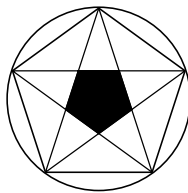


GREGOR SCHNEIDER

# MATHEMATISCHER PLATONISMUS

Beiträge zu Platon und zur Philosophie der Mathematik



München 2012

Heidelberger Dissertation

FÜR JONA

# Inhalt

Vorwort	1
Einleitung	2
1 Zur Metamathematik in Platons Dialogen	6
1.1 Mathematikhistorische Vorbemerkungen	6
1.2 Mathematische Beispiele in «Ion» und «Hippias»	10
1.2.1 «Ion»	10
1.2.2 «Hippias I»	11
1.3 Das Liniengleichnis in der «Politeia»	13
1.3.1 <i>Das Gleichnis</i>	13
1.3.2 <i>Die Linie</i>	16
1.3.3 <i>Die Abbild-Urbild-Theorie</i>	18
1.3.4 <i>Linie, Höhle und eine passende Erweiterung</i>	19
1.3.5 <i>Die verfeinerte Linie</i>	21
1.3.6 <i>Die Ideenzahlen</i>	22
1.3.7 <i>Die Ideenzahlen im Spiegel der Geometrie</i>	24
1.3.8 <i>Die mathematischen Wissenschaften</i>	30
1.3.9 <i>Hypothesen und Struktur</i>	31
1.3.10 <i>Zum Hinterschreiten der mathematischen Voraussetzungen</i>	32
1.3.11 <i>Die Gegenstände der Dianoia</i>	34
1.3.12 <i>Mathematik und die Entstehung der Welt</i>	35
1.3.13 <i>Höhle und Kopf: Zur Physiologie des Höhlengleichnisses</i>	36
1.3.14 <i>Die «unvernünftigen Linien» in Politeia 534d</i>	38
1.4 Exkurs: Der Goldene Schnitt und die Ordnung des Kosmos	41
1.4.1 <i>Verkehrte Verhältnisse</i>	41
1.4.2 <i>Der Goldene Schnitt und seine Eigenschaften im antiken Wissen</i>	43
1.4.3 <i>Der Goldene Schnitt bei Platon</i>	48
2 Geometrische Konstruktion und Tugend – Zu Menon 86d-87a	52
2.1 Differenzen Euklidischer und modernen Mathematik	52
2.2 Die Fragestellung und ihre Bearbeitung	54
2.2.1 <i>Moderne Antworten</i>	55
2.2.2 <i>Was wusste Platon davon?</i>	58
2.2.3 <i>Sokrates' Lösung: Text und Vokabular</i>	60
2.3 Interpretationen	61
2.3.1 <i>Eine Rhapsodie von Lösungsversuchen</i>	62
2.3.1.1 <i>Benecke</i>	62
2.3.1.2 <i>Butcher</i>	63
2.3.1.3 <i>Kokkinos</i>	63

2.3.1.4	Heijboer . . . . .	65
2.3.1.5	Meyers . . . . .	65
2.3.1.6	Das Ungenügen der bisher dargestellten Interpretationen . . . . .	66
2.3.1.7	Lloyd . . . . .	66
2.3.2	<i>Allgemeine Lösungsversuche</i> . . . . .	67
2.3.2.1	Sternfeld und Zyskind . . . . .	67
2.3.2.2	August, Cook Wilson, Heath et al. . . . .	67
2.3.3	<i>Einwände gegen die Interpretation nach (3)</i> . . . . .	68
2.3.4	<i>Zum Status geometrischer Objekte im Menon</i> . . . . .	70
2.3.5	<i>Die Gegebenen – δεδομενα</i> . . . . .	71
2.3.6	<i>Die hypothesis als begriffliche Objektbestimmung</i> . . . . .	74
2.4	Exkurs: Modernes Gegebensein und der Ursprung der Mathematik . . . . .	76
2.4.1	«Indiscernibles» . . . . .	76
2.4.2	<i>Der Beginn der durchdachten Mathematik</i> . . . . .	77
2.5	Weitere Analogieebenen . . . . .	78
2.5.1	<i>Taktik und Geometrie</i> . . . . .	78
2.5.2	<i>Fläche und Meinung</i> . . . . .	82
2.5.3	<i>Die Mitte finden</i> . . . . .	84
2.5.4	<i>Ausblick</i> . . . . .	85
3	Die Dinge gerade biegen – Parmenides und die Definition der geraden Linie . . . . .	87
3.1	Einleitung und Übersicht . . . . .	87
3.2	«Rund» und «gerade» in Parmenides 137de . . . . .	89
3.2.1	<i>Schwierigkeiten der Standardinterpretation</i> . . . . .	89
3.2.2	<i>Eine neue Interpretation von «rund» und «gerade»</i> . . . . .	91
3.2.2.1	Rund und eckig . . . . .	91
3.2.2.2	Gleichmäßigkeit . . . . .	94
3.2.3	<i>Die gerade Linie definieren</i> . . . . .	95
3.2.4	<i>Zur Wortbedeutung</i> . . . . .	97
3.3	Aristoteles: Topik VI 11 . . . . .	98
3.4	Euklids Definition der geraden Linie in den «Elementen» . . . . .	101
3.5	Der unperfekte Kreis im Siebten Brief . . . . .	103
3.5.1	<i>Der unperfekte Kreis</i> . . . . .	103
3.5.2	<i>Die Ungenauigkeit der sichtbaren Welt</i> . . . . .	104
3.5.3	<i>Siebter Brief 343a nach Parmenides 137de</i> . . . . .	105
4	Probleme mit den natürlichen Zahlen: Vollständige Induktion und Nichtstandard-Modelle . . . . .	107
4.1	Einleitung . . . . .	107
4.2	Probleme mit den natürlichen Zahlen . . . . .	108
4.2.1	<i>Die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen</i> . . . . .	108
4.2.2	<i>Aus Sicht der formalen Logik: Die Peano-Arithmetik</i> . . . . .	109
4.2.2.1	Der Aufbau der formalen Logik erster Stufe . . . . .	109
4.2.2.2	Die Arithmetik in einer formalen Logik erster Stufe . . . . .	110
4.2.3	<i>Skolems Paradox</i> . . . . .	114
4.2.4	<i>Prädikatenlogik zweiter Stufe</i> . . . . .	115
4.2.5	<i>Tennenbaums Theorem</i> . . . . .	116
4.2.6	<i>Formale Unbeschreibbarkeit und selbsterweiternde Imperative</i> . . . . .	117
4.2.7	<i>Die Zahlen in der intellektuellen Anschauung</i> . . . . .	118

4.3	Über die Rechenoperationen zu den natürlichen Zahlen . . . . .	119
4.4	Die natürlichen Zahlen bei Platon . . . . .	121
4.4.1	<i>Die Zahl in der frühgriechischen Mathematik</i> . . . . .	121
4.4.2	<i>Unendlichkeit in «Parmenides» 142b–143a</i> . . . . .	125
4.4.3	<i>Multiplikation in «Parmenides» 143a–144a</i> . . . . .	129
4.4.4	<i>Vollständige Induktion in «Parmenides» 149a–c</i> . . . . .	133
5	Formalisierbarkeit – die moderne Aussprechbarkeit . . . . .	136
5.1	Formalisierung und ihre Grenzen . . . . .	136
5.1.1	<i>Logik und Logistik</i> . . . . .	136
5.1.2	<i>Formalisierung</i> . . . . .	138
5.1.3	<i>Nicht-Formalisierbares</i> . . . . .	142
5.1.4	<i>Zur Präzisierung durch Formalisierung</i> . . . . .	144
5.2	Reine Strukturen ohne Weltbezug: Ein Beispiel . . . . .	145
5.3	Geometrie und formale Logik . . . . .	149
5.4	Hegel und die Begründung der logischen Bestimmungen . . . . .	151
5.4.1	<i>Hegels Logik</i> . . . . .	152
5.4.2	<i>Hegel &lt;formalized&gt;</i> . . . . .	153
5.4.3	<i>Formale versus intuitive Logik</i> . . . . .	156
5.5	Zur Formalisierung von Finslers Mengenlehre . . . . .	157
5.5.1	<i>Einbettung und Rechtfertigung</i> . . . . .	157
5.5.2	<i>Die Axiome</i> . . . . .	158
5.5.3	<i>Der Sinn der Axiome</i> . . . . .	160
5.5.4	<i>Zur Formalisierung der Axiome</i> . . . . .	162
5.5.5	<i>Vorläufige Ergebnisse</i> . . . . .	164
5.5.6	<i>Nächster Versuch</i> . . . . .	165
5.5.7	<i>Auf dem Weg zu einer Theorie reiner Strukturen</i> . . . . .	167
5.5.8	<i>Abschließendes zur Finsler-Mengenlehre</i> . . . . .	168
5.6	Zur Anwendung formaler Methoden auf platonische Dialoge . . . . .	169
5.6.1	<i>Ratio und Religion</i> . . . . .	169
5.6.2	<i>Formalisierung des «Parmenides»</i> . . . . .	171
5.7	Jenseits des Formalen – Eidetische Variation . . . . .	173
6	Zur Existenz mathematischer Gegenstände . . . . .	181
6.1	Mathematischer Platonismus und Platon . . . . .	181
6.2	Reden über die Existenz . . . . .	184
6.3	Existenzkriterien . . . . .	186
6.3.1	<i>Einleitende Bemerkungen und Überblick</i> . . . . .	186
6.3.2	<i>Die Kluft zwischen Innenwelt und Gegenstand</i> . . . . .	188
6.3.3	<i>Beste Theorie</i> . . . . .	190
6.3.4	<i>Instrumentelle Beobachtung</i> . . . . .	191
6.3.5	<i>Kontinuität und Kohärenz</i> . . . . .	194
6.3.6	<i>Kausalität in der Existenzerkenntnis</i> . . . . .	195
6.3.7	<i>Man selbst ist involviert</i> . . . . .	197
6.4	Existieren sie nun oder nicht? . . . . .	199
7	Platons Platonismus . . . . .	201
7.1	Einleitung . . . . .	201
7.2	Der Aufstieg und die moderne mathematische Methode . . . . .	202

7.2.1	<i>Das platonische Curriculum</i> . . . . .	202
7.2.2	<i>Das Kreisbeispiel: Struktur und Modell</i> . . . . .	203
7.2.3	<i>Hilberts Axiomatik</i> . . . . .	204
7.2.3.1	Implizite Definition . . . . .	204
7.2.3.2	Hilberts Axiomatisierung zwischen Vorstellung und Begriff . . . . .	206
7.3	Gibt es Ideen der Menge und Zahl? . . . . .	207
7.3.1	<i>Zu einer Idee der Zahl</i> . . . . .	208
7.3.2	<i>Zur Idee der Menge</i> . . . . .	210
7.4	Zur Grundlegung der Mengenlehre . . . . .	211
7.4.1	<i>Mengentheorien</i> . . . . .	213
7.4.1.1	Exkurs: Zermelo und die naive Komprehension . . . . .	213
7.4.1.2	ZFC . . . . .	217
7.4.1.3	Varianten von ZFC mit Klassen . . . . .	221
7.4.1.4	Reflektionsaxiomenschemata . . . . .	224
7.4.1.5	Typentheorie . . . . .	224
7.4.1.6	NF . . . . .	225
7.4.1.7	NFU . . . . .	226
7.4.1.8	Topologische Mengentheorien . . . . .	228
7.4.1.9	Doppelmengen . . . . .	229
7.4.2	<i>Mengenintuitionen</i> . . . . .	229
7.4.2.1	⟨Limitation of size⟩ . . . . .	229
7.4.2.2	Iterative Mengenbegriff . . . . .	230
7.4.2.3	AK und zirkelfreie Mengen . . . . .	231
7.4.2.4	Reflektionsprinzip . . . . .	232
7.4.2.5	Syntaktischer Selbstbezug . . . . .	233
7.4.2.6	Zusammenfassung und Vergleich . . . . .	233
7.4.3	<i>Resultat</i> . . . . .	234

# Vorwort

Diese Arbeit wurde 2010 als Dissertation an der Philosophischen Fakultät der Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg eingereicht und jetzt unter dem Druck äußerer Umstände zu einem zweiten Ende gebracht – im Hinblick auf eine dritte und letzte Vervollständigung, die aus Umfang und Methode der Arbeit resultierend wünschenswert erscheint. Die Methode war, vage aber wahr erscheinende Interpretationen im Zusammenspiel von Text und systematischer Vertiefung zu präzisieren und korrigieren. Sie ist auch deswegen noch mehr ein inspirierter Forschungsbeitrag, der die wissenschaftliche Diskussion befeuern möchte, und weniger ein fehlerloses Kompendium zertifizierter Erkenntnisse, die allgemein anerkannt sind. Ihr Motto ist (nach Brotbeck 2011, S. 72): «Ein gutes Buch pflückt nicht selbst die Früchte, die es reifen lässt.» Eine erweiterte und insgesamt kohärentere Fassung findet sich vermutlich im Augenblick dieses Lesens unter [www.platon.gfschneider.de](http://www.platon.gfschneider.de), wie auch zu hoffen ist, dass der Druck umgeleitet werden konnte, und der überarbeitete Text nunmehr als Buch vorliegt.

Tatsächlich sind alle im Verlauf der folgenden Seiten aufgestellten Thesen erst im Laufe meines Forschens zu PLATONS philosophischer Auffassung der Mathematik entstanden. Letztlich entspringen sie alle daraus, dass man die frühgriechische Mathematik wahrlich ernst nimmt: «The Greeks first spoke a language which modern mathematicians can understand: as Littlewood said to me once, they are not clever schoolboys or ‘scholarship candidates’, but ‘Fellows of another college’.» (Hardy 1940, S. 12)

Diese Arbeit benötigte zu ihrem Zustandekommen einzelner Menschen, denen ich von Herzen danke: Zum einen Herrn Prof. Dr. Andreas Kemmerling für die unvoreingenommene Aufnahme als Doktorand und die Möglichkeit in Heidelberg wissenschaftlich zu forschen. Zum anderen meinem familiären Umfeld, insbesondere meinen Eltern. Darüber hinaus danke ich den Teilnehmern des sogenannten MOn-tagsKolloquiums für ihre Hinweise und Anmerkungen, sowie den Herren Prof. Dr. A. Koch, Prof. Dr. K. Ambos-Spies und Dr. W. Lenski für ihr inhaltliches Interesse und die Bereitschaft die weiteren Gutachten zu erstellen. Die Idee für Kapitel 3 ist im Gespräch mit Daniel Roth gereift, und hätte er sich nicht überzeugen lassen, wäre es nicht zu dieser Ausarbeitung gekommen und vermutlich auch nicht zu anderen Teilen dieser Arbeit. Verena Mayer und Uwe Petersen danke ich für ihre Kommentare und Hinweise zu Abschnitt 5.7 bzw. zu Abschnitt 5.4.2. Das Land Baden-Württemberg ermöglichte diese Arbeit und Qualifikation durch ein dreijähriges Promotionsstipendium. Ich hoffe diese Arbeit ist wenn überhaupt dann Anlass für eine Fortführung dieser Forschungsförderung.



# Einleitung

Mit dieser Arbeit möchte ich das Interpretationsparadigma platonischer Mathematikkonzeption zu-  
rechtrücken. Man findet nur, was man sucht. Und die Vorstellungen, mit denen man den Dialogen  
begegnet, blicken den Leser aus den Seiten heraus wieder an. Diese natürlich einseitigen Merksprüche  
einer populären Hermeneutik gelten (fast) ausnahmslos für die Platonforschung zu seiner Philosophie  
der Mathematik. Wer PLATONS Meinung zur Mathematik erfahren will, wird auch zu einer Meinung  
über die Mathematik gelangen, nur wird er sie nur durch philologische Indizien ‚festbinden‘ können,  
nicht durch Erkenntnis. Im Zweifelsfall wird es viele gleichwertige Meinungen geben, die nicht endgültig  
gegeneinander gewertet werden können.

Will man von PLATON etwas Essentielles wissen, muss man ihn also als Gesprächspartner ernst nehmen  
und ihn auch ehrlich mit inhaltlichen Fragen konfrontieren. Praktisch erscheint es mir unabdingbar, aus  
einem Erkenntnisinteresse an für einen selbst echten Fragen zur Mathematikphilosophie – und das sind  
letztlich offene Fragen der aktuellen Forschung – eine Brücke zu schlagen. Der Anspruch muss sein, zu  
diesen Fragen etwas aus den Dialogen zu erfahren, denn nur, wenn man tatsächlich wissen will, was  
z. B. die (natürlichen) Zahlen wirklich sind, wird man in Erfahrung bringen, was PLATON dazu dachte.  
Selbstverständlich darf man die Kluft nicht übersehen, die unsere von der frühgriechischen Mathematik  
und Metamathematik trennt. Auch hier gilt: Wenn man mit seiner eigenen Schulgeometrie an die Sache  
herangeht, wird einem in den Dialogen auch nicht mehr als diese begegnen.<sup>1</sup> Das ist die Lehre, die man  
mit Blick auf die bisherige Forschungstradition ziehen kann.

Selbst jemandem kenntnisreichen wie PROKLOS (5. Jh. n. Chr.), dessen überlieferter Kommentar zum er-  
sten Buch der *Elemente* EUKLIDS die bedeutendste und früheste Quelle in Buchlänge zur antiken Phi-  
losophie der Mathematik ist, darf man aus den gleichen Gründen nicht trauen. Er ‚beweist‘ relativ  
einfach das (nicht beweisbare) Parallelenpostulat, dessen Beweisbarkeit die Mathematiker bis ins 19.  
Jh. beschäftigte, und das EUKLID zu den Axiomen zählte. Allein dieser Umstand sollte misstrauisch  
machen, was man von ihm über PLATONS Philosophie der Mathematik lernen kann und inwiefern auch  
er ein Spätgeborener ist. Zu seiner Zeit gab es kaum mehr Forschung und Forschungsfragen in der  
Mathematik und vermutlich auch in der Philosophie der Mathematik. Er hatte die ganze Tradition in  
seinen Büchern zur Verfügung, konnte sie synthetisieren und die Türe schließen.

Zu PLATONS Zeit dagegen war die platonische Akademie das Zentrum antiker Mathematik und es gab  
kaum einen bedeutenden Mathematiker im griechischen Kulturraum, der nicht irgendwie in Kontakt  
stand mit PLATON oder der Akademie. PLATON forschte in der Umgebung der Avantgarde damaliger  
Mathematiker. Es scheint also durchaus plausibel, dass er die damals aktuellen metamathematische  
Fragen der Spitzenforschung thematisierte, wenn er über mathematische Sachverhalte philosophierte.

---

Der Anspruch ist groß und das Ergebnis klein. Genügend Substanz, um ohne weitere Vorarbeiten mit  
platonischem Impetus an aktuellen metamathematischen Problemen weiterzuforschen, ist vorhanden  
bezüglich der Axiomatisierung der Mengenlehre (Kapitel 7), der expliziten Bestimmung der geraden  
Linie (Kapitel 3)<sup>2</sup>, der Grundlegung der euklidischen Geometrie insgesamt (Abschnitte 1.3.7, 2.4, 3.4,

---

1 Ein frappierendes Beispiel dafür bieten die Interpretationsversuche von *Menon* 86d-87a; siehe Kapitel 2.

2 Wie sich später herausstellte, wurden im 20. Jh. bereits mit einem ähnlichen Ansatz unter anderen Bedingungen letztlich  
erfolglose Bestimmungsversuche durchgeführt; siehe Abschnitt 3.2.3.

5.2), der Grundlegung der Arithmetik (Kapitel 4), und der Frage nach der Existenz mathematischer Objekte (Kapitel 6). Umgekehrt hilft ein Ausgangspunkt in der modernen Mathematik, eine neue Perspektive auf den Goldenen Schnitt in der antiken Philosophie (Kapitel 1.4) und auf ein Detail bei der Konstitution der Zahlen durch PLATON zu eröffnen (Abschnitt 4.3). Zu den bedeutenderen Thesen, für die im Hinblick auf PLATONS Dialoge argumentiert wird, gehören die der Erweiterbarkeit des Liniengleichnisses durch den sogenannten zweiten Teil des Dialogs *Parmenides*, der platonischen Einflüsse auf EUKLIDS *Elemente*, und, dass in *Parmenides* 137de eine andere Begriffsunterscheidung gemeint ist, als bisher angenommen (Abschnitte 1.3.1, 1.3.7 und 3). Für eine bestimmte Deutung des letztlich gar nicht so strittigen geometrischen Beispiels in *Menon* 86d-87a werden ein paar neue Argumente angeführt und die lebensweltlichen und symbolischen Aspekte der erwähnten geometrischen Konstruktion aufgezeigt (Kapitel 2). Eine fruchtbare Verbindung zwischen aktuellen metamathematischen Problemen mit den natürlichen Zahlen und Überlegungen in den platonischen Dialogen wurde angestrebt und scheint inzwischen nicht hoffnungslos zu sein (Kapitel 4). Diese Bemühungen aber lenkten den Blick auf das Hindernis der modernen formalen Logik, in der die moderne Mathematik gefasst und in Bezug auf die metamathematische Probleme diskutiert werden (Kapitel 5). Einige Vorarbeiten für eine systematische Analyse der formalen Logik werden geleistet und die Rolle der formalen Logik für die Mathematik an zwei Beispielen ausgekundschaftet (Abschnitte 5.2 und 5.5). Als Vorletztes wird der zentrale Begriff des (ontologischen) mathematischen Platonismus aufgegriffen – die Existenz –, und versucht ein Beitrag zu geben, der zum einen die sehr theoretische Diskussion wieder mehr an die Erfahrung bindet, und zum anderen – metaphorisch gesprochen – im Sinne PLATONS sein könnte (Kapitel 6). Ein die meisten Beiträge durchziehendes Thema ist die platonische Vorstellung eines Aufstiegs über die Mathematik zur Philosophie. Am Ende wird gezeigt, dass in der modernen Mathematik der Aufstieg, wie PLATON ihn sich vermutlich vorgestellt hat, nicht möglich ist (Abschnitt 7.2). Die einzelnen Kapitel stehen für sich und können weitgehend unabhängig voneinander gelesen werden.

In den Beiträgen soll verschiedenen Möglichkeiten nachgegangen werden, wie moderne Mathematik, Mathematikgeschichte, systematische und historische Philosophie fruchtbar zusammenwirken können. Nicht intendiert war ein bloßes Nebeneinanderstellen PLATONS und neuerer Überlegungen, wie wenn man z. B. die in der *Politeia* geschilderte Dialektik des Aufstiegs, nämlich die Voraussetzungen immer weiter zu hintergehen und in einfachere aufzulösen, bis man zum Voraussetzungslosen gelangt, vergleicht mit dem Verhältnis des sogenannten Gödelsatzes zu einer in einer Prädikatenlogik formalisierten Peano-Arithmetik (PA).<sup>3</sup> Der Gödelsatz kann als richtig erkannt werden, obwohl er in PA nicht beweisbar ist, und damit insgesamt das «Hypothesensystem»<sup>4</sup> PA hintergangen. Die Frage, die bleibt, ist, ob man durch diesen Vergleich nun PLATON oder den Gödelsatz oder keinen von beiden besser verstanden hat.<sup>5</sup>

Im Kapitel 1 finden sich drei kürzere Abschnitte, die die gewissenhafte und für eine systematische Analyse notwendige Arbeit an einzelnen mathematischen Textstellen und Dialogkontexten veranschaulichen. Die Kapitel 2, 3 und 4 sind direkt aus der Untersuchung kürzerer Textabschnitte hervorgegangen. Die Auswahl der Themen und Kapitel erfolgte ansonsten danach, wieviel sie zur aktuellen Forschung zu PLATON und der Philosophie der Mathematik Neues beitragen.

Zitarnachweise und Literaturverweise werden durch Name und Jahr gegeben. Bei PLATON wird nur nach Dialog und Stephanus-Paginierung, beides kursiv gesetzt, verwiesen (z. B. *Nomoi* 895c), auf EUKLIDS *Elemente* durch Angabe von Buch und Satznummer (z. B. wird auf Satz 28 in Buch VI verwiesen

3 Wie Nortmann 2006, S. 26ff., es macht.

4 Nortmann 2006, S. 28.

5 Abgesehen davon, dass das Beispiel mit dem Gödelsatz nur dann funktioniert, wenn man PLATONS Angaben in *Politeia* 511b tatsächlich «eher metaphorisch» (Nortmann 2006, S. 26) liest.

mittels (VI 28) oder auf Definition 2 im ersten Buch durch (I D2)). Die zitierte Übersetzung der Dialoge ist, wenn nicht anders angegeben, Schleiermacher nach Platon 1977, zuweilen korrigiert. Die *Elemente* werden zitiert nach Thaeer 1997. Proclus 1970 wird mit der Seitenangabe von Friedlein zitiert.

Klassische historische Personen werden in Kapitälchen geschrieben, so dass der historische Thessalier MENON sich in der geschriebenen Sprache zumindest graphisch vom Dialog *Menon* und dem darin auftretenden fiktiven Menon unterscheidet. Die einschlägig mathematischen Zusätze, die den Äußerungen im Haupttext einen präzisen Sinn geben, sind etwas kleiner gedruckt.

Die natürlichen Zahlen werden in der aktuellen Mathematik manchmal mit, manchmal ohne die 0 definiert, wenn der Kontext nichts anderes verlangt, ist die 0 miteingeschlossen. Die Menge der natürlichen Zahlen ist  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ .  $\mathbb{Q}$  ist die Menge der rationalen Zahlen, das sind die ganzen Zahlen und die Brüche ganzer Zahlen.

Mit der Entwicklung einer mathematischen Theorie der Unendlichkeiten wurde auch der Zahlbegriff bzw. der Begriff der diskreten Größe verfeinert. Für eine unendliche Menge ist es einerseits unerheblich, ob sie ein einzelnes Element mehr oder weniger besitzt, sie bleibt in beiden Fällen unendlich, andererseits hat sie ein Element mehr, wenn ein Element hinzugezählt wurde. Der kardinale und ordinale Aspekt der Zahl, die bei endlichen Zahlen noch zusammentreffen, treten im Unendlichen auseinander. Es ergeben sich Ordinalzahlen, die sich kardinal nicht unterscheiden lassen.  $\omega$  steht für die kleinste unendliche Ordinalzahl,  $\aleph_0$  für die kleinste unendliche Kardinalzahl.

$$\begin{array}{r}
 \vdots \\
 \omega_1 + 1 \\
 \aleph_1 \quad \omega_1 \\
 \\
 \vdots \\
 \omega^\omega \\
 \vdots \\
 \omega + 1 \\
 \aleph_0 \quad \omega \\
 \\
 \vdots \\
 3 \\
 2 \\
 1 \\
 0
 \end{array}$$

Welche Größe zwei in sich strukturlose Mengen haben, kann nicht mehr über ein Abzählen ihrer Elemente erreicht werden, sondern wird durch den mathematischen Begriff der *Mächtigkeit* bestimmt: Zwei Mengen sind von gleicher Mächtigkeit, wenn ihre Elemente sich gegenseitig *eindeutig* und *vollständig* zuordnen lassen. Eine Menge ist *mächtiger* als eine andere Menge, wenn die Mengen nicht gleichmächtig sind, die zweite Menge aber gleichmächtig mit einer Teilmenge der ersten. Damit kann für unendliche Mengen bewiesen werden, dass sie gleichmächtig zu einer echten Teilmenge von sich sind. Z.B. sind die natürlichen Zahlen gleichmächtig zu den geraden natürlichen Zahlen wegen der Zuordnung  $x \rightarrow 2x$ :

$$\begin{aligned} \mathbb{N} & \dot{=} 2 \cdot \mathbb{N} \\ 4 & \rightarrow 8 \\ 3 & \rightarrow 6 \\ 2 & \rightarrow 4 \\ 1 & \rightarrow 2 \\ 0 & \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die Ordinalzahlen  $\omega$ ,  $\omega + 1$  und  $\omega^\omega$ , wenn man die Mächtigkeit durch die beiden geraden Striche  $|\cdot|$  ausdrückt:  $|\omega| = |\omega + 1| = |\omega^\omega|$ . Für die mathematische Behandlung der Ordinalzahlen wurde in der *Wohlfundiertheit* der Begriff der Ordnung, der durch das Zählen gewonnen und vorausgesetzt wird, präzisiert und verallgemeinert.

Zitate im Text werden mit „«“ und „»“ umrahmt, etwas laxer und nicht buchstabengetreu zitierte Ausdrücke werden mit einfach „<“ und „>“ gekennzeichnet. Die Anführungszeichen dagegen führen das zwischen ihnen stehende an, werden aber in unmissverständlichen Fällen nicht unbedingt verwendet: Das Wort Elfe hat vier Buchstaben, aber „das Wort Elfe“ besteht aus elf Buchstaben. Wieder etwas laxer werden die einfachen Anführungszeichen verwendet, die zuweilen auf die gleichzeitige Verwendung und die Anführung des Ausdrucks hinweisen, zuweilen auf den metaphorischen oder zumindest problematischen Gebrauch des Ausdrucks.

Die benutzten logischen Zeichen, die weitgehend denen von Blau 2008, S.91ff., entsprechen: der Allquantor  $\wedge$  (andere gebräuchliche Schreibweise:  $\forall$ ), der Existenzquantor  $\vee$  (auch bekannt als  $\exists$ ),  $\forall_{!}$  ( $\exists!$ ) zu verstehen als ‚es existiert genau ein  $x \dots$ ‘.  $a \in b$  ist zu lesen als ‚ $a$  ist Element der Menge  $b$ ‘,  $\emptyset$  bezeichnet die leere Menge, d.h. die Menge mit der Eigenschaft  $\wedge x \ x \notin \emptyset$ .  $x \subset y$  ist zu lesen als ‚die Menge  $x$  ist Teilmenge von  $y$ ‘ und ist die gebräuchliche Abkürzung für  $\wedge z (z \in x \rightarrow z \in y)$ .  $\{$  und  $\}$  sind die sogenannten Mengenklammern, mit denen sich direkt durch Angabe der Elemente (wie  $\{a, b\}$ , die Menge, die genau die Elemente  $a$  und  $b$  hat) oder durch eine Eigenschaft (wie  $\{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$ , die Menge, die genau die Objekte enthält, die sowohl Element von  $a$  wie von  $b$  sind) eine Menge darstellen lässt.  $\mathfrak{Pot}(x)$  bezeichnet die sogenannte Potenzmenge von  $x$ , das ist die Menge aller Teilmengen von  $x$ :  $\mathfrak{Pot}(x) = \{y \mid y \subset x\}$ .

Die Hervorhebungen in Zitaten sind – soweit nicht anders vermerkt – gemäß dem Original. Übersetzte Zitate aus den Werken PLATONS und EUKLIDS sind hin und wieder leicht verändert und verbessert worden.

# Zur Metamathematik in Platons Dialogen

## 1.1 Mathemathikhistorische Vorbemerkungen

Eine gewisse Schwierigkeit bei der Untersuchung der Mathematik in den platonischen Dialogen ergibt sich daraus, dass die Wissenschaft der Geschichte der frühgriechischen Mathematik, d.h. der Mathematik der Griechen bis einschließlich der *Elemente* des EUKLID, erst um 1975 seriös wurde und sich von wilden Spekulationen und ahistorischen Behauptungen verabschiedete.<sup>1</sup> So wird die verbreitete Überzeugung, die Entdeckung der Inkommensurabilität habe eine Grundlagenkrise bei den Pythagoreern, die alles aus den natürlichen Zahlen erklärten, heraufgebracht, die erst durch die allgemeine Proportionstheorie des EUDOXOS in Buch V der *Elemente* geometrisch überwunden wurde,<sup>2</sup> durch keine frühen Quellen bestätigt und von Mathematikhistorikern nicht mehr geteilt.<sup>3</sup>

Entsprechend fällt der Anteil von wahren Aussagen noch stärker ab, wenn in der Philosophie und Philosophiegeschichte über mathemathikhistorische Ansichten und PLATONS Metamathematik geurteilt wird. So zog z. B. PLATON angeblich daraus, dass seine zeitgenössische Mathematik sich in dem Umstand befand, ihre eigenen Begriffe nicht «grundlegend definiert zu haben», die Konsequenzen, und zwar als erste:

Er kritisiert eine Mathematik, die Wert auf den praktischen Nutzen legt. Bereits die Verwendung mechanischer Hilfsmittel, wie sie Archytas und Eudoxos zum Zwecke der Würfelverdopplung konstruiert und verwendet hatten, lehnt er strikt ab.<sup>4</sup>

Der erste Satz stimmt so nicht, denn Zahlentheorie und Geometrie werden für die Ausbildung der Mitglieder der Kriegerkaste auch deswegen als notwendig angesehen, weil ein guter Krieger notwendigerweise über ein Wissen in ihnen verfügen muss.<sup>5</sup> EUDOXOS Lösungsansatz ist nur fehlerhaft überliefert, der seines Lehrers ARCHYTAS aber in voller Länge,<sup>6</sup> und in ihm wird kein mechanisches Hilfsmittel verwendet, sondern die Bewegung von ebenen Figuren benutzt, um dreidimensionale Objekte zu ‚konstruieren‘. Gegen eine Bewegungsgeometrie und eine begrifflich orientierte Erweiterung der Konstruktionsmittel über Zirkel und Lineal hinaus hatte PLATON allerdings keine Einwände<sup>7</sup> – EUKLID

---

1 So zumindest Netz 1999, S. xi.

2 Für die Meinung, dass die Entdeckung der Irrationalität eine mathematische Krise auslöste bei den Pythagoreern, siehe z. B. van der Schoot 2005a, S. 73, Krämer 1959, S. 257, oder vor allem Hasse und Scholz 1928. Die Geschichte der Entdeckung wird bereits in der Antike in verschiedenen Versionen erzählt. Der Pythagoreer HIPPOSOS VON METAPONT oder jemand anders aus dem Umkreis der Pythagoreer entdeckte an einem geometrischen Objekt wie dem Dodekaeder oder dem Quadrat die Existenz inkommensurabler Größen und plauderte es aus. Diese Entdeckung habe aber dem Grundsatz der Pythagoreer widersprochen, dass alles Zahl sei. Fundamentalistische Dogmatiker aus ihrem Kreis versenkten daraufhin HIPPOSOS im Meer. Vgl. Fowler 1999, S. 362, für die Überlieferung.

3 Siehe Fowler 1999, S. 256ff., und Unguru 2002; vgl. Netz 2005, S. 97, Zhmud 1997, S. 175. Etwas vorsichtiger Mueller 1997, S. 303.

4 Thiel 2006, S. 47. Ähnlich pointiert Radke 2003, S. 706, *Politeia 527ab* als Kritik am «praktischen Nutzen», obwohl hier vielmehr die für gewöhnlich gebrauchten geometrischen Tätigkeitsausdrücke des Quadrierens und anderer lächerlich gemacht werden.

5 Siehe die Referenzstellen in Fußnote 90 auf S. 79.

6 Vgl. Heath 1921a, S. 246/249.

7 Siehe Steele 1936, S. 361. Die Bewegung in den Postulaten und in der Definition der Kugel (XI 14) widerspricht damit Meinungen wie die von Bedürftig und Murawski 2010, S. 38: «Für Euklid ist Geometrie statisch. ... Eine Gerade etwa, die durch die Bewegung eines Punktes entsteht, ist bei Euklid nicht denkbar.»

gebraucht sie ähnlich, z. B. (XI 14) –, vielmehr war sein stereogeometrischer Ansatz nach *Politeia* 528d seiner Zeit sogar voraus.<sup>8</sup>

Landry 2012 baut ihre Interpretation der Verdopplung des Quadrats (*Menon* 82b-84d) und der *hypothesis*-Methode darauf auf, dass die Länge einer Linie eine Zahl ist und übersieht dabei, dass im Text die Längenangabe stets mit einem Maß erfolgt. So wird die Länge des Ausgangsquadrats als «zwei Fuß» (*Menon* 82c) angegeben. Was es überhaupt heißen soll, dass die Länge eine Zahl ist ohne Bezug auf ein Maß, bleibt unklar und so auch die Behauptung, dass die Seite eines Quadrats mit einem Flächeninhalt von acht Fuß eine Seitenlinie der Länge der Zahl  $2\sqrt{2}$  hat.<sup>9</sup> Die Irrationalität ist allerdings im antiken Verständnis eine relative Eigenschaft von Größen, d.h. sie ist eine Relation zweier geometrischer Größen zueinander, nämlich genau die, kein gemeinsames Maß zu haben. Insofern ist die Länge der Diagonale eines Quadrats mit keinem Maß einer Quadratseite angebbbar, aber deswegen ist diese Linie und ihre Länge nicht unerkannt, denn genauso ist die Seitenlänge mit keinem Maß der Diagonale zu messen. Deswegen ist die Behauptung, Sokrates und Menon würden in *Menon* 82b-84d die Seitenlänge kennen, die Länge der Diagonale aber nicht, nicht korrekt.<sup>10</sup>

Diese Bemerkungen sollen keine Kritik an einer einzelnen Arbeit sein, sondern nur auf die Schwierigkeit im Umgang mit historischen Arbeiten über die frühgriechische Mathematik hinweisen, deren Bestand unübersichtlich ist und für die es keine zusammenfassende Einführung auf dem Stand der Zeit gibt.<sup>11</sup>

Was PLATON von dem nur anderweitig überlieferten mathematischen Wissen *wann* bekannt gewesen ist, kann im einzelnen mit ausreichender Gewissheit nicht mehr festgestellt werden. Es wird im folgenden stets davon ausgegangen, dass er *in etwa* mit dem Inhalt der *Elemente* EUKLIDS bekannt war. Denn zum einen waren die *Elemente* später ein einführendes Buch für ‚Erstsemester‘, dessen einzelne Themen *alle* irgendwo in den Dialogen PLATONS zumindest angerissen wurden, wie auch zentrale Bücher Mitgliedern der Akademie, nämlich EUDOXOS und THEAITETOS zugeschrieben werden. Letzteres würde dafür sprechen, dass mit den Fortschritten in der mathematischen Forschung an der Akademie auch PLATONS Wissen über Teile der späteren *Elemente* zunahm. Dabei ist jedoch zum anderen zu beachten, dass in der Mathematik i.a. mehr richtig vermutet wird, als man beweisen kann. So war den Mathematikern im vierten Jh. v. Chr. vermutlich bewusst, dass man die Würfelverdopplung nicht mit Zirkel und Lineal lösen kann, auch wenn sie das nicht unbedingt geometrisch beweisen konnten. So wird sich PLATON über mehr bewusst gewesen sein, als er selbst oder andere zunächst haben beweisen können.

Die allgemeine Quellenlage zur frühgriechischen Mathematik ist sehr dünn, das älteste mathematische Fragment dieser Länge ist der Abschnitt 82b-84d aus PLATONS *Menon*. In auszugsweisen Wiedergaben oder Referaten ist u. a. die Möndchenquadratur des HIPPOKRATES VON CHIOS (5. Jh. v. Chr.) überliefert, der auch das Problem der Würfelverdopplung auf das Finden zweier mittlerer Proportionalen reduziert hat, oder auch wie ARCHYTAS, ein befreundeter Mathematiker PLATONS, die Würfelverdopplung durch eine räumliche Konstruktion löste. Die Mathematikhistorie des ARISTOTELES Schüler EUDEMOS, die PROKLOS noch zur Verfügung stand, ist bis auf ein paar Zitate verloren.

Ein Kernproblem für jeden modernen Wissenschaftler, der auf Theorien antiker Metamathematik zugreifen möchte, ist das weitgehende Fehlen aktueller philosophischer Theorien über elementare Geo-

8 Ähnlich sind die weiteren ‚Konsequenzen‘ bei Thiel 2006 zu bewerten, der wie viele andere einigen Autoren über frühgriechische Mathematik (bei PLATON) zu stark vertraute, in diesem Fall Plutarch.

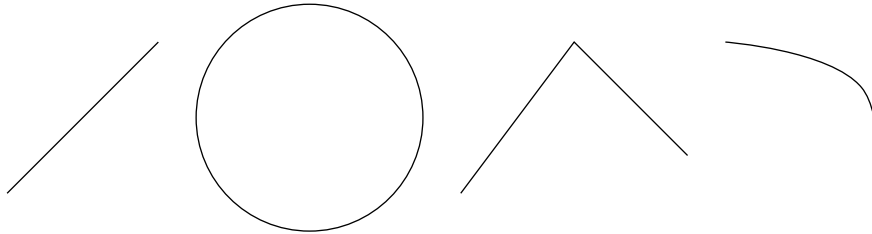
9 «... the length of the side is the irrational number  $2\sqrt{2}$ ...» (Landry 2012, S. 159).

10 Wie Landry 2012, z. B. S. 159,161 mehrfach behauptet.

11 Ähnliches gilt für den genauen Wert, den PLATON der Mathematik zuspricht. So heißt es z. B. «Platon dagegen hält Kenntnisse in der Geometrie gerade deswegen für so wichtig, weil die Geometrie das ‚abstrakte‘ Denken schult.» (Stekeler-Weithofer 1986, S. 86a75). Selbstverständlich würde PLATON nicht der Behauptung widersprechen, dass die Mathematik das Denken schult. Etwas anderes ist es aber, darin den alleinigen oder den wichtigsten Nutzen zu sehen. Das ist jedoch genau die Überzeugung mancher Sophisten, gegen die PLATON sich wendet; vgl. Burnyeat 2000.

metrie.<sup>12</sup> Denn auch in der geometrischen Praxis ist weder eine Vorform noch eine überlieferte Prägung mehr aufzuspüren, wie es zum Beispiel eine philosophisch induzierte Klassifikation geometrischer Objekte wäre. Schon bei recht einfachen Beispielen sind wir recht planlos, wie an den folgenden Fragen deutlich werden kann.

Man betrachte die vier einfachen Skizzen auf die folgenden Begriffsgegensätze hin, die für Strecken gelten, aber schon im Hinblick auf beliebig-dimensionale geometrische Objekte gedacht werden sollten.



Wie sind diese meist Linien in den Gegensatz, der hier nur unzureichend angedeutet wird in der deutschen Übersetzung, von gerade–krumm (εὐθύς – καμπύλος) einzuordnen? Die ersten beiden sind offensichtlich, aber bei der geknickten Linie wird es schwieriger: Ist sie krumm oder doch, weil aus geraden Stücken zusammengesetzt, mehr gerade als krumm? Und aufmerksamer geworden und nochmals zurückgeblickt entsteht die Frage: Ist der Kreis wirklich *krumm*, und nicht vielmehr ganz gleichmäßig gekrümmt, also nicht krumm (im Sinne von schief)? – Wie sind die Skizzen unter dem Gegensatz von rund–eckig zu gruppieren? ‚Rund‘ bedeutet hier stärker etwas wie ‚gleichmäßig‘, ‚eckig‘ etwas in die Richtung wie ‚aus-der-Reihe-treten‘. Ist die Strecke rund oder eckig? Eigentlich verleiht sie dem Winkel das Eckige, sie selbst ist aber irgendwie ganz homogen. – Wie steht es mit dem Paaren winkellos–winkelhaft?

Diese Fragen sind natürlich so überfallsmäßig gestellt, wie inhaltlich unangemessen. Man wird die Gegensätze nicht als kategorial gegensätzlich empfinden, nicht alle Objekte lassen sich unter ihnen aufteilen. Und man könnte versuchen durch Grenzbetrachtungen zum Beispiel den Winkel als Grenzfall von Krümmung zu begreifen.<sup>13</sup> Die wichtige Beobachtung dabei ist: Die Fragen nach einer Einteilung der geometrischen Objekte sind für sich nicht interessant, weil man nichts Problematisches erkannt hat, und man hat den angeführten (scheinbaren) Klassifikationen kaum eigene entgegenzusetzen. Ein Mathematiker würde die rein geometrischen Definitionen, zumindest der drei ersten Objekte, für trivial halten, und er würde sie grundsätzlich danach betrachten, wie er sie als algebraische Gleichung in einem Koordinatensystem darstellen kann (eine Gerade als  $y = a + xt$ , einen Kreis als  $(x - a)^2 + (y - a)^2 = b$ ). Seine eigene Forschung beschäftigt sich mit ganz anderen Objekten.

Aber nochmals Vorsicht! Sie sehen dort oben eine kreisförmige Linie? EUKLID hätte wohl eher eine geometrische *Figur* gesehen, eine *Kreisfläche*, die von einer geschlossenen Linie begrenzt wird!<sup>14</sup> Und zwar, so die vorläufige Behauptung, aus seiner mathematisch-philosophischen Gesinnung heraus. Ähnlich würde ein moderner Mathematiker die vier Linien vielleicht topologisch ordnen. Die Kreislinie ist als einzige geschlossen und trennt damit eine innere Fläche von einer äußeren ab.

Da in dieser Arbeit häufiger auf die *Elemente* eingegangen wird, seien sie kurz vorgestellt. Das berühmteste Buch der Weltgeschichte über Mathematik ist das Werk mit dem mehrdeutigen Titel *Elemente*

<sup>12</sup> Zu den Ausnahmen siehe Abschnitt 3.2.3.

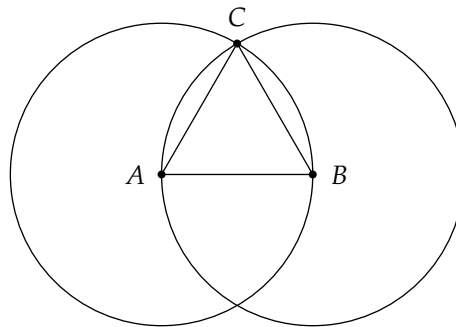
<sup>13</sup> Eine Gedankenfigur, die eher mit den mathematischen Grenzwertbetrachtungen im Umbruch zur Neuzeit geistig verwandt ist als mit antiken Auffassungen, da sie mittels quantitativen Betrachtungen geometrische Objektkategorien in Verbindung bringt und jeweils in ihrem Gegenteil auflöst.

<sup>14</sup> Siehe dazu Abschnitt 1.3.7. Denn Fehler begeht z. B. Finck 2007, S. 142.

des antiken Mathematikers EUKLID.<sup>15</sup> Es ist das erste vollständig überlieferte mathematische Werk des Abendlandes und der grundlegende Referenzpunkt für jede Forschung zur frühen griechischen Mathematik. Im Laufe der Interpretation der mathematischen Stellen der platonischen Dialoge wird sich das Verhältnis der *Elemente* zur (platonischen) Philosophie stärker herausdifferenzieren.

EUKLID's Werk gilt zum einen als Vorbild der deduktiven Wissenschaft überhaupt und wurde über zwei Jahrtausende meist als Ideal mancher Wissenschaften genommen. Tatsächlich ist die Entwicklung eines systematisch streng beweisenden, die Voraussetzungen aufzeichnenden, mathematischen Vorgehens global einmalig.<sup>16</sup> Dem gegenüber werden einige Fehler und Beweislücken in EUKLID's Beweisen bemängelt, die Definition teils als nicht-mathematisch angesehen und in Summe ein erheblicher Zweifel an dem Vorbildcharakter der *Elemente* gehegt; die *Elemente* hätten noch nicht den hohen Standard einer formalen Axiomatisierung und vollständigen Ableitbarkeit, sondern stellten eine Art fehlerhafte Vorform dar.

So benutzt EUKLID in der ersten (!) Proposition des ersten (!) Buches (von insgesamt dreizehn echten) eine Aussage, die in seinen Voraussetzungen nicht angegeben ist. Der Beweis dieser Proposition ist eine Art Konstruktionsverfahren, die Aufgabe ist, auf einer gegebenen geraden Linie ein gleichschenkliges Dreieck zu errichten. EUKLID löst die Aufgabe folgendermaßen: Sei diese Strecke  $AB$ . Dann ziehe man einen Kreis um  $A$  mit Radius  $AB$ , was nach Postulat 3 möglich ist, und ebenso um  $B$  mit Radius  $BA$ . Dann hat man mit einem Schnittpunkt  $C$  auch die Strecken  $CA$  und  $CB$  nach Postulat 1. Da  $A$  Kreismittelpunkt des errichteten Kreises, ist  $AC$  gleich groß wie  $AB$  nach Definition 15. Ähnlich für  $BC$  und  $BA$ . Nach Axiom 1 sind  $BC$ ,  $AC$  und  $AB$  gleich groß.  $ABC$  ist ein gleichseitiges Dreieck. q.e.d. Was *nicht* aus einer Voraussetzung abgeleitet wird, ist die Existenz eines Schnittpunktes der zwei Kreise (die Existenz von  $C$ ).<sup>17</sup>



Am Umgang mit diesem ‚Fehler‘ kann die allgemeine Haltung gegenüber den *Elementen* deutlich werden. Man kann z. B. versuchen eine schwer erkennbare Proto-Topologie aus den euklidischen Definitionen herauszuarbeiten, mit der sich der Schnittpunkt ableiten lässt, oder man versucht eine Logik der Konstruktion zu extrahieren, nach der das Beweisen ein Konstruieren mit Zirkel und Lineal ist, oder man versucht den deduktiven Aufbau der *Elemente* in allen Einzelheiten zu rekonstruieren und einen Überblick über alle ‚Lücken‘ und Besonderheiten zu gewinnen, oder man hält die *Elemente* einfach für ein unzureichendes Lehrstück aus der Frühzeit der beweisenden Mathematik.

<sup>15</sup> Der nicht mit dem älteren Philosophen und Zeitgenossen des SOKRATES und PLATON, EUKLID VON MEGARA, zu verwechseln ist. EUKLID selbst wird sehr ungenau auf etwa 300 v. Chr. datiert. Die Meinungen der Wissenschaftler über EUKLID gehen auseinander, eine Zitatensammlung der Meinungen von 247 Wissenschaftlern über die Bedeutung EUKLID's bietet Glavas 1994, der (auf S. 155) zu dem Ergebnis kommt: «...one can easily draw the conclusion that there exists a great diversity of opinion about Euclid. This difference of opinion is observed not only among the historians of mathematics and other authors but also among the historians themselves. A second characteristic is that most of the writers who pass a judgement for Euclid do not give explanations or reasons supporting it. The third is that one can detect contradictory statements about Euclid by one and the same author.»

<sup>16</sup> Vgl. aber Høyrup 2005.

<sup>17</sup> Eine Folgerung, die man durch eine zusätzliche Voraussetzung legalisieren kann (vgl. Heath 1956a, S. 242). Siehe dort auch für noch mehr zusätzlich Anzunehmendes.



## 1.2 Mathematische Beispiele in den platonischen Dialogen «Ion» und «Hippias»

Bevor in Abschnitt 1.3 ausführlicher auf die platonischen Grundlagen der Mathematik gemäß dem Li-niengleichnis eingegangen wird und sich die Kapitel 2 und 3 eingehenden Analysen zweier mathematischer Stellen in den platonischen Dialogen widmen, werden im folgenden zwei einfache Textstellen mit mathematischen Beispielen besprochen um die Verwendung der Mathematik in den platonischen Frühdialogen zu illustrieren.

### 1.2.1 «Ion»

In diesem kurzen Dialog weist Sokrates den Wissensanspruch des Rhapsoden Ion, den dieser durch die Kenntnis des Werk HOMERS zu beanspruchen scheint, zurück. Man könnte meinen, Sokrates missverstehe ihn, und Ion wolle nur behaupten, schön über HOMER reden und die verschiedenen Personen gut nachahmen zu können, bis er schließlich ernsthaft äußert, dass er durch das militär-taktische Wissen aus HOMER einen der besten Generäle Griechenlands abgeben würde. Sokrates versucht ihn davon zu überzeugen, dass er weder in der Dichtkunst, noch in einer anderen τέχνη, noch im Heerwesen bewandert ist, sondern seine Fähigkeit einer göttlichen Schickung und Inspiration verdanke. Dazu legt Sokrates unter anderem dem Ion zwei Behauptungen vor, zu deren Plausibilisierung er jeweils die Kunst (τέχνη) der Arithmetik anführt. Sokrates stellt sich beim gerade preisgekrönten Rhapsoden auf eine am folgerichtigen Denken und Argumentieren nicht geübte und mit Mathematik vermutlich weitestgehend nicht vertraute, aber von sich selbst überzeugte Person ein und hält seine (mathematischen) Beispiele sehr einfach.

Um Ion die Behauptung wahrscheinlich sein zu lassen, dass es derselbe Fachmann ist, der es erkennt, wenn jemand über denselben Gegenstand gut spricht, und der merkt, wenn ein anderer darüber schlecht spricht (*Ion 531e-532a*), führt Sokrates zwei Beispiele an. Das zweite handelt vom Arzt, der über die richtige Speisegabe bescheid weiß, das erste, dem man noch leichter zustimmen kann, vom Sprechen über Zahlen und dem in der Zahlentheorie Bewanderten.

Sokrates: Wenn nun, du edelster Freund Ion, unter vielen, die über Zahlen sprechen, einer am besten spricht, so wird doch einer den erkennen, der gut spricht?

Ion: Das denke ich.

Sokrates: Ob wohl derselbe, der auch die schlecht Sprechenden, oder ein anderer?

Ion: Derselbe gewiß.

Sokrates: Nicht wahr, der die Kunst der Zahlentheorie innehat, der ist es?

Ion: Ja.

*Ion 531de*

Die Konstruktion, in der der Zahlentheoretiker als Fachmann, der weiß, was richtig und falsch ist, auftritt, ahmt einen Wettkampf mit Wettkampfrichtern nach. Ion, der gerade in Epidauros einen Rhapsodenstreit zu Ehren des Asklepios gewonnen hat, versucht erst gar nicht, sich den suggestiven Fragen zu entziehen. Der Zahlentheoretiker wird somit von beiden als der Fachmann charakterisiert, der die Aussagen anderer über Zahlen bewerten und zwischen guten und schlechten unterscheiden kann.

Ion behauptet später, über alles von HOMER gut reden zu können, und Sokrates widerlegt ihn in Bezug auf fachspezifische Berichte HOMERS. Ob die technischen Ermahnungen Nestors an Antilochos, wie er den Pferdewagen im Wettkampf zu lenken habe, richtig sind, werde wohl ein Wagenlenker am besten beurteilen können (*Ion 537ac*). Um nun Ion als Rhapsoden eine angemessene Beurteilung fachspezifischer Gegenstände absprechen zu dürfen, wird Ions Eingeständnis benötigt, dass die Gegenstandsbe-reiche aller Fachgebiete disjunkt sind und ein Sachgebiet die Gegenstände auch nur eines Fachgebiets sei, was wiederum mit einem simplen Zahlenbeispiel illustriert wird.

Sokrates: Auch wohl wie ich urteilend, wenn nämlich das eine [Fachgebiet] das Wissen von diesen Gegenständen ist und das andere wieder von jenen, dieses dann ein anderes Fachgebiet nenne und jenes wieder ein anderes, so auch du?

Ion: Ja.

Sokrates: Denn wenn ein jedes das Wissen von denselben Gegenständen wäre, warum soll man sagen, das eine wäre dieses und das andere wieder jenes, wenn man doch durch beide nur einerlei weiß? So wie ich weiß, daß dies fünf Finger sind, und du dies ganz ebenso weißt wie ich; und wenn ich dich nun fragte, ob auch wohl durch dasselbe Fachgebiet, nämlich die Zahlentheorie, wir beide das nämliche wissen, ich und du, oder durch eine andere, du doch wohl sagen würdest, durch dasselbe.

Ion: Ja.

*Ion 537de*

Zählen ist eine einfache, aber immer noch eine Kulturtechnik, die man von anderen Menschen gelernt hat. Hier werden die Finger jedoch weder gezählt noch ihre Zahl auf einmal wahrgenommen, sondern nur das Wissen, dass es *fünf* Finger sind, thematisiert. Der grundsätzliche Erwerbsvorgang, ein Beweis durch Abzählen z. B., wird bereits vorausgesetzt, wie dass, da es sich um «dies» (die Hand da) handelt, dieser von Sokrates gemeinten Hand nichts (kein Finger) fehlt. Diese beweislose Darstellung einer Zahlerkenntnis an einem simplen und allgegenwärtigen Gegenstand nimmt Rücksicht auf die Erscheinung fachspezifischer Inhalte in den Werken HOMERS und ihrer Rezeption (durch Ion). Aufgrund ihres literarischen Kontextes tendiert man dazu, sie mit der eigenen Erfahrung und des spontanen Einleuchtens zu beurteilen, oder sie einfach unbedacht als Fachwissen zu akzeptieren. Die Ratschläge Nestors, sich in der Linkskehre leicht nach links zu beugen, dem rechten Pferd mehr Spiel im Zügel zu lassen und mit der Radnabe nicht den Stein an der Kurve zu berühren, leuchten (dem Laien) sofort ein, so wie er die fünf Finger sieht. Die Platzierung in einer Erzählung und der konkrete, autoritative Erzählkontext sind es hier, die eine fachliche Begründung suspendieren.<sup>18</sup>

Im Dialog *Ion* wird die Zahlentheorie an argumentativ wichtigen Punkten als Fachgebiet mit für Fachgebiete typischen Eigenschaften eingebracht und bietet den Einstieg in eine bzw. die Illustration einer dann recht spärlichen, dem Gesprächspartner des Sokrates angemessenen, Argumentation.

### 1.2.2 «Hippias I»

Es sind zwei platonische Dialoge unter HIPPIAS Namen überliefert, *Hippias Maior* ist der längere und der dem fiktiven Datum nach frühere, da dort auf eine Rede des Hippias angespielt wird (*Hippias I 286a*), die dem Gespräch im *Hippias Minor* gerade vorausliegt. Die Echtheit des *Hippias Major* ist umstritten, unter anderem ist er unter den Dialogen einzigartig für den beißenden Spott des Sokrates, der sich hier vielmehr auf die Person zu richten scheint, die dagegen insgesamt überaus höflich ist und sich nicht provozieren lässt.<sup>19</sup>

HIPPIAS VON ELIS war nun nicht nur einer der berühmtesten Redner seiner Zeit, sondern scheint sich auch mit den mathematischen Wissenschaften intensiver auseinandergesetzt zu haben. So legen es zumindest Bemerkungen des Sokrates im Dialog selbst nahe (*Hippias I 285cd*, *Hippias II 387e-386a*), wie auch eine Anmerkung des PROKLOS, HIPPIAS habe einen bedeutenden Versuch unternommen, die Dreiteilung des Winkels zu bewerkstelligen.<sup>20</sup> Entsprechend ist eins der zwei mathematischen Beispiele (nämlich *Hippias I 303bc*) ausgesuchter, auch wenn Mathematisches sonst im Dialog nicht auftritt.

Sokrates und Hippias befinden sich die meiste Zeit im Dialog dabei, zu bestimmen, was das Schöne an sich sei. Hier sind sie nach einigen anderen Vorschlägen dabei, die dritte Definition des Sokrates,

<sup>18</sup> Wie sich aus dem Kontext ergibt, ist mit der Zahlentheorie hier kein Zählen gemeint, wie Wedberg 1955, S.22, behauptet. Damit kann *Ion 537de* nicht als Beleg dafür angeführt werden, dass Zahlentheorie (ἀριθμητική) bei PLATON zuweilen ein Zählen oder Rechnen beinhalte.

<sup>19</sup> Für sprachliche und andere Gründe gegen die Echtheit siehe Frede 2004 und die Verweise dort.

<sup>20</sup> HIPPIAS hatte «einen beachtenswerten Lösungsversuch für das mit Zirkel und Lineal sonst nicht lösbare Problem der Dreiteilung des Winkels» Szabó 1994, S.41; vgl. Proclus 1970, S.272/356.

nämlich das Schöne sei das durch Gesicht und Gehör Angenehme, zu betrachten. Problematisch an dieser Erklärung ist, dass sie etwas nur kennzeichnet, insofern sie angibt, wo man es antreffen kann, aber nicht bestimmt, was es ist. Denn wäre das Angenehme einmal deswegen schön, weil es dem Menschen durch das Gehör zukommt, dann wäre gerade deswegen nichts Sichtbares schön – und umgekehrt, (*Hippias I 299d-300a*). Es müsste also etwas geben, was dem durch Gehör und Gesicht Angenehmen gemeinschaftlich ist und was es schön macht, beide gemeinsam und jedes einzeln. Von einer Bemerkung des Hippias, dass es ja nicht anders sein könne, aus, entspannt sich ein kleiner Exkurs, den Sokrates durch ein einfaches Beispiel für sich entscheidet:

Sokrates: ... von mir und dir zum Beispiel, daß jeder von uns beiden einer wäre, und daß dieses, was jeder von uns wäre, beide zusammen nicht wären; denn so wären wir nicht einer, sondern zwei, so einfältig waren wir. Nun aber sind wir von dir belehrt daß, wenn wir beide zwei sind, auch jeder von uns beiden zwei sein muß, und wiederum, wenn jeder von uns beiden einer ist, auch notwendig beide nur einer sind.

...

Sokrates: Und nicht wahr, wenn [jeder von uns] einer [ist], so ist auch jeder von uns ungerade? Oder hältst du eins nicht für ungerade?

Hippias: Ich gewiß.

Sokrates: Sind wir also auch beide zusammen ungerade, da wir doch zwei sind?

Hippias: Unmöglich, Sokrates.

Sokrates: Sondern gerade sind wir beide. Nicht wahr?

Hippias: Freilich.

Sokrates: Ist nun etwa, weil wir beide gerade sind, deshalb auch jeder von uns beiden gerade?

Hippias: Wohl nicht.

*Hippias I 301d-303b*

Und Sokrates variiert die Veränderung durch Zusammensetzung und Trennung weiter:

Oder hindert nichts, daß, sowie wenn zwei Dinge zusammen gerade [der Zahl nach] sind, doch jedes von ihnen sowohl ungerade sein kann als gerade, und wenn von zwei Dingen jedes einzeln unbestimmbar ist, doch beide zusammen sowohl bestimmbar sein können als auch ebenfalls unbestimmbar, und viel anderes dergleichen, was mir, wie ich dir sagte, vorschwebte. *Hippias I 303b*

ἢ οὐδὲν κωλύει, ὡς περ ἀρτίων ὄντων τινῶν ἀμφοτέρων τάχα μὲν ἐκάτερα περιττὰ εἶναι, τάχα δ' ἄρτια, καὶ αὖ ἀρρήτων ἐκατέρων ὄντων τάχα μὲν ῥητὰ τὰ συναμφότερα εἶναι, τάχα δ' ἄρρητα, καὶ ἄλλα μυρία τοιαῦτα, ἃ δὴ καὶ ἐγὼ ἔφην ἐμοὶ προφαίνεσθαι;

Das erste Beispiel exemplifiziert die Übertragung von dem Ganzen auf die (zwei) Teile. Ist die Summe zweier (natürlicher) Zahlen gerade, so können die beiden Summanden sowohl beide gerade wie ungerade sein. Z. B. ist 12 sowohl 5 und 7 zusammen wie auch 2 und 10. Umgekehrt können zwei «unaussprechliche» zusammen sowohl «unaussprechbar» wie «aussprechbar» sein. Ein Beispiel für ein modernes Äquivalent in den reellen Zahlen wäre  $\sqrt{2}$  und  $\sqrt{2}$ , beide einzeln irrational und zusammen ebenso, da  $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$ .  $\sqrt{2}$  und  $2 - \sqrt{2}$  dagegen sind beide einzeln irrational und zusammengezählt gleich 2. Im Text sind aber eigentlich (geometrische) Größen gemeint, wie zum Beispiel eine Linie geteilt im Goldenen Schnitt, die damit so geteilt wurde, dass ihre Teile zusammen zu jedem einzelnen inkommensurabel sind. Für den anderen Fall denke man z. B. an die Verdopplung der (stets zur Seite inkommensurablen) Diagonale eines Quadrats.

Die mathematischen Beispiele illustrieren, dass man aus den Eigenschaften einer Zusammensetzung nicht unbedingt genau auf die Eigenschaften der zwei Teile schließen kann, sowie umgekehrt von den Einzelnen auf die Zusammensetzung. Damit diese Beispiele funktionieren, darf keine strenge Einteilung in ‚quantitative‘, denen auch die mathematischen Eigenschaften angehören, und in ‚qualitative‘ Eigenschaften angenommen werden. Die Mathematik muss in der Tat auch selbst ‚qualitative‘ Eigenschaften und Relationen beinhalten, um – wie im nächsten Abschnitt behauptet – die Ideen direkt spiegeln zu können.

### 1.3 Das Liniengleichnis in der «Politeia»

Das Liniengleichnis (*Politeia* 509d-511e) ist zusammen mit den später anschließenden Erläuterungen der einzige Ort in den platonischen Dialogen, an dem die mathematische Denkweise, die vier mathematischen Wissenschaften und ihr Gegenstandsbereich in die Welt und die menschlichen Erkenntnisse eingeordnet sind. Hier ist von PLATON der Kern seiner metamathematischen Überlegungen und insbesondere eine Verhältnisbestimmung der Mathematik zur Philosophie und umgekehrt zu erwarten.

#### 1.3.1 Das Gleichnis

Das Liniengleichnis tritt in der *Politeia* als zweites der drei Gleichnisse auf. Sokrates stellt den Zuhörern hierbei drei Bilder vor, um mit ihrer Hilfe im Fortgang der Philosophenausbildung, nähere Auskunft über die Idee des Guten zu geben. Das Gute selbst begrifflich anzugehen sei jedoch «für unseren jetzigen Anlauf viel zu weit, auch nur bis zu dem zu kommen, was ich jetzt darüber denke.»<sup>21</sup> Die Idee des Guten wird mit der Sonne verglichen, das Sonnengleichnis. Das Liniengleichnis wird über das Sonnengleichnis eingeführt. Die Sonne und das Gute 'bescheinen' nämlich zwei unterschiedliche Gebiete.<sup>22</sup>

Merke also, sprach ich, wie wir sagen, daß dieses zwei sind und daß sie herrschen, das eine über das denkbare Geschlecht und Gebiet (*νοητοῦ γένους τε καὶ τόπου*), das andere über das sichtbare, damit du nicht, wenn ich sage über den Himmel, meinst, ich wolle in Worten spielen. Also diese beiden Arten hast du nun, das Denkbare und Sichtbare.

Die habe ich.

509d

Sokrates erklärt hier seine Bezeichnung des ‚Denkbaren‘ aus der Intention heraus, von seinem Gesprächspartner Glaukon ernst genommen zu werden. Unter anderen Umständen hätte er sich anders, wohl näher an der Sache ausgedrückt.

So nimm nun wie von einer in zwei geteilten Linie (*γραμμὴν δίχα τετμημένην*) die ungleichen (*ἀνισα*) Teile und teile wiederum jeden Teil nach demselben Verhältnis (*ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον*) das Geschlecht des Sichtbaren und das des Denkbaren: so gibt dir vermöge des Verhältnisses von Deutlichkeit und Unbestimmtheit (*σαφηνεία καὶ ἀσαφεία*) in dem Sichtbaren der eine Abschnitt Bilder (*εἰκόνες*). Ich nenne aber Bilder zuerst die Schatten, dann die Erscheinungen im Wasser und die sich auf allen dichten, glatten und glänzenden Flächen finden und alle dergleichen, wenn du es verstehst.

Ich verstehe es.

509d-510a

Eine Linie wird in einem (beliebigen) Verhältnis geteilt und die beiden Teile wiederum im gleichen Verhältnis, so dass (mindestens) dreimal das gleiche Verhältnis zwischen den Linienteilen besteht. Dieses Verhältnis wird nun als das zwischen Deutlichkeit (oder Klarheit) und Undeutlichkeit angegeben, sowie die Gegenstände des einen sichtbaren Seinsbereichs vorgestellt.

Auffallend ist, dass die Abbilder eigentlich nicht als Bilder verstanden werden, sondern – wie noch prominenter platziert im Höhlengleichnis – als Schatten. Diese enthalten im Vergleich mit Photographien viel weniger Informationen über ihre Ursprungsobjekte, so dass man diese nur in günstigen Situationen und eine Bekanntschaft mit ihnen vorausgesetzt aus ihren Schatten erraten kann. Dazu vermischen sich die Schatten verschiedener Dinge leicht, sind von der Stärke, Beschaffenheit und Ort der Lichtquelle abhängig, sowie von der Bewegung und Veränderung ihrer Dinge, und sind daher sehr unständig und flüchtig. Diese Explikation der Eigenschaften wird durch die Auswahl der weiteren Beispiele, der Spiegelungen im Wasser und der Reflexion auf Flächen bestätigt.

Dass hier keine Kunstwerke als Beispiele für Bilder auftreten mag einen weiteren Grund darin finden, dass diese eine stoffliche Grundlage haben, die Schatten und Spiegelungen nicht bieten. Sie erscheinen

<sup>21</sup> *Politeia* 506e; vgl. 509c.

<sup>22</sup> Das Liniengleichnis wird i. f. komplett zitiert, um den Lesern einen Überblick zu geben.

an zum Teil beliebigen, zum Teil bestimmten, Oberflächen, gehören aber nicht zu den Gegenständen. Man sieht sie, und insofern sind sie Teil der sichtbaren Welt, aber sie sind nicht Teil des körperlichen Seinsbereichs, von dem aus betrachtet sie nur optische Phänomene bzw. Täuschungen sind. Dass sie auch nach PLATON einen eigenen, abgegrenzten Seinsbereich haben, darauf deutet ihre Einführung *vor* der Vorstellung ihrer Originale hin.

Und als den andern Abschnitt setze das, dem diese gleichen, nämlich die Tiere bei uns und das gesamte Gewächsreich und alle Arten des künstlich Gearbeiteten.

Das setze ich, sagte er.

510a

Zunächst kann man bemerken, dass sowohl die Menschen nicht extra erwähnt werden, noch natürliche Elemente oder Stoffe in die Reihe der Beispiele aufgenommen wurden. Eine explizite Anführung der Menschen würde in der Ausdeutung des Gleichnisses zur Selbsterkenntnis des Menschen leiten, die nicht bei der Linie, sondern erst im Höhlengleichnis, das ja von der Bildung (*παιδεία*) handelt, von Bedeutung ist und dort auch in der Höhle thematisiert wird (*Politeia 515a*). Durch den Ausschluss jeglicher amorpher Massen wird der Gestaltaspekt der Originale hervorgehoben, der besonders bei Schatten die Ähnlichkeit mit den Nachbildern abgibt, es wird mit dem Schwerpunkt auf den Lebewesen die Differenz zwischen Abbild und Original betont und werden die Originale als den Abbildern gegenüber lebendig hingestellt.

Wirst du auch dies behaupten wollen, sprach ich, daß in bezug auf Wahrheit und nicht, wie sich das Vorstellbare (*τὸ δοξαστόν*) von dem Erkennbaren (*τὸ γνωστόν*) unterscheidet, so auch das Nachgebildete (*τὸ ὁμοιωθὲν*) von dem, welchem es nachgebildet ist?

Das möchte ich gar sehr, sagte er.

510ab

Die Wahrheit der Seinsbereiche wird nun als das genommen, was ins Verhältnis gesetzt wird, und das Verhältnis der Bilder zu den Gegenständen gemäß der Wahrheit nach dem übergeordneten und bereits zuvor diskutierten Verhältnis des Meinbaren zum Wissbaren bestimmt.<sup>23</sup>

So betrachte nun auch die Teilung des Denkbaren, wie dies zu teilen ist.

Wonach also?

Sofern den einen Teil die Seele genötigt ist, indem sie das damals Nachgeahmte als Bilder (*ὡς εἰκόσιν*) gebraucht, zu suchen, von Voraussetzungen (*ἐξ ὑποθέσεως*) aus nicht zum Anfange (*ἐπ' ἀρχὴν*) zurückschreitend, sondern nach dem Ende hin (*ἐπὶ τελευτῇ*), den andern hingegen auch von Voraussetzungen (*ἐξ ὑποθέσεως*) ausgehend, aber zu dem keiner Voraussetzung weiter bedürftigen Anfang (*τὸ ἐπ' ἀρχὴν ἀνυπόθετον*) hin, und indem sie ohne die bei jenem angewendeten Bilder mit den Begriffen selbst verfährt.

Dieses, sagte er, was du da erklärst, habe ich nicht gehörig verstanden.

510b

Sokrates wendet sich nun ab von einer direkten Beschreibung der Objekte der Seinsbereiche und versucht, die unterschiedlichen Objekte im Denkbaren durch zwei unterschiedliche Methoden ihres Auffindens zu charakterisieren. Sie unterscheiden sich durch ihren differierenden Umgang mit den *hypotheses* und ihren Gebrauch von Elementen des Sichtbaren. Ein exegetisches Problem ergibt sich daraus, dass hier scheinbar von den sichtbaren Gegenständen behauptet wird, dass sie als Abbilder benutzt werden. Diese Methode konkretisiert Sokrates gleich als die der Mathematik, insbesondere der Geometrie. Das ist verwunderlich, da diese meistens nicht mit Gegenständen, sondern mit Zeichnungen arbeitet.

Hernach aber, sprach ich; denn wenn folgendes noch vorangeschickt ist, wirst du es leichter verstehen. Denn ich denke, du weißt, daß die, welche sich mit der Geometrie und den Rechnungen (*λογισμούς*) und dergleichen abgeben, das Gerade und Ungerade und die Gestalten und die drei Arten der Winkel und was dem sonst verwandt ist, in jeder Verfahrensart voraussetzend (*ὑποθέμενοι*), nachdem sie dies als wissend zugrunde gelegt, keine Rechenschaft weiter darüber weder sich noch andern geben zu dürfen glauben, als sei dies schon allen deutlich (*φανερῶν*), sondern hiervon beginnend gleich das weitere ausführen und dann folgerechterweise bei dem anlangen, auf dessen Untersuchung sie ausgegangen waren.

Allerdings, sagte er, dies ja weiß ich.

23 Vgl. *Politeia 474b-480a*.

Auch daß sie sich der sichtbaren Gestalten bedienen und immer auf diese ihre Reden beziehen, unerachtet sie nicht von diesen handeln, sondern von jenem, dem diese gleichen und um des Vierecks selbst willen und seiner Diagonale ihre Beweise führen, nicht um deswillen, welches sie zeichnen, und so auch sonst überall dasjenige selbst, was sie nachbilden und abzeichnen, wovon es auch Schatten und Bilder im Wasser gibt, deren sie sich zwar als Bilder bedienen, immer aber jenes selbst zu erkennen trachten, was man nicht anders sehen kann als mit dem Verständnis (*διανοία*).

Du hast recht, sagte er.

510c-511a

Die Methoden waren unterschieden worden, um die verschiedenen Seinsbereiche zu charakterisieren. Hier ist aber bei der Erläuterung des ‚mathematischen‘ Bereichs die Rede von dem ‚Viereck selbst‘ als Objekt der mathematischen Methode. Dies ist jedoch die bei PLATON klassische Kennzeichnung von Ideen im Unterschied zu ihren Instantiierungen, weshalb es sich hier scheinbar nicht um die Objekte der Mathematik handelt.<sup>24</sup> Wie ist dies zu erklären?

Hinzu kommt die Schwierigkeit, die Zeichnungen einem Seinsbereich zuzuordnen. Von Zeichnungen gibt es wieder Schatten und Spiegelungen im Wasser, und sie sind dem ‚Viereck selbst‘ «nachgebildet», aber sie passen nicht zu den zuvor angeführten Beispielen für die sichtbaren Gegenstände. Man würde sie eher als Abbild oder Projektion des Körperlichen auffassen, denn als materiellen Gegenstand. Bis zu einem späteren Lösungsversuch werden wir so tun, als ob die Zeichnungen Abbilder der Körper wären.

Diese Gattung also, sagte ich allerdings, sei auch Erkennbares, die Seele aber sei genötigt, bei der Untersuchung derselben sich der Voraussetzung zu bedienen, nicht so, daß sie zum Anfang zurückgeht, weil sie sich nämlich über die Voraussetzungen hinauf nicht versteigen kann, sondern so, daß sie sich dessen als Bilder bedient, was von den unteren Dingen dargestellt wird, und zwar derer, die im Vergleich mit den andern als hell und klar verherrlicht und in Ehren gehalten werden.

Ich verstehe, sagte er, daß du meinst, was zur Geometrie und den ihr verwandten Künsten gehört.

So verstehe denn auch, daß ich unter dem andern Teil des Denkbaren dasjenige meine, was die Vernunft unmittelbar ergreift, indem sie mittels des dialektischen Vermögens Voraussetzungen macht, nicht als Anfänge, sondern wahrhaft Voraussetzungen als Einschnitt und Anlauf, damit sie bis zum Aufhören aller Voraussetzung, an den Anfang von allem gelangend, diesen ergreife, und so wiederum, sich an alles haltend, was mit jenem zusammenhängt, zum Ende hinabsteige, ohne sich überall irgend etwas sinnlich Wahrnehmbaren, sondern nur der Ideen selbst an und für sich dazu zu bedienen, und so am Ende eben zu ihnen, den Ideen, gelange.

511a-c

Wieso die hier gemachten Unterscheidungen als «harsche Kritik»<sup>25</sup> an den Mathematikern gedeutet werden sollten, wie manchmal geäußert, ist nicht nachzuvollziehen, da ja gegenseitig nicht zu ersetzende Kognitionsarten charakterisiert werden.<sup>26</sup> Vielmehr kann die aus der mathematischen Praxis entnommene Methode der Bildung von *hypotheseis* als ‚mathematisches‘ Abbild der Dialektik verstanden werden.<sup>27</sup> Dieses Zurückgehen hinter die *hypotheseis* ist Teil der mathematischen Methode der *analysis*. Leider konnte die Forschung selbst die späteren Erläuterungen von PAPPUS zu ihrem zweiten Teil nicht eindeutig festlegen. Es könnte sein, dass bereits die *analysis* einen ‚aufsteigenden‘ und einen ‚absteigenden‘ Teil gehabt hatte,<sup>28</sup> und damit auch der vom *anhypotheton* ‚absteigende‘ Teil der Dialektik ein Abbild in der mathematischen Methode hat.

Ich verstehe, sagte er, zwar noch nicht genau, denn du scheinst mir gar vielerlei zu sagen, doch aber, daß du bestimmen willst, was vermittelst der dialektischen Wissenschaft von dem Seienden und Denkbaren geschaut werde, sei sicherer (*σασφέςτερον*), als was von den eigentlich so genannten Wissenschaften, deren Anfänge Voraussetzungen sind, welche dann die Betrachtenden mit dem Verstande und nicht mit den Sinnen betrachten müssen. Weil sie aber ihre Betrachtung nicht so anstellen, daß sie bis an den Anfang zurückgehen, sondern nur von den Voraussetzungen aus, so scheinen sie dir keine Vernunftkenntnis davon zu

<sup>24</sup> So Pritchard 1995, S. 103, dagegen Burnyeat 2000.

<sup>25</sup> Nortmann 2006, S. 11. Wieland 1999, S. 214, spricht von einer «strukturellen Selbsttäuschung» der Mathematiker.

<sup>26</sup> So auch Burnyeat 2000, S. 35ff.

<sup>27</sup> Zur Abbild-Urbild-Theorie im Liniengleichnis siehe Abschnitt 1.3.3.

<sup>28</sup> Siehe Fournarakis und Christianidis 2006.

haben, obgleich, ginge man vom Anfange aus, sie ebenfalls erkennbar wären. Verstand aber scheint du mir die Fertigkeit der Geometer und was dem ähnlich ist, zu nennen, jedoch nicht Vernunft, als etwas zwischen der bloßen Vorstellung und der Vernunftkenntnis zwischeninne liegendes. 511cd

Der unterschiedliche Umgang mit den *hypotheseis* wird weiter differenziert. Sie haben ihr Abbild im Sichtbaren, werden von der *dianoia* unsinnlich benutzt und können mit dem *nous* in einer über das Mathematische hinausgehenden Weise erkannt werden.

Vollkommen richtig, sprach ich, hast du es aufgefaßt! Und nun nimm mir auch die diesen vier Teilen zugehörigen Zustände der Seele dazu, die Vernunftseinsicht (*νόησιν*) dem obersten, die Verstandesgewißheit (*διάνοιαν*) dem zweiten, dem dritten aber weise den Glauben (*πίστιν*) an und dem vierten die Wahrscheinlichkeit (*εἰκασίαν*); und ordne sie dir nach dem Verhältnis (*καὶ τάξον αὐτὰ ἀνὰ λόγον*), daß soviel das, worauf sie sich beziehen, an der Wahrheit teilhat, soviel auch jedem von ihnen Gewißheit (*σაφηνεία*) zukomme.

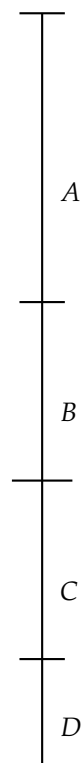
Ich verstehe, sagte er, und räume es ein und ordne sie, wie du sagst.

*Politeia* 511de

### 1.3.2 Die Linie

Die Linie weist nicht nur die im Text direkt angegebenen Analogien  $\frac{A+B}{C+D} = \frac{A}{B} = \frac{C}{D}$  auf, sondern das gleiche Verhältnis ist auch bei  $\frac{A}{C}$  und  $\frac{B}{D}$  zu finden (siehe die Abbildung). Dies ergibt sich direkt aus der Größengleichheit von  $B$  mit  $C$ , die eine direkte Konsequenz der Dreiteilung der Linie in gleichen Verhältnissen ist. In einer konkret ausgeführten Skizze ist es direkt zu sehen, weshalb man PLATON eine Bekanntschaft mit diesem Sachverhalt nicht gut absprechen kann, und mit dem fünften Buch der *Elemente* ist es leicht zu beweisen.<sup>29</sup> Später in *Politeia* 534a wird die Gleichheit der Verhältnisse, die sich aus der Gleichheit der mittleren Abschnitte ergeben, direkt benannt. Die beiden mittlere Teile sind die mittlere Proportionale zu den äußeren beiden, da jetzt gilt:  $\frac{A}{B} = \frac{B}{D}$  bzw.  $\frac{A}{C} = \frac{C}{D}$ .

Manche Interpreten nahmen diese Größengleichheit der mittleren Teile für ihre Bestimmung der den Linienteilen entsprechenden Objektbereiche auf.<sup>30</sup> Diesem Vorgehen liegt jedoch das Missverständnis zugrunde, dass der Größe der Linienteile eine Bedeutung über ihre Rolle im Aufbau der Verhältnisse hinaus zukomme.<sup>31</sup> Das ist dem Text aber nicht zu entnehmen, denn das Liniengleichnis bezieht sich nur darauf, dass den Linienteilen Seinsbereiche und damit verbundene Kognitionsarten korrespondieren, deren *Verhältnisse* sich in verschiedenen Belangen gleichen, sofern die Verhältnisse der entsprechenden Linienabschnitte gleich sind. Es handelt sich formal um eine Analogie auf Analogien. ‚Analogie‘ hat dabei den exakten mathematischen Sinn der ‚Proportion‘, dem Nachfolger der lateinischen Übersetzung des griechischen *ἀνὰ λόγον*. Eine Proportion ist die Gleichheit zweier Verhältnisse, und das Liniengleichnis ist eine über die Linie vermittelte Reihe von Analogien zwischen den Verhältnissen der Linienteile auf der einen und den Verhältnissen der Objektbereiche und Kognitionsarten auf der anderen Seite, die auf ihren jeweiligen Seiten nochmals in Analogien geordnet sind. Der zentrale mathematische Gegenstand des Gleichnisses ist eben nicht die Linie, sondern es sind die Verhältnisse.



Die Linie wird in ungleiche (*ἀνισα*) Abschnitte geteilt, allerdings wird nicht weiter erwähnt, ob vielleicht in ein bestimmtes Verhältnis, wie  $\frac{1}{2}$  oder  $\frac{1}{3}$  oder – wie öfters diskutiert wurde – vielleicht im

<sup>29</sup> Pritchard 1995 skizziert den Beweis mit (V 18) der *Elemente*. Es geht auch mit insgesamt fünf Sätzen weniger über (V 14). Damit entgeht man auch dem Mangel, ohne Beweis die Existenz einer vierten Proportionalen beim Beweis (V 18) voraussetzen zu müssen (siehe dazu Thaeer 1997, S. 431).

<sup>30</sup> Vgl. Pritchard 1995, S. 92ff.. Andere fanden die auftretende Gleichheit ‚eher störend‘ (Krämer 2005, S. 193), Ross 1951, S. 45.

<sup>31</sup> Diesem Missverständnis unterliegt u. a. Ferber 1984, S. 80f.. Es gibt inzwischen einen Namen für diesen ‚Widerspruch‘, dass die Kognitionsart zu  $B$  gewisser sei als die zu  $C$ , aber  $B = C$  gilt: «the overdetermination problem» (Foley 2008, S. 1).

Goldenen Schnitt.<sup>32</sup> Die Vermutung einer stetigen Teilung liegt schon wegen der außerordentlichen Stellung des Goldenen Schnitts in den *Elementen* nahe,<sup>33</sup> allerdings gab es bisher kein Indiz dafür. Das neue und einzig gute Argument baut auf den Untersuchungen von Kennedy 2010a auf. Resultat seiner Forschung ist, dass PLATON seine Dialoge wohl in einer strengen Zeileneinteilung niederlegte und sich der Zeilenanzahl nicht nur bewusst war, sondern sie stark in die Komposition seiner Werke miteinbezog. Deswegen ist wohl seine Platzierung des so wichtigen Liniengleichnisses an dem Ort der *Politeia* kein Zufall – es liegt aber direkt im Goldenen Schnitt.<sup>34</sup>

Wird die Einheitsstrecke im Goldenen Schnitt geteilt, beträgt der größere Teil ca. 0,618, also 61,8% der Ausgangsstrecke. Nimmt man vom Text der *Politeia* von Beginn ab 61,8% weg, so ist man bei 508c9 erst im Sonnengleichnis, das Liniengleichnis startet bei 509d2 und 62,2%. Für Kennedy eine vertretbare Ungenauigkeit, die tatsächlich weder dem ästhetischen Gefühl noch dem Autor auffallen dürfte, hätte er nicht ein Millimetermaß zur Hand.<sup>35</sup>

Dieser Umstand lässt vermuten, ob dem ganzen Dialog die Struktur der Linienteilung und ihrer Kognitionsarten entspricht, wozu weitergehende Daten von Kennedy benötigt würden; oder ob vielleicht das Liniengleichnis eine so wichtige Vermittlerrolle innehatte, wie sie möglicherweise dem Goldenen Schnitt in PLATONS kosmologischen Vorstellungen zukam.<sup>36</sup> Für die Linienteilung zumindest ist es ein starkes Indiz, dass sie nach dem Goldenen Schnitt geschehen sollte. Was würde sich dadurch ändern? Bei einer Teilung im Goldenen Schnitt ist es die kennzeichnende Eigenschaft dieser Teilung, dass der größere Teil sich *zum Ganzen* verhält, wie der kleinere zum Größeren. Daraus würde für die Verhältnisse der Linienabschnitte folgen:  $\frac{A+B+C+D}{A+B} = \frac{A+B}{C+D}$ ,  $\frac{A+B}{A} = \frac{A}{B}$  und  $\frac{C+D}{C} = \frac{C}{D}$ . Somit wäre auch  $C + D = A$ . Die Linienteile wären nun in sich vermittelt, und genau diese geometrische Eigenschaften ein mathematisches Abbild dafür, wie eng man sich die Verbindung der einzelnen Seinsbereiche zu denken hat, nämlich sehr eng. Der Goldene Schnitt hebt damit die totale Trennung der Seinsbereiche, die zunächst durch die Teilung einer Linie in strikt getrennte Teile erfolgte, auf und relativiert diese.<sup>37</sup>

Die Linie hat man sich senkrecht vorzustellen, insofern sie einen «obersten» (ἀνωτάτω; *Politeia* 511e1) Teil hat, dem die Vernunftseinsicht zugeordnet ist, und somit ist sie entsprechend dem Oben und Unten des Höhlengleichnisses aufgestellt. Nimmt man die beiden Gleichnisse analog, dann würde auch der längste Linienabschnitt zuoberst zu setzen sein, insofern man die Liniengrößen mit der räumlichen Ausdehnung der entsprechenden Bereiche im Höhlengleichnis in Verbindung bringt. Insofern der Ver-

32 Eine kurze Übersicht über die Vertreter der Ansicht, dass hier der Goldene Schnitt zu sehen ist, findet sich bei Herz-Fischler 1998, S. 84f. Balashov 1994, S. 294, extrahiert zwei Hauptprobleme für diese Position: 1.) Es gibt keine aussagekräftiges Indiz im Text. 2.) Man hat PLATON (noch) keine Kenntnis des Goldenen Schnitts nachweisen können zum Zeitpunkt der Verfassung der *Politeia*. Der zweite Einwand versucht das Pferd von hinten aufzuzäumen, denn die beste (und oftmals einzige) Quelle über die Mathematik zu PLATONS Lebzeiten und für die Zeit der Abfassung der jeweiligen Dialoge sind die Dialoge selbst. Da er selbst den Goldenen Schnitt nicht explizit erwähnte, und keine in dieser Hinsicht expliziten historischen Dokumente vorliegen, scheitert ein Nachweis an der schlechten Quellenlage. Damit der Einwand 2.) plausibel ist, müsste man nachweisen, dass über das gesamte restliche mathematische Wissen PLATONS heute noch Auskunft gegeben werden kann, was nicht der Fall ist. Inwieweit der Goldene Schnitt ansonsten bei PLATON eine Bedeutung hat, siehe Kapitel 1.4.

33 Für diese und alle weiteren Merkmale des Goldenen Schnittes siehe Kapitel 1.4.

34 Es liegt genauer in einem der beiden möglichen Goldenen Schnitte.

35 Siehe Kennedy 2010a, S. 22. Sehr problematisch an Kennedys Vorgehen ist, dass er einmal erfolgreiche Formen auch anderen Dialogen überstülpt und inhaltliche Folgerungen zu ziehen versucht. So zieht der Hinweis, das in mehreren Dialogen in der Nähe des Goldenen Schnittes von einer «Mitte» die Rede sei (Kennedy 2010a, S. 23a91), in keiner plausiblen Weise nach sich, dass damit der Goldene Schnitt assoziiert werden sollte. Kennedys Arbeit wäre viel interessanter, wenn er versuchen würde, erst die inhaltlichen Wegmarken eines Dialoges zu extrapolieren, und dann untersuchen würde, was für eine (zahlenmäßige) Struktur dem Dialog zugrunde liegt. Stattdessen tritt er mit fertigen Thesen über eine angebliche Zwölfteilung im Sinne einer pythagoreischen Musiktheorie, die zu finden sei, an die Dialoge heran, die musikhistorisch nicht gegeben zu sein scheint (s. McKay und Rehding 2011). Sind die Texte in zwölf gleiche Teile gegliedert, so muss zwischen dem zehnten und elften, weil musiktheoretisch unharmonisch, Negatives zur Sprache kommen, zwischen dem achten und neunten Positives, was Kennedy versucht nachzuweisen; siehe Kennedy 2010a, S. 14f.. Zu weiteren Unzulänglichkeiten in Kennedys Vorgehen, insbesondere die statistische Methode betreffend, siehe Gregory 2012.

36 Siehe Kapitel 1.4.

37 Für den Goldenen Schnitt und seine symbolische Vermittlungsfunktion siehe Abschnitt 1.4.



lauf der *Politeia* auch ein ‚Aufstieg‘ zu den Ideen ist, spricht die Platzierung des Liniengleichnisses im hinteren Teil des Dialogs dafür, dass die höheren Bereich die kleineren sein sollten.

Die Linie selbst und die Verhältnisse ihrer Teilungen sind zum einen mathematische Objekte, zum anderen öffnet sich hinter der geteilten Linie ein Bildraum mit weiteren Bezügen. In *Phaidon 86eff.* wird vom Pythagoreer Simmias die Vorstellung der Seele als Stimmung einer körperlichen Leier vorgebracht und von Sokrates mit mehreren Argumenten widerlegt, die u. a. nur darüber funktionieren, dass die Saiten körperlich sind. Hier dagegen erscheint die Linie als Seele und die mit den Linienteilen in Bezug gesetzten ‚Zustände der Seele‘ (παθήματα ἐν τῇ ψυχῇ) als die unterschiedlichen Schwingungen der verschiedenen Teile. Damit wird das Linienbild zur Norm, weil in Übernahme der Gerechtigkeitsdefinition aus *Politeia 441de* die Linie durch die gleichen Teilungen wohlgeordnet ist und jeder Teil den ihm angemessenen Platz einnimmt und die ihm zugehörigen Aufgaben ausführt. Wobei die Untersuchung der Gerechtigkeit in der *Politeia* ansonsten zu einer Dreiteilung der Seele in Vernunftvermögen, Mut und Begehrungsvermögen führt und die Zusammenstimmung dieser Drei in Analogie zu den drei Tönen eines Dreiklangs bringt (*Politeia 443de*). Tatsächlich ist der Ausdruck für ‚Schnitt‘ auch typisch für Unterteilungen einer Saite.<sup>38</sup> Die Linie erscheint hierbei als Saite die durch Abteilung unterschiedlicher Längen verschiedene Töne hervorbringt.

### 1.3.3 Die Abbild-Urbild-Theorie

Die Relation zwischen den Teilen *C* und *D*, also zwischen Original und Abbild, dient im Liniengleichnis selbst explizit nur bei der Charakterisierung der mathematischen Methode als etwas, durch das etwas anderes erklärt werden würde. Ansonsten werden die beiden sichtbaren Seinsbereiche selbst durch das Verhältnis zwischen Deutlichkeit und Undeutlichkeit bestimmt (*Politeia 509d*), ihr Verhältnis bezüglich Wahrheit wird nach dem Wahrheitsverhältnis zwischen Erkenntnis und Meinung festgelegt (*Politeia 510ab*); es wird demnach im Liniengleichnis selbst erst genauer gefasst. Im darauf folgenden Höhlengleichnis (*Politeia 514a-517a*<sup>39</sup>) wird sie umso prominenter eingesetzt. Die Gefesselten sehen nur die flackernden Schatten an der Höhlenwand (*Politeia 515a-c*), der aus der Höhle Tretende zunächst auch nur die Schatten und Spiegelungen im Wasser (*Politeia 516a*). Da Sokrates das Höhlengleichnis direkt analog setzt zum Liniengleichnis (*Politeia 517ab*), so dass außerhalb der Höhle der Erkenntnisbereich liegt, innerhalb der Höhle der sichtbare Bereich, so scheint es berechtigt zu sein, die Abbild-Urbild-Beziehung auch im Liniengleichnis zu verallgemeinern.

Die Bezeichnung „Urbild-Abbild“ ist irreführend, denn – wie oben angedeutet – wird das Verhältnis eher als eines zwischen einer Ursache mit Wirkung in einem niedrigerem Seinsbereich charakterisiert: Die Schatten der Lebewesen sind in ihrer Form und Bewegung direkt abhängig von den selbstbewegten Lebewesen und ihrer Stellung zur Lichtquelle. Die Urbilder sind wesentlich lebendiger, inhaltlich reicher und damit auch keine Abstraktionen der Abbilder, während die Abbilder notwendig sind für die Existenz der Abbilder. Das Gemälde eines Gebäudes ist hier also gerade kein Abbild eines bauwerklichen Urbildes.<sup>40</sup>

Das Abbild-Urbild-Verhältnis auf die beiden großen Abschnitte übertragen bestimmt das Verhältnis vom Denkbaren zum Sichtbaren weiter, es gibt aber vor allem Aufschluss über die Stellung der mathematischen Objekte zu den Ideen. Es besagt, dass sich die Ideen im Mathematischen ‚spiegeln‘, d.h. dass dem Mathematischen ein in der Mathematik nicht direkt thematisierbarer Gehalt zukommt.<sup>41</sup> Wir nennen dies das *Prinzip der Durchlässigkeit*:

38 «Jene Operationen am Kanon, von denen im vorangehenden die *Addition* (bzw. *Multiplikation*) und *Subtraktion* (bzw. *Division*) angedeutet wurden, hießen nach der Terminologie der antiken Wissenschaft *Schnitte* (*tomai*).» (Szabó 1994, S.167).

39 Die Seiten 512 und 513 der Stephanus-Paginierung trennen in der Bezugsausgabe die Bücher 6 und 7 der *Politeia* und enthalten keinen griechischen Text.

40 Anders u. a. Dominick 2010, S. 7.

41 Dass die Mathematik Abbild von etwas anderem ist, sollte nicht mit der Anschauung verwechselt werden, dass sie Vorbild

**(DL)** Die allgemeinen Ideen spiegeln sich im Mathematischen.

Was sich *wie* genau spiegelt, darauf wird – wenn auch nicht abschließend – in den weiteren Abschnitten eingegangen. Zum Teil hat PLATON wohl den Übergang zu den Urbildern des Mathematischen in einer analytisch schwer einzuholenden Symbolik der mathematischen Gegenstände gesehen. Wie er möglicherweise das Erkennen der *hypotheseis* durch Ideen verstanden wissen wollte, wird in Abschnitt 1.3.7 anfänglich expliziert.

Das Mathematische bildet aber nicht die einzige Brücke zu den Ideen. Da beide mittlere Linien die mittlere Proportionale zwischen *D* und *A* bilden, gibt es zwei ‚über Kreuz‘ verlaufende ‚Wege‘ von *D* nach *A*: Einmal die sichtbaren Schatten und Spiegelungen als Abbilder der *mathematika*, sowie diese wiederum als Abbilder der Ideen, zum zweiten von den Schatten und Spiegelungen zu ihren sichtbaren Ursachen und von diesen wiederum direkt zu ihren Urbildern, den Ideen. Der Weg über die Mathematik scheint demnach nicht alternativlos zu sein.

### 1.3.4 Linie, Höhle und eine passende Erweiterung

Ein grundsätzliches Problem der Linieneinteilung, das viele Interpreten herausgefordert hat, entsteht durch Bezug auf das Höhlengleichnis.<sup>42</sup> Dort findet sich eine ähnliche Zweiteilung in Höhle und Außenwelt, erleuchtet einmal durch die Sonne, das andere mal durch ein Feuer, die durch eine nochmalige Zweiteilung ergänzt wird: die Schatten und Spiegelungen außerhalb der Höhle gegenüber den wirklichen Dinge dort oben, und die Schatten an der Höhlenwand versus die Gegenstände, die vor dem Feuer vorbeigetragen werden. Sokrates selbst setzt die beiden Bilder in naheliegender Weise in Bezug (*Politeia* 517a-c): Die Höhle entspricht dem sichtbaren Bereich, das Feuer der Sonne, die Außenwelt dem Bereich, wo wahre Erkenntnis möglich ist, und die Sonne dort der Idee des Guten.

Sehr unpassend ist jedoch, dass die in der Höhle Gefesselten, die nur die Schatten sehen, ‚uns ähneln‘ (*Politeia* 515a) sollen. Entweder entsprechen dann die Schatten den Gegenständen, die wir sehen, wodurch aber das bisher ungelöste Problem entsteht, was dann die vor dem Feuer vorbeigetragen Dinge sein sollten und vor allem die dann nicht mehr sichtbare Sonne. Wenn man stattdessen die Gefesselten im Bereich der tatsächlichen Schatten (der *εἰκασίαι*) verortet gerät das Bild etwas durcheinander, weil man sich bei der Beschreibung des Höhlenbildes mit den Gefesselten identifizierte, sich nun aber mit den in der Höhle Befreiten gleichsetzen müsste. Dann bleibt die Frage, warum Sokrates nicht gleich die Wandschauer aus seinem Bild weggelassen hat und durch Höhlenbewohner, die aufgrund der schlechten Lichtverhältnisse nur schemenhaft ihre Umwelt erkennen und nicht von Schatten unterscheiden können, ersetzt. Wir nennen dieses Interpretationsproblem das *Höhlenparadox*.<sup>43</sup>

Der üblicherweise genommene Ausgang aus diesem Paradox besteht darin, das Gegenstand-Bild-Verhältnis der Linie als Metapher für die Erkenntnissituation des normalen Bürgers zu nehmen: Die Schatten an der Höhlenwand stellen die passiv aufgenommenen und unreflektierten Meinungen über die Gerechtigkeit dar (*Politeia* 517de), so Annas 1988, S. 255f.. Aber diese Interpretation hebt die Gleichsetzung der Seinsbereiche und Kognitionsarten der Linie mit den unterschiedlichen Gegenden auf, soweit der sichtbare Bereich betroffen ist, wie Annas witzigerweise sogleich PLATON vorwirft: Er hätte die Analogie der Gleichnisse und Bilder, die er Sokrates ankündigen lässt, überstrapaziert und damit seine eigene Vorsichtsregeln gegenüber einem bildlichen Sprechen missachtet. Natürlich ist diese Situation nicht befriedigend, wer auch immer den Fehler gemacht haben mag.

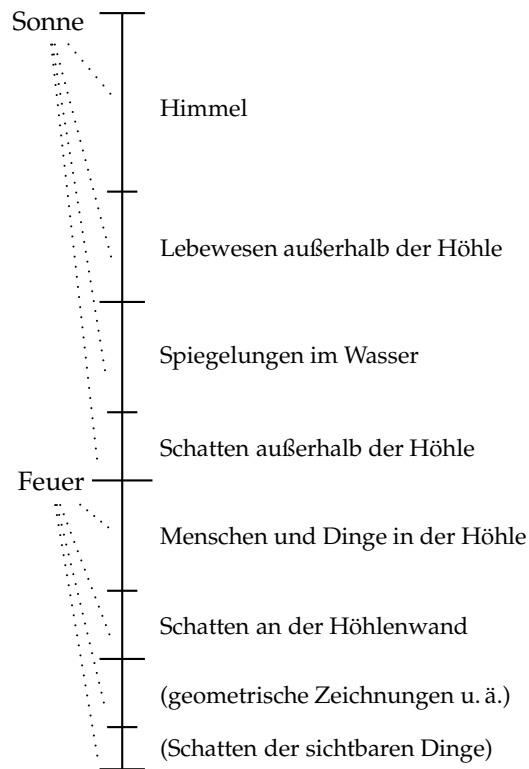
---

sei – wie in der Neuzeit stark verbreitet. Sie ist nach der Abbild-Theorie nur insofern Vorbild, als die Dialektik in ihr erscheint, also insofern sie Abbild ist. Anders z. B. Szabó 1994, S. 316: «Diese Züge [Beweistechnik und axiomatische Struktur] der Mathematik waren auch für PLATON schon vorbildlich.»

42 Vgl. Szlezák 2005, S. 209f., Wilberding 2004, S. 117f., Linck 2008, S. 39, Karasmanis 1988.

43 Diese Inkongruenz von Linien- und Höhlengleichnis gab Anlass zu vielen künstlichen Umdeutungsversuchen; vgl. u. a. Thurnher 2005, S. 111ff., Wilberding 2004.

Auffallend ist nun, dass in der Beschreibung der Außenwelt erneut deutliche Differenzierungen gegenüber dem Liniengleichnis eingebracht werden, die allerdings nicht wie das Szenario in der Höhle ein grundsätzliches Problem aufwerfen. Der Höhlenbewohner erblickt außerhalb zuerst nur die Schatten der Dinge, *dann* erst ihre Bilder im Wasser, bevor er sie selbst sehen kann (*Politeia* 516a).<sup>44</sup> Zwei weitere Schritte für ihn sind es, den Himmel zunächst bei Nacht und dann am lichten Tag zu besehen (*Politeia* 516ab), um schließlich die Sonne, die Idee des Guten, direkt anblicken zu können. Da die Idee des Guten sich im Gleichnis außerhalb der Linie befindet, legt die Erläuterung der Außenwelt eine vier- statt einer zweigliedrigen Einteilung des oberen Linienabschnittes nahe. Das ist insofern nicht verwunderlich, weil im Höhlen- im Unterschied zum Liniengleichnis viel mehr im Bild bleiben darf und nicht so stark erklärt werden muss.<sup>45</sup>



Diesen Aspekt des Höhlengleichnisses kann man als Anregung nehmen, die ganze viergeteilte Linie nochmals zu teilen in dann insgesamt acht Teile. Dadurch ergibt sich ein Ausblick auf eine Auflösung des Höhlenparadoxes, da damit der Höhle und den Wandschatten verschiedene Linienteile zugeordnet werden können. Wenn eine Achtteilung von PLATON intendiert wäre, dann läge hier eine inhaltliche Auslassungstelle in der *Politeia* vor.

Tatsächlich hatte Sokrates bereits zu Beginn der Erläuterung zur Linie angemerkt, nicht alles anführen zu können:

Ich werde wohl, denke ich, gar vieles auslassen müssen; indes, soviel für jetzt möglich ist, davon will ich mit Willen nichts übergehen. *Politeia* 509c

Und auch später verzichtet Sokrates erneut darauf, das Liniengleichnis weiter zu vertiefen, auch um seinen Gesprächspartner nicht (weiter) zu überfordern:

Das Verhältnis dessen aber, worauf sich diese beziehen, das Vorstellbare und Erkennbare, und die zweifache Teilung jedes von beiden wollen wir lassen, o Glaukon, um nicht in noch vielmal größere Untersuchungen zu geraten als die vorigen.

44 Krämer 2005, S. 197, überlegt, ob damit im Bild die angewandten von den reinen mathematischen Disziplinen unterschieden werden; vgl. Szlezák 2005, S. 215a1.

45 Tait 2005, S. 195, merkt an, dass man Sonne und Feuer nicht als Punkte auf der Linie nehmen darf, da die Linien im Liniengleichnis Größen seien und nicht als Mengen von Punkten aufzufassen sind, weil es ja um *Größenverhältnisse* gehe. Aber auch Linien und ihre Abschnitte haben zumindest Endpunkte; siehe Abschnitt 1.3.7.

Mir meinesteils, sagte er, gefällt das übrige alles, soweit ich folgen kann gleichfalls.

*Politeia 534ab*

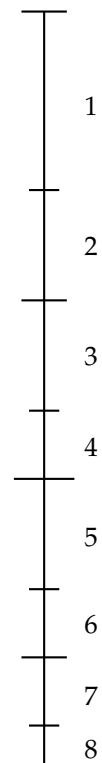
Die These<sup>46</sup> ist, dass *erstens* die Linie erneut in insgesamt acht Abschnitte unterteilt werden soll und dass sich *zweitens* im sogenannten zweiten Teil des *Parmenides* (137c-166c) praktisch eine Erweiterung (zumindest) des ontologischen Teils des Liniengleichnisses findet, der in der Tat nach einer achthgliedrigen Systematik aufgebaut ist, wenn man den Anhang der zweiten *hypothesis* nicht wie in neuplatonistischer Lesart als eigenständige, sondern z. B. als Erläuterung der Verbindung der ersten und zweiten *hypothesis* versteht.<sup>47</sup>

Ein paar grobe Ähnlichkeiten lassen sich schnell aufzeigen. Das Erkennen und Meinen wird mit durch ihre Objekte unterschieden, die Einheit der Idee steht dem Vielen ihrer Erscheinung im Bereich der Meinung gegenüber (*Politeia 476a, 479a*). Die ersten vier Abschnitte im zweiten Teil des *Parmenides* werden entsprechend unter der Annahme untersucht, dass das Eine ist, während die letzten vier unter der Annahme stehen, dass das Eine nicht ist (und damit im gewissen Sinn das Viele). Die letzten beiden (*Parmenides 164b-166c*), die den Bildern der Linie entsprechen würden, enthalten eine ‚Analyse‘ des Scheins, in den ersten beiden (*Parmenides 137c-157b*), die dem Ideenbereich korrespondieren würden, werden so gut wie alle Begrifflichkeiten ‚entwickelt‘. Die Kommentare zum *Parmenides* betrachten den zweiten Teil gewöhnlicherweise als Schlussfolgerungen aus systematisch variierten Annahmen enthaltend. Wie sich daraus eine ontisch zu verstehende Gliederung von Bereichen ergibt, wird in Abschnitt 1.3.9 angedeutet. Zunächst ist zu sehen, ob sich aus dieser schematischen Übereinstimmung zwischen Höhleneinteilung und dem zweiten Teil des *Parmenides* sinnvolle Erklärungen für die Übereinstimmung von Linie und Höhle ergeben und sich die Interpretationsprobleme bezüglich des Liniengleichnisses lösen lassen. Dann folgt mein wichtigstes Argument für die These (1.3.6–1.3.7). Zuletzt werden ein paar weitere Folgen der These herausgestellt.

### 1.3.5 Die verfeinerte Linie

Teilt man die Linienabschnitte erneut im ursprünglichen Verhältnis, so gleichen jetzt beide Grundabschnitte, die der Erkenntnis und Meinung zugehören, der vorherigen Linienteilung. Hatte man zuvor drei Größen von Linien, die nicht geteilt waren, hat man jetzt nur eine mehr, denn für die Längen der Strecken gilt  $2 = 3 = 5$  und  $4 = 6 = 7$ .<sup>48</sup> Somit ergeben sich, wenn man keine Strecken addiert, folgende Verhältnisse, die mit dem ursprünglichen Verhältnis  $\frac{A+B}{C+D}$  identisch sind (geordnet nach der Größe der beteiligten Abschnitte):  $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5} - \frac{2}{4}, \frac{2}{6}, \frac{2}{7}, \frac{3}{4}, \frac{3}{6}, \frac{3}{7}, \frac{5}{4}, \frac{5}{6}, \frac{5}{7} - \frac{4}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$ . Diese Vielfalt an Linienbezügen gestaltet die inhaltlichen Beziehungen der der Linie zugeordneten Bereiche um einiges differenzierter, wovon einige wenige Punkte im folgenden skizziert werden. Besonders bemerkenswert ist die inverse Verzahnung der beiden Grundbereiche durch das umgedrehte Verhältnis von 5 zu 4.

Die problematische Beziehung der unteren Linie auf die Höhle würde sich nun dadurch lösen, dass der körperliche Bereich in die Bereiche 5 und 6 unterteilt wird, wobei 6 unsere direkt sichtbaren Dinge beinhaltet, und 5 einen körperlichen aber unsichtbaren Bereich andeutet. Dieser enthält die die zwar körperlichen aber unsichtbaren Prinzipien der sichtbaren körperlichen Welt. Das sind die Elemente und ihre Mischungen, oder der



46 Die hier meinem Wissen nach das erste Mal vorgebracht wird, wobei das bei der unermesslichen Fülle an Sekundärliteratur zu PLATONS Dialogen nicht viel heißen muss, sie würde der Platoninterpretation der Neuplatoniker naheliegen. Zumindest gehört sie nicht zum Gemeingut der Platonforscher. Fossa und Erickson 2005 beschränken sich darauf, ein paar mathematische Eigenschaften einer erneut geteilten Linie zu besprechen.

47 Parmenides und Zenon waren (in der Logik des Dialoges) vermutlich als politische Gesandte in Athen zur Zeit der großen Panathenäen, einem vierjährigen Fest zu Ehren der Göttin Athen. Dieses Spektakel bestand neben den dezidiert religiösen Ritualen und Umzügen aus einigen musischen und sportlichen Wettkämpfen und fand, soweit es noch nachzuvollziehen ist, an genau acht Tagen am Ende des ersten athenischen Monats im Jahr, dem Hekatombaion, statt, der etwa in die Zeit unseres Juli fällt; vgl. Neils 1992.

48 Die Zahlziffern werden hier als Namen für die Linienabschnitte verwendet, weil man an ihrem Zahlwert ihren Ort auf der Linie direkt ablesen kann. Eine Verwendung des Alphabets bietet sich dagegen nur in Sprachen wie dem Altgriechisch an, in denen die ersten Buchstaben die entsprechenden Zahlen bedeuten:  $\alpha\zeta$  ist ein altgriechischer Ausdruck für 27.

ausgedehnte Teil der Seele.<sup>49</sup> (Dazu weiter in 1.3.12 und 1.3.8.)

In der dritten *hypothesis* (*Parmenides* 157b-159b) ist der Bezugspunkt der Untersuchung eine «andere Art von Idee»<sup>50</sup>, die in sich unbegrenzt ist. Dieses (zur Einheit) «andere» hat Teile und ist Ganzes, hat an der Einheit teil und ist deswegen auch eins und begrenzt, aber für sich unbegrenzt, und entsprechendes bezüglich den weiteren in der ersten *hypothesis* aufgeworfenen Begriffen. Damit werden aber genau die begrifflichen Bestimmungen getroffen, die in EUKLIDS *Elementen* für die Definitionen vorausgesetzt werden. So tragen alle ausgedehnten Größen diese scheinbar widersprüchlichen Bestimmungen an sich, einmal beliebig und unbegrenzt teilbar und somit eine unbestimmte Menge von wieder teilbaren Teilen zu sein, andererseits selbst durch ihre Grenzen und bei jeder konkreten Teilung bestimmt zu sein.

In der vierten *hypothesis* (*Parmenides* 159b-160b) verschwinden die Bestimmungen des «anderen», da es für sich ohne das Eine betrachtet wird. Dies ist zum einen gerade die Charakteristik der zwar gehaltvollen, aber unbestimmten Teile eines mathematischen Objekts. So ist z. B. ein reiner Flächeninhalt für sich ganz unbestimmt,<sup>51</sup> erst durch Beziehungen auf andere Inhalte oder Bestimmung durch seine Form wird er fassbarer. Zum anderen muss die übergeordnete Einheit verloren gehen, damit man verschiedene geometrische Objekte miteinander betrachten kann, die nicht begrifflich notwendig aufeinander bezogen sind. Erst hier im vierten Bereich können geometrische Objekte im geometrischen Sinn *gegeben* und *konstruiert* werden. Erst hier finden die Konstruktionen der Beweise der *Elemente* ihren begrifflichen Unterbau.

Jetzt lösen sich auch die in der Besprechung des Liniengleichnisses aufgetretenen Interpretationsprobleme, welchen Ort die Zeichnungen einnehmen und inwiefern die sichtbaren Gegenstände als Bilder genommen werden in der Geometrie. Wenn man annimmt, dass die Zeichnungen mit Teil 7 korrelieren und damit Abbild der Elemente und ihrer geometrischen Elementarformen in 5 sind, dann sind sie zusammen mit den sichtbaren Gegenständen Abbild der rein ideellen geometrischen Objekte in 3. Somit liegen die Zeichnungen zwischen dem körperlichen und dem Schattenbereich und werden von den Schatten und Spiegelungen im Wasser nochmals abgebildet. Die Charakterisierung der Bereiche C und D fand demnach in *Politeia* 509d-511e nur in Vertretung durch die Bereiche 6 und 8, der sichtbaren Gegenstände und ihrer Abbilder, statt.

Bevor auf die Definitionen des ersten Buches der *Elemente* EUKLIDS näher eingegangen wird, soll der oberste Bereich 1 etwas untersucht werden.

### 1.3.6 Die Ideenzahlen

Nach den überlieferten Zeugnissen soll PLATON irgendwann – vermutlich im späteren Teil seines Lebens – der Überzeugung gewesen sein, dass zu den höchsten Ideen zehn Ideenzahlen (*εἰδητικοὶ ἀριθμοὶ*) gehören.<sup>52</sup> Insofern man auch Ideen zählen kann, haben die gezählten Ideen an der Idee der jeweiligen Zahl teil, und insofern diese Ideen von Zahlen auf Gemeinschaften aller anderen Ideen anwendbar sind, ist es plausibel sie zu den allgemeinsten und damit ‚höchsten‘ zu zählen. Allerdings sind Ideen von Zahlen anderer Art als Mengen von Einheiten. Setzt man nämlich voraus (wie in Abschnitt 1.3.9 etwas erläutert), dass Ideen starke Einheiten sind und somit autarke, sich selbst bestimmende Sachverhalte, insofern die Beziehungen ihrer Teile aufeinander begrifflich notwendig sein müssen, so kann eine Idee keine sich gegenseitig gleichgültigen Einheiten auf irgendeine Weise zusammenschließen. Es wird vielmehr der Fall sein, dass gerade die Ideen, die keine ihrer Binnenstruktur nach zahlenmäßig komplexere Idee voraussetzen, die jeweiligen Ideenzahlen bilden. So besitzt z. B. die Idee der Einheit keine

49 Vgl. z. B. *Timaios* 36e. ARISTOTELES würde wahrscheinlich die «natürlichen Körper» dazurechnen; vgl. Bos 2005, S. 92ff, und Bos 2010; zu Bos siehe aber Rijk 2002, S. 50a143.

50 *Parmenides* 158c, «ihre eigene Art» *Parmenides* 158de.

51 Siehe die Diskussion in Kapitel 2.

52 Siehe dafür u. a. *Metaphysik* 987b20ff., 1080aff., und Krämer 1959, S. 250.

Binnenstruktur und ist einförmig, da sie ansonsten mindestens zwei Binnenstrukturmomente besäße und damit die Idee der Zwei voraussetzen müsste.

Dadurch ist im übrigen eine Basis skizziert, auf der die Zahlensymbolik PLATONS eine rationale Grundlage erhalten könnte, weil die Zahlen in ihrer reinsten Form inhaltlich mehr sind als quantitative Bestimmungen. Man hat die ‚qualitative‘ Verwendung von Zahlen bei PLATON in der Literatur meistens entweder nicht beachtet oder nicht ernst genommen.<sup>53</sup> Dabei sind besonders die Zahlen Drei, Neun und Zehn in seinen Werken zu beobachten<sup>54</sup> und ihr genauer Einbezug noch zu untersuchen.<sup>55</sup>

Es werden in der ersten *hypothesis* zehn Ideen oder Ideenpaare entfaltet, von denen gezeigt wird, dass sie bis auf das Eine selbst nicht auf das Eine zutreffen. Das sind: Das Eine, Teile-Ganzes, Grenze (Anfang-Mitte-Ende), Gestalt (rund – eckig), Ort (in anderem – in sich), Bewegung (Ruhe – Bewegung), Identität-Verschiedenheit, Ähnlichkeit-Unähnlichkeit, Gleichheit/Maß (kleiner – gleich – größer), Zeit (jünger – gleich alt – älter). Ihre asymmetrische Abhängigkeit und die binnenstrukturelle Erweiterung um jeweils ein Moment, soll im folgenden Absatz angedeutet werden, eine differenzierte Analyse steht noch aus.

Die Einheit selbst hat keine innere Struktur, ist hier nur ein einzelner abstrahierter Strukturpunkt. Die Ganzes-Teil-Idee hat zwei Strukturpunkte, die zwei Momente von Ganzem und Teile.<sup>56</sup> Der Grenzbe-griff hat drei Punkte, die Momente von Anfang, Mitte und Schluss (oder Ursprung, Übergang und Vollendung). Die Enden (Anfang und Schluss) differenzieren sich weiter und werden zu einer Dreiheit. Bei drei Struktur(end)punkten kann sich einer anders zur Mitte verhalten als die restlichen (was bei insgesamt nur zwei weiteren nicht auffällt, da diese sich, insofern sie sich unterscheiden, bereits verschieden verhalten). Die Enden verhalten sich bei *runder Gestalt* alle gleich zur Mitte, bei *eckiger Gestalt* verhalten sich zwei Enden gleich, ein drittes Ende anders als die beiden.<sup>57</sup> ‚Spaltet‘ sich jetzt die Mitte selbst in sich selbst und das andere, so ergibt sich eine Idee von Ort. Die Mitte ist in sich selbst oder in einem anderen, je nachdem ob sie selbst oder etwas anderes mit allen ihren Enden in Beziehung steht. Differenziert sich dieses andere wieder in zwei Momente, so kann der Unterschied von Ruhe und Bewegung aufgemacht werden; so unter anderem die Bewegung von etwas anderem in etwas anderes. Es

53 Reidemeister 1940, S.7, sieht in der Beschreibung der sogenannten Hochzeitszahl (*Politeia* 546bd) eine «humoristische Übertrumpfung pedantischer Zahlenmystik». Der praktischen Nutzen ist bei derartigen Deutungsversuchen nicht zu vernachlässigen, so ist in *Nomoi* 737e-8a z.B. aus organisatorischen Gründen von gerade 5040 Bürgern die Rede. Denn  $5040 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$ , d.h. sie hat besonders viele Teiler. Szabó 1994, S.134, hält den Stand der Forschung fest und gibt dem Zahlengebrauch eine moderne Wendung: «so kann die Wissenschaftsgeschichte mit dieser kuriosen Zahlensymbolik nichts anfangen. Aber man soll nicht vergessen, daß in derselben Behauptung — "alles ist Zahl" — doch die Bestrebung zum Ausdruck kommt, man soll die Gesetze der Natur *mathematisch* erfassen.»

54 Aber auch weitere Zahlen wie die Sieben oder Zwei sind bedeutsam. Zu berücksichtigen ist, dass in der griechischen Kultur – speziell in Religion und Medizin – einzelnen Zahlen eine herausragende Rolle zukam; siehe dazu vor allem die Arbeiten von W. Roscher: Roscher 1906 (zu PLATON insbesondere Roscher 1906, S. 86ff.) und der Nachdruck anderer in Roscher 2003.

55 Z. B. tritt die Zahl (und Ziffer) Neun in den Dialogen relativ häufig auf und steht im Kontext der Verbindung des hohen und niedrigen, von Himmel und Erde oder Erde und Unterwelt:

Denn von welchen [so der Dichter Pindaros]  
Persephone schon die Strafen des alten Elends  
genommen, deren Seelen gibt sie der obern Sonne im neunten Jahre zurück,  
aus welchen dann ruhmvolle, tatenreiche Könige  
und an Weisheit die vorzüglichsten  
Männer hervorgehen und von da an, als heilige Heroen  
unter den Menschen genannt werden

*Menon* 81bc

Auch Hephaistos Hammer ist 9 Tage zwischen Olymp und Erde unterwegs. Neben diesen mythischen Erinnerungen wird die 9 neben der Drei benutzt, um den Unterschied zwischen Vollkommenem und Abgefallenem zu charakterisieren. So wird in *Politeia* 587bff. der Abstand vollkommenem und niedrigstem Wohlbefinden analog den Staatsformen durch die Potenzen der 9 als  $3^2$  beschrieben. Siehe zur Neun und Zehn auch *Phaidros* 248e,257a, *Timaios* 21ab,23e, *Nomoi* 624ab,702c,759d,824c,894c, *Kritias* 108e,111ab, *Mimos* 319e, *Politeia* 615ab.

56 Einem reinen Begriff von Ganzes-Teile kann man sich durch eine Beschränkung auf die *Relation* annähern, die angegeben werden kann durch

**gt1** Das Ganze ist Ganzes der Teile. ("Ist nicht das, dem kein Teil fehlt, ganz?" *Parm*137c)  
**gt2** Die Teile sind Teile des Ganzen. ("Der Teil ist doch Teil eines Ganzen" *Parm*137c)

Demnach hätte etwas Teile, wenn es ein Ganzes wäre, denn ein Ganzes ist es nur in Bezug auf seine Teile.

57 Siehe Kapitel 3.

ist dann teils in dem einen, teils in dem anderen. Spaltet sich aber wieder die Mitte aus sich selbst und dem anderen, so entsteht der Grundbegriff von Identität in Bezug auf etwas selbst und insgesamt vier Möglichkeiten. Etwas ist identisch mit sich selbst oder mit dem anderen, verschieden von sich selbst oder verschieden vom anderen. Aber die Identität differenziert sich zur Identität nicht nur des Ganzen, sondern auch der Teile. *Ähnlichkeit* ist die Identität von Teilen, *Unähnlichkeit* die teilweise Verschiedenheit. Erweitert sich die Identität zu: Ein Teil ist identisch mit einem anderen Ganzen und dieses mit dem Teil eines anderen, so hat man einen Begriff von Maß und kann kleiner-gleich-größer festlegen. Die Gesamtheit der drei Momente differenziert sich weiter, so dass pro Stufe mehrere sind, und in ihnen damit Bewegung gedacht werden kann; eine Idee der Zeit.

### 1.3.7 Die Ideenzahlen im Spiegel der Geometrie – Euklids Definitionen und Postulate

Es wird in diesem Abschnitt anfänglich dargestellt, wie sich die Ideen des letzten Abschnitts zum Teil tatsächlich im Seinsbereich 3, für den hier die Definitionen der *Elemente* angesehen werden, spiegeln.<sup>58</sup> In (1) wird in den Kontext der Definitionen eingeführt und die ersten drei Definitionen in ihrem Zusammenhang kurz erläutert, in (2) wird die metamathematische Allgemeinheit der 13. Definition aufgezeigt und in (3) ein Überblick gegeben, wie die höchsten Ideen in den Definitionen von Bedeutung sind.

(1) Man schätzt die Definitionen EUKLIDS in den *Elementen* im allgemeinen nicht.<sup>59</sup> Die wesentliche Begründung dafür fußt allerdings gerade darauf, dass weder diesen ersten Definitionen (noch den späteren in überragender Weise) eine bedeutende Funktion in den Beweisgängen und Konstruktionen zuzukommen scheint. Dass erst jetzt eine beweistheoretische Relevanz entdeckt werden sollte, scheint nicht sehr wahrscheinlich zu sein, insofern es sich in den Axiomen um verhältnismäßig einfache Grundgebilde und deren Zusammenhänge handeln sollte. Andererseits hatte vermutlich selbst PROKLOS, der den frühesten überlieferten Kommentar zu den *Elemente* verfasste, keinen Zugriff mehr auf die mündliche Lehrtradition in Alexandria.<sup>60</sup>

Weiter ist zu bedenken, dass die modernen Texteditionen der *Elemente* bereits in den Ausgaben von Heiberg und Stamatis eine Ordnung der Definitionen vorspiegeln, die in den überlieferten Manuskripten nicht vorhanden ist. Die Definitionen sind dort nicht nummeriert, sondern bilden mit den anderen Vorannahmen eine Art kurze und kompakte Hinleitung zum Haupttext. Dies würde auch erst einmal dafür sprechen, dass man bei den Definitionen, Postulaten und Axiomen keine zu große Präzision im Ausdruck und Verbindlichkeit im Inhalt vermuten dürfte. Es würde jedoch genauso dazu passen,

58 Und damit ein Forschungsdesideratum etwas eingeholt: «Insbesondere bleibt es bei einer textimmanenten Interpretation völlig unklar, wie die Grundbegriffe der Mathematik von der Idee des Guten her definier- und verstehbar gemacht werden können.» (Krämer 2005, S. 195.) Tatsächlich geht unsere Interpretation über *alle* bisherigen Erläuterungen zur ersten *hypothesis* oder den Definitionen der *Elemente* hinaus.

59 Vgl. Russo 1998. Artmann 1999, S. 18, merkt über die Definitionen 1-9 an: «It has often been observed that Euclid makes no use of these definitions in his subsequent proofs. They are explications that should clarify the significance of a term to the reader but play no formal rule in deductions.» Vgl. Mueller 1981, S. 40, und Netz 1999, S. 94ff.. Szabó 1994, S.354, beschränkt sich in seiner Meinung darauf, dass die Definitionen 4 und 7 des ersten Buches scheinbar nicht benutzt werden. Witter 1964, S. 188, hält die Definitionen 1,2,4,5 und 7 für überflüssig. (Eine Ausnahme ist Schmitz 1997, S. 353.) In dieser Allgemeinheit ist das falsch, denn Definition 3 ist spätestens in der *kataskewe* des ersten Satzes aus Buch eins notwendig für die Anwendbarkeit von Postulat drei. Denn wären die Enden der geraden Linie nicht nach Def. 3 Punkte, könnte auch kein Kreis um sie gezeichnet werden nach Postulat 3.

Entsprechend der allgemeinen Überzeugung kann man in den Definitionen auch keine platonische Fundierung erkennen. Gegen einen platonischen Hintergrund der *Elemente* wendete Thomas Greenwood ein, PLATON und ARISTOTELES als Alternativen betrachtend: «... the objects expressed by the definitions are not presented in any way as reflections of ideal and eternal paradigms. Furthermore, if Euclid were a Platonist, he should have carried the process of analytic regression beyond the very notions he takes as primitive, in order to discover how the ultimate principles of the One and the Dyad required by his own system can account for points and lines and other figures. He does not go beyond points and lines at the beginning of his system ...» (Maziarz und Greenwood 1968, S. 243f.) Vor diesem Hintergrund kann Schönbeck 2003, S. 134, die Meinung vertreten, dass der «phänomenologische[n] Ursprung» in den Definitionen der *Elemente* sichtbar wird, und EUKLID den «Rückgriff auf eine nicht explizierte ‚natürliche Raumschauung‘» unterstellen.

Positiv dagegen Raymond 2012.

60 Vgl. Guggenheimer 1977, S. 187.

dass die eigentlich präzisen Überlegungen im Hintergrund etwas laxer dargestellt werden, als es ihrem eigentlichen Inhalt angemessen wäre.

Die Postulate und Axiome sind mit den im ersten Buch gegebenen erschöpft, weitere Definitionen finden sich eingangs der einzelnen Bücher, und zwar bei allen bis auf Buch 8, 9, 12, 13. Im folgenden werden wir uns weitgehend auf die Definitionen des ersten Buchs beschränken, da sie die grundlegendsten sind und ihre Objekte die Gegenstände der Postulate ausmachen.<sup>61</sup>

1. Ein **Punkt** ist, was keine Teile hat,
2. Eine **Linie** breitenlose Länge.
3. Die Enden einer Linie sind Punkte

Die drei Definitionen weisen zunächst die logische Struktur auf, dass erst zwei verschiedene Objekte definiert oder vielmehr erklärt, und in dann in direkte Beziehung gesetzt werden. Dabei werden die Ausdrücke ‚keine Teile haben‘, ‚breitenlose Länge‘ und ‚Ende sein‘ scheinbar unerklärt benutzt. Dieses war sogar zu erwarten, da es sich hier erstmal um eine Grundlegung der Geometrie und nicht der gesamten Mathematik oder gar Philosophie handeln sollte, es ist aber auch vor dem platonischen Verständnis der Beziehung von Mathematik und Philosophie gemäß *Politeia* 510b-d adäquat, dass die in der Fundierung der Mathematik gebrauchten Begriffe philosophisch weiter aufzuklären sind.

Tatsächlich können diese Ausdrücke in ihrem Gehalt präzisiert werden, indem man die Definitionen zueinander in Beziehung setzt. Wenn ein Punkt ist, was keine Teile hat, dann ist die Linie etwas, das Teile hat, insofern sie Länge ist. Sie hat keine Teile in Hinsicht auf Breite, das ist erstmal der Fläche, die «nur Länge und Breite hat» (I D5), vorenthalten, wobei das «nur» bereits auf die Definition des Körpers, «was Länge, Breite und Tiefe hat», in Buch XI deutet.<sup>62</sup>

Nimmt man jetzt eine genauere Bedeutung von Teil und Enden hinzu, die sich daraus ergibt, wie die Definitionen in weiteren Verlauf der *Elemente* benutzt werden, so kann man aufgrund der ersten drei Definitionen weiter festhalten: Da Teile von bestimmten Größen wieder Größen derselben Art sind, sind Teile der Linie wieder Linien. Teile eines Ganzen sind immer Teile einer gesamten Teilung, d.h. hat man einen Teil, sind die Restlichen gedanklich immer zu ergänzen; eine Teillinie ist kein Ausschnitt einer Linie.<sup>63</sup> Die Enden (πέρατα) einer Linie sind ihre (sie bestimmenden und) einzigen Grenzen, es sind mindestens zwei. D.h. eine Linie tritt mit einer anderen Linie nur so in Kontakt, berührt sie bzw. trifft auf sie, indem sie ein Ende gemeinsam haben. Ein Ende eines Teils ist entweder ein Ende des Ganzen, oder auch Ende (mindestens) eines anderen Teils. Weiterhin sind Teile immer im plural zu nehmen, d.h. es gibt stets mehr als ein Teil, wenn es ein Teil gibt, und die ganze Linie ist nicht Teil ihrer

61 Die folgenden Zitate aus den Elementen stammen, wenn nicht anders angegeben, alle aus Thae 1997, und sind teilweise unter Benutzung von Heiberg und Menge 1916 und Heath 1956a, Heath 1956b, Heath 1956c angepasst. Die kleinen Ergänzungen durch Stamatis 1977 sind für die Belange hier nicht relevant.

62 Vgl. Reed 1995, S. 5: «Definition 2 merely states that lines (a) are distinguished from points by having parts, (b) are distinguished from other geometric things by having only one part and (c) can be compared amongst themselves by this part, their length.» (a) betrifft eine wesentliche geometrische Eigenschaft der Linie, (b) ist eine Aussage über den Begriff *Linie*, nämlich die Begriffsteile. Ähnlich herausragend sind Reeds Bemerkungen zur vierten euklidischen Definition, in der die gerade Linie bestimmt wird (S. 6): «The approach proposed here, however, suggests a simple and clear interpretation. As points define the delimiting of lines, straight lines are precisely those for which no additional specification for the relationship between points-as-extremities and lines-as-delimited is either necessary or possible. For straight lines this relationship is always the same. No metric or measure theoretic specification is implied here. The delimitation happens in the same manner throughout the line, but nothing is said about what this manner may be.» Vgl. dazu Kapitel 3 und insbesondere Abschnitt 3.4 dort. Reeds Buch ist mir erst kurz vor Fertigstellung dieses Textes in die Hände gefallen. Auch wenn sich meine Euklidinterpretation auch in grundsätzlichen Dingen von seiner unterscheidet, so finden sich bei ihm Gedankenformen zu EUKLIDS Definitionen, die meines Wissens sonst nirgends aufgeschrieben sind und die ich mir in Unkenntnis seines Werks selbst entwickeln musste. Erstaunlich ist allerdings, dass – unabhängig von einer abschließenden Bewertung seiner Interpretationsvorschläge – seine Anmerkungen keinen Eingang in den Fachdiskurs über EUKLIDS Definitionen fanden (s. z. B. Russo 1998 oder Acerbi 2007a). Ich kann mir das nur so erklären, dass er selbst seine Erkenntnisse nicht weiter verbreitet hat auf Fachtagungen oder im persönlichen Kontakt, und das Buch selbst übersehen werden konnte, weil sein Titel keinen direkten Bezug auf EUKLID enthält und in keinem einschlägigen Verlag erschien.

63 Vgl. die Erläuterungen zu Teilen in den Definitionen (V D1) und (VII D3).



selbst. Entsprechendes lässt sich aber auch dem *Parmenides* entnehmen: Die Teile sind stets mehrere (*Parmenides* 137cd). Ein Teil ist von gleicher Art wie das Ganze (*Parmenides* 158c, s. a. S. 22). Teile sind stets gegeneinander und gegen das Ganze begrenzt (*Parmenides* 158cd).<sup>64</sup>

In den Definitionen der *Elemente* ist vor allem davon die Rede, dass Linien sich *treffen* (συμπίπτειν), d.h. ein Ende gemeinsam haben. In Postulat 5 wird zwar davon gesprochen, dass eine Linie auf zwei andere *fällt* (ἐπίπτειν) und in Definition 10 davon, dass eine Linie auf eine andere *gestellt* wird, dieses kann aber leicht paraphrasiert werden als „hat ein Ende mit dem gemeinsamen Ende zweier Teile (der anderen Linie) gemein“ und jenes im Postulat entsprechend komplexer. Somit kann grundsätzlich auf eine jede Linie, da sie definitionsgemäß Teile hat, die mindestens eine Grenze gemeinsam haben, eine andere ‚gestellt‘ werden.

- Ein Punkt  $P$  liegt auf einer Linie  $g$   $:\Leftrightarrow$   
 $P$  ist Endpunkt eines (Linien)Teiles der Linie  $g$ .
- Eine gerade Linie  $g$  ist auf eine gerade Linie  $m$  gestellt  $:\Leftrightarrow$   
 Ein Endpunkt von  $g$  ist Endpunkt eines Teiles von  $m$ , aber kein Endpunkt von  $m$ .

Vor diesem Hintergrund kann man den Zusatz zur Bestimmung des Durchmessers explizieren (hier kursiv):

17. Ein **Durchmesser** des Kreises ist jede durch den Mittelpunkt gezogene, in beiden Richtungen vom Kreisumfang begrenzte Strecke; *eine solche hat auch die Eigenschaft, den Kreis zu halbieren.*

«Ein Durchmesser halbiert seinen Kreis» heisst genauer:

1. Die Endpunkte eines Durchmessers teilen einen Kreisumfang in genau zwei Teile, d.h. sie sind auch die Endpunkte von genau zwei Teilen der Kreislinie, die zusammen die Kreislinie ergeben.
2. Diese beiden Teile bilden mit dem Durchmesser zusammen jeweils die Begrenzung einer Figur.
3. Diese beiden Halbkreise sind intrinsisch ununterscheidbar.

Diese Bestimmungen müssten mit metatheoretischen Prinzipien und den vorhergehenden Definitionen hergeleitet werden, was wir nicht tun (aber siehe Abschnitt 2.4). Hier sei nur darauf hingewiesen, dass dieser Halbsatz letztlich die begrifflichen Bestimmungen des ‚Seite einer geraden Linie sein‘ enthält und festhält, *dass es genau zwei Seiten bei einer geraden Linie gibt*, die zudem beide gleichwertig sind. Entsprechend kann man den in den *Elementen* folgenden Gebrauch des Begriffs der Seite einer geraden Linie in folgender Weise auf die Definitionen von Linie, Figur und halbierendem Durchmesser zurückführen:

- Ein geometrisches Objekt  $P$  liegt ganz auf einer Seite einer geraden Linie  $g$   $:\Leftrightarrow$   
 $P$  liegt in einem Halbkreis, der Halbkreis eines Kreises ist, zu dem  $g$  der Durchmesser ist, oder  $P$  liegt in einem Halbkreis, der Halbkreis eines Kreises ist, zu dem  $g$  ein Teil des Durchmessers ist.

Als Ergebnis der Überlegungen zu den ersten drei Definitionen und dem Durchmesser darf festgehalten werden, dass die primitiven, d.h. nicht definierten, Ausdrücke zum Teil implizit im Zusammenhang mit anderen Definitionen, in denen sie nicht auftreten, in ihren funktionalen Bezügen aufgehellt werden (wie Länge),<sup>65</sup> während andere, nicht spezifisch geometrische Begriffe (Teil-Ganzes, Enden) mit der in PLATONS Dialogen gegebenen Bedeutung sinnvoll eingebunden werden können.

<sup>64</sup> Die allgemeine Vorgehensweise für eine Rekonstruktion des mathematischen Gehalts der euklidischen Definitionen wäre aus den durch die Philosophie strukturell verstärkten Begriffen der Definitionen die früh-griechischen Äquivalente moderner geometrischer Begrifflichkeiten zu definieren. So ließe sich definieren: Der Punkt  $z$  liegt zwischen zwei anderen Punkten  $x$  und  $y$  genau dann, wenn  $z$  ist ein Endpunkt eines Teils einer geraden Linie mit Endpunkten  $x$  und  $y$ , der nicht Endpunkt der ganzen geraden Linie ist.

Dass diese Überlegungen letztlich auch fruchtbar für die moderne Mathematik sein könnten, legt die Arbeit von Maudlin 2010 nahe, der vorschlägt im Hinblick auf Anwendungen in der Physik die Grundstrukturen geometrischer Räume nicht mehr mit der üblichen mengentheoretischen Topologie zu fassen, sondern mit einer aus der Antike inspirierten Linien-Topologie.

<sup>65</sup> Das widerspricht z. B. Mueller 1981, S. 40: «Clearly, primitive terms which occur only in the definitions of others cannot be said to have an implicit characterization.» Denn er hält EUKLIDS Definitionen offensichtlich für derartige Definitionen.

(2) Es ist kein Traktat oder Zitat EUKLIDS über seine Ansichten zur Philosophie der Mathematik überliefert, speziell für die Geometrie gilt: «In the *Elements*, meta-mathematics is strictly prohibited.»<sup>66</sup> Natürlich sind die Vorgehensweise und der Aufbau der *Elemente* ein indirektes Zeugnis der euklidischen Metamathematik. Aber – so die These hier – es findet sich in den Definitionen 13 und 14 ein Beispiel einer viel direkteren metamathematischen Aussage. Um etwas besser zu verstehen, ist es manchmal nützlich, etwas dort genauer zu betrachten, wo mit dem hergebrachten Verständnis eine Anomalie auftritt. So eine kann man in den *Elementen* in Definition 13 finden:

Eine **Grenze** ist das, worin etwas endigt. (Thaer 1997, S.1)

A **boundary** ist that which is an extremity of anything. (Heath 1956a, S.153)

Grenze ist, was von irgendetwas Ende/Begrenzung ist.

Ὁρος ἐστίν, ὃ τινός ἐστι πέρας.

Aber auch eine Begrenzung (*πέρας*) ist die Begrenzung *von etwas*, wie in Definition 3 von einer Linie. Der Ausdruck ‚Grenze‘ (*ὄρος*) wird im weiteren nur in Definition 14 benutzt, in der er leicht zu ersetzen wäre.<sup>67</sup>

Eine **Figur** ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.

In ihrer allgemeineren Bedeutung sind *ὄρος* und *πέρας* nur schwach unterschiedlich, ARISTOTELES gebraucht sie mitunter nachweislich synonym.<sup>68</sup>

Während *πέρας* hier in den *Elementen* die Enden bedeutet, wird in der ersten *hypothesis* des *Parmenides* ein allgemeinerer Begriff des Begrenzens (*πέρας*) aus drei Strukturmomenten (den zwei Enden und dem Begrenzten) aufgebaut (vgl. *Parm 137d*). Sind nur zwei Strukturmomente gegeben, so würde durch die Momente nicht festgelegt werden, welches die Grenze ist und welches das Begrenzte. Etwas muss in diesem Sinne immer von *zwei Seiten* begrenzt werden.

Dieser Begriff findet in der Geometrie seinen einfachsten Ausdruck im Begriff der begrenzten Linie, den zwei Grenzpunkten mit ihrer länglichen Verbindung. In Definition 13 wird der Schwerpunkt auf die Enden als *Enden eines Begrenzten* gelenkt und so der allgemeine Begriff des Begrenzens instantiiert. Definieren ist allerdings auch ein Begrenzen. Insofern kann man die Bestimmung von *ὄρος* in Definition 13 als Definition der Definition (von EUKLID eben auch *ὄροι* genannt in den *Elementen*) interpretieren. Definition 14 gibt dann neben dem geometrischen Gehalt im allgemeineren Kontext die Definition einer Art Vollständigkeit eines Definitionssystems wieder.

Punkte sind die Enden einer Linie, Linien die Enden einer Fläche und Flächen die Enden von Körpern. Die Flächen-(und Körper-)arten werden aber im Unterschied zur begrenzten Linie durch die Art ihrer Grenzen bestimmt.<sup>69</sup> Ein Pentagon ist z. B. die Fläche, die von fünf gleich langen geraden Linien gleichmäßig umfaßt wird. *ὄρος* ist also die Grenze, die ihr Begrenztes bestimmt, konkreter eine (mathematische) Definition und noch konkreter im geometrischen Kontext die das begrenzte geometrische Objekt eindeutig kennzeichnende geometrische Grenze.

(3) Die These ist, dass die ersten fünf Ideen der ersten *hypothesis* des *Parmenides* in den Definitionen zum Tragen kommen. Für die Bedeutung von RUND und GERADE (RUND bedeutet soviel wie gleichmäßig und GERADE soviel wie ungleichmäßig) wird auf Kapitel 3 verwiesen. Zur Übersicht betrachte man die folgende Tabelle.

66 Saito 2009, S. 804. Vgl. auch Mueller 1981, S. 11.

67 Es tritt noch in Definition 8, Buch V, auf, dort in der Bedeutung als Glied einer Reihe bzw. einer Proportion.

68 Siehe Heath 1956a, S. 182.

69 Ob eine Linie geschwungen oder gerade ist, kann man nicht ihren beiden Endpunkten ansehen. Bei den hier bezeichneten Figuren ist immer eine gleichmäßige Fläche (Ebene) und ein gleichmäßiger Raum vorausgesetzt, bei der Liniendefinition war das noch nicht der Fall.

Die strukturelle Gleichheit der ersten drei Definitionen mit den ersten drei Ideen der ersten *hypothesis* ist augenfällig.<sup>70</sup> Weniger offensichtlich ist der Zusammenhang der Definitionen 4-12 mit RUND und GERADE. Mit der alternativen Interpretation von RUND als gleichmäßig ist Definition 4 aber gerade die Spezifizierung von RUND auf Linien und ähnlich in Definition 7 auf Flächen.<sup>71</sup> Definition 8, der Winkel, ist dann aber die eckige Linie.<sup>72</sup> Die Definitionen 5-7, die strukturell eine Wiederholung der Definitionen 2-4, aber jetzt für Flächen, darstellen, sind begrifflich notwendig, da mit der Ebene erst etwas bereitgestellt wird, in dem *verschiedene* Geraden aufeinander treffen können.

Die nächsten Definitionen 13-22 müssten nun nach der Reihenfolge der Begriffe in der ersten *hypothesis* des Parmenides dem Ort (d.h. dem Gegensatzpaar in-sich-selbst-sein – in-etwas-anderem-sein) ähnlich sein. Ist das der Fall? Tatsächlich ist der struktur-begriffliche Fortschritt, der in der Entwicklung der Definitionen durch die Einführung der Figuren, d.h. des Kreises und der Vielecke, erreicht wird, die Unterscheidung zwischen einem Innen und einem Außen. Modern-mathematisch – in diesem Fall topologisch – betrachtet unterteilt eine geschlossene Linie in einer Ebene dieselbe in zwei Teile. Die Punkte in beiden Teilen können untereinander durch Linien verbunden werden, die die geschlossene Linie nicht berühren. Zwei Punkte aus unterschiedlichen Teilen sind nur durch Linien verbindbar, die die geschlossene Linie schneiden. Um nun die zwei Teile der Ebene zu gewichten, benötigt man einen Vergleichspunkt bezüglich dem man sich im gleichen oder anderen Teil der Ebene befindet. Für den Kreis bietet sich der Mittelpunkt an. Die euklidische Figur als *Fläche*, die rings von ihrer Grenze umgeben wird, leistet die Gewichtung durch ihre Identität. Sie ist das Innen zu dem anderen, *in dem* sie ist, dem Außen.

Definition 14 (und 13) erklärt, was die Figur im allgemeinen ist, Definitionen 15-18 behandeln den Kreis, das ist die gleichmäßige Figur, und die Definitionen 19-22 die Vielecke, das sind die immer stärker ungleichmäßigen Figuren.

Bemerkenswert ist, dass sich einige Ideen aus Bereich 1 in ihrer Reihenfolge spiegeln, nicht aber die Entwicklung aus der zweiten *hypothesis*, d.h. nach unserer These Linienabschnitt 2.

---

70 So bemerkt von Cornford 1951, S. 119.

71 Siehe Kapitel 3, insbesondere die Abschnitte 3.2.2.2 und 3.4.

72 Mittels RUND und GERADE kommen auch die beiden Prinzipien des Begrenzten und Unbegrenzten zum Tragen, die Krämer 2005, S. 198, bereits bei der Winkelbestimmung am Werke sieht.

