E_{k,N}^*(z, \psi) = \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)_\infty \setminus \Gamma_0(N)} \bar{\psi}(d) (cz + d)^{-k} \in M_k(N, \psi). \quad (5)$$

Diese ist ein Spezialfall der nicht-holomorphen Eisenstein-Reihe

$$E_{k,N}^*(z, s, \psi) = y^s \sum_{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)_\infty \setminus \Gamma_0(N)} \overline{\psi}(d)(cz + d)^{-k} |cz + d|^{-2s}. \quad (6)$$

$E_{k,N}^*(z, s, \psi)$ konvergiert absolut und lokal gleichmäßig für $k + 2\operatorname{Re}(s) > 2$ und transformiert sich wie eine Modulform vom Gewicht k , Stufe N und Charakter ψ . Für $s = 0, k > 2$ erhält man die Reihe $E_{k,N}^*(z, \psi)$ zurück. Die so erhaltenen Eisenstein-Reihen sind die Eisenstein-Reihen an der Spitze ∞ .

Eisenstein-Reihen für andere Spitzen erhält man aus Eisenstein-Reihen der Hauptkongruenzgruppen wie folgt. Sei $u, v \in \mathbb{N}$ mit $uv \mid N$. Wähle Dirichlet-Charaktere ψ, φ modulo u, v mit $(\psi\varphi)(-1) = (-1)^k$ derart, dass φ primitiv ist. Dann hat man die Eisenstein-Reihe

$$G_k^{\psi, \varphi}(z) = \sum_{c=0}^{u-1} \sum_{d=0}^{v-1} \sum_{e=0}^{u-1} \psi(c) \overline{\varphi}(d) G_k^{\overline{(\psi\varphi)(cv, d+ev)}}(z) \in M_k(N, \psi\varphi). \quad (7)$$

Satz 1.13. *Setze*

$$E_k^{\psi, \varphi}(z) = \delta(\psi) L(1 - k, \varphi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^{\psi, \varphi}(n) q^n \quad (8)$$

mit

$$\delta(\psi) = \begin{cases} 1 & \psi = \mathbf{1}_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad \sigma_{k-1}^{\psi, \varphi}(n) = \sum_{\substack{m \mid n \\ m > 0}} \psi(n/m) \varphi(m) m^{k-1}. \quad (9)$$

Dann ist die Fourierentwicklung von $G_k^{\psi, \varphi}$ durch

$$G_k^{\psi, \varphi} = \frac{C_k G(\overline{\varphi})}{v^k} E_k^{\psi, \varphi}$$

gegeben. Hierbei ist $G(\varphi)$ die φ zugeordnete Gauß-Summe.

Man kann ebenso Eisenstein-Reihen $E_k(z, \psi, \varphi)$ definieren, falls φ nicht primitiv ist, siehe [Miy06, Chapter 7]. Wir werden die Fourierkoeffizienten dieser Eisenstein-Reihen aber in dieser Arbeit nicht benötigen. Wie in [DS05, Chapter 4] gezeigt wird, können alle Eisenstein-Reihen für $\Gamma_1(N)$ als Linearkombination der hier Gegebenen geschrieben werden.

2 Explizite Basen von Räumen Modularer Symbole

In diesem Kapitel wollen wir explizite Basen von Räumen Modularer Symbole im Fall kleiner Stufe bestimmen. Da Manin-Symbole der Form $(i, 0, 1)$ unter der Paarung des Satzes 1.7 zu den Werten von L -Reihen elliptischer Modulformen an den kritischen Stellen korrespondieren, werden wir versuchen, Basen aus solchen Manin-Symbolen zu finden. Dies ist aus Dimensionsgründen genau dann möglich, wenn die Stufe echt kleiner als 5 ist.

Definition 2.1. *Sei Γ eine Kongruenzuntergruppe. Ein Manin-Symbol der Form $(i, 0, 1) \in \mathbb{M}_k(\Gamma)$ heißt Windungselement oder Windungssymbol (siehe [MSD74, §2.2]).*

Aus der Definition der Involution η^* (siehe Abschnitt 1.4.4) sieht man, dass ein Windungselement $(i, 0, 1)$ genau dann in $\mathbb{S}_k(\Gamma)^+$ (resp. $\mathbb{S}_k(\Gamma)^-$) ist, wenn i gerade ist (resp. ungerade).

Definition 2.2. *Ein Windungselement $(i, 0, 1) \in \mathbb{M}_k(\Gamma)$ heißt gerade (ungerade), wenn i gerade (ungerade) ist.*

2.1 Modulare Symbole der Stufe 1

Der scheinbar einfachste Fall sollte der Fall der vollen Modulgruppe sein. Dies ist allerdings nicht der Fall⁸. Die Dimension des Raumes der Spitzenformen zur vollen Modulgruppe beträgt ungefähr $\lfloor \frac{k}{12} \rfloor$ und wir haben $k - 2$ Windungselemente, davon etwa $\frac{k-2}{2}$ in den Eigenräumen $\mathbb{S}_k(1)^\pm$ unter der Modularen Involution η^* . Es ist daher einigermaßen kompliziert eine konkrete Basis herauszusuchen und man kann nicht erwarten eine in irgendeiner Art „kanonische“ Basis zu finden.

Die Relationen zwischen den Windungselementen der vollen Modulgruppe sind ein klassisches Resultat von Eichler und Shimura, siehe [Lan76, Chapter V], und gewissermaßen das Vorbild für Theorem 1.4. In dieser klassischen Sprache wurde das Problem von Fukuhara [Fuk07] gelöst. Übersetzt man sein Resultat in die Sprache der Modularen Symbole, erhält man den folgenden Satz.

Satz 2.3. *Sei $d_k = \dim S_k(1)$. Dann gilt:*

⁸Wir werden später sehen, dass der Fall der Stufe 4 in vielerlei Hinsicht der „einfachste“ Fall ist.

1. Ist $k \equiv 0 \pmod{4}$, so ist $\{(4i - 1, 0, 1) \mid i = 1, \dots, d_k\}$ eine Basis von $S_k(1)^-$.
2. Ist $k \equiv 2 \pmod{4}$, so ist $\{(4i + 1, 0, 1) \mid i = 1, \dots, d_k\}$ eine Basis von $S_k(1)^-$.

Beweis. Siehe [Fuk07, Theorem 2.2]. □

Korollar 2.4. Sei $d_k = \dim S_k(1)$. Dann gilt:

1. Ist $k \equiv 0 \pmod{4}$, so hat man einen Isomorphismus

$$S_k(1) \rightarrow \mathbb{C}^{d_k}, f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(4) \\ L_f(8) \\ \vdots \\ L_f(4d_k) \end{pmatrix}.$$

2. Ist $k \equiv 2 \pmod{4}$, so hat man einen Isomorphismus

$$S_k(1) \rightarrow \mathbb{C}^{d_k}, f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(6) \\ L_f(10) \\ \vdots \\ L_f(4d_k + 2) \end{pmatrix}.$$

2.2 Modulare Symbole der Stufe 2

Nun soll der Fall von Stufe 2 und geradem Gewicht $k > 2$ betrachtet werden. Dieser spielt eine gewisse Rolle in der Theorie der Darstellungsanzahlen natürlicher Zahlen als Summe von $8n$ Quadraten und ist daher von besonderer Bedeutung. Die ersten Resultate über Modulare Symbole der Stufe 2 finden sich bei Kohnen und Imamoglu [KI05]. Wir zitieren insbesondere die folgende wichtige Proposition aus dieser Arbeit.

Proposition 2.4.1 (Kohnen, Imamoglu).

1. Sei $f \in S_k(2)$ und es gelte

$$\int_0^{i\infty} f(z)z^{2n+1} = 0, \quad (\forall n = 1, \dots, \frac{k-6}{2}).$$

Dann ist $f = 0$.

2. Sei $f \in S_k(2)$. Dann gilt für jedes $0 \leq n \leq k-2$ die Gleichung

$$\begin{aligned} & (-1)^n \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \int_0^{i\infty} f(z) z^\nu dz \\ &= \int_0^{i\infty} f(z) (2z+1)^{k-2-n} (z+1)^n dz \\ &\quad - \int_0^{i\infty} f(z) (2z-1)^{k-2-n} z^n dz. \end{aligned}$$

Beweis. Kennt man die Aussage des zweiten Teils der Proposition, so ist der erste Teil eine einfache Anwendung des Eichler-Shimura Theorems (1). Für die genauen Argumente siehe man [KI05, Proposition 3]. Wir zeigen den zweiten Teil. Sei dazu $f \in S_k(2)$. Dann gilt für $0 \leq n \leq k-2$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} f(z) z^n dz &= \int_{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \langle 0 \rangle}^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \langle 1 \rangle} f(z) z^n dz \\ &= \int_0^1 f\left(\frac{-z}{2z-1}\right) \left(\frac{-z}{2z-1}\right)^n d\left(\frac{-z}{2z-1}\right) \quad (10) \\ &= (-1)^n \int_0^1 f(z) (2z-1)^{k-2-n} z^n dz. \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der letzten Zeile die Modularität benutzt. Nun gilt

$$\int_0^{\pm 1} = \int_0^{i\infty} - \int_{\pm 1}^{i\infty}. \quad (11)$$

Daraus erhalten wir mittels der Substitution $z \mapsto z-1$ im zweiten Integral die Formel

$$\int_0^{-1} f(z) z^n dz = - \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu} (-1)^{n-\nu} \int_0^{i\infty} f(z) z^\nu dz.$$

Wendet man hingegen zuerst (10) und dann (11) an, so erhält man nach Substitution von $z \mapsto z+1$ im zweiten Integral von (11) die Formel

$$\begin{aligned} \int_0^{-1} f(z) z^n dz &= (-1)^n \int_0^{i\infty} f(z) (2z-1)^{k-2-n} z^n dz \\ &\quad - (-1)^n \int_0^{i\infty} f(z) (2z+1)^{k-2-n} (z+1)^n dz. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Überträgt man dieses Resultat in die Sprache der Modularen Symbole, so erhält man folgendes Lemma.

Proposition 2.4.2.

1. Der Raum $\mathbb{S}_k(2)$ wird von Windungselementen erzeugt.
2. Für jedes i mit $0 \leq i \leq k-2$ erfüllen die Windungselemente in $\mathbb{M}_k(2)^-$ die folgenden Relationen

$$0 = \sum_{j=0}^i \sum_{\substack{\nu=j \\ \nu \text{ ungerade}}}^{k-2-i+j} \binom{i}{j} \binom{k-2-i}{\nu-j} 2^{\nu-j} (\nu, 0, 1) + \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \text{ ungerade}}}^{i-1} \binom{i}{\nu} (\nu, 0, 1) \\ + \sum_{\substack{\nu=i \\ \nu \text{ ungerade}}}^{k-2} \binom{k-2-i}{\nu-i} 2^{\nu-i} (\nu, 0, 1)$$

Beweis. Aus dem ersten Teil von Proposition 2.4.1 und Satz 1.7 folgt, dass $\mathbb{S}_k(2)^-$ von Windungselementen erzeugt wird. Mittels Satz 1.4 zeigt man dies sehr leicht auch für $\mathbb{S}_k(2)^+$. Wir lassen den Beweis an dieser Stelle aus. Wir zeigen die zweite Aussage. Aus dem zweiten Teil von Proposition 2.4.1 und dem binomischen Lehrsatz erhält man

$$0 = \sum_{j=0}^i \sum_{\nu=j}^{k-2-i+j} \binom{i}{j} \binom{k-2-i}{\nu-j} 2^{\nu-j} r_\nu(f) \\ - \sum_{\nu=i}^{k-2} \binom{k-2-i}{\nu-i} (-1)^\nu 2^{\nu-i} r_\nu(f) - \sum_{\nu=0}^{i-1} (-1)^\nu \binom{i}{\nu} r_\nu(f). \quad (12)$$

Hierbei haben wir

$$r_\nu(f) = \int_0^{i\infty} f(z) z^\nu dz$$

gesetzt. Der Raum $S_k(2)$ besitzt eine Basis von Modulformen mit reellen Fourierkoeffizienten. Für eine solche Modulform ist $r_\nu(f)$ entweder reell oder rein imaginär, je nachdem ob ν ungerade oder gerade ist. Also gelten die Relationen (12) für gerade und ungerade ν getrennt. Die Aussage folgt daraus unter Anwendung von Satz 1.7. \square

Wir wollen nun die obigen Relationen mittels Matrizen beschreiben. Hierzu treffen wir eine nur in diesem Abschnitt geltende Notation.

Notation: Wir legen fest, dass die Einträge aller Matrizen dieses Abschnittes von 0 an gezählt werden, d.h. der linke obere Eintrag einer $n \times n$ -Matrix $A = (a_{ij})$ ist a_{00} , der rechte untere Eintrag $a_{n-1,n-1}$.

Wir schreiben mitunter $w = k-2$. Für $1 \leq i \leq \frac{w}{2}$ definieren wir $t_i = (2i-1, 0, 1)$. Es sei $t = (0, t_1, \dots, t_{w/2})^t \in \mathbb{M}_k(2)^{\frac{w}{2}+1}$. Wir definieren außerdem die folgenden Matrizen.

$$A, B \in \text{Mat} \left((k-1) \times \left(\frac{k-2}{2} + 1 \right), \mathbb{Z} \right),$$

$$A = (a_{ij}), \quad a_{ij} = \begin{cases} 0 & j = 0, \\ \binom{i}{2j-1} & 0 < 2j \leq i, \\ 2^{2j-1-i} \binom{k-2-i}{2j-i-1} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = \begin{cases} 0 & j = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{i}{\nu} \binom{k-2-i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die zweite Aussage der Proposition 2.4.2 ist äquivalent zu $At + Bt = 0$. Bevor wir das nächste Lemma beweisen, verweisen wir auf zwei bekannte Sätze über Kongruenzen von Binomialkoeffizienten.

Lemma 2.5 (Lucas Theorem). *Seien $m, n \in \mathbb{N} - \{0\}$ natürliche Zahlen und p eine Primzahl. Seien*

$$m = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_1 p + a_0,$$

$$n = b_k p^k + b_{k-1} p^{k-1} + \dots + b_1 p + b_0,$$

die p -adischen Entwicklungen⁹ von m und n . Dann gilt die Kongruenz

$$\binom{m}{n} \equiv \binom{a_0}{b_0} \binom{a_1}{b_1} \dots \binom{a_k}{b_k} \pmod{p}.$$

Beweis. Siehe [Fin47] oder [Gra97, Theorem 1] für eine Verallgemeinerung auf Primzahlpotenzen. \square

Lemma 2.6 (Kummers Theorem). *Die Potenz mit der eine Primzahl p den Binomialkoeffizienten $\binom{n}{m}$ teilt, ist durch die Anzahl der Überträge gegeben, die bei der Addition der p -adischen Entwicklungen von m und $n-m$ entstehen.*

⁹Hierbei ergänzen wir Nullen um die p -adischen Entwicklungen auf die gleiche Länge zu bringen.

Beweis. Siehe [Gra97, Section 2]. □

Das folgende Lemma enthält einige einfache Eigenschaften der Matrix $A + B$.

Lemma 2.7. *Es gilt:*

1. $a_{ij} + b_{ij} \equiv 0 \pmod{4}$ für alle i, j .
2. $a_{ij} + b_{ij} \equiv 0 \pmod{16}$ für $2j > i + 3$.

Beweis. 1. Falls $j = 0$ ist, haben wir nichts zu beweisen. Sei daher zunächst $0 < 2j \leq i$. Dann gilt mittels einfacher Rechnung

$$a_{ij} + b_{ij} \equiv 2 \binom{i}{2j-1} + 2 \binom{i}{2j-2} (k-2-i) \pmod{4}.$$

Wir haben daher

$$\binom{i}{2j-1} + \binom{i}{2j-2} (k-2-i) \equiv 0 \pmod{2}$$

zu zeigen. Ist i gerade, so ist $\binom{i}{2j-1}$ gerade nach Kummers Theorem 2.6, und $k-2-i$ gerade nach Voraussetzung. Ist i ungerade, so gilt

$$\begin{aligned} \binom{i}{2j-1} + \binom{i}{2j-2} (k-2-i) &\equiv \binom{i}{2j-1} + \binom{i}{2j-2} \\ &\equiv \binom{i+1}{2j-1} \pmod{2}. \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck verschwindet nach Kummers Theorem 2.6 modulo 2. Die Argumente für $2j > i$ sind ähnlich und werden hier ausgelassen.

2. Hier ist lediglich der Fall $i = 2j - 4$ nicht vollständig trivial, den man schnell nachrechnet. □

Proposition 2.7.1. *Sei $k \geq 12, k \equiv 0 \pmod{4}$. Eine Basis von $\mathbb{S}_k(2)^-$ ist durch*

$$\{(\nu, 0, 1) \in \mathbb{S}_k(2)^- \mid \nu \equiv 3 \pmod{4}\}.$$

gegeben.

Bevor wir die Proposition beweisen, benötigen wir noch einige weitere

Definitionen. Setze:

$$\tilde{A}, \tilde{B} \in \text{Mat} \left(\left(\binom{k-2}{2} + 1 \right) \times \left(\binom{k-2}{2} + 1 \right), \mathbb{Z} \right),$$

$$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}), \tilde{a}_{ij} = \begin{cases} 0 & j = 0, \\ 2^{2j-1} \binom{k-2}{2j-1} & i = 0, \\ \binom{2i-1}{2j-1} + \binom{2i}{2j-1} & j < i, \\ 1 + 2i & 0 < j = i, \\ 2^{2j-2i} \binom{k-1-2i}{2j-2i} + 2^{2j-2i-1} \binom{k-2-2i}{2j-2i-1} & j > i > 0, \end{cases}$$

$$\tilde{B} = (\tilde{b}_{ij}),$$

$$\tilde{b}_{ij} = \begin{cases} 0 & j = 0, \\ 2^{2j-1} \binom{k-2}{2j-1} & i = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} & \text{sonst.} \\ + \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} & \end{cases}$$

Es entstehen \tilde{A}, \tilde{B} aus A, B dadurch, dass die erste Zeile unverändert gelassen und in Folge jeweils zwei aufeinander folgende Zeilen addiert werden. Man hat daher ebenso $\tilde{A}t + \tilde{B}t = 0$.

Beweis von 2.7.1. Der Beweis ist recht technisch. Wir illustrieren die Idee zunächst am Fall $k = 12$, bevor wir einen allgemeinen Beweis geben. Ist $k = 12$, so gilt

$$(\tilde{A} + \tilde{B})t = \begin{pmatrix} 0 & 40 & 1920 & 16128 & 30720 & 10240 \\ 0 & 40 & 1664 & 12992 & 23552 & 7680 \\ 0 & 40 & 1056 & 5736 & 7296 & 1920 \\ 0 & 40 & 736 & 2872 & 2560 & 480 \\ 0 & 40 & 544 & 1456 & 928 & 120 \\ 0 & 40 & 480 & 1008 & 480 & 40 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (1, 0, 1) \\ (3, 0, 1) \\ (5, 0, 1) \\ (7, 0, 1) \\ (9, 0, 1) \end{pmatrix} = 0.$$

Alle Einträge der Matrix sind durch $2^3 = 8$ teilbar. Division durch 8 ergibt

die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 240 & 2016 & 3840 & 1280 \\ 0 & 5 & 208 & 1624 & 2944 & 960 \\ 0 & 5 & 132 & 717 & 912 & 240 \\ 0 & 5 & 92 & 359 & 320 & 60 \\ 0 & 5 & 68 & 182 & 116 & 15 \\ 0 & 5 & 60 & 126 & 60 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ (1, 0, 1) \\ (3, 0, 1) \\ (5, 0, 1) \\ (7, 0, 1) \\ (9, 0, 1) \end{pmatrix} = 0. \quad (13)$$

Wir behaupten, dass die drei Spalten

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2016 \\ 1624 \\ 717 \\ 359 \\ 182 \\ 126 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1280 \\ 960 \\ 240 \\ 60 \\ 15 \\ 5 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind. Reduziert man diese nämlich modulo 2, so erhält man

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also hat die aus diesen drei Spalten bestehende Matrix vollen Rang, und wir finden eine invertierbare 3×3 Teilmatrix. In diesem Fall ist etwa

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2016 & 1280 \\ 5 & 717 & 240 \\ 5 & 128 & 15 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Aus (13) folgt dann

$$\begin{pmatrix} 5 & 2016 & 1280 \\ 5 & 717 & 240 \\ 5 & 128 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (5, 0, 1) \\ (9, 0, 1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 240 & 3840 \\ 132 & 912 \\ 68 & 116 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3, 0, 1) \\ (7, 0, 1) \end{pmatrix} = 0.$$

Weil die erste Matrix invertierbar ist, können wir nun die Windungssymbole $(1, 0, 1)$, $(5, 0, 1)$ und $(9, 0, 1)$ durch $(3, 0, 1)$ und $(7, 0, 1)$ ausdrücken. Invertiert man die Dimensionformel $\dim S_{12}(2) = 2$, folgt daraus die Behauptung.

Wir rechnen nun den allgemeinen Fall ausführlich vor. Setze dazu $\tilde{C} = \tilde{A} + \tilde{B}$, $\tilde{C} = (\tilde{c}_{ij})$. Es gilt dann $\tilde{C}t = 0$. Wir behaupten:

1. Nicht alle Einträge von \tilde{C} sind durch $2^4 = 16$ teilbar.
2. Alle Einträge von \tilde{C} sind durch $2^3 = 8$ teilbar.

Die erste Behauptung folgt aus $\tilde{c}_{01} = 4(k-2)$. Für die zweite Behauptung unterscheiden wir verschiedene Fälle.

1. $0 < j < i$. Falls $j = 1$ ist, gilt $\tilde{c}_{i1} = 4(k-2) \equiv 0 \pmod{8}$. Sei daher $j > 1$. Wir nehmen vorerst $k \equiv 4 \pmod{8}$ an. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\tilde{c}_{ij} &= \binom{2i-1}{2j-1} + \binom{2i}{2j-1} + \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \\
&\equiv 2 \binom{2i-1}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-2} \binom{k-2-2i}{1} \\
&\quad + 4 \binom{2i}{2j-3} \binom{k-2-2i}{2} + 2 \binom{2i-1}{2j-2} \binom{k-1-2i}{1} \\
&\quad + 4 \binom{2i-1}{2j-3} \binom{k-1-2i}{2} \\
&\equiv 2 \binom{2i-1}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 4(1-i) \binom{2i}{2j-2} \\
&\quad + 4(1-i)(1-2i) \binom{2i}{2j-3} + 2 \binom{2i-1}{2j-2} (3-2i) \quad (14) \\
&\quad + 4(1-i)(3-2i) \binom{2i-1}{2j-3} \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Ist i ungerade, verschwinden alle Terme mit Vorfaktor $4(1-i)$. Für die anderen Terme gilt

$$\begin{aligned}
&2 \binom{2i-1}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i-1}{2j-2} (3-2i) \\
&\equiv 2 \binom{2i-1}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i-1}{2j-2} \\
&\equiv 4 \binom{2i}{2j-1} \\
&\equiv 0 \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Ist i gerade, erhält man ebenso

$$\begin{aligned}
& 2 \binom{2i-1}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 4 \binom{2i}{2j-2} + 6 \binom{2i-1}{2j-2} + 4 \binom{2i-1}{2j-3} \\
& \equiv 2 \binom{2i-1}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i-1}{2j-2} \\
& \equiv 0 \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Ist $k \equiv 0 \pmod{8}$, erhält man mit einer ähnlichen Rechnung statt (14) die Formel

$$\begin{aligned}
& 2 \binom{2i-1}{2j-1} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 4(3-i) \binom{2i}{2j-2} \\
& \quad + 4(3-i)(5-2i) \binom{2i}{2j-3} + 2 \binom{2i-1}{2j-2} (7-2i) \\
& \quad + 4(7-2i)(3-i) \binom{2i-1}{2j-3} \pmod{8}.
\end{aligned}$$

und verfährt auf die gleiche Weise.

2. $j = i, i > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{ij} + \tilde{b}_{ij} &= 1 + 2i + \sum_{\nu=0}^{2i-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2i-1-\nu} 2^{2i-1-\nu} \\
& \quad + \sum_{\nu=0}^{2i-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2i-1-\nu} 2^{2i-1-\nu} \\
& \equiv 1 + 2i + \sum_{\nu=2i-3}^{2i-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2i-1-\nu} 2^{2i-1-\nu} \\
& \quad + \sum_{\nu=2i-3}^{2i-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2i-1-\nu} 2^{2i-1-\nu} \\
& \equiv 1 + 2i + \sum_{\nu=2i-2}^{2i-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2i-1-\nu} 2^{2i-1-\nu} \\
& \quad + \sum_{\nu=2i-3}^{2i-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2i-1-\nu} 2^{2i-1-\nu} \\
& \equiv 4i^2k^2 + 2ik^2 + 4ik + 2k^2 \\
& \equiv 0 \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir im vierten Schritt die Binomialkoeffizienten expandiert und modulo 8 reduziert.

3. $j > i > 0$ oder $i = 0$. Der Fall $j > i + 1$ ist vollständig trivial und $j = i + 1$ rechnet man schnell nach. Ebenso für $i = 0$.

Daraus folgen die obigen beiden Behauptungen. Sei nun $C = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \frac{1}{8}\tilde{c}_{ij}$. Wir behaupten:

1. $c_{ij} \equiv 0 \pmod{2}$ für $j > i + 1$.
2. $i + 1 \equiv 1, 3 \pmod{4} \Leftrightarrow c_{i,(i+1)} \equiv 1 \pmod{2}$.

Wir nehmen zuerst an, dass diese zwei Behauptungen wahr sind und zeigen, wie man dann die Proposition folgern kann. Wegen 1. und 2. sind die Spalten $c_j = (c_{ij})$ mit $j \equiv 1, 3 \pmod{4}$ linear unabhängig über \mathbb{F}_2 und daher auch über \mathbb{Q} (!). Sei D_1 die Untermatrix von C , die aus diesen Spalten besteht. Dann hat D_1 maximalen Rang und man findet durch Streichen von Zeilen eine quadratische Untermatrix E_1 von D_1 mit $\det E_1 \neq 0$ sowie eine weitere Teilmatrix E_2 von C , so dass

$$E_1 t_1 + E_2 t_2 = 0.$$

Hierbei ist $t_1 = (t_1, t_5, t_9, \dots)^t$ der Vektor der Manin-Symbole $(\nu, 0, 1)$ mit $\nu \equiv 1 \pmod{4}$ und t_2 der Vektor der Manin-Symbole $(\nu, 0, 1)$ mit $\nu \equiv 3 \pmod{4}$. Da E_1 invertierbar ist, folgt $t_1 = -E_1^{-1}E_2 t_2$. Die Proposition folgt dann aus Proposition 2.4.2, weil $\#\{(\nu, 0, 1) \mid \nu \equiv 3 \pmod{4}\} = \dim S_k(2)$.

Wir beweisen nun 1. und 2. Um 1. zu beweisen, genügt es, $\tilde{c}_{ij} \equiv 0 \pmod{16}$ für $j > i + 1$ zu zeigen. Nach Definition von \tilde{C} ist der Fall $i < j - 2$ trivial. Der verbleibende Fall $i = j - 2$ kann leicht von Hand verifiziert werden. Aussage 2. folgt aus

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{i,(i+1)} &\equiv 2(k-2-2i)(k-2i) + \sum_{\nu=2i-2}^{2i} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2i+1-\nu} 2^{2i+1-\nu} \\ &\quad + \sum_{\nu=2i-2}^{2i-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2i+1-\nu} 2^{2i+1-\nu} \\ &\equiv 8 + 8i^2 \pmod{16}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt rechnet man wieder alle Binomialkoeffizienten auf der rechten Seite konkret aus. Damit ist alles gezeigt. \square

Korollar 2.8. Sei $k \equiv 0 \pmod{4}$. Dann hat man einen Isomorphismus

$$S_k(2) \rightarrow \mathbb{C}^{k/4-1}, f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(4) \\ L_f(8) \\ \vdots \\ L_f(k-4) \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.8.1. Sei $k \equiv 6 \pmod{8}$. Dann ist eine Basis von $\mathbb{S}_k(2)^-$ durch

$$\{(\nu, 0, 1) \in \mathbb{S}_k(2) \mid \nu \equiv 5, 7 \pmod{8}\}$$

gegeben.

Beweis. Wir gehen prinzipiell wie in Proposition 2.7.1 vor. Der Beweis ist allerdings viel schwieriger. Setze für $j \equiv 6 \pmod{8}$

$$\psi(i, j) = \begin{cases} 2 & \binom{\lfloor i/8 \rfloor}{\frac{j-6}{8}} \equiv 1 \pmod{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wir definieren die Matrix

$$\begin{aligned} T &\in \text{Mat}((k-1) \times (k-1), \mathbb{Z}), \\ T &= (t_{ij}), \\ t_{ij} &= \begin{cases} 1 & i = j, \\ 2 & i + 1 = j, i \equiv 1, 2 \pmod{8}, \\ \psi(i, j) & i > j, i \equiv 1 \pmod{8}, j \equiv 6 \pmod{8}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Weiterhin definieren wir die Matrizen C, D durch

$$\begin{aligned} C &\in \text{Mat}\left((k-1) \times \left(\frac{k-2}{2} + 1\right), \mathbb{Z}\right), \\ C &= T(A + B), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D &\in \text{Mat}\left(\left(\frac{k-2}{2} + 1\right) \times \left(\frac{k-2}{2} + 1\right), \mathbb{Z}\right), \\ D &= (d_{ij}), \\ d_{ij} &= \begin{cases} c_{ij} & i = 0, \\ c_{2i-1, j} + c_{2i, j} & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Dann ist $Dt = 0$. Setzt man formal $a_{-1,j} = b_{-1,j} = 0$, so gilt

$$d_{ij} = \begin{cases} \left(\begin{array}{l} a_{2i-1,j} + b_{2i-1,j} + a_{2i,j} + b_{2i,j} \\ + 2(a_{2i,j} + b_{2i,j} + a_{2i+1,j} + b_{2i+1,j}) \\ + \sum_{\nu=0}^{\frac{i-5}{4}} \psi(2i-1, 6+8\nu)(a_{6+8\nu,j} + b_{6+8\nu,j}) \end{array} \right) & i \equiv 1 \pmod{4}, \\ a_{2i-1,j} + b_{2i-1,j} + a_{2i,j} + b_{2i,j} & \text{sonst.} \end{cases} \quad (15)$$

Man beachte hier die Notationskonvention dieses Kapitels, nach der die Einträge von Matrizen von $(i, j) = (0, 0)$ an gezählt werden. Wir zeigen:

1. $d_{ij} \equiv 0 \pmod{32}$, falls $j \geq i + 1$ (mit der Ausnahme $d_{01} \equiv 16 \pmod{32}$).
2. $d_{ij} \not\equiv 0 \pmod{32}$, falls $i = j, i \equiv 1, 2 \pmod{4}$.
3. $d_{ij} \equiv 0 \pmod{16}$ für alle $0 \leq i, j \leq (k-2)/2$.

