Heidelberger Akademie der Wissenschaften

Mathematische Abhandlungen

Autor: **Koenigsberger, Leo** (1837 – 1921)

Titel: **Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung**

Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse : Abt. A ; 1921, 2

Der Einfachheit der Darstellung wegen werden in der vorliegenden Arbeit zunächst nur Systeme von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln behandelt. Nach Einteilung derselben in solche, von denen beide Differentialgleichungen oder nur eine derselben eine der abhängigen Variabeln enthält, werden nach Definition der einem System zugehörigen Differentialgleichungen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Vollständigkeit eines Integralsystems mit vier willkürlichen Konstanten aufgestellt und die Integrale mit zwei willkürlichen Funktionen von zwei variabeln Parametern aus diesen hergeleitet. Die weitere Untersuchung beschäftigt sich mit den Integralfunktionen eines solchen Systems zum Zwecke der Auffindung der Integrale mit mehreren willkürlichen konstanten Parametern aus Integralsystemen damit verbundener Differentialgleichungen, welche keine willkürlichen Parameter besitzen. Diese Untersuchungen werden sodann zur Ausdehnung der Abelschen Theoreme über Quadraturen algebraischer Funktionen auf die Integralfunktionen linearer partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung verwertet und die Frage nach dem algebraischen Zusammenhang zwischen Integralfunktionen partieller Differentialgleichung erörtert.

(Zsfassung aus: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften / Jahresheft 1921, S. III - IV)

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1921. 2. Abhandlung

Über partielle Differentialgleichungssysteme erster Ordnung

Von

† LEO KOENIGSBERGER
in Heidelberg

Eingegangen am 23. Dezember 1920

Heidelberg 1921
Carl Winters Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 1640

Es mögen den nachfolgenden Betrachtungen über *Differentialgleichungssysteme* einige Bemerkungen vorausgeschickt werden, welche die Entwicklung gewisser Eigenschaften *einer* partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zum Gegenstand haben und zur Erläuterung der späteren Untersuchungen dienen sollen.

Zu einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(1) \qquad f\left(x_1, x_2, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

nennen wir eine andre ebensolche

$$(2) \qquad \varphi\left(x_1, x_2, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

eine *zugehörige*, wenn sich durch Elimination einer der diesen Gleichungen gemeinsamen Größen y, $\partial y/\partial x_1, \dots \partial y/\partial x_n$ eine in allen übrigen Größen identische Gleichung ergibt, wie dies z. B. der Fall ist, wenn die Gleichung (2) die Form hat:

$$\varphi = \sum_{(\alpha)}^{(\alpha=0)} \Omega_\alpha\left(x_1, x_2, \dots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) f^\alpha = 0\,,$$

worin Ω_α für ganze positive α beliebige Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und $\alpha = 0$ bei der Summation ausgeschlossen ist; es wird daher nach Herleitung der gemeinsamen Größe aus einer der beiden Gleichungen und Substitution dieses Wertes in die andre letztere in eine in allen übrigen Größen identische Gleichung übergehen, also unendlich viele Wertekombinationen von $y, \partial y/\partial x_1, \dots \partial y/\partial x_n$ den Gleichungen (1) und (2) genügen, woraus ersichtlich, daß, auch wenn man irgend zwei *beliebige* gemeinsame Größen zwischen (1) und (2) eliminiert, sich stets eine in den übrigen Größen identische Gleichung ergeben wird. *Die Zugehörigkeit ist also nur für* e i n e *gemeinsame Größe festzustellen.*

Zugleich folgt aber, *daß, wenn eine Differentialgleichung* (1) *mit einer zugehörigen* (2) *ein Integral gemein hat, die Gleichungen alle Integrale gemeinsam besitzen.* Denn ist y_1 ein den beiden Differentialgleichungen (1) und (2) gemeinsames Integral, und $\partial y_1/\partial x_\alpha$ eine den Gleichungen (1) und (2) gemeinsame Größe, so wird, wenn aus (1)

$$(3)\qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_\alpha} = \omega_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_{\alpha-1}}, \frac{\partial y_1}{\partial x_{\alpha+1}}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right)$$

folgt, sich aus der Definition der Zugehörigkeit die in allen in ihr enthaltenen Größen identische Gleichung ergeben:

$$(4)\qquad \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_{\alpha-1}}, \omega_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_{\alpha+1}}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right) = 0\,,$$

und somit, wenn y_2 irgendein andres Integral von (1) ist, auch

$$(5)\qquad \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y_2, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_2}{\partial x_{\alpha-1}}, \omega_2, \frac{\partial y_2}{\partial x_{\alpha+1}}, \ldots \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\right) = 0$$

sein, worin ω_2 der Wert von ω_1 für $y_1 = y_2$ ist, oder, da sich aus (1) nach (3):

$$(6)\qquad \frac{\partial y_2}{\partial x_\alpha} = \omega_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y_2, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_2}{\partial x_{\alpha-1}}, \frac{\partial y_2}{\partial x_{\alpha+1}}, \ldots \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\right)$$

ergibt,

$$(7)\qquad \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y_2, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_2}{\partial x_{\alpha-1}}, \frac{\partial y_2}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial y_2}{\partial x_{\alpha+1}}, \ldots \frac{\partial y_2}{\partial x_n}\right) = 0,$$

und daher das Integral y_2 der Gleichung $f = 0$ auch ein Integral von $\varphi = 0$ ist.

Hieraus können wir schließen, *daß, wenn von zwei Differentialgleichungen* (1) *und* (2) *mit einem gemeinsamen Integral* y_1 *nur* $f = 0$ *die Größe* y *explizite enthält, die Gleichung* (2) *der Gleichung* (1) *nicht zugehörig sein kann,* da das Integral $y_1 + c$ der Gleichung $\varphi = 0$, in welchem c eine willkürliche Konstante ist, der Gleichung (1) wegen der Unmöglichkeit des Zusammenbestehens der beiden Gleichungen

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right) = 0$$

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y_1 + c, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_n}\right) = 0$$

nicht genügen kann.

Ebensowenig können zwei solche Differentialgleichungen der Form

$$(8) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_a}, \frac{\partial y}{\partial x_b}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_r}\right) = 0$$

$$(9) \qquad \varphi\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial y}{\partial x_\beta}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_\sigma}\right) = 0,$$

in welchen y nicht explizite vorkommt, und eine der Zahlen $a, b, \ldots r$, zum Beispiel a, von $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ verschieden ist, einander zugehörig sein, da die Integrale $y_1 + c x_a$, worin c eine willkürliche Konstante bedeutet, wieder das Zusammenbestehen der beiden Gleichungen

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y_1}{\partial x_a}, \frac{\partial y_1}{\partial x_b}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_r}\right) = 0$$

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y_1}{\partial x_a} + c, \frac{\partial y_1}{\partial x_b}, \ldots \frac{\partial y_1}{\partial x_r}\right) = 0$$

erfordern würde, was unmöglich ist.

Es werden somit die beiden Differentialgleichungen (1) und (2) unter Voraussetzung eines gemeinsamen Integrals nur dann einander zugehören können, wenn entweder die abhängige Variable in beiden Gleichungen explizite vorkommt, oder wenn sie in beiden fehlt, und die Reihe der Zahlen $a, b, \ldots r$ mit $\alpha, \beta, \ldots \sigma$ zusammenfällt.

Ist

$$(10) \qquad y = F(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n),$$

worin $a_1, a_2, \ldots a_n$ willkürliche, voneinander unabhängige konstante Parameter sind, ein Integral der Differentialgleichung (1) in dem Sinne, daß y aus (10) und die Ableitungen von y aus

$$(11) \qquad \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \; \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

in (1) eingesetzt die Gleichung

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, F, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0$$

für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n$ und beliebige konstante Werte von $a_1, a_2, \ldots a_n$ identisch befriedigen, oder, anders ausgedrückt, daß die Elimination der n Größen $a_1, a_2, \ldots a_n$ aus den $n+1$ Gleichungen (10) und (11) auf die Differentialgleichung (1) führt, so soll das Integral (10) von (1) ein *vollständiges* genannt werden, wenn dasselbe keiner andern partiellen Differentialgleichung erster Ordnung außer einer der Gleichung (1) zugehörigen genügt, oder, falls dasselbe noch eine andre partielle Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt, diese eine zu (1) zugehörige sein wird, und somit alle Integrale mit (1) gemein hat.

Enthält nun

I. *die Differentialgleichung* (1) *die abhängige Variable* y *explizite*, so wird eine notwendige Bedingung dafür, daß (10) ein vollständiges Integral derselben ist, dadurch gegeben sein, daß die Determinante

$$(12) \qquad D = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

ist. Denn wäre die Funktionaldeterminante D der Funktionen $\partial F/\partial x_1, \partial F/\partial x_2, \ldots \partial F/\partial x_n$ in bezug auf die Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ identisch gleich Null, so würde eine von den Parametern freie Beziehung zwischen diesen Größen von der Form bestehen:

$$\omega\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0,$$

oder es würde die durch (10) gegebene Funktion F der Differentialgleichung

$$\omega\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

genügen, diese also eine zu (1) zugehörige sein, was, wie oben gezeigt worden, unmöglich ist.

Es ist aber auch umgekehrt $D \neq 0$ die hinreichende Bedingung dafür, daß (10) ein vollständiges Integral von (1) ist. Denn wäre dies nicht der Fall, so würde (10) noch einer andern, der Gleichung (1) nicht zugehörigen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\Omega\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_{a_1}}, \frac{\partial y}{\partial x_{a_2}}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_{a_r}}\right) = 0 \qquad (r \leq n)$$

genügen. Ist nun y hierin nicht enthalten, besteht also die von den Parametern $a_1, a_2, \ldots a_n$ freie Gleichung

$$\Omega\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_{a_1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{a_2}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{a_r}}\right) = 0,$$

so ergibt sich, wenn wir beliebige r Parameter $a_1, a_2, \ldots a_r$ herausgreifen und die Gleichung nach diesen Parametern differentiieren:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \frac{\partial F}{\partial x_{a_1}}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_1} \partial a_1} + \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{\partial F}{\partial x_{a_2}}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_2} \partial a_1} + \cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{\partial F}{\partial x_{a_r}}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_r} \partial a_1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \frac{\partial F}{\partial x_{a_1}}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_1} \partial a_r} + \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{\partial F}{\partial x_{a_2}}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_2} \partial a_r} + \cdots + \frac{\partial \Omega}{\partial \frac{\partial F}{\partial x_{a_r}}} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_r} \partial a_r} = 0,$$

also:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_1} \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_2} \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_r} \partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_1} \partial a_r} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_2} \partial a_r} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{a_r} \partial a_r} \end{vmatrix} = 0,$$

und es würde daher, da diese Beziehung für jede Zusammenstellung von r der Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ gilt, gegen die Voraussetzung die Determinante D verschwinden. Enthält jedoch Ω die abhängige Variable y, so läßt sich diese Größe zwischen (1) und $\Omega = 0$ eliminieren, ohne eine identische Eliminationsgleichung zu ergeben, da letztere der Gleichung (1) nicht zugehörig sein sollte, und es würde dann das Zusammenbestehen von (1) mit dieser, y nicht enthaltenden Eliminationsgleichung gegen die Voraussetzung $D = 0$ ergeben. Wir finden somit

als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein Integral $y = F(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *einer Differentialgleichung* $f(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \partial y/\partial x_1, \partial y/\partial x_2, \ldots \partial y/\partial x_n) = 0$, *welche y explizite enthält, ein vollständiges Integral derselben ist,* $D \neq 0$.

Zugleich ist ersichtlich, daß, weil man für $D \neq 0$ die Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n, y, \partial y/\partial x_1, \ldots \partial y/\partial x_n$ berechnen und in (10) substituieren kann, die so entstehende Differentialgleichung sich in der Form (1), welche y enthält, ergeben wird. Enthält

II. die Differentialgleichung (1) die abhängige Variable y nicht explizite, so wird zunächst eine notwendige Bedingung dafür, daß (10) ein vollständiges Integral derselben ist, durch $D = 0$ gegeben sein, da sich aus

$$(13) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

die Beziehung

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0$$

ergibt, welche, wie oben gezeigt, $D = 0$ nach sich zieht. Ist nun (10) ein vollständiges Integral von (13), so muß

$$(14) \qquad D_i = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_1} \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i-1} \partial a_1} & \frac{\partial F}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i+1} \partial a_1} \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial a_n} \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i-1} \partial a_n} & \frac{\partial F}{\partial a_n} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_{i+1} \partial a_n} \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial a_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

sein für jeden Wert von $i = 1, 2, \ldots n$. Denn wäre für irgendeinen Wert von i $D_i = 0$, so ergäbe sich eine von den n Parametern freie Beziehung

$$\Omega_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{i-1}}, F, \frac{\partial F}{\partial x_{i+1}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right) = 0$$

und somit für das vollständige Integral $y = F$ eine Differentialgleichung der Form

$$\Omega_1\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_{i-1}}, y, \frac{\partial y}{\partial x_{i+1}}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0,$$

welche wieder nach der Definition der Vollständigkeit der Integrale eine der Gleichung (13) zugehörige sein müßte, was, wie oben gezeigt worden, nicht möglich ist, da nur die *eine* Differentialgleichung y explizite enthält. Ist umgekehrt $D_i \neq 0$ für jeden Wert von $i = 1, 2, \ldots n$, so wird (10) ein vollständiges Integral von (13) sein; denn wäre dies nicht der Fall, genügte also y noch einer andern, der Gleichung (13) nicht zugehörigen Differentialgleichung

$$\Omega_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_{a_1}}, \frac{\partial y}{\partial x_{a_2}}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_{a_r}}\right) = 0, \tag{15}$$

so könnte man, wenn $r < n$ ist, aus der entsprechenden Beziehung für F

$$\Omega_2\left(x_1, x_2, \ldots x_n, F, \frac{\partial F}{\partial x_{a_1}}, \frac{\partial F}{\partial x_{a_2}}, \ldots \frac{\partial F}{\partial x_{a_r}}\right) = 0,$$

wenn in dieser $\partial F/\partial x_i$ fehlt, diese Gleichung nach je r der Parameter differentiieren, und würde wie oben finden, daß dann gegen die Voraussetzung die Unterdeterminanten r^{ter} Klasse von D_i aus $r+1$ Vertikalreihen gebildet, also D_i selbst verschwinden müßte. Nur dann wäre der Schluß nicht erlaubt, wenn $r = n$ ist; dann könnte man aber zwischen (15) und (13) eine Ableitung aus dem angegebenen Grund eliminieren und würde für dasselbe Integral (10) eine Gleichung in y und weniger als n Ableitungen erhalten, also wieder auf den früheren Fall zurückgeführt werden. Wir finden somit, daß

die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß für eine partielle Differentialgleichung

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

ein Integral der Form $y = F(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n)$ *ein vollständiges ist,* $D_i \neq 0$ *für jeden Wert von* $i = 1, 2, \ldots n$, *und zugleich folgt wie oben, daß dann* (10) *sich als vollständiges Integral einer Differentialgleichung von der Form* (13) *ergeben wird.*

Genügt $y = F(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n)$ für willkürliche konstante Werte der Parameter $a_1, \ldots a_n$ einer partiellen Differentialgleichung (1), die sich also durch Elimination der Parameter aus den Gleichungen (10) und