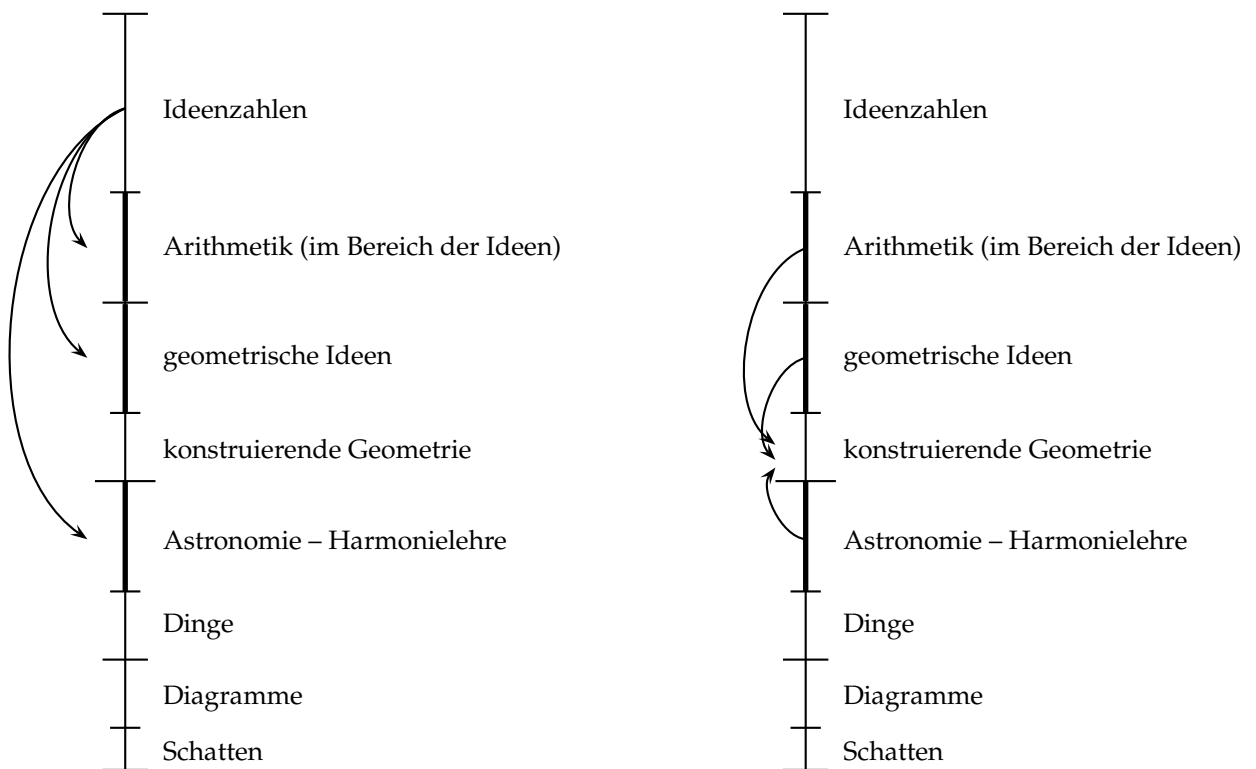
EUKLIDS ELEMENTE		ERSTE HYPOTHESE
1. Ein <b>Punkt</b> ist, was keine Teile hat.	<b>Punkt</b>	<b>Einheit</b> , keine Vielheit
2. Eine <b>Linie</b> ist Länge ohne Breite.	<b>Linie</b>	<b>Ganzes-Teil</b> , die Einheit der Vielheit
3. Die Enden einer Linie sind Punkte.	<b>Grenzen einer Linie</b>	<b>Anfang-Mitte-Ende</b> , die Begrenzung
4. Eine <b>gerade Linie (Strecke)</b> ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt	<b>gerade Linie</b>	RUND und GERADE, gleichmäßig – ungleichmäßig (rund und eckig) RUND in Bezug auf Linie
5. Eine <b>Fläche</b> ist, was nur Länge und Breite hat	<b>Fläche</b>	(vgl. Def.2)
6. Die Enden einer Fläche sind Linien	<b>Grenzen einer Fläche</b>	(vgl. Def.3)
7. Eine <b>ebene</b> Fläche ist eine solche, die zu den geraden Linien auf ihr gleichmäßig liegt	<b>ebene Fläche</b>	RUND in Bezug auf Flächen (vgl. Def.4)
8. ...	<b>(ebener) Winkel</b>	GERADE in Bezug auf Linie
9. ...	<b>geradliniger Winkel</b>	RUND in Bezug auf die Linien des Winkels
10. Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist jeder der beiden gleichen Winkel ein <b>Rechter</b> ; und die stehende gerade Linie heißt <b>senkrecht</b> zu ( <b>Lot</b> auf) der, auf der sie steht.	<b>rechter Winkel</b>	RUND in Bezug auf Winkel
11. <b>Stumpf</b> ist ein Winkel, wenn er größer als ein Rechter ist,	<b>stumpfer Winkel</b>	GERADE in Bezug auf Winkel
12. <b>Spitz</b> , wenn kleiner als ein Rechter.	<b>spitzer Winkel</b>	GERADE in Bezug auf Winkel
13. ὄρος ist das, worin etwas endigt.	ὄρος	
14. Eine <b>Figur</b> ist, was von einer oder mehreren Grenzen umfaßt wird.	<b>Figur</b>	<b>Innen–Außen</b>
15. Ein <b>Kreis</b> ist eine ebene, von einer einzigen Linie umfaßte Figur mit der Eigenschaft, daß alle von einem innerhalb der Figur gelegenen Punkte bis zur Linie laufenden Strecken einander gleich sind;	<b>Kreis</b>	RUND in Bezug auf Figur
16. ...	<b>Mittelpunkt</b>	
17. ...	<b>Durchmesser</b>	
18. ...	<b>Halbkreis</b>	
19. <b>Geradlinige Figuren</b> sind solche, die von Strecken umfaßt werden, dreiseitige die von drei, vierseitige die von vier, vielseitige die von mehr als vier Strecken umfaßten.	<b>geradlinige Figuren</b>	GERADE in Bezug auf Figur
20. ...	<b>gleichseitiges Dreieck u.a.</b>	
21. ...	<b>rechtwinkliges Dreieck u.a.</b>	
22. ...	<b>Quadrat u.a.</b>	
23. ...	<b>Parallelen</b>	

### 1.3.8 Die mathematischen Wissenschaften

Im Liniengleichnis wird die Mathematik in Denkweise und Objektart grob dem Zwischenbereich *B* zugeordnet. Im Anschluss an das Höhlengleichnis werden dann aber etwa *vier* mathematische Wissenschaften beschrieben, die der Bildung des Menschen helfen können und dies – so wird der Eindruck vermittelt – auf unterschiedliche Weisen leisten (*Politeia* 521c-539d).

Die Beschreibung der Seinsbereiche im *Parmenides* gibt nun eine auf den ersten Blick davon unterschiedene Zuordnung der mathematischen Wissenschaften zu den Linienabschnitten: Die Unendlichkeit, die Zahlen, die Multiplikation und das Plus-Eins werden bereits in der zweiten *hypothesis* begrifflich konstituiert und angeführt (*Parmenides* 142b-144a,149a-c; siehe auch Abschnitt 4.4). (Für die zwei geometrischen Bereiche siehe S.22.) Für die Astronomie und Musiktheorie kommt in Betracht, dass sie in der seltsamen Ambivalenz stehen, einerseits irgendwie auf die Welt der Wahrnehmung bezogen zu sein, andererseits in ihrer Beschreibung jeder Bezug auf die durch die Wahrnehmung gewonnenen Eindrücke abgelehnt wird (*Politeia* 527ab,529c,530b). Sie wären damit in dem zwar körperlichen, aber nicht wahrnehmbaren Bereich 5 zu verorten.

Die Ideenzahlen spiegeln sich – nehmen wir die Abbildungsverhältnisse des Liniengleichnisses zu den Seinsbereichen hinzu – demnach getrennt in der Arithmetik, der Geometrie und in der Harmonielehre und Astronomie, und diese bilden sich alle ab in den Seinsbereich 4, den Bereich der konstruktiven Geometrie, in dem die Konstruktionen und Beweise der *Elemente* zu Hause sind.



Die geometrischen Zeichnungen sind dieser Einteilung nach auch gerade keine Abbilder der Dinge in der Welt, sondern wie diese und die konstruierende Geometrie ein Abbildbereich der drei ‚mathematischen‘ Seinsbereiche 2, 3 und 5.

Gegen diese Anordnung der mathematischen Wissenschaft spricht direkt, dass Arithmetik, Astronomie und Harmonielehre damit nicht mehr in dem Abschnitt, der im Liniengleichnis für die Mathematik vorgesehen ist, beheimatet sind. Aber das ist mehr ein rhetorisches Problem, denn in den obigen Abbildungen bezeichnen die Ausdrücke für die mathematischen Wissenschaften nicht diese selbst, sondern vielmehr ihre jeweiligen Grundlagen: Die Zahlen werden begrifflich in Linienabschnitt 2 aufgebaut,

die geometrischen Objekte in 3 konstituiert, und in 5 die Verhältnisse von Zahlen und Bewegungen begründet – was erst noch gezeigt werden müsste. Die jeweilige mathematische Wissenschaft ‚findet statt‘ in Abschnitt 4.

Daraus ist zum einen eine Bewertung der mathematischen Wissenschaften gemäß ihrem Platz auf der Linie ersichtlich, die der Reihenfolge in der *Politeia* entspricht. Zum zweiten korrespondiert diese Einteilung mit der Priorität der Geometrie bei Fragen, was die Methode und Grundlage der Mathematik sei, sowohl bei PLATON wie auch der antiken Mathematik. Auch wenn die Arithmetik bzw. ihre Gegenstände letztlich der Wahrheit und Deutlichkeit nach ‚höher‘ stehen als die der Geometrie, so wird die Arithmetik als mathematische Wissenschaft in geometrischem Gewand betrieben.<sup>73</sup>

Verstandeserkenntnis aber, und nicht Vernunftkenntnis, scheinst du mir das von den geometrischen und den ihnen verwandten Wissenschaften eingehaltene Verfahren zu nennen, da du sie für etwas Mittleres hältst zwischen bloßer Meinung und Vernunft. *Politeia* 511de

### 1.3.9 Hypothesen und Struktur

Der sogenannte zweite Teil des *Parmenides* (*Parm* 137c-166c) gilt heute meist als das Dunkelste des platonischen Werkes, ‚ein Skandalon‘. HEGEL dagegen feierte den *Parmenides*, dessen zweiter Teil tatsächlich drei Viertel des Dialoges ausmacht, als das «berühmteste[n] Meisterstück der Platonischen Dialektik.»<sup>74</sup> Zwar hatte PLATON hier wie auch sonst nirgends ein System im Auge, in dem sich die Begriffe in der Gedankenbewegung auseinander im Sinne HEGELS ergeben, aber eine dialektische Verschränkung der Begriffe des Einen und Vielen ist im *Parmenides* offensichtlich. Das *Eine*, die Einheit, ist das, was Parmenides einwilligte ganz durchzudenken. Das Schema, das der «Übung»<sup>75</sup> des zweiten Teils zugrunde liegt, wird durch Voraussetzungen (*ὑπόθεσεις*), die den Überlegungen jeweils zugrunde liegen, folgendermaßen angegeben:

Nimm zum Beispiel, habe Parmenides erklärt, die Annahme (*ὑποθέσεως*), die Zenon vorausgesetzt (*ὑπέθετο*) hat, nämlich »wenn Vieles ist«. Was sich dann zwingend für das Viele selbst ergibt, in bezug auf sich selbst und auf das Eine, und für das Eine in bezug auf sich selbst und auf das Viele; ferner aber muß man auch untersuchen, »wenn Vieles nicht ist«, was sich dann für das Eine und das Viele ergeben wird, und zwar in bezug auf sich selbst und auch aufeinander.<sup>76</sup>

Es ergibt sich damit eine grundsätzliche Zweiteilung der Untersuchung in ‚wenn ... ist‘ und ‚wenn ... nicht ist‘, die jeweils in vier Teile getrennt wird, nämlich, was es für ... alleine bedeutet, was es für ... hinsichtlich (seinem) anderen bedeutet, was es für das andere in Bezug auf ... bedeutet und was es für das andere für sich betrachtet bedeutet.<sup>77</sup> Im Unterschied zu dem Beispiel «wenn Vieles ist» bzw. nicht ist führt Parmenides die Übung anhand der Voraussetzungen ‚wenn Eines ist‘ und ‚wenn eines nicht ist‘ durch.

Es findet sich nun eine zentrale Übereinstimmung zwischen der Aufstellung der *hypotheses* und dem Linienaufbau. Während bei der Linie die jeweils mittleren Teilabschnitte gleich groß sind und so nicht in dem ursprünglichen Verhältnis zueinander stehen, sind die jeweils mittleren der acht *hypotheses*, nämlich 2 und 3 wie 6 und 7, im Modus der Beziehung. D. h. während in den anderen *hypotheses* das Eine für sich oder das andere für sich betrachtet wird, so werden bei jenen die Bezüge aufeinander untersucht. Dies gibt in Bezug auf das Liniengleichnis Anlass zu zwei Vermutungen.

<sup>73</sup> Siehe die arithmetischen Bücher der *Elemente*; zum Vergleich der modernen Logik und euklidischer Geometrie als Fundierung der Mathematik siehe auch Abschnitt 5.3.

<sup>74</sup> Hegel 1986a, S.79.

<sup>75</sup> *Parmenides* 135d.

<sup>76</sup> *Parmenides* 136ab, übersetzt von E. Martens in Martens 1987.

<sup>77</sup> Das Schema wird in *Parmenides* 136bc erneut leicht verfeinert.

1.) Die Urbild-Abbild-Verhältnisse *innerhalb* der zwei Grundbereiche ( $A+B$  und  $C+D$ ) würden sich stets darstellen als das von Einzelnen zu einem Beziehungsgefüge wie das eines Beziehungsgefüges zu Einzelnen. Für die achtfache Teilung in Seinsbereiche würde damit die Abbild-Beziehung bestimmter. In dem einen Fall würden die Beziehungen ‚entstehen‘, wenn die Einzelnen ihrem Gehalt nach in Bezug aufeinander gesetzt werden, die Beziehungen betrachtet und die Einzelnen ‚vergessen‘ werden. In dem anderen Fall würden sich die Gegenstände ergeben, wenn in einem lebendigen Beziehungsgefüge die leeren Objektstellen formal besetzt, aus den Beziehungen heraus bestimmt und die Beziehungen sodann ‚vergessen‘ werden. Diese Ausdeutung würde auch den oben ausgearbeiteten Eigenschaften der Urbild-Abbild-Beziehung genügen (s. S. 18).

2.) Anders scheint die Abbild-Beziehung für Verhältnisse eines Teilabschnitts aus einem der beiden Grundbereiche in einen Teilabschnitt des anderen zu sein, denn der Modus der beiden Abschnitte wäre der *hypothesis*-Konstruktion nach gleich. Die Struktur-Ideen aus 2 wären in die sichtbaren Struktur-Gegenstände in 6 abgebildet. Tatsächlich ergibt eine Analyse der *hypothesen* 5 und 6 (*Parmenides* 160b-164b), dass dort die Modi praktisch vertauscht sind, und sich so diese Spezifizierung der Abbild-Beziehung auf 5 und 6 erweitert.<sup>78</sup>

Gegen diese Überlegungen scheint auf den ersten Blick das (in Abschnitt 1.3.7) dargestellte Verhältnis der Ideenzahlen zu den euklidischen Definitionen zu sprechen, da sich die höchsten Ideen direkt in den ersten Definitionen spiegeln und gerade nicht als Strukturmomente auftreten oder sich anders über eine Struktur abzubilden scheinen; die Entsprechung war ja direkt: Punkt–Einheit, Linie–Ganzes-Teil, Linienbegrenzung–Begrenzt-Sein, gerade Linie–Rund-Sein. Allerdings setzen die euklidischen Definitionen bereits einen Begriffsraum voraus, in dem Begriffe des Ortes, der Ausdehnung in Länge, Breite und Tiefe und ähnliches bestimmt sind. Im *Parmenides* dagegen dreht es sich ja um die Bestimmung der Fundamente der jeweiligen Seins- bzw. Ideenbereiche. Der erste Blick könnte demnach in diesem Fall trügen.

### 1.3.10 Zum Hinterschreiten der mathematischen Voraussetzungen

Die Ausführungen im Liniengleichnis zur mathematischen und philosophischen Methode sind erst dadurch angemessen zu interpretieren, dass man dem hier nur zaghafte skizzierten Zusammenhang zwischen den platonischen Ideen und den Euklidischen *Elementen* konsequent nachgeht und so bestenfalls das im Liniengleichnis allgemein Beschriebene konkret ausführt.<sup>79</sup> Dies wird hier nicht geleistet, sondern es werden nur ein paar vorläufige Bemerkungen angebracht.

Die philosophische Denkbewegung kann in einen aufsteigenden und einem absteigenden Teil unterschieden werden.

So verstehe denn auch, daß ich unter dem andern Teil des Denkbaren dasjenige meine, was die Vernunft unmittelbar ergreift, indem sie mittels des dialektischen Vermögens Voraussetzungen macht, nicht als Anfänge, sondern wahrhaft Voraussetzungen als Einschnitt und Anlauf, damit sie bis zum Aufhören aller Voraussetzung, an den Anfang von allem gelangend, diesen ergreife, und so wiederum, sich an alles haltend, was mit jenem zusammenhängt, zum Ende hinabsteige, ohne sich überall irgend etwas sinnlich Wahrnehmbaren, sondern nur der Ideen selbst an und für sich dazu zu bedienen, und so am Ende eben zu ihnen, den Ideen, gelange.

*Politeia* 511bc

<sup>78</sup> Eine Untersuchung der Darstellung der unteren Abschnitte im Hinblick auf ihre Konstitution von Seinsbereichen und eine Analyse von 7 und 8 auf ihren strukturtheoretischen Gehalt steht aus.

<sup>79</sup> An diesem konkreten Vorgehen könnte man gegebenenfalls dann die Eigenart des philosophischen Denkens im Unterschied zum Mathematischen explizieren und vor allem auch einsehen, warum die philosophischen Gedankengänge, die die Mathematik betreffen, nicht auf mathematische reduziert werden können. Zudem wäre – wie bereits angemerkt – die rein mathematischen Methoden der *analysis* und *synthesis* herauszuarbeiten und zu betrachten, inwiefern sie in die Methodenbeschreibung im Liniengleichnis mit hineinspielen und inwiefern sie ein mathematisches Abbild einer philosophischen Methode sind.

Dass durch dieses philosophische Vorgehen die Voraussetzungen der Mathematik hinterfragt und genauer bestimmt werden, ist weniger umstritten. Unklarer ist dagegen, in was für einer Beziehung die absteigende Dialektik zur Mathematik steht. Wenn sie ein logisches Folgern wäre, dann läge es nahe die reine Mathematik, in der ohne Bilder verfahren wird, als Teil der platonischen Philosophie zu nehmen.<sup>80</sup> Ob die *Elemente* dann ein Beispiel für diese rein begriffliche Mathematik sind oder für das bildabhängige Folgern, hängt davon ab, welche Rolle man die dem Text der *Elemente* beigelegten Diagrammen zuspricht.

Alternativ könnte die Dialektik auch nur maximal bis zu den Voraussetzungen der Mathematik reichen und die Mathematik ganz der *dianoia* überlassen, oder das philosophische Denken bringt entlang den mathematischen Theoremen und Beweisen wandernd etwas zu der dianoetischen Mathematik hinzu. Für die letztere Möglichkeit spricht ein in einen anderen Dialog unvermittelt eingebrachter Vergleich:

Keine Art der Jagd aber, sprach er, geht doch auf etwas weiteres als eben auf das Erjagen und Einfangen. Haben sie aber eingefangen was sie jagten, so sind sie selbst nicht im Stande es zu gebrauchen, sondern die Jäger und Fischer übergeben es den Köchen. Die Geometer aber und Arithmetiker und Astronomen, nämlich auch diese sind Jagende, weil sie ja ihre Figuren und Zahlenreihen nicht machen, sondern sie finden nur die gegebenen auf. Wie also nun diese auch nicht selbst verstehen sie zu gebrauchen, sondern nur zu jagen, so übergeben sie, so viele ihrer nicht ganz unverständlich sind, ihre Findungen den Dialektikern, um Gebrauch davon zu machen.  
*Euthydemos 290bc*

Das Verhältnis von Mathematik und Philosophie wird durch diesen Vergleich als eine Arbeitsteilung bestimmt, die sich nicht gegenseitig überflüssig macht, sondern aufeinander angewiesen ist. Der Dialektiker benutzt dabei nicht die vom Mathematiker unreflektiert vorausgesetzten *hypotheseis*, sondern das, was dieser «erjagt», also die mathematischen Resultate bzw. die in ihren mathematischen Eigenschaften bestimmten geometrischen Objekte.

Ein nahe liegendes Beispiel dafür scheinen die platonischen Körper zu sein, deren Konstruktion und Vollständigkeit in der Geometrie geleistet wird (*Elemente XI-XIII*), was im *Timaios* für philosophische Überlegungen Verwendung findet. Diese wären aber unserer These nach nicht mit der dialektischen Methode, wie sie im Zusammenhang mit dem Liniengleichnis geschildert wird, zu verwechseln. Da der *Timaios*, zumindest was die geometrischen Körper betrifft, im fünften Abschnitt spielt (siehe 1.3.12), so muss auch die verwendete Methode eine andere sein (*Timaios 29cd*).

Ein anderer Ansatz wäre gemäß der Spiegelung des Linienabschnitts 3 in 4 die Ideenzahlen in den Theoremen und Beweisen der *Elemente* zu suchen. Zunächst kann man spekulieren, wie die Ideenzahlen im Ganzen in die Axiomatik der *Elemente* des ersten Buches eingehen. Die ersten fünf sind in den Definitionen zu finden, die Idee der Bewegung in den Postulaten und in den Axiomen im engeren Sinn die Ideen der Gleichheit (Axiome 1-3), der Ähnlichkeit (Axiom 7) und des Größenunterschieds (bzw. des Gleich-groß-Seins aufgrund gleicher Maßeinheiten) (Axiom 8). Die Idee der Zeit, die hier nicht erwähnt wird, würde die nacheinander geordnete Ausführung der für die Beweise notwendigen Konstruktionen im Linienabschnitt 4 ermöglichen und wäre wie in der ersten *hypothesis* der Abschluss des Seinsbereichs, an den sich der Übergang zum nächsten anschließt. In den 13 Büchern der *Elemente* lassen sich die Ideenzahlen auch zum Teil direkt wiederfinden. So ist Buch zehn eindeutig der Idee des Gleiches-Maß-Habens zuzuordnen, das zweite Buch handelt von dem *Teilen* der Seiten von Flächen. Das dritte Buch enthält Theoreme zum Kreis und ist damit mit der Idee des In-etwas-Seins verbunden, das vierte Buch beschäftigt sich mit der Einbeschreibung von Vielecken in Kreise und hängt so mit der Idee, die Gleich- und Ungleichmäßigkeit in sich verbindet, zusammen. Wie sie auch im Detail aussehen

<sup>80</sup> So wird manchmal zumindest ein Teil des Weges abwärts als ein deduktives Folgern interpretiert, dass gediegen mathematischer Art ist: «So, to sum up my reading of the Divided Line: it is the embodiment of an argument for the deductive method in exact science, for finding the first principles, that is, the definitions and axioms, which define the structure in question, and then proceeding purely deductively to investigate it. He [Plato] is arguing that the practice of beginning deductions with premises drawn from the consideration of empirical examples is inadequate, because the empirical examples do not adequately represent the structure.» (Tait 2005, S. 191).



würde, ihre Spiegelung wäre auf jeden Fall komplexer und nicht in der ursprünglichen Reihenfolge, wie ja auch (nach 1.3.8) zu erwarten ist, da sich im Linienabschnitt 4 die drei Strecken 2, 3 und 5 spiegeln.

Eine andere Folgerung ergibt sich aus der Analogie der Linie mit der Höhle. Die Gegenstandsbereiche der Mathematik und Dialektik liegen außerhalb der Höhle, trotzdem kann in der Höhle bereits Mathematik betrieben werden und soll es auch – gerade für die Umlenkung der Seele zum Feuer und zum Ausgang hin! Die beschriebene Methode des Mathematikers ist demnach für sich noch ohne Gewähr, dass mit ihr die der Mathematik angestammten Objekte als dieselben erkannt werden, und wird für gewöhnlich ohne Bewusstsein davon angewandt, wie die eigentlichen Objekte der Mathematik sind. Tatsächlich erwähnt niemand beim Liniengleichnis die Gegenstände, die dem Bereich *B* der Mathematik angehören müssten, und mit dem Fokus auf den Methoden der Mathematik und Dialektik wird auch die Rede über die Ideen minimiert. Garantieren die beschriebenen Methoden nicht eine bewusste Erkenntnis ihrer eigentlichen Gegenstände, so können sie nur letztlich äußerliche Beschreibungen sein und angelehnt daran, wie man sozusagen in der Höhle Mathematik und vermutlich auch Dialektik betreibt.

### 1.3.11 Die Gegenstände der Dianoia

PLATON benennt die Objekte der *dianoia* scheinbar nicht und äußert sich nicht weiter über die Beschaffenheit des Gegenstandsbereichs. Entsprechend gab es gegensätzliche Behauptungen in der Diskussion, wobei sich mittlerweile eine Tendenz dazu abzeichnet, anzunehmen, dass PLATON keine rein mathematischen Objekte eingebaut sehen wollte.<sup>81</sup> Diese Interpretation muss vor allem zwei Aussagen relativieren oder entscheidend umdeuten. In *Politeia* 477cd werden die Erkenntnisvermögen eindeutig mit ihren Gegenständen in Bezug gesetzt, womit jeder Kognitionsart ein eigener Objektbereich entspricht. Zweitens behauptet ARISTOTELES über seinen Lehrer:

Ferner erklärt er [Platon], daß außer dem Sinnlichen und den Ideen die mathematischen Dinge existierten, als dazwischen liegend, unterschieden vom Sinnlichen durch ihre Ewigkeit und Unbeweglichkeit, von den Ideen dadurch, daß es der mathematischen Dinge viel gleichartige gibt, während die Idee selbst nur je eine ist.<sup>82</sup>

Setzt man die dargestellte Verknüpfung zwischen Liniengleichnis und *Parmenides* voraus, dann kann man den Bericht des ARISTOTELES so auf PLATONS Lehre beziehen: ‚Ewig‘ und ‚unbeweglich‘ sind die mathematischen ‚Dinge‘ als in den Seinsbereichen 3 und 4 des nur Denkbaren liegend. Als viele gleicher Art treten sie in Linienabschnitt 3 nur als notwendig verknüpfte Komponenten eines anderen mathematischen Begriffs auf, in Linienabschnitt 4 als beliebig oft nebeneinander Gegebene mathematische Objekte.

Erstens, wenn man sich auf eine Betrachtung des Linienabschnittes 3 beschränkt, hat man es dort mit einer ‚anderen Art von Idee‘ (*Parmenides* 158c) zu tun, die in sich teilbar ist (s. S. 22) und genau die Begrifflichkeiten der Definitionen der *Elemente* einschließt. Insofern dann zum einen höherdimensionale Ideen als Grenzen eine bestimmte niedriger dimensionale Idee mehrfach eingebunden haben und bis auf den unteilbaren Punkt in mehrere ihrer Idee relativ beliebig geteilt sind, gibt es in 3 die gleiche Idee mehrmals. Diesen mathematischen Begriff trotzdem zu den Ideen zu zählen, findet seine Begründung darin, dass es keine höheren Ideen aus 2 und 1 gibt, die das Wesen der geometrischen Größen fassen könnten, weil dort die ‚Wirkung‘ der Einheit zu stark ist, als dass die Ideen wie in 3 in Teile zerfallen würden. Das ‚Viereck selbst‘ und ‚seine Diagonale‘<sup>83</sup> verweisen also nicht auf die ‚über‘ dem Mathematischen thronende eigentliche Idee des Vierecks, sondern auf die mathematische Idee des Vierecks,

81 So auch Wieland 1999, S. 208/212, Thurnher 2005, S. 118, Dominick 2010, S. 12, Pritchard 1995, S. 92.

82 ARISTOTELES *Metaphysik* 987b14-18.

83 *Politeia* 510d.

zu der es keine ‚höhere‘ Alternative gibt. Diese mathematischen Objekte von Segment 3 werden, wenn die Einbindung der euklidischen Definitionen korrekt ist, tatsächlich von Sokrates erwähnt, da es sich um die *hypotheseis* der Mathematik handelt.<sup>84</sup>

Zweitens sind diese mathematischen Objekte aber weder mit den geometrischen Zeichnungen, den während des Beweisens in irgend einem Sinn konstruierten Objekten noch mit den modernen mathematischen Objekten, wie sie mittels impliziten Definitionen z. B. bei Hilbert gegeben werden, zu verwechseln.<sup>85</sup> Der Unterschied besteht darin, dass die Postulate der *Elemente* nicht für jene mathematischen Objekte in *B* gelten, weil sie konstruktiv sind, das heißt, dass aus *beziehungslos Gegebenem* sich Neues ergibt; aus zwei gegebenen Punkten z. B. die Strecke zwischen ihnen.<sup>86</sup> Im Ideellen lässt sich nur notwendig Verbundenes, d.h. eine Idee oder Ideenbeziehungen, untersuchen. Insofern moderne Axiomatiken das bei EUKLID Konstruktive direkt in die Axiome einbinden, sind die dadurch konstituierten mathematischen Objekte von PLATONS mathematischen Objekten zu unterscheiden. Sie sind im Sinne des Liniengleichnisses Zwitterobjekte, die durch die Zweiteilung in der Methode ‚entstehen‘, nämlich für das ‚Viereck selbst‘ etwas zu beweisen, aber mit Hilfe von Gegenständen und Zeichnungen (*Politeia* 510d).<sup>87</sup>

### 1.3.12 Mathematik und die Entstehung der Welt

Die Parallelisierung von Linie, Höhle und *Parmenides* bringt eine weitere neue Perspektive auf den *Timaios* ins Spiel. Im *Timaios* wird die metaphysische Entstehung bzw. der eigentliche Aufbau der Welt geschildert. Entgegen der reichhaltigen Rezeptionsgeschichte, die der *Timaios* in der abendländischen Philosophie und mittelalterlichen Theologie erfahren hat, muss es einem rationalen Leser heute äußerst seltsam erscheinen, dass man zuweilen diesen Text an der Universität als philosophischen Gesprächspartner würdigt. Auch die Einbindung mathematischer Sachverhalte, die für sich klar herausgearbeitet wurden, in eine angenommene philosophische Argumentation weist massive Schwierigkeiten auf, will man sie nachvollziehen.<sup>88</sup>

Für unseren Zusammenhang sind zwei Auffälligkeiten, wie die geometrische Objekte behandelt werden, von Bedeutung. Der Übergang der drei elementaren Körper, die aus elementaren Dreiecken aufgebaut sind (Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder), wird so vorgestellt, dass sich die elementaren geometrischen Körper einer Art in die Dreiecke auflösen, aus denen ihre Begrenzungsflächen bestehen, die sich dann wieder zu Körpern einer der anderen Arten zusammensetzen (*Timaios* 54cd). Das ist sonderbar. Derartige geometrische Objekte sind weder Bestandteil des sichtbaren Seinsbereichs, da Flächen dort nur *an* Körpern auftreten und Körper sich nicht in Flächen auflösen lassen, noch sind sie rein geometrische Objekte, da auch dort Flächen die Körper nur begrenzen, nicht konstituieren, und insbesondere ersteinmal ein geometrischer Raum vorhanden sein muss, in dem sich die Flächen bewegen können;<sup>89</sup> die früh-griechische Geometrie, wie sie uns in den Definitionen der *Elemente* entgegen getreten ist (s. Abschnitt 1.3.7), ist aber eine Figuren- und Linientheorie, die nicht als erste Voraussetzung einen unendlichen Raum annimmt, aus dessen Punkten sich die weiteren geometrischen Objekte ergäben. Auf

84 Die *hypotheseis* bringt auch Thurnher 2005, S. 110, in Bezug zu den *mathematika*.

85 Im Kontext des Liniengleichnisses unterscheidet schon Smith 1981, S. 129, zwischen den Objekten, *mit* denen der Mathematiker arbeitet, und denen, *über* oder *auf die hin* er seine Überlegungen anstellt.

86 Für eine Explikation der Bedeutung des Gegebenseins siehe Abschnitt 2.3.5.

87 Siehe dazu auch Abschnitt 5.2.

88 Vgl. Mueller 2005.

89 Siehe dazu auch *Timaios* 50b: «das Dreieck hingegen und was sonst noch an Figuren entstanden ist, das dürfte er niemals als seiend bezeichnen, da sie sich ja – während man sie noch (mit ihrem Namen) versieht – schon wieder ändern, sondern man sollte damit zufrieden sein, wenn man das So-Beschaffene mit einer gewissen Sicherheit so annehmen kann».

jeden Fall zeigt die Möglichkeit, die Körper aus den Begrenzungsflächen zu ‚konstruieren‘, dass der rein begriffliche Bereich der euklidischen Definition verlassen wurde.

Zum zweiten ist auffallend, dass die vier Elemente, aus denen sich wiederum die Welt zusammensetzt, mit Mengen von Tetraedern, Oktaedern, Würfeln und Ikosaedern gleichgesetzt werden, und versucht wird, die Eigenschaften der sichtbaren Elemente mit den geometrischen Körpern in Verbindung zu bringen: Das Tetraeder ist besonders beweglich, zerlegbar und spitz, entspricht demnach dem Feuer, und ähnliches mehr (*Timaios* 56ab). Die Welt soll also in ihren elementarsten Teilen aus *geometrischen* Körpern bestehen. Diese Behauptung spricht jedoch dafür, dass PLATON hier gar nicht direkt unsere sichtbare Welt meint, sondern eine irgendwie dahinterliegende, die eng mit der sichtbaren zusammenhängt.<sup>90</sup> Die erste Auffälligkeit deutet dagegen daraufhin, dass es sich bei dem besprochenen Bereich bereits um ein Abbild der ganzen Geometrie (und nicht nur der geometrischen Ideen) handelt, während einige Einflechtungen einfacherer Prinzipien auf die Spiegelung höherer Prinzipien aufmerksam machen.

Diese Hinweise sind in einer Interpretation des *Timaios* im Lichte einer achtfachen Teilung der Linie nach dem goldenen Schnitt realisiert. Die Behandlung der geometrischen Körper würde sich im *Timaios* im wesentlichen im Seinsbereich 5 abspielen, in dem sich nicht die üblichen Ideen aus 2 spiegeln, sondern die höchsten Ideen aus 1, sowie der gesamte Bereich der Geometrie, nämlich 3+4. 5 ist der erste nicht mehr geistig-seelische Bereich der Linie. Dieser Bereich der Elemente würde sich wiederum im Sichtbar-Räumlichen spiegeln.

### 1.3.13 Höhle und Kopf: Zur Physiologie des Höhlengleichnisses

Gernot Böhme weist zurecht darauf hin, dass heutzutage jeder akademisch Gebildete einige der in den Dialogen für den Philosophen geforderten Eigenschaften von alleine erfüllt – wie ein Handeln aus Wissen, eine Distanzierung vom eigenen Körper oder «die Errichtung einer inneren Instanz, die die Zurechenbarkeit von Handlungen garantiert».<sup>91</sup> Im Hinblick auf das Höhlengleichnis vermutet er aber weiter:

Freilich, wenn man daraus folgern wollte, daß heute schon jedermann halbwegs ein Philosoph sei, so wäre das ein anachronistischer Fehlschluß, denn es könnte ja heute vom Philosophen ganz etwas anderes verlangt sein als zu Sokrates' oder Platons Zeit. Auch ist mit der Trivialisierung jener Umwendung von einer sinnengebundenen Betrachtungsweise zu Erkenntnis durch Verstand und Vernunft, also, wie wir heute sagen würden, vom Konkreten zum Abstrakten, noch nicht garantiert daß wir Platons Ausführungen dazu im siebten Buch der *Politeia* ohne weiteres verstehen. Es könnte sein, daß man als Leser vielleicht gerade die Umwendung der Seele zunächst in umgekehrter Richtung vollziehen muß, um überhaupt zu verstehen, wohin die von Platon geforderte *περιαγωγή τῆς ψυχῆς* uns geführt hat.<sup>92</sup>

Die gewöhnliche Lesart legt es tatsächlich nahe, den Ausstieg aus der Höhle und den sozusagen Aufstieg auf der Linie als ein Entfremden von der sichtbaren Welt und dem eigenen Körper zu interpretieren, der zu immer abstrakteren Begriffen voraus schreitet. Diagnostiziert man zudem, dass man sich zumindest als Akademiker bereits im Begriffsbereich außerhalb der Höhle befindet, liegt es wieder nahe zu fordern, die eigentliche Aufgabe in einem Abstieg zu sehen und konkreter in der Erarbeitung eines Bewusstseins seines eigenen Leibes, von dem man sich hinweg abstrahiert hatte als er auf einem Sitz im Vorlesungssaal saß.

So berechtigt diese Forderung an sich ist, so stimmt der platonische Kontext nicht. Für PLATON war der Ausstieg aus der Höhle ein Teil der Angleichung an das Göttliche (*ὁμοίωσις θεῶν*). Die grandiose Körperbeherrschung des Sokrates, wie im *Symposion* 219<sup>eff.</sup> geschildert, mag zwar dem Abstieg in die Höhle

<sup>90</sup> Sonst müsste er diese geometrischen Körper für grundsätzlich sichtbar, wenn vielleicht auch nicht für den Menschen, halten. Im übrigen dürften die elementaren Körper auch nicht geometrisch perfekt sein, solange man an einer Aussage festhält (wie in Abschnitt 3.5 diskutiert), die die Existenz von materiellen, geometrisch exakten Figuren und Linien bestreitet.

<sup>91</sup> Böhme 2000, S. 36; siehe auch Böhme 1998, Abschnitt II.3.

<sup>92</sup> Böhme 2000, S. 37.

geschuldet sein. Aber ein Verweis im *Timaios* gibt ein anderes Bild. Dort wird der Kosmos von PLATON kugelförmig beschrieben (*Timaios 62d*) und ihm nach wird der Kopf des Menschen rund geschaffen als das Edelste am menschlichen Körper (*Timaios 44d*), eine «knöcherne Kugel» mit «schmalem Zugang» (*Timaios 73e*). Der Mensch sollte mit seinen Denkbewegungen im Kopf die harmonischen Bewegungen des Alls nachahmen (*Timaios 90e*). So ist auch die Höhle, die dem sichtbaren Bereich entspricht (*Politeia 517b*), in ihrem Umschließen ein Bild des (sichtbaren) Kosmos.

Diese damit evozierte Analogie zwischen Kopfschädel, Kosmos und Höhle bringt in Verbindung mit dem Höhlengleichnis ein erstaunlich modern erscheinendes Bild hervor. Das, was wir sehen, ist nur ein Film, eine Projektion, nämlich die vom Feuer an die Schädelwand geworfenen Schatten. Die Weltauffassung findet nur im Kopf statt. Gedanken wären gerade nichts, was außerhalb der Höhle erst gewonnen würde, sondern wären nur Schatten der Realitäten. Dieses neurophysiologisch scheinende Bild wird jedoch erweitert durch den «unwegsamen und steilen Aufgang» (*Politeia 515e*) bis zum Ausgang aus der Höhle über die Wirbelsäule<sup>93</sup> in den Brust- oder Bauchraum.<sup>94</sup> Durch den Ausstieg aus der Höhle wird dieser Analogie nach erst der leibliche Rumpf als Sitz des Selbstbewusstseins realisiert und dieser Körperteil damit erst in bewussten Besitz genommen. (Die folgende die Details des Höhlengleichnisses frei interpretierende Zeichnung von Irina Spiegel illustriert diese Überlegungen.)

Nun kommt hier wieder ein Problem zum Vorschein, das in der Spannung zwischen einer ontologischen und metaphysischen Interpretation auf der einen Seite und einer begrifflich ‚reduktionistischen‘ auf der anderen Seite besteht. Das Auftreten allgemeinerer Strukturen in den euklidischen Definitionen ist rational einsehbar oder auch widerlegbar, die Existenz von Ideenzahlen, die erst durch eine Ideenschau erfasst werden, und unterschiedlichen Seinsbereichen sowie der Befreiung der Seele von den Fesseln der irdischen Welt und ihr Aufstieg in die geistige Welt sind alles recht religiös, zumindest sehr voraussetzungsreich anmutende Sachverhalte. Wie soll man aber die *dianoia* als ‚Oberflächenmethode‘ benutzen können, wenn man noch gar nicht befreit und aus der Höhle geführt wurde? Wir werden diese Schwierigkeit später in Abschnitt 5.6 anders als Böhme (s. o.) angehen.

Damit sind wir am Ende unserer Bemerkungen zum Liniengleichnis gelangt und staunen im Rückblick doch etwas. – Im nächsten Abschnitt wird noch eine scheinbare Reminiszenz der Linie im hinteren Teil der *Politeia* in den Fokus der Aufmerksamkeit gerückt und dann das Kapitel mit einer genaueren Betrachtung des Goldenen Schnitts abgeschlossen.

93 Wie durch den Weg aus der Höhle der sichtbare vom geistigen Außenbereich abgegrenzt wird, so trennt der Hals Kopf und Brust (*Timaios 69e*).

94 Wer hier weiter spekulieren möchte, findet bei I. H. Fichte vielleicht etwas Interessantes. Dieser kommt in seiner Anthropologie (Fichte 1856) auf die Schilderung veränderter Bewusstseinszustände zu sprechen, bei denen das Bewusstsein sich selbst leiblich tiefer, u. a. in der Magengrube, verortet (S. 375f.), während es sich gleichzeitig zum Teil steigert (S. 384). Es sind «... die ausdrücklichen und übereinstimmenden Aussagen der Somnambulen von einer Versetzung ihres Bewusstseins in einen andern Körpertheil, von einem ‚Verlassensein des Hirns durch die Seele‘...» (S.384), die auf den ersten Blick eine Parallele zu unseren Vermutungen über eine anthropologische Seite des Höhlengleichnisses bieten. Insofern diese Zustände mit einem Hellsehen oder Wachträumen verbunden sind, ergibt sich daraus eine spiritualistische Deutung des Gleichnisses: PLATON habe mit der Umkehr und Austritt der Seele und ihrer steigenden Wahrnehmungsfähigkeit ein Hellsehen bei gesteigerter Bewusstheit angedeutet.



### 1.3.14 Die «unvernünftigen Linien» in Politeia 534d

Sokrates ist nach dem Sonnen-, Linien- und Höhlengleichnis mit Glaukon die nähere Ausdeutung dieser Gleichnisse durchgegangen. In *534a* werden die Analogien des Liniengleichnisses, insofern sie durch die Verhältnisse der Linienstücke vorgegeben sind, aufgezählt, und in *534b* die Priorität des Dialektikers,

der über das Wesen und Sein Rede (λόγος) stehen kann, hervorgehoben. Dieser sollte das Bildungsideal für die kommenden Staatsmänner sein.

Und deine eigenen Kinder, die du jetzt in unsrer Rede erziehst und bildest, wenn du die je in der Wirklichkeit erzögest, würdest du sie doch gewiß nicht, wenn sie unvernünftig wären wie Linien, den Staat regieren lassen und das Wichtigste von ihnen abhängig machen?

Ἀλλὰ μὴν τοὺς γε σαντοῦ παῖδας, οὓς τῷ λόγῳ τρέφεις τε καὶ παιδεύεις, εἴ ποτε ἔργῳ τρέφοις, οὐκ ἂν ἔασαις, ὡς ἐγῶμαι, ἀλόγους ὄντας ὥσπερ γραμμάς, ἄρχοντας ἐν τῇ πόλει κυρίου τῶν μεγίστων εἶναι.

Der kurz gehaltene Vergleich «ἀλόγους ὄντας ὥσπερ γραμμάς» ist ob seiner Kürze von einiger Schwierigkeit. Früher wurde dieser Ausdruck hauptsächlich mathematisch begriffen, indem man ἀλόγος als ‚irrational‘ oder ‚verhältnislos‘ übersetzte, und die verhältnislosen Linien als in irgendeinem Sinne inkommensurable Linien verstand.<sup>95</sup> Diese Deutung ist allerdings nicht ganz einsichtig, da fraglich bleibt, was das mathematisch gelesene «ἀλόγους» als Eigenschaft der Kinder bedeuten soll.<sup>96</sup> Wie manche Linien untereinander ohne gemeinsames Maß sind, so die παῖδες gegeneinander? Die aus dem Kontext von 534b sich ergebende Bedeutung als ‚die Kinder, die keine Erkenntnis haben und noch keine verständige Rede und Erklärung geben können‘, scheint mit dem mathematischen Sinn nicht in Verbindung zu bringen zu sein.

Erler 1983 entwirft ein neues Verständnis dieser Stelle. Die jungen Athener hatten zum Schreibenlernen Tafeln, auf die ihr Lehrer Paare gerader Linien zeichnete, zwischen die sie die Buchstaben zu malen hatten. So wie die bloßen Linien auf ihren Schreiftafeln zwar für die Schrift, aber noch wortlos sind, so könnten die Kinder noch ohne Erklärung/Rede/Worte sein. Diese Interpretation lässt sich in die platonischen Dialoge gut einbetten.

In 500de ist von dem Philosophen als «Bildner zur Besonnenheit und Gerechtigkeit», als eines «des göttlichen Urbildes sich bedienenden Zeichner[s]» die Rede. Den «Staat und die Gemüter der Menschen» müssen die Philosophen aber zuerst «wie eine Tafel ... rein machen» (501a).

Und so werden sie wohl, denke ich, einiges auslöschen, einiges wieder einzeichnen, bis sie möglichst menschliche Sitten, soviel es sein kann, gottgefällig gemacht haben. –  
Die schönste Zeichnung, sagte er, wäre dies wenigstens. Politeia 501bc

Das Bild des Einschreibens in die Seele tritt in den platonischen Dialogen öfters auf. So wird die Seele in *Philebos* 38e-39a mit einem Buch verglichen, in das «das mit den Wahrnehmungen zusammentreffende Gedächtnis» gleichsam Reden einschreibt. In *Phaidros* 276a ist es die «lebende und beseelte Rede des wahrhaft Wissenden», die «mit Einsicht geschrieben wird in des Lernenden Seele».

Ähnlich verhält es sich mit den Gesetzen. Von weisen Menschen auf die Welt gebracht, schreibt die Stadt sie ihren Bürgern vor, die danach regieren und sich beherrschen lassen sollen; wie ein Schreiblehrer seinen Schülern die Worte zum Nachmalen vorschreibt.

Wenn sie [die Kinder] dann aber ihre Lehrer verlassen, so nötigt wiederum die Stadt sie, die Gesetze zu lernen und nach diesen zu leben, wie nach einer Vorschrift, damit sie nicht eigenem Gutdünken folgend etwas Ungeschicktes beginnen; sondern recht eigentlich wie der Sprachlehrer den Kindern, die noch nicht schreiben können, die Buchstaben mit dem Griffel vorschreibt, und ihnen dann die Tafel hingibt und ihnen befiehlt, diese Züge, wie er sie ihnen vorgeschrieben hat, nachzuziehen, ebenso schreibt die Stadt die Gesetze vor von trefflichen alten Gesetzgebern ausgedacht, und befiehlt ihnen nach diesen zu regieren und sich regieren zu lassen. Wer aber hiervon abweicht, den züchtigt sie, und diese Züchtigung heißt bei euch und an vielen andern Orten, gleichsam weil die Strafe den Menschen wieder weise macht, eine Weisung.

*Protagoras* 326c-e

Erler 1983, S.226, schlägt deshalb folgende Übersetzung für 534d2 vor:

<sup>95</sup> Wie es vielleicht die spätere Verwendung von ἀλόγος in den Definitionen, Buch X, bei EUKLID nahelegt. Zu diesen Interpretationen gehört u. a. Gaiser 1998, S. 370.

<sup>96</sup> Siehe Erler 1983, S.224.

Wenn du aber deine eigenen Kinder, über deren mögliche Erziehung wir hier jetzt im Dialog diskutieren, einmal tatsächlich erziehen solltest, dann würdest du wohl nicht zulassen, wie ich meine, daß sie, wenn sie noch ohne Logos sind wie bloße Linien ohne Schrift (auf der Schulschreibtafel), in der Stadt herrschen und Herr über die wichtigsten Angelegenheiten sind.

Die Schwäche dieser Interpretation ist, dass sie den offensichtlichen sprachlichen Bezug der Schlüsselwörter auf das Dialogumfeld bestimmende Liniengleichnis außen vor lässt. Dort (509d) werden die «wie von einer in zwei geteilten Linie» (ὅσπερ τοίνυν γραμμὴν δίχα τετμημένην) ungleichen Teile wieder im gleichen Verhältnis (ἀνὰ τὸν αὐτὸν λόγον) geteilt und die Verhältnisgleichheiten in 534a angesprochen.

Sieht man diesen Bezug auf das Liniengleichnis als verbindlich an, dann kann sich folgende Interpretation ergeben. Die Linien liest man als die Linienabschnitte der geteilten Linie. Diese stehen aber gerade, wenn man sie einzeln aufeinander bezieht, in einem (sogar bestimmten, insofern gleichen) Verhältnis. Zu was sie sich aber nicht verhalten, sind die Gegenstandsbereiche und Vermögen, die ihnen entsprechen. Diese können nun für die Interpretation als der gemeinsame Bezugspunkt des ἀλόγους von Kindern und Linien genommen werden: So wie die Linien in keinem Verhältnis stehen zu den Seelenvermögen, sowenig stehen die Kinder in einem Verhältnis zu ihren Fähigkeiten und zu den dieselben betreffenden Dinge. Das heißt aber insbesondere, dass sie kein Wissen und keine Erkenntnis darüber besitzen und sich nicht darüber erklären können.

Als letztes wird noch eine stärker spekulative Interpretation angeführt, die eine etwas abgewandelte Form der früher allgemein akzeptierten ist (s. S.39), die aber dem Vorwurf entgeht, ein mathematisch verstandenes ἀλόγος wäre nicht sinnvoll von Kindern zu prädicieren. Ausgangsüberlegung ist, dass die Verhältnisse der Erkenntnisfähigkeiten untereinander in Bezug auf die einzelne Menschenseele normative Vorgaben sind (s. S.18). Die Seele wird so geordnet, dass sie gerecht ist, d.h. jeder Teil das ihm Gemäße tue, indem ihre Teile in ein Verhältnis (λόγος) gebracht werden. Die entscheidende Stelle wäre demnach zu paraphrasieren als «... wenn der Kinder Seelenvermögen nicht in ein (vernünftiges) Verhältnis gebracht sind...». Denn ὅσπερ γραμμᾶς scheint nur an der sprachlichen Oberfläche ein Vergleich mit Linien, der eigentlich den wesentlichen Bezug auf die Linien des Gleichnisses, den diesen entsprechenden Vermögen und deren ideales Verhältnis bewerkstelligt.

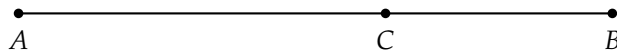
## 1.4 Exkurs: Der Goldene Schnitt und die Ordnung des Kosmos

### Übersicht

Der Goldene Schnitt fasziniert immer wieder Menschen und gibt Anlass zu unabgesicherten Spekulationen, auch darüber, inwieweit er Bestandteil antiker ‚Weisheit‘ war. Im folgenden wird verfolgt, inwiefern der Goldene Schnitt bei PLATON und den Pythagoreern möglicherweise von Bedeutung hat sein können. Dazu wird zunächst den Erkenntnissen aus der neuzeitlichen Mathematik nachgegangen, die den Goldenen Schnitt in Bezug auf sein Maß an Irrationalität (in zu explizierender Hinsicht) bedeutsam erscheinen lassen (1.4.1). Es wird nachgeprüft, inwieweit ein Wissen über diesen Erkenntnissen nahestehende Sachverhalte bereits in der Antike wahrscheinlich ist, und PLATON davon gewusst haben könnte (1.4.2). Damit wird schließlich dem Goldenen Schnitt in seinen Werken nachgegangen (1.4.3).

#### 1.4.1 Verkehrte Verhältnisse

Eine Strecke  $AB$  wird durch  $C$  *stetig geteilt*, wenn sich  $AB$  zu  $AC$  verhält wie  $AC$  zu  $CB$  (mit  $AC > CB$ ).



In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, dass die antiken Geometer ein besonderes Interesse an diesem «Goldenen Schnitt» (der Linie  $AB$  durch den Punkt  $C$ ) hätten haben können, weil er in gewisser Hinsicht der *inkommensurabelste* Schnitt einer Linie ist. Damit ergibt sich durch ihn das geometrisch gesehen *unaussprechbarste* Größenverhältnis, dessen Vorkommen im Pentagramm und Fünfeck Referenzpunkt für Vermutungen in 1.4.3 ist.

Dem modernen Zeitgenossen drängt sich leicht das Urteil auf, die antike Mathematik wäre an der Quadratur des Kreises und anderen mathematischen Problemen gescheitert. Für uns dagegen habe Lindemann 1882 die Transzendenz von  $\pi$  bewiesen, d.h. dass  $\pi$  nicht die Lösung einer algebraischen Gleichung der Form

$$a_0 + a_1x^1 + \dots + a_nx^n = 0 \quad a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Q}, \quad a_i \neq 0 \text{ für mindestens ein } 0 \leq i \leq n$$

ist, somit nicht mit Hilfe von Wurzeln darstellbar ist und damit auch nicht mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann. Denn mit Zirkel und Lineal sind zwar bereits Quadratwurzeln von Längen konstruierbar, aber schon keine Kubikwurzeln in aller Allgemeinheit, weswegen auch die Würfelerdopplung nicht mit Zirkel und Lineal in der euklidischen Ebene gelöst werden kann. Dieser aktuellen Unterteilung nach hätte es die frühgriechische Mathematik bis zur Quadratwurzel und ihrer Iteration, kaum zu Kubikwurzeln geschafft, konnte demnach noch nicht einmal beliebige algebraische Irrationalitäten theoretisch fassen, ganz zu schweigen von transzendenten Größen.<sup>97</sup>

<sup>97</sup> Die Unmöglichkeit der Dreiteilung des Würfels und der Verdopplung des Würfels wurden das erste Mal (vollständig) von Wantzel 1837 bewiesen. Allerdings scheint die Idee mathematischer Beweise der Unmöglichkeit der Bewältigung dieser geometrischen Aufgaben erst in der Neuzeit aufgekomen zu sein und in ihrem Gefolge die Beweise. Trotzdem konnte man auch in der Antike von der Unmöglichkeit einer Lösung überzeugt sein. «Indeed ever since late antiquity the vast majority of mathematicians had believed that the problems [of constructing the duplication of the cube and the trisection of the angle] could not be solved by ruler and compass. And yet no-one seems to have felt the need for a proof of this impossibility. For example Pappos (around 340 AD) from whom we have most of our knowledge about ancient Greek approaches to the two problems emphasized their impossibility by ruler and compass in his *Collectio* (Pappos, see in particular book III chapter VII and book VI chapter XXXVI). He did not just consider it an empiric fact that no one had as yet found such solutions to the problems. He considered it a matter of principle, resulting from the nature of the problems. And he considered it a methodological mistake if someone tried to solve the problems with ruler and compass. Yet he nowhere stated the necessity, desirability or even possibility of giving a mathematical proof of this impossibility.» (Lützen 2010, S. 5f.)



Betrachtet man jedoch (reelle) Zahlen in Hinsicht auf ihre Approximierbarkeit durch ganzzahlige Brüche, ergibt sich ein differenzierteres Bild und eine – vielleicht unerwartete – Einteilung. Die Überlegungen werden zunächst in moderner Mathematik geführt.

Im besonderen versteht man heute unter dem Goldenen Schnitt die Zahl  $\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ , die das Verhältnis der größeren zur kleineren Teilstrecke in einer reellen Zahl fasst. (Wenn die Strecke  $CB$  die Länge 1 hat, dann hat  $AC$  die Länge  $\Phi$  und  $AB$  ist  $\Phi+1$ .) Eine Besonderheit von  $\Phi$  hängt mathematisch eng mit den Kettenbrüchen und den Fibonacci-Zahlen zusammen.<sup>98</sup> Ein Kettenbruch ist eine Darstellung einer reellen Zahl  $x$  in der Form:  $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$  als Kettenbruch endlicher Länge und

durch:  $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$  mit unendlicher Länge und der abkürzenden Schreibweise  $[a_0, \dots, a_n]$  bzw.

$[a_0, a_1, \dots]$  mit  $a_i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .  $\Phi$  ist in dieser Schreibweise genau der unendliche Kettenbruch  $[1, 1, 1, \dots]$ . Bricht man die Kettenbruchentwicklung von  $\Phi$  an endlicher Stelle ab, so ist leicht zu sehen, dass man genau alle Verhältnisse aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen erhält. Die Fibonacci-Zahlen definieren sich rekursiv nach  $f_0 = 0, f_1 = 1$  und  $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ . Ihr Verhältnis  $\frac{f_{n+1}}{f_n}$  konvergiert gegen  $\Phi$ . Die Elemente der Folge  $\left(\frac{f_{n+1}}{f_n}\right)_{n \in \mathbb{N}_0}$  nähern also als ganzzahlige Brüche den Goldenen Schnitt immer besser an.

Vergleicht man nun für verschiedene reelle Zahlen die jeweiligen gegen sie konvergierenden Folgen, so lässt sich zeigen: Für jede reelle Zahl  $x$ , die nicht mit  $\Phi$  verwandt ist, gibt es eine Folge rationaler Zahlen, die schneller gegen  $x$  konvergiert als jede Folge rationaler Zahlen gegen  $\Phi$ . (Eine Zahl sei dabei verwandt mit  $\Phi$ , wenn sie irrational ist und sich in ihrer Kettenbruchentwicklung nur in endlich vielen  $a_i$  von der von  $\Phi$  unterscheidet.) Die Familie  $\Phi$  der mit  $\Phi$  verwandten Zahlen, in der sich  $\Phi$  durch ihre homogene Kettenbruchentwicklung heraushebt, besteht aus den am schlechtesten mit Brüchen natürlicher Zahlen zu approximierenden (irrationalen) Zahlen. Oder etwas plakativer:  $\Phi$  ist die irrationalste Zahl.<sup>99</sup>

Dieser Abschnitt enthält den mathematischen Hintergrund dieser Behauptung und neben den Sätzen einen Teil der Beweise.<sup>100</sup> Zunächst eine Präzisierung des Ausdrucks „schnell konvergieren“:

**Def** Eine (reelle) Zahl  $a$  ist approximierbar mit Ordnung  $k \in \mathbb{N}$ , falls es ein  $c > 0$  gibt und unendliche viele  $p, q \in \mathbb{N}$ , so dass gilt:  $|a - \frac{p}{q}| < c \cdot \frac{1}{q^k}$ .

Allgemein gilt:

**Satz** Für jede irrationale Zahl  $a$  gibt es ein  $c > 0$ , so dass unendlich viele  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ), existieren mit  $|a - \frac{p}{q}| < c \cdot \frac{1}{q^2}$ . D. h. jede irrationale Zahl ist approximierbar mit Ordnung 2.

In Bezug auf alle irrationale Zahlen ist dieses Ergebnis optimal. Nun ist  $c$  genauer einzugrenzen.

**Satz** Für  $\Phi$  gibt es unendlich viele  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) mit  $|\Phi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{q^2}$ . Dabei ist  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  optimal.

Ist der erste Teil des Satzes bewiesen, kann man den letzten Teil folgendermaßen zeigen: Sei  $0 < \epsilon < \frac{1}{\sqrt{5}}$ . Wir zeigen, dass nur endlich viele  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) gibt mit  $|\Phi - \frac{p}{q}| < \epsilon \cdot \frac{1}{q^2}$ . Sei  $\delta$  so gewählt, dass  $\Phi - \frac{p}{q} = \delta \cdot \frac{1}{q^2}$ , also

$$\frac{\delta}{q} = \Phi \cdot q - p = q \cdot \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1) - p = \frac{q \cdot \sqrt{5}}{2} + \frac{q}{2} - p$$

<sup>98</sup> Neben vielem anderen (Vgl. u. a. Beutelspacher und Petri 1995). Zu den elementarsten gehört auch folgende Gleichung:  $\Phi^2 = \Phi+1$  (da  $\Phi = \frac{\Phi+1}{\Phi}$ ).

<sup>99</sup> Der Ausdruck «die irrationalste aller Zahlen» stammt von Richter und Scholz 1987, S.182. «Vom Standpunkt rationaler Approximationen aus sind also gerade die einfachsten Zahlen die schlimmsten.» Hardy und Wright 1958, S. 185.

<sup>100</sup> Vgl. Beutelspacher und Petri 1995, S.102ff., Perron 1954, S.41ff., Hardy und Wright 1958, Kapitel 10/11.

somit  $\frac{\delta}{q} - q\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{q}{2} - p$  und damit quadriert:

$$\frac{\delta^2}{q^2} - \delta\sqrt{5} = \frac{q^2}{4} + p^2 - pq - \frac{5q^2}{4} = p^2 - pq - q^2.$$

Damit ist  $\frac{\delta^2}{q^2} - \delta\sqrt{5} \in \mathbb{Z}$ , da  $p^2 - pq - q^2 \in \mathbb{Z}$ .

Aber  $|\delta| < \epsilon < \frac{1}{\sqrt{5}} < 1$  und damit ist sowohl  $0 < \frac{\delta^2}{q^2} < 1$  als auch  $-1 < \delta\sqrt{5} < 1$ . Es kommen somit nur 0 und 1 als Werte für  $\frac{\delta^2}{q^2} - \delta\sqrt{5}$  in Frage:

1. Fall:  $\frac{\delta^2}{q^2} - \delta\sqrt{5} = 0$ . Dann gilt  $p^2 - pq - q^2 = 0$ , also  $p^2 - pq = q^2 \Rightarrow (2p - q)^2 = 5q^2 \Rightarrow (\frac{2p-q}{q})^2 = 5$ .  $\sqrt{5}$  ist aber irrational und damit nicht als Bruch ganzer Zahlen darstellbar. Ein Widerspruch.

2. Fall:  $\frac{\delta^2}{q^2} - \delta\sqrt{5} = 1$ . Dann gilt

$$\frac{\epsilon^2}{q^2} > \frac{\delta^2}{q^2} = 1 - |\delta\sqrt{5}| > 1 - \epsilon\sqrt{5} > 0.$$

Die Ungleichung  $\frac{\epsilon^2}{q^2} > 1 - \epsilon\sqrt{5}$  ist aber nur für endlich viele  $q$  erfüllbar, da  $\frac{\epsilon^2}{q^2}$  gegen 0 geht für wachsendes  $q$  ■

Alle anderen Zahlen sind genauso gut approximierbar mit  $c = \frac{1}{\sqrt{5}}$ , denn es gilt:

**Satz** Für jede irrationale Zahl  $a$  gibt es unendlich viele  $\frac{p}{q}$  mit  $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{q^2}$ .

Alle anderen Zahlen sind aber mit einer kleineren Konstante  $c$  approximierbar.

**Satz** Für jede nicht mit  $\Phi$  verwandte irrationale Zahl  $a$  gibt es unendlich viele Paare  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ), für die gilt:  $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{\sqrt{8}} \cdot \frac{1}{q^2}$ .

Weiter gilt:

**Satz** Für jede beliebig große Ordnung sind beliebig viele irrationale Zahlen approximierbar. D. h. für jedes  $1 < k \in \mathbb{N}$  gibt es unendlich viele irrationale Zahlen  $a$  mit jeweils unendlich vielen  $\frac{p}{q}$  ( $p, q \in \mathbb{N}$ ) und ein  $c > 0$ , für die gilt:  $|a - \frac{p}{q}| < c \cdot \frac{1}{q^k}$ .

Interessant ist nun der Zusammenhang mit den Näherungsbrüchen  $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n]$  einer irrationalen Zahl  $a = [a_0, a_1, \dots]$ . Zunächst liegt ein Näherungsbruch  $\frac{p_n}{q_n}$  näher an  $a$  als jeder andere Bruch  $\frac{p}{q}$  mit  $q \leq q_n$ . Tatsächlich genügen auch nur Näherungsbrüche der Ungleichung  $|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{2 \cdot q^2}$ . Aber nicht jeder Näherungsbruch liegt entsprechend nah an  $a$ , es gilt:

**Satz** Von drei aufeinander folgenden Näherungsbrüchen für  $a$  gilt für mindestens einen

$$|a - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2 \cdot \sqrt{5}}.$$

Einige Vermutungen schließen sich an folgenden Satz an:

**Satz** Für den  $n$ -ten Näherungsbruch  $\frac{p_n}{q_n} = [a_0, \dots, a_n]$  von  $a = [a_0, a_1, \dots]$  gilt:

$$\frac{1}{q_n^2(a_{n+1}+2)} < |a - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n^2 \cdot a_{n+1}}.$$

Da die Näherungsbrüche die beste Approximation bieten, liegt es bereits wegen dieses Satzes nahe zu vermuten, dass eine irrationale Zahl  $a$  desto schlechter rational approximiert werden kann, je kleiner die  $a_{n+1}$  sind, folglich am schlechtesten für  $\Phi = [1, 1, 1, 1, \dots]$ .

## 1.4.2 Der Goldene Schnitt und seine Eigenschaften im antiken Wissen

Die landläufigen Meinungen zum Goldenen Schnitt sind fast ausnahmslos falsch oder unbegründet.<sup>101</sup>

Die Bezeichnung selbst stammt erst aus dem 19. Jh.; in der Renaissance verwendete man manchmal

<sup>101</sup> Siehe van der Schoot 2005a, Fredel 1998 und etwas allgemeiner zu inkommensurablen Proportionen in der Renaissance Wittkower 1969 und in der Ästhetik in der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts Wittkower 1960. Für erste Informationen

dafür den Ausdruck der göttlichen Proportion. Die Idee, dass die Natur durchzogen sei von ‚goldenen‘ Verhältnissen, die im spiralförmigen Gehäuse des Nautilus oder in der Gestalt des Menschen entdeckt werden können, ließ sich fast nur in der Phyllotaxis bestätigen<sup>102</sup> und ist mit Ausnahme einiger Gedanken Keplers erst ab 1854 nachweisbar.<sup>103</sup> Ähnlich ist die positive Auszeichnung des Goldenen Schnitts als Formideal in der Ästhetik weniger als zweihundert Jahre alt und steht – wie jene Meinung zum Auftreten in der Natur – im Gegensatz zu den historischen Belegen.<sup>104</sup> Der Franziskanermönch Luca Pacioli (ca. 1445-1517), Verfasser der Schrift „Divina proportione“ über den Goldenen Schnitt, nennt ihn die *göttliche* Proportion, weil er einige Eigenschaften mit Gott gemein habe,<sup>105</sup> u. a. nicht rational bestimmbar zu sein. Er zeichne sich demnach gerade nicht durch seine Natürlichkeit aus, sondern wird mit dem Übermenschlich-Transzendenten in Verbindung gebracht. Der ‚Schnitt im äußeren und mittleren Verhältnis‘, wie er seit EUKLID genannt wird, ist in der griechischen Antike explizit nur im mathematischen Kontext zu finden.

So ist die Kenntnis des Goldenen Schnittes auch erst bei EUKLID nachweisbar. In Buch VI definiert er an dritter Stelle:

Eine Strecke heißt stetig geteilt, wenn sich, wie die ganze Strecke zum größeren Abschnitt, so der größere Abschnitt zum kleineren verhält.

Ἄκρον καὶ μέσον λόγον εὐθείᾳ τετραμῆσθαι λέγεται, ὅταν ἡ ὅλη πρὸς τὸ μείζον τμήμα, οὗτος τὸ μείζον πρὸς τὸ ἔλαττον.

Tatsächlich wird diese Teilung im «äußeren und mittleren Verhältnis»<sup>106</sup> aber bereits in Satz 11 aus Buch II dargestellt. Dort wird eine Strecke ( $AB$ ) so konstruktiv geteilt, dass die Fläche des Rechtecks aus ganzer Strecke und dem einen Teil gleich der Fläche des Quadrats aus der anderen Teilstrecke ist (d.h.

---

siehe auch Kumschick 2003. Wieso Welsch 2009, S. 102, auch auf van der Schoot verweisend, gerade die die falschen Vorurteile mit Verve weitertradiert, ist seltsam: «Eine Proportionierung nach dem Goldenen Schnitt galt in der abendländischen Kunst lange Zeit als vorbildlich. Man sprach dafür sogar von der „göttlichen Proportion“. Die Beispiele reichen von der griechischen Architektur bis ins 20. Jahrhundert. Aber nicht nur in unserer Kultur wird der Goldene Schnitt bevorzugt, sondern eine Proportionierung nach dem Goldenen Schnitt wird, wie neuere Studien zeigen, in allen Kulturen als besonders wohlgefällig beurteilt.» Welche «neueren Studien» der Autor meint, behält er leider für sich und verweist nur auf einen Text (Frederick Turner: *The sociobiology of Beauty*, S. 63-82 in J. B. Bedaux, B. Cooke (Hrsg.): *Sociobiology and the Arts*. Amsterdam, Atlanta, 1999.), der ohne jede Referenz wilde Behauptungen aus dem Hut zaubert. Ähnlich abenteuerlich sind die meisten weiteren Aussagen in Welsch 2009 zum Goldenen Schnitt.

102 Siehe Fußnote 125.

103 Siehe van der Schoot 2005a, S. 154.

104 Dass der Goldene Schnitt in keiner älteren Theorie der Ästhetik aufgegriffen wird, bedeutet nicht, dass den Künstlern, Bauherren und Handwerkern kein praktisch-technisches Wissen zur Verfügung stand, das es ihnen erlaubte, den Goldenen Schnitt wissenschaftlich einzusetzen, oder, dass er in historischen Bauten und Kunstwerken nicht ‚enthalten‘ sein könnte als ein natürliches, unbewusst eingesetztes, Formideal. Allerdings ist das Auffinden des Goldenen Schnitts in Kunst- und Bauwerken mittels Vermessung und Auflegung von Gitterlinien scheinbar oftmals nicht methodisch reflektiert betrieben worden, jedenfalls scheint man den Goldenen Schnitt doch nicht unter den eindeutig erkennbaren Proportionen antiker Bauwerke zu finden (s. Fredel 1998, S. 36a209). Das Problem der Variabilität der Messpunkte und die Beliebigkeit des Blickpunkts werden an einem einfachen Beispiel deutlicher: Das Alte Rathaus in Leipzig ist ein länglicher Bau aus dem Jahre 1556, dessen Front durch einen nach links versetzten Turm unterteilt wird, und zwar in etwa im Verhältnis des Goldenen Schnitts. Genauer teilt das wiederum in Bezug auf den Turm nach rechts versetzte Turmtor die Rathausfassade im Goldenen Schnitt (vgl. Walser 2009, S. 160f.), und *nicht* der Turm. Wäre nun der Turm etwas weiter links gebaut worden, fände sich der Goldene Schnitt an der rechten Turmseite, wäre er weiter rechts gebaut, würde die Turmmitte oder seine linke Seite die gesamte Fassade stetig teilen. Man findet den Goldenen Schnitt also weder in dem hauptsächlichen Verhältnis der durch den Turm geteilten Fassade, noch wäre es möglich gewesen, aufgrund der Breite des Turms, jede stetige Teilung durch irgendeine Komponente des Turmes zu umgehen. Zudem findet man auch andere Verhältnisse, denn die linke Seite des Turms drittelt die Rathausfassade. Zwei Kontrollfragen lauten demnach: Hätte der Goldene Schnitt überhaupt vermieden werden können, und finden sich auch andere Verhältnisse?

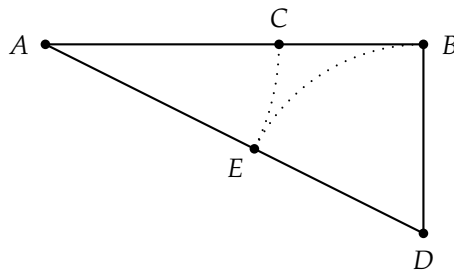
(Ein bekannteres Beispiel für ein problematisches Auffinden des Goldenen Schnittes findet sich in Mainzer 1988, S. 128f.: Der Goldene Schnitt als Hauptproportion der Aphrodite von Kyrene; der fehlende Kopf der Statue wird in die Überlegungen gar nicht erst mit einbezogen.)

Aber auch die überlieferten Aussagen von Künstlern scheinen keine Hinweise für eine wissenschaftliche Verwendung des Goldenen Schnitts zu bieten. So erwähnen z. B. in der Renaissance Leonardo da Vinci und Albrecht Dürer die stetige Teilung überhaupt nicht und meinen mit ähnlichen Bezeichnungen etwas anderes, während bei Leonardo nicht einmal nachgewiesen wurde, dass er eine exakte Konstruktion des Fünfecks kannte (s. Fredel 1998, S. 209, 283, 292).

105 Siehe van der Schoot 2005a, S. 94.

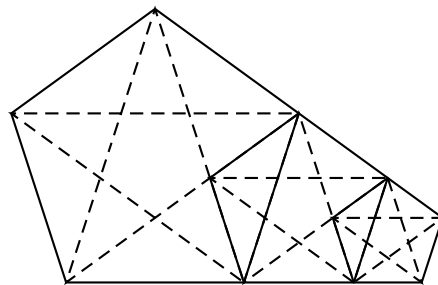
106 Zu diesem Ausdruck vgl. Herz-Fischler 1998, S. 164.

modern gefasst und notiert:  $AB \cdot BC = AC^2$ , so dass  $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{BC}$ ; es wird also in (II 11) der Goldene Schnitt konstruiert<sup>107</sup>). Die Konstruktion ist einfach und lautet (leicht vereinfacht zu der Form, in der sie üblicherweise in Lehrbüchern auftritt): Man errichte in  $B$  eine Senkrechte, die halb so groß ist wie  $AB$ ; trage  $DB$  auf  $DA$  ab und wiederum  $AE$  auf  $AB$ .



Der Lehrsatz (II 11) wird in (IV 10) verwendet, um in (IV 11) ein regelmäßiges Fünfeck zu konstruieren. In (VI D3) wird die stetige Teilung definiert und in (VI 30) eine Strecke explizit stetig geteilt. Im abschließenden XIII. Buch werden in (XIII 1-6) die Eigenschaften der stetigen Teilung bewiesen, u. a. dass die beiden Teile des Goldenen Schnitts irrationale Längen (in Bezug auf die Ausgangsstrecke) sind nach Art der Apotome, wie sie in Buch X unterschieden wurden. Im restlichen letzten echten Buch der *Elemente* (Buch XIV und XV sind spätere Ergänzungen) spielt die stetige Teilung bei der Längenbestimmung der Seiten und Kanten der regelmäßigen Vielecke und der regelmäßigen konvexen Körper eine essentielle Rolle, wie bei der Konstruktion des Dodekaeders (XIII 17).<sup>108</sup>

Kannte PLATON den Goldenen Schnitt? Der grundsätzliche Sachverhalt, der in der Definition zum Ausdruck kommt, ist letztlich so elementar und direkt zu sehen (siehe Abbildung), dass man gute Gründe finden müsste, um PLATON, der an geometrischen Verhältnissen und geometrischen Figuren wie dem Fünfeck interessiert war, ein Wissen um ihn abzusprechen.



Allein die Höhe der mathematischen Bildung, die im *Theaitetos* und *Menon* zum Vorschein kommt, und die Verwandtschaft mit der Lehre inkommensurabler Größen, dem Pentagramm bzw. Fünfeck und die Nähe zu den platonischen Körpern insbesondere dem Dodekaeder sprechen dafür, dass PLATON über weitergehendes mathematisches Wissen zum Goldenen Schnitt verfügte.<sup>109</sup>

Bedeutender dagegen ist die Frage, *wieviel* PLATON über die stetige Teilung gewusst haben mag und was für eine *philosophische Bedeutung* er ihr gab. Dies soll im nächsten Abschnitt erörtert werden, hier spekulieren wir im folgenden über die frühgriechische Mathematik.

Zunächst eine Bemerkung zu dem mathematischen Wissen der Pythagoreer: Nach der unter historischen Laien weit verbreiteten Erzählung wäre die Metaphysik der Pythagoreer durch die Entdeckung nicht

<sup>107</sup> Im Kontext von EUKLIDS *Elementen* ist (II 11) über (VI 17) zu der Konstruktionsaufgabe einer expliziten stetigen Teilung einer Strecke (VI 30) äquivalent (vgl. Mueller 1981, S. 169).

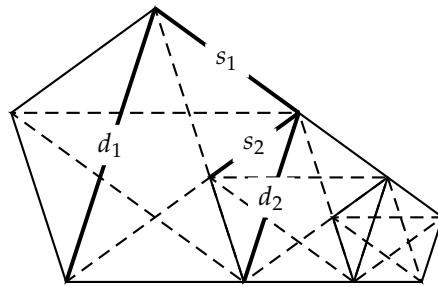
<sup>108</sup> Vor allem seine Bedeutung für das finale Buch der *ELEMENTE* macht ihn so wichtig. Ähnlich Mueller 1981, S. 107: «... the golden section ... plays an extremely important role in the *Elements*.»

<sup>109</sup> Vgl. Gaiser 1998, S. 371a118. Die Behauptung von Proclus 1970, S. 67, mit PLATON hätte die Theorie des *Schnitts* begonnen, ist zu knapp gehalten, um daraus etwas Sicheres über ein Wissen des Goldenen Schnitt zu entnehmen.

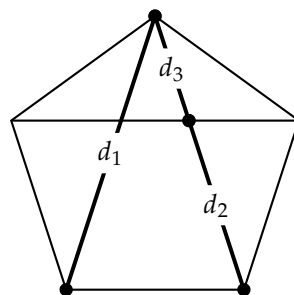
miteinander kommensurabler Strecken in eine Krise geraten, da zu den obersten Doktrinen gezählt habe, dass alles aus Zahlen aufgebaut sei.<sup>110</sup> Sogar in ihrem Symbol, dem Pentagramm, fanden sich, wegen den enthaltenen Verhältnissen der stetigen Teilung, irrationale Größen, wenn sie nicht sogar das erste Mal gerade dort entdeckt worden seien.

Historisch problematisch daran ist bereits die Zuweisung des Pentagramms zu den Pythagoreern.<sup>111</sup> Wenn man dies zugesteht, ist es aber wahrscheinlich, dass sie auch den Goldenen Schnitt gekannt haben. Denn unter der rationalen Annahme, dass sich ernsthafte Mathematiker auch mit den mathematischen Objekten mathematisch beschäftigen, die sie in wichtigen nicht-mathematischen Zusammenhängen verwenden, sollten sie auf den Goldenen Schnitt und die Irrationalität seiner Strecken gestoßen seien.<sup>112</sup> Das wird deutlich, wenn man die einfachen Eigenschaften des Pentagramms betrachtet.<sup>113</sup>

Wenn die augenscheinlichen Eigenschaften der abgebildeten Pentagramme und Fünfecke geometrisch korrekt sind, dann ist die Diagonale des mittleren Pentagramms ( $d_2$ ) so groß wie eine Seite des großen Fünfecks ( $s_1$ ), und eine Seite des mittleren Fünfecks ( $s_2$ ) so groß wie die Diagonale des großen Pentagramms ( $d_1$ ) weniger eine Seite des großen Fünfecks ( $s_1$ ); also  $s_1 = d_2$  und  $d_1 - s_1 = s_2$ . Weil sich die Fünfeckseiten der jeweils einbeschriebenen Diagonalen stets gleich verhalten unabhängig von ihrer Größe, gilt:  $d_1$  verhält sich zu  $s_1$  wie  $d_2$  zu  $s_2$ , oder  $\frac{d_1}{s_1} = \frac{d_2}{s_2}$ . Insgesamt gilt also:  $\frac{d_1}{s_1} = \frac{s_1}{d_1 - s_1}$ . Diagonale und Seite des Fünfecks stehen also im Verhältnis der stetigen Teilung, und eine Diagonale des Fünfecks teilt die andere im Goldenen Schnitt.



Deswegen besitzt das Fünfeck (mit Pentagramm) eine gewisse Selbstähnlichkeit, eine durch den Goldenen Schnitt vermittelte Eigenschaft: Das kleinste Fünfeck, dessen Diagonale so groß ist wie die Seite des mittleren Fünfecks, tritt in der Mitte des großen Pentagramms auf und entsprechend noch kleinere Pentagramme im kleineren Fünfeck – und immer weiter.



<sup>110</sup> Siehe dazu Fußnote 2 auf S. 6.

<sup>111</sup> Siehe van der Schoot 2005a, S. 135ff., der darauf hinweist, dass es eigentlich nur einen Beleg bei Lukianos im zweiten Jh. n. Chr. gibt, dass die Pythagoreer das Pentagramm benutzten, und zwar als Erkennungszeichen und Gesundheitssymbol.

<sup>112</sup> Zu den Fragen, wann, woran und von wem die Inkommensurabilität geometrischer Größen in der Antike entdeckt wurde, gibt es einige elaborierte Untersuchungen, vgl. von Fritz 1945 Waschkies 1971, Knorr 1998. Die schlechte Quellenlage wird aber aller Voraussicht nach verhindern, dass man auch zukünftig etwas Gewisses dazu sagen können.

<sup>113</sup> Aber auch wenn das Pentagramm keinen besonderen Status bei ihnen besaß, so gibt es in den Scholien zum IV. Buch der *Elemente* (Heiberg und Menge 1916) ein paar Hinweise, dass sie es zumindest mathematisch konstruiert und untersucht haben.

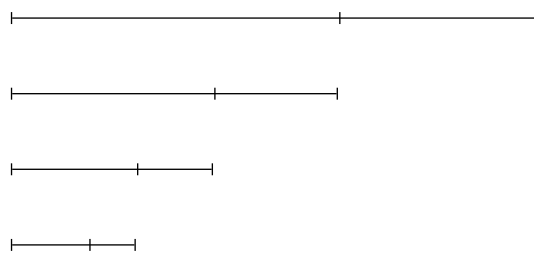
Die Inkommensurabilität steht mit diesem Sachverhalt über eine Methode der frühgriechischen Mathematik zur Bestimmung inkommensurabler Größen in Zusammenhang. In (VII 1,2) wird die reziproke Subtraktion zur Bestimmung des kleinsten gemeinsamen Teilers zweier natürlicher Zahlen – heute bekannt als euklidischer Algorithmus – eingeführt. Man zieht die kleinere der beiden Zahlen von der größeren so oft wie möglich ab, dann den Rest von der Kleineren, ... bis der Rest 1 oder 0 beträgt:

$$\begin{aligned}
 a &= c_1 \cdot b + r_1, & r_1 < b \\
 b &= c_2 \cdot r_1 + r_2, & r_2 < r_1 \\
 r_1 &= c_3 \cdot r_2 + r_3, & \vdots \\
 &\vdots & \\
 r_m &= c_{m+2} \cdot r_{m+1} + r_{m+2}
 \end{aligned}$$

Ist  $r_{m+2} = 1$ , so sind  $a$  und  $b$  teilerfremd. Ist  $r_{m+2} = 0$  (und  $r_{m+1} > 1$ ), dann ist  $r_{m+1}$  der größte gemeinsame Teiler.

Dieses einfache Verfahren aus dem Schulunterricht funktioniert genauso bei ausgedehnten Größen, wenn z. B. zwei Strecken ein gemeinsames Maß besitzen, was bestimmt werden soll. Sind sie allerdings inkommensurabel, dann bricht dieses Verfahren der *anthyphairesis* nicht ab. EUKLID beweist diesen Sachverhalt in (X 2,3), ohne ihn weiter zu gebrauchen.<sup>114</sup>

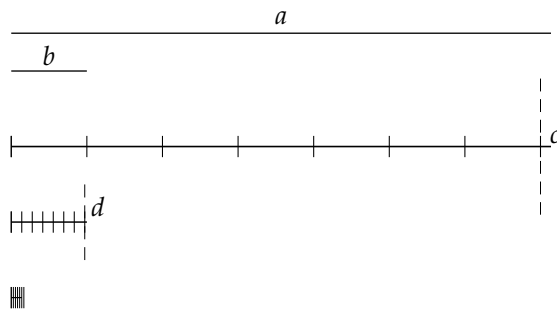
Zwei Linien sind also genau dann inkommensurabel, wenn die Wechselwegnahme nie abbricht. Ist das der Fall, kann man die *anthyphairesis* aber konkret nicht bis zu Ende durchführen, da man konstruktiv unendlich viele Schritte zu vollziehen hätte. Um diese Bestimmung der Inkommensurabilität direkt, d.h. vor allem ohne Widerspruchsbeweis über die Annahme des Gegenteils, anzuwenden, muss man Vorhersagen über den Verlauf des Prozesses machen. Dies ist am einfachsten, wenn die beiden Größen im Verhältnis des Goldenen Schnitts zueinander stehen. Denn dann weiß man, dass der Rest wiederum im gleichen Verhältnis zu der (gerade einmal) abgezogenen Strecke steht, und wiederum genau einmal abgezogen werden kann ...:



Damit ist direkt einzusehen, dass eine stetig geteilte Strecke inkommensurabel zu ihren beiden Teilen ist.

Der Zusammenhang mit den (modernen) Kettenbrüchen besteht nun darin, dass die Kettenbruchentwicklung jeweils angibt, wie oft der kleinere Rest in den größeren passt. Ist die kleinere Strecke das Einheitsmaß, dann gilt:

<sup>114</sup> Siehe Fowler 1999, S. 30.



$$\begin{aligned} a &= 7 \cdot b + c, & c < b \\ b &= 7 \cdot c + d, & d < c \\ c &= 5 \cdot d \end{aligned}$$

$a$  korrespondiert der Zahl  $[7, 7, 5]$ .

Beschäftigt man sich in der mathematischen Praxis etwas mit dieser geometrischen Wechselwegnahme, so ergibt sich leicht die Einsicht, dass man mit dieser Methode das Verhältnis der beiden Strecken umso schneller durch Verhältnisse ganzer Zahlen annähert, umso unterschiedlicher die Reste sind und umso öfter deswegen der kleinere auf dem größeren abgetragen werden kann. Am schlechtesten auf diese Weise anzunähern ist somit das Verhältnis der stetigen Teilung, da es minimal ist (als  $[1, 1, 1, \dots]$ ).

Während man diese praktische Einsicht den frühantiken Geometrikern wohl zusprechen darf, bedürfte es noch eines Wissens darum, dass die Methode der Wechselwegnahme in einem speziellen Sinne die besten Annäherungen hervorbringt, um die moderne Erkenntnis von  $\Phi$  als eine Art irrationalster Zahl in geometrischem Gewand tatsächlich zurücktradieren zu können. Ein Wissen um jene Auszeichnung der Wechselwegnahme wurde aber weder nachgewiesen, noch ist ein Nachweis in Sicht. Vielmehr zeigen gerade die Ausarbeitungen Fowlers, wie unwahrscheinlich eine frühantike Theorie ist, die einer Kettenbruchtheorie korrespondieren würde. Fowler 1999 arbeitete eine frühantike, nicht überlieferte geometrische Theorie aus, die nicht, wie vor ihm bereits versucht, mit Hilfe der *anthyphairesis* Proportionen (das ist die Gleichheit zweier Verhältnisse:  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ , siehe *Topik 158b32ff.*), sondern die Verhältnisse selbst bestimmt und damit einen geometrischen Vorläufer einer Kettenbruchtheorie bildet.

Das Problematischste seiner Rekonstruktion liegt darin, dass er sie zum Teil in einer mathematischen Symbolik und Methode führt, die in der Antike nicht zur Verfügung standen. Deswegen verortet er selbst ein Wissen darum weniger in der formulier- und beweisbaren Theorie als vielmehr in der praktischen Kunstfertigkeit des Mathematikers, die mündlich gelehrt wurde.<sup>115</sup> Dass es rein mündliche Überlieferungslinien mathematischen Wissens gab, die sehr wichtig waren und weitgehend nicht überliefertes, praktisches Wissen vermittelten, ist unter Mathematikhistorikern nicht umstritten. Höchst kontrovers ist jedoch, dass Fowler meint, mit kaum einer Textgrundlage dieses Wissen rekonstruieren zu können.<sup>116</sup> Stimmt man ihm jedoch zu, so ist auch ein genaueres, frühantikes Wissen um die schlechte Annäherbarkeit des Goldenen Schnitts leicht zu vermuten.

### 1.4.3 Der Goldene Schnitt bei Platon

Ob sich ein Wissen um die stetige Teilung bereits in den platonischen Dialogen nachweisen lässt, wird i.a. in Bezug auf drei Dialogstellen diskutiert (*Politeia 509d*, *Timaios 31*, *Hippias 303*).<sup>117</sup> In *Hippias 303* wird der Umstand argumentativ eingebracht, dass zwei ἄρρητα zusammen sowohl ἄρρητον als auch ῥητόν sein können (s. Abschnitt 1.2.2). Da es sich hierbei um einen allgemeinen Sachverhalt handelt – wie das zuvor angeführte Beispiel mit der Teilung einer geraden Zahl in zwei ungerade oder zwei gerade – ist hier nicht ein bestimmtes Verhältnis intendiert, auch wenn die stetige Teilung vielleicht das

<sup>115</sup> Siehe Fowler 1999, S. 398.

<sup>116</sup> Vgl. Unguru 2002.

<sup>117</sup> Vgl. hierzu van der Schoot 2005a, S. 76ff. Die Behauptung von Kennedy 2010a, S. 23, dass die stetige Teilung in *Parmenides 151bc* zum Ausdruck komme, ist inhaltlich nicht zu rechtfertigen. Dass sie genau im Goldenen Schnitt des Dialogtextes steht, wie Kennedy feststellt, hilft da nicht weiter.

naheliegenste ergäbe.<sup>118</sup> In der Besprechung der Proportion in *Timaios* 31c-32a kann insofern gar nicht von einem Goldenen Schnitt die Rede sein, als man die Übersetzung von Schleiermacher verbessern muss:

ἀριθμῶν τριῶν εἴτε ὀγκῶν εἴτε δυνάμεων

von irgendwelchen drei Zahlen oder Massen oder Flächen

Schleiermacher

von drei Zahlen, seien es Kubikzahlen, seien es Quadratzahlen

van der Schoot 2005a, S.77f.

Somit ist die darauf folgende Ausführung nicht als stetige Teilung zu verstehen, denn zu Zahlen gibt es keine Mitte im äußeren und mittleren Verhältnis. Der Goldene Schnitt war in *Politeia* 509d anzutreffen, wie im Kontext des Liniengleichnisses diskutiert (s. S. 17) wurde, insofern das Liniengleichnis den Gesamttext stetig teilt.<sup>119</sup>

Wo wäre unabhängig von den angeführten drei Stellen in den platonischen Dialogen eine Einbindung der stetigen Teilung in die philosophischen Überlegungen zu erwarten? Die Antwort führt über zwei Teilüberlegungen: (1.) Die aus einer stetigen Teilung resultierende mittelgroße Strecke bildet die geometrische Mitte zu den beiden anderen Strecken. Die Besonderheit der beteiligten Strecken an dieser geometrischen Mittelbildung ist, dass die beiden Kleineren zusammen die Längere ihrer Größe nach ergeben. Das Verhältnis, in dem der Goldene Schnitt teilt, ist sogar eindeutig unter dieser Bedingung. Demnach kann eine (lineare) Größe *in sich*, d.h. in Bezug auf eine Menge von Teilen, die zusammen die ganze Linie ergeben ohne sich zu überschneiden, nur gemäß dieses Verhältnisses ‚vermittelt‘ sein.

(2.) Die geometrische Mittelbildung nimmt aber für PLATON einen zentralen Platz ein, wenn es um die theoretische Verknüpfung zweier getrennter Sachen geht. Die mittlere Proportionale ist nach *Timaios* 31bc geradezu die schönste Verbindung. So werden die zwei Elemente Feuer und Erde optimal (aus einem zahlentheoretischen Grund nicht durch *eine* sondern) durch zwei geometrische Mittlere fest verbunden.<sup>120</sup>

Eine stetige Teilung bringt also die nach (1.) und (2.) einzige in sich fest über eine mittlere Proportionale verbundene Verknüpfung einer (geometrischen) Größe hervor. Dieser Sachverhalt könnte nun da von Bedeutung sein, wo erstens von einer größenmäßigen Totalität die Rede ist und damit von einer festen und eindeutigen Größe und zweitens der Zusammenhalt und die Einheit der enthaltenen unterschiedlichsten Größen von Bedeutung ist. Dies ist der Fall bei dem Projekt, die Konstitution der ausgedehnten Welt auf Grundlage der ideenhaften und seelischen Gegebenheiten zu schildern, wie es im *Timaios* versucht wird. Dort (*Timaios* 55c) heißt es, nachdem die anderen vier regulären (konvexen) Körper besprochen wurden: Den Dodekaeder «verwendete der Gott für das All, indem er dieses mit Bildern ausgestaltete (διαζωγραφήν)». Der Dodekaeder trägt aber den Goldenen Schnitt mit sich (s. S. 45).

Da aber dieses Zitat der einzige Hinweis zu sein scheint, ist die Textgrundlage zu schwach, um ein starkes Argument dafür abzugeben, dass PLATON die stetige Teilung im Sinne von (1.) und (2.) interpretiert und in seine kosmologischen Überlegungen aufgenommen hätte. Inhaltlich spricht dafür jedoch die Strukturähnlichkeit, dass nämlich, so wie eine stetig geteilte Strecke in sich vermittelt ist, das All als Größtes und Fundamentalstes in sich die Einheit aller enthaltenen Größen bewerkstelligen muss.<sup>121</sup>

118 Vgl. Heath 1921a, S.304.

119 Siehe Kennedy 2010a, S. 22.

120 Ohne Bezug auf eine geometrische Mittelbildung heißt es im *Symposion* 202e vom Daimonischen, das zwischen den Göttern und den Menschen steht und zwischen ihnen vermittelt: «In der Mitte zwischen beiden ist es also die Ergänzung, daß nun das Ganze in sich selbst verbunden ist.»

121 Der «Körper des Kosmos» wird nach *Timaios* 32bc aus den vier Elementarkörpern aufgebaut, der durch ihre Proportionalität zusammenstimmt (δι' ἀναλογίας ὁμολογήσων), wodurch er in sich wechselseitig verknüpft ist und nur sehr schwer wieder zu trennen. Vgl. van der Schoot 2005a, S. 78.



Damit ist allerdings noch nicht alles gesagt, denn in dem kurzen Zitat tritt «das rätselhafte Wort»<sup>122</sup> διαζωγραφῶν auf, das wörtlich genommen etwas bedeuteten müsste, wie Lebewesen (ζῶν) zu zeichnen (γράφειν). Üblicherweise interpretiert man die ‚gezeichneten Lebewesen‘ als die zwölf Tierkreiszeichen (zwölf Flächen des Dodekaeder) oder die über den ganzen Himmel verteilten Tierzeichen, die als Sternkonstellationen den sichtbaren Himmel ordnen.<sup>123</sup> PLATONS Erläuterungen des Lebewesens stehen allerdings in Verbindung mit dem ‚goldenen‘ Verhältnis, denn in *Phaidros* 264c charakterisiert Sokrates die Rede folgendermaßen als ein Lebewesen:

SOKRATES: Aber dieses, glaube ich, wirst du doch auch behaupten, daß eine Rede wie ein lebendes Wesen gebaut sein und ihren eigentümlichen Körper haben muß, so daß sie weder ohne Kopf ist noch ohne Fuß, sondern eine Mitte hat und Enden, die gegeneinander und gegen das Ganze in einem schicklichen Verhältnis gearbeitet sind.

ΣΟ. Ἀλλὰ τόδε γε, οἶμαι, σε φάναι ἂν δεῖν πάντα λόγον ὡσπερ ζῶον συνεστάναι, σῶμά τι ἔθοντα αὐτὸν αὐτοῦ ὥστε μήτε ἀκέφαλον εἶναι μήτε ἄπουν, ἀλλὰ μέσα τε ἔχειν καὶ ἄκρα, πρέποντα ἀλλήλοις καὶ τῷ ὅλῳ γεγραμμένα.

Eine sprachliche Nähe zur euklidischen Definition der stetigen Teilung ist nicht zu übersehen (*Phaidros*: μέσα τε ἔχειν καὶ ἄκρα; zu Ἄκρον καὶ μέσον λόγον in den *Elementen*), auch wenn hier keine Größen und damit auch nicht der Goldene Schnitt behandelt werden.<sup>124</sup> Vielmehr betrachtet Sokrates hier die innere Struktur von Lebewesen: Ein Lebewesen hat die wesentliche Eigenschaft, dass seine Teile schicklich (πρέποντα) gegeneinander und auf das Ganze geordnet sind. Das einfache mathematische Äquivalent, das ‚schicklich‘ zu ‚gleich‘ festzurrt, die Beziehung der Teile zueinander und zu dem Ganzen als geometrisches Verhältnis und die Teile nach dem herzustellenden gleichen Verhältnis wählt, ist in Bezug auf die Längengröße die stetig geteilte Linie, deren (ersten beiden) Teile in dem gleichen Verhältnis zueinander stehen, wie der größere Teil zum Ganzen. Bei weiterer stetiger Teilung vervielfacht sich die Menge gleicher Verhältnisse. Also wäre der Goldene Schnitt die ‚lebendigste‘ Teilung, weil er strukturell den Lebewesen am ähnlichsten ist unter den Teilungen.

Tatsächlich findet sich der Dodekaeder nicht in der anorganischen Natur, auch – wie entsprechend das Ikosaeder – nicht in den Kristallformen des Pyrit.<sup>125</sup> Allerdings trifft man in der Anordnung der Pflanzenblätter, Samen oder Zapfenschuppen (Phyllotaxis) auf Verhältnisse, die dem Goldenen Schnitt (bzw. ‚goldenen‘ Winkel) entsprechen. Sie könnte allerdings mit einem Nutzen zusammen hängen, den eine möglichst günstige Flächen- und Raumaufteilung für die Selektion haben könnte.<sup>126</sup> So verdecken sich die um einen Pflanzenstengel gruppierenden Blätter, die im ‚goldenen‘ Winkel angeordnet sind, (unter der Voraussetzung unbekanntem Wachstums) am geringsten, gerade weil der Goldene Schnitt bzw. Winkel durch Brüche ganzer Zahlen so schlecht approximierbar ist.

Zusammenfassend ist zu konstatieren, dass über den Goldenen Schnitt bei PLATON und den Pythagoreern nichts Abschließendes gesagt werden kann. Dafür, dass das Fehlen detaillierterer Quellen nicht bedeuten muss, dass die stetige Teilung für PLATON und die Pythagoreer keine oder keine große Bedeutung hatte, soll kurz ein gegenteiliges Szenario angedeutet werden.<sup>127</sup>

122 Gaiser 1998, S. 145.

123 Vgl. Cornford 1937, S. 219.

124 Vgl. Berger 2003, S. 100.

125 Siehe für den ganzen Absatz van der Schoot 2005a, Kapitel 5. Allerdings entdeckte man den Golden Schnitt in den Grundbausteinen eines Quasikristalls, s. Richter und Scholz 1987, S. 209, und in der Frequenz stabilster Quasibewegungen, s. Richter und Scholz 1987, S. 199ff.. Die Form eines Dodekaeders nimmt die 0,01 mm große Kalkalge Braarudosphaera bigelowi ein, s. van der Schoot 2005a, S. 179.

126 Die Blätter reihen sich bei Pflanzen vor allem in Winkeln von 90°, 180° und etwa 137,5° (≈ der ‚goldene‘ Winkel) um den Stengel; dazu und für den Ansatz eines biologischen Erklärungsmodells siehe Richter und Scholz 1987, S. 190ff..

127 Vgl. Fossa 2006.

Über ATHENAGORAS von Athen (2. Jh. n. Chr.) ist eine Behauptung des Pythagoreers LYSIS (ca. 425 v. Chr.) überliefert:<sup>128</sup>

Gott ist eine unaussprechbare Zahl.

(Λῦσις δὲ ...) ἀριθμὸν ἄρρητον ὀρίζειται τὸν θεόν.

Die Verlässlichkeit dieser Überlieferung wird stark angezweifelt,<sup>129</sup> wie auch die genaue Bedeutung unklar ist. Zumindest scheint durch ἀριθμὸν ἄρρητον die Inkommensurabilität mit ins Spiel zu kommen.<sup>130</sup> Sollte es aber tatsächlich einen engen Zusammenhang bei den Pythagoreern zwischen dem Göttlichen und inkommensurablen Verhältnissen gegeben haben, wie das Zitat es andeuten könnte, so hätte der Goldene Schnitt vielleicht aufgrund eines bereits in der frühantiken Mathematik vermuteten hohen Grades der Inkommensurabilität (s. Abschnitte 1.4.1 und 1.4.2) dabei eine exponierte Stellung eingenommen.<sup>131</sup> Das Pentagramm wäre dann, weil es durch die Diagonalen der einfachsten geometrischen Figur sich ergibt, die die stetige Teilung in prominenter Weise enthält, eine nachvollziehbare Wahl für das Wahrzeichen der Pythagoreer, und PLATONS Erwähnung des Dodekaeders in Bezug auf den Himmel vor einem anderen Hintergrund zu lesen. Der platonische Kosmos hätte als ‚sichtbarer Gott‘ und als ‚alles Sichtbare Umfassende‘ in der stetigen Teilung ein mathematisches Symbol:

Und nunmehr möchten wir denn auch behaupten, daß unsere Erörterung über das All ihr Ziel erreicht habe; denn nachdem diese Welt in der obigen Weise mit sterblichen und unsterblichen belebten Wesen ausgerüstet und erfüllt worden, ist sie so selbst zu einem sichtbaren Lebewesen (ζῶων ὀρατὸν) dieser Art geworden, welches alles Sichtbare umfaßt (ὀρατὰ περιέχον), zum Abbilde des Schöpfers, zum sinnlich wahrnehmbaren Gott (θεός αἰσθητός), dem größten und besten, schönsten und vollendetsten, geworden, diese eine und eingeborne Welt.

*Timaios 92c*

128 Diels und Kranz 2005, 46 Frg. 4.

129 Vgl. Fowler 1999, S. 294.

130 Wobei ἄρρητος auch eine rein religiöse Bedeutung zu haben schien, siehe Burkert 1972, S. 461f.. Bei PLATON kommen die Ausdrücke ῥητός – ἄρρητος im mathematischen Verständnis neben *Hippias I 303bc* (siehe Abschnitt 1.2.2) nur noch in *Politeia 546c* vor. Dort spricht Sokrates von dem «aussprechbaren Durchmessern» (διαμέτρων ῥητῶν) der Fünf, womit wohl der gerundete Durchmesser 7 eines fünffüßigen Quadrates mit Durchmesser  $\sqrt{50} \approx \sqrt{49} = 7$  gemeint ist. Kurz davor ist von «alles gegeneinander ausdrückbar» (ῥητὰ πρὸς ἄλληλα) im ähnlichen Sinn die Rede, kurz darauf von ἄρρητων.

131 Die religiöse und geometrische Bedeutung von «ἄρρητος» hätten dann einen inhaltlichen Zusammenhang. Das «Unsagbare» Mysteriengeheimnis und das «irrationale» geometrische Verhältnis wären durch mehr als eine reine Äquivokation, wie Burkert 1972, S. 462, dagegen vermutet, verbunden.

«There can be no doubt that the chief study of the Academy was mathematics, and it is really hopeless for anyone but a mathematician to understand fully the work that Plato was doing with his disciples.»

Burnet 1928, S. 96

# Geometrische Konstruktion und Tugend – Zu Menon 86d-87a

## Einleitung

Die geometrische Lehrstunde für den Sklaven in *Menon 82b-84d* ist wohl der bekannteste mathematische Auszug platonischer Literatur und zugleich das älteste Textzeugnis mathematischen Inhalts dieser Länge der griechischen Kultur. Der kleine geometrische Bruder,<sup>1</sup> der später im Dialog auftaucht (*Menon 86d-87a*), blieb allgemein weniger beachtet, ist für den Fachmann aber umso interessanter. Denn wegen ihrer äußersten Knappheit ist diese Stelle in ihrem mathematischen Gehalt schwer zu fassen, unter den Interpreten umstritten und gilt als nicht eindeutig bestimmbar.<sup>2</sup> Letzteres soll im folgenden widerlegt werden. Es wird sich unter Bezugnahme auf den Status geometrischer Objekte und die ungeschriebene Lehre PLATONS ergeben, dass der geometrischen Aufgabe eine größere Bedeutung, als bisher angenommen, für die thematische Entwicklung des Gesprächs zwischen Sokrates und Menon zukommt.<sup>3</sup>

Als Vorbereitung der Diskussion antik-geometrischer Sachverhalte müssen ein paar durch die moderne Mathematik vermittelte Vorurteile ausgeräumt werden. Diese den Unterschied zwischen den Paradigmen echt Euklidischer und moderner algebraischer Geometrie ausmachenden Einzelheiten seien im folgenden kurz zusammengefasst.

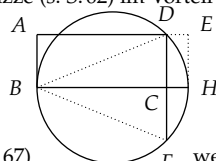
## 2.1 Differenzen antik-euklidischer Geometrie und moderner Mathematik

Ein zentraler Unterschied griechisch-antiker Mathematik und den mathematischen Intuitionen, mit denen einen die höhere Schule entlässt, der viele Missverständnisse hervorbringt, ist, dass man damals an

1 Man kann die Bemühungen um eine Definition von  $\sigma\chi\tilde{\eta}\mu\alpha$  (*Menon 75bc*) als eine dritte Textstelle mit mathematischen Inhalt im Dialog ausmachen (vgl. Gaiser 1964, S. 357), worauf hier verzichtet wird, weil  $\sigma\chi\tilde{\eta}\mu\alpha$  dort in erster Linie nicht in seiner geometrischen Bedeutung auftritt.

2 «Das Vorgehen der Geometer wird nun an dieser Stelle leider durch ein Beispiel erklärt, das bis heute mathematisch nicht hinreichend aufgeklärt werden konnte» (Böhme 2000, S. 93). Wobei ziemlich krude Übersetzungen und Erklärungen ihren Teil zu dieser öffentlichen Meinung beigetragen haben. Dabei gibt es, wenn man den mathematischen Anspruch PLATONS und der Figur des Sokrates als hoch annimmt, zu der bereits von August 1843 (1829 veröffentlicht) begonnenen, und vor allem von Cook Wilson 1903 weiter entwickelten, Interpretationslinie eigentlich nur einen seriösen Konkurrenten, nämlich die u. a. in Sternfeld und Zyskind 1977 dargestellte Alternative.

Nun wird PLATON von manchen eine tiefe eigene Einsicht in die Mathematik seiner Zeit nicht zugesprochen, es gibt sogar Philosophen, die ihm die Bereitschaft, abstrakte, kognitive Akte zu vollziehen, aberkennen, wie Thomas 1980, S. 169f.. Er sieht die Lösung durch Benecke und seine Skizze (s. S. 62) im Vorteil gegenüber den Überlegungen Butchers (siehe nebenstehende



Abbildung; Skizze aus Thomas 1980, S. 167

wegen denkerischer Sparsamkeit: «On Butcher's diagram while it is true that rectangle ABCD is similar to rectangle CDEH, one has to engage in at least two additional mental operations in order to make the comparison. . . . since Plato had a strong visual sense, it is entirely plausible that he selected a diagram that would pictorially establish the theoretical point he was trying to make.»

3 Das wird der öfters vertretenen Auffassung entgegen stehen, dass der konkrete mathematische Inhalt für den Dialog und seine Interpretation nicht von Bedeutung ist, sondern es nur auf die Vorgehensweise des Geometers ankommt; vgl. Bluck 1961, S. 441.

die Mathematik weitgehend von der Geometrie aus heranging, während man jetzt die Geometrie für gewöhnlich von einem arithmetisch-algebraischen Standpunkt aus betrachtet. So vermittelt die höhere Schulbildung ihren Zöglingen heutzutage die Vorstellung eines Punktraumes. Der unendlich weit ausgedehnte geometrische Raum besteht darin aus unendlich vielen Punkten, deren Zusammensetzung andere Gebilde hervorbringt. Ein Kreis ist die Linie, die sich aus genau den Punkten zusammensetzt, die von einem ausgezeichneten Punkt (dem sogenannten Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben. Dagegen sind antik-euklidisch vorgestellt Punkt, Linie, Fläche und Körper eigenständige Entitäten, die nicht aufeinander zu reduzieren sind.<sup>4</sup> Im Gefolge dieser Tradition konnte man noch im Mittelalter von den *drei* geometrischen Elementen des Kreuzes sprechen: den zwei Strecken und dem Punkt, in dem sie sich schneiden; ein Punkt, den die beiden Linien nicht bereits als Teil enthalten, sondern der zu ihnen hinzukommt und den Schnitt markiert, indem er die durch den Schnitt entstandenen Linienteile begrenzt.

Aber natürlich stehen Punkt, Linie etc. in bestimmten Beziehungen zueinander. Diese wurde antik-euklidisch als Grenze festgelegt: Eine Linie wird durch zwei Punkte begrenzt, eine Fläche durch eine oder mehrere Linien und ein Körper durch eine oder mehrere Flächen.<sup>5</sup> Antik-euklidische Objekte sind demnach endlich, weil begrenzt, insbesondere gibt es keine (aktual-unendlichen) *Geraden*, sondern nur (beliebig verlängerbare) *Strecken*.<sup>6</sup> Entsprechend gibt es auch antik-euklidisch keinen Begriff unseres geometrischen (unendlichen) Raumes. Eine Ebene z. B. ist von Strecken begrenzt, der Unterschied von Ebenen und Figuren ist, dass Figuren durch ihre Grenzlinien (und deren Zusammenhang) in der Gestalt bestimmte Flächen sind, die die Ebene in ein Innen und Außen unterteilen. Das muss erläutert werden: Unter Kreis verstand man nicht den Kreisumfang für sich, sondern die Fläche zusammen mit der durch die Grenzlinie gegebenen Gestalt. Diese Grenzlinie umschließt die Fläche *vollständig*, was soviel bedeutet, dass sie die Fläche der Figuren von der restlichen äußeren Fläche abtrennt. — Die Größe einer Fläche, der Flächeninhalt einer Figur, ist antik-euklidisch nicht mit einer ihm zugeordneten Zahl gleichzusetzen und genausowenig bei der Länge einer Linie.

Eine weitere grundlegende Vorstellung der modernen Mathematik ist die Zahlengerade, eine Gerade deren Punkte mit den (reellen) Zahlen identifiziert werden. Eine Strecke von 0 bis zu einem Punkt  $x$  auf der positiven Seite, hat genau die Länge  $x$ . Und mit den Methoden neuzeitlicher Mathematik wird Ähnliches für Flächen erreicht. Antik-euklidisch aber gibt es keinen automatisch stellvertretend behandelbaren Zahlenwert! Wenn man die Größengleichheit zweier gegebenen Flächen zeigen will, muss man sie letztlich konstruktiv ineinander überführen.<sup>7</sup>

Man neigt heute leicht zu einer Minderbewertung der auf Zirkel und Lineal beschränkten euklidischen Geometrie, die an den drei großen mathematischen Problemen der Antike scheiterte: der Quadratur des Kreises, der Verdopplung des Würfels und der Dreiteilung des Winkels. So gab es (natürlich) in der Antike verschiedene Lösungen z. B. der Würfelverdopplung (ARCHYTAS, EUDOXOS, MENAICHMOS), die natürlich mit mehr Postulaten als nur denen beliebig zeichnbarer Kreise und Strecken arbeiten mussten, da die Probleme mit Zirkel und Lineal nicht lösbar sind. Man unterschätzt die antik-euklidische Geometrie noch weniger, wenn man bedenkt, dass von einem antik-euklidischen Standpunkt aus, die moderne Mathematik das Infinitesimale und ähnliches wie eine hervorragende Technik der Annäherung betrachtet werden kann, die die Probleme aber auch nicht, oder zumindest nicht besser, löst. Das Verhältnis von Kreisfläche zum Radius bzw. von Kreislinie zum Durchmesser wird zwar inzwischen mittels  $\pi$  bestimmt. Aber auch diese transzendente Zahl, die sich hinter dem Zeichen verbirgt, wird man in ihrer dezimalen Nachkommastellenentwicklung nie kennen, wie viele Milliarden Stellen

4 Vgl. Saito 2009, S. 806.

5 Vgl. EUKLIDS *Elemente* Buch I, und Abschnitt 1.3.7.

6 Die unendliche gerade Linie bei EUKLID ist m. E. nur eine sprachliche Abkürzung und mathematik-technisch auflösbar.

7 Siehe Abschnitt 2.2.2.

man noch ausrechnen wird, es werden immer noch unendlich viele fehlen.

Beachtet man diese Unterschiede, ist man gut vorbereitet für ein Verständnis des geometrischen Beispiels in *Menon* 86d-87a.

## 2.2 Die Fragestellung und ihre Bearbeitung

Der mathematische Inhalt von *Menon* 86d-87a gilt sowohl in der englisch- wie deutschsprachigen Sekundärliteratur gemeinhin als problematisch und bisher nicht eindeutig entschieden. Drei Ursachen scheinen die Einsicht bisher hauptsächlich behindert zu haben. Erstens sind die entscheidenden Sätze sprachlich unsicher und geben die Grundlage für sehr unterschiedliche Übersetzungen.<sup>8</sup> Zweitens fehlt oftmals ein ausreichendes Verständnis früher griechischer Mathematik, und drittens traute man PLATON und dem fiktiven Menon zum Teil kein größeres mathematisches Verständnis zu.

Sokrates erläutert Menon seinen Vorschlag, in der Untersuchung der Frage nach der Lehrbarkeit der Tugend mit einer *hypothesis* zu arbeiten, mit einem Vergleich:

Dieses, von einer Voraussetzung (ἐξ ὑποθέσεως) aus, meine ich aber so, wie die Geometriker oft etwas zur Betrachtung ziehen, wenn ihnen jemand eine Frage vorlegt, wie etwa von einer Fläche (χωρίου), ob es möglich ist, in diesen Kreis diese Fläche als Dreieck (τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον) einzuspannen, darauf möchte einer sagen ...

λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ᾧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδὴν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷόν τε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι, εἴποι ἂν τις ὅτι ...

Eine gewisse Unsicherheit über den genauen Inhalt war bereits in der Übersetzung der Frage an den Geometriker enthalten, die Festlegung des Inhalts der Antwort wird bedeutend größere aufwerfen. Schleiermacher und Apelt übersetzten die Frage noch anders (s. S. 62), aber mittlerweile stimmt man darin überein, dass die Frage wie angegeben übersetzt werden muss. Eine Fläche als Dreieck in einen Kreis einzuspannen oder einzubeschreiben bedeutet dabei, ein Dreieck zu konstruieren, dessen Ecken auf der Kreislinie liegen, und dessen Fläche gleich zu der Ausgangsfläche ist.

Eine in Bezug auf den mathematischen Inhalt wenig beachtetes Detail ist die von Sokrates entworfene Gesprächssituation. Dem Fachmann in Sachen Geometrie wird eine Frage vorgelegt von *irgendwem* (τις). Also vermutlich weniger in der Diskussion oder Prüfungssituation von einem anderen Mathematiker, sondern von einem geometrisch interessierten Laien. Dessen Frage wird dann aber möglicherweise keine dezidiert mathematische sein und vielleicht eine Behauptung enthalten, über deren Wahrheitsgehalt der Geometriker keine Auskunft geben kann, und er wird statt mit ja oder nein ausweichend antworten müssen. Der Fachmann nimmt die Frage, versucht sie ins Mathematische umzuwandeln und gibt eine Antwort, mit der der Fragesteller wahrscheinlich zufrieden ist, vielleicht auch deshalb, weil er den mathematischen Inhalt nicht mehr versteht. Wenn dies der fiktive Fall wäre, so würde Sokrates wegen dieser Gesprächskonstellation auch nicht behaupten wollen, die bedeutende oder überhaupt eine geometrische Lösung der Frage zu geben, da die Frage möglicherweise gar keinen eindeutigen mathematischen Inhalt hat.

Die Frage entbehrt in der Tat eines *konkreten* mathematischen Inhalts, da die Fläche und der Kreis nicht in Beziehung gesetzt werden, wie in *Menon* 82b-84b das Quadrat, dessen Seitenlänge gesucht wird, doppelt so groß ist wie die quadratische Fläche, von der man ausgeht. Manche Exegeten versuchten daher Fläche und Kreis zu konkretisieren, indem sie sie auf die im ersten Beispiel vermutlich im Sand gezeichneten Figuren bezogen, wurden aber damit nicht der Allgemeinheit der scheinbaren Fragestellung in ihrer sprachlichen Form und vor allem der Antwort gerecht. Sokrates' Geometriker gibt dann

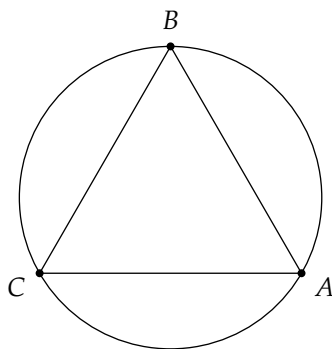
<sup>8</sup> Siehe die Gegenüberstellung auf S. 62.

auch dementsprechend – um der Untersuchung vorzugreifen – eine äquivalente Eigenschaft zur Einbeschreibbarkeit einer Fläche in einen Kreis an. Dabei ist bereits in der Frage unbestimmt, ob Flächen beliebiger Begrenzungen, nur die geradlinig begrenzten oder anderes gemeint sei.

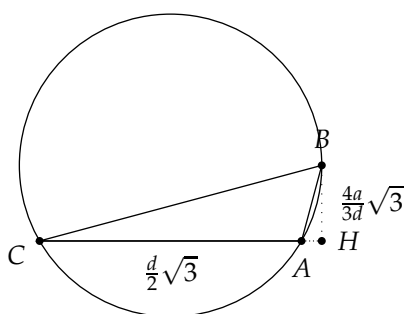
Zunächst folgt eine grundlegende mathematische Umsicht auf die von Sokrates in das Gespräch mit Menon geworfene mathematische Frage. Dann wird die Textstelle, in der Sokrates die Antwort des ausgedachten Geometers gibt, mit ihren sprachlichen Eigenheiten vorgestellt, um schließlich die verschiedenen Interpretationen und die Argumente für und gegen sie zu diskutieren.

### 2.2.1 Moderne Antworten

(1) Heute würde man jene Aufgabe in der Schule folgendermaßen verstehen und möglicherweise lösen.<sup>9</sup> Die vorgegebene Fläche ist gegeben als Zahl(parameter)  $a$ , der Kreis durch die Länge  $d$  seines Durchmessers, und die Lösung besteht darin, in Abhängigkeit von  $a$  und  $d$  die Bedingungen dafür anzugeben, dass ein einbeschreibbares Dreieck existiert mit Fläche gleich  $a$ . Und entsprechend ist die Frage zu denken: Gegeben seien zwei positive reelle Zahlen  $a$  und  $d$ ; gibt es ein Dreieck mit Flächeninhalt  $a$ , dessen Eckpunkte auf einem Kreis mit Durchmesser  $d$  liegen? Das größte in einen Kreis einzuschreibende Dreieck (dazu später mehr) ist das gleichseitige einbeschriebene Dreieck mit Seitenlänge  $\frac{d}{2}\sqrt{3}$  und Fläche  $\frac{3d^2}{16}\sqrt{3}$ .



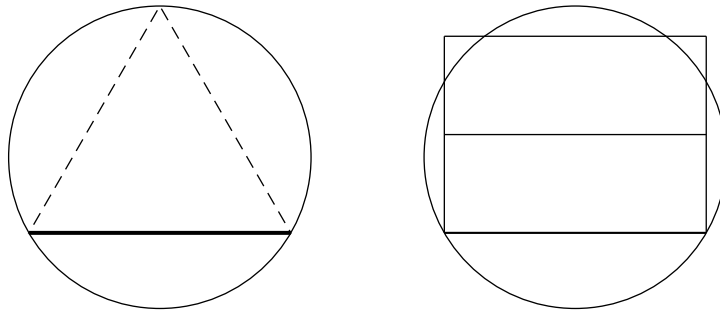
Für jedes  $a < \frac{3d^2}{16}\sqrt{3}$  gibt es nun offensichtlich ein Dreieck mit einer Grundlinie der Länge  $\frac{d}{2}\sqrt{3}$ , Höhe  $\frac{2a}{\frac{d}{2}\sqrt{3}} = \frac{4a}{3d}\sqrt{3}$  und damit der Fläche  $a$ .



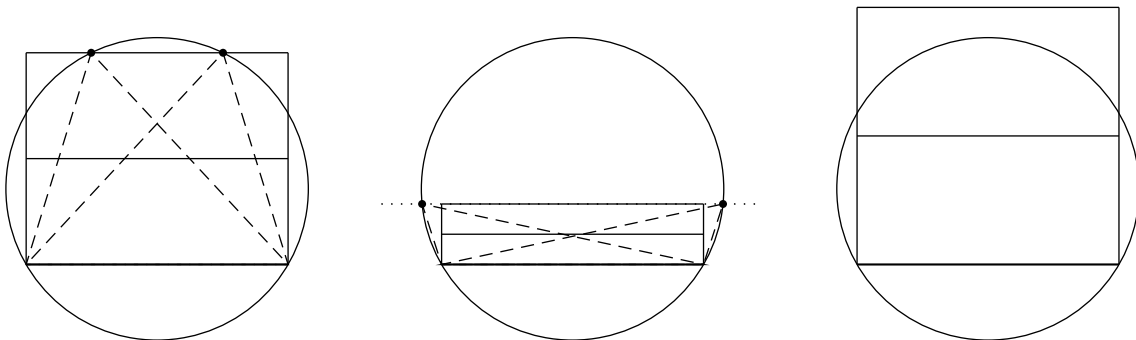
Also ist eine Fläche  $a$  genau dann als Dreieck einbeschreibbar, wenn für  $a$  gilt  $0 < a \leq \frac{3d^2}{16}\sqrt{3}$ . Man kann die Aufgabe allerdings auch anders angehen:

(2) Bezugnehmend auf das gleichseitige einbeschreibbare Dreieck lässt sich diese Bedingung etwas geometrischer fassen. Denn eine Fläche ist genau dann kleinergleich dem gleichseitigen Dreieck, wenn sie, auf einer Seitenlinie dieses größten Dreiecks als (flächengleiches) Rechteck angelegt und dann ('nach oben') verdoppelt, kleinergleich dem Dreieck oder dem Kreis ist. Denn bekanntlich ist ein Parallelogramm doppelt so groß wie ein Dreieck mit gleicher Höhe und Grundlinie.

<sup>9</sup> Vgl. Heijboer 1955, S. 96a2.



Die (durch Verlängerung erreichten) Schnittpunkte oder Berührungspunkt mit dem Kreis sind mögliche dritte Dreieckspunkte.



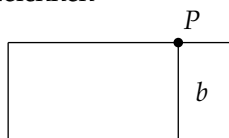
Eine Fläche  $a$  ist also genau dann in einen Kreis einspannbar, wenn ein doppelt so großes Rechteck, dessen eine Seite  $s_1$  so lang ist wie eine Seite des in den Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks, entweder nicht höher ist als das Dreieck oder (alternativ) mit keiner Seite vollständig aus dem Kreis herausfällt.

(2\*) Man kann (2) auch etwas allgemeiner fassen, indem man statt der Seite des gleichseitigen Dreiecks beliebige Sehnen des Kreises zulässt. Die Bedingung wäre dann, dass es überhaupt eine Sehne im Kreis gibt, auf die man die Fläche entsprechend anlegen kann. Man kann auch weiter das Aufeinanderlegen der Rechtecke ersetzen dadurch, dass die Fläche auf die Hälfte der Linie angelegt nicht über den Kreis ganz hinausgehe. Zudem gilt das ganze auch, wenn man statt Rechtecken nur Parallelogramme fordert.

(3) Ein anderes, etwas ferner liegendes Äquivalent zur Einbeschreibbarkeit greift auf die mittlere Proportionale zurück. Das Kriterium für die Einbeschreibbarkeit der Fläche besteht darin, dass man sie als ein solches Rechteck auf den Durchmesser des Kreises setzen kann, dass das dann noch ‚verbleibende‘ Rechteck ihm ähnlich ist.



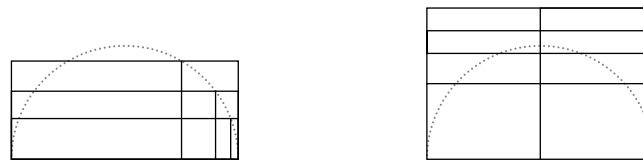
Wenn wir die Seiten folgendermaßen bezeichnen



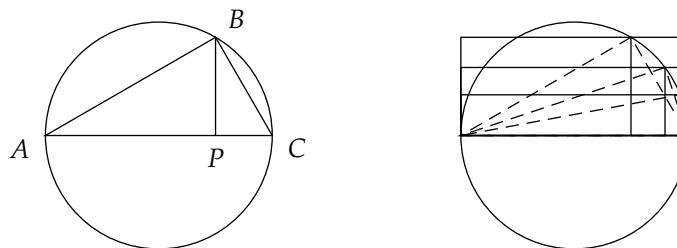
bedeutet die Ähnlichkeit der beiden Rechtecke, dass ihre Seiten im selben Verhältnis stehen, d.h.  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ . Da sie die Seite  $b$  gemeinsam haben, ist  $b$  die sogenannte mittlere Proportionale von  $a$  und  $c$ , die genau die durch die Gleichung ausgedrückte Eigenschaft hat.

Der springende Punkt ist nun, dass  $P$ , wenn  $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$  gilt, dann automatisch auf der Kreislinie des Kreises (mit Durchmesser  $a+c$ ) liegt. Genauer ergeben genau die Punkte  $P$  der so gearteten Rechteckspaare

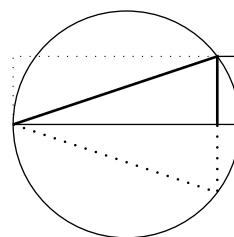
den zur Grundlinie gehörigen Thaleskreis. Dazu müssen wir nur die Rechteckspaare ausschließen, die gleich sind, aber keine Quadrate.<sup>10</sup>



Dass umgekehrt alle Kreispunkte die Konstruktion derart ähnlicher Rechtecke ermöglichen, ist leicht aus der Ähnlichkeit der Teildreiecke der rechtwinkligen Dreiecke des Thaleskreises zu ersehen.<sup>11</sup> Die Dreiecke  $\triangle ABP$  und  $\triangle BPC$  sind ähnlich und genauso ihre zugehörigen Rechtecke.

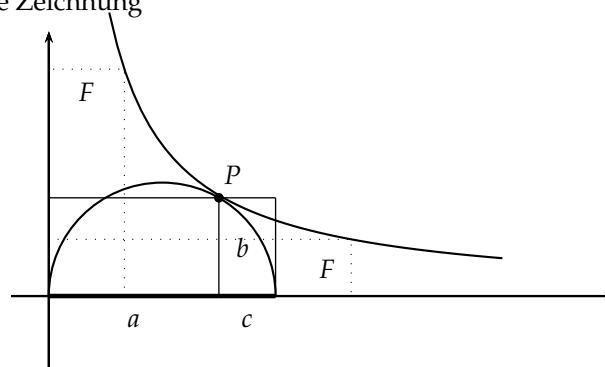


Spiegelt man die durch die Diagonale erhaltene Hälfte des Rechtecks, so ergibt sich ein dem Kreis eingeschriebenes Dreieck, das gleich der gegebenen Fläche ist.



Auf diese Weise konstruiert man ein *gleichschenkliges* Dreieck, was aber keine Einschränkung bedeuten muss (siehe die Diskussion im folgenden Abschnitt). Die Bedingung wäre demnach: Eine Fläche  $F$  ist genau dann in einen Kreis mit Durchmesser  $d$  einbeschreibbar, wenn ein flächengleiches Rechteck mit Seiten  $a$  und  $b$  ( $b \leq a$ ) existiert, so dass gilt  $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b}$ ; oder (etwas voraussetzungsreicher formuliert) wenn die Fläche als Rechteck so auf dem Durchmesser anlegbar ist, dass ein ihm ähnliches übrigbleibt.

**(3\*)** In Anknüpfung an **(3)** kann man die Einbeschreibbarkeit mittels der Existenz eines geeigneten Punktes auf dem Kreisumfang formulieren. Legt man ein cartesisches Koordinatenkreuz mit  $x$ - und  $y$ -Achse folgendermaßen über die Zeichnung



10 Für einen Beweis siehe Abschnitt 2.2.2, die Diagonalen der Rechtecke ergeben rechtwinklige Dreiecke.

11 Siehe Abschnitt 2.2.2.



dann wird  $P$  (jetzt markiert durch die Koordinaten  $(x, y)$ ) mittels der Fläche  $F$  und des Kreisdurchmessers  $d (= a+c)$  gekennzeichnet durch die zwei Bedingungen:

i)  $F = x \cdot y,$

ii)  $y^2 + x^2 = x \cdot d$  (wegen  $y^2 = x \cdot (d-x)$ ).

Durch Einsetzen von i) in ii) ergibt sich die Gleichung vierten Grades

$$x^4 - x^3 \cdot d + F^2 = 0,$$

die nicht mit Zirkel und Lineal zu lösen ist.<sup>12</sup> Ihre Lösungen sind die Schnittpunkte der Funktion  $f(x) = \frac{F}{x}$  mit dem Kreis (der durch  $y^2 + x^2 = x \cdot d$  festgelegt ist). Kann die Fläche einbeschrieben werden, sind es genau zwei Schnittpunkte, außer die Fläche ist maximal (wie im obigen Beispiel), dann nur einer.

## 2.2.2 Was wusste Platon davon?

Geometrische Probleme, deren Lösung ähnlich zu **(2)** relative Größenvergleiche enthält, sind in den *Elementen* kaum zu finden. Symptomatisch dafür ist die Konstruktionsaufgabe (VI 2), die darin besteht, einem «gegebenen Kreis ein mit einem gegebenen Dreieck winkelgleiches Dreieck einzubeschreiben». Damit ist auch ein gleichseitiges, weil winkelgleiches, Dreieck leicht einzubeschreiben. Ein Beweis oder überhaupt ein Wissen darum, dass das gleichseitige einbeschriebene Dreieck eindeutig und das größte einbeschreibbare Dreieck ist, ist aus der Antike scheinbar nicht überliefert. Es ist aber mit damaligen Methoden leicht zu beweisen.<sup>13</sup> Die Lösung **(2)** war demnach für PLATON vollständig nachvollziehbar.

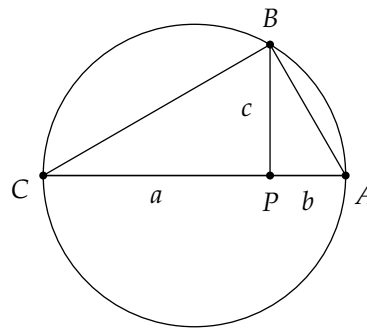
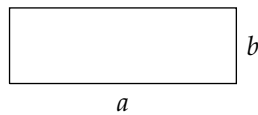
Ein (bisher vernachlässigter) Umstand ist jedoch, dass **(2)** nicht äquivalent ist zu der Bedingung, dass die gegebene Fläche kleinergleich dem einbeschreibbaren gleichseitigen Dreieck sein müsse. Die Behauptung der Äquivalenz dieser beiden Bedingungen enthält nämlich zu starke Behauptungen über die Umformbarkeit von Flächen beliebiger Begrenzung in geradlinig begrenzte Flächen.<sup>14</sup> Bereits die Umformung der Kreisfläche stellte die Geometriker vor erhebliche Probleme und ist nicht mit Zirkel und Lineal zu bewerkstelligen. Die Behauptung, dass eine gegebene Fläche genau dann als Dreieck in einen gegebenen Kreis einbeschreibbar ist, wenn die Fläche kleiner als das größte einbeschreibbare Dreieck ist, ist unter einer Beschränkung auf Zirkel und Lineal falsch und ansonsten in ihrem Wahrheitswert so unbestimmt wie die möglichen Arten der gegebenen Fläche unbestimmt sind.

Ein anschauliches Beispiel für die Schwierigkeit der Umformung von Flächen ineinander ohne algebraisches Instrumentarium bieten bereits Quadrat und Rechteck. Seien  $a$  und  $b$  die zwei Seiten eines Rechtecks. Man füge sie gerade aneinander, bilde darum den Kreis und zeichne das Dreieck (wie in der Abbildung) ein.

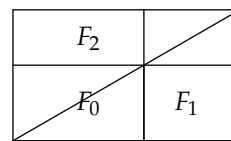
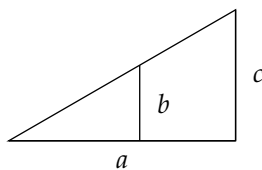
<sup>12</sup> Siehe Heath 1921a, S. 301.

<sup>13</sup> Siehe Knorr 1986, S. 92f.. Zuvor finden sich in der Sekundärliteratur gar kein oder nur ein unvollständiger Beweis wie bei Farquharson 1923, S. 23, der nur zeigt, dass, wenn es ein größtes einbeschreibbare Dreieck gibt, es das gleichseitige sein muss. Gaiser 1964, S. 383f., versucht einen letztlich anspruchsvolleren Beweis zu geben, der mit Knorrs Idee aber überflüssig wird, wie auch seine daran anschließenden Überlegungen.

<sup>14</sup> So ist der Innenkreis des gleichseitigen Dreiecks kleiner als das Dreieck, aber bei der Beschränkung auf Zirkel und Lineal, ist die Fläche dieses Kreises nicht als Dreieck in den Kreis einbeschreibbar.

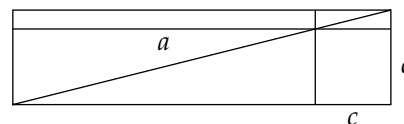
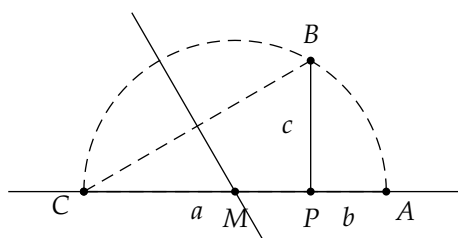


Wegen des rechten Winkels  $\angle CBA$  besitzen alle drei Dreiecke  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BPC$  und  $\triangle APB$  die gleichen Winkel und sind sich daher ähnlich. Also verhalten sich auch die Seiten derart zueinander:  $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ . Dass nun das Quadrat mit Seite  $c$  und das Rechteck mit Seiten  $a$  und  $b$  gleich groß sind, ist leicht zu sehen. Man lege  $\triangle APB$  folgendermaßen in  $\triangle BPC$  und vervollständige es zum Rechteck mit Seiten  $a$  und  $c$ .



Da nun  $c^2 = F_0 + F_2$  und  $a \cdot b = F_0 + F_1$ , und  $F_1 = F_2$  sein muss (da die Diagonale ein Rechteck in zwei gleiche Teile teilt), so ist das Quadrat mit  $c$  flächengleich zu  $a \cdot b$ .

Auf umgekehrte Weise kommt man von einem Quadrat zu einem flächengleichen Rechteck, dessen eine Seite  $a$  vorgegeben ist. Man füge an  $a$  die Strecke  $c$  senkrecht an, ermittle über die Seitensenkrechte von  $CB$  den Mittelpunkt des Thaleskreises und erhält die andere Seite  $b$  des Rechtecks durch  $PA$ .



Darüber, dass die Ähnlichkeit der drei Dreiecke  $\triangle ABC$ ,  $\triangle BPC$  und  $\triangle APB$  eine notwendige und hinreichende Bedingung ist dafür, dass  $B$  auf dem Halbkreis durch  $C$  und  $A$  liegt, und die Ähnlichkeit der zwei kleineren Dreiecke äquivalent ist zur Ähnlichkeit der entsprechenden Rechtecke, ist Bedingung (3) in der frühgriechischen Geometrie relativ leicht einzusehen, allerdings nur für den Fall gleichschenkliger Dreiecke: Eine Fläche ist als *gleichschenkliges* Dreieck einbeschreibbar genau dann, wenn sie die Anlegbarkeitsbedingung von (3) erfüllt. Was sich (nach dem letzten Abschnitt) i.a. nicht konstruktiv bewerkstelligen lässt, ist der Übergang von einem beliebigen einbeschriebenen Dreieck zu einem gleichschenkligen. Die Möglichkeit eines (stereometrischen) Beweises scheint aber zu PLATONS Lebzeiten an der Akademie geschaffen worden zu sein.

Ein jüngerer Zeitgenosse PLATONS und Mitglied der Akademie, dessen mathematischer Höhepunkt vermutlich über zwanzig Jahre nach der wahrscheinlichen Abfassungszeit des *Menon* um 385 v. Chr. liegt, war MENAICHMOS.<sup>15</sup> Er gehört zu den ältesten Mathematikern, denen eine Beschäftigung mit Kegelschnitten zugeschrieben wird, die er benutzt haben soll, um zwei mittlere Proportionale zu finden und so das Problem der Verdopplung des Würfels zu lösen; genaueres ist nicht überliefert. Der Schnitt einer Ebene durch einen Kegel ergibt eine ebene Fläche, deren Rand eine Ellipse oder den Teil einer Parabel oder Hyperbel bildet. Mit den Kegelschnitten wurden der frühgriechischen Geometrie Kurven zugänglich, die das Einbeschreibbarkeitsproblem im Sinne von (3\*) beschreibbar machen als Schnitt

15 Vgl. Heath 1921a, S. 251ff., Heath 1921b, S. 110ff., Knorr 1986, S. 61ff..

zweier Kurven. Damit war über die Eigenschaften der Kurven grundsätzlich die Möglichkeit gegeben, ein oberes Limit für die Fläche in Abhängigkeit vom Durchmesser anzugeben.<sup>16</sup> Im Einbezug einer Geometrie der Körper, war damit das Einbeschreibbarkeitsproblem gelöst, auch wenn unter der Beschränkung auf Zirkel und Lineal in der Ebene die Kurven nur punktweise konstruierbar sind, und insofern keine konstruktive Verbesserung mit sich brachten.<sup>17</sup> Zu beachten ist weiterhin, dass auch für die Auswahl der passenden Hyperbel ein Flächenvergleich mit der Ausgangsfläche geschehen muss, der bei bestimmten Flächen problematisch ist.

### 2.2.3 Sokrates' Lösung: Text und Vokabular

Die Schwierigkeit des zweiten geometrischen Beispiels im Menon entspringt aus der Uneindeutigkeit des Textes, die wiederum aus der eleganten Kürze und dem noch nicht ganz festgelegten mathematischen Vokabular resultiert. Wenn auch insgesamt die Nähe zu den späteren geometrischen Fachausdrücken sehr groß ist.<sup>18</sup>

Dieses, von einer Voraussetzung aus (ἐξ ὑποθέσεως), meine ich aber so, wie die Geometriker oft etwas zur Betrachtung ziehen, wenn ihnen jemand eine Frage vorlegt, wie etwa von einer Fläche (χωρίου), ob es möglich ist, in diesen Kreis diese Fläche als Dreieck (τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον) einzuspannen, darauf möchte einer sagen, ich weiß noch nicht, ob dieses ein solches ist, aber als eine Voraussetzung für die Sache glaube ich folgendes bei der Hand zu haben. Wenn diese Fläche eine solche ist, daß, wenn man sie an den Durchmesser des Kreises (τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν) anlegt (παρατείναντα ἐλλείπειν), noch ein ähnlicher Platz übrig bleibt (τοιούτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον), als der angelegte selbst ist, alsdann, dünkt mich, wird etwas anderes erfolgen, und wiederum etwas anderes, wenn dies unmöglich ist. In Beziehung auf diese Voraussetzung nun will ich dir sagen, wie es mit der Einspannung derselben in den Kreis steht, ob sie unmöglich ist oder nicht. *Menon 86e-87b*

λέγω δὲ τὸ ἐξ ὑποθέσεως ὧδε, ὥσπερ οἱ γεωμέτραι πολλάκις σκοποῦνται, ἐπειδὴν τις ἔρηται αὐτούς, οἷον περὶ χωρίου, εἰ οἷον τε ἐς τόνδε τὸν κύκλον τόδε τὸ χωρίον τρίγωνον ἐνταθῆναι, εἴποι ἂν τις ὅτι " Οὐπω οἶδα εἰ ἔστιν τοῦτο τοιοῦτον, ἀλλ' ὥσπερ μὲν τινα ὑπόθεσιν προὔργου οἶμαι ἔχειν πρὸς τὸ πρᾶγμα τοιάνδε· εἰ μὲν ἔστιν τοῦτο τὸ χωρίον τοιοῦτον οἷον παρὰ τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν παρατείναντα ἐλλείπειν τοιοῦτῳ χωρίῳ οἷον ἂν αὐτὸ τὸ παρατεταμένον ἦ, ἄλλο τι συμβαίνειν μοι δοκεῖ, καὶ ἄλλο αὖ, εἰ ἀδύνατόν ἐστιν ταῦτα παθεῖν. ὑποθέμενος οὖν ἐθέλω εἰπεῖν σοι τὸ συμβαῖνον περὶ τῆς ἐντάσεως αὐτοῦ εἰς τὸν κύκλον, εἴτε ἀδύνατον εἴτε μή."

Es ergeben sich einige Interpretationsmöglichkeiten und -probleme:

Was für eine Art von Fläche (χωρίου) ist gemeint? Plausibel erscheint eine Beschränkung auf geradlinig begrenzte Flächen. Diese sind nämlich, im Unterschied zu Kreisen u.ä. Figuren, mit Zirkel und Lineal zu Quadraten umformbar und als Rechtecke auf beliebigen Strecken anlegbar. Möglich ist aber auch ein Bezug auf eine der bereits bei der Quadratverdopplung in den Sand gezeichneten Flächen. Vielleicht ist aber tatsächlich auch von einer beliebig begrenzten Fläche die Rede. Dafür spräche die Benutzung außerhalb eines einschränkenden Kontextes, den das Wort hier erfährt und der einen konkreteren Sinn vorgeben würde und in dem χωρίου als Abkürzung benutzt werden würde. Dagegen spricht aber, dass χωρίου sehr wohl in eingeschränkterem Sinn gebraucht wurde, zum Beispiel bei PAPPUS von Alexandria sogar in der Bedeutung von Rechteck.<sup>19</sup>

Verschieden gelesen werden kann auch das τοιοῦτον οἷον, einmal als ‚wie‘ oder ‚von derselben Art wie‘ und damit in der Bedeutung von ‚die gleiche Fläche wie die bereits angelegte‘, oder aber als ‚ähnlich‘ und damit insgesamt als ‚der Gestalt nach gleiche Fläche‘ (und nicht unbedingt der Größe nach).

16 Vgl. Knorr 1986, S. 94a59, 63ff..

17 Vgl. Zeuthen 1896, S. 222.

18 «This passage is one of the most perplexing in all the works of Plato.» (Scott 2006, S. 134).

19 Vgl. Butcher 1888, S. 222.

Ein echtes Problem ist der durch  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  festgelegte Bezug der Linie (in τὴν δοθεῖσαν  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  γραμμὴν) auf die Fläche.  $\chi\omega\rho\acute{\iota}\omicron\nu$  ist nicht nur das Subjekt im entsprechenden Satz, sondern auch im vorhergehenden und nachfolgenden Kontext. Das  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  kann sich darum eigentlich nicht auf den Kreis beziehen. Butcher wiegelt ab: «The reference of  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  to  $\kappa\upsilon\lambda\omicron\varsigma$  is less harsh if we bear in mind that the cases of  $\alpha\upsilon\tau\omicron\varsigma$  are capable of a vague use which no English pronoun can bear.»<sup>20</sup> Wolfsdorf dagegen hält den Bezug von  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  auf den Kreis für nicht akzeptabel, schlägt jedoch vor, es possessiv zu verstehen im Sinne von ‚die Linie für die Fläche‘.<sup>21</sup>

Die Linie des Kreises wäre der Durchmesser des Kreises. Dieser würde aber griechisch direkter als  $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$  τὴν  $\delta\acute{\iota}\alpha\mu\epsilon\tau\rho\nu$  ausgedrückt werden.<sup>22</sup> Etwas spekulativ ist auch die Gleichsetzung von  $\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\epsilon}\iota\nu\epsilon\iota\nu$  mit  $\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$ , das soviel heißt wie ‚an eine Linie der Fläche nach anlegen‘.  $\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\epsilon}\iota\nu\epsilon\iota\nu$  tritt in der klassischen griechischen Literatur ein weiteres Mal nur bei PLATON *Politeia* 527a als von Geometrikern benutzter Ausdruck mit anschaulichem Einschlag in der Folge  $\tau\epsilon\tau\rho\alpha\gamma\omega\nu\acute{\iota}\zeta\epsilon\iota\nu$ ,  $\pi\alpha\rho\alpha\tau\acute{\epsilon}\iota\nu\epsilon\iota\nu$ ,  $\pi\rho\omicron\sigma\tau\iota\theta\acute{\epsilon}\nu\alpha\iota$  (quadrieren, ausdehnen, hinzusetzen) auf.

## 2.3 Interpretationen

Das Spektrum von unterschiedlichen Interpretationen des mathematischen Inhalts von *Menon* 86d-87a ist besonders in Anbetracht der Kürze der Passage und des angenommenen eindeutigen Inhalts enorm. Bereits 1832 wurden 22 verschiedene Versionen gezählt.<sup>23</sup> Aus ihre Diversität würde man die Existenz unterschiedlicher Textgrundlagen vermuten dürfen, insgesamt gibt es keinen Punkt, über den man in Übereinkunft wäre, außer dass es sich lohnt selbst etwas über diese Passage zu verfassen.<sup>24</sup> Ein paar Beispiele mögen das illustrieren:

20 Butcher 1888, S.222.

21 Siehe Wolfsdorf 2008, S.52. «I suggest that the sense here is equivalent to the sense that we have when, for example, with regard to driving on the highway, we criticize a driver for not sticking to *his* lane. Here we mean that the lane *belongs to him* in the sense that it is *for the driver to drive on*. Accordingly, X's given line is the line for X to be extended along, in other words, the line to which X is to be applied.» (Wolfsdorf 2008, S. 51, genauer dazu Wolfsdorf 2008, S. 51a44).

22 Siehe Heijboer 1955, S. 107. Bei PLATON tritt  $\delta\acute{\iota}\alpha\mu\epsilon\tau\rho\varsigma$  nur in *Kritias* 116a und *Timaios* 36c in der Bedeutung von Durchmesser eines Kreises auf.

23 Vgl. die Angaben und Verweise bei Heijboer 1955, S. 89.

24 Dies ist aber eine Voraussetzung für die Teilnahme an diesem schriftlichen Diskurs und somit notwendige Bedingung, die nicht wie z. B. die posthume Veröffentlichung von Heijboers Artikel von anderen in Umgehung des Urhebers vorgenommen werden kann.

By the words „after laying a foundation“ I mean the same thing that is often done by geometrists when a question is put to them, e. g. **in respect of an area-rectangle whether it is possible to inscribe triangularly in the circle here this area-rectangle.** (Then) such a geometrist would likely answer: "I do not know yet whether it has the required property but I think, if I may so put it, that I have a serviceable basis on which to work of the following nature: **if the rectangle be such that when you extend it (in the circle) lengthwise along its given line, it is defective in height by another rectangle similar to the extended one,** then, I believe, the result will be different from the result obtained when this cannot be done (i.e. when you cannot extend it in this manner and with that result). Having thus laid a foundation I am prepared to tell you about inscribing it in a circle (whether or not this is possible)". (Heijboer 1955, S. 122)

Dieses, von einer Voraussetzung aus, meine ich aber so, wie die Meßkünstler oft etwas zur Betrachtung ziehen, wenn ihnen jemand eine Frage vorlegt, **wie etwa von einer Figur, ob es möglich ist, in diesen Kreis dieses Dreieck einzuspannen,** darauf möchte einer sagen, ich weiß noch nicht, ob dieses ein solches ist, aber als eine Voraussetzung für die Sache glaube ich folgendes bei der Hand zu haben. **Wenn dieses Dreieck ein solches ist, daß, wenn man um seine gegebene Grundlinie den Kreis herumzieht, noch ein ebensolcher Raum übrigbleibt, als der umspannte selbst ist,** alsdann, dünkt mich, wird etwas anderes erfolgen, und wiederum etwas anderes, wenn dies unmöglich ist. In Beziehung auf diese Voraussetzung nun will ich dir sagen, wie es mit der Einspannung desselben in den Kreis steht, ob sie unmöglich ist oder nicht. (Schleiermacher)

Von einer Voraussetzung aber bei einer Betrachtung ausgehen — das meine ich so, wie die Geometer öfters es machen, wenn jemand sie fragt z. B. **hinsichtlich des Flächeninhalts einer Figur, ob es möglich sei, in diesen Kreis dies Dreieck seinem Flächeninhalt nach einzuschreiben.** Es erwidert dann wohl einer: Noch weiß ich nicht, ob dieses so geht, aber es dürfte wohl folgende Voraussetzung für die Sache förderlich sein: **wenn diese Figur (d.h. das Dreieck) ihrem Flächeninhalt nach so beschaffen ist, daß, wenn man an der gegebenen Seite derselben ein (ihr gleiches) Rechteck konstruiert, dieses an Flächeninhalt um ebensoviel zurückbleibt, wie das konstruierte Rechteck selbst Flächeninhalt hat,** so wird sich meines Erachtens etwas anderes ergeben als in dem anderen Falle, wo dies unmöglich ist. von einer Voraussetzung aus will ich dir also sagen, was sich in betreff der Einschreibung derselben in den Kreis ergibt, ob sie unmöglich ist oder nicht. (Apelt 1914, S. 50)

Diese drei Übersetzungen derselben griechischen Textstelle, die in ihrer Überlieferung nicht problematisch ist, geben einen Eindruck von der sprachlichen Unklarheit der Stelle. Heijboer überträgt das Rechteck so in den Kreis, dass eine Seite zur Kreissehne wird, und kann ein flächengleiches Dreieck einbeschreiben, wenn man im Kreis ein gleiches Rechteck auf das vorhandene setzen kann.<sup>25</sup> Schleiermachers Übersetzung macht letztlich «überhaupt keinen Sinn»<sup>26</sup>. Apelt dagegen möchte den Flächeninhalt eines *gegebenen Dreiecks* als *Rechteck* in den gegebenen Kreis einbeschreiben. Die Möglichkeit dieses Vorgangs wird dadurch geprüft, dass man den Flächeninhalt des Dreiecks als Rechteck auf einer der Dreiecksseiten anlegt ..., woraufhin einige Bedingungen und Hilfsannahmen ad-hoc eingeführt werden müssen.<sup>27</sup> Die Bewertung der im folgenden angeführten Interpretationen wird dem mathematischen Gehalt der Interpretation folgen, da die Fragestellung (wieder unter der Voraussetzung, etwas mathematisch Sinnvolles auszudrücken) eindeutig ist: Nämlich eine Fläche als Dreieck einem Kreis einzubeschreiben.

## 2.3.1 Eine Rhapsodie von Lösungsversuchen

### 2.3.1.1 Benecke

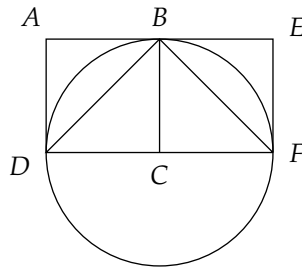
Benecke 1867 versteht unter der Fläche das Ausgangsquadrat (hier:  $ABCD$ ) des ersten geometrischen Beispiels im *Menon*. Die Bedingung ist, dass, wenn man es auf den Durchmesser des Kreises ( $DF$ ) setzt, exakt der Platz für ein weiteres gleiches Quadrat übrig bleibt. Genau dann sei es als rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck ( $DBF$ ) in den Kreis einzubeschreiben; (was auch korrekt ist).<sup>28</sup>

<sup>25</sup> Siehe Abschnitt 2.3.1.4.