Daraus folgt (wie im Beweis von Proposition 2.7.1), dass die Spalten $d_j = (d_{ij})$ mit $j \equiv 1, 2 \pmod{4}$ linear unabhängig sind, und man erhält die Aussage auf ähnliche Weise.

Wir zeigen nun die obigen Aussagen 1., 2. und 3. für $i \neq 0$. Der Fall $i = 0$ ist einfach und sei dem Leser überlassen.

1. $j \geq i + 1, i \neq 0$. Es gilt dann

$$a_{2i-1,j} + a_{2i,j} = 2^{2j-2i} \binom{k-1-2i}{2j-2i} + 2^{2j-2i-1} \binom{k-2-2i}{2j-2i-1}.$$

Dies verschwindet für $j \geq i+3$ modulo 32 und ist kongruent $16+24i+8i^2$ resp. $16+24i+24i^2$ modulo 32, falls $j = i+1$ resp. $j = i+2$. Ebenso

$$\begin{aligned} b_{2i-1,j} + b_{2i,j} &\equiv \sum_{\nu=\max(0,2j-5)}^{2j-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \\ &\quad + \sum_{\nu=\max(0,2j-5)}^{2j-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \pmod{32}. \end{aligned}$$

Dies verschwindet ebenfalls modulo 32, falls $j \geq i+3$ und ist kongruent $16+8i+16i^2+24i^3$ resp. $16+24i+8i^2+16i^3$ modulo 32, falls $j = i+1$,

resp. $j = i + 2$. Also folgt

$$\begin{aligned} & a_{2i-1,j} + a_{2i,j} + b_{2i-1,j} + b_{2i,j} \\ & \equiv \begin{cases} 16 & i \equiv 1 \pmod{4}, j = i + 1, \\ 0 & j \geq i + 1, \text{sonst} \end{cases} \pmod{32}. \end{aligned} \quad (16)$$

Wenn $i \not\equiv 1 \pmod{4}$ ist, gilt

$$d_{ij} = a_{2i-1,j} + a_{2i,j} + b_{2i-1,j} + b_{2i,j}, \quad (17)$$

und alles ist bewiesen. Wenn $i \equiv 1 \pmod{4}$ ist, haben wir

$$\begin{aligned} d_{ij} &= a_{2i-1,j} + a_{2i,j} + b_{2i-1,j} + b_{2i,j} \\ &+ 2(a_{2i,j} + b_{2i,j} + a_{2i+1,j} + b_{2i+1,j}) \\ &+ \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \psi(2i-1, 6+8\nu)(a_{6+8\nu,j} + b_{6+8\nu,j}). \end{aligned} \quad (18)$$

Die letzte Summe verschwindet nach Lemma 2.7 modulo 32. Wieder gilt

$$2(a_{2i,j} + a_{2i+1,j}) = 2^{2j-2i} \binom{k-2-2i}{2j-2i-1} + 2^{2j-2i-1} \binom{k-3-2i}{2j-2i-2}.$$

Dies ist $\equiv 0 \pmod{32}$, wenn $j \geq i + 2$ und $\equiv 10 \pmod{32}$, wenn $j = i + 1$. Auf ähnliche Weise findet man $2(b_{2i,j} + b_{2i+1,j}) \equiv 6 \pmod{32}$, wenn $j = i + 1$ und $\equiv 0 \pmod{32}$ sonst. Zusammen mit (16) folgt daraus $d_{ij} \equiv 0 \pmod{32}$, wenn $j \geq i + 1$.

2. $j = i, i \neq 0$. Wir zeigen $d_{ii} \equiv 0 \pmod{16}$ und $d_{ii} \equiv 16 \pmod{32}$, wenn $i \equiv 1, 2 \pmod{4}$. Mittels einer Rechnung erhält man

$$\begin{aligned} a_{2i-1,i} + a_{2i,i} &= 1 + 2i, \\ b_{2i-1,i} + b_{2i,i} &\equiv 31 + 14i + 12i^2 + 28i^4 + 24i^5 \pmod{32}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$a_{2i-1,i} + a_{2i,i} + b_{2i-1,i} + b_{2i,i} \equiv \begin{cases} 16 \pmod{32} & i \equiv 1, 2 \pmod{4}, \\ 0 \pmod{32} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Benutzt man (17), so sieht man $d_{ii} \equiv 0 \pmod{32}$, wenn $i \equiv 0, 3 \pmod{4}$ und $d_{ii} \equiv 16 \pmod{32}$, wenn $i \equiv 2 \pmod{4}$. Wenn $i \equiv 1 \pmod{4}$ ist, haben

wir die zusätzlichen Terme

$$2(a_{2i,i} + b_{2i,i} + a_{2i+1,i} + b_{2i+1,i}) + \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \psi(2i-1, 6+8\nu)(a_{6+8\nu,j} + b_{6+8\nu,j}).$$

Die Summe auf der rechten Seite verschwindet modulo 32 wie zuvor und eine kurze Rechnung zeigt Selbiges auch für den Ausdruck

$$2(a_{2i,i} + b_{2i,i} + a_{2i+1,i} + b_{2i+1,i}).$$

3. $i > j, i \neq 0$. Dies ist der schwerste Fall, da wir von dem mittels $\psi(i, j)$ definierten Zusatzterm Gebrauch machen müssen. Wir zeigen $d_{ij} \equiv 0 \pmod{16}$. Es gilt

$$\begin{aligned} a_{2i-1,j} + b_{2i-1,j} + a_{2i,j} + b_{2i,j} &\equiv \binom{2i-1}{2j-1} + \binom{2i}{2j-1} + \\ &+ \sum_{\nu=2j-4}^{2j-1} \binom{2i-1}{\nu} \binom{k-1-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \\ &+ \sum_{\nu=2j-4}^{2j-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \pmod{16}. \end{aligned} \quad (19)$$

Wir zeigen, dass dieser Ausdruck stets modulo 16 verschwindet. Durch Expandieren der Binomialkoeffizienten $\binom{k-1-2i}{\nu}$ und $\binom{k-2-2i}{\nu}$ ist die

rechte Seite gleich

$$\begin{aligned}
& \frac{4}{3}(k-2-2i)(k-3-2i)(k-4-2i) \binom{2i}{2j-4} \\
& + 2(k-2-2i)(k-3-2i) \binom{2i}{2j-3} \\
& + 2(k-2-2i) \binom{2i}{2j-2} \\
& + \frac{4}{3}(k-1-2i)(k-2-2i)(k-3-2i) \binom{2i-1}{2j-4} \\
& + 2(k-1-2i)(k-2-2i) \binom{2i-1}{2j-3} \\
& + 2(k-1-2i) \binom{2i-1}{2j-2} \\
& + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i-1}{2j-1}.
\end{aligned}$$

Dies ist kongruent zu

$$\begin{aligned}
& 4(2-i)(3-2i) \binom{2i}{2j-3} \\
& + 4(2-i) \binom{2i}{2j-2} \\
& + 8 \cdot 11 \cdot (5-2i)(2-i)(3-2i) \binom{2i-1}{2j-4} \\
& + 4(5-2i)(2-i) \binom{2i-1}{2j-3} \\
& + 2(5-2i) \binom{2i-1}{2j-2} \\
& + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i-1}{2j-1} \pmod{16}.
\end{aligned}$$

Man macht nun eine Fallunterscheidung. Sei zunächst $i \equiv 0 \pmod{4}$.

Dann ist der letzte Ausdruck gleich

$$\begin{aligned} & 8 \binom{2i}{2j-3} + 8 \binom{2i}{2j-2} + 8 \cdot \binom{2i-1}{2j-3} + 10 \cdot \binom{2i-1}{2j-2} \\ & \quad + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i-1}{2j-1}. \end{aligned}$$

Nach einer kurzen Rechnung ist dieser Ausdruck modulo 16 zu $4 \binom{2i}{2j-1}$ kongruent. Dies verschwindet modulo 16, was z.B. aus Kummers Satz 2.6 folgt. Ist nämlich $n \equiv 0 \pmod{4}$ und $m \equiv 1 \pmod{2}$, so ist

$$\binom{n}{m} \equiv 0 \pmod{4}. \quad (20)$$

Die 2-adischen Entwicklungen von n und m haben dann nämlich die Form

$$\begin{aligned} m &= 1 + \varepsilon_1 \cdot 2 + \varepsilon_2 \cdot 2^2 + \dots, \\ n &= 0 + 0 \cdot 2 + \eta_2 \cdot 2^2 + \dots \end{aligned}$$

Also muss es bei der Addition von m und $n - m$ zu mindestens zwei Überträgen kommen. Für $i \equiv 1 \pmod{4}$ erhält man auf ähnliche Weise

$$\begin{aligned} & 4 \binom{2i}{2j-3} + 4 \binom{2i}{2j-2} + 8 \binom{2i-1}{2j-4} + 12 \binom{2i-1}{2j-3} \\ & \quad + 6 \binom{2i-1}{2j-2} + 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i-1}{2j-1}. \end{aligned}$$

Durch eine kurze Rechnung ist dies modulo 16 kongruent zu

$$4 \binom{2i}{2j-3} + 8 \binom{2i}{2j-2} + 4 \binom{2i}{2j-1}. \quad (21)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} (-1 + 2j) \binom{2i}{2j-1} &= 2(1 + i - j) \binom{2i}{2j-2}, \\ (3 + 2i - 2j) \binom{2i}{2j-3} &= 2(-1 + j) \binom{2i}{2j-2}. \end{aligned}$$

Daraus folgert man für $i \equiv 1 \pmod{4}$

$$\begin{aligned} 4 \binom{2i}{2j-1} &\equiv 8(2-j) \binom{2i}{2j-2} \pmod{16}, \\ 4 \binom{2i}{2j-3} &\equiv 8(-1+j) \binom{2i}{2j-2} \pmod{16}. \end{aligned}$$

Einsetzen in (21) liefert

$$4 \binom{2i}{2j-3} + 8 \binom{2i}{2j-2} + 4 \binom{2i}{2j-1} \equiv 0 \pmod{16}.$$

Die Fälle $i \equiv 2, 3 \pmod{4}$ sind ähnlich. Also verschwindet der Ausdruck in (19) modulo 16. Dies beweist $d_{ij} \equiv 0 \pmod{16}$, wenn $i > j$ und $i \not\equiv 1 \pmod{4}$. Den Fall $i \equiv 1 \pmod{4}$ müssen wir erneut einer gesonderten Behandlung unterziehen. Setze

$$\begin{aligned} t_{ij} &= 2(a_{2i,j} + b_{2i,j} + a_{2i+1,j} + b_{2i+1,j}) \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \psi(2i-1, 6+8\nu)(a_{6+8\nu,j} + b_{6+8\nu,j}). \end{aligned} \tag{22}$$

Dann gilt $d_{ij} = a_{2i-1,j} + b_{2i-1,j} + a_{2i,j} + b_{2i,j} + t_{ij}$, falls $i \equiv 1 \pmod{4}$. Wir zeigen $t_{ij}/2 \equiv 0 \pmod{8}$. Da nach Lemma 2.7 alle Einträge von $A + B$ durch 4 teilbar sind, gilt $a_{6+8\nu,j} + b_{6+8\nu,j} \equiv 0 \pmod{4}$. Außerdem ist

$$\frac{\psi(2i-1, 6+8\nu)}{2} \equiv \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \pmod{2}.$$

Wir müssen daher

$$\begin{aligned} &a_{2i,j} + b_{2i,j} + a_{2i+1,j} + b_{2i+1,j} \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} (a_{6+8\nu,j} + b_{6+8\nu,j}) \equiv 0 \pmod{8} \end{aligned}$$

zeigen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} a_{6+8\nu,j} &= \sum_{\substack{\nu=0 \\ 3+4\nu < j}}^{(i-5)/4} 2^{2j-7-8\nu} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{k-2-6-8\nu}{2j-7-8\nu} \\
&\quad + \sum_{\substack{\nu=0 \\ 3+4\nu \geq j}}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{2j-1} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{j-4}{4} \rfloor} 2^{2j-7-8\nu} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{k-2-6-8\nu}{2j-7-8\nu} \quad (23) \\
&\quad + \sum_{\nu=\lfloor \frac{j-4}{4} \rfloor+1}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{2j-1} \\
&\equiv \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{2j-1} \\
&\quad + 4 \cdot \begin{cases} \binom{\frac{i-1}{4}}{\frac{j-4}{4}} & j > 0, j \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Ebenso ist

$$\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} b_{6+8\nu,j} &= \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \sum_{\mu=0}^{2j-1} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{\mu} \binom{k-2-6-8\nu}{2j-1-\mu} 2^{2j-1-\mu} \\
&\equiv \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{2j-1} \\
&\quad + 4 \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{2j-2} \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Wir werten nun die verschiedenen Terme dieser Summen aus. Eine

mehrfache Anwendung von Lucas Theorem 2.5 ergibt

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{2j-2} \\
& \equiv \sum_{\nu=0}^{(i-1)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{\nu}{\lfloor \frac{j-1}{4} \rfloor} + \binom{2i+4}{2j-2} \quad (24) \\
& = \binom{\frac{i-1}{4}}{\lfloor \frac{j-1}{4} \rfloor} 2^{\frac{i-1}{4} - \lfloor \frac{j-1}{4} \rfloor} + \binom{2i+4}{2j-2} \pmod{2}.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die folgende Identität benutzt

$$\sum_k \binom{n}{k} \binom{k}{m} = \binom{n}{m} 2^{n-m}, \quad ([\text{BQ03, Identity 155}]).$$

Unter Benutzung von

$$\binom{6+8\nu}{2j-1} \equiv 2j \binom{6+8\nu}{2j-2} \pmod{4},$$

erhält man auf ähnliche Weise

$$\sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} \binom{6+8\nu}{2j-1} \equiv j \binom{\frac{i-1}{4}}{\lfloor \frac{j-1}{4} \rfloor} 2^{1 + \frac{i-1}{4} - \lfloor \frac{j-1}{4} \rfloor} + 2j \binom{2i+4}{2j-2} \pmod{4}.$$

Zusammen mit (23) und (24) und unter Benutzung von $j < i$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{(i-5)/4} \binom{\frac{i-1}{4}}{\nu} (a_{6+8\nu,j} + b_{6+8\nu,j}) = 4(1+j) \binom{2i+4}{2j-2} \\
& \quad + 4 \cdot \begin{cases} \binom{\frac{i-1}{4}}{\frac{j-4}{4}} & j > 0, j \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \pmod{8}.
\end{aligned}$$

Mittels (22) folgt daraus

$$\begin{aligned}
\frac{t_{ij}}{2} &\equiv \binom{2i}{2j-1} + \binom{2i+1}{2j-1} + \sum_{\nu=\max(0,2j-3)}^{2j-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \\
&+ \sum_{\nu=\max(0,2j-3)}^{2j-1} \binom{2i+1}{\nu} \binom{k-3-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} + 4(1+j) \binom{2i+4}{2j-2} \\
&+ 4 \cdot \begin{cases} \binom{\frac{i-1}{4}}{\frac{j-4}{4}} & j > 0, j \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \pmod{8}. \tag{25}
\end{aligned}$$

Wir behaupten, dass dieser Ausdruck $\equiv 0 \pmod{8}$ ist. Ist $j = 1$, so erhalten wir $t_{ij}/2 = 4k \equiv 0 \pmod{8}$, da $k \equiv 6 \pmod{8}$. Ist $j > 1$, so gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=\max(0,2j-3)}^{2j-1} \binom{2i}{\nu} \binom{k-2-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \\
&\equiv \binom{2i}{2j-1} + 2(k-2-2i) \binom{2i}{2j-2} \\
&\quad + 4 \binom{k-2-2i}{2} \binom{2i}{2j-3} \\
&= \binom{2i}{2j-1} + 4(2-i) \binom{2i}{2j-2} \pmod{8}. \tag{26}
\end{aligned}$$

Ebenso

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=\max(0,2j-3)}^{2j-1} \binom{2i+1}{\nu} \binom{k-3-2i}{2j-1-\nu} 2^{2j-1-\nu} \equiv \binom{2i+1}{2j-1} \\
&\quad + 2(3-2i) \binom{2i+1}{2j-2} \pmod{8}. \tag{27}
\end{aligned}$$

Fügt man (26) und (27) in (25) ein, so erhält man für $i \equiv 1 \pmod{4}$

$$\begin{aligned}
\frac{t_{ij}}{2} &\equiv 2 \binom{2i}{2j-1} + 2 \binom{2i+1}{2j-1} \\
&\quad + 4 \binom{2i}{2j-2} + 2 \binom{2i+1}{2j-2} \\
&\quad + 4(1+j) \binom{2i+4}{2j-2} \\
&\quad + 4 \cdot \begin{cases} \binom{\frac{i-1}{4}}{\frac{j-4}{4}} & j > 0, j \equiv 0 \pmod{4} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \pmod{8}.
\end{aligned} \tag{28}$$

Weil $i \equiv 1 \pmod{4}$ ist, hat man nach (20)

$$\begin{aligned}
2 \binom{2i+1}{2j-1} + 2 \binom{2i+1}{2j-2} &= 2 \binom{2i+2}{2j-1} \\
&\equiv 0 \pmod{8}.
\end{aligned} \tag{29}$$

Außerdem gilt

$$2(i-j+1) \binom{2i}{2j-2} = (2j-1) \binom{2i}{2j-1}.$$

Daraus folgt ebenso

$$2(2-j) \binom{2i}{2j-2} \equiv (2j-1) \binom{2i}{2j-1} \pmod{8}. \tag{30}$$

1. *Fall:* $j \equiv \pm 1 \pmod{4}$. Einsetzen von (30) in (28) ergibt unter Beachtung von (29) für $j \equiv 1 \pmod{4}$

$$\frac{t_{ij}}{2} \equiv 4 \binom{2i}{2j-1} \equiv 0 \pmod{8}.$$

Ähnlich für $j \equiv -1 \pmod{4}$.

2. *Fall:* $j \equiv 2 \pmod{4}$. Aus (30) folgert man

$$2 \binom{2i}{2j-1} \equiv 0 \pmod{8}.$$

Die Gleichung $t_{ij}/2 \equiv 0 \pmod{8}$ ist dann mittels (28) äquivalent zu

$$\binom{2i}{2j-2} + \binom{2i+4}{2j-2} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Mittels Lucas Theorem 2.5 folgt

$$\binom{2i}{2j-2} + \binom{2i+4}{2j-2} \equiv \binom{i}{j-1} + \binom{i+2}{j-1} \pmod{2}.$$

Außerdem gilt die Identität

$$(i+1)(i+2) \binom{i}{j-1} = (i-j+2)(i-j+3) \binom{i+2}{j-1}. \quad (31)$$

Ist nun $i \equiv 1 \pmod{4}$, $j \equiv 2 \pmod{4}$, folgt daraus

$$2 \cdot 3 \binom{i}{j-1} \equiv 2 \binom{i+2}{j-1} \pmod{4}.$$

Daraus folgt offenbar

$$\binom{i}{j-1} \equiv \binom{i+2}{j-1} \pmod{2},$$

und damit die Behauptung.

3. *Fall:* $j \equiv 0 \pmod{4}$. In diesem Fall ergibt (30) die Identität

$$\binom{2i}{2j-1} \equiv 4 \binom{2i}{2j-2} \pmod{8}.$$

Also ist mit (28) die Identität $t_{ij}/2 \equiv 0 \pmod{8}$ äquivalent zu

$$\binom{2i}{2j-2} + \binom{2i+4}{2j-2} + \binom{\frac{i-1}{4}}{\frac{j-4}{4}} \equiv 0 \pmod{2},$$

respektive zu

$$\binom{i}{j-1} + \binom{i+2}{j-1} + \binom{\frac{i-1}{4}}{\frac{j-4}{4}} \equiv 0 \pmod{2}.$$

Gleichung (31) liefert hier

$$\binom{i}{j-1} \equiv 0 \pmod{2}$$

und mehrfache Anwendung von Lucas Theorem 2.5 liefert

$$\binom{2i+4}{2j-2} \equiv \binom{\frac{i-1}{4}}{\frac{j-4}{4}} \pmod{2}.$$

Dies beweist die Proposition. □

Korollar 2.9. *Sei $k \equiv 6 \pmod{8}$. Dann hat man einen Isomorphismus*

$$S_k(2) \rightarrow \mathbb{C}^{\frac{k-6}{4}}, f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(6) \\ L_f(8) \\ L_f(14) \\ L_f(16) \\ \vdots \\ L_f(k-6) \end{pmatrix}.$$

2.3 Modulare Symbole der Stufe 3

2.3.1 Ein Erzeugendensystem im allgemeinen Fall

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Modularen Symbole in $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(3))$ für gerades und ungerades Gewicht k . Das folgende Lemma ist ein Analogon der Proposition 2.4.2 für Stufe 3.

Lemma 2.10. *$\mathbb{M}_k(\Gamma_1(3))$ wird von Windungselementen erzeugt. Für jedes i mit $0 \leq i \leq k-2$ erfüllen die Windungselemente in $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(3))$ die folgenden*

Relationen

$$\begin{aligned}
& (-1)^i \sum_{\nu=i}^{k-2} (-1)^\nu \binom{k-2-i}{\nu-i} (\nu, 0, 1) \\
& - (-1)^{k-2-i} \sum_{\nu=k-2-i}^{k-2} \binom{i}{k-2-\nu} (\nu, 0, 1) \\
& + (-1)^{k-2} \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \left(\sum_{j=0}^{\min(k-2-i, \nu)} \binom{k-2-i}{j} \binom{k-2-j}{\nu-j} \right) (\nu, 0, 1) \\
& - \sum_{\nu=i}^{k-2} \binom{k-2-i}{k-2-\nu} 2^{\nu-i} (\nu, 0, 1) \\
& + \sum_{\nu=k-2-i}^{k-2} 2^{\nu-(k-2-i)} (-1)^\nu \binom{i}{\nu-(k-2-i)} (\nu, 0, 1) \\
& - (-1)^{k-2} \sum_{\nu=0}^{k-2} \left(\sum_{j=\max(0, i-\nu)}^i \binom{i}{j} \binom{k-2-i+j}{k-2-\nu} \right) (\nu, 0, 1) = 0.
\end{aligned}$$

Beweis. Mittels der Relationen I und III des Satzes 1.4 können alle Manin-Symbole entweder als $(*, 0, 1)$ oder als $(*, 1, 1)$ ausgedrückt werden. Genauer zerfallen die Manin-Symbole der Stufe 3 in zwei Gruppen, wobei die Symbole ein und derselben Gruppe jeweils durch die Relationen I und III ineinander überführt werden können. Diese sind

1. $(*, 0, 1), (*, 1, 0), (*, 0, 2), (*, 2, 0),$
2. $(*, 1, 1), (*, 1, 2), (*, 2, 2), (*, 2, 1).$

Wendet man Relation II mit $c = 1, d = 2$ an, kann man die Manin-Symbole der zweiten Gruppe durch die der ersten Gruppe ausdrücken. Das beweist die erste Behauptung des Lemmas. Wir werden nun Relationen zwischen den Windungselementen finden. Aus Relation II folgt

$$\begin{aligned}
& (i, 1, 1) + (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} (j, 1, 1) \\
& + (-1)^{k-2-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 1, 1) = 0.
\end{aligned} \tag{32}$$

Drückt man nun die Symbole der Form $(*, 1, 1)$ in Termen von Windungssymbolen aus und setzt das Ergebnis in die vorige Gleichung ein, erhält man die gewünschten Relationen. Nach Relation I gilt

$$(i, 1, 1) = -(-1)^i(k-2-i, 1, 2).$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned} (i, 1, 2) &= (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} (k-2-j, 0, 1) \\ &\quad - (-1)^{k-2-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 0, 1). \end{aligned} \tag{33}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} (j, 1, 1) &= \sum_{\nu=0}^{k-2-j} (-1)^\nu \binom{k-2-j}{\nu} (j+\nu, 0, 1) \\ &\quad - (-1)^{k-2-j} \sum_{\nu=0}^j \binom{j}{\nu} (k-2-\nu, 0, 1). \end{aligned}$$

Setzt man dies in (32) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{k-2-i} (-1)^\nu \binom{k-2-i}{\nu} (i+\nu, 0, 1) - (-1)^{k-2-i} \sum_{\nu=0}^i \binom{i}{\nu} (k-2-\nu, 0, 1) \\ &+ (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} \sum_{\nu=0}^{k-2-j} (-1)^\nu \binom{k-2-j}{\nu} (j+\nu, 0, 1) \\ &- \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} \sum_{\nu=0}^j \binom{j}{\nu} (k-2-\nu, 0, 1) \\ &+ (-1)^{k-2-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} \sum_{\nu=0}^{i-j} (-1)^\nu \binom{i-j}{\nu} (k-2-i+j+\nu, 0, 1) \\ &- (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \sum_{\nu=0}^{k-2-i+j} \binom{k-2-i+j}{\nu} (k-2-\nu, 0, 1) = 0. \end{aligned}$$

Dies „vereinfacht“ sich nach einer Rechnung zu

$$\begin{aligned}
& (-1)^i \sum_{\nu=i}^{k-2} (-1)^\nu \binom{k-2-i}{\nu-i} (\nu, 0, 1) - (-1)^{k-2-i} \sum_{\nu=k-2-i}^{k-2} \binom{i}{k-2-\nu} (\nu, 0, 1) \\
& + (-1)^{k-2} \sum_{\nu=0}^{k-2} (-1)^\nu \left(\sum_{j=0}^{\min(k-2-i, \nu)} \binom{k-2-i}{j} \binom{k-2-j}{\nu-j} \right) (\nu, 0, 1) \\
& - \sum_{\nu=i}^{k-2} \binom{k-2-i}{k-2-\nu} 2^{\nu-i} (\nu, 0, 1) \\
& + \sum_{\nu=k-2-i}^{k-2} 2^{\nu-(k-2-i)} (-1)^\nu \binom{i}{\nu-(k-2-i)} (\nu, 0, 1) \\
& - (-1)^{k-2} \sum_{\nu=0}^{k-2} \left(\sum_{j=\max(0, i-\nu)}^i \binom{i}{j} \binom{k-2-i+j}{k-2-\nu} \right) (\nu, 0, 1) = 0.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die wohlbekannte Identität

$$\sum_j \binom{n}{j} \binom{j}{m} = 2^{n-m} \binom{n}{m}$$

benutzt. Dies war gerade die Behauptung. □

Proposition 2.10.1.

1. Sei k gerade, $k \geq 8$. Dann gilt

(a) $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^+$ wird von den Windungselementen

$$\{(i, 0, 1) \mid 2 \leq i \leq k-4, i \text{ gerade}\}$$

erzeugt.

(b) $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^-$ wird von den Windungselementen

$$\{(i, 0, 1) \mid 3 \leq i \leq k-5, i \text{ ungerade}\}$$

erzeugt.

2. Sei k ungerade, $k \geq 9$. Dann gilt

(a) $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^+$ wird von den Windungselementen

$$\{(i, 0, 1) \mid 2 \leq i \leq k-5, i \text{ gerade}\}$$

erzeugt.

(b) $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^-$ wird von den Windungselementen

$$\{(i, 0, 1) \mid 3 \leq i \leq k-4, i \text{ ungerade}\}$$

erzeugt.

Beweis. Wir behaupten, dass $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))$ von den Windungssymbolen $(i, 0, 1)$ mit $2 \leq i \leq k-4$ erzeugt wird. Alle Aussagen der Proposition folgen daraus.

Nach Lemma 1.8 ist die Kodimension von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))$ in $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(3))$ gleich 2. Aus Lemma 1.6 folgt, dass $(i, 0, 1) \in \mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))$ für $1 \leq i \leq k-3$. Da die Windungssymbole nach Lemma 2.10 $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(3))$ erzeugen, können $(0, 0, 1)$ und $(k-2, 0, 1)$ keine Spitzensymbole sein. Man kann auch leicht direkt sehen, dass die Windungssymbole $(0, 0, 1)$ und $(k-2, 0, 1)$ in den Relationen des Lemmas 2.10 nicht vorkommen.

Es genügt daher zu zeigen, dass sich $(1, 0, 1)$ und $(k-3, 0, 1)$ mittels der Relationen des Lemmas 2.10 durch die anderen Windungssymbole ausdrücken lassen.

