Reprinted from JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS Vol. 22, No. 4, August 1976
All Rights Reserved by Academic Press, New York and London Printed in Belgium

Fell–Bündel und verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$-Algebren

MICHAEL LEINERT

Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, 48 Bielefeld, West Germany

Communicated by the Editors

Received November 27, 1974; revised May 20, 1975

The relation between cross-sectional algebras of homogeneous Banach-$*$-algebraic bundles in the sense of Fell [5] and generalized $\mathscr{L}^1$-algebras, as defined in slightly different ways by Leptin [7], Busby and Smith [2], and others, has been studied by Busby in [3]. We give an extension of his result, using a different method for obtaining topological group extensions. Instead of first constructing the abstract group extension from the given factor system and then topologizing it, we work in a natural topological setting and define a topological group which turns out to be the group extension belonging to the given factor system. As a consequence we obtain (without separability assumptions) that for any measurable factor system of a locally compact group with values in some other locally compact group the corresponding abstract group extension can be topologized to give a topological (and hence locally compact) group extension.

Im Abschnitt I wird gezeigt, daß die Definition der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra bei Busby und Smith [2], mit der von Leinert in [6] gegebenen übereinstimmt, wenn man sich bei [6] auf unitäre Faktorensysteme beschränkt. Wir legen diesen Begriff der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra zugrunde. Eine solche Algebra kann als cross-sectional algebra eines gewissen Bündels dargestellt werden, dessen Multiplikation und Involution, wie wir in Abschnitt II sehen, nicht notwendig stetig sind, das also kein Fell'sches Bündel zu sein braucht. Es ist jedoch ein Fell'sches Bündel, wenn das verwendete Faktorensystem stetig ist. In Abschnitt III werden die homogenen Fell'schen Bündel durch eine Konstruktion charakterisiert, die von der Fell'schen (vgl. [5]) etwas abweicht, was durch die von uns verwendete Definition der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra bedingt ist. Abschnitt IV enthält das Ergebnis, daß die cross-sectional algebra eines homogenen Fell–Bündels, das einen gewissen meßbaren Schnitt zuläßt, zu einer verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra isometrisch isomorph ist.[1] Umgekehrt wird in Abschnitt V bewiesen, daß eine verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$-Algebra unter ziemlich allgemeinen Voraussetzungen zur cross-sectional algebra eines homogenen Fell–Bündels isometrisch isomorph ist; aus technischen Gründen treffen wir für den letzten Teil des Beweises eine Separabilitätsannahme.

Bezeichnungen. Ist G eine lokal kompakte Gruppe, so bezeichne e das Eins-Element, dy ein linksinvariantes Haar-Maß und Δ die Modularfunktion der Gruppe. $\mathscr{C}_k(G)$ sei die Menge der stetigen komplexwertigen Funktionen auf G mit kompaktem Träger, $\mathscr{L}^1(G)$ die gewöhnliche Gruppenalgebra von G. Für einen Banach–Raum E ist $\mathscr{L}^1(G, E)$ der Banach–Raum der (Klassen von) Haar-integrierbaren Funktionen[2] auf G mit Werten in E und $\mathscr{C}_k(G) \otimes E$ der lineare Teilraum von $\mathscr{L}^1(G, E)$, der durch die Funktionen der Form

$$g \otimes a: x \mapsto (g \otimes a)(x) = g(x) \cdot a,$$

$g \in \mathscr{C}_k(G)$, $a \in E$, erzeugt wird. Ist f eine Funktion auf G, so bezeichnet $\operatorname{supp}(f)$ den Träger von f und $f|_U$ die Restriktion von f auf die Teilmenge $U \subset G$; wir sagen, f sei meßbar, wenn f bezüglich des Haar–Maßes auf G meßbar ist (im Sinne von Bourbaki [1]), und bezeichnen die Integralnorm von f mit $|f|_1$, die Supremumsnorm mit $|f|_\infty$. Sonst werden alle Normen mit $|\ |$ notiert. Ist N ein Normalteiler der Gruppe G, so schreiben wir für G/N auch $\dot{G}$ und bezeichnen die Nebenklasse xN von $x \in G$ mit $\dot{x}$. Für zwei Mengen U und V bedeutet $U \setminus V$ die mengentheoretische Differenz. Die identische Abbildung einer Menge M in sich wird mit id_M bezeichnet.

Für Begriffe wie Bündel, insbesondere homogenes Banach-$*$-algebraisches Bündel, Schnitt eines Bündels (= cross-sectional function in [5], *nicht* cross-section), Multiplikator, Ordnung eines Multiplikators sei auf [5] verwiesen. Die $\mathscr{L}^1$-Algebra der integrierbaren Schnitte eines Banach-$*$-algebraischen Bündels $\mathscr{B}$ (vgl. [5], cross-sectional algebra) wird mit $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ bezeichnet. In Abschnitt II bilden wir $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ analog für ein Banach-Bündel $\mathscr{B}$ mit nicht notwendig stetiger Multiplikation und Involution.

Ist A eine involutive Banach-Algebra, d.h. eine Banach-Algebra mit einer isometrischen Involution $x \mapsto x^*$, so bezeichnet $\mathscr{B}(A)$ die Algebra der beschränkten linearen Operatoren von A und $\mathrm{Aut}_1(A)$ die Menge der isometrischen $*$-Automorphismen von A; die Algebra der Multiplikatoren von A (vgl. [5]) bezeichnen wir mit $\mathscr{M}(A)$.

[1] Dieses Ergebnis wurde unabhängig von [3] erzielt, wir verweisen aber auf den dort gegebenen Beweis.

[2] Wir unterscheiden integrierbare Funktionen nicht von ihren Klassen.

Definiert man für $B \in \mathscr{B}(A)$ den Operator B^0 durch $B^0 a = (Ba^*)^*$, so kann man die Algebra $A^b \subset \mathscr{B}(A)$ (zur Definition von A^b vgl. [8, Abschnitt 3]) mit $\mathscr{M}(A)$ identifizieren durch die Abbildung

$$B \mapsto (B, B^{*0}),$$

wenn A die Bedingung

$$\{a \in A \mid ab = 0 \text{ für alle } b \in A\} = \{0\}$$

erfüllt, was wir stets voraussetzen wollen. Diese Identifizierung wird in Abschnitt V stillschweigend benutzt.

Die Menge der unitären Multiplikatoren von A bezeichnen wir mit $\mathscr{U}(A)$. Stets sei $\mathscr{U}(A)$ mit der starken Operatortopologie versehen, es gilt also

$$u_\mu \to u \quad \text{in } \mathscr{U}(A)$$

genau dann, wenn

$$u_\mu a \to ua \quad \text{und} \quad au_\mu \to au \quad \text{in } A$$

für jedes $a \in A$. Die Fortsetzung eines Automorphismus T von A zu einem Automorphismus von $\mathscr{M}(A)$, definiert durch

$$T(ma) = T(m)\, T(a),$$

$m \in \mathscr{M}(A)$, $a \in A$, bezeichnen wir meist (wie soeben) wieder mit demselben Buchstaben.

Zum Begriff einer meßbaren Familie von beschränkten Operatoren vgl. [8].

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sind die Mengen der natürlichen, der ganzen, der reellen und der komplexen Zahlen.

Aus dem Bestreben, bei der Wiedergabe anderer Autoren möglichst weit deren Schreibweise zu folgen, erklärt sich die Inkonsequenz in Abschnitt I, einander entsprechende Abbildungen verschieden zu notieren.

I

Es sei stets A eine involutive Banach-Algebra, G eine lokal kompakte Gruppe.

Definition. Ein twisting pair für G und A ist ein Paar (S, α)

von Abbildungen $S\colon G \to \mathrm{Aut}_1(A)$ und $\alpha\colon G \times G \to \mathscr{U}(A)$, so daß für jedes $a \in A$ die Abbildungen $x \mapsto S(x)a$ und $(x, y) \mapsto a\alpha(x, y)$ auf G bzw. $G \times G$ meßbar sind und folgendes gilt:

$$\begin{aligned} &(1)\quad [S(x)(\alpha(y, z))]\, \alpha(x, yz) = \alpha(x, y)\, \alpha(xy, z), \\ &(2)\quad (S(x)\, S(y)a)\, \alpha(x, y) = \alpha(x, y)\, S(xy)a, \\ &(3)\quad \alpha(x, e) = \alpha(e, x) = \mathrm{id}_A, \qquad S(e) = \mathrm{id}_A, \end{aligned} \tag{1.1}$$

für alle $x, y, z \in G$ und $a \in A$.

