UNIVERSITÄTS-
BIBLIOTHEK
HEIDELBERG

Heidelberger Texte zur
Mathematikgeschichte

Hermann von Helmholtz

Beiträge zu den *Verhandlungen des naturhistorisch-medicinischen Vereins zu Heidelberg*

5. Band, 1868 Oktober bis 1871 August
Heidelberg : Mohr, 1871

zusammengestellt von Gabriele Dörflinger,
Universitätsbibliothek Heidelberg, 2012

Verhandlungen

des

naturhistorisch-medicinischen Vereins

zu

Heidelberg.

Fünfter Band.

1868 Oktober bis 1871 August.

Heidelberg.
Buchdruckerei von G. Mohr.
1871.

Verhandlungen
des
naturhistorisch-medizinischen Vereins
zu Heidelberg.

Band V.

I.

---

1. Vortrag des Herrn Geheimrath Helmholtz: »Zur Theorie der stationären Ströme in reibenden Flüssigkeiten«, am 30. Oktober 1868.

(**Das Manuscript wurde am 5. März 1869 eingereicht.**)

Herr Alexis Schklarewsky, der im letzten Sommer im hiesigen physiologischen Laboratorium eine Reihe von Versuchen über die Bewegungen und die Vertheilung feiner suspendirter fester Körperchen in Capillarröhren angestellt hat, hatte dabei gefunden, dass nicht nur in capillaren Röhren mikroskopisch kleine Körperchen immer gegen die Mitte des Stromes hinstreben, sondern dass dasselbe sich auch an viel weiteren Röhren von 1 bis 5 Centimeter Durchmesser zeigt. Eine Kugel aus Wachs, wenig schwerer als Wasser, fällt in einer verticalen mit Wasser gefüllten Röhre der Art immer so, dass sie von den Wänden gleichsam abgestossen wird, und der Mitte des Cylinders zueilt.

Eine eben solche Kugel, welche durch einen schwachen aufwärts gehenden Wasserstrom am Sinken gehindert wird, stellt sich in die Mitte der Röhre ein, und wenn man durch Neigen und Schütteln der Röhre sie der Wand nähert, bewegt sie sich doch, sobald man damit aufhört, wieder zur Mitte der Röhre. Das erstere Phänomen steht in auffallendem Gegensatz zu einem Theorem von W. Thomson*), wonach ein Körper, der in einer nicht reibenden Flüssigkeit nahe einer senkrechten Wand fällt, von dieser angezogen wird, und zu ihr hineilt. Das Letztere geschieht nun auch wirklich im Wasser, wenn man schwerere Kugeln, z. B. grobes Bleischrot, in einem verticalen Cylinder fallen lässt. Diese fallen schneller, als die oben genannten Wachskugeln, und dadurch erhalten diejenigen Druckunterschiede, welche vom Quadrate der Geschwindigkeit abhängen, grösseren Einfluss. Man hört in der That eine solche Kugel, die man in der Nähe der Wand eines mit Wasser gefüllten verticalen Cylinders fallen lässt, mehrmals an die Wand anschlagen, ehe sie den Boden erreicht.

Es war daher zu vermuthen, dass die bei geringeren Geschwindigkeiten beobachteten Abweichungen vom Einfluss der Reibung her-

---

*) **Natural** Philosophy Oxford. 1867. Vol. I. §. 332.

1

rühren möchten. Es schien sich auf die Erscheinungen die in engen Röhren und in weiten Röhren bei geringen Geschwindigkeiten beobachtet wurden, im Allgemeinen die Regel anwenden zu lassen, dass die schwimmenden Körper sich definitiv nur an solchen Orten der Flüssigkeit hielten, wo ihre Anwesenheit die geringste Vermehrung der Reibung der Flüssigkeit hervorbrachte, und in diesem Sinne stellte ich deshalb eine theoretische Untersuchung an, indem ich hoffte, dass die Berücksichtigung nur der Glieder erster Dimension der als klein vorausgesetzten Geschwindigkeiten in den hydrodynamischen Gleichungen genügen würde, um die Erklärung der gedachten Erscheinungen zu geben.

Diese Untersuchung ergab nun allerdings insofern ein Resultat, als sich nachweisen liess, dass bei verschwindend kleinen Geschwindigkeiten und stationärem Strome die Strömungen in einer reibenden Flüssigkeit sich so vertheilen, dass der Verlust an lebendiger Kraft durch die Reibung ein Minimum wird, vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeiten längs der Grenzen der Flüssigkeiten als fest gegeben betrachtet werden.

Auch liess sich für das Gleichgewicht schwimmender Körper in einer solchen Flüssigkeit eine Erweiterung dieses Theorems aufstellen. Nämlich: ein schwimmender Körper ist im Gleichgewicht in einer reibenden, in langsamem stationärem Strome fliessenden Flüssigkeit, wenn die Reibung im stationären Strome ein Minimum ist auch für den Fall, dass man längs der Oberfläche des schwimmenden Körpers die Werthe der Geschwindigkeiten der Wassertheilchen so variirt, wie sie verändert werden würden, wenn eine der verschiedenen möglichen Bewegungen des Körpers factisch einträte.

Dieser letzte Satz erlaubt nun leider keine directe Anwendung auf die von Herrn Schklarewsky beobachteten Erscheinungen, wie ich gehofft hatte, vielmehr habe ich mich später überzeugt, dass dieselben ohne Berücksichtigung der quadratischen Glieder der Geschwindigkeiten nicht zu erklären seien. Da jedoch die eben hingestellten Sätze an sich von Interesse sind, erlaube ich mir hier ihren Beweis zu veröffentlichen.

§. 1.

Es seien die den rechtwinkeligen Coordinaten x, y, z parallelen Componenten der Geschwindigkeit des im Punkte (x, y, z) befindlichen Flüssigkeitstheilchens beziehlich u, v, w, der Druck ebenda p, die Dichtigkeit h. Die Componenten der äusseren im Puncte (x, y, z) auf die Einheit der Flüssigkeitsmasse wirkenden Kräfte seien $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$.

Wir nehmen an, dass die Flüssigkeit incompressibel sei, und das die Geschwindigkeiten der Flüssigkeit und ihre Differentialquotienten hinreichend klein seien, um ihre Quadrate und Producte in den Bewegungsgleichungen vernachlässigen zu können. Die hydrodynamischen Gleichungen mit Berücksichtigung der Reibung nehmen dann folgende Gestalt an:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{dx} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dx} &= \frac{du}{dt} - k^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right] \\ \frac{dV}{dy} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dy} &= \frac{dv}{dt} - k^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right] \\ \frac{dV}{dz} - \frac{1}{h}\frac{dp}{dz} &= \frac{dw}{dt} - k^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right] \end{aligned}\right\} 1$$

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \Big\} 1_a$$

An der Oberfläche der Flüssigkeit wollen wir die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale dieser Fläche mit den positiven Coordinataxen bildet, mit α, β, γ bezeichnen, und die Kräfte, welche die Flüssigkeit auf das Flächenelement $d\omega$ ihrer Grenzfläche ausübt, beziehlich mit:

$$\begin{gathered} (p\cos\alpha + X)\,d\omega \\ (p\cos\beta + Y)\,d\omega \\ (p\cos\gamma + Z)\,d\omega \end{gathered}$$

Diese letzteren Grössen haben folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} X &= -hk^2\left[2\frac{du}{dx}\cos\alpha + \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\right)\cos\beta + \left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right)\cos\gamma\right] \\ Y &= -hk^2\left[\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right)\cos\alpha + 2\frac{dv}{dy}\cos\beta + \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\right)\cos\gamma\right] \\ Z &= -hk^2\left[\left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\right)\cos\alpha + \left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right)\cos\beta + 2\frac{dw}{dz}\cos\gamma\right] \end{aligned}\right\} 1_b$$

Wo die Flüssigkeit feste Körper berührt, die sie vollkommen benetzt, haftet sie an diesen fest, und die oberflächlichen Flüssigkeitstheilchen theilen dann die Bewegung dieser Körper. Wir wollen uns im folgenden auf die Betrachtung dieses Falles beschränken, weil er der gewöhnlichere und einfachere ist. Die Componenten der äusseren Kräfte, welche die festen Körper zu bewegen streben seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und die unendlich kleinen Verschiebungen ihrer Angriffspunkte parallel den x, y, z, welche bei irgend einer möglichen Bewegung des Systems eintreten können, seien $\delta\mathfrak{u}$, $\delta\mathfrak{v}$, $\delta\mathfrak{w}$, die entsprechenden Verschiebungen der Oberflächenpunkte des Körpers δu, δv, δw, so ist die Bedingung des Gleichgewichts für die den festen Körper berührenden Theile der Oberfläche;

$$\Sigma\,[\mathfrak{X}\delta\mathfrak{u} + \mathfrak{Y}\delta\mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\delta\mathfrak{w}] + \int (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)\, d\omega + $$
$$+ \int p\,(\cos\alpha\,\delta u + \cos\beta\,\delta v + \cos\gamma\,\delta w)\, d\omega = 0 \quad \Big\} 1_c$$

worin die Summe auf alle Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, und das Integral auf die ganze Oberfläche des betreffenden Körpers zu beziehen ist.

Wenn die Grenzfläche irgend wo durch die Flüssigkeit selbst gezogen gedacht ist, sind unter $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ die Kräfte zu verstehen, welche die jenseits liegende Wassermasse auf die Grenzfläche ausübt.

An einer freien Oberfläche sind:

$$\mathfrak{X} = -\mathfrak{P}\cos\alpha \qquad \mathfrak{Y} = -\mathfrak{P}\cos\beta$$
$$\mathfrak{Z} = -\mathfrak{P}\cos\gamma$$

wo $\mathfrak{P}$ den ausserhalb der Flüssigkeit herrschenden Druck bezeichnet.

§. 2.