<sup>26</sup> Benecke 1867, S. 15.

<sup>27</sup> Vgl. Apelt 1914, S. 81ff..

<sup>28</sup> Butcher 1888, S. 224f., lässt seltsamerweise die Einschränkung auf rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke weg, wenn er



Er gelangt wie auch manche andere Autoren bezüglich ihrer Interpretation zu der Einschätzung: «Wer nach den mitgetheilten Erläuterungen der Uebersetzung zu dem griechischen Texte zurückkehrt, wird vielleicht Alles [sic] in mathematischer und sprachlicher Beziehung so einfach und klar finden, dass er sich nur wundert, wie man von der Stelle soviel Aufhebens habe machen können.»<sup>29</sup> Diese Meinung ist kaum nachvollziehbar, denn wenn PLATON diese Interpretation vor Augen hatte, dann hat er sie Sokrates nicht aussprechen lassen. Sie lautet: Dieses gezeichnete Quadrat kann genau dann als gleichschenkliges und rechtwinkliges Dreieck in einen Kreis eingezeichnet werden, wenn seine Seite gleich dem Radius des Kreises ist.

Brumbaugh 1954, S. 32ff., verknüpft Beneckes Interpretation mit Cook Wilsons, er sieht an dem konkreten Beispiel des Fragenstellers den allgemeinen Fall vom Geometriker aufgemacht.

2.3.1.2 Butcher

Butcher 1888 nimmt die Fläche als fest gegebenes Rechteck an und folgt dann (3). Das Rechteck wird so, wie es ist, auf den Durchmesser angelegt, und wenn es sich ergibt, dass genau ein ähnliches Rechteck übrig bleibt, so ist es nach (3) einbeschreibbar. Die Umkehrung gilt dann offensichtlich nicht mehr.

2.3.1.3 Kokkinos

Kokkinos 1997 weist in seiner Dissertation auf die Interpretationsschwierigkeiten von *Menon 86e-87a* hin, entscheidet sich für die literale Lesart von  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$ , bezieht somit die Grundlinie auf die Fläche und nicht auf den Kreis und versucht nun einen Mittelweg zwischen dem trivialen Vorschlag von Butcher 1888 und der PLATON zuviel aufbürdenden Erklärung Heaths zu nehmen. Der resultiert in einer Folge von weiteren Fallunterscheidungen, da Kokkinos offensichtlich mit seinem Bezug von  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  auf die Fläche nun keine allgemeine Eigenschaft, die äquivalent wäre zur Einbeschreibbarkeit in den Kreis, aus *Menon 87a3-7* herauslesen kann.

Konkret sieht er die *hypothesis* «erfüllt»<sup>30</sup>, wenn das beliebige Flächenstück auf seiner Grundlinie, die gerade sein muss, so angelegt werden kann als Rechteck, dass genau nochmal Platz für die Fläche bleibt.



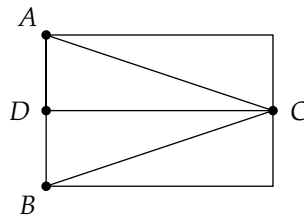
Das bedeutet aber nur, ein der Fläche gleiches Rechteck zu finden, dessen eine Seite halb so lang wie die Grundlinie ist. Mit Zirkel und Lineal ist das für *alle* geradlinig begrenzten Flächen und *alle* geraden

Beneckes Lösungsversuch darstellt. Bluck 1961, S. 447f., folgt ihm darin, wie auch Lloyd 1992, S. 168f.. Anscheinend haben sie Benecke 1867 nicht gelesen, obwohl sie ihn angeben.

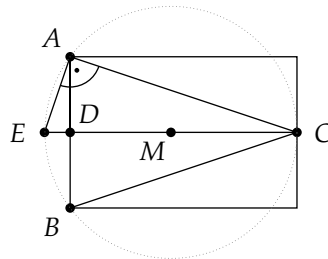
29 Benecke 1867, S. 11.

30 Z. B. Kokkinos 1997, S. 123.

(Grund)Linien möglich. Kreise u.ä. fallen bei dieser Bedingung aus der Betrachtung heraus, und sie werden auch von vornherein ausgeschlossen,<sup>31</sup> womit die Bedingung allerdings eine Konstruktionsanweisung/-erinnerung geworden ist.



Um das in diese Konstruktion willkürlich eingezeichnete Dreieck  $\triangle ABC$ , das offensichtlich flächengleich mit der vorgegebenen Fläche ist, kann nun sehr einfach ein Kreis gezeichnet werden. Man verlängere  $DC$  bei  $D$ , ziehe die Senkrechte auf  $AC$  in  $A$ , die in  $E$  die Verlängerung schneidet und halbiere  $EC$  in  $M$ , das dann der Mittelpunkt des Umkreises ist.



Wenn nun der Durchmesser des Umkreises gleich dem Durchmesser des vorgegebenen Kreises ist, dann ist die Fläche als Dreieck in den vorgegebenen Kreis einspannbar, sonst nicht.<sup>32</sup> Kokkinos beansprucht damit natürlich keine mathematische Allgemeingültigkeit, sondern versteht ‚einbeschreibbar‘ als ‚einbeschreibbar für «die Pythagoreer und Platon»<sup>33</sup> (mit ihren beschränkten geometrischen Fähigkeiten und ihrem fehlenden Sinn für die Allgemeinheit geometrischer Fragestellungen). Seltsamerweise meint er weiter für den Vergleich der Durchmesser den Durchmesser des Umkreises ausrechnen zu müssen und dafür seltsamerweise das Seitenverhältnis des Rechtecks kennen zu müssen.<sup>34</sup>

Kokkinos' Interpretation ist textfern und mathematisch unbefriedigend. Tatsächlich wäre die Fläche ja nach Kokkinos nur in dem unwahrscheinlichen Fall, dass der Umkreis des willkürlich gewählten Dreiecks bereits der vorgegebene Kreis ist bzw. mit diesem gleich ist, in den vorgegebenen Kreis einbeschreibbar. Mit der Allgemeinheit, in der Sokrates das Problem stellt, hat diese ‚Lösung‘ nicht mehr viel zu tun. Indem weiter die Unterscheidung, die in der *hypothesis* liegt, letztlich aufgehoben wird in einem Verständnis als Konstruktionsanweisung, die für jede geradlinig begrenzte Fläche ausführbar ist, würde die Einbeziehung dieses geometrischen Beispiels in den Dialogzusammenhang rätselhaft. Denn dort wird ja die *hypothesis* als Vorbild genommen, um die Fallunterscheidung, wenn die Tugend Erkenntnis ist, und wenn nicht, zu machen, aus der eben Unterschiedliches für die Lehrbarkeit der Tugend folgt.

31 Siehe Kokkinos 1997, S. 121.

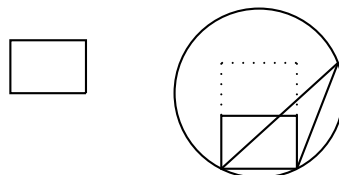
32 Siehe Kokkinos 1997, S. 122.

33 Kokkinos 1997, S. 115.

34 Da sie die Beurteilung dieser Interpretation nicht verbessert, wird hier auf eine Diskussion der weiteren Details verzichtet.

2.3.1.4 Heijboer

Auf die philosophischen Details näher eingehend, aber bezüglich mathematik-historischer Begebenheiten wild spekulierend, ist die Interpretation von Heijboer 1955 bedeutsam, insofern sie die Grundlage für Sternfeld und Zyskind 1977 liefert, um deren allgemeinere Version in dem griechischen Text wiederzufinden. Heijboer versteht das geometrische Beispiel aus dem von ihm postulierten historischen Problemkontext, ein vorgegebenes Rechteck in einen Kreis einzufügen. Weil man damit meistens nicht erfolgreich ist, auch wenn man eine der längeren Seiten des Rechtecks als Sehne in den Kreis einzeichnen konnte, so kann man das Ziel vereinfachen, indem man versucht, das Rechteck nun als flächengleiches Dreieck mit gleicher Grundlinie einzuspannen. Dies ist genau dann möglich, wenn über dem eingezeichneten Rechteck noch Platz für das gleiche Rechteck ist, ohne dass seine Oberkante ganz aus dem Kreis herausfällt.<sup>35</sup>

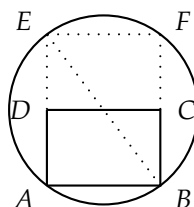


Die Frage würde nach Heijboer also lauten, ‚ob eine gegebene rechteckige Fläche dreieckig in den gegebenen Kreis einzuspannen ist‘, und die Antwort wäre, ‚wenn über dem Rechteck, das auf seiner längeren Seite, die als Sehne im Kreis liegt, noch Platz für ein ebensolches Rechteck im Kreis bleibt, dann ja, sonst nicht‘.

Um dies auch im griechischen Text wieder zu finden liest er *χωρίον* als rechteckige Fläche, *τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμῆν* als die längere Seite des Rechtecks, versteht *παρατείνειν παρά* als «to stretch lengthwise as a rectangle along something»<sup>36</sup> und die fehlende Fläche bei der Anlegung als gleich in Form und Inhalt.<sup>37</sup>

2.3.1.5 Meyers

Am Ende eines Beitrags hält Meyers fest: «The geometrical hypothesis is no longer darkly mysterious or irrelevant.»<sup>38</sup> Die vorgestellte Auflösung ist eine stark vereinfachte Variante von Heijboer. Da Menon die Bedeutung einer *hypothesis* erklärt werden muss, könnten für die Erläuterung nicht ähnlich schwierige mathematische Fachausdrücke verwendet werden.<sup>39</sup> Die gegebene Linie ist eine Sehne des Kreises, an der die Fläche als Rechteck angelegt wird. Wenn man dann ein gleiches Rechteck darauf legen kann, so dass dessen Ecken den Kreis berühren, wird mit der Diagonale des gesamten Rechtecks ein Dreieck ( $\triangle ABE$ ) erlangt, das offensichtlich genau so groß ist wie die problematische Fläche.<sup>40</sup>



35 Es ist ein Spezialfall von (2\*).

36 Heijboer 1955, S. 117.

37 Einige spezifischere Kritikpunkte an Heijboers Interpretation findet man bei Bluck 1961, S. 452ff. angesprochen.

38 Meyers 1988, S. 180.

39 Siehe dazu auch Fußnote 89, S. 78.

40 Für die Abbildung siehe Meyers 1988, S. 177.



Die Bedingung sei hier wie in der auf den geometrischen Abschnitt folgenden Diskussion der Lehrbarkeit von Tugend kein Bikonditional, sondern eine einfache Bedingung: Wenn die Fläche so an einer für sie gegebenen Linie angelegt noch genau einmal Platz ist für ein gleiches Rechteck, dann kann die Fläche als Dreieck in den Kreis eingezeichnet werden, ansonsten, wenn das zusätzliche Dreieck den Kreis schneidet oder nicht einmal berührt, bleibt es unentschieden. Meyers sieht in der Bedingung demnach keine äquivalente Eigenschaft und scheint «das andere» (ἄλλο), was folgt, falls die Bedingung nicht erfüllt wird, ganz unbestimmt und nicht als ausschließend zu verstehen.<sup>41</sup>

Kritisch an Meyers Ansatz zu betrachten ist neben dem allgemeinen Einwand des nächsten Abschnitts die etwas obskure Erscheinung der Linie in dem Kreis und die Interpretation in außerordentlich primitiven geometrischen Überlegungen. Zu beachten wäre ja, dass Sokrates explizit einen Geometriker die Antwort geben lässt, was auch der ihr fehlende Hinweis<sup>42</sup> sein könnte, dass eben doch eine *äquivalente* Bedingung angegeben werden soll.

### 2.3.1.6 Das Ungenügen der bisher dargestellten Interpretationen

Die dargestellten Interpretationen tragen alle den Makel, dass sie der Allgemeinheit, die die Frage in ihrer sprachlichen Form einnimmt, nicht gerecht werden, indem sie entweder die Frage auf bestimmte Flächen oder Kreise einschränken oder nur für bestimmte Flächen und Kreise Lösungen angeben. Es gibt kein Indiz aus dem Gesprächskontext, das eine nur eingeschränkte Lösung nahelegen würde. Da es aber auch Interpretationen gibt, die tatsächlich Eigenschaften von Flächen angeben, die äquivalent sind zur Einbeschreibbarkeit in einen Kreis als Dreieck, fallen sie von einem Gesichtspunkt, der PLATON mathematischen Dilettantismus abspricht, aus dem Kreis der möglichen Interpretation heraus.<sup>43</sup>

Der Fokus der Auswahl lag auf den entweder häufig zitierten oder angeführten Interpretationen oder den neueren Beiträgen zur Lösung des Interpretationsproblems. Die Darstellung dieser Interpretationen soll die These stützen, dass die Obskürtheit von *Menon 86e-87a* zu einem Großteil ein Konstrukt des Diskurses über sie ist, indem sie zusammen den Eindruck vermitteln, der mathematische Inhalt sei relativ beliebig und eine Beschäftigung mit der Suche nach ihm «at least amusing»<sup>44</sup>. Die nächste vorgestellte Interpretation nimmt sogar explizit auf die möglichen Interpretationen Bezug.

### 2.3.1.7 Lloyd

Lloyd 1992 bespricht zunächst die üblichen Interpretationen, kritisiert alle, und kommt dann, weil keine richtig passt, zu dem Schluss, dass im unklaren Ausdruck PLATONS letztlich der Kern des geometrischen Beispiels zu finden ist. Denn gerade der Umstand, dass der Text undeutlich und mehrdeutig ist, kann für den Leser Anlass sein, sich intensiv und eigenständig mit dem mathematischen Inhalt auseinanderzusetzen. Man ist durch eine «Initiation» gegangen.<sup>45</sup> Man sieht die Textstelle jetzt in einem ganz anderen Licht, weil man nun die nur angedeuteten und unausgesprochenen Teile erkannt hat.<sup>46</sup> Genau diese Eigenanstrengung – die im Beispiel für die Mathematik aufgewendet wird, aber eigentlich für die Untersuchung der Frage nach der Lehrbarkeit der Tugend verwandt werden sollte – will Menon auch für die Erlangung philosophischer Weihen nicht in Kauf nehmen.

41 Siehe Meyers 1988, S. 175.

42 Siehe Meyers 1988, S. 175.

43 Vgl. Heijboer 1955, S. 92.

44 Bluck 1961, S. 441.

45 Siehe Lloyd 1992, S. 178.

46 Das scheint für Lloyd grundsätzlich eine Interpretation nach Cook Wilson zu sein; s. Abschnitt 2.3.2.2.

Diese Reflexion auf den eigenen Untersuchungsgang bleibt jedoch subjektiv, weil er von der Forschungstradition mit ihrer Problematisierung der Textstelle und den unterschiedlichen Deutungen geprägt ist. PLATONS Zeitgenossen und möglicherweise auch MENON<sup>47</sup>, oder vielleicht auch nur THEAITETOS und ähnlich stark Begabte, verstanden das Beispiel vielleicht direkt.

## 2.3.2 Allgemeine Lösungsversuche

### 2.3.2.1 Sternfeld und Zyskind

Gerade wenn man dabei ist, sich über die konkrete Konstruktion von einer konkret vorliegenden Fläche in einen konkret vorliegenden Kreis als Dreieck Gedanken zu machen und in Anbetracht von Lösung (3) versucht ist, diese Aufgabe als ungelöstes Problem der antiken Mathematik hinzustellen,<sup>48</sup> entspannt das Kriterium (2) die Lage, denn es bietet eine (mit Zirkel und Lineal) ausführbare Konstruktionsanweisung, falls die Fläche geradlinig begrenzt wird.

Sternfeld und Zyskind 1977 interpretieren entlang der mathematischen Lösung (2).<sup>49</sup> *χωρίον* ist eine in ein Quadrat umformbare Fläche, *τοιούτω... ὅϊον* deutet auf eine genauso große Fläche, die gegebene Linie ist eine Seite des in den gegebenen Kreis einbeschriebenen *gleichseitigen* Dreiecks und die Fläche wird als Rechteck an diese ganze Linie im Kreis angelegt.<sup>50</sup> Farquharson 1923 ist in etwa die Variante (2\*) von (2).

Dies ist wohl das für ein modernes mathematische Empfinden beste Kriterium, das sich in und für *Menon 86e-87a* finden lässt. Die Einwände gegen diesen Interpretationsvorschlag werden im Kontext der nächsten Abschnitte formuliert werden. Varianten von Farquharson und Sternfeld findet man bereits bei Beyer 1859 und Stamatis 1962.

### 2.3.2.2 August, Cook Wilson, Heath et al.

Die weitestgehend geteilte Auffassung ist, das eine Interpretation von *Menon 86d-87a* der Möglichkeit (3) folgen sollte.<sup>51</sup> Sie ist, wenn sprachlich nicht unproblematisch, doch die beste, weil sie die allgemeine Problemstellung richtig beantwortet und alle ihre Bedingungen im Text enthalten sind.<sup>52</sup> Die Deutung nach Sternfeld dagegen muss zum Text hinzufügen, dass die gegebene Linie die Seite eines einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ist, bzw. bei Farquharson, dass sie irgendeine Sehne des Kreises ist. Diese Bedeutung geht aber über die von „τὴν δοθεῖσαν αὐτοῦ γραμμὴν“ eindeutig hinaus.

47 Siehe dazu Abschnitt 2.5.1.

48 Wie Heath 1956a, S. 301.

49 Ihm folgt u. a. Holzhausen 1994, S. 138a45.

50 Sternfeld und Zyskind nehmen anscheinend nur über Bluck 1961 Bezug auf Heijboer 1955, ohne ihn selbst gelesen zu haben. Ansonsten wäre ihnen aufgefallen, dass er, was Bluck nicht erwähnt, ihre Lösung bereits antizipiert, wenn er über mögliche Antworten auf die Frage an den Geometriker nachsinnt: «Make your *χωρίον* a rectangle with the side of the inscribed equilateral triangle for basis. If its height appears to be equal to or smaller than half the triangle's height, then the triangle equal to your rectangle can be inscribed in the circle; if not, not» Heijboer 1955, S. 97. Allerdings wendet er gleich ein: «It follows from the text that we are not concerned with the simple postulate mentioned.» Ob er die Deutung der gegebenen Linie als eine Seite des in den Kreis einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks ihm zu textfern war, oder er die von Sternfeld und Zyskind genommene Version übersehen hat, bleibt fraglich. Jedenfalls brachte ihn anscheinend die Ablehnung dieser allgemeingültigen Variante dazu, nach einer eingeschränkteren Problemstellung und Lösung zu suchen.

51 Siehe Cook Wilson 1903, Heath 1921a, S. 299f., Gaiser 1964, die die zentrale geometrische Überlegung von August 1843 und Butcher 1888 übernehmen. („Cook Wilson“ ist ein Doppelnachname.)

52 Genau genommen nur bis auf die Ausnahme, die man für gleichgroße Rechtecke machen muss (s. S. 57). Aber eine Erwähnung dieser, auch von den Kommentatoren nicht bemerkten, kleinen Ausnahme ist wohl plausiblerweise der Kürze der Darstellung geschuldet.

### 2.3.3 Einwände gegen die Interpretation nach (3)

Gegen die Interpretationen nach (3) wird häufig eingewendet, ihr mathematischer Gehalt wäre für den literarischen Gesprächskontext zu schwierig, da sie über Menons mathematisches Verständnis hinausginge.<sup>53</sup> Tatsächlich handelt es sich aber nur um sehr einfache elementargeometrische Zusammenhänge, die für ein Verständnis dieser geometrischen *ὑπόθεσις* nötig sind, sozusagen Schulstoff.<sup>54</sup> Berücksichtigt man noch, dass Sokrates für Menon die Figuren in ihrem Zusammenhang in den Sand skizziert, dann scheint das Beispiel in seinem mathematischen Gehalt so leicht zu sein, dass sich die Aufmerksamkeit wie bei der Verdopplung des Quadrats schnell auf das besondere Arrangement des geometrischen Inhalts richtet; dazu später mehr.

Als relativ starkes Argument gegen diese Interpretation, wird die scheinbar notwendige Übersetzung von *τοιούτων . . . ὅϊον* als *ähnlich* angeführt. Wolfsdorf erneuert einen Einwand von Heijboer:<sup>55</sup>

... the text itself may be said to contradict the supposed geometrical meaning [of similar] on account of the addition of *αὐτό* [to the phrase 'the extended [space]' (*τὸ παρατεταμένον*)]. Of a figure similar to another figure we might vaguely say that it is like the other, but we could not possibly say that it is 'like the other figure itself'. The word 'itself' far more suggests identity than similarity.

Heijboer übersieht dabei, dass der Ausdruck *χωρίον* den Flächeninhalt einer Fläche gegenüber seiner Form betont, während eine Figur (*σχημα*) durch ihre Form definiert wird. Entsprechend wird bei EUKLID (VI 28) ein der gegebenen geradlinig begrenzten Figur (größen)gleiches Parallelogramm angelegt und nicht die Figur selbst, während im *Menon 86e-87a* sonst nur von der (Ausgangs-) Fläche die Rede ist. Dass die angelegte Fläche nicht identisch ist mit der Fehlenden, deutet also daraufhin, dass nicht (nur) eine Gleichheit des Flächeninhalts zur Bedingung gemacht wird, sondern ein Formaspekt eine Rolle spielt – naheliegenderweise eine Formgleichheit. So ist die anzulegende Fläche auch bei der Interpretation von Farquharson und Sternfeld/Zyskind formgleich (und zudem flächengleich), für ihre Konstruktion benötigen sie aber im Text nur die Flächengleichheit, da nach den impliziten Anlegungsregeln, die fehlende Fläche die gleiche Form erhält wie die bereits angelegte. Wäre mit *χωρίον* hier tatsächlich Figur gemeint, so wäre wie allgemein üblich ein *ἴσον* zu erwarten, falls eine Flächengleichheit als Bedingung gesetzt werden soll; ist aber der Flächenaspekt gemeint, wäre das Fehlen eines *αὐτό* oder eines anderen Zusatzes merkwürdig. Denn wenn gleiche Flächen(inhalte) bereits identisch sind, so ist die Aussage ‚diese Fläche ist wie diese andere Fläche‘ streng genommen paradox, da zwei unterschiedliche Flächen identisch sein sollen. Vielleicht verdeutlicht also das *αὐτό* hier, dass ‚das Angelegte‘ hier eben weniger ‚die angelegte Fläche‘ als ‚das Angelegte selbst‘, also insofern es auch eine Form oder Gestalt hat, gemeint ist.

Schwerer wiegt der Einwand, dass für jene Fallunterscheidung von Sokrates aller Wahrscheinlichkeit nach für PLATON kein Beweis verfügbar war. Denn (3) ist ja eingeschränkt auf die Einbeschreibbarkeit als *gleichschenkliges* Dreieck. Für ein *beliebiges* in den Kreis eingespanntes Dreieck zu zeigen, dass es zu ihm ein flächengleiches, auch eingespanntes, gleichschenkliges Dreieck gibt, ist zwar für Bluck 1961, S. 445, offensichtlich, für uns aber nicht (s. S. 59). Aber selbst wenn er keinen Beweis besessen hat, hat er es wohl vermutet; dann könnte die Erwähnung dieser (unbewiesenen) Bedingung aber genauso gut eine (innerakademische) Anregung gewesen sein, einen Beweis zu finden.

Weitere starke Einwände gegen eine Interpretation nach (3) basieren auf der Behauptung, dass diese Interpretation das Problem noch nicht löst, keinen eigentlichen *diorismos* angibt und andere Lösungen besser sind.<sup>56</sup> Heaths Aufschlüsselung des Problems hin zu der Unterscheidung,

53 Siehe Fußnote 89, S. 78.

54 Diese geometrischen Zusammenhänge, die man in den Büchern I, II und VI der *Elemente* findet, waren zu SOKRATES Zeit allgemein bekannt (vgl. Heath 1921a, S.2; das gleiche Argument bei Sternfeld und Zyskind 1977, S.208).

55 So Heijboer 1955, S. 120, zitiert mit Einschüben durch Wolfsdorf 2008, S. 51.

56 Wolfsdorf 2008, S. 52, unterschätzt m. E. Lloyds Einwände, wenn er sie reduziert «[to] underscore the obscurity in the way the

- (i) ob die entsprechende Hyperbel den Kreisumfang schneidet (bzw. berührt) oder nicht scheint sogar noch den für die Konstruktion des Dreiecks wichtigen Punkt auf dem Kreisumfang zu liefern, während das Verhältnis der Ausgangsfläche zum gleichseitigen Dreieck, nämlich
- (ii) ob die Fläche größer oder kleiner-gleich ist als das gleichseitige Dreieck, das in den Kreis einbeschreibbar ist,

die einfachste Bedingung abgibt zur Lösung der Frage, ob die Ausgangsfläche in den Kreis als Dreieck einbeschreibbar ist oder nicht.<sup>57</sup> Durch den Nachweis in (2), dass (ii) eine notwendige und hinreichende Bedingung ist, liefert dabei gleich eine einfache Konstruktionsanweisung, wie eine passende gegebene Fläche als Dreieck einbeschrieben werden kann. (ii) wird als die einer Interpretation nach (3) übergeordnete oder die eigentliche *hypothesis* angesehen.<sup>58</sup>

*Diorismos* ist ein mathematischer Fachausdruck der Antike, der einerseits einen bestimmten Teil eines (genormten) Beweises der *Elemente* und zum anderen eine explizite Bedingung an das jeweilige Vorausgesetzte bezeichnet, d.h. das Gegebene.<sup>59</sup> Ein Beispiel für eine explizite Bedingung ist Aufgabe (VI 28) der *Elemente* (die Bedingung kursiv hervorgehoben):

An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, daß ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm fehlt; hierbei darf die ebene geradlinige Figur nicht größer sein als das dem fehlenden ähnliche über der Hälfte der Strecke zu zeichnende Parallelogramm.

Bedingung (ii) ist dementsprechend ein *diorismos*, Bedingung (i) ist es nicht, und die Bedingung nach (3) ist als Problemreduktion oder direktes Resultat einer *analysis* anzusehen.<sup>60</sup> In den nächsten beiden Abschnitten soll gezeigt werden, dass (ii) keine bessere ‚Lösung‘ der Aufgabe bietet als (3), in Abschnitt 2.3.6 wird dann der weitere Kontext der platonischen Dialoge im Hinblick auf die Bedeutung der *hypothesis* einbezogen. Zunächst noch zwei Bemerkungen:

Derartige Überlegungen zu maximalen (oder minimalen) Flächen oder zu Extremen anderer geometrischer Objekte, wie sie für das maximal einbeschreibbare Dreieck in (ii) benötigt werden, sind bei PLATON und in EUKLIDS *Elementen* nicht zentral. Auch der Gedankentyp eines Flächenvergleiches in größer und kleiner-gleich ist vermutlich vor allem aufgrund der modernen Gleichsetzung von Flächeninhalt und reeller Zahl so intuitiv annehmbar.<sup>61</sup>

Die von Farquharson 1923, S. 21, gemachte Unterscheidung zwischen dem, etwas Wahres zu behaupten, wenn man sagt, dass die Fläche einbettbar ist, wenn kleiner-gleich dem gleichschenkligen Dreieck, und eine allgemeine Konstruktionsanweisung anzugeben, findet sich in antik-euklidischer Geometrie, die insgesamt eine gewisse konstruktivistische Bodenhaftung besaß, so nicht wieder. Einen beliebigen kleineren Kreis als Dreieck in einen anderen Kreis einzuspannen beinhaltet das klassische Problem der Quadratur des Kreises. Löst man ersteres, ist auch letzteres vollbracht, weil ein Dreieck leicht in ein Quadrat umzuformen ist und umgekehrt. Mit Zirkel und Lineal alleine ist die Quadratur aber nicht zu leisten und unter dieser instrumentellen Einschränkung somit auch nicht jede beliebige kleinere Fläche als Dreieck einzubeschreiben. Die Griechen schränkten sich zwar nicht auf Zirkel und Lineal ein, aber die Schwierigkeiten der Quadratur des Kreises als einfachster nicht geradlinig begrenzter Figur lassen

illustration is presented.» Vielmehr zielt das Argument, Cook Wilsons Interpretation liefere keinen *diorismos*, sondern nur eine Zurückführung des Problems auf ein anderes, ja darauf, dass diese Interpretation gar keine Lösung des Problems darstelle, und die Interpretation somit nicht richtig sein kann.

57 (ii) wäre die eigentlich zu erwartende Antwort, so Farquharson 1923, S. 21, Heijboer 1955, S. 96.

58 Siehe Gaiser 1964, S. 391, Lloyd 1992, S. 173.

59 Die mathematische *analysis* wie auch der *diorismos* wurden anscheinend bereits von Mathematikern der Akademie maßgeblich verwendet; s. Gaiser 1964, S. 373a43.

60 Vgl. Knorr 1986, S. 73.

61 Heijboer 1955, S. 96, behauptet demnach viel zu stark: «It is out of the question that, without any previous knowledge of the condition, he [Meno] should have grasped its unnamed elements at once and have combined them as the equivalent of "smaller than the inscribed equilateral triangle"».

einen Abstand nehmen von schnellen Behauptungen über *alle* oder *beliebige* Flächen, die noch ganz anders geartet sein könnten.

### 2.3.4 Zum Status geometrischer Objekte im Menon

Auf Sokrates Trick in 86e-87a sind auch ein paar Interpreten hereingefallen.<sup>62</sup> Er spricht von *dieser* Fläche und *diesem* Kreis *da*, der möglicherweise vor ihm in den Sand gezeichnet ist, wie Menon von der Tugend eben spricht, so als läge sie vor ihm. Seine Definitionsversuche der Tugend sind gescheitert, er weiß nicht, was Tugend ist und hat sie daher auch in kein Verhältnis zum Lehren und Lernen gesetzt, will aber trotzdem untersuchen, ob sie lehrbar sei. Beides, Fläche und Tugend, sind ähnlich unbestimmt. Daran ändert wie oben gesehen auch keine *ὑπόθεσις* etwas. Ob die Fläche *da* größer oder kleiner-gleich dem einbeschreibbaren gleichseitigen Dreieck ist, ist im Zweifelsfall unbestimmt und im allgemeinen so ungewiss wie die sinnliche Wahrnehmung der beiden Objekte. Diesen Umstand macht Sokrates Kriterium in der dargestellten Interpretation nur deutlicher, indem es einen bei dem Einspannen eines beliebigen (oder beliebig kleinen) Dreiecks vor Probleme stellt, während man bei einer Flächenabschätzung bei sichtbar kleineren Flächen meint *sehen* zu können, dass man diese Fläche in den größeren Kreis einspannen können muss.

Wie man beim geometrischen Beispiel nach dem Beweis der *ὑπόθεσις* versuchen würde, die in der *ὑπόθεσις* gemachte Unterscheidung an die Objekte, von denen man ausgegangen ist, heranzutragen, so wird es im Dialog für die Tugend unternommen. Es wird gezeigt, dass Tugend genau dann lehrbar ist, wenn sie Wissen ist (*Menon* 87bc), um dann dem Verhältnis von Tugend und Wissen nachzugehen. Im Unterschied zum geometrischen Beispiel wird auch die Tugend reduziert, nämlich auf das Gute (*Menon* 87d). Weil Tugend nun nützlich ist, muss sie Wissen sein. Aber Sokrates und Menon können praktisch keinen Menschen benennen, der als Lehrer der Tugend hervorgetreten ist. Die Tugend scheint demnach lehrbar und unlehrbar. Sokrates kommt nochmals auf die Tugend als Wissen zurück und unterscheidet Wissen als richtige Vorstellung mit Begründung von der richtigen Vorstellung ohne Begründung. Damit etwas, das die Tugend zu sein scheint, nützlich ist, reicht eine richtige Vorstellung ohne Begründung aus. Damit kann er erklären, wieso auch tugendhafte Athener ihre Tugend nicht weiter gaben. Ob die Tugend aber eigentlich lehrbar ist, bleibt am Ende des Dialogs so unbestimmt wie, was sie ist.

Ähnlich unbestimmt ist grundsätzlich die Fläche. Man hat sich in der Moderne daran gewöhnt, den Raum der Wahrnehmung als Punktraum zu begreifen, in dem jeder Punkt durch eine Koordinate, ein Tripel reeller Zahlen, bezeichnet und jedes Objekt als Ansammlung von Punkten verstanden wird.<sup>63</sup> Jedes gezeichnete Dreieck wäre, gliche man es in der Vorstellung seiner Idealgestalt an und wählte man ein Koordinatensystem, genau bestimmt. In der frühen griechischen Mathematik und grundsätzlich in der reinen (synthetischen) Geometrie dagegen werden die Objekte durch die Bezüge ihrer Teile konstituiert (das Dreieck dadurch, dass es durch drei Strecken begrenzt wird, die es zusammen umfassen) und das Verhältnis der Objekte untereinander durch ihren direkt oder mehr indirekt gegebenen Zusammenhang (die Höhe des Dreiecks ist  $\frac{3}{2}$  des Radius); aber weder durch ein allen Objekten zugrundegelegtes Koordinatensystem, dass jedes Objekt mit jedem auf ihm äußerliche Weise verknüpft, oder eine unmittelbare Verbindung von geometrischen Größen mit reellen Zahlen, so dass alle geometrischen Größen zahlenmäßig vergleichbar wären.

Die zwei geometrischen Objekte in *Menon* 86e-87a (Fläche und Kreis) werden uns als Leser ohne offensichtlichen Zusammenhang gegeben. Die Interpretationen versuchten dies auf zwei Weisen zu umgehen. Die einen deuteten die Fläche als eines der bereits in den Boden/Sand gezeichneten Quadrate oder einen Teil eines der Quadrate und den Kreis als den Umkreis des Quadrats oder Ähnliches, denn

62 So z. B. auch Brumbaugh 1954, S. 34f., der meint, die erwähnten geometrischen Objekte müssten auch gezeichnet vorliegen.

63 Siehe Abschnitt 2.1.

Sokrates zeigt möglicherweise mit «diese Fläche» auf ein bereits Vorhandenes. Damit ist ein bestimmter Zusammenhang gegeben, wie zum Beispiel, dass der Radius des Kreises der Quadratseite der Größe nach gleich ist.<sup>64</sup> Die andere, allgemeiner vertretene Interpretationslinie beurteilt Cook-Wilson nicht als eine Lösung des ursprünglichen Frage, sondern als eine Reduktion des Problems. Ob *diese* Fläche tatsächlich in *diesen* Kreis einbeschreibbar ist, wird dadurch nicht angegeben. Stattdessen würde die geometrische Bestimmung der größten einbeschreibbaren Fläche, des gleichseitigen Dreiecks, für diesen Kreis eine einfachen Flächenvergleich geometrischer Art ermöglichen und die Frage konstruktiv beantwortbar machen. Aber auch bei dieser Ansicht wird vorausgesetzt, dass die Fläche der Größe nach gegeben ist. Das scheint eine einfache und unbedenkliche Voraussetzung zu sein; sie wurde jedoch in der antiken Mathematik zum Objekt der wissenschaftlichen Reflexion.

### 2.3.5 Die Gegebenen – δεδομένα

Der Ausdruck des *gegebenen* geometrischen Objekts ist aus den Konstruktionsaufgaben der *Elemente* wohl bekannt und diffiziler als man denken mag.<sup>65</sup> In der Diskussion um *Menon* 86e-87a wurde auf ihn als mathematischen Fachausdruck weniger und auf seine Spezifizierungen in einem anderen Werk, das EUKLID zugeschrieben wird, die dort zudem genauer erläutert werden, gar nicht hingewiesen.

Das Gegebensein geometrischer Objekte wird in einem auch unter Fachleuten wenig diskutierten Text ausführlich dargestellt, den *Data* oder δεδομένα EUKLIDS. Sie werden i.a. als eine Art Formelsammlung zu den *Elementen* beurteilt, da ihre 94 Sätze die Form «Wenn ... gegeben ist, dann ist auch ... gegeben» haben und damit in Kürze ausdrücken, was man ‚konstruieren‘ kann, wenn etwas Bestimmtes gegeben ist. Dabei greifen sie auf die Sätze der *Elemente* zurück. Sie wurden deshalb oftmals zusammen mit den *Elementen* gelesen, in dem Alexandrinischen Studium hatten sie ihren Platz nach den *Elementen* und vor dem *Almagest* des PTOLEMEUS.<sup>66</sup> In den einleitenden Definitionen werden die Gegebenheitsweisen nach Art und Objekt unterschieden und erklärt. Etwas kann nach *Größe*, *Verhältnis*, *Gestalt* und/oder *Lage* gegeben sein:

1. *Der Größe nach gegeben* heißen Flächen ( $\chi\omega\rho\acute{\iota}\alpha$ ), Linien und Winkel, zu denen wir uns gleiche verschaffen können.
2. Ein *Verhältnis* heißt *gegeben*, wenn wir uns das mit ihm zusammenfallende verschaffen können.
3. *Der Gestalt nach gegeben* heißen geradlinige Figuren, in denen die Winkel einzeln gegeben sind und die Verhältnisse der Seiten zueinander gegeben.
4. *Der Lage nach gegeben* heißen Punkte, Linien und Winkel, die immer den selben Ort innehaben.
5. Ein Kreis heißt *der Größe nach gegeben*, wenn sein Radius der Größe nach gegeben ist.
6. *Nach Lage und Größe gegeben* heißt ein Kreis, dessen Mittelpunkt der Lage und dessen Radius der Größe nach gegeben ist.
7. *Kreisabschnitte* heißen *der Größe nach gegeben*, wenn die Winkel in ihnen gegeben sind und die Abschnittsgrundlinien der Größe nach.
8. *Nach Lage und Größe gegeben* heißen *Abschnitte*, wenn die Winkel in ihnen der Größe nach gegeben sind und die Abschnittsgrundlinien nach Lage und Größe.
9. Eine Größe ist *um Gegebenes größer als* eine feste Größe, wenn nach Wegnahme des Gegebenen der Rest der festen Größe gleich ist.

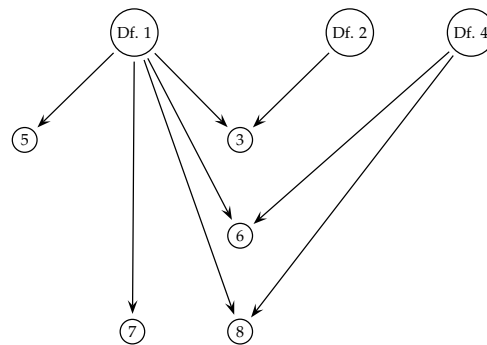
64 Vgl. Beneckes Ansatz in Abschnitt 2.3.1.1.

65 «Now all those who think that the given is that which is being given by hypothesis by the person who sets a problem completely [sic] miss the object of investigation.» Taisbak 2003, S. 247.

66 Die deutsche Übersetzung nach Menges Text ist Thae 1962, siehe dort für die gemachten Anmerkungen. Die kurze Behandlung von Schreiber 1987, S.58ff., ist wenig hilfreich und argumentiert über das Falsche in dem falsch zitierten Satz 27 der δεδομένα. Die einzige Untersuchung in Buchlänge ist Taisbak 2003, die auch den Kommentar des MARINOS in englischer Übersetzung enthält.

10. Eine Größe ist *um Gegebenes kleiner als* eine feste Größe, wenn nach Hinzufügung des Gegebenen die Summe der festen Größe gleich ist.
11. Eine Größe ist einer festen Größe gegenüber *um Gegebenes größer als im Verhältnis*, wenn nach Wegnahme des Gegebenen der Rest zur festen Größe gegebenes Verhältnis hat.
12. Eine Größe ist einer festen Größe gegenüber *um Gegebenes kleiner als im Verhältnis*, wenn nach Hinzufügung des Gegebenen die Summe zur festen Größe gegebenes Verhältnis hat.<sup>67</sup>

Für unsere Zwecke interessant sind die ersten sechs Definitionen, die im folgenden Abhängigkeitsverhältnis zueinander stehen, insofern sie andere Definitionen voraussetzen:



Die drei grundlegenden Definitionen sind demnach die Definitionen 1, 2 und 4. Damit können grundsätzlich (neben dem Gegebenensein von Verhältnissen) Flächen, Linien und Winkel der Größe nach gegeben sein, und Punkte, Linien und Winkel der Lage nach gegeben sein. Wie man am Umfang der Definitionen erkennen kann, wird nur die ebene Geometrie behandelt. Diese ὄροι (Definitionen) genannten Erläuterungen sind, wie das «heißen» (λέγεται) verrät, ähnlich Abkürzungen.

Nun ist erstmal die Frage, was dieses «zu denen wir uns gleiche verschaffen können» (οἷς δυνάμεθα ἴσα πορίσασθαι) bedeuten soll. Wie der Gebrauch der Definitionen in den Sätzen zeigt, ist damit einfach eine Verdopplung gemeint. Eine Linie *a* ist gegeben, wenn man noch eine Strecke *b* ‚zeichnen‘ (oder irgendwie anders produzieren) kann, oder eine Strecke bereits vorhanden ist, die genauso groß ist wie *a*. Für Verhältnisse heißt das, auch andere Verhältnisglieder zu haben, an denen dasselbe Verhältnis auftritt.<sup>68</sup> In Definition 4 wird eine Art Raum vorausgesetzt, wenn es für der Lage nach gegebene Größen heißt, sie würden «immer denselben Ort innehaben». Praktisch bedeutet das, man darf sie nicht mehr ‚bewegen‘, ihre Beziehung zu anderen der Lage nach Gegebenen ist nicht veränderbar.<sup>69</sup>

Es scheint so,<sup>70</sup> als ob durch die diese Verdopplung (mit Bezug auf die Größe) und dieses ‚Anschmieden‘ an einen Ort, die ‚Ideen in ein Medium gebracht werden‘. Denn nach Lage und Größe gegeben zu sein, bedeutet vor allem auch, vervielfältigbar zu sein oder bereits in mehreren Exemplaren vorzuliegen, die in keiner begrifflich notwendigen Beziehung zueinander stehen. Ein gegebenes geometrisches Objekt hat mindestens einen Teil, der entweder einen festen Ort hat und sich somit den der Art nach gleichen Teilen an anderen Orten gegenüber sehen kann, oder zu dem andere (größen-) gleiche existieren oder

67 Thaer 1962, S. 5f., Menge 1896, S. 2-4. Die Definitionen 13-15 gelten für unecht.

68 Nach Satz 2 der *Data* scheint es, dass Definition 2 so zu verstehen sei, dass man eine Größe frei vorgeben kann und dann, wenn das Verhältnis gegeben ist, eine zweite Größe herstellbar/vorhanden ist, so dass in der Beziehung der ersten zur zweiten dasselbe Verhältnis erscheint. (Womit der Beweis zu Satz 1 falsch wäre.) Thaer 1962, S. 65, versucht eine Rettung, indem er Satz 2 und alle darauf aufbauenden auf «durch Strecken darstellbare Größen» einschränkt, für die mit *Elemente* (VI 12) diese Definition 2 im Beweis zu Satz 2 auch umsetzbar ist.

Mir erscheint der Beweis für Satz 2 aber in der vollzogenen Gedankenrichtung erweiterbar zu sein, und somit für das Gegebenensein von Verhältnissen nach Definition 2 nur beliebige andere Größen, die dasselbe Verhältnis haben, notwendig. So benötigt man für Satz 7 auch nicht (VI 10) für die Teilung einer gegebenen Größe, da die Teilung zu der Prämisse des Satzes gehört, und man muss ihn zumindest deswegen nicht auf Strecken einschränken.

69 Eine Fläche kann anscheinend der Größe nach gegeben sein (Def. 1), aber wie ihre Auslassung in Definition 4 andeutet, nicht der Lage nach; während offensichtlich ein Punkt nur der Lage nach, aber nicht der Größe nach gegeben sein kann.

70 Leider liegt noch keine ausgereifte philosophische Untersuchung der *Data* vor.

verschaffbar sind. Die gegebenen mathematischen Objekte sind also die ‚räumlichen‘ Instantiationen der mathematischen Begriffe.

Man scheint das Gegebensein von geometrischen Objekten nur zu präzisieren, aber nie explizit abzusprechen. Eine nicht-gegebene Linie wäre ja auch eine Linie, die nicht in einer Ebene oder Fläche läge (oder in einem abstrakten Sinne ‚einzeichnenbar‘ wäre), in der die fünf Postulate der Elemente Gültigkeit hätten, sie wäre einzig und ohne Ort, also einfach der allgemeine Begriff der Linie.

Die Definitionen der *Data* spezifizieren das Gegebensein geometrischer Objekte im wesentlichen nach Gegenstand, Größe und Lage (und Gestalt) und geben dafür geometrisch operable Bedeutungen an. Die allgemeine Bedeutung von ‚gegeben‘ wird nicht bestimmt, dies versucht MARINOS VON NEAPOLIS (ca. 500 n. Chr.) in seinem Kommentar der *Data*. Dort werden vier einfache Begriffe mit ihren Gegensätzen eingeführt:<sup>71</sup> eindeutig (*tetagmenon*), bekannt/gewusst (*gnorimon*), konstruierbar (*porimon*) und messbar (*rheton* mit dem Gegensatz *alogon*, siehe *Elemente* (X Def.)). *Rheton* ist bei Größen abhängig von dem (gewählten) Maß, *gnorimon* von ‚unserem‘ Wissen, *porimon* von ‚unserem‘ Konstruktionswissen, und *tetagmenon* ist absolut zu verstehen und insofern nur abhängig von der Natur der Dinge. Die einzige Inklusion besteht zwischen *porimon* und *gnorimon*: Das, was konstruiert werden kann, ist auch bekannt. Somit ist die Bestimmung der gegebenen Dinge als die, die *porimon* sind, nicht falsch, aber unvollständig, da sie *porimon* und *gnorimon* sind. Für MARINOS sind die jetzt gegebenen geometrischen Objekte, wenn wir sie kennzeichnen wollen, die, die wir jetzt konstruieren können.

Ob die Differenzierungen aus MARINOS Kommentar so schon zu PLATONS Zeiten im Umlauf waren, ist spekulativ, auch wenn sie als zu einfach aus einer mathematischen Beschäftigung resultierend erscheinen mögen, um es nicht zu sein. Jedenfalls bezieht sich MARINOS in seinen Äußerungen auf einen damaligen Diskurs und lehnt verschiedene andere Erläuterungen anderer Autoren von Gegebensein bei EUKLID ab. Dass PLATON sich aber überhaupt Gedanken über die Gegebenheitsweise(n) geometrischer Objekte machte, ist aus der Kritik an den Redeweisen der Geometriker über ihre eigene Tätigkeit (*Politeia* 527a) wahrscheinlich.<sup>72</sup>

Nimmt man versuchsweise diese Definitionen des Gegebenseins zur Deutung von *Menon* 86e-87a, so wird bedeutsam, dass der Kreis nur der Größe nach oder Größe&Lage nach gegeben ist und nicht allein der Lage nach, was nach Def.4&5 auch heißt, dass der Radius in jedem Fall der Größe nach gegeben ist, wenn der Kreis gegeben ist. Damit ist aber auch der Durchmesser der Größe nach gegeben.<sup>73</sup> Nach *Elemente* (III 1) ist mit jedem Kreis seinen Mittelpunkt konstruierbar bzw. gegeben und somit auch sein Durchmesser. Dagegen folgt aus den Definitionen 4&5 gerade nicht, dass die Linie, die mit dem Kreis gegeben ist, die Kreislinie ist, denn ihr Gegebensein wird nicht unbedingt garantiert.<sup>74</sup> Es macht im Kontext der Definitionen aber auch Sinn, die gegebene Linie des Kreises als die Linie zu verstehen, durch die der Kreis gegeben ist. Denn ist der Radius (oder auch der Durchmesser) der Größe nach gegeben, so ist es auch der Kreis. Zudem ist die Kreislinie gewissermaßen Teil des Kreises, während Radius, Durchmesser und Mittelpunkt keine Teile, sondern Strukturmerkmale sind. Bezieht sich das  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  irgendwie auf den Kreis, so ist also die gemeinte gegebene Linie nicht der Kreisumfang, sondern

71 Siehe die englische Übersetzung in Taisbak 2003 und den griechischen Text in Menge 1896.

72 Zudem gibt es eine Übereinstimmung zwischen dem Gegebensein nach Lage und Größe gemäß den *Data* und dem *Timaios*. Dort heißt es: «... und sagen, es sei notwendig, dass ein jedes Seiendes an irgendeinem Ort ( $\tau\omicron\pi\omega$ ) sei und irgendeinen Raum ( $\chi\omega\rho\alpha$ ) einnehme» (52b).  $\chi\omega\rho\alpha$  ist im *Timaios* die schwer erkennbare Idee des ‚Raumes‘ oder der ‚Materie‘, die ‚Amme des Seins‘ weil sie alles aufnimmt und, indem sie sich selbst zurücknimmt, die Eigenschaften des Aufgenommenen zur Erscheinung bringt und nicht eigene.

73 Tatsächlich unterschied man an der Zeitstufe des Partizips von ‚geben‘, ob das jeweilige Gegebensein durch einen Syllogismus gefolgert wurde oder nicht; s. Fournarakis und Christianidis 2006, S. 41. « $\delta\omicron\theta\epsilon\iota\sigma\alpha$ » deutet darauf hin, dass etwas zu Beginn der Überlegungen gegeben wird.

74 Contra Heijboer 1955, S. 107, Bluck 1961, S. 450f., Wolfsdorf 2008, S. 51. Denn dass die Kreislinien zweier Kreise mit gleichem Radius auch gleich lang sind, muss im antik-euklidischen Kontext auf irgendeine Art und Weise gefordert werden. In den *Elementen* ist es (III D1), das über die Festlegung der Kongruenzbedingungen für Kreise einen Größenvergleich der Kreislinien ermöglicht.



der Radius bzw. der Durchmesser. Die gegebene Linie kann sich aber nicht auf die Fläche beziehen, weil diese als zu allgemein gegeben ist, als dass sie darauf festgelegt wäre, von mindestens einer geraden Linie begrenzt zu werden, (und damit noch weniger eine Art Diagonale bereitstellt); sie könnte auch ein Kreis sein. Das  $\alpha\upsilon\tau\omicron\upsilon$  kann sich unter unserer Prämisse also nicht auf die Fläche beziehen.

Es bleibt ein spezielles Argument gegen den Kreisdurchmesser: Warum steht im Text nicht eine nahe liegende Formulierung wie  $\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$  τὴν διάμετρον, wenn der Durchmesser gemeint sein soll?<sup>75</sup> Dagegen kann man mindestens zwei gute Gründe anführen. Zum einen, dass Sokrates in *Menon* 85b zu der behandelten Diagonale der Quadrate erklärt, die Gelehrten würden sie διάμετρον nennen, und damit, würde er den Ausdruck im gleichen Dialog für den Durchmesser eines Kreises benutzen, zwar dem späteren mathematischen Fachgebrauch gerecht werden würde, aber ein zu offensichtlicher Bruch mit der binnen-sprachlichen Konsistenz des Dialoges und natürlich den Definitionsversuchen aus dem ersten Teil des Dialoges resultiert, als dass dieser Bruch nicht beabsichtigt hätte sein müssen. Offensichtlich war er es nicht. Zum zweiten könnte die wörtliche Anspielung auf eine Proto-Theorie des Gegebenseins an dieser Textstelle – durch den Ausdruck «gegebene Linie» für den Durchmesser – als Kontrapunkt zur Bereitstellung von Fläche und Kreis zu nehmen sein. Damit wäre verdeutlicht, dass Fläche und Kreis zu Beginn absichtlich sehr unbestimmt gegeben worden waren, wie auch das Quadrat im ersten geometrischen Beispiel in *Menon* 82b-84b.

Dieser Abschnitt sollte zumindest plausibel gemacht haben, dass man in der frühgriechischen Mathematik weitgehend sensitiv dafür war, wieviel man im Einzelfall über geometrische Objekte wusste und wie man mit ihnen umgehen konnte, d.h. ob und wie sie einem *gegeben* waren. Der entscheidende Unterschied zur modernen Mathematik ist, dass in dieser das Diskursuniversum nur eindeutig bestimmte, sich nicht verändernde abstrakte Gegenstände enthält, von denen ein Einzelner ein in jedem Einzelfall subjektiv beschränktes Wissen hat, das die mathematischen Gegenstände aber nicht tangiert.<sup>76</sup> Dagegen steht hinter einem nur der Größe, aber nicht der Lage nach gegebenen Kreis kein vollständig bestimmter Kreis, von dem wir nur zu wenig wissen; genauso verhält es sich, wenn zwei geometrische Objekte für sich gegeben sind, aber ihr genaues Verhältnis nicht angegeben wird.

PLATON reflektierte demnach vermutlich darauf, wie er die geometrischen Objekte dem Leser gab, (oder besser: inwieweit die angeführten Objekte gegeben sein sollten). Somit ist die direkte Gegebenheitsweise der Fläche und des Kreises in ihrer Unbestimmtheit ernst zu nehmen. Damit fällt aber die oftmals implizite Kritik, dass (z. B. nach (3)) keine vollständige Lösung im Text geboten werde,<sup>77</sup> weg. Denn selbst wenn das (Größen-) Verhältnis zwischen Fläche und Kreisdurchmesser in diesem klassischen Sinn hier gegeben wäre (im Sinn von Definition 2), so wäre es damit noch nicht *angegeben* (z. B. die Fläche als halb so groß wie das Quadrat auf dem Durchmesser).

Man kann hier auf Menons Art hereinfliegen und wie er – der wissen wollte, ob Tugend lehrbar ist oder nicht, ohne zuvor zu bestimmen, was sie überhaupt ist – die Einbeschreibbarkeit der Fläche festlegen wollen, ohne diese genauer für sich und im Verhältnis zum Durchmesser bestimmt zu haben.

### 2.3.6 Die hypothesis als begriffliche Objektbestimmung

Der weitere Kontext der platonischen Dialoge hilft nun bei der genaueren Bestimmung der *hypothesis* in mathematischer und philosophischer Anwendung nur eingeschränkt. Was nämlich unter einer mathematischen *analysis*, deren Resultat eine *hypothesis* ist, genau verstanden wurde, ist in manchen Einzelheiten so undurchsichtig, wie die genauere Bedeutung der *hypotheseis* im Philosophieren PLATONS.

<sup>75</sup> Siehe Heijboer 1955, S. 107.

<sup>76</sup> Diese deskriptive Aussage über einen Diskurs ist unabhängig von den philosophischen Standpunkten, die man zur Mathematik einnehmen kann.

<sup>77</sup> Diese Überlegung scheint vielen Einwänden von Lloyd 1992 zugrunde zu liegen; vgl. auch Gaiser 1964, S. 379.

Unter einer geometrischen *analysis* verstand man in der Antike die mathematische Methode, von dem gewünschten zu beweisenden Resultat auszugehen und von dort ‚rückwärts‘ die ‚Prämissen‘ hervorzubringen. Die *synthesis* gab dann den Beweis. Nun scheint die ausführlichste der überlieferten Beschreibungen der *analysis* aber inkohärent zu sein, zumindest teilt sie bereits die *analysis* in einen irgendwie ‚absteigenden‘ und einen ‚aufsteigenden‘ Teil ein. Deswegen ging man dazu über die Praxis der antiken Geometriker stärker einzubeziehen bei der Bestimmung der *analysis*. Die detaillierte logische Struktur dieser Methode und damit auch ihr genaueres Verhältnis zur modernen formalen Logik scheint jedoch noch nicht abschließend geklärt worden zu sein.<sup>78</sup>

Zunächst unterscheidet sich eine *hypothesis* in den platonischen Dialogen wesentlich von unserer Hypothese und dem hypothetischen Annehmen.<sup>79</sup> Man sollte bei ihr einmal an eine etwas festere, nicht nur hypothetisch angesetzte Prämisse denken, als an von Mathematikern vorausgesetzte ‚Axiome‘, die sie nicht weiter hinterfragen. Zweitens wird man wohl überrascht sein zu hören, was die Mathematiker nach PLATON/Sokrates voraussetzen, denn das sind u. a. «das Gerade und Ungerade [der Zahlen] und die [geometrischen] Figuren und die drei Arten der Winkel [spitz, stumpf und rechtwinklig]» (*Politeia* 510c). Eine *hypothesis* (einen kohärenten Wortgebrauch PLATONS vorausgesetzt) wäre demnach keine Prämisse, sondern vermittelt ein mathematisches ‚Objekt‘, stellt eine «Grundunterscheidung»<sup>80</sup> dar und ist dadurch Grundlage für das weitere Mathematisieren.

Die Objekt bezogene Sicht, die sich aus der *Politeia* ergibt, scheint nicht direkt mit anderen Erläuterungen zur *hypothesis* vereinbar zu sein und wird auch kaum vertreten.<sup>81</sup> Im Anschluss an die Verwendung der *hypothesis* im *Menon* 86d-87a unterscheidet man die Interpretationen, die die Aussage ‚Tugend ist Wissen‘ und die die bikonditionale Aussage ‚Wenn Tugend Wissen ist, ist sie lehrbar und sonst nicht‘ für eine *hypothesis* halten neben der Aussage ‚Tugend ist gut‘. Denn die Überlegungen zur Einbeschreibung der Fläche dienen Sokrates als Beispiel einer Argumentationsstrategie, die auf die Frage, ob Tugend lehrbar sei, übertragen werden soll. Die analoge Frage, ob die gegebene Fläche als Dreieck in den gegebenen Kreis einbeschrieben werden kann, wird nach Art der Geometer (ὡσπερ οἱ γεωμέτραι) von einer Voraussetzung aus (ἐξ ὑποθέσεως) angegangen. Die Voraussetzung steckt nun in dem Satz:

Wenn diese Fläche derart ist, dass ..., dünkt mich, wird etwas anderes erfolgen, und wiederum etwas anderes, wenn dies unmöglich ist.

Diese Umstände stehen nun scheinbar in Opposition zu dem objektorientierten Verständnis der *hypothesis*. Nun ist jedoch zu berücksichtigen, dass gerade für mathematische Objekte der Weg zu ihrem begrifflichen Gehalt nicht weit ist. Z. B. ist der skizzierte Kreis, der aus Druckerschwärze besteht und relativ platt auf der Oberfläche des Papiers angesiedelt wird, keine Instantiation eines mathematischen Kreises, denn diese materiellen Eigenschaften könnten ihn unverwechselbar machen. Erst in die Bildebene gespiegelt geht er dieser Eigenschaften wieder verlustig und kann die Allgemeinheit annehmen.<sup>82</sup> Aber nicht jede Bestimmung ergibt ein mathematisches Objekt.<sup>83</sup> Bereits aus der Trennung in den *Elementen* zwischen Definitionen, Postulaten und ‚Axiomen‘ ist zu bemerken, dass die in den ‚Axiomen‘, den κοινὰ ἔννοιαι, (und auch den Postulaten) vorkommenden Begrifflichkeiten weder mathematische Objekte sind, noch in gewisser Weise zu ihrer Bestimmung beitragen können. Und zwar wird ihre Beteiligung insofern problematisch, als sich mathematisch kein Größenmaß mitteilen lässt, und somit durch eine

78 Vgl. Mahoney 1968, Hintikka und Remes 1974, Hintikka und Remes 1976, Behboud 1994, Berggren und Van Brummelen 2000, Faller 2000, Wolfsdorf 2008, Sidoli und Saito 2010, Sidoli und Saito 2012.

79 Siehe Wolfsdorf 2008, S. 37ff., für die Bedeutung des Ausdrucks in vorplatonischer Literatur und in den Dialogen.

80 Böhme 2000, S. 96.

81 In Böhme 1976 wird noch davon ausgegangen. Das Ansehen dieser These gibt wohl folgende Äußerung gut wieder: «The meaning, or in any case the purport, of the words ἐξ ὑποθέσεως is indisputably "on the assumption of certain conditions essential for the result of the investigation".» Heijboer 1955, S. 90.

82 So zumindest in einer Interpretation des Liniengleichnisses; s. Abschnitt 1.3.1.

83 Siehe dazu Abschnitt 3.2.2.2.

äußere Größenangabe mathematisch nichts bestimmt werden kann. Größenangaben können mathematisch nur relativ zu bereits gegebenen Objekten getätigt werden, Definitionen dürfen aber nicht von gegebenen Objekten abhängen, womit Größenangaben in Definitionen nur zwischen Bestandteilen des zu definierenden Gegenstands vorkommen dürfen. Demnach wäre die Bestimmung, kleiner als eine vorgegebene Fläche zu sein, nichts, was einen mathematischen Gegenstand mit definieren könnte.

Dagegen ist die Bestimmung «als Rechteck so auf den Durchmesser abzutragen zu sein, dass ein ähnliches (und wenn nicht quadratisches, dann auch nicht gleiches) Rechteck übrig bleibt» zwar durch den gegebenen Durchmesser abhängig von einer gegebenen Größe, ansonsten aber ein begrifflicher Gehalt, der zu einer weiteren Objektbestimmung taugt. Abstrahiert man von der vorgegebenen Länge der Linie, die einen Durchmesser des Kreises bildet, dann liegt mit der geometrischen *hypothesis* im *Menon* tatsächlich eine Grundunterscheidung von Flächen vor. Diese ist natürlich als methodisches Vorbild für eine philosophische Diskussion und Forschung weit interessanter als ein reiner Größenvergleich, wie ihn (ii) anbietet.

## 2.4 Exkurs: Das Gegebensein in der modernen Mathematik und die Anfänge der Mathematik bei Thales

### 2.4.1 «Indiscernibles»

Ob ein mathematisches Objekt in der modernen Mathematik zuverlässig bereitsteht, um untersucht und erforscht zu werden, hängt letztlich davon ab, ob man die es umrahmenden Gesetzmäßigkeiten informell so angeben kann, dass man zumindest meint, die formalen Axiome daraus extrahieren zu können, und ob diese Gesetzmäßigkeiten stimmig sind.

Der Strukturalist diskutiert die ‚Kohärenz‘ eines Axiomensystems als primitives Prädikat, dass unter anderem die Konsistenz der Axiome abschätzt und die Existenz der durch das Axiomensystem gegebenen Struktur gewährleistet. Wenn das Axiomensystem kohärent ist, dann ist durch dieses eine existierende (mathematische) Struktur gegeben, deren Strukturmomente oder Platzhalter in der Struktur als die mathematischen Objekte der durch die Axiome festgelegten Theorie aufgefasst werden.<sup>84</sup>

Für andere Konzeptionen der Mathematik verschiebt sich auch das Problem des Gegebenseins mathematischer Objekte: Für einen Neologizisten ist dies die Frage nach der Gültigkeit von Abstraktionsprinzipien, für andere, ob die Axiome aus der Anschauung genommen wurden.

Näher an der Antike als diese modernen Überlegungen zur Existenz mathematischer Objekte sind moderne Diskussionen über die Unterscheidbarkeit mathematischer Objekte. Will man ohne Rekurs auf die Anschauung rein aus dem ‚Denken‘ bestimmte mathematische Objekte konstituieren, so müssen diese Objekte unterscheidbar in einem starken Sinne sein, nämlich eindeutig identifizierbar. Nennen wir das die *Identifizierungsthese* (ID) des reinen Denkens. Frege vertrat diese Anforderung, an der sich seine Herleitung der Zahlen aus einer Logik messen lassen musste. Freges Plan, den die Entdeckung von Russells Antinomie erledigte, war, nach einer logizistischen Begründung der natürlichen und rationalen Zahlen, eine der reellen und komplexen Zahlen anzugeben. Worauf Brandom 1996 hinweist, ist nun, dass er bei den komplexen Zahlen wegen (ID) in erhebliche Schwierigkeiten gekommen wäre, denn die beiden imaginären Wurzeln  $i$  und  $-i$  von  $-1$  sind im Körper der komplexen Zahlen nicht identifizierbar: Sei  $\mathbb{C} = \langle \mathbb{C}, 0, 1, +, \cdot \rangle$  der Körper der komplexen Zahlen, dann sind zum Beispiel  $1$  und  $-1$  eindeutig unterscheidbar, weil  $1$  der Gleichung  $x^2 = x$  genügt, während  $-1$  nicht diese sondern die Gleichung  $x^2 = -x$  erfüllt. Nun gibt es in  $\mathbb{C}$  auch zwei Lösungen für die Gleichung  $x^2 = -1$ . Die eine von diesen zwei Zahlen bezeichnet man üblicherweise mit  $i$ , die andere ist dann  $-i$ . Welche der beiden aber hat

<sup>84</sup> Siehe Shapiro 1997, S. 132ff..

man mit  $i$  bezeichnet? Dies kann man mathematisch nun nicht sagen, denn in  $\mathbb{C}$  erfüllen  $i$  und  $-i$  die gleichen Aussagen. Deswegen gibt es nicht nur den trivialen Automorphismus auf  $\mathbb{C}$ , sondern einen zweiten, der  $i$  auf  $-i$  abbildet: Eine Abbildung  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein Automorphismus auf  $\mathbb{C}$ , wenn er bijektiv ist und die folgenden Gleichungen erfüllt:  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  und  $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$ . Der nicht-triviale Automorphismus auf  $\mathbb{C}$  bildet eine komplexe Zahl  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) auf ihr komplex konjugiertes  $a - bi$  ab, und somit  $i$  und  $-i$  aufeinander. Damit gilt aber jede Aussage  $\phi(i)$  (nur mit den Konstanten  $0, 1$  und den Funktionen  $+$  und  $\cdot$ , und der Relation  $=$ ; bzw. mit den Konstantennamen, etc.) auch von  $-i$ , da dann auch  $\phi(f(i))$  gilt, und umgekehrt.

Damit hat die Struktur der komplexen Zahlen genau eine vollständige Symmetrie, die in der zweidimensionalen Darstellung einer Spiegelung an der Achse der reellen Zahlen entspricht. Nimmt man (ID) als Maßstab, dann muss man zugeben, dass man bei der Betrachtung einer imaginären Zahl nicht weiß, ob man gerade eine Zahl aus der ‚oberen‘ oder der ‚unteren‘ Halbebene der komplexen Zahlen vor sich hat. Für die Mathematik selbst sind diese Überlegungen und (ID) ohne Bedeutung, da sie keinen Beitrag zur Erweiterung mathematischer Erkenntnisse leisten. Vielmehr wurde vorgeschlagen dem tatsächlichen Gebrauch von nicht eindeutig zuordbaren Parametern wie  $i$  in der Praxis auch in den Kalkülregeln einer formalen Prädikatenlogik gerecht zu werden, indem man die Regel der Existenzelimination verändert und einen direkten Schluss von  $\forall x \phi(x)$  auf  $\phi(a)$  mit passendem Parameter  $a$ , mit dem im Weiteren vorsichtig umgegangen werden muss, einführt.<sup>85</sup>

Man kann nun  $i$  und  $-i$  nicht absolut kennzeichnen, aber man kann sie unterscheiden, da es eine zweistellige, nicht-reflexive Aussage  $\phi(x, y)$  gibt, so dass  $\phi(i, -i)$  wahr ist, jedoch nicht  $\phi(i, i)$ , z. B.  $x + y = 0$ . Das Gegenteil einer Struktur ohne nicht-trivialen Automorphismus ist eine Struktur, für die von jedem zu jedem Objekt ein Automorphismus existiert und die in diesem Sinne *total* symmetrisch ist. Ein nicht-triviales Beispiel ist der affine Punktraum, bei dem zu jedem Punktepaar eine Translation und somit ein Automorphismus existiert.

Dieser Ausflug in Überlegungen zur Ununterscheidbarkeit der durch Strukturen gegebenen Objekte zeigt, dass auch in der heutigen Metamathematik auf die Gegebenheitsweise mathematischer Objekte reflektiert wird. Zugleich kann er den Blick schärfen, wie sich die Mathematik zwischen Eindeutigkeit und Homogenität entfaltet, und wie essentiell gerade Homogenitätsüberlegungen für die Konstitution der früh-griechischen Geometrie sind (siehe Abschnitte 1.3.7 und 3.2.2.2). Eine weitergehende Betrachtung, wie Homogenitätsprinzipien für unsere Vorstellung und Konzeption von Raum und Geometrie sind, würde vermutlich den tieferen Grund für die zahlreichen Symmetriephänomene<sup>86</sup> in der Welt offen legen. Der nächste Abschnitt soll in diesem Sinne kurz andeuten, dass die Anfänge der abstrakten Mathematik gerade dadurch entstanden sein könnte, dass man die Wahrnehmungen ‚homogener‘ genommen hat als sie es waren.

## 2.4.2 Der Beginn der durchdachten Mathematik

Was haben die Griechen Neues in die Mathematik eingebracht und wie die moderne Mathematik begründet? War es der logische Beweis, die Systematik in der Anordnung der Theoreme und des mathematischen Wissens oder die Allgemeinheit ihrer Aussagen? Hier soll eine allgemeinere Sicht kurz skizziert werden, nämlich dass THALES historisch der erste Mathematiker war, soweit es überliefert ist, der anfang zu denken. Damit ist gemeint, dass er in der Überlieferung implizit als der erste beschrieben wird, der sich von dem Eindruck der sinnlichen Wahrnehmung und der Erinnerungsbilder ein Stück weit emanzipierte, ohne im modernen Sinne abstrakt zu denken.

<sup>85</sup> Siehe Shapiro 2008, S. 297ff.; (man beachte den Gebrauch von  $\phi$  als Parameter eingesetzt in eine Existenzaussage im ersten Satz des nächsten Absatzes). Aus der Praxis der Mathematik argumentieren auch Leitgeb und Ladyman 2008.

<sup>86</sup> Wie sie zum Beispiel bei Mainzer 1988 ausführlich besprochen werden.

Ohne vorgefasste Meinung zu abstrakten geometrischen Objekten wird der Beginn der wissenschaftlichen Mathematik besser beschrieben als eine Ergänzung statt als Abstraktion. THALES sah etwas Kreisförmiges, beließ es aber nicht dabei, sondern begann den Kreis zu denken, fügte ihm etwas – platonisch gesprochen – Geistiges hinzu. Und das bestand im wesentlichen in der Ununterscheidbarkeit verschiedener Teile eines Objekts oder einer Konstruktion. Damit löste er sich von dem Zwang ein Wahrnehmungs- und Erinnerungsbild eines Kreises, der immer eine rechte und linke Seite oder ein Oben und Unten hat, in seiner gegebenen Bestimmtheit hinzunehmen, ohne deswegen neue Dinge, nämlich die abstrakten mathematischen Objekte, erfinden zu müssen.

Es ist allgemein bekannt, dass die dem THALES zugeschriebenen mathematischen Sätze alle mit Symmetrieüberlegungen und Überdeckungsarrangements bewiesen werden können oder zumindest zu tun haben.<sup>87</sup> So soll THALES der erste gewesen sein, der bewies, dass der Durchmesser den Kreis in zwei gleiche Teile teilt, und er soll ähnliche geometrische Identitäts- und Kongruenzaussagen entdeckt haben.<sup>88</sup> Der Kern dieser Symmetrien und Überdeckungen liegt aber darin, die scheinbaren Bestimmtheiten in einem Kreisbild aufzuheben und den Kreis darin ‚neu zu sehen‘. Diese durch das Denken neu in die Mathematik eintretende Homogenität war zudem, wie in den Abschnitten zumindest etwas erkennbar werden sollte, zentral für die Genese der euklidischen Geometrie. Bedeutender noch, da die Naturwissenschaften bis in die Neuzeit stark auf der euklidischen Geometrie aufbauten, gründen sich möglicherweise alle Untersuchungen zur Symmetrie und Ununterscheidbarkeit in Physik und Mathematik letztlich auf diese in der Antike erstmals in die Wissenschaften eingetretenen Homogenitätsprinzipien.

## 2.5 Weitere Analogieebenen

Sokrates erwähnt das Verhalten der Geometriker, um eine Blaupause für das weitere Vorgehen in der gemeinsamen Untersuchung mit Menon zu geben. Wie die Geometriker auf eine Frage eingehen, so sollten sie beide es auch tun im Hinblick auf die Frage nach der Lehrbarkeit der Tugend. Neben dieser expliziten Analogie weist das Geometriker-Beispiel aber noch weitere inhaltliche Bezüge zur Diskussion um die Tugend auf, die in den folgenden abschließenden Abschnitten dieses Kapitels hervorgehoben werden, die aber zudem nahe legen, dass in *Menon* 86e-87a die geometrischen Zusammenhänge aus (3) gemeint sind.

### 2.5.1 Taktik und Geometrie

Es erscheint vielen Kommentatoren des Menon als unwahrscheinlich, dass Menon das geometrische Beispiel, so *ad hoc*, wie es der Dialog nahe legt, hätte aufnehmen und verstehen können, wenn es sich um den geometrischen Sachverhalt (3) gehandelt hätte.<sup>89</sup> Gegen diese Auffassung soll im folgenden ein Argument angeführt werden. Dieses gründet sich auf dem taktischen Nutzen der geometrischen Beispiele verbunden mit Menons militärischer Ausbildung. Diese Verbindung von Geometrie und Kriegsführung wird in der mathematik-historischen Sekundärliteratur selten und speziell in Bezug auf PLATON gar

87 Zhmud 1997, S. 147: «Hat denn Thales wirklich erst nach Ägypten reisen müssen, um festzustellen, daß der Durchmesser den Kreis in zwei Hälften teilt? Dieses elementare Faktum ist jedem Kind empirisch zugänglich, das einen Fladen oder ein rundes Stück Käse in zwei Hälften teilt.» (Der Autor dieser Behauptung war vermutlich ein Einzelkind.)

88 Siehe Proclus 1970, S. 157/250f./299/352.

89 Vgl. Scott 2006, S. 137, Thomas 1980, S. 170, Heijboer 1955, S. 95f., Brumbaugh 1954, S. 34, Benecke 1867, S. 27. Meyers 1988, S. 176a9, ist sogar der Meinung, dass die geometrische Ähnlichkeit zu schwer war, um von Menon verstanden zu werden; Menon ist für sie ein «inexpert in geometry» (Meyers 1988, S. 176), denn er verstünde so wenig von Geometrie, dass Sokrates ihm den Ausdruck *hypothesis* erklären müsste, weshalb die anderen mathematischen Ausdrücke, die zu seiner Erläuterung dienen, weniger technisch und mathematisch kompliziert hätten sein müssen. Dieses Argument überzeugt allein deswegen nicht, weil die elementare Mathematik kein explizites Methodenwissen beinhaltet, obwohl einiges an mathematischem Inhalt. Eine Reflexion auf die Methode ist erst für den Fachmann von mathematischem Interesse, sowie der Junge aus *Menon* 82b-84d selbst wohl weniger über das Vorgehen nachgedacht hat als entlang der inhaltlichen Frage.

nicht<sup>90</sup> thematisiert und soll deswegen etwas ausgeführt werden. Es wird sich zusätzlich ein Argument ergeben für unsere Interpretation, das zugleich die Beschränkung darin auf gleichseitige Dreiecke erklärt. Insgesamt soll die militär-taktische Bedeutungsebene der geometrischen Stelle kenntlich gemacht werden.

Das fiktive Datum des Dialogs ist vermutlich der Januar oder frühe Februar 402 v. Chr., kurz vor den jährlichen kleinen Mysterien.<sup>91</sup> 400 v. Chr. taucht MENON in Persien zu Beginn des Feldzuges des KYROS gegen seinen Bruder als *μειράκιον* wieder auf, d.h. er war damals zwischen 14 und 21 Jahre alt.<sup>92</sup> Somit war der historische MENON, falls er tatsächlich zum Dialogzeitpunkt in Athen gewesen sein sollte, damals nicht älter als zwanzig Jahre. MENON wird in PLATONS *Menon* wie in XENOPHONS *Anabasis* charakterlich sehr ähnlich beschrieben, wenn auch in ganz unterschiedlicher, bei PLATON positiver, bei XENOPHON in stark negativer Ausprägung. MENON war schlau, wagemutig, in seiner Furchtlosigkeit zuweilen unüberlegt, ziel-, zweck- und karriereorientiert, nicht zuletzt wegen seines geringen Alters auch unerfahren, er liebt es zu befehlen und Macht auszuüben nach eigenem Belieben oder zu seinem eigenen Vorteil, nicht in pädagogischer Absicht oder zum Vorteil des Befehlempfängers, auch wenn er ihm unabhängig davon nichts Böses will. Im erwähnten Persienfeldzug befehligte er die eigenen Truppen und war einer von wenigen Kommandeuren.

Die zentrale Kampfform der griechischen Landstreitkräfte im Perserfeldzug und allgemein vor und während PLATONS Zeit war die Phalanx. In einer Tiefe von üblicherweise acht, aber letztlich sehr variabler Zahl von Reihen standen vor allem die schwer bewaffneten Hopliten dicht aneinander, rannten in Kampfgesängen auf die andere in einer Phalanx geordnete Partei zu, die großen Schilde und Speere prallten gegeneinander und jede Partei versuchte im blutigen Gefecht mit Druck aus den hinteren Reihen den Gegner zu überrennen, Breschen in seine Formation zu schlagen und ihn an den Seiten der Schlachtreihen zu umkreisen, um ihn so von der Seite angreifen zu können. Die Bedeutung der leichter bewaffneten Peltasten bestand wie die der Kavallerie in ihrer schnellen Beweglichkeit gegenüber den langsamen Hopliten, höheren Manövrierbarkeit und zum Teil in ihrer größeren Reichweite. Zu den Peltasten gehörten u. a. auch Bogenschützen, die Reiter (*ἵππεις*) konnten ihre Speere von der Weite werfen oder waren berittene Bogenschützen (*ἵπποτοξόται*). Im Nahkampf mit einer Hoplitenphalanx waren die Reiter aufgrund der über zwei Meter langen Speere der Hopliten unterlegen, bis später unter den Makedonen schwer gepanzerte Kavallerie eingeführt wurde. Die Funktion der Reiterei beschränkte sich demnach neben dem Fernkampf eher auf die Verfolgung sich zerstreuer oder flüchtender Gegner, Angriffe auf die Seiten (und Rückseite) der Phalanx, insbesondere der nicht durch die linkshändig getragenen Schilder beschützte rechte Seite, und möglicherweise den Vorstoß in Lücken der Phalanxformation. Ihre militärischen Stärken konnte sie in der Ebene ausspielen.<sup>93</sup>

Bekannt für ihre Reiterei waren vor allem die Thessalier, deren ebenes Land die sonst oft nicht gegebene Voraussetzung zur guten Pferdezucht bot. Wenn man sich versucht ein Bild der antiken Reiterei zu machen, sollte man sich die Pferde nicht zu groß vorstellen. Mit einer durchschnittlichen Höhe zwischen 132 und 140 cm gemessen am Widerrist würde man heute eher geneigt sein, sie für Ponies zu halten. Die Hufe waren unbeschlagen. Die geringe Tragkraft mag mit eine Ursache gewesen sein, warum (in Persien) der Streitwagen weit vor dem einzelnen Reiter im Kampf eingesetzt wurde, der ihn später wieder verdrängte.<sup>94</sup> Der griechische Reiter verfügte über Zügel, saß aber ohne Sattel auf dem Pferd

90 Zumindest in der neueren Sekundärliteratur. PLATON selbst verband Mathematik und Kriegsführung scheinbar stärker, vgl. *Politeia* 521d, 522de, 225b, 526d.

91 Vgl. Erler 2007, S. 166.

92 Siehe XENOPHONS *Anabasis* II 6,28.

93 Vgl. das Sprichwort, das PLATON dem Mathematiker Theodoros in den Mund legt: «Das heißt Reitern in der Ebene begegnen, wenn man den Sokrates auf Reden herausfordert.» *Theaitetos* 183d.

94 Vgl. Anglim et al. 2002, S. 93f..

und konnte deshalb nicht wie der mittelalterliche Ritter Stöße mit einer Lanze durchführen, die ihn selbst vom Pferd geschleudert hätten.

Die Reiterei setzte sich (in Athen, das bereits um 438 v. Chr. über etwa 1000 Reiter verfügte<sup>95</sup>) aus Mitgliedern des Hochadels zusammen, nicht zuletzt weil die Beschaffung, Pflege und Zucht von Pferden besonders in den nicht ebenen Teilen Griechenlands ein teures Unternehmen war.<sup>96</sup> Somit war die Erhaltung der Disziplin in so einer berittenen Gruppe eher jüngerer, standesbewußter Aristokraten ein schwierigeres Unterfangen als in der Infanterie.<sup>97</sup>

Das Fach der Taktik bestand für den Kommandierenden zu einem großen Teil aus dem Entwickeln und Umsetzen von Kampf-, Marsch- und Lagerordnungen.<sup>98</sup> Dazu nützlich waren augenscheinlich die Kenntnisse der Steinchen-Arithmetik,<sup>99</sup> d.h. elementares Wissen über Teilbarkeiten und Ähnliches. Kompliziert werden Überlegungen zur einfachen Aufstellung in einer Phalanx durch verschiedene Untereinheiten unterschiedlicher Größe, die in bestimmter Form zusammen aufgestellt werden sollten.<sup>100</sup>

Sokrates erwähnt in *Politeia* 526d die Anwendung elementarer geometrischer Kenntnisse in der griechischen Kriegsführung: «Denn um Lager abzustecken, feste Plätze einzunehmen, das Heer zusammenzuziehen oder auszudehnen und für alles, was die Aufstellung des Heeres in den Gefechten selbst und auf den Märschen betrifft, wird einen großen Unterschied machen, ob einer ein Geometriker ist oder nicht. Zu dem allen, sagte ich, ist freilich ein sehr kleiner Teil der Geometrie und Rechenkunst hinreichend».

Was für einen militär-taktischen Sinn könnte nun das geometrische Wissen im *Menon* gehabt haben?

1.) Um ein Heer in quadratischer Form zu ordnen, wie zum Beispiel beim Auszug der Zehntausend aus Persien so, dass die Krieger die Ränder belegten, der Tross die Mitte füllte, wurde vermutlich durch elementare arithmetische aber auch geometrische Kenntnisse erleichtert. Die zentrale mathematische Erkenntnis des ersten geometrischen Zusammenhangs, dass das Quadrat über der Diagonale doppelt so groß ist wie das Ausgangsquadrat, wird wohl zu den einfachen Mitteln für abschätzende Größenvergleiche von Truppen und Kampfverbänden gezählt haben. Die zahlenmäßige Stärke des Gegners im Vergleich mit der eigenen zu kennen, war von Bedeutung, gab es auch einige Listen, sie nach oben oder unten vorzutauschen.<sup>101</sup>

2.) Der entscheidende Umstand ist jedoch folgender: Die geometrischen Figuren von Quadrat und gleichschenkligen Dreieck (bzw. Rechteck und Raute) sind die bestimmenden Formationsordnungen der griechischen Kavallerie. Die Quellenlage ist diesbezüglich allerdings so dürftig, dass der *Menon* selbst vielleicht als älteste Quelle dienen könnte, wenn erstmal sein Bezug zur griechischen Taktik plausibel gemacht worden ist.<sup>102</sup> Unsere Quellen sind vor allem hellenische Taktikbücher von ARRIAN, AELIAN und ASKLEPIODOTUS, die nicht vor dem ersten Jahrhundert (v. Chr.) geschrieben wurden. Sie

95 Vgl. Spence 1993, S. 10. Sparta rief erst 425/4 v. Chr. eine ‚schnelle Eingreiftruppe‘ von 400 Reitern ins Leben, um sich besser gegen die von See initiierten Angriffe Athens gegen Besitztümer Spartas wehren zu können.

96 Vgl. Spence 1993, S. 272ff..

97 Hinzu kommt, dass die Stärke der griechischen Fußtruppen viel mehr als bei den Berittenen in ihrer gemeinschaftlich und konsequenten Aufstellung lag. So berichtet Aristoteles: «... die Schwerbewaffneten konnten ja ohne Schlachtordnung nichts ausrichten, und die Erfahrungen in diesen Dingen und die Regeln der Aufstellung der Truppen waren den Männern der Vergangenheit noch unbekannt; daher beruhte ihre militärische Stärke auf der Reiterei» (ARISTOTELES *Politik* 1297b).

98 «To move men from place to place in an orderly column, to deploy them into line on the field of battle, to vary the depth of the line and the front that it covered, and to change direction without falling into confusion, were the objects of tactics.» (Anderson 1970, S. 98).

99 «Denn dem Krieger ist es der Aufstellungen (τὰς τάξεις) [der Soldaten in Formation] wegen notwendig, dieses [d.h. die Rechenkunst und Arithmetik] zu verstehen» (*Politeia* 525b). Siehe auch Abschnitt 4.4.1.

100 Siehe Anderson 1970, S. 94ff..

101 Siehe Hutchinson 2000, S. 202.

102 Die folgenden historischen Tatsachen kann man in Devine 1983 finden.

erwähnen die Benutzung von keilförmigen Ordnungen in der Schlacht bei Leuktra 371 (v. Chr.) und (der zweiten Schlacht) bei Mantinea 362 (v. Chr.).<sup>103</sup> Die traditionelle Formation der griechischen und persischen Kavallerie war das Quadrat, das wegen der Länge der Pferde arithmetisch ein zwei- bis dreifach kürzeres Rechteck war.<sup>104</sup> Neben den der Phalanx entsprechenden rechteckigen Formationen waren keilförmige Aufstellungen für die taktischen Untereinheiten der Kavallerie, den sogenannten ἰλη, naheliegend. Während die breite Front eines Rechtecks den gleichmäßig weiten Abwurf von Speeren ermöglichte, konnte eine keilförmige Anordnung besser in die Lücken der gegnerischen Reihen stoßen. Mit ihr konnte man leichter die Richtung wechseln und benötigte nur einen Anführer, der an der Spitze ritt, auch wenn es wahrscheinlich üblich war, an jeder Ecke einen zu postieren. Allerdings war es für die Reiter gegenüber einer rechteckigen Anordnung schwerer, die Formation einzunehmen und bei Manövern einzubehalten. Aufgrund der versetzten Anordnung der Pferde verletzten sie sich in Bewegung leichter gegenseitig.<sup>105</sup> Auch hatte sie den Nachteil, dass nicht mehrere Führer gleichzeitig auf die gegnerischen Reihen trafen.<sup>106</sup>

Man darf wohl bei den keilförmigen Reiterformationen, sofern sie von den Thessaliern benutzt wurden, vor allem an kompakte, ‚ausgefüllte‘ Dreiecke in  $\Delta$ -Form denken, insbesondere, wenn man die von den Thessaliern erfundene Rauten-Form in die Betrachtung mit einbezieht, da sie wohl nur kompakt Sinn macht. Bei der Anwendung der Keilform in der Schlacht bei Leuktra durch den Thebanischen Feldherrn EPIMAINONDAS handelt es sich, wenn Devine mit seiner Interpretation recht hat,<sup>107</sup> um eine auf unterschiedliche Truppenteile übergreifende taktische  $\Lambda$ -Formation, d.h. einen ‚hohlen‘ Winkel im Großen, an dessen Spitze eine kompakte  $\Delta$ -Form zu finden war. Man scheint drei keilförmige Aufstellungen unterscheiden zu können: die kompakte und hohle für Untereinheiten der Kavallerie und Infanterie, und eine hohle für übergreifende taktische Formationen.

Wann welche Formation bekannt war, ist unsicher. Der Tyrann von Pherai (385–370 v. Chr.) mit Namen Jason soll die Raute, die richtig geteilt geometrisch zwei Dreiecke ergibt, als Formation erfunden und in der Thessalischen Reiterei eingeführt haben.<sup>108</sup> Die Keilformation für Reiter hat später der Makedonenkönig Philipp II. von den Skythen und Thrakern übernommen.<sup>109</sup> Demnach hätte der historische MENON die Keilformation noch gar nicht gekannt. Zu seinem forschen Charakter hätte es aber sowohl gepasst, eine sonst unbekannte oder unbenutzte Formation auszuprobieren, wie es ihm auch entsprochen hätte, als einziger Anführer an der Spitze seiner Truppen zu reiten und die Reiter zu lenken.<sup>110</sup> Wenn der *Menon* tatsächlich etwa um 385 v. Chr. verfasst wurde,<sup>111</sup> wäre es aber mindestens genauso plausibel, dass PLATON eine aktuelle taktische Neuerung in den Dialog miteinbrachte.

Der in diesem Abschnitt bisher vorgelegte historische Rahmen legt es nahe, dass die beiden in den zwei geometrischen Stellen im *Menon* vorkommenden Figuren im Kontext der antiken Kriegsführung gelesen werden dürfen. Man kann noch über weitere Verbindungen zwischen dem mathematischen Inhalt der zweiten Stelle und taktischen Überlegungen spekulieren:

1.) Bereits erwähnt wurde die natürliche keilförmige Formation als gleichschenklige. Dies würde unter unser Interpretation für eine Anspielung auf die Reiterformation sprechen, wie umgekehrt unter An-

103 Siehe Devine 1983, S. 201.

104 Vgl. Gaebel 2002, S. 182, AELIAN in *Τακτική θεωρία* 18.5 in Devine 1989, S. 50.

105 Siehe AELIAN in *Τακτική θεωρία* 19.2 in Devine 1989, S. 51.

106 Siehe AELIAN in *Τακτική θεωρία* 18.5 in Devine 1989, S. 50.

107 Vgl. Devine 1983, S. 207.

108 Siehe Devine 1983, S. 202.

109 Siehe Devine 1983, S. 202.

110 In Persien befehligte er allerdings scheinbar keine Reitertruppen.

111 Siehe Bluck 1961, S. 118ff., Erler 2007, S. 166.



nahme eines militär-taktischen Kontextes eine Interpretation der Stelle zu bevorzugen ist, die vor allem von gleichschenkligen Dreiecken handelt. Die einzige, die diesem Kriterium genügt, ist (3).

2.) Die dürftigen Quellen zu antiken Reiterformationen geben für sich keinen Grund gegen oder für die Annahme, dass die mathematische Konstruktion unserer Interpretation von taktischer Relevanz gewesen ist. Ob es für antike Strategen von Bedeutung war, eine vorgegebene Menge von Reitern (z. B. eine ἄλη) keilförmig in einem *vorgegebenen Kreis* formieren zu können (mit den drei Anführern auf der Kreislinie), oder umgekehrt, wenn die Anordnung bereits stand, den Umkreis abzuschätzen, bleibt offen. Aber vielleicht ist es gar nicht so unwahrscheinlich, dass es so war. Z. B. um eine Reiterei in nicht ausgefallener  $\Delta$ -Form auf der Stelle zu drehen, ohne die Formation kurzzeitig aufzulösen, könnte es für die drei Anführer wichtig gewesen sein, den Umkreis, auf den sie alle drei positioniert waren, zu kennen, um sich alle mit gleicher Biegung – quasi im Kreis entlang – zu bewegen. Der Umkreis ist aber einfach in Umkehrung der Konstruktion von (3) abzuschätzen. Man halbiert das Dreieck von der Spitze abwärts, nimmt diese Höhe als Teil des Durchmessers, den man bekommt, wenn man noch ein ähnliches Dreieck anfügt; das genügt. — Die Aufzählung der Vorteile der Keilformation beginnt Arrian mit: «Now, this formation seems useful because the leaders are posted in a circle» (... ὅτι ἐν κύκλῳ οἱ ἡγεμόνες τεταγμένοι εἰσὶ).<sup>112</sup> Leider scheinen die darauf folgenden, erwähnten Vorteile sich nicht auf diese Aussage zu beziehen, so dass unklar bleibt, was mit der Kreisanordnung gewonnen sein sollte.

Das Argument dafür, dass Menon sehr wohl in der Lage war, die mathematischen Inhalte beider Beispiele zu verstehen, lautet demnach: Weil MENON eine hervorragende militärische Ausbildung besaß, und beide geometrische Sachverhalte wahrscheinlich taktische Relevanz hatten, ist es nicht abwegig, dass der historische MENON sie kannte, und ist es im Dialogzusammenhang sinnvoll, der Dialogfigur Menon ein derartiges Wissen zu unterstellen.

Des weiteren spräche die Annahme jenes militärischen Kontextes für eine Interpretation der zweiten geometrischen Stelle, die eine Behandlung von vor allem gleichschenkligen Dreiecken bietet. Die einzig allgemeine und bekannte, die das tut, ist die nach (3).

Die gerade erläuterte implizite militärische Bedeutung der geometrischen Stelle hat auch einen direkten Bezug zum Thema des ganzen Dialoges, der Lehrbarkeit der Tugend. Man darf annehmen, dass Menon als junger Kommandeur um die Schwierigkeiten wusste seine Soldaten zu führen und zu disziplinieren. Je tugendhafter die Untergebenen sind, desto einfacher fällt es vermutlich ein *embolon* zu formieren und einzuhalten. Und wenn sie weniger tugendhaft sind, sollten sie durch ihren Anführer dazu gebracht werden. (MENON hielt seine Gefolgsleute nach Auskunft XENOPHONS so zügellos und wild, wie er selbst es gewesen sein soll.)

Neben der allgemeinen Analogie, nach der die Lehrbarkeit der Tugend parallel zu sehen ist zur Einbeschreibbarkeit der Fläche als Dreieck, ist sie auch analog zur Aufstellung der schwierigen *embolon*-Formation, deren Einhaltung vom Anführer bestenfalls ein tugendhaftes Vorbild erwartet, wie von den (oftmals eher eigensinnigen) Reitern Disziplin. Sokrates wählt demnach einen geometrischen Sachverhalt, der direkt aus Menons Lebenswelt stammt und für ihn die Wichtigkeit der von beiden diskutierten Frage exemplifiziert. Dies ist im Grunde auch zu erwarten, da im *Menon* (auch für platonische Dialoge vielleicht vergleichsweise stark) die theoretische Erörterung mit dem Verhalten der Figuren im Gespräch und ihrem Ethos allgemein in Verbindung gebracht wird.

## 2.5.2 Fläche und Meinung

Im Fach der Geschichte der Mathematik gab es einen über kurze Zeit öffentlich und intensiv geführten Streit darüber, ob und inwieweit man die griechische Flächengeometrie insbesondere des zweiten Buchs

<sup>112</sup> Zitiert mit leichter Anpassung aus Devine 1983, S. 202, vgl. AELIAN in Τακτικῆ θεωρία 18.4 in Devine 1989, S. 50.

der *Elemente* wissenschaftlich korrekt als algebraisch bezeichnen darf und damit die entsprechenden Sätze als geometrischen Ausdruck bereits von den Babyloniern gefundener algebraischer Zusammenhänge.<sup>113</sup> Außer Acht gelassen wurde dabei, ob vielleicht philosophische und/oder symbolische Gründe für eine Verwendung und Ausarbeitung der Geometrie maßgeblich waren, oder ob sich zumindest Gründe finden lassen, die es hätten sein können. Ein nicht weiter expliziter symbolischer Zusammenhang, den bis ins zweite Buch der *Elemente* zu verfolgen reizvoll wäre, ist der zwischen Fläche und Meinung. Er wird zunächst nachgewiesen und dann den geometrischen Beispielen im *Menon* zugeführt.

Von PLATON nur mündlich überliefert ist die von Gaiser 1998 herausgearbeitete Verbindung der (Ideen) Zahlen 1 – 2 – 3 – 4 mit der Folge Punkt – Linie – Fläche – Körper und den Erkenntnisweisen Einsicht – Verständnis – Meinung – Wahrnehmung. Der genaue Zusammenhang ist jedoch so dunkel wie die kurzen schriftlichen Textzeugnisse schwierig, so zum Beispiel berichtet ARISTOTELES in *De Anima I 2, 404b16-27*:<sup>114</sup>

Und wieder anders (ausgedrückt): die Einsicht (νοῦς) sei die *Eins*, das Verstehen (ἐπιστήμη) die *Zwei*, denn auf einfache Weise beziehe es sich auf *Eines*, die Zahl der *Fläche* aber sei *Meinung* (δόξα), sinnliche Wahrnehmung (αἴσθησις) aber die Zahl des *Körperlichen*. Denn die Zahlen wurden als die Ideen selbst und die Ursachen bezeichnet, sie sind aber aus den Urelementen (στοιχεῖα); und die Gegenstände werden unterschieden teils durch die Einsicht, teils durch das Verstehen, teils durch die Meinung, teils durch die sinnliche Wahrnehmung, die genannten Zahlen aber sind die Ideen der Gegenstände.

Der erste Teil verrät uns, dass der νοῦς mit der Eins, die ἐπιστήμη mit der Zwei zusammenhängt, δόξα mit Fläche (das ist hier ἐπίπεδος), deren Zahl sie ist (τὸν δὲ τοῦ ἐπιπέδου ἀριθμὸν), und αἴσθησις ebenso mit dem Körper(lichen). Die in Fragmenten überlieferte und von Gaiser ins Zentrum seiner Arbeit gestellte Korrespondenz zwischen der ‚Dimensionsfolge‘ und den ersten vier Zahlen hat keine Grundlage in den platonischen Dialogen, und ist auch in diesem Zitat nicht zu finden, da weder die Zahlen drei und vier noch Punkt und Linie direkt vorkommen. Eine Interpretation der *Elemente* vor dem Hintergrund des *Parmenides* legt dagegen eher eine Korrespondenz zwischen den ersten vier Ideenzahlen und der Folge *Punkt – Linie – begrenzte Linie – gerade Linie* nahe.<sup>115</sup>

Zu beachten ist, dass hier nicht von reinem Flächeninhalt (χωρίον) die Rede ist, sondern sozusagen von (ebener) Fläche<sup>116</sup>, die in bestimmter Weise begrenzt ist oder explizit unbegrenzt.

Die grobe Struktur des ersten geometrischen Beispiels (*Menon 82b-84d*) bezüglich des Flächeninhalts ist die Verdopplung. Von einer gegebenen Fläche eines Quadrats ausgehend wird die doppelt so große mit gleicher Form gesucht, verschiedene Möglichkeiten ausprobiert und sie schließlich gefunden.<sup>117</sup> Ersetzen wir ‚geformte Fläche‘ durch ‚Meinung‘ bzw. ‚Überzeugung‘, sucht man nun von einer Überzeugung ausgehend eine andere, probiert verschiedene aus, von denen man erkennt, dass sie nicht die gesuchte sind, und findet schließlich die neue Überzeugung, die in einem bestimmten angebbaren Verhältnis zur ersten steht. Man hat eine Überzeugung (δόξα) durch Gründe gebunden (δήση αἰτίας λογισμῶ), eine Er-

113 Siehe Christianidis 2004. Thaers Euklidkommentar besteht zu einem wesentlichen Teil aus derartigen Übersetzungen. So lautet die Aufgabe (VI 28): «An eine gegebene Strecke ein einer gegebenen geradlinigen Figur gleiches Parallelogramm so anzulegen, daß ein einem gegebenen ähnliches Parallelogramm fehlt; hierbei darf die gegebene geradlinige Figur nicht größer sein als das dem fehlenden ähnliche über der Hälfte der Strecke zu zeichnende Parallelogramm.» Sein Kommentar dazu endet mit einer algebraischen Formel, die zumindest keine Verständnishilfe für EUKLIDS Problem bietet: «d.h. man konstruiert»

$$x = \frac{t}{2} - \frac{t}{r} \sqrt{\frac{r}{2} \cdot \frac{r}{2} - \frac{t}{2} \cdot \frac{t}{2} - \left(\frac{r-t}{2}\right) \cdot x} \text{ in VI 28.}$$

114 Zitiert nach Gaiser 1998, S. 45.

115 Siehe Abschnitt 1.3.7.

116 Für den Unterschied zwischen Ebene und Fläche im Sprachgebrauch ARISTOTELES‘ und PLATONS siehe Fußnote 11 auf Seite 89.

117 Schleiermacher gibt das in *Menon 82b-84d* durchgehend verwendete χωρίον (Fläche) auch dort als ‚Viereck‘ wieder, wo nicht explizit auf ihre Begrenzung oder Form Bezug genommen wird. Im griechischen Original wird es deutlicher, dass es um eine Fläche und ihre Verdopplung geht. Dass χωρίον als Fläche von ihrer Begrenzung und von Figur zu unterscheiden ist im *Menon*, darauf hat bereits Wex 1867, S. 133f., treffend hingewiesen.

kenntnis (ἐπιστήμη) gewonnen (*Menon 98a*). Der geometrische Sachverhalt bildet demnach die Struktur des Lernens und ersten Erkennens ab, insofern man beim Lernen von einer bereits gefassten Überzeugung in vollbewussten Konstruktionsschritten zu anderen weiterschreitet: «so hindert nichts, daß, wer nur an ein einziges sich erinnert ... alles übrige selbst auffinde» (*Menon 81d*).

Demnach enthält die Symbolik der geometrischen Objekte und ihrer Vermittlung genau das, wozu das geometrische Beispiel auch explizit dienen soll: eine Darstellung eines echten Lernprozesses. Nach den Überlegungen zum Liniengleichnis<sup>118</sup> scheint sich in dem geometrischen Sachverhalt von *Menon 82b-84d* die Idee des Lernens zu spiegeln und dieser eine Brücke zu ihrer Erkenntnis zu bilden.

Während die geometrische Frage an den Sklaven die nach der Größe einer Seite ist, ist hier im zweiten Beispiel die Frage nach der Möglichkeit einer Konstruktion. Aber im Gegensatz zur ersten ist sie (im allgemeinen) gar nicht eindeutig zu lösen, da die Größe der Ausgangsfläche und ihr Verhältnis zur Größe des Kreisdurchmessers unbestimmt bleibt. Damit rückt, neben der Angabe einer exakten Fallunterscheidung, die Konstruktionweise selbst in den Mittelpunkt, und damit stellt sich neben die Betrachtung einer Erkenntnis im ersten Beispiel die Beschreibung eines Formierungsprozesses. Bei der Verdopplung der Quadratfläche bleibt die Form gleich, der Flächeninhalt wird verändert, während hier die Fläche gleich bleibt, aber in eine (neue) Form gebracht wird. Im zweiten geometrischen Beispiel bleibt nämlich die Anfangsfläche zwar die ganze Konstruktion über gleichgroß, aber ihre Begrenzung wird erst gebildet und entsprechend analog erst die Überzeugung ausgebildet: Einmal wird sie zu einem (gleichschenkligen) Dreieck geformt, zum zweiten wird sie in einen vorgegebenen Kreis eingespannt.<sup>119</sup>

Was sich bereits an dieser zweiten geometrischen Stelle im Dialog durch einen Vergleich der geometrischen Symbolik andeutet, wird durch Sokrates erst nach einem Umweg explizit in das Gespräch eingebracht: Der Umstand, dass um tugendhaft zu sein keine begründete Überzeugung notwendig ist, weil eine richtige bereits ausreicht (*Menon 97b*).

Die expliziten methodischen Korrespondenzen dagegen, die sich aus dem Muster des Beispiels für den weiteren Gesprächsverlauf ergeben, ist einmal die zwischen Lehrbarkeit der Tugendhaftigkeit und Einbeschreibbarkeit der Fläche in den Kreis, und zum zweiten die zwischen Wissen und der Anlegbarkeit auf dem Durchmesser.<sup>120</sup>

### 2.5.3 Die Mitte finden

Eine weiteres Argument für eine Interpretation nach (3) ergibt sich nun daraus, dass man die folgende Reflexion auf die individuelle und historische Rezeption von *Menon 86d-87a*<sup>121</sup> mit dem geometrischen Sachverhalt in Verbindung bringt:

Das Interpretieren von *Menon 86d-87a* ist ein durch die sprachlichen Probleme und die Kürze der Darstellung verursachtes Hin-und-her-Wechseln zwischen den verschiedenen Lösungsversuchen, den Argumenten für die eine oder andere Interpretation und eigenen, vermutlich vergeblichen, Anstrengungen gleich gute und bessere Möglichkeiten, die Textstelle zu interpretieren, zu finden. Und auch wenn man schließlich nach diesem, ähnlich dem Gesprächsverhalten Menons im Dialog, maßlosen Herumirren, sich auf eine Interpretation festlegt, würde man letztlich doch noch hoffen, es gäbe eine befriedigendere.

118 Siehe Abschnitt 1.3.1.

119 Der elementarste Baustein der Welt wird in die Weltseele eingespannt; für den Zusammenhang von Seele und Kreis vgl. *Timaios 36bc*, für das Dreieck als der Elementarbaustein *Timaios 53cff.*

120 Vgl. Scott 2006, S. 136.

121 Siehe Lloyd 1992, S. 178ff..

Diese Irrfahrt ist aber äußerst ähnlich zu dem, was dann stattfindet, wenn man versucht, die Konstruktion einzulösen. Versucht man in der Vorstellung eine gegebene Fläche auf einer gegebenen Linie als Rechteck so zu platzieren, dass ein der Gestalt nach ähnliches Rechteck übrig bleibt auf der Linie, so wird man zunächst folgendes beobachten können: Man stelle sich eine beliebige, aber konkrete Fläche und einen Kreis mit einem entsprechenden konkreten Durchmesser vor. Wenn man zunächst nur darauf achtet, dass die angelegte Fläche genauso groß ist wie die Ausgangsfläche, so wird das restliche Rechteck in den meisten Fällen nicht dem angelegten ähnlich sein. Variiert man nun bei gleichbleibender Höhe die angelegte Länge fließend, bis die Rechtecke ähnlich sind, so stimmt die angelegte Fläche nicht mehr mit der Ausgangsfläche überein. Man kann sie bei gleichbleibender Höhe und gegebenem Durchmesser auch konstruieren und damit ohne Rekurs auf eine fließende Bewegung angehen.

Während man die Aufgabe in (VI 28) noch konstruktiv bewältigen und damit auch in die Vorstellung bringen kann, ist hier die Gestalt des übrig zu bleibenden Rechtecks nicht fest, sondern an die Form gebunden, die die angelegte Fläche einnimmt. Diese hängt aber wieder von ersterer ab.<sup>122</sup> Man hat, wenn man versucht die Anlegung in der Vorstellung zu vollziehen, einmal die Fläche zu weit angelegt, das andere Mal zu kurz. Die gesuchte Mitte dazwischen kann nicht konstruiert, sondern muss auf Anhieb richtig getroffen werden. Dieser Bewusstseinsprozess, bei dem man die Fläche durch die Anlegung – unter Herstellung der Balance zwischen den zwei Rechtecken – in konkreten Bezug zum Durchmesser und zum Kreis selbst bringt, könnte nun den Prozess des Tugendhaftwerdens im Bereich der mathematischen Tätigkeit spiegeln. Darauf deutet die platonische Konzeption des Guten als *Mitte* zwischen einem Mehr-und-Weniger hin,<sup>123</sup> bzw. der Tugend als Mitte zwischen Übermaß und Mangel bei Leidenschaften und Handlungen.<sup>124</sup> So wie man durch das Auffinden der mittleren und richtigen Anlegung der Fläche die Fläche als Dreieck einbeschreiben kann, so wird man durch das Auffinden des Guten tugendhaft. Das Auffinden der richtigen Anlegung kann nun nicht in einem konstruktiven Prozess geschehen, sondern muss auf einmal, plötzlich geschehen durch einen momenthaften Austritt aus dem rein geometrischen-konstruktiven Bereich.

Diese inhaltlichen Zusammenhänge der zweiten geometrischen Textstelle im *Menon* wären demnach Ausgangspunkt von etwas, das selbst wiederum als Sinnbild genommen werden sollte für höhere ideen-hafte Zusammenhänge. Ist das der Fall, so darf diese höchst bedeutsame Verwendung geometrischer Sachverhalte vermutlich auch als weitergehende Erläuterung zum angeblichen<sup>125</sup> Eingangsspruch der Akademie dienen: ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΜΗΔΕΙΣ ΕΙΣΙΤΩ (ἀγεωμέτρητος μηδεὶς εἰσὶτω: für Nicht-Geometriker kein Eintritt).<sup>126</sup>

## 2.5.4 Ausblick

Nach der gerade geleisteten mathematischen Bestimmung des Inhalts des geometrischen Beispiels in *Menon* 86e-87a und der Einbindung des mathematischen Inhalts in den Dialogzusammenhang, wäre jetzt der methodische Aspekt, wegen dem es von Sokrates explizit angeführt wird, genauer zu betrachten und der argumentative Fortgang des Dialogs in diesem Licht zu verfolgen. Weil aber noch nicht

122 Diese zirkuläre Struktur reflektiert Menons doppeltes Paradox des Forschens (*Menon* 80d), das Anlass ist für die Erwähnung der Wiedererinnerungslehre und seiner Überprüfung am Beispiel der Verdopplung des Quadrats (*Menon* 81a-85d): Wie sollte man etwas suchen können, was man nicht kennt, da man es ja nicht kennt, und wie sollte man das, was man findet, als das erkennen, was man nicht kannte, da man es ja nicht kannte? Für das erste geometrische Beispiel wäre eine erste Antwort, dass man etwas eindeutig kennzeichnen kann (z. B. als Seite des verdoppelten Quadrats) ohne es genau oder in seiner Größe zu kennen.

123 Siehe Gaiser 1964, S. 392f./372, Krämer 1959, Kapitel 2. Allerdings ist ein Nachweis dieser Auffassung in den Dialogen schwierig.

124 Vgl. ARISTOTELES *Nikomachische Ethik* 1106a24ff..

125 Die historische Evidenz dafür ist recht gering, vgl. Fowler 1999, S. 199ff..

126 ARISTOTELES merkt an, dass man unter Nicht-Geometriker nicht über Geometrie sprechen soll, weil dabei unschlüssige Argumente ohne Widerspruch durchgehen; siehe *Analytica Posteriora* 77b.

einmal der mathemathikhistorische Anteil an dieser Aufgabe abgeschlossen ist, noch die Verwendung der *hypothesis* in den platonischen Dialogen ganz geklärt (wie in Abschnitt 2.3.6 beides angedeutet), kann dies hier nicht geleistet werden.

«Die logischen Principien, welche die Mathematik zur exacten Wissenschaft gemacht haben, sind bekanntlich von den alten Griechen aufgestellt worden. Diese Principien waren so vollständig entwickelt, dass man in der Regel durch genauere Untersuchung und durch ein tieferes Eindringen einen vernünftigen Grund auch für dasjenige finden wird, was uns zuerst als eine überflüssige Vorsicht oder eine willkürliche Festsetzung erscheint.»

Zeuthen 1896, S. 222

«Wir kennen ... das Krumme aufgrund des Geraden.»

*De Anima 411a5*

# Die Dinge gerade biegen – Parmenides und die Definition der geraden Linie

## 3.1 Einleitung und Übersicht

Bereits in den letzten Kapiteln wurde versucht, durch ein verschärftes Bewusstsein für Grundlagenprobleme sensibler zu werden für metamathematische Aussagen PLATONS. In diesem Kapitel wird die Bestimmung eines einzelnen geometrischen Objekts – der geraden Linie – in den Fokus gerückt.

Es ist nicht bekannt, was eine gerade Linie ist. Das ist auch insofern überraschend, als die Definition eines Kreises einfach und allgemein bekannt ist: *Ein Kreis ist die Menge aller Punkte, die zu einem Punkt (dem Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben.*<sup>1</sup> Ähnlich bietet sich für jene etwas an wie: *Eine gerade Linie ist die kürzeste Linie zwischen zwei Punkten.*<sup>2</sup> In beiden Kennzeichnungen wird etwas gemessen, beim Kreis die Entfernung zwischen zwei Punkten, bei der geraden Linie die Länge der Linie zwischen zwei Punkten. Die Linienmessung in der Kennzeichnung einer geraden Linie wird jedoch dann problematisch, wenn nicht nur eine gerade Linie zwischen zwei Punkten gekennzeichnet werden soll, sondern sogar definiert, weil dann das Definiendum in keiner Weise im Definiens vorkommen darf. Wie aber misst man in der reinen Geometrie die Länge einer Linie? Man wählt eine gerade Linie als Einheitsmaß und setzt alle anderen Linien dazu in Beziehung. Jene Kennzeichnung ist also keine Definition auch nur einiger gerader Linien.<sup>3</sup>

Naheliegender ist es auch, bei Hilbert<sup>4</sup> zu suchen, der die Geometrie so aufbaute, dass neben Punkten und Ebenen nur Geraden (d.h. unendliche gerade Linien) und keine anderen Linien zum Objektbereich gehören – damit vermutlich unwissentlich einer Empfehlung J. G. Fichtes folgend<sup>5</sup> –, ob sich nicht aus den Bestimmungen der Geraden in Hilberts Axiomen<sup>6</sup> in Bezug auf Punkte und Ebenen eine Definition ergeben könnte. Nun werden die Geraden dort zwar (weitgehend) vollständig in ihren relevanten Bezügen auf Punkte und Ebenen charakterisiert, aber gerade nicht in Bezug auf andere Linien, und es ist nicht zu sehen, wie man daraus zu einer Definition der Art: *Eine gerade Linie ist eine Linie, die so-und-so ist*, gelangen könnte. Andere Linien müssen in Hilberts Geometrie als Mengen von Punkten modelliert werden. Man hat hier also nicht die Frage beantwortet, was eine gerade Linie ist, sondern vielmehr

1 Vgl. Definition 15 in EUKLIDS *Elementen*.

2 Diese Charakterisierung findet sich in Archimedes' *Kugel und Zylinder* (Archimedes 2009, S. 78) ohne weitere Begründung vorausgesetzt. Dass bereits im Mittelalter die Definition der geraden Linie als nicht unproblematisch angesehen wurde, ist durch die Diskussion der euklidischen Definition der geraden Linie in einem Kommentar zu den *Elementen* erkennbar, siehe Lo Bello 2009, S. 1ff..

3 Je mehr mathematisches Wissen man ansetzt, desto komplizierter wird die Diskussion und hört hier noch nicht auf. Das Ergebnis ist m. E. allerdings das gleiche, so dass hier auf eine Darstellung verzichtet wird.

4 Gemeint ist Hilbert 1962.

5 Siehe Fichte 1971, S. 64: «Eine Frage an die Mathematiker! – Liegt nicht der Begriff des Geraden schon im Begriffe der Linie? Gibt es andere Linien als gerade? und ist die sogenannte krumme Linie etwas anderes, als eine Zusammenreihung unendlich vieler, unendlich naher Punkte? ... Gleichfalls wird daraus klar, warum die gerade Linie sich nicht definieren lässt.» Dem widersprach Student J. F. Herbart in einem Brief an seinen Lehrer, allerdings nicht sehr originell, indem er letztlich die gerade Linie zwischen zwei Punkten als die kürzeste Linie zwischen diesen Punkten kennzeichnete; s. Herbart 1970.

6 Ein Teil der Axiome ist in Abschnitt 7.2.3.1, S. 205, aufgeführt.

welche Eigenschaften einer Geraden in Bezug auf Punkte und Ebenen für geometrische Beweise relevant sind.

Der Schwierigkeit, anzugeben, was eine gerade Linie ist, war man sich noch solange in höherem Maß bewusst, wie man stärker mit der Tradition der *Elemente* EUKLIDS verbunden war, also etwa bis ins neunzehnte Jahrhundert. So meinte z. B. der berühmte Mathematiker Henri Poincaré (1854–1912), die einzig richtige Definition der geraden Linie, nämlich die als potentielle Rotationsachse eines Körpers, hervorheben zu müssen:<sup>7</sup>

Man hat viele mangelhafte Definitionen gegeben, aber die wahre ist diejenige, welche bei allen Beweisen, in denen die gerade Linie vorkommt, stillschweigend vorausgesetzt wird:

„Es kann eintreten, daß die Bewegung einer unveränderlichen Figur dergestalt ist, daß alle Punkte einer Linie, welche zu dieser Figur gehören, unbeweglich bleiben, während alle Punkte, welche außerhalb dieser Linie liegen, sich bewegen. Eine solche Linie wird man eine gerade Linie nennen.“

Und sein Kommentator Lindemann datierte dann diese Definition bis auf die Anfänge der abendländischen Mathematik zurück:<sup>8</sup>

Euklids Definition ... ist auch nur verständlich und fruchtbar, wenn man sie in gleichem Sinn auffasst.

Wie er sich eine Implementierung seiner Definition, die Körper voraussetzt, in den Aufbau der euklidischen Definitionen, die erst den Punkt, dann Linie, dann Fläche, und gegen Ende die Körper behandeln, vorstellt, ohne in einen definitorisch verhängnisvollen Zirkel zu geraten, bleibt dabei unklar.

Dieses Kapitel soll aufzeigen, dass sich PLATON und EUKLID des Problems einer Bestimmung der geraden Linie annahmen und es im Rahmen ihrer Fundierungsmethodik lösten (siehe Abschnitte 3.2.2 und 3.4). Dies wird Resultat eines anderen Anliegens und der eigentlichen Hauptarbeit dieses Kapitels sein, nämlich der Interpretation einer Textstelle in der ersten sogenannten *hypothesis* des Dialogs *Parmenides*:

In der neueren Forschungsliteratur zeigt sich ein ungebrochenes Interesse an PLATONS Dialog *Parmenides*. Am ersten Teil (*Parm 126–137c*) entzündet sich die Diskussion insbesondere an der Selbstprädikation und den Dritter-Mensch-Argumenten, der zweite Teil (*Parm 137c–166c*) gilt als einer der dunkelsten des platonischen Gesamtwerks und hat die Interpreten ein fürs andere Mal herausgefordert.<sup>9</sup> Dabei scheinen sich völlig einsichtige mit ganz unklaren Argumenten abzuwechseln und der Sinn der *ganzen* Denkübung des Parmenides ist bisher ungenäht. Aber auch die zahlreichen strukturell mathematischen Passagen sind oftmals nur auf den ersten Blick durchgängig und glatt. Ein Beispiel für eine derartige klare Passage mit doch einigen Kanten und Ecken ist die Einführung der Gestaltarten rund (*στρογγύλον*) und gerade (*εὐθύ*) in *Parm 137de*. Zunächst wird die Standardinterpretation mit ihren Schwierigkeiten vorgestellt werden (Abschnitt 3.2.1), als zweites ein alternatives Verständnis vorgeschlagen und erläutert (3.2.2), um dieses dann an verschiedenen Kontexten zu prüfen: auf seine mathematische Bedeutung (3.2.3), auf seine Konsistenz mit einer Textstelle bei ARISTOTELES (3.3) und seine Konsequenzen für eine Interpretation von EUKLIDS Geradendefinition (3.4) und das Kreisbeispiel im *Siebten Brief* PLATONS (3.5).

Die These, die es dabei plausibel zu machen gilt, ist, dass ‚rund‘ und ‚gerade‘ in *Parmenides 137de* gar nicht rund gegenüber gerade bedeuten, sondern, dass ‚rund‘ sowohl rund wie auch gerade und ‚gerade‘ soviel wie eckig bedeutet. Die Wurzeln dieses ungewöhnlichen Sprachgebrauchs werden in Abschnitt 3.2.4 dargestellt.

7 Poincaré 1974, S. 47.

8 Poincaré 1974, S. 279.

9 Böhme 2000 klammert sogar den zweiten Teil aus seiner ansonsten umfassenden Interpretation aus. Rickless 2007 untersucht die Argumente des zweiten Teils im Detail.

## 3.2 <Rund> und <gerade> in Parmenides 137de

### 3.2.1 Schwierigkeiten der Standardinterpretation

Bereits im *Menon* ist von RUND und GERADE als gegensätzliche Ausprägungen von Gestalt die Rede.<sup>10</sup> Gestalt (σχῆμα<sup>11</sup>) wird von Sokrates erklärt als «die Grenze des Körpers» (ὅπερ ἂν συλλαβῶν εἴποιμι στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι *Menon* 76a).<sup>12</sup> RUND und GERADE wären dementsprechend unterschiedliche Flächenarten, die Körper begrenzen. Ihre genaue Bedeutung wird im *Menon* nicht weiter untersucht, dafür findet sich die ‚Definition‘ der sie paradigmatisch verkörpernden Gegenstände (scheinbar mathematischer Kreis und Gerade) in *Parmenides 137de*:

Also [ist das Eine] auch ohne Gestalt; denn es kann weder rund noch gerade an sich haben. – Wieso? – Rund ist doch wohl das, dessen Enden überall von der Mitte gleich weit abstehen? – Ja. – Gerade aber das, dessen Mitte beiden Enden vorangeht? – So ist es.

Καὶ ἄνευ σχήματος ἄρα· οὔτε γὰρ στρογγύλου οὔτε εὐθείου μετέχει. - Πῶς; - Στρογγύλον γέ ποῦ ἐστὶ τοῦτο οὐδ' ἂν τὰ ἔσχατα πανταχῆ ἀπὸ τοῦ μέσου ἴσον ἀπέχη. - Ναί. - Καὶ μὴν εὐθύ γε, οὐδ' ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἔσχατοι ἐπίπροσθεν ᾗ. - Οὕτως.

Offensichtlich wird hier RUND oder GERADE von einem anderen Subjekt prädiziert. Im *Menon* ist es die Gestalt, hier ist es etwas, das eine Gestalt hat, das RUND oder GERADE ist. Wir nehmen ‚rund sein‘ dort, wo es sich nicht auf die Gestalt bezieht als ‚von runder Gestalt sein‘.

Die Standardinterpretation versteht unter dem RUNDEN einen Kreis oder eine Kugel und unter dem GERADEN eine (gerade) Strecke.<sup>13</sup> Während die Bestimmung von RUNDER Gestalt klar ist, bedarf die

10 Wir schreiben „RUND“ und „GERADE“ für „rund“ und „gerade“ dort, wo wir die in *Parm 137de* erwähnten Begriffe von «rund» und «gerade» meinen. Die These ist ja, dass sich RUND und GERADE stark von einem gewöhnliche Verständnis von rund und gerade unterscheiden.

11 In einem rein geometrischen Kontext kann der altgriechische Ausdruck σχῆμα als (ebene oder körperliche) Figur übersetzt werden. Man kann mutmaßen, ob dann das griechische εἶδος wie in der dritten Definition in EUKLIDS *Data* (s. Menge 1896, S. 2, soviel wie Gestalt bedeutet. Aber an ebene Figuren zu denken, wenn σχῆμα im Dialog *Menon* gebraucht wird, wie es Ebert 2007, S. 188ff., tut, stiftet am falschen Ort Verwirrung. Denn offenbar macht bereits die erste Definition von Figur als etwas, das «immer die Farbe begleitet» (*Menon* 75b), deutlich, dass nicht nur die geometrischen Figuren gemeint sein können. Gedrängt von seiner speziellen Übersetzung argumentiert Ebert 2007, S. 118f., dass ἐπιπέδον (*Menon* 76a) ebene (Ober-)Fläche bedeuten müsse. Diese Behauptung ist allerdings relativ stark, und es scheint hier vielmehr eine Verwechslung von ‚zweidimensional‘ und ‚eben‘ (hinsichtlich *Politeia* 528a,d, *Timaios* 32a) vorzuliegen – von EUKLID in den ersten Definitionen der *Elemente* begrifflich klar unterschieden als Fläche (ἐπιφάνεια) und ebene Fläche (ἐπίπεδος, ἐπιφάνεια). ARISTOTELES gebraucht ἐπιπέδον und ἐπιφάνεια fast völlig austauschbar. PLATON benutzt ἐπιφάνεια nie in einem geometrischen Sinn und bezeichnet mit ἐπιπέδον undifferenziert sowohl Fläche wie ebene Fläche; siehe dazu Heath 1956a, S. 169. Unter Gestalt wird hier die geformte Oberfläche der Körper und Gegenstände verstanden; vgl. Scott 2006, S. 39ff.

12 Zur Bestimmung von Gestalt als Grenze eines Körpers siehe auch ARISTOTELES *Metaphysik* 1090b5.

13 Die meisten Ausleger nehmen die Erläuterung zu GERADE unhinterfragt als Definition einer geraden Linie, vgl. Meinwald 1991, S. 83, Allen 1997, S. 201; von Kutschera 1995, S. 68 Anm.21, Sayre 1996, S. 140f., Cornford 1951, S. 118, Vitrac 1990, S. 154f. Scolnicov 2003, S. 82, merkt zu RUND an: «Circle or sphere. As in Euclidean geometry, all shapes are derivable from the circle and the straight line, as required by the classical <compass and straight-edge> restriction.» Das Zirkel und Lineal als die klassischen Instrumentarien konstruktiver Geometrie im Hintergrund stehen sollen, hat eine Plausibilität für sich. Es wird in *Parm 137d* allerdings beschrieben, wie die Gegenstände sein müssen, um eine RUNDE oder GERADE Gestalt an sich zu haben und genau genommen nicht die Gestalt selbst (vgl. unten zu ARISTOTELES). Die Ableitung der euklidischen Figuren aus Kreis und Strecke müsste auf den Bau der Gegenstände mit dieser oder jener Figur als Gestalt übertragen werden. (Als Kreis wird bei EUKLID zudem die volle Kreisscheibe definiert, nicht die Kreislinie, die die Figur Kreis begrenzt.) Halfwassen 2006, S. 314, akzeptiert die Definitionen als allgemeiner und gibt ein Beispiel: «als rund kann dann versuchsweise die Struktur der μέγιστα γένη verstanden werden, die als Erstbestimmungen nicht regulär definierbar . . . , sondern nur gleichsam kreisförmig durch die anderen Erstbestimmungen, d.h. durch die wechselseitige Koinonie der Urbestimmungen bestimmbar sind . . . . Als gleichsam linear kann dann die dihairische Struktur des Eidos verstanden werden, dessen Definition die beiden Grenzpunkte Gattung und spezifische Differenz linear abdeckt.» Damit werden aber nicht direkt die Erklärungen aus *Parm 137de* exemplifiziert, sondern die Unterscheidung von Linien in geschlossene und offene bzw. unbegrenzte und begrenzte (wenn man aktual-unendliche Linien nicht in die Betrachtung mit einbezieht). Er schliesst sich damit an die neuplatonische Tradition an, die in der Kreislinie das Zurückkommen und den Selbstbezug betont und in der in der Strecke das auf etwas anderes Zugehen. Die Schwäche dieser Ansicht in unserem hermeneutischen Kontext ist, dass sie nicht die Erklärung von RUND und GERADE für sich nimmt, sondern andere Eigenschaften der scheinbar durch die Erklärung bestimmten Objekte verallgemeinert. Das Geschlossensein einer Linie setzt aber begrifflich den Ort aus *Parm 138ab* voraus.



von GERADER einer Erklärung. Die übliche ist die ‚Fernrohrdefinition‘:<sup>14</sup> Wenn man von dem einen Endpunkt aus zum anderen blickt, verdeckt die Mitte diesen (genau).<sup>15</sup> Diese Interpretationen werfen allerdings ein paar schwerwiegende Probleme auf:

1. *Haben Kreis und gerade Linie überhaupt eine Gestalt?* Nach der Textstelle im *Menon* und des folgenden Gedankengangs in *Parm 138ab* müsste man unter einem RUNDEN Gegenstand einen dreidimensionalen Körper erwarten. Die Definition des RUNDEN ist jedoch so abstrakt, dass unter sie auch Vollkugeln fallen, die der Erwartung gerecht werden. Bei der geraden Strecke als sogar nur eindimensionalen geometrischen Objekts ist unklar, wie man es verräumlichen sollte. Man könnte wie in EUKLIDS *Elementen* (I D7) die Definition für die gerade Strecke iterieren, indem man unter den Enden erst selbst gerade Strecken versteht, die eine ebene Fläche begrenzen, und dann ebene Flächen, die einen Körper begrenzen. RUND wäre also jede Vollkugel, GERADE jeder durch ebene Flächen begrenzte Körper wie zum Beispiel ein Würfel. Diese Interpretation hat neben ihrem ad-hoc-Charakter den Mangel, dass die Vorderseite jedes Körpers die Mitte und Rückseite verdeckt. Eine in *Philebos 51c* angegebene Konstruktion von Flächen aus gegebenen Strecken und wiederum Körpern aus diesen Flächen ist dagegen viel plausibler, ist aber nicht in Einklang mit dem oben angeführten Zitat von *Parm 137de* zu bringen.

2. *Gibt es nur Kreise und gerade Linien?* Aus dem Textumfeld von *Parm 137de* würde man eine totale Aufteilung der Gestalten, wie sie auch in *Menon 76a* angedeutet wird, erwarten, wie sie sonst zum Beispiel durch ‚in etwas anderem sein‘ und ‚in sich selbst sein‘ (*Parm 138a*) oder durch ‚Teil sein‘ und ‚Ganzes sein‘ (*Parm 137c*) erreicht wird. Eine krumme Linie oder ein krummer Körper sind aber weder (kreis-) rund noch gerade bzw. eben. Man könnte sie sich aus runden und geraden Anteilen zusammengesetzt denken, wie in *Parm 145b5* angedeutet sein könnte als Mischung von gerade und kreisrund (Abb. 1), oder exakter, da sich manche Linien nur annähern lassen, sie aus runden und geraden Teilen approximieren.<sup>16</sup>

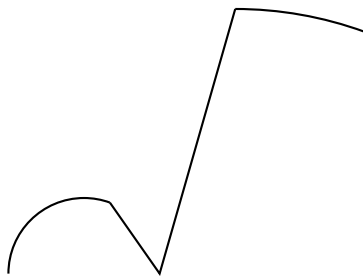


Abb. 1

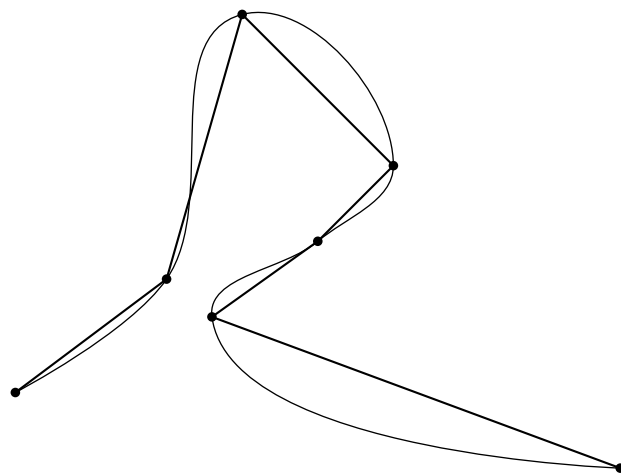


Abb. 2

Gegen diese Auffassung spricht, dass man geometrische Annäherungen ohne Kreisbögen nur mit Geradenstücken vollziehen kann (Abb. 2), und dass dies gerade für Kreise (und Kreislinien) in der griechischen Geometrie mittels der Exhaustionsmethode des EUDOXOS praktiziert wurde.<sup>17</sup> Zudem wirkt

14 Gericke 1992, S. 109, spricht vom «Entlangvisieren an einem Lineal»; Kline 1953, S. 42, fasst EUKLIDS Definition zusammen als «abstraction from the stretched strings» und fügt hinzu: «The definition is believed to be suggested by the mason's level or an eye looking along a line.» (Kline 1971, S. 58).

15 Wobei es auf dieses „genau“ anzukommen scheint, sonst wären eine Reihe von krummen Linien mit eingeschlossen, die zwar die Sicht versperrern, aber über den Sehstrahl seitlich hinausgehen.

16 So etwa Georgi 1989, S. 87ff.. Dass jede Gestalt aus Kreisbögen und Geradenstücken besteht, scheint ihm «so elementar und wahrnehmungs-geometrisch naheliegend, daß man sie wohl mit zu frühester Formbetrachtung rechnen darf.» (S. 94). Zur Ergänzung der Gestaltarten RUND und GERADE siehe auch *Menon 75a*.

17 EUDOXOS im Buch XII der *Elemente* (zuerst in XII.2); Antiphon B13, Anaxagoras A38; vgl. Becker oJ, S. 81.

diese Ergänzung, daß die Gestalt neben RUND und GERADE auch eine Mischung aus beiden sein könne, in der Begriffsentwicklung der sogenannten ersten Hypothese (*Parm 137c–142a*) etwas künstlich, arbeitet Parmenides hier begrifflich sonst weitgehend exakt und autark.

3. Ein weiteres Problem ist, dass nach der direkt folgenden Textstelle (*Parm 138ab*) das Runde eine Priorität gegenüber dem Geraden zu besitzen scheint.<sup>18</sup> Denn etwas ist in etwas, wenn es ringsherum (*κύκλω περιέχουτο Parm 138a*) von ihm berührt wird. Da auch Körper mit GERADER Gestalt offensichtlich in etwas sein können, scheinen sie (in einem abstrakten Sinne) auch RUND zu sein.<sup>19</sup> Das widerspricht dem, dass man andersherum für die Definition von RUND bereits Gerades voraussetzen scheint. Denn ‚gleich weit abstehen‘ setzt eine Art Maß voraus. Natürlicherweise wäre so etwas – wie zu Beginn gesagt – eine gerade Strecke. Entsprechend definiert EUKLID in den Definitionen im ersten Buch der *Elemente* zunächst die gerade Strecke (I D4) und erst danach den Kreis (I D15), wobei die von einem Mittelpunkt zu den Enden laufenden Strecken einander gleich sind.<sup>20</sup> Natürlich kann man den Kreis auch durch eine andere hinreichende Eigenschaft, wie ‚gleichmäßig gekrümmt zu sein‘, bestimmen. Allerdings scheint hier ‚gekrümmt‘ ein Gegensatz zu ‚gerade‘ zu sein und somit von ihm abhängig. Es müsste demnach erst der Verdacht geweckt werden, dass die gerade Linie nicht das gegenüber dem Kreis weniger komplizierte geometrische Objekt ist.

4. *Die Definition ist nicht wirklich mathematisch.* Es ist schwierig, die korrekte Übersetzung und die genaue Bedeutung der Definition von GERADE festzulegen. Die Standardinterpretation lässt sie eher heuristisch als mathematisch erscheinen. Sie fällt insbesondere gegenüber der mathematischen Abstraktion der ersten Definition deutlich ab und versucht ein Verständnis der geraden Linie dadurch zu erreichen, dass man aus einer bestimmten Richtung auf sie blickt. Entsprechende Einwände könnten für gleichartige euklidische Definitionen der ebenen Fläche und eines durch ebene Flächen begrenzten Körpers geltend gemacht werden.<sup>21</sup>

### 3.2.2 Eine neue Interpretation von <rund> und <gerade>

PLATONS Methodenreflexionen beim Liniengleichnis enthalten die Maxime für jedes wissenschaftliche Werk, das den Leser bilden möchte, begriffliche Definitionen und Erläuterungen im systematischen Zusammenhang möglichst durchlässig für den Ideengehalt zu gestalten.<sup>22</sup> Auf Strukturen zugespitzt bedeutet das, die Begrifflichkeiten sehr abstrakt so zu fassen, dass mit wenigen Zusätzen, die die allgemein gehaltenen Relationen spezifizieren, sich eingeschränktere aber ebenso sinnvolle begriffliche Zusammenhänge ergeben, die die allgemeinen Strukturen jedoch noch instantiieren bzw. in Teilen isomorph sind zu jenen. Umgekehrt werden wir uns über das im nächsten Abschnitt dargelegte anschauliche und geometrische Verständnis zu einem mehr prinzipientheoretischen im darauffolgenden hocharbeiten.

#### 3.2.2.1 Rund und eckig

Das Umfeld in der ersten Hypothese des Parmenides scheint tendenziell ein abstraktes Verständnis der dort angeführten Begriffe nahezulegen. Demnach darf man das ‚gleich weit‘ (*ἴσον*) der Erklärung von RUND anders als in der Standardinterpretation allgemeiner als ‚gleich (in einer Hinsicht)‘ nehmen. *Die Enden verhalten sich alle gleich zur Mitte* ließe sich somit leichter vom antiken Kreisverständnis als

18 Rickless 2007, S. 116f., zieht die Konsequenz und deutet RUND als drei- und GERADE als zweidimensional.

19 Siehe Allen 1997, S. 202f..

20 Thaer 1997, S. 1, Heath 1956a, S. 183.

21 Für einen Blindgeborenen wird so eine ‚Definition‘ kaum verständlich sein. Er würde eine gerade Linie vielleicht als eine charakterisieren, die nicht nach rechts oder links abweicht.

22 Gemeint ist das (normative) Prinzip (DL), S. 18.

Kreisfläche lesen als: die Punkte auf dem Kreisumfang verhalten sich gleich zur gesamten Kreisfläche; oder umgekehrt und etwas abstrakter: Die (Kreis-)Fläche verhält sich zu allen Enden gleich, das heißt mittels der Fläche (allein) kann kein Unterschied an den Enden (Grenzlinien oder Randpunkten auf der/den Grenzlinie(n)) gefunden werden. Für die Fläche sind sie alle unterschiedslos und gleich.<sup>23</sup>

Die platonische Definition von dem, was GERADE sein soll, ist in ihrer Bedeutung nicht ganz geklärt. Um die Vollständigkeit des Gegensatzes zu waren, wäre eine Definition von GERADE zu erwarten, die den Gestaltbereich des Nicht-RUNDEN ganz und genau abdeckt. Das ist genau dann der Fall, wenn ein Äußeres sich nicht mehr so zur Mitte (*μέσον*) verhält, wie die anderen Äußeren (*ἔσχατα*), und so die Enden von einem möglichen Mittelpunkt weniger weit oder weiter entfernt sind (s. Abb. 3.1 und 3.2)

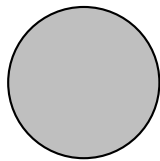


Abb. 3.1

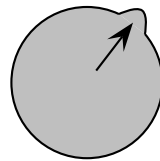
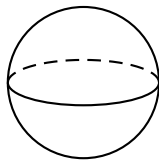
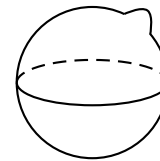


Abb. 3.2



Oder andersherum formuliert und paradigmatisch gefasst: Wenn die Mitte hervor- oder zurücksteht zwischen zwei Enden (Grenzlinien, Grenzflächen) (s. Abb. 4 im Unterschied zu Abb. 5).

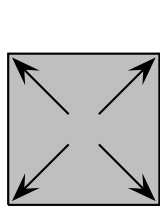


Abb. 4

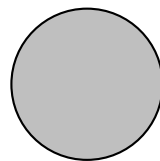
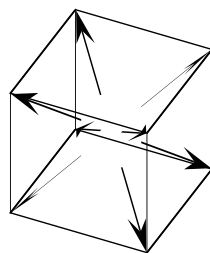
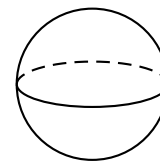


Abb. 5



Das Innere ‚durchbricht‘ an den mit Pfeilen gekennzeichneten Orten die gleichmäßige Grenze und ‚schiebt‘ sich im Vergleich mit der umgebenden Grenze nach außen. Die Mitte ist hierbei Innenfläche oder Innenraum. Die Definition von dem, was GERADE ist, darf also wörtlich genommen werden: Das Innere tritt zwischen zwei (sich gleich verhaltenden) Enden hervor (*ἐπίπροσθεν*<sup>24</sup>). Die Beispiele in Abb. 4 sind für den Zusatz ‚zwischen zwei Enden‘ suggestiv. In Abb. 3.2 können die zwei Enden einfach als zwei der ‚normalen‘, gleich weit vom Mittelpunkt entfernten, Punkte gewählt werden.

Nun ist die nach der Standardinterpretation vor allem für die Gestalt von Körpern erläuterte Definition allgemeiner gefasst und ohne Probleme auf Flächen und Hyperkörper (in vier und mehr Dimensionen) übertragbar.<sup>25</sup> Nur im eindimensionalen scheinen die Definitionen jetzt zu scheitern. Welche Linienart soll GERADE sein, welche RUND?

23 Diese Charakterisierung ist zunächst nur anschaulich-geometrisch gemeint. In den Abschnitten 3.2.3 und 3.4 wird noch nachgezeichnet werden, während in Abschnitt 1.3.7 bereits dargestellt wurde, dass sie präzisiert werden kann und eine metamathematische Funktion besitzt. Die in der Beschreibung gebrauchte Unterschiedslosigkeit bezieht sich nur auf *intrinsische* Eigenschaften geometrischer Objekte (vgl. den bekannten Artikel Black 1952) oder der *geometrischen* Eigenschaften einfacher Objekte; beides zirkuläre Erklärungen dafür, dass wir jene Charakterisierung verstehen, ohne sie formalisiert, noch den Bereich der Eigenschaften, für die ein Unterschied bestehen könnte, abgesteckt zu haben.

24 Zum entscheidenden *ἐπίπροσθεν* und dem Bedeutungsrahmen zwischen ‚im Weg stehen, verdecken‘ und ‚vor‘ vgl. *Kritias* 108c, *Nomoi* 783b,c, 875c, *Timaios* 40c, *Gorgias* 523d und besonders *Symposion* 213a (*ἐπίπροστε τῶν ὀφθαλμῶν ἔχοντα*).

25 PLATON versteht RUND tatsächlich allgemein, im *Siebten Brief* 342b scheint sie erstmal noch für den Kreis zu stehen, in *Timaios* 33b für die Vollkugel bzw. Sphäre. Der Einwand bei Zeckl 1971, S. 217, dass der Gegensatz von kreisrund nicht *εὐθύς* sei, sondern *πλατύς*, richtet sich nur dagegen, dass hier nicht *nur* von Kugeln und GERADEN Körpern die Rede sein kann.

Spezifiziert man die Mitte zur Linie und die Enden zu Punkten auf der Linie<sup>26</sup>, erhält man die Bestimmung der RUNDEN Linie als diejenige, deren Punkte sich zu ihr gleich verhalten. Diese Erklärung oder vielmehr Definition ist eindeutig. Denn sofern es kein rein gegensätzliches Verhalten von Punkten zu ihrer Linie gibt, muss eine von zwei verschiedenen Linien mit denselben Endpunkten einen Punkt besitzen, der sich in irgendeiner Hinsicht anders als andere ihrer Punkte zu ihr verhält. Letztlich ließe sich anders kein Unterschied angeben. Aus ihrer Uniformität folgt demnach ihre Eindeutigkeit (bei gegebenen Endpunkten). Damit hat sie vielen anderen Definitionsversuchen, wie der kürzesten Linie, dem Inhalt zwischen den Punkten, dem gespannten Seil, die Abstraktheit voraus, ist aber gleichzeitig so tiefgründig, dass sich eine von diesen Bestimmungsversuchen abstrahierte Eigenschaft wie die Eindeutigkeit bei gegebenen Endpunkten aus ihr ableiten lässt. (Die Definition ist noch sehr vage und zum Teil fragwürdig, in Abschnitt 3.2.3 wird sie präzisiert.)

RUND sind demnach Kugel, Kreis und gerade Linie, GERADE sind Würfel, Quadrat und Winkel.<sup>27</sup>

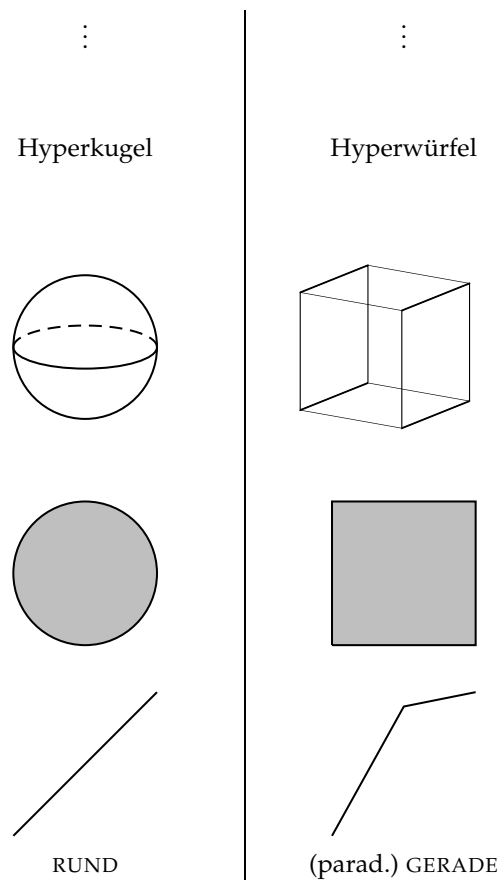


Abb. 8

In der sogenannten zweiten Hypothese im *Parm 145b* ist davon die Rede, dass das Eine auch an einer

26 Zentral ist hierbei, dass die Enden nicht nur aus den Endpunkten der Linie bestehen, sondern aus allen (potentiell) auf der Linie liegenden Punkten. Auf den ersten Blick scheint die Linie von ihren Randpunkten begrenzt zu werden, wie eben auch eine Figur durch ihren Rand begrenzt wird, der die Innenfläche von dem restlichen Äußeren abgrenzt. Diese Analogie geht jedoch nicht auf, weil die Figur in der Ebene analog einer geraden Linie ‚in‘ einer anderen größeren geraden Linie ist. In diesem Fall würden die beiden Endpunkte das Innere der Linie von dem äußeren Rest abgrenzen. Der ‚Möglichkeitsraum‘, in dem die gerade Linie definiert werden soll, umfasst aber nicht nur eine gerade Linie, sondern alle beliebige Linien, aus denen die gerade begrifflich herausgehoben werden soll. Der maßgebliche Vergleich ist demnach der, zwischen einer Linie, die verschiedene Krümmungen und Gestalten annehmen kann (bei gleichen Endpunkten), der Figur, die sich aus der Ebene in unterschiedlichster Weise herauswölbt (ohne ihre Ränder zu verändern), und ein dreidimensionaler Körper, der sich in die vierte Dimension stülpt (ohne seine Grenzflächen zu verändern). Um demnach alle Grenzen der Linie zu berücksichtigen, müssen auch die Punkte auf ihr als Enden gelten.

27 PROKLOS dagegen teilt scheinbar in die Gruppen {Gerade, reguläre Vielecke, reguläre Vielfächner}, {Kreislinie, Kreis(fläche), Kugel} und die Gemischten ein (vgl. Proclus 1970, S. 117, Proclus 1987, VI 1125).

Gestalt teilhaben müsse: «Also auch irgendeine Gestalt, wie es scheint, wird so beschaffen das Eins haben, es sei nun eine gerade oder runde oder aus beiden gemischte?» (Καὶ σχήματος δὴ τινος, ὡς εἶποιε, τοιοῦτον ὃν μετέχει ἂν τὸ ἓν, ἤτοι εὐθέος ἢ στρογγύλου ἢ τινος μεικτοῦ ἐξ ἀμφοῖν.) Während in den Definitionen der ersten Hypothese das Ungleichmäßige des ‚geraden‘ noch unbestimmt bleibt, kann es hier in der zweiten Hypothese durch Einfluß des ‚runden‘ zahlenmäßig bestimmt werden in dem Sinne, dass es nur an genau bestimmten Punkten GERADE ist. Bei den geometrischen Figuren sind das die (konvexen) gleichmäßigen Polygone, also Vielecke, die von gleichlangen Strecken begrenzt werden und keinen Knick nach innen vollziehen. An ihren Eckpunkten tritt die Mitte hervor, die Grenzen verhalten sich sonst gleichmäßig. Im räumlichen sind diese geometrischen Objekte, bei denen die Mitte paradigmatisch hervortritt, die fünf platonischen Körper, im vierdimensionalen sind es sechs, ab fünf Dimensionen sind es jeweils drei regelmäßige (konvexe) Hyperkörper.

### 3.2.2.2 Gleichmäßigkeit

Versteht man nun unter der Erläuterung zu RUND so etwas wie ‚immer in gleicher Relation (zu verschiedenen Dingen) stehen‘, dann bietet dies ein Schema, das, wenn erfüllt, die eindeutige Definition eines geometrischen Objekts abgibt. Denn etwas, dessen Teile sich in einer Hinsicht alle gleich zueinander verhalten, kann in dieser Hinsicht nicht weiter begrifflich unterschieden werden. Verhalten sich dagegen nicht alle Teile gleich zueinander, kann die Bestimmung z. B. wieder eindeutig werden, indem man die Ungleichmäßigkeit reduziert (alle bis auf ein Teil verhalten sich gleich) und die mögliche Gleichmäßigkeit in der Ungleichmäßigkeit ins Auge fasst. Konkret wäre eine gewinkelte Linie (zwei an einem Punkt verbundene gerade Linien, die sich nicht zu einer geraden Linie ergänzen) die an nur einem Punkt ungleichmäßige vormalige gerade Linie. Die Winkelgröße ist unbestimmt, verlängert man aber die eine Linie gerade, und ist der auf der einen Seite neu entstandene Winkel genauso groß wie der alte, dann hat man damit (einigermaßen) eindeutig den rechten Winkel bestimmt.<sup>28</sup>

Eine gerade Linie, ein Kreis, eine Kugel oder ein reguläres Dreieck besitzen keine Unterarten und unterscheiden sich nur in ihrer Größe (und Lage). In der modernen Mathematik gibt es diesen Anspruch allerdings nicht, und man kann ohne Einschränkung einen *Nicht-Kreis* definieren als eine geschlossene Kurve in einer Ebene, für die kein Punkt existiert, der zu allen Punkten auf der Kurve den gleichen Abstand hat. Oder man definiert einen *realen Nicht-Kreis* als eine Menge von Punkten, für die kein Punkt existiert, der zu allen Punkten der Menge den gleichen Abstand hat. Aber EUKLID würde vermutlich behaupten, dass mit diesen Definitionen weder ein geometrisches Objekt noch eine Gattung geometrischer Objekte definiert wurde, weil das Feld der (realen) Nicht-Kreise fast genauso diffus ist, wie wenn man nur die Unterscheidung zwischen Kreisen und dem Rest hätte. Ein (realer) Nicht-Kreis ist fast vollständig unangebar, im Unterschied z. B. zum Viereck, das vier Eckpunkte und vier Seiten hat. Ein praktischer Test dafür wäre sich vorzustellen, jemand hätte ein Beispiel für einen Nicht-Kreis aufgezeichnet. Weiß man, was auf dem Papier zu sehen ist?

