UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Hermann von Helmholtz

Beiträge zu den
Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg

4. Band, 1865 März bis 1868 Oktober
Heidelberg : Mohr, 1868

zusammengestellt von Gabriele Dörflinger,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2012

Verhandlungen

des

naturhistorisch-medicinischen Vereins

zu

Heidelberg.

Vierter Band.

1865 März bis 1868 Oktober.

Heidelberg.
Buchdruckerei von G. Mohr.
1868.

säure gebildet wird, und diese dann bei Gegenwart in Zersetzung (Fäulniss) befindlicher Proteïnkörper nach folgender Gleichung zerfällt:

$$(C_3\ H_6\ O_3)_2 = C_4\ H_8\ O_2 + (CO_2)_2 + H_4.$$

Es ist daher wahrscheinlich, dass auch in dem Magen des Kranken die Milchsäure in derselben Weise zersetzt wird. Eine Verschiedenheit dieses Processes und des bekannten, kann möglicherweise nur darin vorhanden sein, dass bei der bekannten Buttersäuregährung, wenigstens in den gut untersuchten Beispielen nicht freie Milchsäure sondern milchsaures Salz der Zersetzung unter Bildung von Buttersäure unterliegt, während hier in dem Magen des Kranken ohne Frage freie Milchsäure zersetzt wird.

8. Vortrag des Herrn Hofrath H. Helmholtz: »Ueber stereoskopisches Sehen«, am 30. Juni 1865.

(Das Manuscript wurde eingereicht am 14. Juli 1865.)

Der Vortragende zeigte zunächst ein nach seinen Angaben construirtes Stereoskop vor, welches etwa doppelt so starke Vergrösserung hervorbringt als die gewöhnlichen Stereoskope, nur Linsen, keine Prismen enthält, und mit den nöthigen Einrichtungen versehen ist, um eine genaue Einstellung der Linsen für den richtigen Grad der Convergenz hervorzubringen. Photographien auf Glas machen darin einen viel mehr der Wirklichkeit entsprechenden Effect, als in den gewöhnlichen Stereoskopen.

Der Vortragende berichtete darauf über Versuche, die er theils früher, theils neuerlich über die binoculare Raumprojection angestellt hatte, mit Beziehung auf die denselben Gegenstand betreffenden Arbeiten von Herrn E. Hering.

Es kommen bei diesen Raumprojectionen gewisse Täuschungen vor. Erstens hat Hr. Hering gezeigt, dass eine in der Medianebene befindliche Normale zur Visirebene nicht immer normal erscheint. Dass man vielmehr, wenn die Augen gegen das Gesicht nach unten gewendet sind, einen Faden oder Drath, den man senkrecht zur Visirebene zu stellen sucht, mit dem oberen Ende gegen den Beobachter neigt, wenn die Augen dagegen nach oben gewendet sind, mit dem untern Ende nähert. Herr Hering schliesst daraus, der Faden müsse im Horopter liegen, um senkrecht zur Visirebene zu erscheinen. Die Regel mag für Herrn Hering's Augen, welche die Abweichung zwischen den scheinbar verticalen und wirklich verticalen Meridianen nur in sehr geringem Grade zeigen, und für die Medianebene thatsächlich zutreffen. Der Vortragende, für dessen Augen jene gewöhnlich vorhandene Abweichung sehr merklich ist, findet für seine Augen jene Regel nicht richtig. Die Linien, welche ihm vertical zur Visirebene erscheinen, liegen niemals im Horopter, sondern erscheinen immer in deutlich nach unten convergirenden Doppelbildern, wenn man einen nahe hinter ihnen liegenden Punkt fixirt. Die Linien dagegen, welche im Horopter liegen, erscheinen mit ihrem oberen Ende stets vom Beobachter entfernter.

Der Vortragende hat schon bei einer früheren Gelegenheit darauf aufmerksam gemacht, dass wir die Lage der Objecte immer so beurtheilen, sowohl in Beziehung auf Richtung (wie Herr Hering richtig bemerkt hat) als auf Raddrehung, wie wenn jedes Auge der mittleren Sehrichtung parallel gestellt wäre. Unter mittlerer Sehrichtung verstehe ich nach Hering eine Linie, die den Fixationspunkt mit einem mitten zwischen den Mittelpunkten beider Augen gelegenen Punkt verbindet. Die Raddrehungen, welche in jedem Auge beim Uebergange aus der zeitigen mittleren in seine actuelle Stellung eintreten, werden nicht berücksichtigt. Daraus ergibt sich nun auch für die hier besprochenen Projectionen folgende Regel, welche auch durch die Versuche sowohl für die Medianebene des Kopfes, als auch für seitlich gelegene Punkte bestätigt wird, dass senkrecht zur Visirebene solche gerade Linien erscheinen, die sich abbilden auf denjenigen Meridianen beider Augen, welche bei Stellung der Augen parallel der zeitigen mittleren Sehrichtung senkrecht zur Visirebene sein würden. Diese Meridiane sind aber bei Augen, welche die Abweichung der scheinbar verticalen Meridiane zeigen, und dem Listing'schen Gesetze der Raddrehungen folgen niemals identische Meridiane.

Auf eine zweite Täuschung hat der Vortragende zuerst in seinem Aufsatz über den Horopter aufmerksam gemacht. Drei Nadelköpfe, welche in einiger Entfernung von einander vor dem Beobachter in einer von rechts nach links laufenden geraden Linie sich befinden, scheinen bei der Betrachtung mit zwei Augen in einem gegen den Beobachter convexen Bogen zu stehen. Damit sie in gerader Linie erscheinen sollen, müssen sie in einem gegen den Beobachter etwas concaven Bogen stehen. Herr Hering hat die entsprechende Beobachtung an senkrecht aufgehängten Fäden gemacht, und auch hier behauptet, die Fäden erschienen in einer Ebene, wenn sie im Längshoropter lägen, also bei horizontal gerichteter Visirebene durch den Müller'schen Kreis gingen. Der Vortragende hat nun Messungen der Krümmung angestellt, und für seine eigenen Augen und für Regel Beobachter die allergrössesten Abweichungen von dieser Hering'schen gefunden. Wenn die drei Fäden in einer schwach gekrümmten Cylinderfläche hängen, so müsste man sie nach Hering in einer Ebene sehen, wenn die Augen des Beobachters um den Durchmesser des Cylinders von ihnen entfernt wären. Statt dessen mussten alle drei Beobachter in oft wiederholten Versuchen auf $^1/_2$ bis $^1/_6$ dieses Durchmessers, der Vortragende auf $^3/_{10}$ desselben sich nähern, um die Fäden scheinbar in einer Ebene zu sehen, wobei die Fäden also nicht im Horopter lagen, und zum Theil Doppelbilder der seitlichen

Fäden deutlich erkannt werden konnten. Bei Herrn Hering ist also die optische Täuschung in diesem Versuch sehr viel grösser, als bei andern Beobachtern, was damit zusammenzuhängen scheint, dass nach häufig sich wiederholenden Aeusserungen in seinen Schriften das Urtheil über Entfernung nach Convergenz der Gesichtslinien bei ihm besonders unvollkommen zu sein scheint. Uebrigens zeigen sich bei diesem Versuche sehr grosse individuelle Verschiedenheiten, die wahrscheinlich von der Uebung der Augen nach der Convergenz die Entfernung zu beurtheilen abhängen.

Dass die letztgenannte Fähigkeit keine grosse Genauigkeit erreicht, zeigen die Versuche von Wundt. Aber auch bei diesen Versuchen zeigte sie sich durchaus nicht als gänzlich mangelnd. Der Vortragende hat Versuche nach einem etwas modificirten Verfahren angestellt, und bei sich und einem andern Beobachter eine grössere Sicherheit in der Beurtheilung gefunden, als Wundt erreicht hatte. Aber allerdings zeigen bekannte Versuche, dass wenn bei irgend welchen binocularen Erscheinungen andere Urtheilsmotive für eine andere Entfernung sprechen, oft nach denen geurtheilt, und die Convergenz nicht berücksichtigt wird.

Man hat nun bisher bei den stereoskopischen Bildern nur zu berücksichtigen gepflegt, dass die horizontalen Abstände der einzelnen Objektpunkte beiden Augen verschieden erscheinen, aber nicht dass auch die verticalen Abstände nach rechts gelegener senkrecht über einander befindlicher Punkte dem rechten Auge grösser als dem linken erscheinen müssen. Auch das hat Einfluss auf die stereoskopische Projection. Der Vortragende legte zwei stereoskopische Zeichnungen vor, die eine darstellend die Projectionen einer ziemlich nah vor den Augen befindlichen ebenen schachbrettartig gemusterten Fläche, die zweite darstellend die Projectionen eines entfernten schachbrettartig gemusterten senkrechten Cylinders. In beiden waren die horizontalen Abstände der verticalen Linien genau dieselben, und nur die oberen und unteren Begrenzungslinien der Felder waren verschieden gezogen, und doch gaben sie ein vollkommen verschiedenes Relief. Das eine erschien als Ebene, das andere als Cylinder. Dadurch wird nachgewiesen (im Widerspruch mit den Voraussetzungen der Hering'schen Theorie), dass nicht blos die Differenzen der horizontalen Entfernungen, sondern auch die der verticalen die stereoskopische Wirkung bestimmen. Die Convergenz der Sehaxen war beim Anblick beider Zeichnungen mit unbewaffneten Augen gleich Null, entsprach also nicht dem Anblick eines nahen, sondern nur dem eines fernen Objekts. Dennoch wurde, da die beiden Netzhautbilder des oberen Schachbretts in dieser Form nur durch ein ebenes Object geliefert werden konnten, das Object als eben angeschaut.

Aus diesem Versuche geht also hervor, dass auch die Differenzen in den verticalen Distanzen mitwirken, um den Eindruck eines nahen Objects hervorzubringen. Bei dem Hering'schen Versuche mit den drei Fäden fehlen nun erkennbare Differenzen der verticalen Distanzen, weil an den Fäden kein Punkt einen deutlich hervortretenden Eindruck macht. Es fehlt also eines der Zeichen, an denen wir ein nahes Object erkennen, und wir halten deshalb das Object für ferner, und da dann die Unterschiede der horizontalen Distanzen in den beiderseitigen Netzhautbildern für Theile einer Ebene zu gross sind, so halten wir die Fläche für convex gegen uns.

Werden an den Fäden Goldperlen in kleinen Zwischenräumen befestigt, um Merkpunkte für das Auge zu geben, so schwindet die beschriebene Täuschung über ihre Lage fast ganz; wodurch die gegebene Erklärung bestätigt wird.

Die beschriebenen Erscheinungen sind also neue Beispiele für den Satz, dass die Abweichung der Augen von der mittleren Sehrichtung, sowohl der Richtung als der Raddrehung nach theils gar nicht, theils nur unsicher beurtheilt und berücksichtigt wird, während sie den angeblichen Thatsachen, auf welche Herr Hering seine Theorie der stereoskopischen Raumprojection gegründet hat, vollständig widersprechen.

9. Mittheilungen des Herrn Prof. H. A. Pagenstecher: »Ueber das Vorkommen von Trichina spiralis beim Igel«, am 30. Juni 1865.

Der Vortragende hat zwei Fütterungsversuche mit trichinigem Kaninchenfleische an Erinaceus europaeus angestellt. Der erste Igel erhielt am 9. Mai 1865 stark trichiniges Kaninchenfleisch mit Kartoffeln gemischt vorgesetzt und frass dasselbe in der folgenden Nacht. Er bekam am 11. Mai eine zweite tüchtige Portion. Nach sechs bis acht Tagen wurde er träge, die Glieder steif und kühl, das Auge sehr matt, er frass jedoch noch am 20. Mai. Am 21. fand man das Thier todt und es ergab die am 22. angestellte Section eine sehr grosse Menge von Trichinen im Magen, auch ziemlich viele im Darme. Die Würmer waren geschlechtsreif, die Weibchen mit Eiern gefüllt. Embryonen wurden noch nicht vorgefunden.

In einem zweiten Versuche gelang es zu vollkommeneren Ergebnissen zu gelangen. Der Igel, welcher am 6. Juni zuerst und dann wiederholt mit trichinigem Kaninchenfleische gefüttert worden war, lebte diesmal nach Beginn des Versuches vierzehn Tage. Am 20. Juni gestorben kam er leider erst am 22. zur Sektion. Bei der sehr grossen Hitze war der Darm so faul geworden, dass man die Untersuchung desselben unterliess. Im Muskelfleische fand sich eine ziemliche Anzahl von jungen Trichinen, deren Grösse von 0,11 bis 0,14 mm. gemessen wurde. Da wir bisher noch keinen Fall kennen, in welchem die jungen Trichinen wohl zur Einwanderung in

Muskelzuckungen zu verhüten. Sodann empfiehlt er sehr in schwierigen Fällen die Fragmente während der Anlage des Verbandes in der angegebenen Weise durch direkte Anlegung der Finger in der richtigen Lage zu erhalten und endlich falls im Verbande sich die Dislocation trotzdem wieder einstellt, einen Klammer- oder Schraubenapparat mit dem Gypsverbande zu combiniren. Da der feste Gypsverband es sehr leicht macht aussen ein Holzstück zu befestigen, so ist auch die Feststellung der Klammern sehr erleichtert.

12. Vortrag des Herrn Prof. H. Helmholtz: »Ueber den Muskelton«, am 20. Juli 1866.

(Das Manuscript wurde sofort eingereicht.)