Wir wollen zunächst den Verlust an lebendiger Kraft bestimmen, den die Reibung herbeiführt in einem von Flüssigkeit erfüllten Raume S. Zu dem Ende multipliciren wir die erste der drei Gleichungen 1 mit u, die zweite mit v, die dritte mit w, addiren sie alle drei, und addiren schliesslich zur Summe noch die Gleichung welche aus 1a fliesst

$$o = -k^2 \Big\{ u\frac{d}{dx}\Big[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\Big] + v\frac{d}{dy}\Big[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\Big] + $$
$$+ w\frac{d}{dz}\Big[\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\Big]\Big\}$$

Die so gewonnene Gleichung integriren wir über den Raum S nach den von Green und Gauss für solche Fälle angewendeten partiellen Integrationsmethoden und mit Berücksichtigung der Gleichungen 1b. Wir erhalten:

$$h\iiint\Big(u\frac{du}{dt} + v\frac{dv}{dt} + w\frac{dw}{dt}\Big)\, dx\, dy\, dz =$$
$$\int hV\,(u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma)\, d\omega - \int [(X + p\cos\alpha)\,u +$$
$$+ (Y + p\cos\beta)\,v + (Z + p\cos\gamma)\,w]\, d\omega - Q = o \,\ldots\ldots\ldots \Big\{ 2$$

worin Q folgendes über den Raum S ausgedehntes Integral bezeichnet:

$$Q = h\,k^2\iiint\Big[2\Big(\frac{du}{dx}\Big)^2 + 2\Big(\frac{dv}{dy}\Big)^2 + 2\Big(\frac{dw}{dz}\Big)^2 + \Big(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}\Big)^2$$
$$+ \Big(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}\Big)^2 + \Big(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}\Big)^2\Big]\, dx\, dy\, dz \Big\} 2a$$

Wenn man beide Seiten der Gleichung 2 mit dt multiplicirt denkt, so bedeutet das Integral links vom Gleichheitszeichen die Zunahme der lebendigen Kraft in der den Raum S füllenden Flüssigkeitsmasse während des Zeittheilchens dt, das erste Integral rechts bezeichnet denjenigen Theil dieser Zunahme, welcher durch die Arbeit der äusseren Kräfte, die auf das Innere der Wassermasse wirken, geleistet worden ist. Das zweite Integral rechts, welches nach der Gleichung 1c gleich dem Ausdrucke

$$\Sigma [\mathfrak{X} \mathfrak{u} dt + \mathfrak{Y} \mathfrak{v} dt + \mathfrak{Z} \mathfrak{w} dt]$$

ist, wo $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ die Geschwindigkeitscomponenten für die Angriffspunkte der Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ bezeichnen, misst die Arbeit, welche die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, die direct oder indirect auf die Oberfläche der Flüssigkeit wirken im Zeittheilchen dt geleistet haben. Daraus folgt, dass Q diejenige Menge lebendiger Kraft bezeichnet, welche durch die Reibung im Innern der Flüssigkeit vernichtet, das heisst in Wärme verwandelt worden ist.

Bezeichnen wir die lebendige Kraft der Flüssigkeit mit L, die Arbeit der äusseren Kräfte mit P, also

$$P = h \int V (u \cos \alpha + v \cos \beta + w \cos \delta)\, d\omega + \Sigma (\mathfrak{X} \mathfrak{u} + \mathfrak{Y} \mathfrak{v} + \mathfrak{Z} \mathfrak{w})$$

so können wir die Gleichung 2 schreiben

$$\frac{dL}{dt} = P - Q \ldots\ldots\ldots \Big\} 2b$$

§. 3.

Wir wollen jetzt nachweisen, dass bei stationärem Strome der Ausdruck

$$P - \tfrac{1}{2} Q$$

ein Minimum wird. Wir beschränken uns dabei auf die gewöhnlich vorkommende Form der Grenzbedingung, dass nämlich, wo die Flüssigkeit einen festen Körper berührt, ihre oberflächlichen Theilchen fest an diesem haften. Wo also die Flüssigkeit eine feste Wand berührt, sei diese nun unbewegt, oder habe sie eine vorgeschriebene Bewegung, sind die Werthe von u, v, w gegeben, und ihre Variationen gleich Null. Dasselbe wird vorausgesetzt an denjenigen Theilen der Grenzfläche des Raumes S, wo die Flüssigkeit ein- und ausströmmt. Dagegen können an der Oberfläche beweglicher schwimmender Körper und an einer freien Oberfläche Variationen von u, v, w und $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ eintreten, welche den Bewegungsbedingungen der etwa berührenden festen Körper entsprechen.

Da die Flüssigkeit als incompressibel angenommen wird, muss ausserdem die Gleichung 1a überall erfüllt sein. Die Bedingung des Minimum wird demnach

$$o = \delta P - \tfrac{1}{2}\delta Q + \delta \iiint \lambda \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}\right) dx.\,dy.\,dz. \ldots . \quad (3)$$

worin λ eine beliebige Function der Coordination bezeichnet.

Wenn man durch partielle Integration die Differentialquotienten von δu, δv, δw entfernt, erhält man

1) für das Innere

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\lambda}{dx} &= hk^2\left[\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right]\\
\frac{d\lambda}{dy} &= hk^2\left[\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2v}{dz^2}\right]\\
\frac{d\lambda}{dz} &= hk^2\left[\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{d^2w}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2}\right]
\end{aligned}\right\} 3_a$$

2) für die Oberfläche mit Benutzung der in den Gleichungen 1_b gegebenen Definitionen von X, Y, Z

$$\left.\begin{aligned}
o = \int \{&[(hV + \lambda)\cos\alpha + X]\,\delta u\\
&+ [(hV + \lambda)\cos\beta + Y]\,\delta v + [(hV + \lambda)\cos\gamma + Z]\,\delta w\}\,d\omega\\
&+ \Sigma\,\{\mathfrak{X}\delta\mathfrak{u} + \mathfrak{Y}\delta\mathfrak{v} + \mathfrak{Z}\delta\mathfrak{w}\}
\end{aligned}\right\} 3_b$$

In dieser letztern Gleichung sind die Variationen δu, δv, δw den vorgeschriebenen Bewegungsbedingungen der berührenden festen Körper unterworfen.

Wenn wir nun die neue Bezeichnung einführen

$$\lambda = P - V$$

so bekommen die Gleichungen 3_a und 3_b genau dieselbe Form, wie die Gleichung 1 und 1_c mit Berücksichtigung von 1_b. Der einzige Unterschied, der bestehen bleibt, ist der, dass in den letzteren die Grösse p in 3_a und 3_b dagegen statt dieser die Grösse P vorkommt.

Jede Lösung der Gleichung 3 wird also Werthe von u, v, w, P geben, die, statt u, v, w, p in die Gleichungen 1, 1_a, 1_b, 1_c gesetzt, diesen genügen.

Einen stationären Strom wird diese Art der Bewegung aber nur dann geben, wenn längs der freien und der verschiebliche Wände berührenden Theile der Oberfläche der Flüssigkeit überall

$$u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = 0$$

d. h. wenn diese Theile der Oberfläche bei der Bewegung ihre Lage nicht ändern, sondern sich entweder gar nicht, oder nur in sich selbst verschieben.

Uebrigens folgt noch aus der Gleichung 2_b für den stationären Strom, wo u, v, w von der Zeit t unabhängig sind, dass

$$P = Q$$

und da P gleich Null wird, wenn u, v, w rings an der Oberfläche gleich Null sind, Q aber eine Snmme von lauter Quadraten ist, welche nicht Null werden kann, ohne dass alle ihre einzelnen Summanden gleich Null werden: so müssen, wenn u, v, w längs der Oberfläche gleich Null sind, auch überall im Innern die folgenden Grössen gleich Null sein

$$\frac{du}{dx} = \frac{dv}{dy} = \frac{dw}{dz} = 0$$

$$\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} = 0$$

Deren Integralgleichungen sind:

$$u = a + fy - gz$$
$$v = b + hz - fx$$
$$w = c + gx - hy$$

Die willkürlichen Constanten a, b, c, f, g, h dieser Gleichungen müssen alle gleich Null sein, wenn u, v, w längs der ganzen Oberfläche des Raums S gleich Null sein sollen, folglich müssen diese Grössen auch in seinem Innern gleich Null sein.

Daraus folgt weiter, dass nicht zwei Systeme Grössen u_0, v_0, w_0, p_0 und u_1, v_1, w_1, p_1 existiren können, welche den Gleichungen 1 und 1_a genügen, und für welche überall an der Grenzfläche des Raumes S

$$u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = w_1 - w_0 = 0$$

wäre, ohne dass gleichzeitig überall im Innern

$$u_1 - u_0 = v_1 - v_0 = w_1 - w_0 = 0$$
$$p_1 - p_0 = \text{Const.}$$

Diese letzteren Differenzen nämlich würden für u, v, w, p gesetzt unter den zuletzt betrachteten Fall kommen.

Ob bei beweglichen Wandungen verschiedene Lösungen der Aufgabe mit verschiedenen Bewegungen des beweglichen und in sich selbst verschieblichen Wandtheils existiren können hängt von der Natur der diesen bewegenden Kräfte ab.

Berücksichtigt man, dass nach Gleichung 2_b im stationären Strome $P = Q$ ist, welche Gleichung die der Erhaltung der Kraft ist, so ist die Grösse $P - \frac{1}{2}Q$, welche zum Minimum gemacht werden soll, unter Festhaltung jener Bedingung der Erhaltung der Kraft, auch gleich $\frac{1}{2}Q$ zu setzen. Vorausgesetzt also Incompressibilität der Flüssigkeit, ferner das Gesetz von der Erhaltung der Kraft, und vollständige Adhärenz der Flüssigkeit an die beweglichen Theile der Wandung, so kann dem Gesetz die im Anfang ausgesprochene Formulirung gegeben werden.

übt, welche die Lava bilden. Diese Wirkung ist eine noch viel energischere, wenn das Wasser Kohlensäure, Schwefelwasserstoff, schweflige Säure oder Salzsäure enthält. Da die Lava nur im Innern des Vulkans mit Wasserdampf und den genannten Gasen imprägnirt ist, welche dann beim Erguss der Lava als Fumarolen entweichen, so muss die Substanz der Lava von dem Erhärten durch verschiedene chemische Prozesse verändert werden.

Die wesentlichsten Resultate der Untersuchung lassen sich in folgenden Sätzen zusammenfassen.

1) Die chemische Zusammensetzung der historischen Vesuvlaven ist stets fast dieselbe.

2) Die mineralische Zusammensetzung der Vesuvlaven ist eine complicirte, indem etwa acht Mineralien dieselbe bilden.

3) Die Substanz der Lava ist vor dem Erhärten durch sekundäre chemische Prozesse verändert.

4) Ein grosser Theil der Mineralien in der Lava hat durch Einwirkung hoher Temperatur nach seiner Bildung verschiedene Veränderungen erlitten.