Diese Überlegungen hängen natürlich mit der Methodik der begrifflichen Zweiteilung im *Sophistes* und *Politikos* zusammen. Der Fremde behauptet, dass eine Teilung des Begriffs Mensch in Griechen und alle anderen (die Barbaren) keinen Begriff der Barbaren hervorbringt (εἶδος *Politikos* 262b, γένος *Politikos* 262d), sondern nur eine Art Name (κλήσις *Politikos* 262d), weil es nichts gibt, was die einzelnen barbarischen Völker gemeinsam hätten, was sie zu einem γένος macht. Entsprechend haben auch die realen Nicht-Kreise nichts (wesentliches) gemeinsam. EUKLID verfährt aber bei seinen Definitionen nicht nach dieser Methode der gleichmäßigen Zweiteilung, sondern unter Beihilfe der Begriffe RUND und GERADE (siehe dazu Abschnitt 1.3.7).

<sup>28</sup> Siehe die *Elemente*, erstes Buch, die Definitionen.

### 3.2.3 Die gerade Linie definieren

Die Bestimmung der geraden Linie lautet bisher: *die Linie, deren Punkte sich alle gleich zu ihr verhalten*. Was Linien und Punkte sind, und was es bedeutet, zu einer Linie zu gehören, sind elementarere geometrische Begriffe, die vorausgesetzt werden dürfen. Allerdings müsste präzisiert werden, was es in diesem Kontext heißen soll, sich gleich zu verhalten, wenn die Bestimmung der geraden Linie formalisiert werden soll.<sup>29</sup> Hier können dazu anhand zweier ähnlicher Definitionsversuche – den Homogenitätsprinzipien der Protogeometrie und der Ähnlichkeitsdefinition – nur Hinweise gegeben werden. Wir betrachten zunächst einen ähnlichen Definitionsversuch von Paul Lorenzen nach Hugo Dingler:<sup>30</sup>

Wir gehen aus von dem vorwissenschaftlichen Begriff eines Körpers. Die Begrenzung eines Körpers wird von Flächen gebildet. Solche Flächen können eben oder uneben sein. Was heißt das? Nun, die Ebenheit ist dadurch zu charakterisieren, daß man keine Verschiedenheiten bemerken kann. Eine ebene Fläche ist an jeder Stelle genauso wie an jeder anderen. Das trifft allerdings auch auf die Oberfläche einer Kugel zu. Bei einer Kugeloberfläche sind aber die beiden Seiten leicht zu unterscheiden, nämlich als konvex bzw. konkav.

Dies führt zu der folgenden Dinglerschen Charakterisierung der Ebene durch ein Prinzip der Homogenität: Eine Ebene ist eine Fläche, bei der alle Punkte (und beide Seiten) ununterscheidbar sind.

...

Hat man Ebenen zur Verfügung, so können die Geraden definiert werden als Schnitte von zwei Ebenen, d.h. die Punkte, die auf einer Geraden liegen, sind diejenigen Punkte, die gemeinsam auf zwei verschiedenen Ebenen liegen.<sup>31</sup>

Lorenzen präzisiert die *innere* Homogenität, d.h. die Ununterscheidbarkeit der Punkte einer Ebene, als Substituierbarkeit und stellt ein entsprechendes Axiomenschema auf der Form

$$(1) \quad P \in E \wedge P' \in E \wedge A(E, P) \rightarrow A(E, P')$$

für beliebige Aussagen  $A$ ,  $E$  eine Ebene,  $P$  wie  $P'$  Punkte und  $P \in E'$  zu lesen als ‚der Punkt  $P$  liegt in der Ebene  $E'$ . Damit ist jede Aussage über einen Punkt einer Ebene auch für alle anderen Punkte der Ebene gültig.<sup>32</sup> Dazu muss noch ein ähnliches Schema zur *äußeren* Homogenität der beiden Flächen-seiten kommen, da auch die Kugeloberfläche (1) erfüllt, das Lorenzen nicht angibt. Die Vermutung ist aber, dass auch mit einem zu (1) ähnlichen Axiomenschema zur äußeren Homogenität die von Lorenzen verwendeten Prädikate und Axiome zu schwach sind, um alle anderen Flächen auszuschließen.<sup>33</sup>

Ob Lorenzen die Dinglersche Ebenenbestimmung überhaupt angemessen wiedergibt, kann angezweifelt werden.<sup>34</sup> Dingler (1881-1954) hatte sich sein Leben lang mit Grundlagenfragen der euklidischen Geometrie beschäftigt und setzte sie vor allem in Beziehung zu technischen Vorgängen, wodurch er ein Ideengeber der späteren protophysikalischen Begründungsbemühungen der Geometrie durch Lorenzen und Janich<sup>35</sup> werden konnte.<sup>36</sup> Hilberts Axiomatik leistet keine eindeutige Bestimmung der geo-

29 Zum Begriff der Formalisierung siehe Kapitel 5.

30 Vgl. Dingler 1933, S. 10f..

31 Lorenzen 1961, S. 421f.. Er schlägt auch vor, EUKLIDS Definitionen als Ausprägungen des Homogenitätsgedankens aufzufassen, und nimmt damit eine These dieses Kapitels wovog, die früher kennenzulernen, meine Arbeit in eine mehr systematische Richtung geführt hätte.

32 Siehe Lorenzen 1961, S. 426.

33 Lorenzen führt drei Variablentypen ein:  $E, \dots$  Ebenen,  $P, \dots$  Punkte und  $g, \dots$  Geraden. Die Grundprädikate sind „ $\in$ “ ( $P \in E$  oder  $P \in g$ : „liegt auf“), „ $Z$ “ ( $Z(P_1EP_2)$ : „liegt zwischen“), „ $\parallel$ “ ( $E_1 \parallel E_2$ : „ist parallel zu“) und „ $\perp$ “ ( $g \perp E$ : „steht orthogonal auf“) (s. Lorenzen 1961, S. 420). Aber bereits Schmitz 1967, S. 351, ist misstrauisch: «Was nach Abzug aller geometrisch irrelevanten und der zwar geometrisch belangvollen, aber auf der Geradheit von Strecken oder Flächen beruhenden Eigenschaften übrig bleibt, dürfte kaum genügen, um die Ebene vor gleichförmig oder auch alternierend gekrümmten Flächen – wie der Kugeloberfläche, der randlosen zylindrischen Oberfläche eines beiderseits unendlichen Rohres oder der sinusförmigen Wellenfläche – in der von Lorenzen gewünschten Weise auszuzeichnen, nämlich dadurch, daß gerade nur bei der Ebene der Unterschied zwischen konvexer und konkaver Seite keine Rolle spiele.»

34 Siehe z. B. Amiras 2002, S. 250.

35 Vgl. Janich 1997.

36 Siehe Amiras 2002, S. 235ff.. Zur Vorsicht, mit der man Amiras 2002 lesen sollte, siehe Janich 2008.

metrischen Grundfiguren wie Ebene, Gerade oder Punkt.<sup>37</sup> Dingers Ansatz war es zu versuchen, die mechanischen Herstellungsverfahren der Grundfiguren (insbesondere der Ebene) theoretisch zu fassen und daraus eindeutige Bestimmungen der Grundfiguren zu erlangen. Dinger war bekannt geworden mit dem in der Industrie verwendeten Drei-Platten-Verfahren, bei dem drei grob geebnete Stahlplatten (wechselweise) aneinander gerieben werden und sich so gegenseitig zu Ebenen glätten<sup>38</sup> (eine dritte Platte ist notwendig, da sonst auch gleichmäßige Rundungen entstehen können).

Da ich mich seit Jahren um eine echte Definition der Ebene bemüht hatte, ... so war mir alsbald klar, dass ich hier endlich das Gesuchte vor mir hatte. Wenn man dieses Verfahren geeignet in Worte fasste, so musste diese Aussage eine echte verbale Definition der Ebene enthalten und, da diese Definition eindeutig war, so mussten aus ihr rein logisch alle Aussagen über die Ebene abgeleitet werden können. Dann war aber dieses verfahren nicht eine «nur mit rein mechanischen Mitteln» arbeitende Art der Ebenenherstellung, nicht nur eine «körperliche Darstellung», sondern es enthielt die eindeutige Definition selbst.<sup>39</sup>

...

Diese Herstellungsweise ist ... zugleich eine Definition[.]<sup>40</sup>

Ob sich sein später aufgestelltes Homogenitätskriterium zur Kennzeichnung der Ebene aus einer theoretischen Betrachtung eines Herstellungsprozesses ergibt, ist höchst fraglich, und damit ist es auch problematisch, sie überhaupt (z. B. als Normen) «an die handwerkliche Praxis der Körperbearbeitung»<sup>41</sup> heranzutragen. Während Lorenzen versuchte, Dingers Homogenitätsüberlegungen für eine formale Begründung der Hilbertschen Axiome einzusetzen, rückt Janich wieder die Herstellungsverfahren in den Vordergrund, stellt ein vorgeometrisches Vokabular in Bezug auf den Umgang mit Körpern in manchen Verfahren auf und baut die in (1) verwendeten Aussagen aus diesem Vokabular auf. Auf diese Weise reicht (1), um auch die Ununterscheidbarkeit der beiden Flächenseiten zu garantieren.<sup>42</sup> Allerdings bietet dieses Vorgehen keine begriffliche Analyse.

Eine ähnliche Bestimmung der geraden Linie rückt den Begriff der Selbstähnlichkeit in die Mitte: *Eine gerade Linie ist die Linie, deren Teile zueinander und zum Ganzen ähnlich sind.*<sup>43</sup> Diese Bestimmung geht auf Leibniz, Chr. Wolff und Kant zurück und wird von M. Wolff<sup>44</sup> erneuert. Die Teile sind sich untereinander und zum Ganzen ähnlich, wenn sie «dieselbe Form und Gestalt»<sup>45</sup> haben. Damit unterscheiden sie sich anschaulich z. B. vom Kreis, weil ein Halbkreis eine andere Gestalt hat, als ein Viertelkreis, und von allen anderen gleichmäßigen Linien, deren Teile nur zu gleichlangen anderen Teilen ähnlich sind.

Diese Definition bestimmt die gerade Linie anschaulich tatsächlich eindeutig. Auf das Problematische dieser Bestimmung kann man durch die Einschränkung der Gestalt bei EUKLID auf die Figuren aufmerksam werden. Die Gestalt einer geradlinigen Figur ist gegeben durch die Größen der einzelnen Winkel und die Seitengrößenverhältnisse.<sup>46</sup> Ein Quadrat ist einer anderen Figur ähnlich, wenn diese geradlinig ist und vier rechte Winkel hat mit gleichgroßen Seiten. Wodurch sollte sich aber die Gestalt einer beliebigen Linie auszeichnen?

37 Siehe Abschnitte 7.2 und 5.2.

38 Siehe Dinger 1955, S. 350f..

39 Dinger 1955, S. 351.

40 Dinger 1955, S. 352f..

41 Inhetveen 1985, S. 135.

42 Siehe Janich 1976, S. 63.

43 Insofern die Teilstücke auch zur ganzen Linie ähnlich sind, wird damit nur die endliche gerade Linie bestimmt, weil die Gerade keine Endpunkte hat, ihre endlichen Teile zwei, ihre unendlichen Teile einen.

44 Siehe Wolff 2009, S. 295ff..

45 Wolff 2009, S. 295.

46 Siehe EUKLIDS *Data* Def. 3.

Es ist naheliegend die Ähnlichkeit beliebiger geometrischer Objekte als Überführbarkeit mittels gleichmäßiger Streckung zu bestimmen. Das größere Quadrat wird durch gleichmäßiges Schrumpfen in jedes kleinere übergeführt. Eine gleichmäßige Streckung ist allerdings expliziert eine Dehnung *entlang von Geraden*. Eine gerade Linie beliebig weit *gerade gedehnt* ist offensichtlich wieder eine gerade Linie, und somit folgt die Selbstähnlichkeit der geraden Linie direkt aus dieser Bestimmung der Ähnlichkeit. Weil diese Bestimmung der Ähnlichkeit aber Geraden gebraucht und damit voraussetzt, taugt sie nicht für eine geometrische Definition der geraden Linie.<sup>47</sup>

In allen formalen Axiomatisierungen der elementaren Geometrie, die Strecken oder Geraden nicht als primitive Terme oder ihr Geradesein als primitives Prädikat einführen, müssen sich Strecken oder Geraden definieren oder reduktiv beschreiben lassen. Mir ist keine Axiomatisierung bekannt, die für ein informelles Verständnis weder ihres Objektbereichs noch ihrer in den Axiomen verwendeten Prädikate auf ein Verständnis, was eine gerade Linie ist, verzichten zu können scheint. So scheinen mir auch die beiden Grundprädikate der Axiome Tarskis (siehe Abschnitt 5.2), nämlich „Punkt  $x$  liegt zwischen den Punkten  $y$  und  $z$ “ und „die Punkte  $x$  und  $y$  haben den gleichen Abstand zueinander wie die Punkte  $v$  und  $w$ “, informell nur über die gerade Linie verständlich zu sein.

Wird die Strecke oder Gerade dagegen durch einen primitiven Ausdruck in die Axiomatik eingebracht wie bei Hilbert,<sup>48</sup> so liegt es nahe, die Gerade genau dadurch bestimmt zu sehen, was sich aus den Axiomen über sie – vielleicht gerade in einer konkreten formalen Logik – ableiten lässt. Das Problem dieser inferentialistischen ‚Definition‘ der Gerade ist jedoch ihr künstlicher Charakter: Es müsste erst überprüft werden, ob dieses Verständnis des Geraden dem natürlichen entspricht, das beim Menschen schon recht früh vorhanden ist.<sup>49</sup> Das platonische hätte nach der neuen Interpretation dagegen dieses anschauliche Moment, dass das Gerade das ist, was nirgends ‚vom Weg‘ abweicht.

### 3.2.4 Zur Wortbedeutung

Der klassische mathematische griechische Ausdruck für die gerade Linie ist εὐθεῖα γραμμή oder abgekürzt εὐθεῖα.<sup>50</sup> PLATON benutzte zusätzlich eine Substantivierung des Neutrums τὸν εὐθύ, das Gerade. Die üblichen Unterscheidungen, die in *Parm 137de* oftmals hineingelesen werden, sind gerade (εὐθύς) und gekrümmt (καμπύλος),<sup>51</sup> rund (περιφερής) und gerade (εὐθύς).<sup>52</sup>

47 Eine andere Bestimmung der geraden Linie stellt sich Schmitt 2003, S. 240, vor: «Wenn man z. B. eine weitgehend ohne Abweichungen oder Umwege verlaufende Verbindung zwischen zwei Punkten vor sich hat, dann erkennt man dieses Phänomen als Gerade, wenn man zeigen kann, daß die zwischen diesen Punkten gezogene Linie identisch mit dem quantitativen, durch Einheiten meßbaren Abstand zwischen diesen Punkten ist. Weist ein Phänomen dieses Merkmal in hoher Annäherung auf, nennen wir es aufgrund dieser unterscheidbaren Bestimmtheit, die eben die begriffliche Bestimmtheit der Gerade ist, eine Gerade.» („Gerade“ ist eigentlich die Bezeichnung für eine unendliche gerade Linie, „Strecke“ ist der Fachterminus für eine endliche gerade Linie.) «Dieser Begriff [der (endlichen) geraden Linie] enthält in sich bereits eine hochkomplexe Begriffsstruktur. Man benötigt zu seinem Verständnis nicht nur die für jede bestimmte Einheit konstitutiven Begriffe wie Einheit, Vielheit, Identität, Verschiedenheit, Ganzheit, Teil usw., sondern darüber hinaus spezifischere Begriffe wie Lage, Abstand, Richtung, aus deren richtiger Kombination erst sich der Begriff der einfachsten Form einer kontinuierlichen Erstreckung, ohne Abweichung in der Richtung (usw.), also der Begriff der Geraden, ergibt.» Wie die gerade Linie auch mittels Abstand und Richtung nach Schmitt bestimmt werden kann, Abstand und Richtung werden hier vorausgesetzt. Schwieriger – und meinem Ermessen nach nicht möglich – ist eine Bestimmung der Begriffe *Abstand* und *Richtung* ohne den Begriff der geraden Linie auf die begriffliche Weise, die Schmitt anstrebt.

48 Siehe für die ersten seiner Axiome Abschnitt 7.2.3.

49 So scheint ein praktisches Verständnis grundlegender geometrischer Verhältnisse, wie dem Geraden, vor der Erfahrung und unabhängig vom Sehen beim Menschen da zu sein; siehe De Cruz 2007. «Since the spontaneous use of geometric cues emerges prior to language acquisition and is similar to that of our closest living relatives, it seems very plausible that geometric cognition arises prior to experience.» (De Cruz 2007, S. 192). «Landau et al. therefore concluded that some principles of Euclidean geometry are known from an early age on, and that sight is not required to learn about them.» (S. 192).

50 Heute spricht man auch oftmals von ‚der Geraden‘, es kommt aber auch die Abkürzung vor, die das „gerade“ vor der „Linie“ kürzt (s. z. B. Benz 1994).

51 Vgl. *Politeia* 602c

52 Vgl. *Philebos* 51c, *Politeia* 436e, *Timaios* 44d, 66b, 73c, ARISTOTELES *De caelo* II, 4, 286b13.



Aber es gibt zwei Anknüpfungspunkte für unser Verständnis von GERADE im Gebrauch von εὐθύς. 1.) Zwei einen Winkel bildende gerade Linien können als eine gerade Linie klassifiziert werden, insofern sie aus zwei geraden Linien zusammengesetzt ist, die man nach ARISTOTELES auch in einem schwächeren Sinne als eine einzige verstehen kann (*Metaphysik* 1016a2, a12). Eine gerade Linie im weiteren Sinne könnte demnach auch eine gewinkelte sein. 2.) Andererseits waren Abkürzungen in antiken mathematischen Texten üblich.<sup>53</sup> Unter anderem nennt EUKLID (I 45) ein Polygon nominalisiert εὐθύγραμμον (abgekürzt aus σχῆμα εὐθύγραμμον), insofern es begrenzt wird von begrenzten geraden Linien.<sup>54</sup> Im *Siebten Brief* 342d werden die geraden Figuren (εὐθέος . . . σχήματος) erwähnt, welche offensichtlich die durch gerade Linien begrenzten Figuren sind.

Damit würde der stipulierte Gebrauch von εὐθύς in *Parmenides* 137de doppelten Sinn machen. Erstens als verallgemeinernde Ellipse zu εὐθύγραμμον, zweitens auch als eine Verallgemeinerung der geraden Linie zu gewinkelten Linien, zu Polygonen, etc. als den paradigmatisch GERADEN Objekten und damit als den paradigmatisch ‚zwischen den Enden hervorstehenden‘ Objekten.

Demnach hätte εὐθύς im allgemeinen mindestens zwei Bedeutungen. Einmal würde es, in der Verbindung von εὐθεῖα γραμμῆ gebraucht, als Eigenschaft einer Linie ihr Geradesein bezeichnen – wie von EUKLID ausschließlich verwendet. Zum zweiten würde es auf jeweils gewinkelte aber sonst gerade Linien, geradlinige Figuren und von geradlinigen Figuren begrenzte Körper zutreffen.

Der Gebrauch von εὐθύς in *Parm* 137de wäre nach der neuen Interpretation also eine Verallgemeinerung der zweiten Bedeutung auf alle irregulären Gestalten *unter Ausschluss der geraden Linie*. Darf man PLATON so eine scheinbar perfide Umbenennung zutrauen? Tatsächlich erwähnt der platonische Verfasser des *Siebten Briefs* die unproblematische Möglichkeit einer einfachen Vertauschung von ‚rund‘ und ‚gerade‘: «es hindert gar nichts die jetzt rund genannten Dinge gerade zu nennen und die geraden rund, und sie bleiben uns nach dieser Umänderung und entgegengesetzten Benennung noch ebenso reell.»<sup>55</sup> Wenn die aufgestellte These tatsächlich wahr ist, dann empfiehlt sie sich selbst, ein kleiner Teil der ungeschriebenen Lehre PLATONS zu sein. Weil nur wer sie kennt, ist in der Lage, die entsprechenden Stellen in PLATONS Werk ganz zu begreifen. Jeder andere kann nur über die kleinen Widersprüche rätseln, die sich aus der exoterischen Bedeutung der betreffenden Worte ergeben.

### 3.3 Aristoteles: Topik VI 11

Es gibt genau eine weitere Stelle, bei der PLATONS Definition des Geraden nahezu wörtlich Verwendung findet, nämlich in der *Topik* des ARISTOTELES. Um die die neue Interpretation von *Parm* 137de aufrechtzuerhalten, muss sie dort nicht anwendbar sein; die Standardinterpretation beginnt spätestens mit PROKLOS.<sup>56</sup> Auch ist eine Übersetzung als «Mitte, die die Enden verdeckt» hier letztlich sinnvoller, aber zumindest scheint die betreffende Passage sogar konsistent interpretierbar zu sein, wenn man die neue Bedeutung von GERADE substituiert.

Aristoteles hält in *Topik VI.11* für zusammengesetzte Definitionen fest, dass die Teile des Definiens auch zerlegt die jeweiligen Teile des Definiendum definieren müssen. Darauf folgt im Text ein Beispiel, bei dem das nicht der Fall ist.

Wenn man beispielsweise die gerade endliche Linie als «Grenze einer Grenzen besitzenden Fläche, deren Mitte zwischen den Grenzen hervorsteht» definiert, und wenn die Begriffsbestimmung der endlichen Linie

53 Wenn aus dem Kontext klar ist, was gemeint, werden von EUKLID die Ausdrücke für ‚Punkt‘, ‚Linie‘ etc. weggelassen (s. Neuschwander 1973, S. 339). Für eine detaillierte Darstellung des Gebrauchs der antiken mathematischen Sprache s. Netz 1999, Kap.3,4.

54 Siehe Heath 1956a, S. 346.

55 *Siebter Brief* 343b.

56 Vgl. Proclus 1970, S. 109.

«Grenze einer Grenzen besitzenden Fläche» ist, so müßte von «gerade» der Rest (die Begriffsbestimmung) sein, nämlich «deren Mitte zwischen den Enden hervorsticht». Aber die unbegrenzte (Linie) hat weder eine Mitte noch Grenzen, ist aber gerade, daher ist der Rest nicht die Begriffsbestimmung des Restes.<sup>57</sup>

Man versteht diese Passage für gewöhnlich im Sinne der Standardinterpretation von GERADE. Die endliche gerade Linie lässt sich kennzeichnen als Grenzlinie einer begrenzten Fläche, bei deren Grenzlinien die Mitte jeweils die Endpunkte der Grenzlinie verdeckt, weswegen diese Grenzlinien gerade sind (s. Abb. 6). Dies ist aber, so ARISTOTELES, keine (ordnungsgemäße) Definition, da die allgemeine Gattung der Linie nicht durch die für ‚gerade‘ eingesetzte Begriffsbestimmung spezifiziert wird, da diese das Geradesein nicht allgemein charakterisiert. Denn die unendliche Gerade ist nicht durch «die Mitte verdeckt die Enden» als gerade charakterisierbar, da sie keine Endpunkte und damit auch über keine Mitte verfügt.

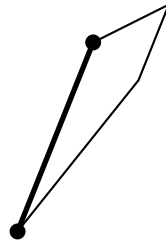


Abb. 6

Die definitorische Unsauberkeit besteht demnach darin, dass die zum Geradesein gehörige Begriffsbestimmung voraussetzt, dass die weiter zu spezifizierende Linie bereits begrenzt ist. Deshalb ergibt sich, wenn man die zu «endlich» gehörende Bestimmung weglässt, auch keine wohlgeformte Definition der allgemeinen geraden Linie.

Bestimmte Linien als Grenzen, d.h. Ränder, von Flächen zu betrachten, diskutiert ARISTOTELES im allgemeinen hinsichtlich des begrifflichen Früher und Später in *Topik 141b*. Bezüglich der Definition ist die Linie früher als die Fläche. Das widerspricht aber nicht dem Umstand, dass bestimmte Linienformen als Grenzen bestimmter Flächen definiert werden, so die Kreislinie als Rand des (Voll-)Kreises bei EUKLID (I D15) und hier die begrenzte Linie als Randstück einer begrenzten Fläche.

Überraschend an diesem Beispiel ist vielmehr die Verwendung einer unendlich langen Geraden, denn für ARISTOTELES existiert sie nicht. Er argumentiert in der *Physik III,5* für seine These der Begrenztheit der Welt. Während bei der Teilung der Linie und bei der Hinzufügung den Zahlen tatsächlich eine potentielle Unendlichkeit zukomme – im Sinne von *noch immer etwas außer einem haben*<sup>58</sup> – sind die Körper und damit auch die Flächen und Geraden als Größen nicht beliebig erweiterbar. Das, so ARISTOTELES, widerspreche der mathematischen Praxis auch nicht, da die Mathematiker die geometrischen Größen jeweils nur in einer bestimmten Vergrößerung brauchen und benutzen würden. Somit ließe sich der jeweilige Gebrauch in Abhängigkeit der totalen Größe des Universums in die Welt skalieren, da sie potentiell unendlich teilbar ist. Dies könnte gut mit dem tatsächlichen Vorgehen EUKLIDS übereinstimmen, auch wenn in den *Elementen* von unendlichen Geraden die Rede ist. Postulat 3 aus den *Elementen*, dass jede begrenzte Strecke beliebig verlängert werden kann an beiden Enden, entspricht der von ARISTOTELES statiierte Sachverhalt, dass man sich zu jeder begrenzten Größe eine größere vorstellen kann. Damit das obige Beispiel funktioniert, benötigt man aber nicht nur potentiell unendliche Geraden, sondern sogar eine aktual-unendliche gerade Linie, da die potentielle Unendlichkeit in erster Linie nur Reihen zukommt und erst mittelbar, wenn sich zum Beispiel wie bei den von einer Strecke ausgehenden Verlängerung diese alle vereinigen lassen zu einer einzigen Linie, einem einzigen Ding.

Welcher geometrischen Linie neben einer unendlichen Geraden könnte noch das Unbegrenzte zugesprochen werden können? Nicht der Quantität nach unendlich ist der Kreis, aber «wenn man bloß auf

<sup>57</sup> *Topik 148b23-32*. Übersetzung angelehnt an Aristoteles 2004.

<sup>58</sup> Vgl. *Physik 207a1*.

das Verhältnis zwischen den nebeneinanderliegenden Stücken achthat»<sup>59</sup>, so ist auch der Kreis und jede geschlossene Linie unendlich.<sup>60</sup> Nimmt man vor diesem Hintergrund die neue Interpretation von GERADE, so verschwindet diese Schwierigkeit mit der unendlichen Gerade. Erstaunlicherweise lässt sich so diese Passage unter unserer These (einigermaßen) konsistent interpretieren.

In diesem Licht stellt sie sich als ein Versuch dar, einen beliebigen endlichen (sich nicht kreuzenden) Streckenzug als Teil oder Ganzes der Umfanglinie einer geradlinigen Figur zu bestimmen. Denn eine ‚eckige Linie‘ wäre eine gewinkelte geradlinige Linie. Dann kann sich der Nebensatz «wo die Mitte zwischen den Grenzen hervorsticht» sowohl auf die Fläche wie auch auf die Grenzlinien beziehen. Damit muss nun mit ‚gerader Linie‘ aber auch eine Aneinanderreihung von geraden begrenzten Linien (Streckenzug) gemeint sein, sodass sich das ‚gerade‘ der Fläche auf die Linie übertragen lässt (s. Abb. 7).

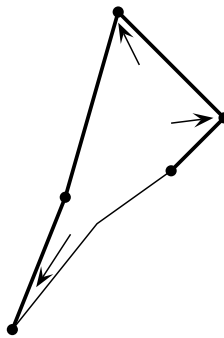


Abb. 7

Diese Charakteristik würde (wegen dem gleichen Argument) scheitern, wenn man unter ‚gerader endlicher Linie‘ hier auch die rein geraden (nicht-gewinkelten) Linien verstehen würde. Sie scheitert aber genauso für im nicht-quantitativen Sinne unendliche geradlinige Linien wie die ganze Umfanglinie. Sie besitzt keine natürlich vorgegebenen Grenzen, und so kann bei ihr deshalb die Mitte nicht zwischen den Grenzpunkten hervortreten.<sup>61</sup>

Nimm man ‚gerade‘ hier bei Aristoteles als eckig bzw. geradlinig unter Ausschluss des rein und nur Geraden, so geht die Argumentation des Textes auch unter der neuen Interpretation durch. Nimmt man ‚gerade‘ als geradlinig unter Einschluss der einfachen Strecke, so muss sich der Nachsatz, wenn man das Definiendum als Ganzes nimmt, auf die Fläche beziehen, während es sich nach der Aufspaltung auf die Linie bezieht.

Ein nicht zusammengesetzter Ausdruck wie *geradbegrenzte Linie* wäre durch die Definition wohldefiniert. Erst als zusammengesetzte Begriffsbestimmung verändert sich der Bezug des Nachsatzes, eine gerade endliche Linie ist eine endliche Linie mit der Eigenschaft gerade zu sein: Nach Definition eine endliche Linie, deren Mitte zwischen den Enden hervorsticht. Denn ‚Grenze einer Grenzen habenden Fläche‘ definiert (einigermaßen) korrekt die endliche Linie. Aber die geschlossenen endlichen Linien haben keine Grenzen und keine Mitte, einige sind aber geradlinig, womit die Bestimmung von ‚gerade‘ durch den Nachsatz bei ihm und damit allgemein falsch ist. Die Eckpunkte und Umfanglinien eines Vielecks sind für die Vielecksfläche Grenzen, für die Umfanglinie nicht.

Mathematisch kann diese Definition nicht erfolgreich sein, weil es sich einmal bei der durch Strecken begrenzten Fläche nur um die paradigmatischen Fälle dieser Charakteristik handelt und viel unregelmäßigere (mit krummen oder wilderen Grenzen) existieren, was der philosophischen Allgemeinheit der

59 *Physik* 207a6-7.

60 Vgl. Proclus 1970, S. 103.

61 Dem steht der Gebrauch von πεπερασμένος und ἄπειρος zum Beispiel in *Elemente* (I 10/11) scheinbar entgegen, treten sie dort implizit als Gegensatz auf. Dagegen ist zu bemerken, dass bei Geraden (*zweiseitig*) begrenzt und endlich zusammenfallen.

Definition geschuldet zu sein scheint. Zum anderen setzen diese paradigmatischen Fälle eine Art von geraden Linien bereits voraus, die in der ‚Definition‘ nicht mitgeliefert wird.

Indem also ARISTOTELES diese Definition kritisiert, wendet er sich möglicherweise gegen die bedeutungsvolle Folge einer erfolgreichen Definition dieser Art, nämlich dagegen, dass das Geradlinige und damit letztlich auch das Gerade über das nach PLATON Ungleichmäßige erklärbar ist, und die Priorität des RUNDEN über das GERADE nicht mehr gewahrt bleibt.

### 3.4 Euklids Definition der geraden Linie in den «Elementen»

In *Elemente* Buch I definiert EUKLID an vierter Stelle die gerade (endliche) Linie: «Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.»<sup>62</sup> (εὐθεῖα γραμμὴ ἐστίν, ἣτις ἐξ ἴσων ἐφ’ αὐτῆς σημείοις κεῖται.) Die genaue Bedeutung ist umstritten.<sup>63</sup> Vor den Definitionen des Parmenides ist es allerdings erstaunlich, dass EUKLIDS Definition teilweise ähnlich wie GERADE interpretiert wurde als den Platz zwischen den zwei Punkten belegend.<sup>64</sup> Denn die Betonung hier von ‚gleich(mäßig) (ἴσων) liegen‘ ähnelt der von RUND. Sie unterscheiden sich nur darin, dass bei EUKLID sich die Linie zu irgendwelchen Punkten auf ihr verhält, während sich in *Parm 137e* die (End-)Punkte zur Mitte (der Linie) verhalten.<sup>65</sup> Wenn sich aber wie in *Parm 137de* irgendwelche Punkte zur Linie verhalten, dann wird damit die Existenz von mindestens einem Punkt präsupponiert. Das ist aber nicht notwendig, weil man die Relation umdrehen kann, und so (potentiell) unendliche gerade Linien nicht von der Definition ausgeschlossen hat. Man könnte den Unterschied der Definitionen von EUKLID und PLATON demnach als Reaktion auf eine Verallgemeinerung der Aristotelischen Kritik (aus dem vorherigen Abschnitt), falls dort tatsächlich von einer unendlichen Geraden die Rede ist, erklären.

Ist diese neue Interpretation auch in sich sinnvoll? Ja, denn sie liegt auf einer Linie mit der Erklärung von GERADE in *Parm 137e*: Während dort die Mitte hervortritt, verhält sich hier die Linie als Mitte gleichmäßig. Wenn es mehr als einen Punkt (auf der Linie) gibt, verhalten sich diese auch gleich zur Mitte. Wenn es weniger als zwei Punkte auf der Linie gibt, gibt es auch keinen zweiten Ort, an dem im Verhältnis zum ersten die Mitte (Linie) ausreißen könnte.<sup>66</sup> Bei genau null oder einem Punkt verhalten sich also die vorhandenen Punkte auch alle gleich zur Mitte.

EUKLIDS Definition muss nach diesem Verständnis aber nicht als Kritik an *Parm 137e* gelesen werden, sondern kann auch als eine angepasste Version verstanden werden. Denn während in dem begrifflichen und mathematischen Umfeld der ersten Hypothese die Unbegrenztheit die undefinierbar- und undenkbarkeit impliziert und nur in diesem negativen Sinne der Einheit ‚zukommt‘ (*Parm 137d*) (und selbst ein Unbegriff ist), darf und kann bei der vierten Definition nicht vorausgesetzt werden, dass jede Linie begrenzt ist.

Wie definiert EUKLID nun in den *Elementen* die gerade Linie? Zunächst ist die Definition 4 eine Spezifizierung der Linie (Def. 2) in gerade und andere Linien. Eine Linie ist genau dann gerade, so EUKLID, wenn ‚die Punkte auf ihr‘ sich ‚gleichmäßig zu ihr verhalten‘. Die ‚Punkte auf ihr‘ sind im Kontext der anderen Definitionen die Punkte, die Enden von Teilen der Linie sind (die Enden der ganzen Linie

62 Thaer 1997, S. 1.

63 Vgl. Heath 1956a, S. 165ff.. Russo 1998 ist der Meinung, EUKLIDS Definition 4 sei eine nachträgliche Ergänzung der *Elemente*, die den Anfangsteil von HERONS Definition der geraden Linie überträgt, ohne den Sinn zu wahren. So konnte es kommen, dass sie absolut unverständlich ist («of which [Euklids Def. 4] no mathematician has ever been able to make any sense», S. 215). Siehe aber Fußnote 62 auf S. 25.

64 Vgl. u. a. Heath 1956a, S. 168.

65 Beachte dazu auch die Reihenfolge in *Parm 145b4*.

66 Punkt wurde auch als Einheit mit Ort begriffen, vgl. Proclus 1970, S. 95.

vielleicht ausgeschlossen; siehe Abschnitt 1.3.7). Das ‚gleichmäßig zu ihr verhalten‘<sup>67</sup> ist schwieriger zu bestimmen, da neben den für Linien fundamentalen Begriffen von Teil-Ganzes und Enden-Mitte noch keine Relationen zwischen Punkt und Linie definiert wurden. So liegt es nahe die Gleichmäßigkeit in Bezug auf alle noch kommenden Relationen zu sehen. Eine Formalisierung davon wäre in Anlehnung an Lorenzens Bestimmung der Ebene (siehe S. 95) ein Axiomenschema:

$$(1^*) \quad P \in E \wedge P' \in E \wedge A(E, P) \rightarrow A(E, P')$$

mit  $E$  eine gerade Linie,  $P$  und  $P'$  Punkte,  $\in$  als „liegen auf“ und  $A$  eine beliebige Aussage. Neben der Frage, inwieweit dieses Vorgehen auch formal erfolgreich sein kann, ist die Idee nicht die der *Elemente*, da dort alle weiteren zentralen Definitionen auf der geraden Linie aufbauen. Formal stellt sich die Frage, was das für primitive Prädikate sein sollen, die in die beliebigen Aussagen  $A$  eingehen, und die nicht in irgendeiner Weise gerade Linien voraussetzen.

Die wesentliche Funktion der Gleichmäßigkeit für die begriffliche Bestimmung der geraden Linie ist aber eine andere und ist auch erfolgreich, obwohl die Gleichmäßigkeit oder Unterschiedslosigkeit nur der Form nach, ohne eine konkrete Relation angeben zu können, ihre Anwendung findet. Denn es kommen hier bei der Betrachtung der euklidischen Definition neben der Idee der Gleichmäßigkeit aus der ersten *hypothesis* des *Parmenides* auch die anderen dort angeführten Ideen in Betracht, insbesondere die der Begrenzung.<sup>68</sup> Die Idee der begrifflichen Begrenzung spiegelt sich nun einmal so in der Definitionsweise der geraden Linie, das in der Definition wegen Genus (Linie) und Spezifikum (gerade sein) die gerade Linie das ‚Mittlere‘ zweier ‚Enden‘ ist. Es spiegelt sich diese allgemeine Struktur aber noch weiter darin, dass die einfachsten geometrischen Objekte durch genau zwei ihrer begrifflichen Teile geometrisch bestimmt werden. Was damit gemeint ist, wird am Beispiel der Kreisdefinition erläutert: Ein Kreis ist eine Figur, d.h. eine Fläche, die von einer Grenze umschlossen wird, deren besondere Form der Grenze durch genau zwei geometrische Momente bestimmt wird, nämlich durch einen Punkt und eine gerade Linie. Denn die Grenze des Kreises ist genau dadurch bestimmt, dass zwischen jedem Punkt auf ihr und dem speziellen Punkt eine der speziellen Linie größengleiche gerade Linie liegt.<sup>69</sup>

Die Forderung, dass die einfachsten, d.h. die erste durch eine Gleichmäßigkeit vollständig definierte Unterart eines Objekttyps, geometrischen Objekte durch zwei ihrer begrifflichen Teile geometrisch bestimmt werden, trifft nun auf die Charakterisierung der geraden Linie in Definition 4. Alle Punkte liegen gleichmäßig auf ihr, d.h. kein Punkt auf ihr kann etwas zu ihrer geometrischen Bestimmung beitragen. Es bleiben ihre Linienteile und ihre Endpunkte. Jede Linie ist aber durch eine vollständige Aufteilung in Linienteile geben, so dass ihre Linienteile eine gerade Linie nicht bestimmen können. Eine gerade Linie muss damit geometrisch durch ihre beiden Endpunkte bestimmt werden.

Begrifflich-geometrisch abhängen bedeutet nun aber u. a., dass die Identität des geometrischen Objekts von der Identität der geometrischen Objekte abhängt, von denen sie begrifflich-geometrisch abhängt. Zwei vielleicht unterschiedliche Objekte sind genau dann, wenn die Objekte, von denen sie begrifflich

67 Oder das ‚gleichmäßig‘ auf ihr liegen, d.h. irgendwie ‚gleichmäßig‘ Endpunkt eines Teils der Linie sein.

68 Siehe Abschnitt 1.3.7. Insofern die Ausführungen hier zu den *Elementen* eine Stütze für die Neuinterpretation von *Parm 137de* sein sollen und die Neuinterpretation wiederum eine notwendige Ingridienz für die Wahrheit der These, dass sich die Ideen der ersten *hypothesis* in den *Elementen* spiegeln, haben wir damit einen leichten Zirkel. Aber selbst dieser ist kein schlechter Zirkel, da sich die Wahrheit der Thesen auch aus der Kohärenz und Fruchtbarkeit für ein Verständnis der *Elemente* ergibt.

69 Diese hier etwas *ad hoc* eingeführte Bestimmung geometrischer Objekte ist tatsächlich eine wesentliche, nämlich die durch die Teile begrifflich als Ganzes bestimmt zu werden. In *Parm 158c* heißt es, dass jeder Teil des Ganzen wiederum in eine unbegrenzte Menge zerfällt, da er nur am Eins teilhat, selbst aber das zum Einen Andere ist. Weil die Anderen aber am Einen noch teilhaben (*Parm 157c*), kann das Ganze aus denn Teilen ‚aufgebaut‘ werden. Dass, so die Behauptung hier, ist, da bezogen auf den Linienabschnitt 3 (siehe Abschnitt 1.3.5), begrifflich zu verstehen, während der Zerfall in Bereich 4 (siehe *Parm 159b-160b*) weitergehend ist, das Andere jetzt nicht mehr am Einen teilhat (*Parm 159d*) und sich damit gut mit dem geometrischen Konstruieren im Einklang befindet, bei dem geometrische Objekte aus ihren Teilen konstruiert werden und keine ihre Komponenten übersteigende Einheit bilden.

Dass geometrische Begriffe in notwendige Begriffsteile zerfallen, findet sein strukturelles unteres Ende in dem Grenzbegriff, der beinhaltet, dass es (mindestens) zwei Grenzmomente geben muss, in seiner direkten Anwendung aber auch nicht mehr als zwei.

geometrisch abhängig identisch sind. Desweiteren sind sie abhängig von dem Gegebensein der Objekte, von denen sie abhängen, gegeben. Damit wurde nun aus der vierten Definition der *Elemente* die moderne Charakteristik, dass zwei Punkte genau eine Gerade bestimmen, gemäß dem euklidisch-antiken Kontext abgeleitet. In die Axiomatik der *Elemente* wurde es zuweilen hinzugefügt in Form der Aussage, dass zwei Geraden keinen Raum einschließen.<sup>70</sup>

### 3.5 Der unperfekte Kreis im Siebten Brief

#### 3.5.1 Der unperfekte Kreis

Eine weitere Textstelle im platonischen Oeuvre, in der die Ausdrücke RUND und GERADE auftreten, ist das Beispiel des Kreises (κύκλος) im *Siebten Brief* 342a–343b, dort in Verbindung mit στρογγύλον und περιφερής (342c).<sup>71</sup> Der Kreis wird dort in aller Kürze durch die fünf Erkenntnisstufen (die drei zur Erkenntnis hinführenden: Name (ὄνομα), Gedanke (λόγος) und Bild (εἶδωλον), als vierte Stufe die Erkenntnis selbst und als fünftes Moment die Idee des Dinges selbst (vgl. 342ab) verfolgt, danach wird die Unangemessenheit der unteren vier Stufen über dem, wie der Kreis in der fünften auf die höchste Weise erfasst wird, angesprochen.<sup>72</sup>

Jeder Kreis von denen, die tatsächlich gemalt oder auch gedrechselt sind, ist voll von dem, was dem fünften entgegengesetzt ist – denn er rührt überall an das Gerade –, der Kreis selbst aber, sagen wir, hat weder etwas Kleineres noch Größeres der entgegengesetzten Natur an sich. *Siebter Brief* 343a

κύκλος ἕκαστος τῶν ἐν ταῖς πράξεσι γραφομένων ἢ καὶ τορευθέντων μεστὸς τοῦ ἐναντίου ἐστὶν τῷ πέμπτῳ - τοῦ γὰρ εὐθέος ἐφάπτεται πάντη - αὐτὸς δέ, φαμέν, ὁ κύκλος οὔτε τι μικρότερον οὔτε μείζον τῆς ἐναντίας ἔχει ἐν αὐτῷ φύσει.

Dieser Satz wird, soweit man den *Siebten Brief* für echt oder zumindest platonisches Gedankengut darstellend hält, gern im Sinne folgender Überlegung genommen: Jeder materielle Kreis könne kein perfekter Kreis sein, weil er irgendwo nicht ganz rund sei, sondern «das Gerade überall berühre». Er nähere den perfekten, mathematischen Kreis nur an, erreiche ihn aber niemals.<sup>73</sup> Diese Deutung scheint

70 Die einzige mir bekannte Äußerung, die dem in diesem Kapitel entwickelten Verständnis der euklidischen Definition der geraden Linie nahe kommt, findet sich bei HEGEL: «Die Bestimmung (oder wenn man will, der Begriff) der geraden Linie ist doch wohl keine andere, als daß sie die schlechthin einfache Linie ist, d. i. in dem Aussersichkommen (der sogenannten Bewegung des Punktes) schlechthin sich auf sich bezieht, in deren Ausdehnung keine Art von Verschiedenheit der Bestimmung, keine Beziehung auf einen andern Punkt, oder Linie ausserhalb ihrer gesetzt ist, hält; – die schlechthin in sich einfache Richtung. Diese Einfachheit ist allerdings ihre Qualität, und wenn die gerade Linie schwer analytisch zu definieren scheinen sollte, so wäre es nur um der Bestimmung der Einfachheit oder Beziehung auf sich selbst willen, und bloß weil die Reflexion beym Bestimmen zunächst vornemlich eine Mehrheit, ein Bestimmen durch andere, vor sich hat; es ist aber für sich schlechthin nichts schweres, diese Bestimmung der Einfachheit der Ausdehnung in sich, ihrer Bestimmungslosigkeit durch anderes, zu fassen; – Euklids Definition enthält nichts anderes als diese Einfachheit.» (Hegel 1999, S. 199f.) HEGEL leitet daran anschließend aus der euklidischen Definition die archimedische Bestimmung der geraden Linie als kürzeste zwischen zwei Punkten ab: «Der Uebergang nun aber dieser Qualität zur quantitativen Bestimmung (des Kürzesten), welcher das Synthetische ausmachen sollte, ist ganz nur analytisch. Die Linie ist als räumlich, Quantität überhaupt; das Einfachste, vom Quantum gesagt, ist das Wenigste, und diß von einer Linie gesagt, ist das Kürzeste. Die Geometrie kann diese Bestimmung als Corollarium zur Definition aufnehmen;» (Hegel 1999, S. 200) In der in dieser Arbeit gegebenen Rekonstruktion des begrifflichen Kontextes der *Elemente* kann nicht direkt so gefolgert werden, da die gerade Linie erst das Maß für Linien abgibt. Stattdessen kann so argumentiert werden: Unter der noch zu zeigenden Annahme, dass es eine Kürzeste Linie zwischen zwei Punkten gibt, würde die Behauptung, dass dies nicht die gerade Linie ist, zu einem Widerspruch mit der intrinsischen Ununterscheidbarkeit der beiden Seiten einer geraden Linie (s. S. 26) und ihrer Endpunkte führen.

71 PLATONS Autorenschaft des *Siebten Briefs* wurde häufiger in Frage gestellt, für einen Überblick der Argumente siehe Finck 2007, S. 123ff.. Finck 2007, S. 123a27, laviert etwas, weil er den *Siebten Brief* zwar inhaltlich benutzen möchte, ohne seine Argumentation allerdings von dessen Echtheit abhängig machen zu wollen. Aber man muss aufpassen die inhaltlichen Überlegungen von den historischen letztlich getrennt zu halten. Die überlieferte Autorenschaft ist ein hilfreicher, aber trotzdem bloß äußerer Hinweis auf die gedankliche und gedanklich-biographische Kohärenz der in den Texten dargelegten Gedanken.

72 Ähnliche Aufzählungen finden sich in *Parm* 142a, 155de und *Nomoi* 895d. Der Gebrauch von „Erkenntnis“ (ἐπιστήμη) im *Siebten Brief* ist problematisch (siehe Finck 2007, S. 140f.).

73 Siehe Becker oJ, S. 7. Bordt oJ, S. 99f.: «Was wir sehen, sind nur Abbilder von Kreisen und Dreiecken, nie aber einen Kreis oder ein Dreieck selbst. PLATON kommt zu dieser Auffassung zum einen deswegen, weil diejenigen geometrischen Figuren,

jedoch (ungerechtfertigter Weise) über den wörtlichen Ausdruck hinauszugehen. Denn unter einem Kreis, der «überall das Gerade berührt» hat man sich geometrisch einen Kreis mit seinen Tangenten vorzustellen, und der Kreis würde Entgegengesetztes enthalten, weil er die Tangenten «berührt» (was wiederum bedeuten müsste, dass er sie in mehr als einen Punkt schneidet). Entsprechend ist Heath 1921a, S. 288, der Meinung: «the meaning of [*Siebter Brief 343a*] is presumably that we cannot in practice draw a circle and a tangent with only one point common (although a mathematical circle and a mathematical straight line touching it met in one point only).»

Implementiert man jedoch die neue Interpretation und nimmt «das Gerade» im Sinne von GERADE, dann nähert man sich wieder der ersten Interpretation an. Denn «die Ungleichmäßigkeit berühren» kann genommen werden als «die kleinen Irregularitäten besitzen», die ein handgemachter Kreis eben hat. Aber diese Irregularitäten sollten den handgemachten Kreis nicht dabei stören, ein Kreis zu sein, da er sonst eine Ellipse oder etwas anderes wäre.

### 3.5.2 Die Ungenauigkeit der sichtbaren Welt

Zuweilen interpretiert man PLATON unter Hinweis auf *Siebter Brief 343a* so, dass ein Kriterium der Unterscheidung von Ideen&Mathematika und Wahrnehmbaren die erreichbare Exaktheit ist.<sup>74</sup> Danach sind mathematische Objekte ganz exakt, die Randpunkte eines Kreises liegen *alle* genau *gleich* weit entfernt vom Mittelpunkt, während alle – und nicht nur die handgemachten – materiellen Kreise ungenau sind. Wie sich unsere These auf ein paar Argumente gegen dieses Kriterium auswirkt, wird in diesem Abschnitt aufgezeigt.

Ein Hauptargument gegen dieses Kriterium ergibt sich aus der Betrachtung begrifflicher Gegensätze. Wenn etwas definitiv kein Kreis ist, dann haben die Enden definitiv nicht den gleichen Abstand zu irgendeinem Punkt, und es ist definitiv ein Unkreis (bzw. GERADE), d.h. ein Unkreis ist etwas, dessen Enden zu keinem Punkt den gleichen Abstand haben.<sup>75</sup> Wenn etwas mit Sicherheit einen Begriff nicht (in seiner Genauigkeit) instantiiert, dann aber sicherlich seine Negation, so wie ein Unkreis nicht angenähert werden kann, sondern immer ein perfekter Unkreis ist.

Dagegen könnte man einwenden, dass die Ungenauigkeit bereits bei Punkten, Abständen, Linien und Flächen beginne, der Gebrauch ihrer Benennungen vage sei, sich diese Vagheit sowohl auf Kreis wie Unkreis übertrage und dort Platz für Formen der Annäherungen lasse. Dem kann aber entgegnet werden, dass diese Vagheit, ob ein Gegenstand einen Begriff instantiiert oder nicht, nur an Grenzen zwischen zwei gegebenen Alternativen auftritt. Z. B. gibt es Stühle und Dinge, die keine Stühle sind, aber bei manchen Gegenständen ist man sich vielleicht nicht sicher, was von beiden sie sind. Wenn man aber zum Beispiel sicher ist, dass keine Punkte, d.h. keine unendlich kleinen, unteilbaren Teilchen exi-

---

die man sehen kann, nie diejenigen Bedingungen erfüllen, die geometrische Figuren eigentlich erfüllen müssen; selbst ein mit einem guten Zirkel konstruierter Kreis ist nie wirklich ein Kreis, bei dessen Kreisumfang alle Punkte exakt denselben Abstand zum Mittelpunkt des Kreises haben. ... Daß geometrische Gegenstände nicht sinnlich wahrnehmbar sind, bedeutet nicht, daß sie nicht wirklich sind und gar nicht existieren. Der Mathematiker nimmt ihre Existenz an und erforscht die Gesetze, die für die idealen geometrischen Figuren gelten.» Ohne Verweis auf diese Stelle bei Brown 1999, S. 9: «Plato's theory ... tells us what mathematics is. This last feature especially rings true – even if nothing else about Platonism does. When we talk about circles, for example, we don't seem to be talking about any particular figure on the blackboard. Those are only approximations. We're talking about a perfect circle, something which exists nowhere in the physical world. At this point it's completely natural to feel drawn toward Plato's realm of eternal forms. And many find the tug irresistible.» Oder Shapiro 2000, S. 52: «Mathematics, or at least geometry, provides a straightforward instance of the gap between the flawed material world around us and the serene, ideal, perfect world of thought. From before Plato's time until today we have had completely rigorous definitions of straight line, circle, and so on, but the physical world contains no perfectly straight lines without breadth, and no perfect circles, or at least none that we can see.» Eindeutig ist Finck 2007, S. 145: «Das Problem besteht nicht darin, dass eine Instanz nicht nur eine, sondern viele Bestimmtheiten hat, sondern dass ihr die fragliche Bestimmtheit nur bedingt zukommt. Die materielle Instanz eines Kreises ist nicht vollkommen rund und insofern defizient».

74 In der englischsprachigen Literatur *criterion of perfection* genannt.

75 Vgl. Wedberg 1955, S. 50.

stieren, dann sind alles ‚Unpunkte‘, und es wäre nicht sinnvoll davon zu sprechen, dass Atome, Elektronen etc. Punkte *annähern*. Entsprechend beruht die sinnvolle Rede der Approximation von Kreisen auf der Vorstellung von perfekten Kreisen, die man der Wahrnehmung entnehmen kann.<sup>76</sup> Ein in der Genauigkeit bis unter die Sehschärfe arbeitende Drucker z. B. produziert relativ zur Wahrnehmung perfekte Kreisscheiben. Würde man nun aber den Einwand daraufhin abwandeln, dass letztlich alles in der Welt vage und unbestimmt wäre, dann würde es schon keinen Sinn mehr machen von Kreisen und Unkreisen in Bezug auf Dinge in der Welt zu sprechen, keine materiellen Kreise könnten von den mathematischen unterschieden werden und das Kriterium wäre unbrauchbar.

Dieses Hauptargument wird innerhalb der antiken  $\mathbb{R}^n$ M durch die euklidische Einteilung geometrischer Objekte außer Kraft gesetzt.<sup>77</sup> RUND und GERADE sind entgegengesetzte Prinzipien, aber der Hauptteil der Definition geometrischer Objekte liegt beim RUNDEN. In der euklidischen Geometrie gibt es keine Figur, die als einzelne den Gegensatz zum Kreis bilden würde. Es gibt viele reguläre Vielecke – und diese sind noch die RUNDESTEN der GERADEN Figuren. Die der einzigen rein RUNDEN Figur Kreis entgegengesetzten GERADEN Figuren scheinen nichts gemeinsam zu haben, was sie vom Kreis unterscheidet und einen eigenen geometrischen Gegenstandstyp konstituieren würde. Da EUKLID aber sowieso weitgehend darauf aus zu sein scheint, nur (bis auf die Grösse) eindeutige Definitionen von geometrischen Figuren zu benutzen, liegt für EUKLID ein Begriff wie der Unkreis, unter den alles beliebige bis auf Kreise fällt, außerhalb des Bereichs möglicher geometrischer Begriffe. Somit ist ein sichtbarer unexakter Kreis nicht in Gefahr, tatsächlich etwas anderes ganz exakt zu sein.

Aber es gibt überzeugendere Argumente gegen einige Arten des Kriteriums der Exaktheit. Erstens ist es, auch wenn es für geometrische Objekte gültig sein sollte, offenbar für Zahlen falsch, weil z. B. *fünf* Bücher immer *genau* fünf Bücher sind und *nicht annähernd* fünf Bücher.<sup>78</sup> Zweitens scheint PLATON andere Kriterien besessen zu haben, wie, dass in Gegenständen der Welt Ideen vereint sein können, die gedanklich immer getrennt auftreten müssen, weil sie sich begrifflich ausschliessen.<sup>79</sup> Drittens müsste jemand, der dieses Kriterium auch nur in Hinsicht auf geometrische Objekte für notwendig und hinreichend ansähe, bestreiten, dass es relativ exakte Kreise in der Welt gäbe, an denen zumindest wir mit bloßem Auge keinen Unterschied feststellen könnten, sondern höchstens mit einem Mikroskop. Denn wenn das Kriterium notwendig und hinreichend in jenem Teilbereich ist, dann ist es dort das einzige Kriterium, anhand dem man den materiellen vom mathematischen Bereich unterscheiden kann. Jene sichtbaren perfekten Kreise wären aber dann nicht ohne Mikroskop von mathematischen zu unterscheiden. Dies ist aber nicht der Fall.

### 3.5.3 Siebter Brief 343a nach Parmenides 137de

In Anknüpfung an die erste Hypothese des Dialogs *Parmenides* ergibt sich allerdings eine andere Deutung. Der zentrale Ausdruck «denn er rührt überall an das Gerade» verweist mittels ἐφάπτεται (berühren, ἐφάπτειν) auf die im Parmenides direkt nach RUND und GERADE folgende Begriffsbildung. Dort wird ‚in etwas sein‘ verstanden als von etwas rings umgeben werden und an vielen Stellen (den Enden)

76 Die Diskussion wird difiziler, wenn man zunächst annimmt, dass im konkreten Einzelfall auch ein genauerer Kreis da sein könnte, für den wiederum ein genauerer vorgestellt werden kann, und entsprechend weiter. Auch wenn aus dieser Annahme alleine nicht folgt, dass ein *perfekter* Kreis möglich ist in der sichtbaren Welt, so legt diese es doch nahe. Plausibler wird es noch, wenn man die praktischen und theoretischen Grenzen einer steten Verfeinerung berücksichtigt, wie es sie z. B. durch die Wahrnehmung oder physikalische Hinweise auf eine Quantelung der Materie geben könnte (wie sie die moderne Physik für möglich hält: «In other words, to our best knowledge about the natural world, it is quite likely that space is *not* infinitely divisible.» (Rovelli 2011, S. 168). Die Welt könnte nach heutiger Erkenntnis physikalisch gequantelt sein in ungefähr  $10^{100}$  Teile pro Kubikzentimeter; siehe Rovelli 2011, S. 169.).

77 Siehe dazu oben Abschnitt 3.4 und Abschnitt 3.2.2.2.

78 Vgl. Wedberg 1955, S. 68f..

79 Vgl. Pritchard 1995, S. 132ff..



vielfach berührt ( $\alpha\pi\tau\epsilon\iota\nu$ ) werden (*Parm 138a*). Während mit RUND und GERADE die Gestalt spezifiziert wurde, wird hier der Ort erklärt. Der Begriffsentwicklung der ersten Hypothese nach ist damit aber die Gestalt für sich translokal. Die Begriffe RUND und GERADE können sich nicht berühren, weil sie nirgendwo sind. Ihre begriffliche Struktur ist so eingeschränkt, dass sie für sich genommen keinen Ort haben können – und damit aber auch nichts anderes berühren. Denn erst mit dem ‚in etwas sein‘ wird in der Begriffsentwicklung der ersten Hypothese ‚das Andere‘ begrifflich eingeführt. Der Kreis als das ‚Runde‘ kann demnach aus ganz spezifischen Gründen das Gerade erst da berühren, wo er nicht mehr rein für sich ist, wie er in der fünften, höchsten Erkenntnisform erkannt wird. In der Geometrie selbst berührt das ‚Gerade‘ das ‚Runde‘: Es wird versucht, Vielecke bestimmter Art in den Kreis einzubeschreiben, d.h. so in den Kreis hinein zu konstruieren, dass die Eckpunkte auf der Kreislinie liegen, oder umgekehrt Kreise in Vielecke. Gerade im *Menon 86d-87a* fragt Sokrates danach, in welchem Fall man eine gegebene Fläche in Form eines Dreiecks einem gegebenen Kreis einbeschreiben kann.

Ist diese Berührung im Geometrischen noch äußerlich, durch den geometrischen Raum vermittelt, so ist sie im Sinnlich-materiellen eine begriffliche Verbindung. Ein handgeformter Kreis kann (potentiell) an allen Enden ungleichmäßig sein, ohne das er aufhören würde ein Kreis zu sein. Dieser Teller vor mir ist kreisförmig, obwohl er an vielen sichtbaren Stellen zugleich ‚eckig‘ ist – und je besser das Mikroskop an umso mehr Punkten, vielleicht allen. Ein eckiger Kreis wäre dagegen in der Geometrie noch ein Unding und würde zu einem Widerspruch führen. Im Lichte des neuen Interpretationsvorschlags von RUND und GERADE gelesen, wäre das Kreisbeispiel des *Siebten Briefs* demnach so zu verstehen: Im Sinnlich-materiellen ist alles Gerade, Kreisförmige oder Kugelhafte, d.h. alles, was unter den Kreisbegriff von *Parm 137de* fällt, möglicherweise an allen Punkten ungleichmäßig und berührt in diesem Sinne begrifflich sein Entgegengesetztes. Dem Sinnlich-materiellen Kreis ist es egal, ob und wie eckig er ist. Im Unterschied zum Exaktheitskriterium wird hier also nur die *Möglichkeit* von Abweichungen behauptet.

Wegen der Priorität des Kreisbegriffs über den ‚Unkreisbegriff‘ gemäß der Begriffsentwicklung der ersten Hypothese des Parmenides ist dieses Beispiel auch nicht umkehrbar, das Ungleichmäßige setzt das Gleichmäßige in einem begrifflichen Sinne voraus und beinhaltet es somit in einem abstrakten Sinn.

# Probleme mit den natürlichen Zahlen: Vollständige Induktion und Nichtstandard-Modelle

## 4.1 Einleitung

Die Frage, der hier nachgegangen werden soll, ist: *Was sind die Zahlen?* Mit Zahlen werden hier allein die sogenannten natürlichen Zahlen (enthalten in der Menge  $\mathbb{N}$ ) bezeichnet, ob von der Null, der Eins oder erst von der Zwei ab gezählt, was im folgenden von untergeordneter Bedeutung sein wird. Die Frage hier zielt weniger auf die ‚Substanz‘ oder Wesensart der Zahlen, so dass mögliche Antworten wären: Zahlen sind bestimmte Mengen, Ideen oder Eigenschaften von Begriffen oder von Kollektionen etc. Vielmehr soll eine (bessere) Kennzeichnung der Zahlen durch wesentliche Eigenschaften, Gesetze oder Bestimmungen der Zahlen erreicht werden, die letztlich direkt zur Erweiterung der mathematischen Erkenntnis dienen könnten. Insofern diese Untersuchung ihr Ziel in der Verwendbarkeit für (grundlagentheoretische) mathematische Probleme findet, wird sie als *metamathematisch* bezeichnet. Im weiteren Sinn der *Philosophie der Mathematik* ( $\mathbb{R}\mathbb{M}$ ) ist die Metamathematik einer ihrer Teile, im eingeschränkten Sinn ist die  $\mathbb{R}\mathbb{M}$  im Unterschied zur Metamathematik der Teil, der nicht (direkt) für die mathematische Praxis relevant ist. Einer in diesem Sinne beschränkten Fragestellung wird in den Abschnitten 7.2 und 7.3 nachgegangen, nämlich der Möglichkeit durch die moderne Mathematik und ihre Zahlvorstellung für die platonische Ideenschau vorbereitet zu werden. Der Frage hier wird im folgenden so nachgespürt, dass als erstes das Verständnis der Zahlen in der modernen mathematischen Grundlagenforschung dargestellt wird, um dann zu verfolgen, ob und wenn ja, inwiefern, Überlegungen aus PLATONS Schriften etwas zu den aktuellen Grundlagenproblemen mit den Zahlen beitragen können oder sich zumindest umgekehrt etwas von seinen Überlegungen zu Zahlen vor diesem Hintergrund erhellt.

Die eben getroffene Unterteilung der  $\mathbb{R}\mathbb{M}$  hinsichtlich ihrer Relevanz für mathematische Grundlagenfragen darf aber letztlich nur eine oberflächliche sein, wenn die etwas abgehobenen philosophischen Erkenntnisse wirklich tief sein sollen. Denn in diesem Fall müssten sie die mathematischen Grundlagenprobleme wenn nicht lösen, so doch aufzeigen, inwiefern diese Probleme nicht von dem, was Zahlen sind, abhängen. Insofern Schwierigkeiten in der Metamathematik wesenhaft mit den Zahlen zusammenhängen, müssten sie durch diesen Rekurs auf ihr Wesen, das – wie man behauptet – vom antiken (Neu-)Platonismus behandelt wird, besser verstehbar, erklärbar und lösbar sein.

Platons Theorie der Zahl, auf die wir uns im folgenden beschränken, ist so unklar, dass es fragwürdig ist überhaupt von einer ‚Theorie‘ zu sprechen, einiges an wissenschaftlichen Fortschritt und Klärung könnte diesbezüglich noch geleistet werden. Deswegen beschränke ich mich im folgenden auf zwei Aspekte einer platonischen Zahltheorie: Auf die Reihenfolge der arithmetischen Operationen in einer Grundlegung der Arithmetik und auf Platons Einbeziehung einer Vorform der allgemeinen Induktion über die natürlichen Zahlen.

Was die Relevanz PLATONS für die moderne Grundlagendiskussion angeht ist es zunächst schwer einzusehen, was bei (neuplatonisierenden) Aussagen wie «Zahlen sind die Bestimmungen der Einheit als Vielheit» oder ähnlichem zu denken ist, und auch praktisch scheint damit nicht viel zu holen. Man kann aber auch anderes beobachten: Man ist leicht geneigt, die Unvollständigkeit der Peano-Arithmetik (erster Stufe) mit der Unendlichkeit der definierten

Zahlenfolge in Verbindung zu bringen (vgl. S. 113, und siehe die nächsten Abschnitte für die technischen Ausdrücke). Insofern ist es überraschend, dass die entsprechenden Theorien der natürlichen Zahlen, die jeweils nur mit + oder nur mit · arbeiten, vollständig sind, obwohl die Zahlen nicht weniger wurden.

Das Verhältnis von Addition und Multiplikation scheint im Grunde klar zu sein. Pädagogisch wie definatorisch baut die Multiplikation auf der Addition auf, als  $x \cdot y = x + \dots + x$ ,  $y$ -mal, lernt und versteht man das, was mit dem Malzeichen ausgedrückt werden soll. Tatsächlich ist das Verhältnis von + und · komplizierter, als es scheint. Für die ‚Definition‘  $x \cdot y = x + \dots + x$ ,  $y$ -mal, muss auf die Anzahl der addierten  $x$  reflektiert werden. Dieses Vorgehen wird in einer Prädikatenlogik erster Stufe rekursiv formalisiert als  $x \cdot 0 = 0$  und  $x \cdot y' = (x \cdot y) + x$  (wobei ' das Zeichen für die Nachfolgerfunktion, also für +1, ist). Eine rekursive Definition ist aber keine Definition im Sinne einer Äquivalenz der Form

$$x \cdot y = z \quad :\Leftrightarrow \quad \dots \quad .$$

Denn diese kann als reine Abkürzung aufgefasst werden, während für jene die Existenz und Eindeutigkeit der so bestimmten Multiplikations-Funktion erst bewiesen werden muss. In der Tat kann in dieser Weise · nicht mittels + (verbunden mit ' und <) definiert werden. Umgekehrt gilt aber

$$x + y = z \quad \Leftrightarrow \quad (x' \cdot z'')' \cdot (y' \cdot z'')' = ((x' \cdot y')' \cdot (z'' \cdot z''))';$$

( $x', y', z''$  werden statt  $x, y, z$  benutzt weil die Äquivalenz für  $z=0$  nicht gilt). + ist in diesem Sinne sehr wohl mit · und ' definierbar.

Die wahren Sätze der arithmetischen Sprache  $\mathcal{L} = (0, ', <, +, \cdot)$  des Standard-Modells  $\mathcal{N} = \{\mathbb{N}, ', <, +, \cdot\}$  sind nicht aufzählbar, sehr wohl aber die ohne Multiplikation · oder Addition + (und ', <; ' ist mit < definierbar, und ' und · definieren + wie gesehen).<sup>1</sup>

Vor diesem Hintergrund scheint PLATONS Bestimmung der Zahlen und ihrer Operationen interessanter als zuvor, denn er geht jeweils getrennt auf Potenzierung, Multiplikation und Addition ein, fast als wären es unterschiedliche Zahltypen, die hierbei hergeleitet werden. Ob sich auf dieser Beobachtung aufbauen lässt, wird das Folgende zeigen.

## 4.2 Probleme mit den natürlichen Zahlen

### 4.2.1 Die Axiomatisierung der natürlichen Zahlen

Die mathematisch relevanten Eigenschaften der natürlichen Zahlen versucht man in der gegenwärtigen Mathematik zunächst durch drei Axiome zu fassen, die eine Art linearer Struktur kennzeichnen, indem sie die Progression der natürlichen Zahlen beschreiben (s. Abb. 1).

- (1) Jedes  $n$  hat genau einen Nachfolger  $n'$  (oder  $n+1$ ) und keine zwei verschiedenen  $n, m$  haben den gleichen Nachfolger.
- (2) Es gibt genau ein  $n$ , das kein Nachfolger ist (die 0).
- (3) Für jede Eigenschaft  $E$  gilt, wenn  $E$  auf 0 zutrifft, und für jedes  $n$ , das  $E$  besitzt, folgt, dass auch  $n'$   $E$  hat, dann besitzen alle  $n$  die Eigenschaft  $E$ .

(1) legt fest, dass es keine kleinen Zirkel und mehrfache Verzweigungen gibt (s. Abb. 2), und (2) verhindert auch einen großen Zirkel. Die Axiome (1) und (2) gelten auch für kompliziertere Strukturen (s. Abb. 3)<sup>2</sup>, bei denen zu den natürlichen Zahlen noch weitere Elemente hinzu kommen, wie z. B. eine Kopie der ganzen Zahlen  $\mathbb{Z}$ .

1 Siehe Boolos et al. 2007, S. 295. In einer Prädikatenlogik zweiter Stufe sind Plus und Mal definierbar (s. Shapiro 1991, S. 120). Dafür reicht es aus die Quadrierung zu fassen zu kriegen, denn dann lässt sich  $z = x \cdot y$  definieren durch  $z + z = (x + y)^2 - x^2 - y^2$ . Eine Aussage, die nur und genau auf die Quadratzahlen zutrifft, bestimmt man über die Bedingung, dass, wenn  $x < y$  zwei aufeinander folgende Quadratzahlen sind, die nächste  $2x - y + 2$  ist; zusammen mit dem Komprehensionsaxiom gilt das für  $\phi(u) \equiv \wedge P(P(0) \wedge P(1) \wedge \neg \forall v (P(v) \wedge x < v < y) \rightarrow P(z)) \wedge \wedge xyz (P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge \neg \forall v (P(v) \wedge (x < v < y \vee y < v < z)) \rightarrow Z = 2y - x + 2) \rightarrow P(u)$ . Dann kann man  $u = x^2$  definieren mittels  $\phi(u) \wedge \phi(u + 2x + 1) \wedge \neg \forall v (\phi(v) \wedge u < v < u + 2x + 1)$ .

2 Die drei kleinen Punkte markieren einen unendlichen Fortgang.

Mit Hilfe des Axioms (3) der vollständigen Induktion kann aber mathematisch gezeigt werden, dass alle Strukturen, die (1)–(3) erfüllen, isomorph („strukturgleich“) sind, Abbildung 3 also (1)–(3) nicht erfüllt.

Um die Addition und Multiplikation mittels der Nachfolgerfunktion festzulegen benutzt man folgende weitere Axiome

(4)  $n + 0 = n$

(5)  $n \cdot 0 = 0$

(6)  $n + m' = (n + m)'$

(7)  $n \cdot m' = n \cdot m + n$

Die Axiome (1)–(7) zusammen ergeben die (i.a. ausreichenden) Gesetzmäßigkeiten der informellen Arithmetik. Um sie zu diskutieren werden sie – wie heute üblich – in ihrer formalisierten Version betrachtet, wobei eine Kenntnis der formalen Logik vorausgesetzt wird, an die jedoch zu Beginn des nächsten Abschnitts erinnert wird.

Der Prozess der Formalisierung und die Erkenntnisse über das in einer modernen formalen Logik formalisierte Axiomensystem werden dabei vor allem insofern betrachtet als sie Reflexionen über die informellen Aussagen (1)–(7) und unseren Gebrauch der Zahlen sind. Wie sind sie gemeint? Sagen sie das aus, was gemeint ist? Welche impliziten Annahmen werden mit ihnen gemacht?<sup>3</sup>

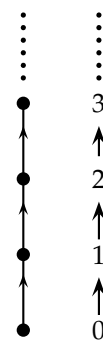


Abb. 1

### 4.2.2 Aus Sicht der formalen Logik: Die Peano-Arithmetik

#### 4.2.2.1 Der Aufbau der formalen Logik erster Stufe

Die (mathematische) formale Logik gliedert sich in Syntax und Semantik (im folgenden für eine Prädikatenlogik erster Stufe  $\mathbf{PL}^1$ ).<sup>4</sup> In einer formalen Sprache  $\mathcal{L}(\bar{a}_1, \dots; \bar{P}_1^{(1)}, \dots; \bar{f}_1^{(1)}, \dots)$  werden aus den Konstanten  $(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots)$ , Prädikats-  $(\bar{P}_1^{(1)}, \bar{P}_2^{(1)}, \dots; \bar{P}_1^{(2)}, \bar{P}_2^{(2)}, \dots; \dots)$  und Funktionssymbole  $(\bar{f}_1^{(1)}, \bar{f}_2^{(1)}, \dots; \bar{f}_1^{(2)}, \bar{f}_2^{(2)}, \dots; \dots)$  als den extra angegebenen Symbolen, zusammen mit den Variablen  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots)$ , Quantoren ( $\wedge$  [zu lesen als ‚für alle‘],  $\vee$  [zu lesen als ‚es existiert‘]), logischen Verknüpfungen ( $\neg$  [nicht],  $\wedge$  [und],  $\vee$  [oder],  $\rightarrow$  [wenn dann]) und Hilfszeichen („(“, „)“) auf festgelegte Weise Terme und Formeln zusammengesetzt. Z. B. wären  $\bar{x}_1, \bar{a}_1, f_1^{(1)}(\bar{a}_1), f_{13}^{(1)}(f_1^{(3)}(\bar{x}_1, f_2^{(1)}(\bar{a}_3, \bar{x}_2))$  Terme und  $\wedge \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 (\neg \bar{P}_1^{(2)}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \wedge \neg \bar{P}_1^{(2)}(\bar{x}_2, \bar{x}_3) \wedge \neg \bar{P}_1^{(2)}(\bar{x}_1, \bar{x}_3))$  eine (geschlossene) Formel mit der zweistelligen Relation  $\bar{P}_1^{(2)}$ .<sup>5</sup> Diese wohlgeformten Zeichenfolgen können durch Wiederholung von elementaren Regeln umgeformt und eingeführt werden; eine abgestimmte Regelsammlung heißt *Kalkül*.<sup>6</sup> Z. B. wird die Regel der  $\wedge$ -Einführung aus dem Kalkül der natürlichen Deduktion geschrieben als Umformung der zwei getrennt gegebenen Formeln  $\phi$  und  $\psi$  zu  $\phi \wedge \psi$ :  $\frac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi}$ . Um dabei in aller Allgemeinheit über Formeln zu schreiben – denn die Regeln gelten für viele Formeln, wenn nicht für alle – werden Metavariablen „ $\phi$ “, „ $\psi$ “ für Formeln, „ $x$ “, „ $y$ “, „ $z$ “ für Variablen, „ $a$ “, „ $b$ “ für Konstanten, „ $P_1$ “ für Prädikatkonstanten etc. verwendet. Lässt sich eine Formel  $\phi$  aus Formeln einer Menge  $T$  von Formeln durch endliche Regelanwendung (hinsichtlich eines bestimmten Kalküls  $K$ ) ableiten, schreibt man üblicherweise  $T \vdash_K \phi$ .

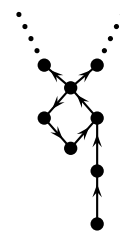


Abb. 2

Die Formeln einer formalen Sprache werden in der Semantik interpretiert. Für die Variablen wird ein Gegenstandsbereich gewählt, den Konstanten und Termen werden Objekte daraus zugeordnet, wie auch den Prädikats- und Funktionssymbolen Prädikate und Funktionen auf dem Gegenstandsbereich; im ganzen eine Struktur  $\mathcal{M} = \langle M, f_1^i, \dots, P_1^i, \dots, a_1, \dots \rangle$  mit  $M$  eine Menge von Objekten,  $a_1, \dots$  Objekte aus  $M$ ,  $P_1^i, \dots$  Mengen von  $i$ -Tupeln mit Elementen aus  $M$  und  $f_1^i, \dots$   $i$ -stellige Funktionen von  $\times_{n=1}^i M$  nach  $M$ . Ob Formeln  $\phi$  in einem Modell  $\mathcal{M}$  (eine bestimmte Interpretation bezüglich einer

3 In diesem Kapitel beschränken wir uns auf die natürlichen Zahlen axiomatisiert in einer formalen Logik. Die impliziten Annahmen und dadurch entstehenden Reflexionsdefizite der modernen formalen Logik, die selbst eine mathematische Theorie ist, werden in Kapitel 5 thematisiert.

4 Dazu, dass es nicht *die* formale Logik gibt, siehe Kapitel 5.

5 Herkömmlich würde man diese Formel so schreiben:  $\forall xyz (\neg x = y \wedge \neg y = z \wedge \neg x = z)$ .

6 Siehe S. 154 für die Regeln eines besonderen Kalküls

bestimmten Struktur) erfüllt werden, d.h. gelten:  $\mathcal{M} \models \phi$ , ergibt sich durch Interpretation der logischen Verknüpfungen. So ist z. B.  $\phi \wedge \psi$  genau dann in  $\mathcal{M}$  wahr, wenn  $\phi$  und  $\psi$  in  $\mathcal{M}$  wahr sind.  $T \models \phi'$  steht abkürzend für: ‚In allen Modellen  $\mathcal{M}$  mit  $\mathcal{M} \models T$  gilt  $\mathcal{M} \models \phi'$ .‘ Ein Kalkül ist *vollständig*, wenn gilt: Aus  $T \models \phi$  folgt  $T \vdash \phi$ .

Eine Menge von Sätzen ist *aufzählbar*, wenn man ein Verfahren angeben kann, das genau die Sätze der Menge (möglicherweise mit Wiederholung und ungeordnet) ausgibt. Eine Menge von Sätzen ist *entscheidbar*, wenn es ein Verfahren gibt, dass für jeden beliebigen Satz nach endlich vielen (Verfahrens-) Schritten ausgibt, ob er zu der Menge gehört oder nicht. Jedes Entscheidungsverfahren lässt sich leicht zu einem Aufzählungsverfahren ergänzen, indem man alle Sätze der Sprache nacheinander dem Entscheidungsverfahren unterwirft. Aber nicht jede aufzählbare Menge von Sätzen ist entscheidbar.

Besonders interessant ist nun das Verhältnis zwischen den Kalkülen und den Modellen. In einer sogenannten Prädikatenlogik erster Stufe **PL<sup>1</sup>**, die wir vorerst der Diskussion zugrunde legen, gilt für die besten Kalküle  $K$ :  $T \vdash_{\bar{K}} \phi \Leftrightarrow T \models \phi$ , man kann genau das im Kalkül aus den Sätzen  $T$  ‚mechanisch‘, indem man die Ableitungsregeln des Kalküls anwendet, ableiten, was in allen Modellen, die  $T$  erfüllen, gilt (und man kann die Indizierung durch  $K$  in  $\bar{K}$  weglassen). Wenn  $T$  leer ist, gilt entsprechend  $\vdash \phi \Leftrightarrow \models \phi$ , d.h. alle Tautologien von **PL<sup>1</sup>** sind ohne Voraussetzung ableitbar und damit aufzählbar. Tautologien sind dabei die Sätze, die in allen Modellen erfüllt sind, Kontradiktionen, die in keinem Modell erfüllt werden, und die restlichen Sätze werden in mindestens einem Modell erfüllt und in mindestens einem nicht. Die leere (Axiomen-) Menge  $T_{\emptyset}$  ist demnach insofern unvollständig (obwohl der Kalkül vollständig ist), da für manche Sätze  $\phi$  sich weder  $\phi$  noch  $\neg\phi$  aus  $T_{\emptyset}$  ableiten lassen ( $T_{\emptyset} \not\vdash \phi$  und  $T_{\emptyset} \not\vdash \neg\phi$ ).  $T_{\emptyset}$  entscheidet oder bestimmt nicht über den Wahrheitswert einiger  $\phi$ . Das ist möglich, weil  $T_{\emptyset}$  in diesem Fall kein einzelnes Modell eindeutig beschreibt (und entsprechend  $T_{\emptyset} \not\models \phi$  und  $T_{\emptyset} \not\models \neg\phi$  gelten kann, weil es Modelle  $\mathcal{M}_1$  und  $\mathcal{M}_2$  gibt mit  $\mathcal{M}_1 \models \neg\phi$  und  $\mathcal{M}_2 \models \phi$ ).

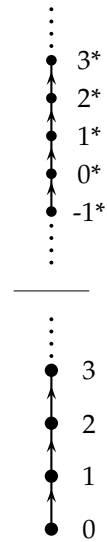


Abb. 3

#### 4.2.2.2 Die Arithmetik in einer formalen Logik erster Stufe

Die informellen Axiome sind bis auf eines direkt in die Sprache von **PL<sup>1</sup>** übertragbar. Die Schwierigkeit liegt in dem Induktionsaxiom (3), denn es ist nicht ganz klar, wie man „für jede Eigenschaft“ genau verstehen soll. Was ist eine Eigenschaft? Formalisiert man (3) in einer Prädikatenlogik erster Stufe (**PL<sup>1</sup>**) ohne besondere Hilfsmittel so erhält man ein Axiomenschema (d.h. abzählbar unendlich viele Axiome)

$$\mathbf{Ind} \quad \bigwedge x_1, \dots, x_n (\phi(0) \wedge \bigwedge x (\phi(x) \rightarrow \phi(x')) \rightarrow \bigwedge x \phi(x)) \quad \text{für alle } \phi(x, x_1, \dots, x_n) \text{ aus } \mathcal{L},$$

das deutlich schwächer ist als andere Formalisierungen von (3). Denn es gibt jetzt Modelle für die in **PL<sup>1</sup>** formalisierten Axiome (1)–(3) bzw. (1)–(7), die von außen wie Abbildung 3 aussehen, von innen aber wie Abbildung 1.

Genauer: Hat man eine auf die kleiner-als-Beziehung reduzierte Sprache, in der man die diskrete lineare Ordnung der natürlichen Zahlen formalisiert, so erhält man von dieser Theorie ein Nichtstandard-Modell, indem man ‚oberhalb‘ von  $\mathbb{N}$  eine Kopie von  $\mathbb{Z}$  ‚anbaut‘. Für ein Nichtstandard-Modelle von **PA** legt man die  $\mathbb{Z}$ -Kopien dicht.<sup>7</sup>

In diesen Modellen gilt zwar **Ind**, aber es ist zu schwach, um zwischen den unteren Standardelementen und den oberen Nichtstandardelementen zu unterscheiden. Für die Axiome (1)–(3) allein ist dieser Umstand noch nicht so erheblich, da auch in den Nichtstandard-Modellen die gleichen Sätze gelten wie im intendierten Modell, und die Theorie somit vollständig ist, d.h. die Menge aller im intendierten Modell wahren Sätze der Sprache  $\mathcal{L}'$  ist aufzählbar. Für eine formalisierte Peano-Arithmetik **PA** gilt dies nicht mehr, so dass es in **PL<sup>1</sup>** unabhängige (d.h. weder beweisbar noch widerlegbare) Sätze gibt.

7 Siehe Kaye 1991, S. 73ff..

Gleiches geschieht, wenn man die Sprache zu (1)–(3) um Prädikatskonstanten der Sprache ergänzt, z. B. zu  $\mathcal{L}(\prime, +, \cdot)$ .<sup>8</sup>

Das Problem von **PA** ist, dass es kein Modell eindeutig beschreibt, und **PA** demnach unvollständig ist, weil es die Menge der Modelle, die es erfüllen, nicht so stark einschränkt, dass in allen seinen Modellen die gleichen Sätze gelten. Es gibt also in der Sprache von **PA** formulierbare Sätze, deren Wahrheitswert nicht durch **PA** festgelegt wird.

Man ist deshalb mit Recht misstrauisch, ob sich unter den offenen Vermutungen nicht ein Satz befände, der in **PA** weder zu beweisen noch zu widerlegen ist; die Goldbachsche Vermutung, dass jede gerade Zahl  $\geq 4$  die Summe zweier Primzahlen ist, ist vielleicht so ein Satz.<sup>9</sup> Die bisherigen Beispiele sind allerdings weniger besorgniserregend. Zunächst ist der sogenannte Gödelsatz von **PL**<sup>1</sup>, der seine eigene Unbeweisbarkeit behauptet, eine zahlentheoretische Behauptung, die aber durch eine starke Formalisierung von (3) durch **PA**<sup>2</sup> in einer zweitstufigen Logik **PL**<sup>2</sup> beweisbar ist (und der Gödelsatz von **PA**<sup>2</sup> in einer noch stärkeren Theorie und Logik usw.). Ähnlich verhält es sich mit den in **PA** kodierbaren Konsistenzaussagen über **PA**. Zwei weitere einschlägige unabhängige Sätze, die aber einen primär mathematischen Inhalt haben, sind das Goodstein-Theorem und ein Satz von Paris-Harrington.

Das Paris-Harrington-Theorem<sup>10</sup> ist eine Abschwächung des Partitionstheorems für (abzählbar) unendliche Mengen von Ramsey und eine wesentliche Verstärkung des endlichen Ramsey-Theorems. Wenn für jede Funktion  $f : [X]^u \rightarrow a$  eine Menge  $Y \subset X$  (o.B.d.A.  $X \in \omega + 1$ ,  $|X| = \beta \leq \omega$ ) mit  $|Y| = \gamma$  existiert, auf der  $f$  konstant ist, dann wird das abgekürzt mit  $(\beta) \rightarrow (\gamma)_a^u$ .  $Y$  heißt *homogen* für  $f$ . Das unendliche Ramsey-Theorem behauptet nun

$$\bigwedge u, a \quad (\omega) \rightarrow (\omega)_a^u.$$

Für weitere natürliche Zahlen  $n, m, r$  neben  $u, a$  sei  $[n, m]$  das dazu gehörige geschlossene Intervall in den natürlichen Zahlen und  $[n, m] \rightarrow (r)_a^u$  die Abkürzung für  $([n, m]) \rightarrow (r)_a^u$ . Dann besagt das endliche Ramsey-Theorem

$$\bigwedge n, r, u, a \quad \bigvee m \quad [n, m] \rightarrow (r)_a^u.$$

Paris und Harrington verstärkten das durch die Eigenschaft, dass es ein  $m$  gebe, für das wiederum eine homogene Menge  $Y$  existiere mit der Eigenschaft  $\min(Y) \leq |Y|$ :

$$\bigwedge n, r, u, a \quad \bigvee m \quad [n, m] \xrightarrow{*} (r)_a^u.$$

Dies werde durch  $\bigwedge u, a \text{ PH}(u, a)$  abgekürzt und ist in  $\mathcal{L}_{Ar}$  ausdrückbar, im Gegensatz zum unendlichen Ramsey-Theorem, das über unendliche Teilmengen der natürlichen Zahlen quantifiziert. Paris-Harrington folgt aus dem unendlichen Ramsey-Theorem mittels des Lemmas von König, aus dem wiederum folgt das unendliche Ramsey-Theorem. Dieses gilt auch in **PA**, es gilt sogar

$$\mathbb{I}\Sigma_1 \vdash \bigwedge n, r, u, a \quad \bigvee m \quad [n, m] \rightarrow (r)_a^u,$$

wobei  $\mathbb{I}\Sigma_1$  die Axiome der Robinson-Arithmetik und das Induktionsschema für  $\Sigma_1$ -Formeln enthält und demnach ein Teil von **PA** ist. Entscheidend ist jetzt, dass  $\bigwedge u, a \text{ PH}(u, a)$  nicht in **PA** ableitbar ist. Denn in  $\mathbb{I}\Sigma_1$  kann bewiesen werden, dass  $\bigwedge a \text{ PH}(\overline{n+1}, a) \rightarrow \text{Con}(\mathbb{I}\Sigma_1^\neg)$ , mit Gödels zweitem Unvollständigkeitssatz folgt das Ergebnis. Genauer gestuft gilt:

$$\mathbb{I}\Sigma_n \vdash \bigwedge n, r, a \quad \bigvee m \quad [n, m] \xrightarrow{*} (r)_a^{\bar{u}}, \quad (\text{bzw. } \bigwedge a \text{ PH}(\bar{u}, a)).$$

8 Man beachte den Unterschied zwischen der Vollständigkeit eines Kalküls (für alle  $\phi$  und  $T$  gilt:  $T \models \phi \Rightarrow T \vdash \phi$ ) und der Vollständigkeit einer Theorie (das ist eine Menge von formalen Aussagen; die Theorie bezüglich einer Axiomenmenge  $A$  ist die Menge  $T := \{\phi \mid A \vdash \phi\}$ ), das ist wenn  $\phi \in T$  oder  $\phi \notin T$  für alle  $\phi$ .

9 Der im übrigen wahr wäre, wenn er unabhängig von **PA** ist. Denn wäre er unabhängig von **PA**, gäbe es kein Gegenbeispiel in **PA**. Ein Gegenbeispiel hätte aber einen äquivalenten  $\Sigma_1$ -Satz, und da **PA**  $\Sigma_1$ -vollständig ist, sind alle von **PA** unabhängigen  $\Pi_1$ -Sätze – wie eben vielleicht auch die Goldbachsche Vermutung – in keiner Erweiterung von **PA** falsch. Etwas weniger formal stellt Bernays 1976, S. 130f., den Gedankengang dafür dar, dass eine endliche Folge  $F$  (wie z. B. „777“, das einschlägige Beispiel Wittgensteins) in der Entwicklung der Nachkommastellen in der Dezimaldarstellung der Zahl  $\pi$  vorkommt: «Gesetzt, wir behaupten mit Bestimmtheit, daß die Frage des Vorkommens der Zahlenfolge  $F$  unentscheidbar ist, so schließt das die Behauptung ein, daß die Figur  $F$  in der Entwicklung von  $\pi$  niemals auftreten kann; denn käme sie vor und wäre  $k$  die Stellennummer, welche die letzte Ziffer von  $F$  beim erstmaligen Auftreten in der Dezimalbruchentwicklung von  $\pi$  hat, so wäre ja die Frage, ob bis zur  $k + 1$ sten Stelle die Figur  $F$  auftritt, eine entscheidbare Frage, sie würde sich dann positiv beantworten, und damit wäre zugleich auch die ausgangliche Frage entscheidbar.»

10 Vgl. dazu Hájek und Pudlák 1993, S. 111ff.

Und für jedes einzelne  $a$  gilt sogar

$$\text{I}\Sigma_n \vdash PH(\overline{u+1}, \bar{a}).$$

Goodsteins Theorem<sup>11</sup> ist dagegen etwas anschaulicher. Die Zahl 21 als Summe reiner Zweierpotenzen geschrieben ist

$$(21 = 2^3 + 2^2 + 2^1 =) \quad 2^{(2^{2^0} + 2^0)} + 2^{2^0} + 2^0.$$

Uns interessiert nun die Änderung, wenn in dieser Darstellung die Basis 2 durch 3 ersetzt und dann 1 abgezogen wird:

$$3^{(3^{3^0} + 3^0)} + 3^{3^{3^0}} + 3^{3^0} - 1 = 3^{(3^{3^0} + 3^0)} + 3^{3^{3^0}} + 3^0 + 3^0 = 110.$$

Allgemein sei  $B_n^m$  die Funktion, die in der reinen  $n$ -Potenzdarstellung von  $k$  die Basis auf  $m$  erhöht und 1 abzieht, solange  $k > 0$  gilt. Damit lässt sich jetzt die Goodstein-Folge definieren, deren Folgenglieder durch den Startwert  $l_1$  festgelegt sind:

$$l_{n+1} := B_{n+1}^{n+2}(l_n).$$

Goodstein zeigte nun

**Theorem** Bei jeder Goodstein-Folge unterscheiden sich nur endlich viele Folgenglieder von 0.

Der Beweis davon ist in der Ordinalzahlarithmetik einfach, denn man kann dort die zu  $l$  parallele  $\omega$ -Folge

$$\epsilon_{n+1}^l := B_{n+1}^\omega(l_n)$$

bilden. Damit gilt  $l_n \leq \epsilon_k^l$ . Die  $\omega$ -Folge ist aber echt absteigend für  $\epsilon_n^l > 0$ , und da keine unendliche echt absteigende Folge von Ordinalzahlen existiert, terminiert die Folge in 0.

Goodsteins Behauptung ist in **PA** als ein  $\Pi_2$ -Satz  $\bigwedge n \bigvee m S(n, m, 0)$  ausdrückbar, aber es gilt das Kirby-Paris

**Theorem** Wenn **PA** konsistent ist, ist Goodsteins Theorem unentscheidbar in **PA**.

Denn vorausgesetzt es ist beweisbar in **PA**, dann kann man in **PA** die transfinite Induktion bis  $\epsilon_0$  ( $\epsilon_0 := \omega^{\omega^{\omega^{\dots}}}$ ) beweisen, indem man die Ordinalzahlen kleiner  $\epsilon_0$  in den natürlichen Zahlen kodiert. Damit ist aber (nach Gentzen) die Konsistenz von **PA** beweisbar, so dass nach Gödels zweitem Unvollständigkeitstheorem die Inkonsistenz von **PA** entgegen der Voraussetzung folgt. Also ist Goodsteins Theorem in **PA** nicht beweisbar. (Das Gegenteil ist auch nicht beweisbar in **PA**, ansonsten wäre die Ordinalzahlarithmetik inkonsistent.)<sup>12</sup>

In diesen und anderen Fällen scheinen es aber dezidiert Erweiterungen zu sein, die nicht aus einer Intuition zu den natürlichen Zahlen entspringen. Die Frage ist sowieso, welche *grundsätzlichen Bestimmungen* der natürlichen Zahlen man zu **PA** noch hinzufügen sollte. Weil dazu keine Vorstellungen existieren, und die Beispiele keinen Beitrag dazu leisten, scheint Isaacsons Vermutung erstmal plausibel:

**Isaacsons Vermutung** Wenn man einen rational überzeugenden Beweis für einen beliebigen, von **PA** unabhängigen Satz in  $\mathcal{L}_A [ := \mathcal{L}(+, \cdot, ', 0) ]$  geben will, wird man auf Ideen zurückgreifen müssen, die über die hinaus gehen, die für das Verständnis einer einfachen Arithmetik konstitutiv sind.<sup>13</sup>

Nun könnte man vielleicht damit zufrieden sein, endlich viele der unabhängigen Sätze zu **PA** hinzuzufügen, wenn man dafür die Vollständigkeit bekäme. Nach Gödels erstem Unvollständigkeitstheorem (**GeUt**) ist **PA** aber *grundsätzlich* unvollständig (solange konsistent, entscheidbar axiomatisiert). D. h. selbst unendlich viele (wenn entscheidbare) zusätzliche Axiome würden nicht auf eine vollständige Charakterisierung der natürlichen Zahlen zumindest hinzielen. Als Möglichkeit bliebe die Existenz eines nicht adäquat oder zumindest nicht in **PL**<sup>1</sup> adäquat formalisierbaren Prinzips, aus dem man je nach Bedarf die gewünschten zusätzlichen Axiome für **PA** informell gewinnen könnte.<sup>14</sup>

11 Vgl. Smith 2007, S. 201ff..

12 Harvey Friedman hat in vielen seiner Arbeiten nach mathematisch natürlichen Sätzen gesucht, die zwar in schwächeren Theorien formuliert, aber überraschenderweise nicht bewiesen werden können (vgl. Friedman 2012, insb. Introduction). Besonders interessant sind dabei Aussagen, die inhaltlich an das Paris-Harrington-Theorem anschließen, aber tatsächlich erst mit einem großen Kardinalzahlxiom bewiesen werden können (siehe Friedman 1998).

13 Zitiert aus Smith 2007, S. 205, meine Übersetzung.

14 «As far as incompleteness is concerned, its remote presence has little effect on current mathematics. Some of the techniques that originated in Gödel's early work (and in the work of his contemporaries) remain central in logic and occasionally in work

Was ist die Ursache der Unvollständigkeit von **PA**?

Naheliegender wäre die Antwort: die *Unendlichkeit* der Zahlenreihe. Die Unendlichkeit der Zahlen ist eine ihrer wesentlichen Eigenschaften, und ein endliches Modell ist in  $\mathbf{PL}^1$  auch ganz charakterisierbar. Es kann aber die Unendlichkeit nicht alleine sein, denn ‚spaltet‘ man **PA** (wie oben S. 108 erwähnt) in die Presburger Arithmetik ohne Multiplikation und in eine Arithmetik ohne Addition, so sind die zwei Mengen der wahren Sätze der jeweiligen intendierten Modelle entscheidbar und die Modelle unendlich.

*Stärke der Theorie?* Die *Stärke* einer Theorie ist offensichtlich von Bedeutung, da nach **GeUt** sich die Unvollständigkeit an die stärkere Theorie vererbt. Auf die Stärke der *Theorie* aber kommt es nicht alleine an, sondern es hängt auch viel von der verwendeten Sprache ab, die genügend Relations- bzw. Funktionszeichen zur Verfügung stellen muss. Die Sprache darf aber auch nicht mehr mit einbringen als von den Axiomen gefordert; das intendierte Modell der Presburger Arithmetik in  $\mathcal{L}(+, \cdot, ', <, 0)$  hätte eine intendierte  $\cdot$ -Funktion (welche?) und das Modell wäre ein anderes als in  $\mathcal{L}(+, ', <, 0)$ . Die Stärke kann sich auch in der Logik selbst befinden. Für die Quotationslogik<sup>15</sup> **LQ**, die über Anführungszeichen verfügt, kann **GeUt** direkt und ohne Gödelisierung bewiesen werden. Zu **LQ** gibt es deswegen keinen vollständigen Kalkül. Demnach bringt **PA** soviel Ausdrucksstärke mit sich, so dass sie die Struktur der formalen Logik  $\mathbf{PL}^1$  in sich abbilden kann und sich somit **GeUt** beweisen lässt, dass sich explizit nicht beweisbare Sätze angegeben werden können.

Bis hier wurde die Existenz von Nichtstandard-Modellen und die deduktive Unvollständigkeit von **PA** im Dialog diskutiert. Ein Ergebnis legt es allerdings nahe, die beiden Phänomene zu trennen: Selbst die Menge aller im Standard-Modell von **PA** wahren Sätze von  $\mathbf{PL}^1$  charakterisiert das Standard-Modell nicht eindeutig, d.h. es gibt Nichtstandard-Modelle, in denen alle wahren  $\mathbf{PL}^1$  Sätze des Standard-Modells erfüllt werden. Dies ist aber ein starkes Indiz dafür, dass die Sprache von  $\mathbf{PL}^1$  nicht ausdrucksstark genug ist, um überhaupt alle Wahrheiten über die natürlichen Zahlen und ihre wichtigsten Operationen auszudrücken und damit das Standard-Modell zu kennzeichnen. Die Vollständigkeit der Presburger Arithmetik kann damit auch nicht mehr überdecken, dass auch für ihre Axiome Nichtstandard-Modelle existieren, auch wenn das keinen Niederschlag in den ableitbaren Aussagen findet. Das allgemeinere Problem ist demnach, ob und wie man das Standard-Modell charakterisieren kann.

Halten wir kurz inne und blicken zurück. Als Mathematiker beschreibt und arbeitet man problemlos sowohl mit der (Standard-) Reihe der natürlichen Zahlen, wie auch mit Erweiterungen derselben, die man aber eindeutig von ihnen unterscheiden kann. Geht man dann aber zu einer in der Prädikatenlogik erster Stufe formalisierten Arithmetik, wie **PA**, über, so scheinen die zuvor begriffenen Unterschiede zu verwischen und das intendierte Standard-Modell nicht eindeutig charakterisierbar. Was ist geschehen? Hat man zunächst mehr gemeint als man denken konnte oder gedacht hat? Hat man mehr gedacht als man sagen kann? Oder genügt  $\mathbf{PL}^1$  einfach nicht dem Anspruch mathematische Argumente und Überlegungen adäquat abzubilden?

Dem letzten Verdacht wird im folgenden zunächst nachgegangen, indem Skolems Paradox daraufhin betrachtet wird, inwiefern sich auch in ihm ein allgemeines Defizit von  $\mathbf{PL}^1$  zeigt. Als alternatives logisches Fundament der Mathematik bieten sich die Logiken zweiter Stufe an, die aber die Probleme nur verschieben, wie sich zeigen wird (Abschnitt 4.2.4). Sodann werden zwei weitere Lösungsansätze diskutiert mit unerwarteter Perspektive, und in Abschnitt 4.3 ein Lösungsansatz präsentiert, der ein Verständnis platonischer Grundlegung der natürlichen Zahlen vorbereitet.

---

connecting logic and the rest of mathematics. The long-known connections between Diophantine equations, or combinatorics, and consistency statements in set theory seem to have little to do with major structural issues in arithmetic. That **PA** is entirely natural in the context of finite combinatorics can hardly be denied, but no one has succeeded in crossing the gap between finite combinatorics and arithmetic (especially arithmetic geometry).» (Macintyre 2011, S. 14). «The equations whose unsolvability is equivalent (after Gödel decoding) to consistency statements have no visible structure and thus no special interest.» (Macintyre 2011, S. 6). Für einen gerafften Überblick über die Bedeutung der Unvollständigkeitsresultate für die Mathematik des zwanzigsten Jahrhunderts siehe Macintyre 2011.

15 Siehe Blau 2008, Kapitel 6.



### 4.2.3 Skolems Paradox

Der Satz von Löwenheim und Skolem garantiert, dass, wenn es für eine Aussagenmenge ein Nichtstandard-Modell mit unendlich vielen Objekten im Universum gibt, es Modelle mit Universen beliebig unendlicher Größe gibt. Dies erscheint besonders paradox für die Mengentheorie<sup>16</sup>, in der der Anzahl nach beliebig viele Mengen existieren, von ihrer Theorie es jedoch abzählbar-unendlich große Modelle gibt. Das bedeutet, wenn man auf den natürlichen Zahlen eine Element-Relation geschickt kreiert, so bilden sie mit dieser Relation zusammen ein Modell für die Mengenlehre, die ja eigentlich eine ‚Theorie der Unendlichkeiten‘ ist oder zumindest sein soll. Dies scheint direkt mit dem sogenannten Satz von Cantor aus der (ZFC-) Mengenlehre zu kollidieren, dass die Potenzmenge jeder Menge größer ist als diese Menge, von der man ausgeht, und, da die Elemente jeder Menge als Mengen wiederum Bestandteil aller Mengen sind, das Mengenuniversum größer ist als jede angebbare unendliche Anzahl von Objekten, wenn zu jeder Menge ihre Potenzmenge existiert. Da aber ein abzählbar unendliches Modell keine Menge enthalten kann, die mehr als abzählbar unendlich viele Mengen (im modelltheoretischen Sinn, d.h. hier Elemente des Modells) enthalten kann, gibt es in diesen Modellen gar keine Mengen höherer Unendlichkeit.

Es gilt:<sup>17</sup>  $\text{ZFC} \vdash$  „Es gibt überabzählbar viele Mengen.“ während es ein Modell  $\mathcal{M} = \langle M, \in \rangle$  gibt mit  $\mathcal{M} \models \text{ZFC}$  und  $|M| = \aleph_0$ . („Es gibt ...“ steht für das formalere (und wie üblich ganz zu formalisierende)  $\forall xyz (y \subset x \wedge z \subset y \wedge \forall f (f \text{ ist Funktion von } z \text{ nach } y \wedge f \text{ ist bijektiv} \wedge \wedge f (f \text{ ist Funktion von } y \text{ nach } z \rightarrow f \text{ ist nicht bijektiv})).$ )

Genau genommen ist zwischen der Unendlichkeit einer Menge, die an sich ein einzelnes Objekt ist, und der Unendlichkeit einer Gesamtheit von Objekten zu unterscheiden. Eine Formulierung des Paradox stellt die Überabzählbarkeit einer einzelnen Menge in ZFC ihrer Abzählbarkeit im Modell gegenüber. Das Objekt, auf das sie referiert, steht nur zu abzählbar vielen anderen Objekten im Modell in der Enthaltens-Relation des Modells.

Dieses modelltheoretische Resultat wird technisch dadurch ermöglicht, dass die Größengleichheit zweier Mengen durch bijektive Abbildungen zwischen ihnen gewährleistet wird, die selbst wieder Mengen sind. Sondert man nun manche der in dem Universum eines Modells bestehenden bijektiven Abbildungen, die zwischen der Menge aller natürlichen Zahlen  $\mathbb{N}$  (insofern sie im Modell enthalten ist) und ihren unendlichen Teilmengen bestehen und die unter ihren unendlichen Teilmengen bestehen, geschickt aus, so erscheint aus der *Innenperspektive* des Modells<sup>18</sup> die Menge  $\mathbb{N}$  größer zu sein als manche ihrer unendlichen Teilmengen, da die Bijektionen nicht mehr im Modell vorhanden sind, um ihre Größengleichheit nachzuweisen. Die *von außen* als  $\mathbb{N}$  gekennzeichnete Menge ist damit *von innen* auch von größerer Kardinalität (sprich: ‚Unendlichkeit‘) als die von innen gekennzeichnete Menge der natürlichen Zahlen, die abzählbar unendlich ist und gleichmächtig (sprich: ‚gleichgroß‘) zu allen ihren unendlichen Teilmengen. Damit ist es möglich Modelle zu finden, die kleiner sind als der Objektbereich, über den man in der Theorie zu reden scheint.

Dass es für PA genauso Modelle beliebig großer Kardinalität gibt, erstaunt dabei weniger, als da PAs Nichtstandard-Modelle ja stets Erweiterungen der Standardzahlen durch ‚unnatürliche‘ Nichtstandardzahlen sind (auch wenn Nichtstandard-Modelle von insgesamt gleicher Kardinalität sein können).

Der auf den ersten Blick irritierende Sachverhalt ist, dass, wenn man in der Mengentheorie von (verschiedenen) Unendlichkeiten spricht, man über etwas anderes – weil in der tatsächlichen Anzahl nicht Unterschiedenes – redet als man meint. Dieser Sachverhalt ist jedoch angemessen, insofern die moderne formale Logik eine Sprache einbegreift, weiterhin (möglicherweise nur abstrakt existierende) Aussagen stets auf Sätze und Formeln der Sprache bezogen werden und durch diese gegeben werden. Die Objekte einer Theorie können solange in der Sprache aufgelistet werden, als ihre Anzahl endlich ist, d.h.,

16 Einen Überblick über die mathematischen Mengentheorien findet sich Abschnitt 7.4. Die ZFC-Axiomatisierung der Mengenlehre ist die, die in der Modelltheorie durchgehend verwendet wird – zuweilen erweitert durch große Kardinalzahlaxiome – und in der der Satz von Cantor gilt.

17 Für die Axiome der ZFC-Mengenlehre siehe Abschnitt 5.5.2.

18 D. h. wenn man so tut, als würde das Modell alle Mengen enthalten.

da Formeln beliebige, aber nicht unendlich, lang sein können, gibt es für jede konkrete endliche Zahl einen Satz, der genau so viele Objekte auflistet, und z. B. behauptet, dass es genau soviele Dinge gibt. Nimmt man die 3, so gilt der Satz

$$\forall xyz ( \wedge v ( v = x \vee v = y \vee v = z ) \wedge ( x \neq y ) \wedge ( x \neq z ) \wedge ( y \neq z ) )$$

nur in Modellen, deren Universum genau drei Objekte enthält.

In formalen Sprachen, die Sätze festgelegter unendlicher Länge erlauben, verliert der Satz von Löwenheim-Skolem demgemäß seine allgemeine Gültigkeit, weil sich nun wie im endlichen Fall alle Objekte auflisten lassen. Dieser Umstand deutet darauf hin, dass es sich zumindest auch um eine sprachliche Begrenzung handelt.

In der Tat ist gerade von einer formalen Logik, die ihre Interpretationsstärke gering belässt und sich damit insgesamt in ihrer Interpretation mehr an die durch *die Zeichenstellung gegebene Strukturen einer Formel* halten muss, folgendes zu erwarten: 1.) Eine Struktur, d.h. in diesem Fall ein Modell, geht nicht weit über die (Zeichen-)Struktur der Sätze einer Menge hinaus, um sie zu erfüllen. 2.) Eine abzählbar unendliche Anzahl von endlichen Sätzen und damit von abzählbar unendlich vielen endlichen Strukturen reicht nicht für sich aus um Unterschiede in den höheren Unendlichkeiten der Modelle letztendlich zu charakterisieren.

Das Skolemsche Paradox ist demnach eine natürliche Folge davon, dass die Sprache von  $\mathbf{PL}^1$  sich aus endlichen Zeichenketten aufbaut, und davon, dass sich  $\mathbf{PL}^1$  bei der Interpretation der Zeichenketten zurückhält stärkere Hintergrundtheorien einfließen zu lassen. Diese vermeintlichen Schwächen von  $\mathbf{PL}^1$  werden sich später als Stärken herausstellen.

Aber zunächst scheint die Prädikatenlogik zweiter Stufe wegen ihrer größeren ‚Interpretationsstärke‘ vorteilhaftere Eigenschaften zu besitzen und die Probleme bezüglich der natürlichen Zahlen aufzulösen.

#### 4.2.4 Prädikatenlogik zweiter Stufe

$\mathbf{PL}^2$  enthält im Gegensatz zu  $\mathbf{PL}^1$  Variablen  $(X_1^{(1)}, \dots)$ , die über die (einstelligen) Prädikate laufen (und extensional betrachtet damit über die Teilmengen des Gegenstandsbereichs, also die Teilmengen der natürlichen Zahlen). In  $\mathbf{PL}^2$  können Sätze wie

- (1) Einige Schwaben reden nur untereinander schwäbisch.

formalisiert werden, die in  $\mathbf{PL}^1$  nicht ausdrückbar sind.<sup>19</sup> Für die natürlichen Zahlen ist nur von Bedeutung, dass sich das Induktionsaxiom ganz formalisieren lässt:

$$\mathbf{Ind}^2 \quad \wedge X ( X(0) \wedge \wedge x ( X(x) \rightarrow X(x') ) \rightarrow \wedge x X(x) )$$

Denn  $\mathbf{PA}^2$  (d.h.  $\mathbf{PA}$  mit  $\mathbf{Ind}^2$  statt  $\mathbf{Ind}$ ) charakterisiert in  $\mathbf{PL}^2$  das intendierte Modell eindeutig (bis auf Isomorphie, das heißt *kategorisch*). Damit hat man ein Ergebnis für die natürlichen Zahlen, dass als erster Dedekind ohne formalen Hintergrund mathematisch bewies: Man kann die Folge der natürlichen Zahlen eindeutig bis auf Isomorphie charakterisieren.

Hat man damit eine Basis, um alles über die natürlichen Zahlen zu beweisen? Leider nein, denn es gibt keinen vollständigen Kalkül für  $\mathbf{PL}^2$  und die wahren Sätze des Modells von  $\mathbf{PA}^2$  sind nicht aufzählbar. Zwar lassen sich aus  $\mathbf{PA}^2$  mehr Sätze über die natürliche Zahlen beweisen als aus  $\mathbf{PA}$ , es gibt aber genauso unabhängige (sogar in  $\mathbf{PL}^1$  formulierbare) Gödelsätze.

<sup>19</sup> Vgl. Boolos 1984, S. 56. Dass (1) nicht ausdrückbar ist, heißt hierbei: Es gibt keinen erststufigen Satz, der immer genau dann gilt, wenn die Formalisierung von (1) (in  $\mathbf{PL}^2$ ) gilt.

Wie die Eindeutigkeit der natürlichen Zahlen können in  $\mathbf{PL}^2$  weitere Sachverhalte abgebildet werden, die dem Verständnis des Mathematikers in der Praxis näher kommen. Deshalb wurde auch vorgeschlagen,  $\mathbf{PL}^1$  als die übliche Hintergrundlogik für die Mathematik durch  $\mathbf{PL}^2$  zu ersetzen.<sup>20</sup>

Ob  $\mathbf{PA}^2$  unser Verständnis der natürlichen Zahlen und der Operationen auf ihnen tatsächlich vollständig auf den Punkt bringt, wird dadurch entschieden, wie man die folgende Frage beantworten muss: Wenn man ‚aus Versehen‘ die natürlichen Zahlen im Sinn einer der Nichtstandard-Modelle begreift, kann man das mittels  $\mathbf{PA}^2$  erkennen und als Irrtum einsehen? Ein Irrtum wäre es ja, da man dachte die Standard-Zahlen zu fassen.

Die Antwort ist negativ. Denn in der Konstitution der Semantik der zweitstufigen Logik geht ja die informelle und möglicherweise nichtstandardgemäße Auffassung der natürlichen Zahlen ein. Insbesondere beim Beweis der Kategorizität der  $\mathbf{PA}^2$ -Axiome basiert die üblicherweise angewendete Induktion (und mögliche Alternativen) auf dem mitgebrachten Verständnis der natürlichen Zahlen und ihrer Operationen und ist damit auch eine Induktion über mehr als die Standard-Zahlen.<sup>21</sup> Formalisiert man einen modelltheoretischen Beweis der Kategorizität der  $\mathbf{PA}^2$ -Axiome wieder in einer zweitstufigen Logik, dann erzwingt die bewiesene *interne Kategorizität* nicht die analoge Kategorizität der Modelle.<sup>22</sup>

Denn neben der Standardsemantik von  $\mathbf{PL}^2$ , in der *alle* Teilmengen des Universums in den Quantifikationsbereich der zweitstufigen Quantoren fallen, ist das für ein *Henkin-Modell* nicht gefordert. Dort kann dieser Quantifikationsbereich zwischen den prädikativen Teilmengen und allen Teilmengen variieren. Es gibt damit unter den Henkin-Modellen auch Nichtstandard-Modelle von  $\mathbf{PA}^2$ . Die interne Kategorizität fordert auch nur, dass zwei Teilbereiche eines Modells bei Erfüllung kategorischer Sätze isomorph zueinander sind. Das bedeutet wiederum, dass zwei Modelle von  $\mathbf{PA}^2$ , die nicht isomorph sind, auch nicht in einem Modell ‚zusammengebracht‘ werden können.

Da die Potenzmengenbildung über eine abzählbar-unendliche Menge demnach selbst voraussetzungsreicher und unverständener ist als die Arithmetik, kann sie und damit auch  $\mathbf{PA}^2$  nicht dazu helfen, unser Verständnis der Arithmetik überprüfbar und mitteilbar zu machen.

#### 4.2.5 Tennenbaums Theorem

Bei dem Versuch aus der Menge der Modelle von  $\mathbf{PA}$  die Nichtstandard-Modelle auszusondern, hilft ein bereits länger bekanntes Merkmal aller Nichtstandard-Modelle. Diese sind nämlich im Vergleich zum Standard-Modell relativ kompliziert; genauer: Die Operationen der Nichtstandard-Modelle sind nicht rekursiv definierbar im Standard-Modell.

**Tennenbaums Theorem** Sei  $\mathcal{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, < \rangle$  das Standard-Modell von  $\mathbf{PA}$  und  $\mathcal{M} = \langle M, +_{\mathcal{M}}, \cdot_{\mathcal{M}}, 0_{\mathcal{M}}, 1_{\mathcal{M}}, <_{\mathcal{M}} \rangle$  ein abzählbares Modell von  $\mathbf{PA}$ , das nicht isomorph zu  $\mathcal{N}$  ist. Dann gibt es keine bijektive Funktion  $f : \mathbb{N} \rightarrow M$ , so dass die Urbilder von  $+_{\mathcal{M}}$ ,  $\cdot_{\mathcal{M}}$  und  $<_{\mathcal{M}}$  unter  $f$  in  $\mathcal{N}$  rekursiv sind.

Man beachte, dass außer Bijektivität keine weiteren Bedingungen an  $f$  gestellt werden.

Der formalen Bestimmung der Rekursivität liegt die Peano-Arithmetik bereits zugrunde. Deshalb muss man die formale Rekursivität auf einen informellen Begriff zurückführen, der selbst nicht von der Arithmetik abhängt. Halbach und Horsten 2005 behaupten, dass der informelle Begriff der Rekursivität dies leiste. Die informelle Rekursivität sei das Rechnen mit Numeralen bzw. das Manipulieren und Umformen von Symbolen. *Church's Thesis* stelle sicher, dass genau die informell rekursiven Operationen auch die formal rekursiven seien. Somit würde die Charakterisierung der intendierten Modelle über einen informellen Begriff der Rekursivität, der durch die Praxis bekannt ist, alle Nichtstandard-Modelle

20 Vgl. Shapiro 1991.

21 Siehe Blau 2008, S. 113.

22 Siehe Väänänen 2012, S. 97ff.

aussondern und einen Isomorphismustyp eindeutig bestimmen.<sup>23</sup> Nur bleibt ihre informelle Rekursivität etwas vage. Auf ein informelles Verständnis des rekurriert auch Blau, auf das wir im folgenden Abschnitt genauer eingehen.

#### 4.2.6 Formale Unbeschreibbarkeit und selbsterweiternde Imperative

Die Mathematik der Neuzeit ist dazu übergegangen, die natürlichen Zahlen durch ihre Reihung zu charakterisieren, und im mathematischen Strukturalismus wird behauptet, dass man die natürlichen Zahlen nur als Teil oder Strukturmoment der Progression zu verstehen hat, die einen Anfangspunkt hat und mit diskretem Schritt stetig weitergeht. Diese Progression  $\mathbb{P}$  ist das, was man informell oder intuitiv unter den natürlichen Zahlen versteht, und damit, insofern  $\mathbb{P}$  eindeutig und vollständig bestimmt ist, ist  $\mathbb{P}$  das informelle Gegenstück zu dem intendierten Standardmodell der natürlichen Zahlen. Nimmt man nun mit Blau 2008 an, dass wir so ein klar bestimmtes Verständnis der strukturalistisch gefassten natürlichen Zahlen besitzen – und in diesem Sinne  $\mathbb{P}$  existiert – dann ist die Frage, wie wir ein Verständnis der Progression erlangen und kommunizieren, wenn dies nicht mittels einer formalen Axiomatisierung geschehen kann. Oder die Frage genauer gefasst: Wie wir die informelle sprachliche Charakterisierung tatsächlich verstehen, so dass sie eine Kennzeichnung der von uns allen verstandenen, eindeutig bestimmten Progression wird, was wiederum eine referenziell eindeutige Kommunikation über die natürlichen Zahlen erlaubt.

Wir fassen die letzten Abschnitte zunächst in Blaus erster seiner zwanzig platonistischen Thesen zusammen:<sup>24</sup>

**These 1** *Jede endliche Beschreibung von  $\mathbb{P}$  ist unvollständig oder inkonsistent oder zirkulär.*

Blau 2008, S. 111ff., begründet sie mittels eines Durchgangs der bekannten formalen Möglichkeiten: Eine Axiomatisierung mittels  $\mathbf{PA}$  in  $\mathbf{PL}^1$  ist nach  $\mathbf{GeUt}$  unvollständig (oder inkonsistent) und charakterisiert damit nicht alle und nicht einmal alle in  $\mathbf{PL}^1$  ausdrückbaren Wahrheiten über  $\mathbb{P}$ . Will man  $\mathbb{P}$  als Fluchtpunkt eines immer genaueren Wissens aller wahren  $\mathbf{PL}^1$  Aussagen über  $\mathbb{P}$  verstehen, so scheidet dies daran, dass selbst diese Menge Nichtstandard-Modelle hat und somit mittels ihr  $\mathbb{P}$  nicht von unfundierten Strukturen zu unterscheiden ist. Schränkt man aber die Interpretationen in  $\mathbf{PL}^1$  auf die ein, die die Zahlterme standardgemäß in  $\mathbb{P}$  interpretiert, wobei man die Bestimmung dieser Interpretation induktiv vornimmt, dann hat man  $\mathbb{P}$  bereits vorausgesetzt, und diese Interpretation ist nur in den Fällen wohldefiniert als  $\mathbb{P}$  tatsächlich standard ist, in genau welchem Fall über die Induktion alle Punkte von  $\mathbb{P}$  durch die Interpretation erreicht werden. Auch die Peano-Arithmetik zweiter Stufe bietet keine nicht-zirkuläre Beschreibung der Progression  $\mathbb{P}$ .<sup>25</sup>

Wenn die formalen Charakterisierungen von  $\mathbb{P}$  es nicht vollständig beschreiben ohne es bereits vorauszusetzen, sollte man erklären können, wie man zu einem Verständnis der Progression gelangt und dieses Verständnis kommuniziert, damit **These 1** nicht zu einem Argument gegen die Bestimmtheit von  $\mathbb{P}$  wird. Denn diese Einsicht in die Progression und damit in die Natur der natürlichen Zahlen würde ansonsten zu einer nicht nachvollziehbaren Behauptung.

Blaus Ansatz, dieser Anforderung nachzukommen, liegt in der epistemischen Funktion, die er Imperativen zuspricht. Blau 2008, S. 114, behauptet:

<sup>23</sup> Siehe Halbach und Horsten 2005, S. 183.

<sup>24</sup> Blau 2008, S. 110.

<sup>25</sup> Der mengentheoretische Deskriptivismus, den Blau 2008, S. 113, noch widerlegt, ist systematisch nur relevant, wenn man der Mengenlehre eine besondere epistemische Rolle zuspricht. Die technische Seite des mengentheoretischen Deskriptivismus, nämlich die Menge der Standard-Zahlen als den Durchschnitt aller Mengen bestimmter Eigenschaften zu definieren, kommt bereits in dem oben dargestellten Unterschied zwischen voller Zweitstufigkeit und den Henkin-Modellen zum Tragen.

**These 2**  $\mathbb{P}$  ist intensional eindeutig, bis auf Isomorphie, durch einen selbsterweiternden Imperativ bestimmt, der  $\mathbb{P}$  nicht beschreibt sondern mental erzwingt:

**P0** Betrachte einen Anfangspunkt: die Null!

**P1** Füge dem zuletzt betrachteten Punkt einen Nachfolger an und wiederhole **P1**!

**P2** Betrachte die Folge aller so zu betrachtenden Punkte: Dies ist  $\mathbb{P}$ .

Blau fährt anschließend fort:

Niemand *könnte* ihn schrittweise vollständig oder auch nur approximativ befolgen. Aber jeder *verstet* ihn. Und wer ihn versteht, hat mental, mühelos und nahezu unbewußt ein doppeltes Kunststück zustande gebracht, er hat (a) alle Schritte übersprungen und (b) implizit verstanden, aber vielleicht nicht erkannt, daß er *genau die* natürlichen Standardzahlen übersprungen hat.

Betrachten wir den nichtmathematischen Kern dieses mathematischen Phänomens. Wir verstehen, daß  $\mathbb{P} = 0, 1, 2, \dots$ , weil wir das wichtigste Symbol der informellen Mathematik, die drei Pünktchen verstehen. Aber wie?

a) und so geht es immer weiter.

b) und geh so weiter!

a) ist zirkulär; in „immer“ steckt schon der Allquantor über  $\mathbb{P}$ . Wir verstehen a) ohne Zirkel über b), weil b) den Gedankensprung über die kleinste fundierte aktuelle Unendlichkeit nicht beschreibt sondern *bewirkt*: Wir antizipieren eine aktuelle Unendlichkeit nicht vollzogener Schritte, und kein rein materieller Rechner hat Zugang zu diesem immateriellen Bereich: dem Bereich des *Normativen*

#### 4.2.7 Zur Erkenntnis der Zahlenreihe in der intellektuellen Anschauung

Die allgemeine Form dieser Erkenntnisgewinnung ist die, dass man durch ein mentales Tun, angeregt durch einen Imperativ, zu einem Wissen gelangt: Man weiß etwas, weil man etwas tut. Die spezielle Erkenntnisfähigkeit, nämlich «das, wodurch ich etwas weiss, weil ich es tue»<sup>26</sup>, wird nach Kant und Fichte *intellektuelle Anschauung* genannt. «Sie ist das unmittelbare Bewusstseyn, dass ich handle, und was ich handle».<sup>27</sup>

Die Hauptschwierigkeit dabei, ein scheinbar neues und darüber hinaus scheinbar geistig-seelisches Erkenntnisvermögen wie die intellektuelle Anschauung in eine philosophische Diskussion einzubringen, liegt darin, dass es sie für viele nicht zu geben scheint. Fichte verweigert auch jeden Nachweis, da er sie nicht für rational nachweisbar hält: «Dass es ein solches Vermögen der intellectuellen Anschauung gebe, lässt sich nicht durch Begriffe demonstrieren, noch, was es sey aus Begriffen entwickeln. Jeder muss es unmittelbar in sich selbst finden, oder er wird es nie kennen lernen.»<sup>28</sup> Das mag stimmen, aber es lassen sich doch mit Beispielen Zwischenstationen auf dem Weg dorthin markieren. Eine solche wird dadurch gegeben, dass man sich einen Kreis in allen möglichen Lagen und Größen vorstellt und dieses Tun reflektiert, wie es auf S. 177 bei einer Darstellung der eidetischen Variation Husserls geschehen wird. Auch wenn man die eidetische Variation als eine Vorstufe der intellektuellen Anschauung betrachten kann, so ist die Zahlenreihe mit ihr nicht zu bestimmen, da sie ihren Ausgangspunkt stets von einem als Eines vorgestellten Objekt nimmt; die Zahlenreihe muss aber erst ‚geschaffen‘ werden.

Vom alltäglichen Umgang mit den natürlichen Zahlen her betrachtet, ist ihre Erkenntnis mittels Imperativen etwas, das bei ihrer Anwendung, insofern der Blick dabei auf ihre potentielle Unbegrenztheit

<sup>26</sup> Fichte 1971, S. 463.

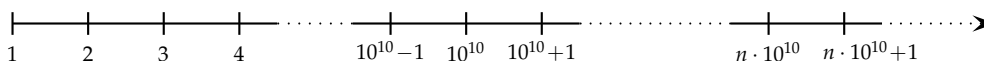
<sup>27</sup> Fichte 1971, S. 463. Die Setzung der Reihe der natürlichen Zahlen würde Fichte vielleicht nicht in der intellektuellen Anschauung als in ihrer mathematischen Vorstufe verorten; vgl. Wood 2012. Wir vernachlässigen hier aus Platz- und Zeitgründen eventuelle Unterschiede. Fichte scheint in geometrischer Hinsicht der PLATON der Neuzeit zu sein, und die Rolle der Mathematik in seinem Werk größerer Aufmerksamkeit wert.

<sup>28</sup> Fichte 1971, S. 463.



nimmt. Ohne Positionssystem oder einer anderen Anordnung der Ziffern und z. B. nur einem Zählzeichen „|“ wird es praktisch unmöglich, eine Zahl anzugeben, die grundsätzlich nicht mehr abgezählt werden könnte.<sup>29</sup>

Unser rechnerische Umgang mit den natürlichen Zahlen enthält demnach additive Lücken, die man nun in einem Modell abbilden – *ontologisieren*, d.h. in diesem Fall jene Unbestimmtheit der Operation durch zwei aufeinander zulaufende unendliche Folgen ohne Limes darstellen – kann, dass den Nichtstandard-Modellen zumindest ähnlich ist, insofern es neben einem Standardblock der natürlichen Zahlen Nichtstandardblöcke enthält.



Da die Mal-Operation zumindest in der Nähe der  $+$ -Standardzahlen standardmäßig zu nehmen ist, ist sie dort fundiert, so dass es einen kleinsten bzw. ersten Block von  $+$ -Nichtstandardzahlen gibt. Darin unterscheidet sich dieses Modell von allen Nichtstandardmodellen von PA, bei denen die Nichtstandardblöcke notwendig dicht (d.h. wie die rationalen Zahlen geordnet) gelagert sind. Aus dieser Notwendigkeit folgt allerdings, dass die Multiplikation in unserem Modell nicht total definiert sein kann. Das ist in der Tat beabsichtigt, da unser Modell ja die praktische Nichtstandardizität der Addition, die durch die *standardgemäße* Anwendung der Multiplikation entsteht, fassen soll. In unserem Modell soll die Multiplikation nur soweit auftreten als sie durch die Addition ‚verstanden‘ wird bzw. definiert werden kann; also kann man sie einfach weglassen.

Eine mengentheoretisch Modellbildung, mit einer nur partiell definierten Addition auf den standard natürlichen Zahlen, ist  $\mathcal{M} := \langle \mathbb{N}, \oplus \rangle$  mit  $\oplus$  definiert für zwei Parameter  $s$  und  $l$  (z. B.  $s := 10^{10^{10}}$  und  $l := 10^{10}$ ): Seien  $x, y \in \mathbb{N}$  mit  $x = m \cdot s + o$ ,  $y = n \cdot s + p$ ,  $o, p < 10^{10}$  und  $-l \cdot m < x < l \cdot m$  und  $-l \cdot n < y < l \cdot n$ . Dann sei  $x \oplus y := x + y$ . Aus der Definition folgen die Gesetze der Addition für  $\oplus$  direkt, soweit sie definiert ist.

Insofern die praktische Nichtstandardizität aus dem Zusammenspiel zweier Operationen erwächst, von denen keine durch die andere (direkt) definierbar ist, aber eine durch die andere rekursiv bestimmt werden kann, wird die praktische Standardizität gewahrt, wenn man sich völlig auf eine Operation beschränkt.

Oder wenn man sich auf die zwei Operationen  $+$  und  $\cdot$  beschränkt, so dass die Multiplikation standard ist, während  $+$  nichtstandard, so würde die Multiplikation die grobe Struktur ausmessen, während die Addition vor allem die Feinstruktur erfassen würde.

Wenn man die natürlichen Zahlen mit Hilfe der Nachfolgeroperation bestimmt, erhält man durch die weitere Hinzufügung von dann rekursiv charakterisierten Operationen wie der Multiplikation und Potenzierung relative Nichtstandardzahlen, die, weil die Zahlen durch die Nachfolgeroperation bestimmt wurden, auch relativ zu den natürlichen Zahlen nichtstandard und damit über die natürlichen Zahlen echt hinausgehende Dinge sind. Dann würde die Multiplikation aber nicht nur auf den intendierten natürlichen Zahlen operieren, bzw. es müsste über die intendierten natürlichen Zahlen hinausgegangen werden, um die Multiplikation bestimmen zu können; beides unplausible Konsequenzen.

Ein Ausweg aus diesem Problem steht dann zur Verfügung, wenn die Anzahl der Zahloperationen grundsätzlich beschränkt ist, und die Operationen in ihrer ‚Reichweite‘ linear geordnet werden können. Denn dann würde – nach einer Einführung der natürlichen Zahlen durch die ‚stärkste‘ Operation – eine

<sup>29</sup> Diese Behauptung scheint zunächst recht stark zu sein. Sie ist dennoch gerechtfertigt, weil zum einen eine  $|||$ -Folge, die man z. B. einen Computer generieren lassen kann, man auch von ihm zählen lassen können wird. Der Unterschied ist hier nur ein relativer. Es hätte ja auch sein können, dass man ähnlich schnell zählen hätte können. Und vielleicht wird die Medizintechnik Gehirnzellen und Chips noch so verknüpfen, dass es Wirklichkeit annehmen wird. Zum anderen könnte man auf natürlich gegebene Mengen verweisen, z. B. auf die Anzahl der Atome im Universum, und behaupten, diese mittels einer Menge angegebene Zahl sei praktisch nicht abzählbar. Um diese Behauptung wahrscheinlich zu machen, wird man jedoch wieder auf die Multiplikation Bezug nehmen müssen. Denn unsere Vorstellung der Kleinheit von Atomen und der Größe des Universum beruht wie jede Größenvorstellung, die mit einem dezimalen Positionssystem arbeitet, auf der Multiplikation.

absteigende Hinzufügung der ‚schwächeren‘ Operationen keine zuvor unerreichbare Zahlen hervorbringen. Genau diese Voraussetzungen liegen aber im antiken Mathematikverständnis vor und genau diese Struktur scheinen Bestimmungen der Zahlen bei PLATON anzunehmen. Die antike Mathematik kennt nur die Addition, Multiplikation und (beschränkte) Potenzierung, die ihrer Stärke nach in dieser Reihe geordnet werden können, und die Bestimmung der natürlichen Zahlen weist oftmals, auch wenn die meisten Einzelheiten etwas unklar sind, diese Struktur auf, dass zunächst mit der Potenz, dann erst mit der Multiplikation bestimmt und schließlich die Addition hinzugefügt wird.

## 4.4 Die natürlichen Zahlen bei Platon

Wir gehen nun über zur Analyse einer Stelle aus PLATONS Dialog *Parmenides*. Der Grund, warum es inhaltlich von Interesse sein könnte, bezüglich der natürlichen Zahlen und der vollständigen Induktion auf PLATON zurück zu kommen, ist einfach: Auch die gerade damals schon grundlegenden mathematischen Begriffe und Gegenstände waren bereits Objekte philosophischer Reflexion, die durchaus erfolgreich sein konnte. Die Einreihung des Parallelenaxioms unter die Postulate, seine technische Formulierung und differenzierte Benutzung im ersten Buch der *Elemente* könnte ein Beispiel dafür sein. Die Brücke in die Neuzeit spannt sich bis zur ‚Entdeckung‘ der nichteuklidischen Geometrien, die letztlich in der Ausschöpfung der logischen Alternativen des Parallelenpostulats bestehen. Wenn man die Zusammenhänge der Entwicklung antiker Geometrie nicht berücksichtigt, scheinen die nichteuklidischen Geometrien bereits zu PLATONS Zeit möglich.<sup>30</sup> Statt einer Rückdatierung wissenschaftlichen Fortschritts, könnte auch bei aktuellen Problemen ein Rückblick auf alte Überlegungen von Vorteil sein.

Die zurückliegenden Abschnitte dieses Kapitels dienen dabei als Hintergrund, die Überlegungen im letzten Abschnitt bereiten ein Verständnis der Zahlkonzeption im Dialog *Parmenides* vor, die anderen Abschnitte bieten dagegen eine Ansammlung von dem, was eine moderne Konzeption der natürlichen Zahlen ausmacht, und aus den platonischen Texten gegebenenfalls *heraus-* aber auf keinen Fall *hinein-*interpretiert werden sollte.

### 4.4.1 Die Zahl in der frühgriechischen Mathematik

$\psi\eta\varphi\omicron\iota$  sind Steinchen. Auf der Beschäftigung mit den Anordnungen kleinerer Steine gründet sich eine Form von Zahlentheorie, die  $\psi\eta\varphi\omicron\iota$ -Arithmetik genannt wird. Szabó 1969, S.254ff., findet ihre Beweistechnik primitiv, weil die Steingruppierungen allgemein gültige Sätze nur veranschaulichen können, anders Waschkies 1989, S. 46ff., und Becker 1957, S.40ff..<sup>31</sup> Der Haltung, gegen  $\psi\eta\varphi\omicron\iota$ -Arithmetik aber gleichzeitig für EUKLIDS Geometrie zu sein, steht das Argument entgegen, dass Zahlen (durch Steinchen) wesentlich exakter instantiiert werden als geometrische Objekte in Zeichnungen. Dann steht aber zu vermuten, dass auch ihre theoretische Grundlegung einfacher und ihre Definitionen und Axiome unproblematischer sein könnte. Zur Theoriebildung einer  $\psi\eta\varphi\omicron\iota$ -Arithmetik mehr am Ende dieses Abschnittes.

Die frühgriechische Zahlentheorie (wie in den *Elementen*, Bücher VII-IX) und ihre theoretische Fundierung sind nicht aus der modernen Arithmetik heraus, die sich in den Peano-Axiomen oder ähnlichem ihre Grundlage gibt, zu verstehen. Dafür ist diese zu abstrakt und setzt einen anderen Zahlbegriff voraus. Man arbeitet heute zudem im Akademischen wie Alltäglichen mit einer formalistischen Rechen-technik, die abseits des Anschaulichen und des ‚Inhaltlichen‘ operiert. So rechnet man mit geringer

<sup>30</sup> Hösle 1982 versucht, die nichteuklidischen Geometrien bis auf PLATON und die alte Akademie zurück zu datieren.

<sup>31</sup> Ein Beispiel für die Anwendung von Steinchen-Diagrammen in verschiedenen, nicht nur erklärenden, Funktionen in der höheren Mathematik ist Hardy und Wright 1958, S. 311,316,319,325f.,330.



Anstrengung

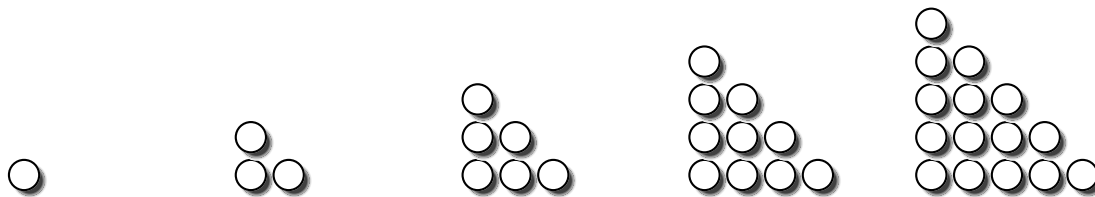
$$1234567897531 + 98765432102468$$

ohne Schwierigkeit mittels geregelte Ziffernmanipulation aus oder

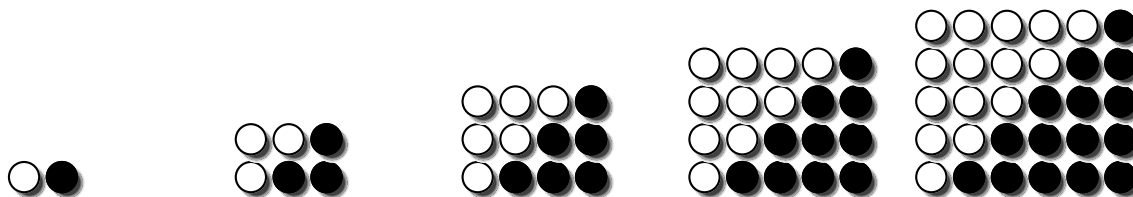
$$\frac{1}{2} \sqrt{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot 20} = 5.$$

Die folgenden Beispiele sollen einen Eindruck der ψῆφοι-Arithmetik geben, der die inhaltliche Rechtfertigung, in der Zahlentheorie mit Figurformen zu arbeiten, ahnen lässt.<sup>32</sup>

Gruppiert man Steine so, dass man mit einem beginnend, zwei, dann drei und so fort hinzufügt, erhält man bildlich Dreiecke.



Will man die Summe der ersten  $n$  Zahlen bestimmen, so ergibt sie sich leicht, wenn man ein Steine-Dreieck gleicher Größe in folgender Weise anfügt:



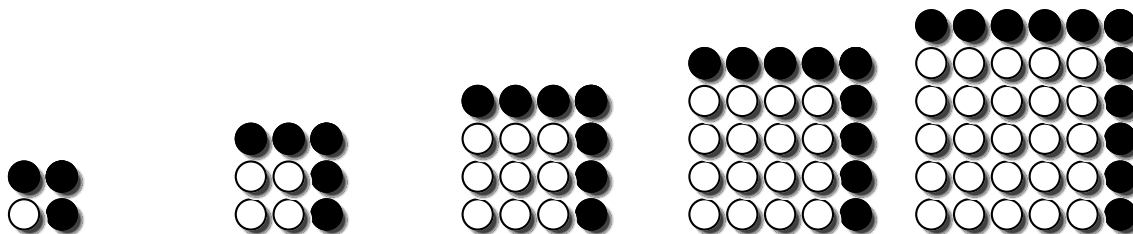
Wie man leicht sieht, ist die Summe der Zahlen von 1 bis  $n$  gerade die Hälfte des Produkts von  $n$  mit sich selbst um eins erweitert. Oder in moderner Zahlenschrift:

$$(*) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

In seiner Anschaulichkeit überraschender ist vielleicht ein Zahlenzusammenhang, den man heute mit  $1 + 3 + 5 + \dots + (2 \cdot n - 1) = n^2$  ausdrückt und mit (\*) leicht formal ableiten kann:

$$n^2 = \frac{n^2 + n}{2} + \frac{n^2 + n}{2} - n \stackrel{(*)}{=} 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) - n = (1 + (2 \cdot 2 - 1) + \dots + (2n - 1)).$$

Im Steinebild:<sup>33</sup>

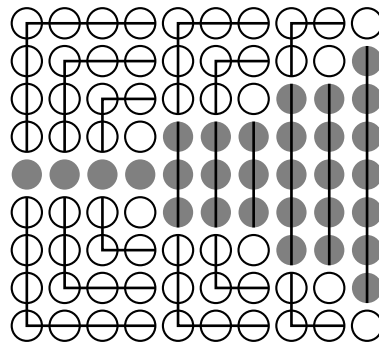


Zu sehen ist, dass jede Quadratzahl  $a^2$  die Summe der ersten  $a$  ungeraden Zahlen (ab 1) ist und z.B. (als Folgerung daraus) dass sich zwei aufeinander folgende Quadratzahlen  $a^2$  und  $b^2$  gerade um die  $b$ -te ungerade Zahl unterscheiden.

32 Die folgenden Beispiele sind, soweit nicht anders bemerkt, aus Becker 1957, S.40ff.. Für eine kurze Zusammenführung von Steinchen-Arithmetik und den arithmetischen Büchern der *Elemente* siehe Leuz 2009, S. 14ff..

33 Das Hinzufügen so eines Winkels, griechisch Gnomons, wird bei ARISTOTELES in den *Kategorien 15a* und *Physik 203a* erwähnt.

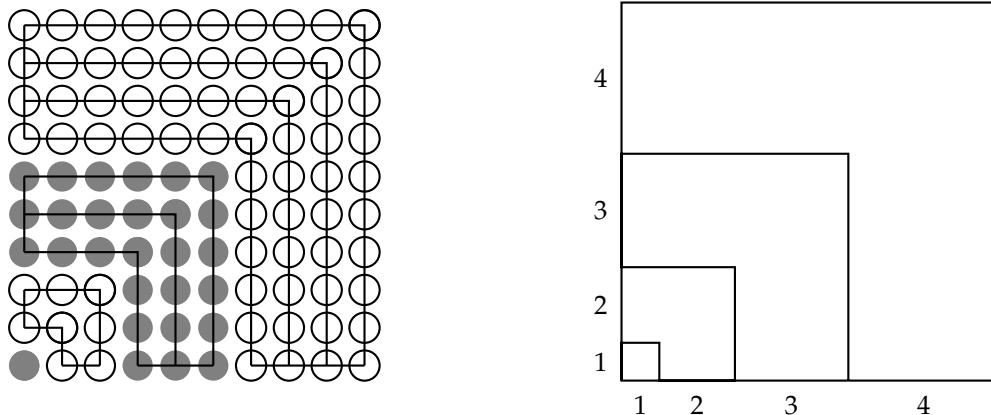
Darüber hinaus gilt:



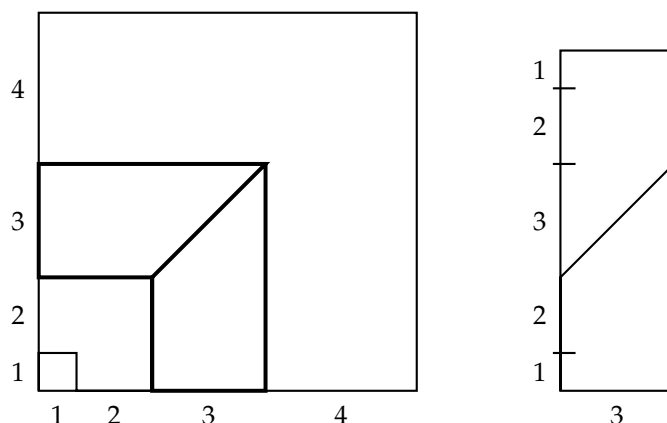
An dieser Skizze kann man sich mit etwas mehr Anstrengung von folgendem Zusammenhang überzeugen:

$$3 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = (1 + 2 + \dots + n) \cdot (2n + 1).$$

Nur ein bisschen fortgeschrittener ist das Äquivalent zu  $(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3$ , im Bild:



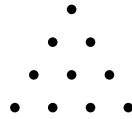
Dazu nimmt man (\*) bzw.. die analoge Steinchen-Erkenntnis um die Korrektheit der Entsprechung zu  $(1 + 2 + \dots + n) \cdot 2 - n = n^2$  einzusehen, und benötigt dann nur noch folgendes Schema:



In diesem Beweis wurde eine einmal an Rechtecksüberlegungen gewonnene Steinchen-Erkenntnis auf Seitenzahlen angewendet. Entsprechend kann man den Umstand, dass eine Gesamtheit von Steinchen nicht in ein Rechteck mit Seitenlänge zwei angeordnet werden kann für Seitenzahlen übernehmen. Dann kann man von ungeraden (und geraden) Seiten sprechen.<sup>34</sup>

<sup>34</sup> Man kann – um damit die Reihe unserer Sätze aus der  $\psi\eta\varphi\omega$ -Arithmetik abzuschließen – in ihr auch beweisen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt, vgl. Waschkies 1989, S.298ff..

Der in den obigen Abbildungen jeweils hinzugefügte ‚Winkel‘ hieß in der Antike Gnomon, wie der senkrecht auf dem Boden stehende Stock, der für Messungen benutzt wurde. Neben dem, was hinzugefügt wird, betrachtete man v.a. die Anzahl der insgesamt gelegten Steine. Man benannte die Zahlen mitunter nach der geometrischen Form, in der man eine ihnen äquivalente Anzahl von Steinen legen kann. Die Zahlen der Reihe 1, 3, 6, 10, 15, ... sind demnach Dreieckszahlen. Die Zahl 10 kann so als Dreieck mit Seiten(steinchen)länge 4, in Form einer Tetraktys (Vierheit), gelegt werden.



Die Viereckszahlen 1, 4, 9, 16, 25, ... sind die Quadratzahlen, Fünfeckszahlen sind 1, 5, 12, 22, 35, ..., Sechseckszahlen 1, 6, 15, 28, ..., usw.<sup>35</sup> Neben den Quadratzahlen unterscheidet man auch verschieden Formen von Rechtecken (also nicht-geometrisch ausgedrückt die Möglichkeiten bestimmte Zahlen in bestimmter Weise zu teilen.) So unterscheidet man rechteckige Anordnungen, deren Seitenzahlen sich nur durch eine Einheit unterschieden (ἐτερομήκης) von anderen rechteckigen (προμήκης). Um eine Raumdimension erweitert gruppierte man auch *körperliche* Zahlen nach verschiedenen räumlichen Figuren, deren einfachsten die Kubikzahlen 1, 8, 27, 64, ... die Zahlen der Würfel sind.

Erst vor diesem Hintergrund der Steinchen-Arithmetik – im Unterschied zu der in den vorherigen Abschnitten dargestellten modernen Auffassung – werden die grundlegenden Bestimmungen der natürlichen Zahlen wie sie zum Beginn von Buch VII der *Elemente* niedergelegt sind, verständlich. Definition 6 (VII D6)<sup>36</sup> findet sich auch in den platonischen Dialogen:

Der Athener: Doch halt, bei Zeus! So gib Acht. Möchtest du nicht bei jedem Ding dreierlei erkennen?

Kleinias: Wie meinst du das?

Der Athener: Einmal das Wesen, zweitens die Definition des Wesens und drittens den Namen. Und so gibt es bei allem, was ist, zwei Fragen.

Kleinias: Wieso zwei?

Der Athener: Zuweilen bringen wir alle doch den bloßen Namen vor und verlangen die Definition; zuweilen bringen wir aber auch die Definition selbst vor und fragen nach dem Namen.

Kleinias: Wollen wir damit jetzt etwa folgendes sagen?

Der Athener: Was denn?

Kleinias: Es lässt sich doch manches in zwei Teile zerlegen, und zwar sowohl sonst als auch besonders bei der Zahl; hierfür lautet bei der Zahl der Name ‚gerade‘, und die Definition aber ‚eine Zahl, die sich in zwei gleiche Teile zerlegen lässt‘.

Der Athener: Ja, das etwa ist es, was ich meine. Bezeichnen wir nun nicht auf beiderlei Weise dasselbe Ding, sowohl wenn wir, nach der Definition gefragt, den Namen angeben als auch, wenn wir, nach dem Namen gefragt, die Definition geben, indem wir dasselbe Seiende mittels des Namens als gerade und mittels der Definition als eine in zwei Teile teilbare Zahl bezeichnen?

Kleinias: Auf jeden Fall.

*Nomoi 895de*

Anschaulich basiert diese Erklärung darauf, dass man eine gerade Anzahl von Steinchen in zwei gleichlangen Reihen anordnen kann, bzw. dass man jede Anordnung einer geraden Anzahl in zwei gleiche Teile teilen kann. Ähnlich ist ein natürlicher Teil einer rechteckig angeordneten Gesamtheit von Steinchen einfach eine der Reihen. Ein Teil einer Zahl ist demnach – man vergleiche (XII D3/4) – eine Zahl, durch die sich die gesamte Anzahl ohne Rest teilen lässt.