Definition. Ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A ist ein Paar (T, P) von Abbildungen $T\colon G \to \mathrm{Aut}_1(A)$ und $P\colon G \times G \to \mathscr{U}(A)$, so daß für jedes $a \in A$ die Abbildungen $x \mapsto T_x a$ und $(x, y) \mapsto P_{x,y}a$ auf G bzw. $G \times G$ meßbar sind und folgendes gilt:

$$\begin{aligned} &(1)\quad P_{xy,z}T_{z^{-1}}(P_{x,y}) = P_{x,yz}P_{y,z}, \\ &(2)\quad aP_{x,y} = P_{x,y}T_{x,y}a, \qquad \text{wobei} \quad T_{x,y} = T_{y^{-1}}T_{x^{-1}}T^{-1}_{y^{-1}x^{-1}}, \\ &(3)\quad P_{x,e} = P_{e,x} = \mathrm{id}_A, \qquad T_e = \mathrm{id}_A, \end{aligned} \tag{1.2}$$

für alle $x, y, z \in G$, $a \in A$.

Diese Definition des unitären Faktorensystems unterscheidet sich von der in [6] gegebenen nur durch die Schreibweise.

Ist (S, α) ein twisting pair für G und A, so definiert man im Banach-Raum $\mathscr{L}^1(G, A)$ ein Produkt und eine Involution durch

$$f \star g(x) = \int f(xy) \cdot (S(xy)\, g(y^{-1}))\, \alpha(xy, y^{-1})\, dy,$$

$$f^*(x) = \Delta(x)^{-1}\, \alpha(x, x^{-1})^*\, S(x)\, f(x^{-1})^*,$$

$x, y \in G$. Wir erhalten so eine verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$-Algebra im Sinne von [2], die wir mit $\mathscr{L}(G, A; S, \alpha)$ bezeichnen und Busby-Smith-Algebra nennen.

Ist (T, P) ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A, so definiert man in $\mathscr{L}^1(G, A)$ ein Produkt und eine Involution durch

$$f \star g(x) = \int P_{xy,y^{-1}}T_y f(xy) \cdot g(y^{-1})\, dy,$$

$$f^*(x) = \Delta(x)^{-1}\, P^*_{x^{-1},x}T^{-1}_x f(x^{-1})^*.$$

Wir erhalten so eine verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$-Algebra im Sinne von [6], die wir mit $\mathscr{L}(G, A; T, P)$ bezeichnen und Leptin-Algebra nennen. Daß die Definition der Involution mit der in [6] gegebenen übereinstimmt, folgt aus [6, (1.3)].

SATZ 1. *Jede Busby–Smith-Algebra ist isometrisch isomorph zu einer Leptin-Algebra und umgekehrt.*

Beweis. (a) Sei (S, α) ein twisting pair für G und A. Wir definieren

$$T_x = S(x^{-1})^{-1}, \tag{1.3}$$

$$P_{x,y} = S(xy)^{-1}\,(\alpha(x, y)). \tag{1.4}$$

Mit Hilfe von (1.1), (1)–(3), läßt sich nachrechnen, daß T und P die Bedingungen (1.2), (1)–(3), erfüllen.

Wir zeigen nun die Meßbarkeit von T und P. Substituiert man $x \to y$, $y \to x^{-1}$, $z \to xz$ in (1.1), (1), wendet auf die Gleichung die Involution an und multipliziert beide Seiten von rechts mit $S(y)$, so erhält man

$$\alpha(y, z)^*\, S(y)\, \alpha(x^{-1}, xz)^* = \alpha(yx^{-1}, xz)^*\, \alpha(y, x^{-1})^*\, S(y),$$

woraus durch ein Argument wie in [8, S. 277] die Meßbarkeit von

$$x \mapsto \alpha(x^{-1}, xz)^*\, a$$

bei beliebigem $a \in A$ für jedes $z \in G$ folgt. Insbesondere ist $x \mapsto \alpha(x^{-1}, x)^* a$ meßbar, also auch $x \mapsto a\alpha(x^{-1}, x)$. Aus (1.1), (2), ergibt sich, indem man dort y durch x^{-1} und a durch $S(x^{-1})^{-1}\, S(x)^{-1} a$ ersetzt und von links mit $S(x^{-1})\, \alpha(x, x^{-1})^*$ multipliziert:

$$S(x^{-1})(\alpha(x, x^{-1})^*\, a\, \alpha(x, x^{-1})) = S(x)^{-1}\, a.$$

Hieraus folgt wegen der Meßbarkeit von $x \mapsto a\alpha(x, x^{-1})$, $x \mapsto \alpha(x, x^{-1})^* a$ und $x \mapsto S(x^{-1})a$ die Meßbarkeit von $x \mapsto S(x)^{-1} a$ (vgl. [8, (1.1)]).

Betrachten wir nun (1.1), (2), und ersetzen dort a durch $S(xy)^{-1} a$, so erhalten wir die Meßbarkeit von $(x, y) \mapsto \alpha(x, y)a$. Damit sind die Abbildungen $x \mapsto T_x a$ und $(x, y) \mapsto P_{x,y} a$, $a \in A$, meßbar, (T, P) ist also ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A.

Seien $\mathscr{L} = \mathscr{L}(G, A;\, S, \alpha)$ und $\tilde{\mathscr{L}} = \mathscr{L}(G, A;\, T, P)$ die zu (S, α) bzw. (T, P) gehörigen verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebren.

Für $f \in \mathscr{L}$ sei $\tilde{f} \in \tilde{\mathscr{L}}$ definiert durch

$$\tilde{f}(x) = S(x)^{-1} f(x).$$

Wir wollen zeigen, daß $f \mapsto \tilde{f}$ ein Isomorphismus von $\mathscr{L}$ auf $\tilde{\mathscr{L}}$ ist. Offenbar ist $\tilde{f}$ meßbar und $|\tilde{f}|_1 = |f|_1$. Für $f, g \in \mathscr{L}$ gilt

$$\begin{aligned}
\widetilde{f \star g}(x) &= S(x)^{-1} f \star g(x) \\
&= S(x)^{-1} \int f(xy)\, S(xy)\, g(y^{-1}) \cdot \alpha(xy, y^{-1})\, dy \\
&= \int S(x)^{-1} [\alpha(xy, y^{-1})\, S(x)\, S(y^{-1})^{-1}\, S(xy)^{-1}\, (f(xy)\, S(xy)\, g(y^{-1}))]\, dy \\
&= \int S(x)^{-1}\, (\alpha(xy, y^{-1}))\, S(y^{-1})^{-1}\, S(xy)^{-1} f(xy) \cdot S(y^{-1})^{-1}\, g(y^{-1})\, dy \\
&= \int P_{xy, y^{-1}} T_y\, \tilde{f}(xy) \cdot \tilde{g}(y^{-1})\, dy \\
&= \tilde{f} \star \tilde{g}(x)
\end{aligned}$$

und

$\tilde{f}^*$

$$\begin{aligned}
\widetilde{f^*}(x) &= S(x)^{-1} f^*(x) \\
&= S(x)^{-1} [\Delta(x)^{-1}\, \alpha(x, x^{-1})^*\, S(x)\, f(x^{-1})^*] \\
&= \Delta(x)^{-1}\, \alpha(x^{-1}, x)^*\, f(x^{-1})^*
\end{aligned}$$

wegen (1.1), (1), man substituiere dort $y \to x^{-1}$, $z \to x$;

$$\begin{aligned}
&= \Delta(x)^{-1} P^*_{x^{-1}, x} T_x^{-1} T_x\, f(x^{-1})^* \\
&= \Delta(x)^{-1}\, P^*_{x^{-1}, x} T_x^{-1} (S(x^{-1})^{-1} f(x^{-1}))^* \\
&= \Delta(x)^{-1}\, P^*_{x^{-1}, x} T_x^{-1} \tilde{f}(x^{-1})^* \\
&= (\tilde{f})^*\, (x).
\end{aligned}$$

Offenbar ist $f \mapsto \tilde{f}$ surjektiv, so daß der erste Teil der Behauptung bewiesen ist: jede Busby–Smith-Algebra ist isometrisch isomorph zu einer Leptin-Algebra.

