Universitätsbibliothek
Heidelberg

Heidelberger Akademie
der Wissenschaften

Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Bopp, Karl** (1877 – 1934)

Titel: **Eine Schrift von Ensheim „Recherches sur les calculs différentiel et intégral“ mit einem sich darauf beziehenden, nicht in die „Oeuvres“ übergegangenen Brief**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1913, 7

Signatur UB Heidelberg: L 87-10

Bekanntlich hat Lagrange in der Théorie des fonctions analitique 1797 einen rein algebraischen Aufbau der Infinitesimalrechnung unter Vermeidung des Unendlichkleinen, aller Ganzbetrachtungen und des Geschwindigkeitsbegriffs der Fluxionsmethode versucht. Von den um Lagranges großes Werk sich gruppierenden Arbeiten wird hier die verschollene von Ensheim vom Jahre 1799 ans Licht gezogen. In ihr werden konsekutive Kurvenordinaten nicht additiv, sondern mittels eines unbestimmten Faktors multiplikativ definiert und interessante Anwendungen dieser Methode auf verschiedene Zweige der Analysis durchgeführt. Lagrange hat sich in einem der Schrift beigedruckten, ebenfalls bisher nicht beachteten Briefe zu der Schrift geäußert. Veranlassung zur Herausgabe dieser für die Geschichte der Analysis nicht unwichtigen Dokumente wurde die hundertste Wiederkehr des Todestages des großen französischen Meisters am 10. April 1913. Ein Überblick über die seit 1892 bekannt gewordenen Lagrangebriefe läßt den Wunsch nach einem Supplementbande zur Korrespondenz (Bd. XIII und XIV der Oeuvres) hervortreten.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1913, S. XXII - XXIII)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1913. 7. Abhandlung.

Eine Schrift von Ensheim „Recherches sur les calculs différentiel et intégral" mit einem sich darauf beziehenden, nicht in die „Oeuvres" übergegangenen Brief von Lagrange

analysiert und zum 10. April 1913 herausgegeben

von

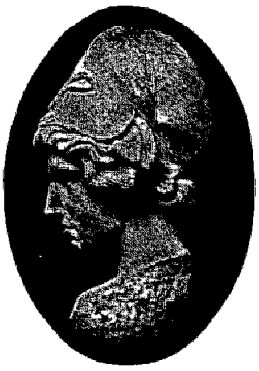
K. BOPP, Heidelberg

gefolgt von einem Überblick über die Publikation von Lagrange-Briefen

+ L 87 10

Eingegangen am 5. März 1913

Vorgelegt von M. Cantor



Heidelberg 1913
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 896.

Ein für die Geschichte der Analysis zu Ende des 18. Jahrhunderts nicht unwichtiges Dokument soll hier eingereiht werden an seine Stelle in Gestalt eines verschollenen Briefes des großen Meisters. Veranlassung dazu wird uns die hundertste Wiederkehr des Todestags eines der schöpferischsten Geister aller Zeiten, die wir am 10. April d. J. begehen. Wie uns LAGRANGES Biographen[1]) berichten, streiten sich um den Ruhm seiner Abstammung zwei mächtige Nationen; aber auch uns Deutschen gehört er als Nachfolger des gewaltigen EULER in der Leitung der Berliner Akademie (1766—1787), von Friedrich dem Großen berufen. Im Pantheon wird der erlauchte Tote beigesetzt, das unschätzbare Erbe seiner Manuskripte aber wird auf NAPOLEONS Befehl durch den Minister CARNOT für die Pariser Akademie erworben, und die Sorge dafür einer Kommission: LEGENDRE, PRONY, POISSON und LACROIX, anvertraut. In zwei Serien wohlgeordnet befinden sich diese Papiere in der Bibliothek des Instituts. Die erstere umfaßt 10 Bände in f.°, die andere 6 Bände in 4°, und aus ihnen ging die große Ausgabe der „Oeuvres" hervor, welche unter der Redaktion von J. M. SERRET und später von G. DARBOUX von 1867 an zu erscheinen begann. Wie „rochers de bronce" ragen darin LAGRANGES Hauptwerke, und den vorläufigen Abschluß des großartigen Unternehmens bildeten die im XIII. und XIV. Bande herausgekommenen Briefe (1892). Aber gerade die Kenntnis der letzteren hat sich im lebendigen Organismus der Wissenschaft in den letzten zwanzig Jahren bedeutend vermehrt. Wir denken dabei an die von RICCARDI 1897 herausgegebenen Briefe an PAOLI[2]),

[1]) Im Anhang geben wir eine Aufzählung der uns bekannt gewordenen LAGRANGE-Biographieen.

[2]) Prof. Comm. PIETRO RICCARDI, Alcune lettere die LAGRANGE, di LAPLACE e di LACROIX dirette al mathematico PIETRO PAOLI e sette lettere del PAOLI al Prof. PAOLO RUFFINI. In Modena, col tipi della società tipografica antica tipografia soliani 1897, Estratto dalle memorie della R. Academia di Scienze, lettere ed. arti in Modena, Serie III, Vol. I (Sezione di Scienze) pag. 105—129.

sowie an die von G. Loria neulich aufgefundenen und in der neuen Fagnano-Ausgabe jüngst veröffentlichten etlichen zwanzig zwischen Lagrange und Fagnano gewechselten Briefe aus der Zeit vom 3. Juli 1754 bis 18. Mai 1759.[3]) — Um aber auf unsern Beitrag zurückzukommen, so suchen wir, wenn wir den vorhin genannten, von Ludovic Lalanne 1892 herausgegebenen XIV. Band der „Oeuvres" aufblättern und die sehr sorgfältig gearbeitete „Table et sommaires des lettres" durchgehen, vergeblich nach einem Korrespondenten Ensheim, und doch existiert eine von uns aufgefundene kleine Schrift: „Recherches sur les calculs différentiel et intégral par le citoyen Ensheim, A Paris, De l'imprimerie d'Agasse, rue de Poitevins, n.° 13, An VII."[3a])

Auf Seite 28 derselben finden wir unsern Brief:

Lettre du citoyen Lagrange à l'auteur.

Paris, le 3 frimaire, an 7. [23. Nov. 1799].

Je vous remercie de la confiance dont vous m'avez honoré en me communiquant vos recherches sur le calcul différentiel. Ma réponse a été retardée par des occupations indispensables, qui ne m'ont pas permis de les lire plutôt. Je vous prie d'en recevoir mes sincères excuses. Votre manière d'envisager ce calcul a beaucoup de rapport à celle que Landen, géomètre Anglois, a donnée dans l'ouvrage intitulé: Residual analysis, imprimé à Londres en 1764; mais je dois vous avouer que ni l'une ni l'autre ne me paroissent tout-à-fait exemptes des difficultés qu'on rencontre dans les principes du calcul différentiel; cependant il est possible que votre analyse soit plus satisfaisante pour beaucoup de personnes que l'analyse ordinaire des infiniments petits et des limites, et sous ce point de vue elle peut être utile au progrès des sciences. Recevez les assurances des sentiments remplis d'estime et de considération que vous m'avez inspirés.

Signé Lagrange.

---

[3]) Opere mathematiche del marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano pubblicate sotto gli Auspici della società Italiana per il progresso delle scienze dai soci V. Volterra, G. Loria, D. Giamboli, 3 Vols. Milano-Roma-Napoli, Società editrice Dante Alghieri di Albrighi, Segati e. C. 1912.

[3a]) Außer unserm Exemplar kennen wir ein solches in der Berliner Königl. Bibliothek; eines befand sich in Chasles' Bibliothek (Eneström).

LAGRANGE hat sich also hier ähnlich wie in dem von GENOCCHI (tome IX, pag. 760 der Atti de l'Académie des sciences de Turin) herausgegebenen Briefe an ODOARDO GHERLI („dominicain, mathématicien, né à Guastalla en 1730, mort à Parme en 1780") zu einem ihm übersandten Werke geäußert. Auch dieser zwanzig Jahre jüngere Brief war im VII. Bande der „Elementi delle mathematiche pure" GHERLIS gedruckt worden. Vgl. S. 271 des genannten XIV. Bandes der „Oeuvres". Letzterer vergleichsweise herangezogene Brief ist datiert Berolino, 5. juglio 1776. — Wir analysieren im folgenden eingehend das etwas schwer lesbare, interessante Werkchen, auf das sich LAGRANGES Brief bezieht und dessen methodisch wertvollen Charakter er ausdrücklich anerkennt. Wir haben aber noch den sachlichen Rahmen zu fügen, in dem es erscheinen muß, um ganz gewürdigt werden zu können. Dafür aber liegen im 26. Abschnitt von CANTORS IV. Bande, wo G. VIVANTI die Grundlagen der Infinitesimalrechnung während des 18. Jahrhunderts bespricht, sowie im 7. Kapitel, § 3, „Der weitere Ausbau der Differential- und Integralrechnung" von H. WIELEITNERS Geschichte der Mathematik, II. Teil (Sammlung SCHUBERT LXIII), sehr schätzbare Vorarbeiten vor. Die Veranlassung zur Entstehung des Werkchens von ENSHEIM gab, wie auch für CARNOTS Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal von 1797, wohl die von der mathematisch-physikalischen Klasse der Berliner Akademie für das Jahr 1784 gestellte Preisfrage, welche lautet[4]: „Man verlangt eine lichtvolle und strenge Theorie dessen, was man Unendlich in der Mathematik nennt. Die höhere Geometrie benützt häufig unendlichgroße und unendlichkleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen."

Direktor der Berliner Akademie aber war damals eben LAGRANGE. Er beteiligte sich beginnend mit jener kurzen Note (Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal, Misc. Taur. II,

---

[4]) Nouv. Mém. Berl. 1784 (publ. 1786) p. 12—13.

1760—1761, P. III, p. 17—18, Oeuvres T. VII, Paris 1877, p. 597—599), welche durch den Aufsatz: De l'infini absolu considéré dans la grandeur, Misc. Taur., T. II, 1760—1761, P. III, p. 1—45 seines alten Lehrers GERDIL veranlaßt war, lebhaft an den Bestrebungen des Jahrhunderts zur strengen Begründung der höheren Analysis. LAGRANGE vertrat darin noch die Auffassung von der Ausgleichung der Fehler in der Infinitesimalmethode. Später aber kam er auf den Gedanken, diese Rechnung durch eine strengere zu ersetzen.[5]) Den Gedanken von der Zerstörung unexakter Voraussetzungen im Verlaufe der Rechnung hatte eine Generation früher schon BERKELEY in seiner Schrift: The Analyst von 1734 ausgesprochen. Ob LAGRANGE sie gekannt, weiß man nicht. Die Ideen seines neuen Standpunkts gab er in kurzem Exposé schon 1772 in dem Aufsatz: Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, Oeuvres T. III, Paris 1869, p. 441—476). Aber erst 1797 entwickelte er sie in seiner berühmten Théorie des fonctions analytiques, wo er unter Vermeidung des Unendlichkleinen, aller Grenzbetrachtungen und des Geschwindigkeitsbegriffs der Fluxionsmethode, allein ausgehend von der TAYLORschen Reihe, aus deren Koeffizienten sich sämtliche Ableitungen ohne weiteres ablesen lassen, einen rein algebraischen Aufbau der Analysis gab. Der erste, der diesen neuen Weg versuchte, war aber der Engländer JOHN LANDEN gewesen, dessen Arbeiten LAGRANGE in unserm Briefe zum Vergleich mit der ENSHEIMS heranzieht. Seine (LAGRANGES) Stellung diesem Vorgänger gegenüber wird am besten durch die betreffende Stelle aus der Introduction zur Théorie des fonctions analytiques gekennzeichnet: „C'est pour prévenir ces difficultés qu'un habile géomètre anglais[6]) qui a fait dans l'Analyse des decouvertes importantes, a proposé dans ces derniers temps de substituer à la méthode des fluxions, jusqu'alors suivie scrupuleusement par tous les géomètres anglais, une autre méthode purement analytique, et analogue à la mé-

---

[5]) Über LAGRANGES Metaphysik siehe auch die Lezioni di calcolo sublime von BORDONI 1831 und die betreffenden Schriften von BRUNACCI und CONTI.

[6]) Für seine Entdeckungen in der Theorie der elliptischen Funktionen vgl. LEO KOENIGSBERGER „Zur Geschichte und Theorie der elliptischen Transzendenten in den Jahren 1826—1829“ (104 S.) gr. 8°, Leipzig 1879 und KOENIGSBERGERS große JACOBI-Biographie. Anm. d. Herausgebers.

thode différentielle, mais dans laquelle, au lieu de n'employer que les différences infiniment petites ou nulles des quantités variables, on emploie d'abord des valeurs différentes de ces quantités, qu'on égale ensuite, après avoir fait disparaître par la division le facteur que cette egalité rendrait nul. Par ce moyen, on évite à la vérité les infiniments petits et les quantités évanouissantes; mais les procédés et les applications du calcul sont embarassants et peu naturels, et l'on doit convenir que cette manière de rendre le Calcul différentiel plus rigoureux dans ses principes lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité de la méthode et la facilité des opérations. (Voir l'Ouvrage intitulé The residual analysis a new branche of the algebraic art, by JOHN LANDEN, London 1764, ainsi que le Discours publié par le même Auteur, en 1758, sur le même objet." [A discours concerning the residual analysis].

Nach diesen Worten scheint uns aber die Kritik VIVANTIS (CANTOR IV, p. 661) nicht zutreffend. Worauf es ankommt, ist, daß der verschwindende Faktor durch Division herausfällt, und nur der Mechanismus der Rechnung wird zu kompliziert. Hübsche Beispiele vom leicht noch Erreichbaren bietet uns ENSHEIM z. B. mit seiner Rektifikation von NEILS Parabel.

So sehen wir im 18. Jahrhundert zwei große Tendenzen deutlich hervortreten: einerseits, nachdem der Verschmelzungsprozeß zwischen Infinitesimalkalkul und Fluxionsmethode sich vollzogen, wobei BERNOULLIS „Anlagen der Variabeln" modern anmuten und EULERS und TORELLIS Nullen kühl lassen, das Festhalten an den Grenzmethoden, wie wir es bei D'ALEMBERT, CARNOT, KÄSTNER, SEGNER finden, andererseits das Suchen nach einer neuen Begründung, wie es uns bei LANDEN, LAGRANGE, ENSHEIM und dem Übersetzer von LAGRANGES Funktionenlehre GRÜSON entgegentritt, denn nicht alle tiefer dringenden Geister waren in ihren Zweifeln so leicht zu beruhigen wie etwa BOSSUT, der uns in seinem: Essai sur l'histoire générale des mathématiques, tome second, pag. 142, berichtet: „Je confiai mon embarras à un fameux géomètre (FONTAINE) qui me répondit: Admettez les infiniments petits comme hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra." La foi est venue en effet: je me suis convaincue que la métaphysique de l'analyse infinitésimale est la même que celle de la méthode d'exhaustion des anciens géomètres."

Wenn auch, wie WIELEITNER sich ausdrückt, in der späteren Entwicklungsgeschichte der Begründung des Differentialkalkuls nicht LAGRANGES algebraische Auffassung, sondern die Methode der Grenzen das Feld behauptete, so glauben wir doch in ENSHEIMS Versuche eine noch heute lesenswerte Urkunde dieser Bestrebungen ans Licht zu bringen; hinsichtlich seines Algorithmus aber soll dadurch auch einige Aufhellung auf FONTAINES Operationen geworfen werden, den er zitiert, und dessen von der herkömmlichen abweichende Bezeichnungsweisen noch recht wenig klargestellt sind (vgl. C. R. WALLNER, Cantor IV, p. 899 und 588). Interessant aber werden für uns alle um LAGRANGES „Théorie des fonctions analytiques" sich gruppierenden Arbeiten immer deshalb bleiben, weil sie und die Kritik daran den Ausgangspunkt einer neuen Epoche bildeten. S. DICKSTEIN in seiner Arbeit: „Zur Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung" (Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, 9. Heft, 1899: Die Kritiker der „Théorie des fonctions analytiques" von LAGRANGE sagt darüber (S. 78): „Das unmittelbare Ziel, welches LAGRANGE durch seine Methode zu erreichen suchte, wurde zwar nicht erreicht, aber die Potenzreihe, der Ausgangspunkt seiner Betrachtungen, wurde bekanntlich in einer neuen, durch CAUCHYS Vorarbeiten vorbereiteten präziseren Auffassung das Fundament der modernen Theorie der analytischen Funktionen, wie sie uns in den Schöpfungen von WEIERSTRASS und MÉRAY jetzt fertig dasteht".

Inhaltsübersicht der Schrift von Ensheim:

Recherches sur les calculs différentiel et intégral, A Paris De l'imprimerie d'Agasse, rue des Poitevins, No. 13, An VII.

Sein Programm entwickelt der Verfasser in den einleitenden Worten:

Si le calcul de l'infini a ouvert une carrière immense aux géomètres, on ne peut pas se dissimuler que les principes n'en ont point cette évidence sans laquelle les mathématiques ne seroient qu'un empirisme intellectuel. La theorie des fluxions a l'inconvénient qu'elle suppose là de l'espace, du mouvement et du temps, notions plus abstraites peut être que toute la science des quantités. Le systême de LEIBNITZ est une espèce d'hiérarchie d'infinis, dont

les inférieurs s'éclipsent en présence de ceux d'un rang plus élevé; ce qui ne peut que rebuter les commençans, quand au lieu de démonstrations rigoureuses, ils ne trouvent, pour ainsi dire, qu'une approximation. D'ailleurs, si l'analyse a l'avantage de faciliter les recherches, il faut que ses découvertes soient susceptibles d'être démontrées synthétiqement. La méthode suivante reduit tout aux principes simples de l'algèbre élémentaire, sans avoir jamais recours aux notions confuses de l'infini: elle embrasse le calcul des différences en général, et ce ne sont que des conditions particulières qui en constituent la branche des différences infinitésimales.