35 Wie gerade vor allem für ψῆφοι-Quadrate ausgeführt, kann mit diesen anderen ‚Vieleckszahlen‘ arithmetisiert werden. Eine einfache Verallgemeinerung ist für regelmäßige ‚Polygonzahlen‘ mit  $r$  Seiten und Seitenlänge  $n$  ist Anzahl der Steinchen  $P_r^n = \frac{n}{2}(2 + (n-1)(r-2)) = n + \frac{n(n-1)}{2}(r-2)$  (vgl. Huntley 1970, S.129).

36 «Gerade ist die Zahl, die sich halbieren lässt».

Dieser anschauliche Zugang zu den Zahlen über die  $\psi\tilde{\eta}\varphi\omicron\iota$  bietet zum zweiten die Basis für ein Argument gegen eine rein strukturalistische Fassung der natürlichen Zahlen und für eine Priorität der Multiplikation gegenüber der Addition. Liegt einem eine konkrete Gesamtheit von Steinchen vor, so sind sie ihrer Anzahl nach gegeben unabhängig davon, dass man die Anzahl noch erhöhen kann, wie weit man sie erhöhen kann und ob man es tatsächlich tut. Die Eigenschaften der konkreten Gesamtheit bestehen vielmehr darin, wie sich die Steinchen rechteckig anordnen lassen. Sie in Rechtecken anzuordnen ist aber gleichbedeutend damit, sie in gleiche Teile zu ordnen, was rein mathematisch bedeutet ihre Anzahl als Produkt zweier (An)Zahlen darzustellen. Das Wesen einer Zahl würde in dieser Sicht direkt mit ihren möglichen multiplikativen Zerlegungen in Verbindung stehen.

Dem entspricht in der neuzeitlichen Mathematik der für die Arithmetik fundamentale Satz der eindeutigen Primfaktorzerlegung: Jede Zahl  $z$  lässt sich eindeutig als Produkt einer Reihe von nicht unbedingt unterschiedlichen Primzahlen darstellen:  $z = a_1^{b_1} \cdot a_2^{b_2} \cdot \dots \cdot a_n^{b_n}$ , mit  $a_1, a_2, \dots, a_n$  verschiedene Primzahlen.

Die Zahl der möglichen rechteckigen Anordnungen einer Gesamtheit von Steinchen legt nun eindeutig die Anzahl der beteiligten, nicht unbedingt verschiedenen Primfaktoren fest. Verwendet man zudem die begriffliche Unterscheidung von gerader und ungerader Rechtecksseite, dann kann damit die Zweierpotenz der Primfaktorzerlegung bestimmt werden. Nimmt man noch hinzu, dass eine ungerade Zahl eine gerade Zahl zusammen mit einem Steinchen ist – und führt damit über die Hintertür eine schwache Version von  $+1$  ein – dann ist letztlich jede Steinchenanzahl – analog der Primfaktorzerlegung – durch die rechteckigen Anordnungsmöglichkeiten eindeutig charakterisierbar.<sup>37</sup>

Damit ließe sich jede Zahl unter Voraussetzung ihrer  $\psi\tilde{\eta}\varphi\omicron\iota$ -Anordnungsmöglichkeiten und der begrifflichen Unterscheidung von *ungerade* als *gerade mit einer Einheit* eindeutig fassen. Sie brauchen demnach nicht nur als Momente einer unendlichen Struktur aufgefasst werden, und so eine Auffassung gibt auch nicht ihre eigentlichen, multiplikativen Eigenschaften ihrer konstitutiven Funktion nach wieder, da sie die Zahlenreihe nach dem  $+1$  und der Addition aufbaut.

#### 4.4.2 Unendlichkeit in «Parmenides» 142b–143a

Nachdem Sokrates im sogenannten ersten Teil des *Parmenides* dessen Einwände gegen seine Hypothese der Existenz von Ideen nicht aufzulösen vermochte, überzeugt Zenon den greisen Parmenides eine ‚Denkübung‘ durchzuführen. Die dann folgenden Schlüsse behandeln implizit Ideen, die weitgehend aufeinander aufbauen in dem Sinn, dass die im Text späteren die im Text früheren voraussetzen.<sup>38</sup> Die sogenannte zweite Hypothese untersucht dem Plan der Denkübung (136a-c) gemäß das Eine *in Bezug* auf das andere. In den Ablauf wird dies eingeleitet, indem zu der Annahme gewechselt wird, dass das Eine *ist* (142b), während man zuvor untersucht hatte, was folgt, wenn das Eine (für sich) *ist* (137c). Dass die erste *hypothesis* mit einem negativen Resümee endete und dies zum Anlass genommen wird, es mit der modifizierten Annahme erneut anzugehen, ist der Form des rationalen Argumentierens – der «äussern Reflexion»<sup>39</sup> – geschuldet, in die der Übungsplan und die Darstellung der Ideen eingebettet sind.

Behandelt man Relationen statt Dinge für sich und getrennt von anderen, ist man mit der theoretischen Schwierigkeit konfrontiert, dass Relationen Beziehungen zwischen etwas sind. Begrifflich sind diese

<sup>37</sup> Dazu bestimmt man die ungeraden primen Seiten darüber weiter, dass man eine ungerade Primzahl als Nachfolger einer geraden Zahl auffasst, die man dann wieder weiter zerlegen kann.

Für eine Diskussion des Fundamentalsatzes der Arithmetik im Kontext der *Elemente* siehe Taisbak 2002. Allerdings ist seinem Resultat nicht zuzustimmen. Die Form von (IX 14) beruht darauf, dass EUKLID (wie PLATON) ein traditionelles und noch nicht so abstraktes Verständnis der Multiplikation hatten; vgl. S. 132.

<sup>38</sup> Siehe dazu auch die Abschnitte 1.3.1 und 5.6.2.

<sup>39</sup> Hegel 1999, S. 87.

strukturellen Endpunkte, die in Bezug aufeinander stehen, keine Beziehungen und keine Relationen. Unter der Voraussetzung alles nur in Form seiner Beziehung zu anderem zu betrachten, erhalten die strukturellen Endpunkte der Relation einen Doppelcharakter: Sie sind zum einen in ihrer hergebrachten Struktur als ihre Momente scheinbar für sich bestehende Dinge, müssen ihrerseits aber wieder als Relation begrifflich analysiert werden, wenn man die Relationen ‚um sie herum‘ weglässt. Unter diesen Vorgaben können Begriffe gesetzt werden, die als Verbindung zweier Begriffe eine Zweiheit bilden, insofern diese Begriffe sich als genau dieser zusammengesetzte Begriff zeigen, eine Einheit bilden und insofern hinsichtlich ihrer Zweiheit unbestimmt sind. Den in einer grundsätzlichen Hinsicht einfachsten Begriff mit dieser Eigenschaft könnte man die unbestimmte Zweiheit nennen.

Mit diesen Vorüberlegungen wird im folgenden versucht, ein besseres Verständnis der Textstellen im *Parmenides* zu den natürlichen Zahlen zu erreichen. In der Explikation und Auseinandersetzung mit den strukturellen Aspekten (siehe dafür auch Abschnitt 5.6.2) wird zunächst die Konzeption einer ersten Unendlichkeit in *Parmenides 142b-143a* herausgearbeitet. Die bisherigen Überlegungen dieses Kapitels bereiten darauf vor aufmerksam zu werden, dass hier mit etwas der Zweierpotenz Ähnlichem gearbeitet wird und die Wiederholung und rekursive Ausfaltung auf einer Art Zirkel des Grundbegriffs beruht.

Willst du also, daß wir noch einmal von vorn auf unsere Voraussetzung zurückgehen, ob sich uns etwas verändert darstellen wird, wenn wir sie noch einmal durchgehen?

Das will ich sehr gern.

Also, wenn Eins ist, sagen wir doch, was dann für dasselbe folge, was es auch sei; das müssen wir zugestehen. Nicht wahr?

Ja.

So sieh noch einmal von Anfang. Wenn das Eins *ist*, ist es dann wohl möglich, daß es zwar ist, aber kein Sein an sich hat?

Nicht möglich.

Also gibt es doch ein Sein des Eins, das nicht einerlei ist mit dem Eins: denn sonst wäre das Sein nicht dessen Sein, und das Eins hätte nicht das Sein an sich, sondern es wäre ganz einerlei zu sagen: Eins ist und Eins eins. Das ist aber nicht unsere Voraussetzung, wenn Eins eins, was alsdann folgt, sondern wenn Eins ist. Nicht so?

Allerdings.

So demnach, daß das Ist etwas anderes bedeutet als das Eins?

Notwendig.

Wird also wohl etwas anderes, als daß das Eins das Sein an sich hat, gemeint, wenn jemand zusammengefaßt sagt, Eins ist?

Dieses freilich.

Noch einmal also laß uns sagen, wenn Eins ist, was daraus folgen wird. Sieh also zu, ob nicht notwendig diese Voraussetzung das Eins als ein solches zeigt, welches Teile hat?

Wie doch?

So. Wenn das Ist dieses Seienden Eins genannt wird und das Eins, dieses einen Seienden, es ist aber nicht dasselbe, das Sein und das Eins, sondern nur desselben, eben jenes Vorausgesetzten, des seienden Eins, ist dann nicht notwendig das seiende Eins das Ganze? Und werden nicht das Eins und das Sein hiervon Teile?

Notwendig.

Wollen wir nun jeden dieser Teile nur Teil nennen, oder müssen wir nicht den Teil, Teil des Ganzen nennen?

Des Ganzen.

Und ein Ganzes ist doch, was Eins ist und was Teile hat?

Allerdings.

Wie nun? Wird wohl einer von diesen beiden Teilen des seienden Eins, das Eins und das Seiende, jemals ablassen, das Eins von dem Teil „Sein“ oder das Seiende von dem Teil „Eins“?

Das wird nicht geschehen.

Also hält auch wieder jeder von diesen Teilen das Eins fest und auch das Seiende. Und so entsteht zum wenigsten der Teil wieder aus zwei Teilen. Und so immer auf dieselbe Art, welcher Teil gesetzt wird, hält immer diese beiden Teile. Denn das Eins hält immer das Seiende und das Seiende das Eins, so daß notwendig, was immer zu zweien wird, niemals Eins ist. Auf alle Weise freilich.

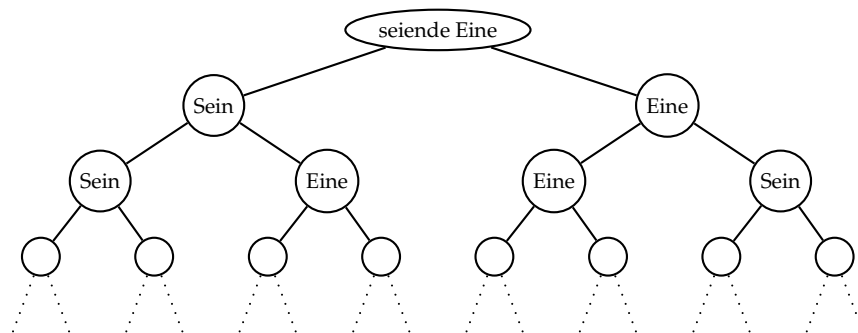
Ist also nicht auf diese Art das seiende Eins unendlich der Menge nach?

So scheint es wenigstens.

*Parmenides 142b-143a*

Wie ist es aber zu verstehen, dass es «von unendlicher Menge» sein soll, denn die aufsteigende Reihe der Zahlen ist noch gar nicht eingeführt? In *Parm 137d* wurde das Unbegrenztsein im wörtlichen Sinne erklärt als keine Grenzen haben. Was keinen «Anfang» und kein «Ende», also keine zwei Grenzmomente, hat ist unbegrenzt.<sup>40</sup> Ein Ganzes zweier Teile hat strukturell gesehen drei Momente, wobei sich die zwei Teile in ähnlicher Weise auf das Ganze (ihre «Mitte») beziehen und sie insofern begrenzen. Das eins Seiende ist demnach begrenzt. Hier wird auch nur behauptet, dass es «der Menge nach unbegrenzt» (ἄπειρον ἂν τὸ πλῆθος) sei, was so zu verstehen ist, dass es keine Grenzen in den Teilen gibt. Jeder Teil des Einen Seienden ist nicht einer, so dass kein Teil als eine Grenze der anderen dienen kann. Da anscheinend die Teile des Einen Seienden zerfallen, insofern die Teile von Teilen des Einen Seienden auch Teile des Einen Seienden sind, sind die Teile des Einen Seienden unbegrenzt und, wie sich später zeigen wird, fähig alle (natürlichen) Zahlen aufzunehmen, und deshalb auch der Anzahl nach unendlich.

Aus einem mathematischen Blickwinkel erscheint der Teilungsprozess eine Baumstruktur zu besitzen:<sup>41</sup>



Die Menge der Astgabelungen ist dabei unendlich, genauer abzählbar unendlich, während die Menge der Äste, d.h. der Wege durch den Baum, von größerer Unendlichkeit, nämlich der Mächtigkeit der Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge ist. Wie ‚unendlich‘ diese Potenzmenge tatsächlich ist, ist in der Mathematik eine ungelöste Frage, die manche Forscher für unbestimmt und in diesem Sinne für unlösbar halten. Insofern man zwar von dem Einen Seienden ausgeht, aber man es eigentlich durch die Angabe der Teile als Ganzes zu fassen bekommen möchte, ergibt diese stete Teilung eine unfundierte Struktur, die keinen eigentlichen Ausgangspunkt hat. Die absteigende Reihe der negativen Zahlen  $\dots < -2 < -1$  hat zwar kein kleinstes Element, die größeren Zahlen beruhen aber auch nicht auf den kleineren. Anders ist es in der Mengenlehre, in der unfundierte Mengen oftmals von der Untersuchung ausgeschlossen werden, weil sie dem gewöhnlichen Mengenverständnis, dass eine Menge eine Zusammenfassung gegebener Dinge sei, suspekt erscheinen.<sup>42</sup> Wie sollte eine Menge Element seiner selbst sein, was ist das für eine Menge, die nur sich selbst enthält, und gibt es da mehrere davon?

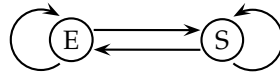
40 Siehe genaueres in Abschnitt 1.3.7.

41 Blau 2008, S. 116f., nennt die anschauliche Seite dieses eigentlich abstrakten mathematischen Objekts «Dualbaum».

42 Zum Umgang mit unfundierten Mengen siehe Abschnitt 5.5.

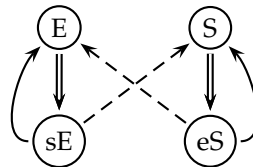
Wenn man diese Mengen aufgrund ihrer Elemente verstehen möchte, so scheitert man, weil sie selbst zu ihren Elementen zählt.<sup>43</sup>

Die Struktur, die sich aus der Einheit und dem Sein als zwei verschiedenen Ideen und ihrem Bezug durch die Teil-Ganzes-Relation ergibt, lässt sich folgendermaßen darstellen, wobei ein Pfeil soviel bedeutet wie „ein Teil von ihm ist“:



Modelliert man diese Ganzes-Teil-Beziehung mengentheoretisch als  $\in$ -Beziehung, so wären  $E = \{E, S\}$  und  $S = \{E, S\}$  unfundierte Mengen, die allerdings, wenn man daran festhält, dass sie verschieden sind, das Extensionalitätsprinzip verletzen. D.h., obwohl sie genau die gleichen Elemente besitzen, nämlich  $E$  und  $S$ , sind sie unterschiedlich. Das wird in der mathematischen Mengentheorie nur in eingeschränkten Ausnahmefällen zugelassen; z.B. bei sogenannten Urelementen, die, weil sie keine richtigen Mengen sind, sondern eine Art Modellierung der außermengentheoretischen Dinge in der Mengentheorie, auch alle keine Elemente besitzen und somit extensional gleich der leeren Menge sind. Für gewöhnlich würde demnach in der Mengenlehre gelten  $E = S = \{E\} = \{S\}$ , und  $E$  wäre die (oder eine) Menge, die nur sich selbst enthält. Diese Struktur kommt aber für die Teil-Ganzes-Beziehung nicht in Frage, weil dann etwas sich selbst als einzigen Teil enthalten würde. Sie ist aber so konzipiert, dass es mehrere Teile sein müssen. Somit ist die strikte Trennung von Einheit und Sein (142bc) notwendige Voraussetzung für die Teilungsüberlegungen.

Die bisherige mengentheoretische Modellierung ist in einem weiteren Punkt ungenau. Das Verhältnis der beiden Teile ist gewichtet, insofern für das seinende Eins Einheit und Sein Teile sind, weil die Einheit am Sein teilhat, und entsprechend für das eins Seiende. Man kann für  $E$  und  $S$  daher geordnete Tupel nehmen:  $E = (E, S) = ((E, S), (S, E))$  und  $S = (S, E) = ((S, E), (E, S))$ , die auch unter einem Extensionalitätsaxiom nicht identisch sein müssen. Wenn man zudem die Identifizierung von Sein und eins Seiendem bzw. Einheit und seiendem Eins explizit macht, sieht es graphisch so aus:



Aus dieser Graphik ist der iterierende Gedankengang zu entnehmen über die Teile des eins Seienden. Unterstellen wir der zweiten *hypothesis* zudem, dass in ihr gefordert ist alles nur relational zu verstehen – also eine Art strukturalistischen Standpunkt –, dann bildet die Graphik die innere Struktur der beiden Ideen ab. Diese wäre essentiell selbstbezüglich. Ein rein strukturalistischer Standpunkt ist hier aber wiederum nicht möglich, weil Sein und Einheit strukturell isomorph sind und damit identisch wären. Zwar werden in der Mathematik auch viele symmetrische Strukturen, d.h. Strukturen, deren eine ‚Hälfte‘ isomorph ist zur anderen und auf denen deshalb mehr Automorphismen als die Identität existieren, betrachtet, das Problem, wie man in diesen dann eindeutig auf ein Strukturmoment in der einen Hälfte referieren können soll, wurde bereits von Frege erkannt und wird auch aktuell noch diskutiert (siehe Abschnitt 2.4). Vom Gesichtspunkt aus, was bei einer Überlegung gedanklich vorausgesetzt wird, ist es so, dass man bei dem Gedanken an zwei isomorphe Strukturen, die nicht identisch sind, noch etwas dazugedacht haben muss, um sie voneinander unterscheiden zu können, im Unterschied zum Durchdenken einer einzelnen dieser Strukturen. Die eine Struktur muss demnach erst für sich durchdacht werden können, bevor sie durch weitere gedankliche Zusätze ‚vervielfältigt‘ wird. Die

<sup>43</sup> Eine im folgenden ausgeklammerte Eigenschaft, weil mengentheoretisch nicht direkt gegeben im Unterschied zur Teil-Beziehung in der Mereologie, ist, dass Teile eines Ganzen auch Teile des Ganzen sind, von dem das erste Ganze Teil ist.

Einheit mit reinem Selbstbezug zu denken, ist aber nicht möglich, einmal aufgrund der Ganzes-Teile-Relation, die mehrere Teile verlangt, aber vor allem auch weil die Ganzes-Teile-Relation keinen direkten Selbstbezug zulässt (z. B. im Gegensatz zur Idee von In-sich-selbst-sein Parm 138ab). Fällt aber das Sein als anderes Strukturmoment weg, gibt es kein seiendes Eines, das vom Einen als anderem Strukturmoment ersteinmal unterschieden wäre. Zum Aufbau der verwendeten Struktur von seiendem Einen oder eins Seiendem sind also zuvor unterschiedene – und möglicherweise inhaltlich bestimmte – Ideen von Einheit und Sein nötig.

Das entspricht der allgemeinen These (aus Abschnitt 1.3.9), dass die Spiegelungen und Urbild-Abbild-Beziehungen als Wechselspiel der Bestimmung von Einzelnen durch Relationen und von Relationen durch Einzelne zu interpretieren ist. Die Ideen der ersten *hypothesis* dienen in der zweiten zur Setzung der Strukturmomente der jetzt zu untersuchenden Beziehungen zwischen den dann auch (zum Teil) relational gefassten Ideen.<sup>44</sup>

Das seiende Eine ist begrenzt, insofern seine zwei Teile seine zwei Grenzmomente sind und es selbst das Begrenzte, die Mitte zwischen den Grenzen, ist. Als zirkuläre Struktur zweier austauschbarer Momente ist das seiende Eine unbegrenzt, da ein drittes Moment, dass das sein könnte, was begrenzt wird, fehlt. «Der Menge nach» unbegrenzt wird diese Struktur jedoch, wenn durch den Ganzes-Teile-Begriff der Selbstbezug vermittelt wird. Denn mit ihm wird das erste Ganze festgehalten, das zwei Teile hat, die, jeweils wiederum als Ganze betrachtet, jeweils zwei Teile haben und entsprechend weiter. Dass es tatsächlich immer entsprechend weiter geht, wird durch die oben dargestellte zirkuläre Grundstruktur gewährleistet. Damit wird ähnlich der vollständigen Induktion, bei der über den allgemeinen Nachfolgerschritt und dem Vorliegen eines Sachverhalts für den Ursprung auf die allgemeine Gültigkeit geschlossen wird, hier durch die Einsicht in einen zirkulären begrifflichen Zusammenhang und dessen schrittweise wiederholende Entfaltung eine Unendlichkeit an Teilen konstituiert.<sup>45</sup>

#### 4.4.3 Multiplikation in «Parmenides» 143a–144a

Das grundsätzliche Vorgehen ist nun so, aus Überlegungen anhand von Einheit, Sein und Verschiedenheit und einem kardinalen Zahlbegriff von 1, 2 und 3 die Multiplikation und alle Zahlen zu konstituieren. Dafür wird zunächst, nachdem die Relation zwischen Einem und Sein insofern durchdacht wurde als sie eine neue Idee ‚schafft‘ und das Eine und das Sein damit gewissermaßen zu einem vereinheitlicht, nun von Parmenides die Relation zwischen Einem und Sein betrachtet, insofern sie die beiden Ideen einander als verschiedene gegenüberstellt.

Sieh nun auch noch dieses.

Welches?

Das Eins, sagen wir, habe Sein an sich, weil es ist.

Ja.

Und deshalb ist uns das seiende Eins als Vieles erschienen?

So ist es.

Wie nun? Das Eins selbst, welchem wir das Sein zugeschrieben, wenn wir dies in unserm Verstande allein nehmen, ohne dasjenige, was es, wie wir sagen, an sich hat, wird es uns so wenigstens nur als eins erscheinen oder auch so an sich selbst als Vieles?

Als Eins, glaube ich wenigstens.

*Parm 143a*

<sup>44</sup> Es kommt hier noch eine andere allgemeine These zum tragen (siehe Abschnitt 5.6). Aus kulturhistorischer und zahlensymbolischer Sicht beendet die erste Spaltung die Ruhe der Einheit, zerstört die Harmonie und sät Zwietracht und Zweifel. Diese Kraft stellt PLATON im Denken dar, indem er durch die Vorgabe, alles relational zu denken, die Einheit als seiende Eins und das Sein als eins Seiendes zu analysieren vorschreibt, und dadurch eine Teilung aller zunächst als Einzelne und als einheitlich gedachten Teile in Gedanken vollzogen werden muss. Damit verknüpft er auch in diesem Detail den *nous* mit der *dianoia*, das Mystisch-Esoterische mit dem Gedanklich-Rationalen.

<sup>45</sup> Vgl. Abschnitt 4.2.7.



Das Eine wird nun für sich genommen, aber nicht wie in der ersten *hypothesis* total und ‚von innen‘, sondern, wie sich durch die Weise, wie es im folgenden begrifflich behandelt wird, zeigt nur als getrennt vom Sein und ‚von außen‘.<sup>46</sup>

Die Frage des Parmenides ist jetzt, ob auch dieses getrennt genommene Eine irgendwie doch Vieles ist – und ein Seitenblick auf die antike Konzeption von Zahlen als eine Art Mengen von Einheiten lässt eine Bejahung der Frage ahnen.

Laß uns also sehen. Ist nicht notwendig das Sein desselben etwas anderes und es selbst auch etwas anderes, wenn doch das Eins nicht das Sein ist, sondern nur als Eins das Sein an sich hat?

Notwendig.

Ist nun das Eins etwas anderes und das Sein etwas anderes, so ist weder vermöge des Einsseins das Eins von dem Sein verschieden, noch vermöge des Seins das Sein von dem Eins, sondern vermöge des Verschiedenen und Anderen sind sie verschieden voneinander.

Allerdings.

So daß das Verschiedene weder mit dem Eins noch mit dem Sein einerlei ist?

Wie sollte es auch?

*Parm 143b*

Diese kurze Passage ist – entgegen dem ersten Eindruck – zentral für das folgende. Zunächst werden die beiden Grundideen der zweiten *hypothesis* nicht verschmolzen, sondern gegenübergestellt als getrennt bestimmte. Damit hat man aber im Unterschied zu *Parm 142b-143a* eine *bestimmte* Zweiheit, oder die (Zahl)Idee der Zwei, während man in der ersten *hypothesis* die Ideenzahl Zwei in der Ganzes-Teil-Idee hatte.

Entscheidend ist weiter, dass diese Idee der Zwei bereits ein drittes Moment ‚nötig‘ macht. Die Idee der Verschiedenheit macht die Trennung von Eins und Sein erst möglich und ist nicht dasselbe wie das Eine oder das Sein. Damit hat man aber eine strukturierte erste Dreiheit, die Idee der Dreiheit. Diese enthält als Ideen alle ideellen Bestimmungen, die etwas anderes haben muss, um als drei und um überhaupt zahlenmäßig bestimmt zu sein: Die einzelnen Einheiten sind verschieden gegeneinander. Dass sie *gegeneinander* unterschieden sind, ist die Einheit der einzelnen Einheiten.

Die Gedankenfigur: Erst Eines, dann ein davon Unterschiedenes, und dann die Verbindung; dieser Dreierschritt findet sich öfters in der Geschichte der Philosophie. Mit ihm kommt der Gedanke, dass beim zweiten Schritt noch etwas fehlt, und der dritte Schritt dies einlöst und den Vorgang abschließt. In ähnlicher Weise geht Parmenides hier von der Zwei zur Drei über, indem er nur eine bereits benutzte ideelle Bestimmung zu Bewusstsein bringt und in die Überlegung mit aufnimmt.

Wie nun, wenn wir aus diesen herausnehmen, wie du willst, das Sein und das Verschiedene, oder das Sein und das Eins, oder das Eins und das Verschiedene, haben wir nicht in jedem Falle herausgenommen, was wir mit Recht beides nennen können?

Wie doch?

So. Kann man sagen Sein?

Ja.

Und hernach auch wieder sagen Eins?

Auch dieses.

Ist nicht so jedes von ihnen besonders gesagt?

<sup>46</sup> Man würde nach der allgemeinen These aus Kapitel 1.3 erwarten, dass hier für die Bestimmung des Einen als Einem auf die erste *hypothesis* Bezug genommen wird. Stattdessen legt der Ausdruck «in unserm Verstande allein» (... *διανοία* ...) nahe, dass man das Eine zuvor im Kontext des Linienabschnittes 6 betrachtet habe, in dem es stets auch Vieles ist, es jetzt aber im Kontext der *dianoia* und damit von Seinsbereich 3 bestimmen wolle. Die direkte Parallele zwischen Liniengleichnis und *Parmenides* würde nach unserer Interpretation für die erste *hypothesis* den Ausdruck „nous“ erwarten lassen. Allerdings ist gerade aus epistemischen Erwägungen zu erwarten, dass hier in der zweiten *hypothesis*, wenn es um reine Ideen und ihre Zusammenhänge geht, diese nur gespiegelt vermittelt werden können. Der inhaltliche Bezug hier in der zweiten *hypothesis* auf die erste wird demgemäß inhaltlich anhand eines Bezuges aus Linienabschnitt 6 auf 3 dargestellt.

Ja.

Wie aber, wenn ich sage Sein und Eins, ist dann nicht beides gesagt?

Freilich.

Also auch, wenn ich Sein und Verschiedenes sage oder Verschiedenes und Eins, sage ich doch auch so gewiß jedesmal beides?

Ja.

*Parm 143bc*

Der Aristoteles genannte Gesprächspartner des Parmenides versteht nicht, wie oder inwiefern die herausgenommenen Ideen jeweils als «beide» zu benennen sind. Parmenides erklärt es ihm mit Hilfe eines Sprachbeispiels darüber, was man sagen kann. Steht aber das, was wir sagen können, mit den hier besprochenen Ideenverbindungen überhaupt im Einklang?

Gegenüber den vorher inhaltlich getragenen Überlegungen scheint hier ein willkürliches Element ins Spiel zu kommen, es werden zwei Ideen willkürlich herausgenommen («wie Du willst»), und sie *können* zudem beliebig ausgewählt werden, ohne dass der folgende Gedankengang gefährdet wird. Das liegt daran, dass es in diesem Zusammenhang nicht auf ihre inhaltlich bestimmte Beziehung ankommt, sondern darauf, dass sie beide *eins* sind und etwas *sind* und *verschieden* sind – alle drei Ideen haben die jeweils anderen und sich selbst an sich. Und jede lässt sich in Bezug auf jede einzelne der anderen betrachten, sie stehen in der Beziehung der Verschiedenheit.

Diese Verschiedenheit und Trennung bringt der äußerliche Bezug, den die Sprache auf die Ideen hat, gut zur Vorstellung. Einzelnen Worten sind andere Worte egal, ob sie alleine oder zusammen mit anderen ausgesprochen werden, ist ihnen äußerlich (aber natürlich nicht dem Satzzusammenhang).

Jetzt werden zum ersten Mal im zweiten Teil des *Parmenides* weitere Zahlen genannt.

Was aber mit Recht beides genannt wird, kann das wohl beides zwar sein, nicht aber zwei?

Unmöglich.

Was aber Zwei war, muß davon nicht jedes für sich Eins sein?

Das ist nicht zu vermeiden.

Da also diese je zwei zusammen sind, so muß auch jedes für sich Eins sein.

Offenbar.

*Parm 143d*

Nach den *Elementen* (VII D1) sind die mathematischen Zahlen Mengen von Einheiten. Rein begrifflich genommen entsteht bei dieser und ähnlichen Bestimmungen das Problem, dass man beliebig viele Einheiten hat, die nicht über ihr Einheiten-Sein hinaus bestimmt sind, sich aber voneinander unterscheiden müssen, da sie mehrere sind.<sup>47</sup> Im mathematischen Bereich (das sind die Seinsbereiche 3 und 4 nach Abschnitt 1.3.1) gibt es sozusagen eine geometrische ‚Materie‘, die Ausdehnung und geometrische Objekte, in deren Kontext dieser Zahlbegriff wohlbestimmt ist. Eine mathematische Zahl als Menge von Einheiten ist ein geometrisches Ganzes mit Teilen, die nur in Hinsicht auf ihre Teilhabe am Einen betrachtet werden.<sup>48</sup>

Zunächst ist die Zwei selbst drei, als sie aus zwei voneinander unterschiedenen, seienden Einheiten besteht. Wie die Einheiten weiter bestimmt sind, ist unbedeutend für die Frage, ob es zwei sind oder nicht. Deswegen sind auch Sein und Verschiedenheit als durch die Verschiedenheit aufeinander bezogene zusammen zwei und entsprechend alle aufeinander bezogene (Teil-) Ideen.

47 Vgl. Frege 1987, §§ 34–39.

48 Insofern die Idee der Zwei bereits konstituiert wurde, wird sie hier in ihrem Zusammenspiel mit den anderen Ideen und sich selbst gezeigt. Wie dieses Zusammenspiel genauer zu fassen ist, wird wohl weniger durch die Teilhabe-Beziehung als durch die Ausführungen in der berühmten Passage in *Sophistes* 253d beschrieben: «Fremder: Wer also dieses gehörig zu tun versteht, der wird eine Idee durch viele einzeln voneinander gesonderte nach allen Seiten auseinandergebreitet genau bemerken, und viele voneinander verschiedene von einer äußerlich umfaßte, und wiederum eine durchgängig nur mit einem aus vielen verknüpfte, und endlich viele gänzlich voneinander abgesonderte.»

Wenn aber jedes Eins ist und wir dann zu irgendeiner von den vorigen Verbindungen irgendeins hinzusetzen, wird dann nicht das gesamte notwendig Drei?

Ja.

Und ist nicht Drei ungerade und Zwei gerade?

Wie anders?

*Parm 143d*

Die Verbindung von Einheit und Sein war ohne die Idee der Verschiedenheit noch unbestimmt, erst mit ihr sind sie sauber getrennt, und jedes Paar dieser nun drei Ideen ist eine (kardinale) Zwei. Kommt das jeweils Fehlende hinzu ergibt sich die erste Drei. Diese unterscheidet sich um eine Einheit von der Zwei. Wichtig ist dabei, dass die Zwei sich quasi erst durch die Drei bestimmen lässt, insofern erst noch die Idee der Verschiedenheit hinzukommen muss, damit sich die Zwei nicht nur unbestimmt denken lässt. Damit hat die Drei, obwohl sie begrifflich eigentlich nach der Zwei steht, zugleich ein Übergewicht, als erst mit ihr die Zwei verständlich wird. Die Ideenbewegung läuft notwendig bis zur Drei und rundet sich erst in ihr erstmalig ab.<sup>49</sup>

Diese erste (kardinale) Drei und Zwei sind nun ungerade und gerade, als sie diese Eigenschaften in paradigmatischer Weise verkörpern. *Gerade* bedeutet für Zahlen *halbierbar*, und *ungerade* sind Zahlen, die um eine Einheit mehr sind als eine gerade Zahl.<sup>50</sup>

Und wie wenn es Zwei gibt, muß es nicht auch notwendig zweimal geben? Und wenn Drei dreimal? Wenn doch in Zwei zweimal Eins steckt und in Drei dreimal Eins?

Notwendig.

*Parm 143de*

Die Multiplikation scheint für PLATON in den kardinalen Zahlideen enthalten zu sein. Zunächst unterscheidet man traditionell, wenn auch nicht mehr in der akademischen Mathematik, die beiden bei einer Multiplikation beteiligten zwei Zahlen ihrer Funktion nach, wie es die deutsche Sprache auch widerspiegelt. Z. B. wird etwas *zweimal* genommen und etwas anderes *dreimal*. Diese beiden Multiplikationen sind diesem Verständnis nach grundsätzlich verschieden, auch wenn das Ergebnis das Gleiche ist, weil beim ersten die Zahl Drei zweimal genommen wird und beim zweiten die Zwei dreimal. Die Multiplikation ist – von unserem abstrakten Standpunkt aus – noch in der zweiten Zahl absorbiert. Sie ist in dieser Form eine ‚Kraft‘, die auf eine Zahl wirkt.<sup>51</sup>

Nun werden die Multiplikation mit Zwei und Drei mit sich selbst und dem Gerade- und Ungerade-Sein verknüpft.

(1) Wenn aber Zwei und zweimal ist, ist dann nicht auch notwendig zweimal zwei? Und wenn Drei und dreimal, dann nicht auch notwendig dreimal drei?

Wie anders?

(2) Und wie wenn drei ist und zweimal und so auch zwei und dreimal, ist dann nicht notwendig auch zweimal drei und dreimal zwei?

Gar sehr.

(3) Also ist auch Gerades gerademal und Ungerades ungerademal und Gerades ungerademal und Ungerades gerademal.

So ist es.

(4) Wenn es sich nun so verhält, glaubst du, daß irgendeine Zahl übrigbleibt, welche es nicht notwendig geben muß?

Keine gewiß.

49 Dieser Gedankengang steht im Kontext der griechischen Bewertung des Ungeraden als des Positiven und des Ungeraden als des dazu weniger Werten. Eine ideelle Begründung dafür scheint PLATON hier im *Parmenides* anzudeuten.

50 Vgl. die *Elemente* (VII D6/7), *Nomoi* 895.

51 Man beachte diesbezüglich, dass die frühgriechische Geometrie einen Handlungsaspekt mit einschließt, und damit auch einen Bezug zu Kräften und Wirkungen hat. Für die frühgriechische Geometrie ist das die Konstruktion (in der Welt oder in der Phantasie) der geometrischen Objekte in den Diagrammen; siehe Catton und Montelle 2012.

Wenn also Eins ist, so ist notwendig auch Zahl.

Notwendig.

*Parm 143e-144a*

Die erste Interpretation ist die, der nach in (1) nachgewiesen wird, dass es die 4 und 9 gibt, nach (2) gebe es die 6, und in (3) wird das verallgemeinert auf alle Zahlen, in deren Primzahldarstellung nur Zweier- und Dreierpotenzen vorkommen. (3) scheint auch noch dazu dienen zu können, alle Zahlen, die man durch Multiplikation erreichen kann, abzudecken, aber auf jeden Fall wird so die Existenz der Primzahlen bis auf die 2 und die 3 nicht nachgewiesen. Der Schluss darauf, dass es damit alle Zahlen geben muss (4), ist verfehlt.

Man kann auf verschiedene Weise versuchen, diese Lücke in der Folgerung zu schließen. Am plausibelsten erscheint mir aufgrund der vorangegangenen Erläuterungen das Folgende: Die Ideen der Zwei und Drei sind paradigmatisch das Gerade und Ungerade, was den Übergang von (1) und (2) zu (3) rechtfertigt. In (3) sind nun, wenn man die entsprechenden Negationen hinzunimmt, letztlich die Arten der Zahl niedergelegt, die inhaltlich mit der Primzahlzerlegung der Zahlen zu tun haben, wie in Abschnitt 4.4.1 dargestellt, und damit tatsächlich einen mathematisch nachvollziehbaren Sinn haben. Nun könnte man versuchen, (4) so zu interpretieren, dass damit nur Zahlarten gemeint sind, insofern sie sich aus Kombinationen der Möglichkeiten in (3) (und ihrer Negationen) ergeben. Dieser Interpretationsmöglichkeit steht aber entgegen, dass zuvor – wie erwähnt – Aspekte eines Kardinalzahlbegriffs verwendet wurden, nämlich das Zahl – abstrakt gesprochen – die äußerliche Verbindung Einzelner voraussetzt, und für die Zwei und Drei das Zutreffen dieser Voraussetzung verifiziert wurde. Deswegen kommt m. E. im Schluss auf (4) noch das Ergebnis aus Abschnitt 4.4.2 als Prämisse zum Tragen, dass es unendlich viel, etwas der Menge nach Unbegrenztes gibt. Damit sind nun die ideellen Voraussetzungen für jede natürliche Zahl gegeben und die natürlichen Zahl ideenmäßig konstituiert, auch wenn sich aus (4) noch nicht direkt die Existenz jeder einzelnen Zahl folgern lässt.<sup>52</sup>

Insofern es hier im *Parmenides* um die Konstitution von Ideen geht und keine fertigen Begriffe der natürlichen Zahl vorausgesetzt werden, ist (4) keine Folgerung, sondern die Setzung der Zahlideen, indem festgelegt wird, dass mit (3) und dem Gegebensein einer Unendlichkeit die Zahlideen soweit ideell konstituiert wurden, wie man sie im allgemeinen konstituieren kann. In den modernen Kontext der Diskussion um die Standardizität der arithmetischen Operationen übersetzt entspricht das dem, dass man die Multiplikation auf einer durch die Iteration der Zweierpotenz gewonnenen Menge unendlich vieler ‚Zahlen‘ als total axiomatisiert.

#### 4.4.4 Vollständige Induktion in «Parmenides» 149a-c

Die Potenzierung und die Multiplikation sind nun im *Parmenides* in gewisser Weise behandelt worden, nun stände die Addition an der Reihe. Tatsächlich kommt nun in *Parm 149a-c* ein Argument über eine vollständige Induktion zum Tragen.

... (1) was berühren soll, muß außer, aber dicht an dem zu Berührenden sein, und kein Drittes darf zwischen ihnen sein.

Wahrhaftig.

(2) Zwei also müssen aufs wenigste sein, wenn es eine Berührung geben soll.

Gewiß.

(3) Wenn aber zu den zwei Gliedern der Reihe nach ein Drittes hinzu kommt, so werden sie selbst drei sein, der Berührungen aber zwei.

<sup>52</sup> Man beachte die genaue Formulierung in (4). Das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten gilt in Kontexten, in denen Ideen erst entwickelt werden, nicht grundsätzlich.

Ja.

(4) Und so wird zu diesen immer mit *einem* Hinzukommenden auch *eine* Berührung hinzukommen, und es folgt, (5) daß die Berührungen der Zahl nach um Eins weniger sind als die Menge. (6) Denn um wieviel die ersten zwei die Berührungen übertrafen, so daß sie der Zahl nach mehr waren als diese, (7) um ebensoviel wird auch die ganze folgende Zahl [der Dinge die Zahl] alle[r] Berührungen übertreffen. (8) Denn wenn fernerhin Eins zu der Zahl hinzu kommt, dann auch eine Berührung zu den Berührungen.<sup>53</sup>

Richtig.

(9) Wieviel also die Dinge (das Seiende) der Zahl nach sind, stets sind die Berührungen um eine weniger.

Wahrhaftig.

“Ὅτι, φαμέν, τὸ μέλλον ἄψεσθαι χωρὶς ὃν ἐφεξῆς δεῖ ἐκείνω εἶναι οὐ μέλλει ἄπτεσθαι, τρίτον δὲ αὐτῶν ἐν μέσῳ μηδὲν εἶναι. - Ἀλητῆ. - Δύο ἄρα δεῖ τὸ ὀλίγιστον εἶναι, εἰ μέλλει ἄψις εἶναι. - Δεῖ. - Ἐὰν δὲ τοῖν δυοῖν ὅροις τρίτον προσγένηται ἐξῆς, αὐτὰ μὲν τρία ἔσται, αἱ δὲ ἄψεις δύο. - Ναί. - Καὶ οὕτω δὴ αἰ ἐνὸς προσγιγνομένου μία καὶ ἄψις προσγίγνεται, καὶ συμβαίνει τὰς ἄψεις τοῦ πλήτους τῶν ἀριθμῶν μιᾷ ἐλάττους εἶναι. ᾧ γὰρ τὰ πρῶτα δύο ἐπλεονέκτησεν τῶν ἄψεων εἰς τὸ πλείω εἶναι τὸν ἀριθμὸν ἢ τὰς ἄψεις, τῷ ἴσῳ τούτῳ καὶ ὁ ἔπειτα ἀριθμὸς πᾶς πασῶν τῶν ἄψεων πλεονεκτεῖ ἤδη γὰρ τὸ λοιπὸν ἅμα ἐν τε τῷ ἀριθμῷ προσγίγνεται καὶ μία ἄψις ταῖς ἄψεσιν. - Ὁρθῶς. - Ὅσα ἄρα ἐστὶν τὰ ὄντα τὸν ἀριθμὸν, αἰ μιᾷ αἱ ἄψεις ἐλάττους εἰσὶν αὐτῶν. - Ἀλητῆ.  
Parm 149a4-c4

In (1) wird ‚berühren‘ durch zwei notwendige Bedingungen näher bestimmt. Damit eine Berührung erfolgt, muss es (I) ein aktives Berührendes getrennt von einem passiv Berührten geben, und darf es (II) dazwischen nichts anderes Drittes geben. Aus (I) folgt direkt, dass es für eine Berührung immer zwei sein müssen, also (2) (das bereits in 149a2-3 begründet wird). Mit (II) folgt (3), dass, wenn ein Drittes angefügt wird, es nur eines der beiden berührt. Denn würde es beide berühren (s. Abb. 4), befände sich das jeweils andere zwischen ihnen, da es von beiden berührt wird. Dies schließt (II) aber aus. Allgemeiner: Fügt man zu einer miteinander verbundenen Vielzahl, in der jedes mittelbar über andere mit jedem verbunden ist, ein weiteres hinzu, entstände, wenn es mehr als eine Berührung hinzubrächte, (mindestens) ein Berührungszirkel, der durch (II) ausgeschlossen wird. Damit lässt sich (3) verallgemeinern zu (4), nämlich dass gerade *eine* Berührung mit jedem Weiterem, dass ja die bereits Vorhandenen berühren soll, hinzukommt. Daraus folgt, so wird mit (5) behauptet, dass die Anzahl der Berührungen stets um eins kleiner ist als die Anzahl der Dinge. Denn, so die Begründung des Schlusses von (2)–(4) auf (5), jeder beliebige Unterschied in der Anzahl der Dinge und der Berührungen, der zu Beginn feststand, bleibt nach (7) bei allen folgenden Anzahlen erhalten. Denn es kommen jedesmal eine gleiche Zahl an Dingen und Berührungen, wie (8) festhält und damit (4) wiederholt. In (9) wird das Ergebnis in Wiederholung von (5) in seiner Allgemeinheit abschließend statiiert.



Abb. 4

Parm 149a-c ist damit die erste nachweisbare bewusste Anwendung der vollständigen Induktion über die natürlichen Zahlen,<sup>54</sup> insofern sie den dafür notwendigen und hinreichenden Bedingungen genügt:<sup>55</sup> Erstens wird der Induktionsanfang gemacht, indem für die Fälle mit zwei Dingen gezeigt wird, dass die Berührungen eine weniger als die Dinge sind (siehe (2)). Zweitens wird der der Induktionsschritt zunächst an einem Beispiel vollzogen (siehe (3)), nämlich, wenn zwei Dinge sich einmal berühren, so berühren sich drei Dinge zweimal, weil mit dem Dritten Ding auch genau eine Berührung hinzukommt. Diese letzte Begründung des konkreten Induktionsschrittes wird in (4) bzw. (8) verallgemeinert und bietet damit den Beweiskern des (allgemeinen) Induktionsschrittes. Drittens wird der Induktionsschritt in (6) und (7) als unabhängig vom konkreten anfänglichen Unterschied erkannt und dargestellt. Viertens wird das Resultat in seiner Allgemeinheit behauptet (siehe (9)).

53 Die folgende Übersetzung orientiert sich an der von Acerbi 2000, S. 64. Siehe dort (Acerbi 2000, S. 65ff.) die Diskussion der sprachlichen Schwierigkeiten.

54 Es ist aber nicht nur die erste überlieferte Quelle, sondern für die Antike auch die einzige (ausführliche) (siehe Acerbi 2000, S. 64).

55 Siehe Acerbi 2000, S. 60, 65ff..

Was in *Parm 149a-c* zum ersten Mal auftritt ist die Wiederholung einer  $+1$ -Operation. Im vorausgehenden Text bereits entwickelt sind die kardinalen *Zahlen* als Anzahlen von Mengen, *Berührung* als eine äußerliche Verbindung zwischen Dingen, zwischen denen sich nichts anderes befindet, und *Seiendes* (Dinge oder etwas), das sich der Menge nach unbegrenzt gezeigt hat.

Als erstes ist offensichtlich, dass die hier angewandte Induktion sich von der modernen stark unterscheidet. Der Induktionsschluss nach (3) bzw. **Ind** ist

$P(0)$

Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt: Wenn  $P(n)$  dann auch  $P(n')$

---

Für alle natürlichen Zahlen  $n$  gilt:  $P(n)$

Hierbei läuft die vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen, beweist Eigenschaften von ihnen und hat als zweite Prämisse, dass die Eigenschaft von der Nachfolgerfunktion  $'$  ‚respektiert‘ wird. In *Parm 149a-c* dagegen erfolgt die Induktion über sich berührendes Seiendes, während die Differenz ihrer zahlenmäßigen Bestimmung – die Differenz zwischen der Anzahl der Dinge und der Berührungen – betrachtet wird, und zwar unter einer nicht weiter bestimmten Operation des Hinzufügens eines weiteren Dings. Vorausgesetzt wird dabei, dass sich die berührenden Dinge jeweils zahlenmäßig bestimmen lassen und somit eine Art kardinaler Zahlen. Die Induktion wird in *Parm 149a-c* demnach nicht benutzt, um die (kardinalen) Zahlen überhaupt mit zu bestimmen (wie in Abschnitt 4.2.1), sondern es garantiert gerade umgekehrt die zahlenmäßige Bestimmbarkeit des Seienden und der Berührungen die Durchführbarkeit dieser Induktion.<sup>56</sup>

Als zweites fällt auf, dass hier andererseits *geordnete* Zahlen bestimmt werden. Es wird dabei nicht *eine* Struktur charakterisiert, in der die Zahlen Strukturmomente sind, sondern die Zahlen für sich als *einzelne* Strukturen, insofern mit den Berührungen von Seinendem in diesem Kontext etwas ähnlich Abstraktes angesprochen wird wie mit Strukturen als Relationen auf Leerobjekten. Die Peano-Axiome als Aussagen über die Beziehungen zwischen den einzelnen Zahlen müssten sich ableiten lassen. Zum Teil ist das möglich: Die Nachfolgerfunktion  $'$  mit ihren Eigenschaften lässt sich daraus konstruieren, dass die Berührungen um jeweils eins weniger sind als die Glieder: Der Nachfolger einer Zahl hat soviele Berührungen, wie die vorhergehende Zahl Glieder. Da das Seiende unbegrenzt ist, gibt es jeweils einen Nachfolger. Die Eindeutigkeit von Vorgänger und Nachfolger ist auf dieser begrifflichen Stufe (zweite Hypothese im *Parmenides*) nicht problematisch. Die Eins hat keine Berührung und damit keinen Vorgänger.

Wie verhält es sich aber mit der Induktion? Zunächst ist zu bemerken, dass die hier durchgeführte Induktion über die Zahlen nicht eine äußerliche Eigenschaft der Zahlen betrifft, sondern gerade eine wesentliche, nämlich

(B) eine Berührung weniger zu haben als sie selbst der Anzahl nach sind.

Damit kann vor *149a-c* aber weder ein allgemeines Induktionsprinzip formuliert werden, noch kann es sich in *149a-c* um eine Anwendung des Induktionsprinzips handeln. Denn das Induktionsprinzip setzt die Nachfolgerfunktion bzw. im Kontext des *Parmenides* die zu zeigende Eigenschaft (B) voraus.

Aber auch danach scheint ein Prinzip der vollständigen Induktion nicht aufstellbar zu sein. Denn es werden die einzelnen ordinalen Zahlen entwickelt und nicht erst ein Begriff der geordneten Zahl (als linearer ‚Struktur‘ z. B., deren Berührungen um eins weniger sind als die Glieder) und dann die einzelnen Zahlen daraus spezifiziert. Denn in ihrer Entstehung wird (B) von ihnen gezeigt und nicht vorausgesetzt. Das bedeutet aber, dass es zwar eine eindeutige Kennzeichnung der geordneten Zahlen gibt, aber keine Idee. Diese Überlegungen mit den aktuellen Erkenntnissen (aus 4.2.1 und 4.2.2) in Beziehung zu bringen, steht noch aus. Dafür müsste aber die Funktion der formalen Logik geklärt werden, wozu in Kapitel 5 ein Anfang gemacht wird.

---

56 Ähnlich wie man in der Mengenlehre die (trans-) finite Induktion beweist und nicht voraussetzt.

«Philosophers in this century have suffered more than ever from the dictatorship of definitiveness. The illusion of the final answer, what two thousand years of Western philosophy failed to accomplish, was thought in this century to have come at last within reach by the slavish imitation of mathematics.

...

In one area of philosophy the program of mathematization has succeeded. Logic is nowadays no longer part of philosophy.

...

Very few logicians of our days believe that mathematical logic has anything to do with the way we think.

Mathematicians are therefore mystified by the spectacle of philosophers pretending to re-inject philosophical sense into the language of mathematical logic.

...

The fake philosophical terminology of mathematical logic has misled philosophers into believing that mathematical logic deals with the truth in the philosophical sense. But this is a mistake.»

Rota 1997, S. 92f.

# Formalisierbarkeit – die moderne Aussprechbarkeit

## Thematische Einordnung

Will man eine Brücke von der modernen Mathematik zurück zur frühgriechischen und einem antiken Verständnis von Mathematik schlagen, so steht einem die symbolisch-formale Betrachtung des zwanzigsten Jahrhunderts als Hindernis oder – je nach Sichtweise – als Aufgabe zur Bewältigung an. Die heutige Weltmathematik wird in moderner mengentheoretischer und damit letztlich in der Sprache einer formalen Prädikatenlogik erster Stufe betrieben; ihre Vertreter tendieren dazu, in allen älteren mathematischen Arbeiten Vorstufen der aktuellen Präzision und Wissenskumulation zu sehen, und so nur den bereits weitgehend formalisierten oder zumindest formalisierbaren Anteil ernst zu nehmen. Eine genauere Bestimmung, was Formalisierung ist, leisten und leisten kann, wie sie im folgenden skizziert werden soll, ist im Zusammenhang dieser Arbeit jedoch vor allem wichtig, um die aktuelle Diskussion für platonische Überlegungen zur Fundierung der Mathematik aufzuschließen und in ihrem Sinne eine Grundlegung moderner Gebiete versuchen zu können. Zudem wird sich daraus auch ganz anfänglich ein differenzierterer Blick auf die Versuche vor allem der analytischen Philosophie ergeben, die formalen Methoden auf PLATONS Dialoge anzuwenden.

Nachdem im ersten und dritten Abschnitt die Formalisierbarkeit und ihre Grenzen etwas allgemeiner dargestellt und diskutiert wurden, widmen sich die Abschnitte 5.2, 5.4 und 5.5 einzelnen Formalisierungsaufgaben und ihren Problemen. In Abschnitt 5.6 werden die Erkenntnisse daraus zusammengefasst und noch recht anfänglich in Bezug zu PLATON gesetzt. Im letzten Abschnitt wird versucht Husserls Phantasievariation gegen Einwände zu verteidigen, sie als eine Methode platonischer Begriffsexplikation zu validieren und ihr Verhältnis zur modernen formalen Logik zu bestimmen. Sie wird für ein Argument in Kapitel 7.3.1 benötigt.

## 5.1 Formalisierung und ihre Grenzen

### 5.1.1 Logik und Logistik

In der ersten Hälfte des zwanzigsten Jahrhunderts unterschied man im Deutschen noch regulär zwischen der Logik als der Lehre vom richtigen Schließen und der Logistik als der symbolischen Logik, bestehend aus der Syntax und Semantik einer formalen Sprache und eines bestenfalls adäquaten Kalküls, d.h. eines korrekten und vollständigen formalen Ableitungsverfahrens mit entscheidbarem Ableitungsbegriff, für die formale Sprache. In diesem Text werden dafür die Ausdrücke (*informale*) Logik und

*formale Logik* gebraucht.<sup>1</sup> Dieser Sprachgebrauch, der die formale Logik als eine Unterart der Logik darstellt, wird durch folgende Beobachtung gerechtfertigt: Jeder Aufbau einer formalen Logik setzt eine Metalogik voraus, insofern die formale Logik *logisch* aufgebaut wird. Um z. B. die zwei Zeichen  $\rightarrow$  und  $\wedge$  zu unterscheiden, wendet man identitätslogische Gesetzmäßigkeiten an, schon in einfachsten Überlegungen beim Aufbau einer formalen Logik wird intuitiv gefolgert (vgl. Abschnitt 5.1.2). In den dazu vollzogenen Denkakten wird zwar kein Wissen um eine Metalogik vorausgesetzt, sondern anscheinend logische Gesetze intuitiv vollzogen, diese intuitive (Meta-) Logik ist aber stets Ausgangspunkt für eine Begründung der formalen Logik (mehr dazu in Abschnitt 5.4). Diese in der Denkpraxis aufscheinende logische Intuition kann geschult und entwickelt werden. — Die Metalogik ist *praktisch* immer zweiwertig in Bezug auf die behandelte formale Logik, Aussagen in ihr entweder wahr oder falsch, denn eine formale Logik wird praktisch immer als eine mathematische Theorie behandelt und somit die Metalogik in Bezug auf die formale Logik als klassische zweiwertige Logik. Würde man tatsächlich eine Logik vor einer z. B. mehrwertigen Hintergrundlogik formalisieren,<sup>2</sup> so dass es einen nicht mehr exklusiv wahren oder falschen metatheoretischen Satz darüber geben würde, ob etwas Bestimmtes ein formal-logischer Satz oder Satzbestandteil ist, oder ob etwas eine formal-logische Interpretation ist, so würde man eine Unbestimmtheit dort mit hineinbringen, wo es (mit einer zweiwertigen Hintergrundlogik) auch anders ginge. Das widerspräche dem wissenschaftlichen Anspruch nach möglichst großer Bestimmtheit und Eindeutigkeit. Im folgenden soll ‚formalisieren‘ stets formalisieren *in einer bestimmten formalen Logik* bedeuten.

Die wichtigsten Ergebnisse der Logik im zwanzigsten Jahrhundert sind Ergebnisse über formale Logiken. Ihre Bedeutung für die grundlegende Logik ist abhängig vom genauen Verhältnis von Logik und formaler Logik. Eine Klärung dieses Verhältnisses ist auch eine Forderung aus der Philosophie der Mengenlehre. Denn in der mathematischen Mengentheorie wie in dem gesamten mathematischen Gebiet der Grundlagen der Mathematik existiert ein extensiver Gebrauch formaler Logik im objektsprachlichen Bereich. Dieser ist möglich, da eine Prädikatenlogik erster Stufe mit mengentheoretischer Semantik eine mathematische Theorie ist. Insofern besteht rein funktionell kein Problem, es bleibt nur die Frage, was man da genau macht, wenn man die formale Logik als Objekt mit anderen mathematischen Objekten in Verbindung setzt.

Bedeutsam für die Bewertung der Ergebnisse formaler Logiken ist der Standpunkt, den man zu ihnen einnimmt. Der Mathematiker Paul Finsler betrachtete formale Logiken im Hinblick auf die Grenze der Formalisierbarkeit, daraufhin, ob es nicht formalisierbare, ausdrückbare mathematische Gedankenzusammenhänge gebe. Dazu begriff er unter formaler Logik meist *die* umfassende, nicht mehr erweiterbare formale Logik. Seine (notwendig) informelle Argumentation in Finsler 1926a, antizipiert zwar Gödels ersten Unvollständigkeitssatz («a remarkable, if far from adequate, anticipation»<sup>3</sup>), kommt aber zu einem anderen Ergebnis: Es gibt einen formalisierten Satz, der in der formalen Logik unentscheidbar ist, informell aber als falsch eingesehen wird; unentscheidbar und doch entschieden, das ist insgesamt ein Widerspruch, zu dem die Benutzung der formalen Logik führe.<sup>4</sup> Eine wesentliche Prämisse für Finsler um zu diesem Ergebnis zu gelangen war die Überzeugung, dass die Logik das Denken in seiner Gesetzmäßigkeit isomorph, d.h. in seiner Struktur exakt, abbilden müsse. — Diese vermutlich häufiger von nicht hauptberuflichen Logikern geteilte Auffassung lehne ich als unangemessen ab. Die modernen formalen Logiken sind mathematische Theorien, die als solche (nicht notwendig außer-ma-

1 Für eine knappe Übersicht über die Gebrauchsweisen des Ausdrucks „informal logic“ siehe Johnson 1999.

2 Wie in Blau 1978, S. 142, noch vorgeschlagen, später revidiert (vgl. Blau 2008, S. 33f./42f.) im Horizont des Prinzips, dass sich Praxis und Theorie nicht widersprechen dürfen, und einer Charakterisierung der synthetischen, apriorischen Aussagen als derjenigen, denen nachzukommen praktisch unvermeidlich ist.

3 Church 1938, S.165.

4 Die allgemeine Einschätzung der Finslerschen Arbeiten zur Unentscheidbarkeit ist – beginnend mit Gödel – negativ; siehe Dawson 1984, S. 259f..



thematischen) Sachverhalte mit ihren eingeschränkten, nämlich mathematischen, Mitteln modellieren. Ein struktur-adäquates mathematisches Modell eines in seiner Gesetzmäßigkeit so komplexen Phänomens wie dem Denken zu erwarten ist demnach unangemessen. Praktisch benutzt wird die formale Logik (wobei dies eine Behauptung ist, die hier empirisch nicht weiter belegt werden kann) dagegen in erster Linie nur, um Argumentationen in spezifischen Sachzusammenhängen pur, d.h. im Detail und ihrer Struktur nach, darzustellen, und das ein ein Grundsatz der im folgenden zugrunde gelegten Theorie der Formalisierung. Für die Mathematik leistet eine Formalisierung demnach eine pure Darstellung der Beweise innerhalb der axiomatisierten Struktur des Gegenstandsbereiches.

Praktisch geht es (zumindest Mathematikern) nicht um eine vollständige Formalisierung, sondern um die Darstellung einzelner Argumente und Argumentationen in einer formalen Logik. Entsprechend liest sich von hier aus Gödels Ergebnis, dass ein formalisiertes, angebbares und widerspruchsfreies Axiomensystem (ab gewisser Stärke in einer Prädikatenlogik erster Stufe) unvollständig ist, als Bestätigung für diese mathematische Arbeitsweise. Finslers Kritik trifft deshalb auf den üblichen Gebrauch formaler Logik in der Mathematik nicht zu.

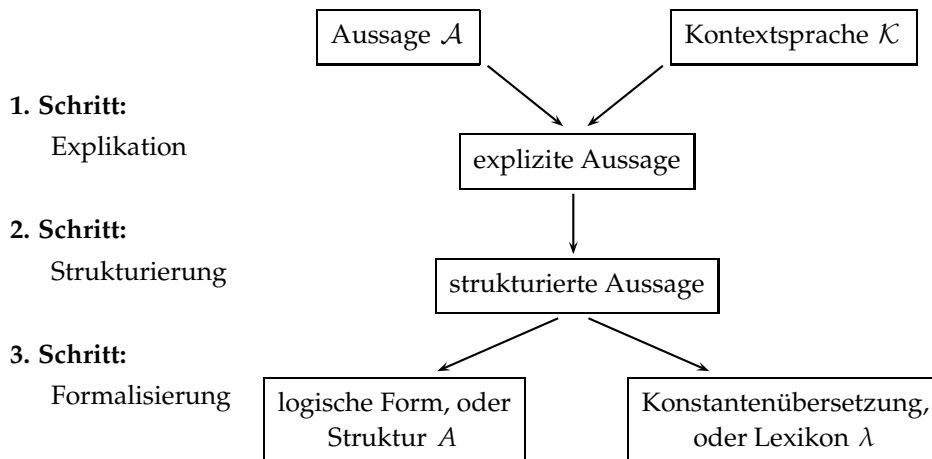
Bei Wissenschaftlern, die nicht hauptberuflich der formalen Logik verpflichtet sind, ist das Vorurteil häufiger anzutreffen, es gäbe *die* formale Logik, in die unser ganzes Denken oder natürliches Schließen zu übertragen ‚Formalisieren‘ genannt wird; eine Auffassung, die unter Logikern eine exotische Position darstellt. Zuweilen wird auch die Differenz von grammatikalischer Oberflächenstruktur natürlichsprachlicher Sätze mit ihrer logischen Tiefenstruktur unterschätzt; aber gerade die Fälle, wo diese beiden auseinander fallen, machen den Einsatz formaler Logik wertvoll.<sup>5</sup> Die moderne Logik bietet ein weites Feld unterschiedlicher Logiken, die man auch in unterschiedlicher Weise für unterschiedliche Zwecke nutzen kann. So ist der Mathematiker i.a. nicht an dem exakten Schließen interessiert, sondern an einem präzisen Fassen von dem, was er voraussetzen muss, und dem, was er ableiten kann; während jemand anders den Begriff der Möglichkeit mittels einer Reihe von verschiedenen Modallogiken untersucht und wieder jemand anders PLATONS sogenanntes Dritter-Mensch-Argument in einer Prädikatenlogik formalisiert, um es auf seine Gültigkeit zu überprüfen. Wichtiger als ein vom Computer ‚auszurechnendes‘ Ableitungsverfahren, das mit dem Kalkül der Logik bereitgestellt wird, ist dabei der Vorgang, durch den etwas in die formale Sprache ‚übersetzt‘ wird, der selbst nicht formalisierbar und so grundsätzlich anfällig für Fehler und Diskussion ist.

### 5.1.2 Formalisierung

In diesem Kapitel werden nur rationale Argumentationen ins Auge gefasst, die aus logischen Schlüssen bestehen. Bestandteil von Schlüssen sind Aussagen. Während man die Schlüsse von Argumenten

<sup>5</sup> So meint Schmitz 2008, S. 50f., ein gutes Gegenbeispiel gegen die Identifikation von Existenz mit der Existenzquantifikation zu haben: Daraus, dass der Untergang der Menschheit im dritten Jahrtausend noch verhindert werden kann «folgt ganz richtig der partikulär quantifizierte Satz: „Mindestens ein Ereignis kann noch verhindert werden.“ Wenn man diese partikuläre Quantifizierung als Existenzbehauptung auffasst, wird daraus der Satz: „Es gibt ein Ereignis, das noch verhindert werden kann.“ Das kann nicht sein: Was es gibt, kann nicht verhindert werden, denn es ist schon da. Etwas verhindern, besteht darin, Nichtseiendes am Eintritt ins Sein zu hindern.» Ein Nutzen der Formalisierung besteht aber darin, die impliziten Voraussetzungen offen zu legen, die sich auch bei scheinbar einfachen Sätzen als recht kompliziert ergeben können. Hier sind es temporale Aspekte, Modalitäten und Ansichten über die Handlungsfreiheiten der Menschen und die momentane Verfassung der Welt. Eine angemessenere Explizierung und Strukturierung des ersten Satzes ist: „Wenn das Ereignis zu einem Zeitpunkt  $t$  eintritt, dann haben gewisse Handlungen zu seiner Verhinderung nicht stattgefunden; aber es ist jetzt noch möglich, dass diese Handlungen stattfinden werden.“ Und noch ein wenig formaler: „(Wenn es ein  $x$  gibt mit  $x$  ist das Ereignis  $E(t)$  und  $t$  ein Zeitpunkt (und  $t > 2008$ ), dann existiert kein  $y$  und  $s$  mit  $y$  ist eine Handlung  $H(s)$  und  $s$  ein Zeitpunkt mit  $s < t$ ) und es ist jetzt (und jetzt ist 2008) möglich, dass ein  $y$  und  $s$  existiert mit  $s \geq 2008$  und  $y$  ist eine Handlung  $H(s)$ .“ Im *Symposium 200cd* findet sich ein einfaches Beispiel einer Explizierung: «...Sondern wenn einer sagt, ich, der ich gesund bin, will gesund sein, und ich, der ich reich bin, will reich sein und begehre also das, was ich habe, so würden wir ihm sagen: Du, der du Reichtum besitzt und Gesundheit und Stärke, willst eben dies auch in der folgenden Zeit besitzen; denn in der jetzt gegenwärtigen, magst du es nun wollen oder nicht, hast du es schon. Überlege also, wenn du sagst, ich begehre das Vorhandene, ob du etwas anderes meinst als dieses, ich will, daß das jetzt Vorhandene mir auch in künftiger Zeit vorhanden sei.»

mit formalen Ableitungen modelliert, deren Schlussweisen je nach Wahl des Kalküls vorgegeben sind, müssen zuvor die einzelnen Aussagen als jeweils Ganzes formalisiert werden. (Wir betrachten hier und im weiteren nur Gedanken und Begriffsinhalte, insofern sie in konkreten natürlichsprachlichen Sätzen formuliert werden.)<sup>6</sup> Wir orientieren uns an Blaus Modell der Formalisierung.<sup>7</sup> Er unterscheidet drei Stufen in diesem Prozess der logischen Sprachanalyse und bezeichnet in einem eingeschränkten Sinn nur die letzte als Formalisierung:<sup>8</sup>



Im ersten Schritt werden Präsuppositionen, unausgesprochene Vergleichsbezüge und ähnliches aufgedeckt, sowie Ambiguitäten entfernt, im zweiten die explizite Aussage ihrer Struktur nach geordnet und schließlich in einer bestimmten formalen Sprache ausgedrückt.<sup>9</sup>

Eine Formalisierung (im weiten Sinn) überführt also eine Aussage  $\mathcal{A}$  (aus einer Kontextsprache) in einen Ausdruck  $A$  (einer formalen Sprache) mit abgestimmten Lexikon  $\lambda$ .  $\lambda$  ist eine Funktion, die die nicht-logischen Konstanten von  $A$  auf die entsprechenden Ausdrücke der Kontextsprache abbildet. Eine beliebige Aussage, z.B. *Es regnet*, kann in einer Aussagenlogik durch eine beliebige Satzkonstante  $q$  formalisiert werden, mit  $\lambda(q) = \text{Es regnet}$ . Um festzustellen, ob man überhaupt eine sinnvolle Formalisierung von  $\mathcal{A}, \mathcal{K}$  in  $A, \lambda$  vorliegen hat, muss man Kriterien entwickeln, die die Beziehung zwischen dem konkret Formalisierten und zu Formalisierenden ins Auge fassen. Um beliebige Abstufungen treffen zu können, nennen wir ein Tupel  $A, \lambda$  eine *Formalisierung von  $\mathcal{A}, \mathcal{K}$*  bereits dann, wenn  $\lambda$  alle nicht-logischen Konstanten in Ausdrücke gleichen Typs in  $\mathcal{K}$  abbildet. Eine *semantisch korrekte* Formalisierung ist genau dann gegeben, wenn informell gilt, dass  $\mathcal{A}$  den gleichen Wahrheitswert hat wie  $A$  unter jeder geeigneten Interpretation  $\phi$ . Eine *geeignete* Interpretation ist dabei eine über den vom  $\mathcal{K}$  intendierten Universum, die jeder nicht-logischen Konstante  $a$  aus  $A$  genau die Extension zuweist, die  $\lambda(a)$  gemäß  $\mathcal{K}$  haben sollte.<sup>10</sup> Damit ist die obige Formalisierung von *Es regnet* trivialerweise semantisch korrekt. Semantische Korrektheit ist demnach relativ schwach, weil sie nichts darüber aussagt, wieviel von der logischen Form von  $\mathcal{A}$  expliziert wurde. Andererseits ist sie relativ stark, da das natürlich-sprachliche „wenn ... dann“ in einer allgemein genug gefassten Kontextsprache  $\mathcal{K}$  nicht einmal semantisch korrekt durch die Implikation  $\rightarrow$  formalisiert wird. (Analog erweitert wäre „wenn ... dann“ mit  $\mathcal{K}$  genau dann semantisch korrekt formalisiert durch  $\rightarrow$ , wenn alle „Wenn  $\mathcal{A}_1$ , dann  $\mathcal{A}_2$ “ aus  $\mathcal{K}$  mit  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  aus

6 Mit „Formalisierung“ benennt man in anderen Kontexten Spezifischeres, z. B. in der Ethik eine Art Idealisierung (vgl. Hansson 2000), da man anzunehmen scheint, dass eine präzise Fassung von Grundsätzen dieses Gebiets nur eine vereinfachende Modellierung eines in Wirklichkeit zu komplexen Sachverhalts sein kann; z. B. die Extrahierung des mechanisierbaren Anteils eines Vorgangs (vgl. Krämer 1988, S. 3). Im Vergleich damit ist hier die *logische* Formalisierung gemeint, mit der die (für die Argumentation hinreichende) logische Tiefenstruktur einer natürlichsprachlichen Aussage gehoben werden soll.

7 Siehe für das folgende Blau 2008, S. 141ff..

8 Die Abbildung des Schemas findet sich bei Blau 2008, S. 43.

9 Dieser idealen Einteilung werden wir in 5.5.4 nicht folgen können.

10 Siehe Blau 2008, S. 146, Brun 2004, S. 210, wobei sich Brun (nach eigener Angabe, siehe Brun 2004, S. 209a2) an der Darstellung in Blau 1978, S. 6ff., orientiert.

$\mathcal{K}$  durch  $A_1 \rightarrow A_2$  mit  $\lambda(A_1) = \mathcal{A}_1$  und  $\lambda(A_2) = \mathcal{A}_2$  semantisch korrekt formalisiert werden.) Aber die sogenannten Paradoxien der materialen Implikation verhindern im allgemeinen eine semantisch korrekten Formalisierung. Zum Beispiel wird die Aussage  $\mathcal{A}$  „Wenn  $a$   $b$  küsst, dann küsst  $b$   $a$ “ durch  $A$  als  $P(a, b) \rightarrow P(b, a)$  ( $P$ : küssen) nicht korrekt formalisiert, da, wenn  $a$  und  $b$  Abstand halten,  $A$  falsch sein kann,  $A$  aber auf jeden Fall wahr ist, da die entsprechende geeignete Interpretation  $\phi$   $P$  eine Extension zuteilt, in der weder  $a, b$  noch  $b, a$  enthalten sind,  $|P(a, b)|_\phi = F$  und  $|P(b, a)|_\phi = F$  gilt und  $A$  damit unter  $\phi$  wahr ist. Wenn  $A$  bezüglich einer geeigneten Interpretation wahr ist, dann ist nicht unbedingt auch  $\mathcal{A}$  wahr. Aber immer wenn  $\mathcal{A}$  wahr ist, dann ist auch  $A$  unter der entsprechenden geeigneten Interpretation wahr, denn wenn  $A$  falsch ist, dann ist auf jeden Fall auch  $\mathcal{A}$  falsch.<sup>11</sup>

Blau verallgemeinert diese Beobachtung mit Rücksicht darauf, dass gerade stets *informell* gefolgert wurde: Eine Formalisierung ist *stark genug* genau dann, wenn für jede geeignete Interpretation  $\phi$  gilt, dass, wenn  $A$  wahr ist unter  $\phi$ , dann folgt (informell)  $\mathcal{A}$ . Eine Formalisierung ist *schwach genug* genau dann, wenn für jede geeignete Interpretation  $\phi$  gilt, dass, wenn  $\mathcal{A}$ , dann folgt (informell), dass  $A$  unter  $\phi$  wahr ist. Das natürlich-sprachliche „wenn ... dann“ wird demnach zwar schwach genug durch  $\rightarrow$  formalisiert, so dass die Wahrheit der natürlich-sprachlichen Aussage stets auf die formal-sprachliche übergeht; aber nicht stark genug, denn die Formalisierung in  $A$  ist nicht stark genug, dass die Wahrheit von  $A$  auf  $\mathcal{A}$  ‚zurückwirkt‘.

Damit lassen sich nun Theoreme über die Anwendung formaler Logik (informell) beweisen (s. Blau 2008, S. 148-51), denn um eine formale Folgerung ins Informale zu übertragen, werden keine semantisch korrekte Formalisierungen benötigt: Wenn in  $\mathbf{PL}^1$  gilt, dass  $A_1, \dots, A_n \vdash B$ , dann gilt für alle Aussagen  $A_1, \dots, A_n, B$ , falls  $A_1, \dots, A_n$  Formalisierungen sind, die schwach genug sind, und  $B$  eine genügend starke Formalisierung von  $\mathcal{B}$ , dass  $\mathcal{B}$  aus  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$  informell folgt.<sup>12</sup> Damit hat man das Rüstzeug um längere oder kompliziertere informelle Folgerungen auf ihre Richtigkeit und auf problematische Teilschlüsse zu überprüfen: Man formalisiert die Prämissen schwach genug (in  $\mathbf{PL}^1$ ), die angestrebte Konklusion stark genug und versucht die formalisierte Konklusion aus den Prämissen abzuleiten. Ist man erfolgreich, hat man die Möglichkeit einer informellen Folgerung nachgewiesen. Schafft man es nicht, wird man auf schwierige Argumente aufmerksam, entdeckt vielleicht implizite Annahmen oder neue Schlussweisen.

Je weniger man nun aber von der logischen Struktur der Prämissen in der Formalisierung expliziert hat, desto ‚weniger‘ wird man logisch aus ihnen ableiten können. Je ‚weniger‘ man von der Aussage in das Lexikon steckt, desto mehr wird die Formalisierung die ganze logische Struktur fassen, und *semantisch vollständig* ist eine Formalisierung, wenn das zugehörige Lexikon leer ist. Eine tatsächlich adäquate, d.h. semantisch korrekte und vollständige, Formalisierung – bei der dann auch nichts mehr Unformalisiertes ‚zurück bleibt‘ – ist demnach nur für letztlich rein formale Aussagen und damit für formale Theorien erreichbar, die von formalen Objekten handeln. Nur wenn die Ontologie eindeutig und vollständig bestimmt ist, können auch alle Aussagen über die nicht vagen Gegenstände nicht intensional offen sein und damit semantisch vollständig formalisierbar.

Ein kleines Beispiel:

Es regnet.

Es regnet aber nicht irgendwann und irgendwo, sondern gerade vor dem Gebäude der juristischen Fakultät in München. Zudem ist nicht irgendein Regnen gemeint, sondern ein relativ starker Regen, was daran gemessen wird, dass ‚ich‘ einen Regenschutz benötige.

Es regnet jetzt am Prof.-Huber-Platz, weswegen ich jetzt einen Regenschutz brauche.

<sup>11</sup> Siehe Blau 2008, S. 147, für eine ausführlichere Argumentation.

<sup>12</sup> Siehe **Th1** in Blau 2008, S. 148.

Anscheinend befinde ‚ich‘ ‚mich‘ irgendwie in der Nähe. Wir explizieren weiter und strukturieren die Aussage gleichzeitig:

Es regnet jetzt am Prof.-Huber-Platz, und immer wenn es dort regnet, wo ich mich im Freien befinde, brauche ich einen Regenschutz, und ich befinde mich jetzt im Freien am Prof.-Huber-Platz.

Wir strukturieren weiter:

Es regnet jetzt am Prof.-Huber-Platz, und wenn es der Fall ist, dass es einen Ort gibt, an dem ich gerade im Freien bin und an dem es gerade regnet, dann brauche ich jetzt einen Regenschutz, und ich befinde mich jetzt im Freien am Prof.-Huber-Platz.

Wenn uns jetzt eine formale Logik zur Verfügung stände, die die Indikatoren „ich“ und „jetzt“ berücksichtigt, könnten wir die strukturierte Aussage in eine Formel mit Lexikon überführen.

Es ergibt sich eine Reihe, nach obigem Schema von drei, verschiedenen sich mehr oder weniger ähnelnder Aussagen. Dass diese aber tatsächlich eine Explizierung, Strukturierung und (im engen Sinne) Formalisierung der Ausgangsaussage sind, hängt neben unseren Begriffen von Explizierung etc. von unserem (informellen) Verständnis dieser Aussage ab. Dieses informelle Verständnis verändert und verschärft sich während dieser logischen Analyse, kann aber letztlich nicht durch die formalisierte Aussage ersetzt werden, denn es entscheidet ja selbst darüber, ob diese formalisierte Aussage eine Formalisierung gerade dieser nicht-formalisierten Aussage ist.<sup>13</sup>

Dieses Argument gilt auch für die logischen Grundbegriffe selbst: Die informellen (mehr technischen) Begriffe der Regel, Substitution, Anführung u.ä.m. werden durch ihre ‚Präzisierung‘ in formalen Logiken nicht überflüssig,<sup>14</sup> wie auch die informellen Grundbegriffe der Folgerung, Gültigkeit, Widerspruchsfreiheit und Bedeutung.<sup>15</sup>

Der Nutzen einer Formalisierung wird traditionell darin gesehen, dass durch die Extrahierung der logischen Form die informellen Schlüsse formal auf ihre Gültigkeit überprüft werden können. Der fehleranfällige, weil nicht formale Teil der Überprüfung, ist die Formalisierung der Aussagen.

In manchen Problemstellungen dieser Arbeit wird eine spezifische Art der Formalisierung betrachtet, nämlich die von mathematischen Aussagen. Dies führt zu einem veränderten Begriff der Formalisierung, weil *mathematische* Aussagen in möglichst *prädikatarmen* und zum Teil vorgegebenen formalen Sprachen formalisiert werden sollen. Besonders ist hierbei, dass die mathematische Fachsprache selbst von einer formalen Sprache nicht zu unterscheiden ist, weil in der modernen Mathematik nur Beweisrelevantes, und somit in Formeln Ausdrückbares, sprachlich vorkommt. Die Mengentheorie z. B. wird für gewöhnlich wie in der Sprache einer Prädikatenlogik erster Stufe mit einer einzigen, zweistelligen Prädikatkonstanten (neben der Identität) behandelt. Damit stellen sich allerdings weitere Erfordernisse an eine Formalisierung. So muss sie jetzt auch die Analyse nicht direkt übertragbarer Prädikate leisten. Man würde z. B.

(1) Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge.

unbedarft formalisieren zu etwas wie

(1')  $\bigwedge x (M(x) \rightarrow \text{teil}(\emptyset, x))$

$M(x)$ :  $x$  ist eine Menge       $\emptyset$ : leere Menge       $\text{teil}(x, y)$ :  $x$  ist Teilmenge von  $y$

Steht nun aber *nur* eine Prädikatkonstante „ $\in$ “, die als Elementschafft interpretiert wird, zur Verfügung, so muss die Teilmenge mittels der Elementschafft analysiert und interpretiert werden. Das geschieht für

13 Siehe dazu auch Abschnitt 5.4.3.

14 Vgl. Tucker 1963. Seine Argumentation scheint zwar korrekt, wenn auch sehr ungenau.

15 Vgl. Blau 2008, S.149ff.. Blau spricht deswegen auch von einer «Selbstexplikation» informeller Logik. Siehe dazu etwas weiter in Abschnitt 5.4.

gewöhnlich durch die Definition  $x \subseteq y := \bigwedge z (z \in x \rightarrow z \in y)$ . Da in mengentheoretischen Aussagen für gewöhnlich auch nur über Mengen quantifiziert wird, wäre folgendes eine adäquate Formalisierung von (1):

$$(1'') \quad \bigwedge xy (y \in \emptyset \rightarrow y \in x) \quad (\text{bzw. abgekürzt } \bigwedge x \emptyset \subseteq x).$$

Komplizierter wird es, wenn die Axiome einer mathematischen Theorie formalisiert werden sollen und die undefinierten Prädikate dabei erst festgelegt werden müssen (s. Abschnitte 5.2 und 5.5).

Das oben angeführte Modell einer Formalisierung steht bei Blau im Kontext der logischen Analyse natürlichsprachlicher Sätze. Pragmatisch aufgefasst legt es einen aber nicht daraufhin fest, dass Sätze die Ausgangsobjekte der Formalisierung sind. Denn wenn auch die eigentlichen Formalisierungsobjekte Propositionen, Äußerungen oder anderes sein sollten, so ist es naheliegend, bei natürlichsprachlichen Sätzen, die dann eine Art erster (vorthoretischer) Formalisierungsversuch darstellen, zu beginnen. Wenn man Formalisierung für ein völlig mechanisierbares Verfahren ansieht, das natürlichsprachliche Sätze in semantisch korrekte (und ‚möglichst‘ semantisch vollständige) Sätze einer formalen Sprache ‚übersetzt‘, dann hat man keinen Grund, hinter den Sätzen noch die eigentlichen Objekte der Formalisierung zu suchen.<sup>16</sup> Bei Blau ergibt sich ein Spielraum durch die weitere Unterscheidung zwischen Oberflächen- und Tiefenstruktur und der Einbeziehung des Kontextes. Je nach Kontext(sprache) haben die gleichen Worte verschiedene Bedeutungen, und auch bei gleicher grammatischer Form (Oberfläche), kann ihre (grammatisch-) logische Struktur differieren.<sup>17</sup>

### 5.1.3 Nicht-Formalisierbares

Betrachten wir mit Finsler unter dem Aspekt, dass etwas in etwas anderem ausgedrückt oder dargestellt wird. Dabei kann es durch die Darstellung in einer bestimmten Darstellungsform zu Problemen kommen. Ein Gedanke kann zum Beispiel durch seine Versprachlichung widersprüchlich werden, wenn er sich geschickt verneinend auf die Sprache bezieht. Finsler erläutert das zunächst an konkreten Beispielen:

Ich schweige.

Ein Satz, der aufgeschrieben oder gedacht wahr sein kann, sobald ausgesprochen aber falsch ist, und, insofern er behauptend ausgesprochen wurde, insgesamt widersprüchlich ist. Etwas interessanter:<sup>18</sup>

(A) Diesen Satz kann Frege nicht beweisen.

(A) ist wahr, falsch oder etwas anderes. Wenn er falsch oder etwas anderes als wahr oder falsch ist, dann ist er nicht wahr, somit kann man ihn (bzw. seine Wahrheit) auch nicht beweisen – auch Frege nicht. Das behauptet aber (A) gerade, also ist (A) wahr – ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass (A) falsch oder etwas anderes als wahr oder falsch sei. Da er folglich nicht falsch oder weder wahr noch falsch sein kann, ist er wahr. Wir haben also bewiesen, dass er wahr ist. Wenn nun aber Frege diesen Beweis vollzieht, beweist er (A) und damit, dass er ihn nicht beweisen kann. Ein Widerspruch. Der für uns korrekte Beweis wird – von Frege gedacht – inkorrekt, da er zu einem Widerspruch führt. Oder pointierter: Er kann unseren Beweis gar nicht denken, für ihn ist es kein Beweis mehr. Allerdings hat Frege gute Gründe, an die Wahrheit von (A) zu glauben. Denn er weiß, wenn er nicht Frege wäre, könnte er (A) beweisen, da alle anderen ihn beweisen können.

<sup>16</sup> Brun 2004 geht davon aus, dass etwas an sich Bestimmtes Ausgangspunkt einer Formalisierung ist, auch wenn er sich später nicht mehr auf eine eindeutige Antwort festlegt; siehe Brun 2008.

<sup>17</sup> Da es im weiteren um die Anwendung und Anwendungen der modernen Logik gehen wird, ist hier leider kein Platz, um auf die mehr ‚theoretische‘ aktuelle Diskussion zur logischen Formalisierbarkeit einzugehen; vgl. Brun 2004, Baumgartner und Lampert 2008, Lampert und Baumgartner 2010, Baumgartner 2010, Brun 2012. Während Blau 1978 in die Diskussion Eingang gefunden hat, scheinen die Ausführungen zur logischen Formalisierbarkeit in Blau 2008 mit ihren Revisionen und Erweiterungen noch unbekannt zu sein.

<sup>18</sup> Siehe Finsler 1944, S. 318.

Analoges kann nun nach Finsler in der formalen Logik passieren.<sup>19</sup> So ist der Beweis des Gödelsatzes, der von sich selbst behauptet nicht formal beweisbar zu sein, informell korrekt; in einem vollständigen formalen Kalkül würde er eigentlich zu einem Widerspruch führen, wenn nicht schon i.a. die formalen Mittel so beschränkt wären, dass man ihn gar nicht direkt ausdrücken könnte.

Während Finslers Überlegung für die Existenz nicht-formalisierbarer Beweise spricht, gibt Blau einen nicht-formalisierbaren Satz an. Der nicht-formalisierte Satz<sup>20</sup>

(1) Dieser Satz ist nicht zugleich strukturell und ontologisch korrekt formalisierbar. ←

ist wahr. (Man könnte nochmal präzisieren, ob mit • genau das dort ganz stehende Satz-Token gemeint ist, oder ein Type, das Ganze: • also mit: *Dieser Satz ist nicht zugleich strukturell und ontologisch korrekt formalisierbar.* identisch ist.) Der Satz ist wahr, denn entweder würde ein formalisierter Satz  $\phi$  nur behaupten, [1.] dass (1) nicht formalisierbar ist, oder [2.] nur dass  $\phi$  nicht formalisierbar ist, dass [3.] beide nicht formalisierbar sind, oder [4.]  $\phi$  würde bezüglich keinem von beiden dieses behaupten. Ist [1.] oder [4.] der Fall, verweist  $\phi$  nicht wie (1) auf sich selbst, ist [2.] der Fall, so behauptet  $\phi$  nicht von (1) die Nicht-Formalisierbarkeit. (Bei [2.] könnte  $\phi$  eine strukturell korrekte Formalisierung von (1) sein, bei [1.] eine ontologisch korrekte Formalisierung.) Im Fall von [3.] ist zu beachten, dass (1) auf *einen* Satz, nämlich sich selbst, verweist, während sich  $\phi$  auf zwei verschiedene, einen formalisierten und einen nicht-formalisierten, bezieht. Somit ist  $\phi$  auch unter [3.] keine strukturell korrekte Formalisierung von (1).

Das gegebene Argument für die Nicht-Formalisierbarkeit benötigt nur den Bezug auf den nicht-formalisierten Satz in diesem selbst. Demnach sind in diesem Sinne alle nicht-formalisierten Sätze mit Selbstbezug nicht formalisierbar; wie auch:

(3) Dieser Satz ist nicht wahr.

Es gilt aber mit dem gleichen Argument auch umgekehrt, dass der ‚formalisierte‘ Lügner (der ja wie gerade gezeigt ein wesentlich anderer, weil nicht korrekt formalisierter Lügner ist) nicht entformalisiert werden kann.

Blau nennt (1) den «Gödelsatz der logischen Formalisierung».<sup>21</sup> Der Gödelsatz

(G) Dieser Satz ist nicht beweisbar.

ist – strukturell formalisiert in einer formalen Logik (und bezüglich einer widerspruchsfreien Theorie) – nicht ableitbar. Ansonsten wäre er wahr und damit, wie Gödel im Detail zeigt, nicht beweisbar, dann wäre aber der Kalkül nicht adäquat oder die Theorie nicht widerspruchsfrei.

Wäre er beweisbar, dann wäre er auch falsch, weil er das Gegenteil von sich behauptet. Obwohl er aber formal nicht beweisbar ist, ist er informell gefolgert gerade deswegen wahr. Ähnlich müßte eine korrekte Formalisierung  $\phi$  von (1) den Wahrheitswert *falsch* erhalten, weil  $\phi$  ja eine korrekte Formalisierung von  $\phi$  (und von (1)) wäre. Informell ist (1) aber, wie gezeigt, wahr, auch wenn das nicht formal bewiesen werden kann.

Allerdings scheint die Argumentation in Anschluss an (1) über ontologisch korrekte Formalisierung für mathematische Zusammenhänge nicht sehr relevant zu sein, da es bei mathematischen Gedanken allein auf die Struktur anzukommen scheint. Genauso haben wir zwei Lügner, einen formalisierten und einen nicht-formalisierten, beide haben aber die gleiche Struktur.

19 Siehe Finsler 1926a.

20 Vgl. Blau 2008, S. 509, 444.

21 Blau 2008, S.444.

### 5.1.4 Zur Präzisierung durch Formalisierung

Die Formalisierung der **ZFC**-Axiome in einer Prädikatenlogik erster Stufe wird in den Standard-Lehrbüchern mit der Notwendigkeit eines genauen Begriffs von Eigenschaft für die Schemata der **Ersetzung** und **Aussonderung** begründet.<sup>22</sup>

The Axiom Schema of Separation as formulated above uses the vague notion of a *property*. To give the axioms a precise form, we develop axiomatic set theory in the framework of the first order predicate calculus.<sup>23</sup>

Kunen verweist sogar auf die durch einen ungenauen Eigenschaftsbegriff entstehenden Widersprüche.

Formal logic is needed to state the axioms of set theory precisely. ...The fact that an imprecise notion of property can lead to trouble is illustrated by the following "paradox" in ordinary reasoning: Let  $n$  be the least positive integer not definable by an English expression using forty words or less. But I have just defined it in forty words or less.<sup>24</sup>

Das Problem wäre bei einem «imprecise notion of property», dass die **ZFC**-Axiome inkonsistent wären. Mit **Aussonderung** und **Unendlichkeit** dürfte man die Menge

$v = \{ x \mid x \text{ ist eine natürliche Zahl und } x \text{ kann mit weniger als 40 Wörtern definiert werden.} \}$

bilden. Dann gelte für die natürliche Zahl

$n =$  die kleinste natürliche Zahl, die nicht mit weniger als vierzig Wörtern definiert werden kann,

sowohl  $n \notin v$ , nach der Definition von  $n$ , wie auch  $n \in v$ , weil  $n$  offenbar mit weniger als vierzig (deutschen) Wörtern definiert wurde. Das wäre aber ein Widerspruch, der das ganze Axiomensystem nutzlos macht, denn, da aus einem Widerspruch alles beweisbar ist, wäre **ZFC** durch ein einziges inhaltsleeres Axiom  $\forall xy (x \in y \wedge x \notin y)$  und damit insbesondere durch endlich viele Axiome ausdrückbar.

Versteht man unter zulässigen Eigenschaften nur Formeln  $\phi$  mit einer freien Variable  $x$  einer (standardisierten) Prädikatenlogik erster Stufe (mit  $\in$  und  $=$ ), dann kann dieser Widerspruch nicht auftreten, weil die Restriktion „kann mit weniger als 40 Wörtern definiert werden“ nicht formalisiert werden kann. Dies liegt allerdings an den sprachanalytischen Ausdrucksmitteln dieser formalen Logik. In einer ausdrucksstärkeren Logik kann man es formalisieren. Damit wird aber offensichtlich, dass der Widerspruch nicht durch eine Formalisierung, sondern durch eine Begrenzung verhindert wird. Was als Eigenschaft zählt, wird durch die Ausdrucksmittel der (standardisierten) Prädikatenlogik beschränkt. Diese Beschränkung kann man nun aber versuchsweise entformalisieren mit

- (1) Eine Eigenschaft ist zulässig, wenn sie nur Gleichheits- und Enthaltensbeziehungen zwischen Mengen thematisiert und auf keine anderen Entitäten, insbesondere nicht auf ihre eigenen Ausdrucksmittel, Bezug nimmt.

(1) ist allerdings eine inexakte und damit falsche Entformalisierung, weil sie die zulässigen Eigenschaften nicht über die Syntax der Sprache definiert. Formalisiert, so fällt hierbei auf, heißt immer in einer *bestimmten* formalen Logik mit genau umrissenen Ausdrucksmitteln dargestellt. Damit ist die benutzte Sprache eindeutig festgelegt, während informelle mathematische Gedanken von der konkreten Sprache, in der sie gerade ausgedrückt werden, unabhängig sind. Das führt aber dazu, dass formale Axiomensysteme, die letztlich auf die eigene Sprache bezug nehmen, so direkt nicht entformalisiert werden können und somit möglicherweise auch keine Formalisierungen sind. Dann wurde durch sie aber auch nichts präzisiert.<sup>25</sup>

Um diesen Einwand gegenstandslos zu machen, müsste das Verhältnis von formaler Axiomatik mit wesentlicher Bezugnahme auf die eigene Syntax zur formalen Axiomatik ohne diese Bezugnahme genauer

22 Zu den **ZFC**-Axiomen s. S. 159-160.

23 Jech 2003, S.4.

24 Kunen 1983, S.2. Ähnlich Fraenkel 1928, S. 323.

25 Es handelt sich um eine Phantompräzision.

bestimmt werden. Dass es sich nur sehr schwer, wenn überhaupt, bestimmen lässt, dafür sprechen ein paar Umstände aus der Mathematik: In der von Quine entworfenen Mengenlehre *New Foundations (NF)* wird das sogenannte allgemeine Komprehensionsprinzip (alle  $\{x \mid \phi(x)\}$  sind Mengen), das mit  $x \notin x$  zur Antinomie der Russell-Menge führt, durch eine syntaktische Maßnahme eingeschränkt. Als Eigenschaften  $\phi$  sind nur noch *stratifizierte* Formeln zugelassen, die Formelteile wie  $x_1 \in x_1$  ausschließen.<sup>26</sup> Die dadurch konstituierte mathematische Theorie ist für sich ohne Fehl, nur ist bis heute nicht klar, zu was dieser sprachliche Trick eigentlich führt. Das zeigt sich u.a. daran, dass noch immer völlig unklar ist, in welchem (mathematischen) Verhältnis *NF* zu *ZFC* steht. — Ein ähnlich geartetes Problem ergibt sich für die Einbettung von *ZFC* in das Mengenuniversum von Finsler. Eine informelle Version<sup>27</sup> der *ZFC*-Axiome wie vermutlich auch die formalen sind in einer bestimmten Finsler-Menge erfüllt.<sup>28</sup> Ihr genaues Verhältnis, d.h. mathematisch u. a. das Verhältnis ihrer minimalen Modelle im Finsler-Universum, ist völlig ungeklärt.

Die Argumente in diesem Abschnitt sollten zeigen: 1.) Dass das Genaue der *ZFC*-Axiome im behaupteten Fall nicht an der Darstellung in einer formalen Sprache liegt; 2.) dass vermutlich wider den Anschein gar keine Präzisierung vorliegt, weil es nichts gibt, was präzisiert wurde; 3.) es soll nun kurz daran erinnert werden, dass es einfache, präzise und nicht-formalisierbare Sätze geben könnte:

(1) in Abschnitt 5.1.3 ist ein Beispiel für einen informellen Satz, der «wahr, logisch verständlich, aber nicht formalisierbar»<sup>29</sup> ist. Daraus ist aber zu folgern, dass die Möglichkeit der Formalisierung keine notwendige Bedingung für einen Satz ist, um präzise sein zu können. Allerdings ist dieses Resultat relativ schwach, da Formalisierung hier insbesondere die ontologische Formalisierung einbegreift.

## 5.2 Reine Strukturen ohne Weltbezug: Ein Beispiel

Stellen Sie sich vor, sie schlagen ein mathematisches, rein formalistisches Werk auf, dessen Titel Sie nicht verstehen, und lesen dort:

$$A8 \quad \bigwedge txyzu \bigvee vw (\beta(xut) \wedge \beta(yuz) \wedge (x \neq u) \rightarrow \beta(xzv) \wedge \beta(xyw) \wedge \beta(vtw)).$$

Die logischen Symbole sind bekannt (siehe S. 5),  $\beta$  ist offenbar eine dreistellige Relation. Aber kommt Ihnen dieser Typ ‚Struktur‘ bekannt vor? Kennen Sie Umstände, die sich so verhalten? Ist es ein wichtiger Zusammenhang aus der Arithmetik, Geometrie oder Mengenlehre?

Sie lesen weiter und der strukturalistische Formalist gibt Ihnen mehr Informationen: *A8* ist ein Axiom, und  $\beta$  bestimmt sich weiter durch seine Verwendung in den restlichen Axiomen.

$$A1 \quad \bigwedge xy (\beta(xyx) \rightarrow (x=y))$$

$$A2 \quad \bigwedge xyzu (\beta(xyu) \wedge \beta(yzu) \rightarrow \beta(xyz))$$

$$A3 \quad \bigwedge xyzu (\beta(xyz) \wedge \beta(xyu) \wedge (x \neq y) \rightarrow \beta(xzu) \vee \beta(xuz))$$

$$A4 \quad \bigwedge xy (\delta(xyyx))$$

$$A5 \quad \bigwedge xyz (\delta(xyzz) \rightarrow (x=y))$$

$$A6 \quad \bigwedge xyzuvw (\delta(xyzu) \wedge \delta(xyvw) \rightarrow \delta(zuvw))$$

$$A7 \quad \bigwedge txyzu \bigvee v (\beta(xtu) \wedge \beta(yuz) \rightarrow \beta(xvy) \wedge \beta(ztv))$$

$$A9 \quad \bigwedge xx'yy'zz'uu' (\delta(xyx'y') \wedge \delta(yzy'z') \wedge \delta(xux'u') \wedge \delta(yuy'u') \wedge \beta(xyz) \wedge \beta(x'y'z') \wedge (x \neq y) \rightarrow \delta zuz'u'))$$

26 Vgl. Abschnitt 7.4.1.6 ab S. 225.

27 Das Problem der Entformalisierung bleibt bestehen, wir nehmen hier an, dass eine informelle Version mindestens genauso stark in ihrer Existenzgarantie für Mengen ist.

28 Vgl. S. 162.

29 Blau 2008, S.444.



A10  $\wedge xyuv \vee z (\beta(xyz) \wedge \delta(yzuv))$

A11  $\vee xyz (\neg\beta(xyz) \wedge \neg\beta(yzx) \wedge \neg\beta(zxy))$

A12  $\wedge xyzuv (\delta(xuxv) \wedge \delta(yuyv) \wedge \delta(zuzv) \wedge (u \neq v) \rightarrow \beta(xyz) \vee \beta(yzx) \vee \beta(zxy))$

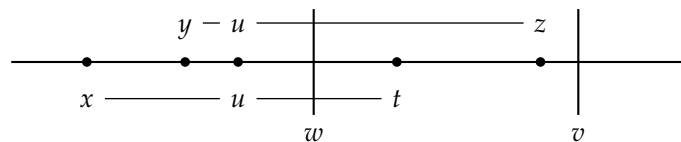
A13 Alle Sätze der Form

$$\wedge vx \dots (\vee z \wedge xy (\phi \wedge \psi \rightarrow \beta(zxy)) \rightarrow \vee u \wedge xy (\phi \wedge \psi \rightarrow \beta(xuy)))$$

mit  $\phi, \psi$  beliebige Formeln, wobei in  $\phi$   $y, z, u$  nicht frei vorkommen und in  $\psi$   $x, z, u$  nicht.

Die Theorie dieser Axiome, in die sich eine weitere, vierstellige Relation  $\delta$  einschleicht, ist in einer Prädikatenlogik erster Stufe, so erfahren Sie weiter, vollständig, entscheidbar, nicht endlich axiomatisierbar, und ihre Modelle lassen sich vollständig angeben. Aber was damit machen?

Die Axiome A1-A13 sind eine Formalisierung der Grundannahmen der elementaren Geometrie von Tarski.<sup>30</sup>  $\beta(xyz)$  kann man sich verständlich machen als 'y liegt zwischen x und z' und  $\delta(xyvw)$  als 'der Abstand von x zu y ist der gleiche wie der von v zu w'. Objekte, über die quantifiziert wird, sind Punkte. A8 kann man sich in diesem Sinne mit Hilfe nebenstehender Abbildung nahebringen.



Die entscheidende Frage ist, ob die Informationen des letzten Absatzes wesentlich zur Mathematik (respektive Geometrie) gehören, und die formalaxiomatische Darstellung damit nicht vollständig ist, oder ob sie mehr pädagogische und anwendungsbezogene Zwecke erfüllen, indem sie ein konkretes Modell vor Augen stellen.

Zunächst sei noch festgehalten, dass diese Axiome nicht die einzig mögliche Formalisierung der elementaren (euklidischen) Geometrie sind.<sup>31</sup> Zum einen ist nicht vorgegeben, wie stark die formalisierte Theorie sein muss. So ist zum Beispiel eine Ersetzung von A13 durch

A13'  $\wedge xyzx'z'u \vee y' (\delta(uxux') \wedge \delta(uzuz') \wedge \beta(uxz) \wedge \beta(xyz) \rightarrow \delta(uyuy') \wedge \beta(x'y'z'))$ .

näher an EUKLID'S *Elementen* und ergibt eine schwächere Theorie, weil weniger Existenzsätze beweisbar sind. Zum anderen sind auch andere Grundprädikate, mit denen sich dann alle übrigen gewünschten Eigenschaften definieren lassen, möglich. So benötigt man z. B. nur *ein* dreistelliges Prädikat, um die euklidische Geometrie der Ebene zu axiomatisieren.<sup>32</sup>

Man kann grob zwei Ebenen zur Festlegung der geometrischen Axiome unterscheiden. Auf der höheren wählt man unter mathematisch unterschiedlichen begrifflichen Zugängen oder Charakterisierungen der geometrischen Gebilde und des Raumes. So kann man die Geometrie äquivalent neben der ‚gewöhnlichen‘ Axiomatisierung z. B. auch durch ihre Gruppe der kongruenten Transformationen kennzeichnen, sie topologisch fassen, oder auf grundsätzlich anderem Verständnis der Geometrie aufbauen.<sup>33</sup> Hat man sich diesbezüglich entschieden, tritt auf einer niedrigeren Ebene eine Spannung auf: Zum einen sollte man mit möglichst wenig Prädikaten und Individuengattungen auskommen, zum anderen ist es je nach Gesichtspunkt nützlich unterschiedliche natürliche Prädikate getrennt in Axiomen zu fassen, um Abhängigkeiten in den geometrischen Folgerungen genauer studieren zu können.<sup>34</sup>

30 Siehe Tarski 1959, auch für die metatheoretischen Behauptungen und ihre Beweisskizzen.

31 Die *elementare Geometrie* ist für Tarski der Teil der Euklidischen Geometrie, der ohne Bezugnahme auf Mengentheorie formuliert und aufgebaut werden kann; s. Tarski 1959, S. 16. Es werden im folgenden keine unterschiedlichen Möglichkeiten berücksichtigt, wie sie sich z. B. in Bezug auf den Drehsinn ergeben; vgl. Hilbert 1962, S. 75.

32 Siehe Bernays 1959, S. 8ff..

33 Siehe z. B. Kowol 2009, Kap. 2, für verschiedene axiomatische Zugänge.

34 Vgl. Bernays 1959, S. 4f..

Dass die gezeichneten oder vorgestellten geometrischen Gegenstände sich gegenüber manchen anderen Verbildlichungen mathematischer Objekte, wie z. B. Zahlen, auszeichnen, ist allgemein anerkannt. Parsons nennt die abstrakten Gegenstände, die im Konkreten unmittelbar instantiiert sind, *quasi-konkret*.<sup>35</sup> Und denkt dabei neben (elementar-euklidischen) geometrischen Objekten an konkrete Kollektionen & Folgen konkreter Dinge und an Zeichentypen mit physikalisch beschreibbaren Tokens.

Ein Problem könnte sich für die Strukturalisten daraus ergeben, dass die quasi-konkreten Objekte keine reinen Strukturen bzw. Strukturmomente, d.h. Plätze in einer übergeordneten Struktur, sind, weil sie ein Mehr haben, dass sie mit ihren speziellen Repräsentanten verbindet. Das ist eine Leistung, die eine Struktur ihren Strukturmomenten grundsätzlich nicht bieten kann. Der Strukturalist kann quasi-konkrete Objekte nicht als mathematische Objekte in seine Theorie einbinden. Allerdings könnte er plausibel argumentieren, dass diesen quasi-konkreten Objekten durch ihre besondere Beziehung zu konkreten Objekten die Rolle zukommt, mathematischen Theorien ein Fundament zu verleihen, ihre Entstehung zu motivieren und ihren Ausbau und ihre Anwendbarkeit zu rechtfertigen. Sie würden historisch und bei einer Formalisierung mathematischer Überlegungen einen Zwischenschritt bilden zu den reinen, formal gefassten Strukturen.

Allerdings ist dieser Fundierungsanspruch praktisch relativ schwach, wie ein Mathematikstudent, der sich mit dem Argument, sie sei nicht mit quasi-konkreten Objekten zu rechtfertigen, weigern würde, eine mathematische Theorie zu lernen, bei seinen Professoren nur ein starkes Befremden auslösen würde. An der Oberfläche der mathematischen Praxis würde man wahrscheinlich eine Art Konventionalismus bezüglich der verwendeten Axiomensysteme finden, etwas tiefer wahrscheinlich neben anderen ein Kriterium der mathematischen Fruchtbarkeit und irgendwo wahrscheinlich auch den Reiz, der durch das Wechselspiel zwischen dem anschaulich Vorstellbaren & Üblichen und dem nicht-mehr-Vorstellbaren & Paradoxen entsteht.<sup>36</sup>

Diese Einstellung ist genauso wie strukturalistische und formalistische Standpunkte nicht viel älter als etwa 150 Jahre. Eine ähnliche Reaktion wie unser Student würde Frege hervorrufen, würde man folgende antiquiert klingende Meinung von ihm über das Verhältnis von euklidischer zu nicht-euklidischer Geometrie ernst nehmen, die auf Freges Ansicht beruht, dass die Axiome einer mathematischen Theorie selbst wahr oder falsch sind:

Niemand kann zwei Herren dienen. Man kann nicht der Wahrheit dienen und der Unwahrheit. Wenn die euklidische Geometrie wahr ist, so ist die nichteuklidische Geometrie falsch, und wenn die nichteuklidische wahr ist, so ist die euklidische Geometrie falsch. ... Jetzt handelt es sich darum, die euklidische oder nicht-euklidische Geometrie aus der Reihe der Wissenschaften zu streichen und der Alchemie und Astrologie als Mumie anzureihen.<sup>37</sup>

Hierbei würde der letzte Satz befremden, der den Leser zwingt, die ersten Sätze wörtlich zu nehmen. Frege scheint der Meinung zu sein, die Wahrheit einer mathematischen Theorie betreffe nicht bloß ihre außermathematische Beziehung zu konkreten Gegenständen und Phänomenen, sondern sei maßgeblich für ihren Status als wissenschaftliche Theorie. Der formal-deduktive Aufbau würde sie nicht davor bewahren, mit der Astrologie gleichgesetzt zu werden. Entscheidend scheint die Rechtfertigung der Theorie und vor allem ihrer Axiome im Fall der Geometrie durch die Anschauung zu sein. Insofern Frege meint, die geometrischen Axiome an die Wirklichkeit zurückbinden zu müssen, diese Rückbindung aber keine offensichtliche, unmittelbar entscheidbare zu sein scheint, ist er mit seiner Auffassung wieder näher bei PLATON.

<sup>35</sup> «Pure mathematical objects are to be contrasted not only with concrete objects, but also with certain abstract objects that I call quasi-concrete, because they are directly ‚represented‘ or ‚instantiated‘ in the concrete.» (Parsons 1990, S. 304.)

<sup>36</sup> Um diese Aussagen zu validieren, bräuchte es allerdings empirische Studien. Hier, und wenn nicht anders angegeben auch anderswo, stützen sich die Aussagen über die mathematische Praxis auf die Erfahrung und Beobachtung einer einzelnen Person.

<sup>37</sup> Frege 1983, S. 183f..

In der alten Akademie hätte sich das Problem der quasi-konkreten Objekte wohl umgekehrt dargestellt. Es wäre die Frage gewesen, was ein geometrisches Objekt hätte sein sollen, das man sich nicht (vollständig) anschaulich vorstellen kann. Denn Geometrie war gerade (und das auch noch bis vor wenigen Jahrhunderten) die Wissenschaft der ausgedehnten Körper oder der Raumverhältnisse, und im Sinne PLATONS könnte man (vgl. Abschnitt 1.3.2) sie kennzeichnen, als die *dianoetische Wissenschaft, die sich in ihrer praktischen Ausübung mit den klarsten anschaulichen Vorstellungen beschäftigt*. Die klarsten anschaulichen Vorstellungen sind dabei gerade die Vorstellungen traditioneller *geometrischer* Objekte, da sie die einzigen sind, die als reine (extensive) Größen ohne ihnen fremde Qualitäten anschaulich vorgestellt werden können. Dass die frühgriechischen Geometriker (nach *Politeia 510cd*) dabei weitgehend ohne exakte Definition ihrer Grundbegriffe (und wahrscheinlich auch ihrer Grundoperation, d.h. Postulate und Axiome) arbeiteten, war insofern angemessen, weil die Zeichnungen und Vorstellungen einen relativ festen Grund abgeben. Die genauere Bestimmung der unreflektierten Voraussetzungen wurde von PLATON (s. *Politeia 511d*) aber zumindest nicht nur deswegen gefordert, um einwandfreie deduktive Ketten bilden und eine streng wissenschaftliche Theorie formen zu können, sondern um die Grundlagen u. a. der Geometrie zu verstehen und darüber auch die Grundlagen eines Teiles der Welt. Für seine Auffassung von Geometrie bedeutet das wiederum, dass die geometrischen Objekte keine rein abstrakten Objekte sein konnten, sondern eher entweder als quasi-konkrete Abstrakta bzw. als Zwitter-Objekte mit einem bildlichen und einem gedanklichen Anteil. Die These aus Abschnitt 1.3.11 war sogar, dass das gewöhnliche Geometrisieren mit PLATON nominalistisch interpretiert werden sollte: Die beim Geometrisieren benutzten geometrischen Bilder sind nicht der Gegenstand des Wissens, das sind vielmehr die Ideen, die sie vermittelt abbilden. Zwar existieren tatsächlich *mathematika*, auf die die *dianoia* beim Mathematisieren ausgerichtet ist, für gewöhnlich täusche man sich aber über diese wahren Verhältnisse.

Jedenfalls ist für PLATON die Struktur der üblicherweise unter den geometrischen Objekten verstandenen Gegenstände nicht von ihren Instantiationen zu trennen. Deswegen bieten Tarskis Axiome in PLATONS Sinne keine vollständige Geometrie an, weil sie nur eine Struktur angeben, die nicht ausreicht, um die traditionellen geometrischen Gegenstände zu identifizieren. Darüberhinaus entspricht sie auch nicht dem platonischen Ideal einer Aufschlüsselung der unhinterfragten Annahmen, da sie nicht nach inhaltlichen, sondern nach rein formalen und äußerlich-traditionellen Aspekten gewonnen und gegeneinander ungewichtet aufgelistet werden.

Kehren wir zurück zur Frage, von der wir ausgegangen sind, nämlich ob Geometrie eine reine Strukturtheorie ist. Man *kann* einen rein strukturellen Standpunkt einnehmen und eine Mathematik, wahrscheinlich auch konsistent, als reine Strukturtheorie konzipieren. Aber die Vorführung am Beginn dieses Abschnitts gibt den Ansatz für eine differenziertere Antwort. Wenn man Axiom 8 nicht kannte und keine spontane Eingebung hatte, hat man es entweder:

(1) durch die Abbildung auf S. 146 begriffen. Dann trägt man aber erst einmal die mit dem Axiom intendierte geometrische Vorstellungen (oder abstrak-geometrische Ordnungsvorstellungen) mit sich.

Oder man hat es

(2) bereits zuvor durch die formalsprachliche Darstellung begriffen. Dann hat man es aber wiederum über quasi-konkrete Objekte, diesmal nicht über geometrische Verhältnisse, sondern über Zeichen begriffen. Dann weiß man aber nicht, dass es sich um ein geometrisches Axiom handelt, außer man kennt die entsprechende formalaxiomatische Darstellung einer Geometrie und hat damit die Strukturen der beiden Gebiete bereits aufeinander bezogen.<sup>38</sup> Damit ist natürlich noch nicht ausgeschlossen, dass man Axiom 8

(3) rein strukturell begreifen kann (siehe dazu weiter in Abschnitt 7.2). *Aber genauso betreibt man dann*

<sup>38</sup> Von Gebieten zu sprechen ist hier etwas irreführend, denn ein Gebiet in den Zeichen wird erst durch die Axiome geschaffen. Weil die Zeichen willkürlich aufeinander bezogen werden können, eignen sie sich als Material für die Darstellung sehr beliebiger Strukturen.

keine Geometrie, wenn man (wie möglicherweise auch in (2)) seine mathematische Tätigkeit letztlich nicht auf intendierte geometrische Vorstellungen zurückbezieht. Reine Strukturtheorie ist ganz unentschieden gegenüber möglichen Modellen, muss sich nicht mit Modellen befassen, wobei ihre Ergebnisse natürlich für geometrische Untersuchungen relevant sein können.

Die Behauptung, für die hier argumentiert wird, ist demnach, dass Tarskis Axiome alleine noch nicht geometrisch sind, sondern erst wenn sie auf geometrische Vorstellungen, d.h. Vorstellungen von Ausdehnung, rückbezogen werden. Dieser Geometriebegriff bezieht sich stark auf die Tätigkeit des Mathematikers, denn ohne einen Mathematiker, der die Axiome oder andere Momente seines Tuns mit intendierten geometrischen Vorstellungen unterlegt, gibt es keine Geometrie.<sup>39</sup>

Die Stärke dieses Geometriebegriffs liegt darin, dass er auf die historischen Gestalten der Geometrie anwendbar bleibt. Der strukturalistische Standpunkt scheint sich in den zwei letzten Jahrhunderten parallel dazu entwickelt zu haben, dass man immer stärker dazu kam, die strukturellen Gegebenheiten von ihren traditionellen Modellen abzutrennen und frei zu variieren. Dass man die mathematischen Beziehungen aber auch frei von ihren einmal intendierten Modellen betrachten kann und auch betrachten sollte, ist weniger als die Meinung, dass die moderne Mathematik immer nur Strukturen untersucht oder untersuchen sollte. Dies ist das strukturalistische Missverständnis, dass dazu anleitet, manche ältere geometrische Arbeiten als ungenügend reine Formen einer Strukturtheorie zu interpretieren und damalige Geometriebegriffe als verfehlt abzulehnen.<sup>40</sup>

### 5.3 Die Grundlegung der Mathematik in der Geometrie und modernen Logik

Euklidischer Geometrie und moderner Logik sind gemein, dass sie beide zu unterschiedlichen Zeiten als die in im zeitabhängigen Sinn grundlegende Wissenschaft der Mathematik galten bzw. gelten, beide selbst mathematische Theorien sind und ihr Gegenstandsbereich nur quasi-konkrete Objekte beinhaltet. Heutzutage schreibt und denkt jeder Mathematiker, will er etwas exakt betrachten, – auch wenn er keine speziellen Kenntnisse in formaler Logik besitzt – nach Vorgabe der modernen formalen Logik und der Mengenlehre. Man kann sich streiten, wieviel mengentheoretisches Rüstzeug zum eigentlichen Bereich der Logik noch hinzukommen muss wie durch die Modelltheorie, damit die Logik abgeschlossen werden kann, oder wieviel Mengentheorie die Logik als Logik bereits enthält – einigen scheint man sich auf jeden Fall zu können darauf, dass die syntaktische Seite einer Prädikatenlogik erster Stufe die sprachliche Seite des Mathematikbetreibens abdeckt und damit die grundlegenden Denkschritte in ihr darstellbar sind. Das, was ein Mathematiker sagt, will er keine Intuition, sondern etwas Genaues aussprechen, kann er mittels der Syntax von  $PL^1$  sagen.<sup>41</sup>

39 Damit soll die mathematische Fruchtbarkeit einer axiomatisch-strukturellen Arbeitsweise nicht in Frage gestellt werden. Eine rein strukturelle Betrachtung kann z. B. die Ähnlichkeit entfernter mathematischer Gebiete sichtbar machen, z. B. die der Logik und Topologie; siehe Schlimm 2009. Überraschend und faszinierend sind diese Ähnlichkeiten aber gerade darum, weil die Gebiete unterschiedliche Grundlagen haben.

40 Ein Strukturalist müsste sich im übrigen gegen die formalistische Tendenz bewahren, die die Zeichen der formalen Sprache als die grundlegenden Objekte der Mathematik nimmt und Mathematik als die Manipulation von Zeichenketten nach eindeutigen und festgelegten Regeln. Denn damit ist er nur (wieder) bei quasi-konkreten Objekten angelangt. Die Parallele zwischen der Systematisierung der Geometrie in den *Elementen* EUKLIDS und der Entwicklung der formalen Logik in Freges *Begriffsschrift* ist überraschend. Beide Male wird der Umgang mit quasi-konkreten Objekten durch Formierungsprinzipien, Fallunterscheidung und Angabe von Manipulationsvorschriften geregelt. Nur erfolgt dies in der formalen Logik nicht im Hinblick auf Eigenschaften der Zeichen, sondern daraufhin, diese Zeichen und Zeichenkombinationen als etwas anderes zu interpretieren, d.h. als Medium zu nutzen.

41 Für die gewöhnliche Mathematik gilt sogar von einem inhaltlichen Standpunkt aus, dass ihre Theoreme mit relativ schwachen Theorien bewiesen werden können, und nicht nur ontisch selten über die ersten Potenzmengen der natürlichen Zahlen hinausgehen. In der von Harvey Friedman begründeten Forschungsrichtung der *reverse mathematics* ist es gelungen aufzuzeigen, dass die meisten berühmten Sätze der gewöhnlichen Mathematik sogar äquivalent sind zu einer von fünf Systemen, die alle schwächer als die zweitstufige Arithmetik sind (siehe Simpson 2009).

Das Maß an mathematischer Komplexität, das sich in der Syntax und einem Kalkül von  $\mathbf{PL}^1$  befindet, wurde bestimmt als ein wenig unter der gewöhnlichen Arithmetik  $\mathbf{PA}$  liegend.<sup>42</sup> D. h. in  $\mathbf{PL}^1$  können die Axiome von  $\mathbf{PA}$  (rekursiv) angegeben werden, und in dieser formalen Theorie wiederum die Syntax von  $\mathbf{PL}^1$  und ihr Beweisbegriff rekonstruiert werden, indem die formalen Zeichen ‚gödelisiert‘ werden und ihr Aufbau zu formalen Worten und die Beweisbarkeit mit rekursiven Funktionen beschrieben wird.

Unter der allgemein akzeptierten Annahme, dass sich jede verständliche mathematische Theorie rekursiv axiomatisieren lassen muss in  $\mathbf{PL}^1$ , erhält das Theorem eine die Mathematik umfassende Bedeutung, das besagt, dass sich jede rekursiv axiomatisierbare Theorie  $T$  in  $\mathbf{PA}^T$ , das sind die Axiome  $\mathbf{PA}$  plus ein arithmetischer Satz, der im gewissen Sinne die Konsistenz von  $T$  ausdrückt, interpretieren lässt.<sup>43</sup> Auch das sogenannte Hilbertsche Programm baute darauf auf, alle mathematischen Theoreme als aus grundlegenden Axiomen formal ableitbare Sätze zu betrachten. Es war in ihm intendiert, mit mathematischen Methoden zu zeigen, dass sich formal aus den grundlegenden formalen Axiome mit den festgelegten formalen Ableitungsregeln keine sich widersprechenden Sätze ableiten lassen.

Jede mathematische Theorie ist also in  $\mathbf{PL}^1$  darstellbar und deshalb in gewissem Sinne formal reduzierbar auf  $\mathbf{PA}$ . Die Zeichen der Logik für relativ Beliebiges und als Medium zu verwenden stattet dieses Vorgehen mit einer großen Allgemeinheit aus, während die Kodierung der Logik in  $\mathbf{PA}$  als mathematische Reflexion auf die Voraussetzungen von  $\mathbf{PL}^1$  verstanden werden kann. Diese Reflexion ist aber nicht vollständig, da mit ihr nicht auf die lebensweltlichen Umstände und Voraussetzungen Bezug genommen wird, sondern nur auf die implizit enthaltenen mathematisch-strukturellen Gegebenheiten. Nun sind uns die Elemente der formalen Sprache nicht direkt als Zahlen, Gödelmengen oder anderes ohne Zeichen gegeben und kommunizierbar.

Tatsächlich haben die Zeichen einer formalen Sprache einen quasi-konkreten Charakter, da sie in der äußeren Welt verwirklicht dort wahrnehmbar sind, sie in der Vorstellung konstruiert und wiederum in der Welt so hervorgebracht werden können, dass sie eindeutig sind, weil sie eine eindeutige mathematische Struktur haben.<sup>44</sup> Diese konkreten und idealen Ausdrücke haben aber eine geometrisch beschreibbare Gestalt und setzen insofern etwas Geometrisches voraus.

Nun gibt es eine notwendige Bedingung jeder angemessenen formalen Sprache, nämlich dass die einzelnen Zeichen ihres ‚Alphabets‘ mehr als einmal in ihren Formeln, tatsächlich sogar beliebig oft, vorkommen dürfen.<sup>45</sup> Die Geometrie-konzeption Platons kann nun in einem Aspekt gerade als ein Versuch angesehen werden, die Möglichkeit dieser Type-Token-Unterscheidung anzugeben. Der Übergang von den Ideen, die für sich keine Entzweiung zulassen, zu den mathematischen Ideen und dann zu den unabhängig voneinander gegebenen mathematischen Objekten gelingt in der Geometrie, die deshalb durch sich das typisch Mathematische bzw. die Form des Mathematischen ist.<sup>46</sup> Damit gründet sich in einer platonischen Mathematik-konzeption auch die moderne Logik auf die Geometrie, wenn man auf ihre Grundlagen reflektiert.

Diese Abhängigkeit ist nun – könnte man einwenden – nur äußerlich, da sie nur die moderne Logik

42 Wir verwenden aber weiter  $\mathbf{PA}$ , weil es aus Abschnitt 4.2 bekannt ist, und verstehen es im folgenden als erweitert durch beliebig viele Funktionssymbole.

43 Siehe Feferman 1960, insb. S. 72.

44 Vgl. Blau 2008, S. 401ff. «Wenn wir von *formalen* Ausdrücken reden, *meinen* wir zuletzt Gödelmengen, *verwenden* konkrete Ausdrücke und *denken* wohl an, und in idealen Ausdrücken . . . » (S. 404). Denn abstrakte Objekte können wir nicht verwenden, konkrete Ausdrücke (als Token) sind uns nicht allgemein genug, und die mentalen Konstrukte werden nur im Hinblick auf ihre mathematische Struktur benutzt. Was Pleitz 2010, S. 214a74, gegen Blau einwirft, geht daher an Blaus Überlegungen vorbei.

45 Das stimmt so nicht ganz. Natürlich kann man z. B. für jedes nicht-logische und logische Zeichen eine unendliche große Zeichenmenge bestimmen, aus der man jedes Zeichen nur einmal verwendet, die aber alle gleich interpretiert werden. Diese wird man aber über die Grundelemente der euklidischen Geometrie wie gerade Linie, Winkel, Halbkreis, Vieleck etc. oder über anderes sich Wiederholendes bestimmen müssen; und damit hat man ein anderes, was beliebig oft vorkommt.

46 Für ein paar Einzelheiten siehe die Abschnitte 1.3.11 und 1.3.8.

als mathematische Theorie betrifft und nicht die logischen Bestimmungen an sich, die umgekehrt jeder rationalen Geometrie zugrunde liegen und die auch unabhängig von jeder Raumvorstellung untersucht und gerechtfertigt werden müssten, sofern man dies überhaupt kann. Aber dieses Vorurteil, nachdem die Logik ‚tiefer‘ im Denken liegt als das Räumliche, weniger äußerlich und auch unbestimmter und damit allgemeiner ist, könnte sich als falsch herausstellen. Zumindest ist die erstaunliche, gegenseitige Interpretierbarkeit der intuitionistischen Typentheorie und Homomorphietheorie (zugespitzt: die strukturelle Gleichheit von Logik und Raum) momentan ein Gebiet tiefliegender mathematischer Forschung, die in ihrer Bedeutung für das Verhältnis von Logik und Geometrie erst noch zu bestimmen ist.<sup>47</sup>

## 5.4 Hegel und die Begründung der logischen Bestimmungen

Im vorletzten Abschnitt 5.2 wurde bereits ein prinzipielles Problem deduktiver Theorien angesprochen, nämlich die Begründung der nicht abgeleiteten Voraussetzungen, der Axiome. Innerhalb einer formalen Logik sind Axiome, da sie *per definitionem* auch keine Tautologien dieser Logik sind, nicht weiter zu rechtfertigen, insofern ‚rechtfertigen‘ dort bedeutet, sie aus anderen Sätzen oder ohne Voraussetzungen im Kalkül abzuleiten. Will man, wie im letzten Abschnitt diskutiert, eine bestimmte Theorie (d.h. eine unter Ableitung geschlossene Menge von Sätzen) formal axiomatisieren, können metalogische Kriterien wie Einfachheit (z. B. geringste Anzahl an Grundprädikaten, kürzeste insgesamt Satzlänge (bei endlich vielen Axiomen), Unabhängigkeit der Axiome untereinander) oder Verständlichkeit (z. B. durch die direkte Übernahme informeller Grundsätze) als Leitlinien gewählt werden. Formalisiert man dagegen direkt einzelne Sätze, die sowohl informell wie auch formalisiert als Axiome dienen sollen, so scheint eine Begründung dieser informellen Axiome nicht mehr formalisierbar zu sein. Augenscheinlich ist dies beim Rekurs auf die Erfahrung, die Form der Anschauung oder beim Hinweis auf die unmittelbare Evidenz der Axiome. Ähnlich verhält es sich mit *ad hominem* Argumentationen, der philosophische Gegner könne seine Position nicht sinnvoll vertreten oder seine Theorie stimme nicht mit seiner Praxis überein, die manchmal auch metalogische Behauptungen über die Möglichkeit der Folgerung und der Konsistenz enthalten, sich im Ganzen aber trotzdem nicht zu allgemeingültigen Argumenten gegen die objektivierte, gegenteilige These umwandeln lassen.

Ähnlich gebraucht die Position, Axiomensysteme würden durch ihre Kohärenz begründet, weil durch sie z. B. die Existenz und der epistemische Zugang zu den behandelten mathematischen Objekten gegeben ist, mit der Konsistenz als notwendiger Bedingung für Kohärenz einen Begriff der (formalisierten) Metalogik. In der formalisierten Metalogik sind Konsistenzbeweise allerdings Beweise der Konsistenz *relativ zu einer stärkeren Theorie*, d.h. man zeigt mit ihnen, dass eine bestimmte Theorie, falls konsistent, bereits die Konsistenz einer anderen Theorie voraussetzt. Dieser Konsistenzbegriff hilft demnach i.a. nicht dabei, tatsächlich kohärente Axiomensysteme zu identifizieren, und ein Vertreter dieser Position muss seinen Kohärenzbegriff wesentlich auf etwas anderes gründen und ihn z. B. zu einem Grundprädikat erklären, dessen Zuschreibung weitgehend der mathematischen Intuition überlassen wird.<sup>48</sup>

Verschärft wird diese Problematik noch, wenn man die ‚Axiome‘ der Logik selbst betrachtet. Denn formalisiert man sie, so setzt man schon eine Logik mit ihren ‚Axiomen‘ voraus; will man sie begründen, muss die Begründung bereits praktisch von den ‚Axiomen‘ Gebrauch machen, damit sie logisch einwandfrei ist. Dass die nicht weiter zurückführbaren logischen Gesetze als wahr anzuerkennen sind, kann nach Frege die Logik nicht weiter begründen, da sie ihre Wahrheit nur relativ zu anderen weiteren logischen Gesetzen zeigen kann. In diesem Sinne findet für Frege eine Grundlegung der Logik nur im Bereich des Für-Wahr-Haltens statt.<sup>49</sup>

<sup>47</sup> Vgl. [www.homotopytypetheory.org](http://www.homotopytypetheory.org).

<sup>48</sup> So z. B. Shapiro 1997, S. 135.

<sup>49</sup> Siehe Frege 2009, S. 11[XVII].

Zudem trennt man für gewöhnlich die mathematischen Voraussetzungen, die für den Aufbau einer formalen Logik notwendig sind, von der eigentlichen Logik ab, so dass eine übliche Prädikatenlogik nicht in einer Prädikatenlogik für sich formalisiert werden kann, sondern erst in einer (in ihr formalisierten) ausreichend starken Arithmetik oder Mengentheorie. Für den Mathematiker ergibt sich daraus folgender Zirkel: Zum Aufbau der formalen Logik braucht er bereits mathematische Werkzeuge, wie z. B. mathematische Induktion für den Gebrauch der Definition einer Formel, die er wiederum in der Sprache einer Prädikatenlogik erster Stufe fasst.<sup>50</sup> Nun muss dieser Zirkel kein schlechter sein, er ist aber nicht voraussetzungslos, weil die wechselseitige Begründung keine vollständige ist. Und über das Vorausgesetzte erhält man keine über das mathematisch und logisch Fassbare hinausgehende Rechenschaft.

Dem aristotelisch-fregeanischen Typ formaler Logik kann der Idee nach ein alternativer Typ Logik an die Seite gestellt werden, die sich vollständig selbst begründet bzw. der Teil einer umfassenden Logik ist, der die vollständige Begründung seiner selbst und des formalen Teils leistet.<sup>51</sup> Diese müsste sich u. a. dadurch auszeichnen, dass sie alle Voraussetzungen der formalen Logik und ihrer selbst vollständig begründet und somit das, was wahrheitsfähig ist, erst konstituiert. Weil sie sich selbst begründet, müsste sie auch diese ihre Selbstbezüglichkeit im Aufbau reflektieren und benutzen.

#### 5.4.1 Hegels Logik

Es scheint HEGELS Intention gewesen zu sein, mit seiner WISSENSCHAFT DER LOGIK eine derartig alternative, voraussetzungslose Logik zu gewinnen, die vollständig selbstbegründend arbeitet. Da wesentliche Gründe einer Sache stets notwendig für eine Begründung dieser Sache sind, muss eine solche Logik alle ihr wesentlichen Begründungen enthalten. Somit betreibt man diese Logik, oder man steht außerhalb und bildet sich höchstens (im strengen Sinn einer derartigen Logikkonzeption) unbegründete Vorstellungen von ihr. Dazu gehört auch eine Vorstellung der Methode der Logik, die erst in der Logik selbst begründet wird. Die Methode der Logik muss weder vor Beginn noch am Anfang der HEGELSchen Logik selbst dargestellt und gerechtfertigt werden, da die Methode so konzipiert ist, dass «sie von ihrem Gegenstande und Inhalte nichts Unterschiedenes ist; – denn es ist der Inhalt in sich, *die Dialektik, die er an ihm selbst hat, welche ihn fortbewegt.*»<sup>52</sup> Es existiert demnach weder eine Metalogik der HEGELSchen Logik noch scheint der logische Fortgang in ihr irgendwo willkürlich zu sein.

Im allgemeinen gilt: Die Methode seiner Logik «ist das Bewußtsein über die Form der inneren Selbstbewegung ihres Inhalts [d.h. des Inhalts der Logik].»<sup>53</sup> Die Form des Fortgangs in der HEGELSchen Logik ist die *bestimmte Negation*.

Wir gehen davon aus, dass die Negation nicht nur negativ, sondern auch positiv ist.<sup>54</sup> Es widerspricht sich allerdings, dass das Negative auch positiv ist, es muss also negiert werden, dass das Negative so-

50 Vgl. Ebbinghaus et al. 1996, S. 120ff., für die wechselseitige Abhängigkeit von Mengenlehre und formaler Logik. Für die zwischen Arithmetik und formaler Logik siehe Lenski 2010, S. 2f., der zurecht darauf hinweist, dass die durch diese Abhängigkeit entstandene Selbstbezüglichkeit der üblichen formalen Logik wesentlich ist für die Existenz eines wahren Satzes, der unabweisbar ist; in der formalen Logik kann auf sie selbst reflektiert werden, diese Reflexivität ist aber keine bereits im Aufbau der Logik berücksichtigte Eigenschaft.

51 Siehe Lenski 2010, S. 3.

52 Hegel 1986b, S. 50.

53 Hegel 1986b, S. 49.

54 Und interpretieren mit einer Art Paraphrase die Erläuterung der bestimmten Negation: «Das Einzige, um den wissenschaftlichen Fortgang zu gewinnen – und um dessen ganz einfache Einsicht sich wesentlich zu bemühen ist –, ist die Erkenntnis des logischen Satzes, daß das Negative ebenso sehr positiv ist oder daß das sich Widersprechende sich nicht in Null, in das abstrakte Nichts auflöst, sondern wesentlich nur in die Negation seines besonderen Inhalts, oder daß eine solche Negation nicht alle Negation, sondern die Negation der bestimmten Sache, die sich auflöst, somit bestimmte Negation ist; daß also im Resultate wesentlich das enthalten ist, woraus es resultiert, – was eigentlich eine Tautologie ist, denn sonst wäre es ein Unmittelbares, nicht ein Resultat.» Hegel 1986b, S. 49.

wohl positiv, wie auch negativ ist. Aber das ist keine Negation eines beliebigen Widerspruchs, woraus der Zusammenbruch von allem folgt, sondern es ist die Negation eines «*besonderen Inhalts*»<sup>55</sup>, nämlich davon, dass die Negation sowohl negativ wie positiv ist. Diese Negation ist also auch keine beliebige, sondern die einer «*bestimmten Sache*»<sup>56</sup>, eine bestimmte Negation. Dieses Ergebnis ‚enthält‘ die Voraussetzungen, insofern es Ergebnis gerade dieser Voraussetzungen ist.

Während man in der aristotelisch-fregeanischen Logik *schließt*, *negiert* man in der HEGELSchen. Man beachte allerdings, dass die bestimmte Negation keine Regel an die Hand gibt, mittels der sich aus einem gegebenen Anfangspunkt, den Prämissen, mechanisch etwas produzieren ließe, wie eine Konklusion mittels Schlussregeln. Denn die Gedankenbewegung fließt zumindest der Konzeption nach, wie oben erwähnt, aus der Sache, und die Form ist ein späteres Reflexionsprodukt, das bereits den Unterschied zwischen Form und Inhalt voraussetzt. Damit ist der Gedankengang aber nie vorhersagbar und deswegen alleine schon nicht formalisierbar als eine neue formale Logik. Denn in einer formalen Logik ist die rein syntaktische Seite mit der Semantik so eng verbunden, dass es keinen semantischen Zwang geben darf, der eine syntaktische Willkür darstellt.

Fakt scheint es jedenfalls zu sein, dass die zahlreichen Versuche, die HEGELSche Logik zu formalisieren, bisher alle erfolglos waren.<sup>57</sup> Dem steht gegenüber, dass die Hegelforschung bis heute nicht klären konnte, was so wichtige Ausdrücke wie *die bestimmte Negation* in der WISSENSCHAFT DER LOGIK bedeuten<sup>58</sup> – Puntel<sup>59</sup> behauptet sogar, dass HEGELS Dialektik überhaupt nicht zu begreifen sei, weil es nichts zu begreifen gäbe. Wir werden uns im nächsten Abschnitt einem Projekt zu, das grundlegende Ideen zwar aufgreift, aber unabhängig von HEGELS Werk weiterverarbeitet.

#### 5.4.2 Hegel <formalized>

Uwe Petersen ist der Auffassung, dass man HEGELS Dialektik nicht formalisieren könne, weil es noch gar keine fertige (informelle) Theorie der HEGELSchen Dialektik gebe (und nur Theorien formalisierbar seien).<sup>60</sup> Vielmehr sei die Hegelforschung gescheitert: «Weder Hegel noch seine Exegeten können einen *Inhalt* vorweisen, an dem sich die Ansprüche der spekulativen Logik und Philosophie auf eine besondere Art der Erkenntnis, die sich dem klassischen Denken entzieht, messen lassen.»<sup>61</sup> Sein Projekt zielt darauf, die Möglichkeit einer *formalen* dialektischen Logik zu ergründen. Für den Aufbau einer formalen dialektischen Logik, zieht er mehrere Überlegungen hinzu, die er in der spekulativen Philosophie verortet: (1) Eine Begriffsintension besteht für sich, auch wenn die Extension widersprüchlich bzw. unbeständig ist. Sind unbeständige Begriffsumfänge aber Objekte der Logik, dann kann nicht mehr allen Aussagen ein eindeutiger Wahrheitswert zugeordnet werden. Das Prinzip der Wahrheitsdefinitheit muss aufgegeben werden. (2) Dies ist insofern unproblematisch, als Aussagen mit dem Vollzug von Überlegungen ihre Bedeutung ändern können. Damit steht eine einmal gemachte Annahme nicht an anderen Argumentationspunkten weiter zur Verfügung, sondern muss neu gesetzt

55 Hegel 1986b, S. 49.

56 Hegel 1986b, S. 49.

57 Für einige der Versuche, die HEGELSche Dialektik zu formalisieren, siehe die Verweise in Petersen 2009, S. 143f.. Zur Verwendung parakonsistenter Logiken bezüglich HEGELS Dialektik siehe Bremer 2012.

58 Siehe Sparby 2012.

59 Siehe Puntel 1996, S. 131f., 152.

60 Siehe Petersen 2010, S. 6. Die Darstellung der Leitlinien seines Projekts in Petersen 2010 wurde von ihm nicht revidiert, s. Petersen 2002, S. 6. Siehe auch Petersen 2009, S. 127, 140ff..

61 Petersen 2007, S. 96. Anderswo: «Was Hegel im einzelnen sagt, ist logisch unhaltbar und wird an Unsinnigkeit nur von dem übertroffen, was seine Interpreten sagen.» Petersen 2009, S. 143.



werden.<sup>62</sup> (3) Die Begriffsbildung wird nicht (künstlich) beschränkt.<sup>63</sup> (4) Widersprüche, die aus einer unbeschränkten Begriffsbildung entstehen, sind eine treibende Kraft zur Explikation der Denkbestimmungen (Kategorien).<sup>64</sup>

Diese von HEGELS Werk angeregten Ideen entfalten ihre Wirkung, so Petersen, aber erst im Kontext der mathematischen Logik.<sup>65</sup> In dieser Kombination sollte es möglich werden 1.) die «grundlegenden Denkbestimmungen» in «rein logischen Termen» zu definieren; und 2.) ihre Gesetzmässigkeit durch «rein logische Mittel» abzuleiten.<sup>66</sup>

Petersens Projekt ist eine Art ungewöhnlicher Fregeanischer Neologizismus, insofern es eine logische Begründung der Arithmetik wie auch der Modalität, Temporalität, Lokalität, Kausalität und anderer Denkbestimmungen betreibt. Im Anschluss an Frege benutzt er eine typenfreie Logik mit unbeschränkter  $\lambda$ -Abstraktion, das Axiom der unbeschränkten Abstraktion formalisiert sozusagen (3). Da die unbeschränkte Abstraktion in Form des Grundgesetzes  $V$ ,<sup>67</sup> zu der für Frege verhängnisvollen Ableitung eines Widerspruchs führte, muss etwas anderes geändert und die Ableitungsstärke im Kalkül abgeschwächt werden, um einen Widerspruch zu verhindern. Wenn man darauf verzichtet, dass man eine einmal gemachte Annahme öfters gebrauchen darf, dann wird der Kalkül tatsächlich konsistent. Dieses Vorgehen wird durch (2) begründet und bietet im Ergebnis die Möglichkeit modale Operatoren rein logisch zu definieren. Die Idee dazu: Haben gleiche Annahmen  $A, A, \dots$  nicht notwendigerweise den gleichen Wahrheitswert, so sind beliebig lange Konjunktionen (gewisser Art)  $A \wedge A, A \wedge A \wedge A, \dots$  nicht aus  $A$  ableitbar, weil i.a. gerade nicht gilt  $A \rightarrow A \wedge A$ . Die Notwendigkeit von  $A$ , symbolisch  $\Box A$ , könnte dann vielleicht als eine Art unendliche Konjunktion  $A \wedge A \wedge \dots$  definiert werden<sup>68</sup> (was technisch um einiges komplizierter ist als es hier erscheinen mag, weil u. a. nur endliche Konjunktionen zur Verfügung stehen; um wichtige Eigenschaften der Modalkonstanten zu erhalten, erweitert Petersen die Schlußannahmen um sogenannte **Z**-Schlüsse).<sup>69</sup>

Das Projekt nochmal anders dargestellt: Eine *dialektische* Logik ist weniger Schlusslehre als vielmehr Begriffstheorie. Die unbeschränkte Komprehension als Axiom zu setzen, sei nicht Freges Fehler gewesen, vielmehr sind die in seiner Logik ableitbaren Widersprüche Anzeichen dafür, dass mit den zugrunde gelegten theoretischen Konstanten etwas nicht stimmt. Als Kern der Logik in dialektischer Hinsicht macht Petersen die sogenannte Strukturschlussregeln (s.u.) aus, von denen er eine aufgibt, um die Konsistenz des Kalküls herzustellen und um ihren Gehalt untersuchen zu können, indem man sie ‚der Inkonsistenz annähert‘; das Weglassen der Kontraktionsregel macht erst die Definition der Notwendigkeit möglich.

Technisch betrachtet arbeitet Petersen in Gentzens intuitionistischen Sequenzenkalkül und lässt (begründet durch (2)) die Kontraktionsregel weg, das ist  $\frac{A, A, \Gamma \Rightarrow C}{A, \Gamma \Rightarrow C}$ . Die Schlussregeln:<sup>70</sup>

62 Siehe z. B. Petersen 2009, S. 173.

63 Siehe z. B. Petersen 2009, S. 129,191.

64 Vgl. Petersen 2009, S. 127.

65 Entsprechend seine biographische Selbstauskunft: «Meine Arbeit war vorrangig durch den Versuch bestimmt, in der modernen Logik – also wesentlich der Logik im Anschluß an Frege – ein Moment zu finden, das der Hegelschen Vision einer Entwicklung von Denkbestimmungen im und aus dem reinen Denken entgegenkommt, und zwar in einer Form, die den Ansprüchen an Exaktheit der mathematischen Behandlung der Logik genügt.» Petersen 2009, S. 125. Dabei ergibt sich der natürliche Anknüpfungspunkt durch die Antinomien in den modernen Formalwissenschaften, die sozusagen eine Dialektik herbeirufen; vgl. Petersen 2009, S. 159.

66 Petersen 2007, S. 96.

67 in Frege 2009, (§20).

68 Zur Verwendung des Konjunktionszeichens hier beachte man die Anmerkung in Petersen 2010, S. 96.

69 Vgl. Petersen 2007, S. 143ff.,152f..

70 Vgl. Petersen 2007, S. 114f..

$$\begin{array}{l} \text{Für } \in: \frac{\mathfrak{F}[t], \Gamma \Rightarrow C, \quad \Gamma \Rightarrow \mathfrak{F}[t]}{t \in \lambda x \mathfrak{F}[x], \Gamma \Rightarrow C} \quad \text{Für } \subseteq: \frac{\Gamma \Rightarrow r \in s \quad r \in t, \Pi \rightarrow C, \quad a \in s, \Gamma \Rightarrow a \in t.}{s \subseteq t, \Gamma, \Pi \Rightarrow C} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, \Pi \Rightarrow C} \\ \text{Schnitt: } \frac{\Gamma \Rightarrow C \quad \Pi[C] \Rightarrow B.}{\Gamma, \Pi \Rightarrow B} \quad \text{Verdünnung: } \frac{\Gamma \Rightarrow C.}{A, \Gamma \Rightarrow C} \quad \text{Vertauschung: } \frac{\Gamma, A, B, \Pi \Rightarrow C}{\Gamma, B, A, \Pi \Rightarrow C} \end{array}$$

Diese Schlußregeln, quasi eine Erweiterung des Sequenzenkalküls ohne Zusammenziehung durch Schlußregeln für  $\in$  und  $\subseteq$ , ergeben mit einer entsprechenden Sprache, die als logische Konstanten nur die Elementschafft  $\in$ , die Inklusion  $\subseteq$  und den  $\lambda$ -Operator hat, die Logik  $L^iD_\lambda$ .<sup>71</sup> Die üblichen logischen Konstanten können definiert werden. Ohne die Kontraktionsregel ist keine vollständige Induktion über die natürlichen Zahlen ableitbar oder auch nur die natürlichen Zahlen als Gesamtheit zufriedenstellend definierbar.  $L^iD_\lambda$  ist unentscheidbar – im Unterschied zur intuitionistischen Logik erster Stufe ohne Kontraktion – und ihre Konsistenz mit wenigen Mitteln beweisbar. Sein Kalkül ist von einem herkömmlichen substanziellen Logikbegriff aus betrachtet exotisch. So fallen extensionale Gleichheit und Identität auseinander, somit verändern sich auch die Beschreibungsmöglichkeiten und das Auswahlaxiom ist nicht verträglich mit der unbeschränkten Abstraktion. Charakteristisch sind für  $L^iD_\lambda$  die direkten Fixpunkttheoreme. Aus ihnen ergeben sich unmittelbar kontraintuitive Sätze, z. B. die Existenz eines Satzes  $A$  mit  $A \leftrightarrow \neg A$ , eines Terms  $t$  ( $S$  die gewöhnliche Nachfolgerfunktion) mit  $S(t) = t$ , für das Komplement  $\bar{x}$  einer Extension  $x$ :  $\bar{\bar{t}} = t$ . Sozusagen ‚alles‘ hat einen Fixpunkt, auch wenn es keinen haben ‚dürfte‘. Abseits von einer Ausdeutung (hegelscher Art) dieser Auswirkungen der Selbstbezüglichkeit in Form der Fixpunkttheoreme ist es technisch das Fehlen der Kontraktionsregel, die die Ableitung eines Widerspruchs ‚kurz vor knapp‘ verhindert. Die Geltung der direkten Fixpunkttheoreme desavouieren  $L^iD_\lambda$  unter Philosophen weitgehend, auch wenn in der Informatik aus technischen Gründen ein größeres Interesse an  $L^iD_\lambda$  besteht.

Gegen Petersens Projekt könnte eingewendet werden, es würde keine Letztbegründung der Logik liefern: (1.) weil die Syntax von  $L^iD_\lambda$  ohne Semantik bleibt, und nicht zu sehen ist, wie überhaupt eine passende und integrale Semantik beschaffen sein könnte; (2.) weil er zum Aufbau von  $L^iD_\lambda$  eine klassische (Meta-) Logik mit mathematischer Induktion benutzt, um z. B. zu definieren, was eine Formel ist, und Beweise führen zu können; (3.) weil man manche grundlegende Voraussetzungen der modernen formalen Logik nicht in ihr selbst reflektieren kann.

Zu (1.): Dem ersten Einwand könnte man mit dem Gedanken entgegenzutreten, dass Form und Inhalt noch nicht getrennt sind. Durch die Erklärung und Begründung des Aufbaus des Kalküls von  $L^iD_\lambda$  ist bereits eine Bedeutung mitgegeben, die sich mit der Erweiterung des Kalküls und der Anwendung in einer näher anzugebenden Weise entwickelt, und wieder gestaltend zurückwirkt. Tatsächlich scheint Petersen etwas ähnliches zu vertreten.<sup>72</sup> Jedenfalls verwirft er für die dialektische Logik jede modelltheoretische Semantik, die die Syntax in einer (äußeren) Realität interpretiert und vermeidet jede Bezugnahme auf außertheoretische Gegenstände. Dies gelingt dadurch, dass er das Modell selbst als Theorie auffasst, als adäquates Modell seiner intendierten Logik die (formalisierte) Metatheorie nimmt und die Repräsentierung der ‚Gegenstände‘ als eine Art Gödelisierung zu betreiben scheint.<sup>73</sup>

Zu (2.): Petersen geht es nicht um eine absolute Letztbegründung. Die Klarheit, die mit der mathematischen Behandlung der Logik verbunden ist, genießt Vorrang. Deshalb kann erst dann in klarer und präziser Weise ‚philosophiert‘ werden, wenn eine mathematische Theorie bereit steht, innerhalb der mathematisch gearbeitet werden kann. Indem im Rahmen umfassenderer mathematischer Theorien gerade eine (der Konsistenzstärke nach) sehr schwache Logik mit ungewöhnlichen Eigenschaften wie  $L^iD_\lambda$  zur Untersuchung gewählt wird, könnten durch ihre schrittweise begründete Erweiterung grundlegende Gesetzmässigkeiten unterschieden und bestimmt werden. Erweitert durch die oben erwähnten  $Z$ -Schlüsse zu  $L^iD_\lambda^Z$  ist sie allerdings stark genug, um ihre eigene Sprache und ihren Ableitungsbegriff zu repräsentieren. Insofern begründet sie sich selbst. Die präsupponierte Aussage (2.), er würde eine klassische Metalogik verwenden (müssen), ist also falsch.