Sei zunächst k gerade. Setzt man in den Relationen des vorherigen Lemmas $i = 0$ oder $i = 2$, so erhält man

$$\begin{aligned} -6(k-2) \cdot (1, 0, 1) - (k-2)(2^{k-2} + 2) \cdot (k-3, 0, 1) + \text{andere Terme} &= 0, \\ -3(k-2) \cdot (1, 0, 1) - (k-2)(2^{k-4} + 5) \cdot (k-3, 0, 1) + \text{andere Terme} &= 0. \end{aligned}$$

Da die Matrix $\begin{pmatrix} 6 & 2^{k-2}+2 \\ 3 & 2^{k-4}+5 \end{pmatrix}$ für $k \geq 8$ invertierbar ist, kann man $(1, 0, 1)$ und $(k-3, 0, 1)$ durch die anderen Windungselemente linear kombinieren. Für ungerades k wählt man $i = 1$ und $i = 3$ und erhält ebenso

$$\begin{aligned} 3(k-2) \cdot (1, 0, 1) - (2^{k-3} - 1)(k-2) \cdot (k-3, 0, 1) + \text{andere Terme} &= 0, \\ 3(k-2) \cdot (1, 0, 1) - (2^{k-5} - 7)(k-2) \cdot (k-3, 0, 1) + \text{andere Terme} &= 0. \end{aligned}$$

Ein ähnliches Argument liefert hier für $k \geq 9$ die gleiche Aussage. Für ungerades k kann man den Beweis auch leichter führen. Es gehören dann $(1, 0, 1)$ und $(k-3, 0, 1)$ verschiedenen Eigenräumen bezüglich η^* an. Es genügt dann zu zeigen, dass $(1, 0, 1)$ und $(k-3, 0, 1)$ in irgendeiner der Relationen des Lemmas 2.10 vorkommen. \square

2.3.2 Eine Basis im Fall geraden Gewichtes

In diesem Abschnitt sei stets k gerade. Wir setzen in Folge den Beweis der Proposition 2.10.1 voraus.

In Lemma 2.10 haben wir die Relationen für die Windungselemente bestimmt. Wir benötigen im Folgenden viel genauere Resultate. Da gerade und ungerade Windungselemente unterschiedlichen Eigenräumen bezüglich η^* angehören, müssen die Relationen des Lemmas 2.10 für gerade und ungerade Windungselemente getrennt erfüllt sein.

Wir benötigen in Folge nur die Relationen mit $0 \leq i \leq \frac{k-2}{2}$. Wir definieren Matrizen $C^{(r)} = (c_{ij}^{(r)})$ für $1 \leq r \leq 6$ und $1 \leq i \leq \frac{k-2}{2} + 1, 1 \leq j \leq \frac{k-2}{2}$ wie folgt.

$$\begin{aligned}
c_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} (-1)^i \binom{k-1-i}{2j-i} & 2j \geq i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(2)} &= \begin{cases} (-1)^i \binom{i-1}{k-1-2j} & 2j \geq k-i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(3)} &= - \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{k-1-i}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}, \\
c_{ij}^{(4)} &= \begin{cases} -2^{2j-i} \binom{k-1-i}{k-1-2j} & 2j \geq i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(5)} &= \begin{cases} -2^{2j-(k-i)} \binom{i-1}{2j-(k-i)} & 2j \geq k-i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(6)} &= - \sum_{\nu=\max(0, i-2j)}^{i-1} \binom{i-1}{\nu} \binom{k-1-i+\nu}{k-1-2j}.
\end{aligned}$$

Setze nun $C = \sum_{r=1}^6 C^{(r)}$. Dann können die Relationen des Lemmas 2.10 für ungerade Windungselemente wie folgt als Matrixgleichung geschrieben werden.

$$C \begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (3, 0, 1) \\ \vdots \\ (k-3, 0, 1) \end{pmatrix} = 0. \tag{34}$$

Proposition 2.10.2. *Sei $n = \lfloor \frac{k+5}{6} \rfloor$ und $k > 6$. Dann sind die Modularen Symbole $(2j-1, 0, 1)$ für $j = n+1, \dots, \frac{k-2}{2}$ eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^-$.*

Beweis. Wir definieren eine $n \times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ für $1 \leq i, j \leq n$ durch

$$\begin{aligned} a_{ij} &= -c_{\frac{k-2}{2}+1-n+i,j}^{(3)} - c_{\frac{k-2}{2}+1-n+i,j}^{(6)} \\ &= \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \binom{\frac{k}{2}+n-i-1}{\nu} \\ &\quad + \sum_{\nu=\max(0, \frac{k}{2}+i-2j-n)}^{\frac{k}{2}+i-n-1} \binom{\frac{k}{2}+i-n-1}{\nu} \binom{\frac{k}{2}+n-i+\nu-1}{k-1-2j}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass diese Matrix invertierbar ist. Wir beweisen dies, indem wir die Matrix A von links mit einer Matrix B multiplizieren, sodass die Matrix BA eine Dreiecksform besitzt.

1. *Schritt (Vereinfachung):* Eine kurze Rechnung ergibt die einfachere Darstellung

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}+i-n-1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}+n-i-1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}. \end{aligned} \tag{35}$$

2. *Schritt (Definition von B):* Die Einträge der Matrix B sind Zahlenfolgen aus der Theorie der Chebyshev-Polynome, die wir kurz einführen wollen (siehe etwa [AH65, Chapter 22]). Definiere $T_n(x)$ rekursiv durch

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Es ist wohlbekannt, dass jedes Polynom vom Grad n als Linearkombination von T_1, \dots, T_n geschrieben werden kann. Es gibt also $c_{n,m}$ mit

$$(2x)^n = \sum_{m=1}^n c_{n,m} T_m(x).$$

Einige Werte dieser $c_{n,m}$ sind in der Tabelle [AH65, Table 22.3] aufgelistet.

Für gerades n sind diese explizit wie folgt gegeben.

$$c_{n,m} = \begin{cases} 0 & m \equiv 1 \pmod{2}, \\ \binom{n}{(n-m)/2} & m \equiv 0 \pmod{2}, m > 0, \\ \frac{1}{2} \binom{n}{n/2} & m = 0. \end{cases} \quad (36)$$

Definiere nun die obere Dreiecksmatrix $B = (b_{ij})$ für $1 \leq i, j \leq n$ durch

$$b_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j} c_{2n-2i, 2n-2j} & i < j, \\ 1 & j = i, \\ 0 & i > j. \end{cases} \quad (37)$$

Wir behaupten, dass

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_0 \\ 0 & & & \dots & s_0 + 3 & \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & s_0 + 3(n-2) & & & & \\ 3k-6 & & & & & * \end{pmatrix} \quad (38)$$

mit $s_0 = \frac{3}{2}k - 3n$.

4. *Schritt* ($i = n$): Wir berechnen zuerst den Eintrag $(BA)_{n,1}$. Direkt aus den Definitionen folgt

$$(BA)_{n,1} = a_{n,1} = 3k - 6.$$

5. *Schritt* (ein Ausdruck für $(BA)_{ij}$, $i < n$): Wir nehmen in Folge $i < n$ an. Aus den Definitionen folgt dann

$$(BA)_{ij} = \sum_{r=i}^{n-1} (-1)^{i+r} \binom{2n-2i}{r-i} a_{rj} + \frac{(-1)^{i+n}}{2} \binom{2n-2i}{n-i} a_{nj}. \quad (39)$$

Durch Einsetzen und eine kurze Rechnung folgt

$$\begin{aligned}
(BA)_{ij} &= \sum_{r=i}^{n-1} (-1)^{i+r} \binom{2n-2i}{r-i} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} + r - n - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\
&\quad + \sum_{r=i}^{n-1} (-1)^{i+r} \binom{2n-2i}{r-i} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} + n - r - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\
&\quad + (-1)^{i+n} \binom{2n-2i}{n-i} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}.
\end{aligned}$$

Wir substituieren nun in den beiden ersten Summen $r \mapsto r + i$ und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n-1-i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} + r + i - n - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1-i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} + n - r - i - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\
&\quad + (-1)^{i+n} \binom{2n-2i}{n-i} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}.
\end{aligned}$$

Wir durchlaufen nun beide Summen über r in umgekehrter Richtung und erhalten

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n-1-i} (-1)^{n-1-i-r} \binom{2n-2i}{n-1-i-r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} - 2 - r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1-i} (-1)^{n-1-i-r} \binom{2n-2i}{n-1-i-r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} + r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\
&\quad + (-1)^{i+n} \binom{2n-2i}{n-i} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2} - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}.
\end{aligned}$$

Wir substituieren nun in der ersten Summe $r \mapsto r - 1$ und erhalten nach

kurzer Rechnung

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^{n-i-r} \binom{2n-2i}{n-i-r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}-1-r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\ & + \sum_{r=0}^{n-1-i} (-1)^{n-1-i-r} \binom{2n-2i}{n-1-i-r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}+r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}. \end{aligned}$$

Summieren wir in der ersten Summe nochmals in umgekehrter Richtung und nutzen in der zweiten Summe die Symmetrie des Binomialkoeffizienten aus, erhalten wir

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{n-i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}-1-n+i+r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\ & + \sum_{r=0}^{n-1-i} (-1)^{n-i+1+r} \binom{2n-2i}{n-i+1+r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}+r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}. \end{aligned}$$

Beide Summen kann man zusammenfassen und man erhält als Ergebnis

$$\begin{aligned} (BA)_{ij} &= \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}-1-n+i+r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\ &= \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}. \quad (40) \end{aligned}$$

6. Schritt (Die Terme mit $i+j=n+1$): Sei nun $j=n+1-i$. Dann erhält man aus (40)

$$\begin{aligned} & (BA)_{i,n+1-i} \\ &= \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \sum_{\nu=0}^{2n-2i+1} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2n-2i+1-\nu}. \end{aligned}$$

Wir trennen nun die Terme mit $\nu > 2n-2i-1$ ab und vertauschen die

Summen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{2n-2i-1} \binom{k-2-\nu}{2n-2i+1-\nu} \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{\nu} \\
& + (k-2-2n+2i) \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{2n-2i} \\
& + \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{2n-2i+1}.
\end{aligned} \tag{41}$$

Wir benutzen nun die folgende Identität (siehe [GKP94, Identity (5.25)])

$$\sum_{k \leq l} (-1)^k \binom{s}{k-n} \binom{l-k}{m} = (-1)^{l+m} \binom{s-m-1}{l-m-n}. \tag{42}$$

Diese Formel folgt leicht aus der bekannten Chu-Vandermonde Identität

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad (a, b, c \in \mathbb{C})$$

und gilt daher (wie in [GKP94] vermerkt) für $s \in \mathbb{C}$ und $l, m, n \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}
& \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{\nu} \\
& = (-1)^{\frac{k}{2}-1+n-i+\nu} \binom{2n-2i-\nu-1}{\frac{k}{2}-1+n-i-\nu}.
\end{aligned}$$

Ist nun $\nu \leq 2n-2i-1$, so ist $2n-2i-\nu-1 \geq 0$. Außerdem gilt

$$\frac{k}{2} - 1 + n - i - \nu > 2n - 2i - \nu - 1,$$

denn für jedes $k > 6$ gilt sicherlich $\frac{k}{2} > \lfloor \frac{k+5}{6} \rfloor = n$. Daher verschwindet die erste Summe in (41). Also erhalten wir unter nochmaliger Verwendung von

(42)

$$\begin{aligned}
(BA)_{i,n+1-i} &= (k-2-2n+2i) \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{2n-2i} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{2n-2i+1} \\
&= (-1)^{\frac{k}{2}+3n-3i-1} (k-2-2n+2i) \binom{-1}{\frac{k}{2}-1-n+i} \\
&\quad + (-1)^{\frac{k}{2}+3n-3i} \binom{-2}{\frac{k}{2}-2-n+i}.
\end{aligned}$$

Nun gelten aber die Identitäten

$$\binom{-1}{n} = (-1)^n, \quad \binom{-2}{n} = (-1)^n (n+1).$$

Daraus folgt

$$(BA)_{i,n+1-i} = \frac{3}{2}k - 3 - 3n + 3i.$$

Bemerkung: Man kann sich für die Evaluation der auftretenden Summen von Produkten von Binomialkoeffizienten auch Computerbeweise generieren lassen. Diese benutzen den Algorithmus des *kreativen Teleskopierens* von Doron Zeilberger (siehe etwa [PKZW97]). Auf diese Art und Weise kann man die obigen Summen auch ohne negative Binomialkoeffizienten ausrechnen.

Im Appendix, Abschnitt 7.3, gebe ich exemplarisch eine Beispielrechnung an. Dafür habe ich die Mathematica-Pakete `fastZeil` von Peter Paule und Markus Schorn [PS95] sowie `Sigma` von Carsten Schneider [Sch07] benutzt.

7. Schritt (Die Terme mit $i+j < n+1$): Aus (40) erhält man

$$\begin{aligned}
(BA)_{ij} &= \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu} \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{\nu}.
\end{aligned}$$

Aus (42) folgt wiederum

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{2n-2i} (-1)^r \binom{2n-2i}{r} \binom{\frac{k}{2}-1+n-i-r}{\nu} \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}-1+n-i-r-\nu} \binom{2n-2i-\nu-1}{\frac{k}{2}-1+n-i-\nu} \\ &= 0, \end{aligned}$$

denn $2n-2i-\nu-1 \geq 0$ für $0 \leq \nu \leq 2j-1$, $i+j < n+1$ und wie oben gilt

$$\frac{k}{2}-1+n-i-\nu > 2n-2i-\nu-1.$$

Daraus folgt (38).

8. *Schritt (Die Invertierbarkeit von A)*: Man hat $\det B = 1$. Also ist $\det(A) = \det(BA)$. Aus (38) folgt dann

$$\det(A) = \pm(3k-6) \prod_{i=1}^{n-1} \left(\frac{3}{2}k - 3n - 3 + 3i \right) \neq 0.$$

Wir fahren nun mit dem Beweis der Proposition fort. Sei $-Q = (-q_{ij})$ für $1 \leq i, j \leq n$ die Teilmatrix von $C = (c_{ij})$ (siehe (34)), die an der Position $(i, j) = (\frac{k-2}{2} + 2 - n, 1)$ von C beginnt. Dann ist

$$q_{ij} = -c_{\frac{k-2}{2}+1-n+i, j}, \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Behauptung: Es ist $Q = A$, wenn $k \not\equiv 2 \pmod{6}$ und für $k \equiv 2 \pmod{6}$ gilt

$$Q = A + A'$$

mit $A' = (a'_{ij})$, $1 \leq i, j \leq n$ und

$$a'_{ij} = \begin{cases} 2(k-2) & i=1, j=n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beweis der Behauptung: Aus den Definitionen folgt

$$q_{ij} = - \sum_{\nu=1}^6 c_{\frac{k-2}{2}+1-n+i, j}^{(\nu)}.$$

Wir untersuchen zuerst die Beiträge der Terme $c_{ij}^{(1)}$ und $c_{ij}^{(4)}$. Diese verschwinden, falls $2j < i$. Also liefern diese Terme nur für die (i, j) einen Beitrag zu q_{ij} , für die die Ungleichung

$$2j \geq \frac{k-2}{2} + 1 - n + i$$

erfüllt ist. Ist $k \equiv 0 \pmod{6}$, so ist $n = \frac{k}{6}$ und daher $2n < \frac{k-2}{2} + 2 - n$. Die Matrizen $C^{(1)}$ und $C^{(4)}$ leisten daher keinen Beitrag zu Q . Ist $k \equiv 4 \pmod{6}$, so ist $n = \frac{k+2}{2}$ und die Ungleichung

$$2j \geq \frac{k-2}{2} + 1 - n + i$$

ist nur für $(i, j) = (1, n)$ erfüllt¹⁰. Eine Rechnung ergibt aber

$$c_{\frac{k-2}{2}+2-\frac{k+2}{6}, \frac{k+2}{6}}^{(1)} + c_{\frac{k-2}{2}+2-\frac{k+2}{6}, \frac{k+2}{6}}^{(4)} = 0.$$

Also leisten die Matrizen $C^{(1)}$ und $C^{(4)}$ auch in diesem Fall keinen Beitrag zu Q . Sei nun $k \equiv 2 \pmod{6}$. Dann ist $n = \frac{k+4}{6}$ und die Ungleichung

$$2j \geq \frac{k-2}{2} + 1 - n + i$$

ist genau für $(i, j) = (1, n)$ und $(i, j) = (2, n)$ erfüllt. Eine Rechnung ergibt

$$c_{\frac{k-2}{2}+3-\frac{k+4}{6}, \frac{k+4}{6}}^{(1)} + c_{\frac{k-2}{2}+3-\frac{k+4}{6}, \frac{k+4}{6}}^{(4)} = 0.$$

Also leistet der Term $(i, j) = (2, n)$ keinen Beitrag. Allerdings gilt

$$c_{\frac{k-2}{2}+2-\frac{k+4}{6}, \frac{k+4}{6}}^{(1)} + c_{\frac{k-2}{2}+2-\frac{k+4}{6}, \frac{k+4}{6}}^{(4)} = 2(2-k).$$

Also leistet $C^{(1)} + C^{(4)}$ zu q_{ij} den Beitrag $2(k-2)$, wenn $(i, j) = (1, n)$. Wir untersuchen nun den Beitrag der Matrizen $C^{(2)}$ und $C^{(5)}$. Es verschwinden $c_{ij}^{(2)}$ und $c_{ij}^{(5)}$, wenn $2j < k - i$. Also leisten $C^{(2)}$ und $C^{(5)}$ keinen Beitrag zu Q , falls

$$2j < k - \left(\frac{k-2}{2} + 1 - n + i \right), \quad (\forall i, j \text{ mit } 1 \leq i, j \leq n).$$

Eine kurze Rechnung zeigt, dass diese Ungleichung für $k > 6, k \neq 8$ stets

¹⁰In diesem Fall besteht Gleichheit.

erfüllt ist. Man rechnet leicht nach, dass $C^{(2)} + C^{(5)}$ auch für $k = 8$ keinen Beitrag zu Q liefert. Daraus folgt die Behauptung.

Behauptung: Die Matrix Q ist invertierbar.

Beweis der Behauptung: Für $k \not\equiv 2 \pmod{6}$ ist alles klar. Es gilt aber

$$B \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 2(k-2) \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 2(k-2) \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$B(A + A') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & s_0 + 2(k-2) \\ 0 & & & & \dots & s_0 + 3 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & s_0 + 3(n-1) & & & & \\ 3k-6 & & & & & * \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt die Aussage auch für $k \equiv 2 \pmod{6}$.

Wir beweisen nun die Proposition. Definiere die Matrix $T = (t_{ij})$ mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$ durch

$$t_{ij} = -c_{\frac{k-2}{2}+1-n+i, n+j}.$$

Man bemerke, dass $n + \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1 = \frac{k-2}{2}$. Aus (34) folgt dann die Identität

$$Q \begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ \vdots \\ (2n-1, 0, 1) \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} (2n+1, 0, 1) \\ \vdots \\ (k-3, 0, 1) \end{pmatrix} = 0.$$

Weil Q invertierbar ist, folgt

$$\begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ \vdots \\ (2n-1, 0, 1) \end{pmatrix} = -Q^{-1}T \begin{pmatrix} (2n+1, 0, 1) \\ \vdots \\ (k-3, 0, 1) \end{pmatrix}.$$

Also können alle ungeraden Windungselemente als Linearkombinationen von

$(2j - 1, 0, 1)$ für $n < j \leq k - 2$ geschrieben werden¹¹. Außerdem gilt

$$\dim \mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^- = \dim S_k(\Gamma_1(3)) = \left\lfloor \frac{k}{3} \right\rfloor - 1.$$

Die Proposition folgt dann aus Lemma 2.10. □

Für unsere Anwendungen auf die Theorie der Eisenstein-Reihen benötigen wir ein geringfügig anderes Resultat. Der Grund ist das Modulare Symbol $(k-3, 0, 1)$, das mit dem Rankin-Trick zu einer nicht existierenden Eisenstein-Reihe vom Gewicht 2 korrespondieren müsste. Wir werden daher dieses Symbol aus der oben gegebenen Basis eliminieren.

Proposition 2.10.3. *Sei $n = \lfloor \frac{k+5}{6} \rfloor$ und $k > 6$. Dann sind die Modularen Symbole $(2j - 1, 0, 1)$ für $j = n, \dots, \frac{k-4}{2}$ eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^-$.*

Beweis. Der Beweis ist analog zum Beweis der Proposition 2.10.2. Wir definieren eine $n \times n$ Matrix \tilde{A} , deren ersten $n - 1$ Spalten mit der in (35) definierten Matrix $A = (a_{ij})$ übereinstimmen und deren letzte Spalte durch die korrespondierenden Einträge der letzten Spalte von C ersetzt werden. Diese Matrix ist invertierbar und der Beweis ist dann ähnlich wie oben.

Sei also $\tilde{A} \in \text{Mat}(n \times n, \mathbb{Z})$, $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})$ für $1 \leq i, j \leq n$ mit

$$\tilde{a}_{ij} = \begin{cases} a_{ij} & j < n, \\ -c_{\frac{k-2}{2}+1-n+i, \frac{k-2}{2}} & j = n. \end{cases}$$

Dann gilt explizit

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{in} &= \sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{\frac{k}{2} + n - i - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{1} + \sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{\frac{k}{2} + i - n - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{1} \\ &\quad + 2^{i+\frac{k}{2}-n-2} \binom{\frac{k}{2} + i - n - 1}{1} + 2^{\frac{k}{2}+n-i-2} \binom{\frac{k}{2} - i + n - 1}{1} \\ &\quad + (-1)^{\frac{k}{2}-n+i+1} (k-2). \end{aligned}$$

¹¹Der hier gegebene Beweis ist vollständig explizit. Die Linearkombinationen können leicht mit der Hand oder auf dem Computer ausgerechnet werden.

Sei B die in (37) definierte Matrix. Wir zeigen

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \psi \\ 0 & & & & \dots & s_0 + 3 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & s_0 + 3(n-2) & & & & \\ 3k-6 & & & & & * \end{pmatrix},$$

mit $s_0 = \frac{3}{2}k - 3n$ und

$$\psi = (k-2)2^{-n-3} \left(8^n (-1)^{\frac{k}{2}-n} + 2^{\frac{k}{2}+3} \right).$$

Zum Beweis müssen wir lediglich den rechten oberen Eintrag neu berechnen. Die Berechnung der restlichen Einträge erfolgte in Proposition 2.10.2. Wir setzen dazu

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{in}^{(1)} &= \sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{\frac{k}{2} + n - i - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{1} \\ &\quad + \sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{\frac{k}{2} + i - n - 1}{\nu} \binom{k-2-\nu}{1}, \\ \tilde{a}_{in}^{(2)} &= 2^{i+\frac{k}{2}-n-2} \binom{\frac{k}{2} + i - n - 1}{2} + 2^{\frac{k}{2}+n-i-2} \binom{\frac{k}{2} - i + n - 1}{2}, \\ \tilde{a}_{in}^{(3)} &= (-1)^{\frac{k}{2}-n+i+1} (k-2). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{a}_{in} = \sum_{\nu=1}^3 \tilde{a}_{in}^{(\nu)}.$$

Aus (39) folgt nun

$$(B\tilde{A})_{1n} = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{1+r} \binom{2n-2}{r-1} \tilde{a}_{r,n} + \frac{(-1)^{1+n}}{2} \binom{2n-2}{n-1} \tilde{a}_{n,n}. \quad (43)$$

1. *Schritt:* Wir berechnen

$$(S1) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{1+r} \binom{2n-2}{r-1} \tilde{a}_{r,n}^{(1)} + \frac{(-1)^{1+n}}{2} \binom{2n-2}{n-1} \tilde{a}_{n,n}^{(1)}.$$

Ein handlicher Ausdruck dafür wurde bereits in Proposition 2.10.2 berechnet.

Setzt man in (40) $(i, j) = (1, \frac{k-2}{2})$, so ergibt sich

$$(S1) = \sum_{r=0}^{2n-2} (-1)^r \binom{2n-2}{r} \sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{\frac{k}{2} + n - r - 2}{\nu} \binom{k-2-\nu}{1}.$$

Es gilt

$$(S1) = (k-2) \sum_{r=0}^{2n-2} (-1)^r \binom{2n-2}{r} \sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{\frac{k}{2} + n - r - 2}{\nu} \\ - \sum_{r=0}^{2n-2} (-1)^r \binom{2n-2}{r} \sum_{\nu=0}^{k-3} \nu \binom{\frac{k}{2} + n - r - 2}{\nu}.$$

Man beachte $0 \leq \frac{k}{2} + n - r - 2 \leq k - 3$ für $k > 6$. Also gilt

$$\sum_{\nu=0}^{k-3} \binom{\frac{k}{2} + n - r - 2}{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\frac{k}{2} + n - r - 2} \binom{\frac{k}{2} + n - r - 2}{\nu} = 2^{\frac{k}{2} + n - r - 2}, \\ \sum_{\nu=0}^{k-3} \nu \binom{\frac{k}{2} + n - r - 2}{\nu} = 2^{\frac{k}{2} + n - r - 3} \left(\frac{k}{2} + n - r - 2 \right).$$

Hierbei haben wir die wohlbekannte Formel $\sum_{\nu=0}^n \nu \binom{n}{\nu} = 2^{n-1} n$ benutzt. Also ergibt sich

$$(S1) = (k-2) 2^{\frac{k}{2}-n} \sum_{r=0}^{2n-2} (-1)^r \binom{2n-2}{r} 2^{2n-2-r} \\ - \sum_{r=0}^{2n-2} (-1)^r \binom{2n-2}{r} 2^{\frac{k}{2} + n - r - 3} \left(\frac{k}{2} + n - r - 2 \right). \quad (44)$$

Aus der Identität

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} x^r = (1-x)^n$$

gewinnt man leicht die Formeln

$$\begin{aligned}\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} 2^{n-r} &= 1, \\ \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} r \cdot 2^{n-r} &= -n.\end{aligned}\tag{45}$$

Wendet man diese auf (44) an, so ergibt sich nach einer Rechnung

$$(S1) = 3 \cdot 2^{\frac{k}{2}-n-2} (k - 2n).$$

2. Schritt: Wir berechnen

$$(S2) = \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{1+r} \binom{2n-2}{r-1} \tilde{a}_{r,n}^{(2)} + \frac{(-1)^{1+n} (2n-2)}{2} \binom{2n-2}{n-1} \tilde{a}_{n,n}^{(2)}.$$

Führt man exakt die gleichen Schritte wie unter Schritt 5 in Proposition 2.10.2 aus, erhält man

$$(S2) = \sum_{r=0}^{2n-2} (-1)^r \binom{2n-2}{r} 2^{\frac{k}{2}-n+r-1} \left(\frac{k}{2} - n + r \right).$$

Diesen Ausdruck kann man wiederum mittels der Formeln (45) berechnen. Man erhält

$$(S2) = 2^{\frac{k}{2}-n-2} (k + 6n - 8).$$

3. Schritt: Wir berechnen

$$\begin{aligned}(S3) &= \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{1+r} \binom{2n-2}{r-1} \tilde{a}_{r,n}^{(3)} + \frac{(-1)^{1+n} (2n-2)}{2} \binom{2n-2}{n-1} \tilde{a}_{n,n}^{(3)} \\ &= (-1)^{\frac{k}{2}-n} (k-2) \sum_{r=1}^{n-1} \binom{2n-2}{r-1} + \frac{(-1)^{\frac{k}{2}-n} (k-2)}{2} \binom{2n-2}{n-1}.\end{aligned}$$

Nun gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{2n}{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^{2n} \binom{2n}{\nu} - \frac{1}{2} \binom{2n}{n}.$$

Also folgt

$$(S3) = (-1)^{\frac{k}{2}-n} (k-2) 2^{2n-3}.$$

Daraus folgt die Berechnung von $B\tilde{A}$. Wir erhalten daher folgenden Ausdruck für die Determinante von \tilde{A} .

$$(k-2)2^{-n-3}(8^n(-1)^{\frac{k}{2}-n} + 2^{k/2+3})(3k-6) \prod_{i=1}^{n-2} \left(\frac{3k}{2} - 3n + 3i \right) \neq 0.$$

Wir definieren nun eine Matrix $\tilde{T} = (\tilde{t}_{ij})$ mit $1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$ durch

$$\tilde{t}_{ij} = -c_{\frac{k-2}{2}+1-n+i, n-1+j}.$$

Dann gilt

$$\tilde{A} \begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ \vdots \\ (2n-3, 0, 1) \\ (k-3, 0, 1) \end{pmatrix} + \tilde{T} \begin{pmatrix} (2n-1, 0, 1) \\ \vdots \\ (k-5, 0, 1) \end{pmatrix} = 0,$$

und man schließt analog zu Proposition 2.10.2. □

Korollar 2.11. *Sei k gerade. Setze $n = \lfloor \frac{k+5}{6} \rfloor, p = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$. Dann ist*

$$S_k(3) \rightarrow \mathbb{C}^p, f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(2n) \\ L_f(2n+2) \\ \vdots \\ L_f(k-4) \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus, resp. sind die Abbildungen $f \mapsto L_f(2n+2r)$ für $r = 0, \dots, p-1$ eine Basis von $S_k(3)^\vee$.