Für seine algebraische Begründung der Analysis geht Ensheim aus von der geometrischen Reihe: (Principe générale): $\frac{v^m - 1}{v - 1} = v^{m-1} + v^{m-2} + v^{m-3} + + \ldots v + 1$, wo m ganz und positiv ist. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält m Terme, also hat man:

$$\left[\frac{v^m - 1}{v - 1}\right]_{v=1} = m.$$

Nun seien in nebenstehender Figur PM und pm zwei Ordinaten einer beliebigen Kurve, $pm = y$, $PM = y\dot{y}$, die Differenz dieser beiden Ordinaten mn oder $d(y)$ ist $y(\dot{y} - 1)$. Der punktierte Buchstabe bedeutet einen Faktor, welcher je nach den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden soll.

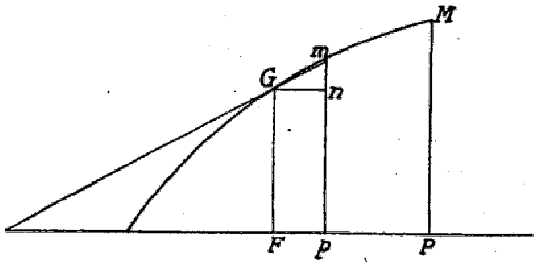


Fig. 1.

Diese einfache Definition wird zur Ableitung der ersten Differentialformeln benützt. Die Differenz von y^m ist

$$d(y^m) = y^m \cdot \dot{y}^m - y^m = y^m(\dot{y}^m - 1) = y^{m-1}(\dot{y}^{m-1} + \dot{y}^{m-2} + \ldots \dot{y} + 1) \times y(\dot{y} - 1).$$

Wenn nun die Problemstellung verlangt, daß $\dot{y} = 1$, so hat man:

$$d(y^m) = m\,y^{m-1}(\dot{y} - 1)\,y = m\,y^{m-1}\,d(y).$$

Es sei m gebrochen $= \frac{1}{n}$, dann wird $d(y^m) = d\left(y^{\frac{1}{n}}\right) = y^{\frac{1}{n}}\left(\dot{y}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

$$= \frac{y(\dot{y} - 1)}{y^{\frac{n-1}{n}}\left(\dot{y}^{\frac{n-1}{n}} + \dot{y}^{\frac{n-2}{n}} + \ldots \dot{y}^{0}\right)}.$$

Um aber letztere Gleichheit, die sich auf

$$\frac{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}{\dot{y}-1}=\frac{1}{\dot{y}^{\frac{n-1}{n}}+\dot{y}^{\frac{n-2}{n}}+\dot{y}^{\frac{n-3}{n}}\ldots\dot{y}^{\frac{n-n}{n}}}$$

reduziert, zu verifizieren, hat man nur zu bedenken, daß im Nenner eine geometrische Reihe steht, deren Quotient $\dot{y}^{\frac{1}{n}}$, deren Anfangsglied 1 ist, also ist deren Summe $\frac{\left(\dot{y}^{\frac{1}{n}}\right)^n-1}{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{\dot{y}-1}{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}$, und man hat jetzt die Identität $\frac{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}{\dot{y}-1}=\frac{1}{\frac{\dot{y}-1}{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}}$.

Die Differenz des Produktes ist $d(xy)=xy(\dot{x}\dot{y}-1)$, aber $\frac{xy(\dot{y}-1)}{xy(\dot{x}\dot{y}-1)}=\frac{\dot{y}-1}{\dot{x}\dot{y}-1}$ einerseits, $=\frac{xdy}{d(xy)}$ andererseits oder $d(xy)=xdy\frac{(\dot{x}\dot{y}-1)}{\dot{y}-1}=xdy\left(\dot{x}+\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1}\right)=\dot{x}xdy+ydx$, wenn man im zweiten Posten für dy seinen Wert einführt. Analog („en procedant de la même manière") gewinnt man für drei Faktoren: $d(xyz)=x\dot{x}\dot{y}ydz+\dot{x}xzdy+zydx=xyz(\dot{x}\dot{y}\dot{z}-1)$; an Stelle von x tritt hier xy, an Stelle von y das z.

Die Differenz des Quotienten ergibt $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x\dot{x}}{y\dot{y}}-\frac{x}{y}=\frac{x(\dot{x}-\dot{y})}{y\dot{y}}$. Aber die Analogie $\frac{x(\dot{x}-1)}{y}:\frac{x(\dot{x}-\dot{y})}{y\dot{y}}=\dot{x}-1:\frac{\dot{x}-\dot{y}}{\dot{y}}=\frac{dx}{y}:d\left(\frac{x}{y}\right)$ liefert $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{dx}{y}\cdot\frac{\dot{x}-\dot{y}}{\dot{y}(\dot{x}-1)}=\frac{dx}{y\dot{y}}\left(1-\frac{(\dot{y}-1)}{(\dot{x}-1)}\right)=\frac{dx}{y\dot{y}}-\frac{xdy}{y^2\dot{y}}=\frac{ydx-xdy}{y^2\dot{y}}$.

Differential des Logarithmus.[7]) Sei $x=Ly$, so hat man $dx=d(Ly)=Ly\dot{y}-Ly=L\dot{y}$. Ebenso $dL(y^n)=L(\dot{y}^n)=nL(\dot{y})=nd(Ly)$. Wenn man eine konstante Beziehung zwischen dem Faktor $\dot{y}$ und seinem Logarithmus voraussetzt, etwa $L\dot{y}=a(\dot{y}-1)$ so hat man $dL(y^n)=nL\dot{y}=na(\dot{y}-1)=nay\frac{(\dot{y}-1)}{y}=\frac{nady}{y}$. Aber $d(y^n)=y^{n-1}(\dot{y}^{n-1}+\dot{y}^{n-2}+\ldots 1)dy$ und folglich, wenn

[7]) Vergl. dazu die Ableitung des Differentials eines Logarithmus in den Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen, welche G. A. Kästner 1761 herausgab. Reproduziert von Vivanti in Cantor, Vorlesungen IV, S. 672.

man $\dot{y} = 1$ setzt $d(y^n) = n\,y^{n-1}\,d\,y = y^n \cdot \frac{n\,a}{a\,y}\,d\,y = \frac{y^n}{a}\,d\,L\,y^n$ $= y^n\,d\,L\,y^n$, wenn man $a = 1$ annimmt. So sieht man allgemein, wenn man den Differenzenfaktor einer Funktion von beliebigen Variabeln der Einheit gleichsetzt, man das Differential einer Funktion erhält, wenn man sie selbst multipliziert mit dem Differential ihres Logarithmus,

Logarithmische Differentiation: $\varphi'(x) = \varphi(x)\,d\log[\varphi(x)]$ z. B. $d(x\,y\,z) = x\,y\,z\,d\,L(x\,y\,z) = x\,y\,z\,d[L(x) + L(y) + L(z)] = x\,y\,z \left(\frac{d\,x}{x} + \frac{d\,y}{y} + \frac{d\,z}{z}\right) = y\,z\,d\,x + x\,z\,d\,y + x\,y\,d\,z$. Ferner $d(a^x) = a^x\,d\,L(a^x)$, aber $L(a^x) = x\,L\,a$, also $d(a^x) = a^x\,L\,a$.

Ebenso $d(x^y) = x^y\,d\,L\,x^y = x^y\,d\,(y\,L\,x) = x^y \left(d\,y\,L\,x + y\frac{d\,x}{x}\right)$.

Um die zweiten Differenzen zu finden, hat man nur drei konsecutive Ordinaten in Betracht zu ziehen, y, $y\,\dot{y}$, $y\,\dot{y}\,\ddot{y}$, zieht man die erste von der zweiten ab, so kommt $y(\dot{y} - 1)$ und durch Subtraktion der zweiten von der dritten $y\,\dot{y}(\ddot{y} - 1)$, somit ist die zweite Differenz $d^2\,y = y\,\dot{y}(\ddot{y} - 1) - y(\dot{y} - 1) = y(\dot{y}\,\ddot{y} - 2\,\dot{y} + 1)$. Allgemein wird die n-te Differenz von y oder

$$d^n\,y = y\left\{\left(\overset{n}{y} \cdot \overset{n-1}{y} \,..\, \ddot{y}\,\dot{y}\right) - \frac{n}{1}\left(\overset{n-1}{y} \cdot \overset{n-2}{y} \,..\, \ddot{y} \cdot \dot{y}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(\overset{n-2}{y} \,..\, \ddot{y}\,\dot{y}\right) - + \pm\, n\,y \mp 1\right\}.$$

Die n-te Differenz von y^m oder

$$d^n(y^m) = y^m\left\{\left(\bar{y}\,\bar{\bar{y}} \,..\, \overset{n}{y}\right)^m - \frac{n}{1}\left(\bar{y}\,\bar{\bar{y}} \,..\, \overset{n-1}{y}\right)^m + \frac{n}{1}\,\frac{(n-2)}{2}\left(\bar{y}\,\bar{\bar{y}} \,..\, \overset{n-2}{y}\right)^m - + \,..\, \pm\, n\,\bar{y} \mp 1\right\},$$

wo die Koeffizienten die der Newton'schen Binomialformel sind und die Zahl der Faktoren gemäß den Exponenten in dieser Formel abnimmt, sodaß man bei $x = 1$ und angenommener Gleichheit aller übrigen Faktoren $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$.. erhalten würde: $d^n\,x = (\dot{x} - 1)^n$. Es handelt sich jetzt darum, die Anwendung und Berechtigung dieser Prinzipien zunächst am Tangentenproblem nachzuweisen, und zwar ist in der „Theorie des tangentes" zunächst die Subtangente TP zu bestimmen (Fig. 2). Es sei $PM = y$, $p\,m = y\,\dot{y}$, zieht man $M\,n$ parallel zur Abszissenachse, so ist $m\,n = y(\dot{y} - 1)$, $M\,n = P\,p = x(\dot{x} - 1)$. In den beiden ähnlichen Dreiecken $M\,m\,n$ und $M\,P\,T$ hat man $y(\dot{y} - 1) : x(\dot{x} - 1) = y : PT$, also $PT = \frac{x(\dot{x} - 1)}{\dot{y} - 1}$, vermöge der Gleichung der Kurve

kann man aber immer den Differenzenausdruck $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1}$ eliminieren, so daß der Ausdruck von PT eine Funktion von x, y, $\dot{y}$ wird. Setzt man nun hierin $\dot{y}=1$ und zieht vom so gefundenen Punkte T die Gerade TM, so muß diese Kurventangente sein, denn wenn sie die Kurve noch in einem andern Punkte schnitte, so könnte $\dot{y} \neq 1$ sein; setzt man zur Abkürzung $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1}=p$, so ist

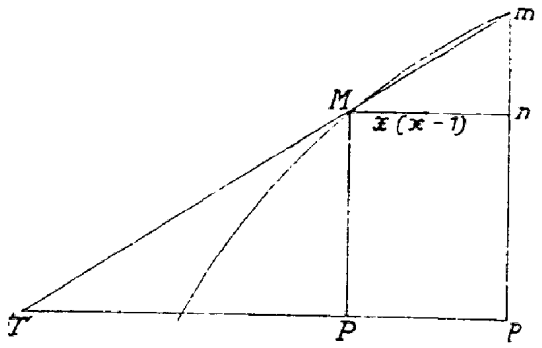


Fig. 2.

die Subtangente $PT = p\,x$, also der Ausdruck der Subnormale unmittelbar $\frac{y^2}{p\,x}$. (Die Höhe im rechtwinkligen Dreieck ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.)

1. Beispiel: Die Parabel; ihre Gleichung $a\,x = y^2$ gibt $a\,x(\dot{x}-1) = y^2(\dot{y}^2-1)$ und $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1} = \frac{y^2(\dot{y}+1)}{a\,x} = \dot{y}+1$ also $TP = (\dot{y}+1)x$ für die Subsekante und für $\dot{y}=1$, $2\,x$ für die Subtangente und für die Subnormale $\frac{a\,x}{2\,x} = \frac{a}{2}$.

2. Die Kreisgl. ist $y^2 = r^2 - x^2$, also $y^2(\dot{y}^2-1) = -x^2(\dot{x}^2-1)$, $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1} = -\frac{y^2}{x^2}\frac{(\dot{y}+1)}{(\dot{x}+1)}$ und $\frac{x(\dot{x}-1)}{x-1}$ für die Subsekante $= -\frac{y^2}{x}\frac{(\dot{y}+1)}{(\dot{x}+1)}$ und für $\dot{y}=1$, $\dot{x}=1$ für die Subtangente der Ausdruck $-\frac{y^2}{x}$.

3. Die logarithmische Kurve hat die Gleichung $x = L\,y$, also $x(\dot{x}-1) = L\dot{y}$ und $PT = \frac{x(\dot{x}-1)}{\dot{y}-1} = \frac{L\,\dot{y}}{\dot{y}-1}$ („quantité qui n'est pas affecté des variables x et y"). Wenn also der Faktor $\dot{y}-1$ konstant ist, so wird es auch die Strecke PT, ganz abgesehen von den übrigen Eigenschaften des logarithmischen Systems. Setzen wir also die Subtangente an irgend einer Ordinate $= a$, so muß die Subsekante $\gtrless a$ sein, und da sie konstant ist, so wird sie nirgends $= a$ sein. Wo man also auch $PT = a$ macht, wird TM Tangente sein, da aber die Subtangente nicht gleichzeitig zwei verschiedene

Werte haben kann, so muß a ihr konstanter Wert sein. Diese Größe ist willkürlich, und im System der natürlichen Logarithmen macht man sie gleich 1. Wenn man also $\dot{y} - 1$ gleich einer sehr kleinen Größe nimmt, so wird die Subsekante sich von der Subtangente nicht merklich unterscheiden, was die Proportion veranlaßt $1 : y = x(\dot{x} - 1) : y(\dot{y} - 1) = dLy : y(\dot{y} - 1) = L\dot{y} : y(\dot{y} - 1)$ also $L\dot{y} = dx = \dot{y} - 1$. Dies gibt ein sehr einfaches Mittel, eine Zahl durch ihren Logarithmus und umgekehrt auszudrücken. Es sei $\dot{y} = m = (1 + b)$, b eine sehr kleine Größe, sei Logarithmus von m. Vermöge der Natur der Kurve kann man eine beliebige Ordinate durch die Größe $(1 + b)$ ausdrücken, erhoben zu einer gewissen Potenz. Es sei also $y = (1 + b)^p$, dann hat man $x = Ly = pL(1 + b) = pb$, da aber b sehr klein ist, muß p sehr groß sein, damit das Produkt pb gleich der endlichen Größe x wird. Nun ist aber $(1 + b)^p = 1 + pb + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 + \text{e. c. t.}$; da p sehr groß ist, so kann man im Verhältnis zu ihm alle endlichen Zahlen vernachlässigen und jeden Faktor $p - 1$, $p - 2$ e. c. t. als ihm gleich betrachten, also $y = (1 + b)^p = 1 + \frac{pb}{1} + \frac{p^2 b^2}{2} + \frac{p^3 b^3}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{p^q b^q}{2 \cdot 3 \ldots q} + \text{e. c. t.} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \ldots \frac{x^q}{2 \cdot 3 \ldots q} + \text{e. c. t.}$ (Logarithmische Reihe.) Durch die umgekehrte Operation kann man auch einen Logarithmus ausdrücken, durch die Zahl, die ihm entspricht. Setzen wir $y = (1 + b)^p = 1 + n$, so hat man $b = (1 + n)^{\frac{1}{p}} - 1$; und $x = pb = p(1 + n)^{\frac{1}{p}} - p$. Durch Entwicklung des Binoms kommt: $p(1 + n)^{\frac{1}{p}} = p \left\{ 1 + \frac{1}{p} n + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)}{1 \cdot 2} n^2 + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} n^3 + \ldots \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right) \ldots \left(\frac{1}{p} - m + 1\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} n^m \right\}$

$$= p \left\{ 1 + \frac{n}{p} + \frac{1}{} \left(\frac{1-p}{2p^2}\right) n^2 + \frac{1}{} \frac{(1-p)(1-2p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 p^3} n^3 + \ldots \right.$$

$+ \frac{1}{} \frac{(1-p) \ldots (1 - mp + p)}{1 \cdot 2 \ldots m p^m} n^m$, da aber p sehr groß, so reduziert sich letzterer Ausdruck auf $p + n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \ldots - \frac{n^{2m}}{2m} + \frac{n^{2m+1}}{2m+1}$,

also $x = p(1+n)^{\frac{1}{p}} - p = n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \ldots - \frac{n^{2m}}{2m} + \frac{n^{2m+1}}{2m+1} = y - 1$

$$-\frac{(y-1)^2}{2}\ldots+\frac{(y-1)^{2m-1}}{2m-1}-\frac{(y-1)^{2m}}{2m}+\ldots=(y-1)$$
$$\left\{\left(\frac{3-y}{1\cdot 2}\right)+\frac{(y-1)^2}{3\cdot 4}(7-3y)+\frac{(y-1)^4}{5\cdot 6}(11-5y)\ldots+\frac{(y-1)^{2m-2}}{2m(2m-1)}\right.$$
$$\left.[(4m-1)-(2m-1)y]\right\};$$ in dieser Form sind immer zwei Glieder zusammengenommen. Nun hat jede Zahl außer dem soeben gefundenen Logarithmus noch unendlich viele imaginäre. In der Tat, die Gleichung $(1+b)^p-y=o$ hat p-Wurzeln, darunter höchstens zwei reelle, also wenigstens $p-2$ imaginäre. Außerdem war $Ly=pb$, wenn also p reell und sehr groß ist, so ist der Logarithmus von y imaginär, wenn $(1+b)$ imaginär ist; es gibt also mindestens $p-2$ imaginäre Logarithmen.

