

# INAUGURAL-DISSERTATION

zur Erlangung der Doktorwürde  
der Naturwissenschaftlich-Mathematischen Gesamtfakultät  
der RUPRECHT-KARLS-UNIVERSITÄT HEIDELBERG

vorgelegt von  
Diplom-Mathematiker Frederik Hurst  
aus Mannheim

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Januar 2005



PRIMITIVE TORI  
IN EINFACHEN SPALTENDEN GRUPPEN  
UND IHRE FIXPUNKTE  
IM BRUHAT-TITS GEBÄUDE

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Weissauer

Gutachter: Prof. Dr. Eberhard Freitag



## ABSTRACT

Let  $G$  be a simple algebraic group over a  $p$ -adic field  $F$  and  $T$  a maximal, anisotropic torus of  $G$ . The action of the group of  $F$ -rational points of  $T$  on the affine Bruhat-Tits building of  $G$  over  $F$  is not well understood. In particular, the set of fixed points of such a torus is in general not known. The set of fixed points of a maximal anisotropic torus is a convex multisimplicial complex, which consists of one single point in case the torus splits over an unramified extension of  $F$ . The latter result is not true anymore if the torus has a ramified splitting field. The set of fixed points seems to measure in subtle way the complexity of ramification of the splitting field of the torus. In this thesis we consider tori which split over a purely tamely ramified extension with cyclic Galois group. Already this case turns out to be very interesting. We discuss this for the split classical groups and some exceptional groups. To be more precise, we have the following situation: Let  $G$  be a simple split group of type  $B_n, C_n, D_n, G_2, F_4$  or  $E_6$ . In this situation, a torus  $T$  with cyclic splitting field  $E$  and Galois group  $\Gamma$  can be described by a conjugacy class in the Weyl group  $W$  of  $G$  by associating as usual a class in  $H^1(F, N(\mathbb{T})(E))$  with  $T$ , if  $\mathbb{T}$  denotes a maximal split torus in  $G$ . Since the absolute Galois group of  $F$  acts via its cyclic quotient  $\Gamma$ , this class is already determined by the value of a representing cocycle on a generator of  $\Gamma$ . In case the group  $G$  is split and therefore acts trivially on  $W$ , the image of this component under the canonical mapping  $H^1(F, N(\mathbb{T})) \rightarrow H^1(F, W)$  is an ordinary conjugacy class in  $W$ . However, this description of  $T$  in terms of Galois cohomology is in general not very useful for the problem stated at the beginning. We provide a method involving roots which yields an explicit description for the tori corresponding to the primitive conjugacy classes in  $W$  in terms of generators and (polynomial) relations. We see that the set of fixed points of the torus attached to the coxeter class is contained in one chamber of the building, whereas this is never the case for tori not corresponding to the coxeter class. We give a detailed description of these cases.

## ZUSAMMENFASSUNG

Sei  $G$  eine einfache algebraische Gruppe über einem  $p$ -adischen Körper  $F$  und  $T$  ein maximaler anisotroper  $F$ -Torus in  $G$ . Die Operation der Gruppe der  $F$ -rationalen Punkte von  $T$  auf dem affinen Bruhat-Tits Gebäude von  $G$  über  $F$  ist noch nicht gut verstanden. Insbesondere ist die Fixpunktmenge eines solchen Torus im allgemeinen nicht bekannt. Man weiß, daß die Fixpunktmenge eines maximalen anisotropen Torus ein konvexer multisimplizialer Komplex ist und für Tori, die über einer unverzweigten Erweiterung des Grundkörpers spalten, aus einem einzigen Punkt besteht. Für Tori mit verzweigtem Zerfällungskörper stimmt diese Aussage jedoch nicht mehr. Die Fixpunktmenge scheint auf eine subtile Art die Komplexität der Verzweigung des Zerfällungskörpers des Torus zu messen. In dieser Arbeit wird der Fall untersucht, daß der Torus über einer rein zahm verzweigten Erweiterung mit zyklischer Galoisgruppe zerfällt. Bereits diese Situation stellt sich als sehr interessant heraus. Wir diskutieren dies im Fall der spaltenden klassischen Gruppen und in einigen Fällen von exceptionellen Gruppen. Präziser untersuchen wir folgende Situation:  $G$  sei eine einfache spaltende Gruppe vom Typ  $B_n, C_n, D_n, G_2, F_4$  oder  $E_6$ . Ein Torus  $T$  mit zyklischem Zerfällungskörper mit Galoisgruppe  $\Gamma$  läßt sich in dieser Situation durch eine Konjugationsklasse in der Weylgruppe  $W$  von  $G$  beschreiben, indem man dem Torus  $T$  zunächst wie üblich eine Klasse in  $H^1(F, N(\mathbb{T}))$  zuordnet für einen maximalen spaltenden Referenztorus  $\mathbb{T}$  in  $G$ . Da die absolute Galoisgruppe von  $F$  durch den zyklischen Quotienten  $\Gamma$  operiert, ist diese Klasse bereits bestimmt durch den Wert eines repräsentierenden Kokzykels auf einem Erzeuger von  $\Gamma$ . Dessen Bild unter der natürlichen Abbildung  $H^1(F, N(\mathbb{T})) \rightarrow H^1(F, W)$  ist im Fall, daß die Gruppe  $G$  spaltet und daher trivial auf  $W$  operiert, eine gewöhnliche Konjugationsklasse in  $W$ . Diese Beschreibung ist jedoch im allgemeinen nicht sehr nützlich für die eingangs beschriebene Fragestellung. Wir geben ein Verfahren an, das für die primitiven Konjugationsklassen in  $W$  eine explizite Beschreibung der zugehörigen Tori in Termen von Erzeugern und (polynomialen) Relationen zur Verfügung stellt und in Termen von Wurzeln formuliert ist. Wir erhalten als Resultat, daß die Fixpunktmenge des Torus  $T$ , der zur Coxeterklasse assoziiert ist, in einer Kammer des Gebäudes enthalten ist. Für Tori  $T$ , die nicht zur Coxeterklasse assoziiert sind, hat die Fixpunktmenge dagegen nicht diese Eigenschaft. Wir geben eine detaillierte Beschreibung dieser Fälle.



# Inhaltsverzeichnis

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>   | <b>11</b> |
| 1.1      | Beschreibung eines anisotropen Torus am Beispiel der $SL_n$ . . . . .             | 12        |
| 1.2      | Fixpunkte eines anisotropen Torus am Beispiel der $SL_n$ . . . . .                | 16        |
| 1.3      | Eine kapitelweise Beschreibung der Arbeit . . . . .                               | 18        |
| 1.4      | Ausblick . . . . .  | 20        |
| <b>1</b> | <b>Tori zu primitiven Konjugationsklassen in der Weylgruppe</b>                   | <b>23</b> |
| <b>2</b> | <b>Die Strategie</b>  | <b>25</b> |
| 2.1      | Klassifikation von $F$ -Tori durch $H^1(\Gamma, W)$ . . . . .                     | 25        |
| 2.2      | Die Liealgebra $\mathfrak{h}_T$ von $T$ . . . . .                                 | 26        |
| 2.3      | Von $\mathfrak{h}_T$ nach $T$ . . . . .   | 26        |
| 2.4      | Beschränkung auf topologisch unipotente Elemente . . . . .                        | 27        |
| <b>3</b> | <b>Grundlagen</b>   | <b>29</b> |
| 3.1      | Halbeinfache und reductive Gruppen . . . . .                                      | 29        |
| 3.2      | (Ko-)Charaktere und Paarung . . . . .   | 29        |
| 3.3      | Liealgebra . . . . .  | 29        |
| 3.4      | Adjungierte Darstellung und (Ko-)Wurzeln . . . . .                                | 30        |
| 3.5      | Affine Gruppenschemata und Definitionskörper . . . . .                            | 30        |
| 3.6      | Weylgruppe . . . . .  | 31        |
| 3.7      | Anisotropie von Tori und Weylgruppenelementen . . . . .                           | 31        |
| 3.8      | Primitivität von Tori und Weylgruppenelementen . . . . .                          | 32        |
| 3.9      | Affine Spiegelungen und affine Weylgruppe . . . . .                               | 33        |
| 3.10     | Restriktion der Skalare . . . . .   | 34        |
| 3.11     | Topologische Jordanzerlegung . . . . .  | 36        |
| 3.12     | $G(F)$ -Konjugationsklassen von primitiven $F$ -Tori in $G_{\text{ad}}$ . . . . . | 37        |
| <b>4</b> | <b>Der baryzentrische Punkt</b>   | <b>39</b> |
| 4.1      | Lifts primitiver Weylgruppenelemente . . . . .                                    | 39        |
| 4.2      | Die Exponentialabbildung . . . . .  | 41        |
| 4.3      | Konstruktion des baryzentrischen Punktes . . . . .                                | 43        |
| 4.4      | Eigenwerte von $\text{Ad}(n_w)$ . . . . .   | 44        |
| <b>5</b> | <b>Der Zentralisator des baryzentrischen Punktes</b>                              | <b>49</b> |
| 5.1      | Das Wurzelsystem von $Z_A^\circ$ . . . . .  | 49        |
| 5.2      | Die Wurzel $\alpha^+$ . . . . .   | 51        |
| 5.3      | Operation von $Z^\circ(w_\Delta)$ auf $u_\zeta$ . . . . .                         | 51        |

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>6</b> | <b>Darstellungen</b>                                       | <b>53</b> |
| 6.1      | Multilinearformen  | 53        |
| 6.2      | Gewichte   | 57        |
| 6.3      | Einige Minimalpolynome von Eigenvektoren von $w$           | 59        |
| 6.4      | Rationalität   | 60        |
| 6.5      | Die Klasse eines Torus in $H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), W)$  | 62        |
| 6.6      | Darstellungen der einfachen Gruppen                        | 63        |
| 6.6.1    | $SL_n$   | 63        |
| 6.6.2    | $SO_{2n+1}$  | 64        |
| 6.6.3    | $Sp_{2n}$  | 64        |
| 6.6.4    | $SO_{2n}$  | 65        |
| 6.6.5    | $E_6$  | 65        |
| 6.6.6    | $F_4$  | 67        |
| 6.6.7    | $G_2$  | 68        |
| 6.6.8    | Die adjungierte Darstellung                                | 70        |
| <b>7</b> | <b>Die Algebra <math>\mathfrak{A}_E</math></b>             | <b>71</b> |
| 7.1      | Zerlegung mittels Idempotenter                             | 71        |
| 7.2      | Relationen zwischen Nullstellen                            | 73        |
| 7.3      | Relationen innerhalb eines Orbits und Normgleichungen      | 76        |
| 7.4      | Abhängigkeiten zwischen den Summanden von $\mathfrak{A}_E$ | 78        |
| <b>8</b> | <b>Vorbereitungen für Tori zu Coxeter-Elementen</b>        | <b>81</b> |
| 8.1      | Bestimmung der $\zeta$ -Wurzeln                            | 81        |
| 8.2      | Das Minimalpolynom für das Wurzelsystem vom Typ $D_n$      | 83        |
| 8.3      | Das Minimalpolynom für das Wurzelsystem vom Typ $F_4$      | 83        |
| 8.4      | Die Minimalpolynome für das Wurzelsystem vom Typ $E_6$     | 85        |
| 8.5      | Beispiele für halbeinfache Eigenvektoren von $w_\Delta$    | 88        |
| 8.5.1    | Typ $A_n$  | 89        |
| 8.5.2    | Typ $B_n$  | 89        |
| 8.5.3    | Typ $C_n$  | 89        |
| 8.5.4    | Typ $D_n$  | 89        |
| 8.5.5    | Typ $G_2$  | 89        |
| 8.5.6    | Typ $F_4$  | 90        |
| 8.5.7    | Typ $E_6$  | 90        |
| <b>9</b> | <b>Vorbereitungen für Tori zu Nicht-Coxeter-Elementen</b>  | <b>91</b> |
| 9.1      | Bestimmung der $\zeta$ -Wurzeln                            | 91        |
| 9.1.1    | Wurzelsystem vom Typ $D_n$                                 | 91        |
| 9.1.2    | Wurzelsystem vom Typ $F_4$                                 | 92        |
| 9.1.3    | Wurzelsystem vom Typ $E_6$                                 | 93        |
| 9.2      | Minimalpolynome der Eigenvektoren von $w$                  | 95        |
| 9.2.1    | Wurzelsystem vom Typ $D_n$                                 | 95        |
| 9.2.2    | Wurzelsystem vom Typ $F_4$                                 | 96        |
| 9.2.3    | Wurzelsystem vom Typ $E_6$                                 | 97        |
| 9.3      | Relationen zwischen Nullstellen der Minimalpolynome        | 99        |
| 9.3.1    | Wurzelsystem vom Typ $D_n$                                 | 99        |
| 9.3.2    | Wurzelsystem vom Typ $F_4$                                 | 99        |
| 9.3.3    | Wurzelsystem vom Typ $E_6$                                 | 100       |
| 9.4      | Beispiele für halbeinfache Eigenvektoren von $w_\Delta$    | 102       |



|           |   |            |
|-----------|---|------------|
| 9.4.1     | Typ $D_n$ . . . . .   | 102        |
| 9.4.2     | Typ $F_4$ . . . . .   | 102        |
| 9.4.3     | Typ $E_6$ . . . . .   | 102        |
| 9.4.4     | Geradenkonfiguration einer nichtsingulären kubischen Fläche . . . . .                                 | 103        |
| <b>10</b> | <b>Konstruktion der primitiven Tori</b>   | <b>107</b> |
| 10.1      | Die Coxeterklasse für den Typ $A_n$ . . . . .   | 107        |
| 10.2      | Die Coxeterklasse für den Typ $B_n$ . . . . .   | 108        |
| 10.3      | Die Coxeterklasse für den Typ $C_n$ . . . . .   | 108        |
| 10.4      | Die Klasse $[k][n-k]$ ( $n/2 \leq k \leq n-1$ ) für den Typ $D_n$ . . . . .                           | 108        |
| 10.5      | Die Coxeterklasse für den Typ $G_2$ . . . . .   | 109        |
| 10.6      | Die Coxeterklasse für den Typ $F_4$ . . . . .   | 109        |
| 10.7      | Die Klasse $6_p6_p$ für den Typ $F_4$ . . . . .   | 110        |
| 10.8      | Die Coxeterklasse für den Typ $E_6$ . . . . .   | 111        |
| 10.9      | Die Klasse $9_p$ für den Typ $E_6$ . . . . .  | 112        |
| 10.10     | Die Klasse $6_p6_p3_p$ für den Typ $E_6$ . . . . .  | 113        |
| 10.11     | Der Hauptsatz . . . . .   | 114        |
| <b>II</b> | <b>Fixpunkte primitiver Tori im affinen Bruhat-Tits Gebäude</b>                                       | <b>121</b> |
| <b>11</b> | <b>Das affine Bruhat-Tits Gebäude</b>   | <b>123</b> |
| 11.1      | $p$ -adische Körper . . . . .   | 123        |
| 11.2      | Das Standardapartment . . . . .   | 124        |
| 11.3      | Das affine Bruhat-Tits Gebäude . . . . .  | 126        |
| 11.4      | Weitere Eigenschaften des Gebäudes . . . . .  | 129        |
| 11.5      | Kammersysteme und Coxeterkomplexe . . . . .   | 130        |
| 11.6      | Beschreibung von Kammern in $\mathcal{B}(G, F)$ . . . . .   | 131        |
| <b>12</b> | <b>Vorbereitungen zur Fixpunktbestimmung</b>  | <b>135</b> |
| 12.1      | Fixpunkt mengen in $\mathcal{B}(G, F)$ . . . . .  | 135        |
| 12.2      | Existenz geeigneter Elemente in $T$ . . . . .   | 136        |
| 12.3      | $\mathcal{O}$ -Struktur auf $G$ und $\mathfrak{g}$ . . . . .  | 140        |
| 12.4      | Operation von $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$ auf $u_\zeta(\mathcal{O}) \cap \text{int}$ . . . . . | 141        |
| 12.5      | Der baryzentrische Vektor . . . . .   | 142        |
| <b>13</b> | <b>Fixpunkte primitiver Tori</b>  | <b>145</b> |
| 13.1      | Ein Algorithmus und Berechenbarkeit des Problems . . . . .  | 145        |
| 13.2      | Zurückführung auf die Erzeuger von $T$ . . . . .  | 146        |
| 13.3      | Wurzelkombinatorik . . . . .  | 148        |
| 13.4      | Fixpunkte der Coxetertori . . . . .   | 150        |
| 13.5      | Fixpunkte von Nicht-Coxeter-Tori . . . . .  | 151        |
| 13.5.1    | Vorgehensweise und Aufbau der Tabellen . . . . .  | 152        |
| 13.5.2    | Fixpunkte für die Klasse $[\bar{2}][\bar{2}]$ vom Typ $D_4$ . . . . .                                 | 154        |
| 13.5.3    | Fixpunkte für die Klasse $6_p6_p$ oder das vierdimensionale Haus des Nikolaus . . . . .               | 154        |
| 13.5.4    | Fixpunkte für die Klasse $9_p$ . . . . .  | 156        |
| 13.5.5    | Fixpunkte für die Klasse $6_p6_p3_p$ . . . . .  | 158        |
| 13.5.6    | Eine elliptische Kurve . . . . .  | 160        |



# Kapitel 1

## Einleitung

Die Operation eines maximalen anisotropen Torus  $T$  einer zusammenhängenden, halbeinfachen linearen algebraischen Gruppe  $G$  über einem  $p$ -adischen Körper  $F$  auf dem affinen Bruhat-Tits Gebäude ist bisher noch nicht genau untersucht. Bekannt ist im allgemeinen nur, daß die Fixpunktmenge von  $T(F)$  beschränkt ist und im Falle, daß  $T$  über einer unverzweigten Erweiterung von  $F$  zerfällt, aus einem einzelnen Punkt besteht nach [T1][3.6.1]. Im verzweigten Fall ist dagegen kein allgemeines Ergebnis bekannt. In [T1] ist zwar erwähnt, daß die Fixpunktmenge in einigen Fällen mehr als einen Punkt enthält, aber selbst im Fall  $G = SL_2$  wird hier keine exakte Aussage getroffen. In [Hu] werden für die Gruppen  $SL_n$  die Fixpunkt Mengen der  $F$ -rationalen Punkte des maximalen anisotropen Normtorus  $T = \text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$  für einige rein verzweigte Erweiterungen  $E/F$  vom Grad  $n$  bestimmt. Dabei sind die  $F$ -rationalen Punkte von  $T$  als  $T(F) = \{x \in E^* \mid N_{E/F}(x) = 1\}$  erklärt, wobei  $N_{E/F}$  die Körpernorm von  $E/F$  bezeichnet. Während für alle zahm verzweigten Erweiterungen  $E/F$  die Fixpunktmenge von  $T(F)$  immer aus genau einer Kammer besteht, lassen sich für wild verzweigte Erweiterungen Ergebnisse überhaupt nur unter zum Teil deutlichen Einschränkungen an den Grundkörper und den Grad der Erweiterung  $E/F$  erzielen. Die Ergebnisse weisen in eine Richtung, daß die Fixpunkt Mengen in gewisser, aber unklarer Weise den Grad der Verzweigung messen: in wild verzweigten Fällen ist die Fixpunktmenge meistens, aber nicht immer echt größer als eine Kammer.

Fixpunkt Mengen von Tori bzw. einzelnen Toruselementen im Bruhat-Tits Gebäude spielen in mehreren Bereichen eine Rolle. So lassen sich für Elemente  $t \in G(F)$  mit Zentralisator  $G_t$  die Orbitalintegrale

$$\int_{G_t(F) \backslash G(F)} 1_{H(F)}(gtg^{-1}) dg,$$

die bezüglich der charakteristischen Funktion  $1_{H(F)}$  des punktwisen Stabilisators  $H(F)$  in  $G(F)$  einer Facette  $\mathcal{F}$  im Gebäude gebildet werden, durch Zählen der von  $t$  punktwise fixierten Facetten im  $G(F)$ -Orbit von  $\mathcal{F}$  berechnen. Die Fixpunktmenge von  $T(F)$  ist per definitionem der Durchschnitt der Fixpunkt Mengen der einzelnen  $t \in T(F)$  und daher in jeder solchen enthalten. Ist  $t$  ein Element in  $T(F)$ , dessen Fixpunktmenge mit der des gesamten Torus übereinstimmt, läßt sich das Orbitalintegral zu  $t$  mit Hilfe der Fixpunktmenge von  $T(F)$  bestimmen. Eine weitere Anwendung finden Fixpunkt Mengen anisotroper Tori im Zusammenhang mit den Spurformeln vom Hopf-Lefschetz-Typ (siehe [SS][IV.1.5]). Der Wert des Charakters einer zulässigen (unendlich dimensional) Darstellung von  $G(F)$  auf einem regulär elliptischen Element  $t$  läßt sich als endliche alternierende Summe der Spuren der  $t$ -Operation auf den endlich dimensional Kohomologiegruppen der kompakten Fixpunktmenge von  $t$  mit Koeffizienten in gewissen Garben ausrechnen.

Besondere Bedeutung kommt topologisch unipotenten Elementen  $t$  zu. Mit Hilfe des Tricks von Kazhdan lassen sich Orbitalintegrale obigen Typs eines  $F$ -rationalen Elements  $h$  über  $G(F)$  zurückführen auf Orbitalintegrale des topologisch unipotenten Anteils  $u$  von  $h$  über den Zentralisator  $G_u$  des residuell

halbeinfachen Anteils  $v$  von  $h$  in  $G$ . Letztere lassen sich mit Kenntnis der Fixpunktmenge von  $u$  im  $G_v(F)$ -Orbit einer entsprechenden Facette berechnen. Dies ist ein Grund, warum wir uns in dieser Arbeit auf die Bestimmung der Fixpunktmenge des topologisch unipotenten Anteils der Tori beschränken. Wir werden sehen, daß es in der Tat topologisch unipotente Elemente in  $T(F)$  gibt, deren Fixpunktmenge mit der des gesamten topologisch unipotenten Anteils übereinstimmt. Ein weiterer Grund für die Einschränkung besteht darin, daß die Operation von topologisch unipotenten Elementen von  $G(F)$  auf dem Gebäude und damit auch ihre Fixpunktmenge nicht von der Isogenieklasse von  $G$  abhängen.

Ein Problem, vor dem man im Hinblick auf andere klassische und die exzeptionellen Gruppen steht, ist die Beschreibung der Tori. Die bekannte Beschreibung in Termen von Galois-Kohomologie ist für die Berechnung von Fixpunkten im Bruhat-Tits Gebäude nicht geeignet. Während für die klassischen Gruppen sowohl eine algebraische Beschreibung der Tori als auch eine Einbettung nach  $G$  relativ leicht zugänglich ist, ist dies für exzeptionelle Gruppen nicht der Fall. Der erste Teil der Arbeit stellt daher eine für unsere Zwecke geeignete Darstellung von gewissen maximalen Tori in  $G$  zur Verfügung. Im zweiten Teil wird dann die Fixpunktmenge der  $F$ -rationalen Punkte der konstruierten Tori im Bruhat-Tits Gebäude bestimmt. Auch der Fall  $G = SL_n$ , in dem die Ergebnisse nach [Hu] bereits bekannt sind, wird in der uniformen Sprache dieser Arbeit vollständig behandelt.

Wir werden für gewisse Tori  $T$  paarweise kommutierende, halbeinfache Elemente  $v_1, \dots, v_k$  in der Liealgebra von  $G$  angeben, so daß  $T$  das Produkt von Untertori  $T_1, \dots, T_k$  ist und die  $E$ -rationalen Punkte von  $T_i$  für jede  $F$ -Algebra  $E$  Polynome in  $v_i$  mit Koeffizienten in  $E$  sind. Die  $v_i$  liegen dabei in der Summe gewisser, von  $i$  abhängiger Wurzelräume. In dieser Darstellung lassen sich die Fixpunkte von  $T(F)$  im Bruhat-Tits Gebäude dann alleine anhand der „erzeugenden Elemente“  $v_i$  unter Ausnutzung der Weylgruppenoperation auf den Wurzeln bestimmen.

## 1.1 Beschreibung eines anisotropen Torus am Beispiel der $SL_n$

Als Leitfaden für die Vorgehensweise in dieser Arbeit betrachten wir den einfachsten Fall  $G = SL_n = \{g \in GL_n \mid \det(g) = 1\}$  und nehmen an, daß der Körper  $F$  die Einheitswurzeln der Ordnung  $n$  enthält. Die Untergruppe der Diagonalmatrizen in  $G$  ist ein maximaler spaltender Torus

$$\mathbb{T} = \{\text{diag}(t_1, \dots, t_n) \mid t_1 \cdots t_n = 1\}$$

in  $G$ . Die Wurzeln  $\alpha_i$  für  $i = 1, \dots, n-1$ , definiert durch

$$\alpha_i(\text{diag}(t_1, \dots, t_n)) = \frac{t_i}{t_{i+1}},$$

bilden ein System einfacher Wurzeln  $\Delta$  für das Wurzelsystem  $\Phi$  von  $G$  bezüglich  $\mathbb{T}$ . Die positive Wurzel maximaler Höhe  $\alpha^+$  bezüglich  $\Delta$  ist dann gegeben durch

$$\alpha^+(\text{diag}(t_1, \dots, t_n)) = \frac{t_1}{t_n}.$$

Die zugehörigen eindimensionalen Untergruppen  $U_{\alpha_i}$  (bzw.  $U_{\alpha^+}$ ) von  $G$  bestehen aus den Matrizen in  $G$ , deren Einträge bis auf den an Position  $(i, i+1)$  (bzw. an  $(1, n)$ ) mit den Einträgen der Einheitsmatrix  $1_n$  übereinstimmen. Die entsprechenden Untergruppen zu den negativen Wurzeln sind gerade die transponierten Matrizen. Die bezüglich  $\Delta$  positiven Wurzeln  $\alpha$  haben Wurzeluntergruppen  $U_\alpha$ , die aus oberen Dreiecksmatrizen bestehen. Die Liealgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  von  $G$  besteht aus den Matrizen mit trivialer Spur, und die Diagonalmatrizen in  $\mathfrak{g}$  bilden die Liealgebra  $\mathfrak{t}$  von  $\mathbb{T}$ . Der Wurzelraum  $\mathfrak{u}_{\alpha_i}$  (bzw.  $\mathfrak{u}_{\alpha^+}$ ) in  $\mathfrak{g}$  besteht entsprechend aus allen Matrizen in  $\mathfrak{sl}_n$ , deren Einträge bis auf den an Position  $(i, i+1)$

(bzw. an  $(1, n)$ ) trivial sind. Wir bezeichnen nun für  $\alpha \in \Delta \cup \{-\alpha^+\}$  mit  $X_\alpha$  das Element in  $\mathfrak{u}_\alpha$ , dessen einziger nichttrivialer Eintrag gleich 1 ist. Das Element

$$n_w = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \varepsilon & & & 0 \end{pmatrix}$$

liegt für  $\varepsilon = (-1)^{n-1}$  im Normalisator  $N(\mathbb{T})(F)$  und wird unter der natürlichen Abbildung  $N(\mathbb{T}) \rightarrow W$  in die Weylgruppe  $W$  von  $G$  auf das Coxeterelement  $w = s_{\alpha_{n-1}} \cdots s_{\alpha_1}$  abgebildet. Dabei bezeichnet  $s_{\alpha_i}$  die zu  $\alpha_i$  assoziierte Spiegelung in  $W$ .

Sei  $\psi : G \rightarrow G/Z(G)$  die zentrale Isogenie in die adjungierte Form  $G_{\text{ad}}$  von  $G$ . In unserem Fall ist  $G_{\text{ad}} = PSL_n$ . Die Objekte  $\mathbb{T}^\psi, U_{\alpha_i}^\psi$  und  $n_w^\psi$  seien erklärt als die Bilder der jeweiligen Objekte unter der Isogenie  $\psi$  bzw. der induzierten Abbildung  $d\psi$  zwischen den Liealgebren von  $G$  und  $G_{\text{ad}}$ . Das Element  $n_w$  hat das Minimalpolynom  $X^n - \varepsilon$  und ist in  $G_{\text{ad}}$  konjugiert zu

$$w_\Delta = \psi(\text{diag}(1, \zeta^{n-1}, \zeta^{n-2}, \dots, \zeta)) \in \mathbb{T}^\psi(F),$$

wenn  $\zeta$  eine ab jetzt fixierte primitive  $n$ -te Einheitswurzel bezeichnet. Das Element  $w_\Delta$  hat die Eigenschaft, daß  $\alpha(w_\Delta) = \zeta$  gilt für alle  $\alpha \in \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ .

Sei nun  $E$  eine rein zahn verzweigte Körpererweiterung von  $F$  vom Grad  $n$ . Dann existieren Uniformisierende  $\pi_F$  von  $F$  und  $\pi_E$  von  $E$  mit  $\pi_E^n = \pi_F$ .  $E$  ist also eine Galoiserweiterung mit zyklischer Galoisgruppe  $\Gamma$ , die durch  $\sigma(\pi_E) = \zeta\pi_E$  operiert für einen geeigneten Erzeuger  $\sigma$  von  $\Gamma$ . Sei  $\rho$  die reguläre Darstellung von  $E$  über  $F$ , d.h.  $\rho(x) \in GL(E)$  bezeichnet die Multiplikation mit  $x$  auf dem  $F$ -Vektorraum  $E$  für ein  $x \in E$ . Sei  $T = \text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$  der Normtorus zur Erweiterung  $E/F$ , d.h.  $T(F) = \text{Kern}(\det \circ \rho)$ . Wegen  $\det \circ \rho = N_{E/F}$  gilt  $\rho(T(F)) \subset SL(E)$ . Wir beschreiben nun die  $F$ -rationalen Punkte von  $T$  explizit. Dazu wählen wir die Basis  $B = (\pi_E^{n-1}, \dots, \pi_E, 1)$  von  $E$  über  $F$  und betten  $T(F)$  bezüglich  $B$  nach  $G(F) = SL_n(F)$  ein. Sei

$$v := \rho(\pi_E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ \pi_F & & & 0 \end{pmatrix}$$

und  $P = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$  ein Polynom in  $F[X]$ . Für das durch  $P$  beschriebene Element

$$x_P = P(\pi_E) = a_0 + a_1\pi_E + \dots + a_{n-1}\pi_E^{n-1}$$

in  $E$  gilt dann  $\rho(x_P) = P(v)$ . Das Bild jedes Elements aus  $E$  unter  $\rho$  ist also ein Polynom in einem universellen Element  $v \in \mathcal{M}(F)$ . Wir sehen nun, daß  $v$  in der Liealgebra  $\mathfrak{g}(F)$  liegt. Genauer gilt

$$v = \pi_F X_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in \Delta} X_\alpha,$$

wenn die  $X_\alpha$  die oben beschriebenen Elemente aus  $\mathfrak{u}_\alpha(F)$  sind für  $\alpha \in \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ . Für die Wurzeln aus  $\Delta \cup \{-\alpha^+\}$  gilt nun wie oben bereits gesehen  $\alpha(w_\Delta) = \zeta$ . Daher gilt

$$\text{Ad}(w_\Delta)(v) = \zeta v,$$

d.h.  $v$  ist ein Eigenvektor von  $w_\Delta$  in  $\mathfrak{g}(F)$  zum Eigenwert  $\zeta$ . Das Element  $v$  hat das Minimalpolynom  $X^n - \pi_F$  und ist daher konjugiert zu

$$\tilde{v} := \text{diag}(\pi_E, \zeta\pi_E, \zeta^2\pi_E, \dots, \zeta^{n-1}\pi_E) = \pi_E \cdot \text{diag}(1, \zeta, \zeta^2, \dots, \zeta^{n-1}) \in \mathfrak{t}.$$

Es gilt nun  $\text{Ad}(n_w)(\tilde{v}) = n_w \tilde{v} n_w^{-1} = \zeta \tilde{v}$ , d.h.  $\tilde{v}$  ist ein Eigenvektor von  $\text{Ad}(n_w^\psi)$  in  $\mathfrak{t}$  zum Eigenwert  $\zeta$ . Da  $n_w^\psi$  auf  $\mathfrak{t}$  durch sein Bild  $w$  in der Weylgruppe operiert, ist  $\tilde{v}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$ . Das Element  $g \in G_{\text{ad}}$ , das  $n_w^\psi$  nach  $w_\Delta$  konjugiert, kann deshalb so gewählt werden, daß  $g$  in  $G_{\text{ad}}(E)$  liegt und gleichzeitig  $\tilde{v}$  nach  $v$  konjugiert ( $g$  kann um Elemente aus  $\mathbb{T}^\psi$  abgeändert werden, um  $g\tilde{v}g^{-1} = v$  zu erreichen). Die Erweiterung  $E$  von  $F$  schließlich ist isomorph zu der vom Minimalpolynom  $X^n - \pi_F$  von  $v$  erzeugten Erweiterung von  $F$ .

Wir kommen nun auf die Normbedingung zu sprechen, die die Elemente von  $T$  definiert. Wir verwenden hier eine Sichtweise, die für die  $SL_n$  sehr künstlich anmutet, sich aber auf die anderen Gruppen übertragen läßt. Die Determinante ist eine Multilinearform vom Rang  $n$  in den Spalten einer Matrix aus  $GL_n$ . Die Gruppe  $G = SL_n$  läßt sich als Automorphismengruppe der Determinantenfunktion  $\det$  beschreiben, d.h.

$$G = \{g \in GL_n \mid \det(ga_1, \dots, ga_n) = \det(a_1, \dots, a_n) \text{ für alle } a_i \in \bar{F}^n\}.$$

Für  $g \in GL_n$  bezeichne  $g_{[i]}$  die Abbildung, die in einer quadratischen Matrix der Größe  $n$  die  $i$ -te Spalte  $c_i$  durch den Vektor  $gc_i$  ersetzt. Dann läßt sich die Liealgebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$  beschreiben als

$$\mathfrak{g} = \{g \in \mathcal{M}_n \mid \sum_{i=1}^n \det \circ g_{[i]} = 0\}.$$

Wir betrachten jetzt eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  aus Eigenvektoren von  $v$ . Die Matrix  $A$  habe als Spalten Vektoren  $a_1, \dots, a_n$  aus der Menge  $\{b_1, \dots, b_n\}$  mit zugehörigen Eigenwerten  $y_1, \dots, y_n$ . Dann gilt

$$(1.1) \quad 0 = \sum_{i=1}^n (\det \circ v_{[i]})(A) = \det(A) \sum_{i=1}^n y_i$$

wegen  $v \in \mathfrak{g}$  und

$$(\det \circ v)(A) = \det(A) \prod_{i=1}^n y_i.$$

Für ein beliebiges, wie oben durch das Polynom  $P \in F[X]$  beschriebene Element  $x_P$  in  $E$  gilt daher

$$(\det \circ \rho(x_P))(A) = (\det \circ P(v))(A) = \det(A) \prod_{i=1}^n P(y_i).$$

Wegen der Multilinearität von  $\det$  können wir die Gleichheit  $\det \circ g = \det$  zeigen, indem wir sie auf solchen Matrizen zeigen, deren Spalten in der Menge  $\{b_1, \dots, b_n\}$  enthalten sind, also auf Matrizen wie  $A$ . Wir sehen dann, daß das Element  $x_P$  genau dann in  $T(F)$  liegt, wenn  $\det(A) = 0$  oder  $\prod_{i=1}^n P(y_i) = 1$  ist. Der einzige Fall, in dem  $\det(A) \neq 0$  gilt, ist der Fall, daß die Spalten von  $A$  paarweise verschieden, also genau die Elemente  $b_1, \dots, b_n$  sind. In diesem Fall erzwingt die Liealgebra-Bedingung (1.1) die Relation  $\sum_{i=1}^n y_i = 0$ , d.h. die  $y_i$  sind  $n$  (in diesem Fall paarweise verschiedene) Nullstellen des Minimalpolynoms von  $v$ , deren Summe verschwindet. Im allgemeinen Fall liefern gerade solche Verschwindungsrelationen zwischen Nullstellen gewisser Minimalpolynome die Normbedingungen, die den jeweiligen Torus beschreiben. In unserem Fall sind die Gleichungen  $\prod_{i=1}^n P(y_i) = 1$  für alle paarweise verschiedenen Nullstellen  $y_i$  des Minimalpolynoms von  $v$  äquivalent zu der Gleichung  $\prod_{i=1}^n [P(\zeta^i X)] = [1]$  in  $F[X]/(X^n - \pi_F)$ , denn die  $y_i$  sind die Elemente  $\zeta^i \pi_E$  für  $i = 1, \dots, n$ . Der

Ausdruck  $\prod_{i=1}^n [P(\zeta^i X)]$  ist aber gerade die Körpernorm  $N_{E/F}(x_P)$ , wenn man  $F[X]/(X^n - \pi_F)$  mit  $E$  identifiziert.

Wir wollen den Torus  $T$  noch in Termen von Galoiskohomologie beschreiben. Da  $T^\psi$  durch ein Element  $g \in G_{\text{ad}}$  mit  $gn_w^\psi g^{-1} = w_\Delta$  zu  $\mathbb{T}^\psi$  konjugiert und über  $F$  definiert ist, liegt das Element  $g^{-1}g^\tau$  in  $N(\mathbb{T}^\psi)$  für jedes  $\tau \in \text{Gal}(\bar{F}/F)$ . Wir wählen wieder wie oben  $g$  so, daß  $g \in G_{\text{ad}}(E)$  und  $g\tilde{v}g^{-1} = v$  gilt. Dann hängt der Ausdruck  $g^{-1}g^\tau$  nur vom Bild von  $\tau$  in  $\text{Gal}(E/F) = \Gamma$  ab.  $T^\psi$  definiert also eine Klasse in  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T}^\psi))$ , die aufgrund der zyklischen Struktur von  $\Gamma$  bereits eindeutig bestimmt ist durch  $g^{-1}g^\sigma$  für einen Erzeuger  $\sigma$  von  $\Gamma$ . Ohne Einschränkung operiere  $\sigma = \sigma_\zeta$  durch  $\sigma(\pi_E) = \zeta\pi_E$ . Wir ordnen  $T$  nun das Bild  $w_T$  von  $g^{-1}g^\sigma$  in der Weylgruppe von  $G$  zu. Die Gleichung  $\text{Ad}(g)(\tilde{v}) = \text{Ad}(g)(\pi_E \cdot \text{diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})) = v$  zeigt durch Anwendung von  $\sigma$ , daß

$$\text{Ad}(g^\sigma)(\sigma(\pi_E) \cdot \text{diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})) = v$$

und damit  $\text{Ad}(g^\sigma)(\tilde{v}) = \pi_E \sigma(\pi_E)^{-1} v$  gilt, denn  $v$  und  $\text{diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})$  sind  $F$ -rational. Es folgt

$$w_T \tilde{v} = \text{Ad}(g^{-1}g^\sigma)(\tilde{v}) = \pi_E \sigma(\pi_E)^{-1} \tilde{v}.$$

Insbesondere ist also  $\zeta^{-1}$  ein Eigenwert von  $w_T$ . Da die Gruppe  $G$  spaltet und bereits über  $\mathbb{Q}$  definiert ist, hat  $w_T$  einen  $\mathbb{Q}$ -rationalen Vertreter in  $N(\mathbb{T})$ , der vermöge  $\text{Ad}$  auf dem ebenfalls über  $\mathbb{Q}$  definierten Vektorraum  $\mathfrak{t}$  operiert. Da die Kreisteilungspolynome irreduzibel sind über  $\mathbb{Q}$ , taucht das Kreisteilungspolynom der Ordnung  $n$  als Faktor im charakteristischen Polynom von  $w_T$  auf. Es ist z.B. aus [BFW] bekannt, daß es nur eine Konjugationsklasse in der Weylgruppe eines Wurzelsystems vom Typ  $A_{n-1}$  gibt, die die primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln als Eigenwerte auf  $\mathbb{Z}[\Phi] \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F} \cong \mathfrak{t}$  besitzt, nämlich die Klasse der Coxeter-elemente. Also ist  $w_T$  in  $W$  konjugiert zu  $w$ . Zwei 1-Kozykel  $(a_\tau)$  und  $(b_\tau)$  definieren nun genau dann dieselbe Klasse in  $H^1(\Gamma, W)$ , wenn  $a_\sigma = x^{-1}b_\sigma x^\sigma$  gilt für ein  $x \in W$ . Da die Gruppe  $G$  spaltet, operiert  $\Gamma$  aber trivial auf  $W$ , und zwei Elemente in  $W$ , aufgefaßt als 1-Kozykel in  $W$ , definieren genau dann dieselbe Klasse in  $H^1(\Gamma, W)$ , wenn sie in  $W$  konjugiert sind. Wir sehen also, daß die durch  $T$  definierte Klasse in  $H^1(\Gamma, W)$  gerade der Konjugationsklasse der Coxeter-elemente entspricht.

Wir fassen unsere Überlegungen zusammen. Ausgehend von einem System einfacher Wurzeln  $\Delta$  (bezüglich eines fixierten maximalen spaltenden Torus  $\mathbb{T}$ ) und einem Element  $w$  in der Weylgruppe  $W$  von  $G$  haben wir ein Element  $w_\Delta$ , das in dieser Arbeit als „baryzentrischer Punkt“ bezeichnet werden wird, in  $\mathbb{T}_{\text{ad}} = \psi(\mathbb{T})$  konstruiert. Fixiert man einen Eigenwert  $\zeta$  von  $w$  (für die Operation auf  $\mathfrak{t}$ ), so wählt  $w_\Delta$  durch die Bedingung

$$\alpha(w_\Delta) = \zeta$$

eine Menge von Wurzeln  $\Phi_\zeta(w_\Delta)$  aus. In dem Raum  $\bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta(w_\Delta)} \mathfrak{u}_\alpha$  gibt es einen rationalen Eigenvektor  $v$  von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Minimalpolynom eine rein verzweigte Körpererweiterung  $E$  über  $F$  mit zyklischer Galoisgruppe  $\Gamma$  erzeugt, so daß die Elemente in  $G(F)$ , die Polynome mit gewissen Koeffizientenbedingungen in  $v$  sind, gerade die  $F$ -rationalen Punkte eines Torus  $T$  mit Zerfällungskörper  $E$  mit zyklischer Galoisgruppe  $\Gamma$  sind. In unserem Fall definiert  $T$  gerade die Klasse in  $H^1(\Gamma, W)$ , die der Konjugationsklasse von  $w$  entspricht, also des Elements, von dem wir ausgegangen sind. Die Koeffizientenbedingungen, die den Torus  $T$  definieren, ergeben sich durch die Multilinearform, in deren Automorphismengruppe  $G$  enthalten ist, und gewissen Relationen zwischen den Nullstellen des Minimalpolynoms von  $v$ .

Wir werden diese Vorgehensweise benutzen, um für eine einfache spaltende Gruppe  $G$ , deren Wurzelsystem nicht vom Typ  $E_7$  oder  $E_8$  ist, zu gewissen (nämlich den in [BFW] als primitiv bezeichneten) Konjugationsklassen  $\omega$  in  $W$  Tori  $T_\omega$  in  $G$  zu konstruieren, die zyklische Zerfällungskörper mit Galoisgruppe  $\Gamma_T$  haben und unter geeigneten Voraussetzungen gerade wieder die Klasse  $\omega$  in  $H^1(\Gamma_T, W)$  definieren. Dies stellt den ersten Teil der Arbeit dar. Im allgemeinen reicht die Wahl eines halbeinfachen

Eigenvektors des baryzentrischen Punktes nicht aus, um einen maximalen Torus von  $G$  zu beschreiben. Man erhält zunächst einen Torus, dessen Dimension kleiner sein kann als der Rang der Gruppe. In diesem Fall muß man mehrere paarweise kommutierende halbeinfache Eigenvektoren wählen, deren zugehörige Tori zusammen einen maximalen Torus  $T$  bilden. Auch kommt man im allgemeinen nicht mit einer Normbedingung aus, um die einzelnen Anteile von  $T$  zu beschreiben. Ist  $G$  durch mehrere Multilinearformen (beispielsweise eine Bi- und eine Trilinearform) beschrieben, benötigt man unter Umständen auch mehrere Normbedingungen bezüglich verschiedener Zwischenkörper.

Die gewonnene Beschreibung des Torus  $T$  hat zum einen den Vorteil, daß eine algebraische Darstellung wie  $T \cong \text{Res}_{\mathbb{E}/\mathbb{F}}^1(\mathbb{G}_m)$  nicht a priori bekannt sein muß. Alleine mit den Eigenwerten des betrachteten Weylgruppenelements als Ausgangsdaten sowie einer Darstellung der Gruppe  $G$  lassen sich alle benötigten Größen beschreiben. Dies ist insbesondere im Hinblick auf die exceptionellen Gruppen wichtig. Zum zweiten ist die Darstellung der  $F$ -rationalen Punkte von  $T$  als Polynome in einem universellen Element  $v$  der Liealgebra schon adaptiert an die Frage nach der Fixpunktmenge von  $T(F)$ . Wir werden sehen, daß die Fixpunktmenge einer geeigneten Teilmenge von  $T(F)$  im Bruhat-Tits Gebäude mit der einzelner, bestimmter Elemente in  $T(F)$  übereinstimmt. Für diese ausgezeichneten Elemente läßt sich die Fixpunktmenge jedoch alleine an dem Element  $v$  entscheiden. Die spezielle Gestalt von  $v$  als Summe von Wurzelvektoren ermöglicht dann eine kombinatorische Vorgehensweise zur Bestimmung der Fixpunktmenge. Zur Veranschaulichung verfolgen wir den Fall  $G = SL_n$  weiter. Alle Bezeichnungen seien wie oben.

## 1.2 Fixpunkte eines anisotropen Torus am Beispiel der $SL_n$

Für jede Wurzel  $\alpha \in \Phi$  und jede ganze Zahl  $m \in \mathbb{Z}$  ist  $\alpha + m$  eine affine Funktion auf dem affinen Raum  $\mathcal{A} := X_*(\mathbb{T}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ , wobei  $X_*(\mathbb{T})$  die Gruppe der Kocharaktere von  $\mathbb{T}$  bezeichnet: Für  $x \in \mathcal{A}$  hat man

$$(\alpha + m)(x) = \alpha(x) + m.$$

Die Zusammenhangskomponenten des Komplements aller affinen Hyperebenen  $H_{\alpha, m} = (\alpha + m)^{-1}(\{0\})$  (für  $\alpha \in \Phi, m \in \mathbb{Z}$ ) in  $\mathcal{A}$  bilden die Kammern von  $\mathcal{A}$ . Das affine Bruhat-Tits Gebäude  $\mathcal{B}(G, F)$  zu  $G$  über  $F$  entsteht nun durch Verkleben der Elemente von  $G(F) \times \mathcal{A}$  bezüglich einer Äquivalenzrelation. Die Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$  sind die Bilder von Kammern in  $\mathcal{A}$  unter  $G(F)$ .

Die Untergruppe  $\text{Iw}(F)$  von  $G(F)$ , die aus denjenigen ganzzahligen Matrizen besteht, die obere Dreiecksmatrizen sind modulo  $\pi_F$ , ist der punktweise Stabilisator einer Kammer  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{A}$ . Da  $v$  eine obere Dreiecksmatrix modulo  $\pi_F$  ist, gilt  $\rho(T(F)) \subset \text{Iw}(F)$ , d.h.  $T(F)$  fixiert die Kammer  $\mathcal{C}$  punktweise. Aus der Theorie der Gebäude ist bekannt, daß die Fixpunktmenge von  $T(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  in dieser Situation ein zusammenhängender Komplex von endlich vielen Kammern ist. Wir werden also als ersten Schritt die zu  $\mathcal{C}$  benachbarten Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$  dahingehend untersuchen, ob sie von  $T(F)$  punktweise fixiert werden. Die Wände von  $\mathcal{C}$  sind die Hyperebenen  $H_1, \dots, H_{n-1}$ , die zu den affinen Funktionen  $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \Delta$  gehören, zusammen mit der Hyperebene  $H_0$ , die der Funktion  $\alpha^+ - 1$  entspricht. Wir setzen der Einfachheit halber noch  $\alpha_0 := -\alpha^+$  und  $X_{\alpha_0} := \pi_F X_{-\alpha^+}$ . Die Matrix  $r_{\alpha_i}$  sei erklärt als

$$r_{\alpha_i} = (1_n + X_{\alpha_i})(1_n - X_{\alpha_i}^t)(1_n + X_{\alpha_i}).$$

Das Element  $r_{\alpha_i}$  ist die Spiegelung an  $H_i$  in  $\mathcal{A}$ . Dann hat jede Kammer  $C_i(z)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$ , die zu  $\mathcal{C}$  über die Hyperebene  $H_i$  benachbart ist, die Gestalt

$$C_i(z) = (1 + zX_{\alpha_i})r_{\alpha_i}\mathcal{C}$$

für ein Element  $z \in \mathcal{O}_F$ . Die Kammer  $C_i(z)$  wird genau dann von  $T(F)$  punktweise fixiert, wenn

$$(1.2) \quad r_{\alpha_i}^{-1}(1 + zX_{\alpha_i})^{-1}\rho(T(F))(1 + zX_{\alpha_i})r_{\alpha_i} \subset \text{Iw}(F)$$



gilt. Sei nun  $x_P \in T(F)$  ein (beliebiges) Element mit  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1}$  und  $a_1 \in \mathcal{O}_F^*$  (wir lassen die Existenzfrage an dieser Stelle außen vor). Ein solches Element hat zwei Eigenschaften: Zum einen ist die Bedingung (1.2) genau dann erfüllt, wenn sie schon für das eine Element  $\rho(x_P)$  erfüllt ist. Zum zweiten ist letzteres genau dann der Fall, wenn die Bedingung (1.2) für  $v$  „erfüllt“ ist, d.h. wenn  $v$  eine obere Dreiecksmatrix ist modulo  $\pi_F$ . Wegen  $v \in \mathfrak{g}$  gilt

$$r_{\alpha_i}^{-1}(1 + zX_{\alpha_i})^{-1}v(1 + zX_{\alpha_i})r_{\alpha_i} = \text{Ad}((1 + zX_{\alpha_i})^{-1}r_{\alpha_i}^{-1})(v) \in \mathfrak{g},$$

und explizites Nachrechnen zeigt, daß  $\text{Ad}((1 + zX_{\alpha_i})^{-1}r_{\alpha_i}^{-1})(v)$  keine obere Dreiecksmatrix modulo  $\pi_F$  ist. Der Grund besteht darin, daß in der Zerlegung von  $\text{Ad}((1 + zX_{\alpha_i})^{-1}r_{\alpha_i}^{-1})(v)$  bezüglich  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{u}_\alpha$  der Anteil des Wurzelraumes  $\mathfrak{u}_{-\alpha_i}$  gerade  $X_{\alpha_i}^t$  für  $1 \leq i \leq n-1$  und  $\frac{1}{\pi_F}X_{\alpha_0}^t$  für  $i=0$  ist. Im ersten Fall ( $i > 0$ ) ist  $X_{\alpha_i}^t$  eine untere Dreiecksmatrix, deren nichttrivialer Eintrag gleich 1 ist und daher nicht verschwindet modulo  $\pi_F$ , während für  $i=0$  die Matrix  $\frac{1}{\pi_F}X_{\alpha_0}^t$  den Eintrag  $\frac{1}{\pi_F}$  hat und daher nicht mehr ganzzahlig ist. Wir sehen also, daß die Fixpunktmenge von  $T(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  genau aus der Kammer  $\mathcal{C}$  besteht.

Es ist kein Zufall, daß gerade die Negativen der Wurzeln aus  $\Delta \cup \{-\alpha^+\}$  dafür verantwortlich sind, daß  $\text{Ad}((1 + zX_{\alpha_i})^{-1}r_{\alpha_i}^{-1})(v)$  keine obere Dreiecksmatrix ist modulo  $\pi_F$ . Wenn  $\mathfrak{im}(F)$  die Elemente aus  $\mathfrak{g}(F)$  bezeichnet, die obere Dreiecksmatrizen sind modulo  $\pi_F$ , so haben wir gesehen, daß die Bedingung (1.2) für  $T(F)$  äquivalent ist zur entsprechenden Bedingung für  $v$ , wenn  $\text{Iw}(F)$  durch  $\mathfrak{im}(F)$  ersetzt wird. Die Elemente  $x$  aus  $\mathfrak{im}(F)$  lassen sich nun so charakterisieren, daß für  $x$  in der Zerlegung bezüglich  $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{u}_\alpha$

$$x = x_{\mathfrak{t}} + \sum_{\alpha \in \Phi} x_\alpha$$

alle Komponenten ganzzahlig sein müssen und die  $x_\alpha$  für negative Wurzeln  $\alpha$  verschwinden müssen modulo  $\pi_F$ . Das Bild einer Komponente  $x_\beta$  unter  $\text{Ad}(r_{\alpha_i})$  liegt im Wurzelraum  $\mathfrak{u}_{s_{\alpha_i}(\beta)}$ , wenn  $s_{\alpha_i}$  die zu  $\alpha_i$  gehörige Spiegelung in der Weylgruppe von  $G$  ist. Führt also  $s_{\alpha_i}$  eine positive Wurzel  $\beta$  in eine negative Wurzel über, so muß man prüfen, welche Bewertung der eventuelle nichttriviale Eintrag von  $\text{Ad}(r_{\alpha_i})(x_\beta)$  hat. In unserem Fall ist  $s_{\alpha_i}(\alpha_i) = -\alpha_i$  negativ für  $1 \leq i \leq n-1$  und der nichttriviale Eintrag von  $\text{Ad}(r_{\alpha_i})(x_{\alpha_i})$  gleich 1, also eine Einheit.

In [Hu] wird dieses Ergebnis durch körpertheoretische Überlegungen erzielt. Das Gebäude  $\mathcal{B}(G, F)$  läßt sich äquivalent in Termen von  $\mathcal{O}_F$ -Gittern in der Erweiterung  $E/F$  beschreiben: Die Ecken der Kammern von  $\mathcal{B}(G, F)$  sind Äquivalenzklassen von (vollständigen)  $\mathcal{O}$ -Gittern in  $E$ , und  $n$  Ecken bilden die Ecken einer Kammer genau dann, wenn es repräsentierende Gitter gibt, die bestimmte, von  $\pi_F$  abhängige Indizes ineinander haben. Die Operation von  $T(F)$  auf  $\mathcal{B}(G, F)$  stimmt überein mit der von der Multiplikation der Gitter mit  $E^*$  induzierten Operation. Es wird gezeigt, daß  $T(F)$ -invariante Ecken in  $\mathcal{B}(G, F)$  gerade solchen Gittern entsprechen, die  $\mathcal{O}_E$ -Moduln sind. Letztere sind die gebrochenen Ideale  $(\pi_E^i)$  für  $i \in \mathbb{Z}$  und definieren genau die  $n$  Ecken einer Kammer.

Wir fassen unsere Überlegungen wieder zusammen. Wir wollen die Fixpunktmenge von  $T(F)$  im Bruhat-Tits Gebäude  $\mathcal{B}(G, F)$  bestimmen. Ist  $T$  wie im ersten Teil beschrieben durch einen halbeinfachen Eigenvektor  $v$  des baryzentrischen Punktes, so existiert eine Kammer  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{B}(G, F)$ , die von  $T(F)$  punktweise fixiert wird. Deshalb bildet die Fixpunktmenge von  $T(F)$  einen zusammenhängenden, endlichen Kammerkomplex in  $\mathcal{B}(G, F)$ . Ausgehend von  $\mathcal{C}$  beschreiben wir eine beliebige Kammer  $C$  als Bild von  $\mathcal{C}$  unter einem  $g \in G(F)$  in einer standardisierten Form mit Hilfe von affinen Spiegelungen und unipotenten Elementen, die zu den Wurzeln von  $G$  assoziiert sind, die in gewisser Weise den Hyper-ebenen entsprechen, die  $C$  von  $\mathcal{C}$  trennen. Die Frage nach Fixpunkten von  $T(F)$  läßt sich reduzieren auf die entsprechende Frage für geeignete einzelne Elemente in  $T(F)$  und weiter auf die Frage, welche  $g \in G(F)$  die obere Dreiecksgestalt modulo  $\pi_F$  von  $v$  erhalten. Aufgrund der speziellen Darstellung von

$g$  lassen sich die Auswirkungen, die die Konjugation mit  $g$  auf  $v$  hat, im Hinblick auf die Dreiecksgestalt von  $v$  alleine durch die Operation der Weylgruppe auf den Wurzeln abschätzen. In unserem speziellen Fall  $G = SL_n$  haben wir auf diese Weise gesehen, daß nur die Kammer  $C$  von  $T(F)$  punktweise fixiert wird.

Das Ergebnis für die  $SL_n$  ist charakteristisch für die Tori, die der Coxeterklasse entsprechen, und zwar unabhängig vom Wurzelsystem der Gruppe. Der Grund besteht darin, daß in diesen Fällen der baryzentrische Punkt genau die Wurzeln auswählt, die zu den Wänden der Kammer  $C$  assoziiert sind. Das Argument im Fall  $G = SL_n$  läßt sich fast wörtlich auf den allgemeinen Fall übertragen. Für Tori, die nicht der Coxeterklasse entsprechen, ist die Situation jedoch völlig anders. Hier wird stets mehr als eine Kammer von  $T(F)$  punktweise fixiert, so daß wir auch komplexere Bedingungen als (1.2) untersuchen müssen. Hier können die unipotenten Elemente, die in der Darstellung von  $g$  auftauchen, ebenfalls Wurzeln liefern, die ihr Vorzeichen unter gewissen Spiegelungen ändern. Ist dies der Fall, so werden die Kammern, die über die entsprechende Wand zur aktuell betrachteten Kammer  $C$  benachbart sind, genau dann punktweise fixiert, wenn  $C$  in einem von bestimmten, durch die beteiligten unipotenten Elemente festgelegten Apartments liegt. Man erhält im allgemeinen Fall folgende Einteilung der Wände (die jeweils affinen Funktionen  $\alpha + m$  entsprechen für eine Wurzel  $\alpha$  und eine ganze Zahl  $m \in \mathbb{Z}$ ) einer von  $T(F)$  punktweise fixierten Kammer  $C$  in drei Typen: solche Wände, für die es nicht von der Kammer  $C$  abhängt, ob die über die entsprechende Wand benachbarten Kammern von  $T(F)$  punktweise fixiert bzw. nicht punktweise fixiert werden, und schließlich solche, für die dies nicht der Fall ist. Man beachte, daß man aufgrund der Operation der Weylgruppe auf den Wurzeln in den beiden Fällen, in denen es Kammern gibt, die nicht punktweise fixiert werden, noch nicht entscheiden kann, ob die entsprechenden benachbarten Kammern wirklich nicht fixiert werden. Man muß nachprüfen, daß die Konjugation von  $v$  mit den entsprechenden unipotenten Elementen und Spiegelungen tatsächlich nichttriviale Komponenten in den jeweiligen Wurzelräumen liefert.

### 1.3 Eine kapitelweise Beschreibung der Arbeit

In Kapitel 2 werden noch einmal kurz die wesentlichen Schritte zur Konstruktion der Tori beschrieben sowie die Rolle der Isogenieklasse der betrachteten Gruppe im Hinblick auf den zweiten Teil diskutiert.

In Kapitel 3 folgt eine kurze Übersicht über die Theorien, die für diese Arbeit von grundlegender Bedeutung sind. Allgemein bekannte Aussagen werden weder bewiesen noch mit exakter Quellenangabe zitiert, da sie entweder wohlbekannt oder in allen Standardwerken zu den entsprechenden Themen aufgeführt sind. Benötigen wir im weiteren Verlauf spezielle Aussagen im Umfeld dieser Theorien, so sind diese als Sätze formuliert und (falls nötig) auch bewiesen.

In Kapitel 4 werden zwei für die Arbeit zentrale Größen, der baryzentrische Punkt bzw. der baryzentrische Vektor, konstruiert. Im ganzen Kapitel arbeiten wir in der adjungierten Form von  $G$ , um primitive Weylgruppenelemente ordnungserhaltend in den Normalisator eines maximalen spaltenden Torus liften zu können. Die ersten beiden Abschnitte treffen Vorbereitungen für die Konstruktion, die im dritten Abschnitt erfolgt. Schließlich werden erste Aussagen über die Eigenwerte von primitiven Weylgruppenelementen gemacht, die später in den konkreten Fällen zur Bestimmung der Wurzeln führen, die durch den baryzentrischen Punkt ausgewählt werden.

Kapitel 5 beschäftigt sich mit dem Zentralisator des baryzentrischen Punktes. Seine Einskomponente ist eine reduktive Gruppe und operiert auf dem Unterraum, der aus den Wurzelräumen zu den vom baryzentrischen Punkt ausgewählten Wurzeln in der Liealgebra besteht. Diese Operation läßt sich ausnutzen, um Aussagen über die Gestalt des Minimalpolynoms eines Eigenvektors des baryzentrischen Punktes bezüglich einer rationalen Darstellung zu machen, was in Abschnitt 5.3 geschieht.

In Kapitel 6 geht es um Darstellungen der betrachteten Gruppen  $G$  und ihrer Liealgebren. Die Minimalpolynome der Eigenvektoren  $v$  des baryzentrischen Punktes bezüglich einer rationalen Darstellung erzeugen  $F$ -Algebren, in denen man Tori mit Hilfe gewisser Gleichungen algebraisch beschreiben kann. Alle Darstellungen beschreiben die Gruppen durch die Automorphismengruppen (eventuell mehrerer) Multilinearformen. Die Gleichungen, die die Tori dann in den Algebren definieren, hängen von den entsprechenden Multilinearformen ab. Im ersten Abschnitt wird allgemein für eine  $F$ -Algebra und eine Darstellung des eben beschriebenen Typs untersucht, welche Elemente der Algebra als Polynome in  $v$  nach  $G$  abgebildet werden können. Dies wird einerseits in Kapitel 10 zur Definition der Tori führen, und gleichzeitig eine Einbettung in die Gruppe  $G$  liefern. Die drei folgenden Abschnitte beschäftigen sich mit der Struktur der Minimalpolynome der Elemente  $v$  sowie Rationalitätsfragen in diesem Kontext. Abschnitt 6.5 trifft mit Hilfe von Darstellungen erste Aussagen über den Zusammenhang zwischen den von uns (später) konstruierten Tori und den Konjugationsklassen in der Weylgruppe, von denen ausgehend die Tori konstruiert werden. Der letzte Abschnitt schließlich beschreibt die in der Arbeit speziell verwendeten Darstellungen.

Das Thema in Kapitel 7 sind die Gleichungen, die die Tori als Untergruppen geeigneter  $F$ -Algebren definieren. Diese Gleichungen hängen ab von den Nullstellen der Polynome, die die entsprechenden Algebren erzeugen, also in unserem Fall den Minimalpolynomen der Eigenvektoren des baryzentrischen Punktes. Kapitel 7 analysiert die relevanten Relationen zwischen den Nullstellen und die zugehörigen Gleichungen in den Algebren und schafft eine Situation, so daß man die Ergebnisse aus Abschnitt 6.1 anwenden kann, um den Torus in die Gruppe einbetten zu können.

Die beiden Kapitel 8 und 9 stellen nun alle bisher beschriebenen relevanten Größen für die betrachteten Gruppen bezüglich der speziellen Darstellungen aus Abschnitt 6.6 zur Verfügung. Dies sind die vom baryzentrischen Punkt ausgewählten Wurzeln, die Minimalpolynome von gewissen Eigenvektoren des baryzentrischen Punktes sowie konkrete Beispiele für solche Eigenvektoren. Letztere sind insbesondere für den zweiten Teil der Arbeit wichtig, da dort die Bewertung bestimmter Koeffizienten eine wesentliche Rolle spielt und es daher relevant ist, welche freien Parameter für die Beschreibung der Eigenvektoren zur Verfügung stehen. Die vom baryzentrischen Punkt ausgewählten Wurzeln lassen sich für die Coxeterklasse uniform für alle betrachteten Wurzeltypen bestimmen (Kapitel 8), während für Konjugationsklassen, die kein Coxeterelement enthalten, die Ergebnisse in jedem einzelnen Fall anderes sind (Kapitel 9). Die Vorgehensweise zu ihrer Bestimmung ist jedoch immer dieselbe. In den Abschnitten, die sich mit den Minimalpolynomen beschäftigen, werden neben der Struktur derselben auch die im Hinblick auf die Kapitel 6 und 7 relevanten Relationen zwischen den Nullstellen der Minimalpolynome beschrieben. Der Abschnitt 9.4.4 schließlich ist als Einschub zu verstehen und macht auf einen Zusammenhang zwischen einem Minimalpolynom vom Grad 27 im Fall der Klasse  $9_p$  für ein Wurzelsystem vom Typ  $E_6$  und der Geradenkonfiguration einer nichtsingulären kubischen Fläche aufmerksam: Die in dieser Arbeit relevanten Relationen zwischen den 27 Nullstellen des entsprechenden Polynoms definieren auf der Nullstellenmenge dieselben Inzidenzrelationen, die zwischen den 27 Geraden einer kubischen Fläche das Schnittverhalten bzw. die Inklusion in Ebenen (Tritangentialebenen) beschreiben.

Kapitel 10 stellt das zentrale Kapitel des ersten Teils der Arbeit dar. Für jede betrachtete einfache spaltende Gruppe  $G$  wird für jede primitive Konjugationsklasse in der Weylgruppe ein Torus  $T$  (algebraisch) beschrieben und eine Einbettung nach  $G$  angegeben, so daß  $T$  ein maximaler Torus in  $G$  ist, der bei geeigneter Wahl eines Parameters anisotrop ist und der unter geeigneten Voraussetzungen des Grundkörpers  $F$  einen zyklischen Zerfällungskörper mit Galoisgruppe  $\Gamma_T$  hat und gerade auf die jeweilige primitive Konjugationsklasse in  $W$  als Element in  $H^1(\Gamma, W)$  abgebildet wird.

Kapitel 11 gibt eine kurze Übersicht über die Konstruktion sowie die wichtigsten Fakten des affinen Bruhat-Tits Gebäudes für einfache spaltende Gruppen nach Bruhat und Tits. In Abschnitt 11.5 wird ein alternativer Zugang zum Bruhat-Tits Gebäude in Termen von Kammersystemen vorgestellt. Der

letzte Abschnitt schließlich hat vorbereitenden Charakter und stellt eine Beschreibung von Kammern im Gebäude zur Verfügung, die an die Einbettung der Tori aus Kapitel 10 adaptiert ist und in Kapitel 13 zur Fixpunktbestimmung benutzt wird.

In Kapitel 12 werden die restlichen Aussagen zusammengetragen, die zur Fixpunktbestimmung relevant sind. Dies beinhaltet neben einigen Eigenschaften von Fixpunktmenge im Gebäude, die die Frage nach Fixpunkten auf die Frage nach punktweise fixierte Kammern reduziert, vor allem die Existenz geeigneter Elemente im topologisch unipotenten Anteil der Tori, deren Fixpunktmenge mit der des ganzen topologisch unipotenten Anteils übereinstimmt. Außerdem wird eine mit dem Bruhat-Tits Gebäude und den Darstellungen aus Abschnitt 6.6 kompatible  $\mathcal{O}$ -Struktur auf  $G$  und damit eine Kammer im Gebäude ausgezeichnet, die sogenannte Standardkammer, die stets von den Tori aus Kapitel 10 punktweise fixiert wird. Schließlich wird die Operation der  $\mathcal{O}$ -rationalen Punkte der Zusammenhangskomponente der Eins des Zentralisators des baryzentrischen Punktes auf den zur Standardkammer benachbarten Kammern untersucht, die eine untere Abschätzung der Fixpunktmenge der Tori erlaubt.

Kapitel 13 beschreibt einen Algorithmus zur Bestimmung der Fixpunktmenge der Tori aus Kapitel 10, der es aufgrund der expliziten Beschreibung der Tori prinzipiell erlaubt, die Fixpunktmenge mit Hilfe eines Computers zu berechnen. In den folgenden beiden Abschnitten werden weitere Reduktionsschritte durchgeführt, die es letzten Endes erlauben, die Fixpunkte der Tori anhand der einzelnen Eigenvektoren des baryzentrischen Punktes zu bestimmen. Die Vorgehensweise reduziert sich schließlich alleine auf Untersuchungen innerhalb des Wurzelsystems. Im Coxeterfall fixieren die Tori genau die Punkte der Standardkammer, während dies sonst nie der Fall ist. Die genaue Fixpunktmenge läßt sich aber nicht universell beschreiben, sie variiert mit dem Typ des Wurzelsystems und der jeweiligen primitiven Konjugationsklasse in der Weylgruppe.