(b) Sei (T, P) ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A. Wir definieren

$$S(x) = T^{-1}_{x^{-1}}, \tag{1.5}$$

$$\alpha(x, y) = T^{-1}_{(xy)^{-1}}(P_{x,y}). \tag{1.6}$$

Ähnlich wie unter (a) gezeigt wurde, daß (T, P) ein Faktorensystem ist, ergibt sich, daß (S, α) ein twisting pair für G und A ist. Da man durch (1.3) und (1.4) gerade das Faktorensystem (T, P) zurückgewinnt, sind nach (a) die Algebren $\mathscr{L}(G, A;\ T, P)$ und $\mathscr{L}(G, A;\ S, \alpha)$ isometrisch isomorph. Damit ist der Satz bewiesen.

II

Sei (T, P) ein unitäres Faktorensystem der lokal kompakten Gruppe G bezüglich der involutiven Banach-Algebra A. Sei $\mathscr{B}$ das triviale Banach–Raum–Bündel $A \times G$, versehen mit dem Produkt

$$(a, x)(b, y) = (P_{x,y} T_{y^{-1}} a \cdot b,\ xy) \tag{2.1}$$

und der Involution

$$(a, x)^* = (P^*_{x,x^{-1}} T^{-1}_{x^{-1}} a^*,\ x^{-1}), \tag{2.2}$$

$a, b \in A$, $x, y \in G$. Wir nennen $\mathscr{B}$ das zu (T, P) gehörige Leptin–Bündel. Wie man sich leicht überzeugt, gilt $\mathscr{L}(G, A;\ T, P) \cong \mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ durch die Abbildung $f \mapsto \bar{f}$, $\bar{f}(x) = (f(x), x)$. Anders als bei den Banach-$*$-algebraischen Bündeln von Fell, wir nennen diese Fell–Bündel, sind Multiplikation und Involution in $\mathscr{B}$ nicht notwendig stetig, sondern nur in gewissem Sinne meßbar (meßbare Schnitte von G in $\mathscr{B}$ gehen in meßbare Schnitte über). Es gilt jedoch

Sind T und P stetig, d.h. *sind für jedes $a \in A$ die Abbildungen $x \mapsto T_x a$ und $(x, y) \mapsto P_{x,y} a$ stetig, so ist das zu (T, P) gehörige Leptin–Bündel $\mathscr{B}$ ein homogenes Fell–Bündel.* (2.3)

Beweis. Wie man mit Hilfe von (1.2) nachrechnet, sind alle algebraischen Eigenschaften erfüllt. Die Stetigkeit der Multiplikation und der Involution folgt aus der Stetigkeit von T und P und der Beschränktheit der Normen $|T_x|$, $|P_{x,y}|$ unter mehrfacher Verwendung der Dreiecksungleichung.

Für $z \in G$ seien l_z und r_z Abbildungen des Bündels $\mathscr{B}$ in sich, definiert durch

$$\begin{aligned} l_z(a, x) &= (P_{z,x} a,\ zx), \\ r_z(a, x) &= (P_{x,z} T_{z^{-1}} a,\ xz), \end{aligned} \tag{2.4}$$

$a \in A$, $x \in G$. Man kann nachrechnen, daß das Abbildungspaar

$$(l_z, r_z)$$

einen unitären Multiplikator von $\mathscr{B}$ der Ordnung z definiert. Also ist die Abbildung

$$\pi_0\colon \mathscr{U}(\mathscr{B}) \to G,$$

die jedem unitären Multiplikator seine Ordnung zuordnet, surjektiv. Offenbar ist π_0 stetig (bezüglich der starken Topologie auf $\mathscr{U}(\mathscr{B})$), und man sieht leicht, daß π_0 wegen der Stetigkeit von T und P offen ist. Somit ist $\mathscr{B}$ ein homogenes Fell–Bündel.

Sind T und P nicht stetig, so braucht $\mathscr{B}$ kein Fell–Bündel zu sein. Das zeigt folgendes Gegenbeispiel:

Sei $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $A = \mathscr{L}^1(\mathbb{Z})$. Sei $\sigma\colon G \to \mathbb{R}$ der durch $\sigma(G) \subset [0, 1)$ eindeutig bestimmte Schnitt von G in $\mathbb{R}$. Er ist meßbar, so daß wir wie in [6, Abschnitt III], ein unitäres Faktorensystem (T, P) definieren können.

Sei $a = \chi_{\{0\}} \in A$ die charakteristische Funktion von $\{0\}$, sei $x = \frac{1}{2}$ und $\{y_n\}$ eine Folge von Elementen aus $[0, \frac{1}{2})$, die gegen $y = \frac{1}{2}$ konvergiert. In dem zu (T, P) gehörigen Leptin–Bündel $\mathscr{B}$ konvergiert dann $(a, x)(a, y_n)$ nicht gegen $(a, x)(a, y)$, so daß $\mathscr{B}$ kein Fell–Bündel sein kann.

Wir werden in Abschnitt V jedoch sehen, daß jedes Leptin–Bündel zu einem Fell–Bündel algebraisch isomorph ist.

III

(a) Sei A eine involutive Banach-Algebra, $\mathscr{U}(A)$ die Gruppe der unitären Multiplikatoren von A mit der starken Operatortopologie. Sei N eine topologische Untergruppe von $\mathscr{U}(A)$ und H eine topologische Erweiterungsgruppe von N, das heißt, eine topologische Gruppe, die N als abgeschlossenen Normalteiler enthält. Ferner sei τ ein Homomorphismus von H in die Gruppe aller isometrischen $*$-Automorphismen von A, so daß gilt:

(i) Für jedes feste $a \in A$ ist die Abbildung $h \mapsto \tau_h(a)$ stetig auf H,

(ii) für $u \in N$, $a \in A$ gilt

$$\tau_u(a) = uau^{-1}, \tag{3.1}$$

(iii) für $h \in H$, $u \in N$ gilt

$$\tau_h'(u) = huh^{-1},$$

wobei τ_h' die eindeutig bestimmte Fortsetzung von τ_h zu einem isometrischen $*$-Automorphismus von $\mathscr{M}(A)$ ist. Mit Hilfe der so gegebenen

$$A, N, H, \tau$$

kann man ein homogenes Fell–Bündel über $G = H/N$ bilden. Wir skizzieren die Fell'sche Konstruktion (vgl. [5]). Im topologischen Produkt $A \times H$ definiert man eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf folgende Weise:

$$\begin{gathered}(a, h) \sim (a', h'), \text{ wenn es ein } u \in N \text{ gibt mit} \\ (au^{-1}, uh) = (a', h').\end{gathered} \tag{3.2}$$

Die Äquivalenzklasse von (a, h) werde mit $(a, h)^\sim$ bezeichnet. Sei B der topologische Quotientenraum von $A \times H$ modulo $\sim$. Definiert man die Projektion

$$\pi\colon B \to H/N$$

durch $\pi((a, h)^\sim) = hN$, so ist π stetig, offen und surjektiv. Sei $x \in H/N$ und $h \in H$ ein Repräsentant von x. Die Abbildung $a \mapsto (a, h)^\sim$ ist eine Bijektion von A auf die Faser $B_x = \pi^{-1}(x)$. Vermittels dieser Bijektion wird B_x mit einer Banach–Raum–Struktur versehen, die nicht von der Auswahl von h aus der Nebenklasse x abhängt. Mit dieser Banach–Raum–Struktur auf jeder Faser B_x ist (B, π) ein Banach–Bündel. Man definiert nun Multiplikation und Involution auf B durch

$$(a, h)^\sim \cdot (b, i)^\sim = (a \cdot \tau_h(b), hi)^\sim \tag{3.3}$$

$$(a, h)^{\sim *} = (\tau_{h^{-1}}(a^*), h^{-1})^\sim, \tag{3.4}$$

$a, b \in A$, $h, i \in H$. Mit diesen Definitionen ist $\mathscr{B} = (B, \pi, \cdot, *)$ ein homogenes Banach-$*$-algebraisches Bündel. Fell zeigt auch (vgl. [5]), daß jedes homogene Banach-$*$-algebraische Bündel sich in der soeben beschriebenen Weise gewinnen läßt:

Sei $\mathscr{B} = (B, \pi, \cdot, *)$ ein homogenes Banach-$*$-algebraisches Bündel über der topologischen Gruppe G. Sei A die Eins–Faser B_e von $\mathscr{B}$, sei H die topologische Gruppe $\mathscr{U}(\mathscr{B})$ der unitären Multiplikatoren von $\mathscr{B}$ mit der starken Topologie und N der abgeschlossene Normalteiler $\mathscr{U}_e(\mathscr{B}) = \mathscr{U}(A)$. Für $h \in H$ definiere man

$$\tau_h(a) = hah^{-1},$$

$a \in A$. Dann sind für A, N, H, τ die Bedingungen (3.1) erfüllt, und das aus A, N, H, τ konstruierte homogene Fell–Bündel ist zu $\mathscr{B}$ algebraisch und topologisch isomorph.