Die imaginäre Größe $(a+b\sqrt{-1})^{c+d\sqrt{-1}}$ ist zurückführbar auf die Form $A+B\sqrt{-1}$. Sei nun $a+b\sqrt{-1}=m$, $c+d\sqrt{-1}=n$, ferner setzen wir $m-1=p$; es ist $L(a+b\sqrt{-1})^{c+d\sqrt{-1}}$ $=(c+d\sqrt{-1})\,L(a+b\sqrt{-1})=n\,L\,m=n\,p\,(1-\frac{p}{2}+\frac{p^2}{3}\ldots$ $-\frac{p^{2q-1}}{2q}+\frac{p^{2q}}{2q+1}$, e. c. t. Setzen wir $x=n\,L\,m$, so wird bei $x=n\,L\,m=L\,y$, die Größe $m^n=y=1+\frac{n\,L\,m}{1}+\frac{(n\,L\,m)^2}{1\cdot 2}\ldots$ $+\frac{(n\,L\,m)^r}{r}$ e. c. t. $=1+np\left(1-\frac{p}{2}+\ldots\frac{p^{2q}}{2q+1}+\ldots\right)+\frac{n^2p^2}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right.$ $\left.+\ldots\frac{p^{2q}}{2q+1}+\ldots\right)^2\ldots+\frac{n^np^n}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{p}{2}\ldots\frac{p^{2q}}{2q+1}+\text{e. c. t.}\right)^n+\ldots$ e. c. t., eine Formel, in der alle Exponenten reell sind. Man weiß andererseits, daß zwei Faktoren der Form $A'+B'\sqrt{-1}$ ein Produkt derselben Form geben; da nun $n\,p$ auf diese Form gebracht werden kann, so kann jeder Term unserer Reihe auf sie zurückgeführt werden, ebenso wie auch die Summe aller Terme.

Wir haben uns einen Augenblick bei den Logarithmen aufgehalten, um zu zeigen, daß (die) elementare Analyse genügt, um alle ihre Eigenschaften abzuleiten.

Wir bemerken noch, daß man die Differenz beliebiger Ordnung reduzieren kann, wenn man $d\,x=d\,L\,y$ konstant nimmt. In der Tat, wenn man die Abszissen in arithmetischer Progression nimmt, so stehen die Ordinaten in geometrischer y, $y\dot{y}$ und $y\dot{y}\ddot{y}$ und es ist $\dot{y}=\ddot{y}$ also $d^2y=y(\dot{y}\ddot{y}-2\dot{y}+1)=y(\dot{y}^2-2\dot{y}+1)=y(\dot{y}-1)^2$, ebenso $d^n(y)=y(\dot{y}-1)^n$ und $d^n(y^m)=y^m(\dot{y}^m-1)^n$, wenn man

also $x = L\,y$ nimmt, so wird $d(y) = y\,d\,x$, $d^2(y) = y\,(d\,x)^2$, $d^n(y) = y\,(d\,x)^n$ und wenn wir anstelle von y, y^m setzen $d^n(y^m) = [d\,(L\,(y^m)]^n \cdot y^m = y^m \cdot [d\,(m\,L\,y)]^n = m^n \cdot y^m \cdot (d\,x)^n$.

Es soll nun der allgemeine Ausdruck des Oskulationsradius aufgestellt werden. Es sei die Ordinate der Kurve im Punkte $M = MP$, der Oskulationsradius MK. In den ähnlichen Dreiecken MPm und MQK hat man $y : n = u : r$, da nun r konstant sein muß in zwei verschiedenen Lagen, und $d(u) = d(y)$, so hat man $d\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{d\,y}{r} = d\,(y : n)$, also $r = \frac{d\,y}{d\,(y : n)}$ und $u = \frac{y\,d\,y}{n\,d\,(y : n)}$.

Wenn man im Resultat dieser Operationen die Differenzenfaktoren der Einheit gleichsetzt, so erhält man den Oskulationsradius; macht man nur $\dot{y} = 1$ und läßt $\dot{x}$ bestehen, wird ein Kreis erhalten des Radius r, Zentrum K, wo zwei gleiche Kreisordinaten in den Schnittpunkten mit der Kurve verschiedenen Abszissen entsprechen. Wenden wir unsere Methode an, so ergibt sich $r = \frac{d\,(y)\,n^2 \cdot \dot{n}}{n\,d\,(y) - y\,d\,(n)}$; nach Erweiterung mit $n\,(\dot{n} + 1)$, $r = \frac{n^3\,(\dot{n} + 1)\,\dot{n}\,d\,(y)}{n^2\,(\dot{n} + 1)\,d\,y - y\,d\,(n^2)}$ (der zweite Posten im Nenner, weil $n \cdot n\,(\dot{n} + 1)\,(\dot{n} - 1) = d\,(n^2)$.

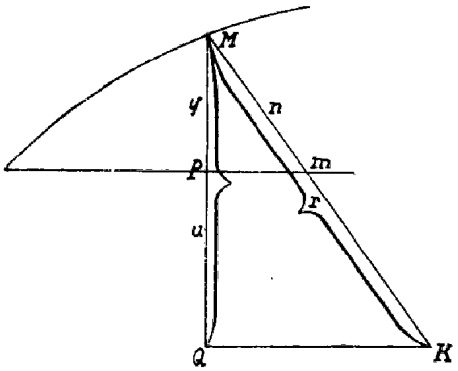


Fig. 3.

Vermöge der Kurvengleichung kann man aber immer n^2 und $d(n^2)$ in Funktion von y und $\dot{y}$ ausdrücken. Man wird $d\,(y)$ eliminieren, um r in bestimmten Größen zu erhalten.

Die Gleichung der Apollon. Parabel ist $2\,a\,x = y^2$; die Subnormale (oben bestimmt) $= a$ und $n^2 = y^2 + a^2$, $d\,(n^2) = y\,(\dot{y} + 1)\,d\,y$ (eigentlich ja $y^2\,(\dot{y}^2 - 1)$, also

$$r = \frac{n^3\,(\dot{n} + 1)\,\dot{n} \cdot d\,y}{n^2\,(\dot{n} + 1)\,d\,y - y^2\,(\dot{y} + 1)\,d\,y} = \frac{n^3\,(\dot{n} + 1)\,\dot{n}}{n^2\,(\dot{n} + 1) - y^2\,(\dot{y} + 1)}$$ und

wenn wir $\dot{y} = \dot{n} = 1$ setzen $r = \frac{n^3}{n^2 - y^2}$ und $u = \frac{n^2\,y}{a^2}$ (aus ähnlichen Dreiecken), also $u = \frac{(a^2 + y^2)\,y}{a^2} = \frac{y}{a}\,(2\,x + a)$.

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist: $y^2 = p\,a - \frac{p\,x^2}{a}$, also die Subnormale: $[da,\ y^2\,(\dot{y}^2 - 1) = -\frac{p}{a}\,[x^2\,(\dot{x}^2 - 1)]$

$\frac{y^2(\dot{y}-1)}{x(\dot{x}-1)} = -\frac{p\,x}{a}$ und $n^2 = y^2 + \frac{p^2 x^2}{a^2} = y^2 - \frac{p}{a} y^2 + p^2$ (der letzte Posten aus der Ellipsengleichung), also $n^2 = p^2 + \left(\frac{a-p}{a}\right) y^2$ und $d(n^2) = \left(\frac{a-p}{a}\right) y(\dot{y}+1)\,dy$ also: $\frac{n^3(\dot{n}+1)\dot{n}\,dy}{n^2(\dot{n}+1)\,dy - y\,d(n^2)}$ $= \frac{n^3(\dot{n}+1)\dot{n}\,a}{a\,n^2(\dot{n}+1) - y^2(\dot{y}+1)(a-p)}$, und wenn man $\dot{y} = \dot{n} = 1$ setzt, bekommt man den Krümmungsradius: $r = \frac{n^3}{n^2 - y^2\frac{(a-p)}{a}} = \frac{n^3}{p^2}$ und $u = \frac{r\,y}{n} = \frac{n^2 y}{p^2}$.

Bei der logarithmischen Kurve ist die Subnormale: (da hier $\frac{y^2(\dot{y}-1)}{x(\dot{x}-1)} = y^2$, wegen $\dot{y} - 1 = d\,x$, also $= y^2$ und $n^2 = y^4 + y^2$ und $d(n^2) = y\{\dot{y} + 1 + y^2(\dot{y}^3 + \dot{y}^2 + \dot{y} + 1\}\,dy$ (durch Zerlegung des vorkommenden Binoms), also $r =$ $\frac{n^3(\dot{n}+1)\dot{n}}{n^2(\dot{n}+1) - y^4(\dot{y}^3 + \dot{y}^2 + \dot{y} + 1) - y^2(\dot{y}+1)} = \frac{n^3}{n^2 - 2y^4 - y^2}$ $= -\frac{n^3}{y^4} = -\frac{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}{y}$ nachdem man $\dot{y} = \dot{n} = 1$ gesetzt. Ist nun die Subtangente der Einheit gleich und wird die Tangentenstrecke mit t bezeichnet, so ist $t = (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, also $r = -\frac{t^3}{y}$ und u (der Ausdruck von u war $\frac{y \cdot r}{n}\Big) = -\frac{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}{n}$, da aber $n = y\sqrt{y^2+1}$, so wird $u = -\frac{y^2+1}{y} = -\frac{t^2}{y}$.

Hat man den allgemeinen Ausdruck für die Subtangente einmal aufgestellt, so ist es nicht schwer zu entscheiden, ob eine Kurve Inflexionspunkte und Asymptoten besitzt; denn ist S die Subtangente, so hat man $d\,y = \frac{y\,d\,x}{S}$; wenn man aber diesen Ausdruck von $d\,y$ mit dem an der Kurvengleichung entnommenen vergleicht, kann man entscheiden, ob eine Tangente die Kurve in noch einem Punkte schneiden wird; wenn dies aber nur in unendlicher Ferne möglich ist, hat man eine Asymptote. Bei der Parabel ist $S = 2\,x$ also $d\,y = \frac{y\,d\,x}{2\,x}$. Wenn man aber die Differenzengleichung der Kurve bildet, wird $d\,y = \frac{a\,d\,x}{y(\dot{y}+1)}$ also $\frac{y\,d\,x}{2\,x} = \frac{a\,d\,x,}{y(\dot{y}+1)}$, $y^2(\dot{y}+1) = 2\,a\,x$ und $\dot{y}$ immer $= 1$; die Kurve wird also von der

Tangente nur im Berührungspunkt begegnet und es findet sich weder Inflexion noch Asymptoten.

Die Hyperbel hat die Mittelpunktsgleichung $a^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2)$, also $S = \frac{a^2 y^2}{b^2 \cdot x}$ [wegen $a^2 y^2 (\dot{y}^2 - 1) = b^2 x^2 (\dot{x}^2 - 1)$] und mit Einführung des Zählerwertes aus der Kurvengleichung $S = \frac{x^2 - a^2}{x}$ und $d y = \frac{y\, d x}{S} = \frac{y x\, d x}{x^2 - a^2}$, andererseits liefert die Differenzengleichung der Kurve $d y = \frac{b^2 (\dot{x} + 1) x\, d x}{a^2 y (\dot{y} + 1)}$ und durch Vergleich der beiden Werte von $d y$ erhält man: $\frac{y x\, d x}{x^2 - a^2} = \frac{b^2 x\, d x}{a^2 y}$ für $\dot{y} = \dot{x}$, also für letztere Gleichheit auch aus der Kurvengleichung: $a^2 y^2 \dot{x}^2 = b^2 (x^2 \dot{x}^2 - a^2)$ und die Kurvengleichung abgezogen: $a^2 y^2 (\dot{x}^2 - 1) = b^2 x^2 (\dot{x}^2 - 1)$, also: $a^2 y^2 = b^2 x^2$, ein unmöglicher Ausdruck, falls nicht x^2 sehr groß ist, so daß a^2 in der Kurvengleichung dagegen vernachlässigt werden kann. Für diesen Fall aber wird sich die Kurve mit der Tangente identifizieren und man hat eine Asymptote.

Es sei ferner $y^3 = a^2 x$, dann hat man $y^3 \dot{y}^3 = a^2 x \dot{x}$ und $d y = \frac{a^2 d x}{y^2 (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)}$, verbindet man mit diesem Wert von $d y$ den mit Hilfe der Subtangente $d y = \frac{y\, d x}{S} = \frac{y\, d x}{3 x}$ [nach unserer Methode ist $y^3 (\dot{y} - 1)(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1) = a x (\dot{x} - 1)$, also $\frac{\dot{x} - 1}{\dot{y} - 1} = \frac{y^3}{a^2 x} \cdot [\dot{y}^2 + \dot{y} + 1]$, für $\dot{y} = 1$ wird die rechte Seite $= 3$, also $S = 3 x$] gefundenen, so hat man $y^3 (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1) = 3 a^2 x$, also $\dot{y}^2 + \dot{y} = 2$; die Wurzeln dieser Gleichung sind aber $\dot{y} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, also $\dot{y} = 1$ und $\dot{y}_2 = -2$, also wird die Tangente in irgend einem Punkte der Kurve $y^3 = a^2 x$ den entgegengesetzten Ast der Kurve in einem Punkte schneiden, wo die Ordinate $-2 y$ ist. Wenn aber $\dot{y}$ unbestimmt ist, so ist klar, daß die Inflexion im Anfangspunkt der Koordinaten statt hat. Wenn eine Parallele zur Abszissenachse die Kurve in zwei verschiedenen Punkten trifft, so hat man gleiche Ordinaten, deren Abszissenunterschied $d (x)$ ist. Je mehr sich dieser Unterschied vermindert, wachsen oder nehmen die beiden gleichen Ordinaten ab, je nachdem die Kurve ihre konkave oder konvexe Seite der Abszissenachse zukehrt. Um also die Parallele zur Achse als Tangente zu erhalten, müßte $d x = 0$ sein, die beiden gleichen

Ordinaten fallen zusammen und man hat im ersteren Falle ein Maximum, im letzteren ein Minimum. Um aber die verschiedenen Abszissenwerte, welche gleichen Ordinaten entsprechen, zu erhalten, hat man nur $\frac{dy}{x(\dot{x}-1)} = 0$ zu setzen, und wenn man dann $\dot{x} = 1$ nimmt, wird man den Berührungspunkt finden, wo die Ordinate ein Maximum oder Minimum ist. Um z. B. die Funktion $y^2 = 2ax - x^2$ auf Maximum oder Minimum zu untersuchen wird man $\frac{dy}{dx} = 0 = 2a - x(\dot{x}+1)$ machen und $\dot{x} = \frac{2a}{x} - 1$. [Nun findet bei unserm Autor ein plötzlicher Übergang zur Mittelpunktsgleichung des Kreises statt, indem anstelle von x, $a - x$ tritt], so bekommt man $\dot{x} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 - y^2}} - 1$ und dergestalt erhält man zwei gleiche Ordinaten in den Abszissen $a \pm (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$. Setzen wir jetzt $dx = 2(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, so wird die Parallele zur Abszissenaxe Tangente an die Kurve und zwar im Punkte $y = (x) = a$. Würden wir anstelle von $\sqrt{a^2 - y^2}$ wieder $a - x$ rückwärts einsetzen, so wären ja wirklich $2a - x = x\overbrace{\left(\frac{2a}{x} - 1\right)}^{\dot{x}}$ und x: die beiden Abszissen gleicher Ordinaten. [Scharf tritt hier hervor, daß unser Autor durch seine Methode die Bedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ spaltet in $y \cdot \frac{(\dot{y}-1)}{x(\dot{x}-1)} = 0$, also $\frac{\dot{y}-1}{x(\dot{x}-1)} = 0$, was nach seiner Darstellung die Subtangente und ihr Unendlichwerden im Fall eines Extrems der Ordinate bedeutet.] „Par ce procédé, on s'assure que la courbe a des ordonnnées égales répondantes à des abscisses réellement différentes, et entre ces extrêmes il y a nécessairement un maximum ou un minimum; au lieu que par la méthode ordinaire il faut préalablement examiner s'il n'y a pas un point d'inflexion où dy devient zéro, quoiqu'il n'y ait point de maximum".

Ein weiteres Beispiel ist $\frac{x^2 + a^2}{x} = y$. Man bildet zuerst die Gleichung für eine weitere Ordinate $(x\dot{x})$ also $\frac{x^2\dot{x}^2 + a^2}{x\dot{x}} = y\dot{y}$ und subtrahiert davon $\frac{x^2 + a^2}{x} = y$. Bringt man auf gleichen Nenner,

so kommt $\frac{x^2\dot{x}^2+a^2}{x\dot{x}} - \frac{x^2\dot{x}+a^2\dot{x}}{x\dot{x}} = y\dot{y} - y$ oder $\frac{x^2\dot{x}(\dot{x}-1)-a^2(\dot{x}-1)}{x\dot{x}}$ $= \frac{(\dot{x}-1)(x^2\dot{x}-a^2)}{x\dot{x}} = y(\dot{y}-1)$. Da nun bei $\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{(\dot{x}-1)(x^2\dot{x}-a^2)}{x\dot{x}}$ im letzteren Ausdruck der Zähler verschwinden muß, so hat man $x^2\dot{x} = a^2$ oder $\dot{x} = \frac{a^2}{x^2}$. Die Ordinaten, welche den Abszissen x und $\frac{a^2}{x}$ entsprechen, sind also gleich. Setzt man $\dot{x} = 1$, so hat man $x = \pm a$, $y = \pm 2a$ und die Kurve hat zwei Minima, das eine positiv, das andre negativ.