## 1.4 Ausblick

Wir geben zum Schluß noch einen kurzen Ausblick auf Fragestellungen, die offen geblieben sind oder sich aus der vorliegenden Arbeit ergeben. Gruppen, deren Wurzelsystem vom Typ  $E_7$  oder  $E_8$  ist, werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Dies hat jedoch nur den Grund, daß die konkrete Bestimmung der Minimalpolynome und der ausgewählten Wurzeln, die zur Beschreibung der Tori und zur Bestimmung derer Fixpunkte notwendig sind, in diesen Fällen mit mehr Aufwand verbunden sind, da die zur Verfügung stehenden Darstellungen relativ hohe Dimension haben. Außerdem ist zu erwarten, daß im Fall der  $E_8$  im Coxeterfall mit drei Normbedingungen zu arbeiten ist, was den Nachweis der Existenz geeigneter Elemente im Torus ebenfalls komplizierter macht. Strukturell lassen sich alle Argumente dieser Arbeit jedoch für alle einfachen spaltenden Gruppen anwenden. Daher sind für die fehlenden Fälle  $E_7$  und  $E_8$  auch strukturell dieselben Ergebnisse zu erwarten wie für die anderen Gruppen.

Ein weiterer Ansatz besteht darin, die Forderung, daß der Grundkörper  $F$  geeignete Einheitswurzeln enthält, abzuschwächen oder ganz fallen zu lassen. Die Tori, die man erhält, haben dann einen zwar noch zahm, aber nicht mehr (im eigentlichen Sinne) rein verzweigten Zerfällungskörper, dessen unverzweigter Anteil durch das Hinzuadjungieren der entsprechenden Einheitswurzeln entsteht. Die Tori bleiben aber über der unverzweigten Teilerweiterung anisotrop. Da sich das Bruhat-Tits Gebäude unter unverzweigten Galoiserweiterungen „gut“ verhält, lassen sich Resultate eventuell durch Galoisabstieg aus dieser Arbeit ableiten. Als weitere Verallgemeinerung stellt sich die Frage, wie die Situation für Tori aussieht, die über unverzweigten Erweiterungen nicht mehr anisotrop sind. Ein anderes Problem besteht darin, sich mit nicht primitiven Tori oder nicht spaltenden Gruppen auseinander zu setzen.

Schließlich sei noch kurz die Annahme diskutiert, daß die Restklassencharakteristik von  $F$  als hinreichend gut im Sinne von Definition 12.12 angenommen wird. In den konkreten Fällen lassen sich die

Ausnahmeprimzahlen direkt bestimmen, und man stellt fest, daß es sich nur um sehr wenige Primzahlen handelt. In den Coxeterfällen der Typen  $F_4$  und  $E_6$  z.B. ist  $p = 13$  die einzige Ausnahmeprimzahl. Man könnte für diese wenigen Fälle die Situation so modifizieren, daß ebenfalls Aussagen über die Fixpunkt mengen möglich sind.

### Danksagung

Ich danke Herrn Professor Dr. Rainer Weissauer für die Vergabe dieses hochinteressanten Themas sowie für zahlreiche fachliche Diskussionen und Anregungen. Weiter danke ich Herrn Professor Weissauer und seinen Mitarbeitern für die überaus angenehme Atmosphäre am Lehrstuhl und ihre Hilfsbereitschaft in allen Situationen. Ganz besonderen Dank schulde ich Herrn Dr. Uwe Weselmann, der nicht nur immer bereit war, mir ein offenes Ohr zu leihen oder Korrektur zu lesen, sondern auch stets viele wertvolle Ratschläge bereit hielt.



Teil I

**Tori zu primitiven  
Konjugationsklassen in der  
Weylgruppe**





# Kapitel 2

## Die Strategie

In diesem Kapitel werden wir die Vorgehensweise erläutern, nach der wir eine für uns geeignete explizite Darstellung primitiver  $F$ -Tori in  $G$  mit zyklischem Zerfällungskörper gewinnen. Im ersten Abschnitt werden wir kurz die Klassifikation von  $F$ -Tori mit zyklischer Galoisgruppe  $\Gamma$  durch die erste Kohomologie  $H^1(\Gamma, W)$  von  $G$  mit Werten in der Weylgruppe  $W$  von  $G$  beschreiben. Im zweiten Abschnitt konstruieren wir im Fall, daß  $G$  einfach und von spaltendem Typ ist, zu gewissen Elementen aus  $H^1(\Gamma, W)$  die entsprechenden Tori, indem wir sie über ihre Liealgebra rekonstruieren.

### 2.1 Klassifikation von $F$ -Tori durch $H^1(\Gamma, W)$

Sei  $F$  ein (zunächst beliebiger) Körper, der geeignete Elemente enthalte (dies wird später genauer spezifiziert werden). Sei  $G$  eine spaltende, über  $F$  definierte lineare algebraische Gruppe,  $\mathbb{T}$  ein maximaler, spaltender Torus in  $G$  und  $W$  die Weylgruppe von  $G$ . Sei nun  $T$  ein weiterer maximaler, über  $F$  definierter Torus in  $G$ . Dann sind  $\mathbb{T}$  und  $T$  in  $G$  konjugiert, d.h. es existiert  $g \in G$  mit

$$T = g\mathbb{T}g^{-1}.$$

Sei nun  $\Gamma$  die absolute Galoisgruppe von  $F$ . Da  $\mathbb{T}$  und  $T$  über  $F$  definiert sind, gilt  $\sigma\mathbb{T} = \mathbb{T}$  und  $\sigma T = T$  für alle  $\sigma \in \Gamma$ . Es folgt  $g\mathbb{T}g^{-1} = \sigma g\mathbb{T}\sigma^{-1}g^{-1}$  oder

$$(g^{-1}g^\sigma)\mathbb{T}(g^\sigma g^{-1}) = \mathbb{T}.$$

Die Kokette  $(g^{-1}g^\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$  ist ein 1-Kozykel mit Werten im Normalisator  $N(\mathbb{T})$  von  $\mathbb{T}$ , definiert also eine Klasse in  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T}))$ . Wir ordnen nun  $T$  das Bild  $\gamma_T$  dieser Klasse unter der natürlichen Abbildung  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T})) \rightarrow H^1(\Gamma, W)$  zu. Da  $G$  eine spaltende Form ist, operiert  $\Gamma$  trivial auf  $W$ , und zwei Kozykel definieren genau dann dieselbe Klasse in  $H^1(\Gamma, W)$ , wenn sie in  $W$  (gewöhnlich) konjugiert sind. Operiert nun  $\Gamma$  über einen zyklischen Quotienten, so ist  $\gamma_T$  schon bestimmt durch die zu einem Erzeuger des Quotienten gehörige Komponente, entspricht also einer Konjugationsklasse in  $W$ .

Sei nun umgekehrt  $\gamma$  eine Klasse in  $H^1(\Gamma, W)$ . Wir haben die folgende Situation:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma, N(\mathbb{T})) & \longrightarrow & H^1(\Gamma, G) \\ \downarrow & & \\ H^1(\Gamma, W) & & \end{array}$$

Dann gilt  $\gamma = \gamma_T$  für einen  $F$ -Torus  $T$  genau dann, wenn ein Lift von  $\gamma$  nach  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T}))$  in  $H^1(\Gamma, G)$  berandet wird, also im Kern der Abbildung  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T})) \rightarrow H^1(\Gamma, G)$  liegt. Startet man nun mit einer beliebigen Konjugationsklasse  $\omega$  in der Weylgruppe, so gehört diese genau dann zu einem Torus mit

zyklischer Galoisgruppe, wenn es eine galoissche Kummererweiterung mit zugehöriger Galoisgruppe  $\Gamma_T$  gibt, so daß  $\omega$  (interpretiert als Klasse in  $H^1(\Gamma, W)$ , wobei  $\Gamma$  über den Quotienten  $\Gamma_T$  operiert) einen Lift nach  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T}))$  besitzt, der in  $H^1(\Gamma, G)$  berandet wird. Wir werden in dieser Arbeit durch die explizite Angabe entsprechender Tori zeigen, daß spezielle Klassen in  $W$  (nämlich die primitiven, siehe Abschnitt 3.8) zu einem Torus korrespondieren.

## 2.2 Die Liealgebra $\mathfrak{h}_T$ von $T$

Die Idee, den Torus  $T$  zu finden, besteht darin,  $T$  über seine Liealgebra  $\mathfrak{h}_T$  zu rekonstruieren. In diesem Abschnitt wird erläutert, wie sich  $\mathfrak{h}_T$  geeignet beschreiben läßt.

Wir starten also mit einer Konjugationsklasse  $\omega$  in  $W$  mit Repräsentant  $w$ . Sei  $n_w \in N(\mathbb{T})$  ein Repräsentant endlicher Ordnung von  $w$  (in der adjungierten Form  $G_{\text{ad}}$  existiert sogar ein Repräsentant, der dieselbe Ordnung hat wie  $w$ ). Da  $n_w$  halbeinfach ist, existiert  $g \in G$  mit  $\tilde{n}_w := gn_w g^{-1} \in \mathbb{T}$ . Wir setzen nun  $T := g\mathbb{T}g^{-1}$ .  $T$  ist ein maximaler Torus in  $G$ .

Wir werden ab jetzt annehmen, daß  $T$  über  $F$  definiert ist, um einen Kandidaten für  $T$  zu finden. Es existiert dann eine endliche Körpererweiterung  $E/F$  von minimalem Grad, so daß  $g$  bereits in  $G(E)$  liegt. Die Erweiterung  $E/F$  ist nicht notwendigerweise galoissch. Die explizite Beschreibung des Kandidaten für  $T$  zeigt a posteriori, daß  $T$  für eine geeignete Wahl von  $g$  in der Tat schon ein  $F$ -Torus ist, und daß sein Zerfällungskörper galoissch und zyklisch ist, falls  $F$  geeignete Elemente enthält.

Falls  $T$  über  $F$  definiert ist, wird  $T$  beschrieben durch die Klasse von  $(g^{-1}g^\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$  in  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T}))$ . Da  $G$  eine spaltende Form ist, ist die Operation von  $\Gamma$  auf  $W$  trivial. Daher vertauscht das Bild von  $a_\sigma := g^{-1}g^\sigma$  in  $W$  mit  $w$ , d.h.  $a_\sigma$  liegt im Zentralisator von  $w$ . Wir wollen nun die  $F$ -rationalen Punkte von  $T$  beschreiben, ohne das Element  $g$  zu kennen. Dies tun wir, indem wir  $T$  über seine Liealgebra  $\mathfrak{h}_T$  rekonstruieren.

Sei dazu  $v \in \mathfrak{t} := \text{Lie}(\mathbb{T})$  ein rationaler Eigenvektor von  $\text{Ad}(n_w)$  zum Eigenwert  $\zeta$  für eine geeignete primitive Einheitswurzel  $\zeta$ . Wir nehmen an, daß  $\zeta$  bereits in  $F$  liegt.  $\text{Ad}(g)(v)$  ist dann ein halbeinfacher Eigenvektor in  $\mathfrak{h}_T := \text{Ad}(g)(\mathfrak{t})$  zum Eigenwert  $\zeta$  für  $\text{Ad}(\tilde{n}_w)$ , aber nicht notwendigerweise rational. Wir schreiben nun  $\text{Ad}(g)(v)$  in der Form

$$\text{Ad}(g)(v) = \lambda \tilde{v}$$

für ein rationales  $\tilde{v}$  und ein  $\lambda \in \bar{F}^*$ . Es folgt

$$\text{Ad}(g^{-1}g^\sigma)(v) = \lambda^{-1} \lambda^\sigma v.$$

Diese Gleichung erlaubt es uns später, den Typ von  $T$  zu bestimmen. Man beachte noch, daß  $\lambda^{-1} \lambda^\sigma$  invariant ist unter Ersetzung von  $v$  und  $\tilde{v}$  durch skalare Vielfache.

Wegen  $\text{Ad}(\tilde{n}_w)(\tilde{v}) = \zeta \tilde{v}$  und  $\tilde{n}_w \in \mathbb{T}$  liegt  $\tilde{v}$  gerade in der Summe der Wurzelräume von  $\mathfrak{g}$ , die zu den Wurzeln  $\alpha$  gehören mit  $\alpha(\tilde{n}_w) = \zeta$ . Denn wegen  $\tilde{n}_w \in \mathbb{T}$  operiert  $\text{Ad}(\tilde{n}_w)$  auf dem Wurzelraum zur Wurzel  $\alpha$  ja gerade durch  $\alpha(\tilde{n}_w)$ . Unser Ansatz besteht nun darin, den Vektor  $\tilde{v}$  zu finden. Wir suchen also in  $\bigoplus_{\alpha \text{ mit } \alpha(\tilde{n}_w) = \zeta} \mathfrak{u}_\alpha$  ein halbeinfaches Element.

## 2.3 Von $\mathfrak{h}_T$ nach $T$

Wir wollen nun mit Hilfe eines halbeinfachen, rationalen Eigenvektors  $\tilde{v} \in \mathfrak{h}_T$  von  $\text{Ad}(\tilde{n}_w)$  zum Eigenwert  $\zeta$  Elemente in  $T$  bzw.  $T(F)$  konstruieren.

Sei dazu  $\rho$  eine treue rationale Darstellung von  $G$  und  $d\rho$  die assoziierte Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Wir identifizieren ab jetzt  $G$  mit  $\rho(G) \subset GL(V)$  und  $\mathfrak{g}$  mit  $d\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{M}(V)$ . Motiviert wird unsere Vorgehensweise von der Exponentialfunktion: Für ein Element  $x \in \mathfrak{g}$  liegt (unter geeigneten Voraussetzungen)  $\exp(x)$  in  $G$ . Als Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums besitzt  $x$  ein Minimalpolynom  $\mu$ . Daher ist  $\exp(x)$  ein Polynom in  $x$ , dessen Grad kleiner als der von  $\mu$  ist.

Unser Ansatz besteht darin, Polynome  $P$  in  $\tilde{v}$  zu betrachten und die Bedingungen zu bestimmen, denen die Koeffizienten von  $P$  genügen müssen, damit  $P(\tilde{v})$  in  $G$  liegt. Wählt man die Koeffizienten der Polynome dabei in einer Erweiterung  $E/F$ , so beschreibt man die  $E$ -wertigen Punkte von  $G$ . Die Polynome  $P$  kommen also im wesentlichen aus der Algebra  $E[X]/\mu$ . Es wird sich herausstellen, daß die Koeffizientenbedingungen bezüglich  $\tilde{v}$  gewissen Normbedingungen in  $E[X]/\mu$  entsprechen und eine algebraische Beschreibung eines Untertorus  $T_{\tilde{v}}$  von  $T$  liefern.

Es gilt nicht immer  $T_{\tilde{v}} = T$ . Dies ist in manchen Fällen so, in anderen hat man jedoch eine echte Inklusion. In diesen Fällen läßt sich  $T$  nur aus mehreren Komponenten aufbauen, die alle die Form  $T_x$  haben für einen halbeinfachen, rationalen Eigenvektor in  $\mathfrak{h}_T$  von  $\text{Ad}(\tilde{n}_w)$ . Es gilt also dann  $T \cong T_{x_1} \times \dots \times T_{x_k}$  für entsprechende  $x_i$ . Da alle  $x_i$  aber in der Liealgebra eines Torus liegen, kommutieren sie paarweise. Diese Eigenschaft ist wesentlich bei der Wahl der  $x_i$ .

## 2.4 Beschränkung auf topologisch unipotente Elemente

Wir werden die von uns gesuchten Tori für die Gruppen konstruieren, die durch die Darstellungen von Abschnitt 6.6 beschrieben werden. Für die Konstruktion der Tori werden wir in der adjungierten Gruppe arbeiten (siehe Kapitel 4), was aber keine Rolle spielt, da die Weylgruppe, das Wurzelsystem sowie die Liealgebra der Gruppe, also die nach den Abschnitten 2.1 und 2.2 zur Konstruktion relevanten Größen, nicht von der Isogenieklasse der Gruppe abhängen.

Im zweiten Teil der Arbeit, in dem es um die Bestimmung der Fixpunkte geht, reduzieren wir uns auf die Untergruppe der topologisch unipotenten Elemente der primitiven Tori. Dies hat zwei wesentliche Vorteile: Diese Untergruppe fixiert nach Korollar 13.6 eine Kammer im affinen Bruhat-Tits Gebäude punktweise, so daß wir wegen Korollar 13.6 die Aussage 12.4 anwenden können. Außerdem ist das Ergebnis, also die Fixpunktmenge des topologisch unipotenten Anteils des Torus, nach Korollar 11.6 unabhängig von der Isogenieklasse der Gruppe. Die Fixpunktmenge des ganzen Torus ist in der seines topologisch unipotenten Anteils enthalten und variiert mit der Isogenieklasse von  $G$ .



# Kapitel 3

## Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir eine Reihe von Aussagen in der Form zusammen, wie sie im weiteren Verlauf benötigt werden.

### 3.1 Halbeinfache und reductive Gruppen

Sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\bar{F}$  und  $R$  das Radikal von  $G$ , d.h. die größte Untergruppe von  $G$ , die zusammenhängend, normal und auflösbar ist.  $G$  heißt *halbeinfach*, wenn  $R$  trivial ist, und *reduktiv*, wenn  $R$  kein nichttriviales unipotentes Element besitzt. Ist  $G$  reduktiv, so ist  $R$  die Zusammenhangskomponente der Eins des Zentrums  $Z(G)$  von  $G$  und ein zentraler Torus in  $G$ , und es gilt  $G = R \cdot [G, G]$ . Der Durchschnitt von  $R(G)$  mit  $[G, G]$  ist endlich, und die derivierte Gruppe  $[G, G]$  ist halbeinfach.

### 3.2 (Ko-)Charaktere und Paarung

Sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe und  $T$  ein maximaler Torus in  $G$ . Ein *Charakter* von  $T$  ist ein Morphismus von  $T$  in die multiplikative Gruppe  $\mathbb{G}_m$ . Die Menge aller Charaktere von  $T$  wird mit  $X^*(T)$  bezeichnet.  $X^*(T)$  ist eine freie abelsche Gruppe, deren Rang gleich der Dimension von  $T$  ist.

Ein *Kocharakter* von  $T$  ist ein Morphismus von  $\mathbb{G}_m$  nach  $T$ .  $X_*(T)$  bezeichnet die freie abelsche Gruppe aller Kocharaktere. Ihr Rang stimmt mit dem von  $X^*(T)$  überein.

Die Zusammensetzung eines Charakters nach einem Kocharakter von  $T$  ist ein Endomorphismus von  $\mathbb{G}_m$ . Die Endomorphismengruppe von  $\mathbb{G}_m$  ist isomorph zu  $\mathbb{Z}$  vermöge  $n \mapsto (x \mapsto x^n)$ . Wir erhalten eine Paarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X^*(T) \times X_*(T) \rightarrow \mathbb{Z}$ , die nichtausgeartet ist und daher Isomorphismen  $X^*(T) \cong \text{Hom}(X_*(T), \mathbb{Z})$  und  $X_*(T) \cong \text{Hom}(X^*(T), \mathbb{Z})$  induziert.

### 3.3 Liealgebra

Sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe. Der Tangentialraum im neutralen Element trägt die Struktur einer Liealgebra und wird mit  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  bezeichnet. Jeder Morphismus algebraischer Gruppen liefert durch Differentiation einen Morphismus der zugehörigen Liealgebren. Man erhält also einen kovarianten Funktor von der Kategorie der algebraischen Gruppen in die der Liealgebren.

Für ein festes Element  $g \in G$  ist die Konjugation  $\text{Int}(g)$  mit  $G$  ein Automorphismus von  $G$ . Die Ableitung von  $\text{Int}(g)$  wird mit  $\text{Ad}(g)$  bezeichnet und ist ein Automorphismus der Liealgebra  $\mathfrak{g}$ . Wir erhalten also

eine Abbildung  $\text{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(\mathfrak{g})$ .  $\text{Ad}$  ist sogar wieder ein Morphismus algebraischer Gruppen und kann erneut abgeleitet werden. Der entstehende Morphismus  $\text{ad} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  von Liealgebren ist gegeben durch  $\text{ad}(x)(y) = [xy]$ , wobei  $[\ , ]$  die Lieklammer von  $\mathfrak{g}$  bezeichnet.

### 3.4 Adjungierte Darstellung und (Ko-)Wurzeln

Eine zusammenhängende halbeinfache lineare algebraische Gruppe  $G$  operiert auf ihrer Liealgebra durch die adjungierte Darstellung  $\text{Ad}$ . Für einen Torus  $T$  ist die Menge  $\text{Ad}(T)$  eine Menge von paarweise kommutierenden Automorphismen von  $\mathfrak{g}$ , ist also simultan diagonalisierbar. Wir können den endlich-dimensionalen Vektorraum  $\mathfrak{g}$  daher schreiben als

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha \in X^*(T)} V_\alpha$$

für  $V_\alpha = \{v \in \mathfrak{g} \mid \text{Ad}(t)v = \alpha(t)v \text{ für alle } t \in T\}$ . Die  $\alpha \in X^*(T)$ , für die  $V_\alpha$  nichttrivial ist, heißen *Gewichte der adjungierten Darstellung*. Die nichttrivialen Elemente unter den Gewichten heißen *Wurzeln von  $G$  bezüglich  $T$*  und bilden ein Wurzelsystem  $\Phi$  im Sinne von [Hum1][9.2]. Die Liealgebra  $\mathfrak{t}$  von  $T$  ist genau der Raum  $V_1$ . Die Dimension von  $\mathfrak{t}$  ist gleich der Dimension von  $T$ .

Der Torus  $T$  operiert auf seiner Liealgebra  $\mathfrak{t}$  durch die adjungierte Darstellung trivial. Daher hängt  $\text{Ad}(n)|_{\mathfrak{t}}$  für ein Element  $n$  im Normalisator von  $T$  nur von seinem Bild in  $N(T)/T$  ab. Für eine Klasse  $w \in N(T)/T$  mit Repräsentant  $n \in N(T)$  und ein  $v \in \mathfrak{t}$  schreiben wir daher kurz  $wv$  für  $\text{Ad}(n)(v)$ .

Zu jeder Wurzel  $\alpha \in \Phi$  gibt es einen eindeutigen Kocharakter  $\alpha^\vee$  mit  $\langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2$ . Der Kocharakter  $\alpha^\vee$  heißt *Kowurzel von  $\alpha$* . Die Menge aller Kowurzeln wird mit  $\Phi^\vee$  bezeichnet und bildet ebenfalls ein Wurzelsystem.

### 3.5 Affine Gruppenschemata und Definitionskörper

Sei  $R$  ein kommutativer Ring mit Eins und  $A$  eine  $R$ -Algebra. Seien  $\pi^* : A \rightarrow A \otimes_R A, \iota^* : A \rightarrow A, e : A \rightarrow A$  Algebromorphismen, die die „Gruppenaxiome“ Assoziativität, Existenz des Inversen und Existenz des neutralen Elements erfüllen (vgl. [Sp2][2.1.3,2.1.5]).  $A$  heißt dann *affines Gruppenschema* über  $R$ . Sei nun  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über dem algebraisch abgeschlossenen Körper  $\bar{F}$ , der  $R$  enthält.  $G$  hat eine  $R$ -Struktur (bzw. ist über  $R$  definiert bzw. heißt  $R$ -Gruppe), wenn für die Algebra der  $\bar{F}$ -regulären Funktionen  $\bar{F}[G]$  von  $G$

$$\bar{F}[G] = A \otimes_R \bar{F}$$

gilt für ein affines Gruppenschema  $A$  über  $R$  und die Gruppenoperationen von  $G$  gegeben sind als  $\pi^* \otimes \text{id}, \iota^* \otimes \text{id}, e \otimes \text{id}$ . Für jede  $R$ -Algebra  $E \subset \bar{F}$  bezeichnet in diesem Fall  $E[G]$  die Algebra  $E[G] = A \otimes_R E$  und  $G(E)$  die Menge der Homomorphismen  $E[G] \rightarrow E$ .  $\pi^*$  induziert eine Gruppenstruktur (als abstrakte Gruppe) auf  $G(E)$ .  $G(E)$  ist dann die Gruppe der  $E$ -rationalen Punkte von  $G$  mit Funktionenalgebra  $E[G]$ . Ein Morphismus zwischen zwei  $R$ -Gruppen  $G$  und  $H$  heißt über  $R$  definiert, wenn die assoziierte Abbildung zwischen  $\bar{F}[H]$  und  $\bar{F}[G]$  schon  $R[H]$  nach  $R[G]$  abbildet.

Sei  $F$  ein Unterkörper von  $\bar{F}$ . Für eine  $F$ -Gruppe  $G$  und einen  $F$ -Torus  $T$  in  $G$  sind  $X_F^*(T)$  bzw.  $X_{*F}(T)$  die  $F$ -Morphismen in  $X^*$  bzw.  $X_*$ . Analog sind  $\Phi_F$  und  $\Phi_F^\vee$  definiert.

Eine  $F$ -Gruppe  $G$  *spaltet* oder *zerfällt über  $F$* , wenn es einen maximalen Torus  $T$  in  $G$  gibt, der über  $F$  isomorph ist zu dem Produkt  $\mathbb{G}_m \times \dots \times \mathbb{G}_m$  mit  $\dim T$  Faktoren. Einen solchen *spaltenden* Torus

bezeichnen wir mit  $\mathbb{T}$ . Für einen spaltenden  $F$ -Torus gilt  $X_F^* = X^*$  und  $\Phi_F = \Phi$  und eine analoge Aussage für die Kocharaktere und Kowurzeln.

Sei  $G$  eine  $F$ -Gruppe. Dann ist die Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  ebenfalls über  $F$  definiert in dem Sinne, daß  $\mathfrak{g}$  als  $\bar{F}$ -Vektorraum durch Koeffizientenerweiterung eines  $F$ -Vektorraums entsteht und die Lieklammer mit dieser  $F$ -Struktur veträglich ist. Weiter existiert ein maximaler Torus  $T$  in  $G$ , der über  $F$  definiert ist. Der Normalisator und Zentralisator von  $T$  sind dann ebenso über  $F$  definiert wie ihre Liealgebren. Ist  $G$  halbeinfach und spaltend mit Wurzelsystem  $\Phi$  bezüglich eines maximalen spaltenden Torus  $\mathbb{T}$ , so sind die Untergruppen  $U_\alpha$  bzw. die Unterhalbgebren  $\mathfrak{u}_\alpha$  für alle  $\alpha \in \Phi$  über  $F$  definiert.

### 3.6 Weylgruppe

Sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe,  $T$  ein maximaler Torus in  $G$  und  $N(T)$  sein Normalisator. Der Quotient  $N(T)/Z(T)$  ist endlich und als abstrakte Gruppe unabhängig von der Wahl von  $T$ , da alle maximalen Tori in  $G$  konjugiert sind. Die Gruppe  $N(T)/Z(T)$  heißt *Weylgruppe* von  $G$  und wird mit  $W_G$  bezeichnet. Ist  $G$  reduktiv, so ist  $Z(T) = T$  und  $W_G = N(T)/T$ .  $W_G$  operiert auf  $T$  und damit auf  $X^*(T), X_*(T), \Phi, \Phi^\vee$  und  $\mathfrak{t}$ . Für die Paarung  $X^*(T) \times X_*(T) \rightarrow \mathbb{Z}$  gilt

$$\langle w(\alpha), w^{-1}(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$$

für alle  $\alpha \in X^*(T), \beta \in X_*(T)$  und  $w \in W$ .

Sei nun  $G$  eine reductive  $F$ -Gruppe und  $S$  ein maximaler über  $F$  spaltender Torus in  $G$ . Dann sind  $N(S)$  und  $Z(S)$  ebenfalls über  $F$  definiert und damit auch die *relative Weylgruppe*  $W_{G,F} := N(S)/Z(S)$ .  $W_{G,F}$  ist eine Untergruppe von  $W_G$  und operiert auf  $X_F^*(T), X_{*F}(T), \Phi_F, \Phi_F^\vee, \mathfrak{t}(F)$ . Ist  $G$  eine spaltende Gruppe, so gilt  $W_{G,F} = W_G$ .

### 3.7 Anisotropie von Tori und Weylgruppenelementen

Der Begriff „anisotrop“ wird in zwei Kontexten verwendet: für  $F$ -Tori und Elemente der Weylgruppe. Proposition 3.2 besagt, daß sich die beiden Begriffe unter geeigneten Voraussetzungen entsprechen.

Sei  $G$  eine zusammenhängende, reductive, spaltende, über einem Körper  $F$  definierte lineare algebraische Gruppe und  $\mathbb{T}$  ein maximaler spaltender  $F$ -Torus in  $G$ . Sei  $W = N(\mathbb{T})/\mathbb{T}$  die Weylgruppe von  $G$  und  $\Phi$  das Wurzelsystem von  $G$ .

- (i) Sei  $T$  ein weiterer maximaler, über  $F$  definierter Torus in  $G$  mit Zerfällungskörper  $E$ . Der Torus  $T$  heißt *anisotrop*, wenn  $T$  keinen nichttrivialen über  $F$  spaltenden spaltenden Untertorus besitzt. Dies ist äquivalent dazu, daß  $\Gamma := \text{Gal}(E/F)$  fixpunktfrei auf dem Kocharaktergitter  $X_*(T)$  von  $T$  operiert, also daß

$$X_*(T)^\Gamma = 0$$

gilt.

Sei nun  $E/F$  zyklisch und  $w_T \in W$  klassifiziere  $T$  wie in Abschnitt 2.1 beschrieben. Der durch die Konjugation  $gTg^{-1} = \mathbb{T}$  gegebene Isomorphismus  $T \cong \mathbb{T}$  induziert einen Isomorphismus der Kocharaktergitter  $X_*(T) \cong X_*(\mathbb{T})$ . Dieser Isomorphismus ist  $\Gamma$ -äquivariant, wenn man einen Erzeuger  $\sigma$  von  $\Gamma$  vermöge  $w_T$  auf  $X_*(\mathbb{T})$  operieren läßt.  $T$  ist also genau dann anisotrop, wenn

$$X_*(\mathbb{T})^{w_T} = 0$$

gilt.

(ii) Ein Element  $w \in W$  heißt *anisotrop*, wenn

$$\mathbb{Z}[\Phi^\vee]^w = 0$$

gilt.

**Lemma 3.1.** *Sei  $M$  ein torsionsfreier  $\mathbb{Z}$ -Modul und  $N \subset M$  ein Untermodul von endlichem Index. Sei weiter  $A$  eine Gruppe von Automorphismen von  $M$ , die  $N$  invariant läßt. Dann gilt*

$$M^A = 0 \iff N^A = 0.$$

**Beweis:** Die eine Richtung ist klar wegen  $N \subset M$ . Sei also  $x \in M$  Fixpunkt von  $A$ . Da  $M/N$  endlich ist, liegt ein ganzzahliges Vielfaches  $mx$  von  $x$  in  $N$ . Die Operation von  $A$  ist  $\mathbb{Z}$ -linear. Daher ist  $mx$  ebenfalls Fixpunkt von  $A$ , also gilt nach Voraussetzung  $mx = 0$ . Es folgt  $x = 0$ .  $\square$

**Proposition 3.2.** *Seien  $G, \mathbb{T}, T$  und  $W$  wie oben. Sei weiter  $\text{Gal}(E/F)$  zyklisch. Dann ist  $T$  anisotrop genau dann, wenn  $w_T$  anisotrop ist.*

**Beweis:** Wir müssen zeigen:

$$X_*(\mathbb{T})^{w_T} = 0 \iff \mathbb{Z}[\Phi^\vee]^{w_T} = 0.$$

Da  $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$  endlichen Index in  $X_*(\mathbb{T})$  hat, folgt die Aussage aus Lemma 3.1.  $\square$

**Bemerkung 3.3.** *Ein Element  $w \in W$  ist genau dann anisotrop, wenn kein Eigenwert von  $w$  bezüglich der Operation auf  $\mathfrak{t}$  gleich eins ist.*

**Beweis:** Die Abbildung  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_a \rightarrow \mathfrak{t}$ , die gegeben ist durch

$$\beta \otimes x \mapsto (d\beta)(x),$$

ist ein  $W$ -äquivarianter Isomorphismus, wenn  $W$  auf der linken Seite über den Faktor  $X_*$  operiert. Dies folgt aus der Isomorphie von  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_m \cong \mathbb{T}$  (man identifiziere  $\mathbb{T}$  mit  $\mathbb{G}_m^{\dim \mathbb{T}}$  und benutze Proposition 4.5) und die Funktorialität der Ableitung.  $\square$

**Bemerkung 3.4.** *Ein Coxetererelement ist immer anisotrop.*

**Beweis:** Sei  $w$  ein Coxetererelement in  $W$ . Die Eigenwerte von  $w$  auf  $\mathbb{Z}[\Phi] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  sind nach [Hum3][3.16] alle von 1 verschieden. Also hat  $w$  keinen Fixpunkt in  $\mathbb{Z}[\Phi] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  und auch nicht in  $\mathbb{Z}[\Phi]$ . Dualisieren liefert das gewünschte Ergebnis.  $\square$

### 3.8 Primitivität von Tori und Weylgruppenelementen

Der Begriff „primitiv“ kennzeichnet ursprünglich eine Eigenschaft von Weylgruppenelementen, die in einer entsprechenden Situation auf  $F$ -Tori übertragen wird.

Sei die Situation wie in Abschnitt 3.7. Ein anisotropes Element  $w \in W$  heißt *primitiv*, wenn

$$|H^0(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee])| = |H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi^\vee])|$$

gilt. Aufgrund der Anisotropie von  $w$  ist die Abbildung  $H^0(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee]) \rightarrow H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi^\vee])$  in der langen exakten Kohomologiesequenz bereits injektiv, deshalb ist die Primitivität äquivalent dazu, daß obige Abbildung ein Isomorphismus ist. In der Situation von 3.7(i) nennt man einen maximalen  $F$ -Torus  $T$  *primitiv*, wenn das zugehörige  $w_T \in W$  primitiv ist.



**Proposition 3.5.** *Sei  $w \in W$  primitiv. Dann steigt  $w$  in kein echtes Subsystem von  $\Phi$  ab, d.h. es existiert kein echtes Subsystem  $\Phi_1$  von  $\Phi$ , so daß die Konjugationsklasse von  $w$  einen Vertreter aus der Weylgruppe  $W_1 = W(\Phi_1) \subset W$  von  $\Phi_1$  besitzt.*

**Beweis:** Es genügt, die Aussage für maximale Subsysteme  $\Phi_1$  von  $\Phi$  zu zeigen. Ein solches entsteht, indem eine Wurzel  $\alpha$  aus dem affinen Dynkindiagramm gestrichen wird. Ein maximales Subsystem hat stets denselben Rang wie  $\Phi$ . Eine Wurzel heißt speziell, wenn das durch Streichen der Wurzel  $\alpha$  entstandene maximale Subsystem  $\Phi_\alpha$  wieder gleich  $\Phi$  ist. Äquivalent dazu ist, daß  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha]^* = \mathbb{Z}[\Phi]^*$  gilt. Sei  $\alpha^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \alpha$  und  $Q(I) = \mathbb{Z}[I]^* / \mathbb{Z}[I^\vee]$  für eine Teilmenge  $I$  von  $\Phi$ . Dann ist eine Wurzel  $\alpha \in \Delta$  genau dann speziell, wenn  $b_\alpha = 1$  gilt, denn da  $\Delta(\Phi_\alpha)$  entsteht, indem man in  $\Delta(\Phi)$  die Wurzel  $\alpha$  durch  $\alpha^+$  ersetzt, hätte sonst  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha]$  einen echten Index in  $\mathbb{Z}[\Phi]$ . Sei nun  $w \in W$  anisotrop, und  $w$  steige ab in ein echtes maximales Subsystem  $\Phi_\alpha$ , d.h.  $b_\alpha > 1$ . Da der Rang von  $\Phi_\alpha$  mit dem von  $\Phi$  übereinstimmt, hat  $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$  endlichen Index in  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha^\vee]$  und  $\mathbb{Z}[\Phi]^*$  endlichen Index in  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha]^*$ . Wegen der Anisotropie von  $w$  und Lemma 3.1 folgt  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha^\vee]^{(w)} = 0$  (bzw.  $(\mathbb{Z}[\Phi_\alpha]^*)^{(w)} = 0$ ). Die lange exakte Kohomologiesequenz zu  $0 \rightarrow \mathbb{Z}[\Phi_\alpha^\vee] \rightarrow \mathbb{Z}[\Phi_\alpha]^* \rightarrow Q(\Phi_\alpha) \rightarrow 0$  mit  $Q(\Phi_\alpha) = \mathbb{Z}[\Phi_\alpha^\vee] / \mathbb{Z}[\Phi]^*$  impliziert dann, daß die Abbildung  $Q(\Phi_\alpha) \rightarrow H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi_\alpha^\vee])$  injektiv ist. Man beachte dabei, daß die Weylgruppe  $W(\Phi)$  trivial auf  $Q(\Phi)$  operiert, da dies schon für die  $W$  erzeugenden Spiegelungen der Fall ist:  $s_\alpha(\beta) - \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \alpha^\vee$  und  $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$  nach Definition von  $\mathbb{Z}[\Phi]^*$ . Wir zeigen nun:  $|H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi_\alpha^\vee])| = |H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi^\vee])|$  und  $Q(\Phi) \subsetneq Q(\Phi_\alpha)$ . Dies widerspricht dann der Primitivität von  $w$ .

Für die Gleichheit der Kardinalitäten der beiden  $H^1$  benutze man den Herbrand-Quotienten. Da  $\mathbb{Z}[\Phi]$  bzw.  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha]$  endlich erzeugt sind, existiert für beide Moduln der Herbrand-Quotient. Außerdem stimmen die beiden Herbrand-Quotienten überein, da  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha]$  endlichen Index in  $\mathbb{Z}[\Phi]$  hat. Wegen der Anisotropie von  $w$  sind aber die jeweiligen  $H^0$  als Quotienten der  $H^0$  trivial. Daher stimmen die Herbrand-Quotienten mit den Kardinalitäten der jeweiligen  $H^1$  überein, die also gleich sein müssen. Nun zur zweiten Aussage. Es gilt offensichtlich  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha^\vee] \subset \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$  und  $\mathbb{Z}[\Phi]^* \subset \mathbb{Z}[\Phi_\alpha]^*$ . Daher genügt es,  $\mathbb{Z}[\Phi]^* \subsetneq \mathbb{Z}[\Phi_\alpha]^*$  bzw.  $\mathbb{Z}[\Phi_\alpha] \subsetneq \mathbb{Z}[\Phi]$  zu zeigen. Letzteres gilt aber, da  $\alpha$  nach Annahme nicht speziell ist.  $\square$

### 3.9 Affine Spiegelungen und affine Weylgruppe

Sei  $V$  ein reeller euklidischer Vektorraum mit Skalarprodukt  $(\ , \ )$ . Eine Spiegelung ist ein Endomorphismus  $s$  von  $V$ , der einen von null verschiedenen Vektor  $\beta$  auf  $-\beta$  abbildet und die zu  $\beta$  senkrechte Hyperebene  $H_\beta$  punktweise fixiert.  $s_\beta$  läßt sich darstellen in der Form

$$s_\beta(v) = v - \frac{2(v, \beta)}{(\beta, \beta)} \beta.$$

Offensichtlich läßt  $s_\beta$  das Skalarprodukt invariant, ist also ein orthogonaler Automorphismus von  $V$ .

Eine affine Spiegelung ist eine Spiegelung an einer Hyperebene, die nicht notwendigerweise den Nullpunkt enthält. Eine affine Spiegelung ist demzufolge im allgemeinen nicht linear, sondern die Komposition einer (linearen) Spiegelung und einer Translation. Sei also  $t(v)$  die Translation um  $v \in V$  und  $\beta^\vee := \frac{2\beta}{(\beta, \beta)}$  für  $\beta \in V$ . Jede affine Hyperebene hat die Form

$$H_{\beta, k} := \{v \in V \mid (v, \beta) = k\}$$

für ein  $\beta \in V$  und ein  $k \in \mathbb{R}$ . Die Hyperebenen  $H_{\beta, 0}$  sind genau die linearen Hyperebenen, die den Nullpunkt enthalten.  $H_{\beta, k}$  entsteht durch Translation um  $\frac{k}{2}\beta^\vee$  aus  $H_{\beta, 0}$ . Die affine Spiegelung  $s_{\beta, k}$  läßt sich darstellen durch

$$s_{\beta, k}(v) = v - ((v, \beta) - k)\beta^\vee.$$

Es gilt

$$s_{\beta, k} = t(k\beta^\vee) \circ s_\beta.$$

In unserem Fall ist  $V = X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  der von den Kocharakteren erzeugte Vektorraum. Die (endliche) Weylgruppe  $W_G$  von  $G$  operiert auf  $X_*$  und damit auf  $V$ . Sei  $(\cdot, \cdot)$  ein  $W_G$ -invariantes Skalarprodukt auf  $V$ . Die kanonische Paarung zwischen  $X^*$  und  $X_*$  erlaubt eine Identifikation von  $X^*$  mit  $X_*^{dual}$ . Vermöge des Skalarprodukts läßt sich dann  $X_*^{dual} \cong X^*$  mit einer Teilmenge von  $V$  identifizieren. Wir bezeichnen das Bild von  $\Phi$  unter dieser Identifikation ebenfalls mit  $\Phi$ . Sei  $\mathcal{H}$  die Menge der Hyperebenen

$$\mathcal{H} = \{H_{\alpha,k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$$

und  $W_{\text{aff}}$  die von allen Spiegelungen an affinen Hyperebenen in  $\mathcal{H}$  erzeugte Gruppe.  $W_{\text{aff}}$  heißt *affine Weylgruppe*. Nach [Hum3][4.2] gilt

$$W_{\text{aff}} \cong \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rtimes W,$$

wo  $W$  die von den linearen Spiegelungen  $s_\alpha, \alpha \in \Phi$  erzeugte Untergruppe ist und  $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$  als Gruppe von Translationen operiert. Nach [Ca3][1.9] stimmen die Operationen von  $W$  und  $W_G$  auf  $V$  überein. In der Tat gilt  $W \cong W_G$ .

### 3.10 Restriktion der Skalare

Sei  $E/F$  eine endliche separable Körpererweiterung und  $G$  eine über  $E$  definierte zusammenhängende lineare algebraische Gruppe. Die über  $F$  definierte Gruppe  $\text{Res}_{E/F} G$  ist charakterisiert durch

$$\text{Res}_{E/F} G(L) = G(L \otimes_F E)$$

für jede  $F$ -Algebra  $L$  und geht aus  $G$  hervor durch *Restriktion der Skalare*. Ist  $E$  ein Körper, existiert ein über der normalen Hülle  $E^n$  von  $E$  definierter Isomorphismus

$$\text{Res}_{E/F} G \cong G^{[E:F]},$$

und es gilt

$$\text{Res}_{E/F} G(F) = G(E).$$

Obiger Isomorphismus ist induziert von dem Isomorphismus  $\bar{F} \otimes_F E \rightarrow \bigoplus_{\sigma \in \text{Hom}_F(E, \bar{F})} x \otimes e \mapsto (x\sigma(e))_\sigma$ . Ist  $F'$  ein Zwischenkörper, so hat man einen über  $E^n$  definierten Isomorphismus

$$\text{Res}_{F'/F} \text{Res}_{E/F'}(G) \cong \text{Res}_{E/F}(G).$$

Sei nun speziell  $G = \mathbb{G}_m$ . Dann ist  $\text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$  ein  $[E:F]$ -dimensionaler Torus. Der Zerfällungskörper von  $\text{Res}_{E/F} \mathbb{G}_m$  ist die normale Hülle  $E^n$  von  $E$  über  $F$ .

Sei wieder  $E$  eine endliche separable Körpererweiterung von  $F$ . Die lineare algebraische Gruppe  $\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$  ist definiert durch die folgende exakte Sequenz algebraischer Gruppen:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \longrightarrow & \text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \text{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m) & \longrightarrow & \mathbb{G}_m \longrightarrow 1 \\ & & & & \downarrow \iota & & \parallel \\ & & & & \mathbb{G}_m^{[E:F]} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{G}_m \end{array}$$

Dabei ist  $\iota$  der über  $E^n$  definierte Isomorphismus von oben und  $\phi$  gegeben durch  $(x_\sigma) \mapsto \prod x_\sigma$ .  $\sigma$  durchläuft dabei  $\Gamma := \text{Hom}_F(E, \bar{F})$ . Die Abbildung  $\iota$  wird  $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -äquivariant, wenn  $\text{Gal}(\bar{F}/F)$  vermöge

$$\tau((x_\sigma)_\sigma) = (\tau^{-1}(x_{\tau\sigma}))_\sigma$$

auf  $\mathbb{G}_m^{[E:F]} = (\bar{F}^*)^{[E:F]}$  operiert. Alternativ läßt sich  $\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$  über die Determinantenfunktion erklären.  $\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)(L) = (L \otimes_F E)^*$  operiert auf dem  $L$ -Modul  $L \otimes_F E$  durch Multiplikation als

Gruppe linearer Modulautomorphismen. Sei  $\phi_L = \phi_{L/F} : GL(L \otimes_F E) \rightarrow L^*$  die Determinante auf  $GL(L \otimes_F E)$ . Dann gilt für die  $L$ -wertigen Punkte von  $\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$

$$\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)(L) = \text{Kern}(\phi_L).$$

Da  $\phi_F$  mit der Körperrnorm  $N_{E/F}$  von  $E$  über  $F$  übereinstimmt, gilt speziell

$$\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)(F) = \{x \in E^* \mid N_{E/F}(x) = 1\}.$$

$\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$  ist ein anisotroper Torus vom Rang  $[E : F] - 1$  und heißt *Norm-Torus* zu  $E/F$ .

**Lemma 3.6.** *Seien  $E/F'/F$  separable Körpererweiterungen und  $L$  eine  $F$ -Algebra. Wir fassen  $\text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})$  als Untergruppe von  $\text{Hom}_{F'}(E \otimes_F L, \bar{F} \otimes_F L)$  auf, indem wir  $\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})$  auf  $E \otimes_F L$  über den Faktor  $E$  operieren lassen. Sei nun  $T$  die lineare algebraische Gruppe über  $F$ , die definiert ist durch*

$$T(L) = \{x \in E \otimes_F L \mid \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} \sigma(x) = 1\}.$$

Dann ist  $T$  isomorph zu  $\text{Res}_{F'/F} \text{Res}_{E/F'}^1(\mathbb{G}_m)$ .

**Beweis:** Sei  $L$  eine  $F$ -Algebra und  $L' = L \otimes_F F'$ . Wegen  $\text{Res}_{F'/F} \text{Res}_{E/F'}^1(\mathbb{G}_m) \cong \text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$  genügt es zu zeigen, daß für ein  $x \in (L \otimes_F E)^* \cong L' \otimes_{F'} E$  gilt:

$$\phi_{L'/F'}(x) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} \sigma(x).$$

Für  $x \in (F' \otimes_{F'} E)^* \cong E^*$  ist die Determinante  $\phi_{F'/F'}(x)$  der Multiplikation mit  $x$  auf  $E$  gerade die Körperrnorm  $N_{E/F'}(x) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} \sigma(x)$  von  $x$ . Man sieht leicht, daß dann  $\phi_{L'/F'}(x)$  für  $x \in (L' \otimes_{F'} E)^*$  gegeben ist durch  $\phi_{L'/F'}(x) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} (\text{id} \otimes \sigma)(x)$ . Man beschreibe beispielsweise die Determinatenfunktion  $\phi_{L'/F'}$  durch das Element  $x_1^{L'} \wedge \dots \wedge x_n^{L'} \in \wedge^n(L' \otimes_{F'} E)$ , wenn  $n$  der  $F'$ -Rang von  $L' \otimes_{F'} E$  und  $x_i^{L'}$  die  $i$ -te Koordinatenfunktion bezüglich der  $F'$ -Basis  $1 \otimes e_i^{F'}$  ist für eine  $F'$ -Basis  $e_1^{F'}, \dots, e_n^{F'}$  von  $E$ . Man kann dann leicht nachrechnen, daß aus der Gleichheit

$$\sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\text{sgn}(\tau)} x_1^{F'} \otimes \dots \otimes x_n^{F'} = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} \sigma$$

wegen  $x_i^{L'} = \text{id} \otimes x_i^{F'}$  die Gleichheit

$$\sum_{\tau \in S_n} (-1)^{\text{sgn}(\tau)} x_1^{L'} \otimes \dots \otimes x_n^{L'} = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} \text{id} \otimes \sigma$$

folgt. □

**Lemma 3.7.** *Seien  $E/F'/F$  separable Körpererweiterungen.*

(i) *Ist  $T'$  ein (anisotroper) Torus über  $F'$ , so ist  $\text{Res}_{F'/F}(T')$  ein (anisotroper) Torus über  $F$  von Dimension  $[F' : F] \cdot \dim(T)$ .*

(ii)  $\text{Res}_{F'/F} \text{Res}_{E/F'}^1(\mathbb{G}_m) \subset \text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$

**Beweis:**  $\text{Res}_{F'/F}(T')$  ist über  $\bar{F}$  isomorph zu  $T'^{[F':F]}$ , also ist  $\text{Res}_{F'/F}(T')$  ein Torus. Ist  $T'$  anisotrop, so ist  $\text{Res}_{F'/F}(T')$  ebenfalls anisotrop wegen  $\text{Res}_{F'/F}(T')(F) = T'(F')$ . Dies zeigt (i). Für (ii) genügt es wegen Lemma 3.6 zu zeigen: Für jede  $F$ -Algebra  $L$  und jedes  $x \in E \otimes_F L$  gilt

$$\prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} \sigma(x) = 1 \implies \prod_{\sigma \in \text{Hom}_F(E, \bar{F})} \sigma(x) = 1.$$

Für  $\tau \in \text{Hom}_F(F', \bar{F})$  sei  $\sigma_\tau$  ein Element in  $\text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})$  mit  $\sigma_\tau|_{F'} = \tau$ . Dann gilt

$$\text{Hom}_F(E, \bar{F}) = \prod_{\tau \in \text{Hom}_F(F', \bar{F})} \sigma_\tau \circ \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})$$

und daher

$$\begin{aligned} \prod_{\sigma \in \text{Hom}_F(E, \bar{F})} \sigma(x) &= \prod_{\tau \in \text{Hom}_F(F', \bar{F})} \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} (\sigma_\tau \circ \sigma)(x) \\ &= \prod_{\tau \in \text{Hom}_F(F', \bar{F})} \sigma_\tau \left( \underbrace{\prod_{\sigma \in \text{Hom}_{F'}(E, \bar{F})} \sigma(x)}_{=1} \right) = 1. \end{aligned}$$

□

### 3.11 Topologische Jordanzerlegung

Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe über  $F$ . Ein Element  $g \in G(F)$  heißt

- (i) *stark kompakt*, falls  $g$  in einer kompakten Untergruppe von  $G(F)$  liegt.
- (ii) *topologisch unipotent*, falls  $\lim_{n \rightarrow \infty} g^{p^{n_k}} = 1$  ist für eine Folge  $(n_k)_k$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$ .
- (iii) *residuell halbeinfach*, falls  $g$  von endlicher, zu  $p$  primter Ordnung ist.

Jedes stark kompakte Element  $g \in G(F)$  besitzt eine eindeutige topologische Jordanzerlegung

$$g = g_u g_s = g_s g_u,$$

bei der  $g_s \in G(F)$  residuell halbeinfach und  $g_u \in G(F)$  topologisch unipotent ist. Ist  $\phi : G'(F) \rightarrow G(F)$  ein Morphismus, so gilt  $\phi(\cdot)_s = \phi((\cdot)_s)$  und  $\phi(\cdot)_u = \phi((\cdot)_u)$ .

**Satz 3.8.** *Sei  $\psi : G' \rightarrow G$  eine zentrale Isogenie von linearen algebraischen Gruppen über dem  $p$ -adischen Körper  $F$ , und sei die Ordnung von  $\text{Kern}(\psi)$  teilerfremd zu  $p$ . Dann ist die Einschränkung  $\psi_{tu} : G'(F)_{tu} \rightarrow G(F)_{tu}$  von  $\psi$  auf die topologisch unipotenten Elemente von  $G'(F)$  eine Bijektion auf die topologisch unipotenten Elemente von  $G(F)$ .*

**Beweis:** Wegen  $\psi(\cdot)_u = \psi((\cdot)_u)$  gilt  $\psi(G'(F)_{tu}) \subset G(F)_{tu}$ , also existiert die Abbildung  $\psi_{tu} : G'(F)_{tu} \rightarrow G(F)_{tu}$ . Seien  $u_1, u_2 \in G'(F)$  topologisch unipotent und gelte  $\psi(u_1) = \psi(u_2)$ . Dann existiert  $x \in \text{Kern}(\psi)(F)$  mit  $u_2 = xu_1$ . Wegen  $x \in \text{Kern}(\psi)(F)$  und  $(|\text{Kern}(\psi)(F)|, p) = 1$  ist  $x$  residuell halbeinfach, und es gilt  $xu_1 = u_1x$ . Da die topologische Jordanzerlegung eindeutig ist, folgt  $x = 1$  und  $u_1 = u_2$ .

Für die Surjektivität betrachten wir den Anfang der langen exakten Kohomologiesequenz zur kurzen exakten Sequenz  $1 \rightarrow \text{Kern}(\psi) \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow 1$ :

$$1 \rightarrow \text{Kern}(\psi)(F) \rightarrow G'(F) \rightarrow G(F) \xrightarrow{\delta} H^1(F, \text{Kern}(\psi)).$$

Sei nun  $u \in G(F)$  topologisch unipotent,  $n := |\text{Kern}(\psi)(F)|$  und  $h^1 := |H^1(F, \text{Kern}(\psi))|$ . Da  $n$  teilerfremd zu  $p$  ist, gilt auch  $(h^1, p) = 1$ . Sei  $(n_k)_k$  eine Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$  und  $p^{n_k} \equiv 1 \pmod{h^1}$ . Dann ist die Folge  $(\delta(u^{p^{n_k}}))_k \in H^1(F, \text{Kern}(\psi))$  die konstante Folge  $(\delta(u))_k$ . Andererseits gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} u^{p^{n_k}} = 1$ , da  $u$  topologisch unipotent ist. Es folgt  $\delta(u) = 1$  wegen der Stetigkeit von  $\delta$ . Also existiert  $g \in G'(F)$  mit  $\psi(g) = u$ . Sei  $g = g_s g_u$  die topologische Jordanzerlegung von  $g$  in  $G'(F)$ . Wegen  $\psi(\cdot)_u = \psi((\cdot)_u)$  muß schon  $\psi(g_u) = u$  gelten.  $\square$

**Bemerkung 3.9.** Sei  $u \in G(F)$  unipotent. Dann ist  $u$  auch topologisch unipotent.

**Beweis:** Sei  $u = g_s g_u$  die topologische Jordanzerlegung von  $u$  in  $G(F)$  und gelte  $g_s^k = 1$  mit  $(k, p) = 1$ . Wähle eine Folge  $(n_k)_k$  mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = \infty$  und  $p^{n_k} \equiv 1 \pmod{k}$ . Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^{p^{n_k}} = g_s \lim_{n \rightarrow \infty} g_u^{p^{n_k}} = g_s.$$

Da  $u$  unipotent ist, sind alle Eigenwerte von  $u$  und damit auch alle Eigenwerte von  $g_s$  gleich 1. Also ist  $g_s$  unipotent. Andererseits hat  $g_s$  endliche Ordnung und ist daher halbeinfach. Es folgt  $g_s = 1$ , und damit ist  $u$  topologisch unipotent.  $\square$

### 3.12 $G(F)$ -Konjugationsklassen von primitiven $F$ -Tori in $G_{\text{ad}}$

Sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit Weylgruppe  $W$ . Mit Blick auf den zweiten Teil der Arbeit, in dem wir die Fixpunkte eines primitiven  $F$ -Torus im affinen Bruhat-Tits Gebäude bestimmen wollen, sind wir interessiert an den  $G(F)$ -Konjugationsklassen eines vorgegebenen maximalen  $F$ -Torus  $T$ . Da wir den Torus  $T$  zu einer vorgegebenen Klasse in  $H^1(F, W)$  konstruieren, wollen wir genauer die  $G(F)$ -Konjugationsklassen von solchen  $F$ -Tori bestimmen, denen dieselbe Klasse in  $H^1(F, W)$  zugeordnet wird wie  $T$ .

Sei  $T$  ein (zunächst beliebiger) maximaler  $F$ -Torus in  $G$ ,  $W = W_T$  die Weylgruppe von  $G$  bezüglich  $T$  und  $\Gamma$  die absolute Galoisgruppe von  $F$ . Einem weiteren maximalen  $F$ -Torus  $T'$  läßt sich die Klasse von  $(g^{-1}g^\sigma)_{\sigma \in \Gamma}$  in  $H^1(F, N(T))$  zuordnen, wenn  $T' = gTg^{-1}$  gilt für ein  $g \in G$ . Ist nun das Bild von  $[(g^{-1}g^\sigma)_\sigma]$  in  $H^1(F, W)$  unter der natürlichen Abbildung trivial, so liegt  $g^{-1}g^\sigma$  bereits in  $T$  für alle  $\sigma \in \Gamma$ .  $T'$  wird also beschrieben durch eine Klasse in  $H^1(F, T)$ . Da  $T$  und  $T'$  konjugiert sind in  $G$ , ist das Bild dieser Klasse in  $H^1(F, G)$  trivial. Die  $G(F)$ -Konjugationsklassen von  $F$ -Tori, die derselben Klasse in  $H^1(F, W)$  zugeordnet werden wie  $T$ , werden also parametrisiert durch

$$\text{Kern}(H^1(F, T) \rightarrow H^1(F, G)).$$

Sei nun  $G = G_{\text{ad}}$  spaltend,  $\mathbb{T}$  ein maximaler spaltender  $F$ -Torus in  $G$  und  $\Phi$  das Wurzelsystem von  $G$  bezüglich  $\mathbb{T}$ .  $T_{\text{ad}}$  sei ein primitiver Torus in  $G_{\text{ad}}$  mit zyklischem Zerfällungskörper.  $w$  sei ein Vertreter der Konjugationsklasse in  $W = W_{\mathbb{T}}$ , die  $T_{\text{ad}}$  als Element in  $H^1(F, W)$  zugeordnet wird. Wir betrachten

folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 H^0(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi]^*) & & & & \\
 \downarrow & & & & \\
 H^0(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee]) & & & & \\
 \downarrow i & & & & \\
 H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi^\vee]) & \xlongequal{\sim} & H^1(F, T_{sc}) & & \\
 \downarrow \iota & & \downarrow \kappa & & \\
 H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi]^*) & \xlongequal{\sim} & H^1(F, T_{ad}) & \longrightarrow & H^1(F, G_{ad}) \\
 & & \downarrow \lambda & & \downarrow \\
 & & H^2(F, \pi_1(G_{ad})) & \xlongequal{\sim} & H^2(F, \pi_1(G_{ad}))
 \end{array}$$

Die senkrechten Sequenzen sind dabei Teile der langen exakten Kohomologiesequenzen zu den kurzen exakten Sequenzen

$$\begin{aligned}
 0 \rightarrow \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rightarrow \mathbb{Z}[\Phi]^* \rightarrow \mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow \pi_1(G_{ad}) \rightarrow T_{sc} \rightarrow T_{ad} \rightarrow 0 \\
 0 \rightarrow \pi_1(G_{ad}) \rightarrow G_{sc} \rightarrow G_{ad} \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Die beiden horizontalen Isomorphismen folgen z.B. aus [Mil][Kor.2.4]. Die rechte horizontale Abbildung  $H^1(F, T_{ad}) \rightarrow H^1(F, G_{ad})$  parametrisiert nun die  $G(F)$ -Konjugationsklassen von Tori, denen in  $H^1(F, W)$  die Konjugationsklasse von  $w$  zugeordnet wird und deren Kern wir bestimmen wollen.

Da die Klasse von  $w$  anisotrop ist, gilt

$$H^0(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi]^*) = |\mathbb{Z}[\Phi]^* \langle w \rangle| = 0.$$

Weiter ist  $w$  primitiv, d.h. es gilt

$$|H^0(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee])| = |\mathbb{Z}[\Phi]^* / \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \langle w \rangle| = |H^1(\langle w \rangle, \mathbb{Z}[\Phi^\vee])|.$$

$i$  ist also ein injektiver Homomorphismus zwischen endlichen Gruppen derselben Kardinalität, also ein Isomorphismus. Folglich ist  $\iota$  und damit auch  $\kappa$  die Nullabbildung. Die in der mittleren Sequenz auftretenden Kohomologiegruppen sind abelsch. Wegen  $\kappa = 0$  folgt daher, daß  $\lambda$  injektiv ist. Wir erhalten

$$\text{Kern}(H^1(F, T_{ad}) \rightarrow H^1(F, G_{ad})) = 0.$$

In  $G_{ad}$  gibt es also nur eine  $G_{ad}(F)$ -Konjugationsklasse von primitiven  $F$ -Tori mit vorgegebenem Bild in  $H^1(F, W)$ .

# Kapitel 4

## Der baryzentrische Punkt

Ab jetzt sei in der ganzen Arbeit  $G$  eine zusammenhängende, halbeinfache und spaltende lineare algebraische Gruppe, definiert über einem Körper  $F$  der Charakteristik null.  $\mathbb{T}$  sei ein fixierter maximaler spaltender Torus in  $G$ .

Wir können einem primitiven Element  $w \in W$  ein Element in  $\mathbb{T}$  und einen Punkt in einem reellen affinen Raum  $\mathcal{A}$  (der als affiner Raum mit dem zu  $\mathbb{T}$  gehörenden Apartment  $\mathcal{A}(G_{\text{ad}}, \mathbb{T}, F)$  im affinen Bruhat-Tits Gebäude identisch ist) zuordnen, der es uns zum einen ermöglicht, für jede Einheitswurzel  $\zeta$  der Ordnung  $\text{ord}(w)$  die Wurzeln  $\alpha \in \Phi$  zu bestimmen mit  $\alpha(\tilde{w}) = \zeta$ . Dies führt wie in Abschnitt 2.2 beschrieben zu einer geeigneten Beschreibung der gesuchten Tori. Zum anderen können wir im zweiten Teil mit Hilfe des konstruierten Punktes im Apartment die Fixpunktmenge von  $T(F)$  im Bruhat-Tits Gebäude nach unten abzuschätzen (siehe Proposition 12.19).

### 4.1 Lifts primitiver Weylgruppenelemente

Wir zeigen in diesem Abschnitt zwei wesentliche Eigenschaften von primitiven Elementen in  $W$ . Zum einen lassen sich in  $G_{\text{ad}}$  primitive Elemente  $w \in W$  ordnungserhaltend nach  $N(\mathbb{T})$  liften. Zum zweiten ist eine diagonalisierte Fassung  $\tilde{n}_w \in \mathbb{T}$  eines halbeinfachen Lifts  $n_w$  für anisotrope  $w$  eindeutig in  $\mathbb{T}/W$  (Dies ist auch die schärfste Form von Eindeutigkeit in diesem Kontext, die möglich ist.)

**Proposition 4.1.** *Sei  $G = G_{\text{ad}}$ ,  $\mathbb{T}$  ein maximaler spaltender Torus in  $G$  und  $w$  ein primitives Element in  $W$ . Dann existiert ein Lift  $n_w \in N(\mathbb{T})$  von  $w$  mit  $\text{ord}_{N(\mathbb{T})}(n_w) = \text{ord}_W(w)$ .*

**Beweis:** Wir rechnen in der einfach zusammenhängenden Form  $G_{\text{sc}}$  von  $G$ . Sei  $\psi : G_{\text{sc}} \rightarrow G_{\text{ad}}$  die natürliche Überlagerungsisogenie und  $\mathbb{T}_{\text{sc}} = \psi^{-1}(\mathbb{T})$ .  $\mathbb{T}_{\text{sc}}$  ist dann ein maximaler spaltender Torus in  $G_{\text{sc}}$ , und es gilt  $N(\mathbb{T}_{\text{sc}}) = \psi^{-1}(N(\mathbb{T}))$ .  $\psi$  induziert weiterhin einen Isomorphismus der Weylgruppen  $W_{\text{sc}} \cong W$ . Die Eigenschaft eines Elements der Weylgruppe, primitiv zu sein, ist unabhängig von der Isogenieklasse der zugrundeliegenden Gruppe.  $w$  ist also primitiv in  $W$  genau dann, wenn  $w$  primitiv in  $W_{\text{sc}}$  ist.

Sei jetzt  $n_w \in N(\mathbb{T})$  irgendein Lift von  $w$  in  $N(\mathbb{T})$  und  $\tilde{n}_w \in N(\mathbb{T}_{\text{sc}})$  ein Urbild von  $n_w$  unter  $\psi$ . Sei weiter  $l := \text{ord}_W(w)$ . Wir wollen zeigen, daß  $\tilde{n}_w^l$  im Zentrum von  $G_{\text{sc}}$  liegt. Dann folgt  $n_w^l = \psi(\tilde{n}_w^l) = 1$  wegen  $Z(G_{\text{sc}}) = \text{Kern}(\psi)$ .

Wir nehmen nun an,  $x := \tilde{n}_w^l \in \mathbb{T}_{\text{sc}}$  liegt nicht in  $Z(G_{\text{sc}})$ . Dann ist die Einskomponente  $C_{G_{\text{sc}}}(x)^0$  des Zentralisators von  $x$  in  $G_{\text{sc}}$  eine echte reduktive Untergruppe von  $G_{\text{sc}}$ , deren Wurzelsystem  $\Phi_x$  ein echtes Untersystem von  $\Phi$  ist nach [St1][3.5, Prop.4]. Weiter ist  $C_{G_{\text{sc}}}(x)$  zusammenhängend nach dem Satz von Steinberg [St2], es gilt also  $C_{G_{\text{sc}}}(x) = C_{G_{\text{sc}}}(x)^0 =: H$ .  $\tilde{n}_w$  liegt in  $N_H(\mathbb{T}_{\text{sc}})$ , und daher hat man  $w \in W_H$ . Die Konjugationsklasse von  $w$  in  $W \cong W_{\text{sc}}$  steigt also ab nach  $\Phi_x$ , was im Widerspruch steht zur Primitivität von  $w$  nach Proposition 3.5.  $\square$

**Korollar 4.2.** *Sei  $G$  zusammenhängend, spaltend, halbeinfach, nicht notwendigerweise von adjungiertem Typ,  $w \in W$  primitiv und  $n_w$  ein Lift von  $w$ . Dann hat  $\text{Ad}(n_w)$  als Endomorphismus von  $\mathfrak{g}$  die Ordnung  $\text{ord}_W(w)$ .*

**Beweis:** Es gilt  $n_w^{\text{ord}_W(w)} \in Z(G) = \text{Kern}(\text{Ad})$  und daher  $\text{ord}(\text{Ad}(n_w)) = \text{ord}_W(w)$ .  $\square$

Wir wenden uns nun der zweiten Eigenschaft zu. Sei  $w$  zunächst ein beliebiges Element in  $W$  und  $n_w$  ein halbeinfacher Lift in  $N(\mathbb{T})$ . Weil  $n_w$  halbeinfach ist, existiert  $g \in G$  mit  $\tilde{n}_w := gn_w g^{-1} \in \mathbb{T}$ .  $\tilde{n}_w$  hängt nun vom Lift  $n_w$  und von  $g$  ab. Die Abhängigkeit von  $g$  läßt sich genau beschreiben:  $g$  kann von links um Elemente von  $N(\mathbb{T})$  abgeändert werden. Diese Möglichkeit besteht immer, so daß wir bestenfalls eine Eindeutigkeit von  $\tilde{n}_w$  in  $\mathbb{T}/W$  erwarten können. Ist nun  $w$  anisotrop, so ist  $W$  in der Tat die einzige Mehrdeutigkeit. Insbesondere hängt  $\tilde{n}_w$  nicht vom Lift  $n_w$  ab. Die Schlüsselaussage ist hier die folgende Proposition.