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n}$$

ergibt, so wird auch stets diese Differentialgleichung (1) ein Integral der Form (10) für dieselbe Funktion F besitzen, wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ sind, welche den Gleichungen

$$(16)\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right.$$

genügen, da dann die aus (10) entspringenden Gleichungen

$$\begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{\partial y}{\partial x_n} = \frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_n} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{array}$$

in die entsprechenden für konstante Parameter übergehen, und somit die Elimination von $a_1, a_2, \ldots a_n$, gleichgültig, ob dieselben konstant oder variabel sind, auf dieselbe Differentialgleichung (1) führt. Um nun die Parameter $a_1, a_2, \ldots a_n$ so als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ zu bestimmen, daß sie den Gleichungen (16) genügen, ist entweder

$$\frac{\partial F}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial a_2} = 0, \ldots \frac{\partial F}{\partial a_n} = 0$$

zu setzen, woraus sich $a_1, a_2, \ldots a_n$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ergeben und das singuläre Integral $y = F(x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_n)$ mit variabeln $a_1, a_2, \ldots a_n$ liefern, oder es muß

$$(17) \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_n} & \frac{\partial a_2}{\partial x_n} & \cdots & \frac{\partial a_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = 0$$

sein, und somit Beziehungen mit willkürlichen Funktionen zwischen $a_1, a_2, \ldots a_n$ bestehen, welche $x_1, x_2, \ldots x_n$ nicht enthalten. Sei nun

$$(18) \quad a_{r+1} = \varphi_1(a_1, a_2, \ldots a_r), a_{r+2} = \varphi_2(a_1, a_2, \ldots a_n), \ldots a_n = \varphi_{n-r}(a_1, a_2, \ldots a_n),$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_{n-r}$ von den Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ freie, willkürliche Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, so werden die Gleichungen (16), wenn

$$(19) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial a_1} = A_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+2}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_r} + \cdots + \frac{\partial F}{\partial a_n} \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial a_r} = A_r \end{array} \right.$$

gesetzt wird, in

$$(20) \left\{ \begin{array}{l} A_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \cdots + A_r \frac{\partial a_r}{\partial x_1} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_n} + A_2 \frac{\partial a_2}{\partial x_n} + \cdots + A_r \frac{\partial a_r}{\partial x_n} = 0 \end{array} \right.$$

übergehen, und, wie auch F beschaffen war, die Gleichungen (16) befriedigt sein, wenn $A_1 = 0$, $A_2 = 0 \ldots A_r = 0$ ist. Aus den so gewonnenen Gleichungen

$$(21) \quad a_{r+1} = \varphi_1(a_1, a_2 \ldots a_r), \; a_{r+2} = \varphi_2(a_1, a_2, \ldots a_r), \ldots a_n = \varphi_{n-r}(a_1, a_2, \ldots a_r)$$

$$(22) \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial a_1} + \dfrac{\partial F}{\partial a_{r+1}} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} + \dfrac{\partial F}{\partial a_{r+2}} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_1} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial a_n} \dfrac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial a_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial F}{\partial a_r} + \dfrac{\partial F}{\partial a_{r+1}} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial a_r} + \dfrac{\partial F}{\partial a_{r+2}} \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial a_r} + \cdots + \dfrac{\partial F}{\partial a_n} \dfrac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial a_r} = 0 \end{array} \right.$$

ergeben sich $a_1, a_2, \ldots a_r, a_{r+1}, \ldots a_n$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$, die, in (10) eingesetzt, Integrale von (1) liefern, in welchen die Parameter variabel sind und $n-r$ willkürliche Funktionen bestimmter Variabelnverbindungen enthalten. Im allgemeinen werden sich für beliebig anders gewählte willkürliche Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_{n-r}$ von $a_1, a_2, \ldots a_r$ auch andre Variabelnverbindungen als Argumente der willkürlichen Funktionen ergeben, ohne daß der Fall ausgeschlossen ist, daß für verschiedene willkürliche Funktionen die Variabelnverbindungen dieselben sein können. So ist z. B. für die Differentialgleichung

$$y = x_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y}{\partial x_2}$$

ein vollständiges Integral $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ für die konstanten Parameter a_1 und a_2, und es gehen zur Herleitung derjenigen Integrale, worin die Parameter variabel sind, die Gleichungen (21) und (22) in

$$a_2 = \varphi_1(a_1), \quad x_1 + x_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_1} = 0$$

über, so daß z. B. für $\varphi_1(a_1) = -\frac{1}{2} a_1^2$ die zweite Gleichung $x_1 - a_1 x_2 = 0$, also

$$a_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \varphi_1(a_1) = -\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2$$

wird, und das entsprechende Integral, welches die willkürlich gewählte Funktion $-\frac{1}{2} a_1^2$ der Variabelnverbindung x_1/x_2 enthält, in

$$y = \frac{x_1}{x_2} x_1 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 x_2 = \tfrac{1}{2} x_1 \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

übergeht. Nimmt man die willkürliche Funktion in der Form an: $\varphi_1(a_1) = -\frac{1}{3} a_1^3$, so geht die Bestimmungsgleichung für a_1 in $x_1 - a_1^2 x_2 = 0$ über, so daß

$$a_1 = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varphi_1(a_1) = -\tfrac{1}{3}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

also für die gewählte willkürliche Funktion $\varphi_1(a_1)$ und die dazugehörige Variabelnverbindung $(x_1/x_2)^{1/2}$ sich das Integral ergibt:

$$y = x_1\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{3} x_2\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{3}{2}} = \tfrac{2}{3} x_1\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Für die Differentialgleichung (23) gehört aber zu allen willkürlichen Funktionen dieselbe Variabelnverbindung x_1/x_2, da sämtliche Integrale derselben in der Form enthalten sind: $y = x_1 \varphi(x_1/x_2)$.

Wir gehen nunmehr zu den entsprechenden Untersuchungen für partielle Differentialgleichungs*systeme* erster Ordnung über.

1.

Über vollständige Integrale partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung.

Wir legen der Einfachheit der Darstellung wegen ein partielles Differentialgleichungssystem mit nur zwei unabhängigen und zwei abhängigen Variabeln

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &f_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \\ &f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \end{aligned}\right.$$

zugrunde, für welches, wie bekannt, der Satz von der Eindeutigkeit eines Integralsystems in der Umgebung eines Wertepaares von x_1 und x_2 folgendermaßen lautet:

Das System (1) besitzt ein um $x_1 = a_1$, $x_2 = a_2$ endliches und eindeutiges Integralsystem y_1 und y_2, welches für $x_1 = a_1$ die Werte $\varphi_1(x_2)$ und $\varphi_2(x_2)$ annimmt, worin $\varphi_1(x_2)$ und $\varphi_2(x_2)$ beliebige, um $x_2 = a_2$ endliche und eindeutige Funktionen bedeuten, unter den nachfolgenden Bedingungen: Setzt man

$$\varphi_1(a_2) = \beta_1, \; \varphi_2(a_2) = \beta_2, \; \left(\frac{\partial \varphi_1(x_2)}{\partial x_2}\right)_{x_2=a_2} = \beta_{12}, \; \left(\frac{\partial \varphi_2(x_2)}{\partial x_2}\right)_{x_2=a_2} = \beta_{22},$$

und bestimmt aus den Gleichungen

$$f_1\left(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{a_1, a_2}, \beta_{12}, \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{a_1, a_2}, \beta_{22}\right) = 0$$

$$f_2\left(a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{a_1, a_2}, \beta_{12}, \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{a_1, a_2}, \beta_{22}\right) = 0$$

ein dasselbe befriedigendes Wertepaar

$$\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{a_1, a_2} = \beta_{11}, \; \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{a_1, a_2} = \beta_{21},$$

so sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz des oben bezeichneten Integralsystems die, daß die linken Seiten der Differentialgleichungen (1) in der Umgebung der Werte

$$a_1, a_2, \beta_1, \beta_2, \beta_{11}, \beta_{12}, \beta_{21}, \beta_{22}$$

endlich und eindeutig, also in der Form darstellbar sind:

$$\mathfrak{P}_1\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, y_1 - \beta_1, y_2 - \beta_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \beta_{11}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \beta_{12}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \beta_{21}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \beta_{22}\right)$$

$$\mathfrak{P}_2\left(x_1 - a_1, x_2 - a_2, y_1 - \beta_1, y_2 - \beta_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - \beta_{11}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \beta_{12}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \beta_{21}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2} - \beta_{22}\right),$$

worin $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ eindeutige Potenzreihen bedeuten, und ferner die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}} \end{vmatrix}$$

für das oben angegebene Wertesystem der 8 Größen von Null verschieden ist.

Das Differentialgleichungssystem (1) kann zwei wesentlich voneinander verschiedene Formen haben, die für die Untersuchung seiner Integrale gesondert zu betrachten sind.

Setzt man aus einer der Differentialgleichungen (1) den Wert von y_1 als Funktion von

$$y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}$$

in die zweite Gleichung ein, so wird entweder y_2 aus derselben nicht herausfallen, die Gleichungen (1) sich also durch Elimination von y_1 resp. y_2 in der Form darstellen lassen:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} y_1 = \varphi_1\left(x_1, x_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) \\ y_2 = \varphi_2\left(x_1, x_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right), \end{cases}$$

oder es fällt bei der Substitution y_2 aus der zweiten Gleichung heraus, d. h. es ist das Eliminationsresultat von y_1 zwischen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ von y_2 unabhängig, und es geht somit das Differentialgleichungssystem in

$$\text{II.}\quad \begin{cases} \varphi_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \\ \varphi_2\left(x_1, x_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \end{cases}$$

über, worin eine der Gleichungen keine der beiden abhängigen Variabeln enthält. Um die Bedingung dafür noch in andrer Form zu ermitteln, ergebe sich aus $f_1 = 0$:

$$y_1 = \omega_1\left(x_1, x_2, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right), \tag{2}$$

so daß

$$f_1\left(x_1, x_2, \omega_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)$$

identisch Null ist und durch Differentiation nach y_2 ebenfalls identisch

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad -\frac{\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right)}{\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} \tag{3}$$

folgt, wenn die eingeklammerten Größen die Werte derselben nach Substitution des Wertes von y_1 aus (2) bedeuten. Setzt man ferner den Wert y_1 aus (2) in die Gleichung $f_2 = 0$ ein, so daß sich

$$f_2\left(x_1, x_2, \omega_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{4}$$

ergibt, so folgt für die linke Seite dieser Gleichung

$$\frac{d(f_2)}{d y_2} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right)\frac{\partial \omega_1}{\partial y_2} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right)$$

oder vermöge (3):

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(f_2)}{d y_2} &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial f_2}{\partial y_2}\right) - \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\right) : \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right) \\ &= (J)_{y_1=\omega_1} : \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\right), \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

worin J die Funktionaldeterminante von f_1 und f_2 in bezug auf y_1 und y_2 ist. *Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür*, daß durch Substitution von y_1 aus (2) in f_2, oder durch Elimination von y_1 zwischen $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ aus dem Eliminationsresultat die abhängige Variable y_2 herausfällt, also $d(f_2)/dy_2 = 0$ *ist, und also das Differentialgleichungssystem die Form* II. *annimmt, ist somit durch*

$$(6) \qquad (J)_{y_1=\varphi_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y_1} & \frac{\partial f_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}_{y_1=\omega_1} = 0$$

gegeben, oder durch die Bedingung, daß aus dem Eliminationsresultat von y_1 zwischen den Gleichungen $f_1 = 0$ und $J = 0$ y_2 herausfällt, während das Verschwinden von J für beliebige Werte von y_1 und y_2 bekanntlich anzeigt, daß f_2 eine Funktion von f_1 ist, in welcher y_1 und y_2 nicht explizite vorkommen, da die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{\partial f_2}{\partial y_2} - \frac{\partial f_2}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial y_2} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}\frac{\partial f_2}{\partial y_1} - \frac{1}{\frac{\partial f_1}{\partial y_2}}\frac{\partial f_2}{\partial y_2} = 0$$

in der abhängigen Variabeln f_2 das totale Differentialgleichungssystem liefert,

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} d y_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} d y_2 = \frac{d f_2}{0}, \quad \text{also} \quad f_2 = \varphi(f_1)$$

ergibt, worin φ eine willkürliche Funktion darstellt.

Seien z. B. die beiden Differentialgleichungen gegeben:

$$y_1^2 - y_2\psi_1 - \psi_2 = 0, \quad y_1^6 - y_2^3\psi_3 - \psi_4 = 0,$$

worin die Funktionen ψ von

$$x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}$$

abhängen, so folgt aus der ersten derselben $y_1 = (\psi_1 y_2 + \psi_2)^{\frac{1}{2}}$ und daher

$$\left(\frac{J}{\frac{\partial f_1}{\partial y_1}}\right)_{y_1=(\psi_1 y_2+\psi_2)^{\frac{1}{2}}} = 3\left[(\psi_1^3 - \psi_3)\, y_2^2 + 2\psi_1^2\, \psi_2 y_2 + \psi_1 \psi_2^2\right],$$

und dasselbe Resultat ergibt sich aus $\partial(f_2)/\partial y_2$; da

$$(f_2) = (\psi_1^3 - \psi_3)\, y_2^3 + 3\psi_1^2 \psi_2 y_2^2 + 3\psi_1 \psi_2^2\, y_2 + \psi_4 + \psi_2^3$$

ist. Da nun $\partial(f_2)/\partial y_2$ von y_2 unabhängig sein muß, so bleiben nur die beiden Fälle

$$\psi_1 = 0,\ \ \psi_3 = 0,\ \ \text{also}\ \ f_1 = y_1^2 - \psi_2 = 0,\ \ f_2 = y_1^6 - \psi_4 = 0$$
$$\psi_2 = 0,\ \ \psi_3 = \psi_1^3,\ f_1 = y_1^2 - \psi_1 y_2 = 0,\ \ f_2 = y_1^6 - \psi_1^3 y_2^3 - \psi_4 = 0,$$

und somit die Beziehungen

$$\psi_2^3 - \psi_4 = 0 \quad \text{und} \quad f_2 = f_1^3 + 3 f_1^2 \psi_2 + 3 f_1 \psi_2^2 .$$

Wir wollen eine zu dem Differentialgleichungssystem (1) *zugehörige* Differentialgleichung erster Ordnung

$$(7) \qquad \psi\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

eine solche nennen, welche die Eigenschaft hat, daß, wenn man zwei beliebige der Größen

$$y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2},$$

die wir mit ξ_1 und ξ_2 bezeichnen, aus den Gleichungen (1) durch die andern Größen ausdrückt, die wir allgemein mit ξ bezeichnen, und in (7) substituiert, die so entstehende Gleichung in all den Größen ξ sowie in x_1 und x_2 identisch Null wird. Um die Form aller zugehörigen Differentialgleichungen festzustellen, mögen sich aus (1) die Werte $\xi_1 = \varphi_1(\xi, x_1, x_2)$, $\xi_2 = \varphi_2(\xi, x_1, x_2)$ ergeben, so daß

$$f_1(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi) = 0, \quad f_2(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi) = 0$$

in die in allen Größen ξ sowie in x_1 und x_2 identischen Gleichungen übergehen:

$$\begin{aligned} f_1\big(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2, \xi), \varphi_2(x_1, x_2, \xi), \xi\big) &= 0 \\ f_2\big(x_1, x_2, \varphi_1(x_1, x_2, \xi), \varphi_2(x_1, x_2, \xi), \xi\big) &= 0, \end{aligned}$$

und somit auch identisch

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial f_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial f_2}{\partial \xi} = 0$$

sind, und, mit der aus (7) hervorgehenden Gleichung

$$\psi(x_1, x_2, \xi_1, \xi_2, \xi) = 0 \quad \text{oder} \quad \psi(x_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \xi) = 0,$$

welche in allen ξ, x_1 und x_2 identisch Null sein sollte, zusammengestellt, die Beziehung ergibt:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \varphi_2}\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0,$$

oder die für alle ξ, x_1, x_2 notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß (7) eine zu (1) zugehörige Differentialgleichung ist:

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial f_1}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial \xi} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi_1} & \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi_2} & \dfrac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{matrix}\right|_{\xi_1 = \varphi_1,\, \xi_2 = \varphi_2} = 0;$$

daß also das Eliminationsresultat von ξ_1 und ξ_2 zwischen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ und

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial f_2}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} & \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \end{vmatrix} = 0$$

verschwindet.

So werden alle Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha=0,\beta=0)} \omega_{\alpha\beta}\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) f_1^\alpha f_2^\beta = 0,$$

worin α und β positive Zahlen, $\alpha=0, \beta=0$ ausgeschlossen, $\omega_{\alpha,\beta}$ beliebige Funktionen der eingeklammerten Größen sind, dem System (1) zugehörige Differentialgleichungen sein.