Manche Fragen scheinen sich der Methode zuerst zu entziehen, sie fügen sich ihr aber doch, wenn man einige Kunstgriffe anwendet. So der Beweis des Satzes, daß unter allen ebenen Figuren gleichen Umfangs der Kreis die inhaltsgrößte sei; der auch für seine Segmente gilt. Zum Beweise zeigen wir:

1. Daß das Polygon vom Umfang m und der Seitenzahl n, wo jede Seite $\frac{m}{n}$ ist, unter allen Polygonen desselben Umfangs das inhaltsgrößte ist. Es sei $AB = a - y$, $BC = a + y$, $AC = p$, $Bd = u$, $Ad = z$, $dC = p - z$. Vermöge der Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke hat man

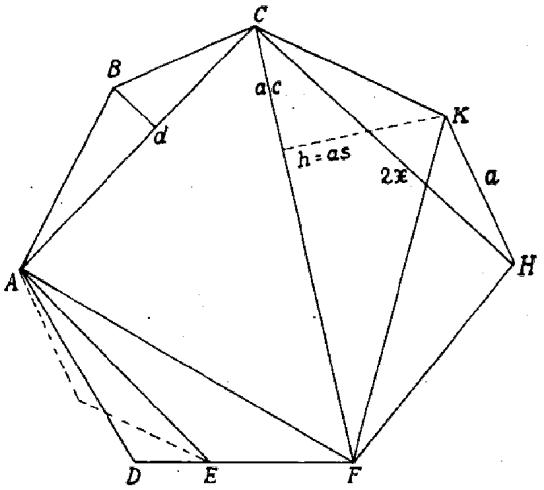


Fig. 4.

$u^2 = (a-y)^2 - z^2 = (a+y)^2 - (p-z)^2$, $z = \frac{p^2 - 4ay}{2p}$, $u^2 = (a+y)^2 - \left(p - \frac{p^2-4ay}{2p}\right)^2 = a^2 + 2ay + y^2 - \frac{(p^4 + 8p^2ay + 16a^2y^2)}{4p^2} = (p^2 - 4y^2)\frac{(4a^2-p^2)}{4p^2}$, also $u = \frac{\sqrt{p^2-4y^2}\sqrt{4a^2-p^2}}{2p}$ und weiter die Fläche des Dreiecks $ABC = \frac{pu}{2} = \frac{\sqrt{p^2-4y^2}\sqrt{4a^2-p^2}}{4}$, ein Ausdruck, der um so größer wird, je kleiner y ist und dessen Maximum offenbar für $y = 0$ erreicht wird, wenn also $AB = BC = a$. Diese Überlegung angewandt auf

jedes Paar aneinanderstoßender Seiten des Polygons zeigt, daß das Polygon mit untereinander gleichen Seiten unter allen isoperimetrischen gleicher Seitenzahl das flächengrößte ist.

2. Daraus folgt, daß bei gleichem Umfang der Inhalt wächst, wenn man die Seitenzahl vergrößert. Denn betrachtet man wiederum das Polygon mit lauter unter sich gleichen Seiten, und macht man im Dreieck ADF die Strecke $DE = \frac{1}{3}\frac{m}{n}$ so hat man im Dreieck ADE die Seiten $AD = \frac{m}{n}$ und $DE = \frac{1}{3}\frac{m}{n}$. Man kann also nach dem ersteren Satze den Inhalt des Dreiecks ADE bei gleichem Umfang vergrößern, wenn man über der Grundlinie AE ein Dreieck zeichnet, dessen beide anderen Seiten je $\frac{2m}{3n}$ sind, so daß anstelle des Dreieks ADF ein Viereck tritt, worin jede der drei äußeren Seiten $\frac{2m}{3n}$ ist. Auf jedes Paar benachbarter Seiten angewendet, wächst also der Inhalt des Polygons um so mehr, je größer n ist. Um das Maximum zu erhalten, muß man n ins Unbegrenzte wachsen lassen.

Bei Konstanz von m und n hat dasjenige Polygon die größte Fläche, dessen Seitenwinkel untereinander gleich sind. Es sei im Viereck CFHK die Seite $CF = 2p$ $CK = KH = HF = a$, $KF = 2x$, der Sinus des Winkels $KCF = s$, sein Kosinus $= c$, dann ist die Fläche des Dreiecks $KFH = x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, diejenige des Dreiecks $FCK = pas = pa(1 - c^2)^{\frac{1}{2}}$, also die Fläche des Vierecks $CFHK = pa(1 - c^2)^{\frac{1}{2}} + x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, aber $4x^2 = (2p - ac)^2 + a^2 s^2 = 4p^2 + a^2 - 4pac$ also $x^2 = p^2 + \frac{a^2}{4} - pac$.

Und $x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4a^2 - 4p^2 - a^2 + 4pac}{4}}\sqrt{\frac{4p^2 + a^2 - 4pac}{4}}$.

Also die Fläche des genannten Vierecks $CFHK = pa(1 - c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{[-16a^2p^2c^2 + 8ap(4p^2 - a^2)c - 16p^4 + 8p^2a^2 + 3a^4]^{\frac{1}{2}}}{4}$. Damit diese Funktion ein Maximum sei, muß ihre Differenz $= 0$ sein. Nach Ausführung aller Reduktionen erhält man $(1 - c^2)^{\frac{1}{2}}$

$(-4apc + 4p^2 - a^2) = c[-16a^2p^2c^2 + 8apc(4p^2 - a^2) - 16p^4 + 8a^2p^2 + 3a^4]^{\frac{1}{2}}$, wenn man einzig den Kosinus c als variabel betrachtet. Prüfen wir dies Resultat durch Differentiation nach c nach, so ergibt sich, wenn wir abkürzend $\{-16a^2p^2c^2 + 8apc(4p^2 - a^2) - 16p^4 + 8a^2p^2 + 3a^4\} = M$ setzen

$$0 = -pa\frac{c}{(1-c^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4 \times 2M^{\frac{1}{2}}}[-32a^2p^2c + 8ap(4p^2 - a^2)]$$

und auf gleichen Nenner gebracht und mit ap dividiert kommt Ensheim's Ausdruck:

$$(1-c^2)^{\frac{1}{2}}(-4apc + 4p^2 - a^2) = cM^{\frac{1}{2}}.$$

Erhebt man diesen Ausdruck ins Quadrat, läßt auf beiden Seiten die gleichen Ausdrücke weg und dividiert mit $4p^2 - a^2$, so kommt: $4p^2 - 8apc + 4a^2c^2 = a^2$. [Bei der Prüfung der Ausführung bleiben stehen von Gliedern mit c^2 diese $-4a^4c^2 + 16a^2p^2c^2$ und außerdem $16p^4 + a^4 - 32ap^3c + 8a^3pc - 8a^2p^2$.] Löst man diese Gleichung nach c auf, so kommt: $c^2 - \frac{2pc}{a} = \frac{1}{4} - \frac{p^2}{a^2}$ oder

$$c = \frac{p}{a} \pm \sqrt{\frac{4p^2}{4a^2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{p^2}{a^2}\right)} = \frac{p}{a} \pm \frac{1}{2} = \frac{2p \pm a}{2a}.$$

Da aber c als Kosinus stets kleiner als die Einheit und 2p größer als a vorausgesetzt wurde, so muß man von der negativen Wurzel Gebrauch machen, so daß $c = \frac{2p - a}{2a}$. Die Kosinus der Winkel FKH und KFH berechnen sich nach dem Kosinussatz; man hat

$$4x^2 = 4p^2 + a^2 - 4pa\left[\frac{2p-a}{2a}\right] = \frac{8p^2a + 2a^3 - 8p^2a + 4pa^2}{2a} = \frac{4pa^2 + 2a^3}{2a} = 2pa + a^2$$

$$2x = \sqrt{2pa + a^2} \text{ und}$$

$$a^2 = [2pa + a^2] + a^2 - 4ax \cos FKH \text{ also}$$

$$\cos FKH = \frac{\sqrt{2pa + a^2}}{2a}.$$

Ferner der Kosinus von $CFK = \frac{2p - ac}{2x}$ und wenn man den aus der quadratischen Gleichung gefundenen Wert für c einsetzt, kommt $2p - a\left[\frac{2p-a}{2a}\right]$ also $\frac{4pa - 2pa + a^2}{2a} = \frac{2pa + a^2}{2a}$ und $2x$ wie oben $= \sqrt{2pa + a^2}$ also $\cos CFK = \frac{\sqrt{2pa + a^2}}{2a}$. Da die

drei Kosinus gleich sind, so sind es auch die Winkel, also CF und KH parallel, also die Winkel bei K und H gleich und das Polygon ein reguläres. Da dieselbe Überlegung ja für sämtliche Seitenwinkel gilt, der Inhalt aber mit der Vergrößerung der Seitenzahl wächst, und diese unbegrenzt ist, so wird das reguläre Polygon schließlich in den Kreis übergehen, womit unser Theorem bewiesen ist.

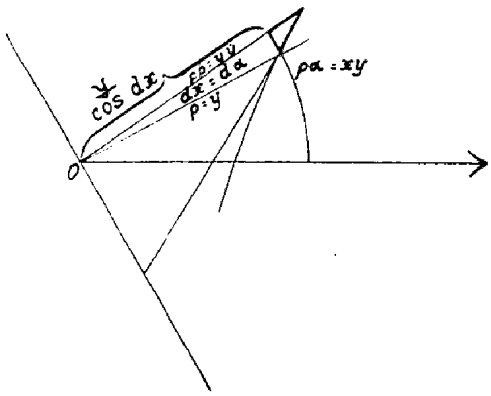


Fig. 5.

Um unsere Methode auf die Differenzen von Sinus, Kosinus und somit auf diejenigen Kurven anwenden zu können, deren Gleichung von irgendwelchen Winkelbeziehungen abhängt, muß man voraussetzen, daß für sehr kleine Winkel der Sinus sich nicht vom Bogen, der Kosinus sich nicht merklich vom Einheitsradius unterscheidet. Wenn man so die Spirale auf Polarkoordinaten (y, x) bezieht, so wird der allgemeine Ausdruck der Polarsubtangente $\underset{\dot{y}=1}{S} = \frac{y^2 \cdot \dot{y} \sin dx}{y \dot{y} \cos dx - y} = \frac{y \cdot \dot{y}\, dx}{\dot{y} - 1}$; denn man hat in ähnlichen Dreiecken $\frac{y \dot{y} - \frac{y}{\cos dx}}{y \operatorname{tg} dx} = \frac{y \dot{y}}{S}$ oder $\frac{y \dot{y} \cos dx - y}{y \sin dx} = \frac{y \dot{y}}{S}$ also $S = \frac{y^2 \dot{y} \sin dx}{y \dot{y} \cos dx - y}$ und für $\dot{y} = 1$, $S = \frac{y^2 \dot{y}\, dx}{y \dot{y} - y} = \frac{y^2\, dx}{dy}$ [in den modernen Lehrbüchern geschrieben $\varphi^2 : \frac{d\varphi}{d\omega}$.] Nimmt man die Gleichung der Archimed'schen Spirale in der Form an $a x = b y$, so wird $S = \frac{y \dot{y}\, dx}{\dot{y} - 1} = \frac{b y^2 \dot{y}}{a} = x \dot{y} y$ oder für $\dot{y} = 1$, $S = x y$. Diese Beziehung drückt den Satz aus an der Archimed'schen Spirale, daß die Länge der Polarsubtangente gleich ist dem Bogen bis zur Polaraxe des mit dem Radius $\varphi = y$ durch den Kurvenpunkt (y, x) beschriebenen Kreises (Mittelpunkt O, Radius y).

Der Verfasser schließt den ersten der Differentialrechnung gewidmeten Teil seines Werkchens mit den Worten: „Les livres élémentaires supposent une courbe parallele à une ligne droite, ou une analogie entre des quantités innombrables, ce qui ne peut jamais satisfaire les commençans."

„Ces différentes solutions suffisent pour faire voir que les principes du calcul différentiel sont rigoureusement vrais, sans que l'on besoin de négliger certaines quantités, ni de considérer les courbes comme composées d'une infinité de lignes droites, supposition répugnante au bon sens, et démentie dans la mécanique."

Es folgt der „Calcul intégral" (pag. 13 des Werkchens), dessen Aufgabe dahin präzisiert wird die Funktion zu einer gegebenen Differenz aufzufinden. Ensheim polemisiert dabei gegen die Auffassung (Eulers) der Differenzen als absoluter Nullen: „vu qu'une infinité de zéro ne peut pas former une quantité finie, et qu'il ne peut y avoir aucun rapport entre le néant et la realité". Man muß also von sehr kleinen Differenzen ausgehen. Den ganzen Integralcalcul gründet er auf zwei fundamentale Sätze:

1. Wenn die Differenzen von zwei Variabeln in einer konstanten Beziehung stehen, so stehen die Variabeln selbst, von einer Konstanten (additiv) abgesehen, in derselben Beziehung.

2. Der erweiterte Gleichheitsbegriff wird hier eingeführt: „Si $p + q = R$ et que sans changer cette égalité q puisse devenir moindre que toute quantité assignable, on peut sans erreur négliger cette quantité inassignable, et supposer $p = R$." Wenn die differentielle Funktion komplett ist, hat die Integration keine Schwierigkeiten, man hat nur den durch die Differenzen hineingekommenen Faktor wieder herauszuschaffen. Ist sie nicht komplett, so handelt es sich darum, eine konstante Beziehung zu einer andern Differentiellen aufzufinden, deren Integral bekannt ist: „ce qui est quelquefois très difficile, et souvent même impossible", Es folgen die einfachsten Integralformeln: Das Integralzeichen wird konsequent durch ein S (Summe) ersetzt. Man hat so:

$$S.\, y^m (\dot{y}^m - 1) = y^m + c$$

$$S.\, y^m (\dot{y}^n - 1) = \frac{y^m (\dot{y}^{n-1} + \dot{y}^{n-2} + \ldots \dot{y} + 1)(\dot{y} - 1)(\dot{y}^m - 1)}{\dot{y}^{m-1} + \dot{y}^{m-2} + \ldots \dot{y} + 1)(\dot{y} - 1)}$$

$$= S.\, d\,(y^m) \times \frac{(\dot{y}^{n-1} + \dot{y}^{n-2} + \ldots \dot{y} + 1)}{(\dot{y}^{m-1} + \dot{y}^{m-2} + \ldots + 1)}$$

und für $\dot{y} = 1$, $S.\, y^m (\dot{y}^n - 1) = \frac{n\, y^m}{m} + c$

sodann: $S.\, x\, y\, (\dot{x}\, \dot{y} - 1) = S.\, (x\, \dot{x}\, d\, y + y\, d\, x) = x\, y$

und . . . . . $S.\, x \frac{(\dot{x} - \dot{y})}{y\, \dot{y}} = S.\, \frac{(y\, d\, x - x\, d\, y)}{y^2\, \dot{y}} = \frac{x}{y}$

weiter . . . $a\, S.\, (\dot{x} - 1) = a\, L.\, x + L.\, c = L.\, c\, x^a$. [Man vergl. dazu oben die Worte: „Si l'on suppose un rapport constant entre $\dot{y}$ et son logarithme e. c. t.".]

Endlich $S.(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1) = n q \frac{(a + b x^m)^{\frac{p+q}{q}}}{m b (p + q)}$. Um diese letztere Gleichheit zu beweisen, setzt Ensheim: $(a + b x^m)^{\frac{1}{q}} = u$, dies gibt $x^m = \frac{u^q - a}{b}$, $d(x^m) = \frac{d(u^q)}{b}$; es ist aber $x^m (\dot{x}^n - 1) = d(x^m) \frac{(\dot{x}^{n-1} + \dot{x}^{n-2} + \ldots \dot{x} + 1)}{\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + \ldots \dot{x} + 1}$, also $(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1) = \frac{(\dot{x}^{n-1} + \dot{x}^{n-2} \ldots \dot{x} + 1) u^p d(u^q)}{(\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + \ldots x + 1) b}$. Sodann wird $d(u^q)$ ausgeführt $= u^q (\dot{u}^{q-1} + \dot{u}^{q-2} + \ldots \dot{u} + 1)(\dot{u} - 1)$ und anstelle von u^{p+q} eingeführt $\frac{d(u^{p+q})}{(\dot{u}^{q+p-1} + \dot{u}^{q+p-2} + \ldots \dot{u} + 1)(\dot{u} - 1)}$, also hat man:

$$(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1)$$
$$= \frac{(\dot{u}^{q-1} + \dot{u}^{q-2} + \ldots \dot{u} + 1)(\dot{x}^{n-1} + \dot{x}^{n-2} + \ldots \dot{x} + 1) d(u^{p+q})}{(\dot{u}^{p+q-1} + \dot{u}^{p+q-2} + \ldots \dot{u} + 1)(\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + \ldots \dot{x} + 1) b}.$$

Bei Integration wird das Differenzenbildungszeichen vernichtet und somit $S.(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1) = \frac{n q (a + b x^m)^{\frac{p+q}{q}}}{m b (p + q)}$.