5) Die Lavamasse enthält ausser den krystallisirten Individuen auch amorphe Mineralsubstanz und besteht daher zur Zeit des Ergusses aus einer geschmolzenen Masse, in welcher Krystalle und Krystallbruchstücke schwimmen.

6) Die Temperatur der Lava ist beim Erguss derselben meist nicht hoch genug, um die in ihr enthaltenen Krystalle vollständig zu schmelzen.

9. Vortrag des Herrn Dr. Ladenburg: »Ueber das Kohlenoxysulfid«, am 22. Januar 1869.

10. Vortrag des Herrn Geheimrath Helmholtz: »Ueber die physiologische Wirkung kurz dauernder elektrischer Schläge im Innern von ausgedehnten leitenden Massen«, am 12. Februar 1869.

(Das Manuscript wurde am 15. März 1869 eingereicht.)

Bei neueren Versuchen über die Fortpflanzung der Reizung in den Nerven, welche im Physiologischen Laboratorium angestellt worden sind, wurde der Vortragende aufmerksam gemacht auf die, übrigens auch schon von den Elektrotherapeuten bemerkte geringe Wirksamkeit, welche elektrische Inductionsschläge auf die tiefer gelegenen Nerven des menschlichen Körpers ausüben, während es andrerseits verhältnissmässig leicht ist, selbst tief liegende Nerven durch die constanten Ströme einer Batterie von zehn bis zwanzig Platinzinkelementen zur Erregung von Zuckungen oder selbst von Tetanus zu veranlassen. Die elektromotorische Kraft eines Inductionsapparates, der zwischen den genäherten Enden der inducirten Spirale kleine Funken hervorbringt, ist aber jedenfalls viel grösser, als die einer Batterie der genannten Grösse, welche nie einen sichtbaren Schliessungsfunken gibt. Es gehören im Gegentheil nach den Versuchen von Gassiot gegen vierhundert Platinzinkelemente dazu um kleine sichtbare Funken beim Schluss der Kette zu geben. Dagegen ist die grosse elektromotorische Kraft eines Inductionsapparates nur während eines ausserordentlichen kurzen Bruchtheils einer Secunde wirksam, während man die der Batterie beliebig lange Zeit hindurch auf die reizbaren Theile wirken lassen kann.

Um zunächst die Thatsache rein fest zu stellen hat der Vortragende Versuche angestellt am stromprüfenden Froschschenkel, dessen Nerv auf ein feuchtes Fliesspapier gelegt wurde, welches letztere die Oberfläche eines mit Kochsalzlösung von 1/2 Procent gefüllten Gefässes bedeckte, so dass der Nerv dadurch zu einem nur kleinen Theil einer grösseren leitenden Flüssigkeitsmasse gemacht wurde. Die Elektroden für den erregenden Strom waren zwei an Platindrähten angeschmolzene Platinkügelchen von 1 Mm. Durchmesser, welche unverrückbar neben einander in 3 Mm. Abstand befestigt mit der Oberfläche des genannten feuchten Leiters in Berührung gesetzt wurden, so dass Stromesschlingen bald von grösserer bald von geringerer Länge durch den bald ferner, bald näher liegenden Nerven geleitet wurden. Die Ströme, welche durch diese Elektroden zugeleitet wurden, waren meistens erzeugt durch die secundäre Spirale eines Inductionsschlitten, und zwar wurden bei einem Theil der Versuche in gewöhnlicher Weise die bei der Oeffnung oder Schliessung der primären Spirale entstehenden inducirten Ströme einfach durch den feuchten Leiter geleitet. Ich will diese als Oeffnungsschläge und Schliessungsschläge bezeichnen. Die letzteren sind bekanntlich von geringerer Intensität und relativ längerer Dauer, so dass sie der Regel nach physiologisch viel weniger wirksam sind, als die viel intensiveren, aber in demselben Verhältniss kürzeren Oeffnungsschläge desselben Apparats, welche bei derselben Stellung des Schlittens durch die Unterbrechung des primären Stromes erzeugt werden. In einem anderen Theil der Versuche brachte ich dagegen eine noch grössere Verkürzung der Dauer dieser Oeffnungsschläge hervor, indem ich ausser dem feuchten Leiter und seinen zuführenden Platinkügelchen, auch noch eine bis drei kleine Leydener Flaschen einfügte, deren jede aus zwei ineinander gestellten und mit Quecksilber gefüllten Reagenzgläschen gebildet war. Das eine Ende der Inductionsspirale war mit der inneren Quecksilbermasse dieser Gläschen, das andere durch den feuchten Leiter hindurch mit der äusseren verbunden. Die Elektricitätsbewegung ist in diesem Falle eine solche, dass, hinreichend schnelle Unterbrechung des Stroms vorausgesetzt, die Leydener Flaschen sich laden, und dann eine Reihe ausserordentlich kurzer und schneller Oscillationen der Elektricität zwischen ihren Belegungen durch den sie verbindenden Draht der inducirten Spirale eintritt. Diese gehen dann bei der getroffenen Einrichtung durch den feuchten Leiter und erregen den diesem anliegenden Nerven. Ich will diese Art der Strömung als Entladungsschlag bezeichnen.

Der Eisenkern des Inductionsapparates war bei allen zu beschreibenden Versuchen entfernt worden.

A. Der Nerv wurde so weit von den Platinkügelchen entfernt (etwa 4 Mm.) bis der Entladungsschlag einer der kleinen Leydener Flaschen bei zusammengeschobenen Spiralen des Inductionsapparats gerade noch hinreichte eine Spur von Zuckung hervorzurufen. Der Oeffnungsinductionsschlag musste dann durch Einlagerung eines Widerstandes von bestimmter Grösse in den primären Stromkreis geschwächt werden, bis er auf den Nerven gleich stark wie der Entladungsschlag der Flasche wirkte.

Nun wurde der Widerstand entfernt und der Nerv dicht an die Elektroden geschoben, der Schlitten des Inductionsapparats von der primären Spirale abgezogen, bis der Entladungsschlag der Flasche nur noch eine Spur von Zuckung gab. Der Oeffnungsschlag, bei Einlagerung desselben Widerstandes in den primären Kreis wie vorher, gab nun keine Wirkung, sondern dieser Widerstand musste so weit verringert werden, dass die Stärke des primären Stroms mehr als doppelt so gross wurde, als sie bei den früheren Oeffnungsschlägen gewesen war.

In einer andern Versuchsreihe, wo drei Leydener Fläschchen angewendet wurden und deshalb der Nerv weiter bis auf 5 Mm. entfernt werden konnte, musste bei gleicher Wirkung der Entladungsschläge der Oeffnungsschlag eine drei Mal so grosse Stromstärke bei berührendem Nerven als bei abstehendem Nerven erhalten.

B. Noch auffallender war der Unterschied der Wirkungen in der Nähe und in der Ferne, wenn man die Entladungsströme der Leydner Fläschchen mit der des Schliessungsinductionsstroms verglich. Während diese beiden Arten von Strömen bei Berührung des Nerven mit den Elektroden nahehin gleich gross waren, musste bei der Wirkung in die Ferne der primäre Strom für den Schliessungsinductionsschlag etwa nur ein Neuntel derjenigen Stärke erhalten, die für die Entladung von drei Leydener Fläschchen nöthig war, wenn beide gleiche Wirkung hervorbringen sollten.

C. Endlich habe ich dann auch noch den Entladungsschlag von einem der Leydener Fläschchen mit den Schliessungs- und Oeffnungsschlägen eines constanten Stroms verglichen, der von der primären Leitung durch Verzweigung abgeleitet wurde. Die inducirte Spirale blieb dabei in unveränderter Stellung, und die Wirkung der Ströme wurde nur durch Veränderung des Widerstandes in der primären Leitung auf das Maass gebracht, dass bei verschiedenen Lagen des Nerven immer die ersten Spuren der Zuckung eintraten. Auch hierbei zeigte sich eine relativ stärkere Stromwirkung der constanten Ströme. Doch reichten die mir zu Gebot stehenden Drahtwiderstände bisher nur für verhältnissmässig kleine Abänderungen des Abstandes zwischen Nerv und Elektroden aus.

Die am Froschnerven in Berührung mit einer grösseren leitenden Flüssigkeitsmasse beobachteten Erscheinungen bestätigen also allerdings die am menschlichen Körper beobachteten Thatsachen. Gleichzeitig stellten aber die von mir in Verbindung mit diesen Versuchen angestellten Untersuchungen über die Vorgänge bei kurz dauernden elektrischen Entladungen, worüber ich mir späteren Bericht vorbehalte, verschiedene Möglichkeiten der Erklärung dieser Erscheinungen heraus, zwischen denen erst nach weiteren experimentellen Untersuchungen über die Dauer des Funken, und die Dauer der elektrischen Oscillationen in der angewendeten Spirale bei ihrer Verbindung mit den Leydener Fläschchen, entschieden werden kann.

Bei den Versuchen mit Schliessungsinductionsschlägen hängen die Erfolge wahrscheinlich hauptsächlich davon ab, dass durch die Rückwirkung des inducirten Stroms auf den inducirenden die steile Ansteigung und damit die physiologische Wirkung des ersteren desto mehr begünstigt wird, je näher die Spiralen einander stehen, was eben bei weiter entferntem Nerven der Fall war. Wenn die Dauer der elektrischen Oscillationen bei den Entladungsschlägen der Leydener Fläschchen klein ist im Vergleich mit der Dauer des Oeffnungsfunkens, was nur durch weitere Versuche zu ermitteln ist, kann etwas Aehnliches auch bei der Vergleichung dieser Entladungsschläge eintreten.

Andrerseits ergibt die Theorie, dass schnell oscillirende elektrische Entladungen, welche sich von zwei Einströmungspunkten aus in einem Leiter verbreiten, ausser der Schwächung, welche auch constante Ströme bei ihrer Ausbreitung zeigen, durch elektrodynamische Induction eine stärkere Schwächung erleiden, welche einen Factor e^{-kr} in den Ausdruck für ihre Intensität einführt. Hieran ist unter r die Entfernung von dem Elektrodenpaar, unter k eine positive Constante verstanden, deren Grösse von der Leitungsfähigkeit des Medium abhängt. Bei hinreichender Schnelligkeit der Oscillationen der von uns gebrauchten Entladungsschläge würde dieser Umstand ebenfalls die beobachteten Resultate hervorbringen können.

2

Verhandlungen
des
naturhistorisch-medizinischen Vereins
zu Heidelberg.

Band V.

II.