(b) Seien A, N, H wie zu Beginn von (a), sei aber τ nun ein Antihomomorphismus von H in die Gruppe aller isometrischen $*$-Automorphismen von A (oder, was dasselbe ist, ein Homomorphismus in die als Rechtsoperatoren geschriebenen Automorphismen), so daß gilt:

(i) für jedes feste $a \in A$ ist die Abbildung $h \mapsto \tau_h(a)$ stetig auf H,

(ii) für $u \in N$, $a \in A$ gilt

$$\tau_u(a) = u^{-1}au, \tag{3.5}$$

(iii) für $h \in H$, $u \in N$ gilt

$$\tau_h'(u) = h^{-1}uh.$$

Analog wie unter (a) kann man aus A, N, H, τ ein homogenes Fell–Bündel konstruieren. Man beachte jedoch, daß zu diesem Zweck die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $A \times H$ und die Multiplikation der Äquivalenzklassen etwas anders definiert werden:

$$(a, h) \sim (a', h'), \text{ wenn es ein } u \in N \text{ gibt mit } (u^{-1}a, hu) = (a', h'), \tag{3.6}$$

$$(a, h)^\sim \cdot (b, i)^\sim = (\tau_i(a)b, hi)^\sim, \tag{3.7}$$

$a, a', b \in A$, $h, h', i \in H$. Die Definition der Involution bleibt unverändert:

$$(a, h)^{\sim *} = (\tau_{h^{-1}}(a^*), h^{-1})^\sim, \tag{3.8}$$

$a \in A$, $h \in H$. Aus (3.5), (ii) und (iii), ergibt sich die Wohldefiniertheit der Multiplikation und der Involution. Man rechnet leicht nach, daß die algebraischen Eigenschaften eines Fell–Bündels erfüllt sind, und es ist klar, daß topologisch keine anderen Probleme auftreten, als bei der unter (a) skizzierten Konstruktion, so daß wir auf diese Weise ein homogenes Fell–Bündel erhalten. Es ist auch klar, daß man jedes homogene Fell–Bündel auf diese Weise erhalten kann: wie im zweiten Teil von (a) nehme man $A = B_e$, $N = \mathscr{U}(A)$, $H = \mathscr{U}(\mathscr{B})$ und definiere

$$\tau_h(a) = h^{-1}ah$$

(statt hah^{-1}), $a \in A$, $h \in H$.

IV

Sei $\mathscr{B}$ ein homogenes Fell–Bündel, gegeben im Sinne von III, (b) durch

$$A, N, H, \tau.$$

Die Gruppe $G = H/N$ sei lokal kompakt.

Satz 2. *Gibt es einen meßbaren Schnitt σ: $G \to H$, so ist $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ isometrisch isomorph zu einer verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$-Algebra $\mathscr{L}(G, A; T, P)$.*

Beweis. Ist σ: $G \to H$ ein meßbarer Schnitt, so definiert man für $x, y \in G$

$$T_x = \tau_{\sigma(x^{-1})}, \tag{4.1}$$

$$P_{x,y} = \sigma(xy)^{-1}\,\sigma(x)\,\sigma(y) \tag{4.2}$$

und zeigt, ähnlich wie in [3, S. 146], daß die Abbildung

$$\sum : f \mapsto \sum f \quad ,$$

$$\sum f(x) = (f(x), \sigma(x))^{\sim},$$

einen isometrischen $*$-Algebrenisomorphismus von $\mathscr{L}(G, A; T, P)$ auf $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ darstellt. Im Unterschied zu Satz 3 im nächsten Abschnitt gibt es hier noch keine Meßbarkeitsprobleme. Der algebraische Teil des Beweises folgt unmittelbar aus dem folgenden Sachverhalt, der leicht durch Ausrechnen verifiziert werden kann:

Ist $\mathscr{B}'$ das zu (T, P) gehörige Leptin–Bündel (vgl. Abschnitt II), so ist die Abbildung

$$S : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$$

$$(a, x) \mapsto (a, \sigma(x))^{\sim} \tag{4.3}$$

$a \in A$, $x \in G$, ein algebraischer Bündelisomorphismus, d.h. eine bijektive Abbildung von $\mathscr{B}'$ auf $\mathscr{B}$, welche die algebraischen Operationen erhält und für jedes $x \in G$ die Faser B_x' in die Faser B_x abbildet.

V

Sei A eine involutive Banach-Algebra, die folgende Bedingung erfüllt:

$$|a| = \sup_{\substack{b \in A \\ |b| \leqslant 1}} |ab| \tag{L}$$

für jedes $a \in A$.

Satz 3. *Ist A separabel und (T, P) ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A, so gibt es ein homogenes Fell–Bündel $\mathscr{B}$, so daß $\mathscr{L}(G, A; T, P)$ und $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ als involutive Banach-Algebren isometrisch isomorph sind.*

Bemerkung. Für separables G folgt Satz 3 aus einem Ergebnis von Brown [14].

Beweis des Satzes. Wir zeigen zunächst

Ist (T, P) ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A, so ist die Familie $\{T_x^{-1}\}_{x\in G}$ meßbar, ebenso für jedes $a \in G$ die Familie $\{P_{a,x}\}_{x\in G}$. (5.1)

Beweis. (a) Die Meßbarkeit von $\{T_x^{-1}\}_{x\in G}$ läßt sich auf ähnliche Weise zeigen wie die Meßbarkeit von $\{S(x)^{-1}\}_{x\in G}$ zu Beginn des Beweises von Satz 1.

(b) Aus (1.2), (1), folgt durch die Substitution $x \to a$, $y \to x$, $z \to x^{-1}$,

$$P_{ax\, x^{-1}} T_x P_{a,x} T_x^{-1} = P_{x,x^{-1}},$$

also

$$P_{a,x} = T_x^{-1} P_{ax,x^{-1}}^{-1} P_{x,x^{-1}} T_x . \tag{5.2}$$

Nach [6], Satz 2 ist die Familie $\{P_{x^{-1},xa}\}_{x\in G}$ meßbar, also auch die Familie $\{P_{ax,x^{-1}}\}_{x\in G}$, die wir durch Davorschalten des Homöomorphismus $x \mapsto (ax)^{-1}$ erhalten. Es folgt die Meßbarkeit von $\{P_{ax,x^{-1}}^{-1}\}_{x\in G}$, denn für $b \in A$ gilt wegen (1.2), (2)

$$\begin{aligned} P_{ax,x^{-1}}^{-1} b &= P_{ax,x^{-1}}^{*} b \\ &= (P_{ax,x^{-1}} T_{ax,x^{-1}} b^*)^*. \end{aligned}$$

Da auch $\{P_{x,x^{-1}}\}_{x\in G}$ eine meßbare Familie ist (man setze oben $a = e$), folgt aus (5.2) die Meßbarkeit von $\{P_{a,x}\}_{x\in G}$.

Sei (T, P) ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A und sei $\mathscr{L} = \mathscr{L}(G, A; T, P)$. Für $C \in \mathscr{B}(A)$, $a \in G$, sei $C^a = T_{a^{-1}}(C) = T_{a^{-1}} C T_{a^{-1}}^{-1}$. Ist $C \in A^b$, so gilt offenbar $C^a \in A^b$. Wir definieren für $C \in A^b$ einen Operator $C^{\#} \in \mathscr{B}(\mathscr{L})$ durch (vgl. [8, S. 279])

$$(C^{\#} f)(x) = C^x f(x),$$

$f \in L$, $x \in G$. Wegen (5.1) ist $C^{\#}$ wohldefiniert. Es gilt

Die Abbildung $C \mapsto C^{\#}$ ist ein isometrischer $*$-Algebrenhomomorphismus von A^b in $\mathscr{L}^b$. Insbesondere haben wir $\mathscr{U}(A)^{\#} \subset \mathscr{U}(\mathscr{L})$, denn $\mathrm{id}_A^{\#} = \mathrm{id}_{\mathscr{L}}$. (5.3)

Beweis. Für $f, g \in \mathscr{L}$ gilt $(C^{\#}f)^* \star g = f^* \star (C^*)^{\#}g$, wie man durch Ausrechnen beider Seiten der Gleichung sieht. Also liegt $C^{\#}$ in $\mathscr{L}^b$, und es ist $(C^{\#})^* = (C^*)^{\#}$. Man zeigt $|C^{\#}| = |C|$ wie in [8, S. 279]; der Rest ist klar.