Um die Berechtigung dieser Prinzipien zu zeigen, wenden wir sie wieder auf die gewöhnlichen Probleme der Integralrechnung an. Es handle sich darum, den krummlinig begrenzten Flächenraum FGMP zu quadrieren. Das Element der Fläche ist aus zwei Teilen zusammengesetzt, dem Parallelogramm FpnG und den von den Koordinatendifferenzen gebildeten Dreieckchen. Die Summe dieser Dreieckchen ist aber offenbar kleiner als $x \cdot dy$, denn wenn man dy unaufhörlich halbiert, kommt man zu dem Ausdruck $\frac{x\,dy}{2^m}$ kleiner als jede angebbare Größe. Der Flächenraum FPMG kann also sehr wohl $= S.\,y\,dx$ gesetzt werden. Damit aber $y\,dx$ sehr klein werde, muß $dx = x(\dot{x} - 1)$ nahe an o, also $\dot{x} = 1$ gesetzt werden. Die Differenz von xy ist nun $xy(\dot{x}\dot{y} - 1)$. Wenn also die Gleichung der Kurve eine konstante Beziehung zwischen $\dot{x}\dot{y} - 1$ und $\dot{x} - 1$ liefert, so besteht dieselbe

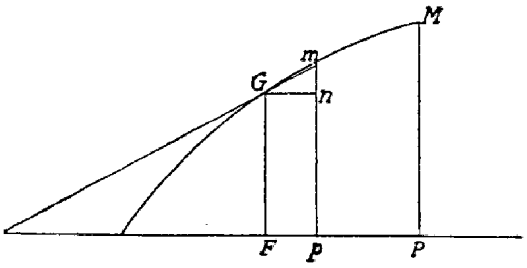


Fig. 6.

Beziehung zwischen der Summe der Parallelogramme und x y und die Kurve ist algebraisch quadrierbar; besteht aber eine solche Beziehung nicht, so muß man zu Approximationsmethoden greifen. Als Beispiel einer Quadratur dienen die Parabeln höherer Ordnung, welche eine interessante Geschichte besitzen.[8]) Durch Verallgemeinerung der Gleichung der Apollonischen Parabel $y^2 = p x$ erhält man diejenige dieser Kurven $y^{m+n} = a^m x^n$ oder bei Fermat $y^{m'} = k^{m'-n} x^n$ (vergl. Cantor Bd. III_1, pag. 869, also $m' = m + n$ und $m = m' - n$). Aus der Gleichung $y^{m+n} = a^m x^n$ erhält Ensheim $\dot{x}^n - 1 = \dot{y}^{m+n} - 1$ oder $\dot{x} - 1 = \dot{y}^{\frac{m+n}{n}} - 1$. Multipliziert man den ersten Summanden mit $\dot{y}$ und subtrahiert beiderseits wieder 1, so kommt $\dot{x}\,\dot{y} - 1 = \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}} - 1$. Außerdem ist:

$$(\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}} - 1) : (\dot{y}^{\frac{m+n}{n}} - 1) = (\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1) :$$

---

[8]) Wichtig für diese Geschichte sind folgende Dokumente: 1. der Brief Descartes' vom 13. Juli 1638 berührt Sätze, welche den Schwerpunkt und die durch Rotation erzeugten Volumina von diesen Kurven begrenzter Flächen betreffen (Oeuvres de Descartes ed. Adam et Tannery II, Paris 1898, S. 246. 2. Ein Schreiben Fermats an Cavalieri von 1644 durch Vermittlung P. Mersennes (zuerst veröffentlicht in den Oeuvres de Fermat ed. Tannery et Henry I, S. 195—198), worin ein Ausdruck für die Fläche eines Parabelsegments sowie für das von ihr durch Rotation um die Achse erzeugte Volumen, ebenso für die Schwerpunkte jener Fläche und dieses Körpers angegeben werden. 3. Verbreitet wurden diese Resultate durch Mersenne in der Praefatio ad mechanicam seiner Cogitata physico-mathematica 1644. Fermats Bemühungen reichen aber bis 1636 zurück. In einem Briefe an Roberval vom 22. Sept. 1636 (Oeuvres de Fermat II, S. 73) wird auf die von ihm ausgeführte Quadratur hingewiesen. Er kommt darauf in Briefen an Roberval vom 16. Dez. 1636 und an Mersenne vom 10. Aug. 1638 (Oeuvres de Fermat II, S. 95 und ibid., S. 165) und mit aller nur wünschenswerten Ausführlichkeit in der berühmten Arbeit De aequationum localium transmutatione et emendatione, die erst 1679 in den Opera varia erschienen ist (Fermat Oeuvres I, S. 255—285 und III, S. 216—237). Dem Datum der Publikation nach kommt für die Priorität einiger dieser Resultate in Betracht: 1. Bonaventura Cavalieri in der vierten seiner Exercitationes sex Bonon. 1647. 2. Stefano degli Angeli, der Verfasser einer wichtigen Arbeit: De infinitis Parabolis infinitisque solidis, Venetiis 1654. 3. John Wallis, der sich in seiner Arithmetica infinitorum 1655 und in seinem Lehrbuch der Kegelschnitte eingehend mit den höheren Parabeln beschäftigt hat. Im 18. Jahrhundert schrieb M. Knutzen, der bekannte Lehrer Kants, über die „parabolae parametrales" eine Abhandlung: Theoremata nova de parabolis infinitis eodem parametro et circa eandem axem descriptis (Acta eruditorum Lips. 1737). (Nach Loria „Spezielle ebene höhere Kurven".)

$(\dot{y}^{\frac{m+n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1) = d(x\,y) : x\,y\,(\dot{x} - 1)$; also das kleine Parallelogramm: $GF\,p\,n = x\,(\dot{x} - 1) \cdot y$

$$= \left\{ \frac{\dot{y}^{\frac{m+n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1}{\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1} \right\} d(x\,y),$$

dessen allgemeines Integral:

$$\left\{ \frac{\dot{y}^{\frac{m+n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1}{\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1} \right\} x\,y$$

und für $\dot{y} = 1$ erhält man die ganze krummlinig begrenzte Fläche: $\frac{m+n}{m+2n} x\,y$ (bei Cantor l. c. $\int_0^a y\,dx = \left(\frac{m'}{m'+n} x\,y\right)_{x=a}$ da ja die Gleichung der Kurven war $y^{m'} = k^{m'-n} x^n$).

Wie man durch Verallgemeinerung der kanon. Gleichung der Parabel zum Begriff der Parabeln höherer Ordnung gelangt, so durch Verallgemeinerung der Gleichung einer auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel $x\,y = a^2$ zu den Kurven, die durch eine Gleichung vom Typus $y^m x^n = a^{m+n}$ dargestellt werden, den Hyperbeln höherer Ordnung. Setzt man in der Gleichung der Parabeln anstelle von m die Größe $m + n$ und anstelle von n ein $-n$, so erscheint die Gleichung der Hyperbeln höherer Ordnung, eine Analogie, die Auguste Comte 1843 veranlaßte, aus den Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung eine einzige Klasse zu bilden, die er binomische Kurven nannte. Im Resultat der Quadratur wird aus $\int y\,dx = \frac{m+n}{m+2n} x\,y$ für die Hyperbeln jetzt $\frac{m}{m-n} x\,y$, was Ensheim wiederum so ableitet: Aus $a^{m+n} = y^m x^n$ folgt $y = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}}$; $y\,dx = a^{\frac{m+n}{m}} x^{-\frac{n}{m}+1} (\dot{x} - 1) = a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} (\dot{x} - 1)$ und $x\,y = a^{\frac{m+n}{n}} x^{\frac{m-n}{m}}$,

$$\text{also } \frac{y\,dx}{d(x\,y)} = \frac{a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} (\dot{x} - 1)}{a^{\frac{m+n}{m}} x^{\frac{m-n}{m}} (\dot{x}^{\frac{m-n}{m}} - 1)} = \frac{\dot{x} - 1}{\dot{x}^{\frac{m-n}{m}} - 1}$$

$$= \frac{1}{(\dot{x}^{\frac{m-n}{m}-1} + \dot{x}^{\frac{m-n}{m}-2} + \ldots \dot{x} + 1)}$$

und für die Integration, nachdem $\dot{x} = 1$ gesetzt wurde:

$$S.\, y\, d\, x = \frac{1}{\frac{m-n}{m}} x\, y = \frac{m}{m-n} x\, y.$$

Auszunehmen ist der Fall, wo $m = n = [1]$, derjenige der gewöhnlichen Hyperbel. In der Tat, da $x\, y = a^2$, so ist $d\,(x\, y) = o$, also existiert keine Beziehung zwischen der reellen Größe $y\, d\, x$ und $d\,(x\, y)$. Andererseits aber ist $y\, d\, x = \frac{a^2\, d\, x}{x} = a^2\,(\dot{x} - 1)$, eine Funktion, aus der die Variable verschwindet und deren Zuwächse also eine arithmetische Reihe bilden, während die x in geometrischer Progression stehen. Man kann also die krummlinig von der Hyperbel begrenzten Flächenräume auffassen als die Logarithmen der bezüglichen Abszissen und $S.\, y\, d\, x = L.\, x$.

Bei der logarithmischen Kurve hat man $S.\, y\, d\, x = S.\, y\,(\dot{y} - 1) = y + C$. Man kann dies Resultat auch durch elementare Algebra beweisen. Denn setzt man $y = m^p$ und $L\, y = p\,(m - 1) = x$ [also $L\, y = p\, L\, m = p\,(m - 1)$ und somit $L\, m = m - 1$], so wird $y\, d\, x = m^p\,(m - 1)$. [Logarithm. Differentiation.] Die Ordinaten wachsen also in geometrischer Progression und sind dargestellt durch 1, m, m^2 e. c. t., die krummlinig begrenzten Flächen sind repräsentiert durch $(m - 1)$, $m\,(m - 1)$, $m^2\,(m - 1)$ e. c. t. Die Summe dieser Reihe ist aber $\frac{(m^{p+1} - 1)\,(m - 1)}{m - 1} = m^{p+1} - 1 = S.\, m^p\,(m - 1) = S.\, y\, d\, x$. Bedenkt man aber, daß m von der Einheit nur sehr wenig verschieden ist (um die sehr kleine Größe n, so ist $m^{p+1} = m^p\,(1 + n)$ nur sehr wenig unterschieden von m^p, also hat man auch $S.\, y\, d\, x = m^p - 1 = y - 1$.

Beim Kreise hat man $y\, d\, x = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, d\, x$. Da dieser Ausdruck sich nicht auf eine geschlossene Form zurückführen läßt, die integrierbar ist, so entwickelt man das Radikal nach der Binomialformel in eine unendliche Reihe: $y = r\,(1 - \frac{x^2}{2\,r^2} - \frac{x^4}{8\,r^4} - \frac{x^6}{16\,r^6}$ — e. c. t.) und gewinnt so näherungsweise

$$S.\, y\, d\, x = r^2 \left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{2 \cdot 3\, r^3} - \frac{x^5}{8 \cdot 5\, r^5} - \frac{x^7}{16 \cdot 7\, r^7} - \text{e. c. t.}\right)$$

Zur Rektifikation der Kurven faßt man sie hier in der Integralrechnung in gewohnter Weise als Grenze ihres Sehnenzuges auf. Die Sehne ist $(d\, x + d\, y)^{\frac{1}{2}}$ und durch

Integration dieses Ausdrucks erhält man bis auf eine Konstante die Peripherie des Polygons, die zuletzt in die Kurvenlänge übergehen wird.

Als Beispiel dient die Neil'sche Parabel: $a x^2 = y^3$, daraus $a x^2 (\dot{x}^2 - 1) = y^3 (\dot{y}^3 - 1)$, also $\dot{x}^2 - 1 = \dot{y}^3 - 1$ und $\dot{x} = \dot{y}^{\frac{3}{2}}$, will man, nachdem in $a x^2 (\dot{x} + 1)(\dot{x} - 1) = y^2 (\dot{y} - 1) \times y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)$ zerlegt, auf $(d x)^2$ kommen, so ist die linke Seite mit $\frac{\dot{x} - 1}{\dot{x} + 1}$ zu multiplizieren oder nach Erweiterung mit $\dot{x} + 1$ mit

$$\frac{\dot{x}^2 - 1}{(\dot{x} + 1)^2} = \frac{(\dot{y} - 1)(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)}{(\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2}, \text{ also } (d x)^2 = (d y)^2 \frac{y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2}$$

und $(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} d y$. Setzen wir

$$\left[\frac{y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2} + 1 \right] = z^2, \text{ so hat man } d y = \frac{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 z^2 (\dot{z}^2 - 1)}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}$$

und $(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = a \frac{(\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 z^3 (\dot{z}^2 - 1)}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2} = a \frac{(\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 (\dot{z} + 1)\, d (\dot{z}^3)}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2 (\dot{z}^2 + \dot{z} + 1)}$,

also das Integral: $S. (d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 (\dot{z} + 1) z^3}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2 (\dot{z}^2 + \dot{z} + 1)}$ und wenn man $\dot{y} = \dot{z} = 1$ setzt, so wird unter Restitution von z das Integral, das den Bogen der Neil'schen Parabel darstellt:

$$S. (d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{8 a}{27} \left(\frac{9 y}{4 a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Beim Kreise hat man $(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r\, d x}{(r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$; da sich hier keine konstante Beziehung aufstellen läßt, so entwickelt man die Wurzel im Nenner und findet so näherungsweise das Integral, das den Kreisumfang darstellt.

Mit der Wendung „On peut d'ailleurs trouver la valeur approchée de la circonférence du cercle d'une manière plus élégante" geht unser Autor zu einer ganz andern Methode über, die wir hier in etwas modifizierter Transskription folgen lassen, da die Reihe des Dreiecks unseres Wissens sonst nirgends abgeleitet ist. In den Einheitskreis sei das reguläre n-Eck einbeschrieben, das aus soviel Dreiecken besteht, als der Centriwinkel $2 m = \frac{360^0}{n}$ angibt.

Die Fläche jenes Teildreiecks ist aber im Einheitskreis $\sin m \cdot \cos m$ und diejenige des ganzen n-Ecks: $\frac{180^0}{m} \sin m \cos m$, da $n = \frac{360^0}{2\,m} = \frac{180^0}{m}$. Macht man nun $m = 2\,p$, so findet man für die Fläche des 2^1 n-Ecks mit dem Centriwinkel $2\,p$, des neuen Polygons, den Ausdruck $\frac{180^0}{\frac{m}{2}} \sin p \times \cos p$, aber $\cos m = \cos^2 p - \sin^2 p$ und $\sin m = 2 \sin p \cos p$, also $\frac{1}{2} \sin m = \sin p \cos p$ und die Fläche des 2^1 n-Ecks $= \frac{180^0}{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sin m = \frac{180^0}{m} \sin m$ und nach Erweiterung mit $\cos m$ wird die Fläche $\frac{180}{m} \times \frac{\sin m \cos m}{\cos m} = \frac{P}{\cos m}$, wenn P die Fläche des Polygons der Seitenzahl n bezeichnet. Macht man nun $p = 2\,q$, so findet man für die Fläche des Polygons der Seitenzahl $2^2\,n$ den Ausdruck $\frac{180^0}{\frac{m}{4}} \cos q \sin q = \frac{180^0}{\frac{m}{4}} \cdot \frac{\sin m}{4 \cos p}$

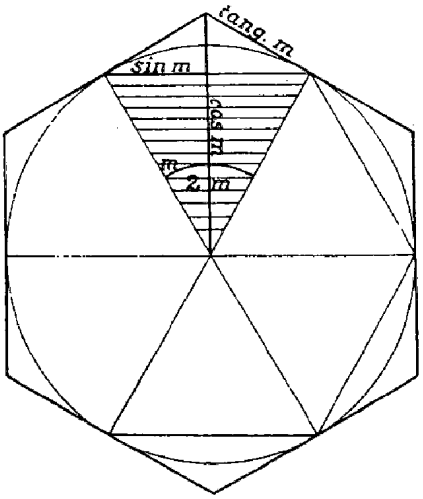


Fig. 7.

$\left(\text{da } \frac{\sin m}{2} = \sin p \cos p, \text{ also } \frac{1}{2} \sin p = \frac{\sin m}{4 \cos p}\right), = \frac{P}{\cos m \cos \frac{m}{2}} = \frac{P}{\cos m \cos \frac{m}{2^1}}$, allgemein geht also der Ausdruck über in:

$\frac{P}{\cos m \cos \frac{m}{2} \ldots \cos \frac{m}{2^{k-1}}}$, indem man für das 2^k n-Eck hat $\frac{180^0}{\frac{m}{2^k}} \times \sin \frac{m}{2^k} \cos \frac{m}{2^k}$; hier ersetzt man wieder $\sin \frac{m}{2^k}$ durch $\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{m}{2^{k-1}}}{\cos \frac{m}{2^k}}$ und dann wieder $\sin \frac{m}{2^{k-1}}$ durch $\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{m}{2^{k-2}}}{\cos \frac{m}{2^{k-1}}}$, bis im Zähler $\sin m$ erscheint und im Nenner $\cos \frac{m}{2}$, also nach k-Substitutionen. Der

Verfasser ersetzt diese allgemeinere Betrachtung durch die Worte: „en continuant de la même manière on trouve la surface d'un polygon d'un nombre 2^k n de côtés égale à $P \times \frac{1}{\cos m \cos \frac{m}{2} \ldots \cos \frac{m}{2^{k-1}}}$."

Wenn k hinlänglich groß ist, so unterscheidet sich die Fläche des Polygons um keine angebbare Größe mehr von der Fläche des Einheitskreises. Um den Umfang zu bekommen, haben wir diese Größe noch mit dem Faktor 2 zu multiplizieren. Bezeichnen wir mit Ensheim die Peripherie durch ϖ, so hat man

$$\frac{2}{2\pi} = \frac{\text{Durchmesser}}{\text{Peripherie}} = \frac{1}{\frac{180^0 \sin m}{m \cos \frac{m}{2} \cos \frac{m}{4} \ldots \cos \frac{m}{2^{k-1}} \text{ e. c. t.}}}$$

Das e. c. t. erweitert hier das Nennerprodukt zu einem unendlichen!

„En procedant de même par rapport au Polygone circonscrit on trouve: $\frac{180^0 \cdot \sin m}{m \cos\left(\frac{m}{2}\right) \cos\left(\frac{m}{4}\right) \ldots \left(\cos\left(\frac{m}{2^k}\right)\right)^2 \text{ e. c. t.}}$.