---

1. Vortrag des Herrn Geheimerath Helmholtz. »Ueber elektrische Oscillationen« am 30. April 1869.

(Der Vortrag wurde am 14. Mai 1869 eingereicht.)

Die Erklärung der unter dem 12. Februar d. J. der Gesellschaft mitgetheilten Versuche über die Ausbreitung elektrischer Entladungen in ausgedehnten leitenden Massen erforderte eine Kenntniss der Oscillationsdauer der Ströme in den angewendeten Apparaten, namentlich in einer Inductionsspirale von der angewendeten Grösse, die an ihren Enden mit den Belegen einer Leydener Flasche verbunden ist. Der Vortragende hat solche Versuche nach einer neuen Methode gemacht, welche vor allen ihm bekannten bisher gebrauchten Methoden den Vorzug hat, dass die elektrischen Oscillationen zwischen den Belegen der Leydener Flasche in einem vollständigen, und nirgends unterbrochenen Bogen vor sich gehen können, der keine Funkenstrecke enthält, und in welchem deshalb diese Oscillationen bis auf ihre letzten schwächsten Reste ungestört ablaufen können. Als Reagenz zur Wahrnehmung der elektrischen Bewegungen wandte er einen stromprüfenden Froschnerven an, der in einem solchen Falle bisher noch allen bekannten physikalischen Mitteln an Empfindlichkeit überlegen ist.

Zur Zeitmessung wurde ein schweres festes Secundenpendel angewendet, was einem nach A. Fick's Vorschlage construirtem Pendelmyographion angehörte. Dasselbe fiel immer von gleicher Höhe und stiess mit einem unten hervorragenden Vorsprunge im Verlauf seiner Schwingung kurz nach einander gegen zwei Hebelchen, wodurch zwei Stromleitungen geöffnet wurden.

Die erste dieser Stromleitungen war die des primären Stroms eines Du Bois'schen Schlittenapparats. Die Enden der inducirten Spirale dieses Apparats waren mit den Belegungen einer oder mehrerer Leydener Flaschen metallisch verbunden. Die Unterbrechung des primären Stroms inducirte also zunächst in der secundären Spirale einen gleichgerichteten Strom, der die Belege der Batterie lud, darauf entlud sich die Batterie wieder in oscillirender Weise durch dieselbe Spirale, durch die sie geladen war. Die eisernen Drähte aus dem Innern der primären Spirale waren in allen Fällen entfernt, um durch die Einwirkung, die sie von der secundären Spirale empfangen und wieder rückwirkend auf sie ausüben konnten, den Vorgang nicht zu compliciren. Ausserdem würden die Oscillationen durch die Anwesenheit der Eisendrähte beträchtlich verzögert worden sein.

Die gute metallische Leitung des inducirten Stromes wurde an einer Stelle unterbrochen, sobald das Pendel des Myographion gegen den zweiten Hebel stiess; dann trat eine Nebenleitung in Function, welche den Nerven des stromprüfenden Schenkels enthielt. Letzteren hatte ich übrigens ganz und gar in eine Kochsalzlösung von 1/2 Procent eingelegt, wo sich seine Reizbarkeit 3 bis 4 Stunden lang vortrefflich erhielt. Der Nerv war zum Theil in ein enges Glasröhrchen hineingezogen, welches auch in die Flüssigkeit tauchte, und in welches ein feiner Platindraht als Elektrode hineinragte. Die andere Elektrode war eine Platinplatte in der grösseren Flüssigkeitsmasse. So lange die metallische Nebenschliessung zum Nerven nicht geöffnet war, ging kein merklicher Theil des Stroms durch den Nerven. Sobald jene geöffnet war, entlud sich der Rest des Stroms durch den Nerven, und erregte Zuckungen, wenn er dazu kräftig genug war.

Die Wirkung des Stroms ist hierbei am stärksten, wenn die Unterbrechung der Leitung zu einer Zeit geschieht, wo die Geschwindigkeit der Strömung in der Spirale ein Maximum erreicht hat, zu welcher Zeit die Belege der Batterie nur schwach oder gar nicht geladen sind. Dann stürzt nämlich ganz plötzlich der Extracurrent der Spirale in den Nerven, und zwar mit einer Intensität, welche wegen des sehr kleinen elektrodynamischen Potentials der Nervenleitung der in der Spirale zur Zeit der Unterbrechung bestehenden Stromintensität fast gleich sein muss. Dieser Strom wird nachher allerdings wegen des grossen Widerstands des Nerven sehr schnell an Stärke abnehmen und entweder geradezu, oder nach wenigen schnell abnehmenden Oscillationen verschwinden. Aber die physiologische Wirkung seines plötzlichen Hereinbrechens in den Nerven kann dennoch eine sehr kräftige sein.

Wird dagegen die metallische Leitung unterbrochen zu einer Zeit, wo die Belege der Batterie das Maximum ihrer Ladung erreicht haben, und der die Elektricität ihnen zuführende Strom in der Spirale eben aufhört und in die entgegengesetzte Richtung überzugehen beginnt, so müssen sich nach der Unterbrechung die in der Batterie aufgesammelten Elektricitäten durch den Nerven, also durch einen Bogen von viel grösserem Widerstande, entladen, wodurch die lebendige Kraft der nun noch stattfindenden Oscillationen schnell vernichtet wird. Die Ansteigung des Stroms zum Maximum geschieht dann erst allmälig ansteigend im Laufe einer Viertel-Oscillation, und während dieser Zeit kann die Intensität der schnell erlöschenden Oscillationen schon sehr merklich vermindert sein, so dass die physiologische Wirkung in diesem Falle sowohl wegen der verminderten Ansteigungsgeschwindigkeit, als auch wegen der geringeren Höhe des zu erreichenden Maximum schwächer ist, als im ersten Falle.

Die Intensität der physiologischen Wirkung liess sich nun dadurch vergleichen, dass ich bei verschiedenen Werthen der Zeitdauer zwischen den beiden durch das Pendel ausgeführten Stromunterbrechungen jedesmal diejenige Stellung der verschiebbaren inducirten Spirale suchte, wo sie noch eben sichtbare Muskelzuckung gab. Wenn das Pendel zur Zeit eines Stromesmaximums in der Spirale die Nebenleitung zum Nerven unterbrach, konnte ich die inducirte Spirale weit von der inducirenden entfernen; wenn es zur Zeit eines Stromesminimum unterbrach, musste ich die Spiralen einander mehr nähern, oder erhielt auch von den späteren Minimis gar keine Wirkungen mehr.

Die Unterbrechungszeit konnte durch eine feine Schraube regulirt werden, welche die Stellung des zweiten Hebelchen änderte, und deren Kopf ich mit einer groben Kreistheilung versehen hatte. Um die den Schraubenumgängen entsprechenden Zeitwerthe zu berechnen, mass ich den Weg, den das Pendel zwischen den beiden Unterbrechungen zurücklegte mit einem an diesem selbst befestigten feinen Maasstabe und berechnete die Zeit aus der Schwingungsdauer und Schwingungsamplitüde des Pendels.

Der Apparat war extemporirt, und wird sich in vieler Beziehung zweckmässiger und feiner einrichten lassen, aber es liessen sich schon so eine ganze Reihe von Resultaten erreichen.

Zunächst ist zu bemerken, dass bei Anwendung von einem Grove'schen Elemente für den primären Strom, die Gesammtdauer der wahrnehmbaren elektrischen Oscillationen in der mit einer Leydener Flasche verbundenen Spirale etwa $^1/_{50}$ Secunde betrug. Diese Gesammtdauer ist der Theorie nach unabhängig von der Capacität der mit der Spirale verbundenen Batterie.

Bezeichnen wir nämlich das elektrodynamische Potential der inducirenden Spirale auf die inducirte bei Einheit der Stromstärke in beiden mit P, das der inducirten auf sich selbst mit p, die Capacität der Batterie mit c, den Widerstand und die Stromstärke der inducirten Spirale mit w und i, die Stromstärke, welche in der inducirenden vorhanden war mit J, die in der inneren Belegung der Batterie aufgehäufte Elektricitätsmenge mit q, die Zeit mit t, die Oscillationsdauer mit T, und setzen wir $t = o$ für den Moment der Unterbrechung des primären Stroms, so ist nach Kirchhoff's und W. Thomson's Theorie

$$q = J\frac{P}{\beta p} e^{-\alpha t} \sin(\beta t)$$

$$i = \frac{JP}{p}\left\{\cos\beta t - \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right\}$$

worin

$$\alpha = \frac{w}{2p}$$

$$\beta = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{1}{pc} - \alpha^2}$$

Die Anzahl der Oscillationen für die Secunde ergab sich zum Beispiel bei der Verbindung der Spirale mit einer Leydener Flasche gewöhnlicher Form zu 2164; von solchen konnten hinter einander an meinem Apparate 45 Maxima beobachtet werden. Die drei kleinen aus mit Quecksilber gefüllten Reagenzgläschen gebildeten Leydener Flaschen, welche ich in meiner früheren Mittheilung erwähnt habe, hatten wegen ihres viel dünneren Glases zusammen genommen noch etwas grössere Capacität als jene Flasche und gaben 2050 Schwingungen für die Secunde. Die drei kleinen und die grössere Flasche zusammen genommen gaben 1550 Schwingungen. Letzterer Werth hätte der Berechnung nach nur 1484 betragen sollen, wenn als Capacität des Apparats nur die der Leydener Flaschen in Betracht gezogen wurde. Die Differenz erklärt sich daraus, dass bei diesen Versuchen auch die Spirale selbst in einem gewissen Grade die Rolle einer kleinen Leydener Flasche spielt. Das mit der zur Zeit positiv geladenen Belegung der Batterie zusammenhängende Ende der Drahtmasse ladet sich selbst positiv, das andere negativ, und da jede so geladene Drahtwindung mit andern, welche einer entfernteren Stelle des Drahtes angehören und geringeres elektrostatisches Potential haben, in naher Berührung ist, und jene von diesen letzteren nur durch die dünne isolirende Schicht der umspinnenden Seide getrennt ist, so wird dadurch eine Anhäufung entgegengesetzter Elektricitäten an beiden Seiten dieses Ueberzugs bedingt. Dabei wird die äusserste Lage von Drahtwindungen nur Elektricität der einen Art, die innerste nur solche der andern Art anhäufen. In den inneren Drahtschichten tritt nur Vertheilung der entgegengesetzten Elektricitäten nach der äusseren und inneren Seite des Drahtes ein.