**Proposition 4.3.** *Sei  $w$  ein anisotropes Element in  $W$ . Dann sind zwei Lifts  $n_1, n_2 \in N(\mathbb{T})$  von  $w$  konjugiert durch ein Element aus  $\mathbb{T}$ .*

**Beweis:** Man betrachte die Abbildung  $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ , gegeben durch

$$\phi(t) = tw(t)^{-1}.$$

Wir werden im nachfolgenden Lemma 4.4 zeigen, daß  $\phi$  surjektiv ist. Da  $n_1$  und  $n_2$  beide Lifts von  $w$  sind, gilt  $n_2 = \tau n_1$  für ein  $\tau \in \mathbb{T}$ . Wegen der Surjektivität von  $\phi$  läßt sich  $\tau$  schreiben in der Form  $\tau = tw(t)^{-1}$  für ein  $t \in \mathbb{T}$ . Es folgt

$$n_2 = tw(t)^{-1}n_1 = t(n_1 t^{-1} n_1^{-1})n_1 = tn_1 t^{-1}.$$

Also sind  $n_1$  und  $n_2$  konjugiert durch ein Element aus  $\mathbb{T}$ .  $\square$

Wenn nun  $gn_2 g^{-1} \in \mathbb{T}$  gilt für ein  $g \in G$ , so folgt wegen  $n_2 = tn_1 t^{-1}$  auch  $\tilde{w} := gtn_1(gt)^{-1} = gn_2 g^{-1} \in \mathbb{T}$ .  $\tilde{w}$  hängt also nicht mehr vom gewählten Lift ab, sondern nur noch von  $w$ . Deshalb schreiben wir für ein anisotropes  $w$  auch  $\tilde{w}$  für (irgendeinen) „diagonalisierten“ Lift von  $w$ .  $\tilde{w}$  ist eindeutig bis auf die Operation von  $W$  auf  $\mathbb{T}$ .

Wir müssen noch die Surjektivität der Abbildung  $\phi$  zeigen.

**Lemma 4.4.** *Sei  $w \in W$  anisotrop und  $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  die durch  $\phi(t) = tw(t)^{-1}$  gegebene Abbildung. Dann ist  $\phi$  surjektiv.*

**Beweis:** Man betrachte die Abbildung

$$(\text{id} - w) \otimes \text{id} : X_* \otimes \bar{F}^* \rightarrow X_* \otimes \bar{F}^*,$$

gegeben durch

$$((\text{id} - w) \otimes \text{id})(\beta \otimes x) = (\beta - w(\beta)) \otimes x.$$

Das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} X_* \otimes \bar{F}^* & \xrightarrow{(\text{id} - w) \otimes \text{id}} & X_* \otimes \bar{F}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{T} \end{array} .$$

Dabei sind die senkrechten Abbildungen Isomorphismen, die man wie schon in Kapitel 2 aus Proposition 4.5 unter der Identifikation von  $\mathbb{T}$  mit  $\mathbb{G}_m^{\dim \mathbb{T}}$  erhält. Es genügt also, die Surjektivität von  $(\text{id} - w) \otimes \text{id}$



zu zeigen. Da  $w$  anisotrop ist, gilt  $X_*^w = 0$ . Insbesondere ist kein Eigenwert von  $w$  gleich 1. Das Bild von  $\text{id} - w$  hat daher endlichen Index in  $X_*$ . Die kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow X_* \xrightarrow{\text{id}-w} X_* \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

induziert durch Tensorieren mit  $\bar{F}^*$  eine exakte Sequenz

$$X_* \otimes \bar{F}^* \xrightarrow{(\text{id}-w) \otimes \text{id}} X_* \otimes \bar{F}^* \longrightarrow Q \otimes \bar{F}^* \longrightarrow 1.$$

Da  $Q$  endlich und  $\bar{F}^*$  divisibel ist, ist  $Q \otimes \bar{F}^* = 1$ . Daher ist die Abbildung  $(\text{id} - w) \otimes \text{id}$  surjektiv.  $\square$

## 4.2 Die Exponentialabbildung

Wir werden im folgenden  $X^*$  auf natürliche Weise mit  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X_*, \mathbb{Z})$  und  $X_*$  mit  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(X^*, \mathbb{Z})$  identifizieren, vermöge der (nicht ausgearteten) Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X_* \times X^* \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Wir zeigen zunächst die folgende Aussage.

**Proposition 4.5.** *Sei  $G$  eine zusammenhängende lineare algebraische Gruppe mit maximalem Torus  $T$ ,  $I$  eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $X^*$  und  $M$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul. Dann ist die Abbildung*

$$\delta_{I,M} : X_* \otimes_{\mathbb{Z}} M \rightarrow M^{|I|},$$

die festgelegt ist durch

$$\beta \otimes m \mapsto (\langle \beta, \gamma \rangle m)_{\gamma \in I},$$

ein Isomorphismus abelscher Gruppen.

**Beweis:** Die Homomorphieeigenschaft ist klar, denn es gilt  $\delta_M = (\alpha \otimes \text{id})_{\alpha \in \Delta}$ . Sei nun  $I = \{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ . Die zu  $I$  duale Basis  $(\beta_i)$  erfüllt  $\langle \beta_i, \gamma_j \rangle = \delta_{ij}$ . Die Abbildung  $M^{|I|} \rightarrow X_* \otimes_{\mathbb{Z}} M$ , gegeben durch

$$(m_i)_i \mapsto \sum_i \beta_i \otimes m_i,$$

ist die Umkehrabbildung zu  $\delta_{I,M}$ . Man beachte dabei, daß  $\beta = \sum_i \langle \beta, \gamma_i \rangle \beta_i$  gilt für jedes  $\beta \in X_*$ .  $\square$

**Korollar 4.6.** *Sei  $G = G_{\text{ad}}$ ,  $\Delta \subset \Phi$  ein System einfacher Wurzeln und  $M$  ein  $\mathbb{Z}$ -Modul. Dann ist die Abbildung  $\delta_{\Delta,M}$  ein Isomorphismus abelscher Gruppen.*

Wegen  $G = G_{\text{ad}}$  hat man  $\mathbb{Z}[\Delta] = \mathbb{Z}[\Phi] = X^*$ . Die Wurzeln aus  $\Delta$  bilden also eine  $\mathbb{Z}$ -Basis von  $X^*$ .  $\square$

**Bemerkung 4.7.** *Sei die Situation wie in Proposition 4.5 und  $N$  ein  $\mathbb{Z}$ -Untermodul von  $M$ . Dann gilt*

$$(\delta_{I,M})|_N = \delta_{I,N}.$$

Insbesondere ist  $(\delta_{I,M})|_N : X_* \otimes_{\mathbb{Z}} N \rightarrow N^{|I|}$  ein Isomorphismus.

**Bemerkung 4.8.** *Sei  $G$  beliebig,  $M_1$  und  $M_2$   $\mathbb{Z}$ -Moduln und  $f : M_1 \rightarrow M_2$  ein Homomorphismus. Dann ist die Abbildung*

$$\text{id} \otimes f : X_* \otimes_{\mathbb{Z}} M_1 \rightarrow X_* \otimes_{\mathbb{Z}} M_2$$

$W$ -äquivariant, wenn  $W$  auf  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} M_i$  über den ersten Faktor  $X_*$  operiert.

Sei  $n = \dim \mathbb{T} = \text{rang } G$ . Wir betrachten folgendes kommutative Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} X_* \otimes \mathbb{R} & \xrightarrow{\delta_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}^n \\ \text{id} \otimes \exp(2\pi i \cdot) \downarrow & & \downarrow \exp(2\pi i \cdot)^n \\ X_* \otimes S^1 & \xrightarrow{\delta_{S^1}} & (S^1)^n \end{array}$$

$X_* \otimes \mathbb{R}$  ist (als affiner Raum) das zum Torus  $\mathbb{T}$  gehörende Apartment  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(G_{\text{ad}}, \mathbb{T}, F)$  im affinen Bruhat-Tits Gebäude. Für jede Wurzel  $\alpha \in \Phi$  und jedes  $k \in \mathbb{Z}$  sei die affine Hyperebene  $H_{\alpha, k}$  definiert durch

$$H_{\alpha, k} = \{v \in X_* \otimes \mathbb{R} \mid \alpha(v) = k\}.$$

$\mathcal{H}$  sei die Menge  $\{H_{\alpha, k} \mid \alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}\}$  aller solcher affinen Hyperebenen in  $\mathcal{A}$ . Die affine Weylgruppe  $W_{\text{aff}}$  ist die durch die Spiegelungen an den Hyperebenen in  $\mathcal{H}$  erzeugte Gruppe. Sie operiert auf  $\mathcal{A}$ . Die Weylgruppe  $W$  ist in dieser Darstellung die durch die Spiegelungen an  $H_{\alpha, 0} = \text{Kern}(\alpha), \alpha \in \Phi$  erzeugte Untergruppe von  $W_{\text{aff}}$ . Die durch Spiegelungen beschriebene Operation von  $W$  ist dieselbe wie die in Bemerkung 4.8 beschriebene Operation, die durch die Operation von  $W$  auf  $X_*$  induziert ist ([Ca3][1.9]).

Es gilt  $W_{\text{aff}} = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rtimes W$ . Sei  $\Delta$  ein System einfacher Wurzeln in  $\Phi$  und  $\alpha^+$  die positive Wurzel maximaler Höhe bezüglich  $\Delta$ . Ein Fundamentalbereich für die Operation von  $W_{\text{aff}}$  auf  $\mathcal{A}$  wird dann gegeben durch den abgeschlossenen Alkoven

$$A = \{v \in \mathcal{A} \mid \alpha(v) \geq 0 \text{ für alle } \alpha \in \Delta, \alpha^+(v) \leq 1\}.$$

Die Wände des Alkovens  $A$  sind die Hyperebenen  $H_{\alpha, 0}$  mit  $\alpha \in \Delta$  und  $H_{\alpha^+, 1}$ .  $S_A$  bezeichne die Menge der Spiegelungen an den Wänden von  $A$ . Der Stabilisator in  $W_{\text{aff}}$  eines Punktes in  $A$  ist erzeugt von den Spiegelungen in  $S_A$ , die ihn festlassen.

Die letzten Aussagen lassen sich aus [Hum3][Ch.4] übertragen, wenn man auf  $X_* \otimes \mathbb{R}$  ein  $W$ -invariantes Skalarprodukt  $(v_1, v_2)$  einführt, mittels dem man  $X^* \cong X_*^{\text{dual}}$  mit einer Teilmenge von  $X_* \otimes \mathbb{R}$  identifiziert:  $\alpha \in X^* \leftrightarrow t_\alpha \in X_* \otimes \mathbb{R}$ , wo  $\alpha = (t_\alpha, \cdot)$ .

Der Kern der Abbildung  $\text{id} \otimes \exp(2\pi i \cdot)$  ist  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong X_*$ . Insbesondere ist  $\text{Kern}(\text{id} \otimes \exp(2\pi i \cdot))$  invariant unter  $W_{\text{aff}}$ . Die Bedingungen, die  $A$  definieren, werden wir kurz als Alkovenbedingungen bezeichnen.

Sei ab jetzt ein System einfacher Wurzeln  $\Delta$  in  $\Phi$  fixiert. Wir schreiben kurz  $\delta_M$  für die Abbildung  $\delta_{\Delta, M}$  aus Proposition 4.5. Wir werden im folgenden die zyklische Untergruppe  $\mu_l \subset S^1$  der Einheitswurzeln der Ordnung  $l$  betrachten. Weil  $\text{Kern}(\text{id} \otimes \exp(2\pi i \cdot))$  invariant ist unter  $W_{\text{aff}}$ , gilt dies auch für  $(\text{id} \otimes \exp(2\pi i \cdot))^{-1}(X_* \otimes \mu_l) = X_* \otimes \frac{1}{l}\mathbb{Z}$ . Wir haben also folgende Situation.

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} X_* \otimes \frac{1}{l}\mathbb{Z} & \xrightarrow{\delta_{\mathbb{R}}} & (\frac{1}{l}\mathbb{Z})^n \\ \text{id} \otimes \exp(2\pi i \cdot) \downarrow & & \downarrow \exp(2\pi i \cdot)^n \\ X_* \otimes \mu_l & \xrightarrow{\delta_{\mu_l}} & \mu_l^n \\ i \downarrow & & \downarrow i \\ X_* \otimes \bar{F}^* & \xrightarrow{\delta_{\bar{F}^*}} & (\bar{F}^*)^n \\ \cong \downarrow & & \downarrow \text{pr}_\alpha \\ \mathbb{T} & \xrightarrow{\alpha} & \bar{F}^* \end{array}$$

Dabei sind die beiden mittleren senkrechten Abbildungen, die mit  $i$  bezeichnet sind, von der Inklusion  $\mu_l \hookrightarrow \bar{F}^*$  induziert. Die Abbildung  $\text{pr}_\alpha$  ist die Projektion auf die zu  $\alpha \in \Delta$  gehörende Komponente von  $(\bar{F}^*)^n$ . Die Abbildung  $X_* \otimes \bar{F}^* \rightarrow \mathbb{T}$  ist gegeben durch  $\beta \otimes x \mapsto \beta(x)$  und ein  $W$ -äquivarianter Isomorphismus. Die beiden oberen senkrechten Abbildungen, die von der Exponentialabbildung induziert sind, sind surjektiv. Alle Diagramme kommutieren.

Die verschiedenen Isomorphismen  $\delta$  induzieren auf den entsprechenden rechten Seiten ebenfalls eine Operation von  $W$ . Alle Abbildungen zwischen auftretenden  $W$ -Moduln in (4.1) sind dann äquivariant.

### 4.3 Konstruktion des baryzentrischen Punktes

Sei  $G = G_{\text{ad}}$ . Wir starten nun mit einem primitiven Element  $w \in W$  der Ordnung  $l$ . Nach Abschnitt 4.1 existiert ein Lift  $n_w \in N(\mathbb{T})$  der Ordnung  $l$  und ein nur von  $w$  abhängiges  $\tilde{w} \in \mathbb{T}$ , das zu  $n_w$  konjugiert ist in  $G$ . Da die Ordnung von  $\tilde{w}$  gleich  $l$  ist, liegt  $\tilde{w}$  bereits in  $\mu_l^n$  unter der Identifikation  $\mathbb{T} \cong \mathbb{G}_m^n$ . Wir wählen einen Lift  $\tilde{w}_{\text{reell}}$  von  $\tilde{w}$  in  $(\frac{1}{l}\mathbb{Z})^n \cong X_* \otimes \frac{1}{l}\mathbb{Z} \subset X_* \otimes \mathbb{R} = \mathcal{A}$ .  $\tilde{w}_{\text{reell}}$  entspricht einem eindeutig bestimmten Punkt  $w_A$  im Fundamentalbereich  $A$ . Da  $W_{\text{aff}}$  wie oben bemerkt auf  $X_* \otimes \frac{1}{l}\mathbb{Z}$  operiert, liegt  $w_A$  sogar in  $(X_* \otimes \frac{1}{l}\mathbb{Z}) \cap A$ .

Was ist nun die Bedeutung von  $w_A$  im Hinblick auf unser Ziel, für gegebenes  $i$  die  $\alpha \in \Phi$  zu bestimmen mit  $\alpha(\tilde{w}) = \zeta_i^l$ ? Die Antwort gibt die folgende Aussage.

**Proposition-Definition 4.9** (Baryzentrischer Punkt). *Sei  $G = G_{\text{ad}}$ ,  $w \in W$  primitiv von Ordnung  $l$  und die Elemente  $\tilde{w} \in \mathbb{T}$  sowie  $w_A \in X_* \otimes \frac{1}{l}\mathbb{Z} \cap A$  dazu konstruiert bezüglich eines Systems einfacher Wurzeln  $\Delta$  wie oben beschrieben. Dann existiert ein  $z = z_{\tilde{w}} \in W$  mit  $\alpha(w_A) = \alpha(z(\tilde{w}))$  für alle  $\alpha \in \Phi$  (genauer:  $\alpha((\exp(2\pi i \cdot)^n \circ \delta_{\mathbb{R}})(w_A)) = \alpha(z(\tilde{w}))$  für alle  $\alpha \in \Phi$ ).*

Zusatz: *Das Element  $z(\tilde{w})$  ist eindeutig bestimmt und heißt **baryzentrischer Punkt von  $w$** . Es wird mit  $w_\Delta$  bezeichnet. Der eindeutig bestimmte Punkt  $w_A$  im Alkoven erfüllt die Gleichung*

$$(\exp(2\pi i \cdot)^n \circ \delta_{\mathbb{R}})(w_A) = w_\Delta$$

*und heißt **baryzentrischer Vektor von  $w$** . Enthält der Grundkörper  $F$  die Einheitswurzeln von Ordnung  $\text{ord}(w)$ , so liegt  $w_\Delta$  bereits in  $\mathbb{T}(F)$ .*

$w_\Delta$  ist also das eindeutig bestimmte  $W$ -Konjugierte von  $\tilde{w}$  in  $\mathbb{T}$ , auf dem die Wurzeln des gegebenen einfachen Systems  $\Delta$  gewissen Bedingungen, nämlich die den Alkovenbedingungen entsprechenden, genügen.

**Bemerkung 4.10.** Der Begriff *baryzentrisch* rührt daher, daß im Coxeterfall der Punkt  $w_A$  der geometrische Baryzenter des Alkovens  $A$  ist (vgl. Proposition 8.2). Eine äquivalente Definition des baryzentrischen Punktes ist die folgende: Sei  $w \in W$  primitiv und  $n_w \in N(\mathbb{T})$  ein Lift von  $w$ . Dann hat die Konjugationsklasse von  $n_w$  nach Proposition 4.9 einen eindeutigen Repräsentanten  $w_\Delta$  in  $\mathbb{T}$ , der den Alkovenbedingungen bezüglich des einfachen Systems  $\Delta$  genügt.

**Beweis (der Proposition):** Sei  $\tilde{w}_{\text{reell}}$  wie oben ein Lift von  $\tilde{w} \in \mu_l^n$  nach  $X_* \otimes \frac{1}{l}\mathbb{Z}$ . Sei weiter  $z_{\text{aff}} \in W_{\text{aff}}$  ein Element mit  $z_{\text{aff}}(\tilde{w}_{\text{reell}}) = w_A$ . Wegen  $W_{\text{aff}} = \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \rtimes W$  läßt sich  $z_{\text{aff}}$  (eindeutig) schreiben in der Form  $z_{\text{aff}} = xz$  für eine Translation  $x \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee]$  und ein  $z \in W$ , d.h. man hat

$$w_A = z_{\text{aff}}(\tilde{w}_{\text{reell}}) = z(\tilde{w}_{\text{reell}}) + x.$$

Im Diagramm (4.1) können wir die Abbildung  $\exp(2\pi i \cdot)^n \circ \delta_{\mathbb{R}}$  ersetzen durch die Abbildung  $\delta_{\mu_l} \circ (\text{id} \otimes \exp(2\pi i \cdot))$ , deren Kern gleich  $X_*$  ist. Der Translationsanteil  $x \in \mathbb{Z}[\Phi^\vee] \subset X_*$  spielt also keine

Rolle. Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}\alpha((\exp(2\pi i \cdot)^n \circ \delta_{\mathbb{R}})(w_A)) &= \alpha((\exp(2\pi i \cdot)^n \circ \delta_{\mathbb{R}})(z(\tilde{w}_{\text{reell}}))) \\ &= \alpha(z((\exp(2\pi i \cdot)^n \circ \delta_{\mathbb{R}})(\tilde{w}_{\text{reell}}))) \\ &= \alpha(z(\tilde{w})).\end{aligned}$$

Wir haben für die zweite Gleichheit die  $W$ -Äquivarianz der Abbildungen  $\delta_{\mathbb{R}}$  und  $\exp(2\pi i \cdot)^n$  benutzt. Die letzte Gleichheit folgt, weil  $\tilde{w}_{\text{reell}}$  nach Konstruktion ein Lift von  $\tilde{w}$  unter der Exponentialabbildung ist.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit von  $z(\tilde{w})$  zu zeigen. Sei  $w_1 := z_1(\tilde{w})$ ,  $w_2 := z_2(\tilde{w})$  und gelte  $\alpha(w_1) = \alpha(w_2)$  für alle  $\alpha \in \Phi$ . Dann liegt  $w_1 w_2^{-1}$  in  $\text{Kern}(\text{Ad}) = Z(G)$ . Aber  $Z(G) = 1$  wegen  $G = G_{\text{ad}}$ . Dasselbe Argument zeigt auch den Zusammenhang zwischen  $w_A$  und  $w_{\Delta}$ .  $\square$

Für die konkrete Bestimmung von  $\alpha(w_{\Delta}) = \alpha(w_A)$  werden wir nicht im Apartment  $\mathcal{A}$  und der linken Seite im Diagramm (4.1) rechnen, sondern in  $(\frac{1}{l}\mathbb{Z})^n$  und der rechten Seite von (4.1).  $w_A$  hat als Element in  $(\frac{1}{l}\mathbb{Z})^n$  die Form

$$w_A = \frac{1}{l}(a_{\alpha})_{\alpha \in \Delta}.$$

Die Alkovenbedingungen übersetzen sich dann in

$$(4.2) \quad \begin{aligned}a_{\alpha} &\geq 0 \text{ für alle } \alpha \in \Delta \\ \sum_{\alpha \in \Delta} b_{\alpha} a_{\alpha} &\leq 1.\end{aligned}$$

Dabei sind die  $b_{\alpha}$  die Koeffizienten in der Darstellung der längsten Wurzel  $\alpha^+$  bezüglich  $\Delta$ , also  $\alpha^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} b_{\alpha} \alpha$ .

Zum Schluß formulieren wir noch eine Aussage, die schon in Abschnitt 2.2 benutzt wurde und einen zentralen Punkt in dieser Arbeit darstellt.

**Proposition 4.11.** *Sei  $w \in W$  primitiv und  $\zeta$  ein Eigenwert von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$ . Dann liegt ein Eigenvektor von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta$  in  $\bigoplus_{\alpha(w_{\Delta})=\zeta} \mathfrak{u}_{\alpha}$ .*

## 4.4 Eigenwerte von $\text{Ad}(n_w)$

In diesem Abschnitt sei immer noch  $G = G_{\text{ad}}$ ,  $w \in W$  primitiv von Ordnung  $l$  und  $\zeta_l$  eine fixierte primitive Einheitswurzel der Ordnung  $l$ . Bevor wir die Wurzeln  $\alpha$  mit  $\alpha(w_{\Delta}) = \zeta$  für einen Eigenwert  $\zeta$  von  $\text{Ad}(w)$  bestimmen, untersuchen wir zunächst die Anzahl der Wurzeln  $\alpha \in \Phi$  mit  $\alpha(w_{\Delta}) = \zeta$ . Sei zunächst  $\zeta$  irgendeine Einheitswurzel beliebiger Ordnung. Wir bezeichnen mit  $\Phi_{\zeta}(w_{\Delta})$  die Menge

$$\Phi_{\zeta}(w_{\Delta}) := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(w_{\Delta}) = \zeta\}$$

und mit  $n_{\zeta}(w_{\Delta})$  ihre Anzahl  $|\Phi_{\zeta}(w_{\Delta})|$ . Die Wurzeln aus  $\Phi_{\zeta}(w_{\Delta})$  nennen wir  $\zeta$ -Wurzeln (bezüglich  $w_{\Delta}$ ). Die Menge  $\Phi_1(w_{\Delta})$  spielt eine besondere Rolle:  $\Phi_1(w_{\Delta})$  ist das Wurzelsystem der reduktiven Gruppe  $Z_G^0(w_{\Delta})$ . Es wird in Abschnitt 5.1 genauer untersucht werden.

Wir bemerken zunächst, daß die Werte  $\alpha(w_{\Delta})$  die Eigenwerte von  $\text{Ad}(w_{\Delta})$  auf  $\mathfrak{t}^{\perp} := \bigoplus_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{u}_{\alpha}$  sind. Sei  $n_w \in N(\mathbb{T})$  ein Lift von  $w \in W$  mit  $\text{ord}(n_w) = \text{ord}(w) = l$ . Da  $w_{\Delta}$  und  $n_w$  konjugiert sind in  $G$ , haben  $\text{Ad}(n_w)$  und  $\text{Ad}(w_{\Delta})$  dieselben Eigenwerte als Endomorphismen von  $\mathfrak{g}$ . Wir betrachten also die Operation von  $\text{Ad}(n_w)$  auf  $\mathfrak{g}$  (genauer die Operation der von  $\text{Ad}(n_w)$  erzeugten Gruppe).  $\text{Ad}(n_w)$

operiert auf  $\mathfrak{t}$  und permutiert die Wurzelräume  $\mathfrak{u}_\alpha$ , nämlich gemäß der Operation von  $w$  auf den Wurzeln  $\Phi$ . Sei  $\mathfrak{o} \subset \mathfrak{t}^\perp$  ein invarianter Teilraum unter  $\text{Ad}(n_w)$ .  $\mathfrak{o}$  entspricht einem Orbit von Wurzeln, also

$$\mathfrak{o} = \sum_i \mathfrak{u}_{w^i(\alpha)}$$

für eine Wurzel  $\alpha$ . Wir schreiben daher auch  $\mathfrak{o}_{[\alpha]}$  für  $\mathfrak{o}$ . Die Dimension von  $\mathfrak{o}_{[\alpha]}$  ist die Länge  $\lambda_{[\alpha]}$  des Orbits von  $\alpha$  unter der Operation von  $W_w := \langle w \rangle \subset W$ .

Wir wollen die Eigenwerte von  $\text{Ad}(n_w)|_{\mathfrak{o}_{[\alpha]}}$  bestimmen. Sei dazu  $v \in \mathfrak{u}_\alpha$ . Wegen  $w^{\lambda_{[\alpha]}}(\beta) = \beta$  und  $\dim \mathfrak{u}_\beta = 1$  für alle Wurzeln  $\beta \in \langle w \rangle \alpha$  gilt  $\text{Ad}(n_w)^{\lambda_{[\alpha]}}(v) = yv$  für ein  $y \in \bar{F}^*$ . Das charakteristische Polynom  $f_{[\alpha]}$  von  $\text{Ad}(n_w)|_{\mathfrak{o}_{[\alpha]}}$  hat also die Form

$$f_{[\alpha]}(X) = X^{\lambda_{[\alpha]}} - y.$$

Andererseits gilt  $\text{ord}(\text{Ad}(n_w)) = \text{ord}(w) = l$ . Jeder Teiler von  $f_{[\alpha]}$  muß also ein Teiler von  $X^l - 1$  sein. Es folgt  $y^{l/\lambda_{[\alpha]}} = 1$ . Die in dieser Arbeit behandelten einfachen Gruppen sind alle bereits über  $\mathbb{Z}$  definiert. Daher können  $v, w$  und  $n_w$   $\mathbb{Q}$ -rational gewählt werden, und es gilt dann  $y \in \mathbb{Q}^*$ . Es folgt

$$f_{[\alpha]}(X) = X^{\lambda_{[\alpha]}} \pm 1.$$

Die Eigenwerte von  $\text{Ad}(n_w)|_{\mathfrak{o}_{[\alpha]}}$  sind also entweder genau die Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda_{[\alpha]}$  oder genau die Einheitswurzeln von Ordnung  $2\lambda_{[\alpha]}$ , die nicht schon Einheitswurzeln der Ordnung  $\lambda_{[\alpha]}$  sind. Die Multiplizität der auftretenden Eigenwerte ist jeweils eins.

**Proposition 4.12.** *Sei  $w \in W$  primitiv,  $n_w \in N(\mathbb{T})$  ein Lift von  $w$  und  $\mathfrak{o}$  ein Orbit in  $\Phi$  unter  $\langle w \rangle$ . Sei weiter  $\mathfrak{t}^\perp = \sum_{\alpha \in \Phi} \mathfrak{u}_\alpha$  und  $\mathfrak{u}_\mathfrak{o} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{o}} \mathfrak{u}_\alpha$ . Ist die Länge  $\lambda$  von  $\mathfrak{o}$  gleich der Ordnung von  $w$ , so gilt für das charakteristische Polynom  $f_\mathfrak{o}$  des Endomorphismus  $\text{Ad}(n_w)$  von  $\mathfrak{u}_\mathfrak{o}$*

$$f_\mathfrak{o}(X) = X^\lambda - 1.$$

Das charakteristische Polynom  $f$  von  $\text{Ad}(n_w)$  auf  $\mathfrak{t}^\perp$  berechnet sich als

$$f = \prod_{\text{Orbiten } \mathfrak{o} \in \Phi / \langle w \rangle} f_\mathfrak{o}.$$

Hat speziell jeder Orbit dieselbe Länge  $\lambda = \text{ord}(w)$ , so hat das charakteristische Polynom  $f$  des Endomorphismus  $\text{Ad}(n_w)$  von  $\mathfrak{t}^\perp$  die Gestalt

$$f(X) = (X^{\text{ord}(w)} - 1)^{|\Phi / \langle w \rangle|}.$$

Inbesondere sind die Eigenwerte von  $\text{Ad}(n_w)|_{\mathfrak{t}^\perp}$  genau die Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda = \text{ord}(w)$ , jeweils mit Multiplizität  $|\Phi / \langle w \rangle|$ .

**Beweis:** Wir müssen nur zeigen, daß die Ordnung einer Einheitswurzel, die Nullstelle von  $f_\mathfrak{o}$  ist, nicht größer als  $\lambda$  sein kann. Jede Nullstelle von  $f_\mathfrak{o}$  ist aber auch Eigenwert von  $\text{Ad}(n_w)$ , und nach 4.2 hat  $\text{Ad}(n_w)$  die Ordnung  $\text{ord}(w) = \lambda$ . Die Aussage im Fall, daß jeder Orbit dieselbe Länge  $\lambda = \text{ord}(w)$  hat, folgt direkt.  $\square$

Die Operation von  $w$  auf der Liealgebra  $\mathfrak{t}$  von  $\mathbb{T}$  hat als Eigenwerte Einheitswurzeln von Ordnung  $\text{ord}(w) = l$ . Welche Eigenwerte mit welcher Multiplizität genau auftreten, ist für anisotrope  $w$  bekannt und z.B. in [BFW] aufgelistet. Der Eigenwert 1 tritt dabei wegen der Anisotropie von  $w$  nie auf.

Wir können jetzt unsere Ergebnisse zusammenfassen und die Eigenwerte von  $\text{Ad}(n_w)$  bestimmen.

**Proposition 4.13.** Sei  $G = G_{\text{ad}}$  und  $w \in W$  primitiv von Ordnung  $l$ . Sei  $n_w$  ein Lift von  $w$  in  $N(\mathbb{T})$  von Ordnung  $l$ . Die Multiplizität eines Eigenwerts von  $\text{Ad}(n_w)$  eingeschränkt auf einen Untervektorraum  $V$  von  $\mathfrak{g}$  werde mit  $\text{mult}_V(\zeta)$  bezeichnet. Dann gilt: Die Eigenwerte von  $\text{Ad}(n_w)$  auf  $\mathfrak{g}$  sind Einheitswurzeln von Ordnung  $l$ . Die Multiplizität  $\text{mult}_{\mathfrak{g}}(\zeta)$ , mit der ein Eigenwert  $\zeta$  auftritt, berechnet sich als

$$\text{mult}_{\mathfrak{g}}(\zeta) = \text{mult}_{\mathfrak{t}}(\zeta) + \sum_{\text{Orbiten } \mathfrak{o} \in \Phi/\langle w \rangle} \text{mult}_{\mathfrak{o}}(\zeta).$$

Dabei ist  $\text{mult}_{\mathfrak{o}}(\zeta)$  0 oder 1. Genauer ist  $\text{mult}_{\mathfrak{o}}(\zeta)$  genau dann gleich 1, wenn  $\zeta$  Nullstelle von  $f_{\mathfrak{o}}$  ist.

**Beweis:** Die Formel für  $\text{mult}_{\mathfrak{g}}(\zeta)$  folgt aus der Gleichung für das charakteristische Polynom von  $\text{Ad}(n_w)$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{t}^{\perp}$  aus Proposition 4.12. Die Aussage über die möglichen Werte von  $\text{mult}_{\mathfrak{o}}(\zeta)$  folgt aus der Separabilität der Polynome  $f_{\mathfrak{o}}$ .  $\square$

**Korollar 4.14.** Sei die Situation wie in Proposition 4.13. Dann gilt für die Anzahl  $n_{\zeta^i}(w_{\Delta})$  der Wurzeln  $\alpha \in \Phi$  mit  $\alpha(w_{\Delta}) = \zeta^i$

$$n_{\zeta^i}(w_{\Delta}) = \begin{cases} \text{mult}_{\mathfrak{g}}(1) - \dim \mathbb{T} & \text{falls } i \equiv 0 \pmod{l} \\ \text{mult}_{\mathfrak{g}}(\zeta_l^i) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es habe nun speziell jeder Orbit in  $\Phi$  unter  $\langle w \rangle$  dieselbe Länge  $\lambda = \text{ord}(w)$ , und  $m = |\Phi|/\lambda$  sei die Anzahl der Orbiten. Dann gilt

$$n_{\zeta^i}(w_{\Delta}) = \begin{cases} m - \dim \mathbb{T} & \text{falls } i \equiv 0 \pmod{l} \\ m + \text{mult}_{\mathfrak{t}}(\zeta_l^i) & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis:** Da  $w_{\Delta}$  und  $n_w$  konjugiert sind in  $G$ , haben die Endomorphismen  $\text{Ad}(w_{\Delta})$  und  $\text{Ad}(n_w)$  dieselben Eigenwerte. Die Eigenwerte von  $\text{Ad}(w_{\Delta})$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{t}^{\perp}$  stimmen aber wegen  $w_{\Delta} \in \mathbb{T}$  mit den Werten  $\alpha(w_{\Delta})$  überein. Der einzige Eigenwert von  $\text{Ad}(w_{\Delta})$  auf  $\mathfrak{t}$  ist 1, seine Multiplizität ist  $\dim \mathfrak{t} = \dim \mathbb{T}$ . Es folgen die Formeln für die Anzahl  $n_{\zeta}(w_{\Delta})$  von  $\Phi_{\zeta}(w_{\Delta})$  im allgemeinen Fall. Unter der zusätzlichen Voraussetzung über die Orbitlängen benutze man die Aussage von Proposition 4.12 über die Multiplizitäten der Eigenwerte von  $\text{Ad}(n_w)$  eingeschränkt auf  $\mathfrak{t}^{\perp}$ .  $\square$

Das Problem, das bleibt, besteht darin, die Orbitlängen  $\lambda_{[\alpha]}$  für die Operation von  $W_w$  auf  $\Phi$  zu bestimmen. Dies läßt sich im Fall, daß  $w$  ein Coxeterelement ist, allgemein beantworten (siehe Abschnitt 8.1). In den anderen Fällen muß man die Orbitlängen für jede einfache Gruppe und jede Konjugationsklasse von primitiven  $w$  einzeln bestimmen. Allerdings engen die beiden folgenden Aussagen die Möglichkeiten etwas ein.

**Proposition 4.15.** Sei  $\Phi$  die Menge der Wurzeln von  $G$  bezüglich  $T$ . Sei weiter  $w \in W$ . Dann ist die Länge jedes Orbits in  $\Phi$  unter  $\langle w \rangle$  ein Vielfaches der Ordnung eines Eigenwertes von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$ .

Die Proposition ist in Abschnitt 6.2 als Korollar 6.8 formuliert und auch dort bewiesen. Inhaltlich gehört die Aussage jedoch an diese Stelle.

**Proposition 4.16.** Seien  $w \in W$  und  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  die Menge der Wurzeln von  $\mathfrak{g}$  bezüglich  $\mathfrak{t}$ , also die Menge der Ableitungen der Elemente aus  $\Phi$ .  $w$  operiere auf die kanonische Weise auf  $\Phi_{\mathfrak{g}}$ , d.h.  $w(d\alpha) = d(w(\alpha))$ . Dann stimmen die charakteristischen Polynome und die Minimalpolynome der Operationen von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$  und auf  $\mathbb{Z}[\Phi_{\mathfrak{g}}] \otimes_{\mathbb{Z}} F$  überein.

**Beweis:** Da  $\dim_F(\mathbb{Z}[\Phi_{\mathfrak{g}}] \otimes F) = \dim_F(\mathfrak{t})$  gilt und  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  aus Homomorphismen  $\mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_a$  von Liealgebren besteht, die insbesondere Vektorraumhomomorphismen sind, läßt sich  $\mathbb{Z}[\Phi_{\mathfrak{g}}] \otimes F$  als Dualraum von  $\mathfrak{t}$  (im Sinne von  $F$ -Vektorräumen) auffassen. Die Operation von  $w$  auf  $\mathbb{Z}[\Phi_{\mathfrak{g}}] \otimes F$  ist dann gerade die von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$  induzierte Operation, also

$$w(\phi)(x) = \phi(wx)$$

für alle  $\phi \in \mathfrak{t}^* = \mathbb{Z}[\Phi_{\mathfrak{g}}] \otimes F$ . Die Behauptung über die Polynome folgt jetzt aus der entsprechenden Aussage aus der linearen Algebra.  $\square$





## Kapitel 5

# Der Zentralisator des baryzentrischen Punktes

Auf dem Unterraum  $\mathfrak{u}_\zeta = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta} \mathfrak{u}_\alpha \subset \mathfrak{g}$  operiert der Zentralisator  $Z_G(w_\Delta)$  von  $w_\Delta$  in  $G$  durch Ad. Die Struktur von  $Z_G(w_\Delta)$  ist nach [St2][3.5,Prop.4] bekannt:  $Z_G(w_\Delta)$  ist erzeugt von  $\mathbb{T}$ , den  $U_\alpha$  mit  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$  und Lifts  $n_w \in N(\mathbb{T})$  von den  $w \in \text{Stab}_W(w_\Delta)$ . Die Einskomponente  $Z_A := Z_G^\circ(w_\Delta)$  ist reduktiv und von  $\mathbb{T}$  und den  $U_\alpha$  mit  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$  erzeugt. Weiter bilden die  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$  das Wurzelsystem von  $Z_A$ , und es gilt  $\Phi_1(w_\Delta)^+ = \Phi^+ \cap \Phi_1(w_\Delta)$ .

**Proposition 5.1.** *Sei  $w \in W$  primitiv und  $w_\Delta$  der baryzentrische Punkt von  $w$ . Dann ist die Anzahl  $n_1(w_\Delta)$  der Wurzeln  $\alpha$  mit  $\alpha(w_\Delta) = 1$  gerade.*

**Beweis:** Es gilt  $n_1(w_\Delta) = |\Phi_1(w_\Delta)|$ , und die Kardinalität jedes Wurzelsystems ist gerade.  $\square$

### 5.1 Das Wurzelsystem von $Z_A^\circ$

Wir untersuchen zunächst die Struktur von  $\Phi_1(w_\Delta)$  genauer. Dazu benutzen wir wieder das Element  $w_A$  im abgeschlossenen Alkoven  $A$  (vgl. 4.2 und 4.3). Sei  $\Delta$  ein System einfacher Wurzeln. Die positive Wurzel maximaler Höhe  $\alpha^+$  bezüglich  $\Delta$  (genauer: ihr Negatives) spielt eine besondere Rolle. Daher führen wir an dieser Stelle noch zwei Koeffizienten  $a_{-\alpha^+} \in \frac{1}{7}\mathbb{Z}$  und  $b_{-\alpha^+} \in \mathbb{Z}$  ein: Sei  $\alpha^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \alpha$  und der baryzentrische Vektor  $w_A$  habe als Element von  $(\frac{1}{7}\mathbb{Z})^{|\Delta|}$  die Form  $w_A = (a_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$ . Dann sei

$$a_{-\alpha^+} := 1 - \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha,$$

$$b_{-\alpha^+} := 1.$$

Wegen Proposition 4.9 haben wir die Beziehung  $\alpha(w_\Delta) = \exp(2\pi i a_\alpha)$  für alle  $\alpha \in \Delta$ . Dies und die Alkovenbedingungen (4.2) haben folgende Konsequenzen für  $a_{-\alpha^+}$ :

$$0 \leq a_{-\alpha^+} \leq 1,$$

$$-\alpha^+(w_\Delta) = \exp(2\pi i a_{-\alpha^+})$$

Wir setzen noch  $\Delta_{\text{aff}} := \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ . Es gilt dann

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} b_\alpha \alpha = 0,$$

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} b_\alpha a_\alpha = 1.$$

**Lemma 5.2.** *Sei  $\Delta$  ein System einfacher Wurzeln von  $\Phi$ ,  $w \in W$  primitiv und anisotrop von Ordnung  $l$  und  $w_\Delta \in \mathbb{T}$  der baryzentrische Punkt bzw.  $w_A = (a_\alpha)_{\alpha \in \Delta} \in (\frac{1}{l}\mathbb{Z})^{|\Delta|}$  der baryzentrische Vektor von  $w$  bezüglich  $\Delta$  (vgl. 4.3). Dann ist eine nichtnegative ganzzahlige Linearkombination  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha$  genau dann eine Linearkombination von Wurzeln aus  $\Delta(w_\Delta) = \Delta \cap \Phi_1(w_\Delta)$ , wenn  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha = 0$  gilt.*

**Beweis:** Die Koordinaten  $a_\alpha$  des baryzentrischen Vektors  $w_A$  erfüllen nach Proposition 4.9 die Gleichung

$$\alpha(w_\Delta) = \exp(2\pi i a_\alpha).$$

Zusätzlich gelten die Alkovenbedingungen (4.2):  $a_\alpha \geq 0$  und  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha \leq 1$ . Daher läßt sich  $\Delta(w_\Delta)$  beschreiben als

$$\Delta(w_\Delta) = \{\alpha \in \Delta \mid a_\alpha = 0\}.$$

Also gilt  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha = 0$  für jede Linearkombination  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta(w_\Delta)} m_\alpha \alpha$  von Wurzeln aus  $\Delta(w_\Delta)$ . Ist umgekehrt  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha = 0$ , so folgt wegen  $m_\alpha a_\alpha \geq 0$ , daß  $m_\alpha = 0$  gilt für alle  $\alpha \notin \Delta(w_\Delta)$ .  $\square$

**Proposition 5.3.** *Sei  $\Delta$  ein System einfacher Wurzeln,  $\alpha^+$  die positive Wurzel maximaler Höhe bezüglich  $\Delta$  und  $\Delta_{\text{aff}} := \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ . Seien  $w \in W$  primitiv und anisotrop von Ordnung  $l$  und  $w_\Delta \in \mathbb{T}$  der baryzentrische Punkt bzw.  $w_A \in (\frac{1}{l}\mathbb{Z})^{|\Delta|}$  der baryzentrische Vektor von  $w$  bezüglich  $\Delta$  (vgl. 4.3). Wir setzen  $\Delta_{\text{aff}}(w_\Delta) := \Delta_{\text{aff}} \cap \Phi_1(w_\Delta)$ . Dann ist  $\Delta_{\text{aff}}(w_\Delta)$  ein System einfacher Wurzeln von  $\Phi_1(w_\Delta)$ . Ist weiter  $\beta_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha \alpha$  eine positive Wurzel mit  $\sum_{\alpha \in \Delta} n_\alpha a_\alpha = 1$  minimaler Höhe, so ist  $\Delta(w_\Delta) \cup \{\beta_0\}$  ein einfaches System für  $\Phi_1(w_\Delta)^+ = \Phi^+ \cap \Phi_1(w_\Delta)$ . Der Rang von  $\Phi_1(w_\Delta)$  ist gleich  $|\Delta(w_\Delta)| + 1$ , falls  $\alpha^+ \in \Phi_1(w_\Delta)$  gilt, und gleich  $|\Delta(w_\Delta)|$  sonst.*

**Beweis:** Sei  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha$  eine positive Wurzel. Dann gilt

$$\beta(w_\Delta) = \prod_{\alpha \in \Delta} \alpha(w_\Delta)^{m_\alpha} = \exp\left(2\pi i \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha\right).$$

Insbesondere liegt  $\beta$  genau dann in  $\Phi_1(w_\Delta)$ , wenn  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha \in \mathbb{Z}$  gilt. Wie man durch Inspektion (von z.B. [T2]) sieht, gilt  $m_\alpha \leq b_\alpha$  für alle  $\alpha \in \Delta$ . Zusammen mit den Alkovenbedingungen (4.2) für die  $a_\alpha$  folgt

$$(5.1) \quad 0 \leq \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha \leq \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha \leq 1.$$

Also liegt  $\beta$  genau dann in  $\Phi_1(w_\Delta)$ , wenn  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha$  gleich 0 oder 1 ist. Sei nun  $\beta \in \Phi_1(w_\Delta)$ . Wir unterscheiden die beiden Fälle  $\alpha^+ \in \Phi_1(w_\Delta)$  und  $\alpha^+ \notin \Phi_1(w_\Delta)$ . Im letzteren Fall gilt  $a_{-\alpha^+} \neq 0$ . Wegen  $\sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} b_\alpha a_\alpha = 1$  ist daher  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha < 1$ . Zusammen mit (5.1) folgt dann  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha = 0$ . Nach Lemma 5.2 beweist dies die Aussage im Fall  $\alpha^+ \notin \Phi_1(w_\Delta)$ . Man beachte hierbei noch, daß in diesem Fall  $\Delta_{\text{aff}}(w_\Delta) = \Delta(w_\Delta)$  gilt und keine Wurzel  $\beta_0$  existiert.

Es gelte nun  $\alpha^+ \in \Phi_1(w_\Delta)$ , d.h.  $a_{-\alpha^+}$  ist gleich 0 oder 1. Im Fall  $a_{-\alpha^+} = 1$  folgt wegen  $\sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} b_\alpha a_\alpha = 1$ , daß  $a_\alpha = 0$  ist für alle  $\alpha \in \Delta$ , also  $\Phi = \Phi_1(w_\Delta)$ . Dann wäre aber  $w_\Delta \in \bigcap_{\alpha \in \Phi} \text{Kern}(\alpha) = Z(G)$  schon ein zentrales Element, was im Widerspruch steht zur Primitivität von  $w$ . Also gilt  $a_{-\alpha^+} = 0$  und daher  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha = 1$ . Insbesondere existiert eine Wurzel  $\beta_0$  wie in der Behauptung beschrieben. Ist nun  $\beta \in \Phi_1(w_\Delta)$  mit  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha = 0$ , so läßt sich wieder Lemma 5.2 anwenden. Gilt  $\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha = 1$ , so ist  $\beta' := \alpha^+ - \beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m'_\alpha \alpha$  eine Summe einfacher Wurzeln in  $\Phi_1(w_\Delta)$  mit  $\sum_{\alpha \in \Delta} m'_\alpha a_\alpha = 0$ . Nach Lemma 5.2 ist  $\beta'$  eine Linearkombination von Wurzeln aus  $\Delta(w_\Delta)$  mit positivem Vorzeichen. Also läßt sich  $\beta = -\beta' - (-\alpha^+)$  schreiben als negative Linearkombination von Wurzeln aus  $\Delta_{\text{aff}}(w_\Delta)$ .

Es bleibt noch zu zeigen, daß  $\Delta(w_\Delta) \cup \{\beta_0\}$  ein einfaches System für  $\Phi_1(w_\Delta)^+$  ist, falls  $\alpha^+ \in \Phi_1(w_\Delta)$  gilt. Wegen  $\Phi_1(w_\Delta)^+ = \Phi^+ \cap \Phi_1(w_\Delta)$  sind alle Wurzeln aus  $\Delta(w_\Delta)$  einfach in  $\Phi_1(w_\Delta)^+$ . Wir haben

oben gesehen, daß es genügt, eine Wurzel  $\beta$  zu  $\Delta(w_\Delta)$  hinzuzunehmen, um ein einfaches System für  $\Phi_1(w_\Delta)$  zu erhalten. Wegen Lemma 5.2 muß für die Wurzel  $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha \alpha$

$$\sum_{\alpha \in \Delta} m_\alpha a_\alpha = 1$$

gelten. Sei nun  $\beta' = \sum_{\alpha \in \Delta(w_\Delta)} m'_\alpha \alpha \in \Phi_1(w_\Delta)^+$  beliebig. Dann ist  $\beta' - \beta$  eine Linearkombination von Wurzeln aus  $\Delta(w_\Delta)$ , denn  $\alpha^+ - \beta$  und  $\alpha^+ - \beta'$  sind beides Summen einfacher Wurzeln und daher auch  $\beta' - \beta = (\alpha^+ - \beta) - (\alpha^+ - \beta')$ . Also gilt

$$\beta' = \beta + \sum_{\alpha \in \Delta(w_\Delta)} (m'_\alpha - m_\alpha) \alpha.$$

Da  $\Delta(w_\Delta) \cup \{\beta\}$  ein einfaches System für  $\Phi_1(w_\Delta)^+$  ist, müssen die Koeffizienten  $m'_\alpha - m_\alpha$  nichtnegativ sein. Dafür muß notwendigerweise  $\text{ht}(\beta) \leq \text{ht}(\beta')$  gelten, also  $\beta$  minimale Höhe haben.  $\square$

## 5.2 Die Wurzel $\alpha^+$

Die Bestimmung des Wurzelsystems  $\Phi_1(w_\Delta)$  erlaubt uns die Bestimmung von  $|\Delta(w_\Delta)|$ . Um die Wurzeln in  $\Delta(w_\Delta)$  zu identifizieren und die Werte  $\alpha(w_\Delta)$  für die restlichen Elemente aus  $\Delta$  zu bestimmen, benutzen wir die längste positive Wurzel  $\alpha^+$ . Die schon mehrfach erwähnte Beziehung  $\alpha^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \alpha$  erlaubt es uns nämlich, auf kombinatorischem Weg die Werte  $\alpha(w_\Delta)$  zu bestimmen für alle einfachen Wurzeln  $\alpha$ .

**Proposition 5.4.** *Sei  $l$  die Ordnung von  $w$  und  $\zeta$  ein Eigenwert von  $\text{Ad}(w)$  auf  $\mathfrak{t}$  maximaler Ordnung. Gilt  $\zeta = \zeta_l^i$  für minimales positives  $i$ , so gilt  $\alpha^+(w_\Delta) = \zeta_l^j$  für ein  $j \geq l - i$ .*

**Beweis:** Wir nehmen an, die Aussage ist falsch. Dann gilt  $\alpha^+(w_\Delta) = \zeta_l^j$  für ein  $j$  mit  $0 < j < l - i$ . Wir betrachten nun die Menge  $\Phi_{\zeta^{-1}}(w_\Delta)$ . Da  $w_\Delta$  den Alkovenbedingungen (4.2) genügt und  $\alpha^+$  die längste positive Wurzel ist, gilt für alle positiven Wurzeln  $\alpha(w_\Delta) = \zeta_l^k$  für ein  $k$  mit  $0 \leq k < j < l - i$ . Folglich kann keine positive Wurzel in  $\Phi_{\zeta^{-1}}(w_\Delta)$  liegen, d.h.  $\Phi_{\zeta^{-1}}(w_\Delta) \subset \Phi^-$ . Nun ist aber  $\zeta$  ein Eigenwert von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$ , und wegen der Irreduzibilität der Kreisteilungspolynome folglich auch  $\zeta^{-1}$ . Also muß in  $\mathfrak{u}_{\zeta^{-1}} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{\zeta^{-1}}(w_\Delta)} \mathfrak{u}_\alpha$  ein halbeinfaches Element liegen. Andererseits sind wegen  $\Phi_{\zeta^{-1}}(w_\Delta) \subset \Phi^-$  alle Elemente in  $\mathfrak{u}_{\zeta^{-1}}$  nilpotent. Dies ist ein Widerspruch.  $\square$

Die Situation wird bedeutend einfacher, wenn  $\zeta_l$  als Eigenwert von  $w$  auftritt (wie es im Coxeterfall fast immer der Fall ist). Wir erhalten dann als Ergebnis:

**Korollar 5.5.** *Hat  $\zeta = \zeta_l$  Ordnung  $l = \text{ord}(w)$  in der vorigen Proposition, dann gilt  $\alpha^+(w_\Delta) = \zeta_l^{-1}$  oder  $\alpha^+(w_\Delta) = 1$ .*

## 5.3 Operation von $Z^\circ(w_\Delta)$ auf $\mathfrak{u}_\zeta$

Sei  $w \in W$  primitiv,  $w_\Delta$  der baryzentrische Punkt von  $w$  und  $\zeta$  ein Eigenwert von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$ . Dann operiert wie bereits am Anfang des Kapitels erwähnt der Zentralisator des baryzentrischen Punktes  $Z(w_\Delta)$  in  $G$  vermöge  $\text{Ad}$  auf  $\mathfrak{u}_\zeta = \bigoplus_{\alpha(w_\Delta)=\zeta} \mathfrak{u}_\alpha$ . Genauer operieren schon die  $F$ -wertigen Punkte auf  $\mathfrak{u}_\zeta$ , da  $\mathfrak{u}_\zeta$  bereits über  $F$  definiert ist. Wir wollen diese Operation nun ausnutzen, um das Minimalpolynom von  $\rho(v)$  genauer zu beschreiben für ein halbeinfaches Element  $v \in \mathfrak{u}_\zeta$  und eine Darstellung  $\rho$  von  $\mathfrak{g}$ .

Sei also  $v \in \mathfrak{u}_\zeta$  ein rationales halbeinfaches Element und  $\rho$  eine rationale Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Wie immer bezeichne  $\Phi_\zeta = \Phi_\zeta(w_\Delta)$  die  $\zeta$ -Wurzeln bezüglich  $w_\Delta$ , also die Menge  $\{\alpha \in \Phi \mid \alpha(w_\Delta) = \zeta\}$ , und

$n_\zeta = n_\zeta(w_\Delta)$  ihre Kardinalität. Wir wählen jetzt für jedes  $\alpha \in \Phi_\zeta(w_\Delta)$  ein rationales Element  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\zeta$ ; die  $x_\alpha$  seien ab jetzt fixiert. Wir schreiben dann  $v$  in der Form

$$v = \sum_{\alpha \in \Phi_\zeta} y_\alpha x_\alpha$$

für geeignete  $y_\alpha \in F$ . Sei weiter  $\mu_v$  das Minimalpolynom von  $\rho(v)$ . Das Minimalpolynom von  $\rho(x)$  für ein  $x \in \mathfrak{u}_\zeta$  ist invariant unter der Operation von  $Z^\circ(w_\Delta)$ , d.h. es gilt

$$\mu_v = \mu_{z.v}$$

für alle  $z \in Z^\circ(w_\Delta)$ , wenn  $z.v = \text{Ad}(z)(v)$  ist für beliebiges  $z \in Z^\circ(w_\Delta)$ .  $\mu_v$  hat die Form

$$\mu_v(X) = \sum_i P_i(\underline{Y}) X^i$$

für Polynome  $P_i \in F[X_1, \dots, X_{n_\zeta}]$  und  $\underline{Y} = (y_\alpha)_{\alpha \in \Phi_\zeta}$ . Wegen der Invarianz von  $\mu_v$  unter  $Z^\circ(w_\Delta)$  müssen die  $P_i$  ebenfalls invariant sein unter  $Z^\circ(w_\Delta)$ .

$Z^\circ(w_\Delta)$  wird erzeugt von  $\mathbb{T}$  und den  $U_\alpha$  mit  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$ . Wir betrachten zunächst die Operation von  $\mathbb{T}$  auf den  $P_i$ . Für  $t \in \mathbb{T}$  gilt

$$\text{Ad}(t) \left( \sum_{\alpha \in \Phi_\zeta} y_\alpha x_\alpha \right) = \sum_{\alpha \in \Phi_\zeta} \alpha(t) y_\alpha x_\alpha.$$

Die Operation von  $\mathbb{T}$  auf den  $P_i$  ist eine skalare Operation auf den Monomen von  $P_i$ . Also müssen bereits diese invariant sein unter  $\mathbb{T}$ . Sei  $J$  eine Teilmenge von  $\Phi_\zeta$  und  $\prod_{\alpha \in J} y_\alpha^{m_\alpha}$  ein Monom von  $P_i$ , dann muß gelten

$$\prod_{\alpha \in J} \alpha(t)^{m_\alpha} \prod_{\alpha \in J} y_\alpha^{m_\alpha} = \prod_{\alpha \in J} (\alpha(t) y_\alpha)^{m_\alpha} = \prod_{\alpha \in J} y_\alpha^{m_\alpha}$$

für alle  $t \in \mathbb{T}$ . Es folgt  $\prod_{\alpha \in J} \alpha(t)^{m_\alpha} = 1$  für alle  $t \in \mathbb{T}$  oder

$$\sum_{\alpha \in J} m_\alpha \alpha = 0.$$

**Proposition 5.6.** *Sei  $w \in W$  primitiv,  $w_\Delta$  der baryzentrische Punkt von  $w$  und  $\zeta$  ein Eigenwert von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$ . Weiter sei  $v \in \mathfrak{u}_\zeta$  ein rationales halbeinfaches Element und  $\rho$  eine rationale Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Sei für jedes  $\alpha \in \Phi_\zeta(w_\Delta)$  ein rationales Element  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$  fest gewählt und  $v = \sum_{\alpha \in \Phi_\zeta} y_\alpha x_\alpha$  für geeignete  $y_\alpha \in F$ . Dann sind die Koeffizienten des Minimalpolynoms von  $\rho(v)$  Polynome  $P_i$  in den  $y_\alpha$ , und für jedes in einem  $P_i$  vorkommende Monom  $\prod_{\alpha \in J} y_\alpha^{m_\alpha}$ ,  $J \subset \Phi_\zeta(w_\Delta)$ , gilt  $\sum_{\alpha \in J} m_\alpha \alpha = 0$ .*

# Kapitel 6

## Darstellungen

Wir werden für die in dieser Arbeit betrachteten einfachen spaltenden Gruppen jeweils eine geeignete Darstellung angeben, mit deren Hilfe wir im zweiten Teil der Arbeit die Fixpunktmenge von  $T(F)$  bestimmen werden. Aber auch zur expliziten Beschreibung der Tori sind die Darstellungen sehr nützlich. Wie in Kapitel 2 beschrieben wollen wir die  $F$ -wertigen Punkte von  $T$  im wesentlichen ausdrücken als Polynome in einem Element  $\mathfrak{v} = \rho(v)$  für einen rationalen Eigenvektor  $v \in \mathfrak{g}$  von  $w$  und eine rationale Darstellung  $\rho$  von  $\mathfrak{g}$ . Die Koeffizienten der Polynome müssen gewissen Bedingungen genügen, damit  $T \hookrightarrow G$  gilt. Diese Bedingungen liefern dann eine algebraische Beschreibung von  $T$  und lassen sich mit Hilfe von Darstellungen ermitteln.

Alle vorgestellten Darstellungen  $\rho$  haben die Eigenschaft, daß  $\rho(G)$  die Automorphismengruppe einer Multilinearform auf einem Vektorraum  $V$  oder der Schnitt von solchen Gruppen ist. Daher werden wir im ersten Teil des Kapitels untersuchen, welche Bedingungen in diesem Fall erfüllt sein müssen, damit Polynome in  $\mathfrak{v}$  schon in  $G(F)$  liegen.

Im letzten Teil dieses Kapitels geben wir explizit die Darstellungen an, die wir später verwenden werden.

### 6.1 Multilinearformen

In fast allen Darstellungen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, handelt es sich bei den auftretenden Multilinearformen um Bi- und Trilinearformen. Nur im Fall  $G = SL_n$  ist die Darstellung durch eine Multilinearform vom Grad  $n$  gegeben.

Für die Untersuchungen in diesem Abschnitt spielt der Grad der Multilinearformen jedoch keine Rolle:  $k$ -Multilinearformen lassen sich für beliebiges  $k$  völlig analog behandeln, allerdings ist mit der gleichzeitigen Behandlung eine etwas aufwendigere Notation verbunden.

Sei  $V$  ein  $F$ -Vektorraum der endlichen Dimension  $d$  und  $K$  eine  $k$ -Multilinearform auf  $V$ . Genauer schreiben wir im folgenden  $K^k : V^k \rightarrow F$  für die  $k$ -Multilinearform. Die Gruppe  $GL(V)$  operiert komponentenweise auf  $V^k$ . Für ein Element  $v = (v_1, \dots, v_k) \in V^k$  und ein  $g \in \text{End}(V)$  sei  $g \odot_i v$  das Element aus  $V^k$ , das durch Anwendung von  $g$  auf die  $i$ -te Komponente von  $v$  entsteht, also

$$g \odot_i v = (v_1, \dots, v_{i-1}, gv_i, v_{i+1}, \dots, v_k).$$

Sei  $G \subset GL(V)$  die Automorphismengruppe von  $K^k$ , also die über  $F$  definierte algebraische Gruppe mit

$$G(E) = \{g \in GL(V \otimes_F E) \mid \forall v \in (V \otimes_F E)^k : K^k(gv) = K^k(v)\}$$

für eine  $F$ -Algebra  $E$ . Die Form  $K^k$  wird dabei auf die offensichtliche Weise auf  $V \otimes_F E$  ausgedehnt. Die Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  läßt sich beschreiben durch

$$\mathfrak{g}(E) = \{g \in \text{End}(V \otimes_F E) \mid \forall v \in (V \otimes_F E)^k : \sum_{i=1}^k K^k(g \odot_i v) = 0\}.$$

Wir schreiben kurz  $G$  bzw.  $\mathfrak{g}$  für  $G(\bar{F})$  bzw.  $\mathfrak{g}(\bar{F})$  und  $\bar{V}$  für  $V \otimes_F \bar{F}$ . Nach Basiswahl identifizieren wir  $V$  mit  $F^d$ . Die Gruppen  $GL(V \otimes_F E)$  bzw.  $\text{End}(V \otimes_F E)$  lassen sich dann identifizieren mit  $GL(d, E)$  bzw.  $\mathcal{M}(d, E)$  für jede  $F$ -Algebra  $E$ . Man hat für die  $E$ -wertigen Punkte von  $G$  bzw.  $\mathfrak{g}$  dann

$$\begin{aligned} G(E) &= G \cap GL(d, E) \\ \mathfrak{g}(E) &= \mathfrak{g} \cap \mathcal{M}(d, E). \end{aligned}$$

Sei  $\mathfrak{v}$  ein halbeinfaches Element aus  $\mathfrak{g}(F)$ , dessen Minimalpolynom die Form  $X^j \mu(X)$  hat für ein Polynom  $\mu \in F[X]$  mit  $X \nmid \mu$  und  $j = 0, 1$ . Sei  $a_0 \neq 0$  der Koeffizient des konstanten Terms von  $\mu$ .  $\mathfrak{A}_E$  sei die  $E$ -Algebra  $\mathfrak{A}_E = E[X]/\mu$ , und  $\mathfrak{v}_0$  sei definiert durch

$$\mathfrak{v}_0 := \frac{1}{a_0}(-\mu(\mathfrak{v}) + a_0).$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}\mathfrak{v}_0 &= \mathfrak{v}_0\mathfrak{v} = \mathfrak{v} \\ \mathfrak{v}_0^2 &= \mathfrak{v}_0 \end{aligned}$$

Die erste Eigenschaft gilt wegen  $\mathfrak{v}\mu(\mathfrak{v}) = 0$ . Die zweite Eigenschaft ist eine direkte Folge aus der ersten, denn wegen  $X \mid (\mu - a_0)$  läßt sich  $\mathfrak{v}_0$  als Vielfaches von  $\mathfrak{v}$  schreiben. Man beachte noch, daß auch  $1 - \mathfrak{v}_0$  idempotent ist.

Wir definieren eine Abbildung  $\phi_{\mathfrak{v}, E} : E[X] \rightarrow \mathcal{M}(d, E)$  als  $E$ -lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto \mathfrak{v}_0 \\ X^i &\mapsto \mathfrak{v}^i. \end{aligned}$$

Für ein Polynom  $P \in E[X]$  mit konstantem Koeffizienten  $p_0$  läßt sich  $\phi_{\mathfrak{v}, E}(P)$  auch beschreiben als

$$\phi_{\mathfrak{v}, E}(P) = P(\mathfrak{v}) + p_0(\mathfrak{v}_0 - 1).$$

**Bemerkung 6.1.** Die Abbildung  $\phi_{\mathfrak{v}, E} : E[X] \rightarrow \mathcal{M}(d, E)$  hat folgende Eigenschaften:

- (i)  $\phi_{\mathfrak{v}, E}$  ist linear und multiplikativ.
- (ii)  $\phi_{\mathfrak{v}, E}(1) = \mathfrak{v}_0$ ,  $\text{Kern}(\phi_{\mathfrak{v}, E}) = (\mu)$ .
- (iii) Für alle  $P \in E[X]$  gilt  $\phi_{\mathfrak{v}, E}(P)(1 - \mathfrak{v}_0) = 0$ .

**Beweis:** Die Linearität und die Gleichung  $\phi_{\mathfrak{v}, E}(1) = \mathfrak{v}_0$  sind klar (man verwende die obige alternative Darstellung von  $\phi_{\mathfrak{v}, E}$ ). Die Eigenschaft (iii) folgt aus  $\mathfrak{v}\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}$  und  $\mathfrak{v}_0^2 = \mathfrak{v}_0$ . Die Multiplikativität von  $\phi_{\mathfrak{v}, E}$  folgt direkt aus (iii) und der Idempotenz von  $1 - \mathfrak{v}_0$ : Seien  $P, Q \in E[X]$  mit konstanten Koeffizienten  $p_0$  bzw.  $q_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \phi_{\mathfrak{v}, E}(PQ) &= (PQ)(\mathfrak{v}) + p_0q_0(\mathfrak{v}_0 - 1) \\ &= \left(P(\mathfrak{v}) + p_0(\mathfrak{v}_0 - 1)\right) \left(Q(\mathfrak{v}) + q_0(\mathfrak{v}_0 - 1)\right) \\ &= \phi_{\mathfrak{v}, E}(P)\phi_{\mathfrak{v}, E}(Q). \end{aligned}$$

Wegen (i) ist  $\text{Kern}(\phi_{\mathfrak{v},E})$  ein Ideal in  $E[X]$ , das offensichtlich  $\mu$  enthält. Da  $\mu$  das Minimalpolynom von  $\mathfrak{v}$  und  $\phi_{\mathfrak{v},E}$  ein Polynom in  $\mathfrak{v}$  ist, folgt  $\text{Kern}(\phi_{\mathfrak{v},E}) = (\mu)$ .  $\square$

Sei nun  $\Phi_{\mathfrak{v},E} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathcal{M}(d, E)$  definiert durch

$$\Phi_{\mathfrak{v},E}([P]) = \phi_{\mathfrak{v},E}(P) + 1 - \mathfrak{v}_0.$$

$\Phi_{\mathfrak{v},E}$  ist wohldefiniert, injektiv, multiplikativ und  $\Phi_{\mathfrak{v},E}([1]) = 1$ . Diese Eigenschaften folgen aus Bemerkung 6.1: Die Wohldefiniertheit folgt aus 6.1(i) und (ii), die Multiplikativität aus (i) und (iii). Die Injektivität ergibt sich aus (i) und (ii), denn aus  $\Phi_{\mathfrak{v},E}([P]) - \Phi_{\mathfrak{v},E}([Q])$  folgt wegen (i)  $\phi_{\mathfrak{v},E}([P-Q]) = 0$ , also  $[P-Q] \in \text{Kern}(\phi_{\mathfrak{v},E}) = (\mu)$ .  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  ist aber im allgemeinen nicht linear; dies ist der Fall genau dann, wenn  $\mathfrak{v}_0 = 1$  (und damit das Minimalpolynom von  $\mathfrak{v}$  teilerfremd zu  $X$ ) ist.