Und wirklich, wenn man das umgeschriebene Polygon berechnet $= \frac{180}{m}$ tang m, so findet man:

$$\frac{180^0}{2^0 m} \times \frac{\sin \frac{m}{2^0}}{\cos \frac{m}{2^0}} \text{ für das } 2^0 \text{ n-Eck}$$

$$\frac{180^0 \sin \frac{m}{2^1}}{\frac{m}{2^1} \cos \frac{m}{2^1}} \text{ für das } 2^1 \text{ n-Eck}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{180^0 \sin \frac{m}{2^k}}{\frac{m}{2^k} \cos \frac{m}{2^k}} \text{ für das } 2^k \text{ n-Eck; da nun } \sin \frac{m}{2^{k-1}}$$

$= 2 \sin \frac{m}{2^k} \cos \frac{m}{2^k}$, also $\sin \frac{m}{2^k} = \frac{1}{2} \sin \frac{m}{2^{k-1}} : \cos \frac{m}{2^k}$, so hat man nach dieser Formel k Substitutionen vorzunehmen, bis im Zähler

sin m und im Nenner $\cos\frac{m}{2}$ als erster Faktor erscheint, und man gewinnt so für das umgeschriebene 2^k n-Eck den obenstehenden Ausdruck. Setzen wir $\frac{360^0 \sin m}{m} = C$, so folgt die Ungleichung

$$\frac{C}{\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos\left(\frac{m}{4}\right)\ldots\left(\cos\left(\frac{m}{2^k}\right)\right)^2} > \omega > \frac{C}{\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos\left(\frac{m}{2}\right)\ldots\cos\left(\frac{m}{2^{k-1}}\right)}$$

$$\text{Aber } \cos\frac{m}{2} = \left(\frac{1+\cos m}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\ \cos\frac{m}{4} = \left(\frac{1+\cos\frac{m}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}},\ \cos\frac{m}{8} = \left(\frac{1+\cos\frac{m}{4}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$\left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos\frac{m}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+\left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Geht man vom Sechseck aus, so ist $\frac{360^0}{6} = 60^0 = 2\,m$, also $m = 30^0$ und $C = \frac{360^0}{30^0}\sin 30^0 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$, und unsere Formel gibt

$$\omega > \frac{6}{\left(\frac{1+\cos 30^0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos 30^0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \text{e. c. t.}$$

$$\frac{6}{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2+(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \text{ e. c. t.}$$

Jetzt wird mit den komplementären Faktoren in Zähler und Nenner multipliziert, so daß aus:

$$\frac{6}{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}}\Big\}q}$$ wird:

$$\frac{6\cdot 2^q}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{1}\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\,\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}\,\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}\,\dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}\times$$

Anstelle von $k-1$ setzt unser Autor q „en designant par q le nombre d'extractions des racines quarrées binomes" so daß im Nenner nur ein Faktor stehen bleibt, der mit q Extraktionen in den Zähler tritt; im Ausdruck des umschriebenen Polygons steigt die Zahl der Extraktionen auf $q+1$, wovon aber die letzte im Quadrat von $\left(\cos\frac{m}{2^k}\right)^2$ zerstört wird, so daß auch hier die Zahl der Extraktionen in Zähler und Nenner endgültig q wird. Ausgehend vom regulären Dreieck kann man so die Reihe aufstellen:

Reguläres Dreieck	$= 2^0$ 3-Eck		
„ 6-Eck	$= 2^1$ 3-Eck		
„ 12-Eck	$= 2^2$ 3-Eck	beim regulären 96-Eck ist also	
„ 24-Eck	$= 2^3$ 3-Eck	$k=5$, q (vier Extraktionen) $=4$	
„ 48-Eck	$= 2^4$ 3-Eck	und $q+1=5$.	
„ 96-Eck	$= 2^5$ 3-Eck		
. . . . .			

Man kann also die Vergrößerung der Seitenzahl der Polygone und damit der Extraktionen soweit treiben bis der Zähler „devienne une quantité inassignable et que le dénominateur approche en même temps de plus en plus du nombre 2 sans l'atteindre jamais tout à fait;" denn $\sqrt{2+\sqrt{3}}<2$ also auch $\left(2+(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}<2$. [Der Radikand wird immer vergrößert, jedoch so, daß (da der Radikand ein unechter Bruch) das Radikal wachsend sich der 2 nähert.] Ensheim fügt hinzu: „Il est étonnant que nos mathematiciens ne traittent guerre de cette espèce d'infini radical qui peut si bien occuper leur sagacité." Er wußte also nicht, daß Euler für das 2^5 3-Eck = 96-Eck in dem Aufsatz: „De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi (Comment. Acad. Petrop. IX 1737, ersch. 1744, pag. 222, s. pag. 234) die Ungleichung aufgestellt hatte

$$96\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} > \varpi >$$

$$192\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}.$$

In den Opuscula analytica, Petropoli 1783, pag. 345 geht Euler auf die geometrische Bedeutung dieser Formeln nicht ein, „alio loco demonstravimus". (Vergl. Cantor, Vorlesungen IV, pag. 445 und Rudio, Geschichte der Kreisquadratur, pag. 51.) In der ersten Abhandlung hat Euler die Faktorenfolge aufgestellt: $\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi} = 1:\left(\cos\varphi\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{4}\cdot\cos\frac{\varphi}{8}\ldots\right)$, die das Reziprok unserer oben aufgeführten ist, wenn man $2\varphi = m$ setzt, und welche für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jene schon Vieta (Opera mathematica ed. Schooten. Lugd. Batav. 1646, pag. 398—400) Rudio, l. c., pag. 33, sowie Cantor II². S. 595 bekannte Beziehung liefert:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}}\ldots \text{ in inf.}},$$

welche als das erste unendliche Produkt gilt. —

Zu den Problemen der Integralrechnung kehrt unser Autor zurück mit der Aufgabe: „Resoudre l'équation: $a\,y\,d^2y + b\,dy\,dx + p\,(dx)^2 = 0$, p étant une fonction de x sans y." Er setzt $x = L\,y$ und $dx = L\,\dot{y} = \dot{y} - 1$, also $d^2 L\,y = 0$, dann hat man $d^2 y = y\,(\dot{y}-1)^2$ und damit geht die Differentialgleichung über in $a\,y^2(\dot{y}-1)^2 + b\,dx\cdot y\,(\dot{y}-1) + p\,(dx)^2 = 0$ und als Gleichung II. Grades mit der Unbekannten dy: $(dy)^2 + \frac{b}{a}\,dx\,dy = -\frac{p}{a}(dx)^2$,

$$dy = -\frac{b}{2a}dx \pm \sqrt{\frac{b^2(dx)^2}{4a^2} - \frac{p\,(dx)^2}{a}} = \frac{dx}{2a}\left[\left(b^2-4ap\right)^{\frac{1}{2}} - b\right]$$

also $2a\,dy = dx\left\{\left(b^2-4ap\right)^{\frac{1}{2}} - b\right\}$ und $2ay = -bx \pm S.\,dx\left(b^2-4ap\right)^{\frac{1}{2}} + C$.

Das nächste Thema der Betrachtung ist Eulers Satz von den homogenen Funktionen. Bekanntlich wird eine solche durch die Gleichung definiert:

$$f(t\,x,\ t\,y,\ t\,z\ldots) = t^n\,f(x,\ y,\ z\ldots),$$

wo t jede beliebige von Null verschiedene, endliche Zahl bedeuten kann und der Satz selbst lautet: „Multipliziert man die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Funktion nach den einzelnen Variabeln mit diesen Variabeln selbst, so ist die Summe der so gebildeten Produkte die mit dem Homogenitätsgrade vervielfachte Funktion selbst.

$$\frac{\partial f}{\partial x}x + \frac{\partial f}{\partial y}y + \frac{\partial f}{d\,z}z + \ldots = n \cdot f.$$

„Euler hatte den Satz schon 1736 für den Fall einer Funktion von zwei Veränderlichen in Besitz und deutete ihn damals in seiner Mechanik (T. II, Prop. 14, § 106) soweit an, daß, als derselbe von Fontaine nachentdeckt wurde, Eulers Früherecht Anerkennung fand", (vergl. die Fußnote, pag. 322 von Clairauts Abhandlungen: Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre, Histoire de l'Académie des sciences de Paris, Année 1740, pag. 293—323) sagt Cantor im III. Bande der „Vorlesungen", pag. 734. Ensheim aber bemerkt hier: „Le profond Fontaine, dans son calcul intégral, première methode[9]), suppose que dans

[9]) Alexis Fontaine, Traité de calcul différentiel et intégrale, Paris 1770 in 4°. Pour servir de suite aux mémoires de l'Académie Royale des sciences 4 maj. 588 S. „Dies ist, nach Fr. Wilh. Aug. Murhard, Litteratur der mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Zweyter Band, enthaltend die Litteratur der Geometrie und der Analysis (Breitkopf und Härtel) 1798, S. 382, „eigentlich nur ein neuer Titel zu folgender Sammlung: Mémoires donnés à l'Académie Royale des sciences non imprimés dans leur temps par M. Fontaine de cette Académie, à Paris de l'imprimerie Royale 1764, gr. 4°, 588 S. mit Kupfert. „Die darin enthaltenen Abhandlungen gehören nicht insgesamt zur Infinitesimal-Rechnung, daher der letzte Titel richtiger ist. Sie sind: 1. Nouvelle méthode de maximis et minimis. 2. Détermination de la courbe de la moindre action. 3. Détermination de la courbe qui doit embrasser un angle donné pour que l'embrassant toujours par son sommet puisse tracer une autre courbe donnée. 4. Détermination des courbes, qui développent elles-mêmes. 5. Solution du problême des tautochrones. 6. Le calcul intégral. Première méthode. 7. — Seconde méthode. 8. Table pour intégrer les éléments qu'on nomme rationels c'est à dire dans l'expression desquels il n'entre aucun radical. 9. Principes de l'art de résoudre les Problêmes sur le mouvement des corps. 10. Nouvelle méthode d'approximation pour la solution des problêmes qui se reduisent aux quadratures. 11. Sur les logarithmes. 12. Doutes sur la méthode d'approximation, dont M. Clairaut s'est servi pour déterminer le mouvement de la lune autour de la terre et autre route pour la solution de ce problême. 13. Sur le mouvement de la lune autour de la terre d'aprés le système de la pesanteur. 14. Analyse du problême où il s'agit par le moyen de trois observations de déterminer dans le système de M. Newton la

toute fonction différentielle homogène, on peut admettre l'analogie $dx : x = dy : y$. Ce principe, outre qu'il n'est pas évident, paroit être sujet à de grandes difficultés. En effet, si cette supposition étoit permise, on aurait généralement l'èquation $y\,dx = x\,dy$, $2\,y\,dx = y\,dx + x\,dy$ et $S.\frac{(x\,dy + y\,dx)}{2} = \frac{xy}{2} = S.\,y\,dx$. Or on sait, que cette dernière expression n'est qas intégrable, à moins que x ne soit égale à y. Comme l'esprit ne peut pas être satisfait, s'il ne trouve pas l'évidence, on a cru qu'il ne sera pas inutile de donner aux théorêmes fondamentaux de cet auteur une nouvelle démonstration, et la suivante paroît très-féconde. Voici de quoi il s'agit." Vergl. dafür auch den von Lagrange selbst gegebenen Beweis in dem Briefe an Condorcet vom 1. Dezember 1772, „Oeuvres tom. XIV, pag. 6. Es sei F die homogene Funktion von p, x, y, e. c. t., die Dimension sei e, „et qu'en faisant varier toutes les lignes qui entrent dans la composition"

$$dF = A\,dp + B\,dx + C\,dy + \text{e. c. t.}$$

Es ist zu beweisen, daß $eF = Ap + Bx + Cy + \text{e. c. t.}$

Es sei F explizite $= p^a x^b y^c$ e. c. t., also $e = a + b + c + \text{e. c. t.}$, die Summe der Exponenten aller Variabeln. Mittelst der früher gelehrten logarithmischen Differentiation erhält man dann: $dF = A\,dp + B\,dx + C\,dy = F\,d(LF) = F\,d(a\,Lp + b\,Lx + c\,Ly + \text{e. c. t.})$ $= F \cdot \left(\frac{a\,dp}{p} + \frac{b\,dx}{x} + \frac{c\,dy}{y} + \text{e. c. t.}\right)$. Wenn man nun jeden Summanden durch die bezügliche Differenz seines Logarithmus dividiert, so kommt als Resultat: $F \cdot (a + b + c + \text{e. c. t.}) = eF$ und folglich, wenn $A\,dp + B\,dx + C\,dy + \text{e. c. t.}$ ein vollständiges Differential ist, so wird sein Integral $= \frac{Ap + Bx + Cy}{e}$ e. c. t.

[Einerseits ist ja $F = \int A\,dp + B\,dx + C\,dy + \text{e. t. c.}$ und andererseits $F = \frac{Ap + Bx + Cy + \text{e. c. t.}}{e}$.]

Außerdem ist:

---

trajectoire d'une comète en suppossant quelle se meut dans une ellipse infiniment allongée ou dans une parabole. 15. Solution d'un problême sur les jeux de hasard. 16. L'art de résoudre les équations. Vergl. zu diesem selten gewordenen Sammelband Cantor, Vorlesungen III, pag. 856 und C. R. Wallner im XXVII. Abschnitte von Cantor IV, pag. 899.

1. $A = a F p^{-1}$, $B = b F x^{-1}$, $C = c F y^{-1}$, also A, B, C homogene Funktionen vom Grade $e - 1$ oder $a F p^{-1} d p = A d p$; $b F x^{-1} d x = B d x$; $C d y = c F y^{-1} d y$.

2. Wenn man $A d p$ nach x differenziert, d. h. x als einzig variabel annimmt, so kommt $d^x (A d p) = a p^{-1} d p d^x (F) = F a p^{-1} d p b x^{-1} d x$. Ebenso $d^p (B d x) = F b x^{-1} d x a p^{-1} d p$, $d^y (A d p) = F a p^{-1} d p c y^{-1} d y$, $d^p (C d y) = F c y^{-1} d y a p^{-1} d p$ usw. Man hat also allgemein $d^x (A d p) = d^p (B d x)$; $d^y (A d p) = d^p (C d y)$, die sogenannten Bedingungsgleichungen, oder anders ausgesprochen, in jedem vollständigen Differential ist $\frac{d(A)}{d x} = \frac{d(B)}{d p}$, $\frac{d(A)}{d y} = \frac{d(C)}{d x}$; $\frac{d(B)}{d y} = \frac{d(C)}{d x}$.

3. Bringt den Satz von der Umkehrung der Ordnung der Differentiationen, denn $d^y (d^x A d p) = a b p^{-1} x^{-1} d p d x F c y^{-1} d y$, $d^x (d^y A d p) = a c p^{-1} y^{-1} d p d y F b x^{-1} d x$ also $\frac{d(A)}{d x d y} = \frac{d(A)}{d x d y}$; wenn man nochmals nach z differenziert:

$$\frac{d(A)}{d x d y d z} = \frac{d(A)}{d y d x d z} = \frac{d(A)}{d z d y d x}.$$

4. Die bestimmten Koeffizienten A, B, C, sind nach der ersten Differentiation vom Grade $e - 1$, nach der zweiten vom Grade $e - 2$, nach der n-ten, vom Grade $e - n$.

5. Ist $n = e$, so sind diese Faktoren vom Grade Null und die Differenzen von der Dimension e. Wenn man also eine Funktion so oft differenziert als ihr Grad Einheiten hat, dann ist der Koeffizient nach der letzten Differentiation konstant, und das Differential selbst ist das Produkt so vieler partieller Differentiale als Variable in der Funktion enthalten sind, so daß also ihre Dimension = dem Grade e ist.

6. Nach der ersten Differentiation beträgt die Summe der konstanten Koeffizienten $a + b + c + \ldots = e$, nach der zweiten $a b + a c + b c + \ldots = e^{I}$, nach der dritten könnte man daraus bilden $a b c + a b d + b c d + \ldots = e^{II}$ und so fort, so daß die erste Differentiation die Summe der Koeffizienten, die zweite die Summe ihrer Kombinationen zu zweien, die n-te die Summe ihrer n-er Gruppen liefert. Treibt man also die Differentiationen so weit, bis die Möglichkeit, daß die konstanten Koeffizienten noch andere Werte annehmen, ausgeschlossen ist, so wird man für die Exponenten der primitiven Funktion eine Gleichung vom Grade n = der Anzahl

der Differentiationen erhalten, z. B. Es sei $dF = 2Adx + 3Bdy$, der konstante Koeffizient nach der zweiten Differentiation $\frac{d(2A)}{dy} = 6 \ldots$, dann hat man für die Summe der Koeffizienten $m + n = 2 + 3$ und $mn = 6$, Bedingungen, welche die Gleichung II. Grades: $m^2 + 5m + 6 = 0$ ergeben, woraus der Exponent e von $F = \frac{m}{n} = \frac{5 \pm 1}{2} = 2$ oder 3; nach der ersten Differentiation muß aber das Differential dx mit dem Exponenten von x (in der ursprünglichen Funktion) multipliziert sein, also $m = 2$, $n = 3$ und $F = x^2 y^3$.

7. Differentiation unter dem Integralzeichen: $\frac{d^y S.(m\,dx)}{dy} = S.\frac{dm}{dy}dx$. Ist $S.\,m\,dx = F = n\,x^a y^b$, so hat man $\frac{d^y S.\,m\,dx}{dy} = n\,b\,x^a y^{b-1}$, aber der Koeffizient m von dx nach der ersten Differentiation ist $m = n\,a\,y^b x^{a-1}$, ferner $\frac{dm}{dy} =$

$$n\,a\,b\,y^{b-1}\,x^{a-1} \text{ und: } S.\,n\,a\,b\,y^{b-1}\,x^{a-1}\,dx = S.\frac{dm}{dy}dx = \frac{d^y(S.\,m\,dx)}{dy}.$$

Zum Schlusse müssen wir die Anwendung der Methode in der algebraischen Analysis (l'analyse des quantités finies) zeigen.