Diese Ueberlegung führte mich dazu zu untersuchen, ob Oscillationen nachweisbar seien, auch wenn die Spirale gar nicht mit einer Leydener Flasche verknüpft ist, wie dies bei den unipolaren Zuckungen vorkommt. Dies gelang in der That.

Zu dem Ende wurde das eine Ende der Spirale ganz isolirt, das andere mit den Gasröhren des Hauses verknüpft. Die zweite Unterbrechungsstelle mit dem Nerven als Nebenschliessung wurde zwischen die Spirale und die Gasröhren eingeschaltet. Die Oscillationen waren in diesem Falle sehr schnell, etwa 7300 in der Secunde, und ihre physiologische Wirkung schwach, so dass überhaupt nur die ersten Maxima eine solche ausübten. Ich konnte in diesem Falle nur die neun ersten Strömungsmaxima beobachten. Der Theorie nach sollte die Abnahme der Oscillationen in diesem

Falle nicht schneller geschehen, als in den früher beobachteten; doch lässt die Theorie erkennen, dass ein etwaiger Mangel an Isolation der Drahtwindungen hier viel grösseren Einfluss haben musste als bei langsameren Oscillationen. Andererseits kann hier aber auch in Betracht kommen, dass vielleicht der Nerv durch so schnelle Schwankungen nicht mehr kräftig genug afficirt wird.

Hier wie in den früheren Versuchen mit langsameren Oscillationen unterscheiden sich die im Nerven aufsteigend fliessenden Strommaxima von den abwärts fliessenden durch grössere physiologische Wirkung, so dass man auch die abwechselnde Strömungsrichtung dieser Maxima erkennen kann.

Dadurch ist constatirt, dass selbst eine leere am einen Ende isolirte, am andern Ende mit dem Erdboden verbundene Spirale sich abwechselnd positiv und negativ ladet, und die entgegengesetzte Elektricität in den Erdboden austreibt, bis sie nach einer Reihe von Schwankungen zur Ruhe kommt.

Die Theorie lässt ferner hieraus die Folgerung ziehen, dass solche Schwankungen, nur etwas schneller abnehmend, in einer inducirten Spirale beim Oeffnungsschlage auch dann stattfinden, wenn ihre Enden durch einen schlecht leitenden Körper z. B. einen Nerven verbunden sind, so dass auch die elektrische Bewegung im Nerven aus Oscillationen von schnell abnehmender Stärke und nahehin derselben Schwingungsdauer besteht, welche die Spirale bei vollkommener Isolation eines ihrer Enden gibt.

2. Correctur an dem Vortrag vom 22. Mai 1868 die thatsächlichen Grundlagen der Geometrie betreffend von H. Helmholtz.

In jenem Aufsatze ist ein Auszug von meinen eigenen Untersuchungen gegeben, welche den Beweis lieferten, dass wenn wir den Grad von Festigkeit und von Beweglichkeit der Naturkörper, der unserem Raume zukommt, in einem Raume von übrigens unbekannten Eigenschaften zu finden verlangen, das Quadrat des Linienelementes ds eine homogene Function zweiten Grades der unendlich kleinen Incremente der willkührlich gewählten Coordinaten u, v, w sein müsse. Dieser Satz ist dort als die allgemeinste Form des Pythagoräischen Lehrsatzes bezeichnet. Durch den Beweis dieses Satzes ist die Voraussetzung der Riemann'schen Untersuchungen über den Raum gewonnen. An diesem Theile meiner Arbeit habe ich nichts zu ändern gefunden.

Aber ich habe ausserdem dort eine kurze Uebersicht der weiteren Consequenzen der Riemann'schen Untersuchungen gegeben, mich dabei stützend auf einen noch nicht veröffentlichten und nicht vollständig durchgearbeiteten Theil meiner Untersuchungen, in welchen sich ein Fehler eingeschlichen hat, indem ich damals nicht erkannte, dass eine gewisse Constante, die ich reell nehmen zu müssen glaubte, auch einen Sinn gebe, wenn sie imaginär genommen werde. Die dort aufgestellte Behauptung, dass der Raum, wenn er unendlich ausgedehnt sein solle, nothwendig eben (im Sinne Riemanns) sein müsse, ist falsch.

Es geht dies namentlich hervor aus den höchst interessanten und wichtigen Untersuchungen von Herrn Beltrami Saggio di interpretazione della Geometria Non-Euclidea, Napoli 1868, und Teoria fondamentale degli spazii di Curvatura costante, Annali di Matematica, Ser. II. Tomo II. Fasc. III. pag. 232—255; in welchen er die Theorie der Flächen und Räume von constantem negativen Krümmungsmaass untersucht, und ihre Uebereinstimmung mit der schon früher aufgestellten imaginären Geometrie von Lobatschewsky nachgewiesen hat. In dieser ist der Raum unendlich ausgedehnt nach allen Richtungen; Figuren, die einer gegebenen congruent sind, können in allen Theilen desselben construirt werden; zwischen je zwei Puncten ist nur eine kürzeste Linie möglich, aber der Satz von den Parallellinien trifft nicht zu.

---

3. Mittheilung des Herrn Professor L. Carius in Marburg: »Ueber Chlorigsäure-Anhydrid«.

(Dem Verein vorgelegt am 28. Mai 1869.)

Die chlorige Säure war bisher noch unvollständig untersucht, besonders aber forderte die scheinbare Abweichung im Verhältnisse des spec. Gew. ihres Gases zur wahrscheinlichen Moleculargrösse, $Cl_2 O_3 = 119$, von dem Volumgesetze zu eingehenderer Untersuchung auf. Eine solche ist im hiesigen chemischen Laboratorium durch Herrn M. Brandau ausgeführt worden.

Herr Brandau hat zunächst eine Methode der Darstellung von reinem Chlorigsäure-Gase festgestellt. Er fand, dass von den bekannten Methoden nur die von mir*) angegebene von Chlorgas freies Gas liefert, welches aber stets etwas Kohlensäure beigemengt enthält. Er fand weiter, dass das nach letzterer Methode dargestellte Gas bei einer Temperatur von mindestens -18^0 zu einer tropfbaren Flüssigkeit condensirt wird, welche bei 0 bis $+8^0$ siedet, und dabei völlig reines Chorigsäure-Gas liefert. Dieses ist denn auch der Weg, auf dem das zur Bestimmung des spec. Gew. und zu anderen Versuchen benutzte Gas dargestellt wurde.

Ich hebe zunächst hervor, dass die von Herrn Brandau zuerst in tropfbarer Gestalt dargestellte chorige Säure eine tief braune

*) Liebig's Annalen 142, 129.

dünne Flüssigkeit ist, die unter 0^0 gefahrlos gehandhabt werden kann, über 0^0 aber schon durch mechanische Einflüsse zu heftigen Explosionen Veranlassung geben kann. Sie konnte nicht ganz frei von Wasser dargestellt werden, und dadurch ist wahrscheinlich bedingt, dass sie stets etwas Chlorsäure (oder wohl die sog. Unterchlorsäure, $Cl_2 O_4$) eingemengt enthält, und einen darnach veränderlichen Siedepunkt besitzt ($Cl_2 O_4$ siedet nach Millon bei $+ 20^0$, die flüssige chlorige Säure bei 0 bis $+ 8^0$), da nämlich die chlorige Säure mit Wasser allmählig in Chlorsäure und Chlorwasserstoff zerfällt:

$$(Cl\,H\,O_2)_3 = Cl\,H + (Cl\,H\,O_3)_2.$$

Besonders wichtig ist hier die Untersuchung des Herrn Brandau geworden, dass er zur Bestimmung des spec. Gewichts die Methode der Titrirung mit Jodflüssigkeit anwenden konnte. Die chlorige Säure zerlegt sich mit Jodwasserstoff in der Weise:

$$Cl_2\,O_3 + (J\,H)_8 = (Cl\,H)_2 + (O\,H_2)_3 + J_8\,;$$

zur Berechnung dient daher die Gleichung:

$$x = \frac{a\,(nt - t')\;Cl_2\,O_3}{J_8}.$$

Herr Brandau hat das spec. Gew. des Chlorigsäure-Gases bei $+ 9^0$ und 13^0 bestimmt, und zu 4.022 und 4.070 gefunden. Wenn die auf chemischen Wege wahrscheinlichste Moleculargrösse $Cl_2\,O_3 = 119$ dem Volumgesetze entsprechend als Gas 2 Volum misst, so folgt daraus das spec. Gew.:

Berechnet	Gefunden
4.123	4.046 (Mittel).

Millon und später Schiel glaubten aus ihren Bestimmungen das spec. Gew. des Chlorigsäure-Gases zu 2.745 ableiten zu müssen, welches für die Moleculargrösse $Cl_2\,O_3 = 119$ einer Condensation auf 3 Volum entsprechen würde. Durch die Untersuchung des Herrn Brandau wird es wahrscheinlich, dass Beide ein mit Chlorgas gemengtes Gas untersuchten, und ist durch dieselbe nun diese scheinbare Abweichung von dem Gesetze der Condensation der im Molecul einer Verbindung enthaltenen gasförmigen Bestandtheile auf zwei Volume beseitigt und letztere sichergestellt.

---

4. Vortrag des Herrn Geheimerath H Helmholtz: »Ueber die Schallschwingungen in der Schnecke des Ohres«, am 25. Juni 1869.

(Das Manuscript wurde sofort eingereicht.)

Zur Zeit der ersten Herausgabe meiner »Lehre von den Tonempfindungen« war die Untersuchung des Zusammenhangs der einzelnen Theile, welche das Corti'sche Organ der Schnecke im Ohre zusammensetzen, so wie die Messung seiner Dimensionen in den verschiedenen Windungen der Schnecke noch nicht weit vorgeschritten. Da die physiologischen Thatsachen mich zu der Hypothese führten, dass verschiedene Nervenfasern des Nervus acusticus mit elastischen Anhängseln von verschiedener Abstimmung versehen sein möchten, schienen nach der damaligen Lage unserer Kenntnisse die Corti'schen Bögen diejenigen zu sein, denen man unter allen Theilen des Labyrinths am ersten die zu einer solchen Function nöthige Masse, Festigkeit und Isolirtheit zutrauen konnte. Obgleich nun ihre Form und Grösse nicht gerade grosse Unterschiede in den verschiedenen Abtheilungen der Schnecke zeigte, so konnte immerhin eine verschiedene Abstimmung derselben durch kleine Unterschiede in der Dicke, Form des Querschnitts, Spannung u. s. w. erreicht sein, Unterschiede, die bei der Präparation, namentlich bei der Anwendung erhärtender Reagentien, vollständig verschwinden konnten, so dass deren Mangel mir nicht als ein entscheidender Grund gegen meine Hypothese erschien; namentlich der damals noch sehr grossen Differenz in den Ansichten und Beschreibungen der einzelnen Anatomen gegenüber, die sich mit diesem Gegenstande beschäftigt hatten.