71 Und die Semantik von  $L^iD_\lambda$ ? Siehe dazu weiter unten.

72 Z. B. merkt er an: «... die dialektische Logik betrachtet Form, insofern diese fähig ist, sich aus sich selbst heraus einen Inhalt zu geben.» Petersen 2009, S. 135. Oder: «All das bedeutet aber nicht, daß es keine Semantiken für die zusammenziehungs-freie Logik mit uneingeschränkter Abstraktion gäbe – nur, daß ich sie für einen philosophischen Hintergrund wie den der Grundlegung einer Theorie der Dialektik ungeeignet halte.» Petersen 2009, S. 174, s. a. Petersen 2002, S. 320.

73 Für Details siehe Petersen 2002, Kapitel 28, insbesondere § 111.

Zu (3.): Petersen scheint auch nicht die formale Logik begründen, sondern umgekehrt, die (noch) unklaren Kategorien rein logisch definieren und ihre Gesetze untersuchen zu wollen. ‚Rein logisch‘ heißt hier ‚mit rein logischen Ausdrücken‘, und dazu gehören – man beachte – in  $L^1D_\lambda$  auch beliebige Abstraktionsterme. Dialektische Logik beinhaltet für ihn, wie die Logik für Frege, eine einfache Begriffstheorie, d.h. eine einfache Mengentheorie, die heute üblicherweise nicht mehr zum Grundbestand einer Logik zählt. Mit dieser rudimentären Begriffstheorie schließt er zumindest äußerlich an HEGELS WISSENSCHAFT DER LOGIK an, ohne andererseits das moderne Verständnis von Logik als wahrheitserhaltendem Schließen abzuwerfen. Während bei HEGEL der *Satz* eine spekulative Form inne hatte und das Ganze eine Begriffsbewegung und -explikation darstellte, begreift Petersen in der dialektischen Logik das Schließen als das Zentrale, insbesondere wegen des Fehlens der Kontraktionsregel.

Petersens Ansatz besteht demnach in einer Erneuerung des HEGELschen Projekts, die Grundbestimmungen der Logik zu explizieren, jetzt allerdings im Rahmen einer formalen Logik. Für ein besseres Verständnis der WISSENSCHAFT DER LOGIK dient er (zumindest zunächst) nicht. Die entscheidende Lücke der bisherigen Durchführung des Projekts besteht m. E. in der Interpretation der Ergebnisse. Wenn z. B. die modalen Operatoren rein logisch definiert werden können, und mit einer konkreten Definition und der Ergänzung durch sogenannte *Z*-Schlüsse wesentliche Gesetze über sie abgeleitet werden können, stellt sich die Frage, ob man dadurch Notwendigkeit und Möglichkeit besser verstanden hat. Kann man dieses bessere Verständnis auf andere Gebiete übertragen, müssen bisherige Ansichten revidiert werden? Problematisch scheint mir hier wieder die Entformalisierung zu sein.

Soweit Petersens umfangreiche Ausführungen im Rahmen dieser Arbeit berücksichtigt werden können, zielen sie nicht direkt darauf ab das Verhältnis zwischen dem Informellen und Formalisierten zu lösen, sondern sind selbst auf eine Klärung dieser Beziehung angewiesen.<sup>74</sup>

### 5.4.3 Formale versus intuitive Logik

Es scheint nach den letzten beiden Abschnitten ein fundamentales Problem der philosophischen Praxis zu geben, nämlich dass eine formale Logik, die in ihren Bestimmungen klar umrissen ist, diese nicht selbst begründen kann, während eine Logik, die dies wiederum zu leisten vorgibt, selbst unklar und unformalisierbar bleibt. Ob die HEGELsche Logik vielleicht eine positive Ausnahme ist und die intuitive Logik informell begründen könnte, kann hier nicht gezeigt werden; der aktuelle Forschungsstand bietet hierzu keine Antworten an. Wir kehren zu dem praktischen Problem des Verhältnisses zwischen formaler und intuitiver informaler Logik zurück (s. Abschnitt 5.1.1).

Verhält es sich denn wirklich so, dass, wie dort gesagt, die informale der formalen Logik vorsteht? Denn eigentlich dienen ja Formalisierungen auch dazu die Gültigkeit von informell durchgeführten Schlüssen zu überprüfen und zu korrigieren. Blau meint:

... so stellt sich die Frage, wer hier wen kontrolliert, die intuitive Logik die formale, oder die formale die intuitive? Mir scheint, die Kontrolle ist wechselseitig. Oder um es etwas genauer zu sagen: Letzten Endes ist es die intuitive Logik, die sich selbst kontrolliert, notfalls auch *revidiert*, und sich dazu gewisser Formalismen bedient oder bedienen kann, wobei natürlich auch diese revidierbar sind.<sup>75</sup>

<sup>74</sup> Während Petersen in der modernen Logik verbleibt und sich von Hegelschen Überlegungen anregen lässt, nimmt Hans-Peter Falk die Prädikatenlogik (erster Stufe) und die moderne sprachanalytische Diskussion als Ausgangspunkt um HEGELS *Logik* zu betrachten: «Unbedenklich ‚vorausgesetzt‘ werden kann offenbar die Struktur der Prädikatenlogik erster Stufe, wie sie im gewöhnlichen Sprachgebrauch präsent ist, d.h. in einer Weise, die eine Reflexion über sie (logischer oder semantischer Art) nicht beinhaltet. Es handelt sich hier um etwas im strengen Sinn Unbezweifelbares. ... Konkret schließt sie nichts ein als die angemessene Verwendung der logischen Zeichen des Prädikatenkalküls der ersten Stufe bzw. ihrer umgangssprachlichen Äquivalente (‚nicht‘, ‚und‘, ‚alle‘ etc.), also z. B. das Wissen darum, daß eine Aussage falsch ist, wenn ihre Negation wahr ist, und Ähnliches.» (Falk 1983, S. 18) Aber gerade mit dem letzten Satz – setzt man die so verstandene Prädikatenlogik absolut – wird man dem Hegelschen Ausgangspunkt im reinen Denken nicht gerecht.

Letztlich wird man den Zusammenhang zwischen HEGELS *Logik* und moderner Logik wohl erst in einem zweiten Schritt erkennen, indem man sich in einem ersten Schritt an den ‚inhaltlichen‘ Fragen, was eine Zahl sei oder eine gerade Linie, die HEGEL ja zu klären anstrebt, orientiert und ‚abgearbeitet‘ hat (ein erster Ansatz dazu in Fußnote 70 auf S. 103).

<sup>75</sup> Blau 1978, S. 13, vgl. Blau 2008, S. 147

Dagegen wendet sich Puntel:<sup>76</sup> «... von einer ›Kontrolle‹ kann nur dann sinnvollerweise die Rede sein, wenn es sich um eine Instanz handelt, die klare und ganz bestimmte Konturen hat. So etwas wie eine intuitive Logik besitzt aber nicht solche Konturen.» Etwas wie der tatsächliche Gebrauch einer natürlichen Sprache sei zu unbestimmt hinsichtlich seiner möglichen logischen Tiefenstrukturen, um als Autorität für die Begründung logischer Gesetzmässigkeiten zu dienen.<sup>77</sup> Das Bestimmte müsse vielmehr das Unbestimmtere kontrollieren, so wie man natürlichsprachliche Schlüsse formalisiert, um ihre Gültigkeit zu überprüfen.

Dieser Einwand Puntels ist korrekt, wenn die intuitive Logik etwas Festes ist und demnach etwas in bestimmter Weise Unbestimmtes, wie die vage logische Form mancher natürlichsprachlicher Äußerungen. Blau scheint unter einer intuitiven Logik aber eine Art Potential zu verstehen, das sich aktualisiert und sich darüber wieder selbst, d.h. in seinem Potential, verbessert. Die intuitive Logik befindet sich demnach in einer (teilweise) selbstgesteuerten Bewegung, in der sie sich selbst immer weiter bestimmt.

Diese Auffassung besitzt Plausibilität, insofern sie gut die historische Entwicklung und den individuellen Lernprozess zu beschreiben scheint und sensibel für die (in diesem Kapitel argumentierte) Bedeutung des Informellen ist.

## 5.5 Zur Formalisierung von Finslers Mengenlehre

### 5.5.1 Einbettung und Rechtfertigung

Ein Resultat der vorhergehenden Abschnitte ist, dass es nicht formalisierbare Bereiche hinter und neben dem Formalen gibt. Zu diesen Bereichen zählt man im allgemeinen nicht die ausgereifte mathematische Theoriebildung. Denn wenn sich etwas adäquat formalisieren lässt, dann muss es das rein mathematisch präzise Argument sein – unabhängig davon, ob man es tatsächlich formalisiert.

In diesem Abschnitt wird die Formalisierbarkeit der Finsler-Mengenlehre untersucht.<sup>78</sup> Er beinhaltet ein weiteres Beispiel für die Bedeutung der Grenzen und des ‚Jenseits‘ des Formalen (wie in Abschnitt 5.1 skizziert) und wird bereits allgemeine Fragen zur Grundlegung der Mengenlehre diskutieren, die in Abschnitt 7.4 wieder aufgegriffen werden. Dabei werden die Verständnisprobleme expliziert (und ich versuche sie zu lösen), die für manche Mathematiker bei der Begegnung mit der Finsler-Mengenlehre auftraten und teils zu einer harschen Ablehnung Anlass gaben. Um diesen grundsätzlichen Verständnisschwierigkeiten adäquat zu begegnen wird im folgenden nicht nur das kurz darstellbare und begründbare Ergebnis meiner Beschäftigung mit der Finsler-Mengenlehre angeführt, sondern ein Großteil des Weges dorthin nachgezeichnet.

Es mag ungewöhnlich erscheinen, dass man meint, sich für die Beschäftigung mit einer mathematischen Theorie grundsätzlich rechtfertigen zu müssen. Der Grund liegt darin, dass sich zwei schwerwiegende Einwände geben lassen, dass die Finsler-Mengenlehre (**FM**) gar keine mathematische Theorie sei, und damit die (mathematische) Wissenschaftlichkeit des ganzen Unterfangens gefährdet sei. Der erste Einwand ergibt sich aus der Rezeptionsgeschichte der **FM**. Eine der ersten publizierten Auseinandersetzungen anderer Mathematiker mit **FM** ‚entdeckte‘ einen Widerspruch im Axiomensystem und beendete damit so gut wie jede weitere Aufnahme in mathematischen Kreisen. Das Kuriose daran ist jedoch, dass

<sup>76</sup> Puntel 2006, S. 115f.

<sup>77</sup> Siehe Puntel 2006, S. 114.

<sup>78</sup> Zu der Version der Finslerschen Axiome in Finsler 1926b wurde bemerkt: «... it is no an axiomatization at all in the modern sense – it is unclear whether it can be formalized.» Rieger 2000, S. 246. Und zu einer Form des dritten Axiom im Speziellen: «We have struggled to understand what is meant by this axiom and how Finsler could draw his stated conclusions from it, and we have been unable to come up with a coherent explanation.» Holmes 1996, S. 13.

der Beweis des Widerspruchs von Baer<sup>79</sup> nicht nur mathematisch falsch ist, sondern sogar von Finsler in seinem Artikel,<sup>80</sup> auf den Baer sich bezieht, vorweggenommen und widerlegt wurde. Die Neuaufnahme des Baerschen Beweises durch Holmes 1996 wiederum interpretiert das dritte Axiom Finslers falsch. Ein letztlich korrekter mathematischer Einwand gegen **FM** ist mir nicht bekannt.<sup>81</sup> Dagegen ist aber auch nicht zu übersehen, dass die Axiome der Finsler-Mengenlehre eher ‚philosophisch‘ in ihrer Allgemeinheit anmuten, nicht so leicht auf ihren mathematischen Punkt zu bringen sind und in ihrer Vermischung von Objekt- und Metasprache logisch naiv zu sein scheinen.

Breger<sup>82</sup> stellt allerdings die These auf, das Finsler seine Axiome in dem mathematischen Paradigma des 19. Jahrhunderts formulierte, und deswegen im modernen Sinne keine mathematische Theorie, die stärker formalistisch hätte geprägt sein müssen, präsentierte. Dies scheint mir nicht richtig zu sein, denn die Verständnisschwierigkeiten, die Baer und andere an den Tag legen, wurzeln nicht in formalistischen Standpunkten, sondern in mengentheoretischen Ansichten (über die Existenz der Allmenge zum Beispiel). Zudem scheint es mir plausibler, die Abwehr Finslers gegenüber Formalisierungen durch seine Absicht, eine tatsächlich grundlegende (und damit seiner Meinung nach notwendig informelle) Mengenlehre zu erstellen, begründet zu sehen.

### 5.5.2 Die Axiome

Finsler modifizierte seine Axiome über die Zeit.<sup>83</sup> Wir beziehen uns auf eine leichte Variante der späteren Darstellung Finslers.<sup>84</sup>

**Axiom I** Für jede Menge ist eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen sie die Beziehung  $\ni$  hat.

**Axiom II** Mengen sind immer dann identisch, wenn die Annahme ihrer Identität nicht zu einem Widerspruch führt.

**Axiom III** Ein mathematisches Objekt ist eine Menge immer dann, wenn die Annahme, es sei eine Menge, nicht zu einem Widerspruch mit **Axiom I** und **Axiom II** führt.

Bemerkungen:  $\ni$  (entspricht „beinhalten“) ist das umgedrehte Zeichen  $\in$  (das von „Element von“ kommt) und betont den insgesamt stärker intensionalen Charakter des durch die Axiome aufgestellten Mengenbegriffs.<sup>85</sup> Das **Axiom I** ‚regelt‘ die Menge-Element-Relation  $\ni$ , **Axiom II** die Identitätsrelation  $=$ , und **Axiom III** scheint die Existenz festzulegen.

79 In Baer 1928.

80 Nämlich Finsler 1926b.

81 Siehe Abschnitt 5.5.6 zu anderen Einwänden.

82 Siehe Breger 1995.

83 Nämlich die aus Finsler 1926b in Finsler 1964.

84 Nämlich auf die Version in Bakker und Ziegler 1996. In ihrer Erstfassung lauteten die Axiome:

- I. Für beliebige Mengen  $M$  und  $N$  ist stets eindeutig entschieden, ob  $M$  die Beziehung  $\beta$  zu  $N$  besitzt oder nicht.
- II. Isomorphe Mengen sind identisch.
- III. Die Mengen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung der Axiome I und II keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Finsler fügt zu III. erklärend hinzu: «d.h. es ist nicht möglich, zu den Mengen noch weitere Dinge hinzuzunehmen, so daß auch in dem so entstehenden neuen System die Axiome I und II erfüllt sind.» (Finsler 1926b, S. 691.) In Finsler 1954, S. 33, findet sich das Vorbild für die hier angegebenen Axiome:

- 1. Jede Menge bestimmt ihre Elemente, d.h. die Mengen, zu denen sie die Beziehung  $\beta$  besitzt.
- 2. Die Mengen  $M$  und  $N$  sind identisch immer, wenn möglich.
- 3.  $M$  ist Menge immer, wenn möglich.

Berücksichtigt man, dass für Finsler das Möglichsein mathematischer Gegenstände gleichbedeutend war mit dem Widerspruchsfreisein, ergeben sich die angegebenen Axiome.

85 *Achtung:* Im Kontext von **FM** werden die Zeichen „ $\ni$ “, „ $=$ “, „ $\wedge$ “ etc. (wie zuweilen in der Mathematik) zur Abkürzung natürlichsprachlicher Sätze benutzt, während sie ansonsten (z. B. in Bezug auf **ZFC**) Teile einer formalen Logik sind. Streng genommen müsste man entsprechende metasprachliche Symbole einführen, was aber den Zeichenapparat sehr vergrößern und letztlich das Verständnis unnötig erschweren würde.

Die Finsler-Axiome muten in einem mathematischen Kontext seltsam an. Sie scheinen mit «nicht zu einem Widerspruch führen» etwas zu benutzen, das in ihrem Kontext nicht geklärt wird. Weiter scheint **Axiom I** eine Voraussetzung zu sein, die sowieso bei jeder Mengenlehre gegeben sein muss. Insgesamt ist unklar wie die Axiome mathematisch zu verstehen sind, wie zum Beispiel die Existenz der leeren Menge ( $=: \emptyset$ ) mit ihnen bewiesen (oder widerlegt) werden kann. Deshalb wird in Abschnitt 5.5.3 der mathematische Umgang mit ihnen in seinen Anfängen dargestellt. In Abschnitt 5.5.4 wird dann die Möglichkeit ihrer Formalisierung diskutiert.

Hintergrund für jede mengentheoretische Diskussion ist die mathematische Standard-Mengenlehre, bezeichnet durch die Abkürzung **ZermeloFraenkelChoice (ZFC)**. Diese Mengenlehre ist in einer Prädikatenlogik erster Stufe mit den zweistelligen Relationen  $=$  und  $\in$  axiomatisiert.<sup>86</sup>

Die Axiome (und Axiomenschemata) nach Zermelo, Fraenkel und Skolem sind:

<b>Extensionalität</b>	$\forall x y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ Zwei Mengen sind dann identisch, wenn sie die gleichen Elemente haben.
<b>Paarmenge</b>	$\forall x y \exists z (x \in z \wedge y \in z)$ Für je zwei Mengen existiert eine Menge, die beide enthält.
<b>Aussonderung</b>	$\forall x \forall u_1 \dots \forall u_n \exists y \forall z (y \in z \leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z))$ gilt für jede Formel $\phi$ mit freien Variablen $x, y, u_1, \dots, u_n$ . Es existiert jede durch eine Eigenschaft $\phi$ bestimmte Teilmenge einer Menge.
<b>Vereinigungsmenge</b>	$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x)$ Für jede Menge $a$ gibt es eine Menge, die die Elemente aller Elemente von $a$ enthält.
<b>Potenzmenge</b>	$\forall x \exists y \forall z (z \subset x \rightarrow z \in y)$ Die Potenzmenge jeder Menge existiert.
<b>Unendlichkeit</b>	$\exists x (\emptyset \in x \wedge \forall y \in x (y \cup \{y\} \in x))$ Es gibt eine Menge, die die leere Menge enthält und mit jeder Menge, die sie enthält, auch deren Nachfolger.
<b>Ersetzung</b>	$\forall x \forall u_1 \dots \forall u_n (\exists z \in x \forall y \phi \rightarrow \exists u \forall v \in x \forall y \in u \phi)$ für jede Formel $\phi$ mit den freien Variablen $x, y, z, u_1, \dots, u_n$ Für jede Menge $a$ , auf der eine eindeutige Funktion $\phi$ definiert ist, existiert die Bildmenge von $a$ unter $\phi$ .
<b>Fundiertheit</b>	$\forall x (\forall y \in x \rightarrow \exists y (y \in x \wedge \forall z \in x (z \notin y)))$ Jede Menge $a$ enthält ein Element, das kein anderes Element von $a$ zum Element hat.
<b>Auswahl</b>	$\forall x \exists y (y \text{ ist eine Wohlordnung von } x)$ Für jede Menge existiert eine Wohlordnung(smenge).

Das Axiom der **Extensionalität** bestimmt eine selbstverständlich erscheinende Eigenschaft der Identitätsbeziehung: Gleiche Extension impliziert Identität. Das **Fundiertheits**axiom schließt im Zusammenspiel mit den anderen Axiomen sich wiederholende Mengen (wie  $x \ni \dots \ni x$ ) und unendlich absteigende Mengen (wie  $x_1 \ni x_2 \ni x_3 \dots$ ) aus und gründet das Mengenuniversum auf die leere Menge. Das **Unendlichkeits**axiom ist ein reines Existenzaxiom, das die Existenz einer bestimmten unendlichen Menge gewährleistet und aus dem sich zum einen überhaupt die Existenz einer Menge folgern lässt, wie auch die Existenz der leeren Menge ( $\emptyset$ ). Die restlichen Axiome (genauer: und zwei Axiomenschemata

86 Kurzerklärung der vielleicht ungewohnten Zeichen:  $\wedge$  steht für  $\forall$ ,  $\vee$  steht für  $\exists$ ,  $\forall_{\perp}$  steht für  $\exists!$  steht für 'es existiert genau ein  $x \dots$ '.  $a \in b$  heißt "Die Menge  $a$  ist Element der Menge  $b$ ",  $\emptyset$  ist die leere Menge, d.h. die Menge mit der Eigenschaft  $\forall x x \notin \emptyset$ .  $x \subset y$  heißt " $x$  ist Teilmenge von  $y$ " und ist die Abkürzung für  $\forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$ .  $\{ \text{ und } \}$  sind die sogenannten Mengenklammern, mit denen sich direkt durch Angabe der Elemente (wie  $\{a, b\}$ ) oder durch eine Eigenschaft (wie  $\{x \mid x \in a \wedge x \in b\}$ ) eine Menge darstellen lässt.  $\wp(x)$  ist die sogenannte Potenzmenge von  $x$ , das ist die Menge aller Teilmengen von  $x$ :  $\{y \mid y \subset x\}$ .

– **Aussonderung** und **Ersetzung**) sind konstruktive Existenzaxiome, insofern sie auf der Grundlage der Existenz von bestimmten Mengen die Existenz bestimmter anderer Mengen garantieren.<sup>87</sup>

In **ZFC** kann leicht gezeigt werden, dass keine Allmenge  $\{x \mid x = x\}$  existiert. Denn ihre Existenz angenommen, gäbe es nach **Aussonderung** die Russellmenge  $\{x \mid x \notin x\}$ .

### 5.5.3 Der Sinn der Axiome<sup>88</sup>

Die Axiome der Finsler-Mengenlehre sind eine Reaktion auf die Entdeckung der Antinomien. Die Lehre, die Finsler aus der Russell-Menge und aus der über die Russell-Menge zum Widerspruch führenden vollständigen Komprehension zieht, ist die, für überhaupt keine bestimmte Menge die Existenz zu fordern. Während die **ZFC**-Axiome als methodische Einschränkung der vollständigen Komprehension gelesen werden können, werden in den Finsler-Axiomen nur die minimalen der ausreichenden Eigenschaften, die etwas (wie ein mathematisches Objekt) mindestens besitzen muss, um eine Menge zu sein, mit **Axiom I** und **Axiom II** festgelegt, und dieser gerade formulierte Rahmengedanke in **Axiom III** festgehalten. Damit können innerhalb der Mengen keine Widersprüche mehr auftauchen, da ein Widerspruch nur die Nicht-Existenz der angenommenen Menge anzeigt, und mit ihrer Nicht-Existenz selbst verschwindet.

Um diese Mengentheorie methodisch klar aufzubauen, führt Finsler den Ausdruck „Gesamtheit“ oder „System“ ein, unter einer Klasse eine Vielheit von Mengen, die, weil sie in diesem Verständnis keine Einheit sind, in ihrer Vielheit nicht wiederum Element sein können, ob von einer Menge oder einer anderen Klasse. Die Russell-Klasse  $\{x \mid x \notin x\}$  ist im Gegensatz zur Russell-Menge nicht widersprüchlich, denn sie kann sich gar nicht selbst enthalten. Die durch die Axiome zu klärende Frage ist demnach, welche Klassen auch Mengen sind, oder vorsichtiger formuliert: Welche Klassen strukturgleiche (isomorphe, extensionsgleiche) Mengen besitzen.

*Zum ersten Axiom.* Es wird eine notwendige Eigenschaft einer Menge niedergelegt, nämlich in der  $\ni$ -Beziehung zu anderen Mengen bestimmt zu sein. Erstens ist damit (im Verbund mit **Axiom II** und **Axiom III**) die Mengentheorie auf die *reinen* Mengen beschränkt worden, die nur Mengen als Elemente enthalten. Denn nur die  $\ni$ -Beziehung zu anderen Mengen spielt eine Rolle in ihrer mathematischen Behandlung. Zweitens werden mit **Axiom I** unbestimmte Phantommengen von den Mengen ferngehalten: Das sind entweder überbestimmte und damit widersprüchliche Phantommengen wie die Russell-Phantommenge  $R = \{x \mid x \not\equiv x\}$ , für die sowohl  $R \ni R$  als auch  $R \not\equiv R$  gilt, oder unterbestimmte Phantommengen wie  $P = \{x \mid x \ni x\}$  für die nicht bestimmt ist, ob  $P \ni P$  oder  $P \not\equiv P$ .<sup>89</sup> Drittens geht aus der Formulierung von **Axiom I** hervor, dass die  $\ni$ -Relation asymmetrisch definiert ist, und sie somit nicht notwendig symmetrisch ist.<sup>90</sup>

Während Phantommengen mit zu Widersprüchen führenden Definitionen von den Mengen ausgeschlossen werden, geschieht dies nicht für eine große Anzahl von möglichen Mengen, für die es keine vergleichbaren Mengen in **ZFC** gibt. Zunächst wird eine sogenannte *Allmenge*  $\{x \mid x \ni x \vee x \not\equiv x\}$

<sup>87</sup> Siehe Abschnitt 7.4.1.2.

<sup>88</sup> Dieser und der nächste Abschnitt bauen auf der mathematischen Darstellung der Finsler-Mengenlehre in Bakker und Ziegler 1996 auf.

<sup>89</sup> Der Ausdruck „Phantommenge“ birgt die hier jeweils angewendete Gedankenform: Wenn man von der Klasse annimmt, sie sei eine Menge, so zeigt sich, sie widerspricht **Axiom I**. Wem das zu bildlich ist, kann stattdessen die definierende Eigenschaft betrachten. Für eine Formalisierung von „annehmen“ siehe Abschnitt 5.5.6.

<sup>90</sup> Der dritte Punkt ist heute selbstverständlich, da die Termstellen in einem Prädikat stets geordnet sind, d.h.  $P(x_1, x_2)$  ist wohlunterschieden von  $P(x_2, x_1)$ . Eine nicht-formalisierte Formulierung von **Axiom I** wie: *Für beliebige Mengen M und N ist stets eindeutig entschieden, ob zwischen M und N die  $\in$ -Beziehung besteht oder nicht, d.h. ob  $M \in N$  oder  $M \notin N$  wahr ist*, (vgl. Baer 1928, S.536) legt in ihrem ersten Teil eine symmetrische Beziehung nahe, wenn man ohne Vorverständnis an die Axiome herangeht.

nicht durch **Axiom I** verhindert. Sie hat zu jeder Menge die  $\ni$ -Beziehung, insbesondere zu sich selbst. Gleiches gilt für Mengen knapp neben der Russell-Klasse:  $R_1 = \{x \mid x \not\ni x \vee x = R_1\}$  und  $R_2 = \{x \mid x \not\ni x \wedge x \neq R_2\}$ .  $R_1$  enthält alle Mengen, die sich nicht selbst enthalten, und sich selbst, während  $R_2$  alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten außer sich selbst. Für  $R_1$  und  $R_2$  ist also eindeutig bestimmt, welche Mengen sie beinhalten und welche nicht.  $R_1$  hat eine Menge mehr als die Russell-Klasse, nämlich sich selbst,  $R_2$  enthält eine Menge weniger, es enthält sich selbst nicht. Demnach gilt:  $R_2 \subset R \subset R_1$  und  $R_1 \ni R_2$ .

Zum zweiten Axiom. Es stellt keine Ersetzung der **Extensionalität** dar in dem Sinne, dass es die **Extensionalität** negieren würde, sondern ist eine nötige Erweiterung. Betrachtet man nämlich sich selbst enthaltende Mengen (die in **ZFC** durch **Fundiertheit** ausgeschlossen werden) wie  $J = \{J\}$  und  $K = \{K\}$  ist die Identitätsbeziehung für sie durch **Extensionalität** anscheinend nicht mehr entschieden. Denn wenn für das jeweilige Element gilt  $J = K$ , dann gilt auch  $\{J\} = \{K\}$ . Gilt aber für die Elemente  $J \neq K$ , dann auch für die Mengen  $\{J\} \neq \{K\}$ . In Finsler 1926b wird als Vorläufer von **Axiom II** folgendes formuliert:

**Axiom  $\mathcal{I}$**  Zwei Mengen sind identisch, wenn sie isomorph sind.

Ungenau gesagt bedeutet ‚isomorph‘ soviel wie ‚strukturell gleich‘ und kann hier durch Graphen veranschaulicht werden:<sup>91</sup> Wenn die Graphen zweier noch nicht identifizierter Mengen gleich sind, so sind sie identisch. (Ein  $\bullet$  steht für eine Menge, ein  $\rightarrow$  für  $\ni$ .)



Ähnlich gilt für die Mengen  $A = \{B\}$ ,  $B = \{C\}$  und  $C = \{A\}$  die Identität  $A = B = C$



und damit die Identität mit der gerade erwähnten sogenannten Julia-Menge  $J = \{J\}$ .

Das **Axiom  $\mathcal{I}$**  reicht aber nicht. An der Menge  $A = \{A, \{A\}\}$ , die dadurch eindeutig bestimmt ist, dass sie genau sich und ihre Einermenge als Elemente enthält, kann man die Frage aufwerfen, ob  $A = \{A\}$ . Sind sie isomorph? Die Menge  $\{A\}$  enthält genau ein Element, die Menge  $A$  möglicherweise zwei. Enthält sie nun zwei oder ein Element? Das war die Ausgangsfrage, zu der man in einem Zirkel zurückkehrt und die man so nicht entscheiden kann.

**Axiom II** identifiziert nun alle Mengen, bei denen das möglich ist, nach dem Minimalitätsprinzip. Nimmt man  $A = \{A\}$  an (und argumentiert im folgenden über die Elemente), dann ist  $A = \{A, \{A\}\} = \{A\}$ , und  $A$  und  $\{A\}$  sind isomorph und haben die gleichen Elemente. Wenn sie aber die gleichen Elemente haben, dann kann in Bezug auf **Axiom I** kein Widerspruch an ihnen auftreten.

Aus **Axiom II** kann man **Axiom  $\mathcal{I}$**  und (nicht-formalisierte) **Extensionalität** ableiten.<sup>92</sup> Ein überleitendes Beispiel: Die Mengen  $P_1 = \{x \mid x \ni x \vee x = P_1\}$  und  $P_2 = \{x \mid x \ni x \wedge x \neq P_2\}$  genügen **Axiom I**,  $P_1$  enthält alle Mengen, die sich selbst enthalten, insbesondere sich selbst, und  $P_2$  enthält alle Mengen, die sich selbst enthalten, sich selbst aber nicht. Überraschenderweise enthalten  $P_1$  und  $P_2$  aber die gleichen Elemente, nämlich genau die Mengen, die sich selbst enthalten, – und sind daher identisch. Damit gilt aber  $P_2 \ni P_1 = P_2 \notin P_2$ , ein Widerspruch. Was ist schief gegangen? Es gibt mehrere Möglichkeiten: 1) Die Selbstzuschreibung  $P_2 \ni P_2$  wurde nicht wie bei obigem Beispiel mit den Mengen  $A = \{B\}$  usw. nur als Möglichkeit angenommen, sondern als fester Teil der Definition gesetzt. Parallel zu oben würde sich bei einer nur vorläufigen Annahme von  $P_2 \ni P_2$  nur die ‚Reduktion‘ von  $P_2$  auf  $P_1$  ergeben. 2) Aus

91 Zwei Klassen  $A$  und  $B$  mit zwei Relationen  $R_A$  und  $R_B$  sind isomorph, wenn es eine isomorphe Abbildung zwischen ihnen gibt. Eine Abbildung  $f : A \rightarrow B$  ist genau dann isomorph, wenn sie bijektiv ist, d.h. wenn gilt: wenn  $f(x) = f(y)$  dann  $x = y$ , und für alle  $y \in B$  existiert ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$ ; und für zwei  $n$ -stellige Relationen  $R_A$  auf  $A$  und  $R_B$  auf  $B$  gilt:  $R_A(x_1, \dots, x_n)$  gdw.  $R_B(f(x_1), \dots, f(x_n))$ . Zwei transitive Hüllen heißen dann isomorph, wenn sie bezüglich  $\ni$  isomorph sind.

92 Vgl. Bakker und Ziegler 1996, S.14f..



**Axiom II** lassen sich **Axiom I** und (nicht-formalisierte) **Extensionalität** nicht ableiten, und weil aus der Annahme ihrer Identität ein Widerspruch folgt, sind  $P_1$  und  $P_2$  nicht identisch. 3) Die in 1) und 2) vorausgesetzte Existenz der beiden Mengen ist gar nicht gegeben. Über die Existenz entscheidet **Axiom III**.

*Zum dritten Axiom.* Es soll die Existenz einer möglichst maximalen Zahl von Mengen erlauben. In Finslers Formulierung lautet es: *N ist eine Menge, wenn möglich.* Zu **Axiom III** gelangt man, wenn man sich der Meinung anschließt, dass etwas im engsten Sinn nur dann keine Menge ist, wenn es den Minimalbedingungen aus **Axiom I** und **Axiom II** nicht genügt. Eine nach Finsler zu **Axiom III** äquivalente Aussage lautet: «Die Mengen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung der Axiome I und II keiner Erweiterung mehr fähig ist.»<sup>93</sup> Man kann nun zeigen, dass die Vereinigung von Klassen, in denen **Axiom I** und **Axiom II** gelten, wiederum den ersten beiden Axiomen genügen. Dann ist aber die Vereinigung aller derartiger Klassen die größte Klasse ( $\Sigma$ ), die **Axiom I** und **Axiom II** genügt, damit nicht mehr erweiterbar, und erfüllt auch **Axiom III**. Diese größte Klasse ist nicht leer, da man die Existenz von nicht-leeren Klassen beweisen kann, die den ersten Axiomen genügen.

$\Sigma$  ist insbesondere nicht erweiterbar, weil es alle Mengen enthält. Bildet man die Russell-Klasse  $\{ \Sigma \ni x \mid x \not\subseteq x \}$  bezüglich  $\Sigma$ , ist sie auf Grundlage der Finsler-Axiome keine Menge. Es macht also keinen Sinn, sie zu  $\Sigma$  in irgendeiner Art hinzuzufügen.<sup>94</sup>

*Ausblick.* Was für die Sinnhaftigkeit der Axiome steht, und was hier nur anfänglich antizipiert werden konnte, ist, dass auf Grundlage dieser Axiome von Mathematikern anscheinend erste Gehversuche erfolgreich unternommen wurden. Der Begriff *zirkelhaft* (und *zirkelfrei*) erlaubt es einen ‚unteren‘ Mengbereich von zirkelfreien Mengen abzugrenzen, in dem die (nicht-formalisierten) **ZFC**-Axiome erfüllt sind. Dieses **ZFC**-Universum in den Finsler-Mengen ist selbst eine zirkelhafte Menge, von deren Kardinalität leicht gezeigt werden kann, dass sie *stark unerreichbar* ist (d.h. zu den kleinsten unter den sogenannten *Großen Kardinalzahlen* gehört), während in **ZFC** die Existenz derartiger Kardinalzahlen nicht beweisbar ist. Die Finsler-Mengenlehre ist damit allem Anschein nach umfassender als ein **ZFC**-Universum. Was den Mathematiker erstaunt, den Logiker misstrauisch und den Philosophen interessiert macht, sind die Beweise zur Widerspruchsfreiheit und Vollständigkeit der Axiome, die wir hier nicht anführen.<sup>95</sup>

### 5.5.4 Zur Formalisierung der Axiome

In der Mathematik gilt im allgemeinen: Was nicht prinzipiell formalisiert werden könnte, ist nicht diskussionswürdig. Denn ob nicht-formalisierte Aussagen, wenn sie einem in ihrem logischen Verständnis unklar sind, trotzdem einen eindeutigen Inhalt haben, wird gerade geprüft, indem man sie formalisiert. Die Besonderheit der nicht-formalisierten Finsler-Axiome liegt darin, dass es, obwohl es ernsthaft in Frage steht, ob sie überhaupt formalisierbar sind, trotzdem nicht abwegig erscheint nach Abschnitt 5.5.3, dass sie einen klaren Sinn haben könnten.

Dieser formalistische Standpunkt wurde in Abschnitt 5.1 bereits relativiert. Im folgenden wird versucht, die Finsler-Axiome zu formalisieren.

Eine wörtliche Formalisierung von

**Axiom I** Für jede Menge ist eindeutig bestimmt, zu welchen Mengen sie die Beziehung  $\ni$  hat.

<sup>93</sup> Siehe Fußnote 84.

<sup>94</sup> Wie Baer 1928 es macht.

<sup>95</sup> Vgl. Bakker und Ziegler 1996, S.20f..

ergibt<sup>96</sup>

$$(1) \quad \bigwedge xy ((x \ni y \vee x \not\ni y) \wedge \neg(x \ni y \wedge x \not\ni y)).$$

(1) ist aber eine Tautologie und so in jeder Theorie ableitbar.  $\ni$  ist als Relation auf dem gesamten Individuenbereich definiert und **Axiom I** somit scheinbar mathematisch überflüssig und eine metalogische Festsetzung. Wenn dem so wäre, dann hätte es aber in Abschnitt 5.5.3 keine Auswirkung auf die mathematischen Überlegungen haben dürfen, die nicht in jedem formalisierten Axiomensystem auch vorhanden sein würden. Eine Auswirkung spürte aber der Schluss

$$(2') \quad \frac{\text{Für eine Menge } x = \{y \mid y \not\ni y\} \text{ gilt: } x \ni x \wedge x \not\ni x}{x = \{y \mid y \not\ni y\} \text{ ist keine Menge}}$$

Man könnte demnach versuchen, **Axiom I** (im Hinblick auf **Axiom III**) mit

$$(2) \quad \bigwedge x (\forall y (x \ni y \wedge x \not\ni y) \rightarrow \neg M(x))$$

mit einem Prädikat für Mengen  $M$  (das man mittels  $M(x) := \forall y y \ni x$  definieren könnte) und einem Quantorenbereich von Klassen zu formalisieren. Mit (2) wird aber das Problem aus (2') eher weiter verdeckt:  $x \ni y \wedge x \not\ni y$  enthält einen Widerspruch. Formal folgt aus einem Widerspruch sowieso alles, und (2) ist damit auch eine Tautologie. Was war aber dann die Auswirkung von **Axiom I** auf (2')? Sie steckt im Unausgesprochenen: Aus einem Widerspruch wie  $a \ni b \wedge a \not\ni b$  soll nach **Axiom I** nicht beliebiges folgerbar sein, sondern gerade nur, dass  $a$  keine Menge sei. Die Funktion von **Axiom I** schränkt also die logischen Schlüsse und Ableitungsregeln in Bezug auf Widersprüche der Art  $a \ni b \wedge a \not\ni b$  ein.

Das Axiom zur Identitätsbeziehung

**Axiom II** Mengen sind immer dann identisch, wenn die Annahme ihrer Identität nicht zu einem Widerspruch führt.

thematisiert die Ableitung (zum Widerspruch) direkt. Ein erster Versuch zur Formalisierung von **Axiom II** ist

$$(3) \quad \bigwedge xy (x = y \leftrightarrow \neg(x = y \rightarrow \perp)),$$

wobei  $\perp$  erstmal für eine beliebige Kontradiktion steht. Da  $\neg(x = y \rightarrow \perp)$  äquivalent ist zu  $x = y$  ist (3) eine Tautologie und, insofern **Axiom II** tatsächlich die Identitätsrelation festlegt, damit keine richtige Formalisierung von **Axiom II**.

*Erste Bemerkung.* Hier kommt ein Problem zum Vorschein, das sich in Abschnitt 5.5.3 als ungewohnte Stärke zeigte. Im Kontext von **ZFC** und einer Prädikatenlogik erster Stufe ist die Kontinuumshypothese  $|\mathfrak{Pot}(\aleph_0)| = \aleph_1$  unentscheidbar, der Satz  $|\mathfrak{Pot}(\aleph_0)| = \aleph_\alpha$  ist tatsächlich nur für wenige  $\aleph_\alpha$  widerlegbar, so auch nicht für  $\aleph_2$  oder  $\aleph_3$ . Demnach, wenn sich die Ergebnisse ins Nicht-formale retten ließen, wäre aus **Axiom II** folgerbar, dass sowohl  $\aleph_1 = |\mathfrak{Pot}(\aleph_0)|$  und  $|\mathfrak{Pot}(\aleph_0)| = \aleph_2$  gilt. Dann wäre aber  $\aleph_1 = \aleph_2$ , ein Widerspruch. Fast scheint es so, als käme es auf die Reihenfolge an. Wendet man **Axiom II** zuerst auf  $|\mathfrak{Pot}(\aleph_0)| = \aleph_1$  an und erhält die Identität, dann würde jede Annahme  $|\mathfrak{Pot}(\aleph_0)| = \aleph_\alpha$  mit  $\alpha \neq 1$  zu einem Widerspruch führen. Aber die Reihenfolge der Beweise darf nicht entscheidend sein.

Wir verallgemeinern diese Überlegung: Die Annahme

(A) Der Satz  $a = b$  ist nicht entscheidbar.

führt zusammen mit der Annahme

(B) Der Satz  $a = c$  ist nicht entscheidbar für ein  $c \neq b$ .

---

<sup>96</sup> Vgl. Ziegler 1996.

und **Axiom II** zu dem Widerspruch  $a = b \neq c = a$ .<sup>97</sup> Demnach schließt **Axiom II** die Existenz unentscheidbarer Sätze aus, wenn (A) und (B) gilt (wie in **ZFC**), aber nicht wie scheinbar in Abschnitt 5.5.3 auf beweis-konstruktive Art. Damit ist gemeint, dass **Axiom II** im Fall von **ZFC** gar keine Hilfen und unabhängig davon vermutlich auch keine positive Anregung zur Lösung der Kontinuumshypothese und anderer (in **ZFC**) unentscheidbarer Sätze gibt und nur ‚abstrakt‘ die Existenz unentscheidbarer Sätze ausschließt.

*Zweite Bemerkung.* Streng genommen muss **ZFC** mit **Extensionalität** in der formulierten Weise zusätzlich identitätslogische Axiome oder logische Regeln besitzen, die die Eigenschaften der Identitätsrelation als Äquivalenzrelation wie Reflexivität, Symmetrie und Transitivität gewährleisten. Oder man ersetzt die Subjunktion in **Extensionalität** durch eine Bisubjunktion, so dass gilt: *x und y sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen.* Für **Axiom II** scheint die Implikationsrichtung: *Wenn zwei Mengen identisch sind, dann führt die Annahme ihrer Identität zu keinem Widerspruch* entweder trivial oder seltsam zu sein. Nach Fußnote 90 scheint die Formulierung von **Axiom II** eine symmetrische Relation zu behaupten, der erste Teil von **Axiom II** sollte also mindestens folgendermaßen verstanden werden:

$$x = y \wedge y = x.$$

Eigentlich müsste auch noch die Transitivität direkt gefordert werden.

*Dritte Bemerkung.* Ein Problem gegenüber **Axiom I** in Hinsicht auf **Axiom III** scheint die Validierung der Existenz von Mengen darzustellen. Denn bei **Axiom II** müsste ausgehend von einer potentiellen Menge im Hinblick auf die Identität mit jeder anderen Menge die Widerspruchsfreiheit getestet werden. Man weiß aber zunächst (und auch später) gar nicht, welche anderen Mengen noch existieren.

**Axiom III** Ein mathematisches Objekt ist eine Menge immer dann, wenn die Annahme, es sei eine Menge, nicht zu einem Widerspruch mit **Axiom I** und **Axiom II** führt.

Nach Abschnitt 5.5.3 gibt **Axiom III** auf Grundlage eines unproblematischen Klassen-Begriffs das zu betrachtende Universum an. Damit kann es zumindest in einer üblichen Prädikatenlogik nicht formalisiert werden, da es metatheoretische Aussagen über die Semantik leistet, indem es das intentional eindeutige Modell kennzeichnet.

### 5.5.5 Vorläufige Ergebnisse

Die Finsler-Mengenlehre konnte in Abschnitt 5.5.4 nicht formalisiert werden und ist vermutlich sogar nicht formalisierbar. Das ist für eine die Mathematik grundlegende Theorie der Mengen aber nach Abschnitt 5.1 auch nicht zu erwarten, da sie ansonsten nur mit formalisierten Begriffen arbeiten könnte. Vielmehr scheinen die Finsler-Axiome gerade Aufgaben (vor allem mit **Axiom III**) zu übernehmen, die in einer formalen Logik bereits erledigt und entschieden wurden.

Genauer hat sich **Axiom I** als eine metalogische Festsetzung gezeigt, die in einer gewöhnlichen Prädikatenlogik bereits enthalten ist. Erst der Zusammenhang zwischen **Axiom I** und **Axiom III**, aus dem sich informell ergibt, dass aus einem Widerspruch nichts beliebiges, sondern nur die Nicht-Existenz einer angenommenen Menge gefolgert werden darf, widerspricht explizit Folgerungsregeln der gewöhnlichen Prädikatenlogik.

Eine interne Schwierigkeit entsteht diesem Vorgehen durch die zweistelligen Relationen der ersten beiden Axiome, die Relation von **Axiom II** ist zudem symmetrisch, vor der Hand dadurch, dass nicht unmittelbar entschieden wird, welche von zwei fraglichen Mengen, die zu dem Widerspruch führten,

<sup>97</sup> (B) kann unentscheidbar und nicht aus (A) ableitbar sein, ist aber sinnvoller Weise unter (A) anzunehmen, da die Negation von (B): *Für alle  $c \neq b$  ist der Satz  $a = c$  entscheidbar*, abhängig von der jeweiligen formalen Logik, die Negation von (A) impliziert oder zumindest nicht ohne Widerspruch mit informellen Überlegungen bleibt. Denn entweder ist für ein  $c \neq b$   $c = a$  beweisbar, womit  $a \neq b$  oder für alle  $c \neq b$  gilt  $c \neq a$ . Dann folgt aber informell  $a = b$ .

nicht existiert (und welche vielleicht doch). Ein Beispiel dafür gaben auf den ersten Blick die beiden (fraglichen) Mengen  $P_1$  und  $P_2$ .

Als technischer ‚Trick‘ von **FM** zeigt sich die Verknüpfung von Widerspruch und Existenz einzelner Mengen: Wenn ein Widerspruch auftritt, hat das nur Auswirkung auf die Existenz einer einzelnen Menge (oder in der Iteration und Verallgemeinerung auf mehrere), nicht auf die ganze Theorie als solche. Finslers Entwurf lässt sich so als eine Antwort im Sinne Cantors auf die Hysterie um die Entdeckung und Wiederbelebung von Widersprüchen bzw. widersprüchlichen Phantommengen lesen.<sup>98</sup> **FM** ist damit notwendig konsistent und ihr Mengenuniversum eben so klein, dass keine Widersprüche auftreten. Die Schwierigkeiten bei **FM** dagegen liegen in der Praktikabilität der drei Axiome.

### 5.5.6 Nächster Versuch

Wir werfen einen Blick in die Schatulle mit den Werkzeugen der modernen Logik, aber nur kurz, um nicht zu technisch zu werden. In **Axiom I** heißt es, dass *Mengen* in gewisser Hinsicht *bestimmt* sind. Das scheint zu implizieren, dass (1.) sie in anderen Hinsichten unbestimmt sein könnten, und dass (2.) andere mathematische Objekte (von denen in **Axiom III** die Rede ist) nicht in der gleichen Hinsicht bestimmt sein müssen. Deshalb erweitern wir den Quantifikationsbereich (auf alle mathematischen Objekte) und arbeiten mit einem Mengenprädikat  $M$ .<sup>99</sup> Die Unbestimmtheit formalisieren wir mittels eines dritten Wahrheitswerts *Neutral*  $N$ .<sup>100</sup> Dann wäre ein erster Versuch

$$(1) \quad \bigwedge x (M(x) \rightarrow \bigwedge y ((M(y) \rightarrow (x \ni y \vee x \not\ni y))))$$

Die Negation von  $x \ni y$  ist dabei eine differenzierende Negation, die so interpretiert wird, dass eine neutrale Aussage unter dieser Negation neutral bleibt (und nicht falsch wird). Anonsten wäre (1) wieder eine Tautologie, wie der Versuch in Abschnitt 5.5.4. Das Mengenprädikat sollte immer wahr oder falsch sein, d.h. es ist etwas vorauszusetzen wie  $\bigwedge x (W(M(x)) \vee F(M(x)))$  mit  $W, F$  für Wahrheit und Falschheit. Dieser Formalisierungsversuch basiert darauf, dass die Ziellogik partielle Prädikate erlaubt. Denn dann kann  $\ni$  dadurch herausgehoben werden, dass es auf den Mengen eindeutig bestimmt ist. Allerdings ist auch hier nicht zu sehen, wie es mit **Axiom II** und **Axiom III** weitergehen sollte. Man könnte natürlich versuchen, die Axiome zwei und drei mittels eines Beweisprädikats und Anführungszeichen zu formalisieren (z. B. als  $\bigwedge xy (M(x) \wedge M(y) \wedge \neg Bew_{A_1, K}(\ulcorner x = y \urcorner, \perp) \rightarrow x = y)$  und  $\bigwedge x (\neg Bew_{A_1, A_2, K}(\ulcorner M(x) \urcorner, \perp) \rightarrow M(x))$ ). Dass dies in einer Logik geschehen kann, in der *Bew* und  $\ulcorner \dots \urcorner$  einen formalen Umgang erlauben, der ähnlich ist zu dem informellen Finslers, kann hier nicht entschieden werden.

Vielleicht waren die bisher geäußerten Behauptungen über **Axiom III** auch zu enthusiastisch und die über Baer zu negativ. Tatsächlich wurden gegen die Kohärenz von **Axiom III** weitere Argumente geliefert von Specker und Holmes. Zum einen wurde eingewendet, dass es zwei Mengen gibt, die, wenn man ihre Existenz jeweils für sich annimmt, konsistent sind, sich gegenseitig aber ausschließen.<sup>101</sup> Damit wäre gezeigt, «dass aus der Widerspruchsfreiheit der Annahme der Existenz einer Menge nicht auf die Existenz geschlossen werden darf.»<sup>102</sup> Zum zweiten funktioniere Finslers Vorgehen zum Beweis

98 Für Cantor warfen Widersprüche wie die Burali-Forti-Antinomie keine Schwierigkeiten auf, da es sich bei den Mengen (an denen die Widersprüche zu Tage kamen) offensichtlich um keine konsistenten Vielheiten handelte; s. Cantor 1932, S. 445, und Abschnitt 7.4.1.

99 Was ein mathematisches Objekt genau ist, muss für unseren Zweck nicht bestimmt werden. Es scheint auszureichen, dass alle *möglichen Mengen* enthalten sind. Da aber gerade durch die Axiome festgelegt werden soll, was eine Menge ist, darf der Bereich nicht gleich zu Beginn zu klein gehalten werden.

100 Genauer wird die dreiwertige Logik LN aus Blau 2008, Kapitel 4, verwendet.

101 Vgl. Specker 1954, S. 239, Holmes 1996, 5.4.

102 Specker 1954, S. 239.

der Existenz einer eindeutigen und größten Klasse, die **Axiom I** und **Axiom II** erfüllt und somit alle Mengen enthalte, nicht.<sup>103</sup>

Zum ersten Einwand: Die Allmenge ist konsistent definierbar, denn sie enthält alle Mengen, auch sich selbst. Aber genauso, so die Behauptung,<sup>104</sup> stehe es um eine Menge  $Q$ , die alle Mengen enthalte, die sich selbst nicht enthalten, aber Element einer anderen Menge sind:

$$Q := \{ x \mid x \not\in x \wedge \forall y y \in x \}$$

$Q$  kann nun nicht Element einer anderen Menge sein, sonst würde  $Q$  zur Russell-Menge mutieren. Demnach gibt es keine Allmenge, wenn es  $Q$  gibt, denn sie müsste  $Q$  enthalten, und es gibt kein  $Q$ , wenn es die Allmenge gibt. Wenn es eine der beiden Mengen geben sollte, ist es dann die Allmenge oder  $Q$ ? Die Antwort ist insofern einfach, als für die Allmenge eindeutig ist, welche Mengen sie enthält, die Eindeutigkeit der Elementschäftsrelation für  $Q$  hängt davon ab, ob es eine Menge gibt, in der sie Element sein müsste, wenn es sie gäbe. Die bestimmende Eigenschaft von  $Q$  referiert (formal durch einen  $\Sigma_1$ -Satz) auf die Gesamtheit der Mengen, insofern sie die Existenz bestimmter Mengen fordert. Es kann demnach nicht die Rede davon sein, dass  $Q$  für sich konsistent sei. Vielmehr folgt für Finsler aus den Axiomen, dass die Allmenge existiert. Somit gibt es eine Menge, die  $Q$  enthalten würde, somit sind die Elemente von  $Q$  nicht eindeutig ( $Q \ni Q \wedge Q \not\in Q$ ) und  $Q$  existiert nicht.<sup>105</sup>

Finsler argumentiert für die Konsistenz seiner Axiome auf Grundlage einer einfachen Klassentheorie. Er betrachtet Klassen  $\Sigma_a$  (bei ihm «Systeme» genannt), die **Axiom I** und **Axiom II** erfüllen. Die Elemente dieser Klassen vergleicht man wiederum mittels Isomorphie, d.h. zwei Mengen aus den zwei entsprechenden Klassen  $\Sigma_a$  und  $\Sigma_b$  sind identisch, wenn sie isomorph sind. Die entscheidende Behauptung Finslers ist, dass die beliebige Vereinigung solcher  $\Sigma_a$  wieder eine Klasse ergibt, die **Axiom I** und **Axiom II** erfüllt. Die Vereinigung  $\Sigma$  aller solcher Klassen wäre dann nicht mehr konsistent erweiterbar und eindeutig.

Holmes hat mehrere Einwände gegen diese Behauptung: 1.) Es existiere ein Gegenbeispiel, nämlich zwei Modelle<sup>106</sup> (d.h. Klassen mit einer jeweiligen Elementschäftsrelation auf der Klasse), die zwar einzeln aber nicht mehr vereinigt die beiden ersten Axiome erfüllen.<sup>107</sup> Das erste ist einfach ein beliebiges Modell mit Allmenge, d.h. mit einer Menge, die alle Elemente der Modellklasse enthält, das zweite ein Modell, in dem eine Menge ähnlich zu  $Q$  vorkommt, d.h. eine Menge die alle Mengen der Modellklasse enthält, die nicht sich selbst enthalten, wobei in der Modellklasse selbst keine Menge existiert, in der sie wiederum selbst enthalten ist.<sup>108</sup> Das Problem mit diesem Gegenbeispiel ist, dass Holmes die Vereinigung über kennzeichnende Eigenschaften folgendermaßen zu verstehen scheint: Wenn in einem der beiden Modelle eine Menge mit einer Eigenschaft  $E$  existiert, muss es in der Vereinigung auch eine Menge mit dieser Eigenschaft geben. Die Vereinigung der zwei Modelle müsste eines ergeben, in dem die Allmenge und  $Q$  zusammen existieren, d.h. es müssten die Bedingungen  $x = x$  und  $x \not\in x \wedge \forall y y \in x$  beide mittels Komprehension eine Menge konstituieren, was logisch nicht möglich ist.

103 Vgl. Holmes 1996, 5.3.

104 Siehe Specker 1954, S. 239.

105 Specker hat (unveröffentlicht)  $Q$  verfeinert zu  $Q := \{ x \mid x \not\in x \wedge \forall y y = \{x\} \}$  (s. Booth 1996, S. 96f.). Ob dieses  $Q$  existiert in FM ist wesentlich schwieriger zu entscheiden, gibt aber keinen Anlass zu neuen Einwänden gegen die Kohärenz von **Axiom III**.

106 Auch wenn im letzten Absatz nur von Klassen die Rede war, meint Finsler natürlich Klassen mit einer Elementschäftsrelation, allerdings nicht im Sinn der formalen Logik.

107 Siehe Holmes 1996, S. 13.

108 Holmes nimmt dazu die Klasse der Mengen aller erblich-endlichen Mengen. Die Menge, die alle erblichen-endlichen Mengen enthält, ist dann in dieser Klasse, enthält selbst alle sich nicht selbst enthaltenden Mengen, die Element einer anderen Menge sind, und wird von keiner anderen Menge dieser Klasse enthalten. Die dazugehörige Elementschäftsrelation ist  $\in$  eingeschränkt auf diese Klasse.

Dagegen meinte Finsler einfach die Vereinigung zweier Klassen unter der Identifizierung der isomorphen Mengen. Dann löst sich das Gegenbeispiel auf, weil die Menge  $Q$  einfach die Eigenschaft verliert, mit der sie zuvor gekennzeichnet wurde.

2.) Der zweite Einwand richtet sich gegen die Existenz eines eindeutigen maximalen Modells. Allerdings baut sein Argument auf der Manipulierbarkeit der Elementschäftsrelation auf, die in der üblichen Modelltheorie erlaubt ist, bezüglich **FM** aber erst nachgewiesen werden müsste.<sup>109</sup>

Allgemein ist bei der Bearbeitung von Finsler-Mengen stets zu beachten, dass aus Isomorphie Identität folgt: Zwei isomorphe Mengen sind identisch. Fügt man zu einer Klasse von Finsler-Mengen eine Menge hinzu, muss erst untersucht werden, ob die Menge nicht tatsächlich isomorph zu einer bereits enthaltenen ist.

Isomorphie allerdings ist ein Identitätskriterium, das in der Mathematik vermutlich u. a. deswegen vermieden wird, weil es keine beweisrelevanten Konsequenzen hat. Eine Position der Mathematikphilosophie, die von Strukturen spricht als den eigentlichen Objekten der Mathematik, muss eine Theorie der Strukturen entwerfen, die vor allem auch die Identität von Strukturen festlegt. Ein Verständnis von Struktur ist dabei so eng mit dem Begriff der Isomorphie verbunden, dass es zumindest hinreichend sein muss für die Identität zweier Strukturen, wenn sie isomorph sind, wenn auch nicht unbedingt notwendig.<sup>110</sup>

### 5.5.7 Auf dem Weg zu einer Theorie reiner Strukturen

Die sich im letzten Abschnitt andeutende These besagt zunächst, dass Finslers Mengentheorie eine Theorie reiner Strukturen ist oder zumindest so verstanden werden kann. Sie erfüllt nämlich zwei wesentliche Bedingungen dafür: (1.) Zunächst ist ihr Blick eingeschränkt auf Mengen in ihrem gegenseitigen Elementsein und damit auf reine Mengen. Insofern für Finsler die Beziehung zu ihren Elementen wesentlich zu einer Menge gehören, ist eine Menge eine Art Struktur bestehend aus einer Relation und der Gesamtheit, auf der sie operiert, nämlich der Elementschäftsrelation auf ihrer transitiven Hülle. (2.) Indem isomorphe Mengen identisch sind, was durch **Axiom I** gesetzt oder aus **Axiom II** gefolgert wird, gilt ein typisches Identitätskriterium der Objekte einer Strukturtheorie.<sup>111</sup> Isomorph sind zwei Mengen, wenn ihre transitiven Hüllen isomorph bezüglich  $\ni$  sind (s. Fußnote 91, S. 161). Mengen bestimmen ihre transitive Hülle eindeutig und damit ein durch  $\ni$  geordnetes Beziehungsgeflecht. Zugleich sind die Mengen *intensional bestimmte Einheiten* und nicht beliebige Dinge, auf denen eine zweistellige  $\in$ -Relation operieren würde. Denn in diesem Fall könnte die  $\in$ -Relation mit ihren Relationselementen zu anderen Relationen mit anderen Teilnehmern isomorph sein. Finslers reine Mengen sind aber wegen ihrer starken Identitätsbedingungen höchstens zu sich selbst isomorph. Natürlich sind sie zu Teilabschnitten anderer Mengen bzw. Hüllen isomorph, aber auch das nur, insofern sie selbst diese Teilabschnitte *sind*. Ob sie das sind, ist dadurch bestimmt, ob sie in der transitiven Hülle der betrachteten Menge enthalten sind. Das Verhältnis von reinen Strukturen zueinander ist demnach klar geregelt durch ihre  $\ni$ -Beziehung hinsichtlich der jeweiligen transitiven Hülle. Die Beinhaltens-Beziehung ( $\ni$ ) ist einer Menge nach diesen Überlegungen nicht äußerlich.

Damit ergibt sich direkt ein Argument gegen die Formalisierbarkeit der Finsler-Mengenlehre: Reine Strukturen in diesem Sinn können nicht in einer Logik mit modelltheoretischer Semantik formalisiert werden, weil diese Semantik gerade auf der üblichen, rein extensionalen **ZFC**-Mengenlehre aufbaut und damit der intensionale Charakter der Finsler-Mengen verloren ginge. Insofern die Sprache der

<sup>109</sup> Vgl. das Theorem in Holmes 1996, S. 15.

<sup>110</sup> Siehe Shapiro 1997, S. 90ff..

<sup>111</sup> Vgl. Shapiro 1997, S. 91f..

Mathematik die einer üblichen Prädikatenlogik ist, gehört die Finsler-Mengenlehre nicht mehr zur Mathematik (sondern ggf. zur Metamathematik).

Wenn Finslers Versuch am besten als eine Theorie von Strukturen zu nehmen ist, so müssten die Strukturen eindeutig angebbbar sein, und sie sich dadurch auch von gewöhnlichen Mengentheorien unterscheiden. Denn für gewöhnlich<sup>112</sup> argumentiert man im Hinblick auf eine Reduzierung/Modellierung der natürlichen Zahlen in die/der Mengenlehre folgendermaßen: Was sind die natürlichen Zahlen? Zwei Kandidaten drängen sich auf, die endlichen Ordinalzahlen von v. Neumann ( $0 := \emptyset$ ,  $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$ ) und ihre Version Zermelos ( $0 := \emptyset$ ,  $\alpha + 1 := \{\alpha\}$ ). Zum einen scheint es keine guten Gründe zu geben, anhand derer man entscheiden könnte, ob z. B. 5 die Menge  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  ist oder doch  $\{4\}$ . Zum zweiten haben diese Mengen Eigenschaften, wie in jenem Fall, dass  $3 \in 5$ , während in diesem  $3 \notin 5$  gilt, die über die grundsätzlichen Eigenschaften der Zahlen bereits hinausgehen. Dies spricht dafür, dass beide Versionen vielmehr nur Exemplifizierungen der Struktur der natürlichen Zahlen sind. In einer Strukturtheorie müsste man aber die Struktur der natürlichen Zahlen, wie sie durch ein Axiomensystem gefasst werden (soll), eindeutig angeben können. Das soll hier versucht werden.

Die Struktur, die gesucht wird, soll den Grundsätzen (1) und (2) (s. S. 108) genügen: Mit jedem Objekt soll sein Nachfolger bestimmt sein, keine zwei Objekte den gleichen Nachfolger haben und genau ein Objekt kein Nachfolger eines beliebigen anderen sein. Wichtig ist nun, dass (Finsler-) Mengen nur zweifelsfrei bezüglich der Beinhaltens-Relation ( $\ni$ ) bestimmt sind und diese Relation die einzige ist, die für eine Menge wesentlich ist. Soll von der 0 ausgehend der Nachfolger, die 1, eindeutig bestimmt in einer für 0 wesentlichen Weise sein, so muss 0 die Menge sein, die genau die 1 enthält. Die gleiche Überlegung gilt von allen anderen Zahlen. Damit wäre die 0 eine unfundierte Menge der Form  $0 := \{1\} := \{\{2\}\} := \dots$ , oder (wenn man die metasprachlichen Zahlen  $\bar{0}, \bar{1}, \dots$  nimmt)  $a_{\bar{0}} \ni a_{\bar{1}} \ni a_{\bar{2}} \ni a_{\bar{3}} \ni a_{\bar{4}} \ni a_{\bar{5}} \ni \dots$ . Für diese Menge gilt: Sind zwei  $a_m$  und  $a_n$  (mit  $n \neq m$ ) identisch, dann sind sie mit allen  $a_o$  mit  $o$  zwischen  $m$  und  $n$  identisch und damit auch mit  $a_{\bar{0}}$ , d.h.  $a_{\bar{0}} = \{a_{\bar{0}}\}$  ist die Julia-Menge. Gleiches tritt ein, wenn man, weil es ja egal ist, ob man bei 0 oder 1 mit dem Zählen beginnt, annähme, dass  $a_{\bar{0}}$  isomorph zu  $a_{\bar{1}}$  ist; denn dann ist  $a_{\bar{0}} = \{a_{\bar{1}}\} = \{a_{\bar{0}}\}$ . Wie ist es aber mit  $a_{\bar{0}}$  und  $\{a_{\bar{0}}\}$ ? Nach unseren bisherigen Bestimmungsversuchen spricht nichts dagegen, dass sie isomorph und damit identisch sind. Denn jedes Element der transitiven Hülle von  $a_{\bar{0}}$  enthält genau ein Element, das entweder mit keinem anderen der transitiven Hülle von  $a_{\bar{0}}$ , die auch mehrere enthält, identisch ist oder mit allen. Damit unsere intendierte Menge nicht zur Julia-Menge wird, müssen wir also annehmen, dass die Einermenge von  $a_{\bar{0}}$  nicht existiert und der Isomorphiebegriff so erweitert wird, dass er dafür sensibel wird.

Die Menge 0 wäre demnach dadurch gekennzeichnet, dass (i) die Einermenge von ihr nicht existiert<sup>113</sup> und dass (ii) alle Elemente ihrer transitiven Hülle genau ein Element beinhalten. Damit unterscheidet sich 0 von allen  $a_n$ , weil  $\{a_n\}$  existiert, (und damit auch alle anderen  $a_n$  voneinander und die Elemente ihrer transitiven Hülle zusammen mit 0 erfüllen (1) und (2): Jede Menge bestimmt eindeutig ihren Nachfolger, weil jede genau ein Element beinhaltet. Keine zwei Mengen haben den gleichen Nachfolger, weil der Vorgänger, das ist die Einermenge, eindeutig ist. Und genau eine Menge hat keinen Vorgänger, definitionsgemäß 0.

### 5.5.8 Abschließendes zur Finsler-Mengenlehre

Die relativ vergeblichen Bemühungen, **FM** zu formalisieren, können den Blick auf einen entscheidenden Punkt lenken. Finslers Axiomatisierung unterscheidet sich von den frühen Formen der **ZFC**-Axiome

<sup>112</sup> In der Tradition von Benacerraf 1965.

<sup>113</sup> Es soll mindestens einen unveröffentlichten Beweis geben, dass in **FM** zu jeder Menge ihre Einermenge existiert (s. Booth 1996, S. 97). Das würde die Bemühungen hier konterkarieren.

dadurch, dass nicht Beziehungen zwischen Mengen, die vor allem die Existenz betreffen, im Mittelpunkt stehen, sondern in erster Linie auf Objekte geblickt wird, deren essentiellen Eigenschaften festgehalten werden. Statt strukturelle Gesetze eines antizipierten Mengen-Universums mittels Axiomen zu postulieren, und damit mittelbar zu bestimmen, was Mengen sind und welche existieren, halten die drei Axiome von Finsler nur fest, dass es zu den wesentlichen Eigenschaften von Mengen gehört, eindeutig in ihrer Enthaltens-Beziehung zu anderen Mengen zu sein, ihre Identität unter der Minimalbedingung der Isomorphie geklärt ist, und dass dies beides *alle* wesentlichen Eigenschaften sind, so dass alle Objekte, die genau diese beiden Eigenschaften als ihre wesentlichen besitzen, Mengen sind.

Der ontologische Unterschied liegt darin, ob man eine (oder mehrere Strukturen) oder ob man einzelne Objekte (Mengen) als Gegenstand des mathematischen Fachgebietes annimmt. Der Unterschied in der Praxis wiederum findet sich nicht unbedingt in den mathematischen Resultaten und Theoremen, die ja gleich sein können, sondern im Denken. Denn die primären Gegenstände des Denkens sind einmal die strukturellen Gesetzmäßigkeiten, bei denen die Mengen gegen den oberflächlichen Sprachgebrauch die Leerstellen bei der Anwendung der Gesetze sind, das andere Mal entstehen die Gesetzmäßigkeiten erst durch die eigenständige Existenz der Mengen (und ihrer Elemente).

Da mit Sätzen der Prädikatenlogik aber sowieso nur strukturelle Gesetzmäßigkeiten ausgesagt werden können erscheint jetzt der Versuch, die drei Axiome Finslers dort formalisieren zu wollen, als widersinnig. Mathematischer interessanter ist es, seine darauf aufbauenden Überlegungen in den Details zu fassen. Dazu könnte es dienen, ein Komprehensionsprinzip aufzustellen und dieses sowie die Sprache nach Finslers Vorstellungen zu modifizieren, um damit letztlich Schritt für Schritt seine Mengenbildungen formal abzubilden.<sup>114</sup>

## 5.6 Zur Anwendung formaler Methoden auf platonische Dialoge

In den vorhergehenden Abschnitten dieses Kapitels haben wir gesehen, dass es erhebliche Schwierigkeiten gibt Aussagen selbst neuzeitlicher Philosophen, scheinbar mathematische Axiome und die Geometrie als mathematisches Fachgebiet zu formalisieren. Deutlich wurde zudem wie anfangs bemerkt, dass das Entscheidende dabei der Vorgang des Formalisierens ist, da in ihm die Bedeutungszuschreibungen und das Verständnis überprüft und verbessert werden kann und für die Verhältnisbestimmung von Informellen und Formalen ein Bewusstsein über die Art und Form des jeweiligen Wissens vorhanden sein muss. Man kann nur das einer informellen Aussage formal adäquat ausdrücken, was man an ihr versteht, und wird sich über die Bedeutung und Adäquatheit des so Formalisierten nur dann klar sein, wenn man über die Unterschiedlichkeit der Aussageformen Bescheid weiß.

Für die Anwendung formaler Methoden auf platonische Dialoge bedeutet dies zunächst, dass man äußerst vorsichtig dabei sein sollte. PLATON beziehungsweise den Dialogfiguren aufgrund einer Formalisierung einen Fehlschluss zu attestieren mag zuweilen sogar an einer schlechten Formalisierung der Prämissen und der Konklusion liegen, grundsätzlich sollte man jedoch darauf gefasst sein, dass man das eigentlich Überzeugende noch nicht erreicht hat, wenn der scheinbare Fehlschluss nicht in den Dialogverlauf absichtsvoll eingebettet erscheint. Bevor wir formale Methoden in Anwendung auf den *Parmenides* kurz betrachten werden, ist eine grundsätzliche Quelle von Fehlinterpretationen kenntlich zu machen.

### 5.6.1 Ratio und Religion

Wenn in Texten, die als philosophische rezipiert werden, unerläutert religiöse Themen aufgegriffen werden in nicht explizit philosophischer Absicht, ist Vorsicht vor einer rationalisierenden Interpretation

---

<sup>114</sup> Vgl. Schneider 2013a.



geboten. In einer berühmten Passage des sogenannten Lehrgedichts des PARMENIDES, das zu den frühesten Zeugnissen abendländischer Philosophie gehört, heißt es:

*I will do the talking; and it's up to you  
to carry away my words once you have heard them.  
What I will tell you is which roads of inquiry,  
and which roads alone, exist for thinking.  
The one route, that is, and is not possible not to be,  
is the way of Persuasion; for Persuasion is  
Truth's attendant. And as for the other,  
that is not, and is necessary not to be:  
this, I can tell you, is a path from which no news  
returns. For there is no way you can recognize  
what is not – there is no travelling that path –  
or tell anything about it.<sup>115</sup>*

Der Altphilologe und Historiker Peter Kingsley fährt, nachdem er diese Stelle wiedergegeben hat, etwas unsensibel gegenüber seinem wissenschaftlichen Umfeld fort:

Any sensible person who was to read this and be told that it's a foundational text for the western science of logic would have every good reason to die of laughter. Everything about it is absurd.<sup>116</sup>

...

These lines are pure mystery, sheer obscurity. In their form of expression, their language, in what they manage to convey without seeming to say anything specific at all, they are a classic example of a riddle.<sup>117</sup>

Manche Interpretation sehen dort tatsächlich Thesen zu elementaren Fragen der Logik in dem weiteren bildlichen Kontext einer Fahrt in die Unterwelt dargestellt.<sup>118</sup> Ohne Vorwissen die beiden sich gegenseitig ausschließenden Interpretationen vor sich gehalten, ist Kingsleys auf den ersten Blick plausibler. Das allgemeine Grundproblem ist, wie weit die Geltungsbereiche von rationaler Verständlichkeit gegen religiöse Vorstellung (oder ‚mystischer‘ Einsicht) reichen, wie in den platonischen Dialogen etwas gemäß dem Logos zum einen und zum anderen mythisch gemeint ist.

Dass in den platonischen Dialogen öfters Religiöses und auch Esoterisches aus den griechischen Mysterien verarbeitet ist, steht außer Zweifel.<sup>119</sup> Die Frage ist, wie damit richtig umzugehen ist. Zwei entgegengesetzte Positionen drängen sich auf.

Zuweilen wird diese Berücksichtigung spiritueller Themen in den Dialogen so erklärt, dass sie unabhängig von PLATONS eigenen Überzeugungen bestehen. So könnte die Erwähnung der Götter und anderer göttlicher Wesen dem dramatischen Setting und dem Glauben der historischen Figuren in den Dialogen geschuldet sein. PLATON wollte ja zudem nicht nur seine aufgeklärten Schüler überzeugen, sondern auch den athenischen Adel, der den alten Gebräuchen verbunden war. Darüber hinaus schob er dem historisch weniger frommen SOKRATES in seinen Dialogen einen starken Hang zum transrationalen Übersinnlichen unter, damit ihm SOKRATES Schicksal erspart bleibe. Was man für PLATONS Theologie halte, sei nur eine Allegorie seiner ethischen Überzeugungen, und diese Vermischung in den Dialogen leider verhängnisvoll für die Rezeption platonischer Dialoge über die Jahrtausende.<sup>120</sup>

Ein vorurteilsfreier Blick vor allem auf die Dialoge *Phaidon*, *Symposion*, *Phaidros* und den *Timaios* wie auf den kulturellen Kontext der Akademie widerlegt diese Behauptungen, vorausgesetzt PLATON verleugnete sich nicht durchgehend selbst. Die nahe liegende Alternative ist es, das Ziel der platonischen Philosophie mit einer religiösen Erfahrung zu identifizieren<sup>121</sup> oder ihre letzten Prinzipien für weitge-

115 Kingsley 2003, S. 60.

116 Kingsley 2003, S. 60.

117 Kingsley 2003, S. 61. Für die Referenzen, die Kingsley gibt, s. Kingsley 2003, S. 563ff..

118 Siehe z. B. Stekeler-Weithofer 1986, S. 42a54.

119 Siehe für diese Bezüge u. a. Riedweg 1987, Burkert 1990, Schefer 2001.

120 Für diese Argumente siehe Herrmann 2007, S. 388f., 394-6.

121 So z. B. Schefer 2001.

hend unaussprechbar und ohne bedeutsames rationales Abbild zu nehmen, wie es anscheinend in der Tübinger Schule getan wurde:

Vielleicht gelingt es aber doch, die größten Anstöße [der überlieferten Prinzipientheorie] zu beseitigen, wenn noch einmal klar gesagt wird, daß unterschieden werden muß zwischen dem, was ausdrücklich gelehrt und weitergegeben werden kann, und der Sache, von der solche Begriffe und Sätze nur ganz vorläufig Rechenschaft geben können.<sup>122</sup>

...

Es sollte sich fast von selbst verstehen, ... daß eine solche Unterweisung noch längst keine wirkliche Erkenntnis vermitteln kann, am wenigsten von den Prinzipien selbst, auch wenn ausdrücklich von ihnen gesprochen wird. Was die lehrhafte Erörterung der Prinzipien zu bieten vermag, ist allenfalls ein orientierender Entwurf, ein Durchblick auf das Ziel hin aus weiter Distanz, eine abbildhafte Projektion struktureller Zusammenhänge oder gleichsam ein Querschnitt, der den Aufbau des Ganzen zeigt, aber fast nichts von der Substanz enthält. Zum Gipfel selbst führt nur der lange Weg des dialektischen Prozesses, zu dem auch eine bestimmte Art der Lebensführung gehört: Das Treffen der richtigen Mitte, das Überwinden der subjektiven Täuschung ist für Platon ebenso eine ethische Forderung an den Menschen wie eine Aufgabe der dialektischen Untersuchung.<sup>123</sup>

Eine dritte Position besteht in der Überzeugung, dass PLATON Rationales und Religiöses natürlich unterschied, aber in Vielem nicht trennte, so dass sie für ihn nur zwei Seiten der gleichen Medaille bedeuteten.<sup>124</sup> Man hätte es dann in den Dialogen nicht mit einer durchgehenden Rationalisierung esoterischer Zusammenhänge zu tun,<sup>125</sup> sondern mit einer Verschmelzung von Ration und Religion.<sup>126</sup> Diese Position wird durch die vorhergehenden Kapitel gestützt und ihre Fruchtbarkeit als Arbeitshypothese, jeweils beides am gleichen Ort zu vermuten, aufgezeigt. So schließt der Nachweis eines exakten mathematischen Hintergrundes der mathematischen Stellen im *Menon* (siehe Kapitel 3) nicht eine symbolische und esoterische Bedeutungsschicht aus (und auch nicht umgekehrt), auch wenn man vielleicht nur einer der beiden Bedeutungsebenen nachgehen kann oder will.

Entsprechend muss man sich auch nicht zwischen einer esoterischen oder rationalisierenden Lesart des Liniengleichnisses entscheiden, aber man hat auch zum Rationalen der mathematischen Wissenschaften ihre esoterische Seite zu ergänzen.<sup>127</sup>

## 5.6.2 Formalisierung des «Parmenides»

Eine Besprechung von Einzelheiten der Versuche, Teile und Argumente der platonischen Dialoge – insbesondere des *Parmenides* – zu formalisieren sowie die bereits vorhandene Kritik daran muss auf ein andermal vertagt werden.<sup>128</sup> Die sich aus dem Bisherigen ergebene allgemeine Sicht auf den zweiten

122 Gaiser 1998, S. 581f..

123 Gaiser 1998, S. 583f..

124 Eine entspannte religionswissenschaftliche Perspektive auf die aktuelle oberflächliche Dichotomie von Wissenschaft und (westlicher) Esoterik bietet Hanegraaff 2012, Hanegraaff 2005.

125 Wie es z. B. Kingsley 2003, S. 304ff., meint; der Tendenz nach genauso in Kingsley 2000.

126 In gewissem Sinne hätte PLATON dann in den Pythagoreern ein Vorbild gehabt, denn Netz 2005, S. 93, hält folgende Vorstellung für spekulativ, aber plausibel: «Pythagoras, by explicitly instituting a *new* mystery cult, brought the divine even nearer: the claim was that a practice, instituted by a mortal, could reach beyond mortality. Even so, the irrationality of the original Pythagorean practice implies that the practice is either worthless or divinely inspired. To make this claim plausible – of transformation to the transcendent, through human means – the transformative power should be given some rational basis. Thus the Pythagoreans of the fifth and fourth centuries went on, to *rationalize* mystery – to produce a systematic philosophical counterpart of the experience of mystery.» Und präzisiert später (S. 94): «Their project was to offer an intellectually systematic correlate of a mystery practice – as it were, to literalize metaphor without losing its metaphorical power. This is precisely what proportion statements are.» Damit würde sich auch eine weitere Perspektive auf die Verwendung von Proportionalitätsaussagen in den platonischen Dialogen ergeben. Insbesondere auf das Liniengleichnis.

127 Zur esoterischen Seite der Astronomie siehe Mueller 2005, S. 114.

128 Für Interpretationsversuche mit starken Formalisierungstendenzen seien hier nur Pelletier und Zalta 2000 und von Kutschera 1995 genannt. Für den kritischen Einwand, die Prädikatenlogik hätte einen anderen Existenzbegriff und die Formalisierung einzelner Aussagen aus den platonischen Dialogen sei damit schon problematisch, vgl. Seeskin 1978, S. 247, und Hansson 2000, S. 170.

Teil des *Parmenides* ist aber folgende: Das logische Schließen mit seinen achtgliedrigen Prämissen und seinen Schlussfolgerungen ist nur die strukturierende Oberfläche, die genutzt wird, um an passenden Orten einzelne Begriffe zu explizieren, oder aus der man zuweilen direkt, inferentialistisch, eine weitere Explikation der Bedeutung entnehmen kann. Die Betrachtung einiger dieser Begriffe und ihrer Abfolge in den Abschnitten 1.3.6, 3.2 und 4.4 legt es zudem nahe, dass hinter dem logischen Ableiten der Behauptungen eine inhaltlich geleitete Begriffsbewegung angedeutet wird, so dass man mit einigem Recht von einer platonischen Dialektik im *Parmenides* verwandt mit HEGELS sprechen darf. Dann sollten die massiven Schwierigkeiten, formale Methoden überhaupt in eine angemessene Beziehung zur *Wissenschaft der Logik* zu bringen, eine Warnung sein, zu schnell im zweiten Teil des *Parmenides* etwas Formales anzuwenden.

Darüber hinaus legt die in Kapitel 1 aufgezeigte Verbindung von Linienteilen und *hypotheses* im *Parmenides* durchaus komplexere Beziehungen zwischen dem nicht sichtbaren und dem sichtbaren Bereich nahe als das Gegenstand-nimmt-teil-an-Idee-Schema, da sich im eigentlich sichtbaren, gegenständlichen Bereich 6 sich die Seinsbereiche 2, 3 und 5 direkt spiegeln und über diese Seinsbereich 1, während Seinsbereich 4 ein Spiegelungsgleiches, seelisches Gegenstück zu 6 darstellt. Im Allgemeinen ist wohl auch hier wie bei HEGEL das Vorgehen zielführender, nicht mit einer allgemeinen, einfachen Theorie an die Begriffsbewegung heranzutreten, sondern bei einem punktuellen begrifflichen Inhalt zu starten.

Für eine Diskussion der Selbstbezüglichkeit der Ideen wäre es demnach wohl fruchtbar, neben den pathologischen Fällen unter einer allgemeinen Prämisse, die fruchtbaren Selbstbezüglichkeiten im *Parmenides* näher zu betrachten. Zum Beispiel scheint der Begriff der Quantität aus einer Selbstbezüglichkeit des Ganzes-Teile Begriffs zu entstehen, während die Entfaltung der Selbstbezüglichkeit des seienden Einen zu Beginn der zweiten *hypothesis* überhaupt erst den Ideenbereich ermöglicht (siehe S. 22 und Abschnitt 4.4.2). Beides müsste noch genau herausgearbeitet und überprüft werden.

## 5.7 Eidetische Variation als Methode platonischer Begriffsexplikation

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Explikation informeller Begriffe in und mit Hilfe der modernen Logik untersucht. Dieses Kapitel abschließend wird eine Methode vorgestellt, die in platonischer Tradition zum Wesen einer Sache führt, dass nur in Gedanken zu ergreifen ist.

Husserl meinte eine Methode zur «Wesenserschauung»<sup>129</sup> mit dem, was man Phantasievolution oder eidetische Variation nennt, gefunden zu haben, die als eine Art nicht-sinnlicher Anschauung den direkten Zugang zu abstrakten Objekten böte.<sup>130</sup> Das bedeutet, dass sich mittels dieser Methode allgemeine Begriffe (oder besser Ideen) deskriptiv bestimmen lassen müssten. Dass ihre Tage noch nicht gezählt sind, möchte ich zunächst aufweisen, indem ich die starken Bedenken Künnes<sup>131</sup> auflöse, und versuche, das Potential der Methode im Hinblick auf mathematische Gegenstände abzuschätzen. Insgesamt soll damit das Vorgehen in Abschnitt 4.2.7 gerechtfertigt und ein Argument in Abschnitt 7.3.1 vorbereitet werden.

Abstrahiert man die Gemeinsamkeiten der Dinge, die einem in der Welt begegnen, erhält man eine mehr oder weniger beliebige Menge von Eigenschaften, oder – wenn man vorsichtig genug ist, nur nach Familienähnlichkeiten zu suchen – verschiedene Mengen von Gemeinsamkeiten, die sich nur auf Untergruppen der betrachteten Ansammlung von Dingen beziehen – einen empirischen Begriff. Um von einem ideellen Wesen oder einer Idee sprechen zu dürfen, müssten die notwendigen Gemeinsamkeiten in einer Einheit gefasst, sich diese Einheit von anderen möglichen Kombinationen von Eigenschaften abheben und gegenüber ihren Exemplaren unabhängig sein. Die Beliebigkeit und Zufälligkeit, wenn man von gegebenen Dingen aus abstrahiert, muss ausgeschaltet werden, und Husserls Behauptung ist, dass dies mit der Methode der eidetischen Variation erreicht werden kann.<sup>132</sup>

[Die Leistung, das im empirisch Gegebenen zunächst sich abhebende Allgemeine vor allem von seinem Charakter der Zufälligkeit zu befreien,] beruht auf der Abwandlung einer erfahrenen oder phantasierten Gegenständlichkeit zum beliebigen Exempel, das zugleich den Charakter des leitenden „Vorbildes“ erhält, des Ausgangsgliedes für die Erzeugung einer offen endlosen Mannigfaltigkeit von Varianten, also auf einer Variation. M. a. W. wir lassen uns vom Faktum als Vorbild für seine Umgestaltung in reiner Phantasie leiten. Es sollen dabei immer neue ähnliche Bilder als Nachbilder, als Phantasiebilder gewonnen werden, die sämtlich konkrete Ähnlichkeiten des Urbildes sind. Wir erzeugen so frei willkürlich Varianten, deren jede ebenso wie der ganze Prozeß der Variation selbst im subjektiven Erlebnismodus des „beliebig“ auftritt. Es zeigt sich dann, daß durch diese Mannigfaltigkeit von Nachgestaltungen eine Einheit hindurchgeht, daß bei solchen freien Variationen eines Urbildes, z. B. eines Dinges, in Notwendigkeit eine Invariante erhalten bleibt als die notwendige allgemeine Form, ohne die ein derartiges wie

129 Husserl 1948, S. 410. Ein «terminologischer Missgriff», denn er «weckt nämlich völlig falsche Assoziationen und verstellt nach wie vor den unvoreingenommenen Blick auf Husserls Wesenslehre und die von ihm praktizierte Methode wissenschaftlicher Apriorforschung» (Sowa 2007, S. 6); in der zitierten Textstelle allerdings nicht durch Husserl selbst so exponiert, vgl. Husserl 1968, S. 72, und Fußnote 132. Die Rede vom «Sehen» und «Schauen» allgemeiner Gesetzmässigkeiten sollte anscheinend hervorheben, «daß ein ... Allgemeines ... uns ganz analog direkt und als es selbst zu eigen wird wie ein individuell Einzelnes im sinnlichen Wahrnehmen» (Husserl 1948, S. 421).

130 Husserl konnte mit seiner «freien Variation» sowohl an die Variation der Experimentbedingungen in der Physik wie an die mal mehr und mal weniger anschaulichen Variationen der damaligen Mathematik anknüpfen. Wie Tieszen 2005 die eidetische Variation anhand von damals und heute üblichen Unterscheidungen und Resultaten der Geometrie erklären möchte, zeigt allerdings, wie wenig Husserls Methode auch von manchen Husserlforschern verstanden wird. Denn wenn das Eidos («essence» Tieszen 2005, S. 78) jeweils das ist, was invariant bleibt unter einer Menge *beliebig* zusammengestellter Veränderungen (d.h. hier mathematischer Abbildungen), dann sinkt der Erklärungswert des Eidos gegen Null.

131 Siehe Künne 2007, Kap. 4 § 4. Die sprachanalytische Tradition scheint sich insgesamt mit Husserls eidetischer Variation schwer zu tun. Vermutlich hat Verena Mayer recht: «In der Tat haftet [...] dem Verfahren der Wesensschau, unbeschadet der Tatsache, dass einfache Urteile immer schon involviert sind, der Charakter des Nichtsprachlichen an, der analytische Philosophen verstört» (Mayer 2011, S. 186). Dessen ungeachtet dienen die Einwände Künnes hier als Prüfstein, inwieweit die Phantasievolution als philosophische Methode bereits verlässlich ist, und als Ausgangspunkt, um die eidetische Variation etwas zu explizieren.

132 Die ausführlichste Darstellung der eidetischen Variation ist in Husserl 1948, S. 409ff., enthalten und geht auf (Vorlesungs-) Manuskripte von Husserl zurück, die Ludwig Landgrebe zusammengestellt und bearbeitet hat, ohne dass Husserl das Ergebnis hat abschließend durchsehen können; s. Husserl 1948, Vorwort. Insofern eignet sich dieser Text weniger für eine Kritik an Husserls Aussagen, die sich auf die Ausgangsmaterialien beziehen sollte, als vielmehr zur Hilfe für ein besseres Verständnis. Eine Einfügung in ein Zitat aus Husserl 1948 wie «schreibt Husserl» (Künne 2007, S. 156) ist demnach potentiell irreführend.

dieses Ding, als Exempel seiner Art, überhaupt undenkbar wäre. Sie hebt sich in der Übung willkürlicher Variation, und während uns das Differierende der Varianten gleichgültig ist, als ein absolut identischer Gehalt, ein invariables Was heraus, nach dem hin sich alle Varianten decken: ein allgemeines Wesen. Auf dieses können wir den Blick richten als auf das notwendig Invariable, das aller im Modus des „beliebig“ geübten und wie immer fortzuführenden Variation, soll sie Variation von demselben Urbild sein, ihre Grenzen vorschreibt. Es stellt sich heraus als das, ohne was ein Gegenstand dieser Art nicht gedacht werden kann, d.h. ohne was er nicht anschaulich als ein solcher phantasiert werden kann. Dieses allgemeine Wesen ist das Eidos, die *ιδέα* im platonischen Sinne, aber rein gefaßt und frei von allen metaphysischen Interpretationen, also genau so genommen, wie es in der auf solchem Wege entspringenden Ideenschau uns unmittelbar intuitiv zur Gegebenheit kommt.<sup>133</sup>

*Erstens.* Zunächst wendet Künne ein, «daß man sich nicht immer mit Sinn auf die Suche nach dem machen kann, was allen *Fs* gemeinsam ist.»<sup>134</sup> Als Beispiel nimmt er einen natürlichsprachlichen Ausdruck und kein konstruiertes Prädikat, wie das, dessen Extension genau den Olymp, das Schlürfen meines Großvaters und dieses Marienglas umfasst, die neben allgemeinen Kategorien nur ihnen unwesentliche Eigenschaften gemeinsam haben wie gerade zu einer Extensionsmenge zusammengefasst worden zu sein. Künne wählt den abstrakten Gegenstand Rot, von dem man durchaus vermuten könnte, dass seine Instanzierungen etwas in der Wahrnehmung genauer Bestimmbares gemeinsam haben, und das Husserl explizit als Beispiel angibt.<sup>135</sup>

Ich betrachte Muster verschiedener Schattierungen von Rot, – das eine ist scharlachrot, das zweite zinnoberrot und das dritte karminrot. Was soll hier das ›das Gemeinsame sehen‹ überhaupt heißen? Was ist den Farben Scharlachrot, Zinnoberrot und Karminrot gemeinsam? Die Feststellung, daß sie alle Schattierungen von Rot sind, ist natürlich keine Antwort auf diese Frage, – ist sie doch in der Frage bereits vorausgesetzt. Wenn Husserls Variationsverfahren eine Pointe haben soll, dann müßte es uns zu einer gehaltvollen Antwort auf diese Frage führen. ... Und was ist das Invariante in allen Varianten von Rot?<sup>136</sup>

Die letzte Frage ist rhetorisch zu nehmen und der ganze Abschnitt ein Argument, wenn man die Betrachtung der Muster als eine Durchführung der Phantasievariation missversteht.<sup>137</sup> Denn dann bleibt einem wahrscheinlich fraglich, was man da Gleiches denn gesehen haben soll, wenn man versucht die Frage direkt durch Angabe des Gemeinsamen oder indirekt durch einen anders darstellbaren Kompetenzzuwachs bezüglich dem Roten zu beantworten. Eine Phantasievariation kann zumindest nicht daran scheitern, dass drei (frei oder nach Erinnerung) vorgestellte Dinge nichts Gemeinsames hätten, weil man nach Husserl stets nur von einem *einzelnen* (erfahrenen oder frei phantasierten) Vorbild aus variiert.<sup>138</sup> Der Variationsprozess, soll er erfolgreich sein, ist aber nicht regellos und die Auswahl der assoziierten oder frei geschaffenen Nachbilder des einen Vorbilds nicht äußerlich, wie wenn z. B. durch die öffentliche Meinung vorgegeben. Der Prozess geschieht in der Spannung zwischen völliger Willkür und dem ideellen Vorgriff auf die Gesamtheit (alles Roten). Entscheidend ist, «daß der Prozeß im Bewußtsein beliebiger Fortbildung von Varianten vollzogen sei»<sup>139</sup> und «daß die Mannigfaltigkeit *als solche*, als *Vielfheit* bewusst ist und nie ganz aus dem Griff gelassen wird.»<sup>140</sup> Auf dieser Grundlage kann dann «in der aktiven schauenden Erfassung des Vorkonstituierten»<sup>141</sup> das Eidos, das Wesen, bewußt gewonnen werden und zwar, indem auf das «Kongruieren»<sup>142</sup>, das zur Deckung-Bringen der einzelnen Bilder geachtet wird.

133 Husserl 1948, S. 410f..

134 Künne 2007, S. 156.

135 Siehe Husserl 1948, S. 432f..

136 Künne 2007, S. 155f..

137 Vgl. Husserl 1948, S. 422. «Es handelt sich nicht darum, induktiv vorgehend das überall Gemeinsame zu finden» (Husserl 1952, S. 100).

138 Siehe Husserl 1948, S. 410. Künnes Beispiel bewegt sich im Bereich der Bildung empirischer Begriffe durch Ähnlichkeiten.

139 Husserl 1948, S. 413.

140 Husserl 1948, S. 414.

141 Husserl 1948, S. 414.

142 Husserl 1948, S. 414.

Im Kontext dieses Kapitels zeigt sich dieses Vorgehen als eine Explikation informeller Begriffe. Um ein vorbewusstes Verständnis in die Verstandesklarheit zu heben, wird zunächst mit dem Vorstellen eines eindeutigen Beispiels begonnen. Wenn von diesem Vorbild ausgehend zu ihm ähnliche Vorstellungen gefasst werden, so findet dies unter dem bewussten Bezug auf das Ganze statt, d.h. idealerweise unter der Aufsicht des Vorgriffs auf den Begriff bzw. das Eidos. Im Übergang von einer Vorstellung zur nächsten wird dem Vorbegriff Raum zur Entfaltung gegeben, wenn dieser Raum ganz offen gehalten wird für beliebige Varianten. Dies allein muss für eine vollständige Explikation noch nicht ausreichen, denn ein weiterer Schritt ist die Zusammenschau des Invarianten in den Vorstellungen, in der vermittelt auch die möglicherweise unterschiedlichen Intuitionen<sup>143</sup> aus den Übergängen zusammengebracht werden. Die eidetische Variation ist eine Methode um durch eine spezielle Handlung (des freien Phantasierens) die Konturen des im Willen anwesenden informellen Begriffes ins begriffliche Bewusstsein zu heben. Ob dieses Verfahren erfolgreich ist – und man damit hinter diesen informellen Begriff im Willen eine Idee vermuten darf – muss die einzelne Durchführung zeigen.

Die Phantasievariation soll, auch nach Husserl, nicht die Existenz von Ideen rechtfertigen, obwohl sie als reine Heuristik ein starkes Argument dafür liefern würde, wenn sich mit ihr effektiv allgemeine Bestimmungen extrahieren ließen. Ähnlich überladen, und vielleicht angeregt durch Husserls Darstellung, sind Erwartungen, eine schnell durchgeführte Phantasievariation könnte ans Licht bringen, was Röte ist. Tatsächlich bietet die «eidetische Variation» bei schwierigen Bestimmungen erstmal nur einen Rahmen, in dem man dafür wichtige Begrifflichkeiten schaffen und entdecken kann, wie z. B. Farbbestimmungen. Damit ist Künnes Vorwurf an Husserl, die Bestimmung von Röte zwar ausführlich als Ziel einer Phantasievariation angeführt zu haben ohne das Ergebnis mitzuteilen, zwar berechtigt aber nur insofern sachrelevant, als sich die Frage nach der begrifflichen Einheit des Roten mit Hilfe der eidetischen Variation entscheiden lassen müsste.

Letztlich geht Künne sogar davon aus, dass es gar nichts Gemeinsames in den verschiedenen Rottönen wahrzunehmen gibt. «Wir nennen die ... erwähnten Muster allesamt ›rot‹, weil wir [auf eine bestimmte Weise] Deutsch gelernt haben», so antwortet Künne selbst, «hätten wir eine andere Sprache gelernt, so würde sich vielleicht für uns ein Abgrund auftun zwischen dem, was wir jetzt als zinnoberrot, und dem, was wir jetzt als karminrot zu klassifizieren gewohnt sind.»<sup>144</sup> Dieses kontrafaktische Konditional ist aber nur schlecht zu begründen, denn seit Berlin und Kay 1969 hält sich eine gegenteilige These erstaunlich gut in der Diskussion der *color science*. Es gibt, so die Behauptung, in allen untersuchten natürlichen Sprachen maximal 11 (bzw. 12) sogenannte *basic color terms*, die in einer relativ bestimmten Reihenfolge in Sprachen auftreten. D. h. in Sprachen mit nur zwei Grundwörtern für Farben stehen diese genau für ‚weiß‘ (zusammen mit den warmen Farben) und ‚schwarz‘ (zusammen mit den kalten Farben), bei genau drei *basic color terms* in einer Sprache ist der neu Hinzukommende immer ‚rot‘. Die Terme verschiedener Sprachen treffen, so wird dabei empirisch bestätigt, auf relativ genau die gleichen farbigen Gegenstände zu.<sup>145</sup> Es scheint demnach aktuell für alle natürliche Sprachen zu gelten: Wenn sich in einer zwischen karminrot und zinnoberrot «ein Abgrund auftut», dann auch in allen anderen. Dass karminrot und zinnoberrot sowenig beides Rottöne sind, weil ein „rot“ in ihrem deutschen Namen auftritt, und eine sorgfältige Untersuchung Gegenteiliges zum Ergebnis haben könnte, ist so klar wie, dass Kletterrose und Pfingstrose nicht beides Rosen sind. Gibt es jedoch keine konkrete Sprache jener Art, dann muss man zumindest ihre Möglichkeit aufzeigen, möchte man durch ein (Meta-) Gegenbeispiel die Existenz eines einheitlichen Verständnisses der Röte widerlegen.<sup>146</sup>

143 Intuition in einem moderneren Gebrauch, nicht in Husserls Sinne.

144 Künne 2007, S. 156.

145 Die Variation zwischen verschiedenen Sprachen scheint relativ gering zu sein: «Further evidence for the cross-language universality of color foci is that the location of color foci varies no more between speakers of different languages than between speakers of the same language. In fact, in our tests, speakers of the same language show slightly more variability among themselves than speakers of different languages do.» Berlin und Kay 1969, S. 10.

146 Damit würde man aber gerade durch freie (weil nicht mehr empirisch fundierte) Variation der Sprache die Möglichkeit einer

Grundsätzlich ist Künne zuzustimmen, dass es nicht immer etwas Wesentliches geben muss, was allen  $F$ s gemeinsam ist.<sup>147</sup> Eine Methode dies herauszufinden ist jedoch die eidetische Variation, denn wenn von einer Instantiation eines  $F$  aus frei variiert wird, und der gesamte Variantenraum durchschritten wird, muss sich auch ergeben, wann sich die eine oder andere Instantiation eines  $F$  darin oder nicht darin befindet. Ein spezieller Fall ist der einseitig abhängiger Ideen, wie dass Rot stets Farbe ist, aber nicht umgekehrt, was sich in der freien Variation zeigt.<sup>148</sup>

Zweitens. Mit dem zweiten Einwand<sup>149</sup> bestreitet Künne, dass man mit der eidetischen Variation die *notwendigen* Gemeinsamkeiten extrahieren kann. Um zu entscheiden, ob  $G$  notwendig allem, was  $F$  ist, zukommt, müsste man sich alle *möglichen*  $F$ s vorstellen, überblicken und gegebenenfalls ein Gegenbeispiel als solches erkennen. Dass etwas aber sowohl  $F$  wie auch  $\neg G$  zukommt, sei, so Künne, eine begriffliche Entscheidung, die man auch ohne die konkrete Vorstellung treffen kann und gegebenenfalls bereits getroffen hat. Gleiches gilt für die unterbestimmten, porösen Ausdrücke des Alltags. Ob ein nur einen Zentimeter kleines Wesen, das ansonsten so erscheint und sich verhält wie ein normaler Mensch, auch tatsächlich ein Mensch ist, werde durch unseren Ausdruck Mensch nicht entschieden. Diese begriffliche Unentschiedenheit übertrage sich aber auch, so Künne, auf die Vorstellung eines derartigen Wesens: Das Vorstellen helfe uns bei einer Entscheidung nicht wesentlich weiter. Die Phantasievariation diene somit nur zur «Illustration»<sup>150</sup>, liefere aber insbesondere den von Husserl versprochenen Beitrag zu einer «Wesenserschauung» nicht.

Dagegen muss eingewendet werden, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen Tagträumerei und Phantasievariation darin besteht, dass in letzterer die Vorstellungen *aktiv* und *kontrolliert* von *mir* hervorgebracht werden. Damit wird in dem konkreten Ablauf einer eidetischen Variation aber wiederholt eine Entscheidungssituation angenommen, die Entscheidung vorläufig vollzogen, indem etwas als Variation vorgestellt wird, und darauf reflektiert, inwieweit verborgene Bezüge und Annahmen Einfluss nahmen. Die eidetische Variation dient insoweit gerade zur Bewusstwerdung des eigenen Willens bei begrifflichen Entscheidungen und macht diese ‚durchsichtig‘, indem sie sie ‚verflüssigt‘.<sup>151</sup> Die eidetische Variation ist damit weder darauf festgelegt, dass die erste Verbildlichung etwas ist, dass tatsächlich einmal von dem, der variiert, wahrgenommen wurde, noch ist mit der ersten Verbildlichung ein Begriff fest vorgegeben, der nur noch analysiert und in seinen Einzelheiten geklärt werden könnte. Denn auch die erste Verbildlichung hängt von der zu ihr führenden Intention desjenigen ab, der variiert. Wie diese sich ausgestaltet bzw. bewusst wird, ist zum einen nicht abzusehen, zum anderen kann sie bei zwei Personen trotz gleichem ersten Beispiel verschieden sein.

Um in einer zweiten Entgegnung zu erläutern, weshalb die Phantasievariation scheinbar schon bei einfachen Beispielen versagt, betrachten wir ein einfaches geometrisches Beispiel einer beweglichen Phantasievorstellung. Man nehme einen Kreis und stelle sich einen beliebigen vor (das innere Auge). Dann stelle man sich weitere vor, größere und kleinere, daraufhin andere in verschiedenen Lagen, in alle Richtungen gedreht, gekippt und verschoben. Und man versuche das mit einem einzelnen Kreis, den man verändere und bewege. Wenn man dies durchgeführt hat, stelle man sich die Frage, was ein Kreis ist.

---

Sprache nachweisen, die zu anderen Farburteilen Anlass gibt. Künnes Argument würde sich also, wenn es detaillierter ausgearbeitet wäre, methodisch auf eine Art freie Variation gründen. Er will ja auch nur die *Phantasievariationen* kritisieren, (s. Künne 2007, S. 160).

147 Es ist ja gerade die These von Abschnitt 7.3.1, dass es keine Idee der Zahl gibt.

148 Dazu weiter in Abschnitt 7.3.1.

149 Siehe Künne 2007, S. 158.

150 Künne 2007, S. 159.

151 Piazza 2007, S. 168ff., versucht das Problem, woher sich die Begriffe in der eidetischen Variation ergeben, mit dem Verweis auf Husserls *passive Synthesis* zu lösen, die der Wahrnehmung zugrunde liege und aufgrund der man ohne eigenes Zutun z. B. einen Tisch als etwas zu allen anderen Tischen Ähnliches wahrnimmt. Das Gleiche passiere auch bei der bildlichen Vorstellung eines Dinges. Aber mit dieser Argumentationsstrategie rechtfertigt man die eidetische Variation nicht als Wesensschau, sondern höchstens als eine apriorische Begriffsanalyse.

Wie ist die Antwort? Eine Hilfestellung:<sup>152</sup>

- (1) In der Variation des Kreises kamen bei der Reichhaltigkeit des Vorgestellten aller Wahrscheinlichkeit nach auch Kreise vor, die man nicht aus der Erinnerung von Wahrnehmungen beziehen konnte, weil man sie so nie gesehen hatte. *Man selbst muss demnach (unbewusst) irgendeinem Prinzip gefolgt sein, als man sich diese richtige Vorstellung eines Kreises geschaffen hat.* Reflektiert man nun betrachtend auf das verwendete Prinzip in der Erzeugung der Vorstellung – vielleicht bei einer Wiederholung der Kreisvariation – so wird sich z. B. herausstellen, dass man sich eine geschlossene Linie vorgestellt hat, die in allen ihren Punkten gleich weit von einem anderen Punkt (dem Mittelpunkt) entfernt liegt, oder eine, die gleichmäßig gekrümmt ist, oder man einer anderen Bestimmung gefolgt ist.
- (2) In gleicher Weise kann man bei einem bewegten Kreis die Aufmerksamkeit darauf richten, *was man wie* konstant hält. Es kann einem bei genauerer Betrachtung auffallen, dass man sich den Kreis nicht kontinuierlich vorstellen kann, sondern stets nur Beispiele von in der Bewegung erstarrten Kreisen. Während bei (1) die Erzeugung einer neuen Kreisvorstellung in den Blickpunkt rückt, ist es hier der Übergang von der einen Erstarrung in die nächste, und genauer: wie man den Kreis über diese Lücke ohne Unterstützung einer Kreisvorstellung ‚hinüberträgt‘, und welches Prinzip man dabei anwendet.

Damit ist man aber noch nicht am Ziel angelangt, denn mit (1) erhält man nur eine oder wenige der unzähligen möglichen eindeutigen Definitionen eines Kreises. Um zu der einen Wesensbestimmung zu gelangen, könnte man nun meinen, das Gemeinsame aller möglichen oder zumindest der bekannten Kreisbestimmungen ermitteln zu müssen. Aber Überlegungen und Beobachtungen in diese Richtung haben nur heuristischen Charakter, da die Definitionen Unterschiedliches voraussetzen an geometrischen Begriffen, und unterschiedliche Theoreme für die verschiedenen Äquivalenzbeweise der Definitionen benötigt werden, so dass ein direkter Vergleich vermutlich nur oberflächliche Gemeinsamkeiten, wie ‚Definition einer einfachen geometrischen Figur zu sein‘, ans Licht bringen wird. Vielmehr müsste zunächst geklärt werden, was man voraussetzen will und für eine Bestimmung gebrauchen darf, und dies in der Kreisvariation verwirklichen.

Es sollte aus der bisherigen Erörterung deutlich geworden sein: Sowenig der unaufmerksamen Museumsbesucher in den wenigen Sekunden seiner Betrachtungszeit eines Werkes dieses in gewissem Sinne gesehen hat, sowenig erblickt man sofort das Wesen der vorgestellten Varianten. Eine erste eindeutige Sinnbestimmung muss auch noch nicht das Vorhandensein anderer gleichwertiger ausschließen und eignet sich deswegen nicht dafür, alle nicht zugeschriebenen Prädikate als nicht zum Wesen gehörige zu klassifizieren. Erst wenn z. B. unter vielleicht mehreren minimalen Mengen von Voraussetzungen die zur Wesensbestimmung geeignete bestimmt und angewendet wurde, ist die dann mittels (1) zu explizierende Bestimmung die des Wesens, anhand der nicht in ihr vorkommende Prädikate definitiv ausgeschlossen werden könnten. Die begriffliche Klärung des Wesens könnte so im direkten Zusammenspiel mit dem Vorstellen erreicht werden und deshalb zurecht Phantasievariation heißen, wobei die Phantasievariation wie von Husserl dargestellt das als letztes zu erreichende Ideal wäre. (In dem Beispiel wurde gerade ja auch anders vorgegangen.) Auch die begriffliche Unentschiedenheit in der Verwendung unterbestimmter Ausdrücke überträgt sich vielleicht auf die Vorstellung eines gewissen Gegenstandes, ist aber zunächst eine *vor* der Anwendung einer Phantasievariation.

Die eidetische Variation sollte demnach nicht verwechselt werden mit einfachen Vorstellungsbildungen in der Mathematik. Z. B. kann in einzelnen Vorstellungen (einfacher) euklidisch-geometrischer Zusammenhänge bereits die ganze mögliche Allgemeinheit ‚verkörpert‘ sein, insofern man sich der Beliebigkeit bewusst ist, mit der man die konkrete Vorstellung gebildet hat. (Wie wenn man eine geometrische Konstruktion konkret ausführt, sich ihrer Durchführbarkeit für jedes beliebige Dreieck aber bewusst ist.) Dies sollte aber nicht mit einer Phantasievariation verwechselt werden, die zum einen in der Variantenbildung uneingeschränkter ist, und zum anderen sowohl von der Reflexion auf die

<sup>152</sup> Zum Kreis weiter in 7.2.2, zu den zwei folgenden Punkten vgl. Ziegler 1992.



Vorstellungsbildung wie auch vom eigenen Ideensystem abhängt. Ungefährdete Beispiele eidetischer Variation scheinen auf den ersten Blick geometrische Grundaussagen zu sein:

Die Aussage, dass jede Gerade durch zwei auf ihr liegende Punkte eindeutig bestimmt ist, gründet in einem Eidos, das von einer gegebenen Geraden ausgehend durch beliebige Variation jederzeit evident bestätigt wird. Evident heißt hier immer, dass das Wesen sich in jedem Beispiel „zeigt“. Wir kommen gar nicht auf die Idee, jenen Satz durch konkrete Zeichenversuche bestätigen zu wollen, weil die Beliebigkeit der Phantasiewahl seine apriorische Gültigkeit bereits hinreichend ausweist.<sup>153</sup>

Durch die (sehr kurze) Phantasievariation einer Geraden zeige sich – so Mayer – die notwendige Eigenschaft der Geraden durch zwei Punkte auf ihr eindeutig bestimmt zu werden.

Zunächst ist darauf hinzuweisen, dass viele Voraussetzungen (nicht nur wegen der Kürze des Beispiels) unhinterfragt bleiben. Geraden werden als unendlich lange gerade Linien vorgestellt, auf denen Punkte liegen, es wird unterstellt, dass es ein Wesen der Geraden oder jener Aussage über die Gerade gibt, und es wird eine Vorstellung gebildet, die keiner einzelnen möglichen Wahrnehmung entspricht, weil eine Gerade *unendlich* lang ist. Ist man allerdings nicht in der Vorstellungsbildung auf mögliche sinnliche Anschauungen eingeschränkt, sind in dem Kontext dieses Beispiels leicht Varianten zu bilden, bei denen die Zahl der nötigen Punkte variiert. So wäre es eine Variante, dass jeder Geraden noch (mindestens) ein anschaulich unendlich ferner Punkt zukomme, der keiner anderen Geraden zukommt. Damit ist jede Gerade durch einen Punkt eindeutig bestimmt. Eine andere Variante wäre – technisch gesprochen –, die Geraden zweier Modelle der euklidischen Geometrie paarweise bis auf einen ‚unendlich fernen‘ Punkt (bezüglich ihrer Punkte) zu ‚identifizieren‘. Damit wäre eine Gerade erst durch drei Punkte eindeutig bestimmt.<sup>154</sup>

Die besprochene Aussage ist in diesem Sinne eine freie Setzung und keine anschauliche Evidenz, weil das Unendliche mit einzubeziehen einen Spielraum lässt, wie man die endlichen geometrischen Tatbestände ‚ins Unendliche‘ erweitert. Gilt das Gemeinte, wenn man statt Geraden begrenzte gerade Linien, d.h. *Strecken*, betrachtet? Wird die Aussage, dass die beiden Endpunkte einer Strecke notwendig eindeutig sind, in der Phantasievariation bestätigt? Dies scheint von der Konzeption des ‚Vorstellungsraumes‘ abzuhängen, u. a. davon ob zwei Punkte am gleichen Ort, ‚aufeinander‘ liegen können. Es hängt von den allgemeinen Identitätsbedingungen des ‚Vorstellungsraumes‘ bezüglich geometrischer Objekte ab.

Nun sind geometrische Figuren wie der Kreis natürlich die mathematischen Objekte, die am engsten mit der Imagination zusammenhängen.<sup>155</sup> Für eine Betrachtung mathematischer Gegenstände im allgemeinen mittels der Phantasievariation ist die Frage, ob und ggf. wie sich (für jeden Wahrnehmungssinn) nicht-anschauliche Gegenstände vorstellen lassen. Kann man sich auch nicht ausgedehnte, abstraktere mathematische Objekte wie Zahlen, Funktionen oder Mengen konkret genug *vorstellen*? Hier trifft Künnes Einwand auf einen Schwachpunkt gegenwärtiger Versuche, die Bedeutung der Phantasievariation für die Mathematik hervorzuheben. Entweder werden sogleich geometrische Beispiele angeführt (wie gerade geschehen) oder die Rolle der Phantasie bleibt unklar.

Husserls Begriff der Vorstellung in der Phantasievariation geht darüber hinaus, was grundsätzlich durch Wahrnehmung gegeben werden kann:

Die Wirklichkeiten müssen behandelt werden als Möglichkeiten unter anderen Möglichkeiten, und zwar als beliebige Phantasiemöglichkeiten. Das geschieht nur dann, wenn jede Bindung an vorgegebene Wirklichkeit

<sup>153</sup> Mayer 2011, S. 189f..

<sup>154</sup> Diese Varianten verletzen offensichtlich andere geometrischen Eigenschaften der Geraden, wie dass zwei Punkte stets eine Gerade bestimmen oder zwei unterschiedliche Geraden sich in genau einem (oder in keinem) Punkt schneiden.

Für sich genommen steht man vielleicht vor einem ähnlichen Problem, sie als notwendige Eigenschaft der Geraden nachzuweisen. Die Fragen wären, in welchem Verhältnis diese Eigenschaften der Geraden zueinander stehen und wie weit (und wie abstrakt) man in der Variantenbildung (im Hinblick auf die mengentheoretische Modellbildung) gehen darf. Jedenfalls scheinen die zwei vorgeschlagenen Varianten auszureichen, um zu zeigen, dass das Geradenbeispiel keine eidetische Phantasievariation ist.

<sup>155</sup> Siehe auch Abschnitt 5.2.

in der Tat aufs Sorgsamste ausgeschlossen ist. Variieren wir frei, aber im geheimen daran festhaltend, dass es z. B. beliebige Töne in der Welt sein sollen, von Menschen auf der Erde zu hörende oder gehörte Töne, dann haben wir zwar ein Wesensallgemeines als Eidos, aber auf unsere tatsächliche Welt bezogen und an diese universale Tatsache gebunden. Das ist eine geheime, nämlich aus begrifflichen Gründen uns selbst unmerkliche Bindung.<sup>156</sup>

Dieser hohe Anspruch an die Variationsmöglichkeit des Einzelnen, dem kaum ohne längere Vorübung genügt wird, ist ein praktischer Grund, die eidetische Variation in nach den Variationsmöglichkeiten geordneten Stufen einzuteilen. Das reine Wesen ergibt sich nur einer vollständig durchgeführten Phantasievariation, in den nicht ganz unbeschränkten Variationen wird das Wesen dagegen nur in unaufgedeckten Bezügen erkannt. So ist das diskutierte Geradenbeispiel eine erste, aber nicht vollständig durchgeführte eidetische Variation.

Künnes zweiter Kritikpunkt geht, wie die Erläuterungen zeigen, von einer dem Vorgehen zunächst äußerlichen Fragestellung aus. Denn eine erstes Anwenden der Phantasievariation hebt zunächst nur einiges Gemeinsames hervor (beim geometrischen Kreis: Kennzeichnungen, die als Definitionen dienen können), nicht unbedingt oder gleich das alleinige Wesen, wofür ein differenzierterer Begriffsapparat benötigt wird. Erst ein erfolgreicher Abschluss und die damit einhergehende Einsicht in den Eidos legt auch mit Sicherheit den Umfang von *F* fest, so dass dann entschieden werden könnte, ob *G* wirklich allem, das auch *F* ist, zukommt oder nicht.

*Drittens.* Künnes letzter Kritikpunkt greift danach aus, dass das in der Phantasievariation als das «notwendige Gemeinsame» von *F* nicht auch der Was-Gehalt der *F*-heit sein muss. Denn, so das Gegenbeispiel: «Alles, was rot ist, ist notwendigerweise farbig, und es ist notwendigerweise ausgedehnt; doch Rot ist zwar eine Farbe, aber keine Ausdehnung.»<sup>157</sup>

Der Unterschied zwischen dem Farbigein des Rot und seiner Ausdehnung in der Phantasievariation ist allerdings, dass die Ausdehnung des Rot in einer konkreten Phantasievorstellung weder variiert werden muss, um eine Variation von Rottönen zu erhalten, noch um eine Variation von Rot zu Grün zu Gelb und jeder anderen Farbe zu bewerkstelligen und die Allgemeinheit Farbe zu erhalten. Husserl scheint diesen Umstand mit dem Begriff des *abstrakten Wesens* berücksichtigen zu wollen. Abstrakte Wesen beinhalten ungeklärte Beziehungen zu anderen Wesen, sind daher «von einer Unvollkommenheit» und entspringen «in einer unexpliziten Relativität stecken bleibende[r] Wesensbetrachtung[.]»<sup>158</sup>

Ein abstraktes, obschon reines Wesen ist unselbständig, es läßt unbekannte Wesen korrelativ offen; es ist ein Titel für unselbständige Möglichkeiten, deren thematische Variation eine Sphäre unthematischer Mitvariation an sich hängen hat, die mit sinnbestimmend ist, und doch nicht den thematischen Sinn bestimmt.<sup>159</sup>

Will man nicht alle Abhängigkeiten explizieren und so nach Husserl zu dem obersten Wesen einer Regionalontologie vorstoßen, kann man sich darauf beschränken, in einer korrekten Durchführung der Phantasievariation von den Eigenschaften des Mediums abzusehen, in dem sich die Idee darstellt. Die in der Imagination explizierten Gemeinsamkeiten sind dann nur die notwendigen Gemeinsamkeiten *im Hinblick auf das Wesen* des Vorgestellten.

Abseits von dieser Erwiderung auf Künnes Einwand, wäre meine Behauptung nun sogar, dass man sich Farben unausgedehnt vorstellen kann, wenn man ‚ausgedehnt‘ expliziert durch ‚in mindestens zwei Teile teilbar‘. Diese Behauptung ist allerdings problematisch, weil sie sich letztlich auf ein individuell unterschiedlich ausgeprägtes Phantasievermögen bezieht, dessen verschieden starke Ausprägung in einzelnen Menschen in der Kunst augenscheinlich wird, aber wozu es noch keine phänomenologisch-wissenschaftliche Gesprächskultur zu geben scheint. Wenn jemand behauptet, er könne sich Farben

<sup>156</sup> Husserl 1948, S. 423f..

<sup>157</sup> Künne 2007, S. 159.

<sup>158</sup> Husserl 1948, S. 441.

<sup>159</sup> Husserl 1948, S. 441f..

unausgedehnt vorstellen, der andere es für sich verneint, so könnten sie zu unterschiedlichen Resultaten gelangen, wenn sie die eidetische Variation anwenden, und ein objektiver Standard scheint verloren. Dies ist jedoch an sich kein Problem der Methode, sondern eines der Philosophie als Gemeinschaft von Forschern. Also ein Problem, dass sich erst zwischen Philosophen einstellt und auch nur dort gelöst werden kann.<sup>160</sup>

Eine direkte und einfache Folge der eidetischen Variation soll für einen späteren Gebrauch in Abschnitt 7.3.1 herausgestellt werden. Gibt es zwischen zwei begrifflichen Allgemeinheiten eine asymmetrische Abhängigkeit der Form, dass die eine notwendig zum Gemeinsamen der anderen zählt aber nicht umgekehrt, dann gibt es kein Eidos, das genau diese beiden Allgemeinheiten umfasst. Denn variiert man über die Schnittmenge ihrer Instantiationen in der Phantasie, dann variiert man nur über die von der anderen abhängige Allgemeinheit. Die Allgemeinheiten verhalten sich dann zueinander wie Gattung und Spezies.

Die eidetische Variation steht offensichtlich in platonischer Tradition, insofern sie die Idee als Einheit Vieler beschreibt.<sup>161</sup>

In dieser Arbeit wird zwar auch die Meinung vertreten, dass sich nicht hinter jedem Prädikat eine entsprechende Idee verbirgt (in Abschnitt 6.2 und 6.3), es wird aber weiter behauptet (und in Abschnitt 7.2 hoffentlich plausibel begründet), dass es sein könnte, dass man die mittelbar an dem Prädikat beteiligten Ideen entdecken kann, und dass man anhand bestimmter Merkmale die direkt für Ideen stehenden (mathematischen) Prädikate von den anderen (mathematischen) unterscheiden und so klassifizieren kann.

160 Rochus Sowa, angeregt von Künnens Kritik an Husserls eidetischer Variation (s. Sowa 2011, S. 156), führt drei Begriffsbeispiele an, bei denen die Bestimmung des begrifflich Allgemeinen als des Gemeinsamen von notwendig mehreren Dingen versage (s. Sowa 2011, S. 156f., für die folgenden Zitate): 1) Bei Begriffen «mit a priori leeren Umfängen», wie dem «Begriff „eine Primzahl zwischen 7 und 11“.» 2) Bei Begriffen mit «a priori und notwendig nur ein[e]m einzigen Gegenstand als Umfang [...] wie z. B. „eine zwischen 5 und 7 liegende natürliche Zahl“.» 3) Wenn kontingenterweise schon ein Gegenstand vorliegt, auf den das (scheinbar) begrifflich Allgemeine zutrifft, wie z. B. bei «dem Begriff „ein am 8. April 1859 im mährischen Proßnitz geborener Philosoph“.»

Da der Begriff in allen drei Fällen nicht von mehreren Dingen ausgesagt wird, kann es sich – so Sowa – nicht um begriffliche Allgemeinheiten handeln, sondern um Namen oder Kennzeichnungen. Zumindest die eidetische Variation hat mit kontingenten Kennzeichnungen wie in 3) dieses Problem nicht, da sie offensichtlich frei alternative Wirklichkeiten bilden kann. Genausowenig ist es problematisch, dass logisch widersprüchliche ‚Begriffe‘ keine Ideen bilden, obwohl sie aus begrifflichen Allgemeinheiten als ihren Bestandteilen zusammengesetzt sind. Denn wenn es nicht zu jedem ‚Begriff‘ eine Idee gibt, dann sind die beliebig zusammengestellten, widersprüchlichen ‚Begriffe‘ gemeinhin die ersten Streichkandidaten.

Sowas Gegenbeispiel in 2) hängt nun davon ab, wie man mathematische Objekte konzipiert. Der weit verbreitete mathematische Strukturalismus würde 2) als eine Bestimmung eines speziellen Strukturmomentes in der Struktur der natürlichen Zahlen mit der größer-kleiner-Relation interpretieren. Struktur ist jedoch bereits das (in einem gewissen Kontext) Gemeinsame vieler ‚Systeme‘ (d.h. ganz allgemein von Ansammlungen von Dingen, die in bestimmten Beziehungen stehen), die gerade diese Strukturen exemplifizieren. Somit wäre jede in der mathematischen Sprache gehaltene Kennzeichnung (einzelner Objekte) in ihrer Tiefenstruktur die Bestimmung eines (zumindest in gewissem Sinne) begrifflich Allgemeinen.

Generell ist das Verhältnis der eidetischen Variation zur modernen Mathematik und ihren Gegenständen nicht einfach zu bestimmen, jedenfalls, wie Kapitel 7 zeigt, nicht unproblematisch, da eine Variation über die Grenze zwischen mathematischen und sinnlichen Objekten nicht mehr ohne weiteres möglich ist.

161 Siehe dazu *Politeia* 596a6, *Parmenides* 132a2f., *Symposion* 211b2 (Idee sei  $\mu\omicron\nu\omicron\epsilon\iota\delta\acute{\epsilon}\varsigma$ ), *Metaphysik* 990b13; und Finck 2007, S. 106.

«But the question what ontology actually to adopt still stands open, and the obvious counsel is tolerance and an experimental spirit.»

Quine 1980, S. 19

# Zur Existenz mathematischer Gegenstände

## 6.1 Mathematischer Platonismus und Platon

Der mathematische Platonismus – und wenn der Kontext klar ist einfach nur: Platonismus – ist ein Standpunkt in der Philosophie der Mathematik des Realismus bezüglich mathematischer Gegenstände und Sachverhalte. Man unterscheidet in ihm zwei Behauptungen, einmal, dass die mathematischen Objekte tatsächlich existieren und zwar unabhängig von einzelnen Menschen und Menschengruppen (Gegenstandsrealismus). Zum anderen ist nach dem Wahrheitswertrealismus jeder wahre mathematische Satz objektiv wahr.

Ein Gegenstandsrealist schließt demnach nicht aus, dass ein Mathematiker – wie man es im Mittelalter zuweilen ausdrückte – in seiner eigenen Seele das Mathematische kreiert (im Nachbild der Schöpfung der Welt), er nimmt aber zusätzlich an, dass die mathematischen Dinge und Sachverhalte ungestört vom einzelnen menschlichen Geist oder einer Sprache da sind, und letztlich das sind, wovon die Mathematik handelt. Auch was die mathematischen Gegenstände sind, ist damit noch nicht entschieden. Frege spricht den einzelnen natürlichen Zahlen eine gesonderte Existenz zu, ein strukturalistischer Realist dagegen sieht in den Strukturen die kleinsten eigenständigen mathematischen Gegenstände, wie z. B. in der durch die Peano-Arithmetik gegebenen Struktur der natürlichen Zahlen. Ein strukturalistischer und mengentheoretischer Realist wie Blau würde behaupten, dass es eigentlich nur eine Struktur gibt, das durch die mengentheoretischen Axiome anfänglich bestimmte Mengenuniversum.

Gegenstands- und Wahrheitswertrealismus liegen zwar nahe beieinander, es ist aber eine zusätzlicher begrifflicher Schritt sie, wie Colyvan 2012, S. 36, zusammenzufassen: «Mathematical realism or Platonism is the philosophical position that mathematical statements ... are true and that these statements are true by virtue of the existence of mathematical objects».<sup>1</sup>

---

1 Einen philosophischen Standpunkt in Bezug auf die Mathematik als ‚Platonismus‘ zu bezeichnen, hat, soweit man weiß, als erstes P. Bernays 1934 in einem Vortrag getan. Er orientiert sich dabei an der mathematischen Praxis und stellt der Vorstellung entgegen, dass man die mathematischen Objekte, von denen man handelt, zunächst konkret aufzeigen muss, die Vorstellung entgegen, dass man sie schon als gegeben denken darf ohne einzelne je vor die Augen stellen zu können: «Man betrachtet die Gegenstände einer Theorie als die Elemente einer Gesamtheit und folgert daraus: Für jede Eigenschaft, die sich vermittels der Begriffe der Theorie ausdrückt, steht objektiv fest, ob es in der Gesamtheit ein Element gibt, das diese Eigenschaft besitzt oder nicht. Aus dieser Vorstellung läßt sich auch die folgende Alternative herleiten: Entweder alle Elemente einer Menge besitzen eine gegebene Eigenschaft, oder es gibt wenigstens eines, das diese Eigenschaft nicht besitzt.» (Bernays 1978, S. 64f.) Nach dem Beispiel der konstruierenden Geometrie der *Elemente* versus die statische Geometrie Hilberts (Hilbert 1962) fährt er fort: «... die Tendenz [geht in der Mathematik dahin] die Gegenstände als losgelöst von aller Bindung an das denkende Subjekt zu betrachten. Da diese Tendenz vor allem in der Philosophie Platons zur Geltung gekommen ist, sei es mir gestattet, sie als „Platonismus“ zu bezeichnen.» (Bernays 1978, S. 65) Bernays konzipiert den mathematischen Platonismus demnach im Gegensatz zum mathematischen Konstruktivismus und nahe an dem konkreten mathematischen Vorgehen. Der Ausdruck des ‚Existierens der mathematischen Gegenstände‘, den auch Bernays ebenda benutzt, erhält dadurch aber eine praktische Ausformung in der mathematischen Methode, die aktuell selbst viele Antiplatoniker, die Konstruktivistinnen und Intuitionisten zum Teil ausgenommen, nicht aufheben wollen. Entsprechend hielt er bereits in seinem Vortrag fest: «Diese Anwendung [des Platonismus in der Mathematik] ist eine so übliche, daß es keine Übertreibung ist, wenn man sagt, der Platonismus sei heute herrschend in der Mathematik.» (Bernays 1978, S. 67) Der Konstruktivismus bzw. Intuitionismus, so Bernays aber weiter, hat in Bezug auf die mathematische Methode eine beschränkende Funktion, die bewusst eingesetzt von Vorteil sein kann, weil sie keine ‚zu starken‘, dem behandelten mathematischen Gebiet zu ‚äußerlichen‘ Umstände zulässt, indem die vom Platonismus erlaubten Gesamtheiten von mathematischen Gegenständen ausgeschlossen werden. Für jedes mathematische Fachgebiet könnte das Verhältnis von Platonismus und Intuitionismus feinjustiert werden, d.h. konkreter bestimmt werden, welche Gesamtheiten zugelassen werden (eine gewisse Ähnlichkeit zur *reverse mathematics* ist nicht zu leugnen, siehe Abschnitt 5.3): «Durch diese Beschränkung gewinnt eine Theorie an methodischer Klarheit; und in dieser Richtung erweist sich

War nun PLATON ein Gegenstandsrealist, wie oft behauptet?<sup>2</sup> Aus den vorhergehenden Kapiteln sollte ansatzweise hervorgegangen sein, dass er an der Frage für sich ‚Existieren mathematische Dinge?‘ – wie sie aktuell gestellt wird – kein Interesse gehabt hätte.<sup>3</sup> Nur soweit sie relevant für die wahre Beschreibung des Kosmos oder für die Bildung des Menschen war, wurde sie für ihn bedeutsam. (Siehe auch Kapitel 7.)

In ihren frühen Schriften, in denen sie einen naturalistische begründeten Realismus vertritt, skizziert P. Maddy weitere Unterschiede zwischen PLATONS Ansichten und dem modernen mathematischen Platonismus. Sie bezieht sich auf PLATON, allerdings nur auf seinen allgemeinen Ideenrealismus und nicht auf seine Überlegungen zur Mathematik.

Plato originated the most dramatic version of realism about universals in his spectacular theory of Forms: Redness, Equality, Beauty, and so on, are perfect, eternal, unchanging Forms; they exist outside of time and space; we know them by means of the non-sensory intellect; ordinary physical properties, perceived by the usual senses, are but pale an imperfect copies.<sup>4</sup>

Sie weist darauf hin, dass der Ausdruck „Platonismus“ in der Philosophie der Mathematik aktuell so gebraucht wird, dass seine Bedeutung in „mindestens zwei Punkten von PLATON abweicht. So merkt Maddy über die historische Positionierung ihres eigenen Standpunktes und ihre Intention an, nachdem sie ihre Überzeugung dargelegt hat, dass die mathematische ‚Welt‘ nicht getrennt von der physischen sei, sondern: «everything is ultimately physico-mathematical or mathematico-physical»<sup>5</sup>.

Some will note that, strictly speaking, this view is more Aristotelian than Platonistic. They are right, in the sense that Aristotle’s forms depend on physical instantiations, while Plato’s are transcendent. I retain the term ‚Platonism‘ here, not for its allusion to Plato, but because it has become standard in the philosophy of mathematics for any position that includes the objective existence of mathematical entities.<sup>6</sup>

Sie vertritt in der Tat die naturalistische Auffassung, dass man manche mathematischen Objekte aus dem Kontakt mit seiner Umwelt her kennt und von ihnen weiß. Damit ergibt sich auch eine Perspektive, wie das Erkenntnisproblem (2) lösen kann. Wenn man z. B. Mengen als Träger von Zahleigenschaften tatsächlich wahrnehmen kann, dann sind Mengen vermutlich auch kausal aktiv. Maddy 1990, S. 157, gibt ein Beispiel: «... suppose you deposit three quarters in a soft-drink machine and a soda drops out. Which properties of that which you deposited are causally responsible for the emergence of the Pepsi? Well, the weight of the physical mass of metal, its shape and also the number property: three. (The machine counts somehow.)»

Des weiteren wird die Bezeichnung ‚Platonismus‘ für ein Merkmal von Standpunkten in der Philosophie der Mathematik, so Maddy 1990, S. 20, in Analogie zu PLATONS Universalienrealismus verwendet. In diesem Sinne platonisch sind aber wenige der aktuell mit ‚Platonismus‘ bezeichneten Positionen, wie Maddy 1990, S. 21, feststellt: «For example, though the term ‚Platonism‘ suggests a realism about universals, many Platonists regard mathematics as the science of peculiarly mathematical particulars: numbers, functions, sets, etc.» Während man bei mathematischen Begriffen, die sich in irgendeiner Weise in mehreren Sachverhalten in der Welt instantiieren, noch das Allgemeine an ihnen zu erkennen ist, so entsteht leicht der Eindruck beim Anblick der nicht mehr instantiierten mathematischen Objekte, die die überwältigende Mehrheit der mathematischen Objekte ausmachen und die Anzahl der weltlichen

---

der Intuitionismus als fruchtbar.» (Bernays 1978, S. 71)

Natürlicherweise hat man schon vor Bernays Vortrag explizit Bezüge zu PLATON gezogen (siehe Bouveresse 2005), auch wenn man anscheinend noch nicht den entsprechenden Ausdruck für eine Position in der Philosophie der Mathematik benutzte.

2 So z. B. Colyvan 2012, S. 37, Shapiro 2000, S. 202, Bedürftig und Murawski 2010, S. 33.

3 Abgesehen davon, dass er einen anderen Existenzbegriff hatte, siehe Abschnitt 6.4 und Fußnote 70.

4 Maddy 1990, S. 12. Sie verweist dabei auf *Politeia* Buch 5-7, Wedberg 1955, Kapitel 3, *Timaios* 37d-38a für die Bedeutung von ‚zeitlos sein‘ und *Phaidros* 247 für die Metapher des Himmels über allen Himmeln.

5 Maddy 1990, S. 158.

6 Maddy 1990, S. 158.

Dinge bei weitem übertreffen, dass man es hier mit Einzeldingen zu tun hat und eben nicht mit der Menge an sich oder der Funktion als Allgemeines.

Während man nun abgesehen von Maddys Bemerkungen öfters durchaus eine Kontinuität zwischen PLATON und den modernen mathematischen Platonisten zu erkennen meint, so wird das, was man für PLATONS Epistemologie gerade der Mathematik hält, weitgehend abgelehnt.<sup>7</sup>

And the original Platonist, namely Plato himself, conjectured a wholly implausible epistemology involving immortal souls that previously existed in this abstract realm, that came to know mathematical objects directly, but forgot what they knew in the act of being born, and that now in an embodied form are recollecting bits and pieces of what they forgot. We have to do better than this.<sup>8</sup>

Dies ist natürlich eine unergiebigere Herangehensweise, nur die einzelnen Behauptungen anzuführen, die man selbst nicht teilt, um damit die ganze Konzeption abzulehnen. Die Stelle in den platonischen Dialogen, auf der das Zitat aufbauen muss, ist die Diskussion um die Mathematiklehrstunde im *Menon*.<sup>9</sup> Dort widerlegt Sokrates die sophistische Behauptung des Menon, dass man das, was man nicht weiß, auch nicht suchen kann (weil man es ja nicht kennt und damit nicht weiß, was man eigentlich sucht) (*Menon 80e*). Dazu führt er einen konkreten Fall vor (*Menon 82a-86b*), ein Junge ohne geometrische Kenntnisse, über den man schließlich folgendermaßen übereinkommt (*Menon 85cd*): «Ohne daß ihn also jemand lehrt sondern nur ausfragt, wird er wissen, und wird die Erkenntnis nur aus sich selbst hervorgeholt haben.» Im Anschluss an die daraufhin auch geäußerten Überlegungen zum Wiedererinnern und der Unsterblichkeit der Seele, in die dieser konkrete Fall des mathematischen Lernens eingebettet wird, fügt Sokrates an (*Menon 86b*): «Aber alles in dieser Überlegung Gesagte und Vorgebrachte freilich möchte ich nicht behaupten.» Für den expliziten Argumentationsgang wichtig wird die Wiedererinnerungslehre erst im *Phaidon 72eff.*

Trotzdem steht das Erinnern auch im *Menon* in einem inhaltlichen Zusammenhang mit dem Erkennen. Zu versuchen sich zu erinnern ist nämlich auch ein Akt, in dem man etwas sucht, von dem man nicht weiß, was es ist. Das wird dann beobachtbar, wenn einem nicht gleich einfällt, an was man sich zu erinnern sucht. Weiß man zum Beispiel partout nicht, was am vorherigen Tag alles passiert ist und man erlebt hat, so kann man sich verschiedener Hilfsmittel wie Kalender, Freunde u. a. zu bedienen suchen. Aber wenn einem selbst dadurch das Geschehene nicht einfällt, so kann das zu Erinnernde nicht von außen gelehrt werden. Genauso verhält es sich mit einem mathematischen Verständnis. Die allgemeine Kennzeichnung dessen, was man zu wissen oder sich zu erinnern sucht, enthält das Gesuchte nicht und ist zu allgemein. *Das, was ich gestern mittag gemacht habe, oder die Veränderung, die eine Quadratseite bei Verdopplung des Flächeninhalts erfährt*, sind derartige informelle Kennzeichnungen, deren Objekte letztlich nur durch Nachdenken und Erinnern sicher genug in ihrer Wahrheit bestimmt werden können.

Wiedererinnerung ist die Erinnerung an eine Erkenntnis, die man noch nie in diesem Leben hatte. Nun kann man sich natürlich auch an einen Gedanken, den man hatte als man den Titel dieses Buchs las und den man vielleicht auch für wahr hielt, erinnern. Oder man kommt beim Nachdenken über ein Sachthema auf einen Gedanken und erinnert sich dann erst, dass man ihn schon einmal hatte, dies einem inzwischen aber in Vergessenheit geraten war. Der hier wichtige Unterschied in diesen beiden Beispielen ist die intentionale Ausrichtung bei diesen Bewusstseinsakten, nicht der Gedanke, der der gleiche sein könnte. Beim Erinnern ist die Aufmerksamkeit auf etwas gerichtet, das man selbst einmal erlebt oder erfahren hat, während man sich beim Nachdenken auf Fragen fokussiert, in denen man selbst nicht unbedingt vorkommt. Mich an das erinnern, was ich gestern machte, kann nur ich selbst. Aber eine Erkenntnisfrage stellen und beantworten, kann jeder, der über die dazu notwendige Information und Konzentration verfügt.

<sup>7</sup> Siehe Shapiro 2000, S. 52.

<sup>8</sup> Brown 2005, S. 57.

<sup>9</sup> Auf die wiederum in allgemeiner Weise in *Phaidon 72e* referiert wird.

Nun betrachte man beim Erinnern nicht, worauf das Bewusstsein ausgerichtet ist, sondern die in diesen Prozess verwickelten Bestandteile. Es lassen sich zwei Komponenten unterscheiden. Eine ist eine Vorstellung im weiteren Sinn, nämlich das ‚Bild‘ von dem, an was man sich erinnert. Die andere Komponente ist das Wissen darum, dass diese Vorstellung für einen selbst einmal wirklich war. Sich zu erinnern ist demnach ein Akt, in dem man eine Vorstellung hervorbringt zusammen mit dem Wissen um die Verbindung des Inhalts dieser Vorstellung mit einem selbst in der Vergangenheit.<sup>10</sup>

Mit diesem Verständnis von Erinnern können wir eine zeitgemäßere Formulierung der platonischen Wiedererinnerungslehre geben. Sie ist die Behauptung, dass erstens der Versuch eine geometrische Erkenntnis zu gewinnen, eine intentionale Ausrichtung des Bewusstseins auf die eigene unkörperliche Existenz und dem, was man in dieser erlebt und erkannt hat, ist; und zweitens dass ein schließlich erfolgreiches Erkennen geometrischer Sachverhalte in seinem Akt ein (für gewöhnlich) nicht zur bewussten Klarheit erhobenes Wissen über die Beziehung der eigenen körperunabhängigen Seele zu dem Erkannten einschließt.

Auch diese modernisierte These zur Wiedererinnerungslehre ist nicht in erster Linie dazu gedacht, Probleme in einer Epistemologie der Mathematik zu lösen, sondern würde, wenn sie wahr wäre, starke Aussagen zum Wesen des Menschen treffen. Im Unterschied zu Browns Formulierung (siehe oben) aber werden mit ihr Behauptungen über den subjektiv vollzogenen Erkenntnisakt beim Mathematiktreiben aufgestellt, die entschieden werden können, indem man sich über die subjektive Tätigkeit des Mathematisierens aufklärt. Der Mathematiker – und nur er – kann hier direkt an seine Arbeit anknüpfen und diese Aufklärung leisten.

Ohne dem Wahrheitsgehalt der These weiter nachzugehen sei zumindest darauf hingewiesen, dass dem arbeitenden Mathematiker, der ohne philosophische Vorurteile ist, diese These oftmals sympathisch sein wird, weil sie zentrale Punkte seines eigenen Erlebens wiedergibt, die so auch nicht von einem modernen mathematischen Platonismus eingefangen werden: Mathematik sei etwas von den Widrigkeiten des Lebens ganz Unabhängiges, in seiner Klarheit und Reinheit Einmaliges, das einen im Innersten berührt. Nun verfolgen wir aber die Frage nach der Existenz mathematischer Gegenstände weiter.

## 6.2 Reden über die Existenz

Zu den kürzesten Fragen der Philosophie gehört: «Was existiert?»; und bekanntlich ist die Antwort noch kürzer: «Alles!». Dies legt schon nahe, dass es sich bei der Existenz um einen grundlegenden, bereits vordenklich gebrauchten Begriff handelt. Jedenfalls präsupponiert man die Existenz von Dingen, über die man Aussagen macht, oftmals:

- (1) Vor meinem Bürofenster steht ein Baum.

Mein Büro hat ein Fenster und vor dem existiert ein Baum, oder es gibt einen Baum, der vor dem Fenster steht. Ob die Existenz des Baumes vorausgesetzt wird oder (direkt) behauptet, hängt vom weiteren Kontext ab, auf jeden Fall präsupponiere ich die Existenz des Fensters. Wenn es gar kein Bürofenster gibt, ist die Aussage eher falsch, vielleicht aber etwas Drittes wie neutral. Jedenfalls bereitet uns der Umgang mit mesokosmischen Dingen praktisch keine Probleme. Ob es dieses Bürofenster gibt, hält man für grundsätzlich einfach entscheidbar.

Ein anderer Eindruck kann für die Philosophie der Mathematik entstehen. Zwei ‚Intuitionen‘ scheinen bei (ehemaligen) Teilnehmern ontologischer Debatten weit verbreitet<sup>11</sup> und könnten für manchen Mathematiker der Grund gewesen sein, sich nicht weiter mit Grundlagenfragen seines Fachs zu beschäftigen.

<sup>10</sup> Man vergleiche zur ersten Komponente ARISTOTELES *De Memoria*, insb. 450b11-451a3, 451a15-16. Der Frage, inwiefern PLATON dieser Analyse des Erinnerns zugestimmt hätte und überhaupt hätte zustimmen können, gehe ich hier nicht nach, halte die Aussage, dass er dem heute zustimmen würde – bei aller Vagheit dieser Aussage – aber zumindest nicht für abwegig.

<sup>11</sup> Siehe als Indiz dafür Manley 2009, S. 1ff.. Ich kenne keine soziologische Untersuchung dazu.

1.) Es stellt sich der Verdacht ein, die Diskussion drehe sich um Worte und enthalte nur unterschiedliche Beschreibungen bei gleichem Erfahrungshorizont. Auch jemand, der meint, dass nur Atome oder kleinere Elementarteilchen in Wirklichkeit existieren, sieht das Buch hier und nicht die kleinsten Teilchen des Haufens, der diese Buchgestalt angenommen hat. Entsprechend könne ein Intuitionist statt in Gebieten der konstruktiven Mathematik zu arbeiten in den höheren Gebieten der nicht-konstruktivistischen Mengenlehre z. B. messbare Kardinalzahlen untersuchen. Der Streit der philosophischen Standpunkte wäre keiner zwischen sich ausschließenden Methoden, sondern ein forschungspolitischer. Man ist in der Praxis misstrauisch gegenüber Anti-Realisten, die sich um eine Umdeutung herkömmlicher Redeweisen bemühen, da es fraglich ist, was für einen Erkenntnisgewinn z. B. die Einsicht bringen sollte, dass keine Zahlen existieren. Angenommen der Anti-Realist überzeugt einen praktizierenden Zahlentheoretiker von dieser Behauptung, dann würde er ihm vielleicht die Arbeit vermießen, aber nichts methodisch oder inhaltlich verändern.<sup>12</sup>

2.) Zudem scheint die Frage nach der Existenz relativ leicht entscheidbar zu sein, wenn man etwas Vertrauen in die alltägliche Sprache oder die Praxis der Mathematik aufbringt.<sup>13</sup> Die Existenz von abstrakten Gegenständen überhaupt scheint trivial beweisbar zu sein: Meine linke Hand hat eine endliche Zahl von Fingern, also gibt es mindestens eine Zahl.

Die moderne Debatte erscheint dagegen tendenziell theoriebeladen und dadurch realitätsfern. Die berühmteste moderne Bedingung für die Existenz von Dingen ist Quines *dictum*: «To be is to be the value of a variable.»<sup>14</sup> Genauer: Man ist ontologisch verpflichtet, das für existierend zu nehmen, über was man in einer Theorie, von der man überzeugt ist, quantifizieren muss.<sup>15</sup> Zweifaches erscheint bei dieser Aussage problematisch, wenn man mit ihr erkennen möchte, was existiert (anders in 6.3.3). Einmal wird über ‚Ort‘ und Weise der Existenz nichts genauer bestimmt, wenn man sich z. B. über dieses Kriterium letztlich davon überzeugen würde, dass die natürlichen Zahlen existieren. Denn die Argumentation geht so: Wenn man von  $X$  überzeugt ist, dann muss man billigerweise auch von der Existenz von  $x$  überzeugt sein, auch wenn  $x$  vielleicht außer Raum und Zeit oder akausal existieren müsste. Dies ist aber in strittigen Fällen auch deswegen unplausibel, weil zweitens das im weitesten Sinne empirische Moment, dass man letztlich irgendwie im Kontakt mit einem Ding stehen muss, um über seine Existenz entscheiden zu können, fehlt. Rein abstrakt kann die Frage, ob dies oder das existiert, nicht gelöst werden, sondern nur durch Beobachtung (im weitesten Sinne).

Aus diesem Quineschen Ansatz entspringt das in den letzten Jahrzehnten meist diskutierte Argument für den (mathematischen) Realismus, das sogenannte Unverzichtbarkeitsargument (indispensability argument). Eine Vorform davon ist der Schluss:<sup>16</sup>

- 1) Genau das, was für die besten naturwissenschaftlichen Theorien unverzichtbar ist, existiert.
  - 2) Manche mathematischen Dinge sind unverzichtbar für die besten naturwissenschaftlichen Theorien.
- Also:
- 3) Manche mathematische Dinge existieren.

<sup>12</sup> Bei Philosophen wird dieser Gedanke zusammengeworfen mit *Okham's razor* oder dem eleatischen Grundsatz zu einem Argument für den Anti-Realisten: Wenn durch die Annahme der Nicht-Existenz der mathematischen Gegenstände kein (theoretischer) ‚Mangel‘ entsteht, existieren sie nicht.

<sup>13</sup> Wang 1977, S. 311, scheint der Meinung zu sein, dass die Beschäftigung mit Mathematik ausreicht, um über die Existenz mathematischer Objekte entscheiden zu können: «It is only through our knowledge obtained in studying mathematics (and in particular set theory) that the view of sets as existing independently of our knowledge is reached.»

<sup>14</sup> Siehe Quine 1980, S. 15.

<sup>15</sup> Künne 2007, S. 102: «Wir legen uns genau dann auf die Annahme fest, daß es Gegenstände der Art  $X$  gibt, wenn wir solche Gegenstände bei der Formulierung unserer Überzeugungen in der Sprache der Quantorenlogik zum Wertbereich unserer Variablen rechnen müssen.»