Für $a \in G$ sei $D_a \in \mathscr{B}(\mathscr{L})$ wie in [8] definiert durch

$$(D_a f)(x) = P_{a,a^{-1}x} f(a^{-1}x),$$

$f \in L$, $x \in G$. Wegen (5.1) ist D_a wohldefiniert.

Für $f, g \in \mathscr{L}$ gilt $(D_a f)^* \star D_a g = f^* \star g$, was man mit Hilfe einer Rechnung ähnlich wie in [8, S. 280], zeigen kann. Da D_a ein Inverses besitzt, $(D_a^{-1}g)(x) = P_{a,x}^{-1} g(ax)$, folgt, daß $D_a \in \mathscr{L}^b$ und

$$D_a D_a^* = D_a^* D_a = \mathrm{id}_{\mathscr{L}}. \tag{5.4}$$

Wir wissen nun, daß die Operatoren D_x und $P_{x,y}^{\#}$, $x, y \in G$, in $\mathscr{U}(\mathscr{L})$ liegen. Sei N die von $\{P_{x,y}^{\#} \mid x, y \in G\}$ erzeugte Untergruppe, H die von N und $\{D_x \mid x \in G\}$ erzeugte Untergruppe in $\mathscr{U}(\mathscr{L})$. Da A die Bedingung (L) erfüllt, ist die reguläre Linksdarstellung $a \mapsto L_a$ von A nach A^b isometrisch, so daß wegen (5.3) die Abbildung $a \mapsto L_a^{\#}$ ein isometrischer Isomorphismus von A auf $L_A^{\#} = \{L_a^{\#} \mid a \in A\} \subset \mathscr{L}^b$ ist.

N kann in kanonischer Weise als Teilmenge von $\mathscr{U}(A)$, $\mathscr{U}(L_A^{\#})$ und $\mathscr{U}(\mathscr{L})$ aufgefaßt werden. In allen drei Fällen hat N dieselbe Topologie. (5.5)

Beweis. Wegen $N \subset \mathscr{U}(A)^{\#} = \{Q^{\#} \mid Q \in \mathscr{U}(A)\}$ genügt es, die Behauptung für $\mathscr{U}(A)^{\#}$ statt N zu zeigen.

Es gilt $\mathscr{U}(A)^{\#} \subset \mathscr{U}(\mathscr{L})$ nach Konstruktion.

(a) Gemäß (5.3) können wir $\mathscr{U}(A)^{\#}$ durch die Abbildung $Q^{\#} \mapsto Q$ mit $\mathscr{U}(A)$ identifizieren. Dabei bleibt die (starke) Topologie erhalten: gelte $R_\mu \to R$ in $\mathscr{U}(A)$, sei $a \in A$ und $f \in \mathscr{C}_k(G)$. Dann ist die Funktion $g \colon x \mapsto g(x) = T_{x^{-1}} a \cdot f(x)$ in $\mathscr{L}$, und es gilt

$$\begin{aligned}
&|(R_\mu^{\#} - R^{\#})g|_1 \\
&\qquad = \int |T_{z^{-1}}(R_\mu - R)\, T_{z^{-1}}^{-1} T_{z^{-1}} a \cdot f(z)|\, dz \\
&\qquad = |(R_\mu - R)a| \int |f(z)|\, dz,
\end{aligned}$$

was gegen Null konvergiert. Die Funktionen der Form $a \otimes f \colon x \mapsto a \cdot f(x)$, $a \in A$, $f \in \mathscr{C}_k(G)$, erzeugen linear einen dichten Teilraum von $\mathscr{L}$; also gilt dasselbe für die Funktionen g, mit $g(x) = T_{x^{-1}}a \cdot f(x)$, $a \in A, f \in \mathscr{C}_k(G)$, denn die Abbildung $h \mapsto \mathscr{T}h$, welche durch $\mathscr{T}h(x) = T_{x^{-1}}h(x)$ definiert wird, ist ein linearer isometrischer Automorphismus von $\mathscr{L}$. Da die Normen der $R_\mu{}^{\#}$ beschränkt, nämlich gleich 1 sind, erhalten wir $R_\mu{}^{\#}g \to R^{\#}g$ für jedes $g \in \mathscr{L}$. Gilt umgekehrt $R_\mu{}^{\#} \to R^{\#}$ in $\mathscr{U}(\mathscr{L})$, so zeigt die oben Gleichung daß $R_\mu a \to Ra$ gilt für jedes $a \in A$.

(b) $\mathscr{U}(A)^{\#}$ läßt sich als Teilmenge von $\mathscr{U}(L_A^{\#})$ auffassen: für $Q^{\#} \in \mathscr{U}(A)^{\#}$ sei $\Lambda_{Q^{\#}}$ die Linksmultiplikation mit $Q^{\#}$ in $\mathscr{L}^b$, eingeschränkt auf $L_A^{\#}$. Wegen

$$\Lambda_{Q^{\#}}(L_a^{\#}) = Q^{\#}L_a^{\#} = (QL_a)^{\#} = L_{Qa}^{\#}, \tag{5.6}$$

$a \in A$, wird $L_A^{\#}$ durch $\Lambda_{Q^{\#}}$ in sich abgebildet, und man erhält $\Lambda_{Q^{\#}} \in \mathscr{U}(L_A^{\#})$. Der Homomorphismus Λ: $Q^{\#} \mapsto \Lambda_{Q^{\#}}$ ist wegen $|L_a| = |a|$ und $|Q^{\#}| = |Q|$ isometrisch, also eine Einbettung. Um zu beweisen, daß bei dieser Einbettung die (starke) Topologie erhalten bleibt, genügt es wegen (a), folgendes zu zeigen: es gilt $R_\mu \to R$ in $\mathscr{U}(A)$ genau dann, wenn $\Lambda_{R_\mu{}^{\#}} \to \Lambda_{R^{\#}}$ in $\mathscr{U}(L_A^{\#})$. Das ist aber klar wegen (5.6). Damit haben wir (5.5) bewiesen.

N kann nun als topologische Untergruppe von $\mathscr{U}(A)$ aufgefaßt werden. Im Folgenden wollen wir zeigen, daß N ein abgeschlossener Normalteiler in H ist.

Seien $a, b \in G$, $C \in A^b$. Wie in [8] *gilt*

(a) $D_a^{-1}C^{\#}D_a = (C^a)^{\#}$ (5.7)

(b) $D_aD_b = D_{ab}P_{a,b}^{\#}$

Beweis. (a) Man verwendet bei der Rechnung, daß

$$P_{x,y}^{-1}BP_{x,y} = T_{x,y}(B)$$

für $B \in A^b$, was aus (1.2), (2) folgt.

(b) Ergibt sich durch Ausrechnen unter Verwendung von (1.2), (1).

Seien $a, x, y \in G$. Da nach (1.2), (1)

$$P_{x,y}^a = P_{xy,a}^{-1}P_{x,ya}P_{y,a},$$

ist N wegen (5.7)(a) unter Transformation mit D_a, $a \in G$, invariant, ebenso unter Transformation mit D_a^{-1}, denn aus (5.7)(b) folgt wegen $D_e = \mathrm{id}_{\mathscr{L}}$

$$D_a^{-1} \equiv D_{a^{-1}} \text{ modulo } N.$$

N ist also ein Normalteiler in H. Außerdem ist N in H abgeschlossen, wie wir weiter unten sehen werden. (5.8)

Es gilt $H/N \cong G$ algebraisch und topologisch. (5.9)

Beweis. (a) Aus (5.7) folgt, daß es zu jeder Klasse $\dot{h} \in \dot{H} = H/N$ ein D_a gibt mit $\dot{D}_a = \dot{h}$. Sei $\dot{D}_a = \dot{D}_{a'}$. Dann gilt wegen (5.7)(b) $D_{a^{-1}a'} \in N$. Da die Operatoren D_x im Gegensatz zu den Elementen von N eine Translation enthalten, ist $a = a'$. Also hat jede Klasse $\dot{h} \in \dot{H}$ genau einen Repräsentanten D_a. Aus (5.7)(b) folgt $\dot{D}_a\dot{D}_b = \dot{D}_{ab}$, die Abbildung $a \mapsto \dot{D}_a$ definiert also einen algebraischen Isomorphismus zwischen G und $\dot{H}$.