2.3.3 Eine Basis im Fall ungeraden Gewichtes

Wir gehen analog zu Abschnitt 2.3.2 vor. Die Beweise sind ähnlich und wir werden sie daher nur skizzieren. Definiere, ähnlich wie in (34), die Matrizen

$C^{(r)} = (c_{ij}^{(r)})$ für $1 \leq r \leq 6$ und $1 \leq i \leq \frac{k-1}{2}, 1 \leq j \leq \frac{k-3}{2}$ wie folgt.

$$\begin{aligned}
c_{ij}^{(1)} &= \begin{cases} (-1)^i \binom{k-1-i}{2j-i} & 2j \geq i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(2)} &= \begin{cases} -(-1)^i \binom{i-1}{k-1-2j} & 2j \geq k-i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(3)} &= \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{k-1-i}{\nu} \binom{k-2-\nu}{2j-1-\nu}, \\
c_{ij}^{(4)} &= \begin{cases} -2^{2j-i} \binom{k-1-i}{k-1-2j} & 2j \geq i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(5)} &= \begin{cases} -2^{2j-(k-i)} \binom{i-1}{2j-(k-i)} & 2j \geq k-i \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases} \\
c_{ij}^{(6)} &= \sum_{\nu=\max(0, i-2j)}^{i-1} \binom{i-1}{\nu} \binom{k-1-i+\nu}{k-1-2j}.
\end{aligned}$$

Setze $C = \sum_{r=1}^6 C^{(r)}$. Dann können die Relationen des Lemmas 2.10 für die ungeraden Windungselemente wie folgt als Matrixgleichung geschrieben werden.

$$C \begin{pmatrix} (1, 0, 1) \\ (3, 0, 1) \\ \vdots \\ (k-4, 0, 1) \end{pmatrix} = 0.$$

Proposition 2.11.1. *Sei $n = \lfloor \frac{k+2}{6} \rfloor$. Dann sind die Symbole $(2j-1, 0, 1)$ für $j = n+1, \dots, \frac{k-3}{2}$ eine Basis $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^-$.*

Beweisskizze. Der Beweis ist sehr ähnlich zum Beweis von Proposition 2.10.2. Daher können wir uns kurz fassen. Definiere $B = (b_{ij})$ für $1 \leq i, j \leq n$ durch

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j, \\ (-1)^{j-i} \frac{1-2j+2n}{1-i-j+2n} \binom{2n-2i}{j-i} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere die Matrix $A = (a_{ij})$ für $1 \leq i, j \leq n$ durch

$$a_{ij} = c_{\frac{k-1}{2}-n+i, j}.$$

Dann ist $A = (a_{ij})$ explizit wie folgt gegeben.

$$a_{ij} = \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k+1}{2} + n - i - 1}{\nu} \binom{k - 2 - \nu}{2j - 1 - \nu} + \sum_{\nu=0}^{2j-1} \binom{\frac{k-1}{2} - n + i - 1}{\nu} \binom{k - 2 - \nu}{2j - 1 - \nu}.$$

Eine Rechnung liefert

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & s_0 \\ 0 & & \dots & s_0 + 6 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ s_0 + 6(n-1) & & & & * \end{pmatrix},$$

wobei

$$s_0 = \begin{cases} 2k + 1 & k \equiv 1 \pmod{6}, \\ 2k + 3 & k \equiv 3 \pmod{6}, \\ 2k - 1 & k \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Damit ist die Rechnung ähnlich zu Proposition 2.10.2. Man bemerke

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & i > j, \\ (-1)^{j-i} \binom{2n-2i}{j-i} - (-1)^{j-i} \binom{2n-2i}{j-i-1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

□

Korollar 2.12. Sei k ungerade. Setze $n = \lfloor \frac{k+2}{6} \rfloor, p = \lfloor \frac{k}{3} \rfloor - 1$. Dann ist die Abbildung

$$S_k(3, \chi_3) \rightarrow \mathbb{C}^p, f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(2n+2) \\ L_f(2n+4) \\ \vdots \\ L_f(k-3) \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus.

2.4 Modulare Symbole der Stufe 4

2.4.1 Eine Basis im Fall ungeraden Gewichtes

In diesem Abschnitt untersuchen wir den Raum der Modularen Symbole der Stufe 4 mit ungeradem Gewicht. Anders als in den vorherigen Abschnit-

ten werden wir allerdings keine Relationen zwischen Windungselementen benötigen. Dies ist durch den glücklichen Umstand bedingt, dass der Raum der Spitzenformen der Stufe 4 fast die gleiche Dimension besitzt, wie Windungselemente in den Eigenräumen von η^* enthalten sind.

Proposition 2.12.1. *Sei*

$$R_j := \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(-1)^n}{2^n} \sum_{\nu=0}^n (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^j.$$

Dann gelten in $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$ die folgenden Relationen.

1.

$$(i, 1, 2) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq k-2 \\ r \equiv i+1 \pmod{2}}} \lambda_{k,r}^{(i)} \cdot (r, 0, 1),$$

wobei

$$\lambda_{k,r}^{(i)} = (-1)^i \sum_{j=0}^{k-2-i} 2^{i+j+r-(k-2)} \binom{k-2-i}{j} \binom{i+j}{k-2-r} R_j. \quad (46)$$

2.

$$(i, 1, 3) = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 0, 1) \\ - \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} (k-2-j, 0, 1).$$

Bemerkung: Es ist sicherlich möglich, (46) weiter zu vereinfachen. Wir benötigen aber für diese Arbeit lediglich, dass sich $(i, 1, 2)$ überhaupt durch $(i, 0, 1)$ ausdrücken lässt. Gleichung (46) spielt aber eine gewisse Rolle, wenn man den Raum der Modularen Symbole etwa auf dem Computer berechnen will. Die Relationen dieses Satzes sind nämlich, wie wir weiter unten feststellen werden, die einzigen nichttrivialen Relationen zwischen Modularen Symbolen im hier betrachteten Fall.

Beweis. Wir stützen den Beweis auf Theorem 1.4 und die dort genannten Relationen I, II und III. Man bemerke, dass jedes Manin-Symbol der Stufe 4 als $(*, 0, 1)$, $(*, 0, 3)$, $(*, 1, 0)$, $(*, 1, 1)$, $(*, 1, 2)$, $(*, 1, 3)$, $(*, 2, 1)$,

$(*, 2, 3)$, $(*, 3, 0)$, $(*, 3, 1)$, $(*, 3, 2)$, $(*, 3, 3)$ ausgedrückt werden kann. Wir werden zuerst die Manin-Symbole $(*, 1, 2)$ durch die Manin-Symbole $(*, 1, 1)$ ausdrücken, welche wir im Anschluss als Linearkombinationen der Windungselemente schreiben. Die Aussage 2. der Proposition wird sich auf dem Weg automatisch ergeben. Aus Relation I und II folgt

$$\begin{aligned} (i, c, d) + \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} (k-2-j, -c-d, -d) \\ = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, -c-d, c). \end{aligned}$$

Setze $c = 1, d = 2$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} (i, 1, 2) + \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} (k-2-j, 1, 2) \\ = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 1, 1). \end{aligned}$$

Um diese Gleichung nach $(i, 1, 2)$ umzustellen, müssen wir die folgende rekursive Gleichung nach a_i auflösen.

$$a_i + \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} a_{k-2-j} = b_i, \quad (0 \leq i \leq k-2). \quad (47)$$

Es ist trivial zu sehen, dass man die Gleichung stets nach a_i auflösen kann. Die explizite Berechnung der Zahlen ψ_{ij} mit

$$a_i = \sum_{j=0}^{k-2} \psi_{ij} b_j$$

ist allerdings schwierig. Wir haben der Berechnung ein eigenes Kapitel im Appendix gewidmet (siehe Proposition 7.10.1 in Abschnitt 7.4). Das Ergebnis lautet

$$a_i = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \sum_{n=0}^{k-2} \frac{(-1)^n n!}{2^n} \binom{k-2-i}{j} \begin{Bmatrix} j \\ n \end{Bmatrix} b_{i+j}. \quad (48)$$

Hier haben wir die Stirling-Zahl zweiter Art $\left\{ \begin{smallmatrix} j \\ n \end{smallmatrix} \right\}$ eingeführt. Per Definitionem

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ m \end{smallmatrix} \right\} = \begin{array}{l} \text{Anzahl der Partitionen einer Menge} \\ \text{von } n\text{-Elementen in } m \text{ nicht-leere Teilmengen} \end{array} \quad (49)$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} j^n. \quad (50)$$

Also folgt

$$\begin{aligned} (i, 1, 2) &= \frac{(-1)^i}{2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} R_j \\ &\quad \times \sum_{\nu=0}^{i+j} (-1)^\nu \binom{i+j}{\nu} (k-2-i-j+\nu, 1, 1). \end{aligned}$$

Aus Relation I und III folgt nun

$$(k-2-i-j+\nu, 1, 1) = (-1)^{-i-j+\nu} (i+j-\nu, 1, 3).$$

Also

$$(i, 1, 2) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} R_j \sum_{\nu=0}^{i+j} \binom{i+j}{\nu} (i+j-\nu, 1, 3).$$

Aus Relation II folgt

$$\begin{aligned} (i, 1, 3) &+ (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} (j, 3, 0) \\ &+ (-1)^{k-2-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 0, 1) = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Durch nochmalige Anwendung der Relation I erhalten wir

$$(i, 3, 0) = -(-1)^i (k-2-i, 0, 1).$$

Fügt man dies in (51) ein, so erhält man

$$(i, 1, 3) = (-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 0, 1) \\ - \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} (k-2-j, 0, 1).$$

Also gilt

$$(i, 1, 2) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} R_j \sum_{\nu=0}^{i+j} \binom{i+j}{\nu} (-1)^{i+j-\nu} \\ \times \sum_{\rho=0}^{i+j-\nu} (-1)^\rho \binom{i+j-\nu}{\rho} (k-2-i-j+\nu+\rho, 0, 1) \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} R_j \sum_{\nu=0}^{i+j} \binom{i+j}{\nu} \\ \times \sum_{\rho=0}^{k-2-i-j+\nu} \binom{k-2-i-j+\nu}{\rho} (k-2-\rho, 0, 1).$$

Nach einer langwierigen Rechnung erhält man schließlich

$$(i, 1, 2) = \sum_{\substack{0 \leq r \leq k-2 \\ r \equiv i+1 \pmod{2}}} \lambda_{k,r}^{(i)} \cdot (r, 0, 1),$$

wobei

$$\lambda_{k,r}^{(i)} = (-1)^i \sum_{j=0}^{k-2-i} 2^{i+j+r-(k-2)} \binom{k-2-i}{j} \binom{i+j}{k-2-r} R_j.$$

□

Korollar 2.13. *Sei k ungerade. Dann erzeugen die Windungselemente $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$.*

Beweis. Unter Benutzung der Relationen I und III des Satzes 1.4 kann man jedes Manin-Symbol als Linearkombination von $(*, 0, 1)$, $(*, 1, 2)$ und $(*, 1, 3)$ ausdrücken. Mittels Proposition 2.12.1 folgt die Behauptung. □

Lemma 2.14. *Sei k ungerade. Die Manin-Symbole $(i, 0, 1) \in \mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$ mit $1 \leq i \leq k - 3$ sind cuspidal.*

Beweis. Das folgt aus Lemma 1.6. \square

In der folgenden Proposition bestimmen wir Basen von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$. Dabei sind die Beweise durch die Theorie der Modularen Symbole trivial geworden.

Proposition 2.14.1. *Sei k ungerade.*

1. *Die Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ mit $0 \leq i \leq k - 2$ sind eine Basis von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$.*
2. *Die Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ mit $1 \leq i \leq k - 3$ sind eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))$.*
3. *Die Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ mit ungeradem $1 \leq i \leq k - 4$ sind eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^-$.*
4. *Die Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ mit geradem $2 \leq i \leq k - 3$ sind eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^+$.*

Beweis. Mittels der üblichen Dimensionsformeln (z.B. [DS05, Chapter 3.9]) und Lemma 1.8 erhalten wir

$$\begin{aligned} \dim \mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^\pm &= \dim S_k(\Gamma_1(4)) = \frac{k-3}{2}, \\ \dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(4)) &= k-1, \\ \dim \mathbb{S}_k(\Gamma_1(4)) &= k-3. \end{aligned}$$

Alles andere folgt aus Lemma 2.14, Korollar 2.13 und einem Abzählargument. \square

Korollar 2.15. *Sei k ungerade. Dann gibt es Isomorphismen*

$$\begin{aligned} \psi_1 : S_k(\Gamma_1(4)) &\rightarrow \mathbb{C}^{(k-3)/2}, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(2) \\ L_f(4) \\ \vdots \\ L_f(k-3) \end{pmatrix}, \\ \psi_2 : S_k(\Gamma_1(4)) &\rightarrow \mathbb{C}^{(k-3)/2}, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(3) \\ L_f(5) \\ \vdots \\ L_f(k-2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.4.2 Eine Basis im Falle geraden Gewichtes

In diesem Abschnitt studieren wir den Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$ im Falle geraden Gewichtes. Hier gibt es nicht-triviale Relationen zwischen Windungselementen in $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^-$. Wir bestimmen daher nur Basen von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^+$.

Lemma 2.16. $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^-$ ist im Kern von $\tilde{\delta}$ (siehe Lemma 1.6), d.h. es gilt $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^- = \mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^-$.

Beweis. Mittels der Relationen I und II des Satzes 1.4 können alle Manin-Symbole durch $(*, 1, 2)$, $(*, 0, 1)$ oder $(*, 1, 3)$ ausgedrückt werden. Ähnlich wie im Beweis von Proposition 2.12.1 können die Manin-Symbole $(*, 1, 3)$ als Linearkombination der Windungselemente geschrieben werden, wobei Relation II und I jeweils einmal zu benutzen sind. Also erzeugen $(*, 0, 1)$ und $(*, 1, 2)$ den Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$. Nun sind sowohl $(i, 1, 2)$ als auch $(i, 0, 1)$ „homogene“ Elemente bzgl. η^* , d.h. $\eta^*(i, 0, 1) = (-1)^i(i, 0, 1)$ und $\eta^*(i, 1, 2) = (-1)^i(i, 1, 2)$. Um die zweite Identität zu zeigen, muss man Relation III einmal benutzen. Also muss man lediglich zeigen, dass alle $(i, 0, 1)$ resp. $(i, 1, 2)$ mit *ungeradem* i im Kern von $\tilde{\delta}$ enthalten sind. Dies folgt aber aus Lemma 1.6. \square

Korollar 2.17. Es gilt $\dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^+ = \frac{k+2}{2}$.

Beweis. Es gilt $\dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(4)) = \dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^+ + \dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^-$. Nach Lemma 2.16 und Satz 1.7 gilt $\dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^- = \dim \mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))$. Mittels der Dimensionsformeln aus [DS05, Chapter 3.9] erhalten wir

$$\begin{aligned}\dim M_k(\Gamma_1(4)) &= \frac{k+2}{2}, \\ \dim S_k(\Gamma_1(4)) &= \frac{k-4}{2}.\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Proposition 2.17.1. Sei k gerade.

- a.) Die Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ mit geradem $0 \leq i \leq k-2$ und das Symbol $(0, 1, 2)$ sind eine Basis von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^+$.
- b.) Die Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ mit geradem $2 \leq i \leq k-4$ sind eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^+$.

Beweis. a.) Aufgrund der Dimensionsformeln des Korollars 2.17 und des Beweises von Lemma 2.16 genügt es zu zeigen, dass $(0, 1, 2)$ und alle (geraden und ungeraden) Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ den Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$ erzeugen. Im

Beweis von Lemma 2.16 haben wir bereits gezeigt, dass $(*, 0, 1)$ und $(*, 1, 2)$ den Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))$ erzeugen. Wir verfahren ähnlich wie in Proposition 2.12.1, ohne zu versuchen exakte Formeln zu erhalten. Aufgrund des ersten und zweiten Sets an Relationen (siehe Satz 1.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} (i, 1, 2) - \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} (k-2-j, 1, 2) \\ = -(-1)^i \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 1, 1). \end{aligned}$$

Wir müssen daher die folgende Relation nach a_i auflösen.

$$a_i - \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} a_{k-2-j} = - \sum_{j=0}^{k-2-i-1} \binom{k-2-i}{j} a_{k-2-j} = b_i.$$

Man sieht sofort, dass man alle a_i für $i > 0$ durch die b_i und a_0 ausdrücken kann. Wie in Proposition 2.12.1 kann man die Manin-Symbole $(*, 1, 1)$ durch sukzessive Anwendung der Relation I durch $(*, 1, 3)$ und diese wiederum mittels Relation II durch Windungselemente ausdrücken. Dies beweist a.). Nun erzeugen die geraden Windungselemente $(i, 0, 1)$ und $(0, 1, 2)$ den Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^+$. Nach Lemma 1.6 sind $(i, 0, 1)$ für $2 \leq i \leq k-4$ cuspidal und die Kodimension von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^+$ in $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^+$ muss nach Lemma 1.8 und Lemma 2.16 gleich 3 sein. Also sind die geraden Manin-Symbole $(i, 0, 1)$ für $2 \leq i \leq k-4$ eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^+$. Natürlich folgt auch, dass $(0, 1, 2)$, $(0, 0, 1)$ und $(k-2, 0, 1)$ eine Basis des Raumes der „Eisenstein-Symbole“ sind. \square

Korollar 2.18. *Sei k gerade. Dann ist*

$$\psi : S_k(\Gamma_1(4)) \rightarrow \mathbb{C}^{(k-4)/2}, \quad f \mapsto \begin{pmatrix} L_f(3) \\ L_f(5) \\ \vdots \\ L_f(k-3) \end{pmatrix}$$

ein Isomorphismus.

2.5 Modulare Symbole der Stufe 5

In diesem Abschnitt bestimmen wir eine Basis für $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$, falls k ungerade ist. Das Resultat werden wir später nicht benötigen, der Beweis ist aber

sicherlich der Schönste dieser Arbeit.

Theorem 2.19.

1. Wenn k ungerade ist, sind die Symbole $(*, 0, 1)$ und $(*, 0, 2)$ eine Basis von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$ und die Symbole $(i, 0, 1)$, resp. $(i, 0, 2)$ für $1 \leq i \leq k-3$ sind eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))$.
2. Wenn k gerade ist, erzeugen die Elemente $(*, 0, 1)$ und $(*, 0, 2)$ einen Unterraum von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$ der Kodimension ≤ 1 , d.h. es gibt höchstens eine Relation zwischen ihnen. Weiterhin gibt es ein Modulares Symbol X in dem von den Modularen Symbolen der Form $(*, 1, 3)$ erzeugten Unterraum, so dass $X, (*, 0, 1)$ und $(*, 0, 2)$ den Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$ erzeugen.

Beweis. Man sieht leicht, dass mittels der Relationen I und III des Satzes 1.4 alle Modularen Symbole als Linearkombination der folgenden Manin-Symbole geschrieben werden können.

$$(*, 0, 1), (*, 0, 2), (*, 1, 1), (*, 1, 2), (*, 1, 3) \text{ und } (*, 2, 2).$$

Genauer werden durch I und III die folgenden Manin-Symbole miteinander identifiziert.

- (1) $(*, 0, 1), (*, 1, 0), (*, 0, 4), (*, 4, 0),$
- (2) $(*, 0, 2), (*, 2, 0), (*, 0, 3), (*, 3, 0),$
- (3) $(*, 1, 3), (*, 3, 4), (*, 4, 2), (*, 2, 1),$
- (4) $(*, 1, 1), (*, 1, 4), (*, 4, 4), (*, 4, 1),$
- (5) $(*, 1, 2), (*, 2, 4), (*, 4, 3), (*, 3, 1),$
- (6) $(*, 2, 2), (*, 2, 3), (*, 3, 3), (*, 3, 2).$

1. *Schritt:* Wir behaupten, dass alle Manin-Symbole durch $(*, 0, 1), (*, 0, 2)$ oder $(*, 1, 3)$ ausgedrückt werden können, d.h. die Gruppen (4), (5) und (6) können durch (1), (2) und (3) ausgedrückt werden. Für Gruppe (4) benutze man II mit $c = 1, d = 4$. Für Gruppe (5) benutze man II mit $c = 3, d = 1$, um zu sehen, dass Gruppe (5) durch (4) und (3) ausgedrückt werden kann. Da wir bereits gezeigt haben, dass (4) durch (1) linear kombiniert werden kann, sehen wir, dass (5) durch (1) und (3) linear kombiniert werden kann. Relation II mit $c = 2, d = 3$ zeigt, dass sich (6) durch (2) ausdrücken lässt. Wir haben gezeigt:

- a.) Gruppe (4) kann durch Gruppe (1) linear kombiniert werden.
- b.) Gruppe (5) kann durch (1) und (3) linear kombiniert werden.
- c.) Gruppe (6) kann durch (2) linear kombiniert werden.

Aus Lemma 1.8 folgt $\dim \mathbb{M}_k(\Gamma_1(5)) = 2k - 2$ und wir haben $3k - 3$ Erzeuger gefunden. Wir müssen daher ein Set von Manin-Symbolen eliminieren.

2. *Schritt:* Wir versuchen nun Gruppe (3) zu eliminieren. Wir arbeiten von nun an im Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$ modulo dem Unterraum W , der von den Manin-Symbolen der Gruppen (1) und (2) erzeugt wird. Wir zeigen, dass dieser Raum 0 ist, falls k ungerade ist und eindimensional, falls k gerade ist. Aufgrund von II und c.) erhalten wir

$$(i, 3, 4) + (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} (j, 4, 3) \equiv 0 \text{ mod } W.$$

Wegen I gilt

$$(j, 4, 3) + (-1)^j (k-2-j, 3, 1) = 0.$$

Also folgt

$$(i, 3, 4) - (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} \binom{k-2-i}{j} (k-2-j, 3, 1) \equiv 0 \text{ mod } W.$$

Mittels II und a.) erhält man

$$(i, 3, 1) \equiv -(-1)^{k-2-i} \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{i}{j} (k-2-i+j, 1, 3) \text{ mod } W$$

und daher

$$\begin{aligned} (i, 3, 4) + (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} \sum_{\nu=0}^{k-2-j} (-1)^\nu \binom{k-2-j}{\nu} (j+\nu, 1, 3) \\ \equiv 0 \text{ mod } W. \end{aligned}$$

Mittels I folgt $(i, 3, 4) = -(-1)^{k-2-i}(k-2-i, 1, 3)$ und daher

$$\begin{aligned} & -(-1)^{k-2-i}(k-2-i, 1, 3) \\ & + (-1)^{k-2} \sum_{j=0}^{k-2-i} (-1)^j \binom{k-2-i}{j} \sum_{\nu=0}^{k-2-j} (-1)^\nu \binom{k-2-j}{\nu} (j+\nu, 1, 3) \\ & \equiv 0 \pmod{W}. \end{aligned}$$

Nach einer kurzen Rechnung folgt daraus

$$\begin{aligned} & (i, 1, 3) - (-1)^{k-2-i} \sum_{j=0}^{k-2} (-1)^j \left\{ \sum_{\nu=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{\nu} \binom{k-2-\nu}{j-\nu} \right\} (j, 1, 3) \\ & \equiv 0 \pmod{W}. \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Gleichung nun als Matrix. Man hat

$$(E_{k-1} - (-1)^{k-2} A^{(k)}) \begin{pmatrix} (0, 1, 3) \\ \vdots \\ (k-2, 1, 3) \end{pmatrix} \equiv 0 \pmod{W}. \quad (52)$$

Hier ist E_{k-1} die $(k-1) \times (k-1)$ Einheitsmatrix und $A^{(k)} = (a_{ij})$ mit $0 \leq i, j \leq k-2$ ist die Matrix

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} \left\{ \sum_{\nu=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{\nu} \binom{k-2-\nu}{j-\nu} \right\}.$$

Die Matrix $A^{(k)}$ hat gute Eigenschaften. Man kann z.B. leicht zeigen, dass jeder Hauptminor von $A^{(k)}$ die Determinante $+1$ besitzt. Da A nicht symmetrisch ist, folgt daraus aber nicht der Satz. Wir werden diese Aussage hier nicht benötigen. Weiterhin ist die Matrix $A^{(k)}$ das Produkt der Matrizen $B = (b_{ij})$ und $C = (c_{ij})$ mit $0 \leq i, j \leq k-2$ sowie

$$b_{ij} = (-1)^i \binom{i}{j}, \quad c_{ij} = (-1)^j \binom{k-2-i}{j-i}.$$

Man bemerke, dass B und C untere, resp. obere Dreiecksmatrizen sind. Daraus folgt $\det A^{(k)} = 1$. Wir beweisen nun den Satz. Da $\det(A^{(k)}) = 1$ ist, hat das charakteristische Polynom von $A^{(k)}$ die Form

$$p^{(k)}(x)(x) = 1 - a_1^{(k)} x + a_2^{(k)} x^2 - a_3^{(k)} x^3 + \dots + (-1)^{k-1} x^{k-1}, \quad (a_i \in \mathbb{Z}).$$

Hierbei haben wir $p^{(k)}(x) = \det(A^{(k)} - xE_{k-1})$ gesetzt¹². Bezeichne die n -te Fibonacci-Zahl mit F_n . Definiere für $n \geq 0$ und $1 \leq m \leq n$ die Zahl

$$\binom{n}{m}_{2,F} = \frac{F_{2n} \cdot F_{2n-2} \cdot \dots \cdot F_{2n-2m+2}}{F_2 \cdot \dots \cdot F_{2m}}.$$

Wir setzen $\binom{n}{m}_{2,F} = 0$, falls $m > n$ oder $n < 0$ oder $m < 0$. Außerdem sei $\binom{n}{0}_{2,F} = 1$. Diese Zahlen erfüllen die folgende Rekursion

$$F_{2k+1} \binom{n}{k}_{2,F} + F_{2n-2k+1} \binom{n}{k-1}_{2,F} = \binom{n+1}{k}_{2,F}. \quad (53)$$

Durch Induktion folgt, dass $\binom{n}{k}_{2,F}$ ganz ist. Viele weitere Eigenschaften von $\binom{n}{m}_{2,F}$ sind im Appendix, Abschnitt 7.2, zusammengefasst. Wir behaupten nun, dass

$$a_i^{(k)} = \binom{k-1}{i}_{2,F}. \quad (54)$$

Wir beweisen im folgenden diese Formel.

1. Schritt: Wir berechnen zuerst die Spur von $(A^{(k)})^m$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und benutzen dazu die Formel

$$\operatorname{tr}((A^{(k)})^m) = \sum_{\nu_1=0}^{k-2} \cdot \dots \cdot \sum_{\nu_m=0}^{k-2} a_{\nu_1\nu_2} a_{\nu_2\nu_3} \cdot \dots \cdot a_{\nu_m\nu_1}. \quad (55)$$

Mittels einer kurzen Rechnung ergibt sich daraus

$$\operatorname{tr}((A^{(k)})^m) = \sum_{\nu_1 \geq 0} \cdot \dots \cdot \sum_{\nu_{2m} \geq 0} \binom{k-2-\nu_1}{\nu_2} \binom{k-2-\nu_2}{\nu_3} \cdot \dots \cdot \binom{k-2-\nu_{2m}}{\nu_1}.$$

Diese Mehrfachsumme ist in der Kombinatorik wohlbekannt. Aus [BQ03, Identity 142] erhält man die überraschende Identität

$$\operatorname{tr}((A^{(k)})^m) = \frac{F_{2m(k-1)}}{F_{2m}}.$$

¹²Diese Normierung ist im angelsächsischen Raum üblich.

Setzt man $m = 1$, so erhält man explizit

$$a_{k-2} = \text{tr}(A^{(k)}) = \frac{F_{2(k-1)}}{F_2} = \binom{k-1}{k-2}_{2,F}.$$

2. *Schritt:* Wir fahren fort durch absteigende Induktion. Nach Newtons Identitäten [Kal00] erhalten wir

$$\begin{aligned} -r(-1)^r a_{k-1-r}^{(k)} &= \text{tr}((A^{(k)})^r) - a_{k-2}^{(k)} \text{tr}((A^{(k)})^{r-1}) + a_{k-3}^{(k)} \text{tr}((A^{(k)})^{r-2}) \\ &\quad - \dots + (-1)^{r-1} a_{k-r}^{(k)} \text{tr}(A^{(k)}) \\ &= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu a_{k-1-\nu}^{(k)} \text{tr}((A^{(k)})^{r-\nu}). \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $a_{k-1}^{(k)} = 1$ gesetzt. Also ist (54) äquivalent zu

$$-r(-1)^r \binom{k-1}{k-1-r}_{2,F} = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(r-\nu)(k-1)}}{F_{2(r-\nu)}} \binom{k-1}{k-1-\nu}_{2,F}.$$

Nach einem Index-Shift und der Substitution $k-1 \mapsto n$ wird dies zu

$$r \binom{n}{n-r}_{2,F} = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)n}}{F_{2(\nu+1)}} \binom{n}{n-r+\nu+1}_{2,F}. \quad (56)$$

Wir beweisen diese doch einigermaßen komplizierte kombinatorische Identität im Abschnitt 7.2 des Appendix.

Per Induktion (siehe Lemma 7.3 im Appendix) folgert man nun die Identität

$$p^{(k+2)}(x) = (x^2 - L_{2k}x + 1)p^{(k)}(x),$$

wobei $L_{2k} = F_{2k-1} + F_{2k+1}$ eine sogenannte Lucas-Zahl ist. Nun hat $p^{(3)}(x)$ die Nullstellen $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$ und $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ und die einzige Nullstelle von $p^{(2)}(x)$ ist $x = 1$. Da $L_k > 2$ für $k > 1$ erhalten wir:

1. $p^{(k)}(x)$ zerfällt vollständig über \mathbb{R} und besitzt nur einfache Nullstellen. Insbesondere ist $A^{(k)}$ diagonalisierbar mit positiven Eigenwerten.
2. Wenn k ungerade ist, so ist ± 1 kein Eigenwert von $A^{(k)}$. Wenn k gerade ist, so ist 1 ein Eigenwert von A mit Vielfachheit 1.
3. Ist $\lambda \neq 1$ ein Eigenwert von $A^{(k)}$, so ist auch λ^{-1} ein Eigenwert von $A^{(k)}$.

Ist nun k ungerade, so ist $E_{k-1} + A^{(k)}$ nach 1. invertierbar und es folgt aus (52), dass $(*, 0, 1)$ und $(*, 0, 2)$ eine Basis von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$ sind. Ist k gerade, so folgt aus 2., dass der Kern von $E_{k-1} - A^{(k)}$ eindimensional ist. In diesem Fall schließen wir:

1. Die Elemente $(*, 0, 1)$ und $(*, 1, 2)$ erzeugen einen Unterraum von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$ mit Kodimension ≤ 1 . Insbesondere gibt es höchstens eine Relation zwischen ihnen.
2. Es gibt ein modulares Symbol X in dem von den modularen Symbolen $(*, 1, 3)$ erzeugten Unterraum von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$, sodass $X, (*, 0, 1)$ und $(*, 0, 2)$ den Raum $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$ erzeugen.

□

2.6 Zusammenfassung

Das folgende Meta-Theorem listet alle Fälle auf, in denen explizite Basen von Räumen Modularer Symbole bekannt sind.

Theorem 2.20 (Fukuhara, Yang, Krattenthaler, K.).