Es sei zunächst der binomische Satz zu beweisen:

$$(y + a)^m = y^m + \frac{m}{1}y^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}y^{m-2}a^2 + \ldots$$
$$\frac{m(m-1)\ldots(m+1-p)\,y^{m-p}a^p}{1 \cdot 2 \quad \ldots \quad p} + \ldots + a^m$$

Es sei $y + a = y\dot{y}$, dann hat man $y(\dot{y} - 1) = dy = a$. Es ist evident, daß: $(y + a)^2 = y^2 + 2ay + y^2$, also $d(y^2) = y^2(\dot{y}^2 - 1) = y(\dot{y} + 1)dy = y\{2 + (\dot{y} - 1)\}dy = 2y\,dy + (dy)^2 = 2ay + a^2$. Ebenso für die dritte Potenz $d(y^3) = y^2(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)dy$. Aber man sieht sogleich, daß $\dot{y}^2 = 1 + 2(\dot{y} - 1) + (\dot{y} - 1)^2$ also $d(y^3) = y^2\{3 + 3(\dot{y} - 1) + (\dot{y} - 1)^2\}dy = 3y^2dy + 3y(dy)^2 + (dy)^3 = 3y^2a + 3ya^2 + a^3$. Wenn nun dieses Gesetz Giltigkeit hat für ein Binom zur n — ten-Potenz, so gilt es auch für die nächste, die (n + 1) te. In der Tat: $d(y^{n+1}) = y^n(\dot{y}^n + \dot{y}^{n-1} + \dot{y}^{n-2} + \ldots \dot{y} + 1)\,dy = y^n\dot{y}^n dy + y\,d(y^n)$, denn $d(y^n) = y^{n-1}(\dot{y}^{n-1} + \dot{y}^{n-2} + \ldots \dot{y} + 1)dy$.

Aber durch die Annahme der weiteren Giltigkeit unserer oben gefundenen Formel:

$$d(y^n) = y^{n-1}\left\{\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\dot{y}-1)^2 + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1\cdot 2\ldots(p+1)}(\dot{y}-1)^p + \text{e. c. t.}\right\} dy \text{ und ebenso } y^n \dot{y}^n dy$$

$$= y^n dy\{1+(\dot{y}-1)\}^n = y^n dy\left\{1 + \frac{n}{1}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1)^2 + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}(\dot{y}-1)^p \ldots\right\}.$$

Multipliziert man die erstere Gleichung mit y und schreibt zur Addition untereinander:

$$y\,d(y^n) = y^n\left\{\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\dot{y}-1)^2 + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-p)(\dot{y}-1)^p\ldots}{1\cdot 2\ldots p+1}\right\} dy$$

$$y^n dy\{1+(\dot{y}-1)\}^n = y^n\left\{1 + \frac{n}{1}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1)^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(\dot{y}-1)^p}{1\cdot 2\ldots p}\ldots\right\} dy$$

$$d(y^{n+1}) = y^n\left\{\frac{n+1}{1} + n\left[\frac{n-1}{1\cdot 2}+1\right](\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left[\frac{n-2}{3}+1\right]((\dot{y}-1)^2) + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}\left[\frac{n-p}{p+1}+1\right](\dot{y}-1)^p\ldots\right\} dy$$

$$= \frac{(n+1)}{1} y^n a + \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} y^{n-1} a^2 + \frac{(n+1)n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} y^{n-2} a^3 + \ldots \frac{(n+1)n\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p+1} y^{n-p} a^{p+1} + \ldots$$

Da der Satz für die zweite und dritte Potenz evident ist, so gilt vermöge vollständiger Induktion Newtons Theorem also allgemein.

Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzel. Es sei verlangt, die Quadratwurzel von $1+y$, $y<1$, zu bestimmen. Es war $d(x^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{1}{2}}(\dot{x}^{\frac{1}{2}}-1) = \frac{x(\dot{x}-1)}{x^{\frac{1}{2}}(\dot{x}^{\frac{1}{2}}+1)} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(\dot{x}^{\frac{1}{2}}+1)}$. Betrachtet man nun die Variable y als Differenz und setzt dann $x=1$, so kommt, da $y = x(\dot{x}-1) = (\dot{x}-1)_{x=1}$ oder $\dot{x} = 1+y$, $d(1+y)^{\frac{1}{2}} =$

$\sqrt{1+y}-\sqrt{1}=\frac{y}{1^{\frac{1}{2}}(y+1)^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{y}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}$. Schreibt man den Nenner

$\sqrt{1+y}+\sqrt{1}=\frac{(\sqrt{1+y}+\sqrt{1})^2}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}=\frac{1+y+2\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}=$

$\frac{2(\sqrt{1+y}+\sqrt{1})+y}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}=2+\frac{y}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}$ („en continuant la même operation au dénominateur, cette difference devient $\frac{y}{2+\frac{y}{(y+1)^{\frac{1}{2}}+1}}$; par conséquent, en répétant le même procédé, que l'on peut pousser aussi loin que l'on voudra on aura la fraction continue $\frac{y}{2+\frac{y}{2+\frac{y}{\text{e. c. t.}}}}$") und $\sqrt{1+y}=1+\frac{y}{2+\frac{y}{2+\frac{y}{2+y\,\text{e. c. t.}}}}$. Ensheim erläutert dann das Gesetz der Näherungsbrüche: sei ein solcher $\frac{m}{n}$, so ist der folgende $\frac{m}{n+\frac{y}{2}}=\frac{2m}{2n+y}$ und berechnet als Musterbeispiel

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{27}+\frac{12}{9}+\frac{16}{3}}{32+\frac{32}{3}+\frac{6}{9}}=1+\frac{\frac{1+36+144}{27}}{\frac{864+288+18}{27}}=1+\frac{181}{1170}=$$

1,154700 („fraction, qui ne diffère pas d'un millionième de la véritable racine"). Er setzt also den Wert von $y=\frac{1}{3}$ in den sechsten Näherungsbruch ein, den er sich zu $1+\frac{16y+12y^2+y^3}{32+32y+6y^2}$ richtig berechnet hatte. (Vergl. hierzu die allgemeine Methode, die Lagrange in der Theorie des fonctions analytiques einschlug. Erläutert von Vivanti in Cantor IV pag. 665.)

Anwendung der Methode auf Gleichungen (pag. 23—27) der Schrift.

Die Gleichung II. Grades sei in der Form gegeben $x^2+px+q=o$. Die eine Wurzel sei mit x, die andere mit $x\dot{x}$ bezeichnet. Durch Differenzenbildung kommt $x^2(\dot{x}^2-1)+px(\dot{x}-1)=0$ und nach Division mit $x(\dot{x}-1)$, $x(\dot{x}+1)+p=o$ und $x\dot{x}=-p-x$. Daraus folgt:

1. Die Summe der Wurzeln in der Gleichung II. Grades ist dem Koeffizienten der ersten Potenz der Unbekannten gleich genommen mit entgegengesetztem Zeichen.

2. Die Wurzeln sind entweder beide reell oder beide imaginär, sonst könnte ihre Summe nicht reell sein.

3. Wenn die Summe der beiden Wurzeln $-p$ ist, so sind diese $x+\frac{p}{2}+m$ und $x+\frac{p}{2}-m$, multipliziert man die beiden Faktoren miteinander und vergleicht mit der gegebenen Gleichungsform, so ist $\left(x+\frac{p}{2}+m\right)\left(x+\frac{p}{2}-m\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-m^2$ oder $m=\left(\frac{p^2}{4}-q\right)^{\frac{1}{2}}$, also sind die beiden gesuchten Faktoren $x+\frac{p}{2}+\left(\frac{p^2}{4}-q\right)^{\frac{1}{2}}$ und $x+\frac{p}{2}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)^{\frac{1}{2}}$.

Eine Gleichung III. Grades habe die Form $x^3+px+q=0$. Durch Differenzenbildung kommt: $x^3(\dot{x}^3-1)+px(\dot{x}-1)=0$ und nach Division mit $x(\dot{x}-1)$ hat man: $x^2(\dot{x}^2+\dot{x}+1)=-p$; löst man letztere Gleichung zweiten Grades, so kommt: $x\dot{x}=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2-4x^2-4p}{4}}$, also sind die beiden andern Wurzeln $x\dot{x}=\frac{-x\pm\sqrt{-4p-3x^2}}{2}$ und die drei Werte der Unbekannten x, $\frac{-x+(-4p-3x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$, $\frac{-x-(-4p-3x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$. Daraus folgt:

1. Die Summe der drei Wurzeln ist Null = dem Koeffizienten des fehlenden quadratischen Gliedes.

2. Die Summe der Kombinationen der Wurzeln zu je zweien ist p, Koeffizient des dritten Terms der gegebenen Gleichungsform.

3. Das Produkt der drei Wurzeln ist $-q$, der Koeffizient des vierten Terms mit entgegengesetztem Zeichen in dieser Gleichungsform.

4. Die Gleichung III. Grades hat immer eine reelle Wurzel, die beiden andern werden reell sein, wenn $-4p-3x^2$ positiv ist (wenn x die reelle Wurzel bezeichnet); dazu ist erforderlich, daß p negativ ist und $>\frac{3x^2}{4}$. Wenn also p positiv ist, so wird die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln aufweisen.

5. Löst man die Gleichung, indem man $x = 2a = (a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b})$ annimmt und $(a + \sqrt{b})^3 + (a - \sqrt{b})^3 = -q$ voraussetzt und $a^2 - b = -\frac{p}{3}$, so hat man $x^2 = 4a^2$, also $3x^2 = 12a^2 = 12b^2 - 4p$, somit die beiden andern Wurzeln $\frac{-x \pm (-4p - 3x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} = -a \pm b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-3}$. Damit diese reell seien, muß $b^{\frac{1}{2}}$ imaginär oder Null sein. Aber aus dem Produkt der drei Wurzeln $(a^2 + 3b)\,2a = -q$, also $4a^6 + 24a^4b + 36a^2b^2 = q^2$ oder $a^6 + 6a^4b + 9a^2b^2 = \frac{q^2}{4}$ und aus $a^2 - b = -\frac{p}{3}$, $a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3 = -\frac{p^3}{27}$ oder mit Zeichenwechsel $-a^6 + 3a^4b - 3a^2b^2 + b^3 = \frac{p^3}{27}$, also $9a^4b + 6a^2b^2 + b^3 = (3a^2\sqrt{b} + b\sqrt{b})^2 = \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$ oder $(3a^2 + b)\,b^{\frac{1}{2}} = \pm \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$. Ist also letzterer Ausdruck weder Null noch negativ, so ist es b auch nicht, und die Gleichung hat zwei imaginäre Wurzeln. Ist aber $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ negativ, so ist $b^{\frac{1}{2}}$ imaginär, und die drei Wurzeln der Gleichung $2a$, $-a + b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-3}$ und $-a - b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-3}$ sind alle drei reell. (Cardanische Formel!)

Die allgemeine Gleichung IV. Grades ist $x^4 + px^3 + qx^2 + \gamma x + s = 0$. Durch Differenzenbildung und Division mit $d(x)$ kommt wieder $x^3(\dot{x}^3 + \dot{x}^2 + \dot{x} + 1) + px^2(\dot{x}^2 + \dot{x} + 1) + qx(\dot{x} + 1) + \gamma = 0$ (A). Durch Differenzenbildung in (A), indem man einzig $\dot{x}$ als variabel betrachtet, und Division der neuen Differenz mit $x\,d(\dot{x})$ erhält man $x^2(1 + \dot{x} + \dot{x}^2 + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}^2 + px(1 + \dot{x} + \dot{x}\ddot{x}) + q = 0$ (B). Bildet man in (B) wieder die Differenz, indem man nur $\dot{x}$ variieren läßt, und teilt alsdann durch $x\dot{x}\,d(\ddot{x})$, so hat man $x(1 + \dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x}) + p = o$ (C). Geht man zur Gleichung (B) zurück, so findet sich, indem man den Wert von p substituiert und möglichst reduziert: $x^2(\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}^2\dddot{x}) = q$. Substituiert man die Werte von p und q in der Gleichung (A) und reduziert, so hat man $x^3\dot{x}^2\ddot{x}(1 + \dddot{x} + \ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x}) = -\gamma$; endlich, führt man die Werte p, q, γ in die gegebene Gleichung ein, so entnimmt man ihr $x^4\dot{x}^3\ddot{x}^2\dddot{x} = s$. Es ist aber $x(1 + \dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x})$ die Summe der Wurzeln, der Ausdruck: $x^2(\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}$

$+\dot{x}^2\ddot{x}\dddot{x}+\dot{x}^2\ddot{x}^2\dddot{x})$ die Summe der Kombinationen der Wurzeln zu je zweien, der Ausdruck $x^3\dot{x}^2\ddot{x}(1+\dddot{x}+\ddot{x}\dddot{x}+\dot{x}\ddot{x}\dddot{x})$ die Summe ihrer Dreiergruppen; endlich $x^4\dot{x}^3\ddot{x}^2\dddot{x}$ das Produkt der vier Wurzeln unter sich; somit ist die Summe der Wurzeln einer Gleichung IV. Grades $= -p$, die Summe ihrer Produkte zu zweien $= q$, die Summe ihrer Dreiergruppen $= -r$ und das Produkt aller vier Wurzeln $= s$. — Ensheim fährt fort „C'est Descartes qui aperçut le premier les propriétés des coéfficiens des équations (folgt die Regel!); wir wissen aber heute, daß Descartes zuverlässig die Invention nouvelle en Algèbre von Albert Girard von 1629 kannte, wo der Satz schon ausgesprochen ist. (Vergl. Cantor, Vorlesungen Bd. II_2 pag. 795.) Und weiter bei Ensheim: „Comme les livres élémentaires ne démontrent pas ces verités dans toute la rigeur mathematique, il n'est pas inutile d'en faire voir l'évidence par la méthode que nous exposons ici." Bezeichnen wir die Summe irgendwelcher Größen durch ${}^1R$, die ihrer Kombinationen zu zweien durch ${}^2R\ldots$, die ihrer $n-$er Gruppen durch ${}^nR$ und gesellen wir unter diese Größen die Einheit („si à ces grandeurs on ajoute l'unité, et que l'on la fasse entrer dans toutes leurs combinaisons comme partie coopérante"), so wissen wir aus der Kombinationslehre, daß $1+a+b+c+e.\,c.\,t. = {}^1R$, die Summe ihrer Produkte zu zweien $= {}^1R+{}^2R$, die ihrer Dreiergruppen $= {}^2R+{}^3R$ usw. Nun betrachten wir die Gleichung $x^n+A\,x^{n-1}+B\,x^{n-2}+\ldots K\,x^{n-2p}+\ldots Q\,x+S=0$ und nehmen an, daß der Satz über die Zusammensetzung der Koëffizienten für die Gleichung vom nächst niederen Grade $n-1$ gilt. Dann gilt er auch für die Gleichung $n-$ten Grades. In der Tat, nehmen wir die Differenzenbildung in der gegebenen Gleichung vor und dividieren durch $x^{n-1}\,d(x)$, so kommt die Gleichung:

$$\dot{x}^{n-1}+\dot{x}^{n-2}\left(1+\frac{A}{x}\right)+\dot{x}^{n-3}\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}\right)+\dot{x}^{n-4}\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}\right)+\ldots$$

$$\dot{x}^{n-2p-1}\left(1+\frac{A}{x}+\ldots\frac{K}{x^p}\right)+e.\,c.\,t.=0.$$ Nach unserer Annahme ist aber: $-1-\frac{A}{x}={}^1R(\dot{x}^{n-1})$, wo ${}^1R(\dot{x}^{n-1})$ die Summe der Wurzeln der Gleichung $n-1$ ten-Grades ist und die analogen Bezeichnungen gelten. Und seine weiteren Schlüsse sind: da ${}^1R(\dot{x}^n)=1+{}^1R(\dot{x}^{n-1})=-\frac{A}{x}$, so folgt ${}^1R(x^n)=-A$; ${}^2R(\dot{x}^{n-1})=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}=-{}^1R(\dot{x}^{n-1})+\frac{B}{x^2}$; also ${}^1R(\dot{x}^{n-1})+{}^2R(\dot{x}^{n-1})={}^2R(\dot{x}^n)=\frac{B}{x^2}$ und ${}^2R(x^n)=B$; so-

dann ${}^3R(\dot{x}^{n-1}) = -\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}\right) = -{}^2R(\dot{x}^{n-1}) - \frac{C}{x^3}$, also ${}^2R(\dot{x}^{n-1}) + {}^3R(\dot{x}^{n-1}) = -\frac{C}{x^3} = {}^3R(\dot{x}^n)$ und ${}^3R(x^n) = -C$. Ganz allgemein ${}^{2p}R(\dot{x}^{n-1}) = \left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\ldots\frac{K}{x^p}\right) = -{}^{2p-1}R(\dot{x}^{n-1}) + \frac{K}{x^{2p}}$, also ${}^{2p-1}R(\dot{x}^{n-1}) + {}^{2p}R(\dot{x}^{n-1}) = {}^{2p}R(\dot{x}^n) = \frac{K}{x^{2p}}$ und ${}^{2p}R(x^n) = K$. Da nun der Satz über die Zusammensetzung der Koëffizienten für die Gleichung IV. Grades erwiesen ist, so ist er durch dieses Verfahren der Methode vollständiger Induktion ganz allgemein erwiesen.