Der Vortragende hat schon früher über denselben Gegenstand gesprochen und damals gezeigt, dass wenn Muskeln von Menschen oder Kaninchen von ihren Nerven her in Tetanus versetzt werden mittels der Ströme eines Inductionsapparates, dessen Feder regelmässige Schwingungen ausführt, man statt des normalen Muskeltons einen Ton von der Höhe desjenigen hört, den die schwingende Feder des Inductionsapparates giebt. Die gewöhnlichen Apparate dieser Art geben nur 40 bis 60 Schwingungen in der Secunde; von dem blosgelegten Hüftnerven eines Kaninchens aus hatte ich schon früher Tetanus erzeugt durch einen Inductionsapparat, in welchem eine Stimmgabel von 120 Schwingungen den Strom unterbrach, und aus den Muskeln des Thiers den entsprechenden Ton von 120 Schwingungen und daneben auch, wenn auch nicht ganz so sicher, dessen ersten Oberton von 240 Schwingungen gehört. Es ist schwer, die so schnell unterbrochenen Inductionsströme so stark zu machen, dass sie menschliche Nerven durch die Haut hindurch afficiren, weil sie das Quecksilber, was man an der Unterbrechungsstelle anwenden muss, schnell verbrennen und in Staub zerstreuen. Durch eine sorgfältige Abgleichung aber von passend angebrachten Nebenschliessungen (theils metallische für die Electromagneten, theils Wasserzersetzungszellen für die Funkenstrecke) gelang es mir mit einer Gabel von 240 Schwingungen hinreichend kräftige Schläge herzustellen, dass vom Nervus medianus aus Tetanus der Vorderarmmuskeln beim Menschen erreicht wurde, und in diesen der Ton von 240 Schwingungen deutlich hörbar wurde, was jedenfalls einen ausserordentlich hohen Grad von Beweglichkeit in den Molecularapparaten des Muskels anzeigt.

Da der Muskelton in dieser Weise beobachtet ein Phänomen von geringer Intensität ist, und ziemliche Aufmerksamkeit bei der Beobachtung fordert, habe ich mich vielfach bemüht Resonanzapparate zu bauen, um ihn deutlicher hörbar zu machen, namentlich auch, weil es mir darauf ankam den natürlichen Muskelton, der an der Grenze der tiefsten hörbaren Töne liegt, deutlicher zu hören und seiner Natur nach zu bestimmen. Auf akustischem Wege gelang dies nur sehr unvollkommen, dagegen fand ich es eher möglich die Schwingungen der Muskeln, namentlich bei ihren tieferen Tönen, dem Auge sichtbar zu machen.

Zu dem Ende benutze ich stählerne Federn (Uhrfedern), die so lang gemacht werden, dass ihre Schwingungsperiode derjenigen des wahrzunehmenden Tones gleich wird. Dieselben sind zu dem Ende zwischen 4 Drahtstiften eingeklemmt, die an den Enden eines durch Längsschnitte unvollkommen getheilten elastischen Brettchens befestigt sind. Legt man das Brettchen so an die Muskeln an, dass einer seiner federnden Abschnitte die Erschütterungen des Muskels empfängt, so werden diese auf die Uhrfeder übertragen, und diese kommt in starkes, leicht sichtbares Mitschwingen. Mittels eines Apparates der 19,5 Unterbrechungen in der Secunde gab, brachte man von den menschlichen Muskeln aus starkes Mitschwingen der Feder hervor, wenn die Feder auf 19,5, schwächeres auch, wenn sie auf 39 oder 58,5, ganz schwach endlich, wenn sie auf 78 Schwingungen eingestellt war.

Sucht man diejenige Länge der Feder, bei welcher sie durch die natürliche Zusammenziehung der Muskeln am besten in Schwingung versetzt wird, so findet man diese bei 18 bis 20 Schwingungen in der Secunde. Die Schwingungen hierbei sind aber nicht so regelmässig, und daher auch nicht so stark, wie sie bei dem künstlichen Tetanus sind. Da eine Stahlfeder zu lange nachschwingt, und eben deshalb auch nicht schnell genug die übertragene Schwingungsweise annimmt, fand ich zur Beobachtung der natürlichen Muskelschwingungen ähnliche Apparate mit zugespitzten schwingungsfähigen Papierstreifchen besser. Deren Schwingsperiode ist am besten zu ermitteln, wenn man sie an die schwingende Feder eines passend abgestimmten Inductionsapparates hält, und ermittelt, bei welcher Schwingungsperiode sie am stärksten mitschwingen.

Diese Versuche lehren nun, dass die Schwingungszahl der natürlichen Muskelvibration des Menschen nicht, wie Wollaston und Haughton glaubten beobachtet zu haben, 36 bis 40, sondern dass sie nur 18 bis 20 ist. Was man als Muskelton hört, ist also nur der erste Oberton der wahren Muskelvibration, deren Grundton nicht mehr im Bereich der hörbaren Töne liegt. Ausserdem ist diese natürliche Muskelvibration zwar annähernd periodisch, aber nicht so genau periodisch, wie die Bewegungen der schwingenden Stimmgabeln und Stahlfedern.

In der Hoffnung, die Versuche wesentlich zu erleichtern, wenn ich sie mit Fröschen anstellen könnte, habe ich auch mit deren Muskeln Versuche angestellt. Den Ton von 120 Schwingungen zu hören, gelang spurweise, als ich einen Froschmuskel, der ein Gewicht hob, an einen in den Gehörgang gesteckten Stab gehängt hatte. Dagegen sieht man die Vibrationen der Feder von 16 bis

7

20 Schwingungen sehr gut, wenn man den Muskel an das beschriebene Brettchen, welches die Feder hält, anhängt, und ihn im electrischen Tetanus von entsprechender Anzahl von Schlägen ein Gewicht von zwei Unzen heben lässt. Schwingungen der Feder von der Schwingungszahl 120 durch isochrone electrische Schläge vom Nerven aus hervorzurufen misslang gänzlich. Dagegen sah ich schwache Schwingungen der Feder, welche der natürlichen Vibrationsperiode des Froschrückenmarks zu entsprechen schienen, wenn ich den Inductionsapparat auf 120 Schwingungen einstellte, und die mitschwingende Feder auf 16 Schwingungen. Es ist dabei zu bemerken, dass, wie E. du Bois Reymond zuerst bemerkte, und ich selbst bestätigt fand, Tetanus auch bei Kaninchen vom Rückenmark aus durch schnellschwingende Ströme hervorgerufen, nicht den Ton der Stromvibrationen, sondern den natürlichen Muskelton giebt.

Ströme von der Schwingungszahl 18, auf das Froschrückenmark einwirkend, gaben dagegen auch an der Feder starke isochrone Schwingungen. Deren Schwingungszahl scheint der natürlichen des Rückenmarks so nahe zu sein, dass dieses sich vollkommen adaptirt.

13. Vortrag des Herrn Prof. Erlenmeyer: »Ueber die Oxydationsproducte des Gährungsbutylalkohols«, am 3. August 1866.

(Das Manuskript wurde am 17. Oktober eingereicht.)

Michaelson hat angegeben, dass sich bei der Oxydation des Gährungsbutylalkohols mit saurem chromsaurem Kali und Schwefelsäure neben Butylaldehyd und Buttersäure Propylaldehyd, Propionsäure und Kohlensäure bilde. Ich habe Herrn Jerschof aus St. Petersburg veranlasst diese Angaben zu prüfen. Es wurde eine grosse Menge von Kohlensäure (aus 30 grm. Alkohol 1,6626 grm. CO_2) entwickelt, ausserdem bildete sich eine zwischen 100 und 150^0 siedende in Wasser und Alkalilauge unlösliche Flüssigkeit und ein Gemisch von Säuren aus welchem durch fractionirte Sättigung mit feuchtem Silberoxyd reines buttersaures und reines essigsaures Silber dargestellt werden konnte. Es wurde nur eine sehr kleine Menge eines Silbersalzes gewonnen, welches den Silbergehalt von propionsaurem Salz hatte. Herr Jerschof ist damit beschäftigt, sowohl die ätherische Flüssigkeit näher zu untersuchen als auch festzustellen ob die in dem letzterwähnten Silbersalz enthaltene Säure wirklich Propionsäure oder Butteressigsäure ist.

3. Vortrag des Herrn Geheimrath Helmholtz: »Ueber Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den Nerven«, am 17. Mai 1867, (bereits am 29. April in die Sitzungsberichte der Berliner Akademie der Wissenschaften aufgenommen.)

Die bisher über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Reizung in den menschlichen Nerven angestellten Versuche beziehen sich auf die sensiblen Nerven, und leiden an dem grossen Uebelstande, dass ein Theil der dabei gemessenen Zeit von psychischen Processen abhängt. Es wurde dabei nämlich immer die Zeit gemessen, welche nach der Erregung eines sensiblen Nerven vergeht, bis der Inhaber dieser Nerven, der die Erregung empfindet, in Folge davon eine willkührliche Bewegung eines Muskels eintreten lassen kann. Die Uebertragung der Reizung von den sensiblen auf die motorischen Nerven geschieht also hierbei durch einen Willensact des Experimentirenden, bei recht gespannter Aufmerksamkeit allerdings ziemlich regelmässig in etwa dem zehnten Theil einer Secunde, aber doch immerhin nicht regelmässig genug, dass nicht die kleinen, verschieden langer Nervenleitung entsprechenden Zeitdifferenzen bei verschiedenen Beobachtern und auch bei demselben Beobachter zu verschiedenen Zeiten ziemlich erhebliche Abweichungen zeigten. Meine eigenen ersten Beobachtungen vom Jahre 1850 hatten mir für die Leitung in den Armen eine Geschwindigkeit von 61,0 $\pm$ 5,1 Meter für die Secunde ergeben, für die Beine 62,1 $\pm$ 6,7 Meter. Spätere Fortsetzungen dieser Versuchsreihen ergaben mir immer wieder ähnliche Zeitdifferenzen, nur bei zweien, wo ich statt mit der Hand den Strom mittels der Zähne geöffnet hatte, um eine grössere Sicherheit der Action zu erreichen, erhielt ich Zahlen, die mit den später von dem Astronomen Herrn A. Hirsch gefundenen besser übereinstimmen.*) Letzterer Beobachter fand dagegen eine Geschwindigkeit von 34 Meter, Herr Dr. Scholske 29,6 Meter, Herr F. C. Donders 26,09 Meter, Herr F. Kohlrausch wieder Werthe, die bis zu 94 Meter stiegen.

Unter diesen Umständen schien es mir wünschenswerth einen älteren Versuchsplan, bei dessen Ausführung ich früher gescheitert war, wieder aufzunehmen, und nach der für die motorischen Ner-

*) Ein Rechenfehler, Auslassung des Factor 2, den ich anfangs den Beobachtungen von Hirsch gegenüber selbst vermuthete, ist bei jenen Beobachtungen nicht gemacht worden, wie auch die Nebeneinanderstellung der unmittelbar beobachteten Zeiten zeigt. Es brauchte die Uebertragung

	von Hand zu Hand,	von Gesicht zu Hand.
1. Bei mir, ältere Versuchsreihe	0″,13524	0″,12040
2. Bei mir, spätere Versuchsreihe	0″,12776 0″,12495	0″,11320
3. Bei Herrn Guillaume (Beobachter Hirsch)	0″,1424	0″,1110.

ven des Frosches so sehr geeigneten Methode auch am Menschen Versuche anzustellen. Wenn man einen menschlichen Bewegungsnerven an zwei verschiedenen Stellen seines Verlaufes erregt, und die dadurch ausgelösten Zuckungen am Myographion aufschreiben lässt, so lässt der horizontale Abstand der beiden Zuckungscurven von einander den Zeitunterschied wegen der Fortpflanzung im Nerven erkennen. Eine erste Schwierigkeit für die Uebertragung dieser Versuchsmethode auf den Menschen liegt aber in dem Umstande, dass jede Reizung eines Nervenstamms an einem höheren Punkte mehr Muskeln in Bewegung setzt, als die an einem tieferen Punkte, und deshalb auch andere Bewegungsformen der Glieder zu Stande kommen. Indessen versprach die von Marey angewendete Methode, die Anschwellung der Daumenballenmuskeln bei ihrer Zuckung aufschreiben zu lassen, die Schwierigkeit zu beseitigen, und ich forderte deshalb Herrn N. Baxt auf, zu versuchen, ob auf diesem Wege das Ziel zu erreichen sei.

Es geschah das schliesslich nach vielen vergeblichen Versuchen folgendermaassen: Der Experimentirende (d. h. derjenige, dessen Nerven gereizt wurden; denjenigen, welcher am Myographion operirt, werde ich den Beobachter nennen) umfasst mit seiner rechten Hand in Supinationsstellung einen kurzen Holzcylinder, der in etwa drei Zoll Entfernung über einem horizontalen Brette festgelegt ist. Der Ellenbogen wird auf das Brett gestützt. In dieser Lage wird der Vorderarm mit Gyps umgossen, so dass eine aus drei Stücken, einem unteren und zwei oberen, bestehende Gypsform für den Arm gebildet wird. Das untere Stück der Form umfasst den Ellenbogen, die Dorsalseite des Vorderarms und der Hand, und reicht bis an die Enden der ersten Fingerphalangen. Von den beiden Deckelstücken überdeckt eines die Hand und den von ihr umfassten Holzcylinder bis zum Handgelenk hin. Das zweite Deckelstück bedeckt die Volarseite des Vorderarms. Zwischen diesen beiden letzteren Stücken bleibt ein Zwischenraum von zwei Zoll Länge dicht über dem Handgelenk, in welchem man das untere Paar von Elektroden anlegt, und zwar auf den ulnaren Rand der Sehne des Flexor carpi radialis, unter welchem die Zweige des N. medianus liegen, die zum Daumenballen gehen.

Das erste Deckelstück der Gypsform hat ausserdem gerade über dem Daumenballen eine Oeffnung, so dass die Muskeln dieses Theils frei liegen, die Knochen der Handwurzel dagegen und das Köpfchen des Metacarpalknochens des Daumens von der Form überdeckt und festgehalten werden.