1. *Stufe 1, gerades Gewicht. Sei $d_k = \dim S_k(1)$.*
 - (a) *Falls $k \equiv 0 \pmod{4}$, so ist $\{(4i - 1, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq d_k\}$ eine Basis von $\mathbb{S}_k(1)^-$.*
 - (b) *Falls $k \equiv 2 \pmod{4}$, so ist $\{(4i + 1, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq d_k\}$ eine Basis von $\mathbb{S}_k(1)^-$.*
2. *Stufe 2, gerades Gewicht. Sei $d_k = \dim S_k(2)$.*
 - (a) *$\{(2i, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq d_k\}$ und $\{(k - 2 - 2i, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq d_k\}$ sind Basen von $\mathbb{S}_k(2)^+$.*
 - (b) *$\{(2i - 1, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq d_k\}$ und $\{(k - 2 - 2i, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq d_k\}$ sind Basen von $\mathbb{S}_k(2)^-$.*
 - (c) *$\{(2i + 1, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq d_k\}$ ist eine Basis von $\mathbb{S}_k(2)^-$.*
 - (d) *Falls $k \equiv 0 \pmod{4}$, so ist $\{(\nu, 0, 1) \mid \nu \equiv 3 \pmod{4}\}$ eine Basis von $\mathbb{S}_k(2)^-$.*
 - (e) *Falls $k \equiv 6 \pmod{4}$, so ist $\{(\nu, 0, 1) \mid \nu \equiv 5, 7 \pmod{8}\}$ eine Basis von $\mathbb{S}_k(2)^-$.*
3. *Stufe 3, ungerades Gewicht. Sei $n = \lfloor \frac{k+2}{6} \rfloor$.*

(a) $\{(2j-1, 0, 1) \mid n+1 \leq j \leq \frac{k-3}{2}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(3))^-$.

4. Stufe 3, gerades Gewicht. Sei $n = \lfloor \frac{k+5}{6} \rfloor$.

(a) $\{(2j-1, 0, 1) \mid n+1 \leq j \leq \frac{k-2}{2}\}$ und $\{(2j-1) \mid n \leq j \leq \frac{k-2}{2} - 1\}$ sind Basen von $\mathbb{S}_k(3)^-$.

5. Stufe 4, ungerades Gewicht.

(a) $\{(i, 0, 1) \mid 2 \leq i \leq k-3, i \equiv 0 \pmod{2}\}$ sind Basen von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^+$.

(b) $\{(i, 0, 1) \mid 1 \leq i \leq k-4, i \equiv 1 \pmod{2}\}$ sind Basen von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^-$.

6. Stufe 4, gerades Gewicht.

(a) $\{(i, 0, 1) \mid i \equiv 0 \pmod{2}, 0 \leq i \leq k-2\} \cup \{(0, 1, 2)\}$ ist eine Basis von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(4))^+$.

(b) $\{(i, 0, 1) \mid 2 \leq i \leq k-4, i \equiv 0 \pmod{2}\}$ ist eine Basis von $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(4))^+$.

7. Stufe 5, ungerades Gewicht.

(a) $\{(i, 0, 1) \mid 0 \leq i \leq k-2\} \cup \{(i, 0, 2) \mid 0 \leq i \leq k-2\}$ ist eine Basis von $\mathbb{M}_k(\Gamma_1(5))$.

Beweis. 1(a) ist Satz 2.3. 2(a) und (b) sind die Übertragungen der Resultate von Fukuhara und Yang [FY09, Theorem 1.4] in die Sprache der Modularen Symbole. 2(c) ist ein Resultat der eben genannten Autoren und Christian Krattenthaler, siehe [FY09, Theorem 1.6]. 2(d) ist Proposition 2.7.1 und 2(e) ist Proposition 2.8.1. 3. ist Proposition 2.11.1 und 4. wurde in den Propositionen 2.10.2 und 2.10.3 gezeigt. 5(a) und (b) wurden in Proposition 2.14.1 bewiesen und 6(a) und (b) sind Proposition 2.17.1. 7(a) ist Satz 2.19. \square

Korollar 2.21. $\mathbb{S}_k(\Gamma_1(N))$ wird genau dann von Windungselementen erzeugt, wenn $N \leq 4$ ist.

Beweis. Dies folgt aus Theorem 2.20 und den bekannten Dimensionsformeln. \square

3 Explizite Basen des Raumes der Spitzenformen

3.1 Die Rankin-Selberg Methode

Wir werden im Folgenden mehrfach die Rankin-Selberg Methode benutzen. Diese ist natürlich wohlbekannt. Wir formulieren sie jedoch hier nochmals in der von uns geforderten Allgemeinheit. Wir definieren auf $S_k(N, \chi)$ das Petersson-Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma_0(N) \backslash \mathfrak{H}} f(z) \overline{g(z)} y^k dV.$$

Um uns Konstanten zu ersparen, lassen wir hier und im Folgenden die sonst übliche Normalisierung mit dem Index $[\mathrm{Sl}_2(\mathbb{Z}) : \Gamma_0(N)]$ weg.

Satz 3.1 (Rankin-Selberg). *Gegeben seien folgende Daten:*

1. *Natürliche Zahlen $k, k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ mit $k_1 + k_2 = k$.*
2. *Dirichlet-Charaktere χ, χ_1, χ_2 modulo N mit $\chi(-1) = (-1)^k$ sowie $\chi_i(-1) = (-1)^{k_i}$ für $i \in \{1, 2\}$ und $\chi = \chi_1 \chi_2$.*
3. *Eine Spitzenform $f \in S_k(N, \chi)$ und eine Modulform $g \in M_{k_1}(N, \chi_1)$.*

Dann gelten für $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ die Identitäten

$$\begin{aligned} \langle g E_{k_2, N}^*(z, s, \chi_2), f \rangle &= \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{a_n(f)} a_n(g)}{n^{s+k-1}}, \\ \langle f, g E_{k_2, N}^*(z, \bar{s}, \chi_2) \rangle &= \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f) \overline{a_n(g)}}{n^{s+k-1}}. \end{aligned}$$

Vorsicht: $s \mapsto \langle f, g E_{k_2, N}^(z, \bar{s}, \chi_2) \rangle$ ist holomorph!*

Zusatz: *Besitzt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(f) \overline{a_n(g)} n^{-s-k+1}$ eine holomorphe Fortsetzung nach $s = 0$ und ist $E_{k_2, N}^*(z, \chi_2) \in M_{k_2}(N, \chi_2)$, so gilt*

$$\langle f, g E_{k_2, N}^*(z, \chi_2) \rangle = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f) \overline{a_n(g)}}{n^{s+k-1}} \Big|_{s=0}.$$

Siehe etwa [Li, S.147] oder [Zag77, Proposition 5] für einen Spezialfall. Wichtig ist uns hier vor allem der weniger bekannte Zusatz, den wir mehrfach verwenden werden. Der Zusatz wird etwa in [KM08] verwendet und folgt aus

dem Identitätssatz. Man siehe auch [Koh80, S. 261], wo die Theorie der Perioden verwendet wird, um eine etwas schwächere Version des Zusatzes¹³ ohne Zuhilfenahme nicht-holomorpher Eisenstein-Reihen zu beweisen. Im Fall von Stufe 2 wird in [KI05, Theorem 1] ähnlich vorgegangen. Die Theorie der Perioden wird dort durch eine geschickte Anwendung der Fricke-Involution ersetzt.

3.2 Der Fall von Stufe 1

Schon seit Rankin ist bekannt, dass die cuspidalen Anteile von Produkten zweier Eisenstein-Reihen den Raum der Spitzenformen der Stufe 1 erzeugen. Durch Fukuharas Arbeit [Fuk07] ist es nun möglich, eine genaue Basis anzugeben. Das folgende Resultat ist der Prototyp der Resultate, die wir in den nächsten Abschnitten beweisen wollen.

Sei $\pi : M_k(1) \rightarrow S_k(1)$ die orthogonale Projektion von $M_k(1)$ auf $S_k(1)$ mittels des kanonischen Skalarproduktes auf $M_k(1)$ (siehe [Zag81] für die Konstruktion dieser Erweiterung des Petersson-Skalarproduktes auf $M_k(1)$).

Satz 3.2.

1. Falls $k \equiv 0 \pmod{4}$, so ist $\{\pi(E_{k-4\ell}E_{4\ell}) \mid \ell = 1, \dots, \dim S_k(1)\}$ eine Basis von $S_k(1)$.
2. Falls $k \equiv 2 \pmod{4}$, so ist $\{\pi(E_{k-4\ell-2}E_{4\ell+2}) \mid \ell = 1, \dots, \dim S_k(1)\}$ eine Basis von $S_k(1)$.

Beweis. Sei f eine normalisierte Hecke-Eigenform. Es ist wohlbekannt, dass aus Satz 3.1 für $1 < \ell < k/2 - 1$ die folgende Formel folgt.

$$\langle f, E_{k-2\ell}E_{2\ell} \rangle = c_{k,\ell} \cdot L_f(k-1)L_f(2\ell). \quad (57)$$

(Siehe [Zag77, S. 116] und [Koh80, S. 261] für eine ausführlichere Diskussion.) Hierbei ist $c_{k,\ell}$ eine nur von k und ℓ abhängige Konstante. Die Beweise in der Literatur werden meist über die Eulerproduktarstellung (siehe Appendix, Abschnitt 7.5) geführt. Ich gebe hier einen alternativen additiven Beweis. Aus Rankins Satz 3.1 folgt, dass

$$\langle f, E_{k-2\ell}E_{2\ell} \rangle = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)a_n(E_{k-2\ell})}{n^{s+k-1}} \Bigg|_{s=0}.$$

¹³im Fall von Stufe 1.

Nun gilt jedenfalls für $\operatorname{Re}(s) \gg 0$

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)a_n(E_{k-2\ell})}{n^{s+k-1}} &= -\frac{2(k-2\ell)}{B_{k-2\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\sigma_{k-2\ell-1}(n)}{n^{s+k-1}} \\
&= -\frac{2(k-2\ell)}{B_{k-2\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^{s+k-1}} \sum_{m|n} m^{k-2\ell-1} \\
&= -\frac{2(k-2\ell)}{B_{k-2\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s+2\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{mn}(f)}{n^{s+k-1}}.
\end{aligned} \tag{58}$$

Weil f eine normalisierte Hecke-Eigenform ist, gilt

$$a_n(f)a_m(f) = \sum_{d|(m,n)} d^{k-1} a_{mn/d^2}(f).$$

Mittels Möbius-Inversion folgt daraus

$$a_{mn}(f) = \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^{k-1} a_{m/d}(f) a_{n/d}(f).$$

(Siehe etwa [KK07, §4.7, Aufgabe 3]. Dort befindet sich allerdings ein Druckfehler in der Formel.) Der Ausdruck in (58) ist damit gleich

$$-\frac{2(k-2\ell)}{B_{k-2\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s+2\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s+k-1}} \sum_{d|(m,n)} \mu(d) d^{k-1} a_{m/d}(f) a_{n/d}(f).$$

Vertauscht man die inneren beiden Summen erhält man

$$-\frac{2(k-2\ell)}{B_{k-2\ell}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s+2\ell}} \sum_{d|m} \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ d|n}} \frac{1}{n^{s+k-1}} \mu(d) d^{k-1} a_{m/d}(f) a_{n/d}(f).$$

Dies ist gleich

$$-\frac{2(k-2\ell)}{B_{k-2\ell}} L_f(s+k-1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s+2\ell}} \sum_{d|m} \frac{\mu(d) a_{m/d}(f)}{d^s}.$$

Vertauscht man ebenso die letzten beiden Summen, erhält man dann

$$-\frac{2(k-2\ell)}{B_{k-2\ell}} \frac{L_f(s+k-1)L_f(s+2\ell)}{\zeta(2s+2\ell)}.$$

Also folgt insgesamt

$$\langle f, E_{k-2\ell} E_{2\ell} \rangle = -\frac{(k-2)! 2(k-2\ell) L_f(k-1) L_f(2\ell)}{(4\pi)^{k-1} B_{k-2\ell} \zeta(2\ell)}. \quad (59)$$

Dies ist gerade die bekannte Formel von Rankin. Sei nun $g \in S_k(1)$ beliebig. Dann gibt es eine Linearkombination

$$g = \sum_{f \in S_k(1)} \lambda_f f.$$

Hierbei läuft die Summe über eine Basis von normalisierten Hecke-Eigenformen. Sei nun $k \equiv 0 \pmod{4}$ und sei $\langle g, E_{k-4\ell} E_{4\ell} \rangle = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, \dim S_k(1)$. Aus (59) folgt dann

$$\sum_{f \in S_k(1)} \lambda_f L_f(k-1) L_f(4\ell) = 0, \quad (\forall \ell = 1, \dots, \dim S_k(1)).$$

Setze $F = \sum_{f \in S_k(1)} \lambda_f L_f(k-1) f$. Dann ist $L_F(4\ell) = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, \dim S_k(1)$. Aus Korollar 2.4 folgt $F = 0$. Für jede Hecke-Eigenform f ist nun $L_f(k-1) \neq 0$ (konvergentes Eulerprodukt!), d.h. wir erhalten $\lambda_f = 0$ und damit $g = 0$. Also erzeugt die angegebene Menge von Produkten von Eisenstein-Reihen den Raum $S_k(1)$. Da ihre Anzahl korrekt ist, sind sie auch eine Basis. Dies beweist den Satz. Der Fall $k \equiv 2 \pmod{4}$ ist analog. \square

3.3 Der Fall von Stufe 2

In diesem Abschnitt geben wir eine Basis von $S_k(2)$, $k \not\equiv 2 \pmod{8}$ in Termen von Produkten zweier Eisenstein-Reihen. Wir gehen dabei analog zu Kohnen und Imamoglu in [KI05] vor, in deren Arbeit ein Erzeugendensystem angegeben wird. Wir definieren zunächst in der Notation von [KI05] die Eisenstein-Reihen

$$E_k^{i\infty}(z) = \frac{1}{2^k - 1} (2^k E_k(2z) - E_k(z))$$

$$E_k^0(z) = (E_k^{i\infty} | W_2)(z) = \frac{2^{k/2}}{2^k - 1} (E_k(z) - E_k(2z)).$$

Hierbei ist W_2 die Fricke-Involution, d.h. die Operation der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. In der von uns verwendeten Notation ist $E_k^{i\infty}(z) = E_{k,2}^*(z, \mathbf{1}_2) = E_k^{(0,1)}(z)$ und $E_k^0(z) = \text{const.} \cdot E_k^{(1,0)}(2z)$.

Die folgende Proposition ist eine Anwendung von Rankins Satz 3.1.

Proposition 3.2.1. *Sei $k \geq 8, \ell \in \{2, 3, \dots, \lfloor \frac{k}{4} \rfloor\}$. Dann gibt es eine nur von k, ℓ abhängige Konstante $c_{k,\ell}$, sodass Folgendes gilt.*

1. *Ist $f \in S_k(2)^{new}$ eine Neuform. Dann gilt*

$$\langle f, E_{2\ell}^0 E_{k-2\ell}^{i\infty} \rangle = c_{k,\ell} (1 - a_2(f) 2^{-k+1}) L_f(k-1) L_f(k-2\ell).$$

2. *Ist $f \in S_k(1)$ eine normalisierte Hecke-Eigenform und sei $\lambda_{2,f}$ der Eigenwert von f unter T_2 . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \langle f, E_{2\ell}^0 E_{k-2\ell}^{i\infty} \rangle &= c_{k,\ell} (1 + 2^{-k+1} (1 - \lambda_{2,f})) L_f(k-1) L_f(k-2\ell), \\ \langle f|W_2, E_{2\ell}^0 E_{k-2\ell}^{i\infty} \rangle &= c_{k,\ell} (1 + 2^{-k+1} (1 - \lambda_{2,f})) L_f(k-1) L_{f|W_2}(k-2\ell). \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [KI05, Proposition 2]. □

Lemma 3.3. *Die Aussage der Proposition 3.2.1 gilt allgemeiner für*

$$\ell = 2, 3, \dots, \frac{k-4}{2}.$$

Beweis. Dies ist eine einfache Anwendung des Zusatzes von Satz 3.1 auf Proposition 3.2.1. Die Rechnung ist vollständig analog zu [KI05, Proposition 2]. Wir lassen den Beweis an dieser Stelle aus. □

Satz 3.4. *Eine Basis von $S_k(2), k \geq 10$ ist wie folgt gegeben.*

1. $\{E_{k-2\ell}^0 E_{2\ell}^{i\infty} \mid 2 \leq \ell \leq \frac{k}{2} - 2, \ell \text{ gerade}\}$, falls $k \equiv 0 \pmod{4}$.
2. $\{E_{k-2\ell}^0 E_{2\ell}^{i\infty} \mid 2 \leq \ell \leq \frac{k}{2} - 2, \ell \equiv 0, 3 \pmod{4}\}$, falls $k \equiv 6 \pmod{8}$.

Beweis. Dies ist eine Verschärfung von [KI05, Theorem 1]. Wir geben hier eine vereinfachte Form des Beweises. Sei $k \equiv 0 \pmod{4}$ und $g \in S_k(2)$. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung

$$g = \sum_{f \in S_k(2)^{new}} \lambda_f f + \sum_{f \in S_k} \lambda_f f + \sum_{f \in S_k} \mu_f f|W_2.$$

Hierbei wird jeweils über Basen normalisierter Hecke-Eigenformen summiert. Sei nun $k \equiv 0 \pmod{4}$ und wir nehmen an, es wäre $\langle g, E_{2\ell}^0 E_{k-2\ell}^{i\infty} \rangle = 0$ für alle geraden $2 \leq \ell \leq \frac{k}{2} - 2$. Dann gilt für diese ℓ nach Proposition 3.2.1 resp.

Lemma 3.3 die Identität

$$\begin{aligned}
& \sum_{f \in S_k(2)^{\text{new}}} \lambda_f(1 - a_2(f)2^{-k+1})L_f(k-1)L_f(k-2\ell) \\
& + \sum_{f \in S_k} \lambda_f(1 + 2^{-k+1}(1 - \lambda_{2,f}))L_f(k-1)L_f(k-2\ell) \\
& + \sum_{f \in S_k} \mu_f(1 + 2^{-k+1}(1 - \lambda_{2,f}))L_f(k-1)L_{f|W_2}(k-2\ell) = 0.
\end{aligned} \tag{60}$$

Definiere $G \in S_k(2)$ durch

$$\begin{aligned}
G = & \sum_{f \in S_k(2)^{\text{new}}} \lambda_f(1 - a_2(f)2^{-k+1})L_f(k-1)f \\
& + \sum_{f \in S_k} \lambda_f(1 + 2^{-k+1}(1 - \lambda_{2,f}))L_f(k-1)f \\
& + \sum_{f \in S_k} \mu_f(1 + 2^{-k+1}(1 - \lambda_{2,f}))L_f(k-1)f|W_2.
\end{aligned}$$

Aus (60) folgt dann $L_G(k-4\ell) = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, \frac{k}{4} - 1$. Aus Korollar 2.8 folgt $G = 0$. Da das Eulerprodukt der L -Reihe einer Hecke-Eigenform in $S_k(N)$ an $s = k-1$ konvergiert, folgt $L_f(k-1) \neq 0$. Aus dem Satz von Ramanujan-Petersson-Deligne folgt $|\lambda_{2,f}| \leq 2 \cdot 2^{(k-1)/2}$ für $f \in S_k(1)$. Außerdem gilt für jede Neuf orm $f \in S_k(2)^{\text{new}}$ die elementare Relation $a_2(f) = -\varepsilon_f 2^{k/2-1}$, wobei $\varepsilon_f \in \{\pm 1\}$ der Eigenwert von f unter der Fricke-Involution ist. Also gilt

$$\begin{aligned}
(1 - a_2(f)2^{-k+1})L_f(k-1) & \neq 0, & (f \in S_k(2)^{\text{new}}), \\
(1 + 2^{-k+1}(1 - \lambda_{2,f}))L_f(k-1) & \neq 0, & (f \in S_k(1)).
\end{aligned}$$

Also folgt $g = 0$. Dies zeigt, dass die angegebene Menge von Eisenstein-Reihen den Raum $S_k(2)$ erzeugt. Mittels der Dimensionsformeln aus [DS05, Chapter 3.9] erhält man

$$\dim S_k(2) = \frac{k}{4} - 1.$$

Dies beweist, dass es sich tatsächlich um eine Basis handelt. Der Beweis des Falles $k \equiv 6 \pmod{8}$ ist ähnlich, benutzt aber Korollar 2.9 anstelle von Korollar 2.8. \square

Fukuhara, Yang und Krattenthaler [FY09, Theorem 1.6] haben unabhän-

gig von dieser Arbeit den folgenden Satz bewiesen.

Satz 3.5. *Sei $d_k = \dim S_k(2)$. Dann ist jede der Mengen*

$$\{E_{2j+2}^0 E_{k-2-2j}^{i\infty} \mid j = 1, \dots, d_k\}, \quad \{E_{2j+2}^{i\infty} E_{k-2-2j}^0 \mid j = 1, \dots, d_k\}$$

eine Basis von $S_k(2)$.

Der Vorteil des Satzes 3.5 ist es, dass man uniform für jedes k dieselbe Basis hat. Unser Satz 3.4 liefert dafür eine *kanonischere* Basis, da die Dimensionsformel von $S_k(2)$ nicht in deren Definition eingeht. Der Beweis von Fukuhara und Yang ist vollständig von dem unseren verschieden. Fukuhara und Yang arbeiten mit der Theorie der sogenannten Periodenpolynome.

3.4 Der Fall von Stufe 3

In diesem Abschnitt finden wir verschiedenste Erzeugendensysteme und einige Basen für Räume von Spitzenformen der Stufe 3.

Definition 3.6. *Der einzige nicht-triviale Charakter modulo 3 sei mit χ_3 bezeichnet.*

Proposition 3.6.1.

1. *Sei k ungerade, $k \geq 9$. Dann gilt*

- (a) *Die Produkte $E_{k-2\ell}^{\chi_3, \mathbf{1}_1}(z) E_{2\ell, 3}^*(\cdot, 0, \mathbf{1}_3)$ für $\ell = 2, \dots, \frac{k-3}{2}$ erzeugen $S_k(3, \chi_3)$.*
- (b) *Die Produkte $E_{k-2\ell-1}^{\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_1} E_{2\ell+1, 3}^*(z, 0, \chi_3)$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-5}{2}$ erzeugen $S_k(3, \chi_3)$.*

2. *Sei k gerade, $k \geq 10$. Dann gilt*

- (a) *Die Produkte $E_{k-2\ell-1}^{\chi_3, \mathbf{1}_1}(z) E_{2\ell+1, 3}^*(z, 0, \chi_3)$, $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$ erzeugen $S_k(3)$.*
- (b) *Die Produkte $E_{k-2\ell}^{\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_1} E_{2\ell, 3}^*(z, \mathbf{1}_3)$, $\ell = 2, \dots, \frac{k-4}{2}$ erzeugen $S_k(3)$.*

3. *Sei k gerade, $k \geq 10$. Dann ist $E_{k-2\ell}^{\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_1} E_{2\ell, 3}^*(z, \mathbf{1}_3)$, $\ell = \lfloor \frac{k+5}{6} \rfloor, \dots, \frac{k-4}{2}$ eine Basis von $S_k(3)$.*

4. *Sei k ungerade, $k \geq 9$. Dann ist $E_{k-2\ell}^{\chi_3, \mathbf{1}_1} E_{2\ell, 3}^*(z, \mathbf{1}_3)$, $\ell = \lfloor \frac{k+2}{6} \rfloor + 1, \dots, \frac{k-3}{2}$ eine Basis von $S_k(3, \chi_3)$.*

Beweis. Sei $f \in S_k(\Gamma_1(3))$, $g \in M_{k-m}(\Gamma_1(3))$ mit $m \geq 3$. Wir definieren die Rankin-Faltung von f und g wie üblich durch

$$L_{f,g}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\overline{a_n(g)}}{n^s}.$$

Sei χ der Dirichlet-Charakter modulo 3 mit $\chi(-1) = (-1)^m$. Mittels Satz 3.1 erhalten wir für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) \gg 0$ die Gleichheit

$$\langle f, gE_{m,3}^*(\cdot, \bar{s}, \chi) \rangle = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} L_{f,g}(s+k-1).$$

In den uns interessierenden Fällen besitzt die rechte Seite eine holomorphe Fortsetzung nach $s = 0$, wie wir weiter unten zeigen werden. Wir erhalten dann einen Ausdruck für das Skalarprodukt $\langle f, gE_{m,3}^*(z, \chi) \rangle$.

Sei nun g eine Eisenstein-Reihe und $d, t \in \mathbb{N}$ mit $dt \mid 3$. Sei f eine normalisierte Hecke-Eigenform in $S_k(\Gamma_1(t))^{\text{new}}$ und setze $f_d(z) = f(dz)$. Dann zerfällt $L_{f_d,g}(s+k-1)$ in ein Produkt verschiedener L -Reihen. Die folgende Tabelle listet alle möglichen Fälle auf.

Nr.	k	t	d	g	$L_{f_d,g}(s+k-1)/2$
1.	ungerade	3	1	$E_{k-2\ell}^{\chi_3, \mathbf{1}_1}$	$\frac{L_f(s+k-1, \chi_3)L_f(s+2\ell)}{L(2s+2\ell, \mathbf{1}_3)}$
2.	ungerade	3	1	$E_{k-2\ell-1}^{\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_1}$	$\frac{L_f(s+k-1, \mathbf{1}_3)L_f(s+2\ell+1)}{L(2s+2\ell+1, \chi_3)}$
3.	gerade	3	1	$E_{k-2\ell-1}^{\chi_3, \mathbf{1}_1}$	$\frac{L_f(s+k-1, \chi_3)L_f(s+2\ell+1)}{L(2s+2\ell+1, \chi_3)}$
4.	gerade	3	1	$E_{k-2\ell}^{\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_1}$	$\frac{L_f(s+k-1, \mathbf{1}_3)L_f(s+2\ell)}{L(2s+2\ell, \mathbf{1}_3)}$
5.	gerade	1	1	$E_{k-2\ell-1}^{\chi_3, \mathbf{1}_1}$	siehe 3.
6.	gerade	1	1	$E_{k-2\ell}^{\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_1}$	siehe 4.
7.	gerade	1	3	$E_{k-2\ell-1}^{\chi_3, \mathbf{1}_1}$	$\frac{L_f(s+k-1, \chi_3)L_{f_d}(s+2\ell+1)}{L(2s+2\ell+1, \chi_3)}$
8.	gerade	1	3	$E_{k-2\ell}^{\mathbf{1}_3, \mathbf{1}_1}$	$\frac{L_f(s+k-1, \mathbf{1}_3)L_{f_d}(s+2\ell)}{L(2s+2\ell, \mathbf{1}_3)}$

Die Berechnung der Tabelle ist einfach und analog zu Satz 3.2. (Siehe auch Abschnitt 3.5, resp. die Sätze 3.8 und 3.9. Eine alternative Möglichkeit der Berechnung wird im Appendix, Abschnitt 7.5, aufgezeigt.)

1a. Sei $k \geq 9$ ungerade und $f \in S_k(3, \chi_3)$. Wähle eine Basis f_1, \dots, f_d von $S_k(3, \chi_3)$ aus normalisierten Hecke-Eigenformen¹⁴, sodass $f = \sum_i \lambda_i f_i$. Wir nehmen an, es wäre $\langle f, E_{k-2\ell}^{\chi_3, \mathbf{1}_1} E_{2\ell, 3}^*(\cdot, 0, \mathbf{1}_3) \rangle = 0$, für alle $\ell = 2, \dots, \frac{k-3}{2}$. Dann erhalten wir aus der Tabelle

$$\sum_i \lambda_i L_{f_i}(k-1, \chi_3) L_{f_i}(2\ell) = 0, \quad (\forall \ell = 2, \dots, \frac{k-3}{2}). \quad (61)$$

Setze $F = \sum_i \lambda_i L_{f_i}(k-1, \chi_3) f_i$. Aus Proposition 2.10.1 und (61) folgt $F = 0$. Da $L_{f_i}(k-1, \chi_3) \neq 0$ für alle i (siehe das Argument am Ende des Satzes 3.4 oder von Satz 3.9 weiter unten), folgt $\lambda_i = 0$ für alle i , d.h. $f = 0$. Der Beweis von 1b. ist analog.

2a. Es ist wohlbekannt, dass

$$S_k(3) = \bigoplus_{td|3} \bigoplus_{f \in S_k(t)^{\text{new}}} \mathbb{C} f_d.$$

Hierbei durchläuft f eine Basis von normalisierten Hecke-Eigenformen in $S_k(t)^{\text{new}}$. Sei nun $g \in S_k(3)$ beliebig und

$$g = \sum_{td|3} \sum_{f \in S_k(t)^{\text{new}}} \lambda_{f,d} f_d.$$

Wir nehmen nun $\langle g, E_{k-2\ell-1}^{\chi_3, \mathbf{1}_1}(z) E_{2\ell+1, 3}^*(z, 0, \chi_3) \rangle = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$ an. Dann erhalten wir aus der Tabelle

$$\sum_{td|3} \sum_{f \in S_k(t)^{\text{new}}} \lambda_{f,d} L_f(k-1, \chi_3) L_{f_d}(2\ell+1) = 0, \quad (\forall \ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}).$$

Setze

$$G = \sum_{td|3} \sum_{f \in S_k(t)^{\text{new}}} \lambda_{f,d} L_f(k-1, \chi_3) f_d \in S_k(3).$$

Dann folgt $L_G(2\ell+1) = 0$ für alle $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$. Nach Proposition 2.10.1 folgt $G = 0$ und $g = 0$ (wie oben). Der Beweis von 2b. ist ähnlich. Die Behauptung 3. ist ähnlich zu 2b., benutzt aber Proposition 2.10.3 statt Proposition 2.10.1. Ebenso für 4. mit Proposition 2.11.1 statt Proposition 2.10.1. \square

¹⁴Es gibt keine Altformen in $S_k(3, \chi_3)$.

3.5 Der Fall von Stufe 4 und ungeradem Gewicht

In diesem Abschnitt sei k ungerade. Wir bestimmen eine Basis von $S_k(\Gamma_1(4))$ in Termen von Produkten zweier Eisenstein-Reihen.