Seit jener Zeit haben die anatomischen Untersuchungen des genannten Organs sehr wesentliche Fortschritte gerade in Bezug auf diejenigen Verhältnisse gemacht, welche physiologisch wichtig sind, und es ist viel grössere Uebereinstimmung zwischen den verschiedenen Beobachtern zu Stande gekommen.

Von grosser Wichtigkeit für unseren Gegenstand waren namentlich die Untersuchungen von C. Hasse über die Schnecke der Vögel und Amphibien. Sie zeigten in allen übrigen Verhältnissen Uebereinstimmung mit den wesentlichen Zügen im Bau der Säugethierschnecke, nur gerade die Corti'schen Bögen fehlten dort vollständig. Da es andrerseits nicht zweifelhaft sein kann, dass Vögel, welche Melodien pfeifen lernen, auch Tonhöhen unterscheiden, so ging daraus hervor, dass Unterscheidung der Tonhöhen ohne Corti'sche Bögen möglich sei.

Andrerseits veröffentlichte V. Hensen eine Reihe von Messungen über die Dimensionen der Schneckenscheidewand und ihrer Annexa, aus denen hervorging, dass das fest ausgespannte Blatt der membranösen Scheidewand, die Membrana basilaris, sehr auffallende Unterschiede der Breite in den verschiedenen Abtheilungen der Schnecke zeigte. Dem runden Fenster gegenüber ist sie nämlich nur 0,04125 Mm. breit, an ihrem andern Ende am Hamulus unter der Kuppel dagegen 0,495 Mm., ist also dort etwa 12 Mal breiter. Die beiden Schenkel der Corti'schen Bögen und ihre Spannweite nehmen allerdings vom Anfang bis gegen das obere Ende der Schneckenscheidewand auch an Grösse zu, die Länge der

Bögen auf das Doppelte, ihre Spannweite auf das Vierfache, aber jedenfalls nicht in so auffallendem Maasse, als es die Breite der Membrana basilaris thut.

Deshalb hat auch schon Herr V. Hensen die Hypothese aufgestellt, dass die Abstimmung der schwingenden Theile, an denen die Nervenfasern enden, wesentlich von der verschiedenen Stimmung der betreffenden Theile der Membrana basilaris abhängig sein möchte, so dass die tieferen Töne in den oberen Theilen der Membrana basilaris gegen das Schneckengewölbe hin, die höheren in den unteren gegen das runde Fenster hin, resoniren würden.

Bevor diese, in vieler Beziehung sehr ansprechende Theorie acceptirt werden konnte, schien es mir aber noch nöthig zu untersuchen, ob eine hinreichende Begrenzung und Isolirung der schwingenden Theile auf einer solchen Membran möglich sei, so dass die Erregung durch Schwingungen von bestimmter Höhe auf ein hinreichend enges Gebiet von Nervenfasern beschränkt bliebe. Auf einer nach allen Richtungen hin gleichmässig gespannten Membran sieht man niemals, dass ihre Schwingungen auf einen einzelnen schmalen Theil derselben beschränkt bleiben, sondern sie breiten sich immer ziemlich gleichmässig über alle oder fast alle Theile der Membran aus, so dass höchstens einzelne Knotenlinien von der Bewegung ausgenommen bleiben.

Dies ist der Fall bei allen bisher zu akustischen Versuchen benutzten Membranen, und wird durch das Experiment so gut, wie durch die Theorie, bestätigt.

Eine Eigenthümlichkeit im Bau der Membrana basilaris leitete mich jedoch auf einen Ausweg aus dieser Schwierigkeit. Die Membran zeigt eine starke Streifung in radialer Richtung, und spaltet zich sehr leicht zwischen je zwei solchen Streifen. Das letztere seigt an, dass sie in der Richtung ihrer Länge, quer gegen ihre Streifen nicht stark gespannt sein kann. Wohl aber deuten die stark entwickelten Fasern, welche das gestreifte Ansehen erzeugen, darauf hin, dass sie einem ziemlich erheblichen Zuge in Richtung der Streifen Widerstand leisten kann. An einer geöffneten Schnecke fand ich ihre Spannung allerdings auch in dieser Richtung nicht sehr bedeutend; die Membran erschien ziemlich schlaff. Da aber ihr äusserer Ansatz mehr an dem vom Knochen sehr leicht sich lösenden Periost, als am Knochen selbst festhaftet, so ist es möglich, dass im lebenden Zustande die Membran viel beträchtlicher gespannt ist, so lange die vom Periost gebildeten Röhren durch den Druck der Labyrinthflüssigkeit in gespanntem Zustand erhalten sind.

Der Vergleich mit der gerade gestreckten Vogelschnecke zeigt, dass die spiralige Aufwindung des Schneckencanals kein wesentliches Moment für seine Function ist.

Ich habe deshalb die mathematische Analyse der Bewegungen einer Membran angestellt, die zwischen den Schenkeln eines Winkels

4

ausgespannt ist, deren Spannung in der Richtung der Halbirungslinie dieses Winkels am kleinsten, senkrecht dagegen am grössten ist, die durch eine periodische Kraft, welche gegen ihre ganze Fläche wirkt, erschüttert wird, und deren Bewegung gleichzeitig durch Reibung eine geringe Dämpfung erleidet.

Das Resultat, soweit es uns hier interessirt, ist, dass wenn die kleinere Spannung in Richtung der Halbirungslinie des Winkels verschwindend klein wird, die Membran schliesslich dieselben Bewegungen ausführt, als wenn sie aus einem System unabhängig von einander beweglicher Saiten bestände, welche alle senkrecht zur Halbirungslinie zwischen den Schenkeln des Winkels und mit gleicher Spannung ausgespannt wären. In einem solchen schwingen diejenigen Saiten stark mit, deren Eigenton der Tonhöhe des erregenden Tons entspricht; ihre Nachbarn etwas schwächer, in dem Maasse weniger, als ihre Tonhöhe von der des erregenden Tones mehr und mehr abweicht; und die weiter entfernten Saiten machen nur unendlich kleine Schwingungen. Die Breite der schwingenden Portionen hängt wesentlich ab von dem Grade der Dämpfung. Je geringer dieser ist, desto schwächer kann der erregende Ton sein, und desto schmaler ist die mitschwingende Stelle. Es finden hier dieselben Verhältnisse statt, die ich in meiner Lehre von den Tonempfindungen auf Seite 212 bis 219 auseinandergesetzt habe.

Bei einer solchen Beschaffenheit der Membrana basilaris würde also in der That die von Hensen aufgestellte Hypothese allen Anforderungen genügen.

Der Nutzen der Corti'schen Bögen in der Schnecke der Säugethiere ist dann vielleicht der, dass sie die Erschütterung der Membrana basilaris isolirt durch die ziemlich dicke weiche Masse der Papilla spiralis hindurch zu isolirten Orten von deren oberer Fläche leiten, wo die Nervenendzellen mit ihren haarähnlichen Fortsätzen liegen. In der Vogelschnecke ist diese Schicht viel dünner, und konnte ein solches Hilfsmittel entbehrt werden.

Ich gebe hier schliesslich noch die Hauptzüge der mathematischen Theorie

Die Halbirungslinie des Winkels sei die Axe der x, sein Scheitel der Nullpunct der x und y; die Zeit t; die Entfernung eines schwingenden Membranpunctes von seiner Gleichgewichtslage in der Ebene xy sei z, die Spannung der Membran in Richtung der x sei P, in Richtung der y sei sie gleich Q, dieselbe gemessen für einen Streifen, dessen Breite gleich der Längeneinheit ist. Die Masse der Flächeneinheit der Membran (eingerechnet das mitbewegte umgebende Medium) sei μ, der Dämpfungscoefficient sei γ, und die periodische erregende Kraft sei A . sin (nt).

Die Bewegungsgleichung ist alsdann:

$$P\frac{d^2z}{dx^2} + Q\frac{d^2z}{dy^2} = \mu\frac{d^2z}{dt^2} + \nu\frac{dz}{dt} - A\cos(nt).$$

Die Grenzbedingungen sind, dass z längs der Schenkel und im Scheitel des Winkels gleich Null, in unendlicher Entfernung endlich sei.

Wir setzen dannn

$$x = \sqrt{P} . r \cos w \text{ und } y = \sqrt{Q} . r \sin w$$

ferner z gleich dem reellen Theile von

$$z = e^{int} \Sigma \left[s_h \cos(hw) \right]$$

wobei die Werthe von h so gewählt werden müssen, dass cos hw längs der Schenkel des Winkels, in dem die Membran ausgespannt ist, gleich Null werde. Wenn der kleinste unter diesen Werthen von h gleich m ist, so sind die andern ganze Multipla von m, und A selbst ist zu entwickeln in die Reihe

$$A = \frac{4A}{\pi} \left\{ \cos(mw) - \frac{1}{3} \cos(3\,mw) + \frac{1}{5} \cos(5\,mw) \text{ etc.} \right\}$$

Setzen wir nun

$$B_h = (-1)^{\frac{h+m}{2m}} \frac{4\,A\,m}{\pi h}$$

so ist s_h ein Intgral der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 s}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{ds}{dr} + \left(n^2\mu - in\nu - \frac{h^2}{r^2} \right) s = B$$

mit der Bedingung, dass es Null sei für $r = o$, und endlich für $r = \infty$.