Zugleich ist aber ersichtlich, *daß alle Integralsysteme von* (1) *auch jede zugehörige Differentialgleichung befriedigen, wenn sie ein Integralsystem gemein haben;* denn seien z. B. $\xi_1 = y_1$, $\xi_2 = \partial y_2/\partial x_2$, so daß sich aus (1):

$$(8)\quad \begin{cases} y_1 = \varphi_1\left(x_1, x_2, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \varphi_2\left(x_1, x_2, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) \end{cases}$$

ergeben, und diese Werte, in die *zugehörige* Gleichung (7) eingesetzt, dieselbe — der Voraussetzung nach — in allen eingeklammerten Größen identisch erfüllen, so wird, wenn η_1, η_2 irgendein Integralsystem von (1) ist, die identische Beziehung bestehen:

$$\psi\left(x_1, x_2, \varphi_1\left(x_1, x_2, \eta_2, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}\right),\right.$$
$$\left.\eta_2, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}, \varphi_2\left(x_1, x_2, \eta_2, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}\right)\right) = 0,$$

und somit, da nach (8) für das Integralsystem von (1):

$$\eta_1 = \varphi_1\left(x_1, x_2, \eta_2, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}\right), \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = \varphi_2\left(x_1, x_2, \eta_2, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}\right)$$

ist, die Gleichung befriedigt sein:

$$\psi\left(x_1, x_2, \eta_1, \eta_2, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2}, \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1}, \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2}\right) = 0,$$

also η_1, η_2 ein Integralsystem der zugehörigen Differentialgleichung (7) sein.

Zwei beliebige, von vier willkürlichen Konstanten abhängige, Funktionen von x_1 und x_2:

$$(9) \qquad y_1 = F_1(x_1, x_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), \quad y_2 = F_2(x_1, x_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

können stets als ein Integralsystem von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen Variabeln, welche keine dieser Konstanten enthalten, betrachtet werden, da man aus (9) und den vier hieraus entspringenden Gleichungen

$$(10) \qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$$

die vier Konstanten eliminieren kann und so zu einem den Gleichungen (9) äquivalenten partiellen Differentialgleichungssystem (1) geführt wird, das eine im allgemeinen beliebige Form hat, wenn F_1 und F_2 nicht näher bestimmt sind. Wir können aber auch umgekehrt schließen, daß einem beliebigen partiellen Differentialgleichungssystem erster Ordnung, das wir der Einfachheit der Darstellung wegen in der Form

$$(11) \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = f_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right), \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)$$

zugrunde legen, wenigstens formal ein Integralsystem mit vier willkürlichen Konstanten genügt. Da man nämlich nach dem oben ausgesprochenen Existenzsatz für einen beliebigen Wert $x_1 = \xi_1$ unter den angegebenen Bedingungen

$$\left(y_1\right)_{\xi_1} = \varphi_1\left(x_2\right), \quad \left(y_2\right)_{\xi_1} = \varphi_2\left(x_2\right)$$

setzen kann, worin φ_1 und φ_2 im allgemeinen willkürliche Funktionen sind, so folgt aus (11):

$$(12) \quad \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{\xi_1} = f_1\left(\xi_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'\right), \quad \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{\xi_1} = f_2\left(\xi_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'\right)$$

und hieraus durch Differentiation nach x_2:

$$(13) \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{\xi_1} = \psi_1\left(\xi_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2', \varphi_1'', \varphi_2''\right) \\ \left(\dfrac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)_{\xi_1} = \psi_2\left(\xi_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2', \varphi_1'', \varphi_2''\right) . \end{cases}$$

Ferner folgt aber aus (11):

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2} = \chi_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1 \partial x_2}\right)$$

und somit vermöge (12) und (13):

$$\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\right)_{\xi_1} = \omega_1\left(\xi_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2', \varphi_1'', \varphi_2''\right)$$

$$\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2}\right)_{\xi_1} = \omega_2\left(\xi_1, x_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2', \varphi_1'', \varphi_2''\right),$$

und endlich aus $\left(y_1\right)_{\xi_1} = \varphi_1$, $\left(y_2\right)_{\xi_1} = \varphi_2$:

$$\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\right)_{\xi_1} = \varphi_1'', \quad \left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}\right)_{\xi_1} = \varphi_2'',$$

so daß die ersten und zweiten nach x_1 und x_2 genommenen partiellen Differentialquotienten von y_1 und y_2 für $x_1 = \xi_1$ durch die Funktionen $\varphi_1(x_2)$ und $\varphi_2(x_2)$ und deren erste und zweite Ableitungen gegeben sind, und allgemein folgt, daß sich aus (11) alle partiellen Ableitungen von y_1 und y_2 bis zur $\varkappa^{\text{ten}}$ Ordnung für $x_1=\xi_1$ als bekannte Funktionen von ξ_1, x_2, $\varphi_1(x_2)$, $\varphi_2(x_2)$ und deren Ableitungen bis zu einer beliebigen Ordnung hin ergeben.

Wählt man nun für x_2 einen beliebigen Wert ξ_2, in dessen Umgebung $\varphi_1(x_2)$ und $\varphi_2(x_2)$ endlich und eindeutig sind, so werden sich y_1 und y_2 als Funktionen von x_1 und x_2 in der Umgebung des Wertepaares ξ_1, ξ_2 in der Form ergeben:

$$y_1=(y_1)_{\xi_1,\xi_2}+\left[(x_1-\xi_1)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)_{\xi_1,\xi_2}+(x_2-\xi_2)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)_{\xi_1,\xi_2}\right]+\tfrac{1}{2}\left[(x_1-\xi_1)^2\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2}\right)_{\xi_1,\xi_2}\right.$$
$$\left.+2(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{\xi_1,\xi_2}+(x_2-\xi_2)^2\left(\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_2^2}\right)_{\xi_1,\xi_2}\right]+\cdots$$

$$y_2=(y_2)_{\xi_1,\xi_2}+\left[(x_1-\xi_1)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)_{\xi_1,\xi_2}+(x_2-\xi_2)\left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)_{\xi_1,\xi_2}\right]+\tfrac{1}{2}\left[(x_1-\xi_1)^2\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1^2}\right)_{\xi_1,\xi_2}\right.$$
$$\left.+2(x_1-\xi_1)(x_2-\xi_2)\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_1\partial x_2}\right)_{\xi_1,\xi_2}+(x_2-\xi_2)^2\left(\frac{\partial^2 y_2}{\partial x_2^2}\right)_{\xi_1,\xi_2}\right]+\cdots,$$

worin die Koeffizienten durch die Werte von $\varphi_1(x_2)$, $\varphi_2(x_2)$ und deren Ableitungen für $x_2=\xi_2$ gegeben sind, und wofür zur Feststellung der Konvergenz dieser Reihen noch die in dem bekannten Existenzsatz angegebenen Bedingungen zu erfüllen sind. Die in die Ausdrücke eintretenden Konstanten $\varphi_1(\xi_2)$, $\varphi_2(\xi_2)$, $\varphi_1'(\xi_2)$, $\varphi_2'(\xi_2)$, ... bilden die Reihe der beliebig vielen Konstanten, welche in dem Integralsystem enthalten sind, und welches im allgemeinen für jeden Wert jener Konstanten den gegebenen Differentialgleichungen Genüge leistet.

Es soll im folgenden ein Integralsystem (9) der Differentialgleichungen (1) mit vier willkürlichen Konstanten ein *vollständiges* genannt werden, wenn dasselbe außer den Gleichungen (1) und den oben definierten *zugehörigen* Differentialgleichungen, denen alle Integralsysteme von (1) genügen, keine andre partielle Differentialgleichung erster Ordnung befriedigt, und es sollen nunmehr die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für F_1 und F_2 aufgesucht werden, unter denen (9) ein *vollständiges* Integralsystem bildet.

Untersuchen wir zunächst den Fall, in welchem das Differentialgleichungssystem in der Form

$$(14)\ \text{I.}\quad \begin{cases} y_1 = f_1\left(x_1, x_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) \\[2ex] y_2 = f_2\left(x_1, x_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) \end{cases}$$

gegeben ist, so wird behauptet, *daß, wenn* (9) *ein vollständiges Integral ist, die Determinante*

$$(15)\qquad D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{11}} & \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{11}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{12}} & \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{12}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{21}} & \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{21}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{21}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{21}} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{22}} & \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{22}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} \end{vmatrix}.$$

von Null verschieden sein muß. Denn wäre D identisch gleich Null, so bestünde zwischen den vier Größen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2},$$

von welchen D die Funktionaldeterminante in bezug auf die vier Parameter $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ ist, eine von diesen Konstanten freie Beziehung

$$\omega\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) = 0,$$

oder es würde das Integralsystem (9) einer Differentialgleichung

$$(16)\qquad \omega\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

genügen; aber dies ist unmöglich, wenn man zeigen kann, daß (16) keine zu den Differentialgleichungen (14) zugehörige Differentialgleichung ist, da das vollständige Integralsystem nur noch einer zugehörigen Differentialgleichung genügen kann. Daß aber (16) den Gleichungen (14) nicht zugehörig ist, geht aus nachstehender Überlegung hervor: Setzt man den aus der ersten Gleichung (14) hervorgehenden Wert

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \psi\left(x_1, x_2, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) \tag{17}$$

in die zweite Gleichung ein, so daß diese in

$$y_2 = f_2\left(x_1, x_2, \psi, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)$$

oder z. B. in

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \psi_1\left(x_1, x_2, \psi, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) \tag{18}$$

übergeht, und substituiert die Werte (17) und (18) in (16), so müßte nach der Definition einer zu (14) zugehörigen Differentialgleichung

$$\omega\left(x_1, x_2, \psi, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \psi_1\right)$$

in allen hierin enthaltenen Größen identisch verschwinden, was nicht der Fall sein kann, da y_2 nur in ψ_1 enthalten ist.

Es wird aber auch umgekehrt, *wenn D nicht identisch Null ist, das Integralsystem* (9) *ein vollständiges der Differentialgleichungen* (14) *sein.* Denn wäre dies nicht der Fall, genügte also das Integralsystem (9) noch einer andern, *nicht zugehörigen*, Differentialgleichung

$$\Omega\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0\,, \tag{19}$$

so würde letztere entweder y_1 und y_2 gar nicht enthalten, oder es ließe sich, weil (19) keine zu (14) zugehörige Gleichung sein sollte,

y_1 und y_2 zwischen den Gleichungen (14) und (19) eliminieren, in beiden Fällen also das Integralsystem (9) einer Differentialgleichung von der Form

$$\Omega_1\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

genügen und somit gegen die Voraussetzung für die Funktionaldeterminante D der Funktionen

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$$

in bezug auf die vier Parameter den Wert Null ergeben. Wir finden somit,

daß die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß das Integralsystem (9) *ein vollständiges der Differentialgleichungen* (14) *ist, durch* $D \neq 0$ *gegeben ist.*

So wird z. B. für das Differentialgleichungssystem

$$y_1 = x_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \tfrac{1}{2} x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2 x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \quad y_2 = \tfrac{1}{2} x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} + \frac{\partial y_1}{\partial x_1}$$

das Integralsystem

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2^2 + a_{21}, \quad y_2 = a_{21} x_1^2 + a_{22} x_2 + a_{11}$$

ein vollständiges sein, da die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 x_1 x_2 \neq 0$$

ist.

Gehen wir nunmehr zu dem zweiten Fall über, in welchem das Differentialgleichungssystem in der Form

$$(20)\ \text{II.}\left\{\begin{array}{l} f_1\left(x_1, x_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \end{array}\right.$$

gegeben ist, so wird offenbar, wie viele der vier partiellen Ableitungen auch in der ersten dieser Gleichungen enthalten sein mögen, $D=0$ sein; enthält diese Gleichung aber alle vier Differentialquotienten, so soll gezeigt werden, *daß nicht alle Unterdeterminanten erster Ordnung, welche zu sämtlichen Elementen irgendeiner Vertikalreihe von D gehören, identisch Null sein können.* Denn wären z. B. die vier zu den Elementen der ersten Vertikalreihe gehörigen Unterdeterminanten erster Ordnung, die wir mit

$$D_{x_1 a_{12} a_{21} a_{22}},\quad D_{x_1 a_{11} a_{21} a_{22}},\quad D_{x_1 a_{11} a_{12} a_{22}},\quad D_{x_1 a_{11} a_{12} a_{21}}$$

bezeichnen, gleich Null, so würden sich aus den früheren Betrachtungen die Beziehungen ergeben:

$$\omega_{11}\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, a_{11}\right) = 0$$

$$\omega_{12}\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, a_{12}\right) = 0$$

$$\omega_{21}\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, a_{21}\right) = 0$$

$$\omega_{22}\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, a_{22}\right) = 0,$$

aus denen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ hergeleitet und, in (9) substituiert, zwei Differentialgleichungen der Form folgen:

$$(21)\quad y_1 = \chi_1\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right),\quad y_2 = \chi_2\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right),$$

denen das vollständige Integralsystem von (20) genügen müßte, wonach diese beiden Differentialgleichungen also zugehörige zu

(20) wären. Dies ist aber unmöglich, da, wenn sie zugehörige wären, zwei der Ableitungen, aus (20) hergeleitet und in (21) substituiert, letztere in allen Größen identisch machen müßten; ist aber y_2 in f_2 enthalten und substituiert man in die erste der Gleichungen (21) die Werte der beiden gewählten Ableitungen, von denen die eine durch die übrigen Ableitungen, die andre durch ebendiese und y_2 oder y_1 und y_2 ausgedrückt ist, so kann y_2 nicht herausfallen; ist jedoch y_1 in f_1 enthalten und substituiert man die beiden Ableitungen in die zweite der Gleichungen (21), von denen die eine wieder nur durch die übrigen Ableitungen, die andre durch ebendiese und y_1 oder y_1 und y_2 ausgedrückt ist, so kann y_1 nicht herausfallen — die obige Behauptung ist somit erwiesen.

Um nun die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufzustellen, daß unter der Bedingung, daß f_1 alle vier partiellen Differentialquotienten und f_2 eine oder beide der abhängigen Variabeln enthält, das Integralsystem (9) ein vollständiges der Differentialgleichungen (20) ist, greife man eine beliebige Vertikalreihe von D heraus, z. B. wieder die erste, von welcher, wie eben gezeigt worden, nicht alle Elemente verschwindende Unterdeterminanten erster Ordnung besitzen, und ersetze die Elemente derselben durch

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}},$$

dann wird behauptet, *daß für ein vollständiges Integralsystem* (9) *die Determinante*

$$(22) \qquad D_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{21}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{21}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{21}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} \end{vmatrix}.$$

von Null verschieden sein muß, wenn vorausgesetzt wird, daß f_2 die abhängige Variable y_2 enthält.

Denn wäre $D_1 = 0$, so würde diese als Funktionaldeterminante der Größen

$$F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$$

in bezug auf die vier Parameter $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ eine Beziehung von der Form

$$\psi\left(x_1, x_2, F_1, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

oder für das vollständige Integralsystem (9) die Differentialgleichung

$$\psi\left(x_1, x_2; y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \quad \text{oder} \quad y_1 = \omega\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)$$

nach sich ziehen, welche eine zugehörige zu (20) sein müßte, was jedoch nicht der Fall sein kann, wenn f_2 die abhängige Variable y_2 enthält.

Ebenso würde sich *als notwendige Bedingung für das vollständige Integral ergeben, daß die Determinante*

$$(23) \qquad D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} & \frac{\partial F_2}{\partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{21}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{21}} & \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{21}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1 \partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} & \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} \end{vmatrix}$$

von Null verschieden sein muß, wenn f_2 die abhängige Variable y_1 enthält, da, wenn $D_3 = 0$ wäre, sich für das vollständige Integral noch die Differentialgleichung

$$y_2 = \omega_1\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)$$

ergeben würde, was wieder nicht möglich ist; *enthält f_2 die abhängigen Variabeln y_1 und y_2, so muß $D_1 \neq 0$ und $D_3 \neq 0$ sein. Aber es sind diese Bedingungen auch die hinreichenden für ein vollständiges Integralsystem.*

Denn enthält f_1 die vier partiellen Differentialquotienten und f_2 die abhängige Variable y_2, sei ferner D_1 von Null verschieden, und wäre das Integralsystem (9) kein vollständiges, so müßte dasselbe noch einer den Differentialgleichungen (20) nicht zugehörigen Gleichung

$$\Omega\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \tag{24}$$

genügen. Ist nun in dieser Gleichung y_2 nicht enthalten, so würde die Elimination von $\partial y_1/\partial x_1$ zwischen (24) und $f_1 = 0$ eine Gleichung von der Form

$$\psi\left(x_1, x_2, y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

liefern, aus welcher sich gegen die Voraussetzung $D_1 = 0$ ergäbe; ist jedoch y_2 in (24) enthalten, so folgte durch Elimination von y_2 zwischen (24) und $f_2 = 0$ eine Differentialgleichung, die, wenn der Wert von $\partial y_1/\partial x_1$ aus $f_1 = 0$ substituiert wird, wieder auf eine Differentialgleichung von der Form $\psi = 0$, also gegen die Voraussetzung wieder auf $D_1 = 0$ führt, und dasselbe gilt für D_3, so daß,

wenn f_2 die abhängige Variable y_2 enthält, $D_1 \neq 0$, und wenn es die abhängige Variable y_1 einschließt, dann $D_3 \neq 0$ die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß (9) ein vollständiges Integralsystem von (20) darstellt.