So sind die Knochen des Vorderarms und der Hand in dieser Weise vollständig festgehalten und unbeweglich; reizt man aber den N. medianus entweder dicht über dem Handgelenk an der genannten Stelle, oder weiter oben am Oberarm neben dem M. biceps, so sieht man die Muskeln des Daumenballens zucken und bei der Zuckung schwellen. Auf die Mitte dieser Muskeln wurde nun das

Ende eines dünnen Glasstabs gestellt, dessen oberes Ende sich von unten gegen einen Stab stemmte, der den Schreibhebel des Myographion rückwärts verlängerte. Zuckten die Muskeln des Daumenballens, so hoben sie den Glasstab und drängten den Schreibhebel des Myographion nach abwärts, wobei dieser eine Zuckungscurve auf den rotirenden Cylinder schrieb. Eine passend angebrachte Spiralfeder hob den Schreibhebel wieder empor.

Damit die zu vergleichenden Zuckungscurven immer genau von gleicher Grundlinie ausgehen, und die Gleichmässigkeit des Muskeltonus vor der Zuckung constatirt wird, diente der erwähnte Stab am Schreibhebel. Derselbe war etwa $1^1/_2$ Fuss lang, und trug an seinem Ende eine Nadelspitze, welche sich dicht vor einer Millimetertheilung bewegte. Der Experimentirende hatte darauf zu sehen, dass die Nadel vor jeder Zuckung immer auf denselben Punkt der Theilung zeigte.

Uebrigens war das Verfahren wie bei den entsprechenden Versuchen an den motorischen Nerven des Frosches. Das Myographion, wenn es die normale Umlaufszeit erlangt hatte, unterbrach den primären Strom eines Inductionsapparates, der inducirte Strom wurde dem N. medianus zugeleitet, und zwar bald am Handgelenk, bald am Oberarm neben dem unteren Ende des M. coracobrachialis. Zwei solche von den beiden verschiedenen Nervenstellen her ausgelöste Zuckungen wurden so auf den Cylinder geschrieben, dass sie von gleicher Grundlinie ausgingen, und dass der dem Augenblick der Reizung entsprechende Punkt in beiden derselbe war. Hatten die Curven gleiche Höhe und congruente Form, so entsprach die horizontale Differenz ihrer Stellung dem Zeitunterschiede wegen der Nervenleitung.

Bei den Fröschen ist es verhältnissmässig leicht, Zuckungscurven von congruenter Gestalt zu erlangen, indem man die elektrischen Schläge so stark macht, dass man von beiden Nervenstellen aus das Maximum der Zuckung erhält. Beim menschlichen Arme stellte sich dagegen heraus, dass das Maximum der Zuckung bei momentaner Reizung des Nerven desto grösser ausfällt, je höher oben der Nerv gereizt wird.

Es ist dies ein wichtiger Umstand, weil er zeigt, dass momentane Reizungen der motorischen Nerven des Menschen sich nicht in vollständig unveränderlicher Form durch längere Nervenstrecken fortpflanzen. Schon Pflüger hat nachgewiesen, dass die von den Muskeln entfernteren Theile der Nerven schwächere Reizungen erfordern, um schwache Zuckungen zu erzeugen. Dasselbe zeigte sich auch bei diesen Versuchen am menschlichen Arme; trotzdem im Allgemeinen die Nervenstämme desselben höher oben, zwischen dickere Muskeln verpackt, viel ungünstiger für die elektrische Reizung liegen, waren schwächere Schläge erforderlich zur Erregung der Muskeln des Daumenballens, je höher oben die Reizung ausgeführt wurde.

Unter diesen Umständen müssen die Bedingungen, unter denen von einer Fortpflanzungsgeschwindigkeit die Rede sein kann, enger begrenzt werden. Wir haben die Versuche so ausgeführt, dass der elektrische Schlag für die obere Stelle des Nerven so weit abgeschwächt wurde, bis die von ihm erregte Zuckung dieselbe Stärke und Höhe erhielt, wie das Zuckungsmaximum von der unteren Stelle aus erregt. Wir hatten dann also zwei momentane Erregungen des Nerven, welche gleiche mechanische Wirkungen nach aussen hervorbrachten, und da der Muskel in beiden Fällen gleich arbeitete, waren wir sicher, dass die Verzögerung der Wirkung bei Reizung der oberen Stelle nur der Leitung im Nerven angehörte.

Da es nicht immer gelang, die Stärke der Reizung für die obere Stelle so zu treffen, dass die entsprechende Zuckungscurve genau gleich hoch mit der für die untere Nervenstelle wurde, so wurde aus längeren Versuchsreihen, die unter übrigens gleichen Umständen angestellt waren, eine Interpolationsformel berechnet von der Form.

$$D = A + B\delta$$

worin D das Mittel der Horizontalabstände eines einzelnen Curvenpaars bezeichnet, dieselben in verschiedenen Höhen über der Grundlinie gemessen, δ dagegen den Höhenunterschied der beiden Zuckungen, A und B zwei empirisch zu bestimmende Constanten, die nach der Methode der kleinsten Quadrate aus sämmtlichen Curvenpaaren einer Versuchsreihe bestimmt wurden. Die Constante A ist der gesuchte mittlere Horizontalabstand der Curven.

Um den Grad der Uebereinstimmung der Versuche zu zeigen, setze ich die Resultate einer Reihe von Versuchen hierher, wobei Herr Studiosus F. als Experimentirender, Herr Baxt als Beobachter fungirte; h_0 ist die Zuckungshöhe von der unteren, h_1 die von der oberen Nervenstelle, das obige $\delta = h_0 - h_1$. Unter Differenz sind in der letzten Columne die Unterschiede der beobachteten und der aus der Interpolationsformel berechneten Werthe angegeben.

	D	h_0	h_1	$A + Bd$	Differenz
1	6,9375	12,725	11,95	6,8409	— 0,0966
2	6,65	13,025	12,475	6,6797	0,0297
3	5,966	9,45	9,5	6,2704	0,3044
4	5,566	9,1	9,15	6,2687	0,7027
5	6,195	17,6	17,8	6,2186	0,0236
6	6,27	10,5	10,9	5,9885	— 0,2815
7	6,06	10,25	10,65	5,9798	— 0,0802
8	6,7	17,325	18,075	5,9436	— 0,7564
9	5,925	9,7	10,15	5,9169	— 0,0081
10	6,0875	11,575	12,125	5,9066	— 0,1809
11	6,6166	9,8	10,5	5,7006	— 0,9160
12	4,2	10,25	11,15	5,5592	+ 1,2592.

A = 6,3160 Millimeter. B = 8,6193. Nervenlänge = 400 Millimeter.

Aus dem Werthe von A ergibt sich als mittlerer Werth der Fortpflanzungsgeschwindigkeit für diese Reihe.

31,5389 Meter per Secunde.

Eine andere vorher ausgeführte Versuchsreihe von 15 Curvenpaaren, wobei Herr Baxt Experimentirender, ich selbst Beobachter war, und wobei der Schreibhebel vor der Zuckung einen festen Anschlag gehabt hatte, statt in seiner Stellung durch den langen Hebel controlirt zu sein, hatte bei 44 Centimeter Nervenlänge ergeben.

33,395 Meter.

Eine dritte Reihe von 10 Curvenpaaren, wo ebenfalls Herr Baxt Experimentirender, ich selbst Beobachter war, die Anordnung des Apparats übrigens wie bei der ersten Reihe, ergab

37,4927 Meter.

Der Mittelwerth aus allen diesen Bestimmungen würde sein

33,9005 Meter

sehr nahe übereinstimmend mit dem von Herrn A. Hirsch erhaltenen Resultate.

Nach der oben gegebenen Interpolationsformel treten schwächere Zuckungen von der oberen Nervenstelle später ein, als stärkere; es scheint dies nicht blos eine Folge der grösseren Steilheit der höheren Zuckungscurven zu sein, sondern schwächere Zuckungen von der oberen Nervenstelle erregt, lösen sich auch merklich später von der Grundlinie ab, als stärkere Zuckungen, während dies bei den von der unteren Nervenstelle erregten Zuckungen nicht in gleichem Maasse der Fall ist. Daraus scheint zu folgen, dass schwächere Reizungen sich im Nerven langsamer fortpflanzen, als stärkere. Versuchsreihen, bei denen absichtlich schwächere Zuckungen von beiden Nervenstellen aus hervorgerufen wurden, haben noch keine hinreichende Zahl guter Resultate ergeben.

Eine andere Versuchsreihe, wobei die obere gereizte Stelle dicht über dem Ellenbogen lag, schien eine etwas schnellere Fortpflanzung der Reizung in den Nerven des Vorderarms zu ergeben, den Angaben von H. Munk für Froschnerven entsprechend; doch war der Unterschied zu klein, um ihn bei der nicht sehr grossen Zahl gelungener Versuche schon als sicher zu betrachten.

Die Abreise des Herrn Baxt und die Nothwendigkeit, die Apparate den Versuchen besser anzupassen, hat für den Augenblick die Versuche unterbrochen.

4. Vortrag des Herrn Professor N. Friedreich: »Ueber Beobachtungen an rothen Blutkörperchen«, am 31. Mai 1867.

fernung von jedem Pole befinde sich gleichsam der andere Pol. Wenn man also mit der erregenden Electrode z. B. nicht sehr nahe an die Kathode heranrücke, sei es sehr leicht möglich, dass dieselbe sich schon im anelectrotonischen Bezirk befinde, während man glaube, den Katelectrotonus zu prüfen.

Zur Prüfung dieser Ansicht suchte ich den erregenden Reiz möglichst sicher in den zu prüfenden Bezirk zu bringen. Dies erreichte ich durch Construction einer plattenförmigen Electrode für den polarisirenden Strom, die an einer Stelle von einem Glasrohr durchbohrt war, durch welches die erregende Electrode des inducirten Stroms eingeführt werden konnte. Der erregende Strom musste also an einer Stelle des Nerven eingreifen die mit Sicherheit unter dem vollen Einflusse desjenigen Pols stand, mit dem ich die neue Electrode in Verbindung brachte. Bei dieser Versuchsanordnung zeigte sich dann auch eine vollkommene Uebereinstimmung mit den Pflüger'schen Gesetzen: Erhöhung der Erregbarkeit im Bereich der Kathode, Herabsetzung im Bereich der Anode. Zugleich waren die Resultate sehr frappant, die Erregbarkeitsdifferenzen erreichten beträchtlich höhere Werthe als bei den früheren Versuchen. Gleichzeitig zur Controle angestellte Versuche nach den früheren Methoden ergaben auch den früheren conforme Resultate.

Es scheint damit die Uebereinstimmung zwischen den beim Frosch gefundenen und den am Menschen zu beobachtenden electrotonischen Erscheinungen in genügender Weise hergestellt; es kann keinem Zweifel unterliegen, dass auch am lebenden Menschen electrotonische Erscheinungen beobachtet werden und dass dieselben bei richtiger Versuchsanordnung in Uebereinstimmung mit den Pflüger'schen Gesetzen sind. Die entgegengesetzten Resultate, welche sich bei einer gewissen Versuchsanordnung ergeben, erklären sich demnach einfach aus physikalischen Verhältnissen, aus der Lagerung des nicht isolirten Nerven im lebenden Körper.

14. Vortrag des Herrn Dr. Knauff: »Ueber Histologie des Miliartuberkels«, am 26. Juli 1867.

15. Vortrag des Herrn Geheimrath Helmholtz: »Ueber die Mechanik der Gehörknöchelchen«, am 9. Aug. 1867.

(Das Manuscript war bereits am 26. Juli überreicht worden, der Nachtrag dazu am 9. August.)

Die Aufgabe des Trommelhöhlenapparats kann so bezeichnet werden: Derselbe hat die Schallschwingungen der Luft, die mit relativ kleinen Druckkräften aber in grossen Excursionen geschehen, zu übertragen auf das relativ schwere Labyrinthwasser, dessen Bewegung eben wegen seiner Schwere grössere Druckkräfte verlangt, während wegen der mikroskopischen Kleinheit der mitschwingenden Endapparate der Nerven, welche gleichsam die Reagentien für die Schallschwingungen des Labyrinthwassers bilden, sehr kleine Amplitüden seiner Schwingungen genügen.

Um die nöthige mechanische Kraft für die Schwingungen der genannten Flüssigkeit zu gewinnen, wird der Druck der schwingenden Luft von der verhältnissmässig grossen Fläche des Trommelfells gesammelt und durch die Reihe der Gehörknöchelchen innerhalb der sehr viel kleineren Fläche des ovalen Fensters auf das Labyrinthwasser übertragen. Die genaue Uebertragung so kleiner Bewegungen erfordert, wie Riemann in den von ihm nachgelassenen Papieren*) mit Recht hervorhebt, eine ausserordentlich grosse Präcision und Festigkeit in den Verbindungen der Gehörknöchelchen. Damit steht es nun in einem sonderbaren, aber freilich nur scheinbaren, Widerspruche, dass man bei der anatomischen Untersuchung alle einzelnen Gelenke und Bandverbindungen innerhalb der Trommelhöhle schlaff und nachgiebig findet. Namentlich war die Existenz des in den meisten Richtungen sehr nachgiebigen Hammer-Ambossgelenkes in sehr entschiedenem Widerspruche mit der älteren, und von mir selbst in der Lehre von den Tonempfindungen vorgetragenen Theorie, wonach Hammer und Amboss zusammen ein um zwei Spitzen (den Processus Folianus des Hammers und den kurzen Fortsatz des Ambosses) drehbares System bilden sollten, mit zwei nach unten reichenden Hebelarmen, dem Handgriff des Hammers und dem langen Fortsatze des Ambosses.