(b) Jedes Element $h \in H$ läßt sich eindeutig in der Form

$$h = D_a u, \qquad a \in G, \quad u \in N,$$

schreiben. Konvergiert $h_\mu = D_{a_\mu} u_\mu$ gegen $h = D_a u$, so auch a_μ gegen a (denn für $f \in \mathscr{L}$, $v \in N$ und $x \in G$ gilt $\mathrm{supp}(D_x v f) = x\,\mathrm{supp}(f)$), die Abbildung $D_a u \mapsto a$ ist also stetig. Da N gerade der Kern dieses Homomorphismus ist, erhalten wir die Stetigkeit der Abbildung $\dot{D}_a \mapsto a$ von $\dot{H}$ nach G; wir sehen übrigens auch, daß N abgeschlossen in H ist. Der algebraische Isomorphismus

$$\rho\colon G \to \dot{H}$$

$$x \mapsto \dot{D}_x$$

ist also eine offene Abbildung. Wir wollen zeigen, daß ρ stetig ist.

Sei $\pi\colon H \to \dot{H}$ die kanonische Projektion und $d\colon G \to H$ die Abbildung $x \mapsto D_x$. Es gilt $\rho = \pi \circ d$, und nach (5.1) und [9], (6.3) ist d "punktweise" meßbar, d.h. für jedes $f \in \mathscr{L}$ ist die Abbildung

$$x \mapsto D_x f$$

meßbar. Ist $\mathscr{L}$ separabel, so ist d meßbar als Abbildung von G nach H (H mit der starken Operatortopologie).

Ist $S \subset G$ eine meßbare, relativ kompakte Teilmenge positiven Maßes der lokal kompakten Gruppe G, so enthält bekanntlich die Menge $SS^{-1} = \{xy^{-1} \mid x, y \in S\}$ eine offene Eins–Umgebung. Deshalb ist ρ stetig, wenn das Urbild $\rho^{-1}(O)$ jeder offenen Menge $O \subset \dot{H}$ eine meßbare, relativ kompakte Menge von positivem Maß enthält. Offenbar genügt es, Umgebungen der Eins zu betrachten.

Sei O eine Eins–Umgebung in $\dot{H}$ und V eine kompakte Eins–Umgebung in G. Da ρ offen ist, ist $O' = \rho(V) \cap O$ eine Eins–

Umgebung in $\dot{H}$. Es gibt eine offene Eins–Umgebung U' in H von der Form

$$U' = \{u \in H \mid | uf_i - f_i |_1 < \epsilon, \quad | f_i u - f_i |_1 < \epsilon, \quad i = 1,\ldots, n\}$$

mit endlich vielen $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{L}$, $\epsilon > 0$, so daß $\pi(U') \subset O'$. Wegen $| f_i u - f_i |_1 = | u^* f_i^* - f_i^* |_1 = | u^* f_i^* - u f_i^* |_1 = | f_i^* - u f_i^* |_1$ läßt sich U' auch folgendermaßen schreiben, wenn man $M = \{f_1, \ldots, f_n, f_1^*, \ldots, f_n^*\}$ setzt:

uu^*

$$U' = \{u \in H \mid | ug - g |_1 < \epsilon \text{ für alle } g \in M\}.$$

Versieht man H mit der Topologie der punktweisen linksseitigen Konvergenz auf M, so daß $h_\mu \to h$ genau dann, wenn $h_\mu g \to hg$ für alle $g \in M$, so ist auf H die Linkstranslation stetig: seien u, v, $v_\mu \in H$. Aus $v_\mu \to v$ (in der neuen Topologie) folgt $uv_\mu g \to uvg$ für jedes $g \in M$, also $uv_\mu \to uv$.

Die oben gewählte Eins–Umgebung V ist ein Kompaktum mit positivem Maß. Wegen der "punktweisen" Meßbarkeit von $x \mapsto D_x$ gibt es ein Kompaktum $K \subset V$ mit positivem Maß, so daß auf K die Abbildungen

$$x \mapsto D_x g$$

für jedes $g \in M$ stetig sind. Das bedeutet, daß die Abbildung d: $x \mapsto D_x$ von G nach H (H mit der neuen Topologie), eingeschränkt auf K, stetig ist. Somit ist $K' = d(K)$ kompakt und wird wegen der Stetigkeit der Linkstranslation in H von endlich vielen Mengen der Form hU', $h \in H$, überdeckt (denn offenbar ist U' auch in der neuen Topologie von H offen). Die Mengen $hU' \cap K'$ sind offen in K' (in der relativen Topologie von K' bezüglich H mit der neuen Topologie), ihre Urbilder $d\,|_K^{-1}(hU' \cap K')$ sind offen in K und überdecken K. Sie sind als Durchschnitte je einer offenen Menge mit einer kompakten Menge meßbare Mengen in G. Da K positives Maß hat, gibt es eine Menge

$$W = d\,|_K^{-1}(h_0 U' \cap K'), \qquad h_0 \in H,$$

mit positivem Maß. Wegen $W \subset K$ ist W relativ kompakt. Es gilt

$$\rho(W) = \pi \circ d(W) \subset \pi(h_0 U' \cap K')$$
$$\subset \pi(h_0)\, \pi(U') \subset \pi(h_0)\, O' \subset \pi(h_0) O.$$

Also enthält $\rho^{-1}(O)$ eine meßbare, relativ kompakte Menge von positivem Maß, nämlich zW, wo $z = \rho^{-1}(\pi(h_0)^{-1})$. Damit ist (5.9) bewiesen.

Für $z \in G$, $a \in A$ gilt wegen (5.7)

$$D_z^{-1} L_a^{\#} D_z = [(L_a)^z]^{\#} = L^{\#}_{T_{z^{-1}}a} . \tag{5.10}$$

Für $x, y \in G$, $a \in A$ haben wir

$$(P^{\#}_{x,y})^{-1} L_a{}^{\#} P^{\#}_{x,y} = (P^{-1}_{x,y} L_a P_{x,y})^{\#} = L^{\#}_{P^*_{x,y} a P_{x,y}} . \tag{5.11}$$

Die Algebra $L^{\#}_A = \{L^{\#}_a \mid a \in A\} \subset \mathscr{L}^b$ ist also invariant unter Transformation mit D_z und $P^{\#}_{x,y}$, $z, x, y \in G$, und damit invariant unter H, so daß wir für $a \in A$, $h \in H$ definieren können:

$$\tau_h(a) = b \in A, \qquad \text{wenn} \quad h^{-1} L^{\#}_a h = L^{\#}_b . \tag{5.12}$$

Wegen der Injektivität von $b \mapsto L^{\#}_b$ ist $\tau_h(a)$ wohldefiniert, und wegen (5.10) und (5.11) gilt

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \quad \tau_{D_z}(a) = T_{z^{-1}} a, \\ &\text{(b)} \quad \tau_{P^{\#}_{x,y}}(a) = P^*_{x,y} a P_{x,y} . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Insbesondere ist für jedes $h \in H$ die Abbildung $\tau_h\colon a \mapsto \tau_h(a)$ ein isometrischer $*$-Automorphismus von A, und $\tau\colon h \mapsto \tau_h$ ist, wie man aus (5.12) sieht, ein Antihomomorphismus von H nach $\mathrm{Aut}_1(A)$.

Für A, N, H, τ sind die in Abschnitt III, (b) genannten Bedingungen erfüllt. (5.14)

Beweis. Wegen (5.5) und (5.8) brauchen wir nur noch die Bedingungen (3.5), (i)–(iii), zu verifizieren. Dazu verwenden wir:

Ist B eine Banach-Algebra, $\mathscr{M}(B)_r$ die Menge der Multiplikatoren von B mit Norm $\leqq r$ und $\mathscr{U}(B)$ die Menge der unitären Multiplikatoren von B, so sind die Abbildungen

$$P_1\colon \mathscr{M}(B)_r \times \mathscr{U}(B) \to \mathscr{M}(B)_r , \qquad (m, u) \mapsto mu, \tag{5.15}$$

und

$$P_2\colon \mathscr{U}(B) \times \mathscr{M}(B)_r \to \mathscr{M}(B)_r , \qquad (u, m) \to um,$$

stetig bezüglich der starken Topologien auf $\mathscr{U}(B)$ und $\mathscr{M}(B)_r$.