So wird z. B. für das Differentialgleichungssystem

$$4x_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) + (x_1 + x_2)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

$$y_1 + y_2 = \left(\frac{x_2}{4} - \frac{x_1}{8}\right)\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \left(\frac{3x_2}{4} + \frac{x_1}{8}\right)\frac{\partial y_2}{\partial x_2}$$

das Integralsystem

$$y_1 = a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_1\,x_2 + a_{21}\,x_1^2 + a_{22}\,x_2^2$$
$$y_2 = -\,a_{11}\,x_1 - \tfrac{1}{2}\,a_{12}\,x_1^2 - 3\,a_{12}\,x_1\,x_2 - a_{21}\,x_1^2 + a_{22}\,x_2^2$$

ein vollständiges sein; denn zunächst ist

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_1 - 3x_2 & -3x_1 \\ 2x_1 & 0 & -2x_1 & 0 \\ 0 & 2x_2 & 0 & 2x_2 \end{vmatrix} = 0,$$

während von den aus den ersten drei Vertikalreihen gewählten, also den Elementen der letzten Vertikalreihe zugeordneten Unterdeterminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x_2 & x_1 & x_1 - 3x_2 \\ 2x_1 & 0 & -2x_1 \end{vmatrix} = 0\,, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ x_2 & x_1 & -x_1 - 3x_2 \\ 0 & 2x_2 & 0 \end{vmatrix} = 2x_2(x_1 + 2x_2) \neq 0$$

ist, und somit zwischen den drei Funktionen $\partial F_1/\partial x_1, \partial F_1/\partial x_2, \partial F_2/\partial x_1$ als Funktionen von a_{11}, a_{12}, a_{21}, aber nicht als Funktionen von a_{11}, a_{12}, a_{22} aufgefaßt, eine von den resp. Parametern freie Beziehung statthat; endlich ergeben sich

$$D_1 = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & -1 & 0 \\ x_1\,x_2 & x_1 & -x_1 - 3x_2 & -3x_1 \\ x_1^2 & 0 & -2x_1 & 0 \\ x_2^2 & 2x_2 & 0 & 2x_2 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 & -\tfrac{1}{2}x_1^2 - 3x_1\,x_2 & -3x_1 \\ 2x_1 & 0 & -x_1^2 & 0 \\ 0 & 2x_2 & x_2^2 & 2x_2 \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

und es sind somit, da in der zweiten Differentialgleichung y_1 *und* y_2 enthalten sind, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das vollständige Integralsystem erfüllt.

Lassen wir nunmehr die Voraussetzung fallen, daß $f_1=0$ die vier partiellen Differentialquotienten enthalte, und nehmen an, daß das Differentialgleichungssystem die Form habe:

$$(25)\quad \begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0, \end{cases}$$

so wird aus der ersten

$$f_1\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

folgen, und sich aus dieser durch Differentiation nach drei beliebigen der vier Parameter, z. B. a_{11}, a_{12}, a_{22}, die Gleichungen ergeben:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_1}{\partial x_2}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} + \frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_2}{\partial x_1}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{11}} + \frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_2}{\partial x_2}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_1}{\partial x_2}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} + \frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_2}{\partial x_1}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{12}} + \frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_2}{\partial x_2}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_1}{\partial x_2}} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} + \frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_2}{\partial x_1}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{22}} + \frac{\partial f_1}{\partial \frac{\partial F_2}{\partial x_2}} \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} = 0,$$

so daß die Determinante

$$(26)\qquad D' = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{11}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{12}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \\ \dfrac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{22}} & \dfrac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} \end{vmatrix} = 0$$

ist; es werden somit alle zu den Elementen der ersten Vertikalreihe von D gehörigen Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden, und so allgemein folgen,

daß, wenn f_1 nur drei der partiellen Differentialquotienten enthält, nicht nur $D=0$ ist, sondern auch sämtliche Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden, welche zu den Elementen derjenigen Vertikalreihe gehören, welche durch den in $f_1=0$ fehlenden Differentialquotienten angezeigt ist.

So wird z. B. für das Differentialgleichungssystem

$$\frac{\partial y_1}{\partial x_1}+\frac{\partial y_1}{\partial x_2}-\frac{\partial y_2}{\partial x_1}=0$$

$$y_1-y_2+(x_1-x_2)\frac{\partial y_1}{\partial x_2}-\left(\tfrac{1}{2}x_1-x_2\right)\frac{\partial y_2}{\partial x_2}+\tfrac{3}{2}x_1 x_2^2-2x_2^3$$

das Integralsystem

$$y_1 = a_{11}x_1^2+a_{12}x_1+a_{21}x_2$$

$$y_2 = a_{11}x_1^2+a_{12}x_1+a_{21}x_1+\tfrac{1}{2}a_{22}x_1^2+a_{22}x_1x_2+x_2^3$$

die Beziehung liefern:

$$D=\begin{vmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ x_2 & x_1 & x_1+x_2 & x_1 \end{vmatrix}=0,$$

aber es werden nicht alle Unterdeterminanten erster Ordnung, welche zu den Elementen einer der drei ersten Vertikalreihen gehören, verschwinden, während für die durch den in $f_1=0$ fehlenden Differentialquotienten $\partial y_2/\partial x_2$ angezeigte vierte Vertikalreihe die vier zu den Elementen dieser Reihe gehörigen Unterdeterminanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_2 & x_1 & x_1+2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_1 \\ 0 & 1 & 1 \\ x_2 & x_1 & x_1+x_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_1 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_2 & x_1 & x_1+x_2 \end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

den Wert Null annehmen.

Gehen wir nun für den Fall (25) zur Aufstellung der für ein vollständiges Integralsystem notwendigen und hinreichenden Bedingungen von der Determinante D' aus, so ist wieder, ähnlich wie oben, ersichtlich, daß in dieser Determinante nicht alle zu den Elementen einer Vertikalreihe, z. B. der zweiten, gehörigen Unterdeterminanten erster Ordnung verschwinden können. Denn wären

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \end{vmatrix} = 0,$$

so ergäben sich die Beziehungen:

$$\psi_1\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, a_{11}\right) = 0, \quad \psi_2\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, a_{12}\right) = 0,$$

$$\psi_3\left(x_1, x_2, \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \frac{\partial F_2}{\partial x_2}, a_{22}\right) = 0,$$

und durch Bestimmung von a_{11}, a_{12}, a_{22} aus diesen Gleichungen, in denen $\partial F_1/\partial x_2$, $\partial F_2/\partial x_2$ durch $\partial y_1/\partial x_2$, $\partial y_2/\partial x_2$ ersetzt werden, und Substitution der Werte der Parameter in (9) für einen beliebig gewählten Wert von a_{21} die Differentialgleichungen

$$y_1 = \omega_1\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right), \quad y_2 = \omega_2\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right),$$

was für ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen (25) wieder aus den oben angegebenen Gründen nicht möglich ist. *Es können somit, wenn (9) ein vollständiges Integralsystem darstellt, nicht sämtliche zu den Elementen einer Vertikalreihe gehörigen Unterdeterminanten erster Ordnung der Determinante D' identisch verschwinden.*

Ersetzt man nun in D' die erste Vertikalreihe durch die Elemente

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}},$$

ferner die dritte Vertikalreihe durch

$$\frac{\partial F_2}{\partial a_{11}}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a_{12}}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}},$$

so daß sich die Determinanten ergeben:

$$D_1' = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \\ \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \end{vmatrix}, \quad D_3' = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{11}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{12}} & \frac{\partial F_2}{\partial a_{12}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{12}} \\ \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial a_{22}} & \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} & \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_2 \partial a_{22}} \end{vmatrix},$$

so finden wir genau durch dieselben Schlüsse wie oben,

für die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß die Gleichungen (9) *ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen* (25) *sind,* $D_1' \neq 0$, *wenn* f_2 *die abhängige Variable* y_2 *enthält, und* $D_3' \neq 0$, *wenn* f_2 *die Variable* y_1 *einschließt.*

Die analogen Bedingungen ergeben sich für die den Determinanten D_1' und D_3' entsprechenden Unterdeterminanten erster Ordnung, wenn f_1 nur zwei partielle Differentialquotienten enthält.

Gehen wir endlich zu dem Fall über, in welchem die beiden Differentialgleichungen weder y_1 noch y_2 enthalten, diese also durch Elimination einer der Ableitungen, z. B. $\partial y_1/\partial x_1$, in der Form dargestellt werden können:

$$(27)\ \text{III.} \begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0, \end{cases}$$

und nehmen an, daß jede derselben mindestens drei partielle Ableitungen enthält, so greife man wieder die Determinante D_1' heraus; es wird diese für ein vollständiges Integralsystem nicht verschwinden, weil sie sonst als Funktionaldeterminante der Funktionen F_1, $\partial F_2/\partial x_1$, $\partial F_2/\partial x_2$ in bezug auf die Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} eine Beziehung der Form lieferte:

$$\omega\left(x_1,\ x_2,\ F_1,\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1},\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2}\right) = 0\,,$$

also für das Integralsystem die Differentialgleichung

$$\omega\left(x_1,\ x_2,\ y_1,\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1},\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0\,,$$

die wieder keine den Gleichungen (27) zugehörige sein kann und gegen die Voraussetzung nur zwei partielle Differentialquotienten enthalten würde, und ebensowenig darf $D'_3 = 0$ sein.

Es ist aber auch umgekehrt, wenn $D'_1 \neq 0$ und $D'_3 \neq 0$, jenes Integralsystem ein vollständiges. Denn wäre dies nicht der Fall, so genügte das Integralsystem (9) noch einer andern, den Gleichungen (27) nicht zugehörigen Differentialgleichung, und enthält diese eine der abhängigen Variabeln, so folgt wieder unmittelbar durch Zusammenstellung mit (27) gegen die Voraussetzung $D'_1 = 0$ oder $D'_3 = 0$, und enthält jene Differentialgleichung keine der abhängigen Variabeln, so folgt wieder mit Zuhilfenahme von (27), daß gegen die Voraussetzung eine der beiden Differentialgleichungen nur zwei partielle Ableitungen enthalten würde. Es ergibt sich somit,

daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß (9) *ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen* (27) *ist, von denen jede mindestens drei partielle Ableitungen enthält, durch $D'_1 \neq 0$ und $D'_3 \neq 0$ gegeben sind.*

Enthält endlich jede der beiden Differentialgleichungen (27) nur zwei partielle Ableitungen, so gelangen wir zu denselben Bedingungen $D'_1 \neq 0$ und $D'_3 \neq 0$, oder zu einem zerfallenden Differentialgleichungssystem.

So werden z. B. die Differentialgleichungen

$$x_2 \frac{\partial y_1}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0\,, \qquad x_1 \frac{\partial y_1}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

das Integralsystem besitzen:

$$y_1 = \quad a_{11} + a_{12}\, x_1^2 + a_{21}\, x_2^2 + a_{22}\, (x_1^2 + x_2^2)^2$$
$$y_2 = -a_{11} + a_{21}\, x_1^2 + a_{12}\, x_2^2 + a_{22}\, (x_1^2 + x_2^2)^2\,,$$

und für dieses zunächst die Determinante D sowie alle Unterdeterminanten erster Ordnung nach den Elementen der ersten Vertikalreihe verschwinden. Daß das Integralsystem aber ein vollständiges ist, geht daraus hervor, daß

$$D_1' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1^2 & 0 & 2x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 & 4x_1 & 4x_2 \end{vmatrix} (x_1^2 + x_2^2) \neq 0$$

$$D_3' = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & x_2^2 & 2x_2 \\ 4x_2 & x_1^2 + x_2^2 & 4x_2 \end{vmatrix} (x_1^2 + x_2^2) \neq 0$$

ist.

2.

Über die Herleitung willkürliche Funktionen bestimmter Variabelnverbindungen enthaltender Integrale partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung aus vollständigen Integralsystemen.

Wir wollen nun untersuchen, ob man für ein *System* partieller Differentialgleichungen erster Ordnung – zunächst wieder mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln – auf ähnliche Weise von einem vollständigen Integralsystem aus zu allgemeineren Systemen mit willkürlichen Funktionen gelangen kann, wie dies in der Einleitung zu dieser Arbeit für *eine* partielle Differentialgleichung erster Ordnung geschehen.

Sei

$$(1) \qquad y_1 = F_1\,(x_1, x_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), \quad y_2 = F_2\,(x_1, x_2, a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22})$$

ein vollständiges Integralsystem der Differentialgleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} f_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1}, \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0, \end{cases}$$

so daß sich diese wieder durch Elimination der vier willkürlichen Konstanten aus den zwei Gleichungen (1) und den vier Gleichungen

$$(3)\qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \frac{\partial F_1}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial F_2}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = \frac{\partial F_2}{\partial x_2}$$

ergeben oder jedenfalls nach der oben gegebenen Definition den Differentialgleichungen (2) zugehörige sein werden. Dasselbe würde auch der Fall sein, wenn $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ solche Funktionen von x_1 und x_2 sind, daß den Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{12}}\dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{21}}\dfrac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{22}}\dfrac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{11}}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{12}}\dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{21}}\dfrac{\partial a_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_1}{\partial a_{22}}\dfrac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{11}}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{12}}\dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{21}}\dfrac{\partial a_{21}}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\dfrac{\partial a_{22}}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{11}}\dfrac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{12}}\dfrac{\partial a_{12}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{21}}\dfrac{\partial a_{21}}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\dfrac{\partial a_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

durch diese genügt wird.

Zunächst kann man nicht wie oben im allgemeinen diesen Gleichungen dadurch genügen, daß man

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} = 0, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} = 0$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a_{12}} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} = 0$$

setzt, da acht Gleichungen durch die vier Größen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ zu befriedigen wären, wenn nicht F_2 eine Funktion von F_1 ist, oder die variabeln Parameter zueinander durch willkürliche Funktionen in Beziehung gesetzt werden. Ist aber z. B. $F_2 = \omega(F_1)$, so genügt es, die beiden ersten Gleichungen von (4) durch die Beziehungen

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} = 0\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} = 0\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} = 0\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} = 0$$

zu befriedigen, aus denen sich die vier Parameter als Funktionen von x_1 und x_2 ergeben. Um nun allgemein aus dem vollständigen Integralsystem ähnlich wie oben Integrale mit willkürlichen Funktionen herzuleiten, setze man

$$\text{(5)} \qquad \text{I.} \quad a_{22} = \varphi(a_{11}, a_{12}, a_{21})\,,$$

worin φ eine willkürliche Funktion darstellt, so daß die Gleichungen (4) in

$$\text{(6)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}}\right)\frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}}\right)\frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{21}}\right)\frac{\partial a_{21}}{\partial x_1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left(\frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}}\right)\frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}}\right)\frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} \\ &\qquad\qquad + \left(\frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{21}}\right)\frac{\partial a_{21}}{\partial x_2} = 0 \end{aligned} \right.$$

übergehen und durch die sechs Gleichungen

$$\text{(7)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} = 0\,, \quad \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} = 0 \\ &\frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{21}} = 0\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{11}} = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{12}} = 0\,, \quad \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}}\frac{\partial \varphi}{\partial a_{21}} = 0 \end{aligned} \right.$$

befriedigt werden. Wählt man für φ eine beliebige, aber bestimmte Funktion von a_{11}, a_{12}, a_{21} und setzt diesen Wert in (7) ein, so erhält man sechs Gleichungen, denen a_{11}, a_{12}, a_{21} als Funktionen von x_1 und x_2 genügen müssen, was im allgemeinen wieder unmöglich ist, und ebensowenig wird sich, wenn man zwischen den sechs Gleichungen (7) x_1 und x_2 eliminiert, aus den vier partiellen Differentialgleichungen in a_{11}, a_{12}, a_{21} und φ im allgemeinen die willkürliche Funktion φ bestimmen lassen.