Anatomische Untersuchungen über die Verbindungen der Gehörknöchelchen, die ich während dieses Sommers angestellt, haben mir nun folgende Resultate gegeben:

1) Der Hammer behält seine Stellung mit nach innen gezogenem Trommelfell und seine Drehbarkeit um eine querlaufende Axe auch noch bei, wenn man den Amboss vorsichtig herausnimmt, und sogar auch noch, wenn man die Sehne des Tensor Tympani durchschneidet, doch macht die letztere Operation die Stellung des Hammers allerdings viel weniger fest als sie vorher war. Die Drehungsaxe des Hammers wird gebildet durch einen ziemlich straffen sehnigen Faserzug, der von der Spitze der Spina Tympanica posterior sich gegen eine knöcherne Hervorragung am hinteren Rande des Trommelfells (etwa der Grenze der ursprünglichen Pars tympanica entsprechend) hinzieht, und in welchen Faserzug der Hammer selbst eingeschaltet ist. Der vordere Theil dieses Bandes ist das bekannte Ligamentum Mallei anticum, welches den Processus Folianus umschliesst. Die Spina tympanica posterior von der der obere straffste Theil dieses Bandes entspringt, reicht übrigens, wie man mit einer Staarnadel fühlen kann, bis ganz nahe

*) Zeitschrift für rationelle Medicin. 1867.

an den Hals des Hammers, so dass die Bandverbindungen an dieser Stelle eine sehr kurze ist. Der Processus Folianus ist in den von mir untersuchten Ohren von Erwachsenen immer bis auf einen kleinen Stumpf geschwunden, nicht blos abgebrochen gewesen. Mit einer feinen Nadel, die ich zwischen die Fasern des Ligamentum anterius einschob, konnte ich immer sein Ende fühlen, noch ehe irgend welche heftigere Bewegungen der Gehörknöchelchen an dem Präparate vorgenommen waren, und andrerseits war keinerlei etwa abgebrochene Fortsetzung jenes Processus in der Bandmasse fühlbar. Der hintere Theil des genannten Faserzuges dagegen, den ich Ligamentum Mallei posticum nennen möchte, liegt in der Schleimhautfalte, welche die hintere Trommelfelltasche bildet, oberhalb der im Rande dieser Falte verlaufenden Chorda Tympani, nach hinten stärker als diese aufsteigend. Ich möchte diesen gesammten Faserzug, das Axenband des Hammers nennen, wegen seiner Bedeutung für die Bewegung dieses Knöchelchens. Dadurch dass das vordere Ende dieses Bandes von der Spina Tympanica posterior ausgeht, die sich sehr merklich von der Ansatzebene des Trommelfells, nach innen hervorragend, entfernt, bleibt zwischen dem Axenbande des Hammers und dem Trommelfell ein hinreichender Zwischenraum, um dem kurzen Fortsatze des Hammers Platz zu gewähren. Wenn die Sehne des Tensor Tympani durchschnitten ist, ist das Axenband des Hammers nicht so prall gespannt, dass es nicht kleine Verschiebungen zuliesse. So lange aber jene Sehne erhalten ist, und einen mässigen Zug ausübt, bringt dieser Zug in dem Axenbande eine verhältnissmässig ziemlich straffe Spannung hervor, nach demselben Principe, wonach ein horizontal nicht ganz straff gespannter unausdehnsamer Faden durch ein kleines Gewicht, was man an seine Mitte hängt, sehr kräftig gespannt werden kann.

2) In der Fortsetzung jener Schleimhautfalte, welche die hintere Trommeltasche bildet, und das Lig. M. posticum enthält, da wo sie sich am oberen Rande des Trommelfells entlang zieht, liegen noch andere Sehnenstreifen, welche zugleich mit dem bekannten Ligamentum Mallei superius Hemmungsbänder für die Bewegung des Handgriffs und des Trommelfells nach aussen bilden.

3) Das Hammerambossgelenk ist zwar für eine ganze Reihe kleiner Verschiebungen ein schlaffes und widerstandsloses Gelenk, ausserdem auch nur von einer sehr zarten und zerreisslichen Kapselmembran umschlossen, aber einer Art der Verschiebung widersteht es in der natürlichen Lage der Knochen vollkommen sicher und fest; bei der Einwärtsdrehung seines Handgriffs fasst nämlich der Hammer den Amboss fest, wie eine Zange, während bei der Auswärtsdrehung des Hammergriffs beide Knochen sich von einander lösen. In dieser Beziehung entspricht die mechanische Wirkung des Gelenks vollkommen den Gelenken mit Sperrzähnen, wie man sie an Uhrschlüsseln anzubringen pflegt. Man kann das Hammerambossgelenk betrachten als ein solches Uhrschlüsselgelenk mit

zwei Sperrzähnen. Von diesen ist je einer an der untern Seite beider Gelenkflächen sehr deutlich ausgebildet. Der des Hammers liegt nach der Seite des Trommelfells, der des Ambosses gegen die Trommelhöhle gewendet. Der obere Theil beider Gelenkflächen entspricht der Stossfläche der beiden zweiten Sperrzähne, neben welcher die Schraubenflächen, mit denen die Sperrzähne übereinander gleiten, zu schmalen Streifchen geschwunden sind. Wenn man sich übrigens einen Hammer und den zugehörigen Amboss an kleinen Holzstäbchen mit Siegellack passend befestigt, so dass das eine Hölzchen etwa in Richtung des Processus Folianus liegt, das andere den Processus brevis des Amboss verlängert, dann die Knochen mit ihren Gelenkflächen aneinander setzt, während man sie an den Hölzchen hält, so fühlt man sehr deutlich, wie fest und sicher der Hammer den Amboss packt, sobald man seinen Handgriff nach innen dreht. Dagegen weichen die Knöchelchen durch die entgegengesetzte Drehung sogleich von einander, und lassen sich gegenseitig los. Am unverletzten Ohre hat dies zur Folge, dass der Hammer durch Luft, die in die Trommelhöhle dringt, ziemlich weit nach aussen getrieben werden kann, ohne den Steigbügel mitzunehmen, und ohne ihn aus dem ovalen Fenster auszureissen.

4) Da die Spitze des kurzen Fortsatzes des Amboss im Ambosspaukengelenke befestigt ist an einer Stelle, die eine Strecke nach innen von der verlängerten Drehungsaxe des Hammers liegt, und der Hammerkopf mit dem Hammerambossgelenk sich bei Einwärtsziehung des Trommelfells nach aussen bewegt, also vom Ambosspaukengelenk entfernt, so werden die Gelenkbänder des Amboss dadurch gespannt, und die Spitze des kurzen Fortsatzes des Amboss wird von ihrer Unterlage ein wenig abgehoben, so weit es die über diesem Gelenke gelegenen starken sehnigen Verstärkungsbänder zulassen. Man sieht aber deutlich an passenden Präparaten, wenn man mit einer Nadel von oben auf den kurzen Fortsatz des Amboss drückt, wie er sich dann senkt und nun erst an seine knöcherne Unterlage anlegt, wobei die genannten sehnigen Verstärkungsbänder sich schlaff zusammenfalten. Also auch hier werden die Gehörknöchelchen nicht durch eine feste Unterlage, sondern durch, wenn auch kurze, gespannte Bänder festgehalten, so lange sie sich in der Stellung befinden, in der sie für das Hören gebraucht werden.

5) Die Spitze des langen Fortsatzes des Amboss drückt gegen das Köpfchen des Steigbügels, wenn der Hammergriff nach innen gezogen ist, soweit es das Trommelfell zulässt; er liegt also dem Steigbügel an, selbst wenn die Bänder des Ambosssteigbügelgelenks durchschnitten sind. Wird der Hammer aber nach aussen bewegt, so nimmt er bei durchschnittenem Ambosssteigbügelgelenk den Amboss mit nach aussen. Ist dagegen die Verbindung des Steigbügels mit dem Amboss erhalten, so geht der Hammer allein nach aussen, was er ohne einen zu starken Zug auf Amboss und Steig-

bügel auszuüben thun kann wegen der oben beschriebenen Form des Hammerambossgelenks. In Summa also sind die Gehörknöchelchen in derjenigen Stellung, wo sie sich beim Hören befinden, nur durch ein System gespannter sehniger Bänder in ihrer Lage gehalten, Bänder, welche alle einzeln genommen nicht sehr straff gespannt sind, aber so angeordnet, dass wenn der Zug des Musculus Tensor Tympani hinzukommt, der auch im unthätigen Zustande immer noch als ein elastisch gespanntes Band zu betrachten ist, alle die genannten Befestigungsbänder mit dem Trommelfell zugleich straff gespannt werden, wobei sich die drei Knöchelchen fest an einander schliessen, Hammer und Amboss mittels ihrer Sperrzähne, der Amboss an den Steigbügel in ihrem Gelenk. Andrerseits gewährt dieselbe Befestigung einen breiten Spielraum für Verschiebungen durch äussere zufällige Störungen, wie z. B. auch für die von Riemann besprochenen Temperaturänderungen, ohne dass dabei die zarte Einfügung des Steigbügels in das ovale Fenster gefährdet wird.

Ich habe mir ein Modell der Gehörknöchelchen in vergrössertem Maassstabe nachgebaut, in welchem die Sehnenbänder durch unausdehnsame Hanffäden, der Muskel durch ein elastisches Kautschukband, das Trommelfell durch Handschuhleder ersetzt ist. Die mechanischen Wirkungen dieses Modells sind denen der Gehörknöchelchen nach der von mir gegebenen Beschreibung ganz entsprechend, namentlich überträgt dasselbe, trotzdem die hölzernen Modelle der Knöchelchen nur durch Fäden festgestellt sind, Stösse, die von aussen gegen den Hammergriff geführt werden, ganz sicher und kräftig auf den Steigbügel.

6) Die Gehörknöchelchen des Menschen bringen bei der Uebertragung der Bewegungen des Nabels des Trommelfells auf den Steigbügel keine erhebliche Veränderung der Amplitüde der Schwingungen hervor, weil die Spitze des Hammergriffs nicht viel weiter von der Drehungsaxe absteht, als die Spitze des langen Fortsatzes des Ambosses, der auf den Steigbügel drückt. Beim Kalbe ist der Handgriff des Hammers dagegen in der That viel länger, und hier muss eine beträchtliche Vermehrung der Kraft der Schwingungen mit gleichzeitiger Verminderung ihrer Amplitüde bei der Uebertragung auf den Steigbügel eintreten. Beim Menschen wird die Aufgabe, die Kraft der Luftschwingungen durch Verminderung ihrer Amplitüde zu vergrössern mittels eines ganz andern Mechanismus gelöst, auf den man bisher, so viel ich weiss, noch gar nicht aufmerksam geworden ist, und der auch bisher noch nicht einmal empirisch bei musikalischen Instrumenten angewendet worden ist. Es geschieht dies nämlich durch die besonderen mechanischen Eigenschaften, welche das Trommelfell als eine gekrümmte Membran darbietet.

Das Trommelfell enthält radiale und ringförmige Faserzüge, beide aus Sehnensubstanz gebildet, daher sehr wenig dehnbar: von gelbem elastischem Gewebe bleibt beim Kochen des Trommelfells in verdünnter Kalilösung kaum eine Spur übrig, die den Gefässstämmen und dem inneren Schleimhautblatte anzugehören scheint. Die Mitte oder der Nabel des Trommelfells ist durch den Hammergriff beträchtlich nach einwärts gezogen, und die radialen Faserzüge desselben sind nach aussen convex gewölbt, so dass sie gegen die Spitze des Hammergriffs in einer nahehin rechtwinkeligen Kegelspitze convergiren.

Wenn nun ein gerader Faden von der Länge l in einen Bogen vom Krümmungsradius r übergeführt wird, so wird die Länge λ der Sehne dieses Bogens

$$\lambda = 2\,r \sin\left(\frac{l}{2\,r}\right).$$

Die Annäherung der Endpuncte der Linie, während diese sich krümmt, ist also

$$l - \lambda = 2\,r \left\{\frac{l}{2\,r} - \sin\left(\frac{l}{2\,r}\right)\right\}$$

oder wenn r sehr gross gegen l ist

$$l - \lambda = \frac{1}{24}\,\frac{l^3}{r^2} \;\ldots\ldots\ldots \quad 1$$

Die Hervorwölbung des Bogens, oder der Abstand s seiner Mitte von der Sehne ist

$$s = r - r \cos\left(\frac{l}{2\,r}\right)$$

oder für ein sehr grosses r

$$s = \frac{1}{8}\,\frac{l^2}{r} \;\ldots\ldots\ldots \quad 2$$

oder wenn man r aus 1 und 2 eliminirt

$$l - \lambda = \frac{8}{3}\,\frac{s^2}{l}.$$

Es wächst also die Verkürzung der Sehne des Bogens wie das Quadrat der Verschiebung seiner Mitte, und bei sehr flachen Bögen, deren Wölbung zunimmt, ist die Verschiebung ihrer Endpuncte verschwindend klein gegen die Verschiebung ihrer Mitte.

Nun sind aber die Radialfasern des Trommelfells solche unausdehnsame Bögen, deren Mitte der Luftdruck zu verschieben strebt, während ihre Wirkung auf den Hammergriff nur von der verhältnissmässig geringen Verlängerung oder Verkürzung ihrer Sehne abhängt, und durch die Richtung des Ansatzes unter etwa 45° gegen die Axe die Verschiebung noch verkleinert wird. Der Luftdruck wird also eine verhältnissmässig grosse Verschiebung der Mitte dieser Bögen bewirken müssen, um eine sehr kleine Verschiebung des Hammergriffs und der Knöchelchen hervorzubringen.

Eben deshalb steigert sich aber nun auch die Kraft dieser letzteren Bewegung in demselben Maasse, in welchem sie kleiner wird. Ist t die Spannung des Fadens, und p der Luftdruck, der gegen die Einheit seiner Länge wirkt, so ist nach bekannten Gesetzen

$$p = \frac{t}{r}$$

oder indem wir r gegen l als sehr gross betrachten, nach Gleichung 2

$$p = \frac{8 s t}{l^2}$$

$$t = \frac{p l^2}{8 s} = p r$$

das heisst: bei gleichbleibender Länge des Bogens wächst der Zug t den der Faden ausüben muss, um dem Drucke p das Gleichgewicht zu halten, direct wie der Radius, oder umgekehrt wie die Höhe der Wölbung. Dieser Zug kann also bei einem sehr flachen Bogen jede beliebige Höhe erreichen.