Dies Integral, welches auch übrigens leicht nach positiven oder negativen Potenzen von r entwickelt werden kann, lässt sich für unsern Zweck am passendsten in Form bestimmter Integrale geben und setzen wir

$$\sqrt{n^2\mu - in\nu} = l - i\lambda$$

wobei wir das Zeichen der Wurzel wählen, welches l positiv macht, und

$$\psi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-(l - i\lambda) r \sin t} \sin(ht)\, dt$$

$$\varphi = \int_1^{\infty} u^{-h-1}\, e^{-\frac{1}{2}(l - i\lambda) r \left(u + \frac{1}{u} \right)} du$$

so ist

$$s = -\frac{B}{(l - i\lambda)^2} \left[h\,\psi + h . \cos\left(\frac{h\pi}{2} \right) . \varphi - 1 \right]$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $r = h\varrho$, so wird h unendlich gross, wenn die Spannung Q gleich Null wird, ϱ dagegen nähert sich asymptotisch einem endlichen Werthe, und s wird für ein unendliches h

$$s = -\frac{B\varrho^2}{1 - (n^2\mu - in\nu)\varrho^2}$$

Dies wird ein Maximum, wo

$$n^2 \mu \varrho^2 = 1.$$

Ist der Winkel, in welchem die Membran ausgespannt ist, wie es in der Schnecke der Fall ist, an und für sich so klein, dass man den Unterschied seines Sinus und seiner Tangente vernachlässigen kann, und gleich $\varepsilon\pi$, so ist der niedrigste Werth von $h = \frac{1}{\varepsilon}$ und angenähert

$$\varrho = \frac{x\varepsilon}{\sqrt{Q}}$$

Also das Maximum tritt ein, wo

$$\mu n^2 x^2 \varepsilon^2 = Q$$

Es ist aber $x\varepsilon$ unter diesen Umständen die Länge der Saite, und die letzte Gleichung diejenige, die die Schwingungszahl einer Saite bestimmt.

Bericht des Herrn Dr. Mittermaier: »über das Kloakenwesen in Heidelberg«, erstattet am 2. und 9. Juli.

(Das Manuscript wurde am 16. Juli eingereicht.)

Die von dem naturhist.-med. Verein in Heidelberg im Jahre 1866 erwählte ärztliche Commission, »zur Untersuchung der Verunreinigung des Bodens, des Trinkwassers und der Luft, soweit dieselbe von den vorhandenen Abtrittgruben und Kanälen hiesiger Stadt abhängt«, legt den ausgearbeiteten Bericht vor.*)

Der Bericht wuchs während der Arbeiten dafür zu dem Umfang einer Denkschrift an, die als solche dem Druck übergeben werden soll.

Die Commission gewann mit Unterstützung der Gemeindebehörde Heidelbergs einen Plan der Stadt, in welchem alle bisherigen Strassenkanäle, so wie deren Zuleitungen aus den einzelnen Häusern genau verzeichnet sind. Ebenso wurden alle vorhandenen Abtrittgruben nach ihrer Lage zu den Wohnhäusern eingezeichnet.

Dieser Plan erleichterte ganz wesentlich das Studium der vorliegenden Frage. Die Zusammenstellung der Abtrittkanälchen aus den einzelnen Häusern und der Gruben, ergab ein buntes Durcheinander, welches eine Ueberwachung von Seiten der Sanitätsbehörde unmöglich macht. Es fehlen auch Abtrittkübel der primi-

*) In die Commission wurde vom Verein gewählt: Prof. Friedreich, Medicinalrath Mezger und Dr. Mittermaier. Cooptirt wurde Professor Moos. Für den plötzlich durch den Tod entrissenen Medizinalrath Mezger, trat der zum Physikus des Amtsbezirkes Heidelberg ernannte Prof. Knauff ein. Die Berichterstattung wurde Dr. Mittermaier übertragen.

rück und erst spät und zuletzt werden auch die höchsten Töne der musikalischen Skala wieder percipirt am 21. September, während am 4. Juli auf der linken Seite noch Taubheit für die 5 höchsten Töne eines Klaviers von 7 Octaven bestand. Für den höchsten Ton desselben war auf der rechten Seite zu dieser Zeit das Perceptionsvermögen noch nicht wiedergekehrt.

Der behandelnde Arzt der Kranken war Herr Dr. Picot in Carlsruhe. Wegen der anderweitigen schweren Erkrankung waren noch die Professoren Kussmaul und v. Chelius zugezogen. Der Vortragende hatte auf Grund günstiger Erfahrungen bei anderen nervösen Ohrenleiden auch in diesem Fall zur Behandlung vermittelst des constanten Stroms gerathen.

Vortrag des Herrn Prof. H. Helmholtz „Ueber die Gesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlich ausgedehnten Leitern" am 21. Januar 1870.

(Das Manuscript wurde sofort eingereicht.)

Wenn leitende Körper von elektrischen Strömen von veränderlicher Intensität durchströmt werden, ist die elektromotorische Kraft im Innern derselben nicht blos abhängig von den elektrostatischen Kräften der freien Elektricität, die auf der Oberfläche oder auch vielleicht im Innern der Leiter verbreitet ist, sondern sie hängt auch von Inductionswirkungen ab, welche die elektrischen Ströme bei der Veränderung ihrer Intensität gegenseitig auf einander ausüben. In den meisten Fällen, so oft nämlich die Dichtigkeit der freien Elektricität an der Oberfläche oder im Innern der Leiter sich verändert, haben wir es nicht durchaus mit geschlossenen Strömen zu thun, für welche allein die Gesetze der Induction vollständig und genau bekannt sind, sondern die vorkommenden Ströme sind der Regel nach zum Theil, oder auch wohl alle, ungeschlossene.

Das mathematische Gesetz der elektrischen Induction ist in verschiedenen Formen gegeben worden; die erste derselben von Herrn F. E. Neumann (dem Vater)*), eine zweite von Herrn W. Weber**), mit welcher auch die Consequenzen der von Herrn C. Neumann (dem Sohne) aufgestellten Hypothese wenigstens für schwächere Ströme zusammenstimmen, eine dritte ist in den Arbeiten über Elektrodynamik von Herrn A. Maxwell***) enthalten.

Alle diese Formen geben für alle Fälle, wo der inducirende Strom geschlossen ist, vollkommen übereinstimmende Resultate,

---

*) Denkschriften der Berliner Akademie für 1845 und 9. August 1847.
**) Elektrodynamische Maassbestimmungen. Leipzig 1846.
***) London Philosophical Transactions 1865. P. I. p. 459.

aber sie differiren, wenn sie auf ungeschlossene Ströme angewendet werden. Die bisher bekannten Thatsachen erlaubten nicht, eine sichere Entscheidung zwischen diesen verschiedenen Formen des Inductionsgesetzes zu treffen.

Es wird nur als natürlich angesehen werden dürfen, wenn zunächst die geistreiche Hypothese von Herrn W. Weber, welche den Vortheil hatte, alle bis dahin bekannten elektrischen Phänomene unter einem verhältnissmässig einfachen Gesichtspunkte zu vereinigen als Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen bevorzugt wurde. Die Bewegungsgesetze der inconstanten elektrischen Ströme in körperlichen Leitern wurden aus der Weber'schen Hypothese von Herrn Kirchhoff*) abgeleitet, und auf die Ströme in dünnen Dräthen angewendet; ein Fall der Anwendung, bei welchem übrigens, wie ich hier gleich bemerken will, die Unterschiede der verschiedenen Theorien verschwinden, wenigstens wenn man gewisse faktisch unendlich klein bleibende Grössen, auch in der Theorie als unendlich klein voraussetzt. Dieselben Bewegungsgleichungen sind dann von Herrn Jochmann**) auf die Ströme in Leitern, die unter dem Einfluss eines Magneten rotiren angewendet worden; endlich von Hrn. Lorberg***) auf Bewegungen der Elektricität in einer Kugel, wie sie unter dem Einflusse periodisch wechselnder inducirender äusserer Kräfte zu Stande kommen müssen. In den Untersuchungen von Herrn Jochmann verschwindet ebenfalls das, was dem Weber'schen Gesetze eigenthümlich ist, weil er es wesentlich auch nur mit geschlossenen Strömen zu thun hatte. Die Untersuchungen von Herr Lorberg zeigen, dass in der Kugel unter dem Einflusse beliebiger periodischer Kräfte Integrale der Bewegungsgleichungen hergestellt werden können, welche stets endlich bleibenden Bewegungen entsprechen, aber es kann in diesem Falle nicht unterschieden werden, ob diese Bewegungen durch die betreffenden äusseren Kräfte hervorgerufen werden können, oder nur durch sie in ihrem Ablauf verändert sind, eine Unterscheidung, die in diesem Falle wesentliche Bedeutung hat.

Ich wurde zu den Untersuchungen, deren Resultate ich hier mittheilen will, geführt durch die Frage, wie elektrische Ströme im Innern von leitenden Körpern anheben zu fliessen, da ihre physiologische Wirkung wesentlich auf der Plötzlichkeit ihres Eintritts beruht. Dabei zeigte sich, dass die auf das Weber'sche Gesetz gegründeten Bewegungsgleichungen der Elektricität einer Revision bedürfen.

Es lassen sich alle bisher aufgeführten Formen des Inductionsgesetzes auf eine gemeinsame Form zurückführen, in welcher sie

---

*) Poggendorff's Annalen. CII. p. 529.
**) Journal für reine und angewandte Mathematik. Bd. LXIII.
***) Ebenda. Bd. LXXI. p. 53.

nur durch die verschiedenen Werthe einer darin enthaltenen Constanten verschieden sind.

Nennen wir i die Intensität in einem Stromelement $D\varsigma$, und j in einem andern $D\sigma$, positiv gerechnet, wenn die positive Elektricität in Richtung der wachsenden ς oder σ strömt, r die Entfernung zwischen $D\varsigma$ und $D\sigma$, ferner $(D\varsigma, D\sigma)$ den Winkel zwischen den Richtungen von $D\varsigma$ und $D\sigma$, $(r, D\varsigma)$ und $(r, D\sigma)$ die Winkel, welche die Richtung von r mit $D\varsigma$ und $D\sigma$ macht, so ist der allgemeinste Ausdruck p für das elektrodynamische Potential der Stromelemente $D\varsigma$ und $D\sigma$ auf einander, wenn wir nur die Voraussetzung festhalten, dass die Wirkungen ungeschlossener Ströme nicht von einer anderen Function der Entfernung abhängen, als die geschlossener, folgender:

$$p = -\tfrac{1}{2}\frac{ij}{r}\left\{(1+k)\cos(D\varsigma, D\sigma) + (1-k)\cos(r, D\varsigma)\cos(r, D\sigma)\right\}$$

Darin ist k eine Constante von unbekanntem Werthe. Der mit k multiplicirte Theil dieses Ausdrucks ist gleich

$$-\tfrac{1}{2}i.j.\frac{d^2 r}{d\varsigma . d\sigma}$$

und verschwindet also, so oft ς oder σ eine geschlossene Strombahn ist, und wir über die geschlossene Bahn integriren. Es hat also der Werth von k keinen Einfluss auf alle diejenigen elektrischen Bewegungen, bei denen alle Ströme geschlossen sind.