Setzt man

$$\text{(8)} \qquad \text{II.} \quad a_{21} = \varphi_1(a_{11}, a_{12}), \quad a_{22} = \varphi_2(a_{11}, a_{12}),$$

worin φ_1 und φ_2 wieder willkürliche Funktionen darstellen sollen, so werden die Gleichungen (4) die Form haben:

$$\text{(9)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}}\right) \frac{\partial a_{11}}{\partial x_1} \\ &+ \left(\frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}}\right) \frac{\partial a_{12}}{\partial x_1} = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\left(\frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}}\right) \frac{\partial a_{11}}{\partial x_2} \\ &+ \left(\frac{\partial F_2}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}}\right) \frac{\partial a_{12}}{\partial x_2} = 0, \end{aligned} \right.$$

so daß wieder den vier Beziehungen zu genügen ist:

$$\text{(10)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}} = 0 \\ &\frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}} = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}} = 0 \\ &\frac{\partial F_2}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}} = 0, \end{aligned} \right.$$

aus denen im allgemeinen für willkürliche, aber bestimmt angenommene Funktionen φ_1 und φ_2 der beiden Parameter sich a_{11} und a_{12} als Funktionen von x_1 und x_2 nicht ergeben werden. Um nun eine Relation zwischen den willkürlichen Funktionen φ_1 und φ_2 zu finden, für welche dies möglich ist, eliminiere man aus den vier Gleichungen (10) x_1 und x_2, und erhält zwei partielle Differentialgleichungen

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &\omega_1\left(a_{11}, a_{12}, \varphi_1, \varphi_2, \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}}\right) = 0 \\ &\omega_2\left(a_{11}, a_{12}, \varphi_1, \varphi_2, \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}}, \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

mit den unabhängigen Variabeln a_{11}, a_{12} und den beiden abhängigen Variabeln φ_1 und φ_2, aus denen man nur ein beliebiges Integralsystem zu ermitteln und in zwei der Gleichungen (10) zu substituieren hat, um a_{11} und a_{12} als Funktionen bestimmter Werteverbindungen von x_1 und x_2 und daraus die Werte von

$$a_{21} = \varphi_1(a_{11}, a_{12}), \quad a_{22} = \varphi_2(a_{11}, a_{12})$$

herzuleiten.

Nehmen wir als Beispiel das oben für die Behandlung der vollständigen Integrale benutzte Differentialgleichungssystem

$$4x_1\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right) + (x_1 + 2x_2)\left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0$$

$$y_1 + y_2 = \left(\frac{x_2}{4} - \frac{x_1}{8}\right)\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \left(\frac{3x_2}{4} + \frac{x_1}{8}\right)\frac{\partial y_2}{\partial x_2},$$

von der ein vollständiges Integralsystem durch

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2$$

$$y_2 = -a_{11}x_1 - a_{12}\left(3x_1x_2 + \tfrac{1}{2}x_1^2\right) - a_{21}x_1^2 + a_{22}x_2^2$$

gegeben war, so gehen die Gleichungen (10) in

$$(12) \qquad x_1 + x_1^2\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + x_2^2\frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}} = 0$$

$$(13) \qquad -x_1 - x_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + x_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}} = 0$$

$$(14) \qquad x_1 x_2 + x_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} + x_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}} = 0$$

$$(15) \qquad \left(-3x_1 x_2 - \tfrac{1}{2} x_1^2\right) - x_1^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} + x_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}} = 0$$

über, und man erhält zum Zweck der Elimination von x_1 und x_2 durch Addition und Subtraktion von (12) und (13):

$$(16) \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}} = 0\,, \qquad (17) \quad x_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + 1 = 0\,,$$

ferner durch Subtraktion der Gleichungen (14) und (15) mit Benutzung von (17):

$$(18) \qquad x_2 = \tfrac{1}{8}\left(1 + 4\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}}\right) \frac{1}{\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}}}\,,$$

und durch Substitution der Werte von x_1 und x_2 aus (17) und (18) in (14) die Beziehung

$$(19) \qquad \left(1 + 8\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} + 16\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}}\right)^2\right) \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}} + 32\frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} - 8 = 0\,,$$

welche mit (16) das gesuchte Differentialgleichungssystem für φ_1 und φ_2 als Funktionen von a_{11} und a_{12} bildet. Nach (16) können wir

$$(20) \qquad a_{22} = \varphi_2(a_{11}, a_{12}) = \psi(a_{12})$$

setzen, worin ψ eine willkürliche Funktion von a_{12} ist, und hieraus folgt nach (19):

$$(21) \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{12}} = \frac{-\psi' - 4 + 4\sqrt{\psi' + 1}}{4\psi'} = -\tfrac{1}{4} - \frac{1}{\psi'} + \frac{\sqrt{\psi' + 1}}{\psi'} = \Psi(a_{12})$$

oder

$$a_{21} = \varphi_1(a_{11}, a_{12}) = \int \Psi(a_{12})\, d a_{12} + \psi_1(a_{11}), \tag{22}$$

worin die in Ψ enthaltene Funktion $\psi(a_{12})$ sowie $\psi_1(a_{11})$ willkürliche Funktionen darstellen. Setzt man für beliebig gewählte Funktionen $\psi(a_{12})$ und $\psi_1(a_{11})$ die Ausdrücke (20) und (22) in (17) und (18) ein, so erhält man

$$x_1 = -\frac{1}{\psi_1'(a_{11})}, \quad \frac{2x_2}{x_1} = \frac{1-\sqrt{\psi_2'(a_{12})+1}}{\psi_2'(a_{12})}, \tag{23}$$

so daß a_{11} eine Funktion von x_1, a_{12} eine solche von x_2/x_1 ist. Wählt man z. B. die willkürlichen Funktionen $\psi_1(a_{11}) = \frac{1}{2} a_{11}^2$, $\psi(a_{12}) = \frac{1}{2} a_{12}^2$, so ergibt sich nach (20) $a_{22} = \frac{1}{2} a_{12}^2$ und $\psi'(a_{12}) = a_{12}$; ferner nach (21):

$$\Psi(a_{12}) = -\tfrac{1}{4} - \frac{1-\sqrt{a_{12}+1}}{a_{12}},$$

also

$$\int \Psi(a_{12})\, d a_{12} = -\frac{a_{12}}{4} - \log a_{12} + \int \frac{\sqrt{a_{12}+1}}{a_{12}}\, d a_{12},$$

und somit nach (22) und (20):

$$a_{22} = \varphi_2 = \psi_2 = \tfrac{1}{2} a_{12}^2$$

$$a_{21} = \varphi_1 = \tfrac{1}{2} a_{11}^2 - \frac{a_{12}}{4} + 2\sqrt{a_{12}+1} - \log a_{12} + \log \frac{\sqrt{a_{12}+1}-1}{\sqrt{a_{12}+1}+1}.$$

Nun ist nach (23):

$$a_{11} = -\frac{1}{x_1}, \quad a_{12} = \frac{(x_1+4x_2)\, x_1}{4x_2^2}$$

und somit

$$a_{21} = 2\log 2 + 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{x_1^2} - \frac{1}{16}\frac{x_1^2}{x_2^2} + \frac{1}{4}\frac{x_1}{x_2} - 2\log \frac{x_1+4x_2}{x_2}$$

$$a_{22} = \frac{(x_1+4x_2)^2 x_1^2}{32\, x_2^2},$$

also die vier Parameter als Funktionen von x_1 und x_2 gefunden.

Nehmen wir endlich an, daß drei Parameter willkürliche Funktionen eines sind, also

$$(24) \qquad \text{III.} \quad a_{12} = \varphi_1(a_{11}), \quad a_{21} = \varphi_2(a_{11}), \quad a_{22} = \varphi_3(a_{11})$$

ist, so werden die Gleichungen (4) in

$$(25) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{12}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_1}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_{11}} &= 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{12}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial a_{11}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{21}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial a_{12}} + \frac{\partial F_2}{\partial a_{22}} \frac{\partial \varphi_3}{\partial a_{11}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

übergehen, aus denen sich für willkürlich angenommene Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ der Parameter a_1 im allgemeinen nicht als Funktion von x_1 und x_2 bestimmen läßt.

Es bleibt also für die Auffindung von Integralen partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung mit willkürlichen Funktionen mittels der Variation der Konstanten im allgemeinen nur der Fall übrig, in welchem zwei Parameter willkürliche Funktionen der beiden andern sind, und zwar sind diese definiert als Lösungen von zwei partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei unabhängigen und zwei abhängigen Variabeln, also von der Art der vorgelegten zu integrierenden Differentialgleichungen.

3.
Integralfunktionen partieller Differentialgleichungssysteme.

Ist für eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Variabeln

$$(1) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial y}{\partial x_n}\right) = 0$$

ein Integral mit einer willkürlichen Konstanten

(2) $\quad y = \varphi(x_1, x_2, \ldots x_n, a) \quad$ oder $\quad F(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = a,$

so wird sich durch Substitution des Wertes von $\partial y/\partial x_a$ aus der Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x_a} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_a} = 0$$

in (1) die Beziehung ergeben:

$$(3) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \ldots -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_n}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right) = 0,$$

welcher das von der willkürlichen Konstanten a abhängige Integral y genügen müßte, so daß, weil die Konstante a in der Gleichung (3) nicht enthalten ist, diese in $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ identisch sein muß und *somit als eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit den $n+1$ unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ und der abhängigen Variabeln z*

$$(4) \qquad f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_1}}{\frac{\partial z}{\partial y}}, -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_2}}{\frac{\partial z}{\partial y}}, \ldots -\frac{\frac{\partial z}{\partial x_n}}{\frac{\partial z}{\partial y}}\right) = 0$$

aufgefaßt werden kann, von welcher

$$(5) \qquad z = F(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$$

ein von einer Konstanten freies partikuläres Integral ist. Aber man kann auch umgekehrt *aus jedem von einer willkürlichen Konstanten freien partikulären Integral der Differentialgleichung (4), indem man dasselbe einer beliebigen Konstanten gleichsetzt, ein partikuläres Integral mit einer Konstanten der Differentialgleichung (1) herleiten.* Denn sei

$$z = \bar{F}(x_1, x_2, \ldots x_n, y)$$

ein Integral von (4), so daß die Gleichung

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, y, -\frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_1}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}}, -\frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_2}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}}, \ldots -\frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_n}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}}\right) = 0$$

für beliebige Werte von $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ identisch erfüllt wird, so ist dies auch der Fall, wenn für y die aus der Gleichung

$$\bar{F}(x_1, x_2, \ldots x_n, y) = a,$$

worin a eine willkürliche Konstante ist, hervorgehende Funktion $\bar{y}$ als Funktion von $x_1, x_2, \ldots x_n, a$ gesetzt wird. Da aber für diese

$$-\frac{\frac{\partial \bar{F}}{\partial x_\alpha}}{\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}} = \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_\alpha}$$

ist, so geht die obige Gleichung in

$$f\left(x_1, x_2, \ldots x_n, \bar{y}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_2}, \ldots \frac{\partial \bar{y}}{\partial x_n}\right) = 0$$

über, oder es ist die aus der Gleichung $F(x_1, x_2, \ldots x_n, \bar{y}) = a$ sich ergebende Funktion $\bar{y}$ mit einer willkürlichen Konstanten ein partikuläres Integral von (1).

Es soll nun der Kürze halber ein von einer willkürlichen Konstanten freies Integral der Differentialgleichung (4) eine *Integralfunktion* der Differentialgleichung (1) genannt werden; aus einer Integralfunktion von (1) ergibt sich die Kenntnis eines von einer willkürlichen Konstanten abhängigen Integrals eben dieser Differentialgleichung.

Des Folgenden wegen ist aber eine ergänzende Bemerkung hierzu wesentlich. *Ist in der Differentialgleichung* (1) y *nicht explizite enthalten und ist diese in den partiellen Ableitungen homogen ganz vom Grade* N, *hat also die Form:*

$$(6)\qquad \sum_{(m_1+m_2+\cdots+m_n=N)} f_{m_1, m_2, \ldots m_n}(x_1, x_2, \ldots x_n)\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{\partial y}{\partial x_n}\right)^{m_n}=0\,,$$

so wird die partielle Differentialgleichung (4) *in*

$$(7)\qquad \sum_{(m_1+m_2+\cdots+m_n=N)} f_{m_1, m_2, \ldots m_n}(x_1, x_2, \ldots x_n)\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{m_n}=0\,,$$

also in die Form der gegebenen Differentialgleichung übergehen, und die Integrale dieser partiellen Differentialgleichung von y unabhängig, also die oben auseinandergesetzte Methode zur Herleitung eines von einer willkürlichen Konstanten abhängigen Integrals $\bar{y}$ der Differentialgleichung (1) *nicht anwendbar sein und umgekehrt.*

Machen wir aber für die Differentialgleichung (1) nicht die eben gemachten Voraussetzungen des Ausnahmefalles, so hat allgemein die partielle Differentialgleichung (4) in z die Form

$$\sum_{m_1, m_2, \ldots m_n}(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n} f_{m_1, m_2, \ldots m_n}(x_1, x_2, \ldots x_n, y)\,\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{m_n}}{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}}=0\,,$$

oder, wenn mit der höchsten Potenz M von $\partial z/\partial y$ in den Nennern multipliziert wird,

$$(8)\quad\left\{\begin{aligned}&\sum_{m_1, m_2, \ldots m_n}(-1)^{m_1+m_2+\cdots+m_n} f_{m_1, m_2, \ldots m_n}(x_1, x_2, \ldots x_n, y)\\&\quad\times\left(\frac{\partial z}{\partial x_1}\right)^{m_1}\left(\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)^{m_2}\cdots\left(\frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^{m_n}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^{M-m_1-\cdots-m_n}=0\,,\end{aligned}\right.$$

und da diese Gleichung mit den unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n, y$ die abhängige Variable z nicht explizite enthält und in den partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \ldots\ \frac{\partial z}{\partial x_n},\ \frac{\partial z}{\partial y}$$

homogen ganz vom Grade M ist, so erfüllt sie die für den Ausnahmefall gemachten Voraussetzungen, und man kann daher nicht nach der oben befolgten Methode ein Integral von (8) mit einer willkürlichen Konstanten aus einer Integralfunktion derselben, d. h. aus einem von einer Konstanten freien Integral derjenigen partiellen Differentialgleichung herleiten, die man so aus der Gleichung (4) entstehen läßt, wie (4) aus (1) entstanden ist, und daher nicht ein Integral von (1) mit zwei willkürlichen Konstanten nach der angegebenen Methode aus einem von Konstanten freien Integral einer von neuem wie oben reduzierten Differentialgleichung herleiten.