Wir wollen untersuchen, wann  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  schon Werte in  $G(E)$  hat. Wegen  $G(E) = G \cap GL(d, E)$  und  $\text{Bild}(\Phi_{\mathfrak{v},E}) \subset \mathcal{M}(d, E)$  ist dies äquivalent zu der Frage, wann  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  Werte in  $G$  hat. Dazu muß für ein Polynom  $P \in E[X]$  gelten

$$(6.1) \quad K^k(\Phi_{\mathfrak{v},E}([P])u) = K^k(u)$$

für alle  $u \in \bar{V}^k$ . Da  $\mathfrak{v}$  halbeinfach ist, können wir  $\bar{V}$  zerlegen in die Eigenräume bezüglich  $\mathfrak{v}$ . Sei  $\mathcal{E}_i$  der Eigenraum zum Eigenwert  $x_i$ . Wegen der Linearität von  $K^k$  können wir in (6.1) dann annehmen, daß jede Komponente  $u_i \in \bar{V}$  von  $u = (u_i)_{i=1, \dots, k}$  schon in einem Eigenraum  $\mathcal{E}_i$  liegt.

Da  $\mathfrak{v}$  in  $\mathfrak{g}$  liegt, gilt

$$\sum_{i=1}^k K^k(\mathfrak{v} \odot_i u) = 0.$$

Wegen  $\mathfrak{v}u_i = x_i u_i$  folgt

$$(6.2) \quad \left( \sum_{i=1}^k x_i \right) K^k(u) = 0.$$

Wir unterscheiden zwei Fälle. Ist  $K^k(u) = 0$ , so folgt dies wegen der Linearität auch für die linke Seite von (6.1), d.h. aus (6.1) folgt keine Bedingung an  $P$ . Sonst gilt  $\sum_{i=1}^k x_i = 0$ . In diesem Fall verwenden wir folgende Aussage.

**Lemma 6.2.** *Sei  $u$  ein Eigenvektor von  $\mathfrak{v}$  zum Eigenwert  $x$  und  $v_1, \dots, v_{k-1} \in \bar{V}$  beliebig. Sei*

$$v := (v_1, \dots, \underset{i}{u}, \dots, v_{k-1}) \in \bar{V}^k.$$

Dann gilt

$$K^k(\Phi_{\mathfrak{v},E}([P]) \odot_i v) = \begin{cases} K^k(v) & \text{falls } x = 0 \\ P(x)K^k(v) & \text{sonst} \end{cases}$$

**Beweis:** Sei  $p_0$  der konstante Koeffizient von  $P$ . Nach Definition von  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  hat man dann

$$\Phi_{\mathfrak{v},E}([P]) = \phi_{\mathfrak{v},E}(P) + 1 - \mathfrak{v}_0 = (P - p_0)(\mathfrak{v}) + p_0 \mathfrak{v}_0 + 1 - \mathfrak{v}_0.$$

Nun gilt

$$\mathfrak{v}_0 u = \frac{1}{a_0}(-\mu(\mathfrak{v}) + a_0)u = \frac{1}{a_0}(-\mu(x_i) + a_0)u.$$

Ist  $x = 0$ , so folgt  $\mathfrak{v}_0 u = \frac{1}{a_0}(-a_0 + a_0)u = 0$ . Gilt  $x \neq 0$ , so ist  $x$  als Nullstelle von  $X^j \mu(X)$  schon Nullstelle von  $\mu(X)$ , und wir erhalten  $\mathfrak{v}_0 u = \frac{1}{a_0}(a_0)u = u$ .  $u$  ist also immer Eigenvektor von  $\mathfrak{v}_0$ , und zwar zum Eigenwert 0, falls  $x = 0$ , und zum Eigenwert 1 sonst.

Mit dieser Information können wir jetzt  $\Phi_{\mathfrak{v},E}([P])u$  berechnen. Sei zunächst  $x = 0$ . Dann gilt

$$\Phi_{\mathfrak{v},E}([P])u = ((P - p_0)(\mathfrak{v}) + (p_0 - 1)\mathfrak{v}_0 + 1)u = (P - p_0)(x)u + u = u.$$

Ist  $x \neq 0$ , so gilt

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathfrak{v},E}([P])u &= ((P - p_0)(\mathfrak{v}) + (p_0 - 1)\mathfrak{v}_0 + 1)u \\ &= (P - p_0)(x)u + (p_0 - 1)u + u \\ &= (P - p_0)(x)u + p_0 u \\ &= P(x)u. \end{aligned}$$

□

Wir fassen unser Ergebnis abschließend zusammen.

**Proposition 6.3.** *Sei  $[P] \in \mathfrak{A}_E$ . Dann liegt das Bild von  $[P]$  unter der Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v},E} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathcal{M}(d, E)$  genau dann in  $G(E)$ , wenn für alle Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_k \in \bar{V}$  von  $\mathfrak{v}$  zu den Eigenwerten  $x_1, \dots, x_k$  gilt:*

$$K^k(u_1, \dots, u_k) = 0 \text{ oder aus } \sum_{i=1}^k x_i = 0 \text{ folgt } \prod_{x_i \neq 0} P(x_i) = 1.$$

**Beweis:** Wir müssen (6.1) zeigen für beliebiges  $u \in \bar{V}^k$ . Wir können uns dabei wie zuvor beschrieben auf den Fall reduzieren, daß jede Komponente  $u_i$  von  $u \in \bar{V}^k$  Eigenvektor von  $\mathfrak{v}$  zum Eigenwert  $x_i$  ist. Aus Lemma 6.2 folgt

$$K^k(\Phi_{\mathfrak{v},E}([P])u) = \prod_{x_i \neq 0} P(x_i) K^k(u).$$

Die rechte Seite stimmt genau dann mit  $K^k(u)$  überein, wenn  $K^k(u) = 0$  oder  $\prod_{x_i \neq 0} P(x_i) = 1$  gilt. Ist  $K^k(u) \neq 0$ , so folgt wegen Gleichung (6.2) aber  $\sum_{i=1}^k x_i = 0$ . Dies zeigt die Behauptung. □

Wir werden später im Beweis von Satz 10.2 mit einer stärkeren (aber nach Proposition 6.3 hinreichenden) Bedingung arbeiten, um zu zeigen, daß der von uns konstruierte Torus in  $G$  liegt:

**Korollar 6.4.** *Sei  $[P] \in \mathfrak{A}_E$ . Wenn für alle Eigenvektoren  $u_1, \dots, u_k \in \bar{V}$  von  $\mathfrak{v}$  zu den Eigenwerten  $x_1, \dots, x_k$  gilt:*

$$\text{Aus } \sum_{i=1}^k x_i = 0 \text{ folgt } \prod_{x_i \neq 0} P(x_i) = 1,$$

*dann liegt das Bild von  $[P]$  unter der Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v},E} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathcal{M}(d, E)$  in  $G(E)$ .*

**Beweis:** Offensichtlich ist diese Bedingung stärker als die in Proposition 6.3 formulierte, also hinreichend für die gewünschte Aussage. □

**Bemerkung 6.5.** *Wenn alle  $x_i = 0$  sind, ist die Bedingung aus Korollar 6.4 trivialerweise erfüllt.*

**Beispiel 6.6.** In den für uns relevanten Fällen  $k = 2, 3$ ,  $\dim_{\bar{F}} \bar{V}$  ergibt sich die folgende Situation.



- (i) Im Fall  $k = 2$  ist  $K = K^2$  eine Bilinearform. Wegen Bemerkung 6.5 bleibt nur der Fall  $0 \neq x_1 = -x_2$  zu betrachten. Die Bedingung aus Korollar 6.4 besagt dann, daß für das Polynom  $P$

$$P(x)P(-x) = 1$$

gelten muß für jede Wahl eines Eigenwerts  $x \neq 0$  von  $\mathfrak{v}$ , so daß  $-x$  ebenfalls Eigenwert von  $\mathfrak{v}$  ist.

- (ii) Im Fall  $k = 3$  ist  $K = K^3$  eine Trilinearform. Es bleiben zwei Fälle zu untersuchen. Entweder ist genau ein  $x_i = 0$ , oder alle drei Eigenwerte sind von null verschieden. Die Bedingung aus Korollar 6.4 besagt dann, daß für das Polynom  $P$

$$\begin{aligned} P(x_1)P(x_2) &= 1 \\ P(x_1)P(x_2)P(x_3) &= 1 \end{aligned}$$

muß gelten für alle Wahlen von zwei bzw. drei Eigenwerten mit  $x_1 + x_2 = 0$  bzw.  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ .

- (iii) Sei  $k = \dim_{\bar{F}} \bar{V}$  und  $K^k : \bar{V}^k \rightarrow \bar{F}$  die Determinantenfunktion. 0 tauche nicht als Eigenwert von  $\mathfrak{v}$  auf. Sind zwei  $x_i$  gleich, so sind die zugehörigen Eigenvektoren  $u_i$  linear abhängig und daher  $K^k(u) = 0$  für jedes  $k$ -Tupel von Eigenvektoren von  $\mathfrak{v}$ , in dem die beiden  $u_i$  auftauchen. Nach Korollar 6.3 bleibt also nur der Fall zu untersuchen, daß alle  $x_i$  paarweise verschieden sind.

Welchen Bedingungen an  $P$  dies in den jeweiligen Fällen (i)-(iii) entspricht, hängt von den tatsächlich auftretenden Eigenwerten  $x_i$  sowie der Algebra  $\mathfrak{A}_E$  ab und muß in jedem Fall einzeln bestimmt werden.

## 6.2 Gewichte

Nach Proposition 6.3 benötigen wir Informationen über die Eigenwerte von  $\mathfrak{v}$ . Diese als auch die Struktur der Algebra  $\mathfrak{A}_E$  (siehe Kapitel 7) sind kodiert im Minimalpolynom  $\mu$  von  $\mathfrak{v}$ . In unserem Fall ist  $\mathfrak{v}$  das Bild eines Eigenvektors  $v \in \mathfrak{g}$  von  $\text{Ad}(w_\Delta)$  zum Eigenwert  $\zeta$  unter einer Darstellung von  $\mathfrak{g}$ . Wir werden hier untersuchen, welche Gestalt  $\mu$  in dieser Situation hat. Die Gestalt hängt natürlich von der Darstellung ab.

Sei  $\rho$  eine rationale Darstellung von  $\mathfrak{g}$  mit zugrundeliegendem Vektorraum  $V$ . Sei  $\Lambda$  die Menge der Gewichte von  $\rho$ , d.h. die Menge aller  $\chi \in \text{Hom}(\mathfrak{t}, \mathbb{G}_a)$ , für die der Raum

$$V_\chi := \{v \in V \mid \forall t \in \mathfrak{t} : \rho(t)v = \chi(t)v\}$$

nicht trivial ist.  $V$  ist die direkte Summe aller Gewichtsräume  $V_\chi$ . Die Operation der Weylgruppe  $W$  von  $G$  auf  $\mathfrak{t}$  vermöge  $\text{Ad}$  induziert eine Operation von  $W$  auf  $\Lambda$ .

Sei jetzt  $w \in W$  und  $v \in \mathfrak{t}$  Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$ . Das Minimalpolynom von  $\rho(v)$  hat die Form

$$\mu(X) = \prod_{\chi \in \Lambda_v} (X - \chi(v)),$$

wo  $\Lambda_v$  ein Vertretersystem für die Äquivalenzrelation  $\chi_1 \sim \chi_2 \Leftrightarrow \chi_1(v) = \chi_2(v)$  ist.

Wir nutzen jetzt die Operation von  $W$  aus. Für  $w \in W$  ist  $w(\chi)$  gegeben durch

$$w(\chi)(x) = \chi(wx)$$

für  $x \in \mathfrak{t}$ . Für den Eigenvektor  $v$  erhalten wir

$$(6.3) \quad w(\chi)(v) = \chi(wv) = \chi(\zeta v) = \zeta \chi(v).$$

Sei jetzt  $\mathfrak{o}$  ein Orbit in  $\Lambda$  unter  $W_w := \langle w \rangle$ . Sei  $\chi$  ein Vertreter von  $\mathfrak{o}$  und  $\nu$  die Orbitlänge. Dann gilt wegen (6.3)

$$\chi(v) = w^\nu(\chi)(v) = \zeta^\nu \chi(v).$$

Es folgt  $\chi(v) = 0$  oder  $\text{ord}(\zeta) \mid \nu$ . Dieses wichtige Ergebnis halten wir fest.

**Proposition 6.7.** *Sei  $\rho$  eine rationale, endlich-dimensionale Darstellung von  $\mathfrak{g}$  über  $V$  und  $\Lambda$  die Menge der Gewichte von  $\rho$ . Sei  $w$  ein Element in  $W$ ,  $\mathfrak{o}$  ein Orbit in  $\Lambda$  unter  $w$  der Länge  $\lambda$  und  $\chi$  ein Vertreter von  $\mathfrak{o}$ . Dann gilt: Ist  $\chi \neq 0$ , so existiert ein Eigenwert  $\zeta$  von  $w$  mit  $\text{ord}(\zeta) \mid \lambda$ .*

**Beweis:** Wir haben oben gesehen, daß für einen Eigenvektor  $v \in \mathfrak{t}$  von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  entweder  $\chi(v) = 0$  oder  $\text{ord}(\zeta) \mid \lambda$  gilt. Da  $w$  diagonalisierbar ist, wird  $\mathfrak{t}$  aufgespannt von Eigenvektoren von  $w$ . Falls also  $\text{ord}(\zeta) \nmid \lambda$  gilt für alle auftretenden Eigenwerte  $\zeta$  von  $w$ , so folgt  $\chi(v) = 0$  für alle  $t \in \mathfrak{t}$ , also  $\chi = 0$ .  $\square$

Das folgende Korollar dieser Aussage haben wir bereits in Abschnitt 4.4 als Proposition 4.15 erwähnt, um Aussagen über die Orbitlängen in  $\Phi$  zu erhalten.

**Korollar 6.8.** *Seien  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  die Wurzeln von  $\mathfrak{g}$  bezüglich  $\mathfrak{t}$  und  $\Phi$  die Wurzeln von  $G$  bezüglich  $T$ . Sei weiter  $w \in W$ . Dann ist die Länge jedes Orbits in  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  bzw.  $\Phi$  unter  $\langle w \rangle$  ein Vielfaches der Ordnung eines Eigenwertes von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$ .*

**Beweis:** Die Aussage für  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  folgt aus der vorigen Proposition, wenn man für  $\rho$  die adjungierte Darstellung von  $\mathfrak{g}$  wählt und beachtet, daß die Elemente von  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  genau die von null verschiedenen Gewichte sind. Die Aussage für  $\Phi$  erhält man, weil die durch Differentiation gegebene Abbildung  $\Phi \rightarrow \Phi_{\mathfrak{g}}$  bijektiv und die Differentiation funktoriell ist; wegen der Funktorialität gilt nämlich

$$d(w(\alpha)) = d(\text{Int}(n_w) \circ \alpha) = d(\text{Int}(n_w)) \circ (d\alpha) = \text{Ad}(n_w) \circ (d\alpha) = w(d\alpha)$$

für  $\alpha \in \Phi$  und einen Lift  $n_w \in N(T)$  von  $w$ .  $\square$

Wir kommen zurück zu unseren Überlegungen bezüglich des Minimalpolynoms. Existiert ein  $\chi \in \Lambda$  mit  $\chi(v) = 0$ , so ist der Beitrag aller solchen  $\chi$  zu  $\mu$  der Faktor  $X$ . Ansonsten tragen nur Orbits zu  $\mu$  bei, deren Länge ein Vielfaches von  $\text{ord}(\zeta)$  ist. Für einen solchen Orbit  $\mathfrak{o}$  mit Repräsentant  $\chi$  und  $\chi(v) \neq 0$  gilt nun wegen (6.3)

$$w^{\text{ord}(\zeta)}(\chi)(v) = \zeta^{\text{ord}(\zeta)} \chi(v) = \chi(v).$$

Außerdem sind die Werte  $w^i(\chi)(v)$  paarweise verschieden für  $i = 1, \dots, \text{ord}(\zeta)$ . Also ist der von  $\mathfrak{o}$  herkommende Beitrag  $\mu_{\mathfrak{o}}$  zu  $\mu$

$$\mu_{\mathfrak{o}}(X) = \prod_{i=1}^{\text{ord}(\zeta)} (X - w^i(\chi)(v)) = \prod_{i=1}^{\text{ord}(\zeta)} (X - \zeta^i \chi(v)) = X^{\text{ord}(\zeta)} - \chi(v)^{\text{ord}(\zeta)}.$$

Für zwei verschiedene Orbits  $\mathfrak{o}_1$  und  $\mathfrak{o}_2$  sind die Mengen  $\mathfrak{o}_i(v) := \{\chi(v) \mid \chi \in \mathfrak{o}_i\}$  entweder identisch oder disjunkt. Wir fassen unser Ergebnis zusammen.

**Proposition 6.9.** *Sei  $\rho$  eine rationale Darstellung von  $\mathfrak{g}$  mit zugrundeliegendem Vektorraum  $V$ .  $\Lambda$  bezeichne die Menge der Gewichte von  $d\rho$ . Sei weiter  $w \in W$  und  $v \in \mathfrak{t}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$ . Für einen  $\langle w \rangle$ -Orbit  $\mathfrak{o}$  in  $\Lambda$  sei  $\mu_{\mathfrak{o}}$  das zu  $\mathfrak{o}$  gehörige Polynom  $\mu_{\mathfrak{o}}(X) = X^{\text{ord}(\zeta)} - \chi_{\mathfrak{o}}(v)^{\text{ord}(\zeta)}$ . Schließlich bezeichne  $(\Lambda/w)_v$  ein Vertretersystem für die Äquivalenzrelation  $\mathfrak{o}_1 \sim \mathfrak{o}_2 : \Leftrightarrow \mathfrak{o}_1(v) = \mathfrak{o}_2(v)$  auf den  $\langle w \rangle$ -Orbits  $\mathfrak{o}$  in  $\Lambda$ , für die  $\mathfrak{o}(v) \neq \{0\}$  und  $\text{ord}(\zeta) \mid |\mathfrak{o}|$  gilt.*

Setze  $\varepsilon = 1$ , außer falls  $\chi(v) \neq 0$  gilt für alle Gewichte  $\chi \in \Lambda$ . In diesem Fall setze  $\varepsilon = 0$ . Dann hat das Minimalpolynom  $\mu$  von  $d\rho(v)$  die Gestalt

$$\mu(X) = X^\varepsilon \prod_{\mathfrak{o} \in (\Lambda/w)_v} \mu_{\mathfrak{o}}(X).$$

**Korollar 6.10.** Sei die Situation wie in Proposition 6.9. Dann ist  $\mu$  separabel.

**Beweis:** Nach Definition von  $(\Lambda/w)_v$  sind die Nullstellen von  $\mu$  paarweise verschieden.  $\square$

**Bemerkung 6.11.** Gilt  $v_1 = \text{Ad}(g)(v_2)$  für ein  $g \in G$ , so stimmen die Minimalpolynome von  $\rho(v_1)$  und  $\rho(v_2)$  überein.

Die Proposition 6.9 macht deutlich, daß es von Vorteil ist, Darstellungen möglichst kleiner Dimension zu verwenden. In diesem Fall gibt es nur wenige Gewichte und damit Orbiten, so daß  $\mu$  nur aus wenigen Komponenten besteht. Ein gutes Beispiel hierfür ist die  $SL_n$ .

**Beispiel 6.12.** Wir verwenden die Standarddarstellung für  $SL_n$  (siehe Abschnitt 6.6.1).  $\mathfrak{t}$  hat dann genau  $n$  Gewichte, die den  $n$  Diagonaleinträgen entsprechen. Es ist leicht zu sehen, daß als Eigenwert von  $\text{Ad}(n_w)$  eine primitive  $n$ -te Einheitswurzel  $\zeta_n$  auftaucht. Sei  $v \in \mathfrak{t}$  wie oben beschrieben ein Eigenvektor von  $\text{Ad}(n_w)$ . Wegen  $v \neq 0$  existiert mindestens ein Gewicht  $\chi$  mit  $\chi(v) \neq 0$ . Folglich gibt es einen Gewichtsorbit der Länge  $n$ . In der Tat kann es nur diesen einen Orbit geben. Nach Proposition 6.9 folgt

$$\mu(X) = X^n - \chi(v)^n$$

für irgendein Gewicht  $\chi$ .

### 6.3 Einige Minimalpolynome von Eigenvektoren von $w$

In diesem Abschnitt werden wir eine Übersicht über die Struktur der Minimalpolynome für die Elemente  $\rho(v)$  geben für Eigenvektoren  $v$  von  $w$  bezüglich der Darstellungen  $\rho$  von 6.6, soweit dies nach dem jetzigen Kenntnisstand möglich ist. Dies ist in den Fällen möglich, in denen eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $l = \text{ord}(w)$  als Eigenwert von  $w$  auftritt oder die Darstellungen genügend kleine Dimension haben. Grundlage sind die Proposition 6.9 und die Beschreibung der Gewichte in Abschnitt 6.6.

Zur Bestimmung der Struktur der Minimalpolynome: Die folgenden Aussagen (i)-(iii) klären die Typen  $A_n, B_n, C_n$  und  $G_2$ . Mit den Aussagen (iv) und (v) ergibt sich der Fall eines Eigenvektors zum Eigenwert  $\zeta_{2k}$  für eine primitive Einheitswurzel der Ordnung  $2k$  für den Typ  $D_n$ , falls  $k > n - k$  ist.

- (i) Da alle betrachteten Gruppen einfach sind, gilt dies auch für ihre Liealgebren. Alle ihre nichttrivialen Darstellungen (also insbesondere alle von uns betrachteten) sind daher treu. Wegen  $v \neq 0$  existiert folglich für jeden auftretenden Eigenwert  $\zeta$  ein Gewicht  $\chi$  mit  $\chi(v) \neq 0$ . Daher existiert stets ein Gewichtsorbit, der einen nichttrivialen Beitrag liefert, d.h die Menge  $(\Lambda/w)_v$  ist nicht leer.
- (ii) In den Fällen, in denen schon ein Gewicht gleich null ist (also in den Fällen  $B_n, F_4, G_2$ ), ist das  $\varepsilon$  aus Proposition 6.9 stets 1, d.h.  $X$  taucht als Faktor im Minimalpolynom auf.
- (iii) Ist  $\tilde{v}$  Eigenvektor zu einer primitiven Einheitswurzel von Ordnung  $\text{ord}(w)$  von  $\text{Ad}(w)$ , so tragen nur Orbiten der Länge  $\text{ord}(w)$  zu  $\mu_{\tilde{v}}$  bei.
- (iv) Für jeden Gewichtsorbit  $\mathfrak{o}$ , dessen Länge kein Vielfaches von  $\text{ord}(\zeta)$  ist, gilt  $\mathfrak{o}(v) = \{0\}$ .

- (v) Im Fall  $D_n$  existiert im Nichtcoxeterfall ein Orbit, dessen Länge ein Vielfaches von  $2k$  ist, und ein Orbit, dessen Länge ein Vielfaches von  $2(n-k)$  ist. Weil es insgesamt nur  $2n$  Gewichte gibt, kann im Fall  $k \neq n-k$  jeweils nur genau ein Orbit von Länge  $2k$  bzw.  $2(n-k)$  existieren. Das unten aufgeführte Ergebnis gilt also, wenn  $n \neq 2k$  ist.

| Gruppe      | Typ von $\Phi$ | Klasse                | Eigenwert von $w$ | Minimalpolynom eines EV |
|-------------|----------------|-----------------------|-------------------|-------------------------|
| $SL_{n+1}$  | $A_n$          | cox                   | $\zeta_{n+1}$     | $X^{n+1} - D$           |
| $SO_{2n+1}$ | $B_n$          | cox                   | $\zeta_{2n}$      | $X(X^{2n} - D)$         |
| $Sp_{2n}$   | $C_n$          | cox                   | $\zeta_{2n}$      | $X^{2n} - D$            |
| $SO_{2n}$   | $D_n$          | cox                   | $\zeta_{2n-2}$    | $X(X^{2n-2} - D)$       |
|             |                |                       | $\zeta_2 = -1$    |                         |
|             |                | $[\overline{k(n-k)}]$ | $\zeta_{2k}$      | $X(X^{2k} - D)$         |
|             |                |                       | $\zeta_{2(n-k)}$  |                         |
| $E_6$       | $E_6$          | cox                   | $\zeta_{12}$      |                         |
|             |                |                       | $\zeta_3$         |                         |
|             |                | $3_p 6_p^2$           | $\zeta_9$         |                         |
|             |                |                       | $\zeta_6$         |                         |
|             |                |                       | $\zeta_3$         |                         |
| $F_4$       | $F_4$          | cox                   | $\zeta_{12}$      |                         |
|             |                |                       | $\zeta_6$         |                         |
|             |                | $6_p^2$               | $\zeta_6$         |                         |
| $G_2$       | $G_2$          | cox                   | $\zeta_6$         | $X(X^6 - D)$            |

Die noch offenen Fälle werden in den Kapiteln 8 und 9 behandelt.

## 6.4 Rationalität

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Eigenschaften der Faktorisierung aus Proposition 6.9 hinsichtlich Rationalitätsfragen. Das letzte Ergebnis des Abschnitts wird eine Rolle spielen beim Beweis, daß der von uns konstruierte Torus tatsächlich durch die Konjugationsklasse des Ausgangselements  $w \in W$  beschrieben wird.

**Lemma 6.13.** *Sei  $G$  eine spaltende lineare algebraische Gruppe über  $F$  mit maximalem spaltenden Torus  $\mathbb{T}$  und  $W$  die Weylgruppe von  $G$ . Seien  $\mathfrak{g}$  bzw.  $\mathfrak{t}$  die Liealgebren von  $G$  bzw.  $\mathbb{T}$ . Sei  $\rho$  eine Darstellung der Liealgebra  $\mathfrak{g}$  von  $G$  über dem Vektorraum  $V$  und  $\Lambda$  die Menge der Gewichte von  $\mathfrak{t}$  in  $V$ . Sei weiter  $L$  eine Körpererweiterung von  $F$ ,  $w \in W$  und  $v$  ein Eigenvektor von  $w$  in  $\mathfrak{t}(L)$  zum Eigenwert  $\zeta$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung  $\lambda$ . Es gelte  $\zeta \in F$ . Sei*

$$\mu(X) = X^\varepsilon \prod_i (X^\lambda - D_i)$$

die Faktorisierung des Minimalpolynoms von  $\rho(v)$  aus Proposition 6.9. Dann existieren ein  $x \in L^*$ , ein rationales  $v_0 \in \mathfrak{t}$  sowie für jedes  $i$  ein Gewicht  $\chi_i \in \Lambda$ , so daß für jedes  $i$

$$D_i = x^\lambda \chi_i(v_0)^\lambda$$

gilt.

**Beweis:** Wegen  $\zeta \in F$  ist der Eigenraum von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  über  $F$  definiert. Wir schreiben  $v$  in der Form

$$xv_0 = v$$

für ein  $x \in L^*$  und ein rationales  $v_0$  in  $\mathfrak{t}$ . Die Minimalpolynome von  $\rho(v)$  und  $\rho(xv_0)$  stimmen dann überein und sind gleich  $\mu$ . Nach Proposition 6.9 existiert für jedes  $i$  ein Gewicht  $\chi_i$  mit  $D_i = \chi_i(v)^\lambda$ . Es folgt

$$D_i = \chi_i(v)^\lambda = x^\lambda \chi_i(v_0)^\lambda.$$

□

**Lemma 6.14.** Sei  $I$  eine endliche Indexmenge,  $m$  eine positive ganze Zahl und für jedes  $i \in I$  das Polynom  $f_i \in \bar{F}[X]$  gegeben durch

$$f_i(X) = X^m - D_i$$

für Elemente  $D_i \neq 0$ . Sei

$$f = \prod_{i \in I} f_i$$

bereits über  $F$  definiert. Es sei  $\sum_{i \in I} D_i \neq 0$ , und es gebe einen festen Index  $i_0$ , so daß für alle  $i \in I$

$$\frac{D_i}{D_{i_0}} \in F$$

gilt. Dann sind die Faktoren  $f_i$  bereits über  $F$  definiert.

**Beweis:** Man betrachte den Koeffizienten  $a$  von  $X^{m(|I|-1)}$ : Es gilt

$$0 \neq a = - \sum_{i \in I} D_i = -D_{i_0} \sum_{i \in I} \frac{D_i}{D_{i_0}}.$$

Nach Voraussetzung liegen  $a$  und  $\sum_{i \in I} \frac{D_i}{D_{i_0}}$  in  $F$ . Es folgt  $D_{i_0} \in F$  und damit die Behauptung. □

**Korollar 6.15.** Sei  $v \in \mathfrak{t}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  und  $\rho$  eine rationale Darstellung von  $G$ . Es gelte  $\zeta \in F$ . Falls  $\sum_{\mathfrak{o} \in (\Lambda/w)_v} \chi_{\mathfrak{o}}(v)^{\text{ord}(\zeta)} \neq 0$  ist, existiert die Faktorisierung des Minimalpolynoms  $\mu$  von  $\rho(v)$  aus Proposition 6.9 über  $F$ .

**Beweis:** Nach Lemma 6.13 existieren  $x \in L^*$  und  $v_0 \in \mathfrak{t}(F)$  mit  $\chi_{\mathfrak{o}}(v)^{\text{ord}(\zeta)} =: D_{\mathfrak{o}} = x^\lambda \chi_{\mathfrak{o}}(v_0)^{\text{ord}(\zeta)}$ . Da die Darstellung  $\rho$  aus Proposition rational ist, liegt  $\chi_{\mathfrak{o}}(v_0)$  in  $F$ . Sei  $\mathfrak{o}_0$  ein beliebiger Orbit in  $\Lambda$  unter  $\langle w \rangle$  mit  $\chi_{\mathfrak{o}_0}(v) \neq 0$ . Dann gilt für alle  $\mathfrak{o}$

$$\frac{D_{\mathfrak{o}}}{D_{\mathfrak{o}_0}} = \frac{\chi_{\mathfrak{o}}(v_0)^{\text{ord}(\zeta)}}{\chi_{\mathfrak{o}_0}(v_0)^{\text{ord}(\zeta)}} \in F.$$

Die Behauptung folgt jetzt nach Lemma 6.14. □

**Korollar 6.16.** Sei die Situation wie in Lemma 6.13 und  $x \in L^*$  ein Element mit

$$D_i = x^\lambda \chi_i(v_0)^\lambda$$

für ein rationales  $v_0 \in \mathfrak{t}$ . Dann hängt der Grad der Körpererweiterung  $F(x)/F$  nicht von der Wahl von  $x$  ab. Weiter stimmen die Ordnungen der  $D_i$  in  $F^*/(F^*)^\lambda$  für alle  $i$  überein und sind gleich dem Grad der Erweiterung  $F(x)/F$ .

**Beweis:** Seien  $x, x'$  zwei Elemente in  $L^*$  und  $v_0, v'_0$  zwei rationale Elemente in  $\mathfrak{t}$ , die obige Gleichung erfüllen. Dann gilt  $(x\chi_i(v_0))^\lambda = D_i = (x'\chi_i(v'_0))^\lambda$ . Also unterscheiden sich  $x\chi_i(v_0)$  und  $x'\chi_i(v'_0)$  um eine Einheitswurzel von Ordnung  $\lambda$ , also ein Element in  $F$ . Wegen  $\chi_i(v_0) \in F$  stimmt die Ordnung von  $D_i$  in  $F^*/(F^*)^\lambda$  mit der von  $x^\lambda$  in  $F^*/(F^*)^\lambda$  überein. Letztere ist aber gleich dem Grad der Erweiterung  $F(x)/F$ . □

## 6.5 Die Klasse eines Torus in $H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), W)$

Wir konstruieren den von uns gesuchten Torus  $T$  mit Hilfe einer Cartanalgebra  $\mathfrak{h}_T$  in der Liealgebra von  $G$ . Wir werden in diesem Abschnitt sehen, daß die Klasse in  $H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), W)$ , die  $T$  zugeordnet wird, in enger Verbindung steht zu dem Weylgruppenelement  $w$ , durch das  $\mathfrak{h}_T$  bestimmt ist.

**Proposition 6.17.** *Sei  $G$  eine einfache spaltende Gruppen über  $F$  mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$  und  $\mathbb{T}$  ein maximaler spaltender Torus in  $G$  mit Liealgebra  $\mathfrak{t}$ . Sei  $w$  ein Element in der Weylgruppe  $W$  von  $G$  und  $n_w \in N(\mathbb{T})$  ein Lift von  $w$  endlicher Ordnung. Es sei  $g \in G$  mit  $gn_w g^{-1} \in \mathbb{T}$ . Wir setzen  $\mathfrak{h}_T = \text{Ad}(g)(\mathfrak{t})$ . Sei nun  $T$  ein  $F$ -Torus in  $G$  mit Liealgebra  $\mathfrak{h}_T$  und  $L$  eine Körpererweiterung von  $F$  minimalen Grades mit  $g \in G(L)$ . Die Erweiterung  $L/F$  sei galoissch mit zyklischer Galoisgruppe und  $w_T \in W$  sei ein Repräsentant der Konjugationsklasse in  $W$ , die dem Torus  $T$  als Element in  $H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), W)$  zugeordnet wird. Der Körper  $F$  enthalte die Einheitswurzeln der Ordnung  $[L : F]$ . Dann ist jeder Eigenvektor von  $w$  in  $\mathfrak{t}$  auch Eigenvektor von  $w_T$ , und der zugehörige Eigenwert bezüglich  $w_T$  ist eine Potenz des zugehörigen Eigenwerts bezüglich  $w$ . Weiter ist das charakteristische Polynom von  $w_T$  als Automorphismus von  $\mathfrak{t}$  ein Produkt von Kreisteilungspolynomen.*

**Beweis:** Nach Annahme ist die Erweiterung  $L/F$  galoissch mit zyklischer Galoisgruppe  $\Gamma$ . Daher operiert die absolute Galoisgruppe  $\text{Gal}(\bar{F}/F)$  durch den zyklischen Quotienten  $\Gamma$  auf  $G(L)$ . Deshalb ist das Bild  $\gamma_T$  des 1-Kozykels  $(g^{-1}\sigma(g))_{\sigma \in \Gamma}$  in  $W$  schon bestimmt durch die Komponente  $a_\tau = g^{-1}\tau(g)$  für einen Erzeuger  $\tau$  von  $\Gamma$ . Da  $L/F$  eine Radikalerweiterung ist, hat  $L$  die Form  $L = F(d)$  für ein Element  $d \in L^*$  mit  $d^{|\Gamma|} \in F^*$ , und  $\tau$  operiert auf  $L$  vermöge  $\tau(d) = \zeta_{|\Gamma|}d$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta_{|\Gamma|}$  von Ordnung  $|\Gamma|$ .

Es genügt, die Aussage der Proposition für einen bestimmten Vertreter  $w_T$  zu zeigen. Da  $T$  die Liealgebra  $\mathfrak{h}_T$  hat, gilt  $g^{-1}Tg = \mathbb{T}$ . Sei also  $w_T$  das Bild von  $a_\tau$  in  $W$ . Dann wird in der Tat  $T$  die Konjugationsklasse von  $w_T$  zugeordnet, und wir zeigen die Behauptung für dieses spezielle  $w_T$ .

Sei nun  $v \in \mathfrak{t}$  ein rationaler Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung  $\lambda$ . Dann hat  $\text{Ad}(g)(v)$  die Gestalt

$$\text{Ad}(g)(v) = x\tilde{v}$$

für einen rationalen Vektor  $\tilde{v} \in \mathfrak{g}$  und ein  $x \in L^*$ . Es folgt

$$\text{Ad}(a_\tau)(v) = \text{Ad}(g^{-1}\tau(g))(v) = x^{-1}\tau(x)v.$$

Wir müssen also zeigen:  $x^{-1}\tau(x)$  ist eine Einheitswurzel von Ordnung  $\lambda$ .

Sei dazu  $\rho$  eine rationale Darstellung von  $\mathfrak{g}$  über  $V$  und  $\Lambda$  die Menge der Gewichte von  $\mathfrak{t}$  in  $V$ . Die beiden Elemente  $\rho(x^{-1}v)$  und  $\rho(\tilde{v})$  haben dasselbe Minimalpolynom nach Bemerkung 6.11. Ersteres hat nach Proposition 6.9 die Gestalt

$$X^\varepsilon \prod_i (X^\lambda - D_i)$$

für ein  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  und Elemente  $D_i \in \bar{F}^*$ . Nach Korollar 6.15 liegen die  $D_i$  bereits in  $F^*$ . Wir betrachten einen Faktor  $X^\lambda - D_i$ . Nach Lemma 6.13 existiert dann ein Gewicht  $\chi \in \Lambda$  mit

$$D_i = \chi_g(x^{-1}v)^\lambda = x^{-\lambda}\chi(v)^\lambda.$$

Da die Elemente  $D_i$  und  $\chi(v)$  rational sind, sind auch  $x^{-\lambda}$  bzw.  $x^\lambda$  rational, d.h. es gilt  $\tau(x^\lambda) = x^\lambda$ . Folglich ist  $x^{-1}\tau(x)$  eine Einheitswurzel von Ordnung  $\lambda$ . Genauer ist  $x^{-1}\tau(x)$  eine Einheitswurzel von Ordnung  $[F(x) : F]$ .

Die Aussage über die Gestalt des charakteristischen Polynoms von  $w_T$  folgt, da  $G$  als einfache spaltende Gruppe bereits über  $\mathbb{Q}$  definiert sind und jedes Element der Weylgruppe einen  $\mathbb{Q}$ -rationalen Vertreter hat, da die Gruppen spalten. Daher ist das charakteristische Polynom von  $w_T$  ebenfalls über  $\mathbb{Q}$  definiert. Die Kreisteilungspolynome sind aber irreduzibel über  $\mathbb{Q}$ .  $\square$

Der Beweis von Proposition 6.17 zeigt, daß die Ordnung jedes Eigenwerts von  $w_T$  bestimmt wird durch den Grad der Körpererweiterung  $F(x)/F$ , wo  $x \in L^*$  ein Element ist, das von  $g \in G(L)$  abhängt mit  $gn_w g^{-1} \in \mathbb{T}$  für einen Lift  $n_w \in N(\mathbb{T})$  von  $w$ . Nach Konstruktion von  $x$  im obigen Beweis können wir nun Korollar 6.16 anwenden und sehen, daß die Ordnung jedes Eigenwerts von  $w_T$  bestimmt ist durch das Minimalpolynom des Bildes eines zugehörigen Eigenvektors unter einer rationalen Darstellung von  $g$ . Dies ist insbesondere dann von Nutzen, wenn der Torus  $T$  algebraisch durch solche Minimalpolynome gegeben ist, wie es später im Kapitel 10 der Fall sein wird.

Zum Schluß formulieren wir noch ein Korollar, das uns später die Bestimmung des Typs von  $T$  erleichtern wird.

**Korollar 6.18.** *Sei die Situation wie in Proposition 6.17. Zusätzlich gelte die Eigenschaft, daß für jeden Eigenvektor von  $w$  bzw.  $w_T$  in  $\mathfrak{t}$  zum Eigenwert  $\zeta$  bzw.  $\xi$  die Ordnungen von  $\zeta$  und  $\xi$  übereinstimmen. Dann haben  $w$  und  $w_T$  dieselben Eigenwerte.*

**Beweis:** Die charakteristischen Polynome  $f_w$  bzw.  $f_T$  von  $w$  bzw.  $w_T$  sind Produkte von Kreisteilungspolynomen. Nach Voraussetzung tritt aber jedes Kreisteilungspolynom, das  $f_w$  teilt, auch als Faktor in  $f_T$  auf.  $\square$

## 6.6 Darstellungen der einfachen Gruppen

Wir beschreiben in diesem Abschnitt Darstellungen für die von uns betrachteten einfachen, zusammenhängenden, über  $F$  spaltenden linearen algebraischen Gruppen. Wir nehmen im ganzen Abschnitt an, daß die Restklassencharakteristik von  $F$  ungleich 2 ist, wenn  $G$  durch die Automorphismengruppe einer Bilinearform, und ungleich 2, 3 ist, wenn  $G$  durch die Automorphismengruppe einer Trilinearform beschrieben ist. Im Hinblick auf Proposition 6.9 und Beispiel 6.12 sind die Darstellungen dahingehend gewählt, daß sie möglichst kleine Dimension haben. Alle Gruppen tragen eine  $\mathcal{O}_F$ -Struktur. Die hier beschriebenen Darstellungen werden entsprechend  $\mathcal{O}_F$ -rational sein. In allen Fällen geben wir für eine  $\mathcal{O}_F$ -Algebra  $E$  einen  $E$ -Modul  $V$  und eine abgeschlossenen Untergruppe  $G(E)$  von  $GL(n, E)$  an. Für eine über  $\mathcal{O}_F$  definierte Untergruppe  $H$  von  $G$  wird also stets  $H(E) = H(\bar{F}) \cap GL(n, E)$  gelten. Die affinen Gruppenschemata, die auf diese Weise erklärt werdend, sind Chevalley Gruppenschemata mit generischer Faser  $G$ , denn es gibt in allen Fällen eine ganzzahlige Chevalley-Basis im Sinne von [SGA3,III][Ch.6]. Durch Differentiation erhält man Darstellungen der Liealgebren der Gruppen. Dies entspricht der Situation von Abschnitt 6.1.

Im ganzen Abschnitt sei  $E$  eine beliebige  $\mathcal{O}_F$ -Algebra. Wie immer schreiben wir  $H$  bzw.  $\mathfrak{h}$  für  $H(\bar{F})$  bzw.  $\mathfrak{h}(\bar{F})$  für eine Untergruppe  $H$  von  $G$  bzw. eine Unteralgebra  $\mathfrak{h}$  von  $\mathfrak{g}$ . Die Gewichte bzw. Wurzeln sind alle bereits über  $\mathcal{O}_F$  definiert.

### 6.6.1 $SL_n$

Wir betrachten die Standarddarstellung der  $SL_n$ . Sei  $V = E^n$  und  $SL_n(E) = SL(V)$  die Untergruppe der Automorphismen in  $GL_n(E) = GL(V)$ , deren Determinante gleich 1 ist. Sei  $\det : V^n \rightarrow E$  die Standard-Determinantenfunktion.  $\det$  ist eine alternierende  $n$ -Multilinearform. Wenn  $GL(V)$  auf  $V^n$  komponentenweise operiert, dann läßt sich  $SL(V)$  beschreiben als

$$SL(V) = \text{Aut}(\det) = \{g \in GL(V) \mid \forall v \in V^n : \det(gv) = \det(v)\}.$$

Die Liealgebra von  $SL_n(E)$  ist der Raum  $\mathfrak{sl}_n(E)$  aller Endomorphismen von  $V$  mit Spur 0. Als maximaler spaltender  $E$ -Torus in  $SL_n$  kann der Torus  $\mathbb{T}$  der Diagonalmatrizen in  $SL_n$  gewählt werden. Seine Liealgebra  $\mathfrak{t}$  besteht dann gerade aus den Diagonalmatrizen in  $\mathfrak{sl}_n$ .

**Gewichte.** Die Gewichte von  $\mathfrak{sl}_n(E)$  in  $V$  sind  $\chi_1, \dots, \chi_n$ . Sie entsprechen den  $n$  Diagonaleinträgen der Elemente von  $\mathfrak{t}$ . Es gilt  $\chi_1 + \dots + \chi_n = 0$ .

**Wurzeln.** Ein System positiver Wurzeln bezüglich  $\mathbb{T}$  wird gegeben durch  $\frac{x_i}{x_j}$  für  $1 \leq i < j \leq n$ , wenn  $x_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathbb{T}$  bezeichnet. Das zugehörige einfache System besteht aus den Wurzeln  $\frac{x_i}{x_{i+1}}$  für  $1 \leq i \leq n-1$ . Die entsprechenden positiven bzw. einfachen Wurzeln  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$  bezüglich  $\mathfrak{t}$  sind die  $\varepsilon_i - \varepsilon_j$  für  $1 \leq i < j \leq n$  bzw. die  $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$ , wenn  $\varepsilon_i = \chi_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_a$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathfrak{t}$  bezeichnet. Die Notation stimmt mit der aus [BFW] benutzten überein.

### 6.6.2 $SO_{2n+1}$

Wir betrachten die Standarddarstellung der  $SO_{2n+1}$ . Sei  $V = E^{2n+1}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

und  $SO_{2n+1}(E)$  die Zusammenhangskomponente der eins in  $\text{Aut}(B)$ .  $SO_{2n+1}$  heißt spezielle orthogonale Gruppe bezüglich der symmetrischen Bilinearform  $B$ . Als maximaler spaltender  $F$ -Torus in  $SO_{2n+1}$  kann der Torus  $\mathbb{T}$  der Diagonalmatrizen in  $SO_{2n+1}$  gewählt werden. Seine Liealgebra  $\mathfrak{t}$  besteht dann gerade aus den Diagonalmatrizen in  $\mathfrak{so}_{2n+1} = \text{Lie}(SO_{2n+1})$ .

**Gewichte.** Die Gewichte von  $\mathfrak{so}_{2n+1}(E)$  in  $V$  sind  $\chi_1, \dots, \chi_{2n+1}$ . Sie entsprechen den  $2n+1$  Diagonaleinträgen der Elemente von  $\mathfrak{t}$ . Es gilt  $\chi_i + \chi_{2n+2-i} = 0$  für alle  $i$  und  $\chi_{n+1} = 0$ .

**Wurzeln.** Ein System positiver Wurzeln bezüglich  $\mathbb{T}$  wird gegeben durch  $x_i x_j^{pm1}$  für  $1 \leq i < j \leq n$  und  $x_i$  für  $1 \leq i \leq n$ , wenn  $x_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathbb{T}$  bezeichnet. Das zugehörige einfache System besteht aus den Wurzeln  $\frac{x_i}{x_{i+1}}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  zusammen mit  $x_n$ . Die entsprechenden positiven bzw. einfachen Wurzeln  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$  bezüglich  $\mathfrak{t}$  sind die  $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$  für  $1 \leq i < j \leq n$  und die  $\varepsilon_i$  für  $1 \leq i \leq n$  bzw. die  $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  zusammen mit  $\varepsilon_n$ , wenn  $\varepsilon_i = \chi_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_a$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathfrak{t}$  bezeichnet. Die Notation stimmt mit der aus [BFW] benutzten überein.

### 6.6.3 $Sp_{2n}$

Wir betrachten die Standarddarstellung der  $Sp_{2n}$ . Sei  $V = E^{2n}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & -1 & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \\ -1 & & & \end{pmatrix}$$

und  $Sp_{2n}(E) = \text{Aut}(B)$  die Automorphismengruppe bezüglich der symplektischen Bilinearform  $B$ . Als maximaler spaltender  $F$ -Torus in  $Sp_{2n}$  kann der Torus  $\mathbb{T}$  der Diagonalmatrizen in  $Sp_{2n}$  gewählt werden. Seine Liealgebra  $\mathfrak{t}$  besteht dann gerade aus den Diagonalmatrizen in  $\mathfrak{sp}_{2n} = \text{Lie}(Sp_{2n})$ .



**Gewichte.** Die Gewichte von  $\mathfrak{sp}_{2n}(E)$  in  $V$  sind  $\chi_1, \dots, \chi_{2n}$ . Sie entsprechen den  $2n$  Diagonaleinträgen der Elemente von  $\mathfrak{t}$ . Es gilt  $\chi_i + \chi_{2n+1-i} = 0$  für alle  $i$ .

**Wurzeln.** Ein System positiver Wurzeln bezüglich  $\mathbb{T}$  wird gegeben durch  $x_i x_j^{pm1}$  für  $1 \leq i < j \leq n$  und  $x_i^2$  für  $1 \leq i \leq n$ , wenn  $x_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathbb{T}$  bezeichnet. Das zugehörige einfache System besteht aus den Wurzeln  $\frac{x_i}{x_{i+1}}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  zusammen mit  $x_n^2$ . Die entsprechenden positiven bzw. einfachen Wurzeln  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$  bezüglich  $\mathfrak{t}$  sind die  $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$  für  $1 \leq i < j \leq n$  und die  $2\varepsilon_i$  für  $1 \leq i \leq n$  bzw. die  $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  zusammen mit  $2\varepsilon_n$ , wenn  $\varepsilon_i = \chi_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_a$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathfrak{t}$  bezeichnet. Die Notation stimmt mit der aus [BFW] benutzten überein.

#### 6.6.4 $SO_{2n}$

Wir betrachten die Standarddarstellung der  $SO_{2n}$ . Sei  $V = E^{2n}$ ,

$$B = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & & \\ & & \ddots & \\ & & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

und  $SO_{2n}(E)$  die Zusammenhangskomponente der eins in  $\text{Aut}(B)$ .  $SO_{2n}$  heißt spezielle orthogonale Gruppe bezüglich der symmetrischen Bilinearform  $B$ . Als maximaler spaltender  $F$ -Torus in  $SO_{2n}$  kann der Torus  $\mathbb{T}$  der Diagonalmatrizen in  $SO_{2n}$  gewählt werden. Seine Liealgebra  $\mathfrak{t}$  besteht dann gerade aus den Diagonalmatrizen in  $\mathfrak{so}_{2n} = \text{Lie}(SO_{2n})$ .

**Gewichte.** Die Gewichte von  $\mathfrak{so}_{2n}(E)$  in  $V$  sind  $\chi_1, \dots, \chi_{2n}$ . Sie entsprechen den  $2n$  Diagonaleinträgen der Elemente von  $\mathfrak{t}$ . Es gilt  $\chi_i + \chi_{2n+1-i} = 0$  für alle  $i$ .

**Wurzeln.** Ein System positiver Wurzeln bezüglich  $\mathbb{T}$  wird gegeben durch  $x_i x_j^{pm1}$  für  $1 \leq i < j \leq n$ , wenn  $x_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{G}_m$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathbb{T}$  bezeichnet. Das zugehörige einfache System besteht aus den Wurzeln  $\frac{x_i}{x_{i+1}}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  zusammen mit  $x_{n-1} x_n$ . Die entsprechenden positiven bzw. einfachen Wurzeln  $\Phi_{\mathfrak{g}}$  von  $\mathfrak{g}$  bezüglich  $\mathfrak{t}$  sind die  $\varepsilon_i \pm \varepsilon_j$  für  $1 \leq i < j \leq n$  bzw. die  $\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  für  $1 \leq i \leq n-1$  zusammen mit  $\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$ , wenn  $\varepsilon_i = \chi_i : \mathfrak{t} \rightarrow \mathbb{G}_a$  die Projektion auf den  $i$ -ten Diagonaleintrag einer Matrix aus  $\mathfrak{t}$  bezeichnet. Die Notation stimmt mit der aus [BFW] benutzten überein.

#### 6.6.5 $E_6$

Sei  $V$  der Vektorraum  $\mathcal{M}_3^3(E)$ , wobei  $\mathcal{M}_3(E)$  der Raum der  $3 \times 3$ -Matrizen mit Koeffizienten in  $E$  ist. Sei  $f$  die kubische Form auf  $V$ , die definiert ist durch

$$f((x_1, x_2, x_3)) = \det(x_1) + \det(x_2) + \det(x_3) - \text{tr}(x_1 x_2 x_3)$$

für  $x_i \in \mathcal{M}_3(E)$ . Die Untergruppe  $E_6 := \text{Aut}(f)$  von  $GL(V)$  ist dann eine spaltende, einfach-zusammenhängende Gruppe vom Typ  $E_6$ .

Sei  $K : V^3 \rightarrow E$  die (symmetrische) Trilinearform, die man durch Polarisierung von  $f$  erhält:

$$K(u, v, w) = \frac{1}{6} \left( f(u+v+w) - f(u+v) - f(v+w) - f(u+w) + f(u) + f(v) + f(w) \right).$$

Es gilt dann  $f(v) = K(v, v, v)$  für alle  $v \in V$ . Es gilt  $E_6 = \text{Aut}(K)$ .

**Untergruppen.** Die Gruppe  $SL_3^3(E)$  operiert linear auf  $V$  durch die Vorschrift

$$(g_1, g_2, g_3) \cdot (x_1, x_2, x_3) = (g_1 x_1 g_2^{-1}, g_2 x_1 g_3^{-1}, g_3 x_1 g_1^{-1})$$

für  $g_i \in SL_3(E)$ ,  $x_i \in \mathcal{M}_3(E)$ . Offensichtlich respektiert diese Operation die Form  $f$ , so daß wir einen Homomorphismus  $SL_3^3(E) \xrightarrow{\iota} \text{Aut}(f) = E_6(E)$  erhalten. Der Diagonaltorus in  $SL_3^3(E)$  hat Rang 6, und sein Bild unter  $\iota$  ist ein maximaler spaltender Torus  $\mathbb{T}_6(E)$  in  $E_6(E)$ , der Diagonaltorus in  $E_6$ .

**Basis von  $V$  und Toruskoordinaten.** Wir identifizieren  $E_6$  mit einer Untergruppe von  $GL(27, E)$  über die Standardbasis von  $V = \mathcal{M}_3^3(E)$ : Die  $27^2$  Basisvektoren von  $V$  sind die Elemente  $(e_{ij}, e_{kl}, e_{mn}) \in \mathcal{M}_3^3(F)$ , wo  $e_{ab}$  den Eintrag 1 an Position  $(a, b)$  hat und sonst alle Einträge verschwinden. Ist der Diagonaltorus in dem  $i$ -ten Faktor von  $SL_3^3$  durch die freien Parameter  $t_i$  und  $t_{i+1}$  beschrieben, setzen wir

$$\begin{aligned} x_1 &:= \sqrt{\frac{t_1 t_4}{t_2 t_3}}, & x_2 &:= \sqrt{\frac{t_1 t_3}{t_2 t_4}}, \\ x_3 &:= t_6 \sqrt{t_1 t_2 t_3 t_4}, & x_4 &:= t_5 \sqrt{t_1 t_2 t_3 t_4}, \\ x_5 &:= \frac{\sqrt{t_1 t_2 t_3 t_4}}{t_5 t_6}, & x_6 &:= \frac{t_3^2 t_4 \sqrt{t_4}}{t_1 t_2 \sqrt{t_1 t_2 t_3}} \end{aligned}$$

als formale Ausdrücke. Zwischen den  $x_i$  ist die formale Multiplikation auf die offensichtliche Weise erklärt, wobei das Wurzelziehen den Vorschriften  $(ab)^{1/2} = a^{1/2} b^{1/2}$  und  $(a^{2l})^{1/2} = a^l$  genügen soll. Wir setzen noch formal  $\varepsilon_i = d(x_i)$ .

**Wurzeln und Gewichte.** Der Diagonaltorus in dem  $i$ -ten Faktor von  $SL_3^3$  sei parametrisiert als  $\begin{pmatrix} t_i & & \\ & t_{i+1} & \\ & & (t_i t_{i+1})^{-1} \end{pmatrix}$ . Dann existieren die folgenden Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_6$  von  $\mathbb{T}$  in  $\mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left( \frac{x_1}{x_2 x_3 x_4 x_5 x_6} \right)^{1/2}, \quad \alpha_2 = x_1 x_2, \\ \alpha_3 &= \frac{x_2}{x_1}, \quad \alpha_4 = \frac{x_3}{x_2}, \quad \alpha_5 = \frac{x_4}{x_3}, \quad \alpha_6 = \frac{x_5}{x_4}. \end{aligned}$$

Die Menge  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$  ist ein System einfacher Wurzeln, dessen zugehöriges System positiver Wurzeln die Menge

$$\{x_i^{\pm 1} x_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \left\{ \left( \frac{1}{x_6} \prod_{i=1}^5 x_i^{(-1)^{\nu(i)}} \right)^{1/2} \mid \sum_{i=1}^5 \nu(i) \text{ gerade} \right\}$$

ist. Die entsprechenden Wurzeln bezüglich  $\mathfrak{t}$  sind

$$\{\pm \varepsilon_i + \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 5\} \cup \left\{ 1/2 \left( -\varepsilon_6 + \sum_{i=1}^5 (-1)^{\nu(i)} \varepsilon_i \right) \mid \sum_{i=1}^5 \nu(i) \text{ gerade} \right\}$$

mit zugehörigem einfachen System

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4 - \varepsilon_5 - \varepsilon_6), \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ &\varepsilon_1 + \varepsilon_2, -\varepsilon_2 + \varepsilon_3, -\varepsilon_3 + \varepsilon_4, -\varepsilon_4 + \varepsilon_5. \end{aligned}$$

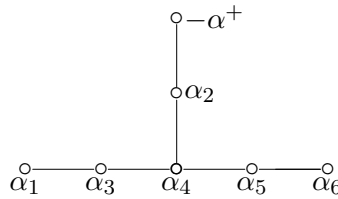
Diese Notationen entsprechen denen aus [BFW], wenn man  $\varepsilon_6$  mit der dortigen Bezeichnung  $\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8$  gleichsetzt. Die positive Wurzel maximaler Höhe hat die Form

$$\alpha^+ = \left( \frac{x_1 x_2 x_3 x_4 x_5}{x_6} \right)^{1/2}$$

bzw.

$$\frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \varepsilon_6).$$

Wir haben dann



Wir ordnen die Standardbasis von  $V = \mathcal{M}_3^3(E)$  wie folgt an:

$$\begin{array}{ll}
 e_{12}^1, e_{11}^1, e_{22}^1, e_{21}^1, e_{13}^1, e_{23}^1, & e_{32}^1, e_{31}^1, e_{33}^1 \\
 e_{32}^2, e_{12}^2, e_{31}^2, e_{11}^2, e_{22}^2, e_{21}^2, e_{33}^2, e_{13}^2, e_{23}^2, & \\
 e_{33}^3, e_{13}^3, e_{23}^3, & e_{32}^3, e_{31}^3, e_{12}^3, e_{11}^3, e_{22}^3, e_{21}^3,
 \end{array}$$

Bezüglich dieser geordneten Basis bestehen die Wurzelräume in  $G$  zu den einfachen Wurzeln aus oberen Dreiecksmatrizen.

Die Gewichte von  $\mathfrak{t}(E)$  in  $V$  sind  $\chi_1, \dots, \chi_{27}$ . Sie entsprechen den 27 Diagonaleinträgen der Elemente von  $\mathfrak{t}$ . 10 Gewichte sind dann von der Form  $\frac{1}{3}(\pm 3\varepsilon_i - \varepsilon_6)$  für  $i = 1, \dots, 5$ . Ein Gewicht hat die Form  $\frac{2}{3}\varepsilon_6$ . Die verbleibenden 16 Gewichte sind von der Form  $\frac{1}{6}(\pm 3\varepsilon_1 \pm 3\varepsilon_2 \pm 3\varepsilon_3 \pm 3\varepsilon_4 \pm 3\varepsilon_5 + \varepsilon_6)$ . Dabei treten alle 10 möglichen Vorzeichenkombinationen mit dreimal  $+$  und zweimal  $-$ , alle 5 möglichen Vorzeichenkombinationen mit einmal  $+$  und viermal  $-$  sowie die Kombination mit fünfmal  $+$  auf.

### 6.6.6 $F_4$

Seien  $V, f, K$  und  $\iota$  wie in Abschnitt 6.6.5. Sei weiter

$$v_0 := (\text{id}, 0, 0) \in V.$$

Die Untergruppe  $F_4 := \text{Aut}(f) \cap \text{Stab}(v_0)$  von  $GL(V)$  ist dann eine spaltende Gruppe vom Typ  $F_4$ .  $F_4$  ist sowohl einfach-zusammenhängend als auch von adjungiertem Typ.

Sei  $K_0 : V^2 \rightarrow E$  die (symmetrische) Bilinearform, die durch

$$K_0(u, v) = K(u, v, v_0)$$

gegeben ist. Es gilt dann  $F_4 = \text{Aut}(K) \cap \text{Aut}(K_0)$ .

**Untergruppen.** Die Gruppe  $SL_3^2(E)$  läßt sich mit der Untergruppe von  $SL_3^3(E)$  identifizieren, die durch die Gleichheit der ersten beiden Komponenten gegeben ist. Diese Untergruppe stabilisiert den Vektor  $v_0$ , wenn man die Operation aus Abschnitt 6.6.5 zugrunde legt. Wir haben also vermöge  $\iota$  einen Homomorphismus  $SL_3^2(E) \rightarrow F_4(E)$ . Der Diagonaltorus in  $SL_3^2(E)$  hat Rang 4, und sein Bild unter  $\iota$  ist ein maximaler Splittorus  $\mathbb{T}(E)$  in  $F_4$ , der Diagonaltorus in  $F_4$ .

**Basis von  $V$  und Toruskoordinaten.** Wir wählen dieselbe Basis von  $V$  wie im Fall der  $E_6$ . Sind  $t_1, \dots, t_4$  die freien Parameter des Diagonaltorus in  $SL_3^2$ , setzen wir

$$x_1 := \frac{t_3 t_4}{t_1 t_2}, \quad x_2 := t_1 t_2 t_3, \quad x_3 := t_1 t_2 t_4, \quad x_4 := \frac{t_1}{t_2}.$$

Wir setzen noch  $\varepsilon_i = d(x_i)$ .

**Wurzeln und Gewichte.** Der Diagonaltorus in dem  $i$ -ten Faktor von  $SL_3^3$  sei wie im Fall der  $E_6$  parametrisiert. Dann existieren die folgenden Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_4$  von  $\mathbb{T}$  in  $\mathfrak{g}$

$$\alpha_1 = \frac{x_2}{x_3}, \alpha_2 = \frac{x_3}{x_4}, \alpha_3 = x_4, \alpha_4 = \left(\frac{x_1}{x_2 x_3 x_4}\right)^{1/2},$$

wobei das Wurzelziehen den Vorschriften  $(ab)^{1/2} = a^{1/2}b^{1/2}$  und  $(a^{2l})^{1/2} = a^l$  genügen soll. Die Menge  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}$  ist ein System einfacher Wurzeln, dessen zugehöriges System positiver Wurzeln die Menge

$$\{x_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{x_i x_j^{\pm 1} \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{ \left( \varepsilon_1 \varepsilon_2^{\pm 1} \varepsilon_3^{\pm 1} \varepsilon_4^{\pm 1} \right)^{1/2} \right\}$$

ist. Die entsprechenden Wurzeln bezüglich  $\mathfrak{t}$  sind

$$\{\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq 4\} \cup \left\{ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \pm \varepsilon_3 \pm \varepsilon_4) \right\}$$

mit zugehörigem einfachen System

$$\varepsilon_2 - \varepsilon_3, \varepsilon_3 - \varepsilon_4, \varepsilon_4, \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4).$$

Diese Notationen entsprechen denen aus [BFW]. Die positive Wurzel maximaler Höhe hat die Form

$$\alpha^+ = x_1 x_2$$

bzw.

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2.$$

Wir haben dann

$$\overset{\circ}{-}\alpha^+ \text{---} \overset{\circ}{\alpha}_1 \text{---} \overset{\circ}{\alpha}_2 \text{---} \overset{\circ}{\alpha}_3 \text{---} \overset{\circ}{\alpha}_4$$

Wir ordnen die Standardbasis von  $V = \mathcal{M}_3^3(E)$  wie folgt an:

$$\begin{array}{lll} e_{32}^1, e_{31}^1, e_{12}^1, e_{11}^1, e_{22}^1, e_{21}^1, e_{33}^1, e_{13}^1, e_{23}^1, & & \\ e_{33}^2, e_{13}^2, e_{23}^2, & & e_{32}^2, e_{31}^2, e_{12}^2, e_{11}^2, e_{22}^2, e_{21}^2, \\ e_{12}^3, e_{11}^3, e_{22}^3, e_{21}^3, e_{13}^3, e_{23}^3, & & e_{32}^3, e_{31}^3, e_{33}^3 \end{array}$$

Bezüglich dieser geordneten Basis bestehen die Wurzelräume in  $G$  zu den einfachen Wurzeln aus oberen Dreiecksmatrizen.

Die Gewichte von  $\mathfrak{t}(E)$  in  $V$  sind  $\chi_1, \dots, \chi_{27}$ . Sie entsprechen den 27 Diagonaleinträgen der Elemente von  $\mathfrak{t}$ . Drei Gewichte sind null. Die verbleibenden 24 Gewichte entsprechen in dieser Notation den 24 kurzen Wurzeln in der additiven Notation von [BFW].

### 6.6.7 $G_2$

Sei  $V = E^7$  mit Standardbasis  $e_1, \dots, e_7$  und  $e_i^* \in V^*$  die Projektion auf die zu  $e_i$  gehörende Komponente von  $V$ . Seien  $Q \in \text{Sym}^2(V^*)$  gegeben durch

$$Q = -e_4^{*2} + e_1^* e_7^* + e_2^* e_6^* + e_3^* e_5^*$$

und  $f \in \Lambda^3(V^*)$  durch

$$f = e_4^* \wedge (e_1^* \wedge e_7^* + e_2^* \wedge e_6^* + e_3^* \wedge e_5^*) + e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* + e_5^* \wedge e_6^* \wedge e_7^*.$$

$Q$  bzw.  $f$  definiert eine symmetrische Bilinear- bzw. alternierende Trilinearform auf  $V$ . Die Untergruppe  $G_2(E) := \text{Aut}(Q) \cap \text{Aut}(f)$  von  $GL(V)$  ist dann eine spaltende Gruppe vom Typ  $G_2$ .  $G_2$  ist sowohl einfach-zusammenhängend als auch von adjungiertem Typ.

**Untergruppen.** Wir identifizieren  $SL_3(E)$  mit einer Untergruppe  $\sigma(SL_3(E))$  von  $GL(V)$  durch die Vorschrift

$$\sigma(g) = \begin{pmatrix} g & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \theta(g) \end{pmatrix},$$

wo  $g \in SL_3(E)$  und  $\theta(g)$  gegeben ist durch

$$\theta(g) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Operation läßt die Formen  $Q$  und  $f$  invariant, so daß wir einen Homomorphismus  $SL_3(E) \xrightarrow{\iota} G_2(E)$  erhalten. Der Diagonaltorus von  $SL_3(E)$  hat Rang 2, und sein Bild unter  $\iota$  ist ein maximaler Splittorus  $\mathbb{T}(E)$  in  $G_2(E)$ , der Diagonaltorus in  $G_2$ .

**Basis von  $V$  und Toruskoordinaten.** Wie bereits erwähnt wählen wir die Standardbasis  $e_1, \dots, e_7$  von  $V$ . Ist der Diagonaltorus der  $SL_3$  durch die freien Parameter  $t_1$  und  $t_2$  beschrieben, setzen wir

$$x_1 := t_2, \quad x_2 := t_1 t_2, \quad x_3 := 1.$$

Wir setzen noch  $\varepsilon_i = d(x_i)$ .

**Wurzeln und Gewichte.** Der Diagonaltorus der  $SL_3$  sei parametrisiert als  $\begin{pmatrix} t_1 & & \\ & t_2 & \\ & & (t_1 t_2)^{-1} \end{pmatrix}$ . Dann existieren die folgenden Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_2$  von  $\mathbb{T}$  in  $\mathfrak{g}$

$$\alpha_1 = \frac{x_1}{x_2}, \quad \alpha_2 = \frac{x_2 x_3}{x_1^2}.$$

Die Menge  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  ist ein System einfacher Wurzeln, dessen zugehöriges System positiver Wurzeln die Menge

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + \alpha_2, 3\alpha_1 + 2\alpha_2\}$$

ist. Die entsprechenden Wurzeln bezüglich  $\mathfrak{t}$  sind die Ableitungen der Wurzeln bezüglich  $\mathbb{T}$  mit zugehörigem einfachen System

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2, -2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3.$$

Diese Notationen entsprechen denen aus [BFW]. Die positive Wurzel maximaler Höhe hat die Form

$$\alpha^+ = \frac{x_3^2}{x_1 x_2} = 3\alpha_1 + 2\alpha_2$$

bzw.

$$-\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + 2\varepsilon_3.$$

Die entsprechenden Relationen zwischen den Ableitungen  $d(\alpha_i) \in \Phi_{\mathfrak{g}}$  beschreiben nach [BFW] ein einfaches System von Wurzeln. Wir übernehmen daher die entsprechenden Notationen aus [BFW] für  $\Phi_{\mathfrak{g}}$ . Die positive Wurzel maximaler Höhe hat die Form

$$\alpha^+ = \frac{x_3^2}{x_1 x_2}.$$

Wir haben dann

$$\begin{array}{c} \circ \longleftarrow \circ \longrightarrow \circ \\ \alpha_1 \qquad \alpha_2 \qquad -\alpha^+ \end{array}$$

Wir ordnen die Standardbasis von  $V = E^7$  wie folgt an:

$$e_6, e_1, e_3, e_4, e_5, e_7, e_2$$

Bezüglich dieser geordneten Basis bestehen die Wurzelräume in  $G$  zu den einfachen Wurzeln aus oberen Dreiecksmatrizen.