Der Beweis ist Routine.

Nach (5.15) ist Bedingung (3.5), (i) erfüllt, denn $H \subset \mathscr{U}(\mathscr{L})$ ist eine topologische Gruppe und bei festem $a \in A$ sind die Normen von $L_a^{\#} h$, $h \in H$, beschränkt ($\leqslant |a|$). Gleichung (5.13), (b) bedeutet gerade (3.5), (ii). Man sieht (3.5), (iii) wohl am leichtesten ein, wenn man N gemäß (5.5) als Teilmenge von $\mathscr{U}(L_A^{\#})$ auffaßt und A mit $L_A^{\#}$ identifiziert, wo H durch gewöhnliche innere Automorphismen von $\mathscr{L}^b$ wirkt:

$$\tau_h\colon L_a^{\#} \mapsto h^{-1} L_a^{\#} h.$$

Damit ist (5.14) gezeigt.

Sei $\mathscr{B}$ das gemäß Abschnitt III aus A, N, H, τ konstruierte homogene Fell–Bündel. Nach (5.9) ist es ein Bündel über G. Die Abbildung $d\colon x \mapsto D_x$ ist, wie wir gesehen haben, ein "punktweise" meßbarer Schnitt von G in H. Definieren wir ein Faktorensystem (T', P') mit Hilfe der Gleichungen (4.1) und (4.2), so erhalten wir wegen (5.13), (a) und (5.7), (b) gerade das Faktorensystem (T, P) zurück, von dem wir ausgingen. Ist $\mathscr{L}$ separabel, so ist d meßbar, so daß wir nach Satz 2 einen isometrischen Isomorphismus von $\mathscr{L}$ auf $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ erhalten. Wir wollen hier aber nur voraussetzen, daß A separabel ist. Im Folgenden bezeichnen wir den Schnitt d mit σ. Wir behaupten, daß durch die Formel

$$\sum f(x) = (f(x), \sigma(x))^{\sim}, \tag{5.16}$$

$f \in \mathscr{L}$, $x \in G$, ein isometrischer Isomorphismus $\sum$ von $\mathscr{L}$ auf $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ definiert wird. Der algebraische Teil des Beweises verläuft wie bei Satz 2, so daß nur die Wohldefiniertheit und die Surjektivität der Abbildung $\sum$ noch gezeigt werden müssen. Sei $a \in A$, $h \in \mathscr{C}_k(G)$, h nicht identisch null. Wir definieren $f \in \mathscr{L}$ durch

$$f(x) = a \cdot h(x).$$

Für ein solches f gilt

Die durch (5.16) definierte Funktion $\sum f$ ist meßbar, also aus $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$. (5.17)

Beweis. Wir definieren $\overset{\frown}{f} \in \mathscr{L}$ durch $\overset{\frown}{f}(x) = T_{x^{-1}} f(x) = T_{x^{-1}} a \cdot h(x)$. Sei $\epsilon > 0$ und $K \subset G$ kompakt. Es gibt ein Kompaktum $K' \subset K$ mit $|K \setminus K'| < \epsilon$, so daß auf K' die Abbildung $y \mapsto \sigma(y)\overset{\frown}{f}$ stetig ist. Seien x_μ, $x \in K'$ mit $x_\mu \to x$. Sei 0 eine Umgebung von $(f(x), \sigma(x))^{\sim}$. Es gibt eine Umgebung U von $(f(x), \sigma(x))$, so daß

$$U^{\sim} = \{\xi^{\sim} \mid \xi \in U\} \subset 0.$$

U habe die Form $U_1 \times U_2$, wo

$$U_1 = \{a \in A \mid | f(x) - a | < \delta\},$$

$$U_2 = \{h \in H \mid | hf_i - \sigma(x) f_i |_1 < \eta, i = 1, \ldots, n\},$$

mit gewissen $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{L}$, $\delta > 0$, $\eta > 0$, wobei wir annehmen können, daß $f_i = \widehat{f}$ für ein i (durch Hinzunahme von $\widehat{f}$ wird die Umgebung ja verkleinert).

Wegen der Stetigkeit der Abbildung $y \mapsto \sigma(y)N$ von G nach H/N gibt es ein μ_0, so daß für alle $\mu \geqslant \mu_0$

$$\sigma(x_\mu)N \in \pi(U_2)$$

(hier ist $\pi\colon H \to H/N$ die kanonische Projektion) d.h. es gibt Elemente $u_\mu \in N$, so daß für alle $\mu \geqslant \mu_0$

$$\sigma(x_\mu)\, u_\mu \in U_2 .$$

Ferner gibt es einen Index μ_0', so daß für alle $\mu \geqslant \mu_0'$

$$| \sigma(x_\mu)\widehat{f} - \sigma(x)\widehat{f} |_1 < \eta$$

und

$$| h(x_\mu) - h(x)| < \eta.$$

Sei $\mu \geqslant \mu_0, \mu_0'$. Wir betrachten

$$\sum f(x_\mu) = (f(x_\mu), \sigma(x_\mu))^\sim = (u_\mu^{-1} f(x_\mu), \sigma(x_\mu)\, u_\mu)^\sim .$$

Es ist $\sigma(x_\mu)\, u_\mu \in U_2$ und

$$\begin{aligned} | u_\mu^{-1} f(x_\mu) - f(x)| &= | u_\mu^{-1} a \cdot h(x_\mu) - a \cdot h(x)| \\ &\leqslant | u_\mu^{-1} a \cdot h(x_\mu) - a \cdot h(x_\mu)| + | a \cdot h(x_\mu) - a \cdot h(x)| \\ &\leqslant | u_\mu^{-1} a - a | \, | h |_\infty + | a | \cdot \eta. \end{aligned}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} | u_\mu \widehat{f} - \widehat{f} |_1 &\leqslant | u_\mu \widehat{f} - \sigma(x_\mu)^{-1} \sigma(x) \widehat{f} |_1 + | \sigma(x_\mu)^{-1} \sigma(x) \widehat{f} - \widehat{f} |_1 \\ &= | \sigma(x_\mu)\, u_\mu \widehat{f} - \sigma(x)\widehat{f} |_1 + | \sigma(x)\widehat{f} - \sigma(x_\mu)\widehat{f} |_1 \qquad (5.18) \\ &< \eta + \eta, \end{aligned}$$

andererseits

$$|u_\mu \hat{f} - \hat{f}|_1 = \int |T_{y^{-1}} u_\mu T_{y^{-1}}^{-1} \hat{f}(y) - \hat{f}(y)|\, dy \tag{5.19}$$

(hier ist u_μ auf der linken Seite als Element von $\mathscr{U}(\mathscr{L})$, auf der rechten Seite als Element von $\mathscr{U}(A)$ aufgefaßt)

$$= \int |T_{y^{-1}} u_\mu a \cdot h(y) - T_{y^{-1}} a \cdot h(y)|\, dy$$

$$= \int |T_{y^{-1}}(u_\mu a - a)| \cdot |h(y)|\, dy$$

$$= |h|_1 \, |u_\mu a - a|.$$

Also $|u_\mu a - a| < (2/|h|_1)\eta$, so daß wir wegen $|u_\mu^{-1} a - a| = |a - u_\mu a|$ erhalten:

$$|u_\mu^{-1} f(x_\mu) - f(x)| \leqslant |h|_\infty (2/|h|_1)\eta + |a| \cdot \eta < \delta,$$

falls η genügend klein gewählt war.

Damit ist gezeigt, daß

$$(f(x_\mu), \sigma(x_\mu))^\sim \in U^\sim \subset 0$$

für genügend große μ, was die Stetigkeit von $\sum f$ auf K' bedeutet. $\sum f$ ist also meßbar.

Aus (5.17) folgt durch Linearität, daß $\sum f \in \mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ für jedes $f \in \mathscr{C}_k(G) \otimes A$. Wegen $|\sum f|_1 = |f|_1$ läßt sich die lineare Abbildung $\sum : f \mapsto \sum f$ von $\mathscr{C}_k(G) \otimes A$ nach $\mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ eindeutig zu einer auf ganz $\mathscr{L}$ definierten isometrischen linearen Abbildung

$$\sum : \mathscr{L} \to \mathscr{L}^1(\mathscr{B})$$

fortsetzen, und nach [5], Proposition 2.1 ist $\sum f$ für jedes $f \in \mathscr{L}$ durch die Formel (5.16) gegeben.