Soll also für eine partielle Differentialgleichung (1) *ein Integral mit einer willkürlichen Konstanten gefunden werden, so suche man ein von einer Konstanten freies Integral* $\bar{z}$ *der Differentialgleichung* (4), *setze* $\bar{z}=a$, *und berechne aus dieser Gleichung* y *als Funktion von* $x_1, x_2, \dots x_n$ *und* a; *dies ist dann nicht möglich, wenn die Gleichung* (1) y *nicht explizite enthält und in den Differentialquotienten ganz und homogen ist. Da die partielle Differentialgleichung* (4) *in den* $n+1$ *unabhängigen Variabeln* $x_1, x_2, \dots x_n, y$ *gerade die Bedingungen dieses Ausnahmefalles erfüllt, läßt sich durch die entsprechende Substitution in* (4) *keine partielle Differentialgleichung in* t *auf diesem Wege aufstellen, von der ein von einer Konstanten freies Integral ein von einer Konstanten abhängiges Integral von* (4), *also ein von zwei willkürlichen Konstanten abhängiges Integral von* (1), *also auch nicht das vollständige herleiten.*

Um diese Betrachtungen auf Systeme partieller Differentialgleichungen auszudehnen, wollen wir die Integralsysteme mit zwei willkürlichen Konstanten a_1 und a_2:

$$(9) \qquad y_1 = \varphi_1(x_1, x_2, a_1, a_2), \quad y_2 = \varphi_2(x_1, x_2, a_1, a_2) \quad \text{oder}$$

$$(10) \qquad F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = a_1, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = a_2$$

der Differentialgleichungen

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & f_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \\ & f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_2}, \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, \frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right) = 0 \end{aligned} \right.$$

untersuchen, für welche sich aus (10), wenn

$$
(12)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = d\,, \quad
\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = d_1\,, \quad
\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{vmatrix} = d_2 \\
&\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix} = \delta\,, \quad
\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \delta_2
\end{aligned}
\right.
$$

gesetzt werden, die partiellen Differentialquotienten in der Form ergeben:

$$
(13)\qquad \frac{\partial y_1}{\partial x_1} = -\frac{d_1}{d}\,, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = -\frac{\delta_1}{d}\,, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = -\frac{d_2}{d}\,, \quad \frac{\partial y_2}{\partial x_2} = -\frac{\delta_2}{d}\,,
$$

und durch Substitution dieser Größen in (11) die Beziehungen

$$
(14)\quad \left\{
\begin{aligned}
&f_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, -\frac{d_1}{d}, -\frac{\delta_1}{d}, -\frac{d_2}{d}, -\frac{\delta_2}{d}\right) = 0 \\
&f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, -\frac{d_1}{d}, -\frac{\delta_1}{d}, -\frac{d_2}{d}, -\frac{\delta_2}{d}\right) = 0\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Da nun die Größen d, d_1, δ_1, d_2, δ_2 die Konstanten a_1 und a_2 nicht enthalten, dies also auch für die aus (14) hervorgehenden Werte von y_1 und y_2 gegen die Voraussetzung (10) der Fall sein würde, so müssen die Gleichungen (14) in x_1, x_2, y_1, y_2 identisch sein, also F_1 und F_2 ein von Konstanten freies Integralsystem der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (14) mit den unabhängigen Variabeln x_1, x_2, y_1, y_2 und den beiden abhängigen Variabeln F_1 und F_2 sein, die selbst explizite in den Differentialgleichungen nicht vorkommen; werden nun wie oben $F_1 = z_1$, $F_2 = z_2$ und entsprechend $d = e$, $d_1 = e_1$, $\delta_1 = \eta_1$, $d_2 = e_2$, $\delta_2 = \eta_2$ gesetzt, so werden die Gleichungen (14) in

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} f_1\left(x_1, x_2, y_1, y_2, -\frac{e_1}{e}, -\frac{\eta_1}{e}, -\frac{e_2}{e}, -\frac{\eta_2}{e}\right) = 0 \\ f_2\left(x_1, x_2, y_1, y_2, -\frac{e_1}{e}, -\frac{\eta_1}{e}, -\frac{e_2}{e}, -\frac{\eta_2}{e}\right) = 0 \end{array} \right.$$

übergehen, in denen z_1 und z_2 nicht enthalten und die nur von den partiellen Differentialquotienten dieser, nach x_1, x_2, y_1, y_2 genommen, den Gleichungen (12) gemäß, abhängen.

Ist nun $\bar{z}_1 = \bar{F}_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$, $\bar{z}_2 = \bar{F}_2(x_1, x_2, y_1, y_2)$ *ein von willkürlichen Konstanten freies Integralsystem von* (15), *das wieder als ein System von Integralfunktionen der Differentialgleichungen* (11) *bezeichnet werden soll, so wird man wie oben schließen können, daß die aus den Gleichungen*

$$\bar{F}_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = a_1, \quad \bar{F}_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = a_2,$$

worin a_1 *und* a_2 *willkürliche Konstanten bedeuten, sich ergebenden Werte* $\bar{y}_1$ *und* $\bar{y}_2$ *als Funktionen von* x_1, x_2, a_1, a_2 *ein Integralsystem von* (11) *sein werden.*

Wir wollen nun sehen, ob diese Methode der Herleitung eines Integralsystems von (11) mit zwei willkürlichen Konstanten aus einem von willkürlichen Konstanten freien Integralsystem der Differentialgleichungen (15) mit den vier unabhängigen Variabeln x_1, x_2, y_1, y_2 wiederum nicht anwendbar ist, wenn die Differentialgleichungen (11) die abhängigen Variabeln y_1 und y_2 nicht explizite enthalten und in den partiellen Differentialquotienten homogen ganz vom Grade N_1 resp. N_2 sind, oder welches die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür sind, daß die partiellen Differentialgleichungen (15) nur Integrale besitzen, welche nicht von y abhängig sind.

Sei das Differentialgleichungssystem (11) in der Form gegeben:

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} \sum\limits_{(m_1+m_2+n_1+n_2=N_1)} f_{m_1, m_2, n_1, n_2}(x_1, x_2) \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^{m_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^{m_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)^{n_2} = 0 \\ \sum\limits_{(\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2=N_2)} \varphi_{\mu_1, \mu_2, \nu_1, \nu_2}(x_1, x_2) \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)^{\mu_1} \left(\frac{\partial y_1}{\partial x_2}\right)^{\mu_2} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_1}\right)^{\nu_1} \left(\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\right)^{\nu_2} = 0, \end{array} \right.$$

worin y_1 und y_2 fehlen, so gehen diese Gleichungen durch Substitution der Werte (13) in

$$(17)\quad \begin{cases} \sum\limits_{(m_1+m_2+n_1+n_2=N_1)} f_{m_1,m_2,n_1,n_2}(x_1,x_2)\, d_1^{m_1}\,\delta_1^{m_2}\,d_2^{n_1}\,\delta_2^{n_2} = \omega_1(x_1,x_2,d_1,\delta_1,d_2,\delta_2) = 0 \\ \sum\limits_{(\mu_1+\mu_2+\nu_1+\nu_2=N_2)} \varphi_{\mu_1,\mu_2,\nu_1,\nu_2}(x_1,x_2)\, d_1^{\mu_1}\,\delta_1^{\mu_2}\,d_2^{\nu_1}\,\delta_2^{\nu_2} = \omega_2(x_1,x_2,d_1,\delta_1,d_2,\delta_2) = 0 \end{cases}$$

über, und allgemein werden offenbar die angenommenen Bedingungen von der Unabhängigkeit dieser Gleichungen von den expliziten y_1 und y_2 sowie von der Homogenität der Gleichungen (16) in den partiellen Differentialquotienten, also auch der Homogenität von (17) in bezug auf die Differentialquotienten von z_1 und z_2 in bezug auf x_1, x_2, y_1, y_2 noch nicht genügen, um wie oben für *eine* partielle Differentialgleichung einen Ausnahmefall zu bilden; nur wenn die Differentialgleichungen (17) die Differentialquotienten

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, \frac{\partial F_2}{\partial y_2}$$

und y_1 sowie y_2 selbst nicht explizite enthalten, wird ein Integralsystem F_1 und F_2 dieses partiellen Differentialgleichungssystems nur von x_1 und x_2 abhängen, und durch Gleichsetzen dieser mit einer Konstanten kein Integral der Differentialgleichungen (16) sich ergeben. Es bleibt somit nur zu untersuchen, unter welchen Bedingungen und bei gleichzeitiger Voraussetzung der Unabhängigkeit der Integrale F_1 und F_2 voneinander die Differentialgleichungen (17) von den Differentialquotienten

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}, \frac{\partial F_1}{\partial y_2}, \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, \frac{\partial F_2}{\partial y_2}$$

unabhängig sein werden. Setzt man nun die Differentialquotienten der Funktionen ω_1 und ω_2 nach diesen vier Ableitungen genommen der Null gleich, so ergibt sich vermöge der Beziehungen (12):

$$(18)\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{\partial\omega_1}{\partial d_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\delta_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}=0\,, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial d_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\delta_2}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial\omega_1}{\partial d_1}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\delta_1}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}=0\,, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial d_1}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\delta_1}\dfrac{\partial F_2}{\partial x_2}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial\omega_1}{\partial d_2}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\delta_2}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}=0\,, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial d_2}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\delta_2}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}=0\\[2ex]
\dfrac{\partial\omega_1}{\partial d_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_1}{\partial\delta_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}=0\,, & \dfrac{\partial\omega_2}{\partial d_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial\omega_2}{\partial\delta_1}\dfrac{\partial F_1}{\partial x_2}=0\,,
\end{array}\right.$$

und hieraus entweder ω_1 und ω_2 von den Größen $d_1, d_2, \delta_1, \delta_2$ unabhängig – was ausgeschlossen ist –, oder

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{oder} \quad \Omega(F_1, F_2, y_1, y_2) = 0\,,$$

was wieder der Annahme der Unabhängigkeit der Funktionen F_1 und F_2 voneinander widerspricht. *Es werden somit die Differentialgleichungen* (15) *im allgemeinen nicht nur Integralsysteme haben, welche nur von den unabhängigen Variabeln x_1 und x_2 abhängen, und man wird daher aus einem keine willkürlichen Konstanten enthaltenden Integralsystem von* (15) *ein von zwei beliebigen Konstanten abhängiges Integralsystem von* (11) *herleiten können, und somit wird auch die Fortsetzung dieses Verfahrens für die Aufsuchung eines Integralsystems mit beliebig vielen Konstanten gestattet sein. Es tritt also hier der Ausnahmefall, der sich für e i n e partielle Differentialgleichung erster Ordnung mit beliebig vielen unabhängigen Variabeln ergab, nicht ein.*

Für den Fall, daß man die Annahme der Homogenität in den Ableitungen für die Differentialgleichungen (11) fallen läßt, werden die Differentialgleichungen (16), wenn die höchste Potenz von d in den Nennern der einzelnen Glieder der Summe M_1 resp. M_2 ist, durch Multiplikation der Gleichung mit d^M in

$$\sum_{m_1, m_2, n_1, n_2} (-1)^{m_1+m_2+n_1+n_2} f_{m_1, m_2, n_1, n_2}(x_1, x_2)\, d_1^{m_1} d_2^{m_2} \delta_1^{n_1} \delta_2^{n_2} d^{M_1-m_1-m_2-n_1-n_2} = 0$$

und ähnlich die zweite Gleichung, also in eine ganze homogene Funktion von M_1^{ten} resp. M_2^{ten} Grade in $d_1, d_2, \delta_1, \delta_2$ und d übergehen, und die Bedingungsgleichungen (18) für die Unabhängigkeit der Differentialgleichungen von den nach y_1 und y_2 genommenen Ableitungen von F_1 und F_2 dann lauten:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial d_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \delta_2} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial d} \frac{\partial F_2}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial d_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \delta_2} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial d} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial d_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial d} \frac{\partial F_2}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial d_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \omega_1}{\partial \delta_1} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \omega_1}{\partial d} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} = 0,$$

und die ähnlichen Beziehungen für ω_2.

Die in den ersten drei Abschnitten der vorliegenden Arbeit durchgeführten Untersuchungen wurden der Einfachheit der Darstellung wegen nur an einem partiellen Differentialgleichungssystem mit zwei abhängigen und zwei unabhängigen Variabeln im einzelnen dargestellt, gestatten aber, wie man unmittelbar sieht, die Erweiterung auf beliebige partielle Differentialgleichungssysteme.

4.

Ausdehnung der ABELschen Theoreme über Quadraturen algebraischer Funktionen auf die Integralfunktionen linearer partieller Differentialgleichungssysteme erster Ordnung.

Um für Integralfunktionen gewisser partieller Differentialgleichungssysteme ähnliche Untersuchungen anstellen zu können, wie ich sie für totale Differentialgleichungssysteme und für *eine* partielle Differentialgleichung erster Ordnung durchgeführt habe[1],

[1] »Über die Beziehungen zwischen Integralfunktionen algebraischer Differentialgleichungssysteme« (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der

und welche die Ausdehnung der wichtigen ABELschen Theoreme über die Quadratur algebraischer Funktionen auf Differentialgleichungen der genannten Art gestatteten, sei das lineare partielle Differentialgleichungssystem mit den n unabhängigen Variabeln $x_1, x_2, \ldots x_n$ und den ν abhängigen Variabeln $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ vorgelegt:

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1 \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + f_2 \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \cdots + f_n \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} = \psi_1 \\ f_1 \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + f_2 \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots + f_n \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} = \psi_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_1 \dfrac{\partial y_\nu}{\partial x_1} + f_2 \dfrac{\partial y_\nu}{\partial x_2} + \cdots + f_n \dfrac{\partial y_\nu}{\partial x_n} = \psi_\nu\,, \end{array}\right.$$

in denen $f_1, \ldots f_n, \psi_1, \ldots \psi_\nu$ Funktionen von $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ sind.

Wird ein Integralsystem desselben mit ν willkürlichen Konstanten

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_\nu),\ y_2 = \varphi_2(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_\nu), \ldots \\ \qquad\qquad\qquad y_\nu = \varphi_\nu(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_\nu) \end{array}\right.$$

oder

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu) = a_1,\ F_2(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu) = a_2, \ldots \\ \qquad\qquad\qquad F_\nu(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu) = a_\nu \end{array}\right.$$

gesucht, für welches also

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_\nu}\dfrac{\partial y_\nu}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} + \cdots + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_\nu}\dfrac{\partial y_\nu}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \nu) \\ \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial x_n} + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_1}\dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_2}\dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} + \cdots + \dfrac{\partial F_\alpha}{\partial y_\nu}\dfrac{\partial y_\nu}{\partial x_n} = 0 \end{array}\right.$$

Wissenschaften, Jahrg. 1919, 13. Abh.). — »Über die Integralfunktionen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung« (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1920, 8. Abh.).

ist, so ergibt sich durch Multiplikation dieser Gleichungen mit $f_1, f_2, \ldots f_n$ und Addition nach (1):

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & f_1 \frac{\partial F_a}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial F_a}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial F_a}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial F_a}{\partial y_1} + \psi_2 \frac{\partial F_a}{\partial y_2} + \cdots \\ & \qquad + \psi_\nu \frac{\partial F_a}{\partial y_\nu} = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots \nu). \end{aligned}\right.$$

Bemerkt man nun, daß sich aus diesen ν Gleichungen $y_1, y_2, \ldots y_\nu$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n$ gegen die Voraussetzung ohne willkürliche Konstanten ergeben würden, so folgt wieder wie oben, daß die Gleichungen (5) für die durch die Gleichungen (3) definierten Funktionen $F_1, F_2, \ldots F_\nu$ in $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ identisch sein müssen, oder daß

$$(6)\qquad z_1 = F_1,\ z_2 = F_2, \ldots z_\nu = F_\nu$$

ein von willkürlichen Konstanten freies Integralsystem des partiellen Differentialgleichungssystems.

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & f_1 \frac{\partial z_a}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial z_a}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial z_a}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial z_a}{\partial y_1} + \psi_2 \frac{\partial z_a}{\partial y_2} + \cdots \\ & \qquad + \psi_\nu \frac{\partial z_a}{\partial y_\nu} = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots \nu) \end{aligned}\right.$$

mit den $n+\nu$ unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ und den ν abhängigen Variabeln $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ sein wird. Umgekehrt werden sich auch aus einem beliebigen, von willkürlichen Konstanten freien System voneinander unabhängiger Integrale von (7)

$$\bar{z}_1 = \bar{F}_1,\ \bar{z}_2 = \bar{F}_2, \ldots \bar{z}_\nu = \bar{F}_\nu$$

aus den Gleichungen

$$(8)\qquad \bar{F}_1 = a_1,\ \bar{F}_2 = a_2, \ldots \bar{F}_\nu = a_\nu$$

$y_1, y_2, \ldots y_\nu$ als Funktionen von $x_1, x_2, \ldots x_n, a_1, a_2, \ldots a_\nu$ ergeben, welche ein Integralsystem der Differentialgleichungen (1) bilden.