Die Gewichte von  $\mathfrak{t}(E)$  in  $V$  sind  $\chi_1, \dots, \chi_7$ . Sie entsprechen den 7 Diagonaleinträgen der Elemente von  $\mathfrak{t}$ . Genauer entspricht  $\chi_i$  der zum Basisvektor  $e_i$  gehörende Komponente. Das Gewicht  $\chi_4$  ist dann null. Die verbleibenden 6 Gewichte entsprechen in dieser Notation den 6 kurzen Wurzeln. Es gilt weiter  $\chi_i + \chi_{8-i} = 0$  für alle  $i$  und  $\chi_1 + \chi_2 + \chi_3 = \chi_5 + \chi_6 + \chi_7 = 0$ .

### 6.6.8 Die adjungierte Darstellung

Die adjungierte Darstellung von  $G$  hat den Vorteil, daß sie für jede Gruppe existiert und die Gewichte wohlbekannt sind: Die nichttrivialen Gewichte sind gerade die Wurzeln von  $G$ . Der Nachteil ist schon in Abschnitt 6.2 angeklungen: Je höher die Dimension der Darstellung, umso höhergradig und komplizierter sind die Minimalpolynome der halbeinfachen Eigenvektoren von  $w_\Delta$  bezüglich der gegebenen Darstellung. Aus diesem Grund arbeiten wir für jede Gruppe  $G$  mit einer Darstellung möglichst kleiner Dimension. Im Hinblick auf Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ  $E_8$  wird die adjungierte Darstellung von  $G$  jedoch spätestens dort eine große Rolle spielen.

Sei wie immer  $G$  zusammenhängend und halbeinfach. Sei  $\mathfrak{g}$  die Liealgebra von  $G$  und  $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow F$  die Killingform.  $[\cdot, \cdot]$  bezeichne die Lieklammer auf  $\mathfrak{g}$ . Wir definieren folgende Trilinearform auf  $\mathfrak{g}$ :

$$\begin{aligned} \kappa_t : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\rightarrow F \\ (x, y, z) &\mapsto \kappa(x, [yz]) \end{aligned}$$

$G$  operiert vermöge  $\text{Ad}$  auf dem  $F$ -Vektorraum  $\mathfrak{g}$  und erhält die beiden Formen  $\kappa$  und  $\kappa_t$ . Die Automorphismengruppe von  $\kappa$  und  $\kappa_t$  in  $GL(\mathfrak{g})$  besteht aus  $\text{Ad}(G) = G_{\text{ad}}$  und den äußeren Automorphismen von  $\mathfrak{g}$ . Dies sieht man wie folgt: Ein Automorphismus von  $\kappa$  und  $\kappa_t$  läßt auch die Lieklammer von  $\mathfrak{g}$  invariant, ist also bereits ein Automorphismus von  $\mathfrak{g}$ . Jetzt kann man die Strukturtheorie für Liealgebren anwenden.

# Kapitel 7

## Die Algebra $\mathfrak{A}_E$

In diesem Kapitel werden wir untersuchen, welche Struktur die Algebra  $\mathfrak{A}_E$  hat. Die spezielle Gestalt von  $\mu$  führt zu einer Zerlegung von  $\mathfrak{A}_E$  mittels Idempotenter. Wir werden dann für die von uns betrachteten Gruppen eine Einbettung eines Summanden von  $\mathfrak{A}_E$  nach  $\mathfrak{A}_E$  konstruieren, so daß sich der gesuchte Torus  $T$  durch algebraische Gleichungen in diesem Summanden beschreiben läßt.

Im ganzen Kapitel sei  $\rho$  eine rationale endlich-dimensionale Darstellung von  $G$  mit zugehöriger Darstellung  $d\rho$  von  $\mathfrak{g}$ . Sei  $V$  der zugrundeliegende Vektorraum und  $d$  seine Dimension. Sei weiter  $v \in \mathfrak{t}$  ein rationaler Eigenvektor eines primitiven Elements  $w \in W$  zum Eigenwert  $\zeta$  und  $\mathfrak{v} = d\rho(v)$ . Nach Proposition 6.9 hat das Minimalpolynom von  $\mathfrak{v}$  die Gestalt

$$X^e \prod_{i \in I} \mu_i$$

für eine endliche Indexmenge  $I$  und Polynome  $\mu_i \in \bar{F}[X]$  von der Gestalt

$$\mu_i(X) = (X^{\text{ord}(\zeta)} - D_i).$$

Wir setzen  $\mu = \prod_{i \in I} \mu_i$  und  $\mathfrak{A}_E = E[X]/\mu$ . Das Polynom  $\mu$  ist separabel nach Korollar 6.10. Die  $\mu_i$  sind wegen der Separabilität von  $\mu$  paarweise teilerfremd. Wir wollen den Torus  $T$  nun mit Hilfe der in Abschnitt 6.1 konstruierten Abbildung  $\Phi_{E,\mathfrak{v}} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathcal{M}(d, E)$  beschreiben. In diesem Kapitel untersuchen wir daher zunächst die Struktur der Algebra  $\mathfrak{A}_E$ . Wir werden im ganzen Kapitel annehmen, daß die  $\mu_i$  bereits Koeffizienten in  $F$  haben.

### 7.1 Zerlegung mittels Idempotenter

Wir untersuchen in diesem Abschnitt allgemein die Zerlegung einer  $F$ -Algebra mittels Idempotenter. Seien  $f_1, \dots, f_m$  teilerfremde separable Polynome in  $F[X]$  und  $f = f_1 \cdots f_m$ . Sei  $E$  eine  $F$ -Algebra und  $\mathfrak{A}_E$  die Algebra  $E[X]/f$ . Wir werden in dieser Arbeit in zwei Situationen auf eine Algebra vom Typ  $\mathfrak{A}_E$  stoßen: Zum einen hat, wie bereits am Anfang dieses Abschnitts erläutert, das Minimalpolynom  $\mu$  eines Eigenvektors von  $w \in W$  eine Gestalt wie  $f$ . Zum anderen werden wir in Kapitel 10 den Torus  $T$  algebraisch durch Gleichungen in einer Algebra vom Typ  $\mathfrak{A}_E$  beschreiben. Um zu sehen, daß  $T$  wirklich ein Torus ist, werden wir ebenfalls eine Zerlegung der Algebra benutzen.

Wegen der Separabilität von  $f$  sind die  $f_i$  paarweise teilerfremd, und  $\mathfrak{A}_E = E[X]/f$  zerlegt sich in eine direkte Summe

$$\mathfrak{A}_E \cong \bigoplus_i \mathfrak{A}_{E,i}$$

mit

$$\mathfrak{A}_{E,i} = E[X]/f_i.$$

Seien  $c_k \in F[X]$  (für  $k \in I$ ) Elemente mit  $\sum_{k \in I} c_k \prod_{j \neq k} f_j = 1$ . Dann ist der Isomorphismus  $\tau : \bigoplus_i \mathfrak{A}_{E,i} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{A}_E$  gegeben durch

$$([P_i])_i \mapsto \left[ \sum_{k \in I} c_k P_k \prod_{j \neq k} \mu_j \right]$$

mit Umkehrabbildung

$$[P] \mapsto ([P])_i.$$

**Bemerkung 7.1.** Sei  $x_k$  eine Nullstelle von  $f_k$  und  $Q_1, \dots, Q_m(X) \in E[X]$ . Dann gilt

$$\tau\left(\left([Q_i]_i\right)\right)(x_k) = Q_k(x_k).$$

**Bemerkung 7.2.** Sei  $f$  ein separables Polynom in  $E[X]$  und  $\mathfrak{A} = E[X]/f$ . Seien weiter  $Q$  ein Polynom in  $E[X_1, \dots, X_m]$  und  $P_1, \dots, P_m$  Polynome in  $E[X]$  sowie  $c \in E$ . Dann sind äquivalent:

- (i) Für alle Nullstellen  $\lambda$  von  $f$  gilt  $Q(P_1(\lambda), \dots, P_m(\lambda)) = c$ .
- (ii) Es gilt  $Q([P_1], \dots, [P_m]) = c$  als Gleichung in der Algebra  $\mathfrak{A}$ .

**Beweis:** Die Richtung (ii)  $\Rightarrow$  (i) ist klar. Umgekehrt schreiben wir  $Q(P_1, \dots, P_m)$  in der Form

$$Q(P_1, \dots, P_m) = c + R$$

für ein Polynom  $R \in E[X]$ . Wegen  $Q(P_1(\lambda), \dots, P_m(\lambda)) = c$  für alle Nullstellen  $\lambda$  von  $f$  folgt  $R(\lambda) = 0$  für alle Nullstellen  $\lambda$  von  $f$ . Wegen der Separabilität von  $f$  folgt  $f \mid R$  und damit

$$Q(P_1, \dots, P_m) \equiv c \pmod{f}.$$

□

Im zweiten Teil dieses Abschnitts nehmen wir nun an, daß die  $f_i$  eine spezielle Gestalt haben: Sei  $\lambda$  eine positive ganze Zahl,  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$  in  $\bar{F}$  und  $D \in E^*$ . Sei  $f$  das Polynom

$$f(X) = X^\lambda - D$$

und  $d$  eine fest gewählte Nullstelle von  $f$  in einem Zerfällungskörper  $L$  von  $f$ . Wir setzen für  $\xi \in \kappa$

$$\begin{aligned} f_\xi(X) &= X - \xi d \\ \mathfrak{A}_{L,\xi} &= L[X]/f_\xi. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$f = \prod_{\xi \in \kappa} f_\xi,$$

und die Algebra  $\mathfrak{A}_L$  ist isomorph zu  $\bigoplus_{\xi \in \kappa} \mathfrak{A}_{L,\xi}$  vermöge der oben definierten Abbildung  $\tau$ . Sind  $c_\xi$  Elemente in  $L[X]$  mit  $\sum_{\xi \in \kappa} c_\xi \prod_{\xi' \neq \xi} f_{\xi'} = 1$ , dann ist  $\tau$  gegeben durch

$$\tau\left([P_\xi]_\xi\right) = \left[ \sum_{\xi \in \kappa} c_\xi P_\xi \prod_{\xi' \neq \xi} f_{\xi'} \right].$$



**Lemma 7.3.** Sei  $\lambda$  eine positive ganze Zahl und  $\kappa$  die Gruppe der  $\lambda$ -ten Einheitswurzeln in  $\bar{F}$ . Sei  $E$  eine Körpererweiterung von  $F$ ,  $f(X) = X^\lambda - D \in E[X]$  mit  $X \nmid f$  und  $L$  ein Zerfällungskörper von  $f$ . Es sei die Algebra  $\mathfrak{A}_L$  durch  $\mathfrak{A}_L = L[X]/f$  erklärt. Das Polynom  $f$  sei als  $f = \prod_{\xi \in \kappa} f_\xi$  faktorisiert für eine fest gewählte Nullstelle  $d$  von  $f$  in  $L$  und  $f_\xi(X) = X - \xi d$ . Wir setzen  $\mathfrak{A}_{L,\xi} = L[X]/f_\xi$ . Der Isomorphismus  $\tau : \bigoplus_{\xi \in \kappa} \mathfrak{A}_{L,\xi} \rightarrow \mathfrak{A}_L$  sei wie oben erklärt. Sei  $\zeta \in \kappa$  und  $\sigma = \sigma_\zeta : \mathfrak{A}_L \rightarrow \mathfrak{A}_L$  der durch

$$\sigma([X]) = [\zeta X]$$

gegebene Automorphismus von  $\mathfrak{A}_L$ .  $\sigma$  induziert einen Automorphismus

$$\sigma_\tau = \tau^{-1} \sigma \tau$$

von  $\bigoplus_{\xi \in \kappa} \mathfrak{A}_{L,\xi}$ . Seien nun  $P_1, \dots, P_\lambda$  Polynome in  $L[X]$ . Dann gilt

$$\sigma_\tau((P_\xi(X))_{\xi \in \kappa}) = (P_{\zeta\xi}(\zeta X))_{\xi \in \kappa}.$$

**Beweis:** Die Gleichung  $\sum_{\xi \in \kappa} c_\xi(X) \prod_{\xi' \neq \xi} f_{\xi'}(X) = 1$  ist eine Gleichung zwischen Polynomen, bleibt also richtig, wenn auf beiden Seiten  $X$  durch  $\zeta X$  ersetzt wird, d.h. es gilt

$$\sum_{\xi \in \kappa} c_\xi(\zeta X) \prod_{\xi' \neq \xi} f_{\xi'}(\zeta X) = 1.$$

Genauso bleiben Kongruenzen zwischen Polynomen erhalten, wenn in allen beteiligten Polynomen  $X$  durch  $\zeta X$  ersetzt wird. In unserem Fall gilt also

$$c_\xi(\zeta X) \prod_{\xi' \neq \xi} f_{\xi'}(\zeta X) \equiv \begin{cases} 1 & \text{mod } f_\xi(\zeta X) \\ 0 & \text{mod } f_{\xi'}(\zeta X), \xi' \neq \xi. \end{cases}$$

Nun gilt für jedes  $\xi \in \kappa$

$$f_\xi(\zeta X) = \zeta X - \xi d = \zeta(X - \zeta^{-1}\xi d) = \zeta f_{\zeta^{-1}\xi}(X).$$

Insbesondere sind Kongruenzen modulo  $f_\xi(\zeta X)$  und modulo  $f_{\zeta^{-1}\xi}(X)$  dieselben. Daher ist das Bild von

$$\sigma_\tau((P_\xi(X))_\xi) = \left[ \sum_{\xi \in \kappa} c_\xi(\zeta X) P_\xi(\zeta X) \prod_{\xi' \neq \xi} f_{\xi'}(\zeta X) \right]$$

unter  $\tau^{-1}$  das Tupel  $(P_\xi(\zeta X))_{\zeta^{-1}\xi}$ . Nach Umindizierung erhalten wir

$$\sigma_\tau((P_\xi(X))_\xi) = (P_{\zeta\xi}(\zeta X))_{\xi \in \kappa}$$

wie behauptet. □

## 7.2 Relationen zwischen Nullstellen

Wir betrachten nun den Fall, daß zwischen den einzelnen  $D_i \in F$  gewisse Relationen bestehen. In den Kapiteln 8 und 9 werden wir sehen, daß solche Relationen zwischen verschiedenen  $\mu_i$  von Relationen zwischen Gewichten aus verschiedenen Orbitalen unter  $\langle w \rangle$  herkommen.

Sei wieder  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$  und  $f_i \in F[X]$  Polynome der Form  $f_i(X) = X^\lambda - D_i$ . Wir nehmen ab jetzt an, daß  $\kappa$  in  $F$  enthalten sei und fixieren eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung  $\lambda$ . Wir wählen Elemente  $d_i \in \bar{F}$  mit  $D_i = d_i^\lambda$ . Diese Elemente entsprechen den Werten  $\chi(v)$  im Abschnitt 6.2. Für jedes Paar von (nicht notwendigerweise verschiedenen) Indizes

$(i, j)$  aus  $I$  sei  $\theta_{ij} \in \bar{F}^*$  mit  $d_i = \theta_{ij}d_j$ . Wir nehmen an dieser Stelle an, daß alle  $\theta_{ij}$  bereits in  $F$  liegen. Dies wird in den von uns betrachteten Fällen immer der Fall sein, siehe Kapitel 8 und 9. Wir fixieren für den Rest des Abschnitts die  $F$ -Algebra  $E$  und schreiben kurz  $\mathfrak{A}_\nu$  für  $\mathfrak{A}_{E,\nu}$  und  $\mathfrak{A}$  für  $\mathfrak{A}_E$ . Die Algebren  $\mathfrak{A}_i$  und  $\mathfrak{A}_j$  sind dann wegen der Gleichung  $d_i = \theta_{ij}d_j$  isomorph vermöge der Abbildung  $\Psi_{ij} : \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}_j$ , gegeben durch

$$\Psi_{ij} : [P(X)] \mapsto [P(\theta_{ij}X)].$$

Die Umkehrabbildung  $\Psi_{ij}^{-1} : \mathfrak{A}_j \rightarrow \mathfrak{A}_i$  wird gegeben durch

$$\Psi_{ij}^{-1} : [Q(X)] \mapsto [Q(\theta_{ij}^{-1}X)].$$

Offensichtlich werden die Abbildungen  $\Psi_{ij}$  induziert von den Abbildungen  $E[X] \rightarrow E[X], P(X) \mapsto P(\theta_{ij}X)$ . Wir werden in der Notation nicht zwischen diesen beiden eigentlich verschiedenen Abbildungen unterscheiden.

**Bemerkung 7.4.** Die Abbildungen  $\Psi_{ij}$  hängen von der Wahl von  $\theta_{ij}$  ab.  $\theta_{ij}$  ist nämlich nur eindeutig bis auf Multiplikation mit einer Einheitswurzel von Ordnung  $\lambda$ . Wir müssen also eigentlich  $\Psi_{ij}(\theta_{ij})$  statt  $\Psi_{ij}$  schreiben. Dies tun wir jedoch explizit nur, wenn die Wahl des „richtigen“  $\theta$  eine Rolle spielt. Wir treffen allerdings folgende Vereinbarungen: Es gelte stets  $\theta_{ii} = 1$  und  $\theta_{ji} = \theta_{ij}^{-1}$ . Für die zugehörigen Isomorphismen gilt dann  $\Psi_{ii} = \text{id}$  und  $\Psi_{ji} = \Psi_{ij}^{-1}$ .

**Bemerkung 7.5.** Seien  $Q, P_1, \dots, P_m$  Polynome in  $E[X]$  sowie  $c \in E$ . Seien  $i, j$  zwei Indizes aus der obigen Indexmenge  $I$ . Gilt

$$Q([P_1], \dots, [P_m]) = c$$

in  $\mathfrak{A}_{E,i}$ , so gilt auch

$$Q(\Psi_{ij}([P_1]), \dots, \Psi_{ij}([P_m])) = c$$

in  $\mathfrak{A}_{E,j}$ .

Wir betrachten nun zwei verschiedene Typen von Relationen zwischen Nullstellen  $\lambda_i$  von  $\mu$ :

(Typ 1)  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$  für zwei von null verschiedene Nullstellen von  $\mu$ .

(Typ 2)  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  für drei von null verschiedene Nullstellen von  $\mu$ .

Motiviert sind diese beiden Typen durch die Proposition 6.3: Obige Relationen sind gerade diejenigen, die eine Rolle spielen für Gruppen, die durch Bi- und Trilinearformen beschrieben sind im Sinne von Abschnitt 6.2. Dies ist der Fall für alle von uns betrachteten Gruppen, deren Wurzelsystem nicht vom Typ  $A_n$  ist. In diesem Fall besteht  $\mu$  nur aus einem Faktor, und die möglichen Relationen sind sehr einfach und werden im Abschnitt 7.3 beschrieben.

**Typ 2.** Wir betrachten als erstes den Typ 2 und fixieren drei Indizes  $(i, j, k)$  aus  $I$ . Sei  $\lambda_\nu$  Nullstelle des Faktors  $\mu_\nu$  für  $\nu = i, j, k$ . Seien  $\theta_{ij}, \theta_{ik}$  Elemente in  $F^*$  mit

$$\begin{aligned} d_i &= \theta_{ij}d_j \\ d_i &= \theta_{ik}d_k, \end{aligned}$$

für die die in Bemerkung 7.4 getroffenen Vereinbarungen erfüllt sind.

Es gelte nun  $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = 0$ . Wir drücken  $\lambda_j$  und  $\lambda_k$  in Abhängigkeit von  $\lambda_i$  aus mit geeigneten  $a, b$  als

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \lambda_j &= \zeta^a \theta_{ij}^{-1} \lambda_i \\ \lambda_k &= \zeta^b \theta_{ik}^{-1} \lambda_i. \end{aligned}$$

Man beachte dabei die Gleichungen zwischen den  $d_\nu$  und die Tatsache, daß sich jede Nullstelle von  $(X^\lambda - D_\nu)$  um eine Einheitswurzel der Ordnung  $\lambda$  von  $d_\nu$  unterscheidet. Die Gleichung  $\lambda_i + \lambda_j + \lambda_k = 0$  lautet dann

$$\lambda_i + \zeta^a \theta_{ij}^{-1} \lambda_j + \zeta^b \theta_{ik}^{-1} \lambda_k = 0$$

und gilt für jede Nullstelle  $\lambda_i$  von  $\mu_i(X) = X^\lambda - D_i$ .

Wir betrachten nun ein allgemeines Element  $([P]) \in \mathfrak{A}$ . Nach Proposition 6.3 ist die Bedingung

$$P(\lambda_i)P(\lambda_j)P(\lambda_k) = 1$$

hinreichend, damit die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}} = \Phi_{\mathfrak{v},E}$  das Element  $[P]$  nach  $G(E)$  abbildet. Wir untersuchen die linke Seite  $LS$  der Gleichung. Das Element  $\tau^{-1}([P])$  hat die Form  $([P_\nu])_\nu \in \bigoplus_\nu \mathfrak{A}_\nu$  für Polynome  $P_\nu \in E[X]$ . Nach Bemerkung 7.1 gilt dann

$$P(\lambda_i)P(\lambda_j)P(\lambda_k) = P_i(\lambda_i)P_j(\lambda_j)P_k(\lambda_k),$$

denn die  $\lambda_\nu$  sind Nullstellen der entsprechenden  $\mu_\nu$ . Wir setzen jetzt die Gleichungen (7.1) ein und erhalten

$$LS = P_i(\lambda_i) \cdot P_j(\zeta^a \theta_{ij}^{-1} \lambda_j) \cdot P_k(\zeta^b \theta_{ik}^{-1} \lambda_k)$$

oder

$$LS = P_i(\lambda_i) \cdot (\Psi_{ij}^{-1} P_j)(\zeta^a \lambda_i) \cdot (\Psi_{ik}^{-1} P_k)(\zeta^b \lambda_i).$$

**Typ 1.** Wir geben hier nur noch das analoge Ergebnis an: Seien  $\lambda_i$  Nullstelle von  $\mu_i$  und  $\lambda_j$  Nullstelle von  $\mu_j$  mit  $\lambda_i + \lambda_j = 0$ . Sei  $[P] \in \mathfrak{A}$  und  $\tau^{-1}([P]) = ([P_\nu])_\nu$ . Dann gilt  $\lambda_j = \zeta^a \theta_i^{-1} \lambda_i = -\lambda_i$  und

$$P(\lambda_i)P(\lambda_j) = P_i(\lambda_i)(\Psi_{ij}^{-1} P_j)(\zeta^a \lambda_i) = P_i(\lambda_i)P_j(-\lambda_j).$$

Wie die Abschnitte 8.4 und 9.2.3 zeigen werden, gilt in einer solchen Situation immer  $i = j$  und  $\zeta^a = -1$ .

**Proposition 7.6.** Seien  $I$  eine endliche Menge und  $\zeta$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $\lambda$  in  $F$ . Für alle  $i \in I$  sei  $\mu_i$  ein Polynom in  $F[X]$  der Form

$$\mu_i(X) = X^\lambda - D_i,$$

und  $d_i$  ein Element in  $\bar{F}^*$  mit  $d_i^\lambda = D_i$ . Die  $\mu_i$  seien teilerfremd und  $\mu$  sei erklärt als  $\mu = \prod_i \mu_i$ . Für alle Paare  $(i, j) \in I \times I$  gelte  $d_i = \theta_{ij} d_j$  für ein Element  $\theta_{ij} \in F^*$ . Die Vereinbarungen aus Bemerkung 7.4 seien für die  $\theta_{ij}$  erfüllt. Es sei weiter  $\mathfrak{A}_E$  die Algebra  $E[X]/\mu$  und  $\mathfrak{A}_{E,i}$  die Algebra  $E[X]/\mu_i$ . Wegen der Teilerfremdheit der  $\mu_i$  gilt  $\mathfrak{A}_E \cong \bigoplus_i \mathfrak{A}_{E,i}$  vermöge der Abbildung  $\tau$  aus Abschnitt 7.1. Sei für  $(i, j)$  die Abbildung  $\Psi_{ij} : E[X] \rightarrow E[X]$  gegeben durch

$$P(X) \mapsto P(\theta_{ij} X).$$

Die  $\Psi_{ij}$  induzieren Abbildungen  $\mathfrak{A}_{E,i} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,j}$ , die auch mit  $\Psi_{ij}$  bezeichnet werden. Seien  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  drei Elemente in  $\bar{F}$ , so daß  $\lambda_i$  entweder 0 oder Nullstelle von  $\mu_{n_i}$  ist und  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$  gilt. Ohne Einschränkung sei  $\lambda_1 \neq 0$ . Es gilt dann  $\lambda_2 = \varepsilon_2 \zeta^{a_2} \theta_{k_1 k_2}^{-1} \lambda_1$  und  $\lambda_3 = \varepsilon_3 \zeta^{a_3} \theta_{k_1 k_3}^{-1} \lambda_1$  für nicht-negative ganze Zahlen  $a_i$  und geeignete  $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$ . Seien schließlich noch  $P, P_i \in E[X]$  mit  $\tau^{-1}([P])_i = [P_i] \in \mathfrak{A}_{E,i}$ . Dann ist die Bedingung

$$P(\lambda_1)P(\lambda_2)^{\varepsilon_2}P(\lambda_3)^{\varepsilon_3} = 1$$

aus Proposition 6.1 äquivalent zu der Gleichung

$$P_{n_1}(\lambda_1) \cdot (\Psi_{n_1 n_2}^{-1} P_{n_2})(\zeta^{a_2} \lambda_1)^{\varepsilon_2} \cdot ((\Psi_{n_1 n_3}^{-1} P_{n_3})(\zeta^{a_3} \lambda_1))^{\varepsilon_3} = 1.$$

**Beweis:** Nach Bemerkung 7.1 gilt

$$P(\lambda_1)P(\lambda_2)^{\varepsilon_2}P(\lambda_3)^{\varepsilon_3} = P_{n_1}(\lambda_1)P_{n_2}(\lambda_2)^{\varepsilon_2}P_{n_3}(\lambda_3)^{\varepsilon_3}.$$

Setzt man nun die Gleichungen zwischen den  $\lambda_i$  ein, erhält man die Behauptung.  $\square$

**Korollar 7.7.** *Es seien alle Größen wie in Proposition 7.6. Dann ist das System von  $\lambda$  Bedingungen*

$$P(\lambda_1)P(\lambda_2)^{\varepsilon_2}P(\lambda_3)^{\varepsilon_3} = 1,$$

das man erhält, wenn  $\lambda_1$  alle Nullstellen von  $\mu_{n_1}$  durchläuft, äquivalent zu der Gleichung in  $\mathfrak{A}_{E,n_1}$

$$[P_{n_1}(X)][(\Psi_{n_1 n_2}^{-1} P_{n_2})(\zeta^{a_2} X)]^{\varepsilon_2}[(\Psi_{n_1 n_3}^{-1} P_{n_3})(\zeta^{a_3} X)]^{\varepsilon_3} = [1].$$

**Beweis:** Die Aussage folgt direkt mit Hilfe von Bemerkung 7.2 aus Proposition 7.6.  $\square$

**Bemerkung 7.8.** *Seien nun die Zahlen  $a_i$  in der Darstellung  $\lambda_i = \varepsilon_i \zeta^{a_i} \theta_{k_1 k_i}^{-1} \lambda_1$  aus Proposition 7.6 eindeutig bestimmt, falls  $\varepsilon_i \neq 0$  ist. Dann läßt sich die Menge der Tripel  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  mit  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , wo  $0 \neq \lambda_1$  eine Nullstelle von  $\mu_{k_1}$  und  $\lambda_2$  bzw.  $\lambda_3$  Nullstellen von  $\mu_{k_2}$  bzw.  $\mu_{k_3}$  oder gleich 0 sind, parametrisieren durch die Menge der Nullstellen  $\lambda$  von  $\mu_{k_1}$  als  $(\lambda, \varepsilon_2 \zeta^{a_2} \theta_{k_1 k_2}^{-1} \lambda, \varepsilon_3 \zeta^{a_3} \theta_{k_1 k_3}^{-1} \lambda)$ .*

Zum Schluß formulieren wir noch ein Lemma, das es uns erlaubt, die Menge aller Lösungstriple der Gleichung (Typ 2) durch die Lösungsmenge einer Gleichung von Einheitswurzeln zu parametrisieren. Sei dazu  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$ . Die Elemente  $\theta_{ij}$  und  $\theta_{ik}$  seien wie in den Gleichungen (7.1) erklärt. Wir betrachten die folgende Gleichung in  $\kappa$ :

$$(7.2) \quad 1 + X\theta_{ij}^{-1} + Y\theta_{ik}^{-1} = 0$$

**Lemma 7.9.** *Sei  $\zeta$  eine Einheitswurzel von Ordnung  $\lambda$  und  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$ . Seien  $\mu_i(X) = X^\lambda - D_i$  Polynome in  $E$  für jedes  $i$  aus einer endlichen Indexmenge  $I$  und  $\mu = \prod_i \mu_i$ . Dann stehen die Lösungen der Gleichung (Typ 2) in eindeutiger Beziehung zu den Lösungen in  $\kappa \times \kappa$  der Gleichung (7.2). Genauer gilt: Eine Lösung in  $\kappa \times \kappa$  der Gleichung (7.2) liefert durch Multiplikation mit den Nullstellen von  $\mu_i$  genau  $\lambda$  Lösungen der Gleichung (Typ 2). Umgekehrt entsteht jede Lösung der Gleichung (Typ 2) auf diese Weise.*

**Beweis:** Die Aussage folgt aus den Gleichungen (7.1), die stets für Lösungen der Gleichung (Typ 2) gilt.  $\square$

### 7.3 Relationen innerhalb eines Orbits und Normgleichungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir, welche Auswirkungen die Beziehungen zwischen den Nullstellen eines Faktors  $\mu_i$  von  $\mu$  auf die Algebra  $\mathfrak{A}_{E,i}$  haben. Wir werden sehen, daß die von den Relationen innerhalb des zu  $\mu_i$  gehörenden Orbits herkommenden Beziehungen zwischen den Nullstellen von  $\mu_i$  mit Normgleichungen in  $\mathfrak{A}_{E,i}$  in Verbindung gebracht werden können.

Wir behalten die Notationen aus den beiden vorigen Abschnitten bei. Die Polynome  $\mu_i = X^\lambda - D_i \in F[X]$  seien insbesondere alle vom gleichen Grad  $\lambda$  und separabel. Daher sind die Nullstellen von einem  $\mu_i$  paarweise verschieden. Wir betrachten für eine natürliche Zahl  $k$  folgende Relation zwischen  $k$  paarweise verschiedenen Nullstellen von  $\mu_i$ , die wieder motiviert ist durch die Proposition 6.3 für  $k$ -Linearformen:

$$(7.3) \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 0.$$

Aufgrund der Struktur von  $\mu_i = X^\lambda - D_i$  besteht die Menge der Nullstellen von  $\mu_i$  gerade aus dem Orbit einer festen Nullstelle  $\lambda_0$  unter der Gruppe  $\kappa = \kappa_\lambda$  der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$ . Lösungen der Gleichungen (7.3) stehen daher in eindeutiger Beziehung zu Lösungen einer entsprechenden Gleichung für paarweise verschiedene Elemente aus  $\kappa$ . Genauer geht es um folgende Gleichung zwischen Einheitswurzeln der Ordnung  $\lambda$ :

$$(7.4) \quad 1 + \sum_{j=1}^{k-1} X_j = 0.$$

Lösungen der Gleichung (7.4) entsprechen dann Lösungen der Gleichung (7.3). Wir bezeichnen ein Lösungstupel der Gleichung (7.3) (bzw. (7.4)) als *zulässig*, wenn die Komponenten des Lösungstupel paarweise verschieden sind.

**Bemerkung 7.10.** Sei  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$ ,  $\mu_i(X) = X^\lambda - D_i \in F[X]$  und  $\mathcal{N}$  die Menge der Nullstellen von  $\mu_i$ . Dann entsprechen die (zulässigen) Lösungstupel in  $\mathcal{N}^k$  der Gleichung (7.3) den (zulässigen) Lösungstupeln in  $\kappa^{k-1} ((\kappa \setminus \{1\})^{k-1})$  der Gleichung (7.4). Genauer gilt: Ein Lösungstupel in  $\kappa^{k-1}$  liefert durch Multiplikation mit den Elementen aus  $\mathcal{N}$  genau  $\lambda$  Lösungstupel in  $\mathcal{N}^k$ . Umgekehrt entsteht jede Lösung von (7.3) auf diese Weise.

**Korollar 7.11.** Die möglichen Relationen (7.3) zwischen Nullstellen eines Faktors  $\mu_i$  hängen nicht vom Faktor  $\mu_i$  ab. Genauer: Seien  $\mu_i$  und  $\mu_j$  zwei beliebige Faktoren (gleichen Grades) von  $\mu$ . Dann stehen die Lösungen der Gleichung (7.3) für den Faktor  $\mu_i$  in eindeutiger Beziehung zu denjenigen für den Faktor  $\mu_j$ .

Seien  $\mu_i(X) = X^\lambda - D_i$  und  $\mu_j(X) = X^\lambda - D_j$  und  $d_i, d_j \in \bar{F}^*$  mit  $D_i = d_i^\lambda$  und  $D_j = d_j^\lambda$ . Sei weiter  $\theta = \theta_{ij} = d_i d_j^{-1}$ . Dann wird eine eindeutige Beziehung zwischen den Lösungen für  $\mu_i$  und denen von  $\mu_j$  induziert durch die Abbildung

$$\begin{cases} \{\text{Nullstellen von } \mu_i\} & \rightarrow \{\text{Nullstellen von } \mu_j\} \\ x & \mapsto \theta x. \end{cases}$$

**Beweis:** Bemerkung 7.10 zeigt, daß die Lösungsmenge für einen beliebigen Faktor eindeutig bestimmt ist durch die Gruppe  $\kappa$  der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$ . Die Ordnung  $\lambda$  ist jedoch eine Invariante für  $\mu$ , also für jeden Faktor  $\mu_i$ .  $\square$

Offensichtlich sind Lösungen der Gleichung (7.3) höchstens eindeutig bis auf Vertauschung der  $\lambda_i$ . Für  $k = 2, 3$  ist dies auch schon die einzige Mehrdeutigkeit:

**Bemerkung 7.12.** Sei  $F$  ein Körper der Charakteristik 0 und  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$  in  $\bar{F}$ . Dann besitzt die Gleichung (7.4) für  $k = 2, 3$  genau dann eine Lösung in  $(\kappa \setminus \{1\})^{k-1}$  wenn  $\lambda$  durch  $k$  teilbar ist. In diesem Fall ist die Lösung bis auf Vertauschung eindeutig und besteht genau aus den Einheitswurzeln von Ordnung  $k$  in  $\kappa \setminus \{1\}$ . Ist weiter  $\lambda = k$ , so existiert bis auf Vertauschung genau eine zulässige Lösung der Gleichung (7.4), die genau aus den nichttrivialen Elementen von  $\kappa$  besteht.

**Beweis:** Offensichtlich bilden die Einheitswurzeln von Ordnung  $k$  eine Lösung für die Gleichung (7.4). Die Aussage für  $k = 2$  ist ebenfalls klar. Ist  $k = 3$ , so beachte man, daß zwei Einheitswurzeln  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  (beliebiger Ordnung) durch ihre Summe  $\zeta_1 + \zeta_2$  schon eindeutig bestimmt sind: Wegen  $\text{char}(F) = 0$  können wir in  $\mathbb{C}$  rechnen und sehen, daß der Vektor  $\zeta_1 + \zeta_2$  auf der Winkelhalbierenden von  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$  liegt und die Halbebene, die durch die Normale zu  $\zeta_1 + \zeta_2$  begrenzt wird und die  $\zeta_i$  enthält, festlegt. Da beide Einheitswurzeln die Länge 1 haben, sind die Winkel zwischen den  $\zeta_i$  und ihrer Summe durch die Länge der Summe schon eindeutig bestimmt. Andererseits ist  $(\zeta_3, \zeta_3^2)$  eine Lösung von (7.4), wenn  $\zeta_3$  eine primitive dritte Einheitswurzel ist.  $\square$

Wir fassen unser Ergebnis wieder mit Blick auf Proposition 6.3 zusammen.

**Proposition 7.13.** Sei  $E$  eine  $F$ -Algebra und  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$ . Es gelte  $\kappa \subset F$ . Seien weiter  $\mu$  ein Polynom in  $F[X]$  von der Form

$$\mu_i(X) = X^\lambda - D$$

für  $D \in E^*$  und  $P$  ein Polynom in  $E[X]$ . Ein  $k$ -Tupel  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  von paarweise verschiedene Nullstellen von  $\mu$  mit  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$  heiße zulässig. Es gelte  $k \mid \lambda$ , und die Gleichung  $1 + \sum_{i=1}^{k-1} X_k = 0$  in  $\kappa^{k-1}$  habe bis auf Vertauschung als paarweise verschiedene Lösungen  $x_i$  nur die nichttrivialen Einheitswurzeln von Ordnung  $k$ . Dann ist das System von Gleichungen

$$\prod_{i=1}^k P(\lambda_i) = 1,$$

das man erhält, wenn  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  alle zulässigen Tripel durchläuft, quivalent zu der Gleichung in  $\mathfrak{A}_E = E[X]/\mu$

$$\prod_{\zeta^k=1} [P(\zeta X)] = [1].$$

**Beweis:** Die Menge aller zulässigen Tripel läßt sich nach Bemerkung 7.10 und der Voraussetzung der Proposition parametrisieren als  $(\zeta \lambda_1)_{\zeta^k=1}$ , wo  $\lambda_1$  die Nullstellenmenge  $\mu$  durchläuft,. Wir wenden dann Bemerkung 7.2 an.  $\square$

## 7.4 Abhängigkeiten zwischen den Summanden von $\mathfrak{A}_E$

Während die Existenz und Eindeutigkeit der faktorinternen Relationen nach Bemerkung 7.12 vollständig geklärt ist und nur von der Ordnung  $\lambda$  des betrachteten Eigenwerts abhängt, ist dies bei den faktorbergreifenden Relationen aus Abschnitt 7.2 nicht der Fall. Daher treffen wir einige Annahmen, die in den von uns betrachteten Fällen stets erfüllt sein werden. Wir werden sehen, daß eine Relation vom Typ 2 zwischen Nullstellen von zwei verschiedenen Faktoren  $\mu_i$  und  $\mu_j$  von  $\mu$  eine Einbettung von  $E[X]/\mu_i$  nach  $E[X]/\mu$  induziert, die sich mit der Abbildung  $\Phi_{v,E}$  „verträgt“ in dem Sinne, daß die Bedingung aus Korollar 6.4 erfüllt ist für Nullstellen von  $\mu_i \mu_j$ .

Seien wieder  $\mu_i$  Polynome in  $F[X]$  der Gestalt  $\mu_i(X) = X^\lambda - D_i$  für eine Indexmenge  $I = \{1, \dots, m\}$  und eine positive ganze Zahl  $\lambda$ . Sei  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$ , und gelte  $\kappa \subset F$ . Es seien  $\lambda_1$  Nullstelle des Faktors  $\mu_i$  und  $\lambda_2, \lambda_3$  Nullstellen des Faktors  $\mu_j$ . Es gelte wieder  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , und die beiden Faktoren  $\mu_i$  und  $\mu_j$  seien verschieden. Ein solches Tripel  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  nennen wir in diesem Abschnitt *verbindend bezüglich*  $(i, j)$ . Seien wieder  $d_i$  und  $d_j$  Elemente in  $\bar{F}$  mit  $D_i = d_i^\lambda$  und  $D_j = d_j^\lambda$  und  $\theta = \theta_{ij} = d_i d_j^{-1}$ .

**Lemma 7.14.** Die Gleichung (7.2) besitzt für  $\theta = \theta_{ij} = \theta_{ik}$  bis auf Vertauschung höchstens eine Lösung in  $\kappa$ .

**Beweis:** Es gelte  $\zeta_1 + \zeta_2 = \xi_1 + \xi_2$  für Elemente  $\zeta_i, \xi_j \in \kappa$ . Wegen  $\text{char}(F) = 0$  können wir in  $\mathbb{C}$  rechnen. Das Element  $\zeta_1 + \zeta_2$  liegt auf der Winkelhalbierenden von  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ . Daher müssen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  dieselbe Winkelhalbierende haben wie  $\zeta_1$  und  $\zeta_2$ . Aus  $\zeta_1 + \zeta_2 = \xi_1 + \xi_2$  folgt dann aber schon  $\{\zeta_1, \zeta_2\} = \{\xi_1, \xi_2\}$ .  $\square$

Wir nehmen ab jetzt an, daß  $\lambda$  durch 3 teilbar ist.

Nach den Lemmata 7.9 und 7.14 gibt es nun genau  $\lambda$  verbindende Tripel bezüglich  $(i, j)$ . Sei  $[P] \in \mathfrak{A}_E$  und  $\tau^{-1}([P]) = ([P_k])_k \in \oplus_k \mathfrak{A}_{E,k}$ . Wenn wir die Bedingung aus Korollar 6.4 erfüllen wollen, muß nach Proposition 7.13 zusammen mit Bemerkung 7.12 auf jeden Fall

$$(7.5) \quad [P_j(X)][P_j(\zeta_3 X)][P_j(\zeta_3^2 X)] = [1]$$

gelten in  $\mathfrak{A}_{E,j}$ , wenn  $\zeta_3$  eine primitive 3-te Einheitswurzel ist. Nach Bemerkung 7.5 gilt die Gleichung (7.5) auch für  $\Psi_{ij}^{-1}([P_j])$ . Die Bedingung

$$[P_i(X)][(\Psi_{ij}^{-1}P_j)(\zeta^a X)][(\Psi_{ij}^{-1}P_j)(\zeta^b X)] = [1]$$

aus Korollar 7.7 ist daher äquivalent zu

$$(7.6) \quad [P_i(X)] = [(\Psi_{ij}^{-1}P_j)(\zeta^{a+\nu} X)][(\Psi_{ij}^{-1}P_j)(\zeta^{a+2\nu} X)][(\Psi_{ij}^{-1}P_j)(\zeta^{b+\nu} X)][(\Psi_{ij}^{-1}P_j)(\zeta^{b+2\nu} X)],$$

wenn  $\nu = \frac{\lambda}{3}$  ist. Die Gleichung (7.6) liefert eine notwendige Bedingung, damit die Bedingung aus Proposition 6.3 erfüllt ist. Gleichzeitig definiert die Gleichung (7.6) eine Abbildung  $\Theta_{ji} : \mathfrak{A}_{E,j} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,i}$  durch

$$\Theta_{ji}([Q]) = [(\Psi_{ij}^{-1}Q)(\zeta^{a+\nu} X)][(\Psi_{ij}^{-1}Q)(\zeta^{a+2\nu} X)][(\Psi_{ij}^{-1}Q)(\zeta^{b+\nu} X)][(\Psi_{ij}^{-1}Q)(\zeta^{b+2\nu} X)].$$

$\Theta_{ji}$  ist ein Isomorphismus von  $F$ -Algebren. Wir definieren nun eine Abbildung  $\varepsilon_{ji} : \mathfrak{A}_{E,j} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,j} \oplus \mathfrak{A}_{E,i}$  durch

$$\varepsilon_{ji} = (\text{id}, \Theta_{ji}),$$

also

$$\varepsilon_{ji}([P]) = ([P], \Theta_{ji}([P])).$$

$\varepsilon_{ji}$  ist eine Einbettung von  $\mathfrak{A}_{E,j}$  nach  $\mathfrak{A}_{E,j} \oplus \mathfrak{A}_{E,i}$ . Sie hat die Eigenschaft, daß für ihre Einschränkung auf die Untergruppe von  $\mathfrak{A}_{E,j}$ , die durch die Gleichung  $[P_j(X)][P_j(\zeta_3 X)][P_j(\zeta_3^2 X)] = [1]$  gegeben ist, die Bedingung aus Proposition 6.3 erfüllt ist, wenn die drei Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  Nullstellen von  $\mu_i \mu_j$  sind.

**Proposition 7.15.** *Seien  $\zeta$  eine primitive Einheitswurzel der Ordnung  $\lambda \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $\kappa$  die Gruppe der Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$  in  $\bar{F}$  und  $\nu = \frac{\lambda}{3}$ . Es gelte  $\kappa \subset F$ . Seien  $\mu_i = X^\lambda - D_i$  und  $\mu_j = X^\lambda - D_j$  zwei teilerfremde Polynome in  $F[X]$ ,  $d_i$  und  $d_j$  Elemente in  $\bar{F}^*$  mit  $d_i^\lambda = D_i$  und  $d_j^\lambda = D_j$  sowie  $\theta = \theta_{ij} = d_i d_j^{-1}$ . Es gelte  $\theta \in F$ . Weiter bezeichne  $\mathfrak{A}_{E,i}$  bzw.  $\mathfrak{A}_{E,j}$  bzw.  $\mathfrak{A}_{E,ij}$  die Algebra  $E[X]/\mu_i$  bzw.  $E[X]/\mu_j$  bzw.  $E[X]/\mu_i \mu_j$  und  $\tau_{ij}$  den Isomorphismus  $\mathfrak{A}_{E,i} \oplus \mathfrak{A}_{E,j} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,ij}$ . Der Isomorphismus  $\Psi_{ij} : \mathfrak{A}_{E,i} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,j}$  sei gegeben durch*

$$\Psi_{ij}([P]) = [P(\theta X)].$$

$(y_1, y_2) \in \kappa \times \kappa$  sei die bis auf Vertauschung eindeutige Lösung der Gleichung (7.2) für  $\theta$ . Wir erklären die Abbildung  $\Theta_{ji} : \mathfrak{A}_{E,j} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,i}$  durch

$$\Theta_{ji}([P]) = [(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_1 \zeta^\nu X)][(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_1 \zeta^{2\nu} X)][(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_2 \zeta^\nu X)][(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_2 \zeta^{2\nu} X)]$$

und die Abbildung  $\varepsilon_{ji} : \mathfrak{A}_{E,j} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,j} \oplus \mathfrak{A}_{E,i}$  durch

$$\varepsilon_{ji} = (\text{id}, \Theta_{ji}).$$

Sei schließlich  $\mathcal{T}(E)$  die Untergruppe von  $\mathfrak{A}_{E,j}$ , die durch die Gleichung

$$[P(X)][P(\zeta_3 X)][P(\zeta_3^2 X)] = [1]$$

definiert ist. Für  $P \in E[X]$  sei noch  $\tilde{P} \in E[X]$  ein Polynom mit  $\tilde{P} \equiv P \pmod{\mu_j}$  und  $\tilde{P} \equiv \Theta_{ji}(P) \pmod{\mu_i}$ . Dann gilt für alle Elemente  $[P] \in \mathcal{T}(E)$  und alle Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $\mu_i \mu_j$  mit  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , so daß **nicht** zwei  $\lambda_\nu$  Nullstellen von  $\mu_i$  und ein  $\lambda_\nu$  Nullstelle von  $\mu_j$  sind,

$$\tilde{P}(\lambda_1)\tilde{P}(\lambda_2)\tilde{P}(\lambda_3) = 1.$$

**Beweis:** Nach Definition von  $\tilde{P}$  gilt  $\tilde{P} \equiv P \pmod{\mu_j}$  und  $\tilde{P} \equiv \Theta_{ji}(P) \pmod{\mu_i}$ . Sind alle drei Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  Nullstellen desselben  $\mu_k$ , so folgt die Behauptung direkt aus der Definition von  $\mathcal{T}(E)$  zusammen mit Bemerkung 7.5. Sind  $\lambda_1$  Nullstelle von  $\mathfrak{A}_{E,i}$  und  $\lambda_2, \lambda_3$  Nullstellen von  $\mathfrak{A}_{E,j}$ , so gilt

$$\begin{aligned} \tilde{P}(\lambda_1)\tilde{P}(\lambda_2)\tilde{P}(\lambda_3) &= \Theta_{ji}(P)(\lambda_1)P(\lambda_2)P(\lambda_3) \\ &= \Theta_{ji}(P)(\lambda_1)P(y_1\theta^{-1}\lambda_1)P(y_2\theta^{-1}\lambda_1) \\ &= \Theta_{ji}(P)(\lambda_1)(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_1\lambda_1)(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_2\lambda_1) \end{aligned}$$

nach Lemma 7.9 und Definition von  $\Psi_{ij}$ . Wir benutzen die Definition von  $\Theta_{ji}$  und erhalten nach Umordnung der Faktoren für die rechte Seite  $RS$

$$RS = \underbrace{(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_1\lambda_1)(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_1\zeta^\nu\lambda_1)(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_1\zeta^{2\nu}\lambda_1)}_{=1} \cdot \underbrace{(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_2\lambda_1)(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_2\zeta^\nu\lambda_1)(\Psi_{ij}^{-1}P)(y_2\zeta^{2\nu}\lambda_1)}_{=1}$$

Die Gleichheiten der beiden geklammerten Terme folgen nach Definition von  $\mathcal{T}(E)$  und Bemerkung 7.5.  $\square$

Der Fall, daß zwei  $\lambda_i$  Nullstellen von  $\mu_j$  und ein  $\lambda_i$  Nullstelle von  $\mu_i$  ist, läßt sich im allgemeinen Fall nicht folgern, da überhaupt nicht klar ist, in welchem Zusammenhang Lösungen der Gleichung

$$1 + Y_1\theta + Y_2\theta$$

zu den Lösungen der Gleichung

$$1 + Y_1\theta^{-1} + Y_2\theta^{-1}$$

stehen. Lösungen der ersten Gleichung existieren genau dann, wenn  $\theta^{-1}$  als Summe zweier Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$  geschrieben werden kann, Lösungen der zweiten Gleichung genau dann, wenn  $\theta$  als Summe zweier Einheitswurzeln von Ordnung  $\lambda$  geschrieben werden kann. Wann dies jeweils der Fall ist und welche Einheitswurzeln dann auftauchen, muß von Fall zu Fall untersucht werden. Dies kann z.B. immer in  $\mathbb{C}$  getan werden.



# Kapitel 8

## Vorbereitungen für Tori zu Coxeter-elementen

In diesem Kapitel betrachten wir den Torus  $T = T_{cox}$ , der zur Konjugationsklasse eines Coxeter-elementes in der Weylgruppe  $W$  gehört. Da alle Coxeter-elemente konjugiert sind in  $W$ , spielt die Wahl eines solchen keine Rolle. Ein Coxeter-element  $w$  hat die Form

$$w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$$

für ein angeordnetes System einfacher Wurzeln  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Sei  $\alpha^+$  die Wurzel maximaler Höhe bezüglich  $\Delta$  und wie in Kapitel 5  $\Delta_{\text{aff}} = \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ . Sei  $l := \text{ord}(w)$  die Coxeterzahl.

### 8.1 Bestimmung der $\zeta$ -Wurzeln

Um die Eigenwerte  $\text{Ad}(w_\Delta)$  zu bestimmen, müssen wir wie in 4.4 beschrieben die Anzahl  $n_{\zeta^i}(w_\Delta)$  der Wurzeln  $\alpha \in \Phi$  bestimmen mit  $\alpha(w_\Delta) = \zeta^i$  für alle  $i$ . Nach den Aussagen 4.12, 4.13 und 4.14 ist dies äquivalent zur Bestimmung der charakteristischen Polynome  $f_\sigma$  von  $\text{Ad}(n_w)$  auf dem Raum  $\mathfrak{u}_\sigma = \sum_{\alpha \in \sigma} \mathfrak{u}_\alpha$  für jeden Orbit  $\sigma$  in  $\Phi$  unter  $\langle w \rangle$ . Im Fall, daß  $w$  ein Coxeter-element ist, hat man nun folgende Aussage.

**Proposition 8.1.** *Sei  $w$  ein Coxeter-element. Dann haben alle  $\langle w \rangle$ -Orbiten in  $\Phi$  dieselbe Länge  $l$ . Die Anzahl der Orbiten ist gleich dem Rang  $n$  der Gruppe.*

**Beweis:** In [Hum3] wird ein  $n$ -dimensionaler reeller Vektorraum  $V$  mit  $W$ -invariantem Skalarprodukt betrachtet mit  $\Phi \subset V$ . In [Hum3][3.17+3.18] wird eine Ebene  $E$  in  $V$  konstruiert, die das orthogonale Komplement einer Wurzel  $\alpha$  in einer Gerade schneidet für jedes  $\alpha \in \Phi$ . Das Coxeter-element  $w$  operiert auf  $E$  als Drehung um  $2\pi/l$ . Es folgt, daß jeder Orbit von Wurzeln unter  $W_w$  mindestens Länge  $l$  hat. Wegen  $\text{ord}(w) = l$  folgt schon Gleichheit. Die Anzahl der Orbiten folgt aus der Formel  $|\Phi| = l \cdot n$  (siehe [Hum3][3.18]).  $\square$

Jetzt können wir mit Hilfe von Proposition 4.14 leicht die Mengen  $\Phi_{\zeta^i}(w_\Delta) = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha(w_\Delta) = \zeta^i\}$  bestimmen für alle  $i$ . Da alle Orbiten dieselbe Länge  $n = \dim \mathbb{T}$  haben nach Proposition 8.1, folgt sofort  $\Phi_1(w_\Delta) = \emptyset$ . Insbesondere gilt  $\Delta_{\text{aff}}(w_\Delta) = \Delta_{\text{aff}} \cap \Phi_1(w_\Delta) = \emptyset$ , d.h.  $\alpha(w_\Delta) \neq 1$  für alle Wurzeln aus  $\Delta_{\text{aff}}$ . Dies bedeutet, daß  $w_\Delta$  bereits im Inneren  $A^\circ$  des Alkovens  $A$  liegt. In der Darstellung  $w_\Delta = \frac{1}{l}(a_\alpha)_{\alpha \in \Delta}$  mit ganzen Zahlen  $a_\alpha$  gelten daher in den Alkovenbedingungen 4.2 überall echte Ungleichungen:

$$a_\alpha > 0 \text{ für alle } \alpha \in \Delta$$
$$\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha < l.$$

Weil die  $a_\alpha$  ganze Zahlen sind und  $l = 1 + \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha$  gilt nach [Hum3][3.20], sind die offenen Alkovenbedingungen genau dann erfüllt, wenn alle  $a_\alpha$  gleich 1 sind. Dies bedeutet, daß  $\alpha(w_\Delta) = \zeta_l^{\text{ht}(\alpha)}$  gilt für eine beliebige positive Wurzel  $\alpha \in \Phi$ , wenn  $\text{ht}(\alpha)$  die Höhe von  $\alpha$  bezeichnet.

Wir fassen unser Ergebnis zusammen:

**Proposition 8.2.** *Sei  $w$  ein Coxetererelement. Dann gilt:*

(i) Der baryzentrische Punkt von  $w$  ist

$$w_\Delta = (\zeta_l, \dots, \zeta_l) \in \prod_{\alpha \in \Delta} F^*.$$

(ii) Der baryzentrische Vektor von  $w$  ist

$$w_A = \left(\frac{1}{l}, \dots, \frac{1}{l}\right) \in \left(\frac{1}{l}\mathbb{Z}\right)^{|\Delta|}.$$

(iii) Es gilt

$$\alpha(w_\Delta) = \zeta_l^{\text{ht}(\alpha)}$$

für alle positiven Wurzeln  $\alpha \in \Phi^+$ .

(iv) Die Menge der  $\zeta_l^i$ -Wurzeln ist

$$\Phi_{\zeta_l^i}(w_\Delta) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \text{ht}(\alpha) \equiv i \pmod{l}\} \cup \{\alpha \in \Phi^- \mid \text{ht}(-\alpha) \equiv -i \pmod{l}\}.$$

(v) Die Anzahl der  $\zeta_l^i$ -Wurzeln ist

$$n_{\zeta_l^i}(w_\Delta) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \equiv 0 \pmod{l} \\ n + \text{mult}_t(\zeta_l^i) & \text{sonst} \end{cases}.$$

(vi)  $\Phi_1(w_\Delta) = \emptyset$ ,  $\Phi_{\zeta_l}(w_\Delta) = \Delta_{\text{aff}} = \Delta \cup \{-\alpha^+\}$

(vii) Für die Zusammenhangskomponente  $Z_A^0$  der 1 des Zentralisators von  $w_\Delta$  gilt

$$Z_A^0 = \mathbb{T}.$$

**Bemerkung 8.3.** Die Eigenschaft  $\alpha^+(w_\Delta) = \zeta_l^{-1}$  folgt auch schon aus  $\Phi_1(w_\Delta) = \emptyset$  zusammen mit Proposition 5.4.

**Korollar 8.4.** *Sei  $v \in \mathfrak{u}_{\zeta_l} = \bigoplus_{\alpha \in \Phi_{\zeta_l}(w_\Delta)} \mathfrak{u}_\alpha$  ein rationaler Eigenvektor des baryzentrischen Punktes eines Coxetererelements,  $\rho$  eine rationale Darstellung von  $\mathfrak{g}$  und  $\alpha^+ = \sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha \alpha$ . Wir setzen wieder  $b_{-\alpha^+} = 1$ . Sei  $v$  geschrieben in der Form*

$$v = \sum_{\alpha \in \Phi_{\zeta_l}(w_\Delta)} y_\alpha x_\alpha$$

für fest gewählte rationale  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$  und geeigneten  $y_\alpha \in F$ . Dann sind die Koeffizienten des Minimalpolynoms von  $\rho(v)$  Polynome in  $\prod_{\alpha \in \Delta \cup \{-\alpha^+\}} y_\alpha^{b_\alpha}$ , d.h. jedes auftretende Monom ist eine Potenz von  $\prod_{\alpha \in \Delta \cup \{-\alpha^+\}} y_\alpha^{b_\alpha}$ . Außerdem sind alle  $y_\alpha$  ungleich null.

**Beweis:** Nach Proposition 5.6 sind die Koeffizienten des Minimalpolynoms  $\mu$  von  $\rho(v)$  Polynome in den  $y_\alpha$ , und alle auftretenden Monome haben die Gestalt  $\prod_{\alpha \in J} y_\alpha^{m_\alpha}$  für eine Teilmenge  $J$  von  $\Phi_{\zeta_l}(w_\Delta)$  mit  $\sum_{\alpha \in J} m_\alpha \alpha = 0$ . Wegen  $\Phi_{\zeta_l}(w_\Delta) = \Delta_{\text{aff}} = \Delta \cup \{-\alpha^+\}$  folgt aber für eine solche Teilmenge  $J = \Delta_{\text{aff}}$ . Die einzigen Lösungen der Gleichung  $\sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} m_\alpha \alpha = 0$  sind bis auf Vielfache gegeben durch

$$\begin{aligned} m_{-\alpha^+} &= 1 \\ m_\alpha &= b_\alpha \quad \text{für } \alpha \in \Delta. \end{aligned}$$

Wäre nun ein  $y_\alpha = 0$ , so wären alle Koeffizienten von  $\mu$  konstant und damit invariant unter der Multiplikation von  $v$  mit Skalaren aus  $F$ . Andererseits hat  $\mu$  nach Proposition 6.9 die Form

$$\mu(X) = X^\varepsilon \prod_k (X^\nu - \chi_k^\nu(v))$$

für  $\varepsilon \in \{0, 1\}$ , geeignetes  $\nu$  und geeignete Gewichte  $\chi_k$  von  $\rho$  mit  $\chi_k(v) \neq 0$ . Da  $\chi_k(xv) = x\chi(v)$  und damit  $\prod_k \chi_k(xv)^\nu = x^{k\nu} \prod_k \chi_k(v)^\nu$  gilt für  $x \in F$ , müssen die Koeffizienten von  $\mu$  bereits verschwinden. Dies ist aber ein Widerspruch zu  $\chi_k(v) \neq 0$  für alle  $k$ .  $\square$

In den klassischen Fällen  $A_n, B_n$  und  $C_n$  sowie dem Fall  $G_2$  ist die Struktur der Minimalpolynome für Eigenvektoren von  $w$  bereits in der Tabelle 6.3 aufgeführt. In diesem und den nächsten Abschnitten befassen wir uns nun mit den noch offenen Fällen  $D_n, F_4$  und  $E_6$ .

## 8.2 Das Minimalpolynom für das Wurzelsystem vom Typ $D_n$

Das Minimalpolynom von  $\rho(v)$  für einen rationalen, halbeinfachen Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta_{2(n-1)}$  hat die Form  $X(X^{2(n-1)} - D)$  für ein  $D \in F^*$  nach Abschnitt 6.3. Für das Minimalpolynom eines Eigenvektors von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $-1$  verweisen wir auf die späteren Abschnitte 8.5.4 und 9.1.1.

## 8.3 Das Minimalpolynom für das Wurzelsystem vom Typ $F_4$

Die einzigen Eigenwerte von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$  sind die primitiven 12-ten Einheitswurzeln. Sei  $\zeta = \zeta_{12}$  eine solche und ab jetzt fixiert. Nach den Propositionen 6.7 und 6.9 gibt es nur zwei Möglichkeiten für das Minimalpolynom  $\mu$  von  $d\rho(v)$ , wenn  $v \in \mathfrak{t}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  und  $d\rho$  die zu der in 6.6.6 beschriebenen 27-dimensionalen Darstellung von  $G$  assoziierte Darstellung von  $\mathfrak{g}$  ist:

$$\mu(X) = X(X^{12} - D)$$

oder

$$\mu(X) = X(X^{12} - D_1)(X^{12} - D_2).$$

Die 24 von null verschiedenen Gewichte sind die 24 kurzen Wurzeln aus  $\Phi$ . Wir wählen die Notationen aus Abschnitt 6.6.6. Eine Wurzel  $\alpha = \sum_{i=1}^4 c_\alpha \alpha_i$  schreiben wir kurz als  $c_{\alpha_1} c_{\alpha_2} c_{\alpha_3} c_{\alpha_4}$ . Dabei steht  $\bar{c}_{\alpha_i}$  für  $-c_{\alpha_i}$ . Sei nun  $w$  das Coxeterelement  $w = s_{\alpha_4} \cdot \dots \cdot s_{\alpha_1}$ . Die beiden Orbits der Länge 12 lassen sich explizit bestimmen:

$$\begin{aligned} \sigma_1 : & \quad 1110 \quad 00\bar{1}\bar{1} \quad 0\bar{1}\bar{2}\bar{1} \quad \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{2} \quad \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{1}\bar{2}\bar{2}\bar{1} \quad \bar{1}\bar{1}\bar{1}0 \quad \dots \\ \sigma_2 : & \quad 0010 \quad 0111 \quad 1121 \quad 0110 \quad 1111 \quad 000\bar{1} \quad 00\bar{1}0 \quad \dots \end{aligned}$$

Die jeweils letzten aufgeführten Elemente sind genau die Negativen der ersten, daher ist der Orbit durch obige Angabe bereits bestimmt.

Wir kommen nun zurück auf den Abschnitt 7.2 über additive Relationen zwischen den Gewichten. Unser Ziel ist es, Relationen zwischen den verschiedenen Orbiten auszunutzen. Offensichtlich gilt z.B. die folgende Relation:

$${}^w1232 = 1221,$$

d.h mit  $\alpha \hat{=} 1232$  gilt

$$\alpha_3 = \alpha - w(\alpha).$$

Wir wenden diese Gleichung nun auf  $v$  an und erhalten

$$\alpha_3(v) = \alpha(v) - w(\alpha)(v) = \alpha(v) - \zeta\alpha(v)$$

oder

$$\alpha_3(v) = (1 - \zeta)\alpha(v).$$

Aus dieser Gleichung folgt nun sofort, daß die beiden Orbite  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei verschiedene Elemente in  $\Lambda/w$  definieren, denn  $1 - \zeta \neq 0$  und  $1 - \zeta \neq \zeta^i$  für alle  $i$ . Also gilt

$$\mu(X) = X(X^{12} - D_1)(X^{12} - D_2).$$

Enthält  $F$  die 12-ten Einheitswurzeln, existiert diese Zerlegung schon über  $F$  nach Korollar 6.15.

Wir haben gesehen, daß  $\alpha_3(v) = (1 - \zeta)\alpha(v)$  gilt. Aus Symmetriegründen, die ausschließlich einer schöneren Darstellung dient, ersetzen wir  $\alpha$  durch  $w^{-1}(\alpha)$  und setzen  $\chi_1 = w^{-1}(\alpha)$ ,  $\chi_2 = \alpha_3$ . Wegen  $\zeta^2(1 - \zeta^2) = 1$  erhalten wir dann

$$(8.1) \quad \chi_2(v) = \zeta(1 - \zeta)\chi_1(v) \quad \text{bzw.} \quad \chi_1(v) = \zeta(1 + \zeta)\chi_2(v).$$

Zum Schluss beschäftigen wir uns noch mit der Frage, welche Linearkombinationen von Nullstellen null ergeben. Da  $G$  der Durchschnitt der Automorphismusgruppe einer Bilinearform mit der einer Trilinearform ist, sind für uns Summen aus zwei oder drei Nullstellen interessant (siehe Beispiel 6.6). Wir benutzen die Aussagen 7.9 und 7.10 sowie 7.12.

**Fall 1: Summen von zwei Nullstellen.** Da die Coxeterzahl 12 gerade ist, hat die Gleichung 7.12(i) die eindeutige Lösung  $\zeta^6 = -1$ . Es gibt keine Relation zwischen Nullstellen verschiedener Faktoren von  $\mu$ .

**Fall 1: Summen von drei Nullstellen.** Da die Coxeterzahl 12 durch 3 teilbar ist, hat die Gleichung 7.12(ii) die bis auf Vertauschung eindeutige Lösung  $(\zeta^4, \zeta^8)$ .

Allerdings gibt es jetzt noch orbitübergreifende Relationen: Seien  $\chi_1 \in \alpha_1$  und  $\chi_2 \in \alpha_2$  wie in (8.1) gewählt. Dann gilt für das zugehörige  $\theta$  aus Abschnitt 7.2

$$\theta = \zeta(1 + \zeta).$$

Die Gleichung (7.2) aus Abschnitt 7.2 lautet dann nach Multiplikation mit  $\theta$

$$\zeta(1 + \zeta) + X + Y = 0$$

und hat die bis auf Vertauschung eindeutige Lösungen  $(-\zeta, -\zeta^2)$ . Die Eindeutigkeit folgt aus Lemma 7.14. Im zugehörigen Tripel von Nullstellen von  $\mu$  sind dann zwei Elemente Nullstellen von  $X^{12} - D_2$  und eines Nullstelle von  $X^{12} - D_1$ .

Im dualen Fall betrachten wir die Gleichung (7.2) für  $\theta^{-1}$ . Sie lautet dann

$$\zeta(1 - \zeta) + X + Y = 0$$

und hat die bis auf Vertauschung eindeutige Lösungen  $(-\zeta, \zeta^2)$ .

Wir fassen unsere Ergebnisse im Fall eines Wurzelsystems vom Typ  $F_4$  zusammen.