Beim Trommelfell wird nun die Krümmung der Radialfasern nicht durch den Luftdruck, sondern durch die Spannung der Ringfasern unterhalten, und durch den Luftdruck nur vermindert und vermehrt. Die mathematische Untersuchung des Gleichgewichts einer solchen gekrümmten Membran zeigt, dass dadurch an den oben angegebenen Resultaten nichts Wesentliches geändert wird.

Substituirt man statt des wirklichen ein ideales Trommelfell, welches rings um seine Mitte symmetrisch ist, so ergibt sich, dass die vortheilhafteste Form eines solchen die einer Rotationsfläche ist, welche bei gleichbleibender Länge ihrer Meridianlinien das kleinste Volumen an ihrer convexen Seite abgrenzt. Die Form einer solchen Fläche lässt sich mit Hülfe der elliptischen Functionen berechnen und zeichnen. Das Trommelfell ist in der That, wenn man von der durch den oberen Theil des Hammerstiels verursachten Asymmetrie absieht, einer solchen Fläche ähnlich gestaltet. Die Stärke der elastischen Ringfasern müsste in jener Fläche nach Aussage der mathematischen Theorie ebenfalls von der Mitte nach dem Rande zunehmen, wie sie im Trommelfelle wirklich thut.

Um die Wirkungen solcher gekrümmter Membranen auf die Schallleitung zwischen Luft und festen Körpern practisch zu prüfen, habe ich einen gläsernen Lampencylinder an seinem Ende mit nasser Schweinsblase überspannt, deren Mitte durch einen beschwerten Stab nach innen gedrängt, und sie so trocknen lassen. Dadurch erhielt ich eine Membran, die ungefähr die Form des Trommelfells hat. Dann stützte ich auf die Mitte der eingezogenen Membran ein hölzernes Stäbchen, dessen anderes Ende als Steg für eine Darmsaite diente, welche auf einem nicht resonirenden starken Brette ausgespannt war. Die Membran, so mit der Saite verbunden, gab eine mächtige Resonanz, der einer Violine ähnlich, selbst wenn die Membran nur vier Centimeter Durchmesser hatte. Die Wirkung ist so überraschend, dass manche Zuschauer anfangs gar nicht glauben wollten, dass von einer so kleinen Membran ein so mächtiger Ton ausgehen kann, bis ich sie durch Gegenversuche davon überzeugte.

7) Da vom Hammer, wie vom Ambos ein beträchtlicher Theil ihrer Masse über der Drehungsaxe liegt, das Trommelfell dagegen als eine Belastung des untern Endes des Hammers, der Steigbügel als eine solche des unteren Endes des Ambosses angesehen werden kann, liegt der Schwerpunkt des schwingenden Systems wahrscheinlich der Drehungsaxe sehr nahe. Ich schliesse dies namentlich aus der relativ schlechten unmittelbaren Leitung des Schalls von den Kopfknochen an die Gehörknöchelchen. Denn die sogenannte Kopfknochenleitung geht wesentlich durch den knorpeligen Theil des Gehörganges. Wenn man mit der Hand oder einer das Ohr umgreifenden Kapsel einen Luftraum von dem Ohre abschliesst, hört man die eigene Stimme oder eine an die Zähne gesetzte Stimmgabel gut, so lange die Wurzel des Ohrknorpels nicht gedrückt wird; so wie letzteres geschieht, verschwindet der Ton bis auf einen verhältnissmässig kleinen Rest. Es geschieht offenbar die Leitung von den Kopfknochen an den Ohrknorpel und von diesem an die Luft des Gehörganges viel leichter, als von den Kopfknochen direct auf das Trommelfell.

8) Durch solche Versuche, bei denen ein mässig grosser Luftraum vor dem Ohre abgeschlossen wird, sei es durch eine aufgesetzte feste Kapsel, sei es durch die über das Ohr gelegte hohle Hand, kann man auch den Eigenton des schwingungsfähigen Apparates bestimmen, den das Trommelfell in seiner Verbindung mit den Gehörknöchelchen, dem Labyrinthwasser und der Luft der Trommelhöhle bildet. Man erkennt leicht schon durch die Stimmresonanz, dass diese am stärksten ist an der Grenze der ungestrichenen und eingestrichenen Octave. Genauer gelang diese Bestimmung mit Hülfe einer schwach gespannten und deshalb schwach tönenden Darmsaite, die ich auf einem schmalen Brettchen befestigt hatte. Das Brett legte ich flach an die Ohrmuschel, während ich die Saite anschlug, und suchte die Stelle des Steges, wo der Ton am lautesten wurde. Es fand sich das h der ungestrichenen Octave von etwa 244 Schwingungen. Dieser Ton ist in ziemlich weiten Grenzen unabhängig von der vor dem Ohre abgeschlossenen Luftmasse. Nur wenn man diese sehr verkleinert, zum Beispiel den Tragus auf die Oeffnung des Gehörgangs andrückt, wird die Resonanz etwa um eine ganze Tonstufe höher. Auch die Percussion des Schädels oder des Zitzenfortsatzes giebt denselben Resonanzton. Nun ist der genannte Ton viel zu tief, als dass er den abgeschlossenen kleinen Luftmassen allein angehören könnte. Dass er kein Eigenton des Ohrknorpels sei, ergiebt sich aus dessen schlaffer Beschaffenheit, und daraus, dass man den grössten Theil desselben fest halten kann, ohne dass sich die Stärke der Resonanz ändert. Ich schliesse daraus, dass es ein Resonanzton des Trommelhöhlenapparates sein müsse.

Nachtrag zu dem Vortrage über Mechanik der Gehörknöchelchen.

Ausser dem in meiner ersten Notiz angezeigten Resonanztone h des bedeckten menschlichen Ohres habe ich seitdem noch einige andere gefunden; es bewog mich namentlich der Umstand zu fortgesetztem Suchen, dass ich keine Aenderung dieser Resonanz durch veränderte Spannung des Trommelfells mittels Lufteinblasens entdecken konnte. Nun fand ich zunächst, dass auch die Obertöne desselben h^1 und fis^1 verstärkte Resonanz geben; namentlich ist die des h^1 noch deutlicher als die des h.

Ausserdem aber habe ich gefunden, dass das C_{-1} der sechszehnfüssigen offenen Orgelpfeiffen ein Resonanzton des Ohres ist. Es ist dieser Ton derselbe, den Wollaston schon als Tonhöhe des Muskelgeräusches angegeben hat. Ich finde, dass derselbe Ton zum Vorschein kommt, wenn man den äusseren Gehörgang durch einen leisen Luftstrom anbläst. Ferner wird das Muskelgeräusch deutlich höher, um etwa einen ganzen Ton, wenn man das Trommelfell nach innen spannt durch Verringerung des Luftdrucks in der Trommelhöhle. Bei einer früheren Gelegenheit habe ich gezeigt, dass die Zitterungen der willkührlichen Muskeln, die das Muskelgeräusch bewirken nicht regelmässig, wie die eines musikalischen Tones erfolgen, und ausserdem nicht, wie Wollaston und Haughton aus der erwähnten Beobachtung geschlossen hatten, in der Anzahl von 33 bis 37 Schwingungen, sondern dass im Mittel nur etwa 19 unregelmässige Zuckungen in der Secunde erfolgen. Da sich die Tonhöhe dieses Tones mit dem geänderten Zustande des Trommelfells ändert, so schliesse ich daraus, dass das Muskelgeräusch ein Resonanzton des Trommelfells ist, hervorgebracht durch unregelmässige Erschütterungen der Muskeln.

Durch Einblasen von Luft in die Trommelhöhle wird das Muskelgeräusch ein sehr viel schwächerer und tieferer Ton.

Die früher genannten höheren Resonanztöne h, h^1 und fis^1 sind wahrscheinlich Klirrtöne zwischen Hammer und Ambos. Dass dergleichen vorkommen können, zeigt sich schon, wenn man eine stark schwingende tiefe Stimmgabel nahe vor das Ohr bringt. Der tiefe Resonanzton C_{-1} giebt besonders starkes Klirren, was durch Spannung des Trommelfells nach innen merklich geschwächt wird, beim Einblasen von Luft aber, die die Sperrzähne des Hammers und Ambosses von einander abdrängt ganz aufhört.

Danach sind die früher gemachten Angaben über den Ton h zu verbessern.

16. Vorstellung zweier Operirten, die eine mit Plastik des Antlitzes, die andere mit Oberkieferresektion durch Hrn. Dr. Heine, am 9. Aug. 1867.

dieselben auch sehr leicht vermehrt und statt schematisch wirklich nach der Natur gemacht werden können.

9. Vortrag des Herrn Geheimrath Helmholtz: »Ueber discontinuirliche Flüssigkeits-Bewegungen«, am 8. Mai 1868.

(Das Manuscript wurde am 23. Oktober eingereicht.)

Die hydrodynamischen Gleichungen ergeben bekanntlich für das Innere einer incompressiblen Flüssigkeit, die der Reibung nicht unterworfen ist, und deren Theilchen keine Rotations-Bewegung besitzen, genau dieselbe partielle Differentialgleichung, welche für stationäre Ströme von Elektricität oder Wärme in Leitern von gleichmässigem Leitungsvermögen besteht. Man könnte also erwarten, dass bei gleicher Form des durchströmten Raumes und gleichen Grenzbedingungen die Strömungsform der tropfbaren Flüssigkeiten, der Elektricität und Wärme bis auf kleine von Nebenbedingungen abhängige Unterschiede die gleiche sein sollte. In Wirklichkeit aber bestehen in vielen Fällen leicht erkennbare und sehr eingreifende Unterschiede zwischen der Stromvertheilung einer tropfbaren Flüssigkeit und der der genannten Imponderabilien.

Solche Unterschiede zeigen sich namentlich auffallend, wenn die Strömung durch eine Oeffnung mit scharfen Rändern in einen weiteren Raum eintritt. In solchen Fällen strahlen die Stromlinien der Elektricität von der Oeffnung aus sogleich nach allen Richtungen auseinander, während eine strömende Flüssigkeit, Wasser sowohl wie Luft, sich von der Oeffnung aus anfänglich in einem compacten Strahle vorwärts bewegt, der sich dann in geringerer oder grösserer Entfernung in Wirbel aufzulösen pflegt. Die der Oeffnung benachbarten, ausserhalb des Strahles liegenden Theile der Flüssigkeit des grösseren Behälters können dagegen fast vollständig in Ruhe bleiben. Jedermann kennt diese Art der Bewegung, wie sie namentlich ein mit Rauch imprägnirter Luftstrom sehr anschaulich zeigt. In der That kommt die Zusammendrückbarkeit der Luft bei diesen Vorgängen nicht wesentlich in Betracht, und Luft zeigt hiebei mit geringen Abweichungen dieselben Bewegungsformen wie Wasser.

Bei so grossen Abweichungen zwischen der Wirklichkeit und den Ergebnissen der bisherigen theoretischen Analyse mussten die hydrodynamischen Gleichungen den Physikern als eine praktisch sehr unvollkommene Annäherung an die Wirklichkeit erscheinen. Die Ursache davon mochte man in der inneren Reibung der Flüssigkeit vermuthen, obgleich allerlei seltsame und sprungweise eintretende Unregelmässigkeiten, mit denen wohl Jeder zu kämpfen hatte, der Beobachtungen über Flüssigkeits-Bewegungen anstellte, nicht einmal durch die jedenfalls stetig und gleichmässig wirkende Reibung erklärt werden konnten.

Die Untersuchung der Fälle, wo periodische Bewegungen durch einen continuirlichen Luftstrom erregt werden, wie z. B. in den Orgelpfeifen, liess mich erkennen, dass eine solche Wirkung nur durch eine discontinuirliche, oder wenigstens einer solchen nahe kommende Art der Luftbewegung hervorgebracht werden könne, und das führte mich zur Auffindung einer Bedingung, die bei der Integration der hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigt werden muss, und bisher, so viel ich weiss, übersehen worden ist; bei deren Berücksichtigung dagegen in solchen Fällen, wo die Rechnung durchgeführt werden kann, sich in der That Bewegungsformen ergeben, wie wir sie in Wirklichkeit beobachten. Es ist dies folgender Umstand.

In den hydrodynamischen Gleichungen werden die Geschwindigkeiten und der Druck der strömenden Theilchen als continuirliche Functionen der Coordinaten behandelt. Andrerseits liegt in der Natur einer tropfbaren Flüssigkeit, wenn wir sie als vollkommen flüssig, also der Reibung nicht unterworfen betrachten, kein Grund, dass nicht zwei dicht an einander grenzende Flüssigkeitsschichten mit endlicher Geschwindigkeit an einander vorbeigleiten könnten. Wenigstens diejenigen Eigenschaften der Flüssigkeiten, welche in den hydrodynamischen Gleichungen berücksichtigt werden, nämlich die Constanz der Masse in jedem Raumelement und die Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen hin, bilden offenbar kein Hinderniss dafür, dass nicht auf beiden Seiten einer durch das Innere gelegten Fläche tangentielle Geschwindigkeiten von endlichem Grössenunterschiede stattfinden könnten. Die senkrecht zur Fläche gerichteten Componenten der Geschwindigkeit und der Druck müssen dagegen natürlich an beiden Seiten einer solchen Fläche gleich sein. Ich habe schon in meiner Arbeit über die Wirbelbewegungen*) darauf aufmerksam gemacht, dass ein solcher Fall eintreten müsse, wenn zwei vorher getrennte und verschieden bewegte Wassermassen mit ihren Oberflächen in Berührung kommen. In jener Arbeit wurde ich auf den Begriff einer solchen T r e n n u n g s f l ä c h e oder W i r b e l f l ä c h e, wie ich sie dort nannte, dadurch geführt, dass ich Wirbelfäden längs einer Fläche continuirlich angeordnet dachte, deren Masse verschwindend klein werden kann, ohne dass ihr Drehungsmoment verschwindet.