<sup>16</sup> Vgl. z. B. Colyvan 2001, S. 6ff., für einen knappen historischen Überblick.



Eine ursprünglichere und sehr plausible Form dieses Arguments ist der *ad-hominem* Einwand, man solle doch in einer wissenschaftlichen Theorie nicht über Dinge quantifizieren, von denen man denkt, dass sie gar nicht existieren. Das Problematische der in die Prämissen (1) und (2) eingehenden naturalistischen und holistischen Voraussetzungen wurde und wird in der Fachwelt intensiv diskutiert. Wir belassen es hier bei einer Abgrenzung. Da Existenzzuschreibungen letztlich in der Autonomie des Subjekts stattfinden müssen, ist das Unverzichtbarkeitsargument letztlich nur für Naturwissenschaftler und auch bei diesen nur für die von ihnen als wahr *erkannten* Theorien relevant. Für jemanden ohne jede naturwissenschaftliche und angelologische Bildung ist damit letztlich kein Unterschied in der Existenzzuschreibung der Wahrsagerin bezüglich Engeln und der des gesellschaftlich anerkannten Fachmanns bezüglich Atomen. Zum zweiten ist der implizit enthaltene Existenzbegriff zu weit von der Lebenswelt abstrahiert. Für eine eingehende Untersuchung muss von da ausgegangen werden, wo man im allgemeinen Existenzzuschreibungen macht und sich der Existenzbegriff gründet, auch wenn sich diese Existenzzuschreibungen später als relativ oder sogar illusorisch herausstellen sollten.

Der Weg, der im folgenden eingeschlagen wird, ist einer zur Suche nach *epistemischen Existenzkriterien*, also von notwendigen und/oder hinreichenden Bedingungen, um etwas als existent zu erkennen, und bestenfalls von einer Gruppe notwendiger Bedingungen, die zusammen hinreichend sind und damit das *einzig*e Kriterium bilden würden. Diese herauszubilden, nimmt dabei notwendigerweise eine dialektische Gestalt an, insofern eine begriffliche Bestimmung stets abgelöst werden muss durch eine Überprüfung der Kriterien an konkreten Existenzannahmen. Was damit genauer gemeint ist, wird sich in der Durchführung zeigen.

## 6.3 Existenzkriterien

### 6.3.1 Einleitende Bemerkungen und Überblick

Der Existenzbegriff in der mathematik-philosophischen Diskussion wird i.a. weitgehend unexpliziert benutzt und die Existenz mathematischer Objekte merkwürdig abstrakt diskutiert, als ob man mittelbar auf ihre Existenz schließen könnte und müsste, wenn man ihre Existenz verteidigen möchte, und wenn man ihr Vorhandensein negiert, dies wiederum argumentativ elaboriert tun müsste. So als ob mathematische Dinge wie Sterne auf einer anderen Seite des Universum wären oder wie elementarste Teilchen, über die der Mensch nur sehr vermittelt etwas erkennen kann. Negative Existenzurteile werden allerdings dadurch gerechtfertigt, dass man aufzeigt, dass die diskutierten Dinge theoretisch überflüssig sind. Man setzt dabei aber auch voraus, dass die Existenz der diskutierten Dinge den anderen Diskussionsteilnehmern nicht unmittelbar präsent ist. Ist dies nämlich der Fall, wie (wahrscheinlich) bei der These, es gäbe nur Atome aber keine mesokosmischen Dinge wie z. B. Tische, so liegt der These ein anderer Existenzbegriff zu Grunde. Denn dass der Tisch, den ich hier und jetzt sehe, da ist, ist mir so unzweifelbar, dass nur verhandelbar ist, *was* genau das ist, was da ist, und ob es vielleicht Dinge gibt, die in einem ‚stärkeren‘ Maße existieren als der Tisch, jedoch nicht die Existenz des Dinges dort.

Der empirisch-phänomenologisch orientierte Grundgedanke der folgenden Abschnitte ist, dass man etwas streng genommen als existent nur dann anerkennt (bzw. anerkennen sollte), wenn man sich selbst von seiner Existenz durch direkte ‚Beobachtung‘ überzeugen konnte. Die Existenz eines Dings ist demnach nichts, auf das man deduktiv schließen kann: Existenzzuschreibung ist letztlich keine Folge der Theorie sondern einer weit gefassten Empirie.<sup>17</sup>

<sup>17</sup> Im (auch wissenschaftlichen) Alltag wird man aus pragmatischen Gründen diesen engen Rahmen von Existenzzuschreibungen erweitern müssen, man wird sich letztlich aber immer auf den engen Existenzbegriff berufen können. Die Empirie wird hier *weit gefasst*, da keine Einschränkung auf die sinnliche oder materielle Welt geschehen soll, die erst Ergebnis unserer Untersuchung sein kann und keine Vorannahme. Wenn also mathematische Dinge existieren, müssen sie beobachtbar sein. Der Ausdruck „beobachten“ wird dabei leicht metaphorisch, wenn er über äußere und gewöhnliche innere Wahrnehmung hinaus

Eine ähnliche Schwierigkeit wie zuvor ergibt sich allerdings auch für den Realisten, der eine Gruppe ‚Ungläubiger‘ überzeugen will, die den Tisch nicht sehen. Er kann ihnen nur zwei Hilfestellungen anbieten: Zum einen kann er ihnen eine Methode an die Hand geben, mittels der sie den Tisch beobachten können. Zum anderen kann er sie dabei unterstützen, sich der bereits vollzogenen Beobachtung in bisher unbewussten Teilen bewusst zu werden. In unserem trivialen Beispiel könnte er schildern, dass man die Augen aufmachen, ggf. eine Brille aufsetzen und in eine bestimmte Richtung blicken könnte. Oder er kann sie darauf hinweisen, dass das von ihnen vor einiger Zeit betrachtete Buch doch auf einem Tisch lag, und ihnen damit helfen, sich einer Wahrnehmung des Tisches nachträglich bewusst zu werden. Dabei scheint diese zeitliche Differenz aber nicht von Bedeutung zu sein, auch wenn die Bewusstwerdung für gewöhnlich während des Wahrnehmens geschieht.

Bezüglich mathematischen Objekten ist es nun der Fall, dass nicht nur der philosophische Diskurs, sondern auch die Gemeinde der Mathematiker selbst nicht einheitlicher Meinung über deren Existenz ist. Somit scheint die erste Möglichkeit einem Realisten nicht zur Verfügung zu stehen, da es nicht ausreichen würde, einen Antirealisten dazu anzuhalten, selbst Mathematik zu betreiben, und es keine anderen Methoden zur ‚Beobachtung‘ der mathematischen Objekte zu geben scheint. Es bliebe nun die zweite Möglichkeit eines Diskussionsbeitrags übrig, wenn wir einen Realisten zur Hand hätten, der sich durch ‚Beobachtung‘ von der Existenz mathematischer Objekte überzeugt hätte und anderen Hilfestellungen bieten könnte. Da wir keinen zur Hand haben, sollen im folgenden theoretische Vorarbeiten geleistet werden, die zu einer Bewusstwerdung einer Existenzbeobachtung mathematischer Objekte helfen *könnten*, und von denen sich im Nachhinein bestenfalls herausstellt, dass sie dies auch tatsächlich leisten.

Eine gute Hilfe zur Bewusstwerdung von Existenzbeobachtungen könnten Kriterien sein, die, wenn sie erfüllt werden, die Existenz der Dinge sichern. Denn mit ihrer Explizierung scheint eine theoretische Vorarbeit im wesentlichen abgeschlossen zu sein, und es praktisch darauf anzukommen, ob die Kriterien in diesem oder jenem Mal erfüllt wurden. Somit wird es in Abschnitt 6.3.2 zunächst darum gehen, die Möglichkeit von Existenzkriterien plausibler zu machen, um in den folgenden Abschnitten zu versuchen, eines zu bestimmen. In Abschnitt 6.3.3 werden die Eigenschaften einer besten Theorie, wie sie Quine angibt, geprüft, in 6.3.4 das Kriterium Azzounis, in Abschnitt 6.3.5 das Blaus. Dann wird in Abschnitt 6.3.6 das Problem der Kausalität in der Erkenntnistheorie der Mathematik kurz dargestellt und in Bezug auf Existenzerkennntnis diskutiert, um es in Abschnitt 6.3.7 auf etwas Grundsätzlicheres zu reduzieren. In Abschnitt 6.4 wird schließlich der Stand der Untersuchung zusammengefasst.

Die angestrebten Kriterien sollen Kriterien *für* die Existenz von Dingen sein – aber *wovon* sollen sie Kriterien sein, d.h. *über was* müssen Aussagen gelten, damit die Kriterien erfüllt sind? Zunächst sollen es *epistemische* Kriterien sein, also nicht unbedingt Kriterien, die etwas genau dann erfüllt, wenn es existiert, sondern die unsere ‚Wahrnehmung‘ der Dinge genau dann erfüllt, wenn diese existieren. Die Formulierung des letzten Satzes weist bereits auf ein Problem hin, PLATONS Bart<sup>18</sup> in erkenntnistheoretischer Variante: Was für eine ‚Wahrnehmung‘ ist es, die die Kriterien erfüllt, wenn nicht bereits die ‚Wahrnehmung‘ *des existierenden Dings*? Von was ist das eine ‚Wahrnehmung‘, die kein Existenzkriterium erfüllt? Man scheint genötigt zu sein, in der Theorie eine mehr oder weniger unbewusste Vorstufe anzunehmen, die die Eindrücke der ‚Wahrnehmung‘ ohne die Existenzzuschreibungen enthält. Damit erhalten aber auch die Formulierungen im folgenden zuweilen einen konstruktivistischen Schein, so als ob man aus den Elementen dieser Vorstufe die Existenz von Dingen entwickelt – relativ willkürlich oder zumindest ohne Kontakt zu den existierenden Dingen. Das ist nicht intendiert.

Dass im Vorherigen stets von Kriterien und nicht von einem einzelnen Kriterium die Rede war, sollte noch keine Vorentscheidung darüber treffen, ob es tatsächlich ein einziges (und damit notwendig und

---

verwendet wird. Aber hier und im folgenden wird die implizite Existenzpräsupponierung für die technische Bedeutung von „beobachten“ eliminiert.

18 Vgl. Quine 1980, S.2,5.

hinreichendes) Kriterium gibt, oder eben nur mehrere (damit jeweils nur hinreichende).

### 6.3.2 Die Kluft zwischen Innenwelt und Gegenstand

Um es etwas plausibler zu machen, dass mit den epistemischen Existenzkriterien ein Wissen um etwas angestrebt wird, das nicht schon anderweitig verfügbar ist, wird eine Äußerung Freges interpretiert und im entscheidenden Punkt gegen andere Interpretationen abgegrenzt.

Nachdem Frege in seinem Artikel über den Gedanken<sup>19</sup> dafür argumentiert hat, dass ein Gedanke weder der Innen- noch der gewöhnlichen Außenwelt angehört, möchte er zum Ende hin die Bedenken gegen eine derartige Anschauung zerstreuen, die sich auf die Meinung gründen, dass Dinge nur durch Sinneswahrnehmung gegeben werden können. Er gibt zwar zu, dass Sinneseindrücke notwendig sind, um Dinge zu sehen, argumentiert aber dafür, dass sie nicht hinreichend sind, sondern durch etwas «Nichtsinnliches»<sup>20</sup> ergänzt werden müssen, das erst ausschlaggebend sei dafür, dass man Dinge wahrnimmt.<sup>21</sup> Die Sinneseindrücke seien also gar nicht das entscheidende Element eines Blicks in die Außenwelt, und es sei vorstellbar, dass dieses «Nichtsinnliche» auch ohne Sinneseindrücke eine Brücke zu andersartigen Dingen, insbesondere den Gedanken, schlägt.

Frege führt an, dass die Sinneseindrücke, die Teil der Innenwelt<sup>22</sup> eines jeden Menschen sind, nicht ausreichen, um *Dinge wahrzunehmen*, weil ihnen keine Referenz auf die Dinge beiwohnt, die notwendig auf diese verweisen und damit die Existenz dieser Dinge sichern würde. Dass die Dinge nicht direkt mit den Sinneseindrücken mitgeliefert werden, ist daran zu erkennen, dass die Sinneseindrücke unterschiedlicher Menschen *unterschiedlich* sind, sie aber mittels unterschiedlicher Eindrücke trotzdem *dasselbe* Ding wahrnehmen können.<sup>23</sup> Frege meint vermutlich, dass zwei Menschen mit zwei Sinneseindrücken, die ja als Vorstellungen in der jeweiligen Innenwelt privat und als Bewusstseinsinhalte abhängig vom jeweiligen Träger sind, in Bezug auf ihre jeweiligen Eindrücke nur dann von demselben sprechen könnten, wenn sie dieselben Eindrücke haben würden. Man könnte auch etwas Kantischer argumentieren, dass ein Sinneseindruck selbst nicht noch das enthält, was den vom Sinneseindruck unabhängigen Gegenstand, der auch durch andere Sinneseindrücke erscheinen kann, konstituiert, weil dieses u. a. ein Mehr an begrifflicher Bewertung der verschiedenen Teile eines Sinneseindrucks wäre, die dieser gerade noch nicht mitbringt.

Das Wundersame der gewöhnlichen Außenwelt ist nicht nur, dass die verschiedenen Menschen mit unterschiedlichen Sinneseindrücken dieselben Dinge sehen, sondern auch, dass sie sogar die Dinge an denselben Orten sehen und sich damit in derselben Außenwelt bewegen.<sup>24</sup>

Meine These ist, dass die im folgenden angeführten Vorschläge, was das «Nichtsinnliche» für Frege ist, ungenügend sind, weil sie dem nicht gerecht werden, dass es das «Nichtsinnliche» ist, über das man irgendwie in ‚Kontakt‘ mit den Dingen stehen muss, um zu gewährleisten, dass man tatsächlich existierende Dinge wahrnimmt. Frege will ja darauf hinaus, dass das Haben von Sinneseindrücken *keine* Erklärung dafür bietet, wie wir Dinge wahrnehmen können. Denn sein Ziel ist es zu zeigen, dass die theoretischen Annahmen eines epistemologisch harten Realisten der äußeren Welt bereits so stark sind,

19 Das ist Frege 1918.

20 Frege 1918, S. 110(75).

21 Frege 1918, S. 110(75): «Das Haben von Gesichteindrücken ist zwar nötig zum Sehen der Dinge, aber nicht hinreichend. Was noch hinzukommen muß, ist nichts Sinnliches»

22 Die Innenwelt eines Menschen ist «eine Welt der Sinneseindrücke, der Schöpfungen seiner Einbildungskraft, der Empfindungen, der Gefühle und Stimmungen, eine Welt der Neigungen, Wünsche und Entschlüsse.» Frege 1918, S. 98(66). Frege fasst diese alle bis auf die Entschlüsse unter dem Ausdruck „Vorstellung“ zusammen.

23 Frege 1918, S. 109(75): «Denselben [Sinneseindruck] haben zwei Menschen jedenfalls nicht, wenn sie auch ähnliche Sinneseindrücke haben mögen. Diese allein eröffnen uns nicht die Außenwelt.»

24 Siehe Frege 1918, S. 109f.(75).

dass ein Gedankenrealismus auf den ersten Blick keine grundsätzlich schwierigere epistemologische Probleme aufwirft.<sup>25</sup> Es ist also nach Frege gerade nicht der Fall, dass «die kausale Rolle des Gegenstandes nicht geheimnisvoll ist»<sup>26</sup> im Unterschied zur Rolle des Gedankens, wenn er gefasst wird.

Dass Frege das «Nichtsinnliche» so verstand, wird deutlich aus seiner starken Trennung zwischen Innen- und Außenwelt. Entweder ist etwas Bewusstseinsinhalt und Teil der Innenwelt oder ein unabhängiger Gegenstand in der Außenwelt (oder wo ganz anders). Und ist man in der Innenwelt, heißt es «Kunde zu erlangen»<sup>27</sup> von der Außenwelt; diese muss «aufgeschlossen» werden, sonst «bliebe jeder in seiner Innenwelt eingeschlossen».<sup>28</sup> Dieser Hiatus zwischen den Welten wird durch das «Nichtsinnliche» überbrückt, es stellt den ‚Kontakt‘ zu den Dingen in der Außenwelt her.

Frege äußerte sich nicht weiter darüber, und so hat man das «Nichtsinnliche», das hinzukommen muss, interpretiert als etwas aus der Gedankenwelt oder als eine rationale Fähigkeit und teilweise unterschieden, zwischen dem «Nichtsinnlichen», das die Sinneseindrücke ergänzt, und dem, was uns die Gedanken fassen lässt: Zu den Sinneseindrücken muss noch, nach Künne, mindestens der «Gedankenbaustein» Begriff hinzutreten, damit ein Gegenstand gesehen wird, und ein Gedanke, wenn wahrgenommen wird, dass so-und-so, d.h. die «Verstandestätigkeit *im Zusammenspiel mit Sinneseindrücken*» erschließt «die Welt der wahrnehmbaren Dinge»<sup>29</sup> bzw. die «*reine Verstandestätigkeit*» die Welt der Gedanken.<sup>30</sup> Dummett<sup>31</sup> legt sich nur darauf fest, dass die Ergänzungen der Sinneseindrücke aus der Gedankenwelt stammen müssen, und tippt darauf, dass das sinnliche Wahrnehmen ein Urteilen, also die Anerkennung der Wahrheit eines Gedankens, enthält. Rouse<sup>32</sup> bezieht sich auf die von Frege zuweilen erwähnte Sprachgebundenheit des Denkens und interpretiert das «Nichtsinnliche» als eine einfache rationale Fähigkeit, die linguistische Fähigkeiten mit einbegreift und mittels der sprachlichen Zeichen die Gedanken fassen lässt.<sup>33</sup> Malzkorn<sup>34</sup> reduziert die Relation zwischen der Person und dem Gedanken auf die zwei Relationen zwischen einer Person & seinen Vorstellungen und einer Vorstellung & einem Gedanken, der «Inhalt» der Vorstellung ist, weil sie ihm beide unproblematischer erscheinen.<sup>35</sup>

Diese Vorschläge dafür, was Frege wohl unter dem «Nichtsinnlichen» verstanden haben mag, sind vor allem deswegend ungenügend, weil sie die überbrückende Funktion nicht weiter klären.<sup>36</sup> Zwar muss zu den Sinneseindrücken noch Konzeptionelles hinzukommen, damit ein Wahrnehmen stattfinden kann, aber damit ist weder weiter geklärt, wie damit die Kluft zwischen Innen- und Außenwelt überwunden wird, noch ist es damit überhaupt notwendig, dass es eine Außenwelt gibt. Es scheint sogar grundsätzlich nötig, innerhalb einer 3-Welten-Theorie neue Bestandteile oder Funktionen neben den Dingen der drei Welten einzuführen, um den Übergang zwischen den Welten theoretisch beschreiben zu können. Denn dass es die Dinge der einen Welt sein sollen, die den Übergang zwischen den beiden anderen

25 Ein epistemologisch harter Realist ist gerade einer, der nicht nur behauptet, dass die jeweiligen Dinge existieren, sondern auch, dass man ihre Existenz erkennen kann.

26 Künne 2010, S. 530.

27 Frege 1918, S. 109(75).

28 Frege 1918, S. 110(75).

29 Künne 2010, S. 528.

30 Künne 2010, S. 528.

31 Siehe Dummett 1991, S. 273.

32 Siehe Rouse 2006.

33 Siehe vor allem Rouse 2006, S. 12f..

34 Siehe Malzkorn 2001, S. 48f..

35 Allerdings behauptet er nicht, damit das zu ergänzende «Nichtsinnliche» bestimmt zu haben, noch die erkenntnistheoretischen Probleme hinreichend beantwortet zu haben; s. Malzkorn 2001, S. 49a23. Für weitere Interpretationsmöglichkeiten, die aber nichts wesentlich anderes enthalten als die angeführten, und ihre Schwierigkeiten vgl. Malzkorn 2001, 38ff..

36 Daneben haben sie sich individueller Schwierigkeiten zu erwehren. So kommt die Auffassung, Frege hätte unter dem «Nichtsinnlichen» beidemale den Gedanken gemeint, in große Not zu erklären, was es wohl heißen sollte, dass man nur mittels eines Gedanken einen Gedanken fasst; vgl. Künne 2010, S. 528.

Welten gewährleisten, ist für sich schon widersprüchlich, da die Dinge jeder Welt gerade getrennt von den Dingen der anderen beiden sind, und gerade nicht an den beiden anderen so stark teilhätten, dass sie sogar zwischen ihnen vermitteln könnten. So ein neues Element wären z. B., wie vorgeschlagen, bestimmte (rationale) Fähigkeiten, ohne dass allerdings in den Vorschlägen ihre vermittelnde Funktion explizit gemacht oder sogar etwas weiter bestimmt worden wäre.

Man beachte, dass auch evolutionistische Theorien die Richtigkeit unserer Existenzzuschreibungen nicht erklären. Die Annahme eines der Sache äußerlichen Mechanismus<sup>37</sup> jeder Art (ob evolutionär entstandene Gehirnstrukturen, Gott oder anderes), der einen vielleicht auch nur zu Beginn der ontogenetischen Gehirnentwicklung oder nur beim Erblicken der ersten äußeren Gegenstände veranlasst, die-und-die Dinge als existierend anzunehmen, mündet streng genommen in idealistische oder parallelistische Theorien bezüglich der dann nicht mehr ganz so äußerlichen Dinge. Denn wenn man von der Existenz von Dingen letztlich nicht mehr deswegen überzeugt ist, *weil sie existieren*, sondern weil man von etwas anderem dazu veranlasst wurde, fehlt einem eine grundsätzliche Korrekturmöglichkeit. Also könnten, wenn überhaupt Dinge existieren, diese auch ganz andere und anders sein als die, die man als existierend annimmt.

Aber man wird mit derartigen Modellen die getätigten Existenzzuschreibungen auch nicht rechtfertigen wollen, sondern man setzt sie voraus. So könnte man z. B. behaupten: Die Evolution der Menschheit hat dazu geführt, dass die gesunde, menschliche, befruchtete Eizelle derartig disponiert ist, dass der Embryo in Wechselbeziehung mit seiner Umwelt sich physisch so entwickelt, dass er allein deswegen die äußeren Dinge als äußere erkennt. Diese Idee einer (biologischen) Evolution setzt aber unsere existierende Welt bereits als existent voraus und kann so nur eine sekundäre Erklärung bieten, wieso gerade die von einem wahrgenommenen Dinge tatsächlich existieren.

Freges ‚Nichtsinnliches‘ wurde also mit den angeführten Vorschlägen nicht erreicht, und es steht die Frage im Raum, wie es überhaupt behandelt werden könnte. Ein epistemisches Existenzkriterium scheint somit zumindest ein Kriterium eines Vorgangs zu sein, der weitgehend unbekannt ist, und scheint damit auch der Möglichkeit nach etwas zur Bestimmung dieses ‚Nichtsinnlichen‘ beitragen zu können.

Epistemische Existenzkriterien sind Bedingungen für das Fassen, Wahrnehmen, bewusste Haben oder ein sonstiges Beobachten eines Dinges. Sie können Eigenschaften von Vorstellungen (als Teile der Innenwelt) sein, oder (sonstige) Bestimmungen der Relation zwischen dem Beobachter und dem vielleicht unintendierten Objekt der Beobachtung. Ihre Funktion liegt im Übergang von den reinen und sonst eher unzugänglichen Vorstellungen wie Sinneseindrücken zur ‚Wahrnehmung‘ eines Dings darin, diesen individuellen Prozess zu erleichtern und vielleicht erst zu ermöglichen. So wie die Blindgeborenen, die erst später in ihrem Leben erfolgreich operiert wurden und sich in einem sehr anstrengenden Prozess aus dem Chaos der subjektiv gewahrten Sinneseindrücke bis zum Sehen der Gegenstände hinarbeiten müssen, natürlichen Richtlinien folgen.

### 6.3.3 Beste Theorie

Während mit dem Unverzichtbarkeitsargument nach Quine diskutiert wird, inwiefern uns Theorien auf die Existenz von Dingen festlegen, betrachten wir hier, von *welchen* Theorien wir uns ontologisch verpflichten lassen. Denn die Kriterien, anhand derer die ‚beste Theorie‘ zu finden ist, umgrenzen den Spielraum, in dem die Dinge ‚entstehen‘. Für unsere Untersuchung ist dabei wichtig, dass Quine folgerichtig keinen wesentlichen Unterschied zwischen dem Akzeptieren einer grundsätzlichen Ontologie und dem Akzeptieren einer wissenschaftlichen Theorie macht.<sup>38</sup>

37 Z. B. Malzkorn 2001, S. 49, meint, dass man sich so das zu ergänzende ‚Nichtsinnliche‘ vorstellen darf.

38 Siehe Quine 1980, S. 16.

Quine gibt mehrere Eigenschaften an, die von der Molekulartheorie erfüllt werden: Einfachheit, Beschränkung auf bereits verwendete Prinzipien, Reichweite, wissenschaftliche Fruchtbarkeit und der Umstand, dass die Überprüfung ihrer testbaren Konsequenzen keinen Grund zum Zweifel ergab.<sup>39</sup>

Notwendig und maßgeblich scheint für Quine nur die Einfachheit zu sein,<sup>40</sup> und unterschiedliche Theorien könnten sich in anderen unterschiedlichen Tugenden gegenseitig übertreffen. Aber auch für sich genommen ist die Einfachheit nicht eindeutig und entscheidet nicht zwischen allen, in verschiedenen Hinsichten einfachen Theorien. Z. B. ist eine Arithmetik ohne irrationale Zahlen einfacher als eine mit irrationalen Zahlen, weil sie weniger Entitäten annehmen muss. Andererseits vereinfachen die irrationalen Zahlen die arithmetischen Gesetze.<sup>41</sup>

Das Argument gegen ein Kriterium aus den fünf Tugenden einer guten Theorie ist jedoch, dass sie keinen irgendwie gearteten Zugang zu den in der Theorie verwendeten Entitäten garantiert und damit über die Existenz dieser Dinge nichts Verlässliches auszusagen weiß.<sup>42</sup> Denn auch der Erfolg einer Theorie in ihrer Anwendung und Vorhersage ist eher ein Zeichen für die Wahrheit ihrer Folgerungen und weniger für die Existenz der von ihr postulierten Gegenstände, weil deduktive Ableitungen zwar die Wahrheit, aber nicht die Falschheit erhalten. Aus falschen Sätzen kann Wahres gefolgert werden. Damit genügt das Kriterium nicht unserer Anforderung, dass es in einem weiten Sinn empirisch zu sein hat, auch wenn es praktisch zur Bewertung konkurrierender Theorien in den Naturwissenschaften eingesetzt Anwendung finden mag.

Quines Kriterium führt zudem zu keiner Entscheidung in jedem Einzelfall, z. B. ob ein bestimmter Stuhl tatsächlich existiert, sondern hilft nur beim Zulassen von Objektarten. Wenn man aber empirisch vorgeht, muss der Einzelfall vor der Rechtfertigung allgemeiner Behauptungen erkannt und in der Rechtfertigung verwendet werden.

#### 6.3.4 Instrumentelle Beobachtung

Eine Vorgehensweise, um bei der Verifizierung von Existenzbehauptungen tatsächlich empirisch vorzugehen, ist, das alltägliche Beobachten daraufhin zu analysieren, was einem an ihm Anlass gibt für die gewöhnlichen Existenzbehauptungen des normalen Lebens. Weil dieses insgesamt ein *epistemisches* Kriterium für Existenzzuschreibungen abgeben soll, formuliert man es nicht als Eigenschaften von (existierenden) Dingen. Wenn es Eigenschaften einer Beobachtung gibt, die, wenn sie auf eine Beobachtung zutreffen, die Existenz des beobachteten Objekts sichern, bilden diese zusammen ein epistemisches Kriterium für die Existenz. Erfüllt sie eine Beobachtung, so ist sie die Beobachtung eines wirklichen Gegenstands und die Eigenschaften mittelbar auf den Gegenstand bezogen. Manchen Eigenschaften von Beobachtungen könnten dann sogar Eigenschaften des existierenden Gegenstands entsprechen. Azzouni 2004b, S. 383, gibt vier Eigenschaften an: Robustheit («robustness»), Verfeinerbarkeit («refinement»), Verfolgbarkeit («monitoring»), Erklärbarkeit («grounding»).

- (1) Die Beobachtungsergebnisse können den Erwartungen widersprechen, weil sie einen eigenen inneren Halt haben und für sich fest sind. Sie sind in diesem Sinne unabhängig von dem, was wir von ihnen glauben, meinen und prognostizieren. (Robustheit/Unabhängigkeit)

39 «One is simplicity: empirical laws concerning seemingly dissimilar phenomena are integrated into a compact and unitary theory. Another is familiarity of principle: the already familiar laws of motion are made to serve where independent laws would otherwise have been needed. A third is scope the resulting unitary theory implies a wider array of testable consequences than any likely accumulation of separate laws would have implied. A fourth is fecundity: successful further extensions of theory are expedited. The fifth goes without saying: such testable consequences of the theory as have been tested have turned out well, aside from such sparse exceptions as may in good conscience be chalked up to unexplained interferences.» Quine 1976a, S. 247.

40 Siehe Quine 1980, S. 16f..

41 Siehe Quine 1980, S. 18.

42 Siehe Azzouni 2004b, S. 378,380.

- (2) Die Beobachtung kann verfeinert und kultiviert werden auf Wegen, die unabhängig von unseren Hintergrundtheorien und Kulturen sind, so wie man die eigenen Sinneswerkzeuge pragmatisch benutzt, einen Gegenstand fokussiert oder um ihn herum geht. (Verfeinerbarkeit)
- (3) Die Beobachtung kann trotz Veränderungen in der Beobachtung auf etwas Beobachtetes fokussiert bleiben. Mit der Beobachtung kann ein Objekt über einen Zeitraum in seinen Handlungen oder verschiedenen Eigenschaften verfolgt werden. (Verfolgbarkeit)
- (4) Die Beobachtung gibt Aufschluss über Eigenschaften des Beobachteten, mit denen man erklären kann, wie man es beobachten konnte, d.h. für Azzouni, wie man mit ihm in kausalen Kontakt hat treten können. (Erklärbarkeit)

Die ersten drei Eigenschaften formulieren aus, was es heißen kann, sensitiv den Dingen gegenüber zu sein, die vierte ist eher die Reflexion darauf, ob es wirklich wahrscheinlich ist, dass man dieses oder jenes Ding hat beobachtet können. (1) verbürgt die (grundsätzliche) Unabhängigkeit des beobachteten Objekts vom Beobachter, (2) gewährleistet dann, dass man tatsächlich das Objekt in seiner Beobachtung erfährt und z. B. keinem dauerhaften Sehfehler aufsitzt, und (3) bringt (1) und (2) zur Anwendung.

(1)-(4) werden von Azzouni im Kontext der Diskussion physikalischer Entitäten und ihrer Realität aufgestellt.<sup>43</sup> Dabei ist letztlich an ein instrumentelles Beobachten mittels komplizierter Apparaturen gedacht, bei dem es wichtig ist, darauf zu reflektieren, ob man das, was man zu beobachten meint, auch wirklich mit dieser Geräteanordnung beobachten kann. (4) ist aber für die gewöhnliche Beobachtung nicht relevant<sup>44</sup> und insofern nicht abstrahiert von einem alltäglichen Prozess der Existenzzuschreibung. Aber eine schwächere Variante von (4) ist plausibel und scheint (1)-(3) erst zu einem hinreichenden Kriterium zu machen:

- (4') Die Beobachtungsergebnisse sind nicht der Art, dass sie dem beobachteten Objekt Eigenschaften zusprechen, die starke Zweifel an der Möglichkeit ihrer Beobachtung wecken.

(4') trifft offensichtlich auf alltägliche Beobachtungen zu: Ich trinke aus einem Glas Rotwein und schmecke im Gaumen die Süße des Weines. Dass der Wein anscheinend süß ist, weckt mir keine Zweifel, denn ich bin es gewohnt, die Dinge, die ich schlucke, zu schmecken. Erst in stark vermittelten Beobachtungen durch technische Gerätschaften ist ein grundsätzliches Misstrauen vorhanden, das (4') faktisch zu (4) verstärkt. (4') kann allerdings auch als pragmatisches Postulat gerechtfertigt werden, das eine nötige Ergänzung der Eigenschaften (1)-(3) darstellt. Denn die Eigenschaften (1)-(3) treffen konkret immer nur in einem bestimmten Grad zu, und es ist dem Menschen in einer konkreten Situation überlassen, abzuschätzen, inwieweit (1)-(3) in einer idealen Situation absolut zutreffen würden. Sieht man z. B. in einem Film einen Tisch, so kann mit Überlegungen dazu, inwieweit es wahrscheinlich ist, dass er am Computer generiert wurde oder dass er nur eine Attrappe ist, abgeschätzt werden, ob er tatsächlich existierte. (4') ist die Minimalbedingung, dass, wenn eine Existenzzuschreibung auf Grundlage von (1)-(3) (und auch erstmal unter 4') stattfindet, die wiederum starke Zweifel daran weckt, dass (1)-(3) tatsächlich unter Idealbedingungen absolut gelten würden, die Existenzzuschreibung aufzuheben ist. Sie ist eine Metabedingung, für die bereits eine Existenzzuschreibung stattgefunden haben muss. Damit gewährt sie die Möglichkeit, dass bereits vollzogene Existenzzuschreibungen aufgrund theoretischer Gründe revidiert werden.

Die vier Eigenschaften garantieren nun einen *direkten epistemischen Zugang* («thick epistemic access»), der für Azzouni nur eine hinreichende Bedingung abgibt, aber nicht notwendig und damit kein alleiniges Kriterium für die Existenz von Dingen ist.<sup>45</sup> Dass sie hinreichen, ist für ihn offensichtlich, weil

43 Dies wird z. B. deutlich in Azzouni 1997, S. 477.

44 Siehe Apel 2011, Kap. 10.1.

45 Siehe Azzouni 2004b, S. 384.

sie das ausdrücken, was eine relativ theorieunabhängige Verbindung zwischen uns und den Dingen ausmacht.<sup>46</sup>

Zu entscheiden, ob eine Beobachtung die Eigenschaften (1) und (3) hat, scheint unproblematisch zu sein, will man das Kriterium weiter verallgemeinern, so entsteht bei der Verfeinerung (2) die Frage, wie weit man von dem Gebrauch der sieben Sinne abstrahieren darf. Denn neben der Herstellung und Veränderung ist auch der Gebrauch technischer Geräte eine Kulturtechnik – wie auch die Mathematik – die auf Hintergrundtheorien basiert. Lässt man beide für (2) zu (wie Azzouni), dann ist allerdings nicht abzusehen, wie man (2) auf weniger als auf alle praktischen Tätigkeiten, die etwas hervorbringen, einschränken könnte, zu denen aber auch das Phantasieren gehört.

In gewissem Sinne verfeinert und kultiviert die Mathematik nicht nur die Beobachtung mathematischer Objekte, sondern kann diese über längere Zeiträume fokussieren und in ihren unterschiedlichsten Beziehungen zu anderen mathematischen Objekten erforschen. Offensichtlich sind die mathematischen Ergebnisse auch unabhängig (im Sinne von (1)) von unseren Überzeugungen. Das Mathematisieren als Beobachten erfüllt damit die Bedingungen (1)-(3). Das ist aber nicht viel, denn auch das Ausphantasieren von Opa Alfred scheint (1)-(3) zu erfüllen. *Opa Alfred besitzt einen Schrottplatz voller alter Autowracks, in der kleineren Halle lagern die Motoren, in der größeren in hohen Ständern die Autoreifen. Seine Sekretärin hat heute seine Lieblingstasse kaputt gemacht. Sie wird nicht mehr lange für ihn arbeiten.* Diese Beobachtungen über Opa Alfred können weiter verfeinert und kultiviert werden. Er wird auch nicht alle Erwartungen erfüllen, ich glaubte z. B., er wäre etwas ruppig, bis ich mich mehr mit ihm beschäftigte.<sup>47</sup> Auch kann man ihn über längere Zeit in seinen Handlungen verfolgen. Viel scheint jetzt von der vierten Bedingung abzuhängen. Aber (4') selbst entscheidet nicht darüber, weil es genügend subjektiven Spielraum lässt für gegensätzliche Einstellungen. Ein Anti-Realist (wie Azzouni) wird z. B. starke und erstmal bleibende Zweifel daran haben, dass er die Eigenschaften der mathematischen Objekte hat beobachten können. Ein Realist (wie Blau) nicht.

Problematisch daran ist, dass (4) und (4') die Unternehmung ihrer Überprüfung zu einer theoretischen Angelegenheit machen, was dem zu Beginn formulierten Grundansatz widerspricht, dass Existenzerkennntnis wesentlich empirisch ist. So genügt das Mathematisieren den Anforderungen (1)-(3), (4) ist aber wohl nicht der Fall. Wäre man sich bezüglich (4) unsicher, so hinge die Entscheidung über ihre Existenz weitgehend von theoretischen Umständen ab und liefe damit unserer Grundannahme zuwider. Denn zur Formulierung, Rechtfertigung und Anwendung von (4) müsste einiges an Theorie reflexiv eingebunden werden. Entsprechend hält Azzouni insbesondere (4) auch für kulturabhängig und ist überhaupt der Meinung, dass es kein alleiniges Existenzkriterium gibt, weil uns ein Kriterium fehlt, um die verschiedenen, kulturabhängigen Existenzkriterien gegeneinander zu bewerten.

Aber dies ist eher eine Kritik an Azzounis impliziten Voraussetzungen, als an seinen Ausarbeitungen, denn er ist ein Nominalist (hinsichtlich mathematischer Objekte), der mit seinem Kriterium auch keinen direkten Beweis gegen die Existenz mathematischer Objekte führen möchte.<sup>48</sup> Insofern er keine anderen Dinge als die in Raum und Zeit zugesteht, ist Bedingung (4) für ein sicheres Wissen um die Existenz von etwas naheliegend, und insofern es ihm in seinen Überlegungen um die Frage nach der Existenz von nicht direkt beobachtbaren Entitäten der Naturwissenschaften geht und nicht um die Existenz der Außenwelt oder bestimmter mesokosmischer Gegenstände, benötigt er auch keine Kriterien, in denen explizit das ausgesprochen wird, was eigentlich zur Existenzüberzeugung beiträgt.

46 Azzouni meint «... since thick epistemic access is a generalization of observation, it's reasonable to take it to be a sufficient condition for the existence of something: we can't gain thick epistemic access to what doesn't exist», und fügt in einer Fußnote hinzu: «Taking thick epistemic access as sufficient for existence is a linguistic stipulation on which nothing turns: worries about whether we have thick epistemic access to something real (on a non-factive construal of 'thick epistemic access') translate cleanly into worries about whether we have thick epistemic access to anything at all.» Azzouni 2004b, S. 384.

47 Man könnte hier einwenden, dass fiktive Dinge gerade nicht unabhängig sind, weil man sie sich auch hätte anders ausdenken können. Man beachte jedoch, dass dies auch auf alle Artefakte zutrifft.

48 Siehe Azzouni 1997, S. 484.



### 6.3.5 Kontinuität und Kohärenz

Blau bringt die zwei «Realitätsboten»<sup>49</sup> *Kontinuität* und *Kohärenz* mit ins Spiel. Ein paradigmatisches Beispiel für ihre Anwendung ist folgendes: *Denken Sie sich die leere (reine) Menge, sie hat keine Elemente, und nichts ist in ihr enthalten.* Diese Eigenschaft ist klar und bestimmt. Da Mengen dadurch eindeutig bestimmt sind, welche Elemente sie enthalten, ist die leere Menge mit dieser Eigenschaft eindeutig bestimmt. *Denken Sie wieder an die leere Menge!* Sie hat immer noch die gleichen Eigenschaften, ist immer noch die vollkommen selbe wie vor der eingeschobenen Überlegung. Beunruhigt, dass sie mit anderen Mengen nicht zusammen passen könnte, betreibt man ausführlich mathematische Mengentheorie und bemerkt, dass man nichts kennt, was in sich stimmiger sein würde.

Blau ist anscheinend der Auffassung, dass Kontinuität und Kohärenz sogar die Kennzeichen für den Auftritt des Bewußtseins sind, weil Bewußtsein stets Bewußtsein *von etwas* ist und Kohärenz und Kontinuität dieses etwas anzeigen.

Blau behauptet sogar mehr: «*Kohärenz* und *Kontinuität* sind die einzigen inneren Hinweise auf äußere Realität. Wir vertrauen ihnen, weil wir keine besseren haben.»<sup>50</sup> Die äußere Realität teilt sich dabei in den physikalischen Außenraum der objektiv-raumzeitlichen Konkreta und den mathematischen Außenraum  $\mathbb{V}$  der objektiv-raumzeitlosen Formen, und für die Existenz der Dinge beider sind Kohärenz und Kontinuität praktisch notwendige Indizien.<sup>51</sup> Die Existenz der physischen Dinge hängt aber für uns nicht davon ab, dass wir die Kohärenz und Kontinuität ihrer Erscheinungen in uns berücksichtigen, sondern wurde, so Blau, durch die kausalen Beziehungen zwischen Bewußtsein und physischer Umwelt grundgelegt: «Diesen Glauben [an die physische Realität] hat die theoretisch unbegreifliche psychophysische Wechselwirkung sehr bald nach unserer Geburt praktisch erzwungen. Daher ist jedes Argument für die physische Realität theoretisch wertlos und praktisch überflüssig.»<sup>52</sup> Zumindest sprechen im Nachhinein die Dauer und der Zusammenhalt der physischen Welt nicht gegen seine Realität, sondern dafür, wenn auch in Abhängigkeit vom Mathematischen und Mentalen; denn: «Ohne die perfekte Kohärenz des Formalen und die kurzfristig perfekte Kontinuität des Mentalen hätten wir wenig Grund, an physische Realität zu glauben.»<sup>53</sup> Das Formale bietet sozusagen die Formen der Erfahrung, die man in die physische Welt ‚projiziert‘, und die eine Verständigung trotz kategorialen Riss zwischen Konkreta und Mentalia ermöglichen: «Der mathematische Raum ist äußerst objektiv und unpersönlich, zugleich auch innerste unbewußt-apriorische Gewißheit für jedes kommunizierende Subjekt. Daher sind die formalen Strukturen die einzigen tragfähigen Kommunikationsbrücken über die psychophysische Grenze hinweg. Zugleich verweisen sie auf jene singuläre Stelle, an der das Innerste mit dem Äußersten, das Projektionszentrum mit dem Fluchtpunkt aller Perspektiven verschmilzt.»<sup>54</sup>

Die beiden Bedingungen Kohärenz und Kontinuität sind aber auch ohne diese Rahmentheorie, in die Blau sie einbettet, plausible Teile eines Existenzkriteriums. Denn was nicht kontinuierlich und damit von keiner noch so kleinen Dauer und auch nicht außer der Zeit ist, existiert offensichtlich nicht. Was nicht konsistent ist, existiert auch auf keinen Fall, etwas muss aber auch im Zusammenhang mit ähnlichen Dingen stehen und mit diesen zusammenpassen, um überhaupt sein zu können; es muss kohärent sein.

Die ersten drei Bedingungen Azzounis an Beobachtungen entsprechen damit den Eigenschaften der Kohärenz und Kontinuität des Wahrgenommenen. *Unabhängigkeit*: Wahrgenommenes, das kohärent

49 Blau 2008, S. 775.

50 Blau 2008, S. 139.

51 Siehe Blau 2008, S. 775.

52 Blau 2008, S. 139.

53 Blau 2008, S. 139.

54 Blau 2008, S. 907.

und damit konsistent ist, muss auch unabhängig sein, weil es ansonsten der inkohärenten Willkür des Subjekts ausgesetzt wäre, was inkohärente Resultate zeitigen könnte. *Verfolgbarkeit*: Ein kontinuierliches Wahrnehmen bleibt auf etwas fokussiert, so dass sich etwas über einen längeren Zeitraum wahrnehmen lässt, wobei sich, insofern die Wahrnehmung kohärent ist, das Wahrgenommene sich in einem weiteren Zusammenhang mit anderen Dingen als stimmig erweist und sich bestenfalls auch unterschiedliche Beziehungen zu unterschiedlichen anderen Dingen ergeben. Entsprechend die *Verfeinerung*.

Blaus Bedingungen fangen demnach die drei weniger theoriegeladenen Bedingungen Azzounis ein. Außen vor bleibt allerdings die recht starke Intuition, die auch deutlich schwächer als (4) ist, dass man doch irgendwie in ‚Kontakt‘ mit den Dingen treten muss, um sicher zu wissen, dass es sie gibt.

Blau spricht neuerdings von einer/seiner ‚Platonistischen Vermutung‘: «Nur durch kategoriale Trennung von  $\psi$  [d.h. Psyche] und  $\phi$  [d.h. Physis] und ihre partiell strukturerhaltende transkategoriale Verbindung, die wir als kausal erleben, wissen wir von uns selbst.»<sup>55</sup> und fügt in einer Fußnote hervor: «Die selbsterlebt, quantitativ gut abschätzbare Kraft und Gegenkraft bei der Bewegung eines schweren Gewichts scheint mir der deutlichste Beleg für das kausale *propter* zu sein, das Hume angeblich nicht finden konnte.»<sup>56</sup> Damit beinhaltet die Vermutung in etwa das, was man traditioneller Weise als Widerstand und dem ‚Erwachen‘ am Widerstand für sich selbst und für den Gegenstand bezeichnet und auch als Argument für die Existenz mathematischer Gegenstände anführt: Man könne sie nicht so denken wie man vielleicht wolle und hätte die Empfindung eines Widerstandes, wenn man es versuche, bzw. empfände das Mathematisieren — wie das Betasten einer Marmorstatue.

Widerstand scheint es aber nur dort geben zu können, wo kausale Beziehungen bestehen, und damit für den Menschen offensichtlich nicht in Bezug auf raumzeitlose Abstrakta. Das Widerstandsargument wäre gegenstandslos und würde sich gegen den Platonismus richten: Existieren vielleicht nur die physischen Dinge wirklich, weil nur in Bezug auf sie wir Widerstände spüren (können)? Es wird Zeit, die Kausalität näher zu betrachten.

### 6.3.6 Kausalität in der Existenzerkenntnis

Unter Kausalität verstehen wir im folgenden die Einheit und Relation von Ursache und Wirkung, Verursachung sei die Hervorbringung der Wirkung, und  $A$ ,  $B$  stehen in einer kausalen Verbindung, wenn etwas an oder bei  $A$  oder  $A$  selbst die Wirkung einer Ursache ist, die wieder zum Teil Wirkung einer Ursache ist und so weiter bis in dieser Kette von Verursachungen eine Ursache an oder bei  $B$  oder als  $B$  selbst verortet werden kann, oder auch wenn aus dem Zusammenhang deutlich ist, dass derselbe Sachverhalt umgekehrt zwischen  $B$  und  $A$  besteht.

Die moderne Auseinandersetzung mit dem Problem der Kausalität in der mathematischen Erkenntnis nimmt ihren Ausgangspunkt in Benacerraf 1973. Er expliziert dort das grundlegende Problem, eine einheitliche Wahrheitstheorie mit einer Theorie der mathematischen Erkenntnis in Einklang zu bringen. Denn wenn mathematische Sätze ähnlich natursprachlichen Sätzen logisch zu analysieren sind, demnach durch sie irgendwie mathematische Dinge und Fakten bezeichnet werden und entsprechend ähnliche Wahrheitsbedingungen wie Erfüllung o.ä. aufweisen, dann müsste der ‚Kontakt‘ mit diesen Objekten bei der mathematischen Erkenntnis irgendeine Rolle spielen. Nach damaligen allgemeinen Erkenntnistheorien und Benacerrafs Einschätzung hätte dieser ‚Kontakt‘ ein kausaler zu sein, damit aus dem Glauben, dass  $p$ , ein Wissen darüber wird. «The connection between what must be the case if  $p$  is true and the causes of  $X$ 's belief can vary widely. But there is always *some* connection, and

<sup>55</sup> Blau 2009a, S. 18.

<sup>56</sup> Blau 2009a, S. 32a142.

the connection relates the grounds of  $X$ 's belief to the subject matter of  $p$ .»<sup>57</sup> Und eine kausale Verbindung zu einer Tatsache ist auch eine zu den entsprechenden Gegenständen. Das Problem ist aber offensichtlich, dass man mathematischen Objekten eher keine kausale Aktivität zuschreibt und selbst, wenn man von einem kausalen Kontakt ausgeht, damit noch keine adäquate Erkenntnistheorie entworfen werden konnte. Denn von der Wahrheit mathematischer Aussagen überzeugt man sich gemeinhin durch das (aktive) Durchdenken eines (deduktiven) Beweises, nicht dadurch, dass man z. B. von einer Zahl (passiv) ‚kontaktiert‘ werden würde.

Dieses Problem wurde vor allem rezipiert als Einwand gegen den Platonismus: Er könne die mathematische Erkenntnis nicht erklären, da der Mathematiker mit den mathematischen Gegenständen kausal interagieren müsste, dies aber, da sie außer Zeit und Raum und damit akausal seien, grundsätzlich nicht könne. Die Stichhaltigkeit dieser Überlegung wurde öfters angezweifelt, insbesondere von Hale 1987 mit dem Argument, dass gar nicht alle wahren und gerechtfertigten Überzeugungen («justified true belief») mit ihrer Tatsache kausal verbunden sind, und zu diesen ja die mathematischen zählen könnten (ohne allerdings darauf aufbauend eine alternative Erkenntnistheorie für die Mathematik zu skizzieren).<sup>58</sup> Damit ist der pauschale Einwand entkräftet. Cheyne 2001, S. 95ff., versucht den Einwand zu retten, indem er die spezielle Gruppe mathematischer Einsichten auswählt, die etwas über die Existenz mathematischer Gegenstände aussagen: Wenn schon nicht für alle mathematische Einsichten ein kausaler ‚Kontakt‘ notwendig ist, so doch nach Cheyne für alle mathematischen Existenzaussagen. Aber auch das ist nur plausibel, weil Cheyne die einheitliche Semantik mit einer einheitlichen kausalen Kontakttheorie verbindet, indem er den (philosophischen) Satz

(i) Es gibt die Zahlen wirklich!

als eine Art Verallgemeinerung des (mathematischen) Satzes

(ii) Es gibt eine vollkommene Zahl größer  $10^{1000}$ .

versteht. Denn für ein Wissen um die Wahrheit von (i) scheint *prima facie* die Notwendigkeit einer kausalen Verbindung plausibel, für ein Wissen um (ii) dagegen kann man sich leicht auf die Position zurückziehen, dass dieses Wissen erreicht wird, indem man etwas Mathematik betreibt; ob man in kausaler Verbindung mit einer vollkommenen Zahl stand, so die Antwort aus der mathematischen Praxis, würde dann davon abhängen, ob man zur Erlangung des Wissens mit einer in kausaler Verbindung hat stehen müssen; denn die Wahrheit von (ii) stehe fest. Cheynes Einwand, wenn erfolgreich, wendet sich aber nicht nur gegen (i), sondern auch gegen die Wahrheit von (ii) und fängt sich damit das notorische Problem des mathematischen Nominalismus ein, erklären zu müssen, inwiefern (ii) falsch sein soll.

Umgekehrt darf man allerdings vom Platonisten erwarten, dass er erklärt, warum ein Wissen um die Existenz mathematischer Gegenstände keine kausale Verbindung benötigen sollte, während sie für das Wissen um andere Dinge (wie Stühle) doch notwendig sein sollte.<sup>59</sup>

Man hat prinzipiell drei getrennte Möglichkeiten das Problem anzugehen ohne eine einheitliche Semantik in Frage zu stellen: Man findet einen kausalen Kontakt zwischen den mathematischen Objekten und dem erkennenden Subjekt,<sup>60</sup> oder man widerlegt die mit Kausalität arbeitenden Erkenntnistheorien, oder man lehnt sich mit Putnams obigen Zitat im Kopf entspannt zurück.

57 Benacerraf 1973, S. 414.

58 Ähnlich W. Künne in einem allgemeineren Kontext: «Anti-Partikularisten sollten sich durch die legitime Frage, wie wir zu einem abstrakten Gegenstand, der weder lokalisierbar noch datierbar (und deshalb kausal impotent) ist, kognitiven Zugang erlangen können, nicht ins Bockshorn jagen lassen. Wenn eine Explikation des Wissensbegriffs eine Kausalbedingung einschließt, die so stark ist, dass sie den Anti-Partikularismus epistemologisch desavouiert, dann ist sie Einwänden ausgesetzt, die nichts mit einer ontologischen Kontroverse zu tun haben: sie schließt nämlich Wissen in diversen Bereichen aus, in denen es gar nicht um abstrakte Gegenstände geht.» Künne 2007, S. 327.

59 So zumindest Cheyne 2001, S. 122.

60 Und widerspricht damit der Grundannahme Cheynes, dass mathematische Dinge akausal sind.

Blau wählt den zweiten Weg:<sup>61</sup> Wie mein Bewußtsein im ‚Inneren‘ etwas von dem Bleistift hier im Außen mitbekommt ist völlig unbekannt, denn die nachvollziehbare kausale Verbindung vom Bleistift ausgehend endet im Gehirn, eine weitergehende kausale Verbindung zum mentalen Bild des Bleistifts kann vermutet werden, bleibt aber wegen der kategorialen Spaltung von Physis und Psyche unbegreiflich, auch wenn die eigene Lebenspraxis Verursachungen über diese Grenze hinweg bestätigt und auch andere Argumente für diese sprechen.<sup>62</sup> Die Notwendigkeit einer kausalen Verbindung zu Bleistiften kann demnach zumindest nicht bestätigt werden. Hält man trotzdem an ihr fest, so wird jedoch der Kausalitätsbegriff entscheidend geschwächt. Denn wenn ein physischer Gegenstand (vermittelt) auf ein Bewußtsein wirken kann, könnte ein mathematischer Gegenstand unter Umständen auch auf dieses einwirken.<sup>63</sup> Für den ‚Urplatonisten‘ Blau stellt sich das Problem eher umgekehrt, weil die physischen Dinge weniger scharf individuiert, stärker kontextabhängig und veränderlicher sind im Vergleich zu mathematischen Objekten, die alleine die Bedingungen der Identitätslogik voll erfüllen, womit die physischen Gegenstände graduell *weniger existent* sind. Wie ich an *etwas* partizipieren können sollte, das gar nicht ganz *etwas* ist, scheint ein grundlegenderes Problem zu sein.<sup>64</sup>

Diese Argumentationsstrategie scheint mir gegenüber naturalistischen Einwänden recht wirkungsvoll, löst aber das eigentliche Problem nicht. Im folgenden soll versucht werden, die erste Möglichkeit im Kontext unserer Suche nach epistemischen Existenzkriterien stark zu machen.

### 6.3.7 Man selbst ist involviert

Von der berechtigten Überlegung und Intuition, dass man mit etwas irgendwie in (kausalem) ‚Kontakt‘ stehen muss, der wiederum ausschlaggebend für die Anerkennung der Existenz dieses Dings sein muss, um die Existenz dieses Dings erkennen zu können, wird jetzt abstrahiert.<sup>65</sup>

Die fundamentale Abhängigkeit der Gegenstände des raum-zeitlichen Seinsbereichs ist die kausale Verbindung. Die Aufgabe der Naturwissenschaften ist es, die Dinge im Raum-Zeitlichen und die Regelmäßigkeiten ihrer kausalen Verbindungen zu entdecken und zu charakterisieren. Die Intuition, dass man notwendigerweise irgendwie in kausalem ‚Kontakt‘ mit dem beobachteten Ding stehen muss, würde dann allgemeiner gefasst lauten:

(W) Man kann nur dann von etwas wissen, dass es existiert, wenn man am gleichen Seinsbereich teilhat und darüber mit ihm in einer diesem Seinsbereich spezifischen Verbindung steht.

Diese Verallgemeinerung fasst die eigentliche kausale Intuition m. E. besser und formuliert sie als Argument: Mathematische Objekte existieren nicht, weil man offenbar an ihrem außer-raum-zeitlichen Seinsbereich nicht teilhat, wenn es ihn denn geben sollte, und man offenbar auch keine Vorstellung von einer spezifischen Verbindung hat, die die Objekte dieses Seinsbereichs (und einen selbst) miteinander in ‚Kontakt‘ bringen könnte.

61 So auch Frege nach der Interpretation in Abschnitt 6.3.2.

62 Wie z. B. das evolutionsbiologische Argument bei Blau 2008, S. 67ff..

63 Aber ist ein mathematischer Gegenstand nicht in der Zeit und kann allein deswegen nicht an einer Verursachung, welche einen zeitlichen Vorgang umfasst, beteiligt sein? Sein wesentlicher Gehalt ist zeitlos, aber in einem ihm selbst unwesentlichen Teil könnte eine Struktur ja Ursache sein, sowie man sie ja auch in den physischen Gegenständen vorfindet. (Für eine ähnliche Vorstellung des im Denken zu einem bestimmten Zeitpunkt erfassten Gedankens vgl. Frege 1918, S. 111(76).) Blau selbst erklärt es anders: «Wie ist es möglich, dass zeitlos-objektive Wahrheit zeitlich-subjektiv bewusst wird? Sehr einfach: weil das Bewusstsein seine reine Mechanik beobachten kann. Die Evolution der Formalwissenschaft ist die Selbstexplikation dieser Bewusstseinsmechanik – ein unverstandenes Stück Transzendentalphilosophie.» Blau 2009b, S. 37, erweitert und deutsch Blau 2009a, S. 1.

64 «Der Platonist hält seine mentale Partizipation an einem physischen Bleistift für das tiefere Rätsel.» Blau 2008, S. 108.

65 Ein Analogon zur ‚Nähe‘ («proximity»); vgl. Azzouni 2008, S. 398f.) – wenn man einen Berg sehen will, muss man nah, nämlich in Sichtweite sein – wird dabei nicht geboten.

(W) ist eine schwer zu erfüllende Anforderung an jede platonistische Theorie mathematischer Gegenstände. Da hier jedoch keine Metaphysik angestrebt wird sondern epistemische Existenzkriterien, legt (W) vielmehr nahe, dass jedes epistemische Existenzkriterium so sein muss, dass es praktisch Anlass gibt, von (1) überzeugt zu bleiben, auch wenn vielleicht (noch) nicht theoretisch eingeholt wurde, was der spezifische Seinsbereich, die Teilhabe und die Verbindung sind. Die minimale Bedingung für ein Existenzkriterium als Eigenschaften von ‚Beobachtungen‘ ist dann, dass die rudimentärste Struktur, die den Bedingungsteil von (W) erfüllt, gegeben ist, nämlich dass bei einer ‚Beobachtung‘ für mindestens eine minimale Zeit der Beobachter und das beobachtete Ding in einer auch nur minimal zu differenzierenden Verbindung stehen. D. h. dass die ‚Beobachtung‘ einen Akt enthält, in dem Betrachter und Ding in Bezug aufeinander gesetzt sind, aber als unabhängig von ihrem Gesetztsein.<sup>66</sup> Ein Kandidat für einen notwendigen Teil eines Existenzkriteriums ist demnach:

- (5) Die Beobachtung ist nicht nur Beobachtung des Beobachteten, sondern auch Beobachtung des Beobachters.

D. h. eine Beobachtung, insofern sie auf die durch sie erfolgenden Existenzzuschreibungen betrachtet wird, muss gegen den üblichen Sprachgebrauch das beobachtende Subjekt auch als (zusätzliches) Objekt im Blickfeld seiner Beobachtung haben, wenn auch nicht immer oder oftmals sogar nicht bewusst. Denn nur und genau dann existiert das beobachtende Subjekt für es selbst, wenn das eigentliche Beobachtete für uns existiert, nämlich, wenn die Beobachtung auch noch die restlichen Teile des Existenzkriteriums erfüllt.

Allerdings schließt sich gleich der Einwand an, dass die Selbstempfindung mit einer Eigentätigkeit einherzugehen scheint, man bei der Wahrnehmung aber gerade bewusst passiv bleibe und das andere auf sich wirken lasse. Die Wahrnehmung als Paradigma genommen folgt deshalb, dass Existenzzuschreibungen nur gute Gründe finden in Prozessen, denen sich das Subjekt passiv gegenüber verhält. Sinnliches Wahrnehmen vollzieht sich (wesentlich) ohne Eigentätigkeit, Denken ist reine Eigentätigkeit, zuweilen sehr anstrengend. Somit könnte durch Bezug auf aktiv ausgeführte kognitive Tätigkeiten *letztlich* oder im strengen Sinn keine Existenzzuschreibung begründet werden.<sup>67</sup> Dagegen wird mit (5) behauptet, dass reine Passivität Existenzzuschreibung sogar verhindere, und es auf eine im Sinne von (5) geregeltes Auftreten von passiven und aktiven Elementen ankomme.

Ist (5) demnach überhaupt plausibel für einfache Existenzzuschreibungen mesokosmischer Dinge? Man sieht z. B. etwas, vielleicht diesen Tisch. In diesem Sehen sind aber mindestens zwei verschiedene Komponenten enthalten: Einmal Farbe außerhalb von einem zu sehen, zum zweiten das Scharfstellen auf den Gegenstand. Das Scharfstellen ist jedoch keine direkt auf ein Äußeres bezogene Tätigkeit, sondern eher eine selbstbezügliche Tätigkeit die von einem dumpfen Selbstempfinden begleitet wird. Weil die andere Komponente ein Sehen von etwas außerhalb meiner selbst ist, scheint im gewöhnlichen Sehen bereits Bedingung (5) erfüllt zu sein. Jedenfalls könnte man damit auch erklären, warum, wenn die Schärfeneinstellung nur eingeschränkt stattfindet, das Wahrgenommene illusionär wie in Film und Fernsehen oder bei Bildern ist. Insofern zwischen passiver Wahrnehmung und aktiver Beobachtung (i. a.) nur ein gradueller Unterschied in der Stärke der Eigentätigkeit besteht, wird (5) nicht durch den Einwand widerlegt.

66 Dass diese Idee wesentlich mit dem, was Existenz ist, zusammenhängt, ist nicht neu und noch aktuell. Siehe z. B. Spaemann 2010, S. 15ff..

67 In der Frühantike lagen die Dinge anders. Denn wie Frede 1987, S. 3f., meint, war die Verwendung von „wahrzunehmen“ (*αἰσθάνεσθαι*) im allgemeinen Gebrauch gerade nicht auf die sinnliche Wahrnehmung beschränkt, sondern schloss auch Fälle des Bewusstwerdens oder Begreifens mit ein. In diesem Rahmen stellen sich Formulierungen wie die ‚Schau‘ der Ideen u.ä. als gerade *nicht* metaphorisch dar. Während man mittlerweile ein sinnliches Wahrnehmen als einen passiven Akt erfährt und eine denkerische Leistung als etwas durch Eigenaktivität zustande gebrachtes, war für PLATONS Zeitgenossen die Trennung möglicherweise nicht (so stark) vorhanden, das eine stärker mit einer Tätigkeit verbunden, oder das andere passiver. Der Clou PLATONS scheint es in diesem Zusammenhang gerade gewesen zu sein, diesen Unterschied von aktiv/passiv neben anderem zu benutzen, um im *Theaitetos* 184-7 sinnliches Wahrnehmen vom Erkennen zu unterscheiden; s. Frede 1987, S. 4f..

Fasst man im allgemeinen den direkten Wissenserwerb durch Wahrnehmung im Sinne des *‘self-conscious power accounts’*<sup>68</sup> auf, so liegt in dem Akt *etwas durch Wahrnehmen zu wissen* selbst das Wissen, dass man etwas wahrnimmt. Die ‚Kraft‘ ist insofern ‚selbstbewusst‘, als jede ihre Äußerung in einem konkreten Akt ein Wissen um ihre Äußerung notwendig begleitet. Demnach wäre es so: Wenn ich denke, dass sich dort ein Bergkristall befindet, und ich dass denke, weil ich sehe, dass dort ein Bergkristall ist, dann kann ich mir zugleich im selben Vorgang bewusst sein, dass *ich sehe*, dass dort ein Bergkristall ist. Ich ‚beobachte‘ mich damit selbst im Akt des erkennenden Wahrnehmens. (5) ist nur eine undifferenziertere Zuspitzung dieses Umstands auf die Existenz eines Objekts.

## 6.4 Existieren sie nun oder nicht?

Aus der Diskussion ergeben sich Kohärenz, Kontinuität bzw. (1)–(3) jeweils zusammen mit (5) als Vorschlag für ein Existenzkriterium.<sup>69</sup> Dass sie für Existenzzuschreibungen hinreichend sind, muss letztlich die Erfahrung zeigen.<sup>70</sup> Die Anwendung dieses Existenzkriteriums ist für sich ein Prozess, an dem zum Ende hin eine Erfahrung der Existenz mathematischer Gegenstände stehen könnte, weil durch die versuchte Anwendung des Existenzkriteriums eine Bewusstwerdung stattfindet darüber, was man eigentlich beobachtet und beobachtet hat (siehe Abschnitte 6.3.1 und 6.3.2). Für den Beginn des Prozesses bieten sich (1)–(3) an, da sie ‚äußerlich‘ zu verifizieren sind, während (5) ja eine diffizile Selbstwahrnehmung einschließt.

Diese Selbstwahrnehmung würde – um das hervorzuheben – bei erfolgreicher Durchführung dieser Bewusstwerdung zu einer Erkenntnis über sich selbst führen, nämlich dass man mit einem Teil seiner selbst gleicher Art mit den mathematischen (abstrakten) Objekten ist. Und das wäre damit die Erkenntnis eines selbst als etwas auch Unkörperlichen und damit nicht Materiellen. Damit schließen wir wieder zu einem gewissen Grad an die Wiedererinnerungslehre PLATONS an, insofern ihre moderne Reformulierung (s. S. 184) auf das strukturell gleiche Resultat aus ist: Das Erkennen eines selbst als eines auch unkörperliches Wesen mittels der Mathematik.

Existieren demnach einige oder sogar alle mathematischen Objekte wie z. B. die mathematischen Mengen? Die Antwort sei hier wie die praktische Ausführung, nämlich dass man das Existenzkriterium anwendet, dem Einzelnen überlassen. Falls sich das Existenzkriterium für eine einzelne Menge erfolgreich anwenden lässt, so kann man weiter auf die Existenz aller mathematischen Mengen schließen, ohne dass man jede einzelne ‚in den Blick‘ genommen hat. Da der ‚Ort‘ der Anwendung das mathematische Denken ist, bringt diese mögliche Existenz Erfahrung allerdings auch – zumindest zunächst – keine weitere Kompetenz mit sich, mathematische Aussagen über die mathematischen Objekte und ihre ‚Welt‘ zu treffen. Die ‚Wahrnehmung‘ der mathematischen Objekte geschieht mittels des mathematischen Denkens und hängt von diesem ab: Die Identität und Bestimmtheit mathematischer Objekte muss sich aus dem Umgang mit ihnen im mathematischen Denken ergeben. Entsprechend ist diese Existenzbeobachtung wie die sinnliche Wahrnehmung fallibel, eine mathematische Definition kann sich als

68 Rödl 2010.

69 Was hätte PLATON zu einem Existenzkriterium gesagt? Zumindest scheint er viel an der naiven Wahrnehmung letztlich dem rein Seelischen zuzurechnen: «Sokrates: Halt! Wird [die Seele] nicht die Härte des Harten und die Weichheit des Weichen vermittelt des Getastetes wahrnehmen? — Theaitetos: Ja. — Sokrates: Aber das Sein von beiden, und (die Tatsache), dass sie beide sind, und ihre Gegensatzung gegeneinander und das Wirklichsein dieser Entgegensetzung, dies versucht also unsere Seele selbst durch Betrachtung und Vergleichung zu beurteilen.» (... Τὴν δὲ γε οὐσίαν καὶ ὅτι ἐστὶν καὶ τὴν ἐναντιότητα πρὸς ἀλλήλω καὶ τὴν οὐσίαν αὐτῆς ἐναντιότητος αὐτῆ ἢ ψυχῆ ἐπανιούσα καὶ συμβάλλουσα πρὸς ἄλληλα κρίνειν περᾶται ἡμῖν.) *Theaitetos* 186b.

70 Jedenfalls bietet dieses vorläufige Existenzkriterium genügend Raum für eine objektive Beurteilung der ‚Existenzbehauptungen‘ PLATONS. Denn ‚sein‘ wird in den Dialogen nicht existential sondern prädikativ verwendet. ‚Zu sein‘ bedeutet immer ‚etwas zu sein‘. Der (moderne) Begriff der Existenz fehlt fast vollständig in der griechischen Antike. (Siehe dazu u. a. Kahn 1986, insbesondere S. 18ff.) Damit ist jede Aussage, dass etwas ist, eine Aussage, dass etwas etwas inhaltlich Bestimmtes ist, so dass man etwas hat, nämlich die irgendwie gegebene inhaltliche Bestimmung, an deren ‚Beobachtung‘ man das Kriterium anlegen kann.

logisch widerspruchsvoll und damit unerfüllbar herausstellen. Auch ist mit einer mathematischen Existenz Erfahrung keine Art ‚absolutes‘ Wissen mitgegeben, das Objekt kann zum Teil ‚unscharf‘ bleiben, weil es wie zum Beispiel die Potenzmenge der natürlichen Zahlen ‚unübersichtlich‘ ist, weil mathematisch unterbestimmt (zum jetzigen Zeitpunkt der Entwicklung der Mengenlehre).

Diese mathematischen Objekte sind nun aber nicht mit den Ideen PLATONS zu verwechseln, da diese einen für die Welt so konstitutiven Platz einnehmen, der bei den mathematischen Objekten nicht zu sehen ist. Hierzu wäre das Existenzkriterium wohl auf das sich in der eidetischen Variation ergebende Wesen anzuwenden.<sup>71</sup> Insgesamt wäre in einem nächsten Schritt das Vorgehen in diesem Kapitel durch die traditionelle Phänomenologie zu überprüfen oder zumindest auf Unterschiede hin zu vergleichen, was hier nicht geschehen kann.

---

71 Zur eidetischen Variation siehe Abschnitt 5.7. Die hier aufscheinende Differenz zwischen diesen mathematischen Objekten und den Ideen macht auf ein grundlegendes Problem aufmerksam: Die in diesem Kapitel diskutierte Existenzzuschreibung schließt nicht den Fall aus, dass die als objektiv existent erfahrenen Gegenstände von einem selbst generiert wurden. Die beobachtete Zahl Zwei wäre, träte dieser Fall ein, zum Zeitpunkt der Beobachtung zwar objektiv vorhanden, aber nicht die Zwei, von der in der Mathematik die Rede ist und die man intersubjektiv meint, und vor allem wäre sie in diesem Sinne nicht unabhängig von den Erkenntnisbemühungen des einzelnen Menschen.

# Platons Platonismus und die Unbestimmtheit des mathematischen Mengenbegriffs

## Übersicht

Der platonische Erkenntnisweg über die Mathematik zur Philosophie kann aktuell alleine deswegen nicht mehr erfolgreich gegangen werden, weil die moderne mathematische Methode das verhindert (Abschnitt 7.2). Aber auch deswegen nicht, weil zu (mindestens) zwei der zentralen Objekte der modernen Mathematik – Zahl (Abschnitt 7.3.1) und Menge (Abschnitt 7.3.2) – nach PLATON keine Ideen existieren, und ein über das Mathematische hinausgehendes Erkenntnisinteresse ins Leere läuft (Abschnitt 7.3). Eine Analyse der bekannten Mengentheorien (Abschnitt 7.4.1) zeigt, dass die ihnen zugrundeliegenden Intuitionen (Abschnitt 7.4.2) diese Unbestimmbarkeit des Mengenbegriffs bereits zum Teil explizit verwenden.<sup>1</sup> Mit den modernen Mengentheorien wird demnach eine Grundlegung der Mathematik nach PLATON nicht widerlegt, insofern in ihnen zur formalen Bestimmung der Mengen der Umstand benutzt wird, dass Mengen letztlich an sich unbestimmt sind, sondern mathematisch ausgeführt.

## 7.1 Einleitung

Die Frage nach der Existenz mathematischer Gegenstände ist – auch wenn sie bereits viel früher formuliert wurde – eine Frage des zwanzigsten Jahrhunderts. Erst wenn ein allgemeiner Ideen-Realismus aus dem Blick gerät und die inzwischen vervielfältigten mathematischen Objekte nicht mehr zwischen Begriff und Vorstellung aufgelöst werden können, spitzt sich die Situation auf das Problem zu, ob zumindest diese mathematischen Objekte existierten. Es mag überraschend sein, wie wenig doch die Anlage der Werke von Kant und anderen großen Philosophen, die von der Mathematik fasziniert waren, heute für die Klärung der Existenz mathematischer Gegenstände beiträgt. Bereits bei PLATON, dessen Name im zwanzigsten Jahrhundert für eine mehr oder weniger bestimmte Position, oftmals durch die einigermaßen dunkle Annahme einer irgendwie gearteten Existenz (mancher) mathematischer Dinge von anderen Standpunkten unterschieden, in der Philosophie der Mathematik herhalten musste, findet man dort, wo man aus systematischen Überlegungen eine Aussage über die Existenz erwarten würde (*Politeia* 509d-511e), eine Lücke, die üblicherweise analog zum Kontext gefüllt wird, so als ob PLATON die Existenz eines eigenen Bereichs in dem die mathematischen Gegenstände existieren würden, angegeben hätte. Dass PLATON hier scheinbar absichtlich schwieg, mag einen darauf aufmerksam machen, dass für ihn anscheinend nicht viel daran hing. Für ihn bestand die große Bedeutung der Mathematik wohl in ihrer anagogische Funktion für den Menschen. In den geometrischen Gebilden, den Zahlen und Zahlverhältnissen und ihren mathematischen Verbindungen hat man eine über das übliche hinausgehende Klarheit und Wahrheitsnähe, die einen von den sinnlichen Verhaftungen loseist, die Seele

---

<sup>1</sup> Die Intention war, mit der Erkenntnis, dass es keine Idee der (mathematischen) Menge gibt, zu versuchen, metamathematische Probleme der modernen Mengenlehre zu lösen. Auch wenn das für andere Problemfelder immer noch ein neuartiger Ansatz sein sollte, für die grundlegende Axiomatisierung der Mengenlehre stellte sich heraus, dass die (meta-) mathematische Praxis schlauer ist und mit dieser Erkenntnis bereits umgeht. Ein Fortschritt wäre demnach nur durch die explizite Reflexion darauf zu erhoffen.



umwendet und in die Höhe zieht (*Politeia* 521c ff.). In den mathematischen Dingen und Zusammenhängen hat man die Schatten und Spiegelbilder der (höheren) Ideen vor sich, auf deren Anblick man sich durch das Mathematisieren vorbereiten kann. Zur Philosophie nur über die Mathematik!<sup>2</sup> Für diese zur Dialektik überleitende Funktion scheint die Existenz von mathematischen Dingen nicht nötig zu sein, vielmehr ist die besondere Art der Betätigung zentral.

Will man gegenwärtig den Wert der Mathematik für das Leben im Allgemeinen und die Philosophie im Speziellen benennen, so wird man vermutlich die Übung in genauem und klarem Denken, dem Denken in Strukturen, in den Mittelpunkt stellen. Das ist es aber nicht – oder zumindest nicht nur – was PLATON in ihr sah. Für ihn ist sie die Wegbereiterin zum Eintritt in das Gebiet der Ideen, das Geistige, dessen Erkenntnis und die Erkenntnis eines selbst als ein dem Göttlichen verwandtes Wesen auch grundsätzlich salutogenetische, heilende Wirkung insbesondere für psychische oder psychisch induzierte Krankheiten hat.<sup>3</sup> Wenn die Mathematik dies tatsächlich leistet, sollte es an den größten (mathematischen) Platonikern zu beobachten sein. Allerdings ist genau das Gegenteil der Fall. Gerade durch die Betrachtung der Biographien der großen Mathematiker und ausgewiesenen Platonisten – dem Begründer der Mengenlehre Georg Cantor und dem Mengentheoretiker und Logiker Kurt Gödel – kann für diese beiden eine Erfüllung des platonischen Versprechens scheinbar weitgehend ausgeschlossen werden.<sup>4</sup> Cantor wurde in der zweiten Hälfte seines Lebens psychisch krank und beendete es in der psychiatrischen Klinik von Halle am 6. Januar 1918,<sup>5</sup> Gödel, Zeit seines Lebens paranoid, wartete in späteren Jahren vergeblich auf seine ‚Erleuchtung‘ und bekam auch seine Krankheit nicht in den Griff; durch äußere Umstände verschlimmert verhungerte er aller Vermutung nach aus Menschenscheu und Angst vor einer Vergiftung sechzig Jahre nach Cantors Tod. Das platonische Versprechen ging bei ihnen nicht in Erfüllung. Die These der nächsten Abschnitte ist, dass es sich mittels der modernen Mathematik gar nicht erfüllen kann.

## 7.2 Der Aufstieg zu den Ideen und die moderne mathematische Methode

### 7.2.1 Das platonische Curriculum

PLATON beschreibt im siebten Buch der *Politeia* das mathematische Curriculum der idealen Wächter des Staates. Nach einer typisch griechischen Erziehung durch Musik, Literatur und Sport bis zu einem Alter von zwanzig Jahren beschäftigen sie sich zehn Jahre lang intensiv mit den mathematischen Wissenschaften, danach fünf Jahre mit philosophischer Dialektik und arbeiten daraufhin fünfzehn Jahre in gehobenen Positionen im Staat. Mit fünfzig Jahren wären sie dann für eine Schau des Guten an sich bereit und würden dann ihr restliches Leben mit Philosophie und der Leitung des Staates verbringen (*Politeia* 536dff.). Die mathematischen Wissenschaften sind nach PLATON dabei die Arithmetik, die ebene und körperliche Geometrie, die Astronomie und die (musische) Harmonielehre (*Politeia* 522-31). Obwohl dieses Quadrivium weitreichende historische Wirksamkeit entfaltete, und trotz aller detaillierteren Hinweise in der *Politeia* selbst, ist unklar wie die mathematischen Wissenschaften nach PLATON zur «Umwendung der Seele» beitragen sollen, und wie sie dafür betrieben werden müssten.

2 Und nur über die Mathematik zurück zur sinnlichen Welt, ist hinzuzufügen.

3 Für PLATON bewirkt das Philosophieren eine Annäherung an die Götter, eine Vergöttlichung des Menschen (vgl. *Theaitetos* 176bd, *Timaios* 90cd, *Nomoi* 716cd, *Symposium* 209eff.). Indem sie die Denkbewegungen den harmonischen Bewegungen der Himmelskörper angleicht, kehrt die Seele zu ihrem Ursprung zurück und nimmt die ihr bestmögliche Gestalt an. Für die Vorstellung einer heilenden Wirkung des Philosophierens auf Kopfschmerzen siehe den Anfang des *Charmides*.

4 Die psychische Verfassung von Logikern, Mengentheoretikern und Mathematikern im allgemeinen ist ein heikles Thema, zu dem oft mehr behauptet wird, als die Faktenlage hergibt (ein Beispiel ist Doxiadis et al. 2009).

5 Siehe Cantor 1932, S. 474. Ein erster Ausbruch der Krankheit war 1884, was es genau war, ist nicht bekannt. Es ist die Rede vom Rezidiv einer «zirkulären Manie», d.h. einer manischen Depression, (Tapp 2005, S. 122), er sei ein «cyclothymen Typ» (Meschkowski 1983, S. 174) gewesen.

Wie der Aufstieg über die Mathematik im allgemeinen nach PLATON vorzustellen ist und wie das Kreisbeispiel im Konkreten zu verstehen und nachvollziehen ist, ist unbekannt.

## 7.2.2 Das Kreisbeispiel: Struktur und Modell

Das Erstaunlichste in Betrachtung der modernen Platonforschung ist, dass das einzige explizite und methodisch erläuterte Beispiel für eine Ideenschau von keinem Forscher näher ausgeführt, weiter differenziert oder auch nur als solches in den Fokus der Aufmerksamkeit gebracht worden wäre als etwas, das man konkret ausführen und so durch eigene Erfahrung bestätigen oder in Frage stellen könnte. Mir ist nur *eine* Durchführung einer erkenntniserweiternden Betrachtung des Kreises bekannt, die zwar im Geiste des *Siebten Briefs 342a-344d* durchdacht ist und PLATON neben anderen Philosophen auch eingehender erwähnt, sich aber keineswegs den Einzelheiten des platonischen Programms verpflichtet fühlt, sondern auf dem Boden moderner Metamathematik steht. Wir nehmen von ihr unseren Ausgangspunkt.

Ziegler beginnt seine Untersuchung mit konkreten, skizzierten Kreisen.<sup>6</sup> Das ihnen als Kreise Gemeinsame, ihre Gesetzmäßigkeit, ist von ihnen, in denen es zur Erscheinung kommt, zu unterscheiden. Die nur durch den Verstand zu erfassende Gesetzmäßigkeit erhält ihren teilweisen Ausdruck in den Definitionen. Eine für einen Kreis naheliegende ist:

- (1) «Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte innerhalb einer Ebene, die von einem festen Punkt dieser Ebene, dem Mittelpunkt, einen festen Abstand haben.»<sup>7</sup>

Der sprachliche Ausdruck ist nicht fest, sondern kann durch Übersetzung in andere Sprachen oder durch andere Worte ausgedrückt werden. (1) bedeutet soviel wie z. B.:

- (1') «Ein Kreis besteht aus der Menge aller Punkte einer Ebene, deren Radiusvektor von einem festen Punkt derselben eine konstante Länge hat.»<sup>8</sup>

Aber auch die in dieser Definition zum Ausdruck kommende Teilgesetzmäßigkeit kann variiert werden, weil ein Kreis durch unterschiedliche Teilgesetzmäßigkeiten gekennzeichnet werden kann. So sind die folgenden Definitionen eindeutige Kennzeichnungen des Kreises von unterschiedlichen Gesichtspunkten aus:

- (2) «Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Lotfußpunkte der Lote aus einem beliebigen Punkte auf die Geraden eines Geradenbüschels.»<sup>9</sup>
- (3) «Ein Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte, deren Abstände von zwei festen Punkten einen konstanten Quotienten haben.»<sup>10</sup>
- (4) «Ein Kreis ist eine (geschlossene und singularitätenfreie) Kurve, die auf allen Geraden eines Geradenbüschels senkrecht steht.»<sup>11</sup>
- (5) «Ein Kreis besteht aus der Menge aller Zahlenpaare  $(x, y)$  für welche  $x^2 + y^2$  einen konstanten positiven Wert annimmt.»<sup>12</sup>

Die Äquivalenz von (1)-(5) muss allerdings durch Beweise aufgezeigt werden. Die durch die Äquivalenzbeweise aller Definitionen zum Vorschein kommenden Zusammenhänge der Teilgesetze machen zusammen mit diesen die Gesetzmäßigkeit des Kreises aus.<sup>13</sup>

6 Siehe Ziegler 1992, S. 14ff..

7 Ziegler 1992, S. 15.

8 Ziegler 1992, S. 16.

9 Ziegler 1992, S. 21.

10 Ziegler 1992, S. 24.

11 Ziegler 1992, S. 27.

12 Ziegler 1992, S. 200.

13 Siehe Ziegler 1992, S. 23f..

Der ‚Absprung‘ vom durch Anschauungselemente Durchsetzten zum rein Begrifflichen wird von Ziegler an drei Übergängen vollzogen: 1.) Anhand des Unendlich-Fernen in der Geometrie.<sup>14</sup> 2.) Mittels der kontinuierlichen und mathematisch kontrollierten Variation des Kreises in der Vorstellung.<sup>15</sup> 3.) Durch die Variation der Modelle, die die geometrischen Axiome erfüllen, und damit auch durch eine grundlegende Variation der Erscheinung der Kreisgesetzmäßigkeit.<sup>16</sup>

Der letzte Punkt hebt darauf ab, dass die mathematischen Beziehungen von unterschiedlichen Zusammenhängen erfüllt werden. Ein einfaches Beispiel ergibt sich aus den zwei folgenden Axiomen der projektiven Geometrie.

(A1) Zwei Geraden inzidieren (schneiden sich) in genau einem Punkt.

(A2) Zwei Punkte inzidieren (bestimmen) mit genau einer Geraden.

Wenn man annimmt, dass sich unsere parallelen Geraden im anschaulich Unendlich-Fernen schneiden, so ist eine Ebene mit diesen Geraden und Punkten ein Modell der Aussagen A1 und A2. Deutet man aber die „Geraden“ zu Punkten und die „Punkte“ zu Geraden um, so ergeben sich wieder Zusammenhänge, die A1 und A2 erfüllen. Das gilt für jedes Modell von A1 und A2, weil A1 und A2 *dual* zueinander sind, d.h. sie sind strukturell eigentlich identisch, haben aber in Bezug aufeinander die Gegenstandstypen oder Objektausdrücke vertauscht.

Ziegler geht nun weiter hinter die vorliegende Form der Kreisgesetzmäßigkeit zurück in dreifacher Weise: 1.) Durch Variation der Bestimmungen in den Kreisdefinitionen. Z.B. ergibt die Definition (3), wenn man den Quotienten durch das Produkt ersetzt, die Definition der Cassinischen Kurven, die nicht mehr alle Kreise sind.<sup>17</sup> 2.) Durch die Fokussierung auf die Tätigkeit bei der Herausformung der einzelnen Teilgesetzmäßigkeiten oder der Bildung konkreter Vorstellungen in der Phantasie.<sup>18</sup> 3.) Durch die Reflexion auf allgemeinere Kategorien, die beim mathematischen Denken benutzt werden, ohne Inhalt des mathematischen Denkens zu sein.<sup>19</sup>

Dies ist aber – so die Behauptung – nicht mit PLATONS Intention zu verwechseln. Indem Ziegler die rein mathematischen Relationen in den Mittelpunkt stellt und auf die moderne Unterscheidung zwischen Struktur und Modell rekurriert,<sup>20</sup> verliert er einerseits den Bezug zu den vorgestellten Kreisen und gewinnt keine reine Idee des Kreises, weil er im begrifflichen Rückgang nach 1.)-3.) nur zu anderem gelangt.

## 7.2.3 Hilberts Axiomatik

### 7.2.3.1 Implizite Definition

Diese Idee einer strikten Unterscheidung von Struktur und Modell trat in prominentester Form erstmals in der Axiomatisierung der elementaren Geometrie durch Hilbert auf.<sup>21</sup> Das neue an Hilberts Axiomatik war, auf Definitionen im strikten Sinn zu verzichten, den Gebrauch der Ausdrücke durch ihre

14 Siehe Ziegler 1992, Kapitel 3.

15 Siehe Ziegler 1992, Kapitel 5.

16 Siehe Ziegler 1992, Kapitel VII, S. 192ff..

17 Siehe Ziegler 1992, Kapitel IX, XI.

18 Siehe Ziegler 1992, S. 277ff..

19 Siehe Ziegler 1992, Kapitel VII, insbesondere S. 181.

20 Vgl. Ziegler 1992, S. 152ff..

21 Um präzise zu sein: Es ist hier und im folgenden mehr eine Dedekindsche Deutung der Hilbertschen Axiomatik gemeint und keine formalistische des späteren Hilbert. Dedekinds «structural style of reasoning» (Reck 2009, S. 162) scheint zumindest für unsere Zwecke weit genug mit der Mathematikauffassung übereinzustimmen, die heutzutage – soweit man das verallgemeinern kann – im Mathematikstudium vermittelt wird. Diese der zeitgenössischen mathematischen Praxis inhärente schwache Strukturalismus liegt dieser Arbeit auch an anderen Stellen zugrunde.

Benutzung in den Axiomen festzulegen und die Ausdrücke so durch ihre Relationen zu den anderen vorkommenden Ausdrücken zu bestimmen.<sup>22</sup>

Die Axiome der Verknüpfung:<sup>23</sup>

«1. Zu zwei Punkten  $A, B$  gibt es stets eine Gerade  $a$ , die mit jedem der beiden Punkte  $A, B$  zusammengehört.»<sup>24</sup>

«2. Zu zwei Punkten  $A, B$  gibt es nicht mehr als eine Gerade, die mit jedem der beiden Punkte  $A, B$  zusammengehört.»

«3. Auf einer Geraden gibt es stets wenigstens zwei Punkte. Es gibt wenigstens drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen.»

«4. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten  $A, B, C$  gibt es stets eine Ebene  $\alpha$ , die mit jedem der drei Punkte  $A, B, C$  zusammengehört. Zu jeder Ebene gibt es stets einen mit ihr zusammengehörigen Punkt.»

«5. Zu irgend drei nicht auf ein und derselben Geraden liegenden Punkten  $A, B, C$  gibt es nicht mehr als eine Ebene, die mit jedem der drei Punkte  $A, B, C$  zusammengehört.»

«6. Wenn zwei Punkte  $A, B$  einer Geraden  $a$  in einer Ebene  $\alpha$  liegen, so liegt jeder Punkt von  $a$  in der Ebene  $\alpha$ .»

«7. Wenn zwei Ebenen  $\alpha, \beta$  einen Punkt  $A$  gemein haben, so haben sie wenigstens noch einen weiteren Punkt  $B$  gemein.»

«8. Es gibt wenigstens vier nicht in einer Ebene gelegene Punkte.»

Hilberts Grundlegung der elementaren Geometrie war nicht nur besonders in ihrer übersichtlichen Vollständig- und Genauigkeit, sondern auch in ihrer neuen Weise der Axiomatisierung einer mathematischen Theorie. Hilberts Axiome bestehen nur aus Aussagen, die in ihrer Gesamtheit die in ihr auftretenden Objekte und Zusammenhänge *implizit definieren*. Hilbert selbst benutzte den Ausdruck *implizite Definition* nie, im Fachdiskurs setzte er sich, obwohl historisch falsch gebraucht, letztlich durch.<sup>25</sup>

Hilberts Axiomatisierung ist ein Ausfluss seiner mathematischen Praxis, und so auch gegenüber den Einwänden Freges als die Axiomatik des mathematischen Puristen zu bewerten, der sich auf das für seine Praxis notwendig Vorauszusetzende beschränkt. Die mathematische Praxis ist bei Hilbert bereits die des Beweisens, und die Fragen, die sich auch in Hinblick auf eine Axiomatisierung stellen, sind: *Was benötigt man, um etwas wie beweisen zu können.*

Was man nicht in vollem Umfang benötigt, sind Definitionen und Axiome *a la* Frege.<sup>26</sup> Dieser teilte noch traditionellere Ansichten: «Von alters her nennt man Axiom einen Gedanken, dessen Wahrheit feststeht, ohne jedoch durch eine logische Schlußkette bewiesen werden zu können.»<sup>27</sup> Und definierte die ‚Definition‘ so: «Definitionen nennt man in der Mathematik wohl allgemein die Festsetzung der

22 Was Hilbert und viele Kommentatoren vergessen zu erwähnen ist das zweite Element, nämlich die Existenz, die von einzelnen Sorten bzw. geometrischen Objekten durchgehend gefordert wird, und von der es der formale axiomatische Rahmen es zulässt, dass sie ohne Bezug auf andere Sorten gefordert werden konnten. Wie z. B., dass mindestens zwei Geraden existieren, als Ersatz für den zweiten Satz von Axiom 3.

23 Folgende Zitate stammen aus Hilbert 1962, S. 3ff. Neben den hier angeführten Axiomen der Verknüpfung, bildet sich das vollständige Axiomensystem durch Hinzufügung der Axiome der Anordnung, Kongruenz, Stetigkeit und des Axioms der Parallelen.

24 «Hier wie im Folgenden sind unter zwei, drei, ... Punkten bzw. Geraden, Ebenen stets verschiedene Punkte, bzw. Geraden, Ebenen zu verstehen.»

25 Insofern hier mit *impliziter Definition* die gegenseitige Charakterisierung der Definienda alleine durch ihre Relationen zu den anderen Definienda gemeint ist, bezeichnet man sie in anderen Bereichen der Philosophie als *funktionale Definition*; vgl. Shapiro 1997, S. 130a15. Historisch ist eine Verwendung des Ausdrucks „implizite Definition“ nicht korrekt (worauf mich Andreas Erz mit der folgenden Literatur aufmerksam gemacht hat), denn Jose Diez Gergonne (1771-1859), der den Ausdruck einführte, gebrauchte in erkennbar anders; s. Otero 1970. Aber auch Moritz Pasch verwendete ihn in Bezug auf seine Grundlegung der Geometrie in wieder einem anderen Sinne; s. Gabriel 1978, S. 422. Als erstes scheint ihn Moritz Schlick (Schlick 1918, S. 30ff.) in der jetzt populären Bedeutungsvariante gebraucht zu haben.

26 Frege und Hilbert führten einen kurzen Briefwechsel ohne sich einigen zu können (abgedruckt in Frege 1983), und Frege veröffentlichte seine Ansichten in ein paar Artikeln (in denen er bedauert, dass Hilbert dies seinerseits ablehnte; Frege 1903, Frege 1906). Zu beachten ist bei Freges Kritik, dass er sich zunächst nur auf die erste, 1899 erschienene, Version von Hilbert 1962 beziehen konnte, die noch wesentlich verändert und erweitert wurde.

27 Frege 1903, S. 319.

Bedeutung eines Wortes oder Zeichens. Die Definition unterscheidet sich von allen andern mathematischen Sätzen dadurch, daß sie ein Wort oder Zeichen enthält, das bis dahin keine Bedeutung hatte, nun aber durch sie eine bekommt.»<sup>28</sup> Dem reinen Mathematiker liegt die Diskussion der nicht beweisbaren Wahrheit einer mathematischen Aussage jedoch jenseits seiner Disziplin. Er wird vielleicht auch mehr nach einfachen Aussagen Ausschau halten, die nicht mehr in mehrere einfache und zugleich mathematisch interessante Aussagen zerlegbar sind. Auch die Festlegung eines Gegenstandsbezugs durch eine Definition gehört nur so weit zur reinen Mathematik, als sie für die Praxis relevant ist. Der mathematische Purist beschränkt sich demnach auf die Bestimmungen, die den Ausdrücken notwendig zukommen, insofern sie Bestandteil der im Beweisgang vorausgesetzten Sätze sind. Was für den mathematischen Puristen die Loslösung von aller nicht-mathematischer Ungewissheit ist, war für Frege ein Graus: «Herr Hilbert hackt Definition und Axiom beide ganz fein, mengt sie sorgfältig durcheinander und macht eine Wurst daraus.»<sup>29</sup>

Eine Folge dieser Beschränkung auf das mathematisch Wesentliche ist, dass durch die nun vorausgesetzten Bestimmungen die traditionellen mathematischen Gegenstände nicht eindeutig definiert werden. Die Axiome bestimmen vielmehr eine Struktur oder eine Sammlung von Strukturen, die auch auf die traditionellen Gegenstände, wie hier den Geraden und Punkten, passen, aber von den rein mathematischen Zusammenhängen her nicht auf diese beschränkt sind. Eine erfüllbare Struktur hat viele verschiedene Modelle. Die Reichweite der bewiesenen mathematischen Zusammenhänge kommt dadurch zum Vorschein; sie gelten für alle und nur die Modelle jener Struktur.

### 7.2.3.2 Hilberts Axiomatisierung zwischen Vorstellung und Begriff

Wie stellt sich diese Art der Axiomatisierung und ein Mathematisieren auf dieser Grundlage im Licht von PLATONS Aufstiegsplan dar?

Kurt von Fritz ist der Meinung, dass Hilberts Ansatz nah verwandt ist mit der Intention des Autors des *Siebten Briefs*.<sup>30</sup> Beide seien sich der Inadäquatheit der sinnlichen Dinge wie ihrer Definitionen und der Willkür der Namengebung bewusst. Hilbert würde den geometrischen Objekten gerne andere Namen geben, auch wenn er letztlich darauf verzichte, weil auch neue Namen wieder auf die vorgestellten oder sichtbaren Objekte verweisen könnten. (Vielmehr wird durch die implizite Bestimmung die Referenz eines Ausdrucks überflüssig, und jeder Ausdruck kann durch jedes beliebige Wort, das nicht bereits in den Axiomen verwendet wird, substituiert werden.) Ähnlich problematisch seien auch die (platonischen) geometrischen Definitionen, die durch die impliziten ersetzt wurden.<sup>31</sup>

Die hier vertretene These ist gerade umgekehrt, dass bereits durch diese Methodik, die beispielhaft für das ganze moderne Mathematisieren ist, der Aufstieg zur Schau der Ideen verhindert wird, so wie er PLATON vorschwebte. Das geschieht dadurch, dass durch diese Art der Axiomatik sich die Mathematik sowohl von den Vorstellungen wie auch von den allgemeinen Begriffen abtrennt und ein eigenständiges Gebiet der mathematischen Zusammenhänge und Objekte begründet.

1.) Durch die Unterscheidung von Struktur und Modell wird die vormals eindeutige Beziehung der mathematischen Untersuchung zu den Objekten der Vorstellung und der Wahrnehmung aufgelöst, denn eine Struktur hat stets unterschiedliche Modelle. Die üblichen geometrischen Objekte erfüllen

28 Frege 1903, S. 319f. «Die Definition eines Gegenstandes sagt als solche eigentlich nichts von ihm aus, sondern setzt die Bedeutung eines Zeichens fest.» (Frege 1987, § 67).

29 Frege 1906, S. 297.

30 Siehe von Fritz 1971, S. 418f..

31 Hoffmann versucht im Sinne der impliziten Definitionen ein modelltheoretisches Verständnis von *Epinomis 990e-991b* plausibel zu machen und schlägt davon ausgehend eine dem entsprechende Interpretation der Idee des Guten vor; siehe Hoffmann 2004 und Hoffmann 2006.

die Axiome der Verknüpfung, ganz andere Objekte allerdings auch. Damit fällt aber der vormals intendierte Objektbereich weg, und es bleiben letztlich nur die Strukturen – oder die in den Strukturen festgelegten Strukturmomente – als Objekte der Mathematik übrig. Dadurch ist aber auch jede Untersuchung und Fundierung der Voraussetzungen der Axiome keine philosophische Analyse dessen, was die vormals intendierten Objekte ihrem Wesen nach sind. Vielmehr wird man dazu tendieren, auf die formalen und nicht die inhaltlichen Voraussetzungen zu reflektieren, z. B. was eine eindeutige Bestimmung ist (s. Abschnitte 7.2.2), oder was die formal-logischen Eigenschaften der jeweiligen Theorie sind. Damit wird jedoch auf die Kette der Abbilder, nämlich dass z. B. der Kreis in ganz unterschiedlicher Weise in Zeichnungen, Definitionen, Worten und Gedanken auftritt, kein Bezug genommen und so gerade der Konzeption des Aufstiegs nach dem *Siebten Brief* nicht gefolgt (*Siebter Brief* 342a-344d).

2.) Die Klarheit der Axiome bei Hilbert ist zum einen damit erkauft, dass es keine weiter zu klärenden inhaltlichen Voraussetzungen gibt, hinter die man philosophisch zurückgehen könnte. Zum anderen damit, dass die Axiome der Verknüpfung keine reinen Begriffszusammenhänge darstellen, sondern (bis auf Axiom sechs) Existenzsätze sind (bzw. Existenzsätze enthalten). So könnte man die Axiome eins und zwei zusammenfassen zu: *Zu zwei Punkten existiert genau eine Gerade, auf der beide liegen*. Ohne Existenzbehauptung formuliert: *Zwei Punkte auf einer Geraden bestimmen diese eindeutig*. Bei EUKLID wird das m. E. zu einer in der Vorstellung vollzogenen Ableitung mittels der Definitionen 3 und 4 und Postulat 1. Definition 3 bestimmt dabei rein begrifflich: *Die (zwei) Enden einer (endlichen) Linie sind Punkte*. Während in der Axiomatik der *Elemente* die begrifflichen und die mehr auf die Vorstellung und die Anschauung bezogenen Voraussetzungen (durch die Teilung in Definitionen & Axiome und Postulate) getrennt dargestellt werden, wird in Hilberts Axiomatik durch die Existenzbehauptungen der Vorstellungsbereich, durch den die einzelne Idee eines geometrischen Objekts vervielfältigt wird, mit den rein begrifflichen Zusammenhängen verschmolzen. Dadurch sieht man der Geometrie nicht (mehr) vermittlels der Axiome die allgemeinen Begriffe oder Ideen an, die sie (zumindest aus platonischer Sicht) wesentlich voraussetzen müssen.

Durch 1.) werden die modernen mathematischen Objekte von der Vorstellung abgeschnitten, durch 2.) – zumindest soweit sichtbar – von den allgemeinen Begriffen oder Ideen. Damit kann die Mathematik ihrer Brückenfunktion nicht mehr gerecht werden.<sup>32</sup>

### 7.3 Gibt es Ideen der Menge und Zahl?

Was man versteht, wenn man etwas versteht, sind Ideen. Folglich gilt auch etwas abgeschwächt, dass, wenn es keine Idee von etwas gibt, dieses letztlich auch nicht verstanden werden kann (*Parmenides* 135bc).<sup>33</sup> Wenn es demnach keine Idee der Zahl und keine der Menge gibt, sind Zahl- und Mengenbegriff letztlich unbestimmt und unbestimmbar.

Um zu zeigen, dass keine Idee der Zahl oder Menge existiert, wird i. f. weiter vorausgesetzt, dass Ideen ‚starke‘ Einheiten sind, d.h. weniger Teil eines anderen übergeordneten Ganzen, sondern autonome, sich selbst begründende Einzelne.<sup>34</sup> Aus den zwei Voraussetzungen folgt, dass das, was man versteht, Ein-

32 Insofern die Platonexegeten weitgehend die frühgriechische Mathematik von der modernen Mathematik her verstehen, wodurch die Brückenfunktion der Mathematik gekappt wird, haben sie massive Schwierigkeiten, etwas exaktes und detailliertes über die Bedeutung der mathematischen Wissenschaften für die Dialektik zu sagen. So z. B. Frede 2006, S. 143, die im Bewusstsein der Problematik resümiert: «Es scheint, als habe PLATON jedenfalls davon geträumt, dass letztlich alle guten Dinge auf mathematisch geordneten Verhältnissen beruhen.» Was aber mit «mathematisch geordneten Verhältnissen» gemeint sein soll, insofern jener Traum etwas anderes ist, als das moderne Ideal der Physik, die ganze Natur mit mathematischen Gesetzen zu begreifen, bleibt in Frede 2006 unklar, und damit auch inwiefern die Übung in den mathematischen Wissenschaften über eine «mathematisch orientierte Schulung im methodischen Denken» (S. 144) hinausgeht. Ich hoffe, mit meinen Ausführungen die Verwurzelung dieser Schwierigkeiten in der Methodologie der modernen Mathematik angedeutet zu haben.

33 Angenommen muss werden, dass Ideenverknüpfungen wieder Ideen ergeben.

34 Siehe Abschnitt 1.3.9.

heiten sind, man etwas also nicht aus seinen unverstandenen einzelnen Teilen versteht. Diese Folgerung ist für PLATON in *Theaitetos* 206b nachweisbar, insofern ‚starke‘ Einheiten nicht ‚lose‘ zusammengesetzt sind und damit elementar.<sup>35</sup>

### 7.3.1 Zu einer Idee der Zahl

PLATON hätte direkt gefragt wohl behauptet, dass zwar hinter jeder einzelnen Zahl<sup>36</sup> sich eine dieser entsprechende Idee verbirgt, aber nicht hinter allen eine Gattung, eine Idee der Zahl. Zumindest soll dies in diesem Abschnitt etwas wahrscheinlicher gemacht werden.

Nimmt man die Behauptungen des ARISTOTELES über die Pythagoreer, dass für sie die (natürlichen) Zahlen das Fundament der Wirklichkeit bilden, und über PLATON, dass für ihn den Zahlen bereits in der Ideenwelt eine ähnlich fundamentale Rolle zukommt, als wahr an, dann scheinen bereits hier die einzelnen Zahlen gegenüber einer umfassenden Zahlidee in den Vordergrund gerückt.<sup>37</sup> In einem Ideenkosmos müsste die Zahlidee zudem den einzelnen Zahl(ide)en übergeordnet sein, was sich bei PLATON nur dann ergibt, wenn man die Überidee der Einheit (vielleicht zusammen mit dem zweiten Prinzip der unbestimmten Zweiheit) als die allgemeine Zahlidee ansetzt. Dies entspräche der traditionellen Anschauung, dass in der Eins bzw. Einheit bereits alle anderen Zahlen ‚prinzipiell‘ eingeschlossen sind, die Eins Prinzip der Zahlen sei und deshalb selbst mehr als eine einzelne Zahl.<sup>38</sup> Aber bereits PLATONS Konzeption der Einheit als über allen Ideen stehend ist ein Indiz, dass es sich bei dem Verhältnis von Zahl zu Zahlen nicht um eines von Gattung zu Arten, oder vom Allgemeinen zum Besonderen handelt (dazu mehr weiter unten).

Zu den ältesten überlieferten Fragmenten der Pythagoreer gehören die Aussagen PHILOLAOS über die zwei Prinzipien der Begrenzung und Unbegrenztheit. PLATON greift sie im *Philebos* auf und versucht mit ihnen die Tonleiter und die Buchstaben zu begreifen.<sup>39</sup> Ein Merkmal des Begrenztseins ist es dort und expliziter in *Parmenides* 137d zwei Grenzen zu haben oder von zwei ‚Seiten‘ begrenzt zu werden. Ein Beispiel dafür ist die Bestimmung eines Begriffs durch Oberbegriff und Spezifikum, wie die Linie durch das Geradesein zur geraden Linie spezifiziert wird. Jedenfalls scheint in einer begrifflichen Struktur erst durch ein drittes Strukturmoment das Verhältnis des zweiten Moments zum ersten genauer bestimmt zu werden.

Dies ist gegen den Anschein auch in anschaulichen elementargeometrischen Zusammenhängen der Fall. So ist es im Rahmen der Euklidischen Geometrie begrifflich nicht korrekt oder zumindest verkürzt, davon zu sprechen, dass die Kreislinie die Kreisfläche begrenzt. Tatsächlich teilt die Kreislinie die Ebene in zwei Teile, die begrifflich und anschaulich die Kreislinie begrenzen. Um festzulegen, welcher dieser beiden Teile der Ebene das Innere ausmacht, womit man auch festlegt, welcher das Äußere, muss ein Teil gegenüber dem anderen durch ein weiteres begriffliches Moment gewichtet werden, z. B. dadurch, dass in ihm der Mittelpunkt liegt. Damit wird die Kreisfläche aber begrifflich (und in diesem Fall auch anschaulich) durch zwei Elemente begrenzt, den Mittelpunkt und die Kreislinie.

Sind die Definitionen der natürlichen Zahlen zweiseitige Begrenzungen? Die Bestimmung der natürlichen Zahlen durch die Peano-Axiome (s. S. 108) deutet sich bereits bei ARISTOTELES an:

<sup>35</sup> Vgl. dazu Horn 2005, S. 308. Eine systematische Begründung dieser epistemologischen Voraussetzungen und ihre Beziehung zu den impliziten Definitionen kann hier nicht gegeben werden.

<sup>36</sup> Gemeint sind in diesem Abschnitt nur die natürlichen Zahlen, die spätestens bei der 3 beginnen.

<sup>37</sup> Für die These, dass ARISTOTELES bereits pythagoreische Auffassung interpretierend zusammenfasst, wenn er behauptet, sie würden meinen, dass alle Dinge aus Zahlen seien, siehe Huffman 1988.

<sup>38</sup> In der gewöhnlichen frühgriechischen Mathematik nimmt die Eins eine Sonderstellung, nach der ungeschriebenen Lehre ‚erzeugt‘ sie zusammen mit der unbestimmten Zweiheit die Zahlen; siehe Anhang von Gaiser 1998.

<sup>39</sup> Siehe *Philebos* 16cff. und dazu Böhme 2000, S. 128ff..

... notwendig muß man doch die Zahlen durch Hinzufügung bilden, z. B. die Zweiheit, indem man zum Einen ein anderes Eines hinzusetzt, und die Dreiheit, indem man zu der Zwei ein anderes Eines hinzusetzt, und die Vierheit auf dieselbe Weise.<sup>40</sup>

Diese Bestimmung der Zahlen darüber, dass es zu jeder Zahl ausgehend von einer ersten immer noch eine neue gibt, besteht gerade darin, die Begrenzung (durch Zahlen) konsequent zu hintergehen. Betrachtet man die Zahlen zwischen 1 und 4, oder die 4, insofern sie die Zahlen 1, 2 und 3 voraussetzt, dann besagt eine Bestimmung der Zahlen, dass dies noch nicht alle Zahlen sind, sondern noch eine weitere ‚nach‘ der 4 existiert. Diese ganz einfache Einsicht in die Natur des Zählens wird bedeutender, wenn man berücksichtigt, dass ein Bestimmen stets ein (zweiseitiges) Begrenzen ist, das in diesem iterativen Bestimmungsversuch der Zahlen performativ negiert wird. Dann könnte man, dass es immer noch eine größere Zahl gibt, interpretieren als, dass, immer wenn man ein(ig)e Zahl(en) bestimmt hat, man noch nicht alle Zahlen bestimmt hat. Also ist dieser Bestimmungsversuch der Zahlen gerade so gebaut, dass er selbst verhindert, dass man mit ihm (allein) die Zahlen näher bestimmen oder sogar definieren könnte.

Dass diese iterative Bestimmung der Zahlen nicht ausreicht, um die Zahlen zu definieren, schließt die Möglichkeit einer ideenmäßigen Bestimmung nicht grundsätzlich aus. Das folgende Argument möchte dies leisten in Anlehnung an eine Bemerkung des ARISTOTELES in der *Nikomachischen Ethik*:

Diejenigen, die diese Lehre [von den Ideen] aufgebracht haben, haben überall da keine Ideen angenommen, wo sie von einem Früher und Später redeten (darum haben sie auch keine Gesamtidee der Zahlen aufgestellt).<sup>41</sup>

Mit «Früher und Später» ist eine begriffliche Abhängigkeit in eine Richtung gemeint, das «Spätere» setzt das für es «Frühere» voraus.<sup>42</sup> Eine asymmetrische Abhängigkeit besteht tatsächlich zwischen einer Zahl und ihren Vorgängern, wie eine Phantasievariation zeigt.<sup>43</sup> Eine Variation von z. B. vier Dingen schließt immer eine gleiche über drei, zwei und ein Ding mitein. Denn dafür muss nur eines (oder mehrere) der Dinge weggelassen werden. Eine Zahl setzt also notwendig alle ihre kleineren Zahlen voraus. Diese Bestimmung müsste somit in der allgemeinen Zahlidee berücksichtigt sein. Jede wirkliche Definition der allgemeinen Zahl ist dann aber zirkulär, weil sie die Zahlidee bereits voraussetzt, wenn sie die Vorgängerzahlen thematisiert, und die Zahlidee wäre inhaltlich selbstbezüglich. Da die Idee aber gerade den Was-Gehalt ihrer Instantiationen ausmacht, müsste somit jede einzelne Zahl inhaltlich selbstbezüglich sein, was nicht der Fall ist. Es gibt demnach keine allgemeine Zahlidee.

Dieses Argument lässt sich für beliebig asymmetrisch abhängige Ideen verallgemeinern, womit verständlich wird, warum die Zahlen von PLATON nicht durch eine Dihairesis, die von einem allgemeinen Begriff ausgehend immer weiter möglichst zweiteilige Unterscheidungen einführt, bis das zu bestimmende getroffen wurde, bestimmt werden, sondern einfach in der Reihenfolge ihrer Abhängigkeit angeführt werden.<sup>44</sup> Dazu passt die indirekt überlieferte Vorstellung PLATONS, dass die Zahlen aus den zwei Prinzipien des Einen und der unbestimmten Zweiheit ‚hervorgehen‘,<sup>45</sup> also nicht dihairetisch abgeleitet werden. Entsprechend sollte man Kennzeichnungen der Zahlen durch ihre ‚Erzeugungsmethode‘ in

40 *Metaphysik 1081b14ff.*, vgl. *Metaphysik 1080a30ff.*

41 ARISTOTELES *Nikomachische Ethik 1096a*. Stenzel 1924, S. 6, versteht die Stelle noch falsch, so als ob PLATON gar keine Ideen von Zahlen angenommen hätte.

42 Vgl. *Topik 141b*.

43 Zur Erläuterung der Phantasievariation und ‚inwiefern ihr Gebrauch im Sinne Platons ist, siehe Abschnitt 5.7. ARISTOTELES ist gleicher Meinung in *Kategorien 14a*: «Im zweiten Sinn [wird das früher genannt], was sich in der Abfolge des Vorkommens nicht umkehren läßt, zum Beispiel ist die eins früher als die zwei. Wenn die zwei ist, folgt sogleich, daß die eins ist, wen die eins ist, ist es nicht notwendig, daß zwei ist. Daher läßt sich von der eins her die Abfolge des Vorkommens des übrigen nicht umkehren. Derartiges scheint früher zu sein, von dem her die Abfolge des Vorkommens sich nicht umkehren läßt.»

44 Siehe Abschnitt 1.3.6. Zu der Vorstellung, dass die Ideenzahlen mittels einer Dihairesis bestimmt werden, vgl. Gaiser 1998, S. 363f..

45 Vgl. *Metaphysik 1081a14f.* und Kapitel 4.



Abhängigkeit von den zwei Prinzipien nicht mit einer ideenmäßigen Bestimmung verwechseln. So z. B. die Aussage: «der primäre Begriff von ‚Zahl‘ ist der einer geeinten Vielheit, die ihre eigene Form- und Wirkursache ist.»<sup>46</sup> Der «primäre Begriff» ist keine Idee und die «Vielheit» in den Ideen genau die Zahlideen. Man beachte dabei, dass die unbestimmte Zweiheit ein Derivat der Zweiheit ist, weil die Zweiheit das Bestimmtere und Einheitsgemäßere ist. Das stimmt mit der Darstellung im *Parmenides* überein, insofern mindestens die ersten zehn Ideenzahlen zum höheren Seinsbereich der Ideen gehören,<sup>47</sup> während man die unbestimmte Zweiheit plausibel mit dem seienden Einem der zweiten *hypothesis* verbindet.<sup>48</sup>

### 7.3.2 Zur Idee der Menge

„Menge“ kann als Übersetzung folgender altgriechischer Ausdrücke dienen: „τὸ πλῆθος“, „ἡ εὐπορία“, „ἡ ἀφθονία“ oder „οἱ πολλοί“. Aber auch der Ausdruck für Zahl (ὁ ἀριθμός) wurde in der voreuklidischen Zeit oftmals in der Bedeutung von Menge von etwas gebraucht.<sup>49</sup> Allerdings wurden diese Mengen als geordnete Vielheiten aufgefasst.<sup>50</sup> Der moderne Mengenbegriff ist dagegen der einer möglicherweise ungeordneten Zusammenfassung beliebiger Dinge. Eine ideenmäßige Bestimmung der Menge scheitert nun daran, dass die zusammengefasste Vielheit grundsätzlich *beliebig* ist (siehe nächsten Abschnitt). D. h. aber insbesondere auch, dass eine konkrete Menge nicht ideenmäßig zusammengestellt sein muss, sondern es auch zufällig *oder irgendwie anders* sein kann. Um dies adäquat zu fassen, müsste die Idee der Menge auf den sinnlichen Seinsbereich oder dessen Abstraktion Bezug nehmen und damit auf etwas verweisen, was außerhalb der Ideen liegt. Damit wäre sie aber nicht mehr autonom und auf sich selbst gegründet, also keine Idee mehr. Auch die Idee der Einheit leistet diese Inkorporation des ‚beliebig‘ nicht.

Eine Menge ist demnach nur insofern die *Einheit* einer Vielheit und hat platonisch gesprochen an der Idee der Einheit teil, als auch jedes andere Einzelne an der Idee der Einheit teilhat. Eine Menge ist insofern eine Einheit als ich von ihrer Vielheit als Einzelnes spreche.<sup>51</sup>

46 Radke 2003, S. 555. Die ‚Vielheit‘ steht hier für das Prinzip der unbestimmten Zweiheit oder ist mit ihm verwandt.

47 Vgl. Abschnitt 1.3.6.

48 Siehe Horn 1995, S. 99ff..

49 Vgl. Pritchard 1995, Kapitel 2.

50 In den *Elementen* wird z. B. erst Zahl als Menge von Einheiten definiert in (VII D2), aus dem folgenden (VII D3) wird aber deutlich, dass eine Ordnung der Einheiten mitgedacht wurde. Siehe ansonsten auch Pritchard 1995, S. 29, und Böhme 2000, S. 47ff..

51 Ein natürlicher historischer Anknüpfungspunkt dieser asketischen Argumentation sind die Arbeiten von Husserl zum Zahl- und Mengenbegriff. Wenig bekannt scheint zu sein, dass Husserl gerade zu Beginn seiner philosophischen Laufbahn über ein Jahrzehnt lang ein Kollege und enger Freund von Georg Cantor, dem Begründer der Mengenlehre, der den mathematischen Gehalt Husserls Habilitation begutachtete, an der Universität Halle war (siehe Hill 1997). Hier ist leider kein Raum, um auf den Erkenntnisgewinn dieser Verbindung einzugehen.

## 7.4 Zur Grundlegung der Mengenlehre

Der Mengenbegriff ist der allgemeinste und grundlegendste Begriff der modernen Mathematik. Denn Mengen sind die abstraktesten mathematischen Objekte, einerseits durch ein Minimum an Bestimmungen festgelegt, andererseits völlig beliebig in ihrer individuellen Ausformung: Einzig durch eine zweistellige Relation des Enthaltens ( $\in$ ) aufeinander bezogen, soll ein Mengenuniversum, der Konzeption der Mengen nach, alle möglichen – und damit auch beliebig ausgeformten – Mengen enthalten.<sup>52</sup> Dadurch können aber alle anderen mathematischen Objekte durch Mengen simuliert, d.h. strukturgleiche Mengen und Mengenbereiche gekennzeichnet werden, und – wie manche meinen – eigentlich die ganze Mathematik auf Mengenlehre reduziert werden. Ein Argument für die letzte Behauptung erwächst allein schon aus dem Umstand, dass die mathematische Sprache praktisch die Sprache der Mengentheorie ist.

Zu bestimmen, was eine (mathematische) Menge ausmacht – was vor allem auch heißt, grundsätzlich festzulegen, welche Mengen es gibt und welche nicht – setzt sich durch die genannten Eigenschaften des Mengenbegriffs in der modernen Mathematik<sup>53</sup> von der Bestimmung der meisten anderen mathematischen Begriffen ab. Zur Erläuterung der Menge bzw. der Enthaltensbeziehung können keine anderen mathematischen Begriffe verwendet werden, weil der Mengenbegriff zu den grundlegendsten gehört.<sup>54</sup> Als Quelle unserer Mengenbegriffe muss deshalb etwas dienen, das nicht-formalisiert,<sup>55</sup> und damit (noch) nicht in scharfe Begriffsform gebracht wurde; es wird im folgenden *Intuition* genannt.

Intuitionen (in diesem Sinne) sind *per definitionem* schwer zu greifende ‚Dinge‘, da sie nicht formalisiert sind, d.h. hier (noch) nicht in einer mathematischen Sprache klar gefasst wurden (s. Abschnitt 5.1.2). Insofern sie die Quelle der Mengenbegriffe bilden, ist ihnen die Autorität eigen, ihre Formalisierungen zu kontrollieren und zu korrigieren. Denn eine Mengentheorie in einer Prädikatenlogik erster Stufe ist ein festes Gebilde von Zeichenmengen im Kontext einer bestimmten Sprache und zugehöriger Ableitungskalküle, die dies selbst nicht leisten kann. Andererseits sind Intuitionen nicht zu verwechseln mit absolut vorthoretischen, sogenannten ‚naiven‘ Mengenvorstellungen des mengentheoretischen Laien. Die Mengenintuitionen – d.h. Intuitionen, die Mengentheorien begründen –, verändern sich nämlich, wenn man sie formalisiert, sie werden durch die mathematische Arbeit in einer Mengentheorie geschult und verfeinert. Ein vorthoretisches Problem kann es zum Beispiel sein, keinen Unterschied zwischen einem Gegenstand und seiner Einermenge, d.h. der Menge, die genau ihn als Element hat und sonst nichts, festmachen zu können. Jemand heutzutage mengentheoretisch Geschultes hat dieses Problem nicht (mehr), diese Einermenge ist eine Menge und hat genau ein Element, der Gegenstand hat keine Elemente und ist keine Menge, sondern ein sogenanntes Urelement. Würde die Mengentheorie außerdem eine Rechtfertigung durch vorthoretische Mengenvorstellungen benötigen, wäre sie nicht mehr so autonom und von außermathematischen Umständen eingeschränkt, wie es die Mathematik

52 Dass das Mengenuniversum alle *möglichen* Mengen enthält, scheint eine tautologische Aussage zu sein, zumindest ist sie zirkulär. Damit ist jedoch bei den grundlegendsten Begriffen zu rechnen, da sie nicht durch grundlegendere Begriffe bestimmt werden können. Diese zirkuläre Bestimmung nimmt in der mengentheoretischen Praxis die Form eines Postulats an, das auffordert, das Mengenuniversum zu maximieren, und so z. B. in der Diskussion um die These  $V = L$  eine wichtige Rolle spielt; vgl. das Prinzip «MAXIMIZE» bei Maddy 1997, S. 210.

53 Die antike Mathematik, insbesondere PLATON, hatte einen anderen, viel eingeschränkteren Mengenbegriff. Man kann spekulieren, was für eine mathematische Bedeutung EUKLID dem modernen Mengenbegriff zugesprochen hätte; meine Antwort: keine; vgl. Abschnitt 7.3.2. Auch heute ist die Bedeutung des Mengenbegriffs in der Mathematik nicht unumstritten, allerdings, was die Praxis der Mathematik angeht, nur durch den Imperativ infrage gestellt, es doch anders zu machen, z. B. die Kategorientheorie als Rahmen zu wählen.

54 Dies galt nach Hallett 1984, S. 304, bereits für Cantor. Für Frege dagegen scheint die (mathematische) Funktion das Grundlegende gewesen zu sein, denn für ihn waren Begriffe Funktionen und Funktionen so undefinierbarer Teil der Logik und scheinbar grundlegender als die natürlichen Zahlen, die aus seiner Logik herzuleiten eines der Ziele Freges war.

55 Wir verwenden hier einen spezielleren Formalisierungsbegriff. Formalisierung bedeutet in diesem Abschnitt stets Formalisierung in einer Prädikatenlogik erster Stufe mit den zweistelligen Prädikatkonstanten  $\in$  und  $=$  und möglichst wenig weiterem. Siehe Abschnitt 5.1.2.

tatsächlich vor der Moderne gewesen ist. Die Mengenlehre ist aber gerade ein Fachgebiet der modernen Mathematik ohne historische Vorläufer, die für sie eine Autorität darstellen würden.

Genauer sollen Intuitionen Nicht-Formalisiertes sein, ein noch nicht vollständig expliziertes Verständnis, das man versucht zu formalisieren, um es begrifflich schärfer zu fassen. Erschöpft sich eine Intuition in dem semantischen Gehalt eines Satzes der gewählten formalen Sprache, so spricht nichts dagegen, sich in diesem Fall nur noch auf die Aussage des Satzes zu beziehen. Aber oftmals ist dies nicht der Fall und die Intuition wird nicht ganz eingefangen von ihrem Formalisierungsversuch. Als Nicht-Formalisiertes und vermutlich oftmals nicht vollständig Formalisierbares ist eine Mengenintuition eine Art Vorbegriff einer Menge, der bestenfalls als ein Leitprinzip zur Aufstellung immer neuer Axiome dienen kann. Aber nicht jedes derartige Leitprinzip muss eine Mengenintuition sein, da Leitprinzipien auch rein technischer Natur sein können.<sup>56</sup>

Im folgenden werden zum einen nur *axiomatisierte* Mengenbegriffe im Abschnitt 7.4.1 behandelt, damit eindeutig ist, wodurch die jeweilige Mengentheorie festgelegt ist. Dies ist hilfreich, weil ja noch nicht deutlich ist, was eine Menge letztlich ist, und erst über die Axiomatisierung zurückgeschlossen werden soll.<sup>57</sup> Zum anderen werden nur in einer Prädikatenlogik erster Stufe mit den beiden zweistelligen Prädikatkonstanten  $\in$  und  $=$  (wenn nicht anders angegeben) *formalisierte* Mengenbegriffe herangezogen, um von dem üblichen Rahmen mathematischer Arbeit ausgehen zu können.<sup>58</sup>

Die Mengentheorien werden im folgenden anhand ihrer Axiomensysteme dargestellt. Dabei werden die Axiome ‚ontologisch genommen‘, d.h. es wird betrachtet werden, was durch sie und den logischen Folgerungen aus ihnen als Menge semantisch bestimmt wird. Denn sie sollen ja im Hinblick auf die ihnen zugrunde liegenden Mengenintuitionen betrachtet werden. Im Unterschied dazu könnte man in anderen Kontexten die Axiome z. B. nur als reine Formeln auffassen und das Axiomensystem auf seine metalogischen Eigenschaften hin untersuchen, oder man könnte nach informellen Definitionen suchen, mit denen die in den Axiomen verwendeten Ausdrücke klar definiert werden. Die moderne mathematische Axiomatik lehnt letzteres Ansinnen ab, weil sie der Hilbertschen Auffassung folgt, dass die nicht notwendigerweise formalisierten Axiome keine Erläuterung ihrer Ausdrücke durch zusätzliche Definitionen bedürfen, wenn auch vielleicht zusätzlicher Axiome. In dieser Tradition stehen (bis auf Finslers Versuch) alle wichtigen Axiomatisierungen der Mengenlehre.<sup>59</sup>

Zunächst werden die vorhandenen Mengentheorien zumindest in ihren grundlegenden Typen dargestellt (Abschnitt 7.4.1),<sup>60</sup> um dann ihre Intuitionen, soweit noch nicht geschehen, darzulegen, zu hinterfragen und miteinander im Hinblick auf einen einheitlichen Mengenbegriff zu vergleichen (Abschnitt 7.4.2). Dabei ist noch zu beachten, dass eine Theorie unterschiedlich axiomatisiert werden kann und darum auch aus unterschiedlichen Intuitionen die gleiche Theorie hervorgehen könnte, wie auch, dass eine Mengenintuition nicht notwendig historisch früher sein muss als ihre formale Theorie, die z. B. auch aus mathematisch-technischen Gründen aufgestellt worden sein könnte.

56 So kann man z. B. rein ‚technisch‘ versuchen, die Möglichkeiten elementarer Einbettungen auszureizen in Annäherung zu Kunens Entdeckung, dass es keine elementare Einbettung von  $\mathbb{V}$  in sich gibt; siehe Kanamori 2003, S. 319.

57 Anders verhält es sich mit den natürlichen Zahlen, die man durch ihre eindeutige Axiomatisierung nicht besser begreift. So auch Hallett 1984, S. 300: «Unlike the case of natural number, this is largely *why* set theory is axiomatized, because we do *not* understand the set concept well.»

58 Welche Probleme entstehen können bei der Formalisierung einer informellen Mengentheorie und die damit zusammenhängenden Schwierigkeiten, mit einer derartigen Theorie mathematisch umzugehen, dafür siehe Abschnitt 5.5.

59 Hinsichtlich Zermelo vgl. Hallett 1984, S. 304.

60 Die Darstellung der Mengentheorien folgt nicht ihren historischen Gestalten, sondern dem, wie man sie heute fasst. Die Entwicklung der modernen Mengenlehre ist viel facettenreicher und komplizierter, als eine mehr systematische Darstellung es nahelegt (vgl. Kanamori 2009). Streng geurteilt wäre es sogar gerechter, nicht Cantor, sondern Zermelo zum Gründer der modernen Mengenlehre zu erklären (vgl. Kanamori 2009, S. 409). Aber auch Zermelos Axiome waren (noch) in keiner formalen Logik erster Stufe eingetragen.

### 7.4.1 Mengentheorien

Es scheint neben dem Axiomensystem **ZFC** und seinen auch klassentheoretischen Erweiterungen vor allem zwei Ansätze zu geben, die in der aktuellen Forschung berücksichtigt werden.<sup>61</sup> Beide begegnen dem Problem, die unbeschränkte Komprehension (s.u.) einzuschränken, mit syntaktischen Regeln für die Sätze, die bei der Komprehension benutzt werden dürfen. Zu den wesentlichen Ingredienzen einer semantischen Paradoxie gehören Selbstbezüglichkeit und Negation,<sup>62</sup> in den Positiven Mengentheorien wird die Negation aus den Formeln verbannt, während in **NF**-artigen versucht wird, die Selbstbezüglichkeit mittels einer syntaktischen Stufung zu verhindern.

Die Entstehung der axiomatischen Mengentheorien wird zuweilen so erzählt, dass Russells Entdeckung eines Widerspruchs in Freges *Grundgesetzen* eine Krise in der Grundlagenarbeit der Mathematik zur Folge hatte, und man, um Antinomien in mathematischen Theorien zu vermeiden, vor allem für die Mengenlehre versuchte Axiome aufzustellen, aus denen die bekannten Antinomien nicht direkt ableitbar waren. Bei Frege galt etwas Ähnliches wie die allgemeine Komprehension, die ein Satzschema ist, das festhält, dass zu jeder Eigenschaft auch ihre Extension existiert.<sup>63</sup>

$$\bigwedge \vec{x} \forall y \bigwedge z (z \in y \leftrightarrow \phi(\vec{x}, z)) \quad \text{mit } y \text{ nicht frei in } \phi(\vec{x}, z)$$

Russells Eigenschaft des Sich-nicht-selbst-enthaltens ( $x \notin x$ ) ergibt dann eine Menge, die sich nicht enthält, genau dann wenn sie sich enthält ( $x \in x$  gdw.  $x \notin x$ ). Da eines von beiden der zugrunde gelegten Logik nach aber gelten muss, folgt ein Widerspruch. (Anders in Logiken mit nur partiell definierten Prädikaten, für die dann z. B. nichts darüber aussagbar sein muss, ob  $x \in_{part} x$  oder nicht.)

Dass die Axiome nahezu aller Mengentheorien im zwanzigsten Jahrhundert im Bewusstsein der Russellschen Antinomie ausgewählt wurden, trifft zu. Dass die sogenannten **ZFC**-Axiome aber ihrer Idee nach Einschränkungen der *naïven Komprehension* seien, ist weitgehend falsch und wird im restlichen Abschnitt anhand einer leicht mißverständlichen Textstelle bei Zermelo diskutiert. Denn wären die Intuitionen der **ZFC**-Axiome erst später gefunden worden, wäre das ein starkes Argument gegen die Natürlichkeit der Intuitionen.

#### 7.4.1.1 Exkurs: Zermelo und die naive Komprehension

Während der Begründer der Mengenlehre, Georg Cantor (1845–1918), noch ohne Axiomatisierung auskam, stellte Zermelo 1908b als erster eine Reihe von Axiomen auf (in ihrer modernen Form **Z** genannt), die später von Fraenkel und Skolem erweitert wurden (zu **ZF**).<sup>64</sup> Das **C** in **ZFC** steht für das Auswahlaxiom (Axiom of Choice), das aber bereits unter den Axiomen Zermelos enthalten war. Die Einleitung in Zermelo 1908b legt nun selbst den Anschein nahe, dass es sich bei seiner Axiomatik um eine Begrenzung der unbeschränkten Komprehension handelt:

Angeichts namentlich der „Russellschen Antinomie“ von der „Menge aller Mengen, welche sich selbst nicht als Element enthalten“ scheint es heute nicht mehr zulässig, einem beliebigen logisch definierbaren Begriffe eine „Menge“ oder „Klasse“ als seinen „Umfang“ zuzuweisen. Die ursprüngliche Cantorsche Definition einer „Menge“ als einer „Zusammenfassung von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens zu einem Ganzen“ bedarf also jedenfalls einer Einschränkung, ohne daß

61 Mehr oder weniger vollständige und fundierte Überblicke des Spektrums an unterschiedlichen bekannten Mengentheorien bieten Holmes 2009, Apostoli et al. 2009, Hinnion 2003 und Fraenkel et al. 1973.

62 Die dritte ist ein reflektierbares Wahrheitsprädikat, die Selbstreferenz kann durch einen Referenzregress ersetzt werden; vgl. Blau 2008, S. 548.

63 Für eine Erläuterung der vielleicht ungewohnten Zeichen siehe S. 5.

64 Zermelos Axiome: Extensionalität, Elementarmengen (das die Existenz der Nullmenge, aller Singleton und Paarmengen garantiert), Aussonderung, Potenzmenge, Vereinigungsmenge, Auswahl, Unendlichkeit.

es doch schon gelungen wäre, sie durch eine andere, ebenso einfache zu ersetzen, welche zu keinen solchen Bedenken mehr Anlaß gäbe. ... Diese Aufgabe muß in der Weise gelöst werden, daß man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten.

In diesem Sinne scheint er mit seinem dritten Axiom, dem «Axiom der Aussonderung»<sup>65</sup>, die allgemeine Komprehension einzuschränken, denn es garantiert nur die Existenz der durch eine definite Eigenschaft bestimmten Teilmenge *einer bereits bestehenden Menge*. In einer Anmerkung dazu weist Zermelo auf den «Ersatz» hin, den dieses Axiom für die «als unhaltbar aufgegebene allgemeine Mengendefinition» bildet, und das die bekannten Antinomien sich aus ihm nicht ableiten lassen.<sup>66</sup>

Um die These zu widerlegen, dass die Russellsche Antinomie unter der Voraussetzung der naiven Komprehension Anlass für die Axiomatisierung der ZFC-Axiome in ihrer ersten Form war, werden zunächst die näheren Umstände ausgeführt, um dann eine andere konsistente Lesart des Zitats vorzustellen. Für letzteres Ziel wird der Zitattext vor der Auslassung als Darstellung oberflächlicher Verhältnisse gelesen, nämlich, dass man die unbeschränkte Komprehension nicht als Axiom nehmen und deswegen Cantors Erläuterung präzisieren muss, weil sie den Anschein erweckt, etwas wie die unbeschränkte Komprehension zu enthalten. Dazu wird gezeigt, dass weder Cantor seine ‚Definition‘ im Sinne der unbeschränkten Komprehension verstanden wissen wollte, noch dass Zermelo dies nicht bekannt gewesen ist. Der Text bietet in dieser Interpretation eine historisch-metamathematisch verquere Bezugnahme auf Cantor in der Einleitung eines mathematischen Fachartikels.<sup>67</sup> Der Satz nach der Auslassung zeigt sich dagegen in einem ganz anderen Licht, wenn die Auslassung berücksichtigt wird.

Im Widerspruch zu der These, die widerlegt werden soll, steht der Kontext, in dem Zermelo die Axiomatisierung vornahm. Infolge von Kritik an seinem Beweis des Wohlordnungssatzes von 1904, begann er ab 1905 die für die Mengenlehre und insbesondere für seinen Beweis benötigten Prinzipien herauszuarbeiten und erstellte parallel zur Darlegung seiner Axiomatisierung (Zermelo 1908b) eine neuen, auf Grundlage der Axiome ausgeführten Beweis des Wohlordnungssatzes (Zermelo 1908a), der als erster publiziert wurde.<sup>68</sup> Demnach scheint (1) weder Russells Antinomie der Anlass für die Axiomatisierung gewesen zu sein, (2) noch die unbeschränkte Komprehension der Ausgangspunkt für die Erstellung der Axiome. Es gibt weitere gute Gründe für diese beiden Behauptungen.

(1) wird dadurch erhärtet, dass Zermelo unabhängig von Russell dessen Antinomie bereits Jahre vor ihrer Publikation im Jahr 1903 entdeckte, sie aber im Unterschied zu Russell nicht wichtig genug nahm, um sie zu veröffentlichen.<sup>69</sup> Zermelos Anliegen war, wie schon seine Beschäftigung mit dem Wohlordnungssatz zeigt, eine Ausarbeitung und genauere Bestimmung der mengentheoretischen Begriffe Cantors.

(2) wird plausibel, wenn man bemerkt, dass Frege kein Mengentheoretiker war und seine widerspruchsvolle Theorie keine Mengenlehre, sondern eine um eine Begriffstheorie erweiterte Logik. Zermelo arbeitete dagegen in einem etablierten Fachgebiet der Mathematik und musste sich von einem bedeutenden Kollegen wie Hausdorff vorwerfen lassen, seine mathematische Arbeitskraft an unwichtige Fragen zu verschwenden.<sup>70</sup> Die unbeschränkte Komprehension wurde, wenn überhaupt, so üblicherweise

65 Zermelo 1908b, S. 263.

66 Zermelo 1908b, S. 263f..

67 Vergleicht man z. B. Boolos 1971, S. 13f., mit Ackermann 1956, S. 336f., so scheint jeder ihm gefällige und ganz andere Ideen in Cantors Erläuterung hinein zu interpretieren.

68 Siehe Moore 1982, S. 158, vgl. Kanamori 2009, S. 407.

69 Siehe Zermelo 1908a, S. 118f., Moore 1982, S. 159.

70 Hausdorff bemerkt in der Einleitung zu einer frühen Darstellung der Mengenlehre: «Daß eine Untersuchung wie diese, die den positiven Bestand der noch so jungen Mengenlehre im Sinne ihres Schöpfers um einen, wenn auch nur bescheidenen, Zuwachs zu vermehren trachtet, sich nicht prae limine damit aufhalten kann, in die Diskussion um die Prinzipien der Mengenlehre einzutreten, wird vielleicht an den Stellen Anstoß erregen, wo gegenwärtig ein etwas deplaciertes Maß von Scharfsinn an diese Diskussion verschwendet wird.» Hausdorff 1908, S. 436.

nicht als Prinzip den mathematischen Untersuchungen zugrunde gelegt.

Wie aber sind dann Zermelos Äußerungen, nicht zuletzt über Cantors Erläuterung des Mengenbegriffs, zu verstehen? Versuchen wir zuerst zu begreifen, was Cantor eigentlich gemeint hatte mit seiner ‚Definition‘, die zu Beginn des ersten (1895 veröffentlichten) seiner beiden abschließenden Abhandlungen über die Mengenlehre statiert:

Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung  $M$  von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten  $m$  unsrer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von  $M$  genannt werden) zu einem Ganzen. In Zeichen drücken wir dies so aus:  $M = \{m\}$ .<sup>71</sup>

Diese Erläuterung ist offensichtlich nicht rein mathematisch gehalten.<sup>72</sup> Aber sie scheint zwei Gedanken zu beinhalten, die für die moderne Mengenlehre grundlegend sind. (1) Erstens, dass Mengen durch ihre Elemente eindeutig bestimmt werden, (2) zweitens, dass die Elemente einer Menge in irgendeinem Sinn der Menge vorhergehen.<sup>73</sup> Gegen diese Auffassung spricht aber schon, dass Cantor in Bezug auf eine Menge von «der Ordnung ihres Gegebensein[s]»<sup>74</sup> schreibt, also dass manche Mengen bereits eine Ordnung ihrer Elemente ‚in sich‘ tragen, weshalb sie gerade nicht durch ihre Elemente allein bestimmt werden. Berücksichtigt man weiter, dass Cantor sich vor allem mit transfiniten Zahlen beschäftigt hat, dann wird auch (2) fraglich, wenn nicht noch weitere Gründe angeführt werden. Denn (Kardinal-)Zahlen sind für Cantor etwas, was gerade nicht voraussetzt, dass genau diese oder jene Elemente in irgendeinem wesentlichen Sinne früher sind. Dieses legt zumindest folgende Erklärung nahe, in der für eine Kardinalzahl nicht die Elemente wichtig erscheinen, sondern ihre Anzahl, d.h. ihre Kardinalzahl und damit ihr Einheitscharakter: «die Kardinalzahl [einer Menge ist] selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge».<sup>75</sup>

Cantors ‚Definition‘ als eine Vorform der unbeschränkten Komprehension zu lesen, wird durch eine ältere Erläuterung Cantors bestärkt, wenn man dort unter «Gesetz» eine definierbare Bedingung, also eine formale Aussage, begreift:

Uner einer „Mannigfaltigkeit“ oder „Menge“ verstehe ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich als Eines denken läßt, d.h. jeden Inbegriff bestimmter Elemente, welcher durch ein Gesetz zu einem Ganzen verbunden werden kann[.]<sup>76</sup>

Boolos 1971, S. 14, nennt vor diesem historischen Hintergrund die unbeschränkte Komprehension in der Ausformung ‚Jedes Prädikat hat eine Extension‘ die *naïve Konzeption der Menge*. Dass Cantor dieses Prinzip nie vertreten hat, ist alleine dadurch schon offensichtlich, dass er nie die Existenz einer Allmenge befürwortete – ihre Existenz ist eine direkte Konsequenz der unbeschränkten Komprehension. Vielmehr unterschied er die drei Bereiche: endlich/transfinit/absolut. Das Absolute ist unerreichbar.<sup>77</sup>

In einem späteren Brief an Dedekind rückt Cantor den Ausdruck <zu einem Ganzen verbinden> in die Aufmerksamkeit und bemerkt zu den ihm bekannten Antinomien an, dass manche Vielheiten gerade nicht zu einem Ganzen verbunden werden können, sondern «*absolut unendliche* oder *inkonsistente Vielheiten*» darstellen.<sup>78</sup> Er nennt ihm gleichen Brief ein paar seiner Voraussetzungen:<sup>79</sup>

71 Cantor 1932, S. 282.

72 Wie spätestens nach einer halben Seite Lektüre bewusst wird, denn dort heißt es: «„Mächtigkeit“ oder „Kardinalzahl“ von  $M$  nenne wir den Allgemeinbegriff, welcher mit Hilfe unseres aktiven Denkvermögens dadurch aus der Menge  $M$  hervorgeht, daß von der Beschaffenheit ihrer verschiedenen Elemente  $m$  und von der Ordnung ihres Gegebenseins abstrahiert wird. ... so ist die Kardinalzahl  $\overline{M}$  selbst eine bestimmte aus lauter Einsen zusammengesetzte Menge, die als intellektuelles Abbild oder Projektion der gegebenen Menge  $M$  in unserm Geiste Existenz hat.» Cantor 1932, S. 282f..

73 So Boolos 1971, S. 13.

74 Cantor 1932, S. 282.

75 Cantor 1932, S. 283.

76 Cantor 1932, S. 204.

77 Vgl. Cantor 1932, S. 295, Hallett 1984, S. 40ff..

78 Siehe Cantor 1932, S. 443,448.

79 Cantor 1932, S. 444.

Zwei äquivalente Vielheiten sind entweder beide „Mengen“, oder beide inkonsistent.

Jede Teilvielheit einer Menge ist eine Menge.

Jede Menge von Mengen ist, wenn man die letzteren in ihre Elemente auflöst, auch eine Menge.

Das sind Varianten der hier später erläuterten Axiome der **Größenbeschränkung**, **Aussonderung** und **Vereinigungsmenge**. Auch wenn Zermelo im Jahr 1908 Cantors zitierten Brief noch nicht gekannt haben sollte<sup>80</sup> – später wird er ihn mit den mathematisch-philosophischen Arbeiten Cantors (in Cantor 1932) herausgeben – ist es nicht vorstellbar, dass Zermelo annahm, dass Cantor eine Art unbeschränkte Komprehension mit der obigen ‚Definition‘ andeuten wollte, da diese so stark mit Cantors Praxis konfiguriert hätte.

Was Zermelos scheinbare Fehlinterpretation der ‚Definition‘ Cantors angeht, ist meine Vermutung, dass sich Zermelo der Fragwürdigkeit seiner impliziten Behauptung bewusst war und sprachlich bewusst mittels den relativierenden Ausdrücken «...bedarf also *jedenfalls* einer Einschränkung...» (m. Herv.) und «...welche zu keinen solchen Bedenken Anlaß gäbe...» auf Distanz geht zu einer Identifizierung der ‚Definition‘ Cantors mit der naiven Komprehension. Zudem spricht er zunächst zwar von der «Cantorsche Definition», aber gerade nicht von der ‚Definition Cantors‘, um daraufhin gar nicht mehr auf Cantor zu verweisen («allgemeine Mengendefinition»<sup>81</sup>).<sup>82</sup>

Wichtiger als diese sprachlichen Spekulationen ist Zermelos eigene Aussage über seine Methode, Axiome zu extrahieren, nämlich «ausgehend von der historisch bestehenden „Mengenlehre“, die Prinzipien aufzusuchen, welche zur Begründung dieser mathematischen Disziplin erforderlich sind.»<sup>83</sup> Damit meint er vermutlich auch sein eigenes Vorgehen hinsichtlich des Beweises des Wohlordnungssatzes, nämlich die Beachtung der Aussagen, die in mengentheoretischen Beweisen unbewiesen benutzt werden. Eine Schwierigkeit dieses Vorgehens liegt darin, dass einem nur konkrete Anwendungen vorliegen, denen dann ein Prinzip untergeschoben werden soll. Die Frage ist, wie allgemein dieses Prinzip gefasst wird. Wenn einem z. B. verschiedene Fälle vorlägen, in denen die Existenz der Potenzmenge von einzelnen und konkreten Mengen unbewiesen benutzt wird, so könnte man alle historischen Fälle direkt als Axiome nehmen, oder man könnte ein Axiom wählen, das die Potenzmenge *jeder* Menge garantiert, oder man könnte die unbeschränkte Komprehension als dahinterliegendes Prinzip ansetzen, da auch aus ihr die Existenz der Potenzmenge jeder Menge folgt. Die beiden Pole, zwischen denen eine Axiomatisierung nach Zermelo erfolgen sollte, sind die Antinomien und die historisch gegebene Mengentheorie. Er fährt ja nach dem letzten Zitat fort:

Diese Aufgabe muß in der Weise gelöst werden, daß man die Prinzipien einmal eng genug einschränkt, um alle Widersprüche auszuschließen, gleichzeitig aber auch weit genug ausdehnt, um alles Wertvolle dieser Lehre beizubehalten.<sup>84</sup>

Das Vorgehen wird also so beschrieben, dass die hier gemeinte Beschränkung nicht die allgemeine Komprehension betrifft, sondern die zu extrahierenden Prinzipien. Die unbeschränkte Komprehension ist nur ein zu vermeidender Grenzpunkt.

---

80 Vgl. Cantor 1932, S. 451.

81 Zermelo 1908b, S. 263.

82 Die Übersetzung von Zermelo 1908b in van Heijenoort 1967 hat vermutlich ihren Teil zu der Meinung, Zermelo hätte Cantors Definition als unbeschränkte Komprehension interpretiert und versucht diese mit seinen Axiomen sinnvoll einzuschränken, beigetragen zusammen mit den einleitenden Worten Heijenoorts (van Heijenoort 1967, S. 199f). Dort werden die hier relevanten Kleinigkeiten im Ausdruck zurechtgekämmt: «Die ursprüngliche Cantorsche Definition» wird übersetzt mit «Cantor’s original definition», die holprige Doppelung «also jedenfalls» zu «therefore certainly» geglättet.

83 Zermelo 1908b, S. 261.

84 Zermelo 1908b, S. 261.

## 7.4.1.2 ZFC

Mengen haben zwei Seiten. Insofern sie Dinge enthalten, sind sie Vielheiten, insofern sie einzelne Objekte sind, die von anderen enthalten werden, sind sie Einheiten. Es ist dieses Gegensatzpaar, das man an den beiden Variablenstellen der Elementbeziehung  $\dots \in \dots$  festmachen kann, das, indem man es in einer Menge zu vereinigen sucht, die Antinomien erst möglich macht, dadurch, dass sich die eine Seite der Menge durch die Elementschäftsbeziehung auf die andere Seite bezieht.

Man kann die beiden Seiten auch gegeneinander ausspielen. Das eine wäre dann ihre ‚Lasso‘-Seite: Dadurch, dass manche Dinge Element derselben Menge sind, bindet man ein Lasso um sie herum; die Menge besteht aus ihren eingefangenen Mengen, ändern sich diese, ändert sich die Menge mit, es muss Strick nachgegeben oder eingeholt werden. Das andere ist die Schachtel-Seite: Man sieht der (undurchsichtigen) Schachtel nicht direkt an, was in ihr steckt, und, was sie enthält, ist ihr als Schachtel auch gleichgültig; sie bleibt, was sie ist. Diese beiden Seiten können je nach Menge und Mengentheorie in Graden unterschiedlich gewichtet sein.

In diese allgemeine Unterscheidung von Einheit und Vielheit fällt auch der spezifischere Gegensatz von *extensionalem* und *intensionalem* Aspekt einer Menge. Die Extension einer Menge sind ihre Elemente, die Intension ist eine genau diesen Mengen zukommende Eigenschaft, insofern man eine Menge extensional definiert, indem man ihre Elemente aufzählt, und intensional definiert, indem man eine Eigenschaft angibt, die – extensional betrachtet – genau auf die Elemente dieser Menge zutrifft. Dabei kann es für eine extensional gegebenen Menge mehr als eine Eigenschaft geben, die genau ihre Elemente gemein haben, wie einer intensionalen Bestimmung einer Menge in unterschiedlichen Kontexten unterschiedliche Extensionen zukommen können.