**Proposition 8.5.** *Sei  $w$  ein Coxeterelement in  $W$  und  $v \in \mathfrak{t}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung 12. Dann hat das Minimalpolynom  $\mu$  von  $d\rho(v)$  die Gestalt*

$$\mu(X) = X(X^{12} - D_1)(X^{12} - D_2)$$

für Elemente  $D_1, D_2 \in \bar{F}^*$ , wenn  $d\rho$  die Darstellung aus Abschnitt 6.6.6 ist. Es gilt dabei  $D_1 = (1 + \zeta)^{12} D_2$ . Enthält  $F$  die 12-ten Einheitswurzeln, so liegen die  $D_i$  bereits in  $F^*$ . Es gibt weiter Gewichte  $\chi_1$  und  $\chi_2$ , so daß zusätzlich die Beziehungen

$$\begin{aligned}\chi_1(v) &= \zeta(1 + \zeta)\chi_2(v) \\ D_i &= \chi_i^{12}(v)\end{aligned}$$

gelten. Bis auf Anwendung von  $w$  und Vertauschung der Summanden sind die einzigen Möglichkeiten, zwei bzw. drei von null verschiedene Nullstellen von  $\mu$  zu null zu kombinieren, die folgenden:

- (1)  $\zeta^6 \chi_i(v) + \chi_i(v) = 0$
- (2)  $\zeta^8 \chi_i(v) + \zeta^4 \chi_i(v) + \chi_i(v) = 0$
- (3)  $\chi_1(v) - \zeta \chi_2(v) - \zeta^2 \chi_2(v) = 0$
- (4)  $\chi_2(v) + \zeta^2 \chi_2(v) - \zeta \chi_1(v) = 0$

**Beweis:** Es bleibt nur noch zu bemerken, daß die  $D_i$  bereits in  $F^*$  liegen, wenn  $F$  die 12-ten Einheitswurzeln enthält. Dies folgt aus Korollar 6.15. Die entsprechende Bedingung ist erfüllt wegen der Relationen zwischen den  $\chi_i$ .  $\square$

## 8.4 Die Minimalpolynome für das Wurzelsystem vom Typ $E_6$

Die Eigenwerte von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$  sind die primitiven 12-ten und die primitiven 3-ten Einheitswurzeln. Sei  $\zeta = \zeta_{12}$  eine primitiven 12-te Einheitswurzel und ab jetzt fixiert. Nach den Propositionen 6.7 und 6.9 gibt es nur zwei Möglichkeiten für das Minimalpolynom  $\mu$  von  $d\rho(v)$ , wenn  $v \in \mathfrak{t}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\zeta$  und  $d\rho$  die in 6.6.6 beschriebene 27-dimensionale Darstellung ist:

$$\mu(X) = X(X^{12} - D)$$

oder

$$\mu(X) = X(X^{12} - D_1)(X^{12} - D_2).$$

Wir wählen die Notationen aus Abschnitt 6.6.5. Ein Gewicht  $\chi = \frac{a}{b}(c_6(\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8) + \sum_{i=1}^5 c_i \varepsilon_i)$  schreiben wir kurz als  $c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6$ . Dabei steht  $\bar{c}_i$  für  $-c_i$ . Die drei Typen von Gewichten, die in Abschnitt 6.6.5 beschrieben werden, haben also beispielhaft folgende Darstellungen:

- (i) 000001 bezeichnet das Gewicht  $\frac{2}{3}(\varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8)$ .
- (ii) 00300 $\bar{1}$  bezeichnet das Gewicht  $\frac{1}{3}(3\varepsilon_3 - \varepsilon_6 - \varepsilon_7 + \varepsilon_8)$ .

(iii)  $\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1}$  bezeichnet das Gewicht  $\frac{1}{6}(-3\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3 + 3\varepsilon_4 + 3\varepsilon_5 + \varepsilon_6 + \varepsilon_7 - \varepsilon_8)$ .

Sei nun  $w$  das Coxeterelement  $w = s_{\alpha_6} \cdot \dots \cdot s_{\alpha_1}$ . Die Orbits in  $\Lambda$  lassen sich explizit bestimmen:

$$\begin{aligned} \alpha_1 : & \quad 0000\bar{3}\bar{1} \quad 333\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad 000001 \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3} \\ & \quad 3\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad 0000\bar{3}\bar{1} \quad 00030\bar{1} \quad 00300\bar{1} \quad 03000\bar{1} \\ \alpha_2 : & \quad 300001 \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad 000\bar{3}0\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \\ & \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad 00\bar{3}00\bar{1} \quad 333331 \quad \bar{3}0000\bar{1} \\ \alpha_3 : & \quad 00\bar{3}00\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{1} \end{aligned}$$

Wir kommen nun zurück auf den Abschnitt 7.2 über additive Relationen zwischen den Gewichten. Unser Ziel ist es, Relationen zwischen den verschiedenen Orbits auszunutzen. Wir betrachten zunächst die beiden Orbits der Länge 12. Offensichtlich gilt z.B. die folgende Relation:

$$03000\bar{1} - 30000\bar{1} = w^3 03000\bar{1} - w^4 03000\bar{1},$$

d.h mit  $\chi_2 \hat{=} 30000\bar{1}$  und  $\chi_1 \hat{=} 03000\bar{1}$  gilt

$$\chi_1 - \chi_2 = w^3(\chi_1) - w^4(\chi_1)$$

oder

$$(8.2) \quad \chi_2 = \chi_1 + w^4(\chi_1) - w^3(\chi_1).$$

Wir wenden diese Gleichung nun auf einen Eigenvektor  $v$  von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  an und erhalten

$$\chi_2(v) = \chi_1(v) + w^4(\chi_1)(v) - w^3(\chi_1)(v) = \chi_1(v)(1 + \zeta^4 - \zeta^3).$$

Das Kreisteilungspolynom der Ordnung 12 lautet  $\Phi_{12}(X) = X^4 - X^2 + 1$ . Wir können daher  $1 + \zeta^4$  in der obigen Gleichung durch  $\zeta^2$  ersetzen und erhalten nach Ersetzung von  $\chi_2$  durch  $w^{-1}(\chi_2)$

$$\chi_2(v) = \zeta(1 - \zeta)\chi_1(v) \quad \text{bzw.} \quad \chi_1(v) = \zeta(1 + \zeta)\chi_2(v)$$

Es gilt also dieselbe Beziehung wie im Fall des Wurzelsystems vom Typ  $F_4$ , vgl. Abschnitt 8.3. Aus dieser Gleichung folgt nun sofort, daß die beiden Orbits  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  zwei verschiedene Elemente in  $\Lambda/w$  definieren, denn  $1 - \zeta \neq 0$  und  $1 - \zeta \neq \zeta^i$  für alle  $i$ . Also gilt

$$\mu(X) = X(X^{12} - D_1)(X^{12} - D_2).$$

Enthält  $F$  die 12-ten Einheitswurzeln, existiert diese Zerlegung schon über  $F$  nach Korollar 6.15.

Wir betrachten nun einen Eigenvektor  $v$  von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta^4$ . Nach Proposition 6.9 können alle drei Orbits in  $\Lambda$  zum Minimalpolynom von  $\rho(v)$  beitragen, da die Orbitlängen jeweils Vielfache von 3 sind. Wir nutzen auch hier wieder Relationen zwischen den Gewichten aus. Es gilt nun

$$03000\bar{1} - 00\bar{3}00\bar{1} = w^2 03000\bar{1} - w^4 03000\bar{1},$$

d.h mit  $\chi_1 \hat{=} 03000\bar{1}$  und  $\chi_3 \hat{=} 00\bar{3}00\bar{1}$  gilt

$$\chi_1 - \chi_3 = w^2(\chi_1) - w^4(\chi_1)$$

oder

$$\chi_3 = \chi_1 + w^4(\chi_1) - w^2(\chi_1).$$

Wir wenden diese Gleichung auf  $v$  an und erhalten

$$\chi_3(v) = \chi_1(v) + \zeta^{16}(\chi_1)(v) - \zeta^8(\chi_1)(v) = \chi_1(v)(1 + \zeta^4 - \zeta^8).$$

Nach Ersetzung von  $1 + \zeta^4$  durch  $-\zeta^8$  und  $\chi_3$  durch  $w(\chi_3)$  erhalten wir schließlich

$$(8.3) \quad \chi_3(v) = -2\chi_1(v).$$

Aus der Gleichung (8.2) folgt weiter

$$\chi_2(v) = \chi_1(v) + \zeta^{16}\chi_1(v) - \zeta^{12}\chi_1(v) = \zeta^4\chi_1(v).$$

Also tragen die Orbits  $\mathfrak{o}_1$  und  $\mathfrak{o}_2$  nur einmal zum Minimalpolynom von  $\rho(v)$  bei. Wegen Gleichung 8.3 kann kein  $\chi \in \Lambda$  trivial auf  $v$  sein, denn sonst gälte  $\chi(v) = 0$  für alle  $\chi \in \Lambda$  und damit  $v = 0$ . Das Minimalpolynom von  $v$  hat also die Gestalt

$$\mu(X) = (X^3 - D)(X^3 + 8D).$$

Zum Schluss beschäftigen wir uns wieder mit der Frage, welche Linearkombinationen von Nullstellen von  $\mu$  null ergeben. Da  $G$  die Automorphismusgruppe einer Trilinearform ist, sind für uns ausschließlich Summen aus drei Nullstellen interessant (siehe Beispiel 6.6). Wir benutzen die Aussagen 7.9 und 7.10 sowie 7.12.

**Fall 1:  $v$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\zeta$ .** Die orbitinternen und orbitübergreifenden Relationen zwischen den Nullstellen von  $\mu$  sind exakt dieselben wie im Abschnitt 8.3.

**Fall 1:  $v$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\zeta^4$ .** Wegen  $X \nmid \mu(X)$  ist 0 keine Nullstelle von  $\mu$  auf. Daher sind nur Summen von drei jeweils von null verschiedene Nullstellen von  $\mu$  relevant.

Wegen  $\text{ord}(\zeta^4) = 3$  hat die Gleichung 7.12(ii) die bis auf Vertauschung eindeutige Lösung  $(\zeta^4, \zeta^8)$ . Dies ist die einzige orbitinterne Relation. Seien nun  $\chi_2 \in \mathfrak{o}_1$  und  $\chi_3 \in \mathfrak{o}_2$  wie in (8.3) gewählt. Dann gilt für das zugehörige  $\theta$  aus Abschnitt 7.2

$$\theta = -2.$$

Die Gleichung (7.2) aus Abschnitt 7.2 lautet dann nach Multiplikation mit  $\theta$

$$-2 + X + Y = 0$$

und hat die bis auf Vertauschung eindeutige Lösungen  $(1, 1)$ . Die Eindeutigkeit folgt wieder aus Lemma 7.14. Im zugehörigen Tripel von Nullstellen von  $\mu$  sind dann zwei Elemente Nullstellen von  $X^3 - D$  und eines Nullstelle von  $X^3 + 8D$ .

Im dualen Fall betrachten wir die Gleichung (7.2) für  $\theta^{-1}$ . Sie lautet dann

$$-\frac{1}{2} + X + Y = 0$$

und hat keine Lösungen.

Wir fassen unsere Ergebnisse im Fall eines Wurzelsystems vom Typ  $E_6$  zusammen.

**Proposition 8.6.** *Sei  $w$  ein Coxeterelement in  $W$ ,  $v_1 \in \mathfrak{t}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  und  $v_2 \in \mathfrak{t}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta^4$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung 12. Dann hat das Minimalpolynom  $\mu_1$  von  $d\rho(v_1)$  die Gestalt*

$$\mu_1(X) = X(X^{12} - D_1)(X^{12} - D_2)$$

für Elemente  $D_1, D_2 \in \bar{F}^*$ , und das Minimalpolynom  $\mu_2$  von  $d\rho(v_2)$  die Gestalt

$$\mu_2(X) = (X^3 - D)(X^3 + 8D)$$

für ein Element  $D \in \bar{F}^*$ . In beiden Fällen ist  $d\rho$  die Darstellung aus Abschnitt 6.6.5. Es gilt dabei  $D_1 = (1 + \zeta)^{12}D_2$ . Enthält  $F$  die 12-ten Einheitswurzeln, so liegen  $D$  und die  $D_i$  bereits in  $F^*$ . Es gibt weiter Gewichte  $\chi_1, \chi_2$  und  $\chi_3$ , so daß zusätzlich die Beziehungen

$$\begin{aligned}\chi_1(v_1) &= \zeta(1 + \zeta)\chi_2(v_1) \\ D_i &= \chi_i^{12}(v_1).\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\chi_3(v_2) &= -2\chi_2(v_2) \\ D &= \chi_3^3(v_3)\end{aligned}$$

gelten. Bis auf Anwendung von  $w$  und Vertauschung der Summanden sind die einzigen Möglichkeiten, drei von null verschiedene Nullstellen von  $\mu_1$  bzw.  $\mu_2$  zu null zu kombinieren, die folgenden:

Für  $\mu_1$  ( $i = 1, 2$ ):

- (1)  $\zeta^6\chi_i(v) + \chi_i(v) = 0$
- (2)  $\zeta^8\chi_i(v) + \zeta^4\chi_i(v) + \chi_i(v) = 0$
- (3)  $\chi_1(v) - \zeta\chi_2(v) - \zeta^2\chi_2(v) = 0$
- (4)  $\chi_2(v) + \zeta^2\chi_2(v) - \zeta\chi_1(v) = 0$

Für  $\mu_2$ :

- (1)  $\zeta^8\chi_3(v) + \zeta^4\chi_3(v) + \chi_3(v) = 0$
- (2)  $-2\zeta^8\chi_3(v) - 2\zeta^4\chi_3(v) - 2\chi_3(v) = 0$
- (3)  $-2\chi_3(v) - \chi_3(v) - \chi_3(v) = 0$

## 8.5 Beispiele für halbeinfache Eigenvektoren von $w_\Delta$

In diesem Abschnitt werden wir mit Hilfe der Darstellungen aus Abschnitt 6.6 konkrete rationale, halbeinfache Eigenvektoren von  $w_\Delta$  angeben für ein Coxeterelement  $w$ . Diese konkreten Beispiele werden später im zweiten Teil der Arbeit, wo es um die Bestimmung der Fixpunkte der Tori geht, eine wichtige Rolle spielen: Zum einen werden die hier angegebenen Matrizen bei geeigneter Wahl eines Parameters obere Dreiecksmatrizen modulo  $\pi$  sein (der Grundkörper ist im zweiten Teil ein  $p$ -adischer Körper mit Uniformisierendem  $\pi$ ), und zum anderen läßt sich für die angegebenen Matrizen  $v$  leicht die Menge  $\Phi(v)$  (siehe Definition 13.11) ablesen, die Menge der Wurzeln, die eine nichttriviale Komponente zu  $v$  beitragen. Aus denselben Gründen gibt es auch einen entsprechenden Abschnitt im Kapitel 9.

Ist  $l$  die Coxeterzahl und  $\zeta$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $l$ , so gilt nach Proposition 8.2 stets  $\Phi_\zeta(w_\Delta) = \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ . Weiter gilt nach Korollar 8.4  $\Phi(v) = \Phi_\zeta(w_\Delta)$  für jedes halbeinfache  $v \in \bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta(w_\Delta)} \mathfrak{u}_\alpha$ .



### 8.5.1 Typ $A_n$

Es ist  $G = SL_n$ . Für  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \in \Delta$  sei  $x_\alpha$  die Matrix, deren einziger von null verschiedener Eintrag an Position  $(i, i+1)$  steht und gleich 1 ist. Die Matrix  $x_{-\alpha^+}(D)$  habe ihren einzigen von null verschiedenen Eintrag  $D$  an Position  $(n, 1)$ . Dann hat  $v_D = x_{-\alpha^+}(D) + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X^n - D$ .

### 8.5.2 Typ $B_n$

Es ist  $G = SO_{2n+1}$ . Für  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \in \Delta$  sei  $x_\alpha$  die Matrix, deren einzige von null verschiedenen Einträge an den Positionen  $(i, i+1)$  bzw.  $(2n+1-i, 2n+2-i)$  stehen und gleich 1 bzw.  $-1$  sind. Die Matrix  $x_{\varepsilon_n}$  habe ihre einzigen von null verschiedenen Einträge 1 bzw.  $-1$  an den Positionen  $(n, n+1)$  bzw.  $(n+1, n+2)$ . Schließlich seien die einzigen von null verschiedenen Einträge von  $x_{-\alpha^+}(D)$  an den Positionen  $(2n, 1)$  bzw.  $(2n+1, 2)$  gleich  $D$  bzw.  $-D$ . Dann hat  $v_D = Dx_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^{2n} - 4D)$ .

### 8.5.3 Typ $C_n$

Es ist  $G = Sp_{2n}$ . Für  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \in \Delta$  sei  $x_\alpha$  die Matrix, deren einzige von null verschiedenen Einträge an den Positionen  $(i, i+1)$  bzw.  $(2n-i, 2n+1-i)$  stehen und beide gleich 1 sind. Die Matrix  $x_{2\varepsilon_n}$  habe ihren einzigen von null verschiedenen Eintrag 1 an der Position  $(n, n+1)$ . Schließlich sei der einzige von null verschiedene Eintrag von  $x_{-\alpha^+}(D)$  an der Position  $(2n, 1)$  gleich  $D$ . Dann hat  $v_D = Dx_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X^{2n} - 4D$ .

### 8.5.4 Typ $D_n$

Es ist  $G = SO_{2n}$ . Für  $\alpha = \varepsilon_i - \varepsilon_j \in \Phi^+$  sei  $x_\alpha$  die Matrix, deren einzige von null verschiedenen Einträge an den Positionen  $(i, j)$  bzw.  $(2n+1-j, 2n+1-i)$  stehen und gleich 1 bzw.  $-1$  sind. Für  $\alpha = \varepsilon_i + \varepsilon_j \in \Phi^+$  sei  $x_\alpha$  die Matrix, deren einzige von null verschiedenen Einträge an den Positionen  $(i, 2n+1-j)$  bzw.  $(j, 2n+1-i)$  stehen und gleich 1 bzw.  $-1$  sind. Für eine negative Wurzel  $\alpha$  sei  $x_\alpha = x_{-\alpha}^t$ . Dann hat  $v_1(D_1) = D_1x_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^{2(n-1)} - D_1)$ .

Es bleibt ein Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta_{2(n-1)}^{n-1} = -1$  anzugeben. Sei

$$I = \{\pm(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_n)\}.$$

Es ist  $I \subset \Phi_{-1}(w_\Delta)$  nach Bemerkung 9.2. Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  hat

$$v_2(D_2) = D_2(x_{-(\varepsilon_1 - \varepsilon_n)} + x_{-(\varepsilon_1 + \varepsilon_n)}) + x_{\varepsilon_1 - \varepsilon_n} + x_{\varepsilon_1 + \varepsilon_n}$$

das Minimalpolynom  $X(X^2 - D_2)$  und kommutiert mit  $v_1(D_2)$ . Genauer gilt sogar  $v_1(D)v_2(D) = 0$ .

### 8.5.5 Typ $G_2$

Für  $\alpha_1, \alpha_2, -\alpha^+ \in \Delta_{\text{aff}}$  sei

$$x_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & 2 & & \\ & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & -1 & & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad x_{-\alpha^+}(D) = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ D & -D & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann hat  $v(D) = x_{-\alpha^+}(D) + x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2}$  das Minimalpolynom  $X(X^6 - 4D)$ .

### 8.5.6 Typ $F_4$

Es existieren für alle  $\alpha \in \Phi$  Matrizen  $x_\alpha$  mit  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ , so daß alle Einträge von  $x_\alpha$  gleich  $\pm 1$  sind (dies läßt sich leicht anhand des Abschnitts 6.6.6 nachrechnen). Die  $x_\alpha$  sind eindeutig bis auf Multiplikation mit  $-1$ . Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  hat dann  $v_D = Dx_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^{24} + 270DX^{12} - 27D^2)$ .

### 8.5.7 Typ $E_6$

Es existieren für alle  $\alpha \in \Phi$  Matrizen  $x_\alpha$  mit  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ , so daß alle Einträge von  $x_\alpha$  gleich  $\pm 1$  sind. Die  $x_\alpha$  sind eindeutig bis auf Multiplikation mit  $-1$ . Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  hat dann  $v_1(D_1) = D_1x_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in \Delta} x_\alpha$  Minimalpolynom  $X(X^{24} - 270D_1X^{12} - 27D_1^2)$  und charakteristisches Polynom  $X^3(X^{24} - 270D_1X^{12} - 27D_1^2)$ .

Es bleibt ein Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta_{12}^4$  anzugeben. Sei

$$I = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \\ \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \\ -(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6), \\ -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6) \end{array} \right\}.$$

Es gilt  $I \subset \Phi_{-1}(w_\Delta)$  nach 8.2(iii). Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  und für  $D_2 = D_1$  kommutiert  $v_2(D_2) = D_2(\sum_{\alpha \in I^-} x_\alpha) + \sum_{\alpha \in I^+} x_\alpha$  mit  $v_1(D_1)$  und hat das Minimalpolynom  $(X^3 - D_2)(X^3 + 8D_2)$ . Das charakteristische Polynom von  $v_2(D_2)$  lautet  $(X^3 - D_2)^8(X^3 + 8D_2)$ . Weiter gilt  $\Phi(v_2(D_2)) = I$ .

Es existiert ein dreidimensionaler Unterraum, von  $V = F^{27}$  auf dem  $v_1(D)$  die Nullabbildung und  $v_2(D)$  das charakteristische Polynom  $X^3 + 8D$  hat.

# Kapitel 9

## Vorbereitungen für Tori zu Nicht-Coxeter-Elementen

In diesem Kapitel betrachten wir die primitiven Tori  $T$ , die nicht zur Konjugationsklasse eines Coxeter-elements in der Weylgruppe  $W$  gehören. Solche Tori existieren in den Fällen eines Wurzelsystems vom Typ  $D_n, F_4$  und  $E_6$ . Sei wie immer  $\Delta$  ein System einfacher Wurzeln,  $\alpha^+$  die Wurzel maximaler Höhe bezüglich  $\Delta$  und  $\Delta_{\text{aff}} = \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ . Sei  $w \in W$  primitiv und  $l := \text{ord}(w)$  die Ordnung von  $w$ .

Wir gehen vor im Kapitel 8 und bestimmen zunächst mit Hilfe der Orbiten von  $w$  in  $\Phi$  nach Proposition 4.14 die Wurzelmenge  $\Phi_\zeta(w_\Delta)$  für alle auftretenden Eigenwerte  $\zeta$  von  $w$ . Diese sind wichtig für die Fixpunktbestimmung in Teil II. Anschließend beschreiben wir für die Darstellungen aus Abschnitt 6.6 die Minimalpolynome von halbeinfachen, paarweise kommutierenden Eigenvektoren von  $w$ . Diese liefern uns dann die gewünschten algebraischen Beschreibungen der Tori.

Wir untersuchen die Tori für jeden Typ des Wurzelsystems getrennt. Die Bezeichnung der Konjugationsklassen ist die aus [BFW], gibt also die Ordnungen der Kreisteilungspolynome an, die als Faktoren im charakteristischen Polynom von  $w$  als Automorphismus von  $\mathfrak{t}$  auftreten.

### 9.1 Bestimmung der $\zeta$ -Wurzeln

#### 9.1.1 Wurzelsystem vom Typ $D_n$

Für jede Partition  $(k, l)$  von  $n = k + l$  mit  $kl \neq 0$  existiert eine primitive Konjugationsklasse in  $W$ . Aus Notationsgründen nehmen wir stets  $1 \leq l \leq k \leq n$  an. Ein Vertreter  $w = w_k$  der Klasse zu  $(k, l)$  operiert nach [BFW] wie folgt auf den Gewichten  $\pm\varepsilon_1, \dots, \pm\varepsilon_n$  aus Abschnitt 6.6.4:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon_2 \mapsto \dots \mapsto \varepsilon_k \mapsto -\varepsilon_1 \mapsto \dots \mapsto -\varepsilon_k \\ \varepsilon_{k+1} \mapsto \varepsilon_{k+2} \mapsto \dots \mapsto \varepsilon_n \mapsto -\varepsilon_{k+1} \mapsto \dots \mapsto -\varepsilon_n \end{aligned}$$

$w_k$  wird deshalb auch in der Form  $(1 \dots k)^-((k+1) \dots n)^-$  dargestellt. Die Eigenwerte von  $w_k$  auf  $\mathfrak{t}$  sind die Einheitswurzeln von Ordnung  $2k$  bzw.  $2l$ , die nicht schon Einheitswurzeln der Ordnung  $k$  bzw.  $l$  sind. Sei nun  $\zeta_{2k}$  bzw.  $\zeta_{2l}$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $2k$  bzw.  $2l$ . Um die  $\zeta_{2k}$ -Wurzeln bzw.  $\zeta_{2l}$ -Wurzeln in  $\Phi$  zu bestimmen, benutzen wir hier direkt die Gewichte  $\varepsilon_i$ .

Die Eigenwerte  $\lambda_i(w_\Delta)$  ( $0 \leq i \leq 2n$ ) des baryzentrischen Punktes  $w_\Delta$  von  $w = w_k$  (für ein festes  $k$ ) sind in der Darstellung von 6.6.4 die  $\zeta_{2k}^a$  und die  $\zeta_{2l}^b$  für  $0 \leq a \leq 2k-1$  und  $0 \leq b \leq 2l-1$ . Die Menge  $\{\zeta_{2k}^a \mid 0 \leq a \leq 2k-1\}$  bzw.  $\{\zeta_{2l}^b \mid 0 \leq b \leq 2l-1\}$  steht über die (komplexe) Exponentialabbildung in Bijektion zu  $\mathcal{E}_{2k} := \{0, \dots, \frac{2k-1}{2k}\}$  bzw.  $\mathcal{E}_{2l} := \{0, \dots, \frac{2l-1}{2l}\}$ , nämlich durch  $x \mapsto \exp(2\pi i x)$ . Es

gelte ohne Einschränkung  $\zeta_{2k} = \exp(2\pi i/2k)$  und  $\zeta_{2l} = \exp(2\pi i/2l)$ . Wir ordnen nun einem Gewicht  $\varepsilon_i$  wie folgt einen Wert  $e_i \in \mathcal{E} := \mathcal{E}_{2k} \cup \mathcal{E}_{2l}$  zu: Man ordne die Menge  $\mathcal{E}$  aufsteigend bezüglich der gewöhnlichen Ordnung in  $\mathbb{R}$  als  $\{x_1, \dots, x_{2n}\}$  und ordne dem Gewicht  $\varepsilon_i$  gerade die Zahl  $e_i := x_{n+1-i}$  zu für  $1 \leq i \leq n$ . Es gilt dann  $e_1 = x_n = \frac{1}{2}$  und  $e_n = x_1 = 0$ .

**Proposition 9.1.** *Sei  $\Delta$  das System einfacher Wurzeln, das aus den Wurzeln  $\alpha_i$  mit  $d(\alpha_i) = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}$  für  $i = 1, \dots, n-1$  und  $d(\alpha_n) = \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n$  besteht, und  $w_\Delta$  der baryzentrische Punkt von  $w = w_k$  bezüglich  $\Delta$ . Mit obiger Zuordnung  $\varepsilon_i \leftrightarrow e_i \in \mathcal{E}$  gilt dann für eine Wurzel  $\alpha$  mit  $d(\alpha) = \pm 1\varepsilon_a \pm \varepsilon_b$  mit  $1 \leq a \neq b \leq n$*

$$\alpha(w_\Delta) = \exp(2\pi i(\pm e_a \pm e_b)).$$

**Beweis:** Man sieht leicht mit Hilfe der expliziten Operation von  $w_k$  auf den  $\varepsilon_i$ , daß die Menge der Eigenwerte von  $\text{Ad}(n_k)$  auf  $\mathfrak{g}$  (mit Vielfachheiten) bis auf den Eigenwert 1 mit Vielfachheit  $n$  übereinstimmt mit der Menge der Werte  $\exp(2\pi i(\pm e_a \pm e_b))$  (ebenfalls mit Vielfachheiten) für  $1 \leq a \neq b \leq n$ . Dabei ist  $n_k$  ein Lift von  $w_k$  nach  $N(\mathbb{T})$  derselben Ordnung (man arbeite in  $G_{\text{ad}}$ ). Da  $w_\Delta$  nach Proposition 4.9 das eindeutige  $G$ -Konjugierte von  $n_k$  in  $\mathbb{T}$  ist, das den Alkovenbedingungen bezüglich  $\Delta$  genügt, müssen wir nur noch zeigen, daß für die obige Festlegung die Alkovenbedingungen (4.2) bezüglich  $\Delta$  erfüllt sind. Diese entsprechen den Bedingungen

$$e_i - e_{i+1} \geq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq n-1$$

$$e_{n-1} + e_n \geq 0$$

$$(e_1 - e_2) + (e_{n-1} - e_n) + (e_{n-1} + e_n) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} e_i - e_{i+1} \leq 1.$$

Die ersten beiden Bedingungen sind erfüllt nach Definition der Ordnung auf  $\mathcal{E}_{2k} \cup \mathcal{E}_{2l}$ . Für die letzte Bedingung beachte man, daß  $e_i - e_{i+1} \leq \frac{1}{2k}$  gilt für alle  $i$ , da zwei aufeinanderfolgende Elemente aus  $\mathcal{E}_{2k}$  gerade den Abstand  $\frac{1}{2k}$  haben. Wegen  $e_n = 0$  ist außerdem  $e_{n-1} + e_n = e_{n-1} - e_n$ . Wir erhalten also für die linke Seite  $LS$  der letzten Ungleichung

$$LS \leq 3 \frac{1}{2k} + (n-3) \frac{1}{2k} = \frac{n}{2k}.$$

Wir haben jedoch  $k \geq l = n - k$  angenommen, d.h.  $k \geq \frac{n}{2}$ . Es folgt  $LS \leq \frac{n}{2k} \leq 1$ .  $\square$

Mit der Formel aus Proposition 9.1 lassen sich die Mengen  $\Phi_{\zeta_{2k}}(w_\Delta)$  und  $\Phi_{\zeta_{2l}}(w_\Delta)$  natürlich explizit bestimmen. Ihr Aussehen hängt jedoch massiv von  $k$  (und  $n$ ) ab: Sind  $k$  und  $l$  beispielsweise teilerfremd, so gilt  $\alpha(w_\Delta) \neq 1$  für alle  $\alpha \in \Phi$ . Der baryzentrische Punkt liegt also im Innern des Alkovens  $A$ . Im Fall  $k = l$  für gerades  $n$  sind die Mengen  $\mathcal{E}_{2k}$  und  $\mathcal{E}_{2l}$  gleich und es gibt (mehrere) Wurzeln  $\alpha$  mit  $\alpha(w_\Delta) = 1$ .

**Bemerkung 9.2.** *Für die Wurzeln  $\alpha_1, \alpha_{n-1}, \alpha_n$  und  $-\alpha^+$  gilt  $\alpha(w_\Delta) = \exp(2\pi i/2k) = \zeta_{2k}$ . Diese vier Wurzeln entsprechen gerade den Ecken des affinen Dynkindiagramms vom Typ  $D_n$ . Weiter liegen die Wurzeln, deren Ableitungen in der Menge  $\{\pm(\varepsilon_1 \pm \varepsilon_n)\}$  enthalten sind, alle in  $\Phi_{-1}(w_\Delta) =$ .*

**Beweis:** Es gilt  $e_1 = \frac{1}{2}, e_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2k}, e_{n-1} = \frac{1}{2k}$  und  $e_n = 0$ . Man beachte noch  $d(\alpha^+) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  und wende nun die Formel aus Proposition 9.1 an.  $\square$

### 9.1.2 Wurzelsystem vom Typ $F_4$

#### Die Klasse $6_p 6_p$

Es sei  $\zeta_6$  eine fixierte primitive Einheitswurzel von Ordnung 6. Alle Orbiten von  $w$  in  $\Phi$  haben die Länge 6 nach Proposition 4.15. Die Anzahl der Wurzeln ist 48. Nach Korollar 4.14 gilt also  $n_1(w_\Delta) = 4$ ,

$n_\zeta(w_\Delta) = 8$  für 6-te Einheitswurzeln  $\zeta$ , die nicht primitiv sind, und  $n_\zeta(w_\Delta) = 10$  für primitive 6-te Einheitswurzeln  $\zeta$ . Das Wurzelsystem  $\Phi_1(w_\Delta)$  von  $Z_A = Z_G^\circ(w_\Delta)$  besteht also aus genau vier Wurzeln  $\beta_1, -\beta_1, \beta_2, -\beta_2$ , von denen ohne Einschränkung  $\beta_1$  und  $\beta_2$  positiv seien. Wegen Proposition 5.3 ist eine der Wurzeln  $\beta_i$ , ohne Einschränkung  $\beta_1$ , einfach.  $\beta_2$  ist entweder ebenfalls einfach oder gleich  $\alpha^+$ . Im zweiten Fall, also wenn  $\beta_2 = \alpha^+$  ist, wäre  $a_{-\alpha^+}$  entweder gleich 0 oder gleich 1. Aus  $a_{-\alpha^+} = 0$  folgt aber nach Abschnitt 5.1  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha = 1$ , was wegen  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha = 11$  und  $b_\alpha < 5$  nur möglich ist, wenn  $a_\alpha = 0$  gilt für mindestens zwei einfache  $\alpha$ . Dann wäre aber  $|\Phi_1^+(w_\Delta)| > 2$ . Ebenso führt  $a_{-\alpha^+} = 1$  zum Widerspruch, da in diesem Fall nach Abschnitt 5.1  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha = 0$  und damit  $a_\alpha = 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$  folgen würde.

Für die beiden einfachen Wurzeln  $\beta_1$  und  $\beta_2$  mit  $\beta_1, \beta_2 \in \Phi_1(w_\Delta)$  gilt  $a_{\beta_i} = 0$  und damit

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}} \setminus \{\beta_1, \beta_2\}} b_\alpha a_\alpha = 1.$$

Wegen  $a_\alpha \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}$  und  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha = 11$  folgt  $b_{\beta_1} + b_{\beta_2} = 6$ . Durch diese Bedingung sind  $\beta_1$  und  $\beta_2$  schon (bis auf Vertauschung) eindeutig bestimmt: Es gilt

$$\beta_1 = \alpha_1 \text{ und } \beta_2 = \alpha_3.$$

Weiter folgt  $a_\alpha = \frac{1}{6}$  für alle  $\alpha \in \Delta_{\text{aff}} \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\}$ . Wir können nun die Menge  $\Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  bestimmen als

$$(9.1) \quad \Phi_{\zeta_6}(w_\Delta) = \Delta_{\text{aff}} \setminus \{\alpha_1, \alpha_3\} \cup \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_1 - \alpha^+\}.$$

Offensichtlich liegen all diese Wurzeln in  $\Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$ , und wegen  $n_{\zeta_6}(w_\Delta) = 10$  sind dies schon alle. Die negativen Wurzeln in  $\Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  sind  $-\alpha^+$  und  $\alpha_1 - \alpha^+$ .

### 9.1.3 Wurzelsystem vom Typ $E_6$

Ist das Wurzelsystem vom Typ  $E_6$ , so existieren zwei primitive Konjugationsklassen in  $W$ , die verschieden sind von der Coxeterklasse.

#### Die Klasse $9_p$

Es sei  $\zeta_9$  eine fixierte primitive Einheitswurzel von Ordnung 9. Alle Orbiten von  $w$  in  $\Phi$  haben die Länge 9 nach Proposition 4.15. Die Anzahl der Wurzeln ist 72. Nach Korollar 4.14 gilt also  $n_1(w_\Delta) = 2$ ,  $n_\zeta(w_\Delta) = 8$  für 9-te Einheitswurzeln  $\zeta$ , die nicht primitiv sind, und  $n_\zeta(w_\Delta) = 9$  für primitive 9-te Einheitswurzeln  $\zeta$ . Das Wurzelsystem  $\Phi_1(w_\Delta)$  von  $Z_A = Z_G^\circ(w_\Delta)$  besteht also aus genau zwei Wurzeln  $\beta, -\beta$ , von denen ohne Einschränkung  $\beta$  positiv sei. Wegen Proposition 5.3 ist  $\beta$  entweder einfach oder gleich  $\alpha^+$ . Im zweiten Fall, also wenn  $\beta = \alpha^+$  ist, wäre  $a_{-\alpha^+}$  entweder gleich 0 oder gleich 1. Aus  $a_{-\alpha^+} = 0$  folgt aber nach Abschnitt 5.1  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha = 1$ , was wegen  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha = 11$  nur möglich ist, wenn  $a_\alpha = 0$  gilt für eine einfache Wurzel  $\alpha$ . Dann wäre aber  $|\Phi_1^+(w_\Delta)| > 1$ . Ebenso führt  $a_{-\alpha^+} = 1$  zum Widerspruch, da in diesem Fall nach Abschnitt 5.1  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha = 0$  und damit  $a_\alpha = 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$  folgen würde.

Für die einfache Wurzel  $\beta$  mit  $\beta \in \Phi_1(w_\Delta)$  gilt  $a_\beta = 0$  und damit

$$\sum_{\beta \neq \alpha \in \Delta_{\text{aff}}} b_\alpha a_\alpha = 1.$$

Wegen  $a_\alpha \in \frac{1}{9}\mathbb{Z}$  und  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha = 11$  folgt  $b_\beta = 3$ . Durch diese Bedingung ist  $\beta$  schon eindeutig bestimmt: Es gilt  $\beta = \alpha_4$ . Weiter folgt  $a_\alpha = \frac{1}{9}$  für alle  $\alpha_4 \neq \alpha \in \Delta_{\text{aff}}$ . Wir können nun die Menge  $\Phi_{\zeta_9}(w_\Delta)$  bestimmen als

$$(9.2) \quad \Phi_{\zeta_9}(w_\Delta) = \Delta_{\text{aff}} \setminus \{\alpha_4\} \cup \{\alpha_2 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4\}.$$

Offensichtlich liegen all diese Wurzeln in  $\Phi_{\zeta_9}(w_\Delta)$ , und wegen  $n_{\zeta_9}(w_\Delta) = 9$  sind dies schon alle. Die einzige negative Wurzel in  $\Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  ist  $-\alpha^+$ .

### Die Klasse $6_p 6_p 3_p$

Es sei  $\zeta_6$  eine fixierte primitive Einheitswurzel von Ordnung 6. Für die Länge der Orbiten in  $\Phi$  unter  $w$  kommen nach Proposition 4.15 nur 3 und 6 in Frage. Auf dem Unterraum  $U$  von  $\mathbb{Z}[\Phi_{\mathfrak{g}}] \otimes F$ , der von den Wurzeln aus Orbiten der Länge 3 aufgespannt wird, operiert  $w^3$  als Identität. Nach Proposition 4.16 ist  $U$  höchstens zweidimensional. Da in einem eindimensionalen Unterraum nur maximal zwei Wurzeln liegen können, scheidet diese Möglichkeit aus. Die Wurzeln, die in  $U$  liegen, bilden selbst wieder ein Wurzelsystem, dessen Rang wie eben gesehen 0 oder 2 ist. Da alle Wurzeln dieselbe Länge haben, kann es nicht vom Typ  $G_2$  sein, d.h. es bleiben als nichttriviale Typen nur die Typen  $A_1 \times A_1$  und  $A_2$ . Der Typ  $A_1 \times A_1$  ist allerdings ausgeschlossen, da die Wurzeln in  $U$  nach Annahme in Orbiten der Länge 3 liegen und ihre Anzahl daher durch 3 teilbar ist. Die Orbiten der Länge 3 bestehen also, falls existent, insgesamt aus genau 6 Wurzeln. Die Anzahl der Wurzeln ist 72, weshalb es also mindestens 11 Orbiten der Länge 6 gibt. Aus den Aussagen 4.12 und 4.14 erhalten wir die Gleichung

$$11 + \text{mult}_U(1) = \dim(\mathbb{T}) + n_1(w_\Delta),$$

wenn  $\text{mult}_U(1)$  die Multiplizität des Eigenwerts 1 von  $\text{Ad}(n_w)$  auf  $\bigoplus_{\alpha \in U} \mathfrak{u}_\alpha$  bezeichnet. Wegen  $\dim(\mathfrak{t}) = 6$ ,  $\text{mult}_U(1) \leq 2$  und  $n_1(w_\Delta)$  gerade (letzteres nach Proposition 5.1) folgt  $\text{mult}_U(1) = 1$  und  $n_1(w_\Delta) = 6$ , und zwar unabhängig davon, ob die Wurzeln in einem oder zwei Orbiten unter  $w$  liegen; die Orbiten der letzten sechs Wurzeln tragen immer den Faktor  $X^6 - 1$  zum charakteristischen Polynom von  $\text{Ad}(n_w)$  bei.

Nach Korollar 4.14 gilt also  $n_1(w_\Delta) = 6$ ,  $n_\zeta(w_\Delta) = 12$  für 6-te Einheitswurzeln  $\zeta$ , die nicht primitiv oder keine primitiven 3-ten Einheitswurzeln sind, sowie  $n_\zeta(w_\Delta) = 14$  für primitive 6-te und  $n_\zeta(w_\Delta) = 13$  für primitive 3-te Einheitswurzeln  $\zeta$ . Das Wurzelsystem  $\Phi_1(w_\Delta)$  von  $Z_A = Z_G^\circ(w_\Delta)$  besteht also aus genau sechs Wurzeln  $\pm\beta_1, \pm\beta_2, \pm\beta_3$ , von denen ohne Einschränkung  $\beta_1, \beta_2$  und  $\beta_3$  positiv seien. Wegen Proposition 5.3 hat  $\Delta_{\text{aff}}(w_\Delta)$  mindestens zwei Elemente, von denen mindestens eines eine einfache Wurzel ist und das andere entweder ebenfalls eine einfache Wurzel oder gleich  $\alpha^+$  ist. Den Fall, daß ein  $\beta_i$  gleich  $\alpha^+$  ist, schließt man aus wie in den bereits behandelten Fällen: Aus  $a_{-\alpha^+} = 0$  folgt nach Abschnitt 5.1  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha = 1$ , was wegen  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha = 11$  und  $b_\alpha + b_{\alpha'} < 6$  (für einfache  $\alpha \neq \alpha'$ , die beide von  $\alpha_4$  verschieden sind) nur möglich ist, wenn  $a_{\alpha_4} = 0$  ist oder  $a_\alpha = 0$  gilt für mindestens drei einfache  $\alpha$ . In beiden Fällen wäre dann aber  $|\Phi_1^+(w_\Delta)| > 3$ , denn gälte  $a_{\alpha_4} = a_\alpha = 0$  für eine einfache Wurzel  $\alpha \neq \alpha_4$ , so wäre  $a_\alpha = 2$  und  $\alpha$  nicht orthogonal zu  $\alpha_4$ . Deshalb wäre in diesem Fall  $\alpha_4 + \alpha$  eine zusätzliche Wurzel in  $\Phi_1(wA)^+$ . Ebenso führt  $a_{-\alpha^+} = 1$  zum Widerspruch, da in diesem Fall nach Abschnitt 5.1  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha a_\alpha = 0$  und damit  $a_\alpha = 0$  für alle  $\alpha \in \Delta$  folgen würde.

Also sind mindestens zwei der drei Wurzeln  $\beta_i$  einfach. Bezeichne  $\Upsilon$  die Menge der einfachen Wurzeln unter den  $\beta_i$ . Für die Wurzeln aus  $\Upsilon$  gilt  $a_{\beta_i} = 0$  und damit

$$\sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}} \setminus \Upsilon} b_\alpha a_\alpha = 1.$$

Wegen  $a_\alpha \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}$  und  $\sum_{\alpha \in \Delta} b_\alpha = 11$  folgt  $\sum_{\beta \in \Upsilon} b_\beta = 6$ . Wegen  $b_\alpha + b_{\alpha'} < 6$  für einfache  $\alpha \neq \alpha'$  folgt  $\Upsilon = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ , also sind alle  $\beta_i$  schon einfach. Die  $\beta_i$  müssen paarweise orthogonal zueinander sein,

denn sonst gäbe es mehr als drei positive Wurzeln in  $\Phi_1(w_\Delta)$ . Es bleibt (bis auf Vertauschung) nur eine Möglichkeit:

$$\beta_1 = \alpha_2, \beta_2 = \alpha_3, \beta_3 = \alpha_5.$$

Weiter folgt  $a_\alpha = \frac{1}{6}$  für alle  $\alpha \in \Delta_{\text{aff}} \setminus \Upsilon$ . Wir können nun die Mengen  $\Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  und  $\Phi_{\zeta_6^2}(w_\Delta)$  bestimmen als

$$(9.3) \quad \begin{aligned} \Phi_{\zeta_6}(w_\Delta) &= \Delta_{\text{aff}} \setminus \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\} \cup \\ &\quad \{\alpha_1 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \\ &\quad \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 - \alpha^+\} \\ \Phi_{\zeta_6^2}(w_\Delta) &= \{\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ &\quad \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ &\quad \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 - \alpha^+, \\ &\quad \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha^+, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha^+, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - \alpha^+\}. \end{aligned}$$

Offensichtlich liegen all diese Wurzeln in  $\Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  bzw.  $\Phi_{\zeta_6^2}(w_\Delta)$ , und durch Vergleich der Kardinalitäten folgt schon, daß dies alle sind. Die negativen Wurzeln in  $\Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  sind  $-\alpha^+$  und  $\alpha_1 - \alpha^+$ .

## 9.2 Minimalpolynome der Eigenvektoren von $w$

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Minimalpolynome von Eigenvektoren der primitiven Elemente  $w \in W$ , die nicht zu einem Coxeterelement konjugiert sind, bezüglich der Darstellungen aus Abschnitt 6.6.

### 9.2.1 Wurzelsystem vom Typ $D_n$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $k$  und  $n - k$  teilerfremd sind. Sind  $v_1, v_2 \in \mathfrak{t}$  rationale Eigenvektoren von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta_{2k}$  bzw.  $\zeta_{2(n-k)}$  für eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $2k$  bzw.  $2(n - k)$ , so gilt für die Minimalpolynome  $\mu_i$  von  $\rho(v_i)$

$$(9.4) \quad \begin{aligned} \mu_1(X) &= X(X^{2k} - D_1) \\ \mu_1(X) &= X(X^{2(n-k)} - D_2) \end{aligned}$$

für geeignete Elemente  $D_i \in F^*$ . Dies folgt bereits aus den allgemeinen Überlegungen in Abschnitt 6.3. Außerdem kann für eine Wurzel  $\alpha = \varepsilon_i^{\pm 1} \varepsilon_j^{\pm 1}$  nur dann  $\alpha(w_\Delta) = \zeta_{2k}$  bzw.  $\alpha(w_\Delta) = \zeta_{2(n-k)}$  gelten, wenn die zugehörigen  $e_i, e_j$  aus Abschnitt 9.1.1 beide in  $\mathcal{E}_{2k}$  bzw.  $\mathcal{E}_{2(n-k)}$  liegen (sieht man von den trivialen Elementen 0 und  $\frac{1}{2}$  ab, die immer in beiden  $\mathcal{E}$  vorkommen). Wir übertragen diese Situation auf den allgemeinen Fall wie folgt: Sind  $k$  und  $n - k$  beliebig, so enthalten die Mengen  $\mathcal{E}_{2k}$  und  $\mathcal{E}_{2(n-k)}$  außer den Elementen 0 und  $\frac{1}{2}$  eventuell noch weitere gemeinsame Elemente. Wir markieren nun die Indizes der von 0 und  $\frac{1}{2}$  verschiedenen Elemente unter den  $e_1, \dots, e_n$  derart, daß wir jeden Index  $i$  genau einer der beiden Mengen  $\mathcal{E}_{2k}$  oder  $\mathcal{E}_{2(n-k)}$  zuordnen. Taucht  $e_i$  nicht in beiden Mengen  $\mathcal{E}$  auf, so wählen wir die eindeutige der Mengen  $\mathcal{E}$ , die  $e_i$  enthält. Sonst taucht der Wert  $e_i$  zweimal unter den  $e_1, \dots, e_n$  auf (als  $e_i$  und  $e_{i+1}$  für ein geeignetes  $i$ ). Dann treffen wir *willkürlich* eine Wahl, die  $i$  der einen und  $i + 1$  der anderen Menge zuordnet. Die Indizes 1 und  $n$  werden beiden Mengen zugeordnet. Im teilerfremden Fall entspricht die Markierung der gewöhnlichen Elementbeziehung der zugehörigen Werte  $e_i$ . Bei der Suche nach halbeinfachen Eigenvektoren von  $w_\Delta$  beschränken wir uns nun auf solche *zulässige* Wurzeln  $\alpha = \varepsilon_i^{\pm 1} \varepsilon_j^{\pm 1}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ), für die Indizes  $i$  und  $j$  beide derselben Menge  $\mathcal{E}_{2k}$  bzw.  $\mathcal{E}_{2(n-k)}$  zugeordnet

sind. Man sieht, daß man für jede wie oben beschriebene Markierung rationale Elemente

$$v_1 \in \bigoplus_{\substack{\alpha(w_\Delta)=\zeta_{2k} \\ \alpha \text{ zulässig}}} \mathfrak{u}_\alpha$$

$$v_2 \in \bigoplus_{\substack{\alpha(w_\Delta)=\zeta_{2(n-k)} \\ \alpha \text{ zulässig}}} \mathfrak{u}_\alpha$$

findet, die kommutieren und Minimalpolynome wie in (9.4) haben.

### 9.2.2 Wurzelsystem vom Typ $F_4$

#### Die Klasse $6_p6_p$

Die einzigen Eigenwerte von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$  sind die primitiven 6-ten Einheitswurzeln, jeweils mit Multiplizität zwei. Sei  $\zeta = \zeta_6$  eine solche und ab jetzt fixiert. Sei  $\rho$  die in Abschnitt 6.6.6 beschriebene 27-dimensionale Darstellung und  $v \in \mathfrak{t}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\zeta$ . Sei weiter  $\mu$  das Minimalpolynom von  $\rho(v)$ . Die 24 von null verschiedenen Gewichte sind die 24 kurzen Wurzeln aus  $\Phi$ . Wir wählen die Notationen aus dem Abschnitt 6.6.6. Wir können  $w$  explizit beschreiben: Sei  $\phi$  gegeben durch folgende Operation auf  $\Phi$ :

$$\alpha_1 \mapsto -\alpha_1^+, \alpha_2 \mapsto \alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 \mapsto \alpha_4, \alpha_4 \mapsto \alpha_3.$$

Da  $G$  keine äußeren Automorphismen hat, gilt schon  $\phi \in W$ . Wir setzen nun  $w_0 = s_{\alpha_4}s_{\alpha_1}\phi \in W$ .  $w_0$  hat Ordnung 6 als Automorphismus des vierdimensionalen Vektorraums  $\mathbb{Z}[\Phi] \otimes \mathbb{R}$ , und kein Eigenwert von  $w_0$  ist gleich  $\pm 1$ . Die einzige Konjugationsklasse in  $W$ , die die primitiven 6-ten, aber nicht die primitiven 2-ten Einheitswurzeln als Eigenwerte hat, ist die Klasse  $6_p6_p$  nach [BFW]. Nach Proposition 4.16 sind also  $w$  und  $w_0$  in  $W$  konjugiert.

Die vier Orbits der Länge 6 in  $\Lambda$  unter  $w_0$  lassen sich explizit bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{o}_1 : & \quad 0010 \quad 000\bar{1} \quad 00\bar{1}\bar{1} \quad 00\bar{1}0 \dots \\ \mathfrak{o}_2 : & \quad 1110 \quad 0\bar{1}\bar{2}\bar{1} \quad \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{1} \quad \bar{1}\bar{1}\bar{1}0 \dots \\ \mathfrak{o}_3 : & \quad 1232 \quad 1121 \quad 0\bar{1}\bar{1}\bar{1} \quad \bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{2} \dots \\ \mathfrak{o}_4 : & \quad 0110 \quad 1221 \quad 1111 \quad 0\bar{1}\bar{1}0 \dots \end{aligned}$$

Die jeweils letzten aufgeführten Elemente sind genau die Negativen der ersten, daher ist der Orbit durch obige Angabe bereits bestimmt.

Wir betrachten die folgenden beiden orbitübergreifenden Relationen:

$$\begin{aligned} {}^w 1232 + {}^w 1110 &= 1110 - 0110 \\ {}^w 1232 - {}^w 1110 &= 1232 + 0010, \end{aligned}$$

d.h. mit  $\chi_1 = 1232, \chi_2 = 1110, \chi_3 = 0110$  und  $\chi_4 = 0010$  gilt

$$\begin{aligned} w(\chi_1) + w(\chi_2) &= \chi_2 - \chi_3 \\ w(\chi_1) - w(\chi_2) &= \chi_1 + \chi_4. \end{aligned}$$

Wir wenden diese Gleichung nun auf  $v$  an und erhalten

$$\begin{aligned} \chi_3(v) &= \chi_2(v) - w(\chi_1)(v) - w(\chi_2)(v) = \chi_2(v) - \zeta\chi_2(v) - \zeta\chi_1(v) \\ \chi_4(v) &= w(\chi_1)(v) - \chi_1(v) - w(\chi_2)(v) = \zeta\chi_1(v) - \chi_1(v) - \zeta\chi_2(v). \end{aligned}$$



Unter Ausnutzung des Kreisteilungspolynoms 6-ter Ordnung  $X^2 - X + 1$  können wir weiter umformen zu

$$\begin{aligned}\chi_3(v) &= -\zeta\chi_1(v) - \zeta^2\chi_2(v) \\ \chi_4(v) &= \zeta^2\chi_1(v) - \zeta\chi_2(v).\end{aligned}$$

An dieser Stelle läßt sich nicht sagen, in welcher Beziehung die Werte  $\chi_1(v)$  und  $\chi_2(v)$  zueinander stehen. Wir greifen deshalb vor auf den Abschnitt 9.4.2, wo explizit zwei Eigenvektoren  $v_1$  und  $v_2$  von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$  angegeben sind. Da uns nur die Minimalpolynome der  $v_i$  interessieren und diese in 9.4.2 ebenfalls angegeben sind, verfolgen wir die Überlegungen dieses Abschnitts nicht weiter. Es sei nur gesagt, daß die Minimalpolynome der  $v_i$  z. Bsp. entstehen können durch die Belegung  $\chi_2(v_1)\zeta^2 = \chi_1(v_1)$  bzw.  $\chi_2(v_2) = \zeta(1 + \zeta)\chi_1(v_2)$ .

### 9.2.3 Wurzelsystem vom Typ $E_6$

#### Die Klasse $9_p$

Die einzigen Eigenwerte von  $w$  auf  $\mathfrak{t}$  sind die primitiven 9-ten Einheitswurzeln, jeweils mit Multiplizität eins. Sei  $\zeta = \zeta_9$  eine solche und ab jetzt fixiert. Sei  $\rho$  die in Abschnitt 6.6.5 beschriebene 27-dimensionale Darstellung und  $v \in \mathfrak{t}$  Eigenvektor zum Eigenwert  $\zeta$ . Sei weiter  $\mu$  das Minimalpolynom von  $\rho(v)$ . Die 27 von null verschiedenen Gewichte sowie alle anderen Notationen seien wie in Abschnitt 6.6.5. Wir beschreiben  $w$  wieder explizit wie im vorigen Abschnitt. Sei  $\phi$  gegeben durch

$$\alpha_1 \mapsto -\alpha^+, \alpha_2 \mapsto \alpha_5, \alpha_3 \mapsto \alpha_2, \alpha_4 \mapsto \alpha_4, \alpha_5 \mapsto \alpha_3, \alpha_6 \mapsto \alpha_1.$$

$\phi$  hat Ordnung 3, während jeder nichttriviale äußere Automorphismus von  $G$  gerade Ordnung hat. Es folgt wieder  $\phi \in W$ . Setze  $w_0 = s_{\alpha_3}s_{\alpha_1}\phi \in W$ .  $w_0$  hat Ordnung 9 als Automorphismus des 6-dimensionalen Vektorraums  $\mathbb{Z}[\Phi] \otimes \mathbb{R}$ . Das Minimalpolynom ist daher das Kreisteilungspolynom der Ordnung 9. Nach Proposition 4.16 stimmen die Konjugationsklassen von  $w_0$  und  $w$  dann überein.

Die drei Orbits der Länge 9 in  $\Lambda$  unter  $w$  lassen sich mit Hilfe des Vertreters  $w_0$  explizit bestimmen:

$$\begin{aligned}\sigma_1 : & \quad 000001 \quad 00003\bar{1} \quad 3\bar{3}33\bar{3}1 \quad \bar{3}0000\bar{1} \quad 333\bar{3}\bar{3}1 \\ & \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}31 \quad 30000\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \quad 000\bar{3}0\bar{1} \\ \sigma_2 : & \quad 0000\bar{3}\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \quad 3\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \quad 3\bar{3}\bar{3}\bar{3}31 \quad 0\bar{3}000\bar{1} \\ & \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}31 \quad 333331 \quad 00030\bar{1} \\ \sigma_3 : & \quad 03000\bar{1} \quad 3\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \quad 00\bar{3}00\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \\ & \quad 3\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}31 \quad 00300\bar{1} \quad \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1\end{aligned}$$

Wir betrachten die folgenden beiden orbitübergreifenden Relationen:

$$\begin{aligned}03000\bar{1} - 30000\bar{1} &= \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1 -^w 03000\bar{1} \\ 03000\bar{1} -^{w^2} 03000\bar{1} &=^{w^{-2}} 30000\bar{1} -^{w^3} 03000\bar{1},\end{aligned}$$

d.h. mit  $\chi_1 = 30000\bar{1}$ ,  $\chi_2 = \bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}\bar{3}1$  und  $\chi_3 = 03000\bar{1}$  gilt

$$\begin{aligned}\chi_3 - \chi_1 &= \chi_2 - w^3(\chi_3) \\ \chi_3 - w^2(\chi_3) &= w^{-2}(\chi_1) - w^3(\chi_3).\end{aligned}$$

Wir wenden diese Gleichung nun auf  $v$  an und erhalten

$$\begin{aligned}\chi_2(v) &= \chi_3(v) + w^3(\chi_3)(v) - \chi_1(v) = \chi_3(v) + \zeta^3\chi_3(v) - \chi_1(v) \\ w^{-2}(\chi_1)(v) &= \chi_3(v) + w^3(\chi_3) - w^2(\chi_3)(v) = \chi_3(v) + \zeta^3\chi_3(v) - \zeta^2\chi_3(v).\end{aligned}$$

Unter Ausnutzung des Kreisteilungspolynoms 9-ter Ordnung  $X^6 + X^3 + 1$  können wir die zweite Gleichung weiter umformen zu

$$\zeta^{-2}\chi_1(v) = (1 + \zeta^3 - \zeta^2)\chi_3(v) = -\zeta^4(\zeta^2 + \zeta^{-2})\chi_3(v)$$

oder

$$\chi_1(v) = -\zeta^6(\zeta^2 + \zeta^{-2})\chi_3(v).$$

Wir setzen dieses Resultat in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\chi_2(v) = (1 + \zeta^3 + \zeta^6(\zeta^2 + \zeta^{-2}))\chi_3(v) = \zeta^6(\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta^4 + \zeta^{-4})\chi_3(v).$$

Um eine schönere Darstellung zu erhalten, ersetzen wir noch  $\chi_3$  durch  $w^3(\chi_3)$  und erhalten endgültig

$$(9.5) \quad \begin{aligned}\chi_1(v) &= -(\zeta^2 + \zeta^{-2})\chi_3(v) \\ \chi_2(v) &= (\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta^4 + \zeta^{-4})\chi_3(v)\end{aligned}$$

Wegen  $(\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta^4 + \zeta^{-4}) \neq 0$  tragen alle drei Orbiten zum Minimalpolynom von  $\rho(v)$  bei. Nach Proposition 6.9 hat also  $\mu$  die Form

$$(9.6) \quad \mu(X) = (X^9 - \chi_2(v)^9)(X^9 - \chi_1(v)^9)(X^9 - \chi_3(v)^9).$$

Enthält  $F$  die 9-ten Einheitswurzeln, so existiert diese Zerlegung auch schon über  $F$  nach Korollar 6.15 und den Relationen (9.5). Wegen der beiden Identitäten (9.5) sind die Koeffizienten von  $\mu$  Polynome in  $\chi_3(v)^9$ . Genauer gilt

$$\mu(X) = X^{27} + a_{18}\chi_3(v)^9 X^{18} + a_9\chi_3(v)^{18} X^9 + a_0\chi_3(v)^{27}$$

mit

$$\begin{aligned}a_{18} &= (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9 - (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9(\zeta^4 + \zeta^{-4})^9 - 1 \\ a_9 &= (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9(\zeta^4 + \zeta^{-4})^9 - (\zeta^2 + \zeta^{-2})^{18}(\zeta^4 + \zeta^{-4})^9 - (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9 \\ a_0 &= (\zeta^2 + \zeta^{-2})^{18}(\zeta^4 + \zeta^{-4})^9\end{aligned}$$

Die in (9.5) auftretenden Faktoren  $\zeta^2 + \zeta^{-2}$  und  $\zeta^4 + \zeta^{-4}$  hängen auf folgende Weise zusammen: Die Elemente  $\zeta^2 + \zeta^{-2}$ ,  $\zeta^4 + \zeta^{-4}$  und  $\zeta + \zeta^{-1}$  sind die drei Nullstellen des Polynoms  $X^3 - 3X + 1$ . Insbesondere gilt

$$(9.7) \quad (\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta^4 + \zeta^{-4})(\zeta + \zeta^{-1}) = -1.$$

### Die Klasse $6_p 6_p 3_p$

Die Ergebnisse im Fall der Klasse  $6_p 6_p 3_p$  lassen sich in gewisser Weise aus den Fällen  $6_p 6_p$  für den typ  $F_4$  und dem Coxeterfall des Typs  $E_6$  zusammensetzen: Die Minimalpolynome der  $6_p$ -Anteile stimmen mit denen der Klasse  $6_p 6_p$  überein, während das Minimalpolynom des  $3_p$ -Anteils identisch ist mit dem des  $3_p$ -Anteils des Coxeterfalls des Typs  $E_6$ . Dies sei hier nur bemerkt, für weiteres verweisen wir auf Abschnitt 9.4.3.

### 9.3 Relationen zwischen Nullstellen der Minimalpolynome

Wir beschreiben in diesem Abschnitt, welche Linearkombinationen aus Nullstellen der jeweiligen Minimalpolynome 0 ergeben. Ist das Wurzelsystem von  $G$  vom Typ  $D_n$ , ist für uns nur der Fall relevant, daß die Summe zweier Nullstellen 0 ergibt. In den anderen Fällen ist  $G$  (mindestens) durch eine Trilinearform beschrieben, so daß wir Summen von zwei und drei Nullstellen betrachten (siehe Beispiel 6.6). Wir benutzen die Aussagen 7.9 und 7.10 sowie 7.12.

#### 9.3.1 Wurzelsystem vom Typ $D_n$

**Fall 1: Relationen innerhalb eines Faktors  $\mu_i$ .** Da die Ordnung von  $w$  durch 2 teilbar ist, hat die Gleichung (7.4) nach Bemerkung 7.12 die eindeutige Lösung  $-1$ .

**Fall 2: Relationen zwischen verschiedenen Faktoren.** Die jeweiligen Minimalpolynome besitzen nur einen Faktor nach Abschnitt 9.4.1.

#### 9.3.2 Wurzelsystem vom Typ $F_4$

Die Klasse  $6_p 6_p$

**Fall 1: Relationen innerhalb eines Faktors  $\mu_i$ .** Da die Ordnung 6 von  $w$  durch 2 bzw. 3 teilbar ist, hat die Gleichung (7.4) nach Bemerkung 7.12 die bis auf Vertauschung eindeutige Lösung  $-1$  bzw.  $(\zeta^2, \zeta^4)$ .

**Fall 2: Relationen zwischen verschiedenen Faktoren.** Hier brauchen wir nur einen der beiden Eigenvektoren betrachten, nämlich mit Minimalpolynom  $X(X^6 + D)(X^6 - 27D)$  (vgl. Abschnitte 9.2.2 oder 9.4.2). Für das zu den beiden von  $X$  verschiedenen Faktoren gehörige  $\theta$  gilt dann

$$\theta = 1 + \zeta.$$

Da 6 gerade ist, gibt es keine faktorübergreifende Relation zwischen zwei Nullstellen. Die Gleichung (7.2) aus Abschnitt 7.2 lautet nach Multiplikation mit  $\theta$

$$\theta + X + Y = 1 + \zeta + X + Y = 0.$$

Sie hat die bis auf Vertauschung eindeutige Lösung  $(-1, -\zeta)$  (vgl. Lemma 7.14). Im zugehörigen Tripel von Nullstellen von  $\mu$  sind dann zwei Elemente Nullstellen von  $X^6 + D$  und eine Nullstelle von  $X^6 - 27D$ . Ersetzt man  $\theta$  durch  $\theta^{-1}$ , so hat die resultierende duale Gleichung (7.2) keine Lösung für  $(X, Y)$ .

Wir fassen unsere Ergebnisse im Fall eines Wurzelsystems vom Typ  $F_4$  zusammen. Wir beziehen neben den Resultaten dieses Kapitels auch den späteren Abschnitt 9.4.2 mit ein.

**Proposition 9.3.** *Sei  $w$  ein Repräsentant der Konjugationsklasse [BFW][6p6p] in  $W$ . Dann existieren Eigenvektoren  $v_1, v_2 \in \mathfrak{t}$  von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung 6 mit den folgenden Eigenschaften. Die Minimalpolynome  $\mu_1, \mu_2$  von  $\rho(v_1)$  bzw.  $\rho(v_2)$  haben die Gestalt*

$$\begin{aligned}\mu_1(X) &= X(X^6 - D)(X^6 + 27D) \\ \mu_2(X) &= X(X^6 + 4D)\end{aligned}$$

für ein Element  $D \in F^*$ , wenn  $\rho$  die Darstellung aus 6.6.6 ist. Es gibt weiter Gewichte  $\chi_1, \chi_2$  und  $\chi_3$ , so daß zusätzlich die Beziehungen

$$\begin{aligned}\chi_2(v_1) &= (1 + \zeta)\chi_1(v_1) \\ D &= \chi_1^6(v_1) \\ 4D &= \chi_3^6(v_2)\end{aligned}$$

gelten. Bis auf Anwendung von  $w$  und Vertauschung der Summanden sind die einzigen Möglichkeiten, zwei bzw. drei von null verschiedene Nullstellen von  $\mu_i$  zu null zu kombinieren, die folgenden:

$$(1) \quad \zeta^4\chi_i(v) + \zeta^2\chi_i(v) + \chi_i(v) = 0$$

$$(2) \quad \zeta^3\chi_i(v) + \chi_i(v) = 0$$

und für  $\mu_1$  zusätzlich

$$(3) \quad -\chi_1(v) - \zeta\chi_1(v) + \chi_2(v) = 0$$

### 9.3.3 Wurzelsystem vom Typ $E_6$

$G$  wird in diesem Fall nur durch eine Trilinearform beschrieben. Taucht im Minimalpolynom  $\mu$  von  $\rho(v)$  der Faktor  $X$  nicht auf, d.h. ist 0 keine Nullstelle von  $\rho(v)$ , sind ausschließlich Summen von drei Nullstellen von  $\mu$  zu betrachten. Sei wie immer  $\zeta = \zeta_9$  eine fixierte primitive 9-te Einheitswurzel.

#### Die Klasse $9_p$

Wegen (9.6) taucht der Faktor  $X$  nicht als Nullstelle von  $\mu$  auf.

**Fall 1: Relationen innerhalb eines Faktors  $\mu_i$ .** Da die Ordnung 9 von  $w$  durch 3 teilbar ist, hat die Gleichung (7.4) nach Bemerkung 7.12 die bis auf Vertauschung eindeutige Lösung  $(\zeta^3, \zeta^6)$ .

**Fall 2: Relationen zwischen verschiedenen Faktoren.** Seien  $\chi_1 \in \mathfrak{o}_1, \chi_2 \in \mathfrak{o}_2$  und  $\chi_3 \in \mathfrak{o}_3$  wie in (8.1) gewählt. Dann gilt für die zugehörigen  $\theta_{ij}$  aus Abschnitt 7.2 wegen (9.5) und der Beziehung (9.7)

$$\begin{aligned}\theta_{13} &= -(\zeta^2 + \zeta^{-2}) \\ \theta_{21} &= -(\zeta^4 + \zeta^{-4}) \\ \theta_{32} &= -(\zeta + \zeta^{-1}).\end{aligned}$$

Die Gleichung (7.2) aus Abschnitt 7.2 lautet nach Multiplikation mit  $\theta_{ij}$

$$\theta_{ij} + X + Y = 0.$$

Sie hat für obige  $\theta_{ij}$  die bis auf Vertauschung eindeutige Lösungen  $(\zeta^{k(ij)}, \zeta^{-k(ij)})$ , wenn  $\theta_{ij} = \zeta^{k(ij)} + \zeta^{-k(ij)}$  gilt (vgl. Lemma 7.14). Im zugehörigen Tripel von Nullstellen von  $\mu$  sind dann zwei Elemente Nullstellen von  $X^9 - \chi_j(v)^9$  und eines Nullstelle von  $X^9 - \chi_i(v)^9$ .