Nun wird in einer Anfangs ruhenden oder continuirlich bewegten Flüssigkeit eine endliche Verschiedenheit der Bewegung unmittelbar benachbarter Flüssigkeitstheilchen nur durch discontinuirlich wirkende Kräfte hervorgebracht werden können. Unter den äusseren Kräften kommt hierbei nur der Stoss in Betracht.

Aber es ist auch im Innern der Flüssigkeiten eine Ursache vorhanden, welche Discontinuität der Bewegung erzeugen kann. Der Druck nämlich kann zwar jeden beliebigen positiven Werth an-

*) Journal für reine und angewandte Mathematik. Band LX.

nehmen, und die Dichtigkeit der Flüssigkeit wird sich mit ihm immer continuirlich ändern. Aber so wie der Druck den Werth Null überschreiten und negativ werden sollte, wird eine discontinuirliche Veränderung der Dichtigkeit eintreten; die Flüssigkeit wird auseinander reissen.

Nun hängt die Grösse des Drucks in einer bewegten Flüssigkeit von der Geschwindigkeit ab, und zwar ist in incompressibeln Flüssigkeiten die Verminderung des Drucks unter übrigens gleichen Umständen der lebendigen Kraft der bewegten Wassertheilchen direct proportional. Uebersteigt also die letztere eine gewisse Grösse, so muss in der That der Druck negativ werden, und die Flüssigkeit zerreissen. An einer solchen Stelle wird die beschleunigende Kraft, welche dem Differentialquotienten des Drucks proportional ist, offenbar discontinuirlich und dadurch die Bedingung erfüllt, welche nöthig ist, um eine discontinuirliche Bewegung der Flüssigkeit hervorzubringen. Die Bewegung der Flüssigkeit an einer solchen Stelle vorüber kann nun nur so geschehen, dass sich von dort ab eine Trennungsfläche bildet.

Die Geschwindigkeit, welche das Zerreissen der Flüssigkeit herbeiführen muss, ist diejenige, welche die Flüssigkeit annehmen würde, wenn sie unter dem Drucke, den die Flüssigkeit am gleichen Orte im ruhenden Zustande haben würde, in den leeren Raum ausflösse. Dies ist allerdings eine verhältnissmässig bedeutende Geschwindigkeit; aber es ist wohl zu bemerken, dass, wenn die tropfbaren Flüssigkeiten continuirlich wie Elektricität fliessen sollten, die Geschwindigkeit an jeder scharfen Kante, um welche der Strom herumbiegt, unendlich gross werden müsste.*) Daraus folgt, dass jede geometrisch vollkommen scharf gebildete Kante, an welcher Flüssigkeit vorbeifliesst, selbst bei der mässigsten Geschwindigkeit der übrigen Flüssigkeit, dieselbe zerreissen und eine Trennungsfläche herstellen muss. An unvollkommen ausgebildeten, abgerundeten Kanten dagegen wird dasselbe erst bei gewissen grösseren Geschwindigkeiten stattfinden. Spitzige Hervorragungen an der Wand des Strömungscanales werden ähnlich wirken müssen.

Was die Gase betrifft, so tritt bei ihnen derselbe Umstand wie bei den Flüssigkeiten ein, nur dass die lebendige Kraft der Bewegung eines Theilchens nicht direct der Verminderung des Druckes p, sondern mit Berücksichtigung der Abkühlung der Luft bei ihrer Ausdehnung der Grösse p^m proportional ist, wo $m = 1 - \frac{1}{\gamma}$ und γ das Verhältniss der specifischen Wärme bei constantem Druck

*) In der sehr kleinen Entfernung ϱ von einer scharfen Kante, deren Flächen unter den Winkel α zusammenstossen, werden die Geschwindigkeiten unendlich wie ϱ^{-m}, wo $m = \frac{\pi - \alpha}{2\pi - \alpha}$.

zu der bei constanten Volumen bezeichnet. Für atmosphärische Luft hat der Exponent m den Werth 0,291. Da er positiv und reell ist, so kann p^m, wie p, bei hohen Werthen der Geschwindigkeit nur bis Null abnehmen, und nicht negativ werden. Anders wäre es, wenn die Gasarten einfach dem Mariotte'schen Gesetze folgten und keine Temperaturveränderungen erlitten. Dann würde statt p^m die Grösse log. p eintreten, welche negativ unendlich werden kann, ohne dass p negativ wird. Unter dieser Bedingung wäre ein Zerreissen der Luftmasse nicht nöthig.

Es gelingt sich von dem thatsächlichen Bestehen solcher Discontinuitäten zu überzeugen, wenn man einen Strahl mit Rauch imprägnirter Luft aus einer runden Oeffnung oder einem cylindrischen Rohre mit mässiger Geschwindigkeit, so dass kein Zischen entsteht, hervortreten lässt. Unter günstigen Umständen kann man dünne Strahlen der Art von einer Linie Durchmesser in einer Länge von mehreren Fussen erhalten. Innerhalb der cylindrischen Oberfläche ist die Luft dann in Bewegung mit constanter Geschwindigkeit, ausserhalb dagegen selbst in allernächster Nähe des Strahls gar nicht oder kaum bewegt. Sehr deutlich sieht man diese scharfe Trennung auch, wenn man einen ruhig fliessenden cylindrischen Luftstrahl durch die Spitze einer Flamme leitet, aus der er dann ein genau abgegrenztes Stück herausschneidet, während der Rest der Flamme ganz ungestört bleibt, und höchstens eine sehr dünne Lamelle, die den durch Reibung beeinflussten Grenzschichten entspricht, ein wenig mitgenommen wird.

Was die mathematische Theorie dieser Bewegungen betrifft, so habe ich die Grenzbedingungen für eine innere Trennungsfläche der Flüssigkeit schon angegeben. Sie bestehen darin, dass der Druck auf beiden Seiten der Fläche gleich sein muss, und ebenso die normal gegen die Trennungsfläche gerichtete Componente der Geschwindigkeit. Da nun die Bewegung im ganzen Innern einer incompressiblen Flüssigkeit, deren Theilchen keine Rotationsbewegung haben, vollständig bestimmt ist, wenn die Bewegung ihrer ganzen Oberfläche und ihre inneren Discontinuitäten gegeben sind, so handelt es sich bei äusserer fester Begrenzung der Flüssigkeit der Regel nach nur darum, die Bewegung der Trennungsfläche und die Veränderungen der Discontinuität an derselben kennen zu lernen.

Es kann nun eine solche Trennungsfläche mathematisch gerade so behandelt werden, als wäre sie eine Wirbelfläche, d. h., als wäre sie mit Wirbelfäden von unendlich geringer Masse, aber endlichem Drehungsmoment continuirlich belegt. In jedem Flächenelement einer solchen wird es eine Richtung geben, nach welcher genommen die Componenten der tangentiellen Geschwindigkeiten gleich sind. Diese gibt zugleich die Richtung der Wirbelfäden an der entsprechenden Stelle. Das Moment dieser Fäden ist proportional zu setzen dem Unterschiede, welchen die dazu senkrechten

Componenten der tangentiellen Geschwindigkeit an beiden Seiten der Fläche zeigen.

Die Existenz solcher Wirbelfäden ist für eine ideale nicht reibende Flüssigkeit eine mathematische Fiction, welche die Integration erleichtert. In einer wirklichen der Reibung unterworfenen Flüssigkeit wird jene Fiction schnell eine Wirklichkeit, indem durch die Reibung die Grenztheilchen in Rotation versetzt werden, und somit dort Wirbelfäden von endlicher, allmälig wachsender Masse entstehen, während die Discontinuität der Bewegung dadurch gleichzeitig ausgeglichen wird.

Die Bewegung einer Wirbelfläche und der in ihr liegenden Wirbelfäden ist nach den in meiner Arbeit über die Wirbelbewegungen festgestellten Regeln zu bestimmen. Die mathematischen Schwierigkeiten dieser Aufgabe lassen sich freilich erst in wenigen der einfacheren Fälle überwinden. In vielen andern Fällen kann man dagegen aus der angegebenen Betrachtungsweise Schlüsse wenigstens auf die Richtung der eintretenden Veränderungen ziehen.

Namentlich ist zu erwähnen, dass, gemäss dem für Wirbelbewegungen erwiesenen Gesetze, die Fäden und mit ihnen die Wirbelfläche im Innern einer nicht reibenden Flüssigkeit nicht entstehen und nicht verschwinden können, vielmehr jeder Wirbelfaden constant das gleiche Rotationsmoment behalten muss; ferner, dass die Wirbelfäden längs einer Wirbelfläche selbst fortschwimmen mit einer Geschwindigkeit, welche das Mittel aus den an beiden Seiten der Fläche bestehenden Geschwindigkeiten ist. Daraus folgt, dass *eine Trennungsfläche sich immer nur nach der Richtung hin verlängern kann, nach welcher der stärkere von den beiden in ihr sich berührenden Strömen gerichtet ist.*

Ich habe zunächst gesucht, Beispiele von unverändert bestehenden Trennungsflächen in stationären Strömungen zu finden, bei denen die Integration ausführbar ist, um daran zu prüfen, ob die Theorie Stromesformen ergiebt, die der Erfahrung besser entsprechen, als wenn man die Discontinuität der Bewegung unberücksichtigt lässt. Wenn eine Trennungsfläche, die ruhendes und bewegtes Wasser von einander scheidet, stationär bleiben soll, so muss längs derselben der Druck in der bewegten Schicht derselbe sein, wie in der ruhenden, woraus folgt, dass die tangentielle Geschwindigkeit der Wassertheilchen in ganzer Ausdehnung der Fläche constant sein muss; ebenso die Dichtigkeit der fingirten Wirbelfäden. Anfang und Ende einer solchen Fläche können nur an der Wand des Gefässes oder in der Unendlichkeit liegen. Wo ersteres der Fall ist, müssen sie die Wand des Gefässes tangiren, vorausgesetzt, dass diese hier stetig gekrümmt ist, weil die zur Gefässwand normale Geschwindigkeitscomponente gleich Null sein muss.

Die stationären Formen der Trennungsflächen zeichnen sich übrigens, wie Versuch und Theorie übereinstimmend erkennen lassen, durch einen auffallend hohen Grad von Veränderlichkeit bei den unbedeutendsten Störungen aus, so dass sie sich Körpern, die in labilem Gleichgewicht befindlich sind, einigermassen ähnlich verhalten. Die erstaunliche Empfindlichkeit eines mit Rauch imprägnirten cylindrischen Luftstrahls gegen Schall ist von Hrn. Tyndall schon beschrieben worden; ich habe dieselbe bestätigt gefunden. Es ist dies offenbar eine Eigenschaft der Trennungsflächen die für das Anblasen der Pfeifen von grösster Wichtigkeit ist.

Die Theorie lässt erkennen, dass überall, wo eine Unregelmässigkeit an der Oberfläche eines übrigens stationären Strahls gebildet wird, diese zu einer fortschreitenden spiraligen Aufrollung des betreffenden (übrigens am Strahle fortgleitenden) Theils der Fläche führen muss. Dies Streben nach spiraliger Aufrollung bei jeder Störung ist übrigens an den beobachteten Strahlen leicht zu bemerken. Der Theorie nach könnte ein prismatischer oder cylindrischer Strahl unendlich lang sein. Thatsächlich lässt sich ein solcher nicht herstellen, weil in einem so leicht beweglichen Elemente, wie die Luft ist, kleine Störungen nie ganz zu beseitigen sind.

Dass ein solcher unendlich langer cylindrischer Strahl, der aus einer Röhre von entsprechendem Querschnitt in ruhende äussere Flüssigkeit austritt, und überall mit gleichmässiger Geschwindigkeit seiner Axe parallel bewegte Flüssigkeit enthält, den Bedingungen des stationären Zustandes entspricht, ist leicht einzusehen.

Ich will hier nur noch die mathematische Behandlung eines Falls entgegengesetzter Art, wo der Strom aus einem weiten Raum in einen engen Canal übergeht, skizziren, um daran auch gleichzeitig ein Beispiel zu geben für eine Methode, durch welche Probleme der Lehre von den Potentialfunctionen gelöst werden können, die bisher Schwierigkeiten machten.

Ich beschränke mich auf den Fall, wo die Bewegung stationär ist, und nur von zwei rechtwinkligen Coordinaten x, y abhängig, wo ferner von Anfang an in der reibungsfreien Flüssigkeit keine rotirenden Theilchen vorhanden sind, und sich also auch keine solchen bilden können. Bezeichnen wir für das am Puncte (x, y) befindliche Flüssigkeitstheilchen die den x parallele Geschwindigkeitscomponente mit u, die den y parallele mit v, so lassen sich bekanntlich zwei Funktionen von x und y in der Weise finden, dass

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\psi}{dy} \ldots\ldots \\ v &= \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{d\psi}{dx} \ldots \end{aligned}\right\} 1$$

Durch diese Gleichungen wird auch unmittelbar im Innern der Flüssigkeit die Bedingung erfüllt, dass die Masse in jedem Raumelement constant bleibe, nämlich

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}=\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d^2\varphi}{dy^2}=\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}=0\ldots\ldots \Big\} \ 1a$$

Der Druck im Innern wird bei der constanten Dichtigkeit h, und wenn das Potential der äusseren Kräfte mit V bezeichuet wird, gegeben durch die Gleichung:

$$V-\frac{p}{h}+C=\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2\right]$$
$$=\tfrac{1}{2}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\psi}{dy}\right)^2\right]\ldots \Big\} \ 1b$$

Die Curven

$$\psi=\text{Const.}$$

sind die Strömungslinien der Flüssigkeit, und die Curven

$$\varphi=\text{Const.}$$

sind orthogonal zu ihnen. Letztere sind die Curven gleichen Potentials, wenn Elektricität, oder gleicher Temperatur, wenn Wärme in Leitern von constantem Leitungsvermögen in stationärem Strome fliesst.