Die Verbindung dieser beiden Aspekte einer Menge kann recht unterschiedlich sein. So ist die leere Menge, also die Menge, deren Elemente alle z. B. die Eigenschaft  $x \neq x$  besitzen, extensional eindeutig, während die Allmenge, die Menge, die alle anderen Mengen als Elemente hat und mittels der von allen Mengen erfüllten Eigenschaft  $x = x$  definiert werden kann, intensional eindeutig, extensional aber völlig unklar sein kann. Denn während es der leeren Menge ‚für sich egal ist‘, was für andere Mengen existieren, so müsste man für eine extensionale ‚Konstitution‘ der Allmenge angeben, welche Mengen sie jetzt genau enthält. (Die leeren Mengen unterschiedlicher Mengentheorien sind strukturgleich, die Allmengen/-klassen nicht unbedingt.) Wüsste man aber die Extension der Allmenge, würde man wissen, was für Mengen es gibt und hätte damit alle Informationen über Mengen zur Verfügung. Die extensionale Unbestimmtheit beruht demnach nicht darauf, dass es *zu viele* Elemente sind, als dass man sie alle einzeln angeben könnte, sondern darauf, dass für einzelne Mengenkandidaten nicht geklärt ist, ob sie Mengen sind – und damit Element der Allmenge.

Von einem stärker extensionalen Standpunkt aus ist dies aber ein Problem des Betrachters, nicht der (All-)Menge, die extensional bestimmt ist, wenn sie existiert. Von einer mehr intensionalen Sicht aus würde jene allgemeine Bestimmung der Allmenge ihren Gehalt ausmachen, und eine intensionale Mengenauffassung in eine Begriffstheorie übergehen. Die Mengenlehre unterscheidet sich von einer zu starken intensionalen Sicht dadurch, dass Mengen mit gleicher Extension identisch sind. Dieses Prinzip der Extensionalität ist unbestritten, und wird meistens als einzelnes Axiom zu den anderen Axiomen einer Mengentheorie hinzugefügt.

Wie eine mehr intensionale Mengentheorie einen rein extensionalen Standpunkt erweitern kann, ohne ein Extensionalitätsaxiom aufzuheben, wurde in Abschnitt 5.5 zur Formalisierung der Finsler-Mengenlehre dargestellt. Die einzige Einschränkung der Extensionalität, die bei den folgenden Mengentheorien stattfindet, geschieht hinsichtlich sogenannter Urelemente, die alle keine Elemente besitzen, somit extensional ununterscheidbar sind, aber als mögliche Elemente von Mengen Teil des Universums der Theorien sind.



**ZFC**<sup>85</sup> ist eine rein extensionale Mengentheorie, d.h. jedes Objekt in **ZFC** ist eine Menge, es gibt keine Urelemente. Es gilt:

**Extensionalität**  $\bigwedge xy (\bigwedge z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$   
 Zwei Mengen sind dann identisch, wenn sie die gleichen Elemente haben.

Die folgenden sechs Axiome postulieren die Existenz bestimmter Mengen, fünf von ihnen in der konstruktiven Form „Wenn Mengen  $a, b$  etc. existieren, dann existiert eine Menge  $c$  mit der Eigenschaft ...“. Um Mengen mit anderen Mengen mathematisch in Beziehung zu setzen, muss man in der Mengenlehre wieder Mengen benutzen. So sind zwei Mengen gleichmächtig, wenn es eine Menge von geordneten Paaren gibt, die eine ein-eindeutige Abbildung der einen Mengen auf die andere Menge darstellt. Deswegen hängt viel davon ab, wie gut man Mengen umformen und verändern kann. Die nächsten drei Axiome (bzw. Axiomenschemata) dienen vor allem dazu. Das erste bringt zwei beliebige Mengen in einer Menge zusammen:

**Paarmenge**  $\bigwedge xy \exists z (x \in z \wedge y \in z)$   
 Für je zwei Mengen existiert eine Menge, die beide enthält.

Das nächste garantiert die Existenz der definierbaren Teilmengen einer Menge:

**Aussonderung**  $\bigwedge x \bigwedge u_1 \dots u_n \exists y \bigwedge z (y \in z \leftrightarrow z \in x \wedge \phi(z))$   
*gilt für jede Formel  $\phi$  mit freien Variablen  $x, y, u_1, \dots, u_n$ .*  
 Es existiert jede durch eine Eigenschaft  $\phi$  bestimmte Teilmenge einer Menge.

Während **Paarmenge** zwei existierende Mengen ‚manipuliert‘ und **Aussonderung** auf den Elementen einer gegebenen Menge operiert, macht das nächste Axiom die Gesamtheit der Elemente der Elemente einer gegebenen Menge verfügbar:

**Vereinigungsmenge**  $\bigwedge x \exists u \bigwedge yz (z \in y \wedge y \in x \rightarrow z \in u)$   
 Für jede Menge  $a$  gibt es eine Menge, die die Elemente aller Elemente von  $a$  enthält.

Die folgenden drei Axiome bergen – soweit man das trennen kann – den Kern der Mengenlehre, nämlich die Sicherung der unendlichen Mengen.<sup>86</sup> Zunächst folgt aus den anderen Axiomen nicht die Existenz einer unendlichen Menge, die demnach in irgendeiner Form gefordert werden muss:

**Unendlichkeit**  $\forall x (\emptyset \in x \wedge \bigwedge y (y \in x \rightarrow \{y\} \in x))$   
 Es gibt eine Menge, die die leere Menge enthält und mit jeder Menge  $a$ , die sie enthält, auch deren Nachfolger  $\{a\}$ .

Die Existenz verschiedener Unendlichkeiten erhält man erst dadurch, dass man die Potenzmenge einer unendlichen Menge existieren lässt, das ist die Menge aller Teilmengen dieser Menge. Denn die Potenzmenge einer Menge  $a$  ist echt größer als  $a$ .

**Potenzmenge**  $\bigwedge x \exists y \bigwedge z (z \subset x \rightarrow z \in y)$   
 Die Potenzmenge jeder Menge existiert.

85 **ZFC** ist oben bestimmt worden als Reihe von Axiomen. Wir folgen dem üblichen Gebrauch, indem wir die Bezeichnung im Sprachgebrauch normalerweise nicht von der Theorie und sogar der Ontologie unterscheiden.

86 Das Gefüge der **ZFC**-Axiome ist komplizierter als es unsere Diskussion darlegt. Z. B. sind Extensionalität, Paarmenge und Vereinigungsmenge Gesetzmäßigkeiten, die auch für die Identität gelten, was man direkt erkennen kann, wenn man  $\in$  durch  $=$  ersetzt. Es ist hier auch keine vollständige Unabhängigkeit der Axiome voneinander angestrebt oder ein genauer Vergleich ihrer ‚Stärke‘ und Funktion, denn dazu wäre viel zu berücksichtigen. Für die ‚Stärke‘, die **ZFC** durch **Vereinigungsmenge** erhält, siehe z. B. die Details in Oman 2010.

Das grundsätzliche Problem des Potenzmengenaxioms ist, dass die **ZFC**-Axiome kaum festlegen, um wieviel größer die Potenzmenge einer unendlichen Menge als diese selbst ist, d.h. wieviele andere ‚Unendlichkeiten‘ sich dazwischen befinden. Ihre Anzahl ist nicht beschränkt.

Die Potenzmengenbildung kann man ausgehend von der mittels **Unendlichkeit** garantierten unendlichen Menge iterieren, die Potenzmenge der Potenzmenge bilden etc.. Auf diese Weise allein kommt man aber nicht weit, und es bleibt ein Missverhältnis zwischen der Anzahl der Wiederholungen der Potenzmengenbildung und der bereits als Mengen vorliegenden ‚Unendlichkeiten‘. Das folgende Axiomenschema erlaubt es, die vorhanden ‚Unendlichkeiten‘ in die fortschreitende Mengenbildung einzubringen, indem es garantiert, dass Folgen der Art  $a, \mathfrak{Pot}(a), \mathfrak{Pot}(\mathfrak{Pot}(a)), \dots$  wieder eine Menge bilden.<sup>87</sup>

**Ersetzung**  $\quad \bigwedge x \bigwedge u_1 \dots u_n (\bigwedge z \in x \bigvee_{i=1}^n \phi(x, z, u_i) \rightarrow \bigvee u \bigwedge z \in x \bigvee y \in u \phi(x, z, y))$   
 für jede Formel  $\phi$  mit den freien Variablen  $x, y, z, u_1, \dots, u_n$   
 Für jede Menge  $a$ , auf der eine eindeutige Funktion  $\phi$  definiert ist, existiert die Bildmenge von  $a$  unter  $\phi$ .

Die letzten beide Axiome betreffen eher die Struktur der Mengen. Das erste ist von geringerer Bedeutung, da es die Existenz von Mengen ausschließt, die sich auf eine Weise selbst enthalten ( $x \ni \dots \ni x$ ), oder unendlich absteigende Ketten bilden ( $x_0 \ni x_1 \ni x_2 \ni \dots \ni x_n \ni \dots$ ). Es hat den Charakter nicht benötigte Arten von Mengen auszuschließen: ‚Wir betrachten jetzt nur die die fundierten Mengen, die anderen ignorieren wir.‘

**Fundiertheit**  $\quad \bigwedge x \bigvee y (y \in x \wedge \bigwedge z \in x (z \notin y))$   
 Jede Menge  $a$  enthält ein Element, das kein anderes Element von  $a$  zum Element hat.

Das letzte Axiom aus **ZFC** wird bei Gebrauch in Beweisen oftmals extra gekennzeichnet, weil es eine besondere Gedankenoperation verallgemeinert, und es mathematisch interessant sein kann, zu wissen, ob sein Gebrauch notwendig ist für ein Resultat oder nicht. Denn es ist u. a. für die Ableitung ein paar paradoxer Resultate notwendig, wie z. B. für das Banach-Tarski-Paradox. Obwohl das Axiom auch die Form der konstruktiven Axiome hat<sup>88</sup> („wenn eine Menge  $a$  existiert ..., dann existiert auch eine Menge  $b$  mit ...“), ist seine Funktion eine ganz andere, da die ‚neue‘ Menge vor allem für die bereits bestehende und die Ordnung des Mengenuniversums von Bedeutung ist. Die Frage, die das Axiom entscheiden soll, ist, ob man eine gegebene unendlich große Mengen in bestimmter Weise ordnen kann. Endliche Mengen kann man ‚vollständig‘ ordnen: Man wählt willkürlich ein erstes Element aus, dann willkürlich ein zweites etc., bis man alle  $n$  Elemente analog der Reihe der natürlichen Zahlen geordnet hat. Hat man aber wiederum unendlich viele endliche Mengen, die noch ungeordnet sind, stellt sich ebenfalls die Frage, ob man sie alle zusammen ordnen kann. Russell entwarf ein eingängiges Bild dazu: Man stelle sich einen Haufen unendlich vieler Schuhpaare vor, der in zwei Haufen geteilt werden soll so, dass sich in jedem Haufen genau nur ein Schuh jedes Paares befindet. Die Lösung aus der Ferne: Man bilde einen Haufen mit den Schuhen für den rechten Fuß, einen Haufen mit den Linken. Man stelle sich nun wieder einen unendlich großen Haufen mit Sockenpaaren vor (wobei die beiden Socken eines Paares nicht unterscheidbar sind). Wie sollten jetzt die beiden Haufen gebildet werden? Man könnte sich bei jedem Paar willkürlich entscheiden, müsste dies aber unendlich oft tun, was nicht geht. Behauptet man trotzdem, dass es zwei derartige Haufen geben kann, dann sind diese grundsätzlich etwas unzugänglich, da man nicht weiß, welcher Socken eines Paares in welchem Haufen ist.

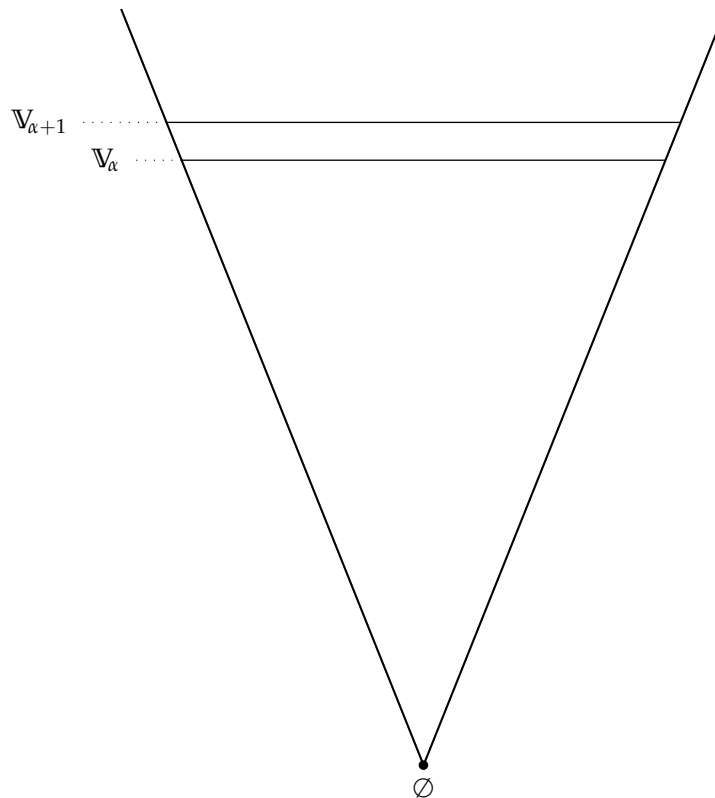
Diese zwei Fragen entscheidet das sogenannte *Auswahlaxiom* positiv:

**Auswahl**  $\quad \bigwedge x \bigvee y (y \text{ ist eine Wohlordnung von } x)$   
 Für jede Menge existiert eine Wohlordnung(smenge).

<sup>87</sup> Diese Funktion kommt in der Tat auch schon im Endlichen zum tragen, s. Kanamori 2009, S. 424.

<sup>88</sup> Es existieren einige unter **ZF** zum Auswahlaxiom äquivalente Aussagen, von denen jede anstelle des Auswahlaxioms genommen werden kann.

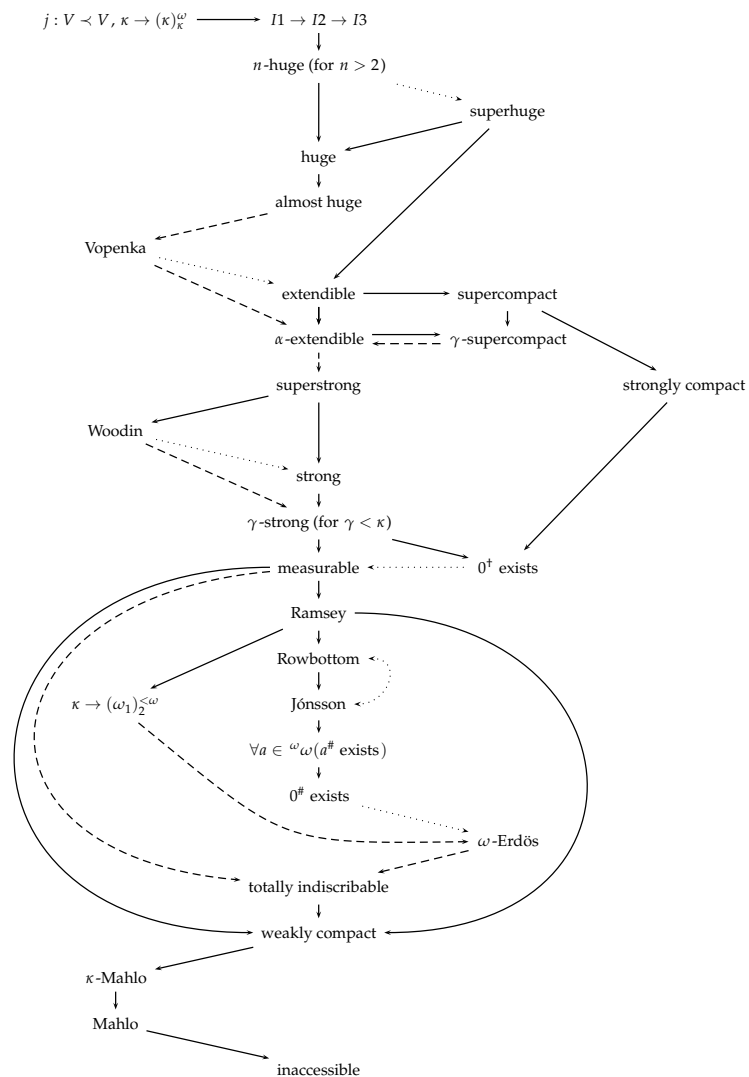
Das Mengenuniversum, das sich aufgrund dieser Axiome ergibt, ist ein in Stufen gegliedertes, das man sich als von der leeren Menge mittels immer weiter iterierter Potenzmengenbildung entfaltendes vorstellen kann. Es wird die Potenzmenge der leeren Menge gebildet ( $\mathbb{V}_1 = \{\emptyset\}$ ), dann die Potenzmenge dieser Potenzmenge ( $\mathbb{V}_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ ) etc.; dann werden diese Potenzmengen zusammengenommen (zu  $\mathbb{V}_\omega$ ) und davon die Potenzmenge gebildet etc. ( $\mathbb{V}_0 = \emptyset$ ;  $\mathbb{V}_{\alpha+1} = \mathfrak{Pot}(\mathbb{V}_\alpha)$ ;  $\mathbb{V}_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} \mathbb{V}_\beta$ , für jede Limeszahl  $\alpha$ ). Diese mit den Ordinalzahlen indizierten immer größer werdenden Anfangsabschnitt  $\mathbb{V}_\alpha$  enthalten alle Mengen. Da das Mengenuniversum  $\mathbb{V}$  kein  $\mathbb{V}_\alpha$  ist, existieren in  $\mathbb{V}$  keine ‚großen‘ Mengen, wie die Allmenge oder die Menge aller Ordinalzahlen, diese können aber immer besser angenähert werden, denn das Mengenuniversum ist nach ‚oben‘ offen. Man stellt sich den sogenannten V-Trichter oftmals folgendermaßen vor:



Mit **Auswahl** sind die Axiome von **ZFC** komplett, aber nicht vollständig. Jedes ‚angebbare‘, widerspruchsfreie und stärkere Axiomensystem in einer Logik erster Stufe ist nach Gödels erstem Unvollständigkeitssatz grundsätzlich unabgeschlossen, da in ihm nicht die Wahrheit aller Sätze entscheidbar ist, und nicht entschiedene Sätze als neue Axiome hinzugefügt werden können.

Eine bedeutende Richtung, die **ZFC**-Axiome zu ergänzen, ist die Postulierung immer ‚größerer‘ Kardinalzahlen mit den sogenannten **GROSSEN KARDINALZAHLLAXIOMEN**. Es wird mit ihnen die Existenz von Kardinalzahlen behauptet, die Das hierbei wichtigste Ergebnis der Forschung des zwanzigsten Jahrhunderts ist, dass sich diese **GROSSEN KARDINALZAHLLAXIOME** linear ihrer (Konsistenz-)Stärke nach anordnen lassen.<sup>89</sup>

<sup>89</sup> Siehe die Abbildung von Peter Krautzberger in Zusammenarbeit mit dem Autor und nach Kanamori 2003, S. 472, zur Veranschaulichung, was hier mit „linear“ gemeint ist. Durchgehende Pfeile stehen für die direkte Implikation, gestrichelte für die Implikation der Existenz einer kleineren Kardinalzahl des entsprechenden Typs und die gepunkteten Pfeile für die relative Konsistenz.



Mengenintuitionen, die nicht nur **ZFC** begründen, sondern auch die eine oder andere Erweiterung, sind fruchtbarer als Intuitionen, die dieses nicht leisten. Wir nennen das die *relative Stärke* einer Mengenintuition und werden es später als Vergleichskriterium gebrauchen.

### 7.4.1.3 Varianten von ZFC mit Klassen

Es bietet sich an, den mit dem Mengenbegriff nah verwandten Begriff der Klasse hinzuzunehmen, um Mengen im Vergleich mit Klassen zu bestimmen.<sup>90</sup> Bereits Cantor unterschied zwischen den ‚Vielheiten‘, die nicht zu einem ‚Ganzen‘ zusammengeschaut werden können und denen, die wieder eine Einheit bilden.<sup>91</sup> Mengen sind demnach die Klassen im weiten Sinn, die wieder Element (von anderen Mengen oder Klassen) sein können, und reine Klassen sind Klassen, die keine Mengen sind, weil sie nicht wieder eine Einheit bilden: «inkonsistente Vielheiten»<sup>92</sup>. Die unbeschränkte Komprehension ist

90 Für einen mehr historisch-philosophischen Überblick über die Genese der Klassentheorien siehe Roth und Schneider 2013.

91 Cantor 1932, S. 282,443; vgl. S. 215.

92 Cantor 1932, S. 443.

demnach nicht falsch, sie gilt allerdings nur für Klassen im weiten Sinn und nicht, wenn eingeschränkt auf Mengen.

Fügt man reine Klassen auf vorsichtige Weise zu **ZFC** hinzu, ändert sich für die Mengen für sich betrachtet nichts. Genauer: Nimmt man eine formale Sprache mit zwei Sorten von Variablen, Großbuchstaben für Klassen, Kleinbuchstaben für Mengen, so kann man ein prädikatives Komprehensionsaxiom zu **ZFC** hinzufügen der Art

**prädikative Komprehension**  $\bigwedge X_1 \dots X_n \bigvee Z \bigwedge y (y \in Z \leftrightarrow \phi(y))$   
*gilt für jede Formel  $\phi$  mit freien Variablen  $y, X_1, \dots, X_n$ , in der nicht über Klassen quantifiziert wird.*  
 Es existiert eine Klasse  $Z$ , die genau die Elemente  $x$  enthält, für die  $\phi(x)$  gilt, und in  $\phi(x)$  wird nicht auf die Gesamtheit der Klassen Bezug genommen.

sowie ein Extensionalitätsaxiom für Klassen, und man kann die Satzschemas der **Aussonderung** und **Ersetzung** durch entsprechende, zusammenfassende Sätze mit Klassenvariablen austauschen. Dieses Axiomensystem nennt man **NBG** (nach von Neumann, Bernays und Gödel). Wichtig ist nun, dass sich in **NBG** zwar Sätze  $\psi$  formulieren lassen, zu denen es in **ZFC** keine Äquivalente gibt (d.h. zu denen es keine Sätze in der einfacheren Sprache von **ZFC** gibt, von denen einer genau dann wahr ist, wenn  $\psi$  es ist), in **NBG** aber keine Sätze der rein mengentheoretischen Sprache beweisbar sind, die es nicht bereits in **ZFC** wären (**NBG** ist eine *konservative Erweiterung* zu **ZFC**).<sup>93</sup> Über Mengen für sich betrachtet sagt **NBG** nicht mehr als **ZFC**.

Ähnlich sind die Klassentheorien von Bernays und Quine. Bernays verzichtet auf Klassenvariablen und führt stattdessen Klassenabstraktionen der Form  $\{x \mid \phi(x)\}$  (mit beliebigem  $\phi$ , das nur die freie Variable  $x$  besitzt) als primitive Symbolik ein und ändert daraufhin die Axiome von **NBG**. Quine dagegen verlegt sich nur <virtuell> auf Klassen, indem er ‚Abkürzungsregeln‘ zur einfachen mengentheoretischen Sprache hinzunimmt: Statt  $\phi(x)$  darf man ‚kürzer‘  $x \in \{y \mid \phi(y)\}$  schreiben, und Großbuchstaben als Metavariablen für die Klassenabstrakta benutzen, d.h.  $x \in A$  ist zu lesen als ein Satzschema  $x \in \{y \mid \phi(y)\}$ . Beide Klassentheorien bringen keine Neuigkeiten bezüglich Mengen.<sup>94</sup>

Stärkere Klassentheorien erhält man, wenn man die Quantifikation über Klassen in den Komprehensionssätzen erlaubt. Dazu kann man wieder eine formale Sprache mit einer Sorte von Variablen wählen, die gemäß der Einteilung des ersten Absatzes statt bloß über Mengen jetzt über Klassen laufen, und Mengen als die Klassen definiert, die Element einer beliebigen Klasse sind. Das Axiomenschema lautet dann:

**imprädikative Komprehension**  $\bigwedge u_1 \dots u_n \bigvee z \bigwedge y (y \in z \leftrightarrow \phi(y))$   
*gilt für jede Formel  $\phi$  mit freien Variablen  $y, u_1, \dots, u_n$ .*  
 Es existiert eine Klasse  $z$ , die genau die Elemente  $x$  enthält, für die  $\phi(x)$  gilt.

Ergänzt man die an die klassentheoretische Sprache angepassten **ZFC**-Axiome durch die **imprädikative Komprehension**, so erhält man eine Klassentheorie, die über Mengen mehr aussagt als **ZFC**. Wieviel mehr? Alle neu beweisbaren mengentheoretischen Sätze sind auch in einer reinen Mengentheorie beweisbar, wenn man **ZFC** um das Große Kardinalzahlaxiom erweitert, dass die Existenz einer sogenannten Mahlo-Kardinalzahl garantiert.

Interessanter als diese **ZFC** ergänzenden Theorien sind Klassentheorien, deren Axiome manche **ZFC**-Axiome ersetzen, und damit alternative Axiomatisierungen bieten. Von Neumann versuchte, die sogenannte <limitation of size>-Doktrin direkt mit einem klassentheoretischen Axiom zu formalisieren. Eine

93 Siehe Fraenkel et al. 1973, S. 131f..

94 Vgl. Fraenkel et al. 1973, S. 146ff., Quine 1969, S. 15ff..

**ZFC**-nahe Reaktion auf die Russell-Antinomie war es, den Fehler darin zu sehen, dass man zu große Mengen zugelassen hat. Nur kleine Klassen dürfen Mengen sein (‘limitation of size’). Es ergibt sich eine konservative Erweiterung von **ZFC**, wenn man zur **Extensionalität** für Klassen, **Potenzmenge**, **Unendlichkeit** und **Fundierung** noch folgendes Axiom hinzufügt:

**Größenbeschränkung**  $\bigwedge x (\bigvee y x \in y \leftrightarrow \bigvee z (z \text{ ist Bijektion} \wedge \text{dom}(z) = x \wedge \text{ran}(z) = \mathcal{V}))$   
 Eine Klasse  $x$  ist genau dann eine Menge, wenn  $x$  kleiner als die Allklasse (d.h. nicht gleichmächtig zu der Allklasse) ist.

Damit werden **Vereinigungsmenge**, **Paarmenge** und **Aussonderung**, **Ersetzung**, **Auswahl** in ihrer klassentheoretischen Formulierung überflüssig gemacht.

Einer ganz anderen Idee folgt Ackermann 1956, indem er Finslers Begriff der zirkelfreien Menge als Klassentheorie **AK** formalisiert. In seiner Axiomatik wird der Gedanke zentral, dass der Unterschied zwischen Klassen und Mengen nicht angebar ist, und somit auch die reinen Klassen nicht definierbar sind. Reine Klassen können in **AK** auch Elemente anderer Klassen sein. Wir fügen ein primitives Prädikat  $M$  (mit  $M(x)$  zu lesen als ‚ $x$  ist Menge‘) zur einsortigen klassentheoretischen Sprache von **AK** hinzu, und führen zunächst die zwei Standardaxiome der bisher dargestellten Klassentheorien an:

**Klassenextensionalität**  $\bigwedge xy (\bigwedge z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$   
 Zwei Klassen sind dann identisch, wenn sie die gleichen Elemente haben.

**Klassenkomprehension**  $\bigwedge u_1 \dots u_n \bigvee z \bigwedge y (y \in z \leftrightarrow M(y) \wedge \phi(y))$   
*gilt für jede Formel  $\phi$  mit freien Variablen  $y, u_1, \dots, u_n$ .*  
 Es existiert eine Klasse  $z$ , die genau die Mengen  $x$  enthält, für die  $\phi(x)$  gilt.

Nun folgen noch drei Axiome, die das Mengenprädikat weiter bestimmen. Die ersten beiden sollen verhindern, dass eine reine Klasse ‚unter‘ einer Menge steht, d.h. dass eine reine Klasse existiert, die Element oder Teilmenge einer Menge ist. (Wir nennen diesen Leitgedanken das Prinzip der Scheidung, PDS).

**Mengenelemente**  $\bigwedge xy (y \in x \wedge M(x) \rightarrow M(y))$   
 Alle Elemente einer Menge sind Mengen.

**Mengenteilklassen**  $\bigwedge xy (y \subset x \wedge M(x) \rightarrow M(y))$   
 Alle Teilklassen einer Menge sind Mengen.

Der Kerngedanke wird im folgenden Axiomschema formalisiert, das angibt, welche mittels **Klassenkomprehension** ‚gebildeten‘ Klassen (mindestens) zu den Mengen gehören. Eine reine Klasse soll etwas sein, dass nur durch den expliziten Bezug auf das, was Mengen sind, bestimmt werden kann. Eine Menge ist demnach jede Klasse, deren Elemente durch eine Bedingung bestimmt werden können, die sich nicht auf den Mengenbegriff bezieht und die das PDS nicht verletzt; die also das Mengenprädikat nicht benutzt und trotzdem eine Eigenschaft nur von Mengen ist.

**Mengenkomprehension**  $\bigwedge u_1 \dots u_n (M(u_1) \wedge \dots \wedge M(u_n) \wedge \bigwedge z ((\phi(z) \rightarrow M(z)) \rightarrow \bigvee z (M(z) \wedge \bigwedge y (y \in z \leftrightarrow \phi(y))))))$   
*gilt für jede Formel  $\phi$  mit genau den freien Variablen  $y, u_1, \dots, u_n$ , in der das Mengenprädikat  $M$  nicht vorkommt.*  
 Es existiert eine Menge  $z$ , die genau die Mengen  $x$  enthält, für die  $\phi(x)$  gilt, falls  $\phi(x)$  nur für Mengen gilt, deren Parameter nur Mengen sind und in  $\phi(x)$  nicht das Mengenprädikat verwendet wird.

Diese Axiome ergänzt durch **Fundierung** für Mengen und **Auswahl** sind das axiomatische Fundament einer Theorie, die eine konservative Erweiterung von **ZFC** ist.<sup>95</sup>

95 Siehe Fraenkel et al. 1973, S. 151.

#### 7.4.1.4 Reflektionsaxiomenschemata

Ein sehr interessanter weiterer Ansatz zur Axiomatisierung beruht auf dem Gedanken, dass sich das gesamte Universum in den Anfangsabschnitten der Mengenhierarchie spiegeln müsste. Bereits in **ZFC** kann man ein einfaches Reflektionsprinzip<sup>96</sup> beweisen, nämlich:

**Reflektion** Ist ein Satz  $\phi(x)$  wahr, so ist er bereits in einem Anfangsabschnitt  $\mathbb{V}_\alpha$  wahr.

Somit ist ein erststufiger Satz, der nicht schon eingeschränkt auf ein  $\mathbb{V}_\alpha$  wahr ist, nicht wahr. Dabei bedeutet es, einen Satz *in* einer Menge zu betrachten, seine Quantoren auf diese Menge einzuschränken, sowie die Parameter aus dieser Menge zu beziehen. Man nennt das die Relativierung von  $\phi$  auf (eine Menge)  $A$  (in Zeichen:  $^A\phi$ ).

Umgekehrt nun stärkere Reflexionsaxiome zur Fundierung der Mengentheorie zu gebrauchen, ist in unterschiedlichen Weisen möglich, und die Axiomenschemata werden schnell sehr technisch. Es wird deswegen ausgehend von einem ersten und einfachen Axiomenschema nur eine mögliche Richtung angedeutet.<sup>97</sup>

Fügt man zu einer imprädikativen Klassentheorie mit **Extension**, **Klassenkomprehension**, **Fundierung** und **Auswahl** (für Mengen) noch das folgende Reflektionsschema hinzu, dann gelten in ihr nicht nur die **ZFC**-Axiome, sondern es lässt sich auch die Existenz der kleinsten der GROSSEN KARDINALZAHLEN beweisen.<sup>98</sup>

**Reflektion1**  $\bigwedge u_1 \dots u_n (\phi(A) \rightarrow \bigvee z (\bigvee y (z \in y) \wedge z \text{ ist supertransitiv} \wedge \phi^{\mathfrak{Pot}(z)}(A \cap z)))$   
gilt für jede Formel  $\phi$  mit genau den freien Variablen  $y, u_1, \dots, u_n$ .

Wenn  $\phi$  für eine Klasse  $A$  wahr ist, dann gibt es eine Menge  $z$ , die ähnlich einem Anfangsabschnitt der Mengenhierarchie ist (supertransitiv), und relativiert zu ihrer Potenzmenge  $\phi$  von dem Teil der Klasse  $A$  gilt, der in  $z$  liegt.

Die Relativierung findet hier nicht zur Menge  $z$ , sondern zu ihrer Potenzmenge statt, weil Klassen  $A$  ‚hinunter‘ reflektiert werden. Die Elemente von  $\mathfrak{Pot}(z)$  sind die reflektierten Klassen,  $z$  das reflektierte Universum.

**Reflektion1** wurde durch Marshall 1989 in systematischer Weise verstärkt, wodurch sich GROSSE KARDINALZAHLEN bis zu **I3** beweisen ließen,<sup>99</sup> während Koellner 2009 zeigte, dass eine andere systematische Verstärkung nicht über relativ kleine GROSSE KARDINALZAHLEN hinausführen kann. Allerdings ist bisher weder die Frage zufriedenstellend beantwortet worden, ob sich diese stärken Reflektionsaxiomenschemata noch als Formalisierung der Grundidee rechtfertigen lassen, noch, ob sie sich so weiter variieren lassen, dass sie letztlich die ganze ‚Höhe‘ des Mengenuniversum ausschöpfen.

#### 7.4.1.5 Typentheorie

Der Ausweg der vereinfachten Typentheorie (‘simple theory of types’) aus der Russellschen Antinomie besteht darin, die Sprache so einzuschränken, dass schon rein syntaktisch kein Selbstbezug erlaubt wird. Dazu werden die Variablen (und Konstanten) in abzählbar unendlich viele Typen eingeteilt:  $x_0, y_0, z_0, \dots$ ;  $x_1, y_1, z_1, \dots$ ;  $x_2, y_2, z_2, \dots$ ;  $\dots$ . Formeln der Sprache der Typentheorie mit den zwei zweistelligen Prädikaten  $\in, =$  sind nur dann Formeln, wenn ihre Formelatome die Gestalt  $x_i \in y_{i+1}$  oder  $x_j = y_j$

96 In der deutschen Sprache gab es nur den doppeldeutigen Ausdruck „Reflexion“, sowohl im Sinne des Überlegens als auch der (Licht-) Spiegelung, während im Englischen beide Formen („reflection“ und „reflexion“) korrekt sind und das gleiche bedeuten. In der deutschen mathematischen Fachsprache hat sich seit längerem (s. z. B. Ebbinghaus 1994, S. 170ff.), vermutlich durch Übernahme des englischen „reflection principle“, der Ausdruck „Reflektionsprinzip“ mit seinen Abarten eingebürgert.

97 Für einen größeren Überblick siehe Roth 2003, Kap. 2.

98 Siehe Krautzberger 2005, S. 16ff..

99 Für eine detaillierte Ausarbeitung von Marshall 1989 siehe Krautzberger 2005.

haben. Die Identität muss nun für jede Variablenstufe (ausgenommen die unterste) explizit festgelegt werden, so dass die Extensionalität durch ein Axiomenschema (unendlich vieler einzelner Axiome) formalisiert wird. Dazu kommen noch ein Axiom, das garantiert, dass auf der untersten Stufe unendlich viele Urelemente vorhanden sind, und ein Axiomenschema der jetzt automatisch beschränkten Komprehension:

**Komprehension**  $\forall y_{i+1} \wedge x_i (x_i \in y_{i+1} \leftrightarrow \phi(x_i))$

**Extensionalität**  $\wedge x_i y_i (\wedge z_{i-1} (z_{i-1} \in x_i \leftrightarrow z_{i-1} \in y_i) \rightarrow x_i = y_i)$

**Unendlichkeitsaxiom** für die die unterste Stufe

Das Mengenuniversum, das man mittels der Theorie und Sprache der Typentheorie erhält, ist ein streng geschichtetes. Die unterste Schicht<sup>100</sup> besteht aus nicht weiter durch  $\in$  aufschlüsselbare Teilnehmer, d.h. Urelementen, die jeweils nächste Schicht besteht aus den prädikativen Teilmengen ihrer Vorgängerin.

#### 7.4.1.6 NF

Quine störten an der Typentheorie nach eigener Aussage drei Dinge, und wir sind seiner Meinung.<sup>101</sup> Erstens die grammatikalischen Ausnahmen: Formeln, die nicht die entsprechende Form hatten, wurden gar nicht erst als Formeln zugelassen, auch wenn sie zweifelsohne Sinn hätten haben können. Dadurch war es zum Beispiel nicht möglich, Mengen verschiedener Stufen miteinander zu vergleichen, weil sie durch die strenge Schichtung weder direkt wie z. B. mit  $x_i = x_{i+1}$ , noch indirekter durch Verschachtelungen mit  $\in$  und  $=$  in Beziehung gebracht werden können. Zweitens störte ihn die Wiederholung unendlich vieler mathematischer Objekte auf den einzelnen Stufen. Wenn  $\phi$  eine Formel der Typentheorie ist, und  $\phi^+$  aus  $\phi$  entsteht, indem die Stufe jeder Variable um eins erhöht wird, und man entsprechend für Variablen  $(x_i)^+ := x_{i+1}$  definiert, dann existieren  $\{x|\phi\}$ ,  $\{x^+|\phi^+\}$ ,  $\{x^{++}|\phi^{++}\}$ , ..., nebeneinander. Kardinalzahlen zum Beispiel, definiert nach Frege als Mengen gleichmächtiger Mengen, existieren auf jeder Stufe erneut, sind aber weder einheitlich noch jeweils universal. D. h. in jeder Schicht (außer der untersten) existiert zwar eine Zahl 2; das ist in diesem Fall eine Menge aller zweielementigen Mengen. Aber jede 2 hat (von außen betrachtet) andere Elemente als alle anderen 2en, und es gibt keine 2, die (von außen betrachtet) die Zwei des ganzen Mengenuniversum wäre. Komplementmengen gibt es ebenso nur in Bezug auf die jeweilige, auf ihre Schicht eingeschränkte Allmenge und damit auch keine ‚großen‘ Mengen wie zum Beispiel die Allmenge selbst. Sogar von den Nullmengen der verschiedenen Stufen lässt sich in der Theorie nicht zeigen, daß sie identisch sind. Drittens gefiel es Quine nicht, dass man ein Unendlichkeitsaxiom hinzufügen muss, um Arithmetik betreiben zu können.

Sein Trick, um die genannten Schwierigkeiten zu lösen, bestand nun darin, die Begrenzung der Sprache aufzuheben und nur für die Komprehensionssätze eine entsprechende Typisierung zu verlangen. D. h. als formale Sprache dient die übliche mengentheoretische, aber eine Eigenschaft  $\phi(x)$  muss eine korrespondierende Formel in der Sprache der Typentheorie besitzen, um Bedingung einer gültigen Komprehension sein zu dürfen.<sup>102</sup> Sie muss geschichtet, mit einem anderen Wort: *stratifiziert* sein.

Quines New Foundations (**NF**) besteht aus nur einem Axiom zur Extensionalität und dem Axiomenschema der stratifizierten Komprehension.<sup>103</sup>

100 Soweit mit den natürlichen Zahlen geschichtet wird. In Varianten, wenn man z. B. mit den ganzen Zahlen typisiert, gibt es keine unterste Schicht, und das Unendlichkeitsaxiom ist ableitbar.

101 Vgl. Quine 1993.

102 Genauer definiert: Sei  $\phi$  eine Formel und  $V(\phi)$  die Klasse der in  $\phi$  vorkommenden Variablen.  $\phi$  heißt **stratifiziert**, wenn eine Abbildung  $v: V(\phi) \rightarrow \mathbb{N}$  existiert, so daß für alle Unterformeln von  $\phi$   $x^i \in y^{i+1}$  und  $x^j = y^j$  gilt, für  $z^i := z^{v(z)}$  (und im Hinblick auf die in **NF** hinzugefügten zweistelligen Prädikate  $\pi_1$  und  $\pi_2$  erweitert gilt:  $x^i \pi_1 y^i$  und  $x^i \pi_2 y^i$ ).

103 Vgl. Quine 1937a.



<b>Extensionalität</b>	$\bigwedge xy (\bigwedge z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$ <p>Zwei Mengen sind dann identisch, wenn sie die gleichen Elemente haben.</p>
<b>stratifizierte Komprehension</b>	$\bigwedge \vec{x} \forall y \bigwedge z (z \in y \leftrightarrow \phi(\vec{x}, z))$ <p>für stratifizierte Formeln <math>\phi</math> mit einzigen Parametern <math>\vec{x}</math>, in denen die Variable <math>y</math> nicht frei vorkommt.</p> <p>Wenn <math>\phi(z)</math> eine stratifizierte Formel ist, existiert eine Menge <math>y</math>, die genau die Mengen <math>z</math> enthält für die <math>\phi(z)</math> gilt.</p>

Der Preis, den man für diese Weise der Verhinderung der Antinomien zahlt, zeigt sich in der technischen Besonderheit, dass eine Menge  $x$  nicht im allgemeinen Fall mit ihrer Einermenge  $\{x\}$  effektiv in Verbindung gebracht werden kann. So ergibt sich die Existenz von  $\{x, \{x\}\}$  nicht einfach aus der **stratifizierten Komprehension**, weil keine stratifizierte Formel ohne Konstanten existiert, die i.a. genau die Elemente der Menge aller  $\{x, \{x\}\}$  bestimmt.<sup>104</sup>

Es ist unbekannt, wie stark **NF** im Vergleich zu **ZFC** ist. Man weiß auch nicht, wie man sich diese **NF**-Mengen genau vorstellen muss, d.h. man kennt kein natürliches Modell dieser Axiome.

Für **NF** spricht seine elegante Kürze. Die Existenz einer unendlichen Menge ist beweisbar, allerdings nicht so einfach, wie Quine 1937a dachte. Der erste Beweis<sup>105</sup> benutzte den Umstand, dass wegen der **Extensionalität** jede Menge Teilmenge der Allmenge  $\mathcal{V}$  ist und damit alle Teilmengen der Allmenge wieder die Allmenge ergeben, d.h.  $\wp(\mathcal{V}) = \mathcal{V}$ .<sup>106</sup> Zusammen mit der Annahme, dass das Auswahlaxiom gilt, folgt ein Widerspruch; also gilt das Auswahlaxiom in **NF** nicht, für alle endliche Mengen ist es aber beweisbar; folglich existiert eine unendliche Menge.

#### 7.4.1.7 NFU

An diesem Beweis in **NF** entstand die Idee für eine kleine, aber wirkungsvolle Änderung der Axiome. Man nimmt ein Auswahlaxiom hinzu und schwächt stattdessen die Extensionalität ab, so dass auch unterschiedliche Objekte zugelassen sind, die die gleichen Elemente haben.<sup>107</sup> Dann zeigt Speckers Beweis, dass es in dieser Mengentheorie Objekte geben muss, die nicht Teilmenge der Allmenge sind ( $\wp(\mathcal{V}) \neq \mathcal{V}$ ), sogenannte Urelemente. Tatsächlich gibt es dann sogar mehr Urelemente als Mengen. Es stellte sich im folgenden heraus, dass sich **NFU** (**NF** mit **U**relementen) von **NF** deutlich unterscheidet.

Der Einfachheit wegen fügen wir ein Mengenprädikat *set* und zwei zweistellige Prädikate  $\pi_1$  und  $\pi_2$  zur Sprache hinzu. Dann sind die drei Grundaxiome/axiomenschemata:

<b>schwache Extensionalität</b>	$\bigwedge y \bigwedge z (set(y) \wedge set(z) \wedge (\bigwedge x (x \in y \leftrightarrow x \in z)) \rightarrow y = z)$ <p>Zwei Mengen sind dann identisch, wenn sie die gleichen Elemente haben.</p>
<b>stratifizierte Komprehension</b>	$\bigwedge \vec{x} \forall y (set(y) \wedge \bigwedge z (z \in y \leftrightarrow \phi(\vec{x}, z)))$ <p>für stratifizierte Formeln <math>\phi</math>, in denen die Variable <math>y</math> nicht frei vorkommt.</p> <p>Wenn <math>\phi</math> stratifiziert ist, bestimmt es die Elemente einer Menge.</p>

<sup>104</sup> So ist z. B.  $\forall x^i (y = x^i \vee (x^i \in y \wedge \bigwedge z^i (z^i \in y \rightarrow z^i = x^i)))$  offensichtlich nicht stratifiziert, weil  $y$  sowohl die relative Stufe  $i$  wie  $i + 1$  besitzt, und somit nicht das Axiom der stratifizierten Komprehension angewendet werden kann. Gäbe es eine stratifizierte Bedingung  $\phi$ , die genau die Elemente der Menge  $P$  aller  $\{x, \{x\}\}$  bestimmt, wäre **NF** inkonsistent, denn dann wäre  $\psi \equiv \bigwedge z (z \in P \leftrightarrow \phi(z)) \wedge \bigvee z (z \in P \wedge x \in z \rightarrow \bigvee y (y \in z \wedge y \neq x \wedge y = \{x'\} \wedge x' \notin x))$  stratifiziert,  $\psi$  ist aber äquivalent zu  $x \notin x$ .

<sup>105</sup> Siehe Specker 1953.

<sup>106</sup>  $\wp(x)$  ist die Potenzmenge von  $x$ , das ist die Menge aller Teilmengen von  $x$ .

<sup>107</sup> Vgl. Jensen 1969.

**Auswahl** Die Allmenge ist wohlgeordnet.

Diese Form des **Auswahlaxioms** benötigt geordnete Paare, deren Existenz hier mittels  $\pi_1$  und  $\pi_2$  gesichert wird:

**geordnete Paare**  $\bigwedge x (\bigvee z (x\pi_1 z) \wedge \bigvee w (x\pi_2 w)) \wedge \bigwedge z \bigwedge w (\bigvee! x (x\pi_1 z \wedge x\pi_2 w))$   
 Jedes Objekt der Theorie ist unter  $\pi_1$  und  $\pi_2$  ein geordnetes Paar und eindeutig, und  $\pi_1$  bzw.  $\pi_2$  sind die Projektionen auf das erste bzw. zweite Objekt des Paares.

Mengen und Urelemente werden abschließend danach unterschieden, ob sie auch Elemente besitzen oder nicht.

**Mengen**  $\bigwedge x \bigvee y (y \in x \rightarrow \text{set}(x))$   
 Objekte, die Elemente haben, sind Mengen.

Im Gegensatz zu **NF** ist **NFU** gut mit **ZFC** vergleichbar. Mit **NFU**-eigenen Erweiterungsaxiomen erhält man Theorien, in denen Mengenbereiche gekennzeichnet werden können, die die **ZFC**-Axiome erfüllen und die vor allem in die Ordnung der ZFC-Erweiterungen durch GROSSE KARDINALZAHLEXIOME eingepasst werden können. Die Verstärkungen von **NFU** beruhen auf der genaueren Bestimmung des Verhältnisses zwischen einer Menge und ihrer Einerpotenzmenge, d.h. zwischen einer Menge  $\{a, b, c, \dots\}$  und  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \dots\}$ . Wenn es eine Abbildung einer Menge  $M$  auf ihre Einerpotenzmenge gibt derart, dass  $a$  auf  $\{a\}$  abgebildet wird, dann ist für diese Menge die technische Beschränkung durch die Stratifizierung praktisch aufgehoben und die Menge heißt *streng cantorsch*. Nicht jede Menge kann streng cantorsch sein, weil sonst gerade die Stratifizierung der Formeln in der Komprehension hintergangen werden würde und die Theorie inkonsistent wäre. Eine schwächere Aussage über eine Menge  $M$  ist es, nur eine bijektive Abbildung zwischen  $M$  und ihrer Einerpotenzmenge zu behaupten, die nicht unbedingt jedes Element auf ihre Einermenge abbildet. Diese Mengen nennt man *cantorsch*. Eine erste Verstärkung erfolgt einfach dadurch, dass man alle endlichen Mengen für ‚normal‘ erklärt:

AXIOM DES ZÄHLENS: Alle endlichen Mengen sind cantorsch.<sup>108</sup>

Stärker als das AXIOM DES ZÄHLENS ist es, die Extensionen von cantorschen und streng cantorschen Mengen gleich ganz zu identifizieren:

AXIOM DER CANTORSCHEN MENGEN: Alle cantorschen Mengen sind streng cantorsch.

Das Mengenuniversum teilt sich dann in den Bereich der ‚normalen‘, streng cantorschen Mengen, und in den der nicht cantorschen, großen Mengen. Diese großen Mengen können darin, eine Art Klassen über den ‚normalen‘ Mengen zu sein, durch eine Art Klassenkomprehension in bezug auf die streng cantorschen Mengen weiter verstärkt werden:

AXIOMENSHEMA DER NIEDRIGEN ORDINALZAHLEN: Für jede Formel  $\phi(x)$  existiert eine Menge  $A$ , so dass für alle streng cantorschen Ordinalzahlen  $a$  gilt:  $a \in A$  gdw.  $\phi(a)$ .

Das bisher letzte Axiom zur Verstärkung von **NFU** ordnet das Verhältnis nicht-cantorscher Kardinalzahlen. Wenn man mit  $T(\kappa)$  die Kardinalzahl der Einerpotenzmenge von  $\kappa$  bezeichnet,<sup>109</sup> so gilt  $T(\kappa) < \kappa$ , wenn  $\kappa$  nicht-cantorsch ist. Entsprechendes gilt für die Ordinalzahlen. Die Frage ist, wie ‚tief‘  $T$  eine Ordinalzahl transportiert. Da man mit  $T$  in **NFU** nicht arbeiten kann (da die Definition nicht stratifizierbar ist), liegt es nahe, mit der einfachsten metatheoretischen Mitteln auszukommen, d.h. dass man mit

<sup>108</sup> Die Systeme, die man aus den Erweiterungen zusammenstellt sind **NFUR** = **NFU** + A.d.Zählens; **NFUA** = **NFU** + A.d. cantorschen Mengen; **NFUB** = **NFUA** + A.d. niedrigen Ordinalzahlen; **NFUB-** = **NFU** + A.d. Zählens + A.d. niedrigen Ordinalzahlen; **NFUM** = **NFUB** + A.d. großen Ordinalzahlen.

<sup>109</sup> Wörtlich genommen ist das in **NFU** falsch, da dort Kardinalzahlen nach Frege als Mengen gleichmächtiger Mengen definiert werden, und die Definition von  $T$  für Kardinalzahlen lautet  $T(|A|) := |\mathfrak{Pot}_1(A)|$ .

endlich vielen Anwendungen von  $T$  beliebig ‚tief‘ kommt. Bezeichnet man die größte Ordinalzahl mit  $\Omega$  so kann das folgendermaßen formuliert werden:

AXIOM DER GROSSEN ORDINALZAHLEN: Sei  $\alpha$  eine Ordinalzahl und nicht cantorsch. Dann existiert eine natürliche Zahl  $n$  mit der Eigenschaft  $\alpha > T^n(\Omega)$ .

Die dieses Axiom einbindende stärkste bisher bekannte Erweiterung von **NFU** (das ist **NFUM**) reicht in etwa an die Stärke von **ZFC** + "es existiert eine messbare Kardinalzahl" heran.

Der Grund, warum neben **NF** auch **NFU** trotz aller inhaltlichen Kohärenz nicht als Alternative zu **ZFC** gilt, liegt darin, dass der Geburtsfehler, die Theorie auf einen syntaktischen Trick aufzubauen, nämlich nur stratifizierte Formeln für die Komprehension zuzulassen, sich durchweg in technischen Schwierigkeiten niederschlägt, für die eine Rechtfertigung mittels einer Mengenintuition fehlt.<sup>110</sup>

### 7.4.1.8 Topologische Mengentheorien

Die unter den Positiven Mengentheorien mathematisch wichtigste scheint  $GPK_{\infty}^+$  zu sein. In ihr konvergieren zwei auf den ersten Blick unterschiedliche Ansätze, die Mengenantinomien zu verhindern.

Skalas Idee<sup>111</sup> war es, dass es, auch wenn eine Eigenschaft keine Menge festgelegt, es doch die zwei direkt ‚angrenzenden‘ Mengen geben sollte. Wenn es die Russell-Menge nicht gibt, so sollte es doch etwas wie die Menge geben, die alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten, sich selbst aber nicht, und es sollte eine Menge wie die geben, die alle Mengen enthält, die sich nicht selbst enthalten, sich selbst aber auch. Dafür wird das Komprehensionsaxiomenschema in zwei Axiomenschemata aufgeteilt:

**von unten**  $\forall y (\wedge x (x \in y \rightarrow \phi(x)) \wedge \wedge z (\wedge x (x \in z \rightarrow \phi(x)) \rightarrow z \subseteq y)$   
*mit  $y$  in  $\phi(x)$  nicht frei.*  
 Es existiert eine größte Menge, die Teilmenge der durch  $\phi(x)$  bestimmten Klasse ist.

**von oben**  $\forall y (\wedge x (\phi(x) \rightarrow x \in y) \wedge \wedge z (\wedge x (\phi(x) \rightarrow x \in z) \rightarrow y \subseteq z)$   
*mit  $y$  in  $\phi(x)$  nicht frei.*  
 Es existiert eine kleinste Menge, von der die durch  $\phi(x)$  bestimmte Klasse eine Teilmenge ist.

Dazu kommt die **Extensionalität** und ein Metaaxiom, das die Existenz von Komplementen, Schnitt- und Vereinigungsmengen betrifft. Zusammen bilden sie die Skala-Mengenlehre. In ihr existieren offensichtlich die leere Menge und die Allmenge. Die Skala-Mengenlehre hat einen engen inhaltlichen Bezug zu Topologien.<sup>112</sup> Eine mathematische Topologie ist eine Art abstrakter Raum, der nur einige grundlegende Eigenschaften des anschaulichen Raumes konserviert, nämlich die, die gegenüber ‚Verzerrungen‘ invariant sind.

Eine ähnliche Nähe zu Topologien haben die positiven Mengentheorien, die auf der Idee aufbauen, nur Formeln ohne Negation zur Komprehension zuzulassen. Positive Formeln können dann definiert werden als Formeln ohne Negations- und Implikationszeichen, aber mit Falsum (das ist eine immer falsche Aussage:  $\perp$ ).<sup>113</sup> Die relative starke Mengentheorie  $GPK_{\infty}^+$  (vergleichbar mit **ZFC** mit schwach kompakten Kardinalzahlen) besteht neben **Extensionalität** und **Positiver Komprehension** aus einem Unendlichkeitsaxiom und einem zu **von oben** parallelen Abschlussaxiom:

110 Dazu weiter in Abschnitt 7.4.2.5.

111 Vgl. Skala 1974.

112 Vgl. Libert und Esser 2005.

113 Vgl. Holmes 2009, Abschnitt 7. Würde man das Implikationszeichen nicht auch weglassen, könnte man die Negation einer Aussage definieren:  $\neg A := \perp \rightarrow A$ .

**Unendlichkeit**  $\forall x (x \neq \emptyset \wedge x \text{ wohlfundiert} \wedge \forall y \in x \{y\} \in x)$

**Abschluss**  $\forall \vec{y} \forall x (\wedge z (\phi(z, \vec{y}) \rightarrow z \in x) \wedge \wedge v ((\wedge z (\phi(z, \vec{y}) \rightarrow z \in v)) \rightarrow x \subseteq v))$

In  $GP\mathcal{K}_\infty^+$  findet sich wieder ein Bereich in dem die **ZFC**-Axiome gelten, die großen Mengen in  $GP\mathcal{K}_\infty^+$  verhalten sich topologisch. Ein gutes Argument, das für oder gegen  $GP\mathcal{K}_\infty^+$  als *die* Mengentheorie spricht, ist mir nicht bekannt.

### 7.4.1.9 Doppelmengen

Es gibt weitere Axiomatisierungen der Mengenlehre. Axiomatisierungen von Mengentheorien in anderen Logiken werden in dieser Arbeit genauso wenig berücksichtigt wie intuitionistische Mengentheorien, weil die Unterschiede hierbei mehr in den logischen Grundlagen und der Auffassung mathematischer Gegenständlichkeit liegen als in der reinen Mengenintuition. Von den anderen Mengentheorien, die m. E. in ihrer aktuellen Darstellung nichts Fruchtbare zu einer Diskussion des Mengenbegriffs beitragen, sei die neuere Doppelmengentheorie von Andrzej Kisielewicz erwähnt.<sup>114</sup> Die Idee ist, den Antinomien durch eine Aufspaltung der Elementschafft in zwei Prädikate  $\in$  und  $\in'$  zu entgehen. Bei den ‚unproblematischen‘ Mengen koinzidieren die beiden Prädikate, bei der Russellmenge und anderen fallen sie auseinander.<sup>115</sup> Eine Kuriosität scheint zu sein, dass sich die Ordinale bezüglich den Elementschaffsprädikaten markant unterscheiden, obwohl die Prädikate in den Axiomen symmetrisch behandelt werden.

## 7.4.2 Mengenintuitionen

Liegt ein Axiomensystem vor, das mehrere einzelne Axiome enthält, so könnten die einzelnen Axiome durch unterschiedliche Intuitionen gerechtfertigt werden. Anzustreben wäre allerdings eine möglichst einheitliche Begründung. Die zu erwartende Grenze dieser Einheitlichkeit ist zum einen die Unterscheidung der Axiome in die, durch die die Identitätsbedingungen der Mengen festgelegt werden, und die, die angeben, was Mengen sind. Zum anderen scheint sowohl ein Axiom, das festlegt, ob Mengen sich selbst enthalten oder absteigende Ketten bilden dürfen, von den anderen Bestimmungen der Menge unabhängig zu sein, ähnlich wie ein Axiom, das über die Wohlordnung aller Mengen entscheidet.

Die Extensionalität der Mengen, nämlich dass sie identisch sind, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, ergibt sich durch die abhängige Verbindung des Einheits- und Vielheitsaspekts der Menge. Eine Diskussion von Fundierungs- und Wohlordnungsaxiom wird auf ein anderes Mal verschoben.

### 7.4.2.1 <Limitation of size>

Das bei der Aufstellung der **ZFC**-Axiome verwendete Prinzip zur Verhinderung der historischen Antinomien – so wurde oftmals behauptet – sei das der Größenbeschränkung:<sup>116</sup> Mengen dürfen nicht ‚zu groß‘ sein. Wir versuchen zunächst das Prinzip zu klären, um dann zu untersuchen, ob es eine den **ZFC**-Axiomen unterliegende Mengenintuition ist.

Dieses Prinzip der Größenbeschränkung gründet sich auf die Beobachtung, dass die antinomischen ‚Mengen‘ alle ‚groß‘ sind. Fasst man nur die Elemente einer gegebenen Menge mit der Eigenschaft

114 Vgl. Apostoli et al. 2009, S. 476f., Holmes 2009, Abschnitt 10.

115 Die Extensionalität wird gesetzt durch  $\wedge xy (\wedge z (z \in x \leftrightarrow z \in' y) \rightarrow x = y)$ , die Komprehension mit in etwa der Bedingung, dass sich bei den Parametern die beiden Extensionen nicht unterscheiden, durch  $\wedge \vec{x} (\forall \vec{v} (v_i \text{ regulär} \wedge x_i \subset_{pc} v_i) \rightarrow \forall y (\wedge z (z \in y \leftrightarrow \phi(\vec{x}, z)) \wedge \wedge z (z \in' y \leftrightarrow \phi^*(\vec{x}, z))))$  für Formeln  $\phi$ , die  $\in'$  nicht erwähnen, und  $\phi^*$  aus  $\phi$  entsteht, indem  $\in$  überall durch  $\in'$  ersetzt wird.

116 So Quine 1969, S. 278,284, Fraenkel et al. 1973, S. 32,135. Siehe Hallett 1984, S. 198f., für weitere Referenzen.

$x \notin x$  zusammen, so ist diese Zusammenfassung eben kein Element der Menge, aber z. B. Element der Potenzmenge jener Menge, falls diese existiert. So ergibt die Bedingung  $x \notin x$  nur dann eine widersprüchliche ‚Menge‘, wenn über das ganze Universum, oder zumindest einen großen Teil, quantifiziert wird. Was bedeutet hier aber wieder ‚großer‘ Teil? Es bedeutet, dass die Russellmenge dieser Teilklasse keinen Platz im restlichen Mengenuniversum findet, es sie also nicht gibt. Dies wiederum aber besagt nicht mehr, als dass die Existenz ‚großer‘ Mengen mit dem Axiom der **Aussonderung** zum Widerspruch führt. Es gibt meiner Einsicht nach vier sinnvolle Versuche, zu bestimmen, wann eine Menge nicht ‚zu groß‘ ist:

1. *Eine Menge ist genau dann nicht zu groß, wenn sie nicht genauso groß ist wie das Mengenuniversum.* Das ist die **Größenbeschränkung** von von Neumann (s. S. 223).

2. *Eine Menge ist genau dann nicht zu groß, wenn sie in bestimmter Weise in Bezug auf eine gegebene, nicht zu große Menge bestimmt wird.* Die Idee ist hierbei (wie bei 3.), dass die neue Menge durch ihre Verbindung mit der gegebenen Menge klein gehalten wird. Nimmt man die ‚kleinste‘ Menge, was die leere Menge in vermutlich jedem Fall ist, als einzige von Beginn an gegebene, so hat man einen Anfang, der in 3. präsupponiert wird. Offen und problematisch allerdings bleibt hierbei, wie diese Abhängigkeit zu der gegebenen Menge genauer ausformuliert werden soll.

3. *Eine Menge ist genau dann nicht zu groß, wenn sie durch bestimmte Operationen auf einer gegebenen, nicht zu großen Menge ‚erzeugt‘ wurde, die sich auf allen nicht zu großen Mengen ausführen lassen, und somit auch auf die neue Menge angewendet werden können.* Die Idee hierbei ist genauer, dass die neue Menge durch die wiederholte Anwendung begrenzt und klein gehalten wird. Die Einschränkung ist die gleiche wie bei 2.. Die hier verwendete Vorstellung, dass man manche Mengenoperationen stets noch einmal auf die bereits durch sie erzeugte Menge anwenden kann, hängt mit der iterativen Mengenvorstellung des nächsten Abschnitts zusammen, indem durch die wiederholte Anwendung der Operationen eine noch recht vage stufenweise ‚Bildung‘ des Mengenuniversums geschieht. Allerdings ist diese Intention in der Lage das Ersetzungsschema wie auch das Potenzmengenaxiom zu rechtfertigen, was dem iterativen Mengenverständnis nicht gelingt. Die großen Kardinalzahlaxiome haben aber oftmals keine konstruktive Form und sind somit nicht konstruktiv begründbar.

4. *Eine Menge ist genau dann nicht zu groß, wenn sie sich nicht indirekt auf sich selbst bezieht.* Die Idee scheint vielversprechend zu sein, die zu großen Mengen als die zu bestimmen, die widersprüchlich werden könnten, weil sie sich irgendwie auf sich selbst beziehen. Ihr intensionaler Aspekt würde auf sie selbst mit verweisen. Was das etwas genauer bedeuten könnte, wird in Abschnitt 7.4.2.3 ausgeführt. Die ‚zu großen‘ Mengen wären die zirkelhaften Mengen, die auch zirkelhaft wären, wenn sie sich nicht selbst enthalten würden. Dieser Ansatz scheint aber weniger von der Größenmetapher abzuhängen.

Wird **ZFC** nun durch die ‚limitation of size‘ festgelegt? Das Axiom der **Größenbeschränkung** liefert keinen Ersatz für das Potenzmengenaxiom (s. S. 223). Die Punkte 2. und 3. dagegen bieten eher eine Begründung der Form der konstruktiven **ZFC**-Axiome als dass sie Anlass für ihren spezifischen Inhalt wären. Der vierte Punkt dagegen führt letztlich vielleicht zu einer Theorie, in die sich **ZFC** einbetten lässt, bietet aber keine direkte Begründung der einzelnen **ZFC**-Axiome.

#### 7.4.2.2 Iterative Mengenbegriff

Der oft diskutierte iterative Mengenbegriff hat im Kern die Vorstellung, dass durch eine immer wiederholbare ‚Erzeugung‘ von neuen Mengen sich alle Mengen ausgehend von der leeren Menge nach verschieden vielen Wiederholungen der konstruktiven Operationen das erste Mal ergeben. Dem liegt wiederum die Idee zu Grunde, dass die Elemente einer Menge der Menge in irgendeiner näher zu spezifizierenden Weise vorausgehen.<sup>117</sup> Wir überspringen eine Diskussion mit dem Hinweis darauf,

<sup>117</sup> So ähnlich Parsons 1975, S. 503f.: «sets form a well-founded hierarchy in which the elements of a set precede the set itself.»

dass sich die **ZFC**-Axiome damit nicht direkt begründen lassen, wenn nicht eine weitere Überlegung wie Punkt 3 wesentlich mit eingeht.

### 7.4.2.3 AK und zirkelfreie Mengen

Das entscheidende Axiom der Mengenkompensation der Ackermanschen Klassentheorie (s. S. 223) wird von ihm anscheinend folgendermaßen gerechtfertigt:<sup>118</sup> Mengen werden konstruiert, es ergeben sich immer neue Möglichkeiten der Zusammenfassung, so dass der Mengenbildungsprozess nie zu einem Ende kommt. Deswegen ist nie ganz klar, was alles eine Menge ist, weil nicht vorhersehbar ist, was alles sich noch als Menge herausstellen wird. Das Mengenprädikat ist darum nicht ‚wohldefiniert‘, eine Bedingung, die es benutzt, damit auch nicht, und deshalb darf diese nicht zur **Mengenkomprehension** gebraucht werden. Entsprechend sind auch als Parameter keine Objekte zugelassen, zu deren Bestimmung möglicherweise das Mengenprädikat gebraucht wurde.

Ein naheliegender Einwand ist, dass diese Begründung im Widerspruch dazu steht, dass in den Bedingungen zur **Mengenkomprehension** über alle Klassen quantifiziert werden darf.<sup>119</sup> Warum dürfen keine (reinen) Klassen als Parameter eingebracht werden, wenn die Gesamtheit aller Klassen dagegen ein legitimer Bereich ist, in dem aber auch alle Klassen liegen, die explizit mit dem Mengenprädikat bestimmt wurden?

Ackermann präsentiert seine Theorie als eine Formalisierung der ‚Definition‘ Cantors (s. Zitat S. 215 und Ackermann 1956, S. 336f.), während es tatsächlich (auch) eine klassentheoretische Formalisierung einer Unterscheidung Finslers zu sein scheint, nämlich die zwischen zirkelfreien und zirkelhaften Mengen.<sup>120</sup>

Eine zirkelfreie Menge sollte:<sup>121</sup> **(1.)** sich weder selbst enthalten, noch sollte sie Element eines ihrer Elemente, noch sollte sie Element eines Elementes eines ihrer Elemente sein etc.; **(2.)** sollte entsprechendes für jedes ihrer Elemente, für die Elemente ihrer Elemente etc. gelten.<sup>122</sup> Die entscheidende Bestimmung ist aber: **(3.)** Eine zirkelfreie Menge ist, wie jedes ihrer Elemente und die Elemente ihrer Elemente etc., unabhängig vom Begriff *zirkelfrei*.

Für Finsler ist die Extension eines Begriffs diesem nicht wesentlich; welche Stühle tatsächlich existieren, ist dem (intensional gefassten) Begriff *Stuhl* gleichgültig. Er kann sich daher vorstellen, dass die Extension eines Begriffs variiert, während der Begriff gleich bleibt. Damit, dass eine Menge ‚unabhängig vom Begriff *zirkelfrei*‘ sei, ist nun gemeint, dass unter jeder beliebigen Variation der Extension des Begriffs der Zirkelfreiheit (im Rahmen von (1.) und (2.)) die Menge gleich bleibt.<sup>123</sup> Die Abhängigkeit einer Menge von einem Begriff wird demnach dadurch getestet, ob sie sich auch verändern würde, wenn das, was unter den Begriff fällt, etwas anderes wäre. Z. B. wäre die Menge aller zirkelfreien Mengen *nicht* unabhängig vom Begriff *zirkelfrei*, weil sie sich mit jeder Variation der Extension des Begriffs *zirkelfrei* verändert. Die Stärke dieser ‚Definition‘ liegt (vor dem informellen Rahmen der Finsler-Mengenlehre) darin, dass mit der Menge aller zirkelfreien und fundierten Mengen ein Bereich innerhalb der Mengen abgegrenzt wird, in dem tatsächlich die **ZFC**-Axiome gelten.

Durch (1.) und (2.) enthält eine zirkelfreie Menge keinen direkten Zirkel (wie  $a \in a$ ), durch (3.) bezieht sie sich nicht darauf, keinen direkten Zirkel zu enthalten und sich nicht darauf zu beziehen, dass sie

<sup>118</sup> Siehe Ackermann 1956, S. 336f., Fraenkel et al. 1973, S. 150.

<sup>119</sup> Siehe Fraenkel et al. 1973, S. 150.

<sup>120</sup> Vgl. Holmes 2009, 5.2, Holmes 1996, 5.5, Booth 1996, S. 101f..

<sup>121</sup> Vgl. Bakker und Ziegler 1996, S. 33.

<sup>122</sup> Wenn es etwas technischer definiert wird mit transitiven Klassen und Hüllen, dann fällt die umständliche Iteration und das „etc.“ weg.

<sup>123</sup> Eine entfernte Ähnlichkeit besteht mit der von Tarski angeregten Bestimmung der logischen Begriffe durch Invarianz; vgl. Feferman 2010 für Überblick und Diskussion.

keinen direkten Zirkel enthält und sich nicht darauf bezieht, dass . . . . Der Begriff der zirkelfreien Menge ist unfundiert, weil eines seiner zwei Merkmale direkt auf den Begriff Bezug nimmt. Die Unfundiertheit scheint sogar notwendig zu sein, damit jede zirkelfreie Menge überhaupt nicht abhängig ist vom Begriff *zirkelfrei*. Definiert man z. B. eine zirkelfreie\* Menge als eine Menge, die (1.) und (2.) genügt und sich nicht darauf bezieht, dass sie (1.) und (2.) genügt, dann wäre auch die Menge  $Z^*$  aller zirkelfreien\* Mengen eine zirkelfreie\*, denn sie bezieht sich über die Bestimmung ihrer Elemente als zirkelfrei\* nur darauf, dass diese sich nicht auf (1.) und (2.) beziehen.  $Z^*$  wäre also zirkelfrei\*. Als zirkelfreie\* Menge würde sie sich nach Definition selbst enthalten und wäre damit wegen (1.) gerade keine zirkelfreie\* Menge mehr. Wäre  $Z^*$  damit zirkelhaft\*, wäre sie kein Element von sich selbst und somit doch wieder zirkelfrei\*. Die Annahme einer Menge aller zirkelfreien\* Mengen ist also widersprüchlich.

Damit gilt für zirkelfreie\* Mengen nicht, was auf den zirkelfreien (im Rahmen der Finsler-Mengenlehre) gilt: die unbeschränkte Komprehension. ‚Zu große‘ Mengen auf den zirkelfreien, wie die dortige Russellmenge aller zirkelfreien Mengen, die sich nicht selbst enthalten (das ist in der Tat die Menge aller zirkelfreien Mengen), scheinen keine Probleme zu bereiten, weil sie selbst zirkelhaft sind.

**AK** stellt nun eine Formalisierung des Begriffs *zirkelfrei* dar. Ackermann interpretiert die zirkelhaften Mengen als reine Klassen und zirkelfreie Mengen als Mengen. (3.) setzt er in der **Mengenkomprehension** derart um, dass eine Bedingung das Mengenprädikat weder enthalten darf, noch sich über den Umweg von Klassenparametern darauf indirekt beziehen darf. Dass allerdings über alle Klassen quantifiziert wird, was oben kritisiert wurde, ist vor Finslers Begriff der Zirkelhaftigkeit kein Problem, da jener allgemeine Bezug auf alle Klassen nicht dazu führt, dass es möglich wird, das Mengenprädikat zu extrahieren und zu verwenden.

Das Axiom der **Mengenelemente** kann man als Formalisierung der Bestimmung in (3.) rechtfertigen, dass auch alle Elemente einer zirkelfreien Menge zirkelfrei sein müssen. **Mengenteilklassen** bestimmt einen Teil der informellen Rahmentheorie genauer, **Klassenkomprehension** und **Klassenextensionalität** sind die Standardaxiome der Klassentheorie.

#### 7.4.2.4 Reflektionsprinzip

Das grundlegende Prinzip der mengentheoretischen Reflektion besteht in der Behauptung, dass jede (strukturelle) Eigenschaft der Gesamtheit aller Mengen bereits Eigenschaft einer (anderen) Menge ist. Plausibel wird es u. a. unter den Annahmen, dass zwar keine Allmenge existiert, und dass jede Struktur in einer Menge ‚verwirklicht‘ ist, da es alle möglichen oder ‚denkbaren‘ Mengen geben soll (s. S. 211). Jede strukturelle Eigenschaft der Gesamtheit der Mengen muss demnach in einer Menge ‚verwirklicht‘ sein. Da sich strukturelle Aussagen über die Gesamtheit der Mengen *nur* auf Mengen beziehen können, bedeutet ‚Verwirklichtsein in einer Menge‘ für diese Eigenschaften, dass es eine Menge gibt, die genau diese Eigenschaft hat. (Eine Aussage über das Verhältnis von Tischen zu Tischlampen kann in Mengen nur strukturell durch Beziehungen zwischen Mengen modelliert werden. Eine astrukturelle Eigenschaft der Gesamtheit aller Mengen ist z. B. die, eine Klasse zu sein oder absolut unbeschreibbar zu sein.) In diesem Sinne ist die Gesamtheit aller Mengen nicht eindeutig von jeder Menge zu unterscheiden, oder:

RP1 Die Gesamtheit aller Mengen ist strukturell absolut unbeschreibbar.

Die Intuition hinter RP1 ist, dass das Mengenuniversum theoretisch nicht zu fassen ist, und damit jedes mengentheoretisch ‚denkbare‘ bereits in einer einzelnen Mengen ‚zum Tragen‘ kommt. Arbeitet man innerhalb eines formalen Axiomensystems wie **ZFC**, so hat das zur Folge, dass man jede Arbeit an Eigenschaften, die man interpretieren kann als eine Beschäftigung mit der Allklasse der Mengen, auch als eine Beschäftigung mit einer hinreichenden großen Stufenmenge  $V_\alpha$  interpretieren kann. Das Mengenuniversum spiegelt sich auf diese Weise in der Mengenhierarchie und wird in den Mengenstufen reflektiert.

Eine Präzisierung dieser noch vagen Grundidee besteht in der Explikation des Begriffs der *strukturellen Eigenschaft*. Als erstes sind strukturelle Eigenschaften von Komprehensionsbedingungen zu unterscheiden. Komprehensionsbedingungen legen die Eigenschaften der Mengen fest, die in die Gesamtheit fallen, die man betrachten will, während eine strukturelle Eigenschaft einer Gesamtheit eine Eigenschaft der Beziehung dieser Mengen auf sich und aufeinander ist. So kann die Allklasse mittels der Bedingung  $x = x$  definiert werden, jedoch ist es eine strukturelle Eigenschaft jeder Gesamtheit, dass jede ihrer Mengen mit sich selbst identisch ist (in Formeln für eine Gesamtheit/Klasse  $A$ :  $\bigwedge x \in A (x = x)$ ). Ein Satz der formalen mengentheoretischen Sprache (erster Stufe) muss demnach, um eine strukturelle Eigenschaft einer Gesamtheit zu formalisieren, seine Quantoren auf die Mengen der jeweiligen Gesamtheit eingeschränkt haben.

#### 7.4.2.5 Syntaktischer Selbstbezug

NF, NFU und Varianten scheinen durch einen syntaktischen Trick zustandezukommen. Für Holmes aber wird die stratifizierte Komprehension durch folgende Intuition gerechtfertigt:<sup>124</sup> Mengen sind eigentlich bloße Extensionen (Klassen), die in eine neue Umgebung gesetzt werden. Sie erhalten dort ein Etikett, das Mitglied weiterer und auch der gleichen Extension sein kann. Nun scheint es plausibel zu sein, dass bei der Bearbeitung einer Menge nur auf Eigenschaften zurückgegriffen werden darf, die ihr wesentlich, d.h. ihr als bloßer Extension zukommen. Denn ob eine bloße Extension z. B. das ihr zugeprochene Etikett enthält ist so willkürlich wie die Verteilung der Etikette. Würde man ihr ein anderes Etikett verleihen, wäre es vielleicht kein Element mehr von ihr. Es dürfen also die beiden Rollen, die eine Menge einnehmen kann, von ihr nicht zugleich eingenommen werden. Damit wären Eigenschaften wie  $x \in x$  davon ausgeschlossen, als Bestimmung von Mengen zu dienen, weil die gleiche Menge in beiden Rollen auftritt.

Eine Menge kann also mindestens zwei Rollen einnehmen, sie kann betrachtet werden als reine Extension oder (insofern sie ein Etikett hat) als undifferenziertes Objekt. Diese Doppelgestalt kann beliebig iteriert werden. Eine Menge kann z. B. als Extension von Extensionen von undifferenzierten Objekten untersucht werden. In so einer Kette von Enthaltensbeziehungen darf sie aber wieder nicht in mehreren Rollen auftreten, da sie sonst letztlich wieder sich selbst in einer anderen Rolle gegenüber stehen würde. Bezieht man noch mit ein das Mengen bezüglich  $=$ ,  $\pi_1$  und  $\pi_2$  nur in gleicher Rolle verglichen werden dürfen, hat man damit genau das Merkmal stratifizierter Formeln begründet.

Problematisch an dieser Vorstellung ist, dass sie weniger von Mengen handelt, als von einer Art Klassen, die ihre eigenen Namen enthalten können. Denn zur Menge gehört die Verbindung von Extension und Einheit, die hier getrennt wurde.

#### 7.4.2.6 Zusammenfassung und Vergleich

Zunächst sei auf die Schwierigkeit aufmerksam gemacht, die sich beim Übergang von (in erster Stufe) formalisierten Axiomatisierungen zu den ihnen zugrunde liegenden Mengenintuitionen einstellt. Tatsächlich konnte eine vollständige Mengenintuition von uns nur von der Ackermannschen Mengentheorie aufgeschlüsselt werden, und auch dass nur, weil es eine unabhängige Überlieferung informeller Überlegungen dazu gab. Ein Weg von den mehr technischen Produkten wie NF, NFU oder Positiven Mengentheorien ‚zurück‘ zu Intuitionen scheint problematisch, zu *Mengenintuitionen* nicht in Sicht zu sein.

<sup>124</sup> Siehe Holmes 1998, S. 51ff.



Welche Intuition oder Intuitionen stehen hinter den **ZFC**-Axiomen? Die Möglichkeit der Iteration der Mengenoperationen ist zwar in der Form der **ZFC**-Axiome verwirklicht, aber sie scheint sie nicht inhaltlich zu bestimmen. Aus der Diskussion über den Ursprungsartikel Zermelos (s. S. 213ff.) und wegen der Erfolgsgeschichte der Axiome liegt die Vermutung nahe, dass **ZFC** eine gelungene Axiomatisierung der mengentheoretischen Praxis darstellt, und die Axiome sich damit letztlich auf die in der (damaligen) mathematischen Praxis zum Ausdruck kommenden Intuitionen gründen, was eine mathematisch handhabbare Menge sei.

Damit sind diese Mengenintuitionen zwar jedem Mengentheoretiker ‚intuitiv‘ verfügbar, aber auch diesem noch nicht deutlich vor Augen gestellt. Dass sie einer philosophischen Klärung und Zurückführung auf grundlegendere Intuitionen, wie z. B. der in Ackermanns Theorie ausgedrückten, bedürfen könnten, wird plausibel, wenn man sich an die Empfindung erinnert, die man beim ersten Blick auf die Axiome hatte. Quine schilderte 1993 seinen Eindruck aus dem Jahr 1936 von dem, was wir heute mit **Z** (und erweitert mit **ZFC**) bezeichnen: «in it's multiplicity of axioms it seemed inelegant, artificial, and ad hoc.»<sup>125</sup> Darüberhinaus missfalle ihm, daß es keine großen Mengen, keine Allmenge und keine universalen Komplementmengen gäbe. Eine einheitliche und klare Intuition scheint in ihnen nicht zum Ausdruck zu kommen.

Vergleicht man die hier dargestellten Mengenintuitionen auf ihre relative Stärke (s. S. 221), so sind sie alle etwa gleich stark und befinden sich alle in etwa auf der Höhe von **ZFC**. Nur die Reflektionsaxiome basieren auf einer einheitlichen Intuition, die um einiges stärker ist als **ZFC**, weil sich aus ihr die GROSSEN KARDINALZAHLAXIOME zu ergeben scheinen.<sup>126</sup>

### 7.4.3 Resultat

Aus den letzten beiden Abschnitten 7.4.2 und 7.4.1 lässt sich ein Resultat für den weiteren Kontext dieses Kapitels ziehen. Die dargestellten Mengenintuitionen beinhalteten entweder direkt, dass ihr Mengenbegriff nicht (auf nicht zirkuläre Weise) bestimmbar ist, wie das Reflektionsprinzip und die Mengenkonzeption von Ackermann bzw. die zirkelfreien Mengen bei Finsler. Oder sie haben einen iterativen Aspekt, dass man eine bestimmte Operation zur ‚Erzeugung‘ neuer Mengen stets erneut anwenden darf, der bereits implizit eine Unvollständigkeit enthält. Denn wie bereits in Bezug auf die natürlichen Zahlen argumentiert (s. S. 209), lässt eine Bestimmung durch ‚es gibt zu jedem ... noch ein neues ...‘ den Gesamtbereich der jeweiligen Objekte unbestimmt. Darüber hinaus scheint die mathematische Arbeit mit dem iterativen Aspekt (und d.h. mehr oder weniger der Arbeit in **ZFC**) diese Mengenintuitionen zu erweitern, so dass sie eine Idee davon einschließen, dass die Extension des Mengenbegriffs unbestimmt ist.<sup>127</sup> Bei dem Reflektionsprinzip dagegen wird das Mengenuniversum und somit die Extension des Mengenbegriffs direkt als theoretisch unfassbar konzipiert, bei Ackermanns Formalisierung das nicht definierbare Mengenprädikat hinzugefügt bzw. bei Finsler mittels des Begriffs der zirkelfreien Mengen der Bereich der absolut selbstbezugsfreien Mengen abgegrenzt.

Das Ergebnis von Abschnitt 7.3.2, dass dem Mengenbegriff keine Idee entspricht, und er (deshalb) absolut unbestimmbar ist, wird durch die vorliegenden Mengenintuitionen bestätigt, insofern diese auf diese Unbestimmbarkeit (zum Teil sogar explizit) Bezug nehmen.

<sup>125</sup> Siehe Quine 1993.

<sup>126</sup> Vgl. Roth 2003.

<sup>127</sup> «Moreover ... it becomes an almost evident truth that the totality of all sets is open-ended relative to our possible knowledge.» Wang 1977, S. 311.



# Antike Quellen

- Acerbi, F. (2007a). *Euclide. Tutte le Opere*. Milano.
- Apelt, O. (1914). *Menon oder Über die Tugend*. Leipzig.
- Archimedes (2009). *Abhandlungen* (3 Aufl.). Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften Band 201. Frankfurt am Main.
- Aristoteles (1967a). *Physik*. Darmstadt.
- Aristoteles (1967b). *Physikvorlesung*. Darmstadt. Übersetzt von Hans Wagner.
- Aristoteles (1989). *Aristoteles' Metaphysik. Erster Halbband: Bücher I (A) – VI (E)*. Hamburg. Neubearbeitung der Übersetzung von H. Bonitz / mit Einl. u. Kommentar hrsg. von H. Seidl.
- Aristoteles (1991). *Aristoteles' Metaphysik. Zweiter Halbband: Bücher VII (Z) – XIV (N)*. Hamburg. Neubearbeitung der Übersetzung von H. Bonitz / mit Einl. u. Kommentar hrsg. von H. Seidl.
- Aristoteles (2000). *Die Nikomachische Ethik*. München.
- Aristoteles (2004). *Topik*. Stuttgart. Kom. u. übers. v. Tim Wagner und Christof Rapp.
- Cornford, F. M. (1937). *Plato's Cosmology: The Timaeus of Plato translated with a Running Commentary*. London.
- Cornford, F. M. (1951). *Plato and Parmenides. Parmenides' Way of Truth and Plato's Parmenides translated with an Introduction and a running Commentary*. London.
- Coxon, A. H. (1999). *The Philosophy of Forms. An Analytical and Historical Commentary on Plato's Parmenides. With a new English Translation*. Assen.
- Fitzpatrick, R. (Hrsg.) (2007). *Euclid's Elements of Geometry*. o. O.
- Heath, T. L. (1956a). *The Thirteen Books of Euclid's Elements. Volume I* (2. Aufl.). New York.
- Heath, T. L. (1956b). *The Thirteen Books of Euclid's Elements. Volume II* (2. Aufl.). New York.
- Heath, T. L. (1956c). *The Thirteen Books of Euclid's Elements. Volume III* (2 Aufl.). New York.
- Heiberg, J. L. und H. Menge (Hrsg.) (1883-1916). *Euclidis opera omnia*. Leipzig.
- Plato (1900-). *Opera*. Oxford.
- Platon (1977). *Werke in acht Bänden*. Darmstadt.
- Proclus (1970). *A Commentary on the First Book of Euclid's Elements*. Princeton. Translated with Introduction and Notes by Glenn R. Morrow.
- Proclus (1987). *Proclus' Commentary on Plato's Parmenides*. Princeton. Translated by Glenn R. Morrow and John M. Dillon.
- Stamatis, E. S. (Hrsg.) (1969-1977). *Euclidis Elementa. Vol I - V*. Leipzig.
- Taisbak, C. M. (2003). *DEDOMENA. Euclid's Data or The Importance of Being Given*. Kopenhagen.
- Thaer, C. (Hrsg.) (1962). *Die Data von Euklid*. Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- Thaer, C. (Hrsg.) (1997). *Die Elemente. Bücher I–XIII/ von Euklid* (Oswalds Klassiker der exakten Naturwissenschaften Aufl.). Frankfurt am Main. Reprint der Bände 235,236,240,241 und 243.
- Vitrac, B. (1990-). *Euclide D'Alexandrie. Les Éléments*. Paris.

# Sonstige Literatur

- Acerbi, F. (2000). Plato: Parmenides 149a7-c3. A Proof by Complete Induction? *Archive for History of Exact Sciences* 55, 57–76.
- Acerbi, F. (2007b). Euclid's Pseudaria. *Archive for History of Exact Sciences*.
- Ackermann, W. (1956). Zur Axiomatik der Mengenlehre. *Mathematische Annalen* 131, 336–45.
- Allen, R. E. (1997). *Plato's Parmenides* (Überarbeitete Aufl.). New Haven.
- Amiras, L. (2002). Zur Operativen Grundlegung der Geometrie bei H. Dingler. *Philosophia Naturalis* 39, 235–58.
- Anderson, J. K. (1970). *Military Theory and Practice in the Age of Xenophon*. Berkeley, Los Angeles.
- Anglim, S., P. G. Jestice, R. S. Rice, S. M. Rusch, und J. Serrati (2002). *Fighting Techniques of the Ancient World 3000 BC – AD 500: Equipment, Combat Skills and Tactics*. London.
- Annas, J. (1988). *An introduction to Plato's Republic*. Oxford.
- Apel, J. (2011). *Daten und Pänomene. Ein Beitrag zur wissenschaftstheoretischen Realismusdebatte*. Frankfurt am Main.
- Apostoli, P., R. Hinnion, A. Kanda, und T. Libert (2009). Alternative Set Theories. In A. D. Irvine (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics*, S. 461–91. Amsterdam u.a.
- Artmann, B. (1999). *Euclid – the creation of mathematics*. New York, Heidelberg.
- August, E. F. (1843). *Zur Kenntniß der geometrischen Methode der Alten. In besonderer Beziehung auf die Platonische Stelle im Meno 22d*. Berlin.
- Azzouni, J. (1997). Thick Epistemic Access: Distinguishing the Mathematical from the Empirical. *The Journal of Philosophy* 94, 472–84.
- Azzouni, J. (2004a). *Deflating Existential Consequence. A Case for Nominalism*. Oxford.
- Azzouni, J. (2004b). Theory, Observation and Scientific Realism. *British Journal for Philosophy of Science* 55, 371–92.
- Azzouni, J. (2008). A Cause for Concern: Standard Abstracta and Causation. *Philosophia Mathematica* 16, 397–401.
- Baaz, M., C. H. Papadimitriou, H. Putnam, D. S. Scott, und C. L. Harper (Hrsg.) (2011). *Kurt Gödel and the Foundations of Mathematics. Horizons of Truth*. New York u.a.
- Baer, R. (1928). Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. *Mathematische Zeitschrift* 27, 536–9.
- Bakker, A. und R. Ziegler (1996). *Finsler-Mengenlehre. Technical notes (x) series*, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam.
- Balashov, Y. (1994). Should Plato's Line Be Divided in the Mean and Extreme Ratio? *Ancient Philosophy* 14, 283–95.
- Baumgartner, M. (2010). Informal Reasoning and Logical Formalization. In S. Conrad und S. Imhof (Hrsg.), *P. F. Strawson Ding und Begriff / Object and Concept*, S. 11–34. Heusenstamm.
- Baumgartner, M. und T. Lampert (2008). Adequate formalization. *Synthese* 164, 93–115.
- Becker, O. (1957). *Das Mathematische Denken der Antike*. Göttingen.
- Becker, O. (o.J.). *Grösse und Grenze der mathematischen Denkweise*. Freiburg, München.
- Bedürftig, T. und R. Murawski (2010). *Philosophie der Mathematik*. Berlin, New York.
- Behboud, A. (1994). Greek Geometrical Analysis. *Centaurus* 37, 52–86.
- Benacerraf, P. (1965). What numbers could not be. In Benacerraf und Putnam (1983), S. 272–94.
- Benacerraf, P. (1973). Mathematical truth. In Benacerraf und Putnam (1983), S. 403–20.
- Benacerraf, P. und H. Putnam (Hrsg.) (1983). *Philosophy of mathematics. Selected readings* (2 Aufl.). Cambridge.
- Benecke, A. (1867). *Ueber die geometrische Hypothesis in Platons Menon*. Elbing.
- Benz, W. (1994). *Real geometries*. Mannheim u.a.
- Berger, M. (2003). *Proportion bei Platon*. Trier.

- Berggren, J. L. (1996). *A translation and study of a hellenistic treatise in spherical astronomy*. New York.
- Berggren, J. L. und G. Van Brummelen (2000). The Role and Development of Geometric Analysis and Synthesis in Ancient Greece and Medieval Islam. In *Ancient & Medieval Traditions in the Exact Sciences. Essays in Memory of Wilbur Knorr*, S. 1–31. Stanford.
- Berlin, B. und P. Kay (1969). *Basic Color Terms: Their Universality and Evolution*. Berkeley.
- Bernays, P. (1959). Die Mannigfaltigkeit der Direktiven für die Gestaltung geometrischer Axiomensysteme. In Henkin et al. (1959), S. 1–15.
- Bernays, P. (1976). Betrachtungen zu Ludwig Wittgensteins ›Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik‹ (1959). In *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik*, S. 119–41. Darmstadt.
- Bernays, P. (1978). Über den Platonismus in der Mathematik. In W. Stegmüller (Hrsg.), *Das Universalien-Problem*, S. 64–83. Darmstadt.
- Beutelspacher, A. und B. Petri (1995). *Der Goldene Schnitt* (2. Aufl.). Mannheim.
- Beyer, T. (1859). Erklärung von Platons Menon cap.22 p87a. *Zeitschrift für das Gymnasialwesen* 13, 886–8.
- Black, M. (1952). The Identity of Indiscernibles. *Mind* 61(242), 153–64.
- Blau, U. (1978). *Die dreiwertige Logik der Sprache. Ihre Syntax, Semantik und Anwendung in der Sprachanalyse*. Berlin, New York.
- Blau, U. (2008). *Die Logik der Unbestimmtheiten und Paradoxien*. Heidelberg.
- Blau, U. (2009a). Das Selbst im logisch-mathematischen Platonismus. ausgearbeiteter Vortrag WS 2008/09.
- Blau, U. (2009b). The Self in Logical-Mathematical Platonism. *Mind and Matter* 7, 37–57.
- Bluck, R. S. (1961). *Plato's Meno*. Cambridge.
- Böhme, G. (1976). Platons Theorie der exakten Wissenschaften. In Böhme (1993), S. 81–100.
- Böhme, G. (1993). *Alternativen der Wissenschaft* (2. Aufl.). Frankfurt am Main.
- Böhme, G. (1998). *Einführung in die Philosophie. Weltweisheit – Lebensform – Wissenschaft* (3. Aufl.). Frankfurt am Main.
- Böhme, G. (2000). *Platons theoretische Philosophie*. Stuttgart.
- Boolos, G. (1971). The Iterative Conception of Set. In Boolos (1998), S. 13–29.
- Boolos, G. (1984). To Be ist to Be a Value of a Variable (or to Be Some Values of Some Variables). In Boolos (1998), S. 54–72.
- Boolos, G. (1998). *Logic, Logic and Logic*. Cambridge, London.
- Boolos, G. S., J. P. Burgess, und R. C. Jeffrey (2007). *Computability and Logic* (5. Aufl.). Cambridge u.a.
- Booth, D. (1996). II. Foundational Part: Introduction. In D. Booth und R. Ziegler (Hrsg.), *Finsler Set Theory: Platonism and Circularity. Translation of Paul Finsler's papers on set theory with introductory comments*, S. 85–102.
- Bordt, M. (o.J.). *Platon*. Freiburg.
- Bos, A. P. (2005). Die Aristotelische Lehre der Seele: Widerrede gegen die moderne Entwicklungshypothese. In H.-D. Klein (Hrsg.), *Der Begriff der Seele in der Philosophiegeschichte*, S. 87–100. Würzburg.
- Bos, A. P. (2010). The Soul's Instrument for Touching in Aristotle, On the Soul II 11, 422b34–423a21. *Archiv für Geschichte der Philosophie* 92(1), 89–102.
- Bouveresse, J. (2005). On the Meaning of the Word ‚Platonism‘ in the Expression ‚Mathematical Platonism‘. *Proceedings of the Aristotelian Society* 105, 55–79.
- Bowen, A. C. (Hrsg.) (1991). *Science and Philosophy in Classical Greece*. New York, London.
- Brandom, R. (1996). The significance of complex numbers for Frege's philosophy of mathematics. *Proceedings of the Aristotelian Society* 96, 293–315.
- Breger, H. (1995). A restoration that failed: Paul Finsler's theory of sets. In D. Gillies (Hrsg.), *Revolutions in Mathematics*, Kapitel 13, S. 249–64. Oxford.
- Bremer, M. (21.11.2012). Hegels Dialektik und Parakonsistente Logiken. [www.mbp.de/Logic/Para/HegelsDialektikUndParakonsistenteLogiken.pdf](http://www.mbp.de/Logic/Para/HegelsDialektikUndParakonsistenteLogiken.pdf).
- Brotbeck, S. (2011). *Heute wird nie gewesen sein. Aphorismen, Zweite Folge*. Basel.
- Brown, J. R. (1999). *Philosophy of Mathematics. An Introduction to the World of Proofs and Pictures*. London, New York.

- Brown, J. R. (2005). Naturalism, Pictures, and Platonic Intuitions. In P. Mancosu, K. F. Jørgensen, und S. A. Pedersen (Hrsg.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, Dordrecht, S. 57–73.
- Brumbaugh, R. (1954). *Plato's mathematical imagination: The mathematical passages in the dialogues and their interpretation*. Bloomington.
- Brun, G. (2004). *Die richtige Formel. Philosophische Probleme der logischen Formalisierung*. Frankfurt.
- Brun, G. (2008). Formalization and the Object of Logic. *Erkenntnis* 69, 1–30.
- Brun, G. (2012). Adequate Formalization and De Morgan's Argument. *Grazer Philosophische Studien* 85, 325–35.
- Burckhardt, J. J. (1980). *Die Mathematik an der Universität Zürich 1916-1950 unter den Professoren R. Fueter, A. Speiser, P. Finsler*, Band 16 von *Beihefte der «Elemente der Mathematik»*. Basel, Boston, Stuttgart.
- Burkert, W. (1972). *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Cambridge.
- Burkert, W. (1990). *Antike Mysterien. Funktionen und Gehalt*. München.
- Burnet, J. (1928). *Platonism*. Berkeley.
- Burnyeat, M. F. (1987). Platonism and Mathematics: A Prelude to Discussion. In A. Graeser (Hrsg.), *Mathematics and Metaphysics in Aristotle*, Bern, Stuttgart, S. 213–40.
- Burnyeat, M. F. (2000). Plato on Why Mathematics is Good for the Soul. In T. Smiley (Hrsg.), *Mathematics and Necessity. Essays in the History of Philosophy. Proceedings of the British Academy*, Band 103, Oxford, S. 1–81.
- Busch, O. (1998). *Logos syntheseos. Die euklidische «Sectio canonis», Aristoxenos, und die Rolle der Mathematik in der antiken Musiktheorie*. Berlin.
- Butcher, S. H. (1888). The Geometrical Problem of the Meno (p.86e-87a). *Journal of Philology* 17, 219–25.
- Callard, B. (2007). The Conceivability of Platonism. *Philosophia Mathematica* 15, 347–56.
- Cantor, G. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Hildesheim. Nachdruck 1962.
- Cattanei, E. (1996). *Enti matematici e metafisica. Platone, l'Accademia e Aristotele a confronto*. Milano.
- Catton, P. und C. Montelle (2012). To Diagram, to Demonstrate: To Do, To See, and To Judge in Greek Geometry. *Philosophia Mathematica* 20(3), 25–57.
- Cheyne, C. (2001). *Knowledge, Cause, and Abstract Objects. Causal Objections to Platonism*. Dordrecht, Boston, London.
- Christianidis, J. (Hrsg.) (2004). *Classics in the History of Greek Mathematics*. Dordrecht, Boston, London.
- Church, A. (1938). (Review of: *Zur Neubegründung der Mengenlehre*. by Johann Jakob Burckhardt). *The Journal of Symbolic Logic* 3(4), 165–6.
- Colyvan, M. (2001). *The Indispensability of Mathematics*. Oxford.
- Colyvan, M. (2012). *An Introduction to the Philosophy of Mathematics*. Cambridge.
- Cook Wilson, J. (1903). On the Geometrical Problem in Plato's Meno 86e sqq.: with a Note on a Passage in the Treatise de Lineis Insecabilibus (970a5). *Journal of Philology* 28, 222–40.
- Corfield, D. (2003). *Towards a Philosophy of Real Mathematics*. Cambridge.
- Coxeter, H. S. M. (1963). *Unvergängliche Geometrie*. Basel.
- Dawson, J. W. (1984). The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems. In *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association, Vol. 1984, Volume Two: Symposia and Invited Papers*, S. 253–71.
- De Cruz, H. (2007). An Enhanced Argument for Innate Elementary Geometric Knowledge and Its Philosophical Implications. In B. Van Kerkhove (Hrsg.), *New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics*, S. 185–206.
- Devine, A. M. (1983). EMBOAON: A Study in Tactical Terminology. *Phoenix* 37(3), 201–17.
- Devine, A. M. (1989). *Aelians Manual of Hellenistic Military Tactics. A New Translation from the Greek with an Introduction*. *The Ancient World* 19, 31–64.
- Diels, H. und W. Kranz (2004-2005). *Die Fragmente der Vorsokratiker: griechisch und deutsch*. Hildesheim. 3 Bände.
- Dingler, H. (1933). *Die Grundlagen der Geometrie. Ihre Bedeutung für Philosophie, Mathematik, Physik und Technik*. Stuttgart.
- Dingler, H. (1955). Geometrie und Wirklichkeit. *Dialectica* 9, 341–62.
- Dingler, H. (1956). Geometrie und Wirklichkeit (Forts.). *Dialectica* 10, 80–93.

- Dominick, Y. H. (2010). Seeing Through Images: The Bottom of Plato's Divided Line. *Journal of the History of Philosophy* 48(1), 1–13.
- Doxiadis, A., C. H. Papadimitriou, A. Papadatos, und A. Di Donna (2009). *Logicomix. An epic search for truth*. New York, Berlin, London.
- Dummett, M. (1991). *Frege and other Philosophers*. Oxford.
- Ebbinghaus, H.-D. (1994). *Einführung in die Mengenlehre*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich.
- Ebbinghaus, H.-D., J. Flum, und W. Thomas (1996). *Einführung in die mathematische Logik*. Heidelberg, Berlin.
- Ebert, T. (2007). Socrates on the definition of figure in the Meno. In S. Stern-Gillet und K. Corrigan (Hrsg.), *Reading Ancient Texts. Volume I: Presocratics and Plato. Essays in Honour of Denis O'Brien*, S. 113–24. Leiden, Boston.
- Edelstein, L. (1966). *Plato's Seventh Letter*. Leiden.
- Erler, M. (1983). Zu Platon, Politeia 534 D. *Hermes* 111, 221–6.
- Erler, M. (2007). *Die Philosophie der Antike. BAND 2/2. Platon*. Basel.
- Falk, H.-P. (1983). *Das Wissen in Hegels »Wissenschaft der Logik«*. Freiburg, München.
- Faller, M. A. (2000). *The Philosophical Use of Mathematical Analysis*. Dissertation, University of Georgia.
- Farquharson, A. S. L. (1923). Socrates' Diagram in the Meno of Plato. *Classical Quarterly* 17, 21–6.
- Feferman, S. (1960). Arithmetization of metamathematics in a general setting. *Fundamenta Mathematicae* 49, 35–92.
- Feferman, S. (2006). The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. *Notices of the AMS* 53(4), 434–9.
- Feferman, S. (2010). Set-Theoretical Invariance Criteria for Logicality. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 51(1), 3–20.
- Ferber, R. (1984). *Platos Idee des Guten*. Sankt Augustin.
- Fichte, I. H. (1856). *Anthropologie. Die Lehre von der menschlichen Seele*. Leipzig.
- Fichte, J. G. (1970). *Briefwechsel 1793 – 1795*. Stuttgart – Bad Cannstatt.
- Fichte, J. G. (1971). Ueber den Begriff der Wissenschaftslehre oder der sogenannten Philosophie. In I. H. Fichte (Hrsg.), *Fichtes Werke. Zur theoretischen Philosophie I*, S. 27–82. Berlin.
- Finck, F. (2007). *Platons Begründung der Seele im absoluten Denken*. Berlin u.a.
- Fine, G. (Hrsg.) (1991). *Plato 1, Metaphysics and Epistemology*.
- Finsler, P. (1926a). Formale Beweise und die Entscheidbarkeit. *Mathematische Zeitschrift* 25, 676–82.
- Finsler, P. (1926b). Über die Grundlegung der Mathematik, Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome. *Mathematische Zeitschrift* 25, 683–713.
- Finsler, P. (1944). Gibt es unentscheidbare Sätze? *Commentarii Mathematici Helvetici* 16, 310–20.
- Finsler, P. (1953). Über die Berechtigung infinitesimalgeometrischer Betrachtungen. *Convegno Internazionale die Geometria Differenziale*, 8–12.
- Finsler, P. (1954). Die Unendlichkeit der Zahlenreihe. *Elemente der Mathematik* 9, 29–35.
- Finsler, P. (1964). Ueber die Grundlegung der Mathematik, Zweiter Teil, Verteidigung. *Commentarii Mathematici Helvetici* 38, 172–218.
- Finsler, P. (1975). *Aufsätze zur Mengenlehre*. Darmstadt.
- Finsler, P. (1996). *Finsler Set Theory: Platonism and Circularity. Translation of Paul Finsler's papers on set theory with introductory comments*. Basel, Boston, Berlin.
- Fladt, K. (1927). *Euklid*. Berlin.
- Foley, R. (2008). Plato's Undividable Line: Contradiction and Method in Republic VI. *Journal of the History of Philosophy* 46(1), 1–24.
- Folkerts, M. (1980). Probleme der Euklidinterpretation und ihre Bedeutung für die Entwicklung der Mathematik. *Centaurus* 23(3), 185–215.
- Forster, T. (1995). *Set Theory with a Universal Set* (2 Aufl.). Oxford.
- Forster, T. (1997). Quine's NF, 60 years on. *American Mathematical Monthly* 104(9), 838–845.
- Forster, T. (1998). [Review of] Finsler Set Theory: Platonism and circularity. *Studia Logica* 61(3), 429–33.
- Fossa, J. A. (2006). On the Pentagramm as a Pythagorean Emblem. *Revista Brasileira de Historia da Matematica* 6(12), 127–37.

- Fossa, J. A. und G. W. Erickson (2005). The Divided Line and the Golden Mean. *Revista Brasileira de Historia da Matematica* 5(9), 59–77.
- Fournarakis, P. und J. Christianidis (2006). Greek Geometrical Analysis: a new Interpretation through the "Givens"-Terminology. *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche* 26.
- Fowler, D. (1999). *The Mathematics of Plato's Academy. A new Reconstruction* (2 Aufl.). Oxford.
- Fraenkel, A. (1928). *Einleitung in die Mengenlehre*. Berlin. Nachdruck 1972.
- Fraenkel, A. A., Y. Bar-Hillel, und A. Levy (1973). *Foundations of Set Theory* (2 Aufl.). Amsterdam, London.
- Frede, D. (2006). Platons mathematisches Curriculum. In C. Rapp und T. Wagner (Hrsg.), *Wissen und Bildung in der antiken Philosophie*, S. 127–46. Stuttgart, Weimar.
- Frede, M. (1987). *Essays in Ancient Philosophy*. Minneapolis.
- Frede, M. (2004). Response to Theodore Scaltsas. In V. Karasmanis (Hrsg.), *Socrates. 2400 years since his death (399 B.C.–2001 A.D)*, S. 299–301.
- Fredel, J. (1998). *Maßästhetik. Studien zu Proportionsfragen und zum Goldenen Schnitt*. Hamburg.
- Frege, G. (1903). Über die Grundlagen der Geometrie. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 12, 319–24, 368–75. (Erste Aufsatzreihe).
- Frege, G. (1906). Über die Grundlagen der Geometrie. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 15, 293–309, 377–403, 423–30. (Zweite Aufsatzreihe).
- Frege, G. (1918). Der Gedanke. Eine logische Untersuchung. *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus* I(2), 58–77. Zitiert nach Künne 2010.
- Frege, G. (1983). *Nachgelassene Schriften*. Hamburg.
- Frege, G. (1987). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Stuttgart.
- Frege, G. (2009). *Grundgesetze der Arithmetik – Begriffsschriftlich abgeleitet. Band I und II*. Paderborn.
- Friedman, H. M. (1998). Finite functions and the necessary use of large cardinals. *Annals of Mathematics* 148, 803–93.
- Friedman, H. M. (31.11.2012). Boolean relation theory and incompleteness.
- Gabriel, G. (1978). Implizite Definitionen – Eine Verwechslungsgeschichte. *Annals of Science* 35, 419–23.
- Gaebel, R. E. (2002). *Cavalry Operations in the Ancient Greek World*. Oklahoma.
- Gaiser, K. (1964). Platons ›Menon‹ und die Akademie (1964). In Gaiser (2004), S. 353–99.
- Gaiser, K. (1998). *Platons ungeschriebene Lehre*. Stuttgart.
- Gaiser, K. (2004). *Gesammelte Schriften*. Sankt Augustin.
- Georgi, P. (1989). *Zahl, Form und Kontinuum in der frühgriechischen Mathematik und Philosophie. Dissertation*. Konstanz.
- Gericke, H. (1992). *Mathematik in Antike und Orient*. Wiesbaden.
- Glavas, C. B. (1994). *The Place of Euclid in ancient and modern Mathematics*. Athen.
- Gregory, A. (2012). Kennedy and Stichometry – Some Methodological Considerations. *Apeiron* 45(2), 157–79.
- Guggenheimer, H. (1977). The Axioms of Betweenness in Euclid. *Dialectica* 31, 187–92.
- Hájek, P. und P. Pudlák (1993). *Metamathematics of First-Order Arithmetik*. Berlin, Heidelberg.
- Halbach, V. und L. Horsten (2005). Computational Structuralism. *Philosophia Mathematica* 13(III), 174–86.
- Hale, B. (1987). *Abstract Objects*. Oxford.
- Halfwassen, J. (2006). *Der Aufstieg zum Einen. Untersuchungen zu Platon und Plotin* (2. Aufl.). München, Leipzig.
- Hallett, M. (1984). *Cantorian set theory and limitation of size*. Oxford.
- Hanegraaff, W. J. (2005). Forbidden Knowledge: Anti-Esoteric Polemics and Academic Research. *Aries* 5(2), 225–54.
- Hanegraaff, W. J. (2012). *Esotericism and the Academy. Rejected Knowledge in Western Culture*. Cambridge.
- Hanson, V. D. (1999). *The Wars of the Ancient Greeks and Their Invention of Western Military Culture*. London.
- Hansson, S. O. (2000). Formalization in Philosophy. *The Bulletin of Symbolic Logic* 6(2), 162–75.



- Harari, O. (2003). The Concept of Existence and the Role of Constructions in Euclid's Elements. *Archive for History of Exact Sciences* 57, 1–23.
- Hardy, G. H. (1940). *A Mathematician's Apology*. 2005 elektronische Veröffentlichung. <http://www.math.ualberta.ca/mss/>.
- Hardy, G. H. und E. M. Wright (1958). *Einführung in die Zahlentheorie*. München. Übersetzt von Herbert Ruoff.
- Hasse, H. und H. Scholz (1928). Die Grundlagenkrise der griechischen Mathematik. *Kant-Studien* 33, 4–34.
- Hausdorff, F. (1908). Grundzüge einer Theorie der geordneten Mengen. *Mathematische Annalen* 65, 435–505.
- Heath, T. L. (1981 (1921)a). *A History of Greek Mathematics. Volume I*. New York.
- Heath, T. L. (1981 (1921)b). *A History of Greek Mathematics. Volume II*. New York.
- Hegel, G. W. F. (1986a). *Vorlesungen über die Geschichte der Philosophie*. Frankfurt am Main.
- Hegel, G. W. F. (1986b). *Wissenschaft der Logik I*, Band Werke 5. Frankfurt am Main.
- Hegel, G. W. F. (1999). *Wissenschaft der Logik*. Darmstadt.
- Heijboer, A. (1955). Plato «Meno» 86e-87a. *Mnemosyne* 8, 89–122.
- Heller, M. und W. H. Woodin (Hrsg.) (2011). *Infinity. New Research Frontiers*. New York u.a.
- Henkin, L., P. Suppes, und A. Tarski (Hrsg.) (1959). *The Axiomatic Method. With special References to Geometry and Physics*. Amsterdam.
- Herbart, J. F. (1970). Antwort auf des Herrn Professors Fichte Frage an die Mathematiker . . . , S. 411–5. In Lauth und Jacob Fichte (1970).
- Herrmann, F.-G. (2007). Greek Religion and Philosophy: The God of the Philosopher. In D. Odgen (Hrsg.), *A Companion to Greek Religion*, Chichester, S. 385–97.
- Herz-Fischler, R. (1998). *A Mathematical History of the Golden Number*. New York.
- Hilbert, D. (1918). Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen* 78, 405–15.
- Hilbert, D. (1962). *Grundlagen der Geometrie* (9. Aufl.). Stuttgart.
- Hill, C. O. (1997). Did Georg Cantor Influence Edmund Husserl. *Synthese* 113(1), 145–70.
- Hinman, P. G. (2005). *Fundamentals of Mathematical Logic*. Wellesley.
- Hinnion, R. (2003). About the Coexistence of "Classical Sets" with "Non-Classical" Ones: A Survey. *Logic and Logical Philosophy* 11, 79–90.
- Hintikka, J. und U. Remes (1974). *The Method of Analysis*. Dordrecht.
- Hintikka, J. und U. Remes (1976). Ancient Geometrical Analysis and Modern Logic. In *Essays in Memory of Imre Lakatos*, S. 253–276.
- Höffe, O. (Hrsg.) (2005). *Platon. Politeia*. Berlin.
- Hoffmann, M. H. (2004). Axiomatisierung zwischen Platon und Aristoteles. *Zeitschrift für philosophische Forschung* 58(2), 224–45.
- Hoffmann, M. H. (2006). Axiomatisierung zwischen Platon und Aristoteles. In G. Schieman, D. Mersch, und G. Böhme (Hrsg.), *Platon im nachmetaphysischen Zeitalter*, S. 111–135. Darmstadt.
- Holmes, M. R. (1994). The set theoretical program of Quine succeeded (but nobody noticed). *Modern Logic* 4(1), 1–47.
- Holmes, M. R. (1996, Oktober). Review of „Finsler Set Theory: Platonism and Circularity“, David Booth and Renatus Ziegler, eds. Homepage.
- Holmes, M. R. (1998). *Elementary set theory with a universal set*, Band 10 von *Cahiers du Centre de logique*. Université catholique de Louvain Département de Philosophie.
- Holmes, M. R. (2001). Strong axioms of infinity in NFU. *Journal of Symbolic Logic* 66(1), 87–116.
- Holmes, M. R. (2009). Alternative Axiomatic Set Theories. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Holzhausen, J. (1994). Menon in Platons 'Menon'. *Würzburger Jahrbücher für die Altertumswissenschaft* 20, 129–49.
- Horn, C. (1995). Der Platonische Parmenides und die Möglichkeit seiner prinzipientheoretischen Interpretation. *Antike und Abendland* 4, 95–114.
- Horn, C. (2005). Platons *episteme-doxa*-Unterscheidung und die Ideentheorie. In Höffe (2005), S. 291–312.
- Hösle, V. (1982). Platons Grundlegung der Euklidizität der Geometrie. *Philologus. Zeitschrift für klassische Philologie* 126, 184–197.
- Hoyningen-Huene, P. (1998). *Formale Logik. Eine philosophische Einführung*. Stuttgart.

- Høyrup, J. (2005). Tertium non datur: On reasoning styles in early mathematics. In P. Mancosu, S. A.-Pedersen, und K. F. Jørgensen (Hrsg.), *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*, S. 91–121. Dordrecht.
- Huffman, C. (1988). The Role of Number in Philolaus' Philosophy. *Phronesis* 23(1), 1–29.
- Huntley, H. E. (1970). *The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty*. New York.
- Husserl, E. (1948). *Erfahrung und Urteil. Untersuchung zur Genealogie der Logik*. Hamburg. Redigiert und herausgegeben von Ludwig Landgrebe.
- Husserl, E. (1952). *Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie* (Husserliana Aufl.), Band V. Haag.
- Husserl, E. (1968). *Phänomenologische Psychologie* (Band IX Aufl.). Husserliana. Den Haag.
- Hutchinson, G. (2000). *Xenophon and the art of command*. London.
- Inheteen, R. (1985). Abschied von den Homogenitätsprinzipien? *Philosophia Naturalis* 22, 132–44.
- Janich, P. (1976). Zur Protophysik des Raumes. In Janich (1997), S. 35–72.
- Janich, P. (1997). *Das Maß der Dinge. Protophysik von Raum, Zeit und Materie*. Frankfurt am Main.
- Janich, P. (2008). Philosophie und Geometrie. Zur jüngeren Protophysik-Kritik. *Journal for General Philosophy of Science* 39, 121–30.
- Jech, T. (2003). *Set Theory*. Berlin Heidelberg.
- Jensen, R. B. (1969). On the consistency of a slight(?) modification of Quine's 'New Foundations'. *Synthese* 19, 250–263.
- Johnson, R. H. (1999). The Relation between Formal and Informal Logic. *Argumentation* 13, 265–74.
- Kahn, C. H. (1986). Retrospect on the verb 'to be' and the concept of being. In S. Knuutila und J. Hintikka (Hrsg.), *The Logic of Being*, S. 1–28. Dordrecht u.a.
- Kahn, C. H. (1991). Some Remarks on the Origins of Greek Science and Philosophy. In A. C. Bowen (Hrsg.), *Science and philosophy in classical Greece*, S. 1–10.
- Kanamori, A. (2003). *The Higher Infinite. Large Cardinals in Set Theory from Their Beginnings* (2 Aufl.). Berlin, Heidelberg.
- Kanamori, A. (2009). Set Theory from Cantor to Cohen. In A. I. Irvine (Hrsg.), *Philosophy of Mathematics*, S. 395–459. Amsterdam u.a.
- Karasmanis, V. (1988). Plato's Republic: The Line and the Cave. *Apeiron* 21(3), 147–70.
- Kaye, R. (1991). *Models of Peano Arithmetik*. Oxford.
- Kennedy, J. B. (2008, Mai). A Visual Introduction to the Musical Structure of Plato's *Symposium*. [http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/jay.kennedy/Kennedy\\_visual\\_intro.pdf](http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/jay.kennedy/Kennedy_visual_intro.pdf)
- Kennedy, J. B. (2010a). Plato's Forms, Pythagorean Mathematics, and Stichometry. *Apeiron: a journal of ancient science and philosophy*, 1–31.
- Kennedy, J. B. (2010b, Juli). The Musical Structure of Plato's Dialogues. A Quick Guide to the Strongest Evidence. <http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/jay.kennedy/>
- Kingsley, P. (2000). *Die Traumfahrt des Parmenides*. Frankfurt am Main.
- Kingsley, P. (2003). *Reality*. Inverness.
- Klein, J. (1965). *A commentary on Plato's Meno*. Chapel Hill.
- Kline, M. (1953). *Mathematics in Western Culture*. New York.
- Kline, M. (1971). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York.
- Künne, W. (2007). *Abstrakte Gegenstände. Semantik und Ontologie* (2 Aufl.). Frankfurt am Main.
- Künne, W. (2010). *Die Philosophische Logik Gottlob Feges. Ein Kommentar*. Frankfurt am Main.
- Knorr, W. R. (1975). *The Evolution of the Euclidean Elements. A Study of the Theory of Incommensurable Magnitudes and Its Significance for Early Greek Geometry*. Dordrecht, Boston.
- Knorr, W. R. (1986). *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. Boston, Basel, Stuttgart.
- Knorr, W. R. (1991). What Euclid Meant. On the Use of Evidence in Studying Ancient Mathematics. In A. C. Bowen (Hrsg.), *Science and philosophy in classical Greece*, S. 119–63.
- Knorr, W. R. (1998). Rational Diameters and the Discovery of Incommensurability. *The American Mathematical Monthly* 105(5), 421–9.

- Koellner, P. (2009). On reflection principles. *Annals of Pure and Applied Logic* 157, 206–19.
- Koetsier, T. und L. Bergmans (Hrsg.) (2005). *Mathematics and the Divine: A Historical Study*. Amsterdam et al.
- Kokkinos, J. (1997). *Das mathematische Inkommensurable und Irrationale bei Platon*. Frankfurt am Main.
- Kowol, G. (2009). *Projektive Geometrie und Cayley-Klein Geometrien der Ebene*. Basel, Boston, Berlin.
- Krämer, H. (2005). Die Idee des Guten. Sonnen- und Liniengleichnis. In Höffe (2005), S. 179–203.
- Krämer, H. J. (1959). *Arete bei Platon und Aristoteles*. Heidelberg.
- Krautzberger, P. (2005). Starke Reflektionsprinzipien. Diplomarbeit, Ludwig-Maximilians-Universität, München.
- Krämer, S. (1988). *Symbolische Maschinen: die Idee der Formalisierung in geschichtlichem Abriss*. Darmstadt.
- Kumschick, H. (2003). Problematik um die Maßästhetik. Fragen zu harmonischen Proportionen und zum Goldenen Schnitt. In K. Gloy (Hrsg.), *Kunst und Philosophie*, S. 145–82. Wien.
- Kunen, K. (1983). *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*. Amsterdam, New York, Oxford.
- Lampert, T. und M. Baumgartner (2010). The Problem of Validity Proofs. *Grazer Philosophische Studien* 80, 79–109.
- Landry, E. (2012). Recollection and the Mathematician's Method in Plato's *Meno*. *Philosophia Mathematica* 20(3), 143–169.
- Lange, M. (2009). Why proofs by mathematical induction are generally not explanatory. *Analysis* 69(2), 203–11.
- Lavecchia, S. (2005). Die  $\delta\mu\acute{o}\iota\omega\sigma\iota\varsigma$   $\theta\epsilon\epsilon\tilde{\omega}$  in Platons Philosophie. *Perspektiven der Philosophie* 31, 321–91.
- Leitgeb, H. und J. Ladyman (2008). Criteria of Identity and Structuralist Ontology. *Philosophia Mathematica* 16(3), 388–96.
- Lenski, W. (2010). Die Idee einer nicht-aristotelischen Logik. Manuskript.
- Leuz, H. A. (2009). On the Foundations of Greek Arithmetic. *Logical Analysis and History of Philosophy*, 13–47.
- Libert, T. und O. Esser (2005). On topological set theory. *Mathematical Logical Quarterly* 51(3), 263–73.
- Liddel, H., R. Scott, und S. Jones (1940). *A Greek-English Lexicon*. Oxford.
- Linck, M. S. (2008). Double Vision: On the Sensible and the Intelligible. *Epoché* 13(1), 25–47.
- Lindemann, F. (1882). Über die zahl  $\pi$ . *Mathematische Annalen* 20, 213–25.
- Linnebo, O. (2009). Platonism in the Philosophy of Mathematics. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Lloyd, G. E. R. (1992). The *Meno* and the Mysteries of Mathematics. *Phronesis* 37, 166–83.
- Lo Bello, A. (2009). *The commentary of al-Nayrizi on Books II-IV of Euclid's Elements of Geometry*. Leiden.
- Lohmar, D. (2010). Intuition in mathematics: on the function of eidetic variation in mathematical proofs. In M. Hartimo (Hrsg.), *Phenomenology and Mathematics*. Dordrecht u.a.
- Lorenzen, P. (1961). Das Begründungsproblem der Geometrie als Wissenschaft der räumlichen Ordnung. *Philosophia Naturalis* 6, 415–31.
- Lucas, J. R. (2000). *The conceptual roots of mathematics. An essay on the philosophy of mathematics*. London, New York.
- Lützen, J. (2010). The Algebra of Geometric Impossibility: Descartes and Montucla on the Impossibility of the Duplication of the Cube and the Trisection of the Angle. *Centaurus* 52, 4–37.
- Macintyre, A. (2011). The Impact of Gödel's Incompleteness Theorems on Mathematics. In Baaz et al. (2011), S. 3–25.
- Maddy, P. (1989). The Roots of contemporary Platonism. *The Journal of Symbolic Logic* 54(4), 1121–44.
- Maddy, P. (1990). *Realism in Mathematics*. Oxford.
- Maddy, P. (1997). *Naturalism in Mathematics*. Oxford.
- Magnani, L. (2001). *Philosophy and Geometry*. Dordrecht and Boston and London.
- Mahoney, M. S. (1968). Another Look at Greek Geometrical Analysis. *Archive for the History of the Exact Sciences* 5, 318–47.
- Mainzer, K. (1980). *Geschichte der Geometrie*. Mannheim, Wien, Zürich.
- Mainzer, K. (1986). Axiomatischer Konstruktivismus und Ontologie: Zum philosophischen Selbstverständnis der griechischen Mathematik. In H. Stachowiak (Hrsg.), *Pragmatik Bd. I*, S. 126–38. Hamburg.
- Mainzer, K. (1988). *Symmetrien der Natur. Ein Handbuch zur Natur- und Wissenschaftsphilosophie*. Berlin.

- Malzkorn, W. (2001). How Do We ‚Grasp‘ a Thought, Mr. Frege? In A. Newen, U. Nortmann, und R. Stuhlmann-Laeisz (Hrsg.), *Building on Frege. New Essays on Sense, Content, and Concept*, S. 35–51. Stanford.
- Manley, D. (2009). Introduction: A Guided Tour of Metametaphysics. In D. C. et al. (Hrsg.), *Metametaphysics. New Essays on the Foundations of Ontology*. Oxford.
- Marshall, M. V. (1989). Higher Order Reflection Principles. *Journal of Symbolic Logic* 54, 474–89.
- Martens, E. (Hrsg.) (1987). *Platon: Parmenides*. Stuttgart.
- Maudlin, T. (2010). Time, Topology and Physical Geometry. *Proceedings of the Aristotelian Society* 84, 63–78.
- Maudlin, T. (2012). *Philosophy of Physics. Space and Time*. Princeton, Oxford.
- Mayer, V. (2011). Regeln, Spielräume und das offene Undsoweiter. Die Wesensschau in *Erfahrung und Urteil*. In V. Mayer, C. Erhard, und M. Scherini (Hrsg.), *Die Aktualität Husserls*. Freiburg im Breisgau.
- Maziarz, E. A. und T. Greenwood (1968). *Greek Mathematical Philosophy*. New York.
- McKay, J. Z. und A. Rehding (2011). The Structure of Plato’s Dialogues and Greek Music Theory: A Response to J.B. Kennedy. *Apeiron* 44, 359–75.
- Meinwald, C. C. (1991). *Plato’s Parmenides*. New York, Oxford.
- Menge, H. (Hrsg.) (1896). *Euclidis Data*. Leipzig.
- Menn, S. (2002). Plato and the Method of Analysis. *Phronesis* 47, 194–223.
- Meschkowski, H. (1983). *Georg Cantor: Leben, Werk und Wirkung*. Braunschweig.
- Meyers, J. I. (1988). Plato’s Geometric Hypothesis: Meno 86e-87b. *Apeiron* 21, 173–80.
- Moore, G. H. (1982). *Zermelo’s Axiom of Choice. Its Origins, Development, and Influence*. New York, Heidelberg, Berlin.
- Moss, L. S. (2009). Non-wellfounded Set Theory. In E. N. Zalta (Hrsg.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*.
- Mueller, I. (1981). *Philosophy of mathematics and deductive structure in Euclid’s Elements*. Cambridge, Mass.
- Mueller, I. (Hrsg.) (1991). *Peri Ton Mathematōn*. Edmonton.
- Mueller, I. (1997). Greek arithmetic, geometry and harmonics: Thales to Plato. In C. C. W. Taylor (Hrsg.), *From the Beginning to Plato*, Band I von *Routledge History of Philosophy*, S. 271–322. London, New York.
- Mueller, I. (2003). Remarks on Euclid’s *Elements* I,32 and the Parallel Postulate. *Science in Context* 16(3), 187–97.
- Mueller, I. (2005). Mathematics and the Divine in Plato. In *Koetsier und Bergmans (2005)*, S. 99–121.
- Neils, J. (1992). The Panathenaia: An Introduction. In J. Neils (Hrsg.), *Goddess and Polis. The Panathenaic Festival in ancient Athen*, S. 13–28. Hanover, Princeton.
- Nekamas, A. (1975). Plato on the Imperfection of the Sensible World. *American Philosophical Quarterly* 12, 105–17.
- Netz, R. (1999). *The Shaping of Deduction in Greek Mathematics. A Study in Cognitive History*. Cambridge.
- Netz, R. (2005). The Pythagoreans. In *Koetsier und Bergmans (2005)*, S. 77–97.
- Neuenschwander, E. (1972-1973). Die ersten vier Bücher der Elemente Euklids. *Archive for History of Exact Sciences* 9, 325–80.
- Neuenschwander, E. (1974). Die stereometrischen Bücher der Elemente Euklids. *Archive for History of Exact Sciences* 14, 91–125.
- Nortmann, U. (2006). Platon über Gegenstände und Methode der Mathematik. *Philosophiegeschichte und logische Analyse* 9, 11–30.
- Oman, G. (2010). On the axiom of union. *Archive for Mathematical Logic* 49, 283–9.
- Otero, M. H. (1970). Gergonne on Implicit Definition. *Philosophy and Phenomenological Research* 30(4), 596–9.
- Parsons, C. (1975). What is the iterative conception of set? In Benacerraf und Putnam (1983), S. 503–29.
- Parsons, C. (1990). The Structuralist View of Mathematical Objects. *Synthese* 84, 303–46.
- Pasch, M. und M. Dehn (1926). *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Berlin.
- Pelletier, F. J. und E. N. Zalta (2000). How to Say Goodbye to the Third Man. *Nous* 34(2), 165–202.
- Perron, O. (1954). *Die Lehre von den Kettenbrüchen* (3. Aufl.). Stuttgart.
- Petersen, U. (1980 (erweiterte zweite Auflage 2010)). *Die logische Grundlegung der Dialektik. Ein Beitrag zur exakten Begründung der spekulativen Philosophie*. München.

- Petersen, U. (2000). Logic Without Contraction as Based on Inclusion and Unrestricted Abstraction. *Studia Logica* 64, 365–403.
- Petersen, U. (2002). *Diagonal Method and Dialectical Logic. Tools, materials, and groundworks for a logical foundation of dialectical and speculative philosophy.* Osnabrück.
- Petersen, U. (2006). Philosophical Sanity, Mysteries of the Understanding, and Dialectical Logic. *DILEMMATA: Jahrbuch der ASFPG.*
- Petersen, U. (2007). Begründung der Metaphysik durch logische Analyse der Selbstbezüglichkeit. *DILEMMATA: Jahrbuch der ASFPG* (2), 77–169.
- Petersen, U. (2009). 35 Thesen zur Grundlegung einer formalen dialektischen Logik — nebst Kommentaren. *DILEMMATA: Jahrbuch der ASFPG* (4), 135–207.
- Piazza, T. (2007). *A Priori Knowledge. Towards a Phenomenological Explanation.* Frankfurt u.a.
- Pleitz, M. (2010). Curves in Gödel-Space: Towards a Structuralist Ontology of Mathematical Signs. *Studia Logica* 96, 193–218.
- Poincaré, H. (1974). *Wissenschaft und Hypothese.* Darmstadt.
- Presburger, M. (1930). Über die Vollständigkeit eines gewissen Systems der Arithmetik ganzer Zahlen, in welchem die Addition als einzige Operation hervortritt. In *Sprawozdanie z I Kongresu matematyków krajów słowiańskich, Warszawa, 1929*, Warsaw, S. 92–101, 395.
- Pritchard, P. (1995). *Plato's Philosophy of Mathematics*, Band 5 von *International Plato Studies.* Sankt Augustin.
- Puntel, L. B. (1996). Lässt sich der Begriff der Dialektik klären? *Journal for General Philosophy of Science* 27, 131–65.
- Puntel, L. B. (2006). *Struktur und Sein. Ein Theorierahmen für eine systematische Philosophie.* Tübingen.
- Putnam, H. (1994). *Words and Life.* Cambridge, London.
- Quine, W. V. (1937a). New Foundations for mathematical logic. *American Mathematical Monthly* 59, 70–80.
- Quine, W. V. (1937b). On Cantors theorem. *Journal of Symbolic Logic* 2, 120–124.
- Quine, W. V. (1969). *Set Theory and its Logic.* Cambridge, London.
- Quine, W. V. (1976a). Posits and reality. In Quine (1976b), S. 246–54.
- Quine, W. V. (1976b). *The way of paradox and other essays.* Cambridge, London.
- Quine, W. V. (1980). On what there is. In *From a logical point of view*, S. 1–19. Cambridge.
- Quine, W. V. (1993). The inception of "New Foundations". *Bulletin of the Belgian Mathematical Society* 45(3), 325–7.
- Radke, G. (2003). *Die Theorie der Zahl im Platonismus. Ein systematisches Lehrbuch.* Tübingen.
- Raley, Y. (2007). Ontology, Commitment, and Quine's Criterion. *Philosophia Mathematica* 15, 271–90.
- Raymond, D. (2012). From a Particular Diagram to a Universal Result: Euclid's Elements, Book I. *Apeiron. Band , Heft , Seiten* 44(3), 211–18.
- Reck, E. R. (2009). Dedekind, Structural Reasoning, and Mathematical Understanding. In B. van Kerkhove und J. P. van Bendegem (Hrsg.), *New Perspectives on Mathematical Practices*, S. 150–73. Singapore u.a.
- Reed, D. (1995). *Figures of Thought. Mathematics and Mathematical Texts.* London, New York.
- Regier, T., P. Kay, und R. S. Cook (2005, Juli). Universal Foci and Varying Boundaries in Linguistic Color Categories. In *Proceedings of the 27th Annual Conference of the Cognitive Science Society*, Stresa, Italy, S. 1827–32.
- Reidemeister, K. (1940). *Die Arithmetik der Griechen.* Leipzig, Berlin.
- Reidemeister, K. (1942). *Mathematik und Logik bei Plato.* Leipzig, Berlin.
- Richter, P. H. und H.-J. Scholz (1987). Der Goldene Schnitt in der Natur. Harmonische Proportionen und die Evolution. In B.-O. Küppers (Hrsg.), *Ordnung aus dem Chaos. Prinzipien der Selbstorganisation und Evolution des Lebens.* München, Zürich.
- Rickless, S. C. (2007). *Plato's Forms in Transition. A Reading of the Parmenides.* Cambridge.
- Riedweg, C. (1987). *Mysterienterminologie bei Platon, Philon und Klemens von Alexandrien.* Berlin, New York.
- Rieger, A. (2000). An Argument for Finsler-Aczel Set Theory. *Mind* 109, 241–53.
- Rijk, L. (2002). *Aristotle. Semantics and Ontology. Volume 1.* Leiden, Boston, Köln.
- Robson, E. und J. Stedall (Hrsg.) (2009). *The Oxford Handbook of the History of Mathematics.* New York.

- Rödl, S. (2010). The Self-Conscious Power of Sensory Knowledge. *Grazer Philosophische Studien* 81, 135–51.
- Roscher, W. H. (1906). *Die Hebdomadenlehren der griechischen Philosophen und Ärzte. Ein Beitrag zur Geschichte der griechischen Philosophie und Medizin*. Leipzig.
- Roscher, W. H. (2003). *Beiträge zur Zahlensymbolik der Griechen und anderer Völker*. Hildesheim, Zürich, New York.
- Ross, W. D. (1951). *Plato's theory of Ideas*. Oxford.
- Rota, G.-C. (1997). *Indiscrete Thoughts*. Boston.
- Roth, D. (2003). *Cantors unvollendetes Projekt. Reflektionsprinzipien und Reflektionsschemata als Grundlagen der Mengenlehre und großer Kardinalzahlaxiome*. München.
- Roth, D. und G. Schneider (2013). The Interpretation of Classes in Axiomatic Set Theory. *forthcoming*
- Rousse, B. S. (2006). Demythologizing the Third Realm: Frege on Grasping Thoughts. <http://www.philosophy.ox.ac.uk/data/assets/pdf/0005/1886/Rousse-Frege-final.pdf>.
- Rovelli, C. (2011). Some Considerations on Infinity in Physics. In Heller und Woodin (2011), S. 167–75.
- Russell, B. (1957). *Mysticism and Logic*. Garden City.
- Russo, L. (1998). The Definitons of Fundamental Geometric Entities Contained in Book I of Euclid's Elements. *Archive for the History of Exact Sciences* 52, 195–219.
- Saggs, H. W. F. (1960). A Babylonian Geometrical Text. *Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale* 54, 131–46.
- Saito, K. (2009). Reading ancient greek Mathematics. In E. Robson und J. Stedall (Hrsg.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*, S. 801–26. New York.
- Sayre, K. M. (1996). *Parmenides' Lesson: Translation and Explication of Plato's Parmenides*. Notre Dame.
- Schefer, C. (2001). *Platons unsagbare Erfahrung. Ein anderer Zugang zu Platon*. Basel.
- Schlick, M. (1918). *Allgemeine Erkenntnislehre*. Berlin.
- Schlimm, D. (2009). Bridging Theories with Axioms: Boole, Stone, and Tarski. In B. V. Kerkhove (Hrsg.), *New Perspectives on Mathematical Practices. Essays in Philosophy and History of Mathematics*, S. 222–35. London u.a.
- Schmitt, A. (2003). *Die Moderne und Platon*. Stuttgart.
- Schmitz, H. (1967). *Der leibliche Raum*. Bonn.
- Schmitz, H. (2008). *Logische Untersuchungen*. München.
- Schmitz, M. (1997). *Euklids Geometrie und ihre mathematiktheoretische Grundlegung in der neuplatonischen Philosophie des Proklos*. Würzburg.
- Schneider, G. (2013a). Formalizing informal set theory and large cardinal hypotheses. Manuskript.
- Schneider, G. (2013b). Über die Mathematik zur Philosophie. Platonischer Erkenntnisweg und moderne Mathematik. In M. Rathgeb, M. Helmerich, R. Krömer, K. Lengnink, und G. Nickel (Hrsg.), *Mathematik im Prozess? Philosophische, Historische und Didaktische Perspektiven*.
- Schönbeck, J. (2003). *Euklid. Um 300 v. Chr.* Basel, Boston, Berlin.
- Schreiber, P. (1987). *Euklid*. Leipzig.
- Scolnicov, S. (2003). *Plato's Parmenides: Translated with introduction and commentary*. Berkeley.
- Scott, D. (2006). *Plato's Meno*. Cambridge.
- Scriba, C. J. und P. Schreiber (2005). *5000 Jahre Geometrie. Geschichte. Kulturen. Menschen*. Berlin, Heidelberg.
- Seeskin, K. R. (1978). Formalization in Platonic Scholarship. *Metaphilosophy* 9(3/4), 242–51.
- Shapiro, S. (1991). *Foundations without Foundationalism. A Case for Second-order Logic*. Oxford.
- Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*. New York: Oxford University Press.
- Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics. The Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press.
- Shapiro, S. (2008). Identity, Indiscernibility, and *ante rem* Structuralism. The Tale of *i* and *-i*. *Philosophia Mathematica* 16(3), 285–309.
- Sharlow, M. F. (2001). Broadening the Iterative Conception of Set. *Notre Dame Journal of Formal Logic* 42, 147–70.

- Sidoli, N. und K. Saito (2010). The function of diorism in ancient Greek analysis. *Historia Mathematica* 37, 579–614.
- Sidoli, N. und K. Saito (2012). Comparative analysis in Greek geometry. *Historia Mathematica* 39, 1–33.
- Simpson, S. G. (2009). *Subsystems of Second Order Arithmetic* (Second edition Aufl.). New York.
- Skala, H. (1974). An alternative way of avoiding the set-theoretical paradoxes. *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik* 20, 233–237.
- Skolem, T. (1931). *Über einige Satzfunktionen in der Arithmetik*. Skrifter Utgitt av Det Norske Videnskaps-Akademi i Oslo, I. Mat.-Naturv. Klasse, 1930. Oslo.
- Skolem, T. (1934). P. Finsler. über die Grundlegung der Mengenlehre. I: Die Mengen und ihre Axiome. *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* 52(1), 192–3.
- Smith, N. D. (1981). The Objects of *Dianoia* in Plato's Divided Line. *Apeiron* 15(2), 129–37.
- Smith, N. D. und P. B. Woodruff (Hrsg.) (2000). *Reason and Religion in Socratic Philosophy*. New York.
- Smith, P. (2007). *An Introduction to Gödel's Theorems*. Cambridge u.a.
- Sowa, R. (2007). Wesen und Wesensgesetze in der deskriptiven Eidetik Edmund Husserls. *Phänomenologische Forschungen*, 5–37.
- Sowa, R. (2011). Das Allgemeine als das »Gemeinsame«. Anmerkungen zum *Proton Pseudos* der Lehre Husserls von der Wesensschauung. In V. Mayer, C. Erhard, und M. Scherini (Hrsg.), *Die Aktualität Husserls*. Freiburg im Breisgau.
- Spaemann, R. (2010). Über die Bedeutung der Worte «ist», «existiert» und «es gibt». *Philosophisches Jahrbuch* 117(1), 5–19.
- Sparby, T. S. (2012). *Die bestimmte Negation bei Hegel*. Dissertation, Heidelberg.
- Specker, E. P. (1953). The axiom of choice in Quine's new foundations for mathematical logic. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA* 39, 972–975.
- Specker, E. P. (1954). Die Antinomien der Mengenlehre. *Dialectica* 8, 234–44.
- Spence, I. G. (1993). *The Cavalry of Classical Greece. A Social and Military History with Particular Reference to Athens*. New York.
- Stamatis, E. S. (1962). A Contribution to the Interpretation of geometric passage of the dialogue Menon, Platos (86e-87b). ΠΛΑΤΩΝ 27/28, 315–20.
- Steele, A. D. (1936). Über die Rolle von Zirkel und Lineal in der griechischen Mathematik. *Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik* 3, 287–369.
- Stekeler-Weithofer, P. (1986). *Grundprobleme der Logik. Elemente einer Kritik der formalen Vernunft*. Berlin, New York.
- Stenzel, J. (1924). *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*. Leipzig, Berlin.
- Sternfeld, R. und H. Zyskind (1977). Plato's Meno: 86e-87a: The Geometrical Illustration of The Argument by Hypothesis. *Phronesis* 22, 206–11.
- Swanson, J. W. (1966). On the Formalisation of Set Theory. *Mind* LXXV(300), 569–72.
- Szabó, A. (1969). *Anfänge der griechischen Mathematik*. R. Oldenbourg.
- Szabó, A. (1994). *Entfaltung der griechischen Mathematik*, Band 26 von *Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik*.
- Szlezák, T. A. (1993). *Platon lesen*. Stuttgart-Bad Cannstatt.
- Szlezák, T. A. (2005). Das Höhlengleichnis. In Höffe (2005), S. 205–228.
- Taisbak, C. M. (2002). Euclid's *Elements* 9.14 and the Fundamental Theorem of Arithmetic. In Tulin und Rihll (2002), S. 230–41.
- Tait, W. (2005). Noësis: Plato on Exact Science. In *The Provenance of Pure Reason. Essays in the Philosophy of Mathematics and Its History*, S. 178–97.
- Tapp, C. (2005). *Kardinalität und Kardinalre: wissenschaftshistorische Aufarbeitung der Korrespondenz zwischen Georg Cantor und katholischen Theologen seiner Zeit*. Stuttgart.
- Tarski, A. (1959). What is elementary Geometry? In Henkin et al. (1959), S. 16–29.
- Tennenbaum, S. (1959). Non-archimedean models for arithmetic. *Notices of the American Mathematical Society* 6, 270.
- Thiel, D. (2006). *Die Philosophie des Xenokrates im Kontext der Alten Akademie*. München, Leipzig.
- Thomas, J. E. (1980). *Musings on the Meno*. The Hague, Boston, London.
- Thurnher, R. (2005). Platons Liniengleichnis und die Frage der Hypotheseis. Erprobung eines neuen Paradigmas. In D. Barbaric (Hrsg.), *Platon über das Gute und die Gerechtigkeit*.

- Tieszen, R. (2005). Free Variation and the Intuition of Geometric Essences. Some Reflections on Phenomenology and Modern Geometry. In R. Tieszen (Hrsg.), *Phenomenology, logic, and the philosophy of mathematics*, S. 69–89. Cambridge.
- Toth, I. (1967). Das Parallelenproblem im «Corpus Aristotelicum». *Archive for History of Exact Sciences* 3.
- Tropfke, J. (1902). *Geschichte der Elementar-Mathematik in systematischer Darstellung. Zweiter Band*. Leipzig.
- Tucker, J. (1963). The Formalisation of Set Theory. *Mind* 72(288), 500–18.
- Tucker, J. (1969a). A Comment on I. J. Good's Note on Richard's Paradox. *Mind* LXXVIII(310), 272.
- Tucker, J. (1969b). The Formalisation of Set Theory: a Reply to Mr. Swanson. *Mind* LXXVIII(309), 142.
- Tulin, C. J. und T. E. Rihll (Hrsg.) (2002). *Science and Mathematics in Ancient Greek Culture*. New York.
- Turnbull, R. G. (1998). *The Parmenides and Plato's Late Philosophy. Translation of and Commentary on the Parmenides with Interpretative Chapters on the Timaeus, the Theaetetus, the Sophist, and the Philebus*. Toronto, Buffalo, London.
- Unguru, S. (2002). 'Amicus Plato sed ...': Fowler's New Mathematical Reconstruction of the Mathematics of Plato's Academy. *Annals of Science* 59, 201–10.
- Väänänen, J. (2012). Second Order Logic or Set Theory. *Bulletin of Symbolic Logic* 18(1), 91–121.
- Vajda, S. (1989). *Fibonacci and Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Application*. Mineola.
- van der Schoot, A. (2005a). *Die Geschichte des Goldenen Schnitts. Aufstieg und Fall der göttlichen Proportion*. Stuttgart, Bad Cannstatt.
- van der Schoot, A. (2005b). The Divined Proportion. In *Koetsier und Bergmans (2005)*, S. 655–72.
- van der Waerden, B. (1943). Die Harmonielehre der Pythagoreer. *Hermes. Zeitschrift für klassische Philologie* 78, 163–199.
- van Heijenoort, J. (Hrsg.) (1967). *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931*. Cambridge.
- von Baravalle, H. (1985). *Die Geometrie des Pentagramms und der Goldene Schnitt (4. Aufl.)*. Stuttgart.
- von Fritz, K. (1945). The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum. *The Annals of Mathematics* 46(2), 242–64.
- von Fritz, K. (1971). The Philosophical Passage in the Seventh Platonic Letter and the Problem of Plato's "Esoteric" Philosophy. In J. P. Anton und G. L. Kostas (Hrsg.), *Essays in Ancient Greek Philosophy*, S. 408–47. Albany.
- von Kutschera, F. (1995). *Platons «Parmenides»*. Berlin, New York.
- Walser, H. (2009). *Der Goldene Schnitt (5. Aufl.)*. Leipzig.
- Wang, H. (1974). *From Mathematics to Philosophy*. Routledge & Kegan Paul Ltd.
- Wang, H. (1977). Large Sets. In R. E. Butts und J. Hintikka (Hrsg.), *Logic, Foundations of Mathematics and Computability Theory*, S. 309–33. Dordrecht.
- Wang, H. (1987). *Reflection on Kurt Gödel*. Cambridge: MIT Press.
- Wang, H. (1996). *A Logical Journey. From Gödel to Philosophy*. Cambridge: MIT Press.
- Wantzel, P. L. (1837). Recherches sur le moyens de reconnaître si un problème de géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas. *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 2, 366–72.
- Waschkies, H.-J. (1971). Eine neue Hypothese zur Entdeckung der inkommensurablen Größen durch die Griechen. *Archive for History of Exact Sciences* 7, 325–53.
- Waschkies, H.-J. (1977). *Von Eudoxos zu Aristoteles. Das Fortwirken der Eudoxischen Proportionentheorie in der Aristotelischen Lehre vom Kontinuum*. Amsterdam.
- Waschkies, H.-J. (1989). *Anfänge der Arithmetik im alten Orient und bei den Griechen*. Amsterdam.
- Wedberg, A. (1955). *Plato's Philosophy of Mathematics*. Stockholm.
- Welsch, W. (2009). Von der universalen Schätzung des Schönen. In M. Sachs und S. Sander (Hrsg.), *Die Permanenz des Ästhetischen*, S. 93–119. Wiesbaden.
- Wex, C. (1867). Platon's Geometrie im Menon und die Parabel des Pythagoras bei Plutarch. *Archiv der Mathematik und Physik* 47, 131–163.
- Wieland, W. (1999). *Platon und die Formen des Wissens (2. Aufl.)*. Göttingen.
- Wilberding, J. (2004). Prisoners and Puppeteers in the Cave. *Oxford Studies in Ancient Philosophy* 27, 117–39.
- Wilholt, T. (2004). *Zahl und Wirklichkeit. Eine philosophische Untersuchung über die Anwendbarkeit der Mathematik*. Paderborn.



- 
- Witter, G. E. (1964). *Mathematics: The Study of Axiom Systems*. New York, Toronto, London.
- Wittkower, R. (1960). The Changing Concept of Proportion. *Daedalus* 89(1), 199–215.
- Wittkower, R. (1969). *Grundlagen der Architektur im Zeitalter des Humanismus*. München.
- Wolff, M. (2009). Absolute Selbstähnlichkeit in der euklidischen Geometrie. Zu Kants Erklärung der Möglichkeit der reinen Geometrie als einer synthetischen Erkenntnis a priori. *Kant-Studien* 100, 285–308.
- Wolfsdorf, D. (2008). The Method ἐξ ὑποθέσεως at Meno 86e1-87d8. *Phronesis* 53, 35–64.
- Wood, D. (2012). *“Mathesis of the Mind”. A Study of Fichte’s Wissenschaftslehre and Geometry*. New York.
- Zeckl, H. G. (1971). *Der Parmenides. Untersuchungen über innere Einheit, Zielsetzung und begriffliches Verfahren eines platonischen Dialogs*. Marburg/Lahn.
- Zermelo, E. (1908a). Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung. *Mathematische Annalen* 65, 107–28.
- Zermelo, E. (1908b). Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre. I. *Mathematische Annalen* 65, 261–81.
- Zeuthen, H. G. (1896). Die geometrische Construction als "Existenzbeweis" in der antiken Geometrie. *Mathematische Annalen* 47, 222–8.
- Zhmud, L. (1997). *Wissenschaft, Philosophie und Religion im frühen Pythagoreismus*. Berlin.
- Ziegler, R. (1992). *Mathematik und Geisteswissenschaft*. Dornach.
- Ziegler, R. (1996, November). Zur Natur der Zahlen: Mathematische, logische und erkenntniswissenschaftliche Untersuchungen im Umkreis der Gesetzmäßigkeiten natürlicher Zahlen.