Definition 3.7. *Wir bezeichnen den einzigen nicht-trivialen Charakter mod 4 mit φ_4 .*

Satz 3.8. *Sei k ungerade und $k \geq 3$. Die cuspidalen Anteile von*

$$E_{2\ell,2}^L E_{k-2\ell,4}^*(z, \varphi_4), \quad (\ell = 1, \dots, \frac{k-3}{2}),$$

sind eine Basis von $S_k(\Gamma_1(4))$.

Bemerkung: Aus den bekannten Dimensionsformeln [DS05, Chapter 3.9] folgt, dass $\dim S_k(\Gamma_1(4)) = \frac{k-3}{2}$ ist. Es genügt daher zu zeigen, dass die angegebenen Produkte von Eisenstein-Reihen ein Erzeugendensystem sind.

Beweis. 1. Schritt: Wir berechnen zuerst das Skalarprodukt

$$\langle f, E_{2\ell,2}^L E_{k-2\ell,4}^*(\cdot, \varphi_4) \rangle$$

für eine normalisierte Hecke-Eigenform $f \in S_k(\Gamma_1(4))$. Mittels Rankins Satz 3.1 erhalten wir für $\operatorname{Re}(s) \gg 0$

$$\langle f, E_{2\ell,2}^L E_{k-2\ell,4}^*(\cdot, \bar{s}, \varphi_4) \rangle = \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f) a_n(E_{2\ell,2}^L)}{n^{s+k-1}}.$$

Wir zeigen nun, dass die rechte Seite eine holomorphe Fortsetzung nach $s = 0$ besitzt und die Rankin-Faltung als Produkt von bekannten L -Reihen splittet. Nach dem Identitätssatz erhalten wir dann einen Ausdruck für $\langle f, E_{2\ell,2}^L E_{k-2\ell,4}^*(\cdot, \varphi_4) \rangle$. Weil f eine Neuf orm ist, gilt

$$a_m(f) a_n(f) = \sum_{d|(m,n)} \varphi_4(d) d^{k-1} a_{mn/d^2}(f).$$

Mittels Möbius-Inversion erhalten wir daraus

$$a_{mn}(f) = \sum_{d|(n,m)} \varphi_4(d) \mu(d) d^{k-1} a_{m/d}(f) a_{n/d}(f). \quad (62)$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)a_n(E_{2\ell,2}^L)}{n^{s+k-1}} &= \frac{4\ell}{B_{2\ell}} \left(2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\sigma_{2\ell-1}(n/2)}{n^{s+k-1}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\sigma_{2\ell-1}(n)}{n^{s+k-1}} \right) \\ &= \frac{4\ell}{B_{2\ell}} \left(\frac{a_2(f)}{2^{s+k-2}} - 1 \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\sigma_{2\ell-1}(n)}{n^{s+k-1}}. \end{aligned}$$

Aus (62) erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)\sigma_{2\ell-1}(n)}{n^{s+k-1}} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f)}{n^{s+k-1}} \sum_{m|n} m^{2\ell-1} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s+k-2\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{nm}(f)}{n^{s+k-1}} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s+k-2\ell}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s+k-1}} \\ &\quad \times \sum_{d|(n,m)} \varphi_4(d) \mu(d) d^{k-1} a_{m/d}(f) a_{n/d}(f) \\ &= \frac{L_f(s+k-1)L_f(s+k-2\ell)}{L(2s+k-2\ell, \varphi_4)}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im vierten Schritt zweimal die Summen vertauscht. Mittels holomorpher Fortsetzung folgt

$$\langle f, E_{2\ell,2}^L E_{k-2\ell,4}^*(\cdot, \varphi_4) \rangle = \frac{\Gamma(k-1)}{(4\pi)^{k-1}} \frac{4\ell}{B_{2\ell}} \left(\frac{a_2(f)}{2^{k-2}} - 1 \right) \frac{L_f(k-1)L_f(k-2\ell)}{L(k-2\ell, \varphi_4)}.$$

Zweiter Schritt: Sei nun $f \in S_k(\Gamma_1(4))$ beliebig, d.h. nicht notwendig eine Hecke-Eigenform. Dann gibt es eine Basis $f_1, \dots, f_n \in S_k(\Gamma_1(4))$ aus normalisierten Hecke-Eigenformen und Konstanten λ_i , sodass

$$f = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i.$$

Sei nun $\langle f, E_{2\ell,2}^L E_{k-2\ell,4}^*(\cdot, \varphi_4) \rangle = 0$ für jedes $\ell = 1, \dots, \frac{k-3}{2}$. Dann erhalten wir nach dem ersten Schritt für diese ℓ die Gleichung

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{a_2(f_i)}{2^{k-2}} - 1 \right) L_{f_i}(k-1)L_{f_i}(k-2\ell) = 0.$$

Setze

$$F = \sum_{i=1}^n \lambda_i \left(\frac{a_2(f_i)}{2^{k-2}} - 1 \right) L_{f_i}(k-1) f_i \in S_k(\Gamma_1(4)).$$

Nach Voraussetzung gilt dann $L_F(k-2\ell) = 0$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-3}{2}$. Aus Korollar 2.15 erhalten wir dann $F = 0$. Wie bereits in Satz 3.4 erwähnt, ist

$$L_f(k-1) \neq 0$$

für jede Hecke-Eigenform f . Aus [Miy06, Theorem 4.6.17] folgert man $|a_2(f)| = 2^{(k-1)/2}$ für eine Hecke-Eigenform und damit

$$\frac{a_2(f)}{2^{k-2}} \neq 1.$$

Also gilt $\lambda_i = 0$ für alle i , d.h. $f = 0$. □

3.6 Der Fall von Stufe 4 und geradem Gewicht

Wir übernehmen die Notationen aus dem letzten Abschnitt. Siehe z.B. Definition 3.7 bezüglich der Definition des Charakters φ_4 .

Satz 3.9. *Sei k gerade, $k \geq 3$. Die Funktionen $E_{2\ell+1}^{\varphi_4, 1_1} E_{k-2\ell-1, 4}^*(z, \varphi_4)$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$ sind eine Basis von $S_k(4)$.*

Bemerkung: Man hat $\dim S_k(\Gamma_1(4)) = \frac{k-4}{2}$, siehe [DS05, Chapter 3.9]. Es genügt also zu zeigen, dass die angegebenen Produkte von Eisenstein-Reihen den Raum $S_k(4)$ erzeugen.

Beweis. Seien $M, h \in \mathbb{N}$ mit $Mh \mid 4$ gegeben und sei $f \in S_k(\Gamma_1(M))^{\text{new}}$ eine normalisierte Hecke-Eigenform. Dann gilt

$$a_m(f)a_n(f) = \sum_{d|(m,n)} \mathbf{1}_M(d) d^{k-1} a_{\frac{mn}{d^2}}(f).$$

Setze $f_h(z) = f(hz) \in S_k(\Gamma_1(hM))$. Falls $m \equiv 0 \pmod{h}$ ist, folgt daraus per Möbius-Inversion

$$a_{mn}(f_h) = \sum_{d|(m/h,n)} \mu(d) \mathbf{1}_M(d) d^{k-1} a_{m/d}(f_h) a_{nh/d}(f_h). \quad (63)$$

Wie im Beweis von Satz 3.8, erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
& \langle f_h, E_{2\ell+1}^{\varphi_4, \mathbf{1}_1} E_{k-2\ell-1,4}^*(\cdot, s, \varphi_4) \rangle \\
&= 2 \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(f_h) \sigma_{2\ell}^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(n)}{n^{s+k-1}} \\
&= 2 \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{s+k-2\ell-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_4(n) \frac{a_{mn}(f_h)}{n^{s+k-1}}.
\end{aligned}$$

Nun gilt $a_{mn}(f_h) = 0$, falls $h \nmid mn$. Wenn $(h, n) \neq 1$ ist, so folgt $\varphi_4(n) = 0$. Also sind in der obigen Summe alle Terme = 0, in denen m nicht von h geteilt wird. Setzt man (63) in die letzte Doppelsumme ein, so erhält man (ohne den Vorfaktor)

$$\sum_{\substack{m \geq 1 \\ h|m}} \frac{1}{m^{s+k-2\ell-1}} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_4(n) \frac{1}{n^{s+k-1}} \sum_{d|(m/h, n)} \mu(d) \mathbf{1}_M(d) d^{k-1} a_{m/d}(f_h) a_{nh/d}(f_h).$$

Summenvertauschung und eine kurze Rechnung ergeben schließlich

$$\begin{aligned}
& \langle f_h, E_{2\ell+1}^{\varphi_4, \mathbf{1}_1} E_{k-2\ell-1,4}^*(\cdot, s, \varphi_4) \rangle \tag{64} \\
&= \frac{2}{h^{s+k-2\ell-1}} \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \frac{L_f(s+k-2\ell-1) L_f(s+k-1, \varphi_4)}{L(2s+k-2\ell-1, \varphi_4)}.
\end{aligned}$$

Es gilt aber

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m(f_h)}{m^{s+k-2\ell-1}} = \frac{L_f(s+k-2\ell-1)}{h^{s+k-2\ell-1}}.$$

Also erhalten wir schlussendlich

$$\begin{aligned}
& \langle f_h, E_{2\ell+1}^{\varphi_4, \mathbf{1}_1} E_{k-2\ell-1,4}^*(\cdot, s, \varphi_4) \rangle \\
&= 2 \frac{\Gamma(s+k-1)}{(4\pi)^{s+k-1}} \frac{L_{f_h}(s+k-2\ell-1) L_f(s+k-1, \varphi_4)}{L(2s+k-2\ell-1, \varphi_4)}.
\end{aligned}$$

Wir beweisen nun den Satz. Sei $f \in S_k(\Gamma_1(4))$ beliebig. Dann gibt es eine eindeutige Darstellung

$$f = \sum_{M|4} \sum_{h|\frac{4}{M}} \sum_{g \in S_k(\Gamma_1(M))^{\text{new}}} \lambda_{g,h} \cdot g_h.$$

Hierbei durchläuft g eine Basis von Neuformen in $S_k(\Gamma_1(M))^{\text{new}}$. Sei

$$\langle f, E_{2\ell+1}^{\varphi_4, \mathbf{1}_1} E_{k-2\ell-1, 4}^*(\cdot, \varphi_4) \rangle = 0, \quad (\forall \ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}).$$

Dann gilt für diese Werte von ℓ

$$\sum_{M|4} \sum_{h|\frac{4}{M}} \sum_{g \in S_k(\Gamma_1(M))^{\text{new}}} \lambda_{g,h} L_{g_h}(k-2\ell-1) L_g(k-1, \varphi_4) = 0.$$

Setze

$$F = \sum_{M|4} \sum_{h|\frac{4}{M}} \sum_{g \in S_k(\Gamma_1(M))^{\text{new}}} \lambda_{g,h} L_g(k-1, \varphi_4) g_h \in S_k(\Gamma_1(4)).$$

Dann ist $L_F(k-2\ell-1) = 0$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$. Mittels Korollar 2.18 erhalten wir $F = 0$. Wenn nun $g \in S_k(\Gamma_1(M))^{\text{new}}$ ($M | 4$) eine Hecke-Eigenform ist, so hat man

$$L_g(s, \varphi_4) = \prod_{p \neq 2} (1 - a_p(g) \varphi_4(p) p^{-s} + p^{k-1-2s})^{-1}.$$

Dieses Eulerprodukt konvergiert für $\text{Re}(s) > k/2 + 1$ und jeder Term ist $\neq 0$. Also ist auch $L_g(k-1, \varphi_4) \neq 0$. Aus $F = 0$ folgt daher auch $f = 0$. \square

3.6.1 Ein Beispiel

Sei $k = 12$. Dann ist $\dim S_{12}(\Gamma_1(4)) = 4$ und eine Basis ist wie folgt gegeben.

$$E_{9,4}^*(z, \varphi_4) E_3^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}, E_{7,4}^*(z, \varphi_4) E_5^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}, E_{5,4}^*(z, \varphi_4) E_7^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}, E_{3,4}^*(z, \varphi_4) E_9^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}.$$

Aufgrund der von uns gewählten Normalisierung besitzt die erste dieser Eisenstein-Reihen keine ganzzahligen Fourier-Koeffizienten. Setze daher

$$E_k^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z) = L(1-k, \varphi_4) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(n) q^n.$$

Dann gilt

$$E_{k,4}^*(z, \varphi_4) = \text{const.} \cdot E_k^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z).$$

Man hat daher eine Basis

$$E_9^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_3^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}, E_7^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_5^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}, E_5^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_7^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}, E_3^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_9^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}.$$

Die Fourier-Koeffizienten dieser Eisenstein-Reihen sind wie folgt gegeben.

$$E_9^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_3^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z) = 1385q + 5544q^2 + 11100q^2 - 4032q^3 - 68850q^4 + O(q^5),$$

$$E_7^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_5^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z) = -61q - 972q^2 - 4812q^3 - 18144q^4 - 83430q^5 + O(q^6),$$

$$E_5^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_7^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z) = 5q + 324q^2 + 3900q^3 + 23328q^4 + 76950q^5 + O(q^6),$$

$$E_3^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_9^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z) = -1q - 252q^2 - 5532q^3 - 38304q^4 - 110430q^5 + O(q^6).$$

Also ist

$$\det \begin{pmatrix} 1385 & 5544 & 11100 & -4032 \\ -61 & -972 & -4812 & -18144 \\ 5 & 324 & 3900 & 23328 \\ -1 & -252 & -5532 & -38304 \end{pmatrix} = 2327947776000 \neq 0.$$

Eine typische Funktion in $S_{12}(\Gamma_1(4))$ ist $\Delta(4z)$, wobei Δ die eindeutige normalisierte Hecke-Eigenform in $S_{12}(\Gamma_1(1))$ ist. Eine leichte Rechnung ergibt dann

$$\begin{aligned} \Delta(4z) = & -\frac{1}{75600} E_9^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_3^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z) - \frac{167}{388800} E_7^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_5^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z) \\ & - \frac{341}{194400} E_5^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_7^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z) - \frac{269}{302400} E_3^{\mathbf{1}_1, \varphi^4} E_9^{\varphi^4, \mathbf{1}_1}(z). \end{aligned}$$

4 Die einfachsten quadratischen Formen

4.1 Die Vermutung von Chan und Chua

In [CC03] vermuteten Chan und Chua, dass sich die klassische Theta-Reihe als ein explizit gegebenes Produkt von zwei Eisenstein-Reihen darstellen lässt. Aus dem letzten Kapitel folgt nun

Satz 4.1. *Sei ϑ die Jacobi-Theta-Reihe und sei $k \geq 4$.*

1. *Falls k gerade ist, gibt es eine eindeutige Linearkombination*

$$\vartheta^{2k}(z) = \lambda_1 E_k(z) + \lambda_2 E_k(2z) + \lambda_3 E_k(4z) + \sum_{\ell=1}^{\frac{k-4}{2}} \mu_\ell E_{2\ell+1}^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_{k-2\ell-1,4}^*(z, \varphi_4),$$

respektive

$$\vartheta^{2k}(z) = \lambda_1 E_k(z) + \lambda_2 E_k(2z) + \lambda_3 E_k(4z) + \sum_{\ell=1}^{\frac{k-4}{2}} \mu_\ell E_{2\ell+1}^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_{k-2\ell-1}^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z).$$

2. *Falls k ungerade ist, gibt es eine eindeutige Linearkombination*

$$\vartheta^{2k}(z) = \lambda_1 E_k^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) + \lambda_2 E_k^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z) + \sum_{\ell=1}^{\frac{k-3}{2}} \mu_\ell E_{2\ell,2}^L(z) E_{k-2\ell,4}^*(z, \varphi_4).$$

Hierbei ist φ_4 der eindeutige nicht-triviale Charakter modulo 4.

Beweis. Dies folgt aus Satz 3.8 und Satz 3.9. □

Man hat beispielsweise

$$\begin{aligned} \vartheta^{20}(z) &= \frac{85}{341} E_{10}(z) - \frac{256}{1023} E_{10}(4z) - \frac{1552}{3627} E_3^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_7^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z) \\ &\quad + \frac{4928}{3627} E_5^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_5^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z) - \frac{24832}{3627} E_7^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_3^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z), \\ \vartheta^{24}(z) &= \frac{1024}{4095} E_{12}(z) + \frac{1}{4095} E_{12}(2z) - \frac{1024}{4095} E_{12}(4z) \\ &\quad + \frac{5504}{362775} E_3^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_9^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z) - \frac{449024}{1399275} E_5^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_7^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z) \\ &\quad + \frac{1796096}{1399275} E_7^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_5^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z) - \frac{352256}{362775} E_9^{\varphi_4, \mathbf{1}_1}(z) E_3^{\mathbf{1}_1, \varphi_4}(z). \end{aligned}$$

Sei $T(z) = q^{1/8} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Dann gilt

$$(2z + 1)^{-k} T^{2k} \left(-\frac{1}{2z + 1} \right) = \frac{(-i)^k}{2^{2k}} \vartheta^{2k}(z).$$

Es ist T^{2k} eine Modulform bezüglich $\Gamma_0(2)$ mit abelschem Charakter

$$\chi^{(k)} : \Gamma_0(2) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Dieser ist auf den Erzeugern definiert durch

$$\begin{aligned} \chi^{(k)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= i^k, \\ \chi^{(k)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} &= (-i)^k. \end{aligned}$$

Ist $4 \mid k$, so ist T^{2k} eine Modulform in $M_k(2)$. In [KI05] finden Kohnen und Imamoglu ein Erzeugendensystem von $S_k(2)$ in Termen von Produkten zweier Eisenstein-Reihen (siehe unsere Ergebnisse in Kapitel 3.3). Aufgrund des obigen Zusammenhangs ergibt sich dann auch eine Darstellung der Funktion ϑ^{2k} als Linearkombination von Produkten zweier Eisenstein-Reihen. Kohnen und Imamoglu benutzen die Tatsache, dass T^{2k} eine Nullstelle der Ordnung $\frac{k}{4}$ in $i\infty$ besitzt, um zu zeigen, dass die Konstanten in dieser Linearkombination ohne Kenntnis jeglicher Fourierkoeffizienten von ϑ^{2k} bestimmt werden können.

Ich beschreibe in Folge, warum eine Übertragung dieses Sachverhaltes auf unseren Satz 4.1 nicht ohne weiteres möglich ist. Der Grund hierfür ist, dass $\Gamma_0(2)$ und $\Gamma_0(4)$ nicht konjugiert sind, wohl aber $\Gamma_0(2)$ und die sogenannte Theta-Gruppe $\Gamma_{\vartheta} = \langle \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle$. Bekannterweise ist $\vartheta^{2k}(\frac{z}{2})$ eine Modulform bezüglich Γ_{ϑ} mit Multiplikatorsystem v_{ϑ}^{2k} . Allerdings gilt z.B. im Allgemeinen nicht

$$E_{2\ell+1}^{\varphi_4, 1_1} \left(\frac{z}{2} \right) E_{k-2\ell-1, 4}^* \left(\frac{z}{2}, \varphi_4 \right) \in M_k(\Gamma_{\vartheta}, v_{\vartheta}^{2k}).$$

Dies hat zur Folge, dass zwar T^{2k} aus ϑ^{2k} durch Operation mit der Matrix $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ hervorgeht, eine entsprechende Anwendung dieser Matrix auf die von uns gegebenen Eisenstein-Produkte allerdings keine Modulformen produziert.

Ich beschreibe kurz, wie man dieses Problem umgehen kann. Man könnte beispielsweise direkt eine Basis von $M_k(\Gamma_0(2), \chi^{(k)})$ in Termen von Produkten von zwei Eisenstein-Reihen angeben. Diese Eisenstein-Reihen würden dann

zwangsläufig bezüglich nicht-trivialer Multiplikatorensysteme getwistet sein. Man käme dann auch mit weniger Eisenstein-Reihen aus. Der Nutzen dieses Vorgehens bleibt aber aus mehreren Gründen dennoch mehr als fraglich:

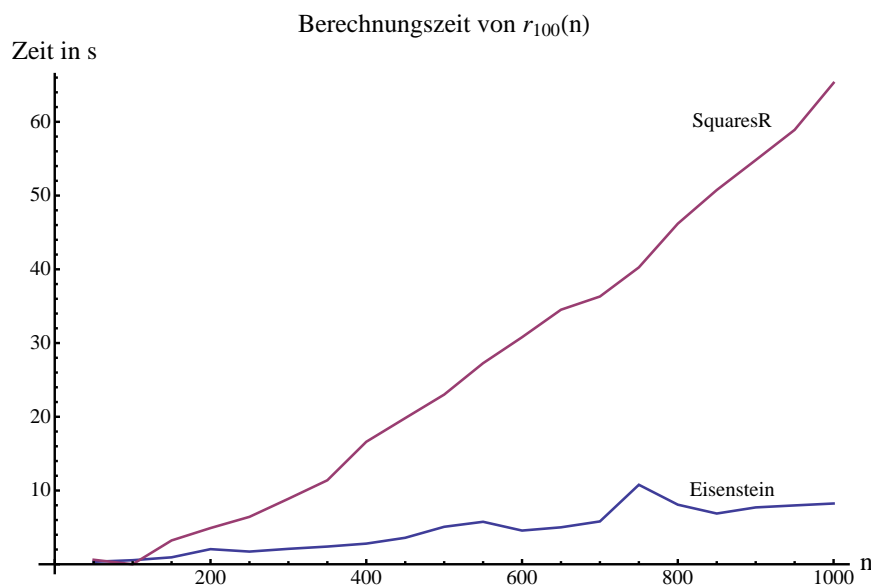
1. Die Fourierkoeffizienten dieser Eisenstein-Reihen sind kompliziert. Es ist a priori nicht einmal gesichert, dass diese durch endliche Summen gegeben sind (siehe z.B. [Kno87, Formel (28)]).
2. Eine solche Basis von $M_k(\Gamma_0(2), \chi^{(k)})$ hätte außerhalb der Theorie der Theta-Funktion wahrscheinlich keine Anwendungen.
3. Der berechenbarkeitstheoretische Nutzen der hier und in [KI05] erzielten Resultate ist gering¹⁵. Sowohl das direkte Ausmultiplizieren der Theta-Reihe, als auch die Berechnung der Fourierkoeffizienten der Eisenstein-Reihen benötigen eine hohe exponentielle Laufzeit¹⁶.

Ich habe mich deshalb in dieser Arbeit bewusst dafür entschieden, Basen für die gebräuchlicheren Räume der Spitzenformen zu den Gruppen $\Gamma_0(N)$, $N \leq 4$ zu finden.

Obwohl die Berechnung mittels Eisenstein-Reihen aus berechenbarkeitstheoretischen Überlegungen keinen wesentlichen Vorteil zum direkten Ausmultiplizieren der Theta-Reihe mit sich bringt, sind die Geschwindigkeitsvorteile in der Praxis relativ groß. Ich habe in `Mathematica 7.0.1` [Wol08] die Zahl $r_{100}(n)$ mittels der eingebauten Funktion `SquaresR` und mittels Eisenstein-Reihen berechnet.

¹⁵Der praktische Nutzen kann jedoch sehr groß sein, wie wir weiter unten festhalten werden.

¹⁶Um $r_k(n)$ mittels Eisenstein-Reihen zu berechnen, muss man im Wesentlichen die Primfaktorzerlegung aller Zahlen $\leq n$ berechnen.



Die Ergebnisse sind allerdings aus mehreren Gründen nicht aussagekräftig:

1. Der von `SquaresR` verwendete Algorithmus ist unbekannt. Die in `Mathematica` vorhandenen Funktionen implementieren aber meist die schnellsten bekannten Algorithmen.
2. Die Primfaktorzerlegung ist sehr schnell in `Mathematica` für kleine Zahlen n (vorberechnete Tabellen, etc.). Für große n kann sich daher das Verhältnis der beiden Algorithmen verschlechtern.

Es sei darauf hingewiesen, dass Bas Edixhoven die Existenz eines Algorithmus angekündigt hat¹⁷, mit dem man $r_d(n)$ polynomial in d und $\log(n)$ berechnen kann. Edixhoven hat bereits die Existenz eines Algorithmus bewiesen¹⁸, mit der Ramanujans $\tau(p)$ -Funktion polynomial in $\log(p)$ berechnet werden kann (siehe [Edi06]). Edixhovens über 160 Seiten langer Beweis benutzt Arakelov-Theorie und die Schnitttheorie auf arithmetischen Flächen. Es gibt bislang aber keine konkrete Implementation von Edixhovens Resultaten.

¹⁷Dieses Resultat ist abhängig von der verallgemeinerten Riemannschen Vermutung.

¹⁸Hierfür muss die Riemannsche Vermutung nicht vorausgesetzt werden.

4.2 Die Vermutung von Cooper

Sei $\vartheta_3(z) = \sum_{(j,k) \in \mathbb{Z}^2} q^{j^2+jk+k^2} \in M_1(\Gamma_1(3))$ die sogenannte kubische Theta-Funktion. In [Coo08] vermutet Cooper Analoga der Chan-Chua-Vermutung für ϑ_3 . Unsere Ergebnisse implizieren nun den folgenden Satz.

Satz 4.2.

1. Sei k gerade, $k \geq 10$. Dann gibt es eindeutige Linearkombinationen

$$\vartheta_3^k(z) = \lambda_1 E_k(z) + \lambda_2 E_k(3z) + \sum_{\ell=\lfloor \frac{k+5}{6} \rfloor}^{\frac{k-4}{2}} \mu_\ell E_{k-2\ell}^{1_3, 1_1} E_{2\ell, 3}^*(z, \mathbf{1}_3).$$

2. Sei k ungerade, $k \geq 9$. Dann gibt es eindeutige Linearkombinationen

$$\vartheta_3^k(z) = \lambda_1 E_k^{\chi_3, 1_1}(z) + \lambda_2 E_k^{1_1, \chi_3}(z) + \sum_{\ell=\lfloor \frac{k+2}{6} \rfloor + 1}^{\frac{k-3}{2}} \mu_\ell E_{k-2\ell}^{\chi_3, 1_1} E_{2\ell, 3}^*(z, \mathbf{1}_3).$$

Hierbei ist χ_3 der eindeutige nicht-triviale Charakter modulo 3.

5 Die Lineare Unabhängigkeit der Perioden

Sei $N > 1$ und $k \geq 4$ gerade. Definiere Matrizen

$$A, B \in \text{Mat} \left(\left(\frac{k}{2} - 2 \right) \times \left(\frac{k}{2} - 2 \right), \mathbb{Q} \right),$$

$$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), 1 \leq i, j \leq \frac{k}{2} - 2,$$

wie folgt.

$$a_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2i+1} \binom{2i+1}{2i-2j+2} B_{2i-2j+2} & j \leq i+1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$b_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{k-1-2i} \binom{k-1-2i}{2j-2i} B_{2j-2i} N^{2j-2i-1} & j \geq i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist B_n die n -te Bernoulli-Zahl. Sei $C = C_N^{(k)} = (c_{ij})$ die Matrix $A+B$.

Definition 5.1. Wir sagen, dass eine gerade Zahl k die Bedingung (D) erfüllt, wenn gilt:

1. k ist gerade.

2.

$$\det C_N^{(k)} = \frac{2^{\frac{k-2}{2}}}{N^{\frac{k-4}{2}} (k-2)!} \prod_{\nu=1}^{\frac{k}{2}-2} \sum_{m=0}^{\nu} (-1)^m \binom{\nu+1+m}{2m+1} N^m.$$

Lemma 5.2. Sei k gerade, $k \leq 50$. Dann erfüllt k die Bedingung (D).

Beweis. Dies habe ich mit MATHEMATICA geprüft. \square

Proposition 5.2.1. Es erfülle k die Bedingung (D). Dann gilt für $N \in \mathbb{N}$

$$\det C_N^{(k)} = 0 \Rightarrow N \in \{1, 2, 3, 4\}.$$

Beweis. Sei $N > 4$. Wir behaupten

$$\sum_{m=0}^{\nu} (-1)^m \binom{m+\nu+1}{2m+1} N^m = \frac{1}{2^{\nu+1} \sqrt{(N-4)N}}$$

$$\times \left(\left(-N+2+\sqrt{(N-4)N} \right)^{\nu+1} - \left(-N+2-\sqrt{(N-4)N} \right)^{\nu+1} \right).$$

Diese Gleichung gilt mit einem geeigneten Zweig der Wurzel auch für andere $N \in \mathbb{C}$. Zum Beweis entwickelt man $\left(-N + 2 \pm \sqrt{(N-4)N}\right)^{\nu+1}$ mittels der binomischen Formel und kürzt gleiche Terme. Die Proposition folgt sofort daraus. \square

Bevor wir die nächste Proposition beweisen, benötigen wir noch einige Definitionen. Für $f \in S_k(N)$ sei

$$r_n(f) = \int_0^{i\infty} f(z)z^n dz = \text{const.} \cdot L_f(n+1).$$

Definiere weiterhin das Polynom

$$r(f)(X) = \int_0^{i\infty} f(z)(X-z)^{k-2} dz$$

und setze

$$r^\pm(f)(X) = \frac{1}{2}(r_f(X) \pm r_f(-X)).$$

Proposition 5.2.2. *Sei $N > 4$ und es erfülle k die Bedingung (D). Dann sind die Abbildungen $f \mapsto L_f(2\ell+1)$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$ in $S_k(N)^\vee$ linear unabhängig.*

Beweis. Sei $R_{\Gamma_0(N), k-2, n} \in S_k(\Gamma_0(N))$ die eindeutig bestimmte Spitzenform mit

$$\int_0^{i\infty} f(z)z^n dz = 2^{-1}\pi^{-k+1}(2\pi i)^{k-1} \langle f, R_{\Gamma_0(N), k-2, n} \rangle, \quad (\forall f \in S_k(N)).$$

Die Abbildungen $f \mapsto L_f(2\ell+1)$ sind genau dann linear unabhängig, wenn die Spitzenformen $R_{\Gamma_0(N), k-2, 2\ell}$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$ linear unabhängig sind. Sei nun V_{k-2} der Vektorraum der komplexen Polynome vom Grad $k-2$. Dann hat man eine lineare Abbildung

$$r^- : S_k(N) \rightarrow V_{k-2}, \quad f \mapsto r^-(f)(X).$$

Sei B_n die n -te Bernoulli-Zahl und setze

$$B_m^0(X) = \sum_{\substack{0 \leq i < m \\ i \neq 1}} \binom{m}{i} B_i x^{m-i},$$

$$S_{N, k-2, n}(X) = \frac{N^{k-2-n} X^{k-2}}{k-1-n} B_{k-1-n}^0 \left(\frac{1}{NX} \right) - \frac{1}{n+1} B_{n+1}^0(X).$$

In [FY09, Theorem 1.1] wurde gezeigt, dass für $N > 1$ und $0 < n < k - 2$, n gerade, die folgende Gleichung gilt

$$r^-(R_{\Gamma_0(N),k-2,n}) = S_{N,k-2,n}(X).$$

Es genügt also zu zeigen, dass die Polynome $S_{N,k-2,2\ell}(X)$ für $\ell = 1, \dots, \frac{k-4}{2}$ linear unabhängig sind. Man rechnet leicht nach, dass

$$(C_N^{(k)})_{ij} = \text{Koeffizient von } X^{2j-1} \text{ in } S_{N,k-2,2i}(X).$$

Die Aussage folgt dann aus Proposition 5.2.1 und der Definition der Eigenschaft (D). \square

Satz 5.3. *Das Paar (N, k) erfülle eine der vier folgenden Eigenschaften:*

1. $N = 4$, k gerade,
2. $N = 4$, k ungerade,
3. $N = 5$, k ungerade,
4. k erfüllt Eigenschaft (D).