Endlich wird die Methode zur Auffindung einer Doppelwurzel und des Kriteriums dafür gebraucht. Die vorgelegte Gleichung sei $x^m + p\,x^{m-1} + \ldots q\,x + \gamma = 0$. Bildet man die Differenz und teilt durch $d(x)$, so findet sich $x^{m-1}(\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + \ldots + 1) + p\,x^{m-2}(\dot{x}^{m-2} + \ldots \dot{x} + 1) + \ldots q = 0$. Aber für eine Doppelwurzel ist notwendig $\dot{x} = 1$, also wird die Differenzengleichung $m\,x^{m-1} + (m-1)\,p\,x^{m-2} + \ldots + q = 0$ und man hat zwei Gleichungen, aus welchen man x eliminieren kann und unter den Koëffizienten damit die Bedingungsgleichung für eine Doppelwurzel auffinden. Multipliziert man die gegebene Gleichung mit dem höchsten Koëffizienten m und subtrahiert davon die Differenzengleichung, nachdem man sie mit x multipliziert, so kommt man zur Gleichung $p\,x^{m-1} + 2\,p'\,x^{m-2} + 3\,p''\,x^{m-3} + \ldots (m-1)\,q\,x + m\,\gamma = 0$, in welcher die Zahlenkoëffizienten in derselben arithmetischen Progression abnehmen, in welcher die Exponenten wachsen. Die vorgelegte Gleichung sei $x^3 + p\,x^2 + q\,x + \gamma = 0$; bildet man die Differenz, teilt durch $d(x)$, so erhält man für $\dot{x} = 1$, $3\,x^2 + 2\,p\,x + q = 0$ (B). Die Elimination von x vollzieht sich in folgenden Schritten: Multipliziert man diese mit x und subtrahiert sie von der mit 3 multiplizierten ursprünglichen Gleichung, so kommt $p\,x^2 + 2\,q\,x + 3\,\gamma = 0$ (C). Nun gibt $3\,(C) - p \times (B) = (6\,q - 2\,p^2)\,x + 9\,\gamma - q\,p = 0$ (D) und $(6\,q - 2\,p^2)\,[(B)] - 3\,x\,[(D)] = (15\,p\,q - 4\,p^3 - 27\,\gamma)\,x + q\,(6\,q - 2\,p^2) = 0$ (E). Endlich $-(6\,q - 2\,p^2)\,[(E)] + (15\,p\,q - 4\,p^3 - 27\,\gamma\,[(D)] = 0 = q\,(6\,q - 2\,p^2)^2 - (9\,\gamma - q\,p)\,(15\,p\,q - 4\,p^3 - 27\,\gamma) = 0$, die Bedingungsgleichung, welche sich auf $27\,\gamma^2 + 4\,p^3\,\gamma - 18\,p\,q\,\gamma - p^2\,q^2 + 4\,q^3 = 0$ reduziert, und welche $x = \frac{q\,p - 9\,\gamma}{6\,q - 2\,p^2}$ involviert [zur Gewinnung der Bedingungsgleichung hätte man ja auch den Wert

von x aus (D) berechnen und in (E) einsetzen können]. Als Beispiel dient $x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = 0$, man findet dann $x = \frac{pq - 9r}{6q - 2p^2}$ $= \frac{168 - 162}{126 - 128} = \frac{6}{-2} = -3$, und die ursprüngliche Gleichung wird $(x+3)^2(x+2) = 0$ mit der Doppelwurzel $x = -3$ und der einfachen $x = -2$.

Ensheim beschließt seine Schrift mit den Worten: „Ces exemples suffisent pour faire voir la facilité que nous donne cette méthode dans la solution des problêmes; c'est maintenant aux mathématiciens d'en juger."

Überblick über die Publikation von Lagranges Briefen.

Wir haben zu unterscheiden a) die in die „Oeuvres" verarbeiteten und b) die nach 1892 ans Licht getretenen Briefe. Unter a) wieder die großen Briefwechsel und die vereinzelten Stücke und kleineren Gruppen.

Den ganzen XIII. Band füllt die Korrespondenz mit D'ALEMBERT. Im XIV. hat die Korrespondenz mit CONDORCET (Geschenk von Mme O'CONNOR, Tochter CONDORCETS, an das Institut, worunter sich auch die an D'ALEMBERT gerichteten Originale befanden, welcher sie CONDORCET geliehen hatte), mit LAPLACE und EULER Platz gefunden. Von dem Briefwechsel mit CONDORCET sind aber nur noch LAGRANGES Briefe einseitig vorhanden, die CONDORCETS, des Girondisten, mußte LAGRANGE in den Stürmen der Revolution vernichten. Die Korrespondenz mit LAPLACE wurde von Mme DE COLBERT-LAPLACE, LAPLACES Enkelin, dem Institut geschenkt. Die zielbewußte Publikation setzte nach 1870 ein. So wurde der Brief an FAGNANO vom 24. Dezember 1755 publiziert von M. A. GENOCCHI in tom. IX der Atti de l'Académie des sciences de Turin (zuerst war er von MAMIANI in dessen „Elogi", p. 133 bis 135, gedruckt worden). Der in der Ausgabe der „Oeuvres" folgende Brief an ZANOTTI wurde von Prof. TEZA an BELTRAMI mitgeteilt und in den Comptes rendus der Akademie von Bologna gedruckt 1873/74, pag. 97, und in den Atti der Turiner Akademie reproduziert (mai-juin 1874, pag. 758). Von GENOCCHI wurde in

jenem IX. Bande der Turiner Atti auch der erste Brief an LORGNA vom 25. Juni 1770 und der an LORGNA vom 25. Mai 1781, ebenso der eingangs genannte an O. GHERLI vom 5. Juli 1776 herausgegeben, pag. 760 u. 761. Band XIV dieser Atti enthält auch einen interessanten Kommentar von M. A. GENOCCHI über den Brief an LAGARDE vom 25. nivose an IX. Die Briefe an LORGNA wurden mit den andern an diesen Korrespondenten wiedergegeben vom Fürsten BONCOMPAGNI[10]) in tom. VI, mars 1873, seines „Bulletino delle scienze mathematiche et fisiche", Roma 1873, pag. 131: Dieci lettere inedite di Lagrange. Fürst B. BONCOMPAGNI gab außerdem noch drei selbständig erschienene Publikationen von LAGRANGE-Briefen:

1. Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler tirées des Archives de la salle des Conférences de l'Académie impériale des Sciences de Petersbourg, Saint Petersbourg 1877, 52 pages in —4° (expédition pour la confection des papiers de l'État, atelier héliographique dirigé par G. Scamoni). (Die übrigen Briefe der Korrespondenz mit EULER entstammen dem 4. Manuskriptbande in —4°, oder wurden von FUSS 1862 veröffentlicht in Opera posthuma mathematica et physica Euleri, 2 vol. in 4°, par P. H. FUSS und N. FUSS.)

2. Deux lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange tirées de la Bibliothèque royale de Berlin (Collection Meusebach portefeuille 21 et Collection Radowitz Nr. 4952), Berlin 1878, 8 pages in 4°. (Im Catalogo della Bibliotheca BONCOMPAGNI Nr. 680 und 681 [letzte Seite], je 108 bzw. 114 Exemplare der Separatausgabe.)

Der eine in Photolithographie wiedergegebene ist der von Frau VON LAPLACE im Jahre 1843 an ALEXANDER VON HUMBOLDT geschenkte LAGRANGE-Brief an LAPLACE, s. d., der andere der an LAGARDE vom 25. nivose an IX.

3. Lettera inedita di Gius. L. Lagrange pub. (in facs.) da B. BONCOMPAGNI, Firenze 1879 in —4° (im Catalogo della Bibliotheca BONCOMPAGNI, Roma 1898, Abteil. Autographie, Nr. 681, befanden sich noch 131 Kopien des Separatabzugs); auf ibid. Nr. 683: Lettera di L. DE LA GRANGE Tournier Torinese al Sign. Conte GIULIO CARLO DA FAGNANO March. de TOSCHI, Torino 1754 in 4° (noch 400 Kopien des Separatabzugs) bezieht sich die An-

[10]) Der Bearbeiter war GIAMBATTISTA BIADEGO.

gabe von LORIA im III. Bande der neuen FAGNANO-Ausgabe, S. 181, Note (3): „Questa lettera ebbe parrechie ristampe, che B. BONCOMPAGNI ha enumerate con la consueta sua scrupulosa diligenza nell'articolo: Intorno a dieci lettere in lingua italiana di G. L. LAGRANGE (Bullet. di bibl. e. stor., tomo VI, 1874, pag. 142—152 e 559—344). Più tardi fu riprodotta in Oeuvres de LAGRANGE, tome VII, pag. 1583, Paris 1877)." (Ersterer zu Florenz publizierte Brief ist an CANTERZANI, Sekretär der Akademie von Bologna, gerichtet und vom 6. April 1773 datiert.)[11])

CH. HENRY publizierte 1886 im tom. IX des Bulletino BONCOMPAGNI sechs LAGRANGE-Briefe, die ihm von JOSEPH MOLINARI, JOSEPH CAMPORI von Modena, M. BORBONESE, Sekretär am Stadtmuseum in Turin, mitgeteilt wurden. Den 4. an GRIMALDI entnahm er der Storia dell'Accademia Luchese, Lucca 1881, tom. I, pag. 278, der 5. und 6. stammen wieder von M. BORBONESE und VINC. PROMIS, letztere beiden sind an PAROLETTI gerichtet.

Zwei Briefe, darunter der an SOPHIE GERMAIN, wurden von HENRY in der Revue philosophique publiziert.

Die beiden Briefe von LAGRANGE an GAUSS vom 31. Mai 1804 und 17. April 1808 wurden von E. SCHERING an LUDOVIC LALANNE, den Herausgeber des XIV. Bandes der Oeuvres, mitgeteilt.

Wir haben nun die wichtigsten Vorarbeiten zu letztgenanntem Bande kennen gelernt.

b) Nach 1892 sind ans Licht gekommen:

1. Die in der Einleitung unserer Abhandlung genannten Briefe an PAOLI, herausgegeben 1897 von PIETRO RICCARDI.

2. Die im Catalogo della Bibliotheca BONCOMPAGNI, Roma 1898 (Autografi), S. 15, aufgeführten Autographen: Nr. 356 an LAGRANGES Vater, vom 3. Dez. 1771, 3 pag., den Tod zweier Brüder und der Mutter betreffend. Nr. 357: Berlin, 24. Mai 1768, 3 pag., ein Thema für die Berliner Akademie betreffend. Nr. 358: Paris, 18. Mai 1792, Dank für Ernennung zum Mitglied der Münzkommission. Nr. 359: ein Blatt mit algebraischen Rechnungen. Nr. 360: sign. Quittung. Nr. 361: Brief an PRONÉ, 3 pag. Nr. 362: Brief an DENON vom 24. August 1803, Privatbrief.

---

[11]) Vergl. zu 1. CANTORS ausführliches Referat in der Zeitschrift für Mathem. u. Physik, Histor.-Literar. Abteilung, Bd. XXIII, S. 1—24. Zu 2. u. 3. sein Referat ebenda, Bd. XXIV, S. 182—184.

Nr. 363: Dankbrief vom 20. Dezember 1806 an Mr. VALANT für die Ernennung zum Mitglied des Atheneums der franz. Sprache, 2 pag. Nr. 364: an FORMEY vom 9. Nov. 1775, Dank für einen übersandten Band. Nr. 365: Brief vom 5. Oktober 1806 in dritter Person an Prof. ALDINI. Nr. 366: Brief, sign. L. G., an den Buchhändler LAGARDE in Berlin, Paris 6. brumaire an X, 3 pag. Nr. 367: ist ediert Oeuvres XIV, pag. 289, 7. ventose an VI. Nr. 368: ähnl. Aktenstück mit LAGRANGES und JOS. CHENIERS Unterschrift, Paris, 4. ventose an VII, Vorschlag von Prof. BOUILLON-LAGRANGE zum Professor der Physik an der Polytechn. Schule und VINCENT zum Professor der Pädagogik. Nr. 369: Paris, 20. pluviôse an VII, an die provisorische Regierung von Piémont, Dank für ein Dekret zugunsten seines Vaters, 1 pag. Nr. 370: Brief, Berlin, 27. Jan. 17?4, 2 pag., aus der Samml. Bovet. Nr. 371: Brief vom 9. Mai, Paris, 1 pag. in 12°. Nr. 372: ist ediert Oeuvres XIV, pag. 285, 25. prairial an II. Nr. 372: ebenfalls Oeuvres XIV, pag. 301, vom 15. Jan. 1809. Nr. 374: an seinen Vater vom 24. März 1787 aus Berlin. Nr. 375: ebenfalls an seinen Vater, Berlin, 16. Jan. 1767. Nr. 376: al „Ministre de l'interieur", Paris, 15. nîvose an II, 1 pag.

3. Die in der Einleitung von uns erwähnten Briefe in der neuen FAGNANO-Ausgabe.

4. Unser Brief an ENSHEIM.

5. Ein Brief im Auszug an GUYTON DE MORVEAU, den bekannten Chemiker und Mitarbeiter von LAVOISIER und BERTHOLET, den CRELLE im Auszug so übersetzt. GUYTON hatte LAGRANGE auf einige Stunden das CHLADNISCHE Werk geliehen. Beim Zurücksenden schrieb ihm LAGRANGE: „Ich will versuchen, es mir zu verschaffen, um es mit Muße zu studieren und zu sehen, ob sich diese Versuche auf eine Art von Theorie bringen lassen. Die auf den kreisförmigen Scheiben sich bildenden Linien, welche durch die Gestalt bestimmt werden, welche der Sand, womit man die Scheiben bedeckt, ehe man sie mit Bogen streicht, annimmt, sind ebenso wie Ruheorte in den harmonischen Tönen der Violine und der Trompete; aber der Zusammenhang dieser Linien mit den zugehörigen Tönen ist eine ebenso sonderbare als theoretisch schwer zu erklärende Erscheinung." In einem Briefe vom 12. ventose an V beschäftigt er sich mit HUTTONS Lehrbuch der Artillerie und äußert sich (wieder nach CRELLE) über dasselbe so: „Dieses Buch reizt meine Neugierde, weil die Versuche sehr

genau zu sein scheinen und wenigstens der Verfasser zu allgemeinen Resultaten gelangt ist. Besonders wünsche ich zu sehen, was er über die Länge der Geschütze gefunden hat. Das ist der Punkt, welchen DARCY untersuchen wollte, worüber er aber nichts Entschiedenes finden konnte." In einem andern Briefe sagt er: „Ich beschäftige mich, diese Versuche zu prüfen und zu sehen, inwiefern sie mit einer genaueren Theorie als die des Verfassers vereinbar sind".

Auch diese Briefe scheinen LUDOVIC LALANNE entgangen zu sein!

Von Biographien Lagranges sind uns bekannt geworden:

Aus dem Jahre seines Todes 1813:

1. LEMERCIER, L. J. N., Chant dithyrambique aux jeunes gens qui ont rendu les derniers honneurs à Delille. Considerations sur la mort de Lagrange et sur celle de Delille, Paris 1813.

2. VIREY, J. J., et POTEL, F. A., Précis historique sur la vie et la mort de J. L. Lagrange, Paris, Vᵉ Courcier, 1813, 22 pag. in —4⁰.

3. COSSALI, Elogio di Luigi Lagrange, Padova 1813, in 8⁰.

4. DELAMBRE, Éloge, gelesen am 3. Januar 1814 in der Pariser Akademie, deutsch von A. L. CRELLE, Nachricht von Lagranges Leben und Schriften im I. Bande seiner deutschen Übersetzung von Lagranges Mathematischen Werken, Berlin 1823; ebenda auch Notizen von GUYTON MORVEAU (s. oben!), ein verdeutschter Auszug aus der Schrift von VIREY und POTEL, und „Einige Zusätze zu vorstehenden Nachrichten von Lagranges Leben" von A. L. CRELLE.

5. GREGORY, DE, Necrologia dei tre Piemontese illustri Bodoni, Denina e Lagrange morti nel 1813 (letta dal praesidente De Gregory all'Academia in Roma, marzo 1814, e lo stesso anno stampata in Vercelli, in 8⁰.

6. MAGISTRINI, Discorso in lode di Luigi Lagrange, Bologna 1819.

7. MARTINI, LORENZO, Cenni biographici, Torino 1840, in 8⁰.

8. UGONI, CAMILLO, Della letteratura Italiana nella seconda metà del seculo XVII, opera posthuma Milano col tipi di Giuseppe di Gio 1856, Vol. II, pag. 243—364: Giuseppe-Luigi Lagrange, Sua Vita, Sue Opere, Sua Indole. UGONI, pag. 261, erwähnt ein

Elogium auf den jugendlichen LAGRANGE in Briefform von BOCCARDI. UGONI sagt: „Questa ed altre date della presente Vita tratte dalle note aggiunte ad un epistola diretta all'A., rectificano le date erronee di parecchi biografie di Lagrange. Quest'Epistola in versi sciolti, rara oggidì fu praesentata manoscritta all'A. la viglia della sua partenza da Torino ed elegantemente stampata l'anno appreso in Bologna col titolo: Al Chiarissimo signor Luigi de la Grange, Torinese, direttore della classe mathematica nella reale Academia delle scienze e belle lettere di Berlino. Epistola di un suo concittadino ed amico, Bologna, per Lelio della Volpe 1767, in 8°." (Vgl. dafür auch den Catalogo della Bibliotheca BONCOMPAGNI Nr. 733, pag. 110, Facsimile del vol presso la Bibl. Naz. di Brera segnato X. R. IV, 2, in 8° cart., und unter Nr. 696 ein Druckexemplar dieser seltenen Schrift.)

9. BRIANO, G., Contemporanei Italiani, Nr. 24, 1861, in 16°.

10. FORTI, A., Vita ed opere di Luigi Lagrange (discorso), Pisa 1868, 2. ed. 1869.