Ersetzt man  $\theta_{ij}$  durch  $\theta_{ij}^{-1}$ , so hat die resultierende duale Gleichung (7.2) keine Lösung für  $(X, Y)$ . Es gibt also keine entsprechenden Relationen zwischen zwei Nullstellen von  $X^9 - \chi_i(v)^9$  und einer Nullstelle von  $X^9 - \chi_j(v)^9$ .

Es bleibt noch der Fall zu betrachten, daß die drei beteiligten Nullstellen aus drei verschiedenen Faktoren stammen. Da diese Situation symmetrisch ist bezüglich der Faktoren, spielt die Wahl der beiden  $\theta_{ij}$  und der Übergang zu den jeweiligen Inversen keine Rolle. Die Gleichung (7.2) lautet für  $\theta_{12}$  und  $\theta_{13}$

$$1 - (\zeta^4 + \zeta^{-4})X - (\zeta^2 + \zeta^{-2})^{-1}Y = 0.$$

Wegen (9.7) ist  $(1, 1)$  eine Lösung, denn

$$1 - (\zeta^4 + \zeta^{-4}) + (\zeta + \zeta^{-1})(\zeta^4 + \zeta^{-4}) = 1 + \zeta^3 + \zeta^6 = 0.$$

Man sieht leicht, daß diese Lösung eindeutig ist.

Wir fassen unsere Ergebnisse im Fall eines Wurzelsystems vom Typ  $E_6$  für die Klasse  $[9p]$  zusammen.

**Proposition 9.4.** *Sei  $w$  ein Repräsentant der Konjugationsklasse  $[\text{BFW}][9p]$  in  $W$  und  $v \in \mathfrak{t}$  ein Eigenvektor von  $w$  zum Eigenwert  $\zeta$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung 9. Dann hat das Minimalpolynom  $\mu$  von  $\rho(v)$  die Gestalt*

$$\mu(X) = (X^9 - D_1)(X^9 - D_2)(X^9 - D_3)$$

für Elemente  $D_1, D_2, D_3 \in \bar{F}^*$ , wenn  $\rho$  die Darstellung aus 6.6.5 ist. Enthält  $F$  die 9-ten Einheitswurzeln, liegen die  $D_i$  bereits in  $F^*$ . Es gilt weiter  $D_1 = -(\zeta^2 + \zeta^{-2})^9 D_3$  und  $D_2 = (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9 (\zeta^4 + \zeta^{-4})^9 D_3$ . Es gibt weiter Gewichte  $\chi_1, \chi_2$  und  $\chi_3$ , so daß zusätzlich die Beziehungen

$$\begin{aligned}\chi_1(v) &= -(\zeta^2 + \zeta^{-2})\chi_3(v) \\ \chi_2(v) &= (\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta^4 + \zeta^{-4})\chi_3(v) \\ D_i &= \chi_i^9(v)\end{aligned}$$

gelten. Bis auf Anwendung von  $w$  und Vertauschung der Summanden sind die einzigen Möglichkeiten, zwei bzw. drei von null verschiedene Nullstellen von  $\mu$  zu null zu kombinieren, die folgenden:

- (1)  $\zeta^8 \chi_i(v) + \zeta^4 \chi_i(v) + \chi_i(v) = 0$
- (2)  $\chi_1(v) + \zeta^2 \chi_3(v) + \zeta^{-2} \chi_3(v) = 0$
- (3)  $\chi_2(v) + \zeta^4 \chi_1(v) + \zeta^{-4} \chi_1(v) = 0$
- (4)  $\chi_3(v) + \zeta^1 \chi_2(v) + \zeta^{-1} \chi_2(v) = 0$
- (5)  $\chi_1(v) + \chi_2(v) + \chi_3(v) = 0$

**Beweis:** Es bleibt nur noch zu bemerken, daß die  $D_i$  bereits in  $F^*$  liegen, wenn  $F$  die 9-ten Einheitswurzeln enthält. Dies folgt aus Korollar 6.15. Die entsprechende Bedingung ist erfüllt wegen der Relationen zwischen den  $\chi_i$ .  $\square$

### Die Klasse $6_p 6_p 3_p$

Die Minimalpolynome, die in diesem Fall auftauchen, wurden bereits in den Abschnitten 9.3.2 und 8.4 untersucht (vgl. Abschnitt 9.4.3).

## 9.4 Beispiele für halbeinfache Eigenvektoren von $w_\Delta$

### 9.4.1 Typ $D_n$

Die Matrizen  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$  seien die  $x_\alpha$  aus Abschnitt 8.5.4. Seien  $\zeta_{2k}$  eine primitive  $2k$ -te und  $\zeta_{2(n-k)}$  eine primitive  $2(n-k)$ -te Einheitswurzel, die Indizes  $1, \dots, n$  markiert wie in Abschnitt 9.2.1 beschrieben und

$$I_1 = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \text{ zulässig, } \alpha(w_\Delta) = \zeta_{2k}\}$$

$$I_2 = \{\alpha \in \Phi \mid \alpha \text{ zulässig, } \alpha(w_\Delta) = \zeta_{2(n-k)}\}$$

Es gibt jeweils genau eine negative Wurzel  $\beta_j$  in  $I_j$ . Für  $I_1$  ist diese  $\beta_1 = -\alpha^+$ ,  $\beta_2$  kann von der gewählten Markierung abhängen. Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  hat  $v_1(D_1) = D_1\beta_1 + \sum_{\alpha \in I_1^+} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^{2k} - 4D_1)$  und  $v_2(D_2) = D_2\beta_2 + \sum_{\alpha \in I_2^+} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^6 + (-1)^{n+1}4D_2)$ . Für  $D_1 = D_2 = D$  kommutieren  $v_1(D)$  und  $v_2(D)$ , und wie im Coxeterfall gilt  $v_1(D)v_2(D) = 0$ . Es gilt  $\Phi(v_j(D_j)) = I_j$ .

### 9.4.2 Typ $F_4$

Die Matrizen  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$  seien die  $x_\alpha$  aus Abschnitt 8.5.6. Sei

$$I_1 = \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, -(\alpha^+ - \alpha_1)\}$$

und

$$I_2 = \{\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha^+\}.$$

Es gilt  $I_1, I_2 \subset \Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  nach Gleichung (9.1). Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  hat dann  $v_1(D_1) = D_1x_{-(\alpha^+ - \alpha_1)} + \sum_{\alpha \in I_1^+} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^6 + 4D_1)$  und  $v_2(D_2) = D_2x_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in I_2^+} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^6 + D_2)(X^6 - 27D_2)$ . Die charakteristischen Polynome lauten  $X^9(X^6 + 4D_1)^3$  für  $v_1(D_1)$  und  $X^3(X^6 + D_2)^3(X^6 - 27D_2)$  für  $v_2(D_2)$ . Für  $D_1 = D_2 = D$  kommutieren  $v_1(D)$  und  $v_2(D)$ . Es gilt  $\Phi(v_j(D_j)) = I_j$ .

Es existiert ein sechsdimensionaler Unterraum von  $V = F^{27}$ , auf dem  $v_1(D)$  die Nullabbildung und  $v_2(D)$  das charakteristische Polynom  $X^6 - 27D$  hat.

### 9.4.3 Typ $E_6$

Die Matrizen  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$  seien die  $x_\alpha$  aus Abschnitt 8.5.7.

**Die Klasse  $9_p$**

Sei

$$I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, -\alpha^+\}.$$

Es gilt  $I \subset \Phi_{\zeta_9}(w_\Delta)$  nach Gleichung (9.2). Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  hat dann  $v(D) = Dx_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in I^+} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X^{27} + 84DX^{18} - 159D^2X^9 + D^3$ . Es gilt  $\Phi(v(D)) = I$ .

**Die Klasse  $6_p6_p3_p$** 

Sei

$$I_1 = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, -\alpha^+\},$$

$$I_2 = \{\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, -(\alpha^+ - \alpha_2)\},$$

und

$$I_3 = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, -(\alpha^+ - \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4), -(\alpha^+ - \alpha_2 - \alpha_4 - \alpha_5)\}.$$

Es gilt  $I_1, I_2 \subset \Phi_{\zeta_6}(w_\Delta)$  und  $I_3 \subset \Phi_{\zeta_2^2}(w_\Delta)$  nach Gleichung (9.3). Bei richtiger Normierung der  $x_\alpha$  hat dann  $v_1(D_1) = D_1 x_{-\alpha^+} + \sum_{\alpha \in I_1^+} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^6 + D_1)(X^6 - 27D_1)$  und  $v_2(D_2) = D_2 x_{-(\alpha^+ - \alpha_2)} + \sum_{\alpha \in I_2^+} x_\alpha$  das Minimalpolynom  $X(X^6 + 4D_2)$ . Die charakteristischen Polynome lauten  $X^3(X^6 + D_1)^3(X^6 - 27D_1)$  für  $v_1(D_1)$  und  $X^9(X^6 + 4D_2)^3$  für  $v_2(D_2)$ .  $v_3(D_3) = D_3 \sum_{\alpha \in I_3^-} x_\alpha + \sum_{\alpha \in I_3^+} x_\alpha$  schließlich hat  $(X^3 - D_3)(X^3 + 8D_3)$  als Minimalpolynom und  $(X^3 - D_3)^8(X^3 + 8D_3)$  als charakteristisches Polynom. Für  $D_1 = D_2 = D_3 = D$  kommutieren die  $v_i(D)$  paarweise. Es gilt  $\Phi(v_j(D_j)) = I_j$ .

Es existieren drei Unterräume  $U_{ij}$  von  $V = F^{27}$ , die den drei möglichen Paaren  $(v_i, v_j)$  unter den  $v_k$  entsprechen, auf denen jeweils  $v_i$  verschwindet und  $v_j$  nicht. Bezeichnet  $g_j$  das charakteristische Polynom von  $v_j$  auf  $U_{ij}$ , so gilt genauer

$$\dim U_{21} = 6, \quad g_1(X) = X^6 - 27D$$

$$\dim U_{13} = 3, \quad g_3(X) = X^3 + 8D$$

$$\dim U_{23} = 9, \quad g_3(X) = (X^3 - D)^2(X^3 + 8D).$$

Die Elemente  $v_1(D)^5, v_2(D)^5$  und  $v_3(D)^2$  liegen in den Unterräumen  $\bigoplus_{\alpha \in -I_j} u_\alpha$  für  $j = 1, 2, 3$ . Die sechs Elemente  $v_1(D), v_1(D)^5, v_2(D), v_2(D)^5, v_3(D), v_3(D)^2$  sind  $\bar{F}$ -linear unabhängig, d.h. für jedes  $j$  hat der von den beiden Potenzen von  $v_j(D)$  aufgespannte Unterraum trivialen Schnitt mit der Summe der beiden Unterräume, die von den Potenzen der  $v_k(D)$  für  $k \neq j$  aufgespannt werden.

**9.4.4 Geradenkonfiguration einer nichtsingulären kubischen Fläche**

Dieser Abschnitt ist als kleiner Einschub zu verstehen und schildert eine Beobachtung, die Dr. Uwe Weselmann über die Klasse  $9_p$  des Typs  $E_6$  gemacht hat. Sei  $\mu_D(X)$  das Minimalpolynom des Elements  $v(D)$  für die Klasse  $9_p$  aus Abschnitt 9.4.3, also

$$\mu_D(X) = X^{27} + 84DX^{18} - 159D^2X^9 + D^3.$$

Seien  $\zeta$  eine primitive 9-te Einheitswurzel und

$$a = \zeta + \zeta^{-1}$$

$$b = \zeta^4 + \zeta^{-4}$$

$$c = \zeta^2 + \zeta^{-2}$$

die Nullstellen des Polynoms  $X^3 - 3X + 1$ . Dann sind

$$\alpha = a^6 b^3$$

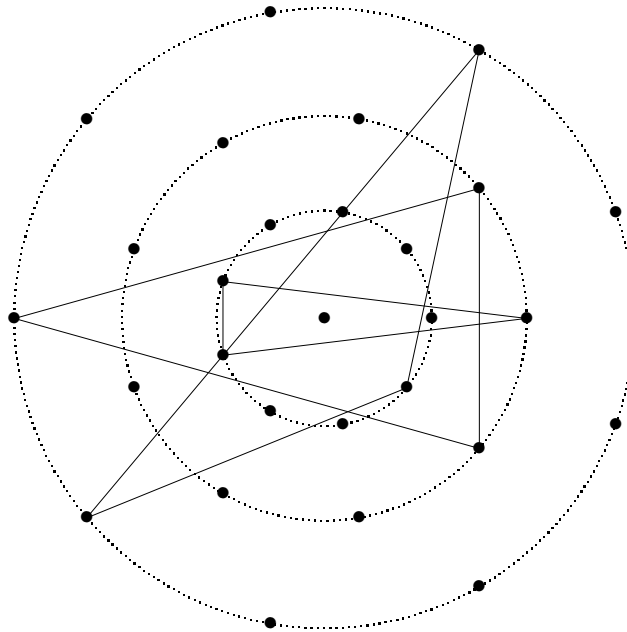
$$\beta = b^6 c^3$$

$$\gamma = c^6 a^3$$

die Nullstellen von  $X^3 + 84X^2 - 159X + 1$ . Das Polynom  $\mu_D$  zerfällt also in

$$\mu_D(X) = (X^9 - \alpha D)(X^9 - \beta D)(X^9 - \gamma D).$$

Wir stellen die 27 Nullstellen von  $\mu_1$  in der komplexen Ebene mit Zentrum 0 dar. Die eingezeichneten Dreiecke entsprechen Kombinationen von drei Nullstellen, die zwei verschiedene Längen haben und deren Summe null ergibt. Die „Spitze“ eines Dreiecks, d.h. der Punkt, der eine andere Länge hat als die beiden anderen, legt das Dreieck bereits eindeutig fest. Zwischen drei Nullstellen derselben Länge existieren gleichseitige Dreiecke, die bei Festlegung einer der drei Ecken ebenfalls eindeutig bestimmt sind. Auf jeder Ursprungsgerade durch eine Nullstelle liegen noch zwei andere; dies sind entartete Dreiecke, die einer Kombination von Nullstellen mit drei verschiedenen Längen entsprechen.



Wir nennen die 27 Nullstellen von  $\mu_1$  *Geraden* und erklären folgende Inzidenzrelationen: Zwei verschiedene Geraden  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  schneiden sich genau dann, wenn es eine dritte Gerade  $\lambda_3$  gibt, so daß  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  gilt. Jede Gerade schneidet dann genau 10 andere: dies folgt aus den Überlegungen in Abschnitt 9.3.3. In der Tat stimmt diese Geradenkonfiguration überein mit der bekannten Geradenkonfiguration einer nichtsingulären kubischen Fläche. Die Automorphismengruppe dieser Geradenkonfiguration ist die Weylgruppe vom Typ  $E_6$ . Wir geben der Vollständigkeit halber eine kurze Übersicht, obwohl sehr viel Literatur zu diesem Thema zur Verfügung steht.

Sei  $X/\mathbb{C}$  eine nichtsinguläre kubische Fläche, aufgefaßt als komplexe Mannigfaltigkeit. Es gilt dann  $H^2(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^7$  und  $H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ . Weiter existiert eine Schnittpaarung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : H^2(X, \mathbb{Z}) \times H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^4(X, \mathbb{Z})$ , deren quadratische Form  $q$  bei Identifikation mit einer Paarung  $\cdot : \mathbb{Z}^7 \times \mathbb{Z}^7 \rightarrow \mathbb{Z}$  die Form

$$q(x) = x_0^2 - \sum_{i=1}^6 x_i^2$$

hat. Sei  $\omega \in H^2(X, \mathbb{Z})$  die Chernklasse des kanonischen Geradenbündels auf  $X$ . Es gilt dann  $\omega = (-3, 1, \dots, 1) \in \mathbb{Z}^7$  und  $\omega \cdot \omega = 3$ . Jede Gerade  $x$  in  $X$  läßt sich auffassen als ein Element in  $H^2(X, \mathbb{Z})$ , das Lösung des Gleichungssystems

$$x \cdot x = x \cdot \omega = -1.$$



Es gilt dann für zwei Geraden  $x_1, x_2$  in  $X$

$$x_1 \cdot x_2 = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_1 \cap x_2 = \emptyset \\ 1 & \text{falls } x_1 \cap x_2 \neq \emptyset \text{ und } x_1 \neq x_2 \\ -1 & \text{falls } x_1 = x_2 \end{cases}$$

Die Bedingung  $x_1 \cdot x_2 = 1$  ist genau dann für zwei Geraden erfüllt, wenn es eine dritte Gerade  $x_3$  gibt mit  $x_3 \cdot x_i = -1$  für  $i = 1, 2$ .  $x_3$  ist dann eindeutig bestimmt durch  $x_3 = -\omega - x_1 - x_2$ . Zwei verschiedene Geraden  $x_1$  und  $x_2$  schneiden sich also genau dann, wenn es eine dritte Gerade  $x_3$  gibt mit  $x_1 + x_2 + x_3 = -\omega$ . Auf diese Weise läßt sich die Geradenkonfiguration von  $X$  in  $H^2(X, \mathbb{Z})$  zusammen mit dem ausgezeichneten Element  $-\omega$  und der Addition in  $H^2(X, \mathbb{Z})$  identifizieren mit der oben beschriebenen Konfiguration der Nullstellenmenge in  $\mathbb{C}$  von  $\mu_1$  zusammen mit dem ausgezeichneten Element 0 und der komplexen Addition.



# Kapitel 10

## Konstruktion der primitiven Tori

Wir werden in diesem Kapitel eine algebraische Beschreibung von gewissen maximalen Tori zusammen mit einer möglichen Einbettung nach  $G$  geben, wobei die Darstellungen aus Abschnitt 6.6 zugrunde gelegt werden. Die Tori hängen von einem Parameter  $D \in F^*$  ab, dessen Ordnung in  $F^*/(F^*)^l$  darüber entscheidet, wie groß der anisotrope Anteil des jeweiligen Torus ist.  $l$  ist dabei eine Zahl, die vom jeweiligen Torus  $T$  abhängt und den Grad der  $T$  beschreibenden Algebra angibt. Enthält der Grundkörper  $F$  geeignete Elemente, so haben die Tori eine zyklische Galoiserweiterung von  $F$  als Zerfällungskörper und sind in diesem Fall bei geeigneter Wahl der Parameter  $D$  gerade die primitiven Tori in den betrachteten Gruppen (vgl. Abschnitt 3.8).

Der Aufbau des Kapitels ist der folgende. Für jeden Typ des Wurzelsystems wird die Algebra sowie die Einbettung nach  $G$  beschrieben. Die Hauptaussage wird uniform für alle Gruppen in Abschnitt 10.11 formuliert und auch dort bewiesen. Ein großer Teil des Beweises ist unabhängig vom Typ des Wurzelsystems. An den Stellen, wo gruppenspezifisch argumentiert werden muß, wird dies dann getan.

Eine letzte Bemerkung zur Eindeutigkeit der konstruierten Tori. Die konstruierten primitiven Tori sind im allgemeinen nicht eindeutig bis auf Konjugation in  $G(F)$ . Die eigentliche Motivation dieser Arbeit lag jedoch ursprünglich im zweiten Teil, in dem wir uns auf den topologisch unipotenten Anteil der Tori beschränken. Die dafür erzielten Ergebnisse sind unabhängig von der Isogenieklasse von  $G$  und damit auch unabhängig von der  $G(F)$ -Konjugationsklasse der Tori wegen Satz 3.8 und 3.12.

Im ganzen Kapitel sei  $F$  ein Körper der Charakteristik null,  $w \in W$  ein Vertreter der in der jeweiligen Überschrift benannten primitiven Konjugationsklasse von  $W$  und  $w_\Delta$  der baryzentrische Punkt von  $w$  (siehe Abschnitt 4.3).  $F$  enthalte die Einheitswurzeln der Ordnung  $\text{ord}(w)$ . In den Fällen, wo ein Polynom in mehrere Radikalfaktoren zerfällt, wird eine Aussage über die Bewertung der auftretenden Elemente im Fall eines  $p$ -adischen Grundkörpers gemacht.

### 10.1 Die Coxeterklasse für den Typ $A_n$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $n+1$ ,  $D \in F^*$  und  $\mu(X) = X^{n+1} - D$ . Für jede  $F$ -Algebra  $E$  setzen wir

$$\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}_{E,\mu} = E[X]/\mu.$$

$\sigma = \sigma_{E,\zeta} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_E$  über  $E$ .  $\sigma$  erzeugt  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_E)$ . Wir setzen

$$T_\mu(E) = \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_E(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = 1\}.$$

Sei  $v \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}$  unter der Darstellung 6.6.1 das Minimalpolynom  $\mu$  hat, und  $\varepsilon_{\mu,v,E} : T_\mu(E) \rightarrow \mathcal{M}_{n+1}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  aus Abschnitt 6.1.

## 10.2 Die Coxeterklasse für den Typ $B_n$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $2n$ ,  $D \in F^*$  und  $\mu(X) = X^{2n} - D$ . Für jede  $F$ -Algebra  $E$  setzen wir

$$\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}_{E,\mu} = E[X]/\mu.$$

$\sigma = \sigma_{E,-1} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(-X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_E$  über  $\mathfrak{A}_E^\sigma = \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \sigma(x) = x\}$ .  $\sigma$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^\sigma}(\mathfrak{A}_E)$ . Wir setzen

$$T_\mu(E) = \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^\sigma}(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = x\sigma(x) = 1\}.$$

Sei  $v \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}$  unter der Darstellung 6.6.2 das Minimalpolynom  $X\mu(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu,v,E} : T_\mu(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  aus Abschnitt 6.1.

## 10.3 Die Coxeterklasse für den Typ $C_n$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $2n$ ,  $D \in F^*$  und  $\mu(X) = X^{2n} - D$ . Für jede  $F$ -Algebra  $E$  setzen wir

$$\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}_{E,\mu} = E[X]/\mu.$$

$\sigma = \sigma_{E,-1} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(-X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_E$  über  $\mathfrak{A}_E^\sigma = \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \sigma(x) = x\}$ .  $\sigma$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^\sigma}(\mathfrak{A}_E)$ . Wir setzen

$$T_\mu(E) = \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^\sigma}(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = x\sigma(x) = 1\}.$$

Sei  $v \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}$  unter der Darstellung 6.6.3 das Minimalpolynom  $\mu$  hat, und  $\varepsilon_{\mu,v,E} : T_\mu(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  aus Abschnitt 6.1.

## 10.4 Die Klasse $[\overline{k}][\overline{n-k}]$ ( $n/2 \leq k \leq n-1$ ) für den Typ $D_n$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $2k(n-k)$ ,  $D \in F^*$  sowie  $\mu_1(X) = X^{2k} - D$  und  $\mu_2(X) = X^{2(n-k)} + (-1)^{n+1}D$ . Wir setzen  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  und für jede  $F$ -Algebra  $E$

$$\mathfrak{A}_{E,i} = \mathfrak{A}_{E,\mu_i} = E[X]/\mu_i$$

für  $i = 1, 2$ .  $\sigma_i = \sigma_{E,-1,i} : \mathfrak{A}_{E,i} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,i}$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(-X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_{E,i}$  über  $\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i} = \{x \in \mathfrak{A}_{E,i} \mid \sigma_i(x) = x\}$ .  $\sigma_i$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i}}(\mathfrak{A}_{E,i})$ . Wir setzen

$$T_{\mu_i}(E) = \{x \in \mathfrak{A}_{E,i} \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i}}(\mathfrak{A}_{E,i})} \tau(x) = x\sigma(x) = 1\}$$

und

$$T_{\mu}(E) = T_{\mu_1}(E) \times T_{\mu_2}(E).$$

Sei  $v_1 \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta^{n-k}$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}_1$  unter der Darstellung 6.6.4 das Minimalpolynom  $X_{\mu_1}(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} : T_{\mu_1}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}_1, E}$  aus Abschnitt 6.1. Sei  $v_2 \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta^k$ , der mit  $v_1$  kommutiert und dessen Bild  $\mathfrak{v}_2$  unter der Darstellung 6.6.4 das Minimalpolynom  $X_{\mu_2}(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu_2, v_2, E} : T_{\mu_2}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}_2, E}$  aus Abschnitt 6.1.

Schließlich sei  $v = (v_1, v_2)$  und  $\varepsilon_{\mu, v, E} : T_{\mu}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  definiert als

$$\varepsilon_{\mu, v, E} = \mathfrak{m}_E \circ (\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} \times \varepsilon_{\mu_2, v_2, E}),$$

wenn  $\mathfrak{m}_E$  die Multiplikation in  $\mathcal{M}_{2n}(E)$  bezeichnet.

## 10.5 Die Coxeterklasse für den Typ $G_2$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung 6,  $D \in F^*$  und  $\mu(X) = X^6 - D$ . Für jede  $F$ -Algebra  $E$  setzen wir

$$\mathfrak{A}_E = \mathfrak{A}_{E, \mu} = E[X]/\mu.$$

$\sigma = \sigma_{E, \zeta} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_E$  über  $E$ .  $\sigma$  erzeugt  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_E)$ , und  $\sigma^2$  bzw.  $\sigma^3$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^2}}(\mathfrak{A}_E)$  bzw.  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^3}}(\mathfrak{A}_E) = \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^3}}(\mathfrak{A}_E)$ , wenn  $\mathfrak{A}_E^{\sigma^2} = \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \sigma^2(x) = x\}$  und  $\mathfrak{A}_E^{\sigma^3} = \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \sigma^3(x) = x\}$  ist. Wir setzen

$$\begin{aligned} T_{\mu}(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^2}}(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^3}}(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_E \mid x\sigma^2(x)\sigma^4(x) = x\sigma^3(x) = 1\}. \end{aligned}$$

Sei  $v \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}$  unter der Darstellung 6.6.7 das Minimalpolynom  $X_{\mu}(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu, v, E} : T_{\mu}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}, E}$  aus Abschnitt 6.1.

## 10.6 Die Coxeterklasse für den Typ $F_4$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung 12,  $\tilde{D} \in F^*$  und  $\mu(X) = X^{24} + 270\tilde{D}X^{12} - 27\tilde{D}^2 = (X^{12} - D)(X^{12} - (1 + \zeta)^{12}D)$  für ein von  $\tilde{D}$  abhängiges  $D \in F^*$ . Für jede  $F$ -Algebra  $E$  setzen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_E &= E[X]/(X^{12} - D) \\ \mathfrak{A}'_E &= E[X]/(X^{12} - (1 + \zeta)^{12}D). \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Psi_E : \mathfrak{A}'_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  und  $\Theta_E : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}'_E$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_E : [P(X)] &\mapsto [P(\zeta(1 + \zeta)X)] \\ \Theta_E : [P(X)] &\mapsto [(\Psi_E^{-1}P)(-\zeta^5 X)][(\Psi_E^{-1}P)(-\zeta^9 X)][(\Psi_E^{-1}P)(-\zeta^6 X)][(\Psi_E^{-1}P)(-\zeta^{10} X)]. \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_E \oplus \mathfrak{A}'_E$  ist kanonisch isomorph zu  $E[X]/\mu$ , und  $\tau_E$  sei dieser kanonische Isomorphismus.  $\sigma = \sigma_{E,\zeta} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_E$  über  $E$ .  $\sigma$  erzeugt  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_E)$ , und  $\sigma^4$  bzw.  $\sigma^6$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^4}}(\mathfrak{A}_E)$  bzw.  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^6}}(\mathfrak{A}_E)$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} T_\mu(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^4}}(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^6}}(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_E \mid x\sigma^4(x)\sigma^8(x) = x\sigma^6(x) = 1\}. \end{aligned}$$

Sei  $v \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}$  unter der Darstellung 6.6.7 das Minimalpolynom  $X\mu(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu,v,E} : T_\mu(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v},E} \circ \tau_E \circ (\text{id}, \Theta_E)$ . Dabei sind  $(\text{id}, \Theta_E)$  die offensichtliche Abbildung  $\mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E \oplus \mathfrak{A}'_E$  und  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  die Abbildung aus Abschnitt 6.1.

Ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper, so ist  $1 + \zeta$  eine Einheit in  $F$ , denn das Inverse  $\zeta^2(1 - \zeta)$  ist ebenfalls ganzzahlig. Daher stimmt die Bewertung von  $D$  mit der von  $\tilde{D}$  überein.

## 10.7 Die Klasse $6_p 6_p$ für den Typ $F_4$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung 6,  $D \in F^*$  sowie  $\mu_1(X) = X^6 + 4D$  und  $\mu_2(X) = (X^6 + D)(X^6 - 27D)$ . Wir setzen  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  und für jede  $F$ -Algebra  $E$

$$\mathfrak{A}_{E,1} = E[X]/(X^6 + 4D)$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{E,2} &= E[X]/(X^6 + D) \\ \mathfrak{A}'_{E,2} &= E[X]/(X^6 - 27D). \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Psi_{E,2} : \mathfrak{A}'_{E,2} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,2}$  und  $\Theta_{E,2} : \mathfrak{A}_{E,2} \rightarrow \mathfrak{A}'_{E,2}$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_{E,2} : [P(X)] &\mapsto [P((1 + \zeta)X)] \\ \Theta_{E,2} : [P(X)] &\mapsto [(\Psi_{E,2}^{-1}P)(-\zeta^2 X)][(\Psi_{E,2}^{-1}P)(-\zeta^4 X)][(\Psi_{E,2}^{-1}P)(-\zeta^3 X)][(\Psi_{E,2}^{-1}P)(-\zeta^5 X)]. \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_{E,2} \oplus \mathfrak{A}'_{E,2}$  ist kanonisch isomorph zu  $E[X]/\mu_2$ , und  $\tau_{E,2}$  sei dieser kanonische Isomorphismus.  $\sigma_i = \sigma_{E,\zeta,i} : \mathfrak{A}_{E,i} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,i}$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_{E,i}$  über  $E$ .  $\sigma_i$  erzeugt  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_{E,i})$ , und  $\sigma_i^2$  bzw.  $\sigma_i^3$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^2}}(\mathfrak{A}_{E,1})$  bzw.  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^3}}(\mathfrak{A}_{E,i})$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} T_{\mu_i}(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,i} \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^2}}(\mathfrak{A}_{E,i})} \tau(x) = \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^3}}(\mathfrak{A}_{E,i})} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,i} \mid x\sigma_i^2(x)\sigma_i^4(x) = x\sigma_i^3(x) = 1\} \end{aligned}$$

und

$$T_\mu(E) = T_{\mu_1}(E) \times T_{\mu_2}(E).$$

Seien  $v_1, v_2 \in \mathfrak{g}$  kommutierende rationale halbeinfache Eigenvektoren von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ , deren jeweiliges Bild  $v_i$  unter der Darstellung 6.6.6 das Minimalpolynom  $X_{\mu_i}(X)$  hat.  $\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} : T_{\mu_1}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{v_1, E}$  aus Abschnitt 6.1.  $\varepsilon_{\mu_2, v_2, E} : T_{\mu_2}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{v_2, E} \circ \tau_{E, 2} \circ (\text{id}, \Theta_{E, 2})$ . Dabei ist  $(\text{id}, \Theta_{E, i})$  die offensichtliche Abbildung  $\mathfrak{A}_{E, i} \rightarrow \mathfrak{A}_{E, i} \oplus \mathfrak{A}'_{E, i}$ .

Schließlich sei  $v = (v_1, v_2)$  und  $\varepsilon_{\mu, v, E} : T_\mu(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  definiert als

$$\varepsilon_{\mu, v, E} = \mathbf{m}_E \circ (\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} \times \varepsilon_{\mu_2, v_2, E}),$$

wenn  $\mathbf{m}_E$  die Multiplikation in  $\mathcal{M}_{2n}(E)$  bezeichnet.

Ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $p > 3$ , so sind 4 und  $1 + \zeta$  Einheiten in  $F$ , denn  $(1 + \zeta)^{12} = -27$  ist ebenfalls eine Einheit. Die Bewertungen von  $4D$  und  $-27D$  stimmen mit der von  $D$  überein.

## 10.8 Die Coxeterklasse für den Typ $E_6$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung 12,  $\tilde{D} \in F^*$  sowie  $\mu_1(X) = X^{24} - 270\tilde{D}X^{12} - 27\tilde{D}^2 = (X^{12} + D)(X^{12} + (1 + \zeta)^{12}D)$  für ein von  $\tilde{D}$  abhängiges  $D \in F^*$  und  $\mu_2(X) = (X^3 - \tilde{D})(X^3 + 8\tilde{D})$ . Wir setzen  $\mu = (\mu_1, \mu_2)$  und für jede  $F$ -Algebra

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{E, 1} &= E[X]/(X^{12} + D) \\ \mathfrak{A}'_{E, 1} &= E[X]/(X^{12} + (1 + \zeta)^{12}D) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{E, 2} &= E[X]/(X^3 - \tilde{D}) \\ \mathfrak{A}'_{E, 2} &= E[X]/(X^3 + 8\tilde{D}). \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Psi_{E, 1} : \mathfrak{A}'_{E, 1} \rightarrow \mathfrak{A}_{E, 1}$  und  $\Theta_{E, 1} : \mathfrak{A}_{E, 1} \rightarrow \mathfrak{A}'_{E, 1}$

$$\begin{aligned} \Psi_{E, 1} : [P(X)] &\mapsto [P(\zeta(1 + \zeta)X)] \\ \Theta_{E, 1} : [P(X)] &\mapsto [(\Psi_{E, 1}^{-1}P)(-\zeta^5 X)][(\Psi_{E, 1}^{-1}P)(-\zeta^9 X)][(\Psi_{E, 1}^{-1}P)(-\zeta^6 X)][(\Psi_{E, 1}^{-1}P)(-\zeta^{10} X)]. \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Psi_{E, 2} : \mathfrak{A}'_{E, 2} \rightarrow \mathfrak{A}_{E, 2}$  und  $\Theta_{E, 2} : \mathfrak{A}_{E, 2} \rightarrow \mathfrak{A}'_{E, 2}$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_{E, 2} : [P(X)] &\mapsto [P(-2X)] \\ \Theta_{E, 2} : [P(X)] &\mapsto [(\Psi_{E, 2}^{-1}P)(\zeta^4 X)][(\Psi_{E, 2}^{-1}P)(\zeta^8 X)][(\Psi_{E, 2}^{-1}P)(\zeta^4 X)][(\Psi_{E, 2}^{-1}P)(\zeta^8 X)]. \end{aligned}$$

$\mathfrak{A}_{E, i} \oplus \mathfrak{A}'_{E, i}$  ist kanonisch isomorph zu  $E[X]/\mu_i$ , und  $\tau_{E, i}$  sei dieser kanonische Isomorphismus.  $\sigma_1 = \sigma_{E, \zeta, 1} : \mathfrak{A}_{E, 1} \rightarrow \mathfrak{A}_{E, 1}$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_{E, 1}$  über  $E$ .  $\sigma_2 = \sigma_{E, \zeta, 2} : \mathfrak{A}_{E, 2} \rightarrow \mathfrak{A}_{E, 2}$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta^4 X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_{E,2}$  über  $E$ .  $\sigma_1$  erzeugt  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_{E,1})$ , und  $\sigma^4$  bzw.  $\sigma^6$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,1}^{\sigma^4}}(\mathfrak{A}_{E,1})$  bzw.  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,1}^{\sigma^6}}(\mathfrak{A}_{E,1})$ .  $\sigma_2$  erzeugt  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_{E,2})$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} T_{\mu_1}(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,1} \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,1}^{\sigma^4}}(\mathfrak{A}_{E,1})} \tau(x) = \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,1}^{\sigma^6}}(\mathfrak{A}_{E,1})} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,1} \mid x\sigma_1^4(x)\sigma_1^8(x) = x\sigma_1^6(x) = 1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_{\mu_2}(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,2} \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_E(\mathfrak{A}_{E,2})} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,2} \mid x\sigma_2(x)\sigma_2^2(x) = 1\} \end{aligned}$$

sowie

$$T_{\mu}(E) = T_{\mu_1}(E) \times T_{\mu_2}(E).$$

Sei  $v_1 \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}_1$  unter der Darstellung 6.6.5 das Minimalpolynom  $X\mu_1(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} : T_{\mu_1}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}_1, E} \circ \tau_{E,1} \circ (\text{id}, \Theta_{E,1})$ . Sei  $v_2 \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta^4$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}_2$  unter der Darstellung 6.6.5 das Minimalpolynom  $\mu_2(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu_2, v_2, E} : T_{\mu_2}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}_2, E} \circ \tau_{E,2} \circ (\text{id}, \Theta_{E,2})$ . Dabei sind  $(\text{id}, \Theta_{E,i})$  die offensichtliche Abbildung  $\mathfrak{A}_{E,i} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,i} \oplus \mathfrak{A}'_{E,i}$  und  $\Phi_{\mathfrak{v}_i, E}$  die Abbildung aus Abschnitt 6.1.

Schließlich sei  $v = (v_1, v_2)$  und  $\varepsilon_{\mu, v, E} : T_{\mu}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  definiert als

$$\varepsilon_{\mu, v, E} = \mathfrak{m}_E \circ (\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} \times \varepsilon_{\mu_2, v_2, E}),$$

wenn  $\mathfrak{m}_E$  die Multiplikation in  $\mathcal{M}_{2n}(E)$  bezeichnet.

Ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper, so ist  $1 + \zeta$  eine Einheit in  $F$ , denn das Inverse  $\zeta^2(1 - \zeta)$  ist ebenfalls ganzzahlig. Daher stimmt die Bewertung von  $D$  mit der von  $\tilde{D}$  überein. Ist  $p > 2$ , ist auch  $-8$  eine Einheit in  $F$  und die Bewertung von  $-8\tilde{D}$  gleich der von  $\tilde{D}$ .

## 10.9 Die Klasse $\mathcal{G}_p$ für den Typ $E_6$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung 9,  $\tilde{D} \in F^*$  und  $\mu(X) = X^{27} + 84\tilde{D}X^{18} - 159\tilde{D}^2X^9 + \tilde{D}^3\tilde{D}^2 = (X^9 - D)(X^9 + (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9D)(X^9 - (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9(\zeta^4 + \zeta^{-4})^9D)$  für ein von  $\tilde{D}$  abhängiges  $D \in F^*$ . Für jede  $F$ -Algebra  $E$  setzen wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_E &= E[X]/(X^9 - D) \\ \mathfrak{A}'_E &= E[X]/(X^9 + (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9D) \\ \mathfrak{A}''_E &= E[X]/(X^9 - (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9(\zeta^4 + \zeta^{-4})^9D). \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Psi'_E : \mathfrak{A}'_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  und  $\Psi''_E : \mathfrak{A}''_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi'_E : [P(X)] &\mapsto [P(-(\zeta^2 + \zeta^{-2})X)] \\ \Psi''_E : [P(X)] &\mapsto [P((\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta^4 + \zeta^{-4})X)]. \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Theta'_E : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}'_E$  und  $\Theta''_E : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}''_E$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Theta'_E : [P(X)] &\mapsto [(\Psi'^{-1}_E P)(\zeta X)][(\Psi'^{-1}_E P)(\zeta^{-1}X)][(\Psi'^{-1}_E P)(\zeta^4 X)][(\Psi'^{-1}_E P)(\zeta^{-4}X)] \\ \Theta''_E : [P(X)] &\mapsto [(\Psi''^{-1}_E P)(\zeta^2 X)][(\Psi''^{-1}_E P)(\zeta^{-2}X)][(\Psi''^{-1}_E P)(\zeta^3 X)][(\Psi''^{-1}_E P)(\zeta^{-3}X)]. \end{aligned}$$



$\mathfrak{A}_E \oplus \mathfrak{A}'_E \oplus \mathfrak{A}''_E$  ist kanonisch isomorph zu  $E[X]/\mu$ , und  $\tau_E$  sei dieser kanonische Isomorphismus.  $\sigma = \sigma_{E,\zeta} : \mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_E$  über  $E$ .  $\sigma$  erzeugt  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_E)$ , und  $\sigma^3$  erzeugt  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^3}}(\mathfrak{A}_E)$ . Wir setzen

$$\begin{aligned} T_\mu(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_E \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_E^{\sigma^3}}(\mathfrak{A}_E)} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_E \mid x\sigma^3(x)\sigma^6(x) = 1\}. \end{aligned}$$

Sei  $v \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}$  unter der Darstellung 6.6.7 das Minimalpolynom  $\mu(X)$  hat, und  $\varepsilon_{\mu,v,E} : T_\mu(E) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v},E} \circ \tau_E \circ (\text{id}, \Theta'_E, \Theta''_E)$ . Dabei sind  $(\text{id}, \Theta'_E, \Theta''_E)$  die offensichtliche Abbildung  $\mathfrak{A}_E \rightarrow \mathfrak{A}_E \oplus \mathfrak{A}'_E \oplus \mathfrak{A}''_E$  und  $\Phi_{\mathfrak{v},E}$  die Abbildung aus Abschnitt 6.1.

Ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper, so sind  $\zeta + \zeta^{-1}$ ,  $\zeta^2 + \zeta^{-2}$  und  $\zeta^4 + \zeta^{-4}$  Einheiten in  $F$  wegen  $(\zeta + \zeta^{-1})(\zeta^2 + \zeta^{-2})(\zeta^4 + \zeta^{-4}) = -1$  (siehe (9.7)). Daher stimmt die Bewertung von  $D$  mit der Bewertung von  $\tilde{D}$  überein.

## 10.10 Die Klasse $6_p6_p3_p$ für den Typ $E_6$

Sei  $\zeta \in F$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung 6,  $D \in F^*$  sowie  $\mu_1(X) = (X^6 + D)(X^6 - 27D)$ ,  $\mu_2(X) = X^6 + 4D$  und  $\mu_3(X) = (X^3 - D)(X^3 + 8D)$ . Wir setzen  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  und für jede  $F$ -Algebra  $E$

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{E,1} &= E[X]/(X^6 + D) \\ \mathfrak{A}'_{E,1} &= E[X]/(X^6 - 27D) \end{aligned}$$

und

$$\mathfrak{A}_{E,2} = E[X]/(X^6 + 4D)$$

sowie

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_{E,3} &= E[X]/(X^3 - D) \\ \mathfrak{A}'_{E,3} &= E[X]/(X^3 + 8D). \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Psi_{E,1} : \mathfrak{A}'_{E,1} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,1}$  und  $\Theta_{E,1} : \mathfrak{A}_{E,1} \rightarrow \mathfrak{A}'_{E,1}$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_{E,1} : [P(X)] &\mapsto [P((1 + \zeta)X)] \\ \Theta_{E,1} : [P(X)] &\mapsto [(\Psi_{E,1}^{-1}P)(-\zeta^2 X)][(\Psi_{E,1}^{-1}P)(-\zeta^4 X)][(\Psi_{E,1}^{-1}P)(-\zeta^3 X)][(\Psi_{E,1}^{-1}P)(-\zeta^5 X)]. \end{aligned}$$

Die Isomorphismen  $\Psi_{E,3} : \mathfrak{A}'_{E,3} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,3}$  und  $\Theta_{E,3} : \mathfrak{A}_{E,3} \rightarrow \mathfrak{A}'_{E,3}$  seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Psi_{E,3} : [P(X)] &\mapsto [P(-\frac{1}{2}X)] \\ \Theta_{E,3} : [P(X)] &\mapsto [(\Psi_{E,3}^{-1}P)(\zeta^2 X)][(\Psi_{E,3}^{-1}P)(\zeta^4 X)][(\Psi_{E,3}^{-1}P)(\zeta^2 X)][(\Psi_{E,3}^{-1}P)(\zeta^4 X)]. \end{aligned}$$

Für  $i = 1, 3$  ist  $\mathfrak{A}_{E,i} \oplus \mathfrak{A}'_{E,i}$  kanonisch isomorph zu  $E[X]/\mu_i$ , und  $\tau_{E,i}$  sei dieser kanonische Isomorphismus. Für  $i = 1, 2$  bezeichne  $\sigma_i = \sigma_{E,\zeta,i} : \mathfrak{A}_{E,i} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,i}$  den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_{E,i}$  über  $E$ .  $\sigma_3 = \sigma_{E,\zeta,3} : \mathfrak{A}_{E,3} \rightarrow \mathfrak{A}_{E,3}$  bezeichne den durch

$$[P(X)] \mapsto [P(\zeta^2 X)]$$

gegebenen Automorphismus von  $\mathfrak{A}_{E,3}$  über  $E$ . Für alle  $i$  ist  $\text{Aut}_E(\mathfrak{A}_{E,i})$  erzeugt von  $\sigma_i$ . Für  $i = 1, 2$  ist  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^2}}(\mathfrak{A}_{E,1})$  bzw.  $\text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^3}}(\mathfrak{A}_{E,i})$  erzeugt von  $\sigma_i^2$  bzw.  $\sigma_i^3$ . Wir setzen für  $i = 1, 2$

$$\begin{aligned} T_{\mu_i}(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,i} \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^2}}(\mathfrak{A}_{E,i})} \tau(x) = \prod_{\tau \in \text{Aut}_{\mathfrak{A}_{E,i}^{\sigma_i^3}}(\mathfrak{A}_{E,i})} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,i} \mid x\sigma_i^2(x)\sigma_i^4(x) = x\sigma_i^3(x) = 1\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} T_{\mu_3}(E) &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,3} \mid \prod_{\tau \in \text{Aut}_E(\mathfrak{A}_{E,3})} \tau(x) = 1\} \\ &= \{x \in \mathfrak{A}_{E,3} \mid x\sigma_3(x)\sigma_3^2(x) = 1\} \end{aligned}$$

sowie

$$T_{\mu}(E) = T_{\mu_1}(E) \times T_{\mu_2}(E) \times T_{\mu_3}(E).$$

Seien  $v_1, v_2 \in \mathfrak{g}$  kommutierende rationale halbeinfache Eigenvektoren von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta$ , deren jeweiliges Bild  $\mathfrak{v}_i$  unter der Darstellung 6.6.5 das Minimalpolynom  $X\mu_i(X)$  hat.  $\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} : T_{\mu_1}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}_1, E} \circ \tau_{E,1} \circ (\text{id}, \Theta_{E,1})$ . Dabei ist  $(\text{id}, \Theta_{E,1})$  die offensichtliche Abbildung und  $\Phi_{\mathfrak{v}_1, E}$  die Abbildung aus Abschnitt 6.1.  $\varepsilon_{\mu_2, v_2, E} : T_{\mu_2}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}_2, E}$ . Sei  $v_3 \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_{\Delta}$  zum Eigenwert  $\zeta^2$ , der mit  $v_1$  und  $v_2$  jeweils kommutiert und dessen Bild  $\mathfrak{v}_3$  unter der Darstellung 6.6.5 das Minimalpolynom  $\mu_3(X)$  hat.  $\varepsilon_{\mu_3, v_3, E} : T_{\mu_3}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  sei die Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{v}_3, E} \circ \tau_{E,3} \circ (\text{id}, \Theta_{E,3})$ .

Schließlich sei  $v = (v_1, v_2, v_3)$  und  $\varepsilon_{\mu, v, E} : T_{\mu}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{27}(E)$  definiert als

$$\varepsilon_{\mu, v, E} = \mathbf{m}_E \circ (\varepsilon_{\mu_1, v_1, E} \times \varepsilon_{\mu_2, v_2, E} \times \varepsilon_{\mu_3, v_3, E}),$$

wenn  $\mathbf{m}_E$  die Multiplikation in  $\mathcal{M}_{27}(E)$  bezeichnet.

Ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $p > 3$ , so sind 27, 8 und 4 Einheiten in  $F$ . Die Bewertungen von  $27D$ ,  $4D$  und  $8D$  stimmen mit der von  $D$  überein.

## 10.11 Der Hauptsatz

**Vorbemerkung zum Beweis.** Jeder der primitiven Tori  $T = T_{\mu}$ , die in diesem Kapitel beschrieben wurden, ist als Produkt von Untergruppen geeigneter Quotientenalgebren des Polynomrings in einer Unbestimmten beschrieben. Die Polynome, die die ausdividierten Ideale des Polynomrings erzeugen, sind die  $\mu_i$  aus den vorigen Abschnitten und abhängig von einem freien Parameter  $D_i$ . Ebenfalls eine große Rolle spielt das Weylgruppenelement  $w$ , dessen Eigenwerte in die Konstruktion von  $T$  eingehen. Wir schreiben auch  $T = T_{\mu_i, D_i, w}$  für  $T_{\mu_i}$ , wenn wir Aussagen über  $T$  treffen wollen, die sich auf Eigenschaften von  $D_i$  oder  $w$  beziehen. Ein  $D_i \in F^*$  heißt nun *anisotrop* für  $T_{\mu_i, D_i, w}$ , wenn  $D_i$

maximale Ordnung hat in  $F^*/(F^*)^{\text{ord}(w)}$ . Besteht  $\mu$  aus den Komponenten  $\mu_i$  mit zugehörigen  $D_i$ , so schreiben wir entsprechend  $T_{\mu,D,w}$  für  $T_\mu$  mit  $D = (D_i)_i$ .

Die im Beweis von Satz 10.2 angegebene Einbettung  $T \hookrightarrow G$  hängt von der konkreten Wahl der rationalen halbeinfachen Eigenvektoren  $v_1, \dots, v_k$  von  $w_\Delta$  ab, mit deren Hilfe die Abbildungen  $\Phi_{E,v}$  erklärt sind. Während  $T_{\mu_1, \dots, \mu_k}$  die algebraische Beschreibung von  $T$  darstellt, bezeichnen wir mit  $T_{v_1, \dots, v_k}$  die durch  $v_1, \dots, v_k$  festgelegte Einbettung von  $T$  in  $G$ . Die Bezeichnungen  $T_\mu$  und  $T_v$  gelten entsprechend für die einzelnen Komponenten von  $T$ .

**Bemerkung 10.1.** Sei  $G$  eine einfache spaltende Gruppe mit Wurzelsystem  $\Phi$  und sei  $w$  ein Element in der Weylgruppe von  $G$ . Stimmen die Eigenwerte von  $w$  auf  $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$  mit den Eigenwerten einer primitiven Konjugationsklasse  $\omega$  von  $W$  auf  $\mathbb{Z}[\Phi^\vee]$  überein (mit Vielfachheiten), so liegt  $w$  bereits in  $\omega$ .

**Beweis:** Eine Inspektion der Tabellen in [BFW] zeigt, daß keine von  $\omega$  verschiedene Konjugationsklasse in  $W$  dieselben Eigenwerte wie  $\omega$  hat, wenn  $\omega$  primitiv ist.

**Satz 10.2.** Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $G$  eine der in Abschnitt 6.6 über  $\mathbb{Q}$  definierten einfachen spaltenden Gruppen, deren Wurzelsystem nicht vom Typ  $E_7$  oder  $E_8$  ist. Sei  $w$  ein primitives Element der Weylgruppe  $W$ ,  $D \in F^*$  und  $T = T_{\mu,D,w}$  bzw.  $\varepsilon_{\mu,v,\bar{F}}$  die im jeweiligen Abschnitt dieses Kapitels beschriebene algebraische Gruppe bzw. Abbildung. Der Körper  $F$  enthalte die Einheitswurzeln der Ordnung  $\text{ord}(w)$ . Dann ist  $T$  ein über  $F$  definierter Torus, der mit Hilfe der Abbildung  $\varepsilon_{\mu,v,\bar{F}}$  nach  $G$  eingebettet werden kann.  $T$  ist ein maximaler Torus in  $G$ . Ist  $D$  anisotrop, so ist  $T$  anisotrop. Enthält  $F$  zusätzlich geeignete Elemente, so hat  $T$  einen zyklischen Zerfällungskörper und wird durch die Konjugationsklasse von  $w$  in  $H^1(\text{Gal}(\bar{F}/F), W)$  beschrieben im Sinne von Abschnitt 2.1. Ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $p$  teilerfremd zu  $\text{ord}(w)$ , so ist dies der Fall, wenn  $F$  die maximal unverzweigte Erweiterung  $\mathbb{Q}_p^{\text{un}}$  von  $\mathbb{Q}_p$  enthält.

**Korollar 10.3.** Sei  $G$  eine spaltende lineare Gruppe über einem Körper  $F$  der Charakteristik null, deren Wurzelsystem nicht vom Typ  $E_7$  oder  $E_8$  ist, mit maximalem spaltenden Torus  $\mathbb{T}$  und  $\omega$  eine primitive Konjugationsklasse in der Weylgruppe  $W$  von  $G$ . Dann existiert eine Körpererweiterung  $F'$  von  $F$ , eine zyklische Galoiserweiterung  $L$  von  $F'$  mit Galoisgruppe  $\Gamma_L = \langle \sigma \rangle$  und ein Torus  $T$ , so daß die absolute Galoisgruppe  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{F}/F')$  mittels  $\Gamma_L$  auf  $W$  operiert und  $\omega$ , aufgefaßt als Element in  $H^1(\Gamma, W)$ , im Bild der Abbildung  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T})) \rightarrow H^1(\Gamma, W)$  und im Kern der Abbildung  $H^1(\Gamma, N(\mathbb{T})) \rightarrow H^1(\Gamma, G)$  liegt.

**Beweis:** Die Aussage ist klar für den Isogenietyp von  $G$ , den die Darstellungen aus Abschnitt 6.6 beschreiben. Sei  $G'$  irgendeine spaltende  $F$ -Gruppe,  $\psi$  eine zentrale Isogenie von bzw. nach  $G$  und  $T$  ein Torus in  $G$  wie im Korollar. Dann hat  $\psi(T)$  bzw.  $\psi^{-1}(T)$  die gewünschte Eigenschaft, denn  $W_G = W_{G'}$  und  $\psi(T)$  bzw.  $\psi^{-1}(T)$  ist maximal in  $G'$ .  $\square$

**Beweis des Satzes:** Wir legen die Notationen aus den vorigen Abschnitten zugrunde. Als eine Komponente von  $\mu$  bezeichnen wir entweder  $\mu$  selbst, wenn  $\mu$  ein Polynom ist, oder ein  $\mu_i$ , wenn  $\mu = (\mu_i)_i$  ist. Wir zeigen zunächst, daß  $T$  ein  $F$ -Torus ist. Sei dazu eine Komponente  $\tilde{\nu}$  von  $\mu$  fixiert und  $\nu$  der Radikalfaktor von  $\tilde{\nu} = \prod_i (X^\lambda - x_i)$ , der zur Konstruktion von  $T_\nu = T_{\tilde{\nu}}$  in den vorigen Abschnitten benutzt wird. Alle Größen aus den vorigen Abschnitten (Algebren, Abbildungen usw.) beziehen sich ab jetzt immer auf diese Komponente.  $T_\nu(\bar{F})$  ist eine algebraische Gruppe, die schon über  $F$  definiert ist wegen  $\nu \in F[X]$ . Die absolute Galoisgruppe  $\Gamma = \text{Gal}(\bar{F}/F)$  operiert auf den Koeffizienten der zur Komponente  $\nu$  gehörenden Algebra  $\mathfrak{A}_{\bar{F}} = \bar{F}[X]/\nu$  und vertauscht mit  $\sigma$ . Daher operiert  $\Gamma$  auch auf  $T_\nu(\bar{F})$ , und für eine algebraische Körpererweiterung  $F'$  von  $F$  gilt

$$T_\nu(\bar{F})^{\text{Gal}(\bar{F}/F')} = T_\nu(F'),$$

wobei die rechte Seite wie im Satz definiert ist. Sei  $l = \deg(\nu)$  und  $\kappa$  die Gruppe der  $l$ -ten Einheitswurzeln in  $\bar{F}^*$ . Über  $\bar{F}$  zerfällt  $\nu$  in paarweise verschiedene Linearfaktoren  $\nu_\xi$  ( $\xi \in \kappa$ ), und die Algebra  $\mathfrak{A}_{\bar{F}} = \bar{F}[X]/\nu$  ist kanonisch isomorph zu  $\mathfrak{A}_{\bar{F}}^\oplus = \bigoplus_\xi \bar{F}[X]/\nu_\xi$ . Wir sind jetzt in der Situation von Lemma 7.3 und übernehmen von dort die Bezeichnungen für die Abbildungen  $\tau, \sigma = \sigma_\zeta$  und  $\sigma_\tau$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung  $l$ :  $\tau$  ist der kanonische Isomorphismus  $\mathfrak{A}_{\bar{F}}^\oplus \rightarrow \mathfrak{A}_{\bar{F}}$ ,  $\sigma : \mathfrak{A}_{\bar{F}} \rightarrow \mathfrak{A}_{\bar{F}}$  durch  $[P(X)] \mapsto [P(\zeta X)]$  gegebene Automorphismus von  $\mathfrak{A}_{\bar{F}}$  und  $\sigma_\tau = \tau^{-1} \circ \sigma \circ \tau$ . Es bezeichne  $T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  das Bild von  $T_\nu(\bar{F})$  unter der Abbildung  $\tau^{-1}$ . Es gilt dann

$$(10.1) \quad \begin{aligned} \text{Typ } A_n : \quad T_{\nu,\tau}(\bar{F}) &= \{x \in \mathfrak{A}_{\bar{F}}^\oplus \mid \prod_{i=0}^{l-1} \sigma_\tau^i(x) = 1\} \\ \text{Typ } B_n, C_n, D_n : \quad T_{\nu,\tau}(\bar{F}) &= \{x \in \mathfrak{A}_{\bar{F}}^\oplus \mid x \sigma_\tau^{l/2}(x) = 1\} \\ \text{Typ } E_6[9_p, 3_p] : \quad T_{\nu,\tau}(\bar{F}) &= \{x \in \mathfrak{A}_{\bar{F}}^\oplus \mid x \sigma_\tau^{l/3}(x) \sigma_\tau^{2l/3}(x) = 1\} \\ \text{Typ } G_2, F_4, E_6[12_p, 6_p] : \quad T_{\nu,\tau}(\bar{F}) &= \{x \in \mathfrak{A}_{\bar{F}}^\oplus \mid x \sigma_\tau^{l/2}(x) = x \sigma_\tau^{l/3}(x) \sigma_\tau^{2l/3}(x) = 1\}, \end{aligned}$$

je nach Typ des Wurzelsystems von  $G$  und der Komponente  $\nu$ . Wir benutzen Lemma 7.3, um die definierenden Gleichungen von  $T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  umzuschreiben. Wir erhalten für die drei Gleichungstypen jeweils ein äquivalentes Gleichungssystem, dessen Gleichungen durch die Elemente  $\xi \in \kappa$  indiziert sind. Die  $P_\xi, \xi \in \kappa$  sind dabei beliebige Polynome in  $\bar{F}[X]$ .

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{l-1} \sigma_\tau^i([P_\xi]_\xi) = 1 &\iff \forall \xi : \prod_{i=0}^{l-1} [P_{\zeta^i \xi}(\zeta^i X)] = [1] \\ ([P_\xi]_\xi) \sigma_\tau^{l/2}([P_\xi]_\xi) = 1 &\iff \forall \xi : [P_\xi(X)][P_{-\xi}(-X)] = [1] \\ ([P_\xi]_\xi) \sigma_\tau^{l/3}([P_\xi]_\xi) \sigma_\tau^{2l/3}([P_\xi]_\xi) = 1 &\iff \forall \xi : [P_\xi(X)][P_{\zeta^{l/3} \xi}(\zeta^{l/3} X)][P_{\zeta^{2l/3} \xi}(\zeta^{2l/3} X)] = [1] \end{aligned}$$

Für jedes  $\xi \in \kappa$  ist die entsprechende Gleichung auf der rechten Seite eine Gleichung in  $\bar{F}[X]/\nu_\xi$ . Von den  $|\kappa|$  Gleichungen sind nun je nach Typ einige zueinander äquivalent: Im Fall des Gleichungssystems  $\forall \xi : \prod_{i=0}^{l-1} [P_{\zeta^i \xi}(\zeta^i X)] = [1]$  sind alle Gleichungen zueinander äquivalent, im Fall des GS  $\forall \xi : [P_\xi(X)][P_{-\xi}(-X)] = [1]$  sind es genau die Gleichungen für  $\xi$  und  $-\xi$ , und im Fall des GS  $\forall \xi : [P_\xi(X)][P_{\zeta^{l/3} \xi}(\zeta^{l/3} X)][P_{\zeta^{2l/3} \xi}(\zeta^{2l/3} X)] = [1]$  sind es genau die Gleichungen für  $\xi, \zeta^{l/3} \xi$  und  $\zeta^{2l/3} \xi$ .

Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  in (10.1) nur durch eine Gleichung beschrieben wird. Dann wird  $T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  also durch  $k$  voneinander unabhängigen Gleichungen der Form  $x_1 \cdots x_{l/k} = 1$  definiert, wo jede Gleichung in der Algebra  $\bar{F}[X]/\nu_\xi$  zu lesen ist und  $k$  je nach Typ die Werte 1 bzw.  $l/2$  bzw.  $l/3$  annimmt. Da  $\nu_\xi$  linear ist, gilt  $\bar{F}[X]/\nu_\xi \cong \bar{F}$ , und in jeder der  $k$  Gleichungen  $x_1 \cdots x_{l/k} = 1$  sind  $l/k - 1$  Parameter frei wählbar in  $\bar{F}^*$ . Für die zugehörigen  $T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  gilt dann

$$T_{\nu,\tau}(\bar{F}) \cong \mathbb{G}_m^{k(l/k-1)} = \mathbb{G}_m^{l-k}.$$

Wird  $T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  (10.1) durch zwei Gleichungen beschrieben, so sind die  $l/2$  Gleichungen der Form  $xy = 1$  nicht unabhängig von den  $l/3$  Gleichungen der Form  $xyz = 1$ . Man sieht leicht, daß  $T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  in diesem Fall genau  $l/3$  Parameter in  $\bar{F}^*$  frei wählbar sind. Also folgt

$$T_{\nu,\tau}(\bar{F}) \cong \mathbb{G}_m^{l/3}.$$

Wir sehen also, daß  $T_\nu(\bar{F}) \cong T_{\nu,\tau}(\bar{F})$  ein über  $F$  definierter Torus ist, dessen Rang der oben berechnete ist. Durch Zusammensetzung der einzelnen Komponenten  $T_\nu$  zu  $T$  erhalten wir, daß  $T$  ein Torus ist, der, sofern er nach  $G$  eingebettet werden kann, schon ein maximaler Torus ist.

Als nächstes befassen wir uns mit der Einbettung von  $T$  nach  $G$ . Wir betrachten wieder eine beliebige, fest gewählte Komponente  $\tilde{\nu}$  von  $\mu$ . Sei  $w_\Delta$  der baryzentrische Punkt von  $w$  und  $v \in \mathfrak{g}$  ein rationaler halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$  für eine primitive Einheitswurzel  $\zeta$  von Ordnung  $l = \text{Radikalgrad von } \tilde{\nu}$ , dessen Bild  $\mathfrak{v}$  unter der Darstellung aus Abschnitt 6.6 das Minimalpolynom  $X^\varepsilon \tilde{\nu}(X)$  hat.  $\varepsilon$  ist dabei 0 oder 1 und hängt wieder vom Wurzelsystem von  $G$  und der Komponente  $\nu$  ab. Man beachte, daß ein solches  $v$  existiert (z.B. nach den Abschnitten 8.5 und 9.4; in den Coxeterfällen könnte man alternativ auch den Beweis von Korollar 8.4 benutzen). Es genügt nun zu zeigen, daß die Abbildung  $\varepsilon_{\tilde{\nu}, v, \bar{F}} : T_{\tilde{\nu}} \rightarrow \mathcal{M}_n(\bar{F})$  aus den vorigen Abschnitten eine Einbettung nach  $G$  und für ein  $\tilde{\nu}$  der Schnitt von  $\varepsilon_{\tilde{\nu}, v, \bar{F}}(T_{\tilde{\nu}})$  mit dem Produkt der übrigen  $\varepsilon_{\eta, v_\eta, \bar{F}}(T_\eta)$  zu den von  $\tilde{\nu}$  verschiedenen Komponenten  $\eta$  trivial ist.

Die Abbildung  $\varepsilon_{\tilde{\nu}, v, \bar{F}}$  hat die Form  $\varepsilon_{\tilde{\nu}, v, \bar{F}} = \Phi_{\mathfrak{o}, \bar{F}} \circ r$  für eine injektive Abbildung  $r : \mathfrak{A}_{\bar{F}} \rightarrow \mathfrak{A}_{\bar{F}}^\nu = \bar{F}[X]/\nu$  und die ebenfalls injektive Abbildung  $\Phi_{\mathfrak{o}, \bar{F}}$  aus Abschnitt 6.1. Um  $\varepsilon_{\tilde{\nu}, v, \bar{F}}(T_{\tilde{\nu}}) \subset G \subset GL_n(\bar{F})$  zu sehen, benutzen wir Korollar 6.4. Seien also  $x_1, \dots, x_k$  Nullstellen von  $X^\varepsilon \tilde{\nu}(X)$  mit  $\sum_{i=1}^k x_i = 0$ , wenn  $k$  der Grad der  $G$  beschreibenden Multilinearform ist. Wir müssen zeigen, daß dann für  $[P] \in T_{\tilde{\nu}}(\bar{F})$

$$(10.2) \quad \prod_{x_i \neq 0} P(x_i) = 1$$

gilt. Sind die von null verschiedenen  $x_i$  Nullstellen desselben Radikalfaktors von  $\tilde{\nu}$ , so ist die Bedingung (10.2) nach Proposition 7.13 und der Definition von  $T_{\tilde{\nu}}$  erfüllt. Man beachte dabei, daß die Voraussetzung über die Lösbarkeit der Einheitswurzelgleichung erfüllt ist nach Bemerkung 7.12. Im Fall des Typs  $A_n$  beachte man dazu noch Beispiel 6.6(iii). In den Fällen  $B_n$  und  $D_n$  ist  $G$  nicht alleine durch eine Bilinearform beschrieben, sondern die Einskomponente der Automorphismengruppe. Da  $T_{\tilde{\nu}}$  aber wie oben gesehen ein Torus ist, ist  $T_{\tilde{\nu}}$  zusammenhängend und daher schon in  $G$  enthalten. Es bleiben damit nur noch die Typen  $F_4$  und  $E_6$ . Besteht  $\tilde{\nu}$  aus zwei Radikalfaktoren  $\nu_1$  und  $\nu_2$  (dies ist der Fall außer für die Klasse  $9_p$  des Typs  $E_6$ ), so müssen wir drei Nullstellen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $\tilde{\nu}$  betrachten, die nicht schon Nullstellen desselben Radikalterms sind. Daher können wir annehmen daß alle  $\lambda_i$  von null verschieden sind. Bis auf die Komponente der Coxeterklassen von  $F_4$  und  $E_6$  zu einer primitiven Einheitswurzel von Ordnung 12 legt die Kombination  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  eindeutig fest, von welchem Faktor  $\nu_i$  zwei Nullstellen stammen (siehe Abschnitte 8.3, 8.4 und 9.3). Dann ist die Bedingung (10.2) erfüllt nach Definition von  $T_{\tilde{\nu}}$  und der Propositionen 7.15 und 7.6. Die Coxeterklassen von  $F_4$  und  $E_6$  können zusammen behandelt werden, da die Relationen zwischen den Nullstellen in den beiden Fällen dieselben sind; wir verwenden die Bezeichnungen für den Typ  $F_4$ . Stammen zwei Nullstellen aus dem Faktor  $X^{12} \pm D$ , so greift dasselbe Argument wie eben. Seien also zwei Nullstellen aus dem Faktor  $X^{12} \pm (1 + \zeta)^{12}D$ . Nach Korollar 7.7 müssen wir den Ausdruck

$$[P(X)][(\Psi_{\bar{F}} \Theta_{\bar{F}} P)(-\zeta X)][(\Theta_{\bar{F}} P)(\zeta^2 X)]$$

berechnen für  $[P] \in T_{\tilde{\nu}}(\bar{F})$  denn  $(-\zeta, \zeta^2)$  ist Lösung der Gleichung  $\zeta(1 - \zeta) + X + Y = 0$  (vgl. Lemma 7.9). Wir setzen die Definition von  $\Theta_{\bar{F}}$  aus Abschnitt 10.6 ein und nutzen die Identitäten  $[P(X)][P(-X)] = [1]$  und  $[P(X)][P(\zeta^4 X)][P(\zeta^8 X)] = [1]$  aus, die nach Definition von  $T_{\tilde{\nu}}$  gelten. Wir sehen, daß obiger Ausdruck gleich 1 ist und erhalten  $T_{\tilde{\nu}} \subset G$  nach Korollar 7.7.