Um die Surjektivität von $\sum$ zu zeigen, setzen wir A separabel voraus. Sei $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine dichte Teilmenge von A. Wir wählen ein festes $h \in \mathscr{C}_k(G)$ mit $|h|_1 = 1$ und definieren für beliebiges $a \in A$ die Funktion $g^a \in \mathscr{L}$ durch

$$g^a(x) = T_{x^{-1}} a \cdot h(x),$$

$x \in G$. Sei $F \in \mathscr{L}^1(\mathscr{B})$ und $f : G \to A$ die eindeutig bestimmte Funktion, für welche

$$F(x) = (f(x), \sigma(x))^\sim$$

für alle $x \in G$. Es gilt zu zeigen, daß f meßbar ist. Sei $K \subset G$ kompakt, $\epsilon > 0$. Es gibt ein Kompaktum $K' \subset K$ mit $| K \setminus K' | < \epsilon$, so daß F sowie die Abbildungen $y \mapsto \sigma(y)\, g^{a_i}$, $i \in \mathbb{N}$, alle stetig sind auf K'. Seien x_μ, $x \in K'$ mit $x_\mu \to x$. Wir wollen $f(x_\mu) \to f(x)$ zeigen. Sei $\delta > 0$ gegeben. Sei

$$U_1 = \{a \in A \mid | f(x) - a | < \delta/3\},$$

$$U_2 = \{h \in H \mid | hg^{f(x)} - \sigma(x)\, g^{f(x)} |_1 < \delta/3\},$$

$$0 = \{\xi^\sim \mid \xi \in U_1 \times U_2\}.$$

Es gibt ein μ_0, so daß $F(x_\mu) \in 0$ für alle $\mu \geqslant \mu_0$, d.h. es existieren Elemente $u_\mu \in N$ mit

$$(u_\mu^{-1} f(x_\mu), \sigma(x_\mu)\, u_\mu) \in U_1 \times U_2$$

für alle $\mu \geqslant \mu_0$. Da $g^{f(x)}$ im Abschluß der Menge $\{g^{a_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$ liegt, ist auch die Abbildung $y \mapsto \sigma(y)\, g^{f(x)}$ auf K' stetig. Es gibt also ein μ_0', so daß für $\mu \geqslant \mu_0'$

$$| \sigma(x_\mu)\, g^{f(x)} - \sigma(x)\, g^{f(x)} |_1 < \delta/3.$$

Sei $\mu \geqslant \mu_0, \mu_0'$. Wir haben

$$\begin{aligned} | f(x_\mu) - f(x)| &= | u_\mu^{-1} f(x_\mu) - u_\mu^{-1} f(x)| \\ &\leqslant | u_\mu^{-1} f(x_\mu) - f(x)| + | f(x) - u_\mu^{-1} f(x)| \\ &< \delta/3 + | u_\mu f(x) - f(x)| \end{aligned}$$

wegen $u_\mu^{-1} f(x_\mu) \in U_1$,

$$= \delta/3 + (1/| h |_1)\, | u_\mu g^{f(x)} - g^{f(x)} |_1,$$

was man wie (5.19) beweist.

Wegen $| u_\mu g^{f(x)} - g^{f(x)} |_1 < \delta/3 + \delta/3$ (Beweis wie bei (5.18)) gilt also

$$| f(x_\mu) - f(x)| < [\delta/3] + 2\delta/3 = \delta.$$

Damit ist f meßbar, $\sum$ also surjektiv, und der Satz ist bewiesen.

Bemerkung 1. Offenbar haben wir im Verlauf des Beweises gezeigt, daß jedes unitäre Faktorensystem von einem Fell–Bündel oder anders ausgedrückt von einer Gruppenerweiterung herkommt, genauer gesagt: ist G eine lokal kompakte Gruppe, A eine involutive Banach-Algebra, welche die Bedingung (L) erfüllt, und (T, P) ein unitäres Faktorensystem von G bezüglich A, so gibt es eine Untergruppe N von $\mathscr{U}(A)$ (die gleich $\mathscr{U}(A)$ gewählt werden kann (vgl. Bemerkung 3)) und eine topologische Erweiterungsgruppe H von N mit $H/N \cong G$ (im algebraischen und topologischen Sinn) sowie eine Wirkung τ von H auf A und einen Schnitt

$$\sigma\colon G \to H,$$

so daß das durch σ definierte Faktorensystem, gegeben durch die Gleichungen (4.1) und (4.2), gerade mit (T, P) übereinstimmt. Die Erweiterungsgruppe H ist also, algebraisch gesehen, die mit Hilfe des gegebenen Faktorensystems (interpretiert als Faktorensystem im gruppentheoretischen Sinn, mit Werten in N) abstrakt konstruierte Erweiterung von N.

Bemerkung 2. Jedes Leptin–Bündel ist algebraisch isomorph zu einem homogenen Fell–Bündel. Das folgt aus Bemerkung 1 und (4.3).

Bemerkung 3. Da wir im Beweis von Satz 3 die Gruppe N durch jede Gruppe N' mit $N \subset N' \subset \mathscr{U}(A)^{\#}$ und $D_g N' D_g^{-1} \subset N'$ für alle $g \in G$ ersetzen können, insbesondere durch $\mathscr{U}(A)^{\#}$, erhalten wir aus Bemerkung 1, indem wir dort $N = \mathscr{U}(A)$ und $A = \mathscr{L}^1(K)$ setzen, wobei K eine lokal kompakte Gruppe bezeichne, folgendes Ergebnis:

SATZ 4. *Zu jedem meßbaren Faktorensystem einer lokal kompakten Gruppe G mit Werten in einer lokal kompakten Gruppe K gehört eine lokal kompakte Erweiterungsgruppe H.*

Für separable lokal kompakte Gruppen wurde dies von Mackey in [11] bewiesen, für polnische Gruppen von Brown in [14]. Wenn das Faktorensystem am Eins-Element der Gruppe stetig ist (man kann dann auf Meßbarkeit verzichten), gilt die Behauptung für beliebige topologische Gruppen, wie Nagao in [12] gezeigt hat.

ACKNOWLEDGMENT

Die Arbeit stellt einen Teil meiner Dissertation dar. Aus Anlaß der Veröffentlichung möchte ich Herrn Professor Dr. H. Leptin für alle Anregung und Unterstützung danken.

LITERATUR

1. N. BOURBAKI, "Intégration," Chap. I–IV, Paris 1952.
2. R. C. BUSBY AND H. A. SMITH, Representations of twisted group algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* **149** (1970), 503–537.

3. R. C. Busby, On the equivalence of twisted group algebras and Banach–∗–algebraic bundles, *Proc. Amer. Math. Soc.* **37** (1973), 142–148.
4. L. Calabi, Sur les extensions des groupes topologiques, *Ann. Mat. Pura Appl.* **32** (1951), 295–370.
5. J. M. G. Fell, An extension of Mackey's method to Banach–∗–algebraic bundles, *Mem. Amer. Math. Soc.* **90** (1969).
6. M. Leinert, Beitrag zur Theorie der verallgemeinerten $\mathscr{L}^1$–Algebren, *Arch. Math.* **21** (1970), 594–600.
7. H. Leptin, Verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$–Algebren, *Math. Ann.* **159** (1965), 51–76.
8. H. Leptin, Verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$–Algebren und projektive Darstellungen lokal kompakter Gruppen I, *Invent. Math.* **3** (1967), 257–281.
9. H. Leptin, Verallgemeinerte $\mathscr{L}^1$–Algebren und projektive Darstellungen lokal kompakter Gruppen II, *Invent. Math.* **4** (1967), 68–86.
10. H. Leptin, Darstellungen verallgemeinerter $\mathscr{L}^1$–Algebren, *Invent. Math.* **5** (1968), 192–215.
11. G. W. Mackey, Les ensembles boréliens et les extensions des groupes, *J. Math. Pures Appl.* **36** (1957), 171–178.
12. H. Nagao, The extension of topological groups, *Osaka J. Math.* **1** (1949), 36–42.
13. J. P. Serre, Compacité locale des espaces fibrés, *C. R. Acad. Sci. Paris* **229** (1949), 1295–1297.
14. L. G. Brown, Extensions of topological groups, *Pacific J. Math.* **39** (1971), 71–78.

Printed by the St Catherine Press Ltd., Tempelhof 37, Bruges, Belgium.