Die Werthe von k sind:

bei F. E. Neumann	$k = 1$
bei Cl. Maxwell	$k = 0$
bei W. Weber	$k = -1$

Aus diesem Werthe von p habe ich also, wie Herr Kirchhoff aus dem Weber'schen Gesetze, die Bewegungsgleichungen der Elektricität in einem körperlich ausgedehnten Leiter entwickelt.

Diese Gleichungen lassen sich auf folgende Form bringen: Es seien U, V, W die Werthe des elektrodynamischen Potentials für die Einheit des Stromes, die an einem gegebenen Orte beziehlich den x, y oder z parallel fliesst, Φ die elektrostatische Potentialfunktion ebendaselbst, t die Zeit. Die Bewegung der Elektricität soll im Innern eines Leiters S bestimmt werden, dessen specifischer Widerstand $\varkappa$ sei; den äusseren Raum bezeichnen wir mit S^1, die Grenzfläche zwischen S und S^1 mit Ω, und die nach aussen gerichtete Normale derselben mit N.

Die Werthe der Functionen U etc. in S^1 bezeichnen wir mit U^1 etc. Wir setzen ferner voraus, dass die etwa vorhandenen Stromcomponenten, welche Bewegungen elektrischer Massen im äusseren Raume entsprechen, u^1, v^1, w^1 gegeben seien. Dann sind die Bedingungen des Problems folgende.

A) Im Innern von S und S^1:

$$\frac{dU}{dx} + \frac{dV}{dx} + \frac{dW}{dz} = -k\frac{d\Phi}{dt}$$

B) Im Innern von S:

$$\varDelta U-(1-k)\frac{d^2\Phi}{dx\,.\,dt}=\frac{4\pi}{\varkappa}\left[\frac{d\Phi}{dx}+A^2.\frac{dU}{dt}\right]$$

$$\varDelta V-(1-k)\frac{d^2\Phi}{dy\,.\,dt}=\frac{4\pi}{\varkappa}\left[\frac{d\Phi}{dy}+A^2.\frac{dV}{dt}\right]$$

$$\varDelta W-(1-k)\frac{d^2\Phi}{dz\,.\,dt}=\frac{4\pi}{\varkappa}\left[\frac{d\Phi}{dz}+A^2.\frac{dW}{dt}\right]$$

C) Im Innern von S^1:

$$\varDelta U^1-(1-k)\frac{d^2\Phi^1}{dx\,.\,dt}=-4\pi u^1$$

$$\varDelta V^1-(1-k)\frac{d^2\Phi^1}{dy\,.\,dt}=-4\pi v^1$$

$$\varDelta W^1-(1-k)\frac{d^2\Phi^1}{dz\,.\,dt}=-4\pi w^1$$

In B und C ist mit dem Zeichen $\varDelta U$ u. s. w. gemeint die Operation:

$$\varDelta U=\frac{d^2U}{dx^2}+\frac{d^2U}{dy^2}+\frac{d^2U}{dz^2}$$

D. Grenzbedingungen an der Fläche Ω:

$$U-U^1=V-V^1=W-W^1=0$$

$$\frac{dU}{dN}-\frac{dU^1}{dN}=\frac{dV}{dN}-\frac{dV^1}{dN}=\frac{dW}{dN}-\frac{dW^1}{dN}=0.$$

E. Grenzbedingungen für unendliche Entfernung:

$$U^1=V^1=W=\Phi^1=0.{}^{*})$$

Die Geschwindigkeiten u, v, w der strömenden Elektricität im Innern von S werden durch Gleichungen, die ganz von der Form, wie C sind, erhalten.

Hier ist eine Analogie hervorzuheben. Die Form der Gleichungen A und B für das Innere von S ist nämlich gleich den Gleichungen für die Bewegungen eines der Reibung unterworfenen Gases, dessen Geschwindigkeiten und Dichtigkeitsänderungen so klein sind, dass man die davon abhängenden Glieder zweiter Dimension vernachlässigen kann. Es vertreten dann in unseren Gleichungen die Componenten des elektrodynamischen Potentials U, V, W die Geschwindigkeitscomponenten des Gases, $k\Phi$ die Vergrösserung der Dichtigkeit des Gases, $\frac{\Phi}{A^2}$ die Vergrösserung des durch

*) In Herrn Professor Kirchhoff's Gleichungen werden meine übergeführt, wenn man setzt $k=-1$ und

$$\Phi=\tfrac{1}{2}\Omega$$

$$\varkappa=\frac{1}{4k}$$

$$A^2=\frac{2}{c^2}$$

die Dichtigkeit dividirten Druckes. Es ist ferner $\frac{\varkappa}{4\pi A^2}$ die Constante für diejenige Reibung, die durch Verschiebung der Schichten entsteht, $\frac{\varkappa(1-k)}{4\pi A^2}$ die Constante der Reibung, welche durch Dichtigkeitsänderungen hervorgerufen wird. Diese Vergleichung ist aber direct anwendbar nur so lange, als k und $1-k$ positive Werthe haben. Wenn k negativ wäre, würde ein solches Gas bei Verdichtung kleineren, bei Verdünnung grösseren Druck ausüben müssen, und deshalb labiles Gleichgewicht haben.

Art des Gleichgewichts der Elektricität. Der Gesammtbetrag P derjenigen Arbeit, welche durch Aenderung der elektrischen Strömung und Vertheilung in S verändert werden kann, lässt sich auf die Form bringen:

$$P = \tfrac{1}{2}\int\left\{\frac{A^2}{4\pi}\Sigma\left[\left(\frac{dU_p}{dx_q}-\frac{dU_q}{dx_p}\right)^2\right]+\frac{1}{4\pi}\Sigma\left[\left(\frac{d\Phi}{dx_p}\right)^2\right]\right.$$
$$\left.+\frac{kA^2}{4\pi}\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)^2\right\}(dS+dS^1)$$

Darin sollen U_p und U_q irgend eine der Grössen U, V, W und x_p wie x_q die entsprechenden Coordinaten x, y oder z bedeuten. Wenn $k=o$ oder positiv ist, so ist P die Summe von lauter positiven Quadraten, und also nothwendig positiv. Wenn k negativ ist, kann P aber auch negativ werden z. B. in dem sehr allgemeinen Falle, wo $\Phi=o$ und U, V, W Differentialquotienten einer und derselben Function der Coordinaten nach x, y, z sind.

Aus den gegebenen Gleichungen folgt ferner, dass der Differentialquotient $\frac{dP}{dt}$ nothwendig negativ ist, wenn keine äusseren Kräfte einwirken. Nämlich es ist:

$$\frac{dP}{dt} = -k\int(u^2+v^2+w^2)\,dS.$$

Daraus folgt, dass wenn P bei negativem Werthe von k einmal negativ werden kann, es zu immer grösseren und grösseren negativen Werthen fortschreiten muss, wenn die Bewegung ohne Wirkung äusserer Kräfte vor sich geht. Auch lässt sich zeigen, dass $\frac{dP}{dt}$ unter diesen Umständen nicht unter einen gewissen endlichen Werth herabgehen kann, dass also P schliesslich negativ unendlich werden muss.

Das zeigt an, dass wenn k negativ ist, die oben aufgestellten Bewegungsgleichungen der Elektricität für diese ein labiles Gleichgewicht ergeben*); dagegen ist das Gleichgewicht stabil, wenn k positiv oder Null ist.

*) Dass bei gewissen Bewegungen im Innern einer leitenden Kugel sich

Ueber die Frage, ob die zu unendlich zunehmender Störung des Gleichgewichts fortschreitenden Bewegungen durch äussere inducirende Kräfte hervorgerufen werden können, habe ich erst in einem Falle*) entscheiden können, nämlich wenn in einer unendlich ausgedehnten ebenen leitenden Platte durch Annäherung oder Entfernung ihr paralleler unendlich ausgedehnter Elektricitätsschichten elektrische Bewegungen hervorgerufen werden. Es lässt sich zeigen, dass im Allgemeinen solche Bewegungen entstehen, so oft einer der Differentialquotienten der Geschwindigkeit der inducirenden Platten nach der Zeit genommen, discontinuirlich wird.

Ich folgere hieraus, dass die für die Elektricitätsbewegung aufgestellten Gleichungen mit der Annahme eines negativen Werthes von k nicht zulässig sind, während sie bei Annahme des Werthes Null (Maxwell) oder positiven Werthes (Neumann sen.) vollkommen entsprechende Resultate liefern.

Die auch von Hrn. Lorberg acceptirte Modification der Weberschen Annahme, wonach die Elektricität Masse und Beharrungsvermögen haben soll, ändert an diesen Resultaten nichts Wesentliches.

Fortpflanzungsweise elektrischer Bewegungen in Leitern. Die Fortpflanzung geschieht, theils in Querschwingungen, die, wie schon Herr Prof. Kirchhoff nachgewiesen hat, sich nach Art der geleiteten Wärme verbreiten, wobei der Werth der Constante k ohne Einfluss ist. Zum Theil geschieht sie in Längsschwingungen, die einer nach der Schwingungsdauer und dem Widerstande des Leiters verschiedenen Dämpfung unterworfen sind. Bei grosser Schwingungsdauer oder sehr guter Leitung, wenn die Dämpfung unmerklich wird, ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $\frac{1}{A\sqrt{k}}$. Bei Maxwell's Annahme wird sie unendlich gross, und die Untersuchung zeigt, dass hierbei dann gar keine freie Elektricität in das Innere des Leiters eintreten kann, wenn sie nicht von Anfang an da war. Nach F. E. Neumann's Annahme $k = 1$, wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit gleich $\frac{1}{A}$, welche Grösse nach Weber's Messungen der Geschwindigkeit des Lichtes gleich zu sein scheint.

---

das Gleichgewicht der Elektricität nach dem Weber'schen Gesetze als labil erweist, hatte vor mir schon Herr Professor Kirchhoff bemerkt, wie ich aus mündlichen Mittheilungen von ihm weiss.

*) Nachträglicher Zusatz. Es ist mir seitdem der Beweis auch für die Bewegungen in einer leitenden Kugel gelungen, in der die Elektricität durch Annäherung und Entfernung eines elektrischen Körpers in Bewegung gesetzt ist.