Denn da $\bar{F}_1, \ldots \bar{F}_\nu$ für alle $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ den Differentialgleichungen (7) genügen, so wird dies auch der Fall sein, wenn darin für $y_1, \ldots y_\nu$ die aus den Gleichungen (8) hervorgehenden Werte, also

$$\bar{y}_1 = \bar{\varphi}_1(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_\nu), \quad \bar{y}_2 = \bar{\varphi}_2(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_\nu), \ldots$$
$$\bar{y}_\nu = \bar{\varphi}_\nu(x_1, \ldots x_n, a_1, \ldots a_\nu)$$

gesetzt werden. Da sich nun den Gleichungen (7) zufolge

$$f_1 \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_1} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_\nu} = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \nu)$$

ergibt, und nach (4)

$$\frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_\beta} + \cdots + \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_\nu} \frac{\partial \bar{y}_\nu}{\partial x_\beta} = 0 \qquad (\beta = 1, 2, \ldots n)$$

ist, so folgt aus den beiden Gleichungen durch Elimination der nach $x_1, x_2, \ldots x_n$ genommenen Ableitungen von $\bar{F}_\alpha$:

$$-f_1\left(\frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_\nu} \frac{\partial \bar{y}_\nu}{\partial x_1}\right) - f_2\left(\frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_\nu} \frac{\partial \bar{y}_\nu}{\partial x_2}\right) - \cdots$$
$$+ \psi_1 \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_1} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_\nu} = 0$$

oder

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_1}\left(f_1 \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial x_n} - \psi_1\right) + \cdots \\ &+ \frac{\partial \bar{F}_\alpha}{\partial \bar{y}_\nu}\left(f_1 \frac{\partial \bar{y}_\nu}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \bar{y}_\nu}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial \bar{y}_\nu}{\partial x_n} - \psi_\nu\right) = 0 \end{aligned} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots \nu),$$

und aus diesen ν in $\partial \bar{F}_\alpha / \partial \bar{y}_1, \ldots \partial \bar{F}_\alpha / \partial \bar{y}_\nu$ linearen homogenen Gleichungen ist zu schließen, daß, weil die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{y}_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{F}_1}{\partial \bar{y}_\nu} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \bar{F}_\nu}{\partial \bar{y}_1} & \cdots & \frac{\partial \bar{F}_\nu}{\partial \bar{y}_\nu} \end{vmatrix}$$

wegen der Unabhängigkeit der Integralfunktionen voneinander von Null verschieden ist, die eingeklammerten Größen verschwinden müssen, also $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots \bar{y}_\nu$ ein Integralsystem der Differentialgleichungen (1) sein werden.

Wollte man nun auf das partielle Differentialgleichungssystem (7) mit den $n+\nu$ unabhängigen Variabeln $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ dieselbe Methode anwenden, um von diesem, den Gleichungen (1) analogen linearen, aber homogenen Differentialgleichungssystem ein Integralsystem mit ν willkürlichen Konstanten, also von (1) ein solches mit 2ν Konstanten herzuleiten, so hätte man

$$z_a = \chi_a(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu, b_1, \ldots b_\nu)$$

oder

$$\mathfrak{F}_a = (x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu, z_1, \ldots z_\nu) = b_a \qquad (a=1, 2, \ldots \nu)$$

zu setzen, woraus sich

$$(9) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial x_\gamma} + \frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_\gamma} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial x_\gamma} = 0 \qquad (\gamma=1,2,\ldots n)$$

$$(10) \qquad \frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial y_\delta} + \frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial y_\delta} + \cdots + \frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial z_\nu}\frac{\partial z_\nu}{\partial y_\delta} = 0 \qquad (\delta=1,2,\ldots \nu)$$

und durch Multiplikation von (9) mit $f_1, \ldots f_n$, von (10) mit $\psi_1, \ldots \psi_\nu$ und Addition

$$(11) \quad f_1\frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial x_n} + \psi_1\frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu\frac{\partial \mathfrak{F}_a}{\partial \psi_\nu} = 0 \qquad (a=1,2,\ldots\nu)$$

ergeben, und durch Integration dieses Differentialgleichungssystems die Funktionen $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots \mathfrak{F}_\nu$ nur als Funktionen von $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ folgen und $z_1, z_2, \ldots z_\nu$ nicht enthalten, woraus sich also durch Gleichsetzen der Funktionen $\mathfrak{F}$ mit Konstanten sich die Größen $z_1, \dots z_\nu$ nicht als Funktionen von $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu$ herleiten lassen.

Für ein lineares homogenes Differentialgleichungssystem der Form (1) *werden sich daher nach der angegebenen Methode im allgemeinen aus den von willkürlichen Konstanten freien Integralen der partiellen Differentialgleichungen* (7) *für die Integralfunktionen von* (1) *für diese nur Integrale mit zwei willkürlichen Konstanten herleiten lassen, während die Anwendung auf die Differentialgleichungen der letzteren, weil diese die neuen abhängigen Variabeln nicht explizite enthalten, die Herleitung von Integralen der Differentialgleichungen* (1) *mit mehr als zwei willkürlichen Konstanten nicht gestattet.*

Gehen wir nunmehr zur Untersuchung der Integralfunktionen des Differentialgleichungsysstems (1) oder nach (5) zur Untersuchung der Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$(12)\quad f_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial \omega}{\partial y_1} + \psi_2 \frac{\partial \omega}{\partial y_2} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial \omega}{\partial y_\nu} = 0$$

über, und werde angenommen, daß (1) eine algebraische Integralfunktion besitze, die also die Lösung einer Gleichung der Form ist:

$$(13)\quad \omega^p + r_1(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu)\,\omega^{p-1} + \cdots + r_p(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu) = 0\,,$$

worin $r_1, r_2, \dots r_p$ rationale Funktionen sind, oder einer mit Adjungierung der Funktionen $f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu$ irreduktibeln algebraischen Gleichung

$$(14)\quad \left\{ \begin{aligned} &\omega^q + \varrho_1(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu, f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu)\,\omega^{q-1} + \dots \\ &\quad + \varrho_q(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu, f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu) = 0\,, \end{aligned} \right.$$

worin $\varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_q$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und welche der Gleichung (12) identisch genügt, so werden, wenn die partiellen Differentialquotienten von $f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu$ nach $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu$ rationale Funktionen der unabhängigen Variabeln und eben dieser Größen sind – was stets der Fall ist, wenn diese Größen algebraische Funktionen von $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu$ sind –, die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial \omega}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial \omega}{\partial x_n}, \frac{\partial \omega}{\partial y_1}, \cdots \frac{\partial \omega}{\partial y_\nu}$$

rationale Funktionen von $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu, f_1, \ldots f_n, \psi_1, \ldots \psi_\nu$ und ω sein, und, wenn diese Ausdrücke für die Ableitungen in die Gleichung (12) substituiert werden, diese Gleichungen wegen der Irreduktibilität der Gleichung (14) durch sämtliche Lösungen dieser Gleichung identisch befriedigt werden. Bezeichnen wir nun die Lösungen der Gleichung (14) mit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_q$, so ergeben sich aus den Gleichungen

$$\begin{gathered}
f_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial \omega_1}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial \omega_1}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial \omega_1}{\partial y_\nu} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f_1 \frac{\partial \omega_q}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial \omega_q}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial \omega_q}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial \omega_q}{\partial y_\nu} = 0
\end{gathered}$$

durch Addition derselben oder der mit den resp. ω multiplizierten nach (14) die Beziehungen

$$f_1 \frac{\partial \varrho_a}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial \varrho_a}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial \varrho_a}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial \varrho_a}{\partial y_\nu} = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots q),$$

und wir finden daher, *daß sich aus einer in den* $n+\nu$ *Variabeln* $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ *algebraischen Integralfunktion des Differentialgleichungssystems* (1) *eine in diesen Variabeln und* $f_1, \ldots f_n, \psi_1, \ldots \psi_\nu$ *rationale Integralfunktion ergibt*, und ebenso verhält es sich mit der Ausdehnung dieses Satzes für den Fall, *daß die Integralfunktion* ω *von der Form ist:*

$$(15) \qquad \omega = u + a_1 J_1 + a_2 J_2 + \cdots + a_\lambda J_\lambda,$$

worin

$$J_a = \int^{w_a} z_a \, dx \qquad (a = 1, 2, \ldots \lambda),$$

wenn z_a *eine algebraische Funktion von* x, *ferner* $w_1, w_2, \ldots w_\lambda$ *und* u *algebraische Funktionen von* $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ *sind, indem sich die Umformung der Größen* $u, w_1, \ldots w_\lambda$ *in die rationale Form mit*

Hilfe des Additionstheorems der ABEL*schen Integrale vollzieht*[1], wobei zu bemerken, daß zu jeder beliebig vorgeschriebenen Form (15) der Integralfunktion ω auch ein Differentialgleichungssystem der Form (1) gehört, da die partiellen Differentialquotienten von ω nach (15) algebraische Funktionen von $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu$ sind und die Substitution derselben in (12) die Bestimmung der algebraischen Funktionen $f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu$ dieser Größen ermöglicht. Ebenso können die in den oben angeführten Arbeiten bewiesenen Sätze auf den Fall ausgedehnt werden, *daß die Konstanten* $a_1, a_2, \dots a_\lambda$ *in* (15) *durch algebraische Integralfunktionen* $u_1, u_2, \dots u_\lambda$ *des linearen Differentialgleichungssystems* (1) *ersetzt werden.*

Es soll nun die Frage aufgeworfen werden, was wir aus der Existenz einer Integralfunktion schließen können, die aus den Größen $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu$ und den λ Transzendenten $J_1, J_2, \dots J_\lambda$ algebraisch zusammengesetzt ist.

Seien die Transzendenten $J_1, J_2, \dots J_\lambda$ nicht algebraisch voneinander abhängig, und

$$\omega = f\left(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu, J_1, J_2, \dots J_\lambda\right), \tag{16}$$

worin f eine algebraische Funktion ist, die durch die Gleichung

$$(17)\begin{cases} \omega^r + R_1\left(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu, f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu, J_1, \dots J_\lambda, w_1, (z_1)_{w_1}, \dots w_\lambda, (z_\lambda)_{w_\lambda}\right)\omega^{r-1} \\ + \dots + R_r\left(x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu, f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu, J_1, \dots J_\lambda, w_1, (z_1)_{w_1}, \dots w_\lambda, (z_\lambda)_{w_\lambda}\right) = 0 \end{cases}$$

definiert sei, welche mit Adjungierung der Größen, von denen die Koeffizienten $R_1, R_2, \dots R_r$ rationale Funktionen sind, und $(z_a)_{w_a}$ den Wert von z_a für $x = w_a$ bedeutet, irreduktibel ist, so werden die in (12) enthaltenen partiellen Differentialquotienten von ω sich ebenfalls rational aus diesen Größen und ω zusammensetzen, wenn $f_1, \dots f_n, \psi_1, \dots \psi_\nu$ algebraische Funktionen von $x_1, \dots x_n$, $y_1, \dots y_\nu$ sind, und sich somit durch Substitution derselben in (12) eine Gleichung von dem Charakter der Gleichung (17) ergeben,

[1] Siehe meine Arbeit: »Ausdehnung der ABELschen Fundamentalsätze der Integralrechnung auf kinetische Potentiale beliebiger Ordnung.« (Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1919, 17. Abh.

so daß wegen der angenommenen Irreduktibilität der letzteren, wenn deren Lösungen mit $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_r$ bezeichnet werden, die Beziehungen folgen:

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{l} f_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_1} + \cdots + f_n \dfrac{\partial \omega_1}{\partial x_n} + \psi_1 \dfrac{\partial \omega_1}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu \dfrac{\partial \omega_1}{\partial y_\nu} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_1 \dfrac{\partial \omega_r}{\partial x_1} + \cdots + f_n \dfrac{\partial \omega_r}{\partial x_n} + \psi_1 \dfrac{\partial \omega_r}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu \dfrac{\partial \omega_r}{\partial y_\nu} = 0, \end{array}\right.$$

und hieraus wie oben:

$$f_1 \frac{\partial R_a}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial R_a}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial R_a}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial R_a}{\partial y_\nu} = 0 \quad (a=1,2,\ldots r),$$

daß somit die Existenz einer in den bezeichneten Größen algebraischen Integralfunktion (17) des Differentialgleichungssystems (1) auch das Vorhandensein von Integralen voraussetzt, welche rational aus $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu, f_1, \ldots f_n, \psi_1, \ldots \psi_\nu, J_1, \ldots J_\lambda, w_1, (z_1)_{w_1}, \ldots w_\lambda, (z_\lambda)_{w_\lambda}$ *zusammengesetzt sind, wenn* $f_1, \ldots f_n, \psi_1, \ldots \psi_\nu$ *algebraisch von* $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ *abhängen.*

Sei die rational gebrochene Integralfunktion

$$(19)\qquad \omega = \frac{G_1(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots J_1, \ldots w_1, (z_1)_{w_1}, \ldots)}{G\,(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots J_1, \ldots w_1, (z_1)_{w_1}, \ldots)},$$

worin G_1 und G ganze Funktionen der eingeschlossenen Größen sind, und die Transzendenten $J_1, \ldots J_\lambda$ nicht mit Hinzuziehung von $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ in einem algebraischen Zusammenhange stehen, so wird sich, wenn dieser Wert von ω in (12) eingesetzt wird, eine ganze algebraische Funktion von $x_1, \ldots y_1, \ldots J_1, \ldots$ ergeben, welche, da zwischen $J_1, \ldots J_\lambda$ keine algebraische Beziehung bestehen soll, in diesen Transzendenten identisch Null sein wird, also auch verschwindet, wenn $J_1, \ldots J_\lambda$ durch die Größen $J_1 + u_1$, $J_2 + u_2, \ldots J_\lambda + u_\lambda$ ersetzt werden, wenn $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ beliebige algebraische Funktionen von $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ sind; daraus folgt aber, daß, wenn die Größen u_a algebraische Integralfunktionen der Differentialgleichungen (1) oder Konstanten sind, also nach (12) der Gleichung

$$f_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_2} + \cdots + f_n \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_1} + \psi_2 \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_2} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\nu} = 0$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots \lambda)$$

identisch genügen, durch Substitution in (12) auch

$$(20) \qquad \omega_1 = \frac{G_1(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots J_1 + u_1, \ldots w_1, (z_1)_{w_1}, \ldots)}{G(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots J_1 + u_1, \ldots w_1, (z_1)_{w_1}, \ldots)}$$

eine Integralfunktion der Differentialgleichungen (1) sein wird.

Es folgt somit aus der Existenz der oben bezeichneten rationalen Integralfunktion in abgekürzter Form

$$(21) \qquad \omega = \frac{G_1(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)}{G(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)}$$

die gleichartige Integralfunktion

$$\omega_1 = \frac{G_1(J_1 + u_1, J_2 + u_2, \ldots J_\lambda + u_\lambda)}{G(J_1 + u_1, J_2 + u_2, \ldots J_\lambda + u_\lambda)}$$

und hieraus wieder die Integralfunktion

$$\Omega = \omega_1 - \omega = \frac{G_1(J_1 + u_1, J_2 + u_2, \ldots J_\lambda + u_\lambda)}{G(J_1 + u_1, J_2 + u_2, \ldots J_\lambda + u_\lambda)} - \frac{G_1(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)}{G(J_1, J_2, \ldots J_\lambda)},$$

worin $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ *Konstanten oder algebraische Integralfunktionen von* (1) *sind.*