Dann ist die Menge der Abbildungen

$$\{f \mapsto L_f(i) \mid i \equiv 1 \pmod{2}, 1 < i < k - 1\}$$

linear unabhängig in $S_k(\Gamma_1(N))^\vee$, im Falle 1. und 4. sogar in $S_k(N)^\vee$.

Beweis. Die Aussage für $N \in \{4, 5\}$ folgt aus Meta-Theorem 2.20 in Verbindung mit Satz 1.7. Ansonsten ist dies Proposition 5.2.2. \square

6 Vermutungen

6.1 Jacobiformen vom Index 1

Sei $J_{k,m}$ der Raum der Jacobiformen vom Index m und Gewicht k , siehe [EZ85]. Jedes $f \in J_{k,m}$ besitzt eine Fourierentwicklung der Form

$$f(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{r \in \mathbb{Z} \\ r^2 \leq 4n}} c_f(n, r) \zeta^r q^n, \quad (\zeta = e^{2\pi i n z}, q = e^{2\pi i n \tau}).$$

Beispiele für Jacobi-Formen sind für $k \geq 4$ die Eisenstein-Reihen

$$E_{k,m}(\tau, z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{(c,d) \in \mathbb{Z}^2 \\ (c,d)=1}} \sum_{\lambda \in \mathbb{Z}} (c\tau + d)^k e^{2\pi m i \left(\lambda^2 \frac{a\tau+b}{c\tau+d} + 2\lambda \frac{z}{c\tau+d} - \frac{cz^2}{c\tau+d} \right)} \in J_{k,m}.$$

Die Fourierkoeffizienten dieser Eisenstein-Reihen sind für $m = 1$ wie folgt gegeben.

Lemma 6.1. *Sei*

$$L_D(s) = \begin{cases} 0 & D \not\equiv 0, 1 \pmod{4}, \\ \zeta(2s-1) & D = 0, \\ L(s, \chi_{D_0}) \sum_{d|f} \mu(d) \chi_{D_0}(d) d^{-s} \sigma_{1-2s}(f/d) & D \equiv 0, 1 \pmod{4}, D \neq 0. \end{cases}$$

Hierbei ist im dritten Fall $D = D_0 f^2$ mit einer Fundamentaldiskriminante D_0 und χ_{D_0} ist der D_0 zugeordnete quadratische Charakter. Dann hat $E_{k,1}$ eine Fourier-Entwicklung der Form

$$E_{k,1}(\tau, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r^2 \leq 4n} e_1(n, r) e^{2\pi i n z} e^{2\pi i n \tau},$$

mit

$$e_1(n, r) = \frac{L_{r^2-4n}(2-k)}{\zeta(3-2k)}.$$

Beweis. Siehe [EZ85, Theorem 2.1]. □

Der Raum $J_{k,m}$ ist ein bigraduierter Ring, d.h. man hat Abbildungen

$$J_{k_1, m_1} \times J_{k_2, m_2} \rightarrow J_{k_1+k_2, m_1+m_2}, \quad (f, g) \mapsto fg.$$

Außerdem gilt $M_k(1) = J_{k,0}$. Deshalb ist folgende Vermutung sinnvoll.

Vermutung 6.1.1. Die Produkte $E_{k-2\ell}E_{2\ell,1} \in J_{k,1}$, $\ell = 2, \dots, \frac{k-4}{2}$ erzeugen $J_{k,1}$.

Satz 6.2. Vermutung 6.1.1 ist wahr für k gerade, $k \leq 108$.

Beweis. Diese Aussage kann man z.B. mit MATHEMATICA nachprüfen. Sei dazu $f_\ell = E_{k-2\ell-2}E_{2\ell+2,1}$ für $\ell = 1, \dots, d = \frac{k-6}{2}$. Die Aussage folgt nun aus der Existenz genügend vieler Paare (n_i, r_i) mit $r_i^2 - 4n_i < 0$ derart, dass die Matrix

$$\begin{pmatrix} c_{f_1}(n_1, r_1) & c_{f_1}(n_2, r_2) & \dots \\ \vdots & & \\ c_{f_d}(n_1, r_1) & c_{f_d}(n_2, r_2) & \dots \end{pmatrix}$$

den gleichen Rang wie die Dimension von $J_{k,1}$ hat. \square

Es ist uns bisher nicht gelungen die Vermutung 6.1.1 zu beweisen. Die Rankin-Methode existiert zwar auch im Kontext von Jacobiformen, siehe etwa [CK97]. Allerdings splittet die Rankin-Faltung einer Hecke-Eigenform mit einer Eisenstein-Reihe nicht, im Gegensatz zum elliptischen Fall.

6.2 Siegelsche Modulformen vom Geschlecht 2

Sei $M_k^{(2)}$ der Raum der Siegelschen Modulformen vom Geschlecht 2, siehe [Kli90]. Siegelsche Modulformen haben eine Fourier-Entwicklung der Form

$$F(Z) = \sum_{T \geq 0} a(T) e^{2\pi i \text{tr}(TZ)}.$$

Hierbei wird über alle positiv semi-definiten, halbganzen, symmetrischen Matrizen T summiert. In $M_k^{(2)}$ hat man für $k \geq 4$ Eisenstein-Reihen

$$E_k^{(2)}(Z) = \sum_{C,D} \det(CZ + D)^{-k}.$$

Hierbei wird über teilerfremde, symmetrische 2×2 -Matrizen C, D summiert. Die Fourierentwicklung Siegelscher Eisenstein-Reihen ist im Allgemeinen schwierig zu bestimmen, siehe etwa [Bö84]. Im Falle von Geschlecht 2 hat man aber das folgende einfache Lemma.

Lemma 6.3 (Maaß). Seien $e_k^{(2)}(T)$ die Fourierkoeffizienten von $E_k^{(2)}(Z)$.

Dann gilt

$$e_k^{(2)} \left(\begin{pmatrix} n & r/2 \\ r/2 & m \end{pmatrix} \right) = \sum_{d|(n,m,r)} d^{k-1} L_{\frac{r^2-4nm}{d^2}}(2-k).$$

Hierbei ist $L_D(s)$ wie in Lemma 6.1 definiert.

Beweis. Siehe [EZ85, S. 80]. □

Basierend auf den bisherigen Vermutungen würde folgende naive Verallgemeinerung naheliegen.

Vermutung 6.3.1 (Naive Version). *Sei k gerade. Die Eisenstein-Produkte $E_{k-2\ell}^{(2)} E_{2\ell}^{(2)}$ für $\ell = 2, \dots, \frac{k-4}{2}$ erzeugen $M_k^{(2)}$.*

Leider kann diese Vermutung schon aus Dimensionsgründen nicht richtig sein. Da Dimensionstabellen für $M_k^{(2)}$ schwer zu erhalten sind, gebe ich eine Tabelle im Appendix, Abschnitt 7.1. Um eine korrekte Vermutung zu erhalten, geht man wie folgt vor (siehe [Kli90, Chapter 5]). In der Theorie der Siegelschen Modulformen gibt es einen Siegel-Operator

$$\Phi : M_k^{(2)} \rightarrow M_k^{(1)}.$$

Für $k > 4$ ist Φ surjektiv und man erhält eine exakte Sequenz

$$0 \rightarrow S_k^{(2)} \rightarrow M_k^{(2)} \rightarrow M_k^{(1)} \rightarrow 0.$$

Eine explizite Abbildung $s : M_k^{(1)} \rightarrow M_k^{(2)}$, welche diese Sequenz spaltet, ist für Spitzenformen $f \in S_k(1)$ durch eine gewisse Siegel-Klingen-Eisenstein-Reihe $E_k(Z, f)$ gegeben, siehe [Kli90, Definition 2, Kap. 5]. Setze dazu

$$C_{n,1} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \mid A = \begin{pmatrix} * & 0 \\ * & * \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Setze außerdem

$$* : \mathfrak{H}_2 \rightarrow \mathfrak{H}, \quad \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_2 & z_4 \end{pmatrix} \mapsto z_1.$$

Dann ist für $f \in S_k(1)$

$$E_k(Z; f) = \sum_{\gamma \in \mathcal{C}_{2,1} \backslash \Gamma_2} f(\gamma \langle z \rangle^*) j(\gamma, z)^{-k}.$$

Vermutung 6.3.2. Die Eisenstein-Reihen $E_k(Z; f)$ und $E_k(Z)$ sowie die Produkte der Form $E_{k-2\ell}(Z; f)E_{2\ell}(Z; g)$, $E_{k-2\ell}(Z; f)E_{2\ell}(Z)$ und $E_{k-2\ell}(Z)E_{2\ell}(Z)$ für $\ell = 2, \dots, \frac{k-4}{2}$ erzeugen $M_k^{(2)}$.

7 Appendix

7.1 Dimensionen von $S_k^{(2)}$ und $M_k^{(2)}$

k	$S_k^{(2)}$	$M_k^{(2)}$	C.D.	C.L.	T.L.	k	$S_k^{(2)}$	$M_k^{(2)}$	C.D.	C.L.	T.L.
4	0	1	1	0	1	58	41	46	5	9	10
6	0	1	1	0	1	60	46	52	6	9	10
8	0	1	1	0	1	62	47	52	5	9	10
10	1	2	1	1	2	64	54	60	6	10	11
12	1	3	2	1	2	66	57	63	6	10	11
14	1	2	1	1	2	68	61	67	6	10	11
16	2	4	2	2	3	70	67	73	6	11	12
18	2	4	2	2	3	72	73	80	7	11	12
20	3	5	2	2	3	74	75	81	6	11	12
22	4	6	2	3	4	76	84	91	7	12	13
24	5	8	3	3	4	78	88	95	7	12	13
26	5	7	2	3	4	80	94	101	7	12	13
28	7	10	3	4	5	82	101	108	7	13	14
30	8	11	3	4	5	84	109	117	8	13	14
32	9	12	3	4	5	86	112	119	7	13	14
34	11	14	3	5	6	88	123	131	8	14	15
36	13	17	4	5	6	90	129	137	8	14	15
38	13	16	3	5	6	92	136	144	8	14	15
40	17	21	4	6	7	94	145	153	8	15	16
42	18	22	4	6	7	96	155	164	9	15	16
44	20	24	4	6	7	98	159	167	8	15	16
46	23	27	4	7	8	100	173	182	9	16	17
48	26	31	5	7	8	102	180	189	9	16	17
50	27	31	4	7	8	104	189	198	9	16	17
52	32	37	5	8	9	106	200	209	9	17	18
54	34	39	5	8	9	108	212	222	10	17	18
56	37	42	5	8	9	110	218	227	9	17	18

In der Spalte $S_k^{(2)}$ findet sich die Dimension von $S_k^{(2)}$, in der Spalte $M_k^{(2)}$ diejenige von $M_k^{(2)}$. Die mit *C.D.* betitelte Spalte enthält die Codimension, d.h. die Differenz der zwei vorherigen Spalten. Die mit *C.L. (cuspidal lifts)* betitelte Spalte enthält die Dimension des Schnittes des Maaßraumes mit dem Raum der Spitzenformen. Die Spalte *T.L. (total lifts)* ist die Gesamtdimension des Maaßraumes. Die Formeln habe ich aus [Eie84] entnommen.

7.2 Eine Identität von Fibonacci-Zahlen

Wir definieren die Fibonacci-Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ für $n \in \mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}. \end{aligned}$$

Dann gilt $F_0 = 0$ und $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$. Die Folge der Lucas-Zahlen $(L_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ erfüllt dieselbe Rekursion mit den veränderten Startwerten

$$\begin{aligned} L_1 &= 1, \\ L_2 &= 3. \end{aligned}$$

Beide Folgen sind durch die Identitäten

$$\begin{aligned} L_n &= F_{n-1} + F_{n+1}, \\ F_{2n} &= F_n L_n, \end{aligned}$$

miteinander verknüpft.

Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{N}_0$ definieren wir nun ein Fibonacci-Analogon des gewöhnlichen Binomialkoeffizienten durch

$$\binom{n}{m}_{2,F} = \prod_{\nu=0}^{m-1} \frac{F_{2n-2\nu}}{F_{2+2\nu}}.$$

Hierbei wird das leere Produkt für $m = 0$ wie gewöhnlich als 1 interpretiert. Man bemerke, dass $\binom{n}{m}_{2,F} = 0$ für $m > n$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}_{<0}$ setzen wir

$$\binom{n}{m}_{2,F} = 0.$$

Dies definiert $\binom{n}{m}_{2,F}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $m \in \mathbb{Z}$. Wir nennen $\binom{n}{m}_{2,F}$ den *geraden Fibonomialkoeffizienten*. Es scheint, dass bisher keine Referenz zum geraden Fibonomialkoeffizienten in der Literatur existiert.

Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis der folgenden Identität von Fibonomialkoeffizienten.

Satz 7.1. *Sei $n, r \in \mathbb{N}_0$ mit $0 \leq r \leq n$. Dann gilt*

$$r \binom{n}{n-r}_{2,F} = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)n}}{F_{2(\nu+1)}} \binom{n}{n-r+\nu+1}_{2,F}.$$

Der Beweis von Satz 7.1 ist einigermaßen kompliziert und wird einige vorbereitende Betrachtungen erforderlich machen. Auf dem Wege werden wir viele weitere Identitäten von Fibonomialkoeffizienten beweisen.

Aus der allgemeinen Theorie der Fibonacci-Zahlen ist die folgende Gleichung bekannt

$$\text{ggT}(F_n, F_m) = F_{\text{ggT}(n,m)}.$$

Aus Lemma 7.3 weiter unten und dieser Formel folgert man leicht, dass $\binom{n}{m}_{2,F}$ und alle in Satz 7.1 auftretenden Summanden ganze Zahlen sind.

Wir benötigen in Folge einige Identitäten aus der Theorie der Fibonacci-Zahlen. Die Wichtigsten sind in dem nächsten Lemma zusammengefasst.

Lemma 7.2.

1. Sei $a, b, c, d, r \in \mathbb{Z}$ mit $a + b = c + d$. Dann gilt

$$F_a F_b - F_c F_d = (-1)^r (F_{a-r} F_{b-r} - F_{c-r} F_{d-r}). \quad (65)$$

2. Sei $n, m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$F_n F_m + F_{n-1} F_{m-1} = F_{n+m-1}. \quad (66)$$

3. (Catalans Gleichung.) Sei $n, r \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$F_n^2 - F_{n-r} F_{n+r} = (-1)^{n+r} F_r^2 \quad (67)$$

4. Für $m, n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$F_{m+n} + (-1)^{n+1} F_{m-n} = F_n L_m. \quad (68)$$

Hierbei ist wieder L_n die n -te Lucas-Zahl.

Beweis. Diese Identitäten sind alle klassisch. Identität (65) ist in dieser Allgemeinheit z.B. in [Joh03, Eq. 2.4] formuliert. Die Gleichungen (66) und (68) findet man in [Hon85, Chapter 8] und (67) ist eine direkte Konsequenz aus (65). \square

Besonders hilfreich in der weiteren Betrachtung werden die weniger bekannten Formeln (65) und (68) sein. Dabei werden wir oft benutzen, dass die vorgenannten Formeln für alle n, m resp. $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ gelten. Insbesondere aus (65) lassen sich viele weitere klassische Identitäten von Fibonacci-Zahlen als Spezialfälle gewinnen.

In dem folgenden Lemma sind die einfachen Eigenschaften des geraden Fibonomialkoeffizienten aufgelistet.

Lemma 7.3.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$F_{2m+1} \binom{n}{m}_{2,F} + F_{2n-2m+1} \binom{n}{m-1}_{2,F} = \binom{n+1}{m}_{2,F}, \quad (69)$$

$$F_{2(n+1)m} \binom{n}{m}_{2,F} + F_{2(n+1)(m-1)} \binom{n}{m-1}_{2,F} = F_{2nm} \binom{n+1}{m}_{2,F}, \quad (70)$$

$$\binom{n}{m}_{2,F} + L_{2n+2} \binom{n}{m-1}_{2,F} + \binom{n}{m-2}_{2,F} = \binom{n+2}{m}_{2,F}. \quad (71)$$

2. Ist $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}$. Dann ist

$$\binom{n}{m}_{2,F} = \binom{n}{n-m}_{2,F}.$$

3. Für gerades $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu}_{2,F} x^\nu = \prod_{\nu=1}^{n/2} (1 - L_{4\nu-2}x + x^2).$$

4. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu}_{2,F} x^\nu = (1-x) \prod_{\nu=1}^{\frac{n-1}{2}} (1 - L_{4\nu}x + x^2).$$

Beweis. Die Identitäten (69) und die Identität unter 2. sind einfache Rechnungen und man folgert 3. und 4. durch Induktion aus (71). Wir zeigen nun (70). Aus (69) erhält man

$$F_{2nm} \binom{n+1}{m}_{2,F} = F_{2nm} F_{2m+1} \binom{n}{m}_{2,F} + F_{2nm} F_{2n-2m+1} \binom{n}{m-1}_{2,F}. \quad (72)$$

Aus (66) folgt andererseits

$$\begin{aligned} F_{2(n+1)m} &= F_{2nm}F_{2m+1} + F_{2nm-1}F_{2m}, \\ F_{2(n+1)(m-1)} &= F_{2mn}F_{-2n+2m-1} + F_{2mn-1}F_{-2n+2m-2} \\ &= F_{2mn}F_{2n-2m+1} - F_{2mn-1}F_{2n-2m+2}. \end{aligned}$$

Also folgt

$$\begin{aligned} &F_{2(n+1)m} \binom{n}{m}_{2,F} + F_{2(n+1)(m-1)} \binom{n}{m-1}_{2,F} \\ &= (F_{2nm}F_{2m+1} + F_{2nm-1}F_{2m}) \binom{n}{m}_{2,F} \\ &\quad + (F_{2mn}F_{2n-2m+1} - F_{2mn-1}F_{2n-2m+2}) \binom{n}{m-1}_{2,F} \\ &= F_{2nm}F_{2m+1} \binom{n}{m}_{2,F} + F_{2mn}F_{2n-2m+1} \binom{n}{m-1}_{2,F}. \end{aligned} \tag{73}$$

Hierbei haben wir im letzten Schritt die Identität

$$F_{2m} \binom{n}{m}_{2,F} = F_{2n-2m+2} \binom{n}{m-1}_{2,F}$$

benutzt. Vergleicht man (72) und (73), folgt die Behauptung. Der Beweis von (71) ist ähnlich. Durch Division von $\binom{n}{m-2}_{2,F}$ reduziert man die Behauptung auf folgende Identität

$$F_{2n-2m+2}F_{2n-2m+4} + L_{2n+2}F_{2n-2m+4}F_{2m} + F_{2m-2}F_{2m} = F_{2n+4}F_{2n+2}.$$

Mittels (66) erhält man

$$F_{2n-2m+2}F_{2n-2m+4} + L_{2n+2}F_{2n-2m+4}F_{2m} = F_{2n-2m+4}F_{2n+2m+2}.$$

Man muss also die folgende Gleichung beweisen

$$F_{2n-2m+4}F_{2n+2m+2} + F_{2m-2}F_{2m} = F_{2n+4}F_{2n+2},$$

die aus (65) folgt. □

Identität (70) ist ein Spezialfall der folgenden geringfügig allgemeineren Aussage.

Lemma 7.4. Sei $n \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{Z}$ und $\varepsilon \in \{\pm 1, 0\}$. Dann gilt:

$$F_{2(n+1)m+\varepsilon} \binom{n}{m}_{2,F} + F_{2(n+1)(m-1)+\varepsilon} \binom{n}{m-1}_{2,F} = F_{2nm+\varepsilon} \binom{n+1}{m}_{2,F}. \quad (74)$$

Beweis. Die Aussage für $\varepsilon = 0$ ist gerade (70). Der Beweis für $\varepsilon = 1$ ist analog und die Aussage für $\varepsilon = -1$ folgt daraus mittels der definierenden Relation der Fibonacci-Folge. \square

Korollar 7.5. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \binom{n}{\nu}_{2,F} = 0.$$

Lemma 7.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade und $\ell \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$F_{2\ell-3} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2(\nu+1)+2\ell-3} \binom{n}{\nu+1}_{2,F}.$$

Insbesondere ist die rechte Seite unabhängig von n (n gerade).

Beweis. Man bemerke, dass $a_\ell = F_{2\ell-3}$ die Zahlenfolge ist, die durch die Rekursion $a_1 = a_2 = 1$ und $a_\ell = 3a_{\ell-1} - a_{\ell-2}$ definiert wird. Man sieht sofort, dass die Folge

$$b_\ell = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+2\ell-1} \binom{n}{\nu+1}_{2,F}$$

die Relation $b_\ell = 3b_{\ell-1} - b_{\ell-2}$ erfüllt. Man muß daher nur die Startwerte überprüfen. Wir zeigen die Berechnung von b_2 . Die Berechnung von b_1 ist ähnlich. Nun gilt

$$b_2 = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+3} \binom{n}{\nu+1}_{2,F}.$$

Mittels (69) erhalten wir

$$b_2 = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+3}^2 \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+3} F_{2n-2\nu-3} \binom{n-1}{\nu}_{2,F}.$$

Unter Benutzung von (66) erhalten wir

$$F_{2\nu+3} F_{2n-2\nu-3} = F_{2n+1} - F_{2\nu+4} F_{2n-2\nu-2}.$$

Also gilt

$$b_2 = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+3}^2 \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} + F_{2n+1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \binom{n-1}{\nu}_{2,F} - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+4} F_{2n-2\nu-2} \binom{n-1}{\nu}_{2,F}.$$

Die zweite Summe verschwindet nach Korollar 7.5. Weiterhin ist

$$F_{2n-2\nu-2} \binom{n-1}{\nu}_{2,F} = F_{2\nu+2} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F}. \quad (75)$$

Also gilt

$$b_2 = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+3}^2 \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2\nu+4} F_{2\nu+2} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F}.$$

Mittels Catalans Gleichung (67) für $r = 1$, $n = 2\nu + 3$ und Korollar 7.5 erhält man dann $b_2 = 1$. \square

Das letzte Lemma ist nur ein Induktionsschritt einer allgemeineren Aussage, die in der nächsten Proposition bewiesen wird.

Proposition 7.6.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m \not\equiv n \pmod{2}$ und $m < n$. Dann gilt*

$$F_{2\ell-3} = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2m(\nu+1)+2\ell-3} \binom{n}{\nu+1}_{2,F}.$$

Beweis. Wir haben die Aussage für ungerades n und $m = 0$, sowie gerades n und $m = 1$ in Korollar 7.5 und Lemma 7.6 gezeigt. Die allgemeine Aussage folgt nun per Induktion nach n . Mittels (69) erhalten wir erneut

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2m(\nu+1)+2\ell-3} \binom{n}{\nu+1}_{2,F} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2m\nu+2(m+\ell)-3} F_{2\nu+3} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} \\ & \quad + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2m\nu+2(m+\ell)-3} F_{2n-2\nu-3} \binom{n-1}{\nu}_{2,F}. \end{aligned}$$

Nun gilt nach (66)

$$F_{2m\nu+2(m+\ell)-2}F_{2n-2\nu-2} + F_{2m\nu+2(m+\ell)-3}F_{2n-2\nu-3} = F_{2(m-1)\nu+2(m+\ell+n)-5}.$$

Also wird der letzte Ausdruck zu

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2m\nu+2(m+\ell)-3} F_{2\nu+3} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} \\ & - \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2m\nu+2(m+\ell)-2} F_{2n-2\nu-2} \binom{n-1}{\nu}_{2,F} \\ & + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2(m-1)\nu+2(m+\ell+n)-5} \binom{n-1}{\nu}_{2,F}. \end{aligned} \quad (76)$$

Wir behaupten, dass die letzte dieser Summen verschwindet. Dies folgt per Induktion wie folgt.

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2(m-1)\nu+2(m+\ell+n)-5} \binom{n-1}{\nu}_{2,F} \\ & = - \sum_{\nu=-1}^{n-2} (-1)^\nu F_{2(m-1)(\nu+1)+2(m+\ell+n)-5} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} \\ & = F_{2(m+\ell+n)-5} - \sum_{\nu=0}^{n-2} (-1)^\nu F_{2(m-1)(\nu+1)+2(m+\ell+n)-5} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} \\ & = 0. \end{aligned}$$

Also haben wir nur die beiden anderen Summen von (76) auszuwerten. Wendet man nun (75) und danach (65) mit $r = 2\nu + 2$ auf die ersten beiden Summen von (76) an, erhält man unter Benutzung von $F_0 = 0$

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2(m-1)\nu+2(m+\ell)-5} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} \\ & = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2(m-1)(\nu+1)+2\ell-3} \binom{n-1}{\nu+1}_{2,F} \\ & = F_{2\ell-3}. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir erneut die Induktionsvoraussetzung verwendet. \square

Das folgende Lemma ist sicherlich wohlbekannt. Da ich keine Referenz

finden konnte, ist der Beweis beigefügt.

Lemma 7.7.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Dann gilt

$$\frac{F_{nk}}{F_k} = \sum_{\nu=0}^{\frac{n-2}{2}} (-1)^{k\nu} L_{(n-1-2\nu)k}.$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$ ungerade. Dann gilt

$$\frac{F_{nk}}{F_k} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)k} + \sum_{\nu=0}^{\frac{n-3}{2}} (-1)^{k\nu} L_{(n-1-2\nu)k}.$$

Beweis. Wir zeigen den Fall von geradem n . Der Fall von ungeradem n ist ähnlich. Wir verfahren per Induktion nach n . Die Gleichung $F_{2k} = F_k L_k$ ist wohlbekannt und leicht zu beweisen. Die Aussage für allgemeines n ist per Induktion äquivalent zu

$$F_{nk} = L_{(n-1)k} F_k + (-1)^k F_{(n-2)k}.$$

Diese Gleichung folgt aus (68). □

Proposition 7.7.1. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$n = \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)n}}{F_{2(\nu+1)}} \binom{n}{\nu+1}_{2,F}. \quad (77)$$

Beweis. Sei n gerade. Mittels Lemma 7.7 wird die rechte Seite zu

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)n}}{F_{2(\nu+1)}} \binom{n}{\nu+1}_{2,F} = \sum_{r=0}^{\frac{n}{2}-1} \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu L_{2(n-1-2r)(\nu+1)} \binom{n}{\nu+1}_{2,F}.$$

Dann folgt (77) aus der überraschenden Gleichung

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu L_{2(n-1-2r)(\nu+1)} \binom{n}{\nu+1}_{2,F} = 2, \quad (\forall 0 \leq r \leq \frac{n}{2} - 1), \quad (78)$$

die man mittels Proposition 7.6.1 aus der folgenden Identität erhält.