Aus den Gleichungen 1. folgt als Integralgleichung, dass die Grösse $\varphi+\psi i$ eine Function sei von $x+yi$ (wo $i=\sqrt{-1}$). Die bisher gefundenen Lösungen drücken in der Regel φ und ψ als eine Summe von Gliedern aus, die selbst Functionen von x und y sind. Aber auch umgekehrt kann man $x+yi$ als Function von $\varphi+\psi i$ betrachten und entwickeln. Bei den Aufgaben über Strömung zwischen zwei festen Wänden ist ψ längs der Grenzen constant, und stellt man also φ und ψ als rechtwinklige Coordinaten in einer Ebene dar, so hat man in einem von zwei parallelen graden Linien $\psi=c_0$ und $\psi=c_1$ begrenzten Streifen dieser Ebene die Funktion $x+yi$ so zu suchen, dass sie am Rande der Gleichung der Wand entspricht, im Innern gegebene Unstetigkeiten annimmt.

Ein Fall dieser Art ist, wenn wir setzen

$$x+yi=A\left\{\varphi+\psi i+e^{\varphi+\psi i}\right\}\ \ldots. \Big\} \ 2$$

oder

$$x=A\varphi+Ae^{\varphi}\cos\psi$$
$$y=A\psi+Ae^{\varphi}\sin\psi$$

Für den Werth $\psi=\pm\pi$ wird y constant und

$$x=A\varphi-Ae^{\varphi}$$

Wenn φ von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, geht x gleichzeitig von $-\infty$ bis $-A$ und dann wieder zurück zu $-\infty$. Die Stromcurven $\psi=\pm\pi$ entsprechen also der Strömung längs zweier gerader Wände für die $y=\pm A\pi$ und x zwischen $-\infty$ und $-A$ läuft.

Die Gleichung 2 entspricht also, wenn wir ψ als Ausdruck der Stromescurven betrachten, der Strömung aus einem durch zwei parallele Ebenen begrenzten Canal in den unendlichen Raum hin-ein. Am Rande des Canals aber, wo $x = -A$ und $y = \pm A\pi$, wo ferner

$$\varphi = o \text{ und } \psi = \pm \pi$$

ist, wird

$$\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 0$$

also

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \infty$$

Elektricität und Wärme können so strömen; tropfbare Flüssigkeit muss aber zerreissen.

Sollen vom Rande des Canals stationäre Trennungslinien ausgehen, welche natürlich Fortsetzungen der längs der Wand verlaufenden Strömungslinien $\psi = \pm \pi$ werden, und soll ausserhalb dieser Trennungslinien, die die strömende Flüssigkeit begrenzen, Ruhe stattfinden, so muss der Druck auf beiden Seiten der Trennungslinien gleich sein. Das heisst, es muss längs derjenigen Theile der Linien $\psi = \pm \pi$, welche den freien Trennungslinien entsprechen, gemäss 1 b sein.

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 = \text{Const} \ldots\ldots \Big\} \; 3$$

Um nun die Grundzüge der in Gleichung 2 gegebenen Bewegung beizubehalten, setzen wir zu obigem Ausdrucke von $x + yi$ noch ein Glied $\sigma + \tau i$ hinzu, welches ebenfalls eine Function von $\varphi + \psi i$ ist.

Wir haben dann

$$\left.\begin{aligned} x &= A\varphi + A e^{\varphi} \cos\psi + \sigma \ldots\ldots \\ y &= A\psi + A e^{\varphi} \sin\psi + \tau \ldots\ldots \end{aligned}\right\} 3a$$

und müssen $\sigma + \tau i$ so bestimmen, dass längs des freien Theils der Trennungsflächen $\psi = \pm \pi$ werde

$$\left(A - Ae^{\varphi} + \frac{d\sigma}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{d\tau}{d\varphi}\right)^2 = \text{Const.}$$

Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir eben daselbst machen, dass

$$\frac{d\sigma}{d\varphi} = 0 \text{ oder } \sigma = \text{Const.} \ldots\ldots \Big\} 3b$$

und

$$\frac{d\tau}{d\varphi} = \pm A \sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} \ldots\ldots\ldots \Big\} 3c$$

Da ψ längs der Wand constant ist, können wir die letzte Gleichung nach φ integriren, und das Integral in eine Function von $\varphi + \psi i$ verwandeln, indem wir statt φ überall setzen $\varphi + i(\psi + \pi)$. So erhalten wir bei passender Bestimmung der Integrationsconstante.

$$\sigma + \tau i = A i \left\{ \sqrt{-2e^{\varphi+\psi i} - e^{2\varphi+2\psi i}} + \right.$$
$$\left. + 2 \text{ arc. sin} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}(\varphi+\psi i)} \right] \right\} \quad \dots \quad \{ 3d$$

Die Verzweigungspunkte dieses Ausdrucks liegen, wo $e^{\varphi+\psi i} = -2$, das heisst, wo $\psi = \pm (2a+1)\pi$ und $\varphi = \log. 2$ ist Also liegt keiner im Innern des Intervalls von $\psi = +\pi$ bis $\psi = -\pi$. Die Function $\sigma + \tau i$ ist hier continuirlich.

Längs der Wand wird

$$\sigma + \tau i = \pm A i \left\{ \sqrt{2e^{\varphi} - e^{2\varphi}} - \text{arc. sin} \left[\frac{i}{\sqrt{2}} e^{\frac{1}{2}\varphi} \right] \right\}$$

Wenn $\psi < \log. 2$, so ist dieser ganze Werth rein imaginär, also $\sigma = o$, während $\frac{d\tau}{d\varphi}$ den eben in 3_c vorgeschrieben Werth erhält. Dieser Theil der Linien $\psi = \pm \pi$ entspricht also dem freien Theile des Strahls.

Wenn $\varphi > \log. 2$ wird der ganze Ausdruck bis auf den Summanden $\pm A i \pi$ reell, welcher letztere sich zum Werthe von τi, beziehlich $y i$ hinzufügt.

Die Gleichungen 3_a und 3_d entsprechen also der Ausströmung aus einem unbegrenzten Becken in einem durch zwei Ebenen begrenzten Canal, dessen Breite $4 A \pi$ ist, dessen Wände von $x = -\infty$ bis $x = -A\ (2 - \log. 2)$ reichen. Die freie Trennungslinie der strömenden Flüssigkeit krümmt sich von der Kante der Oeffnung zunächst noch ein wenig gegen die Seite der positiven x hin, wo sie für $\varphi = o$, $x = -A$ und $y = \pm A (\frac{3}{2}\pi + 1)$ ihre grössten x-Werthe erreicht, um sich dann in das Innere des Kanals hineinzuwenden, und zuletzt asymptotisch den beiden Linien $y = \pm A\pi$ zu nähern, so dass schliesslich die Breite des ausfliessenden Strahles nur der halben Breite des Kanales gleich wird.

Die Geschwindigkeit längs der Trennungsfläche und im geraden Ende des ausfliessenden Strahlen ist $\frac{1}{A}$. Längs der festen Wand und im Innern der Flüssigkeit ist sie überall kleiner als $\frac{1}{A}$, so dass diese Bewegungsform bei jeder Grösse der Ausflussgeschwindigkeit stattfinden kann.

Ich hebe an diesem Beispiele namentlich hervor, wie es zeigt, dass die Form des Flüssigkeitsstroms in einer Röhre auf sehr lange Strecken hin durch die Form des Anfangsstücks bestimmt sein kann.

Zusatz, elektrische Vertheilung betreffend. Wenn man in der Gleichung 2 die Grösse ψ als das Potential von Elektricität betrachtet, so ergibt sich hier die Vertheilung der Elektricität in der Nähe des Randes zweier ebener und sehr naher

Scheiben, vorausgesetzt, dass ihr Abstand als verschwindend klein gegen den Krümmungshalbmesser ihrer Randcurven betrachtet werden kann. Es ist das eine sehr einfache Lösung der Aufgabe, welche Herr Clausius*) behandelt hat. Sie ergiebt übrigens dieselbe Vertheilung der Elektricität, wie er sie gefunden hat, wenigstens soweit dieselbe von der Krümmung des Randes unabhängig ist.

Ich will noch hinzufügen, dass dieselbe Methode genügt, um auch auf zwei parallelen unendlich langen ebenen Streifen, deren vier Kanten im Querschnitt die Ecken eines Rechtecks bilden, die Vertheilung der Elektricität zu finden. Die Potentialfunction ψ derselben wird gegeben durch eine Gleichung von der Form

$$x + y i = A(\varphi + \psi i) + B \frac{1}{H(\varphi + \psi i)} \;\ldots\ldots \quad \Big\} 4.$$

wo $H(u)$ die von Jacobi in den Fundamenta nova p. 172 als Zähler von sin am u entwickelte Function bezeichnet. Die belegten Streifen entsyrechen nach dortiger Bezeichnung dem Werthe $\varphi = \pm 2K$, wobei $x = \pm 2AK$ den halben Abstand der Streifen ergibt, während vom Verhältniss der Constanten A und B die Breite der Streifen abhängt.

Die Form der Gleichungen 2 und 4 lässt erkennen, dass φ und ψ als Functionen von x und y nur durch äusserst complicirte Reihenentwickelungen auszudrücken sein können.

10. Vortrag des Herrn Professor H. A. Pagenstecher: »Ueber einen neuen Entwicklungsmodus der Siphonophoren«, am 22. Mai 1868.

(Das Manuscript wurde sofort eingereicht.)

Der Vortragende berichtete über eine neue von ihm bei Mentone gefischte Jugendform einer Siphonophore. Dieselbe besteht aus einer bis zu einem halben Centimeter Durchmesser zeigenden, kugligen, an einem Pole wie abgeschnittenen membranösen Hülle, in welcher mit einem kurzen Strange eine kleine Siphonophorenkolonie aufgehangen ist. Die Befestigung geschieht der Art, dass einer Seits von derselben ein seiner Lage nach der Schwimmsäule vergleichbarer aber nicht mit zu Glocken differenzirten Stücken besetzter Antheil, andererseits dagegen der Achsenfaden oder Stamm sich befindet, an welchem sich durch Kerbung des Randes mehr und mehr Polypenleiber ausbilden, welche weiterhin an ihrer Basis Nesselapparate entwickeln und einzeln für sich besondere Stiele ausziehn. Eine genauere Beschreibung sowie die Abbildung dieser ganz neuen und interessanten Entwicklungsmodalität einer Siphonophore ist der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie eingesandt worden und wird wohl im vierten Hefte von dem fünfzehnten Bande abgedruckt werden.

*) Poggendorff's Annalen Bd. LXXXVI.

11. Vortrag des Herrn Geheimrath Helmholtz: »Ueber die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie«, am 22. Mai 1866.

(Das Manuscript wurde sofort eingereicht.)

Die Untersuchungen über die Art, wie Localisation im Gesichtsfelde zu Stande kommt, haben den Vortragenden veranlasst, auch über die Ursprünge der allgemeinen Raumanschauung überhaupt nachzudenken. Es gibt hier zunächst eine Frage, deren Beantwortung jedenfalls in das Gebiet der exacten Wissenschaften gehört, nämlich die, welche Sätze der Geometrie Wahrheiten von thatsächlicher Bedeutung aussprechen, welche dagegen nur Definitionen oder Folgen von Definitionen und der besonderen gewählten Ausdrucksweise sind. Diese Untersuchung ist ganz unabhängig von der weiteren Frage, woher unsere Kenntniss der Sätze von thatsächlicher Bedeutung herstammt.. Die erstgenannte Frage ist deshalb nicht so leicht wie es wohl häufig geschieht, zu entscheiden, weil die Raumgebilde der Geometrie Ideale sind, denen sich die körperlichen Gebilde der wirklichen Welt immer nur nähern können, ohne jemals der Forderung des Begriffs vollständig zu genügen, und weil wir über die Unveränderlichkeit der Form, die Richtigkeit der Ebenen und geraden Linien, die wir an einem festen Körper finden, gerade mittels derselben geometrischen Sätze die Prüfung anstellen müssen, welche wir an dem betreffenden Beispiele etwa thatsächlich zu beweisen unternehmen wollten.

Andererseits kann man sich durch leichte Ueberlegungen überzeugen, dass, wie auch der weitere Verlauf dieses Vortrags zeigen wird, die Reihe der gewöhnlich in der elementaren Geometrie hingestellten geometrischen Axiome ungenügend ist; dass in der That stillschweigend noch eine Reihe von einigen weiteren Thatsachen vorausgesetzt wird. Man hat zwar in neueren Lehrbüchern die Axiome des Euclides noch zu ergänzen versucht, es fehlte aber ein Princip, mittels dessen man erkennen konnte, ob die Ergänzung vollständig sei. Da wir nämlich nur solche Raumverhältnisse uns anschaulich vorstellen können, welche im wirklichen Raume möglicher Weise darstellbar sind, so verführt uns diese Anschaulichkeit leicht dazu etwas als selbstverständlich vorauszusetzen, was in Wahrheit eine besondere, und nicht selbstverständliche Eigenthümlichkeit der uns vorliegenden Aussenwelt ist.

Dieser Schwierigkeit überhebt uns die analytische Geometrie, welche mit reinen Grössenbegriffen rechnet, und zu ihren Beweisen keine Anschauung braucht. Es konnte also zur Entscheidung der erwähnten Frage der Weg betreten werden, nachzusuchen, welche analytischen Eigenschaften des Raumes und der Raumgrössen für die analytische Geometrie vorausgesetzt werden müssten, um deren Sätze vollständig von Anfang her zu begründen.