Wir können aber aus jeder in den Transzendenten rationalen Integralfunktion eine andre herleiten, welche eine ganze Funktion derselben ist. Enthalte nämlich G_1 die Transzendente J_1 im $\varkappa_1^{\text{ten}}$, G dieselbe im $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade, und dividiert man Zähler und Nenner von ω durch den Koeffizienten von $J_1^{\varkappa_1}$ im Zähler, so daß ω die Form annimmt:

$$(22) \qquad \omega = \frac{J_1^{\varkappa_1} + \varrho_1(J_2, \ldots J_\lambda) J_1^{\varkappa_1 - 1} + \cdots}{r_0(J_2, \ldots J_\lambda) J_1^{\varkappa} + r_1(J_2, \ldots J_\lambda) J_1^{\varkappa - 1} + \cdots} = \frac{G_1}{G},$$

worin $\varrho_1, \ldots r_0, \ldots$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen darstellen, so wird sich, da aus

$$G\omega = G_1, \; G\frac{\partial \omega}{\partial x_\alpha} + \omega\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial G_1}{\partial x_\alpha}, \; G\frac{\partial \omega}{\partial y_\beta} + \omega\frac{\partial G}{\partial y_\beta} = \frac{\partial G_1}{\partial y_\beta}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha = 1, 2, \ldots n\\ \beta = 1, 2, \ldots \nu\end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$G\left(f_1\frac{\partial \omega}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial \omega}{\partial x_n} + \psi_1\frac{\partial \omega}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu\frac{\partial \omega}{\partial y_\nu}\right)$$
$$+ \omega\left(f_1\frac{\partial G}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial G}{\partial x_n} + \psi_1\frac{\partial G}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu\frac{\partial G}{\partial y_\nu}\right)$$
$$= f_1\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial G_1}{\partial x_n} + \psi_1\frac{\partial G_1}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu\frac{\partial G_1}{\partial y_\nu}$$

folgt, und die Integralfunktion ω der Gleichung (12) identisch genügt, für ω die Form ergeben:

$$\omega = \frac{f_1\frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial G_1}{\partial x_n} + \psi_1\frac{\partial G_1}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu\frac{\partial G_1}{\partial y_\nu}}{f_1\frac{\partial G}{\partial x_1} + \cdots + f_n\frac{\partial G}{\partial x_n} + \psi_1\frac{\partial G}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu\frac{\partial G}{\partial y_\nu}},$$

so daß ω als rationale Funktion der Transzendenten dargestellt ist, deren Zähler J_1 nur im $\varkappa_1 - 1^{\text{ten}}$ Grade, deren Nenner dagegen wieder im $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade enthält, und welche, wenn wieder Zähler und Nenner mit dem Koeffizienten von $J_1^{\varkappa_1 - 1}$ des Zählers dividiert wird, die (22) analoge Form annimmt:

$$\omega = \frac{J_1^{\varkappa-1} + \bar{\varrho}_2(J_2, \ldots J_\lambda)\, J_1^{\varkappa-2} + \cdots}{\bar{r}_0(J_2, \ldots J_\lambda)\, J_1^{\varkappa} + \bar{r}_1(J_2, \ldots J_\lambda)\, J_1^{\varkappa-1} + \cdots} = \frac{\bar{G}_1}{\bar{G}},$$

worin die $\bar{\varrho}$ und $\bar{r}$ wieder rationale Funktionen sind; verfährt man mit dieser Form der Integralfunktion wie mit (22), so erhält man

$$\omega = \frac{J_1^{\varkappa_1-2} + \bar{\bar{\varrho}}_1(J_2, \ldots J_\lambda)\, J_1^{\varkappa_1-3} + \cdots}{\bar{\bar{r}}_0(J_2, \ldots J_\lambda)\, J_1^{\varkappa} + \bar{\bar{r}}_1(J_2, \ldots J_\lambda)\, J_1^{\varkappa-1} + \cdots} = \frac{\bar{\bar{G}}_1}{\bar{\bar{G}}}$$

und so fort, wobei sich der Grad von J_1 im Zähler immer um eine Einheit verkleinert, während er im Nenner der $\varkappa^{\text{te}}$ bleibt, und wir gelangen somit für ω zu einem in $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ rationalen Ausdruck, der im Zähler J_1 gar nicht mehr, im Nenner jedoch noch im $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade enthält. Machen wir nunmehr durch Anwendung desselben Verfahrens den Zähler allmählich von $J_1, J_2, \ldots J_\lambda$ frei, so gelangen wir schließlich zu einem Ausdrucke der Form

$$(23)\quad \omega = \frac{R(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu, f_1, \ldots f_n, \psi_1, \ldots \psi_\nu)}{R_0(x_1, .. y_1, .. f_1, .. \psi_1, .. J_2, .. J_\lambda)\, J_1^{\varkappa} + \cdots + R_\varkappa(x_1, .. y_1, .. f_1, .. \psi_1, .. J_2, .. J_\lambda)},$$

in welchem die Funktionen R in den eingeschlossenen Größen rational sind, oder es ergibt sich, da, wenn ω eine Integralfunktion ist, auch $1/\omega$ eine solche sein wird, *eine in J_1 ganze Integralfunktion*

$$(24)\quad \Omega = S_0(x_1, .. y_1, .. f_1, .. \psi_1, .. J_2, .. J_\lambda)\, J_1^{\varkappa} + \cdots + S_\varkappa(x_1, .. y_1, .. f_1, .. \psi_1, .. J_2, .. J_\lambda),$$

worin $S_0, \ldots S_\varkappa$ rationale Funktionen der eingeschlossenen Größen bedeuten. Da aber, wie oben gezeigt, dann auch

$$\Omega_1 = S_0(J_1 + u_1)^{\varkappa} + S_1(J_1 + u_1)^{\varkappa-1} + \cdots + S_\varkappa,$$

worin u_1 eine Konstante oder eine algebraische Integralfunktion von (1) ist, und also auch $\Omega_1 - \Omega$ eine solche, welche in bezug auf J_1 nur vom $\varkappa - 1^{\text{ten}}$ Grade ist, so wird man entweder bei der allmählichen Reduktion des Grades in bezug auf J_1 zu einer ganzen Integralfunktion gelangen, die bereits in bezug auf die λ Transzendenten von der linearen Form ist:

$$(25)\left\{\begin{aligned} \bar{\Omega} = {} & T_0(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots) + T_1(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots)\, J_1 \\ & + T_2(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots)\, J_2 + \cdots + T_\lambda(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1 \ldots \psi_1, \ldots)\, J_\lambda, \end{aligned}\right.$$

worin $T_0, T_1, \ldots T_\lambda$ rationale Funktionen bedeuten, oder man kann die Reduktion so weit fortsetzen, bis J_1 ganz herausfällt, und man somit zu einer Integralfunktion von der Form gelangt:

$$(26) \qquad \overline{\Omega}_1 = P(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots J_2, \ldots J_\lambda),$$

worin P wieder eine rationale Funktion der eingeschlossenen Größen ist. Wendet man nunmehr auf diese dieselbe Methode zur Erniedrigung des Grades in bezug auf J_2 an, so wird man wieder im Laufe der Reduktion entweder zu einer in $J_2, J_3, \ldots J_\lambda$ linearen oder zu einer von J_1 und J_2 unabhängigen Integralfunktion gelangen, usw., und wir finden somit,

daß, wenn das lineare partielle Differentialgleichungssystem (1), *in welchem* $f_1, \ldots \psi_1, \ldots$ *algebraische Funktionen von* $x_1, \ldots y_1, \ldots$ *sind, eine Integralfunktion*

$$\omega = f(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots J_1, \ldots J_\lambda)$$

besitzt, worin f *eine algebraische Funktion der eingeschlossenen Größen ist, und die Quadraturen*

$$J_1 = \int^{w_1} z_1\, dx, \ldots J_\lambda = \int^{w_\lambda} z_\lambda\, dx,$$

in denen $z_1, \ldots z_\lambda$ *algebraische Funktionen von* x, *und* $w_1, \ldots w_\lambda$ *algebraische Funktionen von* $x_1, \ldots y_1, \ldots$ *sind, diese Differentialgleichungen auch Integralfunktionen von der Form*

$$\Omega = u_1 J_1 + u_2 J_2 + \cdots + u_\lambda J_\lambda + U$$

besitzen, worin $u_1, u_2, \ldots u_\lambda$ *Konstanten oder algebraische Integralfunktionen der Differentialgleichungen* (1) *sind; die Funktion* ω *ist dann eine algebraische Zusammensetzung solcher Funktionen* Ω. *Die Existenz einer solchen in den Größen* $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu, f_1, \ldots f_n, \psi_1, \ldots \psi_\nu$ *ganzen, in den Quadraturen* $J_1, \ldots J_\lambda$ *linearen Integralfunktion zieht das Bestehen einer ebensolchen von der Form*

$$\Omega_1 = u_1\left(J_1 + J_1^{(1)} + \cdots + J_1^{(p_1-1)}\right) + \cdots + u_\lambda\left(J_\lambda + J_\lambda^{(1)} + \cdots + J_\lambda^{(p_\lambda-1)}\right) + V$$

nach sich, worin V *eine rationale Funktion von* $x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots$ *darstellt, ferner* p_a *das Geschlecht des* ABEL*schen Integrals* J_a, *und die Grenzen der Integrale*

$$J_a, J_a^{(1)}, \dots J_a^{(p_a-1)},$$

sowie die Werte der zu diesen Grenzen gehörigen Irrationalitäten die Lösungen von algebraischen Gleichungen sind, deren Koeffizienten rational aus $x_1, \dots y_1, \dots f_1, \dots \psi_1, \dots$ zusammengesetzt sind.

Besteht endlich zwischen $\varkappa$ Integralfunktionen $\omega_1, \omega_2, \dots \omega_\varkappa$, und nicht schon zwischen weniger als $\varkappa$ von diesen eine algebraische Beziehung

$$(28)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m + r_1(x_1, \dots y_1, \dots f_1, \dots \psi_1, \dots \omega_1, \dots \omega_{\varkappa-1})\,\omega_\varkappa^{m-1} + \cdots \\ &\quad + r_m(x_1, \dots y_1, \dots f_1, \dots \psi_1, \dots \omega_1, \dots \omega_{\varkappa-1}) = 0\,, \end{aligned}\right.$$

in welcher $r_1, \dots r_m$ rationale Funktionen sind, oder

$$(29)\quad \omega_\varkappa^m \sum_{(\lambda)} g_{(\lambda)}^{(0)}\,\omega_1^{\lambda_1}\,\omega_2^{\lambda_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} g_{(\mu)}^{(1)}\,\omega_1^{\mu_1}\,\omega_2^{\mu_2} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \cdots = 0\,,$$

in welcher (λ), (μ), ... zur Abkürzung statt $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_{\varkappa-1})$, $(\mu_1, \mu_2, \dots \mu_{\varkappa-1})$, ... gesetzt, und $g_{(\lambda)}^{(0)}, g_{(\mu)}^{(1)}, \dots$ ganze Funktionen der Größen $x_1, \dots y_1, \dots f_1, \dots \psi_1, \dots$ sind, so sondere man aus der ersten Summe eines der Glieder ab, welche die höchste Dimension in $\omega_1, \dots \omega_{\varkappa-1}$ besitzen, und dividiere die Gleichung durch den Koeffizienten dieses Gliedes, so daß (29) in

$$(30)\quad \omega_\varkappa^m \Big[\omega_1^{\lambda'_1} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda'_{\varkappa-1}} + \sum_{(\lambda)} r_{(\lambda)}^{(0)}\,\omega_1^{\lambda_1} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}}\Big] + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} r_{(\mu)}^{(1)}\,\omega_1^{\mu_1} \dots \omega_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \cdots = 0$$

übergeht, worin $r_{(\lambda)}^{(0)}, r_{(\mu)}^{(1)}, \dots$ rationale Funktionen darstellen und

$$\lambda'_1 + \lambda'_2 + \cdots + \lambda'_{\varkappa-1} \geqq \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}$$

ist. Bezeichnet man nun durch das Symbol δF, wenn F eine beliebige Funktion von $x_1, \dots x_n, y_1, \dots y_\nu$ ist, den Ausdruck

$$\delta F = f_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + \cdots + f_n \frac{\partial F}{\partial x_n} + \psi_1 \frac{\partial F}{\partial y_1} + \cdots + \psi_\nu \frac{\partial F}{\partial y_\nu}\,,$$

der also, wenn F eine Integralfunktion von (1) ist, nach (12) identisch verschwindet, so erhält man durch Anwendung dieses Symbols auf die Gleichung (30):

$$(31)\quad \omega_\varkappa^m \sum_{(\lambda)} \delta\left(r_{(\lambda)}^{(0)}\right) \omega_1^{\lambda_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\lambda_{\varkappa-1}} + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\mu)} \delta\left(r_{(\mu)}^{(1)}\right) \omega_1^{\mu_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\mu_{\varkappa-1}} + \cdots = 0\,,$$

oder, indem man in der ersten Summe wieder ein Glied der höchsten Dimension in $\omega_1, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ absondert, und unter der Voraussetzung, daß $f_1, \ldots \psi_1, \ldots$ algebraische Funktionen von $x_1, \ldots y_1, \ldots$ sind, die Gleichung durch den nunmehr wieder in $x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots$ rationalen Koeffizienten dividiert,

$$(32)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^m \left[\omega_1^{\varrho'_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\varrho'_{\varkappa-1}} + \sum_{(\varrho)} R_{(\varrho)}^{(0)} \omega_1^{\varrho_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\varrho_{\varkappa-1}}\right] \\ &\qquad + \omega_\varkappa^{m-1} \sum_{(\sigma)} R_{(\sigma)}^{(1)} \omega_1^{\sigma_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\sigma_{\varkappa-1}} + \cdots = 0 \end{aligned}\right.$$

worin die Funktionen R wieder rational aus den angegebenen Größen zusammengesetzt, und

$$\varrho'_1 + \cdots + \varrho'_{\varkappa-1} \geqq \varrho_1 + \cdots + \varrho_{\varkappa-1}, \quad \varrho_1 + \cdots + \varrho_{\varkappa-1} \leqq \lambda_1 + \cdots + \lambda_{\varkappa-1}$$

sind. War in der Gleichung (30) der Koeffizient von $\omega_\varkappa^m$ nur von $\omega_1, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ abhängig oder in (31) $\delta\left(r_{(\lambda)}^{(0)}\right) = 0$, sind also $r_{(\lambda)}^{(0)}$ algebraische Integralfunktionen von (1), so wäre die Gleichung (31) schon vom $m-1^{\text{ten}}$ Grade in $\omega_\varkappa$; ist dies nicht der Fall, so können wir dieselbe Reduktion auf (32) nochmals anwenden, usw., bis wir endlich, indem wir die Glieder mit den gleichen Verbindungen der $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ zusammenfassen, zu einer Gleichung von der Form gelangen:

$$(33)\quad \omega_\varkappa = \sum_{(\vartheta)} R_{(\vartheta)}\left(x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots\right) \omega_1^{\vartheta_1} \omega_2^{\vartheta_2} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\vartheta_{\varkappa-1}}\,,$$

wenn wir nicht im Laufe der Reduktion auf eine Gleichung von der Form stoßen:

$$(34)\left\{\begin{aligned} &\omega_\varkappa^p \sum_{(\vartheta)} T_{(\vartheta)} \omega_1^{\vartheta_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\vartheta_{\varkappa-1}} + \omega_\varkappa^q \sum_{(\eta)} U_{(\eta)} \omega_1^{\eta_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\eta_{\varkappa-1}} + \cdots \\ &\qquad + \omega_\varkappa^r \sum_{(\zeta)} S_{(\zeta)} \omega_1^{\zeta_1} \ldots \omega_{\varkappa-1}^{\zeta_{\varkappa-1}} = 0\,, \end{aligned}\right.$$

worin $p, q, \ldots r$ positive ganze Zahlen und $T_{(\vartheta)}, U_{(\eta)}, \ldots S_{(\zeta)}$ rationale Integralfunktionen von (1) sind, also

$$\delta T_{(\vartheta)} = 0, \quad \delta U_{(\eta)} = 0, \ldots \delta S_{(\zeta)} = 0$$

ist, so daß die erneute Anwendung des Symbols δ auf die Gleichung (34) die Identität $0=0$ liefern würde. Gelangt man aber bis zu einer Gleichung von der Form (33), so ergibt sich $\omega_\varkappa$ als eine ganze rationale Funktion von $\omega_1, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ mit in den wiederholt angegebenen Größen rationalen Koeffizienten, welche wieder rationale Integralfunktionen von (1) sind, weil, wie durch Anwendung des Symbols δ auf die Gleichung (33) hervorgeht, wegen der Voraussetzung, daß nicht schon zwischen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ eine algebraische Beziehung stattfinden sollte, sich die Beziehung

$$\delta\left(R_{(\vartheta)}\right) = 0$$

ergibt, und all diese Schlüsse bleiben bestehen, wenn die Koeffizienten $r_1, r_2, \ldots r_m$ der Gleichung (28) nur von den Integralfunktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ abhängen, wenn man also von $\varkappa-1$ beliebigen Integralfunktionen ausgeht und als $\varkappa^{\text{te}}$ Integralfunktion eine beliebige rein algebraische Funktion dieser $\varkappa-1$ Funktionen wählt, welche bekanntlich dann auch immer eine Integralfunktion ist. Wir finden somit,

daß, wenn die $\varkappa$ Integralfunktionen $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_\varkappa$ des Differentialgleichungssystems (1) in einer von den Variabeln $x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots y_\nu$ abhängigen algebraischen Beziehung zueinander stehen und nicht schon eine solche zwischen weniger als $\varkappa$ dieser Integralfunktionen existiert, dann eine jede derselben $\omega_\varkappa$ eine ganze Funktion von $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ ist, deren Koeffizienten rational von $x_1, \ldots y_1, \ldots f_1, \ldots \psi_1, \ldots$ abhängige Integralfunktionen der Differentialgleichungen (1) sind, oder $\omega_\varkappa$ ist die Wurzel einer in $\omega_\varkappa$ algebraischen Gleichung, deren Koeffizienten rational ganz aus $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_{\varkappa-1}$ zusammengesetzt sind, deren Koeffizienten wiederum rationale Integralfunktionen von (1) sind.