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu L_{2(n-1-2r)(\nu+1)} \binom{n}{\nu+1}_{2,F} \\
&= \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2(n-1-2r)(\nu+1)-1} \binom{n}{\nu+1}_{2,F} \\
&\quad + \sum_{\nu=0}^{n-1} (-1)^\nu F_{2(n-1-2r)(\nu+1)+1} \binom{n}{\nu+1}_{2,F}.
\end{aligned}$$

Dies beweist die Proposition für gerades n . Für ungerades n ist der Beweis ähnlich. \square

Proposition 7.7.2. *Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq r \leq n$. Dann gilt*

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2(n-1)\nu+2r-2} \binom{n}{n-r+\nu+1}_{2,F} = 0.$$

Beweis. Dreht man die Summationsreihenfolge um, ist die Aussage zur folgenden Gleichung äquivalent

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2(n-1)(r-1-\nu)+2r-2} \binom{n}{n-\nu}_{2,F} \\
&= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2(n-1)(r-1-\nu)+2r-2} \binom{n}{\nu}_{2,F} \\
&= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(1-n)+2nr-2n} \binom{n}{\nu}_{2,F} \\
&\stackrel{!}{=} 0.
\end{aligned}$$

Mittels (66) erhält man

$$\begin{aligned}
& \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(1-n)+2nr-2n} \binom{n}{\nu}_{2,F} \\
&= F_{2nr-2n+1} \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(1-n)} \binom{n}{\nu}_{2,F} \\
&\quad + F_{2nr-2n} \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(1-n)-1} \binom{n}{\nu}_{2,F}.
\end{aligned}$$

Nun gilt $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$ und wir müssen daher für alle $0 \leq r \leq n$ die folgende Gleichung zeigen

$$\begin{aligned}
& F_{2nr-2n+1} \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(n-1)} \binom{n}{\nu}_{2,F} \\
&\quad - F_{2nr-2n} \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(n-1)+1} \binom{n}{\nu}_{2,F} = 0.
\end{aligned}$$

Setze nun

$$\begin{aligned}
a_r &= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(n-1)} \binom{n}{\nu}_{2,F}, \\
b_r &= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2\nu(n-1)+1} \binom{n}{\nu}_{2,F}.
\end{aligned}$$

Dann folgt aus Lemma 7.4 leicht per Induktion nach r

$$\begin{aligned}
a_r &= -(-1)^r F_{2nr-2n} \binom{n-1}{r-1}_{2,F}, \\
b_r &= -(-1)^r F_{2nr-2n+1} \binom{n-1}{r-1}_{2,F}.
\end{aligned}$$

Dies beweist das Lemma. □

Beweis von Satz 7.1. Wir zeigen den Satz durch Induktion nach n . Die Fälle $n \in \{0, 1, 2\}$ sind leicht. Wir nehmen daher an, der Satz wäre für ein $n \in \mathbb{N}$

und alle $0 \leq r \leq n$ bekannt, d.h. es gilt

$$r \binom{n}{n-r}_{2,F} = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)n}}{F_{2(\nu+1)}} \binom{n}{n-r+\nu+1}_{2,F}. \quad (79)$$

Wir werden dann für alle $0 \leq r \leq n+1$ die folgende Gleichung zeigen

$$r \binom{n+1}{n+1-r}_{2,F} = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)(n+1)}}{F_{2(\nu+1)}} \binom{n+1}{n+1-r+\nu+1}_{2,F}. \quad (80)$$

Diese ist trivial für $r = 0$ und wir haben die Aussage bereits für $r = n+1$ in Proposition 7.7.1 gezeigt. Wir beschränken uns daher auf $1 \leq r \leq n$. Für diese r und $-1 \leq \nu \leq r-1$ hat man die Identität

$$F_{2n+2} \binom{n}{n-r+\nu+1}_{2,F} = F_{2n-2r+2\nu+4} \binom{n+1}{n+1-r+\nu+1}_{2,F}.$$

Also erhalten wir für $1 \leq r \leq n$ aus (79)

$$r \binom{n+1}{n+1-r}_{2,F} = \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)n}}{F_{2(\nu+1)}} \frac{F_{2n-2r+2\nu+4}}{F_{2n-2r+2}} \binom{n+1}{n+1-r+\nu+1}_{2,F}.$$

Also ist (80) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)n}}{F_{2(\nu+1)}} \frac{F_{2n-2r+2\nu+4}}{F_{2n-2r+2}} \binom{n+1}{n+1-r+\nu+1}_{2,F} \\ & - \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{F_{2(\nu+1)(n+1)}}{F_{2(\nu+1)}} \binom{n+1}{n+1-r+\nu+1}_{2,F} = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu \frac{1}{F_{2(\nu+1)}} (F_{2(\nu+1)n} F_{2n-2r+2\nu+4} \\ & - F_{2(\nu+1)(n+1)} F_{2n-2r+2}) \binom{n+1}{n+1-r+\nu+1}_{2,F} = 0. \end{aligned}$$

Man benutze nun (65) mit $r = 2n - 2r + 2$. Dann wird die letzte Gleichung

zu

$$\sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^\nu F_{2n\nu+2r-2} \binom{n+1}{n+1-r+\nu+1}_{2,F} = 0.$$

Dies ist aber gerade die Aussage von Proposition 7.7.2. \square

7.3 Computerbeweise von hypergeometrischen Identitäten

Ich gebe in diesem Abschnitt eine andere Evaluation der Summen in (41) im Fall $k \equiv 0 \pmod{6}$, d.h. $k = 6n$. Wir haben außerdem $2n - 2i \mapsto n$ substituiert. Die Beweise der folgenden Lemmata wurden in wesentlichen Teilen von einem Computer ausgeführt, insbesondere das Finden der rationalen Funktionen $R_*(r, n)$. Hierzu habe ich das Programm `fastZeil` von Peter Paule und Markus Schorn [PS95] benutzt.

Lemma 7.8. *Man hat für $i, n \geq 0$*

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n+3i-1-r}{n} = 1.$$

Beweis. Der Beweis für $n = 0, 1$ ist trivial. Setze für $n \geq 1$

$$S_i(n) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n+3i-1-r}{n},$$

$$F_i(n) = (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n+3i-1-r}{n}.$$

Setze weiterhin

$$R_i(r, n) = \frac{r(-3i-2n+r)(-9i^2+r(3i+2n+1)-9in-3i-3n^2-3n-1)}{(3in+3i+n^2+n)(-n+r-1)(-3i-n+r)}.$$

Dann gilt

$$F_i(r, n) - F_i(r, n+1) = \Delta_r(F_i(r, n)R_i(r, n)).$$

Hierbei ist Δ_r der Differenzenoperator in r , d.h. für eine Funktion $f(r)$ ist $\Delta_r f = f(r+1) - f(r)$. Diese Gleichung ist eine einfache Identität rationaler Funktionen und kann leicht verifiziert werden. Man bemerke, dass $F_i(r, n)R_i(r, n)$ an $r = n+1$ (und im Falle $i = 0$ an $r = n$) eine hebbare

Singularität besitzt. Summiert man beide Seiten von 0 bis $n + 1$, ergibt sich

$$S_i(n) - S_i(n + 1) = 0.$$

Daraus folgt die Aussage per Induktion. \square

Lemma 7.9. *Man hat für $n \geq 1, i \geq 0$ und $0 \leq \nu < n$ die Identität*

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n + 3i - 1 - r}{\nu} = 0.$$

Beweis. Man zeigt das Lemma leicht für $n = 1$. Sei nun $n \geq 1$. Definiere

$$S_{i,\nu}(n) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n + 3i - 1 - r}{\nu},$$

$$F_{i,\nu}(n) = (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n + 3i - 1 - r}{\nu}.$$

Man definiert eine rationale Funktion $R_{i,\nu}(r, n)$, deren Nenner durch

$$(-n + r - 1)(-3i - 2n + r + \nu - 1)(-3i - 2n + r + \nu)$$

und deren Zähler durch den Ausdruck

$$r(-3i - 2n + r) \left(27i^3 + r(-18i^2 - 24in + 6iv - 9i - 7n^2 + 3nv - 4n + \nu) \right. \\ \left. + 63i^2n - 18i^2\nu + 27i^2 + 45in^2 + r^2(3i + n) - 24inv + 36in \right. \\ \left. + 3iv^2 - 9iv + 6i + 10n^3 - 7n^2\nu + 11n^2 + nv^2 - 5nv + 3n - \nu \right)$$

gegeben ist. Ebenso wie im vorherigen Lemma folgert man

$$(-3i - n)(n - \nu)F_{i,\nu}(r, n) - (3i + 2n - \nu)(3i + 2n - \nu + 1)F_{i,\nu}(r, n + 1) \\ = \Delta_r(F_{i,\nu}(r, n)R_{i,\nu}(r, n))$$

und daher die Rekursion

$$(-3i - n)(n - \nu)S_{i,\nu}(r, n) - (3i + 2n - \nu)(3i + 2n - \nu + 1)S_{i,\nu}(r, n + 1) = 0.$$

Ist nun $\nu < n$, so folgt per Induktion aus $S_{i,\nu}(r, n) = 0$ die Gleichung $S_{i,\nu}(r, n + 1) = 0$. Ist $\nu = n$, folgt die Gleichung $S_{i,\nu}(r, n + 1) = 0$ direkt. Dies beweist das Lemma. \square

Lemma 7.10. *Man hat für $i, n \geq 0$*

$$\sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \binom{2n+3i-1-r}{n+1} = n+3i-1.$$

Beweis. Bezeichne den Ausdruck auf der linken Seite mit $S_i(n)$. Ebenso wie in den Beweisen der beiden vorherigen Lemmata zeigt man

$$(3i+n)S_i(n) + (-3i-n+1)S_i(n+1) = 0.$$

Daraus folgt die Aussage unmittelbar per Induktion. □

7.4 Die Auflösung einer Rekursion

Proposition 7.10.1. *Sei $I = \{0, \dots, n\}$ und $(a_i)_{i \in I}$ eine Zahlenfolge. Definiere die Folge $(b_i)_{i \in I}$ mit*

$$b_i = a_i + \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} a_j.$$

Dann gilt

$$a_i = \sum_{\nu=0}^n \frac{(-1)^\nu \nu!}{2^{\nu+1}} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \left\{ \begin{matrix} i-j \\ \nu \end{matrix} \right\} b_j. \quad (81)$$

Hierbei ist $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ die Stirling-Zahl zweiter Art, wie in (49) definiert.

Beweis. Definiere die Matrix $A = (a_{ij})$ mit $0 \leq i, j \leq n$ und

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j, \\ \binom{i}{j} & i > j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist offenbar

$$\begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Es gilt $A = 2(E + \frac{1}{2}B)$ mit $B = (b_{ij}), 0 \leq i, j \leq n$ und

$$b_{ij} = \begin{cases} \binom{i}{j} & i > j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Matrix B ist nilpotent und daher $A^{-1} = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} B^\nu$. Also ist (81) äquivalent zu

$$(B^\nu)_{ij} = \begin{cases} \nu! \binom{i}{j} \left\{ \begin{matrix} i-j \\ \nu \end{matrix} \right\} & i > j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Aussage für $i \leq j$ ist klar. Wir beschränken uns daher auf $i > j$ und zeigen die Aussage per Induktion. Der Induktionsanfang $\nu = 1$ ist klar. Wir nehmen daher $\nu > 1$ an. Der Induktionsschritt ist nach kurzer Rechnung äquivalent zu der Gleichung

$$\sum_{r=j+1}^{i-1} (\nu-1)! \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} \stackrel{!}{=} \nu! \binom{i}{j} \left\{ \begin{matrix} i-j \\ \nu \end{matrix} \right\}.$$

Wir benutzen nun die Rekursion

$$m \left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} n \\ m-1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ m \end{matrix} \right\}. \quad (82)$$

(Wir setzen außerdem $\left\{ \begin{matrix} n \\ m \end{matrix} \right\} = 0$, falls $n \in \mathbb{N}_0$ und $m \in \mathbb{Z}, m < 0$. Die Rekursion gilt dann für $n \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{Z}$). Mittels der Rekursion ist die zu beweisende Gleichung für $\nu > 1$ äquivalent zu

$$\sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} \stackrel{!}{=} \binom{i}{j} \left\{ \begin{matrix} i-j+1 \\ \nu \end{matrix} \right\}. \quad (83)$$

(Man bemerke, dass $\left\{ \begin{matrix} 0 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} = 0$, da $\nu > 1$.) Wir zeigen nun Gleichung (83) allgemein für $\nu \in \mathbb{N}$ und $i \geq j$. Setze $F_j(i, \nu) = \binom{i}{j} \left\{ \begin{matrix} i-j+1 \\ \nu \end{matrix} \right\}$. Dann erfüllt F die Rekursion

$$(1+i)\nu F_j(i, \nu) + (1+i)F_j(i, \nu-1) = (i-j+1)F_j(i+1, \nu). \quad (84)$$

Für die linke Seite von (83) gilt unter Benutzung von (82)

$$\begin{aligned} & (1+i)\nu \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} + (1+i) \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r \\ \nu-2 \end{matrix} \right\} \\ &= (1+i) \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r+1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} + (1+i) \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Substituiert man in der zweiten Summe $r \mapsto r-1$, erhält man

$$(1+i) \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r+1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} + (1+i) \sum_{r=1}^{i+1} \binom{i}{r-1} \binom{r-1}{j} \left\{ \begin{matrix} i+1-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}.$$

Mittels $(1+i)\binom{i}{r} = (i-r+1)\binom{i+1}{r}$ und $(i+1)\binom{i}{r-1} = r\binom{i+1}{r}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^i (i-r+1) \binom{i+1}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r+1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} \\ & \quad + \sum_{r=1}^{i+1} r \binom{i+1}{r} \binom{r-1}{j} \left\{ \begin{matrix} i+1-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Nun benutzt man $r\binom{i+1}{r} = (r-j)\binom{i+1}{r}$ und erhält

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^i (i-r+1) \binom{i+1}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r+1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\} \\ & \quad + \sum_{r=1}^{i+1} (r-j) \binom{i+1}{r} \binom{r-1}{j} \left\{ \begin{matrix} i+1-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

In der linken Summe ändert sich der Wert nicht, wenn man bis $i+1$ summiert. Ebenso kann man in der rechten Summe bereits von 0 beginnen, denn der Term $\binom{r-1}{j}$ ist gleich 0 für $r=0, j>0$ und für $r=0, j=0$ ist $r-j$ gleich 0. Zusammenfassen ergibt in jedem Falle

$$(i-j+1) \sum_{r=0}^i \binom{i+1}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r+1 \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}.$$

Also erfüllt

$$G_j(i, \nu) = \sum_{r=0}^i \binom{i}{r} \binom{r}{j} \left\{ \begin{matrix} i-r \\ \nu-1 \end{matrix} \right\}$$

dieselbe Rekursion wie $F_j(i, \nu)$. Sei $j \in \mathbb{N}_0$ fest. Wir zeigen $F_j(i, \nu) = G_j(i, \nu)$ durch Induktion nach i . Für $i = j$ gilt

$$G_j(i, \nu) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \nu - 1 \end{array} \right\}, \quad F_j(i, \nu) = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \nu \end{array} \right\}.$$

Beide Terme sind gleich 1, für $\nu = 1$ und gleich 0, für $\nu > 1$. Für $i = j + 1$ erhält man

$$\begin{aligned} G_j(i, \nu) &= (j + 1) \left(\left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \nu - 1 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \nu - 1 \end{array} \right\} \right), \\ F_j(i, \nu) &= (j + 1) \left\{ \begin{array}{c} 2 \\ \nu \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Beide Funktionen sind dann gleich 1 für $\nu \in \{1, 2\}$ und gleich 0 für $\nu > 2$. Aus (84) folgt dann $F_j(i, \nu) = G_j(i, \nu)$ für alle i, ν mit $i \geq j$ und damit die Behauptung. \square

7.5 Die Splittung der Rankin-Faltung

In diesem Abschnitt seien ψ, φ beliebige Dirichlet-Charaktere mod L und mod M und wir definieren für $\ell \in \mathbb{N}$

$$\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(n) = \sum_{d|n} \psi(n/d) \varphi(d) d^{\ell-1}.$$

Sei $f \in M_k(N, \chi)$ eine Hecke-Eigenform und folgende Rankin-Faltung gegeben

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(n) a_n(f)}{n^{s+k-1}}.$$

Wir haben in Kapitel 3 gezeigt, wie man auf rein additive Weise mit der Möbius'schen Umkehrformel zeigen kann, dass die Rankin-Faltung als Produkt von L -Reihen splittet. In diesem Kapitel will ich kurz erwähnen, wie man dies konzeptuell bewerkstelligen kann. Dazu benötigt man folgenden Satz über formale Dirichlet-Reihen und Eulerprodukte.

Satz 7.11. *Sei*

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} &= \prod_p (1 - \alpha p^{-s})^{-1} \prod_p (1 - \alpha' p^{-s})^{-1}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} &= \prod_p (1 - \beta p^{-s})^{-1} \prod_p (1 - \beta' p^{-s})^{-1}\end{aligned}$$

für gewisse $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n n^{-s} = \prod_p \frac{(1 - \alpha \alpha' \beta \beta' p^{-2s})}{(1 - \alpha \beta p^{-s})(1 - \alpha' \beta' p^{-s})(1 - \alpha \beta' p^{-s})(1 - \alpha' \beta p^{-s})}.$$

Beweis. Siehe [Shi76]. □

Korollar 7.12. *Sei $f \in M_k(N, \chi)$ eine normalisierte Hecke-Eigenform und ψ, φ Dirichlet-Charaktere mod M und mod L . Dann gilt für $\operatorname{Re}(s) \gg 0$*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(n) a_n(f)}{n^{s+k-1}} = \frac{L_f(s+k-1, \psi) L_f(s+k-\ell, \varphi)}{L(2s+k-\ell, \chi \psi \varphi)}.$$

Hinweis: Weder φ noch ψ müssen hier primitiv sein und L, M, N stehen nicht notwendig in irgendeinem Zusammenhang.

Beweis. Es ist f genau dann eine Hecke-Eigenform, wenn $L_f(s)$ eine Eulerproduktentwicklung des folgenden Typs besitzt

$$\begin{aligned}L_f(s) &= \prod_p (1 - a_p(f) p^{-s} + \chi(p) p^{k-1-2s})^{-1} \\ &= \prod_p (1 - \alpha p^{-s})^{-1} \prod_p (1 - \alpha' p^{-s})^{-1}.\end{aligned}$$

Hierbei sind α, α' geeignet, mit $\alpha + \alpha' = a_p(f)$ und $\alpha \alpha' = \chi(p) p^{k-1}$. Ebenso gilt ([DS05, (5.27)])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_{k-1}^{\psi, \varphi}(n)}{n^s} = \prod_p (1 - \psi(p) p^{-s})^{-1} \prod_p (1 - \varphi(p) p^{k-1-s})^{-1}. \quad (85)$$

In der Literatur wird diese Gleichung oft nur dann postuliert, wenn $\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}$ der Fourierkoeffizient einer Modulform ist. Sie gilt jedoch ganz allgemein, wie man sich leicht überzeugt. Die Aussage des Korollars folgt dann mit einer kurzen Rechnung aus Satz 7.11. □

Lemma 7.13. *Seien ψ, φ beliebige Charaktere mod L und mod M . Dann gilt*

1. $\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(1) = 1$.
2. $\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(mn) = \sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(m)\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(n)$ für $(m, n) = 1$.
3. $\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(p^r) = \sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(p)\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(p^{r-1}) - \psi(p)\varphi(p)p^{\ell-1}\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(p^{r-2})$ für $r \geq 2$ und p prim.

Beweis. Dies ist eine formale Konsequenz aus (85) (siehe [Miy06, Lemma 4.5.2]). Man kann aber auch direkt folgern. Die erste Aussage ist klar, die zweite Aussage folgt daraus, dass die Dirichlet-Faltung multiplikativer Funktionen wieder multiplikativ ist, und die letzte Aussage ist eine kurze Rechnung. \square

Daraus erhält man leicht das folgende Korollar.

Korollar 7.14. *Sei die Notation wie im Korollar 7.12. Wähle eine Primzahl p mit $\psi(p) = 0$. Dann gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$*

$$\sum_{p^m | n} \frac{\sigma_{\ell-1}^{\psi, \varphi}(n) a_{n/p^m}(f)}{n^{s+k-1}} = \frac{L_f(s+k-1, \psi) L_{f_{p^m}}(s+k-\ell, \varphi)}{L(2s+k-\ell, \chi\psi\varphi)}.$$

Hierbei ist $f_{p^m}(z) = f(p^m z)$.

Mittels Korollar 7.12 und Korollar 7.14 folgen dann alle Berechnungen des Kapitels 3 auf andere Art und Weise.

Literatur

- [AH65] Abramowitz, Milton und Irene A. Stegun [Hrsg.]: *Handbook of mathematical functions*. Dover Publ., New York, 1965.
- [AL70] Atkin, Arthur O. L. und Joseph Lehner: *Hecke operators on $\Gamma_0(m)$* . Math. Ann., 185:134–160, 1970.
- [Ant92] Antoniadis, Jannis A.: *Modulformen auf $\Gamma_0(N)$ mit rationalen Perioden*. manuscripta math., 74:359–384, 1992.
- [BG03] Borisov, Lev A. und Paul E. Gunnells: *Toric modular forms of higher weight*. J. Reine Angew. Math., 560:43–64, 2003.
- [Bir71] Birch, Bryan J.: *Elliptic curves over \mathbf{Q} : A progress report*. In: *1969 Number Theory Institute (Proc. Sympos. Pure Math., Vol. XX, State Univ. New York, Stony Brook, N.Y., 1969)*, Seiten 396–400. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1971.
- [BK90] Bloch, Spencer und Kazuya Kato: *L-functions and Tamagawa numbers of motives*. In: *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Band 86 der Reihe *Progr. Math.*, Seiten 333–400. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [BQ03] Benjamin, Arthur T. und Jennifer Quinn: *Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof*. The Mathematical Association of America, 2003.
- [Bö84] Böcherer, Siegfried: *Über die Fourierkoeffizienten der Siegelschen Eisensteinreihen*. manuscripta mathematica, 45(3):273–288, 1984.
- [CC03] Chan, Heng Huat und Kok Seng Chua: *Representations of integers as sums of 32 squares*. Ramanujan J., 7(1-3):79–89, 2003.
- [CK97] Choie, YoungJu und Winfried Kohnen: *Rankin’s method on Jacobi forms*. Abh. Math. Seminar Hamburg, 67:307–314, 1997.
- [Com09] Computational Algebra Group at University of Sydney: *MAGMA Computational Algebra System*. Erhältlich unter: <http://magma.maths.usyd.edu.au/magma>, 1993–2009.
- [Coo08] Cooper, Shaun: *The cubic Chan-Chua conjecture*. Experiment. Math., 17(4):439–442, 2008.

- [Cre97a] Cremona, John E.: *Algorithms for modular elliptic curves*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [Cre97b] Cremona, John E.: *Computing periods of cusp forms and modular elliptic curves*. *Experiment. Math.*, 6(2):97–107, 1997.
- [DFG04] Diamond, Fred, Matthias Flach und Li Guo: *The Tamagawa number conjecture of adjoint motives of modular forms*. *Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, 37(5):663 – 727, 2004.
- [DS05] Diamond, Fred und Jerry Shurman: *A first course in modular forms*, Band 228 der Reihe *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Edi06] Edixhoven, Bas: *On the Computation of the Coefficients of a Modular Form*. In: Hess, Florian, Sebastian Pauli und Michael Pohst (Herausgeber): *Algorithmic Number Theory*, Band 4076 der Reihe *Lecture Notes in Computer Science*, Seiten 34–36, Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 2006.
- [Eie84] Eie, Minkin: *Dimension of spaces of Siegel cusp forms of degree two and three*, Band 50 der Reihe *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1984.
- [EZ85] Eichler, Martin und Don Zagier: *The Theory of Jacoby Forms*. Birkhäuser, Boston, Basel, Stuttgart, 1985.
- [Fin47] Fine, Nathan J.: *Binomial coefficients modulo a prime*. *Amer. Math. Monthly*, 54:589–592, 1947.
- [Fuk07] Fukuhara, Shinji: *Explicit formulas for Hecke operators on cusp forms, Dedekind symbols and period polynomials*. *J. Reine Angew. Math.*, 607:163–216, 2007.
- [FY09] Fukuhara, Shinji und Yifan Yang: *Period polynomials and explicit formulas for Hecke operators on $\Gamma_0(2)$* . *Math. Proc. Cam. Ph. Soc.*, 146(2):321–350, 2009.
- [GKP94] Graham, Ronald L., Donald E. Knuth und Oren Patashnik: *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1994.

- [Gra97] Granville, Andrew: *Arithmetic properties of binomial coefficients. I. Binomial coefficients modulo prime powers*. In: *Organic mathematics*, Seiten 253–276. Amer. Math. Soc., 1997.
- [Hec70] Hecke, Erich: *Gesammelte Werke*. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1970.
- [Hid81] Hida, Haruzo: *Congruences of cusp forms and special values of their zeta functions*. *Inventiones Math.*, 63:225–261, 1981.
- [Hid93] Hida, Haruzo: *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*. London Mathematical Society student texts, Bd. 26. Cambridge Univ. Press, 1993.
- [Hon85] Honsberger, Ross: *Mathematical Gems III*. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1985.
- [Joh03] Johnson, Bob: *Fibonacci numbers and matrices*. <http://www.maths.dur.ac.uk/~dma0rcj/PED/fib.pdf>, 2003.
- [Kal00] Kalman, Dan: *A Matrix Proof of Newton's Identities*. *Mathematics Magazine*, 73(4):313–315, 2000.
- [KI05] Kohnen, Winfried und Özlem Imamoglu: *Representations of integers as sums of an even number of squares*. *Math. Ann.*, 333:815 – 829, 2005.
- [KK07] Krieg, Aloys und Max Köcher: *Elliptische Funktionen und Modulformen*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.
- [Kli90] Klingen, Helmut: *Introductory lectures on Siegel modular forms*, Band 20 der Reihe *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [KM08] Kohnen, Winfried und Yves Martin: *Products of two Eisenstein series and spaces of cusp forms of prime level*. *J. Ramanujan Math. Soc.*, 23(4):337–356, 2008.
- [Kno87] Knopp, Marvin I.: *On powers of the theta-function greater than eight*. *Acta Arithmetica*, XLVI:271–283, 1987.
- [Koh80] Kohnen, Winfried: *Modular forms of half-integral weight on $\Gamma_0(4)$* . *Math. Ann.*, 248(3):249–266, 1980.

- [KZ84] Kohnen, Winfried und Don Zagier: *Modular forms with rational periods*. In: *Modular forms (Durham, 1983)*, Ellis Horwood Ser. Math. Appl.: Statist. Oper. Res., Seiten 197–249. Horwood, Chichester, 1984.
- [Lan76] Lang, Serge: *Introduction to modular forms*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Bd. 222. Springer, Berlin, Heidelberg, New-York, 1976.
- [Li] Li, Wen Ching Winnie: *L-Series of Rankin Type and Their Functional Equations*. Math. Ann., 244:135–166.
- [Man72] Manin, Yuri I.: *Parabolic Points and Zeta-Functions of Modular Curves*. Mathematics of the USSR-Izvestiya, 6(1):19–64, 1972.
- [Man73] Manin, Yuri I.: *Periods of Parabolic Forms and p -adic Hecke Series*. Mathematics of the USSR-Sbornik, 21(3):371–393, 1973.
- [Mer94] Merel, Loïc: *Universal Fourier expansions of modular forms*. In: Frey, Gerhard (Herausgeber): *On Artin’s Conjecture for Odd 2-dimensional Representations*, Band 1585 der Reihe *Lecture Notes in Mathematics*, Seiten 59–94. Springer, 1994.
- [Mil96] Milne, Stephen C.: *New infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, and Ramanujan’s tau function*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 93(26):15004–15008 (electronic), 1996.
- [Mil02] Milne, Stephen C.: *Infinite families of exact sums of squares formulas, Jacobi elliptic functions, continued fractions, and Schur functions*. Ramanujan J., 6(1):7–149, 2002.
- [Miy06] Miyake, Toshitsune: *Modular forms*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2006.
- [MSD74] Mazur, Barry und Sir Henry P. F. Swinnerton-Dyer: *Arithmetic of Weil Curves*. Inventiones Mathematicae, 25(1), 1974.
- [PKZW97] Petkovsek, Marco, Donald E. Knuth, Doron Zeilberger und Herbert Wilf: *A=B*. AK Peters, Ltd., 1997.
- [PS95] Paule, Peter und Markus Schorn: *A Mathematica Version of Zeilberger’s Algorithm for Proving Binomial Coefficient Identities*. J. Symbolic Comput., 20:673–698, 1995.

- [Sch90] Scholl, Anthony J.: *Motives for modular forms*. Invent. Math., 100(2):419–430, 1990.
- [Sch07] Schneider, Carsten: *Symbolic Summation Assists Combinatorics*. Sem. Lothar. Combin., 56:1–36, 2007.
- [Ser72] Serre, Jean Pierre: *Formes modulaires et fonctions zêta p -adiques*. In: Kuyk, W. und J. P. Serre (Herausgeber) : *Modular Forms Of One Variable III*, LNM 350, Seiten 191–268. Springer, 1972.
- [Shi59] Shimura, Goro: *Sur les intégrales attachées aux formes automorphes*. J. Math. Soc. Japan, 11 :291–311, 1959.
- [Shi76] Shimura, Goro: *The special values of the zeta-functions associated with cusp forms*. Comm. Pure Appl. Math., 29(6):783–804, 1976.
- [Sho76a] Shokurov, Vyacheslav V.: *Holomorphic Differential Forms of Higher Degree on Kuga's Modular Varieties*. Mathematics of the USSR-Sbornik, 30(1):119–142, 1976.
- [Sho76b] Shokurov, Vyacheslav V.: *Modular symbols of arbitrary weight*. Funkts. Anal. Prilozh., 10(1):95–96, 1976.
- [Sho80] Shokurov, Vyacheslav V.: *A study of the homology of Kuga varieties*. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 44(2):443–464, 480, 1980.
- [Slo09] Sloane, Neil J.A.: *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>, 2009.
- [Ste00] Stein, William A.: *Explicit approaches to modular abelian varieties*. Ph.D. thesis, University of California, Berkeley, 2000.
- [Ste07] Stein, William A.; with an appendix written by Paul E. Gunnels: *Modular Forms, a Computational Approach*. Graduate Studies in Mathematics 79. American Mathematical Society, Providence, 2007.
- [Stu80] Sturm, Jacob: *Special values of zeta functions and Eisenstein series of half-integral weight*. Amer. J. Math., 102:219–240, 1980.
- [The09] The SAGE Group: *SAGE Mathematics Software (v. 4.1.1)*. Erhältlich unter: <http://www.sagemath.org>, 2005–2009.

- [Tun83] Tunnell, Jerold B.: *A classical Diophantine problem and modular forms of weight 3/2*. *Invent. Math.*, 72(2):323–334, 1983.
- [Wie09] Wiese, Gabor: *On modular symbols and the cohomology of Hecke triangle surfaces*. *Int. J. Number Theory*, 5(1):89–108, 2009.
- [Wil95] Wiles, Andrew: *Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem*. *Annals of Mathematics*, 142:443–551, 1995.
- [Wol08] Wolfram Research: *Mathematica Edition: Version 7.0*. Wolfram Research, Inc., Champaign, Illinois, 2008.
- [Zag77] Zagier, Don: *Modular forms whose Fourier coefficients involve zeta-functions of quadratic fields*. In: *Modular functions of one variable, VI (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1976)*, Seiten 105–169. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 627. Springer, Berlin, 1977.
- [Zag81] Zagier, Don: *The Rankin-Selberg method for automorphic functions which are not of rapid decay*. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, 28(3):415–437 (1982), 1981.