Der Vortragende hatte eine solche Untersuchung begonnen, und auch der Hauptsache nach schon fertig gemacht, als die Habilitationsvorlesung von Riemann »über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen« veröffentlicht wurde, in welcher die gleiche Untersuchung mit unwesentlich abweichender Fragestellung durchgeführt ist. Bei dieser Gelegenheit erfuhren wir, dass auch Gauss sich mit demselben Thema beschäftigt hat, und dass seine berühmte Abhandlung über die Krümmung der Flächen der einzige veröffentlichte Theil dieser Untersuchung ist.

Riemann beginnt damit, dass er auseinandersetzt, wie die allgemeinen Eigenthümlichkeiten des Raums, seine Continuirlichkeit, die Vielfältigkeit seiner Dimensionen analytisch dadurch ausgedrückt werden können, dass jedes besondere Einzelne in der Mannigfaltigkeit, die er darbietet, dass heisst also jeder Punkt, bestimmt werden könne durch Abmessung von n continuirlich und unabhängig von einander veränderlichen Grössen (Coordinaten). Wenn n dergleichen nöthig sind, so ist der Raum eine, wie er es nennt, nfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, und wir schreiben ihm n Dimensionen zu.

Eine ähnliche, dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit ist auch das System der Farben.

Nun ist im Raum jedes Linienelement, wie es auch gerichtet sein mag, der Grösse nach vergleichbar mit jedem andern. Sind u, v, w Abmessungen irgend welcher Art, welche die Lage eines Punktes bestimmen, und $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ die eines benachbarten, so ist das Maass des Linienelementes ds in unserem wirklichen Raume jedenfalls die Quadratwurzel aus einer homogenen Function zweiten Grades der Grössen du, dv, dw, welches auch die Natur der Abmessungen u, v, w sein mag. Wir können diesen Satz als die allgemeinste Form des Pythagoräischen Lehrsatzes bezeichnen. Er bildet gleichsam den Angelpunkt der ganzen Untersuchung; er hat einen hohen Grad von Allgemeinheit, da er von der Festsetzung irgend eines besonderen Messungssystems ganz unabhängig ist.

Diesen Ausdruck für das Linienelement nimmt Riemann als Hypothese an, indem er nachweist, dass er die einfachste algebraische Form sei, die den Bedingungen der Aufgabe entspricht. Aber er erkennt dies ausdrücklich als Hypothese an und erwähnt die Möglichkeit, dass ds vielleicht auch als vierte Wurzel einer homogenen Function vierten Grades von du, dv und dw angesehen werden könne.

Der fernere Gang von Riemann's Untersuchung wird am anschaulichsten, wenn wir uns auf zwei Dimensionen beschränken. Dann folgt schon aus der Untersuchung von Gauss über die Krümmung der Flächen, dass die allgemeinste Form eines Raumes von zwei Dimensionen, in welchem für das Linienelement die erwähnte allgemeinste Form des Pythagoräischen Satzes gilt, eine beliebige krumme Fläche unseres factischen Raumes sei, in welcher die

Raumbestimmungen nach den gewöhnlichen Regeln der analytischen Geometrie gemacht werden.

Sollen Figuren von endlicher Grösse nach allen Theilen einer solchen Fläche ohne Veränderung ihrer in der Fläche selbst zu machenden Abmessungen beweglich sein und um jeden beliebigen Punkt gedreht werden können, so muss die Fläche in allen ihren Theilen constantes Krümmungsmaass haben, das heisst eine Kugelfläche sein, oder durch Biegung ohne Dehnung aus einer solchen entstanden sein.

Soll die Ausdehnung einer solchen Fläche unendlich sein, so muss sie eine Ebene sein, oder aus einer solchen durch Biegung ohne Dehnung erzeugt werden.

Diese Sätze erweitert nun Riemann auf beliebig viele Dimensionen, zeigt wie in diesem Falle das Krümmungsmaass zu bestimmen sei. Die allgemeinste Form eines Raumes von drei Dimensionen ist, wie aus dieser Untersuchung folgt, ein durch drei beliebige Gleichungen beschränktes Raumgebild im Raume von sechs Dimensionen.

Nachdem er die allgemeine Aufgabe gelöst, beschränkt er schliesslich die Lösung durch die hinzugefügte Forderung, dass endliche Raumgebilde ohne Formveränderung überall hin beweglich und in jeder Richtung drehbar seien. Dann muss das Krümmungsmaass eines solchen imaginären Raumes constant sein, und soll derselbe unendlich ausgedehnt sein, so muss jenes Maass gleich Null sein. Im letzteren Falle hat ein solcher Raum dieselben Attribute, wie unser wirklicher Raum, und kann den imaginären Räumen höherer Dimensionen gegenüber als eben bezeichnet werden.

Meine eigene Untersuchung mit ihren Resultaten ist grösstentheils implicite in der von Riemann schon enthalten. Nur in einer Beziehung fügt sie Neues hinzu, betreffs der Begründung nämlich des verallgemeinerten Pythagoräischen Satzes, wie Riemann ihn als Ausgangspunkt seiner Untersuchung gebraucht. Die Forderung nämlich, welche Riemann erst am Schlusse seiner Untersuchung einführt, dass Raumgebilde ohne Formveränderung denjenigen Grad von Beweglichkeit haben sollen, den die Geometrie voraussetzt, hatte ich von Anfang an eingeführt, und diese Forderung beschränkt dann die Möglichkeit der Hypothesen, die man für den Ausdruck des Linienelements machen kann, so weit, dass nur die von Riemann acceptirte Form mit Ausschluss aller übrigen übrig bleibt.

Mein Ausgangspunkt war der, dass alle ursprüngliche Raummessung auf Constatirung von Congruenz beruht, und dass also das System der Raummessung diejenigen Bedingungen voraussetzen muss, unter denen allein von Constatirung der Congruenz die Rede sein kann.

Die Voraussetzungen meiner Untersuchung sind:

1) Die Continuität und Dimensionen betreffend.

Im Raume von n Dimensionen ist der Ort jedes Punktes bestimmbar durch Abmessung von n continuirlich veränderlichen, von einander unabhängigen Grössen, so dass (mit eventueller Ausnahme gewisser Punkte, Linien, Flächen, oder allgemein, gewisser Gebilde von weniger als n Dimensionen) bei jeder Bewegung des Punktes sich diese als Coordinaten dienenden Grössen continuirlich verändern, und mindestens eine von ihnen nicht unverändert bleibt.

2) Die Existenz beweglicher und in sich fester Körper betreffend. Zwischen den 2n Coordinaten eines jeden Punktpaares eines in sich festen Körpers der bewegt wird, besteht eine Gleichung, welche für alle congruenten Punktpaare die gleiche ist.

Obgleich hier gar nichts weiter über die Art dieser Gleichung gesagt ist, ist sie doch in enge Grenzen eingeschlossen, weil nämlich für m Punkte $\frac{m(m-1)}{2}$ Gleichungen bestehen, in denen mn unbekannte Grössen enthalten sind, von denen wiederum noch $\frac{n(n-1)}{2}$ willkürlich veränderlich bleiben müssen, wegen des nächsten Postulats. Ist m also grösser als $(n+1)$, so bestehen mehr Gleichungen als Unbekannte, und da alle diese Gleichungen in analoger Art gebildet sein müssen, so ist dies eine Bedingung, die nur durch besondere Arten von Gleichungen erfüllt werden kann.

3) Die freie Beweglichkeit betreffend. Jeder Punkt kann auf continuirlichem Wege zu jedem andern übergehen. Für die verschiedenen Punkte eines und desselben in sich festen Systems bestehen nur die Einschränkungen der Bewegungen, welche durch die zwischen den Coordinaten von je zwei Punkten bestehenden Gleichungen bedingt sind.

Aus 2 und 3 folgt, dass wenn ein festes Punktsystem A in einer gewissen Lage mit einem zweiten B zur Congruenz gebracht werden kann, dasselbe auch in jeder andern Lage von A geschehen kann. — Denn auf demselben Wege, wie A in die zweite Lage geführt ist, kann auch B dahin geführt werden.

4) Die Unabhängigkeit der Form fester Körper von der Drehung betreffend. Wenn ein Körper sich so bewegt, dass n—1 seiner Punkte unbewegt bleiben, und diese so gewählt sind, dass jeder andere Punkt des Körpers nur noch eine Linie durchlaufen kann, so führt fortgesetzte Drehung ohne Umkehr in die Anfangslage zurück.

Dieser letzte Satz, der, wie die Untersuchung zeigt, von den vorausgehenden nicht implicirt ist, entspricht der Eigenschaft, die wir bei Functionen complexer Grössen die Monodromie nennen.

Sobald diese vier Bedingungen erfüllt werden sollen, folgt auf rein analytischem Wege, dass eine homogene Function zweiten Grades der Grössen du, dv, dw existirt, welche bei der Drehung unverändert bleibt, und also ein von der Richtung unabhängiges Maass des Linienelements gibt. *)

Damit ist Riemann's Ausgangspunkt gewonnen, und es folgt auf dem von ihm betretenen Wege weiter, dass wenn die Zahl der Dimensionen auf drei festgestellt, und die unendliche Ausdehnung des Raumes gefordert wird, keine andere Geometrie möglich ist, als die von Euklides gelehrte.

Das erste Postulat, welches auch Riemann aufgestellt hat, ist nichts als die analytische Definition der Begriffe der Continuirlichkeit des Raumes und seiner mehrfachen Ausdehnung.

Die Postulate 2 bis 4 müssen offenbar als erfüllt vorausgesetzt werden, wenn überhaupt von Congruenz die Rede sein soll. Also sind diese Annahmen die Bedingungen für die Möglichkeit der Congruenz, und liegen, wenn auch meist nicht deutlich ausgesprochen, den elementaren Beweisen der Geometrie, die alle Raummessung auf Congruenz gründet, zu Grunde.

Das System dieser Postulate macht also keine Voraussetzungen, die die gewöhnliche Form der Geometrie nicht auch machte; es ist vollständig und genügend auch ohne die speziellen Axiome über die Existenz gerader Linien und Ebenen, und ohne das Axiom über die Parallellinien. In theoretischer Beziehung hat es den Vorzug, dass seine Vollständigkeit sich leichter controlliren lässt.

Hervorzuheben ist, dass hierbei deutlicher heraustritt, wie ein bestimmter Character der Festigkeit und ein besonderer Grad von Beweglichkeit der Naturkörper vorausgesetzt wird, damit ein solches Messungssystem wie das in der Geometrie gegebene überhaupt eine thatsächliche Bedeutung haben können. Die Unabhängigkeit der Congruenz fester Punktsysteme von Ort, Lage und relativer Drehung derselben ist die Thatsache, auf welche die Geometrie gegründet ist.

Das tritt noch deutlicher hervor, wenn wir den Raum vergleichen mit anderen mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, zum Beispiel dem Farbensystem. So lange wir in diesem keine andere Methode der Messung haben, als die durch das Mischungsgesetz gegebene, so besteht nicht wie im Raume zwischen je zwei Punkten eine Grössenbeziehung, die mit der zwischen zwei andern verglichen werden kann, sondern erst zwischen Gruppen von je drei Punkten, die noch dazu in gerader Linie liegen müssen, (d. h. zwischen Gruppen von je drei Farben, von denen eine aus den beiden andern mischbar ist.)

Eine andere Abweichung finden wir im Sehfelde je eines Auges, wo keine Drehungen möglich sind, so lange wir auf die natürlichen Augenbewegungen beschränkt bleiben. Welche eigenthümlichen Aenderungen daraus für die Abmessungen durch das Augenmaass

*) Der mathematische Beweis wird zunächst in den Sitzungsberichten der Göttinger Königl. Gesellschaft ausführlich gegeben werden.

15

sich ergeben, habe ich in meinem Handbuche der physiologischen Optik und in einem früher hier gehaltenen Vortrage (5. Mai 1865) auseinandergesetzt.

Wie jede physikalische Messung muss auch die des Raumes sich auf ein unveränderliches Gesetz der Gleichförmigkeit in den Naturerscheinungen stützen.

12. Vortrag des Herrn Dr. Ladenburg: »Ueber Siliziumverbindungen«, am 22. Mai 1868.

13. Demonstration eines neuen Verfahrens zur Aufbewahrung zarter zoologischer Gegenstände und Präparate in konservirenden Flüssigkeiten durch Herrn Prof. H. A. Pagenstecher, am 22. Mai 1868.

Der Vortragende zeigte zunächst wie man zum Aufstellen feiner Gegenstände in Alkohol oder anderen konservirenden Flüssigkeiten sich der Schweinsborsten als Träger bedienen können, besonders bei den Glocken von Siphonophoren und erläuterte dann die Anwendung von vollständig zugeschmolzenen Röhren, entweder ohne Fuss zur alleinigen Aufbewahrung oder mit Fuss zum Aufstellen in den Museen für zarte Gegenstände. Die absolute Aufhebung der Verdunstung gestattet, während sie zugleich grosse Sicherheit gewährt, die Verwendung schwacher Lösungen und sehr geringer Mengen der konservirenden Flüssigkeiten, durch letzteres aber sehr enger Gefässe, welche dann die Demonstration kleiner Objekte sehr erleichtern.

Eine ausführlichere Schilderung des Verfahrens nebst Abbildung der Röhrchen und Gefässe ist der Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie eingesandt worden und wird wohl im vierten Hefte von deren fünfzehntem Bande abgedruckt werden.

14. Vortrag des Herrn Geheimrath Helmholtz: »Ueber die unbewussten Schlüsse bei Sinneswahrnehmungen«, am 19. Juni 1868.

15. Vortrag des Herrn Dr. Erb: »Ueber die Verschiedenheit der Leitungsfähigkeit und der Aufnahmsfähigkeit in pathologisch veränderten Nerven«, am 3. Juli 1868.

(Das Manuscript wurde sofort eingereicht.)

Es ist eine den Electrotherapeuten längst bekannte Thatsache, dass die willkührliche Bewegung in verschiedenen peripheren Muskeln vorhanden sein kann, ohne dass die betreffenden Muskeln mit sammt ihren Nerven gegen elektrische Ströme erregbar sind. Schon Du-