Es bleibt die Klasse  $9_p$  für den Typ  $E_6$ .  $\tilde{\nu}$  besteht aus drei Radikalfaktoren  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$ . Stammen zwei Nullstellen aus einem Faktor, legt die Kombination  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  wieder eindeutig fest, von welchem Faktor zwei Nullstellen stammen. Die Definition von  $T_{\tilde{\nu}}$  liefert zusammen mit den Propositionen 7.15 und 7.6, daß die Bedingung (10.2) erfüllt ist, wenn ein  $\lambda_i$  Nullstelle von  $X^9 + (\zeta^2 + \zeta^{-2})^9 D$  und zwei  $\lambda_i$  Nullstellen von  $X^9 - D$  sind. Es bleiben die beiden restlichen Fälle, in denen zwei Faktoren beteiligt sind, und der Fall, daß die  $\lambda_i$  aus drei verschiedenen Faktoren stammen. Wir benutzen wieder Korollar

7.7. Die Ausdrücke, die wir berechnen müssen, sind

$$\begin{aligned} & [(\Theta'_{\bar{F}}P)(\zeta^4 X)][(\Theta'_{\bar{F}}P)(\zeta^{-4} X)][(\Theta''_{\bar{F}}P)(X)] \\ & [P(X)][(\Theta''_{\bar{F}}P)(\zeta X)][(\Theta''_{\bar{F}}P)(\zeta^{-1} X)] \\ & [P(X)][(\Theta'_{\bar{F}}P)(-X)][(\Theta''_{\bar{F}}P)(-X)] \end{aligned}$$

Die zugehörigen, bis auf Vertauschung eindeutigen Lösungen der Gleichung (7.2) lauten  $(\zeta^4 + \zeta^{-4}) - \zeta^4 - \zeta^{-4} = 0$ ,  $(\zeta^1 + \zeta^{-1}) - \zeta^1 - \zeta^{-1} = 0$  und  $(\zeta + \zeta^{-1})^{-1} - \zeta^2 - \zeta^{-2} = 0$ . Die letzte Gleichung ist nämlich äquivalent zu  $0 = 1 + \zeta^3 + \zeta^6 = 1 - (\zeta^2 + \zeta^{-2}) + (\zeta^4 + \zeta^{-4})(\zeta^2 + \zeta^{-2})$  (näheres siehe Abschnitt 9.3.3). Wir setzen die Definitionen von  $\Theta'_{\bar{F}}$  und  $\Theta''_{\bar{F}}$  ein und nutzen die Identität  $[P(X)][P(\zeta^4 X)][P(\zeta^8 X)] = [1]$  aus, die nach Definition von  $T_{\bar{v}}$  gilt. Wir sehen, daß alle obigen Ausdrücke gleich 1 sind und erhalten  $T_{\bar{v}} \subset G$  nach Korollar 7.7.

Es bleibt noch die Schnittbedingung für die Komponenten  $T_{\bar{v}}$  zu zeigen. Dies folgt im Falle, daß die Anzahl der Komponenten höchstens zwei ist, aus der Existenz geeigneter Unterräume des Darstellungsraums, auf denen der Erzeuger  $v_{\bar{v}}$  einer Komponente verschwindet, während andere Komponenten  $\bar{v}'$  dort als Minimalpolynom einen Radikalfaktor von  $\bar{v}'$  haben. Man siehe dazu die Abschnitte 8.5 und 9.4. Die Einschränkung jedes Elements von  $\varepsilon_{\bar{v},v,\bar{F}}(T_{\bar{v}})$  auf einen solchen Unterraum  $U_{\bar{v}}$ , auf dem  $v_{\bar{v}}$  verschwindet, ist die Identität, während für eine andere Komponente  $\bar{v}'$ , deren Erzeuger auf  $U_{\bar{v}}$  nicht verschwindet, aus  $\varepsilon_{\bar{v},v,\bar{F}}([P])|_{U_{\bar{v}}} = \text{id}$  schon  $[P] = [1]$  folgt. Man benutze dazu den Beweis von Lemma 6.2 und beachte, daß wegen  $\varepsilon_{\bar{v},v,\bar{F}}([P])|_{U_{\bar{v}}} = \text{id}$  das Polynom  $P - 1$  schon verschwinden muß modulo eines Radikalfaktors von  $\bar{v}'$ . Da die Abbildungen  $\theta_E$ , die den Zusammenhang zwischen den einzelnen Radikalfaktoren von  $\bar{v}'$  liefern, Isomorphismen sind, folgt dann schon  $[P] = [1]$ . Im verbleibenden Fall der Klasse  $6_p 6_p 3_p$  folgt die Aussage aus der entsprechenden Aussage in Abschnitt 9.4.3 über die Liealgebren der drei Komponenten.

Wir betrachten nun den Fall, daß  $D$  anisotrop ist. Dann sind die Radikalfaktoren  $\nu$  der Komponenten  $\bar{v}$ , die die zugehörigen Algebren  $\mathfrak{A}_E$  erzeugen, alle irreduzibel über  $F$  und die  $L_\nu := \mathfrak{A}_F$  Radikalerweiterungen von  $F$ . In den Fällen, in denen die Komponente  $T_\nu$  durch eine einzelne Bedingung beschrieben ist (also in allen Klassen für Wurzelsysteme vom Typ  $A_n, B_n, C_n$  und  $D_n$  sowie den Klassen  $9_p$  und den Komponenten zu einer primitiven 3-ten Einheitswurzeln in der Coxeterklasse und der Klasse  $6_p 6_p 3_p$  für ein Wurzelsystem vom Typ  $E_6$ ), gilt  $T_\nu \cong \text{Res}_{E_\nu/F} \text{Res}_{L_\nu/E_\nu}^1(\mathbb{G}_m)$  nach Lemma 3.6 für geeignete Zwischenerweiterungen  $L_\nu/E_\nu/F$ . Insbesondere sind alle  $T_\nu$  und damit auch  $T$  ein anisotroper  $F$ -Torus nach Lemma 3.7. In den verbleibenden Fällen ist  $T_\nu$  ein Untertorus eines zu  $\text{Res}_{E_\nu/F} \text{Res}_{L_\nu/E_\nu}^1(\mathbb{G}_m)$  isomorphen Torus. Genauer läßt sich  $T_\nu$  beschreiben durch die beiden exakten Sequenzen

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow S \longrightarrow \text{Res}_{L_\nu/E_\nu}(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{\phi_\nu} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1 \\ 1 \longrightarrow T_{\mu_i} \longrightarrow S \xrightarrow{\phi'_\nu|_S} \mathbb{G}_m \longrightarrow 1, \end{aligned}$$

wenn  $E_\nu$  und  $E'_\nu$  die beiden Zwischenerweiterungen von  $L_\nu/F$  sind, bezüglich derer die den Torus  $T_\nu$  definierenden Normen gebildet werden, und  $\phi_\nu$  bzw.  $\phi'_\nu$  die Determinantenabbildungen bezüglich  $L_\nu/E_\nu$  bzw.  $L_\nu/E'_\nu$  (vgl. Abschnitt 3.10).

Die Zerfällungskörper der einzelnen Komponenten  $T_\nu$  von  $T$  entstehen aus den Körpererweiterungen  $L_\nu$  durch Hinzuadjungieren der Eigenwerte der Erzeuger  $v_\nu$ . Liegen diese bereits in  $F$ , so haben die Zerfällungskörper der  $T_\nu$  zyklische Galoisgruppe. Ist die Komposition der Zerfällungskörper der einzelnen Komponenten wieder zyklisch, hat auch  $T$  einen zyklischen Zerfällungskörper. Die Eigenwerte des Erzeugers  $v_\nu$  sind die Wurzeln der Ordnung  $\lambda_\nu$  aus den  $D_i$ , wenn  $v_\nu$  das Minimalpolynom  $\prod_i (X^{\lambda_\nu} - D_{i,\nu})$  hat. Enthält  $F$  also geeignete Einheitswurzeln sowie geeignete Wurzeln aus den  $D_{i,\nu_1} D_{j,\nu_2}^{-1}$ , wo  $\nu_1$  und  $\nu_2$  zwei (nicht notwendigerweise verschiedene) Komponenten von  $T$  sind, hat  $T$  zyklischen Zerfällungskörper  $L$ .

Ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper, liegen alle Einheitswurzeln und alle Wurzeln aus den  $D_{i,\nu_1} D_{j,\nu_2}^{-1}$  in  $\mathbb{Q}_p^{un}$ , denn die  $D_{i,\nu_1} D_{j,\nu_2}^{-1}$  sind alle Einheiten wegen der Voraussetzung  $p \nmid \text{ord}(w)$ , wie man durch Inspektion der Polynome in den entsprechenden Abschnitten dieses Kapitels sieht.

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß dem Torus  $T = T_\mu$  die Konjugationsklasse von  $w$  zugeordnet wird. Sei dazu  $\mathbb{T}$  ein maximaler spaltender  $F$ -Torus in  $G$  und  $g \in G$  mit  $g^{-1}Tg = \mathbb{T}$ . Nach Konstruktion von  $T$  kann  $g$  in  $G(L)$  gewählt werden, wenn  $L = \mathfrak{A}_F$  die durch (irgend)einen Radikalfaktor einer geeigneten Komponente von  $\mu$  erzeugte galoissche Radikalerweiterung von  $F$  mit zyklischer Galoisgruppe  $\Gamma$  ist. Ist  $w_T$  das Bild von  $g^{-1}g^\sigma$  für einen Erzeuger  $\sigma$  von  $\Gamma$ , so wird  $T$  dann die Konjugationsklasse von  $w_T$  in  $W$  als Element in  $H^1(\Gamma, W)$  zugeordnet. Wir wollen die Eigenwerte von  $w_T$  auf  $X_*(\mathbb{T})$  bestimmen. Die Operation der von  $w_T$  erzeugten Untergruppe von  $W$  auf  $X_*(\mathbb{T})$  entspricht der Operation von  $\Gamma$  auf  $X_*(T)$  (vgl. Abschnitt 3.7(i)), so daß die Eigenwerte von  $w_T$  auf  $X_*(\mathbb{T})$  den Eigenwerten von  $\sigma$  auf  $X_*(T)$  entsprechen. Die Operation von  $\sigma$  auf  $X_*(T)$  ist aufgrund des  $\Gamma$ -äquivalenten Isomorphismus  $X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} \bar{F}^* \cong T(\bar{F})$  bestimmt durch die Operation von  $\sigma$  auf  $T = T(\bar{F})$ . Diese können wir aber für die einzelnen Komponenten  $T_{\bar{\nu}}$  von  $T$  explizit angeben.  $T_{\bar{\nu}}$  ist ein Untertorus von  $\text{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m)$ , wenn  $L/E/F$  der Zerfällungskörper von  $T_{\bar{\nu}}$  ist. Der Isomorphismus  $\text{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m) \cong (\bar{F}^*)^{[E/F]}$  ist  $\text{Gal}(E/F)$ -äquivalent, wenn  $\text{Gal}(E/F)$  vermöge

$$\tau'((x_\tau)_\tau) = (\tau'^{-1}(x_{\tau'\tau}))_\tau$$

auf  $(\bar{F}^*)^{[E/F]}$  operiert (vgl. Abschnitt 3.10). Ist  $\text{Gal}(E/F)$  zyklisch mit Erzeuger  $\tau_0$ , so permutiert  $\tau_0$  die Komponenten von  $(\bar{F}^*)^{E/F}$  zyklisch. Daher hat  $\tau_0$  auf  $X_*(\text{Res}_{E/F}(\mathbb{G}_m))$  genau die Einheitswurzeln von Ordnung  $[E/F]$  als Eigenwerte. Auf dem Chocharaktergitter des Untertorus  $\text{Res}_{E/F}^1(\mathbb{G}_m)$  hat  $\tau_0$  genau die von 1 verschiedenen Einheitswurzeln von Ordnung  $[E/F]$  als Eigenwerte. Aufgrund der Struktur der Komponenten  $T_{\bar{\nu}}$  sieht man anhand dieser Überlegungen sofort, daß die Eigenwerte von  $w_T$  auf  $X_*(\mathbb{T})$  mit denen von  $w$  überein stimmen: Die Eigenwerte von  $\sigma$  auf  $X_*(\text{Res}_{E/F} \text{Res}_{L/E}^1(\mathbb{G}_m))$  sind genau die Einheitswurzeln von Ordnung  $[L/F]$ , die nicht schon Einheitswurzeln von Ordnung  $[E/F]$  sind. Nach Bemerkung 10.1 folgt dann, daß  $w_T$  und  $w$  konjugiert sind in  $W$ . Also wird  $T$  in der Tat die Konjugationsklasse von  $w_T$  zugeordnet.





## Teil II

# Fixpunkte primitiver Tori im affinen Bruhat-Tits Gebäude



# Kapitel 11

## Das affine Bruhat-Tits Gebäude

Da wir nur einfache spaltende Gruppen betrachten, werden wir auch das affine Bruhat-Tits Gebäude nur für diesen Fall beschreiben. Wenn nicht anders angegeben bezeichnet  $G$  im ganzen Kapitel eine einfache, zusammenhängende, spaltende Gruppe über einem  $p$ -adischen Körper  $F$ .

### 11.1 $p$ -adische Körper

Im gesamten zweiten Teil dieser Arbeit ist  $F$  ein  $p$ -adischer Körper, d.h.  $F$  ist eine endliche Erweiterung von  $\mathbb{Q}_p$  für eine rationale Primzahl  $p$ . Es bezeichne  $v = v_F : F^* \rightarrow \mathbb{R}$  die diskrete Bewertung von  $F$  und  $\pi = \pi_F$  ein Element in  $F^*$ , so daß  $v(\pi)$  das kleinste positive Element in  $v(F^*)$  ist.  $v(\pi)$  ist dann ein Erzeuger der zyklischen Gruppe  $v(F^*) \cong \mathbb{Z}$ , und  $\pi_F$  heißt Uniformisierendes von  $F$ .  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$  bezeichne den Bewertungsring  $\mathcal{O} = \{x \in F \mid x = 0 \text{ oder } v(x) \geq 0\}$  in  $F$ .  $\mathcal{O}$  stimmt mit dem Ganzheitsring von  $F$  überein und ist ein Hauptidealring, dessen Ideale gerade von den nichtnegativen Potenzen von  $\pi$  erzeugt werden. Das von  $\pi$  erzeugte Ideal  $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_F$  ist das einzige maximale Ideal von  $\mathcal{O}$ , und der Restklassenkörper  $\kappa = \kappa_F = \mathcal{O}/\mathfrak{p}$  ist eine endliche Körpererweiterung von  $\mathbb{F}_p$ .

Sei nun  $E$  eine endliche Körpererweiterung von  $F$ . Es existiert eine eindeutige Fortsetzung  $v_E$  der Bewertung  $v_F$  nach  $E$ . Es gilt dann  $\mathcal{O}_F \subset \mathcal{O}_E$  und  $\mathfrak{p}_F \subset \mathfrak{p}_E$ . Der Restklassenkörper  $\kappa_E$  ist eine endliche Erweiterung des Restklassenkörpers  $\kappa_F$ . Der Grad der Erweiterung  $\kappa_E/\kappa_F$  heißt *Trägheitsindex* von  $E$  über  $F$  und wird mit  $f_{E/F}$  bezeichnet. Die Bewertungsgruppe  $v_F(F^*)$  hat endlichen Index in  $v_E(E^*)$ . Dieser Index heißt *Verzweigungsindex* und wird mit  $e_{E/F}$  bezeichnet. Es gilt

$$[E : F] = e_{E/F} \cdot f_{E/F}.$$

Die Erweiterung  $E/F$  heißt *unverzweigt*, wenn  $e_{E/F} = 1$  gilt. In diesem Fall hat die Erweiterung der Restklassenkörper denselben Grad wie  $E/F$ , und die Bewertungsgruppen von  $E$  und  $F$  stimmen überein. Insbesondere ist ein Uniformisierendes von  $F$  schon ein Uniformisierendes von  $E$ . Gilt  $e_{E/F} > 1$ , so nennt man die Erweiterung  $E/F$  *verzweigt*. Ist speziell  $e_{E/F} = [E : F]$ , so heißt  $E/F$  *rein verzweigt*. In diesem Fall stimmen die Restklassenkörper von  $E$  und  $F$  überein, und die  $[E : F]$ -te Potenz eines Uniformisierenden von  $E$  ist ein Uniformisierendes von  $F$ . Man unterscheidet zwei Fälle von Verzweigungstypen für die Erweiterung  $E/F$ : Ist  $e_{E/F}$  teilerfremd zur Charakteristik des Restklassenkörpers (von  $E$  oder  $F$ ), so spricht man von *zahmer Verzweigung*, sonst von *wilder Verzweigung*. Unverzweigte Erweiterungen sind bezüglich dieser Definition also stets zahm verzweigt. Man hat den folgenden Satz:

**Satz 11.1** ([Lang][II.5.12]). *Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $E$  eine endliche, rein zahm verzweigte Erweiterung von  $F$ . Dann existiert ein Uniformisierendes  $\pi$  in  $F$ , so daß das Polynom  $X^{[E:F]} - \pi$  eine Nullstelle in  $E$  hat. Umgekehrt sei  $a \in \mathcal{O}_F$  und  $e \in \mathbb{N}$  teilerfremd zu  $p$ . Dann erzeugt jede Nullstelle von  $X^e - a$  eine zahm verzweigte Erweiterung von  $F$ , die rein verzweigt ist falls  $v_F(a)$  teilerfremd zu  $e$  ist (hier ist  $v_F$  normiert durch  $v_F(F^*) = \mathbb{Z}$ ).*

Rein zahm verzweigte Erweiterung sind also immer Radikalerweiterungen, die durch Wurzelziehen aus einem Uniformisierenden entstehen. Da wir in dieser Arbeit nur Tori betrachten, deren Zerfällungskörper rein zahm verzweigt ist, werden wir Tori  $T = T_D$ , wie sie in Kapitel 10 zu Elementen  $D \in F^*$  konstruiert wurden, zu Uniformisierenden  $D$  von  $F$  betrachten und weiter annehmen, daß die Restklassencharakteristik die auftretenden Ordnungen der Eigenwerte der jeweiligen primitiven Konjugationsklasse in der Weylgruppe nicht teilt.

## 11.2 Das Standardapartment

Sei  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe über  $F$  und  $\mathbb{T}$  ein maximaler spaltender  $F$ -Torus in  $G$ . Sei  $N = N(\mathbb{T})$  der Normalisator von  $\mathbb{T}$  in  $G$ ,  $W = N/\mathbb{T}$  die Weylgruppe von  $G$  und  $X^* = X^*(\mathbb{T})$  bzw.  $X_* = X_*(\mathbb{T})$  die Gruppe der Charaktere bzw. Kocharakteren von  $\mathbb{T}$ . Sei weiter  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  die kanonische Paarung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X_* \times X^* \rightarrow \mathbb{Z}.$$

Das Wurzelsystem von  $G$  bezüglich  $\mathbb{T}$  werde mit  $\Phi = \Phi(G, \mathbb{T}) \subset X^*$  bezeichnet. Für jede Wurzel  $\alpha \in \Phi$  sei  $U_\alpha \subset G$  die zusammenhängende eindimensionale unipotente Untergruppe von  $G$ , die von  $\mathbb{T}$  normalisiert wird. Für jeden Isomorphismus  $\varepsilon_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow U_\alpha$  gilt  $\text{Int}(t)(\varepsilon_\alpha(z)) = \varepsilon_\alpha(\alpha(t)z)$ . Alle eben beschriebenen Gruppen sind bereits über  $F$  definiert.

Es sei  $A$  der reelle affine Raum

$$A := X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

und  $\nu : \mathbb{T}(F) \rightarrow A$  der durch

$$\langle \nu(t), \chi \rangle = -v(\chi(t)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T}(F), \chi \in X^*$$

definierte Homomorphismus. Der Kern von  $\nu$  besteht gerade aus dem kompakten Anteil  $\mathbb{T}(F)_c$  von  $\mathbb{T}(F)$ . Wir erklären nun vermöge  $\nu$  eine Operation von  $\mathbb{T}(F)$  auf  $A$  durch Translationen, nämlich durch

$$tx := x + \nu(t) \quad \text{für } t \in \mathbb{T}(F), x \in A.$$

Diese Operation läßt sich fortsetzen zu einer affinen Operation  $x \mapsto nx$  (für  $n \in N(F), x \in A$ ) von  $N(F)$  auf  $A$ . Man erhält also einen Homomorphismus  $N \rightarrow \text{Aut}_{\text{aff}}(A)$ , der  $\nu$  fortsetzt und meistens wieder mit  $\nu$  bezeichnet wird. Im spaltenden Fall läßt sich dies explizit sehen: Der Quotient  $N(F)/\mathbb{T}(F)_c$  ist dann ein semidirektes Produkt

$$N(F)/\mathbb{T}(F)_c \cong \mathbb{T}(F)/\mathbb{T}(F)_c \rtimes W(F).$$

Ein Schnitt von  $W(F)$  nach  $N(F)$  ist dabei dadurch gegeben, daß man Repräsentanten für die erzeugenden Spiegelungen von  $W(F) \cong W(\kappa)$  in  $N(\mathcal{O})$  wählt. Dies ist möglich, da  $G$  im spaltenden Fall eine  $\mathcal{O}$ -Struktur trägt und  $\mathbb{T}, N$  und  $W$  bereits über  $\mathcal{O}$  definiert sind. Die von den gewählten Repräsentanten erzeugte Untergruppe von  $N(F)$  ist nun modulo  $\mathbb{T}(\mathcal{O}) = \mathbb{T}(F)_c$  isomorph zu  $W(F)$ . Beide Faktoren des semidirekten Produktes operieren auf  $A$ :  $W(F)$  durch die lineare Operation, die von derjenigen von  $W$  auf  $X_*$  induziert wird, und  $\mathbb{T}(F)/\mathbb{T}(F)_c$  durch die von  $\nu$  induzierte Operation als Translationsgruppe. Man erhält daher eine affine Operation  $x \mapsto nx$  (für  $n \in N(F), x \in A$ ) von  $N(F)$  auf  $A$ .

Die so gewonnene Operation von  $N(F)$  auf  $A$  bzw. der Homomorphismus  $\nu : N(F) \rightarrow \text{Aut}_{\text{aff}}(A)$  ist eindeutig bis auf eindeutige Isomorphie. Jede andere Operation von  $N(F)$  durch affine Automorphismen auf  $A$  hat die Form

$$x \mapsto n(x + x_0) - x_0$$

für einen beliebigen festen Punkt  $x_0 \in A$ . Außerdem ist für  $n \in N(F)$  mit Bild  $w \in W(F)$  die Abbildung  $x \mapsto wx$  der lineare Anteil der affinen Abbildung  $x \mapsto nx$ .

Sei nun  $\alpha \in \Phi$  und  $u \in U_\alpha(F) \setminus \{1\}$ . Dann besteht der Schnitt

$$U_{-\alpha}uU_{-\alpha} \cap N = \{m(u)\}$$

aus einem einzigen Element  $m(u)$ , das schon  $F$ -rational ist. Das Bild von  $m(u)$  in  $W(F)$  und damit der lineare Anteil von  $r(u) := \nu(m(u))$  ist die zu  $\alpha$  assoziierte Spiegelung  $s_\alpha$ . Der Translationsanteil von  $r(u)$  ist von der Form  $-l(u) \cdot \check{\alpha}$  für eine reelle Zahl  $l(u)$ . Wir haben also für  $x \in A$

$$m(u)x = s_\alpha x - l(u)\check{\alpha} = x - (\alpha(x) + l(u))\check{\alpha}.$$

Wir können  $r(u)$  also auffassen als affine Spiegelung an der Hyperebene  $\{x \in A \mid \alpha(x) = -l(u)\}$ . Sei für  $\alpha \in \Phi$

$$\Gamma_\alpha = \{l(u) \mid u \in U_\alpha(F) \setminus \{1\}\} \subset \mathbb{R}.$$

$\Gamma_\alpha$  ist eine nach oben und unten unbeschränkte diskrete Teilmenge von  $\mathbb{R}$  mit  $-\Gamma_\alpha = \Gamma_{-\alpha}$ . Die affinen Funktionen  $\alpha + m$  auf  $A$  für  $\alpha \in \Phi$  und  $m$  aus dem zu  $\alpha$  gehörigen  $\Gamma_\alpha$  heißen affine Wurzeln. Die Menge aller affinen Wurzeln wird mit  $\Phi_{\text{aff}}$  bezeichnet. Die Menge der zu den affinen Wurzeln gehörenden Hyperebenen bilden eine zusätzliche Struktur auf dem affinen Raum  $A$ . Parallel dazu hat man eine diskrete Filtrierung der Gruppen  $U_\alpha(F)$ . Für  $\alpha \in \Phi$  und  $r \in \mathbb{R}$  sei

$$U_{\alpha,r}(F) := \{u \in U_\alpha(F) \setminus \{1\} \mid l(u) \geq r\} \cup \{1\}$$

$$U_{\alpha,r+}(F) := \bigcup_{r' > r} U_{\alpha,r'}$$

und

$$\bar{U}_{\alpha,r}(F) := U_{\alpha,r}(F)/U_{\alpha,r+}(F).$$

Die  $U_{\alpha,r}(F)$  bilden eine diskrete Filtrierung von  $U_\alpha(F)$ , deren Quotienten gerade die  $\bar{U}_{\alpha,r}(F)$  sind. Da  $G$  spaltet, sind die  $\bar{U}_{\alpha,r}(F)$  isomorph zum Restklassenkörper  $\kappa$  von  $F$ .

Identifiziert man das Apartment  $A$  mit dem Vektorraum  $X_* \otimes \mathbb{R}$ , so werden die affinen Wurzeln gegeben durch

$$\Phi_{\text{aff}} = \{\alpha + m \mid \alpha \in \Phi, m \in \mathfrak{v}(F^*)\}.$$

Dann gibt es für jede Wurzel  $\alpha$  einen Isomorphismus  $\varepsilon_\alpha : \mathbb{G}_a(F) \rightarrow U_\alpha(F)$  mit

$$U_{\alpha,m}(F) = \varepsilon_\alpha(\mathfrak{v}^{-1}([m, \infty))).$$

Ist  $\mathfrak{v}$  normiert, d.h.  $\mathfrak{v}(F^*) = \mathbb{Z}$ , folgt

$$U_{\alpha,m}(F) = \varepsilon_\alpha(\pi^m \mathcal{O}).$$

Insbesondere gilt  $U_{\alpha,0}(F) = \varepsilon_\alpha(\mathcal{O})$ .

Sei  $\Omega \subset A$  eine beliebige nichtleere Teilmenge von  $A$  und  $f_\Omega : \Phi \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  definiert durch

$$f_\Omega(\alpha) = - \inf_{x \in \Omega} \alpha(x).$$

Sei  $U_\Omega(F)$  die Untergruppe von  $G$ , die von allen  $U_{\alpha,f_\Omega(\alpha)}(F)$  für alle  $\alpha \in \Phi$  erzeugt wird, und

$$N_\Omega(F) := \{n \in N(F) \mid nx = x \text{ für alle } x \in \Omega\}.$$

Wegen  $nU_\Omega(F)n^{-1} = U_{n\Omega}(F)$  für jedes  $n \in N(F)$  wird  $U_\Omega(F)$  von  $N_\Omega(F)$  normalisiert. Wir setzen noch

$$P_\Omega(F) := N_\Omega(F) \cdot U_\Omega(F).$$

Besteht speziell die Menge  $\Omega = \{x\}$  nur aus einem Element  $x \in A$ , schreiben wir kurz  $f_x, U_x, N_x, P_x$  für  $f_{\{x\}}, U_{\{x\}}, N_{\{x\}}, P_{\{x\}}$ .

Für eine affine Wurzel  $\alpha + m$  sei

$$A_{\alpha+m} := (\alpha + m)^{-1}([0, \infty[)$$

$$\partial A_{\alpha+m} := (\alpha + m)^{-1}(0).$$

Die Mengen  $A_{\alpha+m}$  für die  $\alpha + m \in \Phi_{\text{aff}}$  heißen *Halbapartments* von  $A$ , die Mengen  $\partial A_{\alpha+m}$  heißen *Wände* von  $A$ . Wegen  $-\Gamma_\alpha = \Gamma_{-\alpha}$  für eine Wurzel  $\alpha \in \Phi$  ist mit  $\alpha + m \in \Phi_{\text{aff}}$  auch  $-(\alpha + m)$  eine affine Wurzel. Weiter gilt  $\partial A_{\alpha+m} = \partial A_{-(\alpha+m)}$  und  $A \setminus A_{\alpha+m} = A_{-(\alpha+m)} \setminus \partial A_{\alpha+m}$ . Die Wände von  $A$  sind genau die affinen Hyperebenen, die zu den affinen Spiegelungen  $r(u)$  für  $u \in U_\alpha(F) \setminus \{1\}$  assoziiert sind. Wir schreiben ab jetzt für eine affine Wurzel  $\alpha + m$  auch  $r_{\alpha+m}$  für  $r(u)$ , wenn  $u \in U_\alpha(F)$  gilt und der Translationsanteil von  $r(u)$  gleich  $m$  ist. Das Komplement der Vereinigung aller Wände in  $A$  zerfällt in Zusammenhangskomponenten, die *Kammern* von  $A$ . Da  $G$  einfach ist, sind die Kammern Simplexes. Die Facetten der Kammern heißen auch Facetten von  $A$ . Eine Kammer  $C$  hat die affine Hyperebene  $\partial A_{\alpha+m}$  als Wand, wenn der Durchschnitt des Abschlusses von  $C$  mit  $\partial A_{\alpha+m}$  die Hyperebene  $\partial A_{\alpha+m}$  affin erzeugt.

Sei  $W_{\text{aff}}$  die Gruppe, die von allen  $r_{\alpha+m}$  mit  $\alpha + m \in \Phi_{\text{aff}}$  erzeugt wird.  $W_{\text{aff}}$  heißt Weylgruppe zum affinen Wurzelsystem  $\Phi_{\text{aff}}$  und ist die affine Weylgruppe von  $\Phi$  im Sinne von Abschnitt 3.9.  $W_{\text{aff}}$  ist als affine Spiegelungsgruppe eine Coxetergruppe. Das affine Wurzelsystem  $\Phi_{\text{aff}}$  wird von  $\nu(N(F))$  stabilisiert. Daher permutiert  $\nu(N(F))$  die Halbapartments, Wände und Kammern von  $A$ . Weiter ist  $W_{\text{aff}}$  ein Normalteiler in  $\nu(N(F))$ .  $W_{\text{aff}}$  operiert einfach transitiv auf der Menge der Kammern von  $A$ . Sei  $C$  eine Kammer mit den begrenzenden Wänden  $L_0, \dots, L_l$ . Sei  $\alpha_i + m_i$  die eindeutige affine Wurzel mit  $L_i = \partial A_{\alpha_i+m_i}$  und  $C \in A_{\alpha_i+m_i}$ . Die Menge  $\{\alpha_i + m_i \mid i = 0, \dots, l\}$  heißt Basis von  $\Phi_{\text{aff}}$  zur Kammer  $C$  und wird mit  $\Delta_{\text{aff}}(C)$  bezeichnet. Da die Kammern von  $W_{\text{aff}}$  einfach transitiv permutiert werden, hängt eine Basis von  $\Phi_{\text{aff}}$  nicht von der Wahl der Kammer  $C$  ab bis auf kanonische Isomorphie. Weiter bilden die Spiegelungen  $r_{\alpha_i+m_i}$  ein minimales Erzeugendensystem für die Coxetergruppe  $W_{\text{aff}}$ .

Sei  $C$  eine Kammer in  $A$  und  $\{\alpha_i + m_i \mid i = 0, \dots, l\}$  die Basis von  $\Phi_{\text{aff}}$  zur Kammer  $C$ . Sei  $(\cdot, \cdot)$  ein Skalarprodukt auf  $V^*$ , das invariant ist unter der Weylgruppe  $W$ . Das *lokale Dynkindiagramm*  $\Delta(\Phi_{\text{aff}})$  von  $\Phi_{\text{aff}}$  erhält man wie folgt: Die Elemente der Basis zu  $C$  werden durch Knoten  $v_i$  dargestellt, und zwei Knoten  $v_i$  und  $v_j$  mit zugehörigen affinen Wurzeln  $\alpha_i + m_i$  bzw.  $\alpha_j + m_j$  werden auf eine Art verbunden, die vom Wert  $\lambda_{ij} = 4(\alpha_i, \alpha_j)/(\alpha_i, \alpha_i)(\alpha_j, \alpha_j)$  abhängt (für diesen Wert kommen nur die Zahlen 0, 1, 2, 3 oder 4 in Frage). Ist  $\lambda_{ij} = 2$  oder 3, wird die Verbindung zwischen  $v_i$  und  $v_j$  mit einem Pfeil versehen, der auf den Knoten zeigt, der zur „kürzeren“ der beiden Wurzeln  $\alpha_i$  und  $\alpha_j$  gehört.

Da  $W_{\text{aff}}$  die Kammern von  $A$  einfach transitiv permutiert, hängt das lokale Dynkindiagramm bis auf kanonische Isomorphie nicht von der Wahl der Kammer  $C$  ab. Ignoriert man die Pfeile im lokalen Dynkindiagramm erhält man das Coxeterdiagramm der Weylgruppe  $W$ .

### 11.3 Das affine Bruhat-Tits Gebäude

Wir betrachten die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $G(F) \times A$ , die definiert ist durch

$$(g, x) \sim (h, y) :\Leftrightarrow \text{es gibt ein } n \in N(F) \text{ mit } nx = y \text{ und } g^{-1}hn \in U_x(F).$$

Wir setzen

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(G, F) := G(F) \times A / \sim.$$

$\mathcal{B}(G, F)$  heißt *affines Gebäude zu  $G$  über  $F$* . Die Gruppe  $G(F)$  operiert auf  $\mathcal{B}$  durch

$$g \cdot [(h, y)] = [(gh, y)]$$

für  $g \in G(F)$  und  $(h, y) \in G(F) \times A$ . Die Abbildung  $A \rightarrow X$ , definiert durch

$$x \mapsto [(1, x)],$$

ist injektiv und  $N(F)$ -äquivariant. Wir können also  $A$  mit einer Teilmenge von  $X$  identifizieren und schreiben ab jetzt  $gx$  für  $[(g, x)]$ .  $N(F)$  ist dann der Stabilisator von  $A$  in  $G(F)$ . Es gilt weiter für eine nichtleere Teilmenge  $\Omega$  von  $A$

$$P_\Omega(F) = \{g \in G(F) \mid gx = x \text{ für alle } x \in \Omega\}.$$

Für eine Wurzel  $\alpha \in \Phi$  und ein  $u \in U_\alpha(F) \setminus \{1\}$  hat man

$$\{x \in A \mid ux = x\} = \{x \in A \mid \alpha(x) + l(u) \geq 0\}.$$

Daraus folgt, daß die Gruppe  $U_{\alpha, m}$  das Halbapartment  $A_{\alpha+m}$  punktweise fixiert.

Das Gebäude  $\mathcal{B}$  läßt sich wie folgt charakterisieren.

**Satz 11.2.** *Seien  $A, \nu, \Phi_{\text{aff}}$  sowie  $U_{\alpha, m}$  und  $A_{\alpha+m}$  gegeben wie in Abschnitt 11.2. Dann existiert eine bis auf eindeutige Isomorphie eindeutige Menge  $\mathcal{B}$  mit einer Linksoperation von  $G(F)$  und den folgenden Eigenschaften:*

1.  $\mathcal{B} = \bigcup_{g \in G(F)} gA$
2.  $N(F)$  stabilisiert  $A$  und operiert auf  $A$  durch  $\nu$ .
3. Für jede affine Wurzel  $\alpha + m \in \Phi_{\text{aff}}$  fixiert die Gruppe  $U_{\alpha, m}$  das Halbapartment  $A_{\alpha+m}$  punktweise.

Die Teilmengen von  $\mathcal{B}$  der Form  $gA$  mit  $g \in G(F)$  heißen *Apartments* von  $\mathcal{B}$ . Man hat eine Bijektion zwischen den Apartments in  $\mathcal{B}$  und den maximalen spaltenden  $F$ -Tori in  $G$ , indem man dem Apartment  $gA$  den Torus  $g\mathbb{T}g^{-1}$  zuordnet.  $gA$  ist das einzige Apartment in  $\mathcal{B}$ , das von  $g\mathbb{T}(F)g^{-1}$  stabilisiert wird, und  $gN(F)g^{-1}$  ist der Stabilisator von  $gA$  in  $G(F)$ .

Da der Stabilisator  $N(F)$  von  $A$  in  $G(F)$  die affine Struktur von  $A$  erhält, überträgt sich die Struktur eines reellen affinen Raumes mit einer Unterteilung durch affine Hyperebenen mittels  $G(F)$  auf alle Apartments. Diese Strukturen stimmen auf Durchschnitten überein:

**Satz 11.3** ([BT1][2.5.8]). *Für zwei Apartments  $A'$  und  $A''$  existiert ein  $g \in G(F)$ , das  $A'$  auf  $A''$  abbildet und den Durchschnitt  $A' \cap A''$  punktweise fixiert.*

Das gesamte Gebäude  $\mathcal{B}$  erhält auf diese Weise eine Unterteilung in Facetten. Diejenigen davon, die in einem Apartment offen sind (bezüglich der gewöhnlichen affinen Topologie), heißen Kammern. Da  $G$  einfach ist, ist  $\mathcal{B}$  ein simplizialer Komplex. Die durch  $x \mapsto gx$  gegebene Abbildung  $A' \rightarrow A''$ , die  $A' \cap A''$  punktweise fixiert, ist eindeutig bestimmt, falls  $A' \cap A''$  eine Kammer enthält.

Wegen Satz 11.3 hängt das lokale Dynkindiagramm, das von einer Kammer und einem die Kammer enthaltenden Apartment abhängt, bis auf eindeutige Isomorphie nicht von der Wahl eines solchen ab. Daher sprechen wir von dem lokalen Dynkindiagramm von  $G$  über  $F$ . Die Gruppe  $G(F)$  operiert auf dem lokalen Dynkindiagramm von  $G$  über  $F$ : Fixiere eine Referenzkammer  $C$ . Zu  $g \in G(F)$  existiert

ein Apartment  $A$ , das  $C$  und  $gC$  enthält, und ein eindeutiges  $w \in W_{\text{aff}}$  mit  $wgC = C$ . Also permutiert  $wg$  die Wände von  $C$  und operiert auf diese Weise auf  $\Delta(\Phi_{\text{aff}})$ .

Für je zwei Facetten gibt es ein Apartment, das beide enthält. Insbesondere liegen je zwei Punkte  $x$  und  $y$  aus  $\mathcal{B}$  in einem gemeinsamen Apartment. Für  $t \in [0, 1]$  sind die Punkte  $(1-t)x + ty$  in jedem solchen Apartment wohldefiniert und nach 11.3 unabhängig vom gewählten Apartment. Die Menge  $\{(1-t)x + ty \mid t \in [0, 1]\}$  heißt *geodätisches Segment* zwischen  $x$  und  $y$  und wird manchmal mit  $[x, y]$  bezeichnet.

Sei  $A'$  ein Apartment und  $C \subset A'$  eine Kammer. Zu jedem Apartment  $A''$ , das  $C$  enthält, existiert ein eindeutiger Isomorphismus affiner Räume, der  $A''$  auf  $A'$  abbildet und  $C$  punktweise fixiert. Wegen Satz 11.3 lassen sich diese Isomorphismen zu einer globalen Abbildung  $\rho_{A,C} : \mathcal{B} \rightarrow A'$  verkleben, dem *Retrakt von  $\mathcal{B}$  nach  $A'$  mit Zentrum  $C$* .

Zwei Kammern heißen *benachbart* über die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$ , wenn sie verschieden sind und das affine Erzeugnis des Durchschnitts ihrer topologischen Abschlüsse die affine Hyperebene  $\partial A_{\alpha+m}$  ist. Der Schnitt der topologischen Abschlüsse zweier Kammern heißt *Facette* der Kodimension 1. Sei nun  $C$  eine beliebige, fest gewählte Referenzkammer,  $C'$  eine beliebige Kammer in  $\mathcal{B}$  und  $A'$  ein Apartment, das  $C$  und  $C'$  enthält. Die Weylgruppe von  $\Phi_{\text{aff}}$  operiert einfach transitiv auf den Kammern von  $A'$ . Daher existiert für eine Facette  $F'$  von  $C'$  eine eindeutige Facette  $F$  von  $C$ , die im selben  $W_{\text{aff}}$ -Orbit wie  $F'$  liegt. Man erhält auf diese Weise eine Typisierung (*Labelling*) aller Facetten in  $\mathcal{B}$  durch die Facetten bzw. die Wände der Referenzkammer  $C$ . Eine Facette der Kodimension 1 in  $\mathcal{B}$  ist im Abschluß von genau  $q + 1$  Kammern enthalten, wenn  $q$  die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers von  $F$  bezeichnet.

Ein Labelling der Facetten der Kodimension 1 in  $\mathcal{B}$  entspricht einem Labelling der Knoten des lokalen Dynkindiagramms: Die Knoten entsprechen ja eineindeutig den Wänden einer Referenzkammer. Eine Untergruppe  $H(F)$  von  $G(F)$  operiert genau dann labelerhaltend, wenn die Operation von  $H(F)$  auf  $\Delta(\Phi_{\text{aff}})$  trivial ist. Ist  $G$  einfach-zusammenhängend, operiert  $G(F)$  labelerhaltend nach [T1][2.5].

Eine *Galerie*  $\mathfrak{G}$  der Länge  $l$  vom Typ  $s(\mathfrak{G})$  zwischen zwei Kammern  $C$  und  $C'$  ist eine endliche Folge von Kammern  $\mathfrak{G} = (C = C_0, \dots, C_l = C')$  in  $\mathcal{B}$  zusammen mit einer Folge von Facetten der Referenzkammer  $C$   $s(\mathfrak{G}) = (F_1, \dots, F_l)$ , für die  $C_i$  benachbart ist zu  $C_{i+1}$  und die Wand zwischen  $C_i$  und  $C_{i+1}$  vom Typ  $F_{i+1}$  ist. Eine Galerie heißt *minimal*, wenn sie minimale Länge hat. Die Länge einer minimalen Galerie zwischen zwei Kammern  $C$  und  $C'$  heißt auch *Kammerabstand* von  $C$  und  $C'$ . Für minimale Galerien gilt die folgende Aussage:

**Satz 11.4.** *Seien  $C$  eine Kammer und  $F$  eine Facette der Kodimension 1 in  $\mathcal{B}$ . Dann ist jede Galerie zwischen  $C$  und  $F$  in jedem Apartment enthalten, das  $C$  und  $F$  enthält. Weiter existiert eine eindeutige Kammer  $D$  in  $\mathcal{B}$ , die  $F$  enthält und minimalen Kammerabstand von  $C$  hat. Seien  $C'$  eine weitere Kammer in  $\mathcal{B}$  und  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$  zwei minimale Galerien zwischen  $C$  und  $C'$  vom selben Typ. Dann stimmen  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$  überein.*

**Beweis:** Für die erste Aussage siehe [BT1][2.3.6]. Sei  $A$  ein Apartment, das  $C$  und  $F$  enthält. In  $A$  gibt es genau zwei Kammern  $D_1$  und  $D_2$ , die  $F$  enthalten. Diese Kammern sind benachbart über die eindeutige Wand, die  $F$  enthält. Die minimalen Galerien zwischen  $C$  und  $D_1$  bzw.  $D_2$  unterscheiden sich aber in ihrer Länge um 1. Alternativ kann man auch Abschnitt 11.5 zusammen mit [Ro2][2.10] verwenden. Die Aussage über die Identität von Galerien folgt aus [BT1][2.3.6] und [BT1][2.3.8].  $\square$

Wir wählen ein  $W(F)$ -invariantes Skalarprodukt auf  $V$  und erhalten eine  $W(F)$ -invariante euklidische Metrik auf  $A$ . Die Operation von  $N(F)$  auf  $A$  ist dann automatisch isometrisch. Diese Metrik setzt sich auf eindeutige Weise zu einer  $G(F)$ -invarianten Metrik  $d$  auf ganz  $\mathcal{B}$  fort. Der metrische Raum  $(\mathcal{B}, d)$



ist dann vollständig und zusammenziehbar. Das geodätische Segment zwischen zwei Punkten  $x$  und  $y$  aus  $\mathcal{B}$  läßt sich dann nach [BT1][2.5.4] mithilfe der Metrik  $d$  intrinsisch charakterisieren als

$$[x, y] = \{z \in \mathcal{B} \mid d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)\}.$$

Die von  $d$  induzierte Topologie stimmt sowohl mit der Quotiententopologie auf  $\mathcal{B}$  bezüglich  $\coprod_{g \in G(F)} gA \rightarrow \mathcal{B}$  überein, wenn  $\coprod_{g \in G(F)} gA$  die natürliche Topologie trägt, als auch mit der Initialtopologie auf  $\mathcal{B}$  bezüglich aller Retrakte  $\rho_{A', C}$ , d.h. der größten Topologie auf  $\mathcal{B}$ , bezüglich der alle Retrakte stetig sind.  $\mathcal{B}$  wird bezüglich dieser Topologie ein lokal kompakter Raum.

Für eine Teilmenge  $\Omega$  von  $\mathcal{B}$  sei  $G(F)^\Omega$  der punktweise Stabilisator von  $\Omega$  in  $G(F)$ , also

$$G(F)^\Omega = \{g \in G(F) \mid gx = x \text{ für alle } x \in \Omega\}.$$

Besteht  $\Omega$  nur aus einem Punkt  $x$ , schreiben wir  $G(F)^x$  für  $G(F)^{\{x\}}$ . Die Punktstabilisatoren  $G(F)^x$  ( $x \in \mathcal{B}$ ) sind genau die maximal kompakten Untergruppen von  $G(F)$ .

Sei  $\Omega$  eine nichtleere, beschränkte Teilmenge eines Apartments von  $\mathcal{B}$ . Dann existiert ein (bis auf eindeutige Isomorphie) eindeutiges affines Gruppenschema  $\mathcal{G}_\Omega$  mit den folgenden beiden Eigenschaften: Die generische Faser  $\mathcal{G}_{\Omega, F}$  ist  $G$  und die Gruppe  $\mathcal{G}_\Omega(\mathcal{O}_E)$  ist gleich dem punktweisen Stabilisator  $G(E)^\Omega$  für jede unverzweigte Körpererweiterung  $E$  von  $F$ . Ist  $\Omega = \{x\}$  ein spezieller Punkt, so ist  $\mathcal{G}_\Omega$  gerade das Chevalley Gruppenschema mit generischer Faser  $G$ . Ist  $\Omega'$  eine nichtleere Teilmenge des topologischen Abschlusses von  $\Omega$ , so definiert die Inklusionsabbildung  $G(F)^\Omega \rightarrow G(F)^{\Omega'}$  einen Morphismus der Gruppenschemata  $\mathcal{G}_\Omega \rightarrow \mathcal{G}_{\Omega'}$ , der mit  $\rho_{\Omega' \Omega}$  bezeichnet wird. Wir schreiben  $\bar{G}_\Omega$  bzw.  $\bar{\rho}_{\Omega' \Omega}$  für die algebraische Gruppe über  $\kappa_F$  bzw. den  $\kappa_F$ -Homomorphismus, den wir aus  $\mathcal{G}_\Omega$  bzw.  $\rho_{\Omega' \Omega}$  durch Reduktion modulo  $\mathfrak{p}$  erhalten.

Sei nun  $C$  eine Kammer im Gebäude  $\mathcal{B}$ . Die zur Kammer  $C$  gehörende *Iwahoriuntergruppe*  $\text{Iw}(C)$  ist definiert als eine Untergruppe von  $G(F)^C$  (siehe [T1][3.7]), die wegen [T1][3.5.3] aber im Falle einer spaltenden Gruppe gleich  $G(F)^C$  ist. Wir nehmen daher dies als Definition, also

$$\text{Iw}(C) = G(F)^C.$$

Alle Iwahoriuntergruppen von  $G(F)$  sind konjugiert. Sie lassen sich auch beschreiben als Urbilder in den Punktstabilisatoren  $G(F)^x$  ( $x \in X$ ) der  $\kappa_F$ -Borelgruppen in den modulo  $\mathfrak{p}$  reduzierten Gruppen  $\bar{G}_x$  unter dem Reduktionshomomorphismus. Ist  $G$  einfach zusammenhängend, so stimmt die Iwahoriuntergruppe zur Kammer  $C$  stets mit  $G(F)^C$  überein (auch wenn  $g$  nicht spaltet). Die Iwahoriuntergruppen von  $G(F)$  sind kompakt offene Untergruppen in der lokal kompakten Gruppe  $G(F)$ .

## 11.4 Weitere Eigenschaften des Gebäudes

In diesem Abschnitt geben wir eine kurze Übersicht über die wichtigsten Fakten zum Bruhat-Tits Gebäude. Wieder formulieren wir die Aussagen nur für den Fall, daß die Gruppe  $G$  einfach, über  $F$  definiert und spaltend ist, auch wenn einige Aussagen in größerer Allgemeinheit gelten.

**Satz 11.5** ([Ball][4.7]). *Sei  $G$  einfach, über  $F$  definiert und spaltend und  $G'$  eine beliebige über  $F$  definierte lineare algebraische Gruppe und  $\psi : G' \rightarrow G$  eine über  $F$  definierte, zentrale Isogenie. Dann ist  $\mathcal{B}(G', F)$  kanonisch isomorph zu  $\mathcal{B}(G, F)$ .*

**Korollar 11.6.** *Sei  $H(F)$  eine Untergruppe von  $G(F)$ , die nur aus topologisch unipotenten Elementen besteht. Dann hängt die Operation von  $H(F)$  auf  $\mathcal{B}(G, F)$  bis auf kanonische Isomorphie nicht von der Isogenieklasse von  $G$  ab. Insbesondere hängt die Fixpunktmenge  $\mathcal{B}(G, F)^{H(F)}$  von  $H(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  bis auf kanonische Isomorphie nicht von der Isogenieklasse von  $G$  ab.*

**Beweis:** Nach Satz 3.8 ist eine zentrale Isogenie  $G \rightarrow G'$  eingeschränkt auf  $H(F)$  bijektiv. Die Operation von  $H(F)$  auf  $\mathcal{B}(G, F)$  ist also äquivalent zur Operation von  $\psi(H(F))$  auf  $\mathcal{B}(G', F)$ .  $\square$

**Korollar 11.7.** *Eine Untergruppe von  $G(F)$ , die nur aus topologisch unipotenten Elementen besteht, operiert labelerhaltend auf  $\mathcal{B}(G, F)$ .*

**Beweis:** Wegen Korollar 11.6 kann man ohne Einschränkung  $G = G_{\text{sc}}$  annehmen. Nach Abschnitt 11.3 operiert  $G_{\text{sc}}(F)$  und damit auch jede Untergruppe labelerhaltend.  $\square$

Sei  $G$  einfach, über  $F$  definiert und spaltend. Nach Satz 11.5 ist  $\mathcal{B}(G, F)$  kanonisch isomorph zu  $\mathcal{B}(G_{\text{ad}}, F)$ , und die Operation von  $G(F)$  auf  $\mathcal{B}(G, F)$  entspricht der Operation von  $\tilde{G}(F) \subset G_{\text{ad}}(F)$  auf  $\mathcal{B}(G_{\text{ad}}, F)$ , wenn  $\tilde{G}(F)$  das Bild von  $G(F)$  unter der zentralen Isogenie  $G \rightarrow G_{\text{ad}}$  ist. Auf  $\mathcal{B}(G_{\text{ad}}, F)$  operieren also immer die  $F$ -wertigen Punkte jeder zu  $G$  zentral isogenen Gruppe, insbesondere operieren immer  $G_{\text{sc}}(F)$  und  $G_{\text{ad}}(F)$ .  $G_{\text{ad}}(F)$  (bzw.  $G_{\text{sc}}(F)$ ) ist in dieser Situation die größte (bzw. kleinste) Gruppe, die auf  $\mathcal{B}(G_{\text{ad}}, F)$  operiert.

**Satz 11.8** ([Ball][4.11]). *Sei  $G$  einfach, über  $F$  definiert und spaltend. Dann ist  $\nu(N(F)) = X_* \rtimes W$ .*

## 11.5 Kammersysteme und Coxeterkomplexe

In [Ro2] werden (affine) Gebäude mithilfe des Begriffs des Kammersystems eingeführt, zunächst ohne Bezug zu algebraischen Gruppen. Ein Kammersystem bezüglich einer (endlichen) Menge  $I$  ist eine Menge  $\mathcal{C}$  zusammen mit einem  $|I|$ -Tupel von Äquivalenzrelationen  $(\sim_i)_{i \in I}$  auf  $\mathcal{C}$ . Die Elemente in  $\mathcal{C}$  heißen Kammern, und zwei Kammern  $x, y$  mit  $x \sim_i y$  heißen  $i$ -benachbart. Ist  $\mathcal{W}$  eine Coxetergruppe mit Indexmenge  $I$ , so läßt sich  $\mathcal{W}$  ein spezielles Kammersystem zuordnen, der *Coxeterkomplex* (der ebenfalls mit  $\mathcal{W}$  bezeichnet wird): Die Kammern sind die Elemente aus  $\mathcal{W}$ , und für  $i \in I$  ist  $i$ -Nachbarschaft erklärt durch

$$w \sim_i wr_i,$$

wenn die  $r_i$  die Erzeuger der Coxetergruppe  $\mathcal{W}$  sind.  $\mathcal{W}$  operiert auf sich selbst von links und erhält dabei  $i$ -Nachbarschaft. In der Tat ist  $\mathcal{W}$  schon die ganze Automorphismengruppe des Coxeterkomplexes.

Wir haben im Abschnitt 11.2 gesehen, daß die Weylgruppe  $W_{\text{aff}}$  zum affinen Wurzelsystem  $\Phi_{\text{aff}}$  eine Coxetergruppe ist und erzeugt wird von den Spiegelungen an den Wänden einer beliebigen, ab jetzt fest gewählten Kammer  $C$  im Apartment  $A$ . Weiter operiert  $W_{\text{aff}}$  einfach transitiv auf der Menge der Kammern in  $A$ , und zwei Kammern sind benachbart über die Hyperebene  $\alpha + m = 0$ , wenn der Durchschnitt der topologischen Abschlüsse der beiden Kammer diese Hyperebene affin erzeugt. Mittels der  $G(F)$ -Operation wird dann  $\mathcal{B}$  zu einem Kammersystem. Die Abbildung

$$w \mapsto wC$$

von  $W_{\text{aff}}$  in die Menge der Kammern in  $A$  ist ein Isomorphismus von Kammersystemen, d.h.  $A$  (aufgefaßt als Kammersystem) ist isomorph zum Coxeterkomplex von  $W_{\text{aff}}$ .

In [Ro2][ch.2] wird folgendes Kriterium angegeben, wann ein Kammersystem ein Gebäude im Sinne von [Ro2] ist.

**Theorem 11.9** ([Ro2][2.8]). *Sei  $\mathcal{C}$  ein Kammersystem, das Untersysteme (genannt Apartments) enthält, die alle isomorph sind zu einem einzigen gegebenen Coxeterkomplex, und mit den folgenden Eigenschaften: Je zwei Kammern liegen in einem gemeinsamen Apartment, und je zwei gegebene Apartments, die eine gemeinsame Kammer  $x$  und eine gemeinsame Kammer oder Kammerwand  $y$  enthalten, sind isomorph vermöge eines Isomorphismus, der  $x$  und  $y$  fest läßt. Dann ist  $\mathcal{C}$  ein Gebäude.*

Nach den Aussagen im vorderen Teil des Kapitels sind die Bedingungen, die Theorem 11.9 stellt, für  $\mathcal{B}$  erfüllt. Also ist  $\mathcal{B}$  auch ein Gebäude im Sinne von [Ro2].

## 11.6 Beschreibung von Kammern in $\mathcal{B}(G, F)$

Aufgrund des Korollar 13.6 besteht die zentrale Aufgabe darin, in  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G, F)$  nach punktweise fixierten Kammern unter einer Gruppe  $H$  von Automorphismen von  $\mathcal{B}$  zu suchen. Proposition 12.4 besagt, daß – die Existenz einer punktweisen fixierten Kammer vorausgesetzt – die Fixpunktmenge eine zusammenhängende Menge von Kammern ist. Sei  $C$  irgendeine von  $H$  punktweise fixierte Kammer. Dann läßt sich die Fixpunktmenge von  $H$  bestimmen, indem man bei  $C$  startend schrittweise alle benachbarten Kammern von bereits als punktweise fixiert bekannten Kammern betrachtet. Nur diese sind Kandidaten für weitere Fixpunkte. In diesem Abschnitt werden wir zu diesem Zweck eine geeignete Beschreibung aller Kammern in  $\mathcal{B}$  geben, die zu einer Referenzkammer  $C$  einen vorgegebenen Kammerabstand  $l$  hat.

Sei für den Rest des Abschnitts ein Apartment  $A$  und eine Kammer  $C_0$  in  $A$  fixiert.  $\mathcal{H}(C_0)$  bezeichne die Menge der Wände von  $C_0$ ,  $\Delta_{\text{aff}}$  die Basis von  $\Phi_{\text{aff}}$  zur Kammer  $C$  und für  $\alpha + m \in \Delta_{\text{aff}}$  sei wie früher  $r_{\alpha+m}$  die Spiegelung an der affinen Hyperebene  $L_{\alpha+m} := \partial A_{\alpha+m} \in \mathcal{H}(C_0)$  in  $A$ . Die Weylgruppe  $W_{\text{aff}}$  wird dann von den  $r_{\alpha+m}$  für die  $\alpha + m \in \Delta_{\text{aff}}$  erzeugt.

Die eindeutige Kammer  $C_{\alpha+m}$  in  $A$ , die zu  $C_0$  benachbart ist über die Wand  $L_{\alpha+m}$ , hat die Form

$$C_{\alpha+m} = r_{\alpha+m}C_0.$$

Sei nun  $U_{\alpha,m}(F)$  die Gruppe aus Abschnitt 11.2. Die Fixpunktmenge von  $U_{\alpha,m}(F)$  in  $A$  ist genau die Menge

$$(11.1) \quad \{x \in A \mid \alpha(x) + m \geq 0\}.$$

Daher fixiert  $U_{\alpha,m}(F)$  das Halbapartment  $A_{\alpha+m}$ . Die beiden Kammern  $C_0$  und  $C_{\alpha+m}$  werden jedoch genau durch die Hyperebene  $L_{\alpha+m} = \{x \in \mathcal{B} \mid \alpha(x) + m = 0\}$  getrennt, d.h. eine der beiden Kammern liegt im Halbapartment  $A_{\alpha+m}$  und die andere im gegenüberliegenden Halbapartment  $A_{-(\alpha+m)} = A \setminus A_{\alpha+m}$ . Wir definieren allgemein für eine beliebige Kammer  $C$  in  $A$  mit Wand  $\partial A_{\alpha+m}$

$$U_{\alpha,m}^C(F) := \begin{cases} U_{\alpha,m}(F) & \text{falls } C \in A_{\alpha+m} \\ U_{-\alpha,-m}(F) & \text{falls } C \in A_{-(\alpha+m)} \end{cases}$$

$$U_{\alpha,m+}^C(F) := \begin{cases} U_{\alpha,m+}(F) & \text{falls } C \in A_{\alpha+m} \\ U_{-\alpha,(-m)+}(F) & \text{falls } C \in A_{-(\alpha+m)} \end{cases}$$

und

$$\bar{U}_{\alpha,m}^C(F) := \begin{cases} \bar{U}_{\alpha,m}(F) & \text{falls } C \in A_{\alpha+m} \\ \bar{U}_{-\alpha,-m}(F) & \text{falls } C \in A_{-(\alpha+m)} \end{cases}$$

$$*U_{\alpha,m}^C(F) := (U_{\alpha,m}^C(F) \setminus U_{\alpha,m+}^C(F)) \cup \{1\}.$$

Bis auf  $*U_{\alpha,m}^C(F)$  sind alle obigen Mengen Gruppen. Alle vier Mengen ändern sich nicht, wenn  $(\alpha, m)$  durch  $(-\alpha, -m)$  ersetzt wird. Weiter fixiert  $U_{\alpha,m}^C(F)$  die Kammer  $C$  und das  $C$  enthaltende Halbapartment punktweise.

Wir betrachten immer noch den allgemeinen Fall einer Kammer  $C$  im Apartment  $A$  mit Wand  $\partial A_{\alpha+m}$ . Dann fixiert  $U_{\alpha,m}^C(F)$  keinen Punkt in dem offenen Halbapartment von  $A$ , das von der Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  begrenzt wird und  $C$  nicht enthält.  $U_{\alpha,m+}^C(F)$  fixiert jedoch jede Kammer in  $A$ , die von der Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  begrenzt wird, punktweise. Beide Aussagen sind klar, da die Fixpunktmenge von  $U_{\alpha',m'}^C(F)$  in  $A$  für beliebiges  $\alpha' \in \Phi$  und  $m' \in \mathbb{R}$  gegeben ist durch (11.1). Sei nun  $C'$  die eindeutige Kammer in

$A$ , die zu  $C$  über die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  benachbart ist. Wir betrachten nun den Orbit  $U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$  der Kammer  $C'$  unter der Gruppe  $U_{\alpha,m}^C(F)$ , also die Menge  $\{uC' \mid u \in U_{\alpha,m}^C(F)\}$ . Wir behaupten, daß der Orbit  $U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$  gerade aus allen Kammern in  $\mathcal{B}$  besteht, die zu  $C$  über die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  benachbart sind.

**Proposition 11.10.** *Sei  $C$  eine Kammer in einem Apartment  $A$  mit Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  für eine affine Wurzel  $\alpha + m$ . Sei  $C'$  die eindeutige Kammer in  $A$ , die zu  $C$  über die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  benachbart ist. Die Gruppen  $U_{\alpha,m}^C(F)$  und  $*U_{\alpha,m}^C(F)$  seien wie oben definiert. Dann stimmen die Orbits  $U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$  und  $*U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$  überein und bestehen genau aus den Kammern in  $\mathcal{B}$ , die zu  $C$  über die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  benachbart sind.*

**Beweis:** Wir schreiben  $\mathcal{C}$  für die Menge aller Kammern in  $\mathcal{B}$ , die zu  $C$  benachbart sind über die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$ . Wir haben schon gesehen, daß  $U_{\alpha,m}^C(F)$  die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  punktweise fixiert. Da  $C'$  die Hyperebene  $\partial A_{\alpha+m}$  als Wand besitzt, muß daher jede Kammer aus  $U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$  die Hyperebene  $\partial A_{\alpha+m}$  ebenfalls als Wand besitzen und daher entweder zu  $C$  benachbart oder gleich  $C$  sein. Da  $U_{\alpha,m}^C(F)$  aus Automorphismen von  $\mathcal{B}$  besteht und  $U_{\alpha,m}^C(F)$  die Kammer  $C$  fixiert, ist der zweite Fall jedoch ausgeschlossen. Es folgt  $*U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C' \subset U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C' \subset \mathcal{C}$ . Umgekehrt wissen wir aus Abschnitt 11.3, daß es  $q + 1$  Kammern in  $\mathcal{B}$  gibt, die die Hyperebene  $\partial A_{\alpha+m}$  als Wand besitzen und zu  $C$  benachbart sind, wenn  $q$  die Anzahl der Elemente des Restklassenkörpers  $\kappa$  von  $F$  ist. Es genügt also zu zeigen, daß der Orbit  $*U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$  mindestens  $q$  Elemente besitzt. Nun ist  $\bar{U}_{\alpha,m}^C(F)$  nach Abschnitt 11.2 isomorph zu  $\kappa$ . Seien  $u_y$  Repräsentanten in  $U_{\alpha,m}^C(F)$  für die  $y \in \kappa \cong \bar{U}_{\alpha,m}^C(F)$ . Dies sind genau  $q$  Stück, und wir zeigen, daß die Kammern  $u_y C'$  und  $u_z C'$  verschieden sind für  $y \neq z \in \kappa$ : Sonst würde das Element  $u_y^{-1} u_z \in U_{\alpha,m}^C(F)$  die Kammer  $C'$  stabilisieren und die Wand  $\partial A_{\alpha+m}$  punktweise fixieren, also  $C'$  schon punktweise fixieren. Dann müßte aber  $u_y^{-1} u_z$  schon trivial sein in  $\bar{U}_{\alpha,m}^C(F) \cong \kappa$ , was im Widerspruch steht zu  $y \neq z \in \kappa$ . Die  $u_y$  für  $y \neq 0 \in \kappa$  liegen bereits in  $*U_{\alpha,m}^C(F)$ . Wegen  $u_0 \in \bar{U}_{\alpha,m}^C(F)$  fixiert  $u_0$  die Kammer  $C'$  punktweise, d.h. es gilt  $u_0 C' = C'$ . Nun ist aber  $1 \in *U_{\alpha,m}^C(F)$  und damit  $C' \in *U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$ . Es folgt  $*U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C' = U_{\alpha,m}^C(F) \cdot C'$ .  $\square$

**Korollar 11.11.** *Seien  $C$  und  $C'$  zwei Kammern im Apartment  $A$  mit Kammerabstand  $l$ . Die eindeutige minimale Galerie  $\mathfrak{G}$  zwischen  $C$  und  $C'$  in  $A$  sei vom Typ  $(F_1, \dots, F_l)$ . Seien  $\alpha_1 + m_1, \dots, \alpha_l + m_l \in \Phi_{\text{aff}}$  affine Wurzeln, deren zugehörige affine Hyperebenen  $\partial A_{\alpha_i + m_i}$  die eindeutigen Hyperebenen in  $A$  sind, die die Kammern von  $\mathfrak{G}$  trennen, d.h. es gelte  $C' = r_{\alpha_l + m_l} \cdots r_{\alpha_1 + m_1} C$ . Bezeichnet  $C_{\mathfrak{G}}$  die Menge aller Kammern in  $\mathcal{B}$ , die mit  $C$  durch eine Galerie vom Typ  $(F_1, \dots, F_l)$  verbunden ist, dann gilt*

$$C_{\mathfrak{G}} = *U_{\alpha_1, m_1}^C(F) \cdots *U_{\alpha_l, m_l}^C(F) r_{\alpha_l + m_l} \cdots r_{\alpha_1 + m_1} C.$$

Sei  $\rho_{A,C}$  das Retrakt von  $\mathcal{B}$  nach  $A$  mit Zentrum  $C$  und  $C_i = r_{\alpha_i + m_i} \cdots r_{\alpha_1 + m_1} C$  für  $i = 1, \dots, l$ . Dann gilt für jede Galerie  $\mathfrak{G}_D$  zwischen  $C$  und einer Kammer  $D$  aus  $C_{\mathfrak{G}}$

$$\rho_{A,C}(\mathfrak{G}_D) = (C, C_1, \dots, C_l).$$

Insbesondere gilt  $\rho_{A,C}(D) = C_l = C'$  für alle Kammern aus  $C_{\mathfrak{G}}$ .

**Beweis:** Wir setzen noch  $C_0 = C$ . Mithilfe der Proposition 11.10 (angewendet auf die Kammer  $C_i$ ) zeigt man durch Induktion über  $l - i$ , daß die Menge

$$*U_{\alpha_{i+1}, m_{i+1}}^C(F) \cdots *U_{\alpha_l, m_l}^C(F) r_{\alpha_l + m_l} \cdots r_{\alpha_{i+1} + m_{i+1}} C$$

gerade aus allen Kammern besteht, die durch eine Galerie vom Typ  $(F_{i+1}, \dots, F_l)$  mit  $C_i$  verbunden sind. Dabei geht man vor wie im Beweis von Proposition 11.10 und benutzt, daß die  $U_{\alpha_i, m_i}^C(F)$  als unipotente Gruppen nach 12.6 und 11.7 sowohl Nachbarschaft als auch den Nachbarschaftstyp erhalten, um zu zeigen, daß die rechte Seite in  $C_{\mathfrak{G}}$  enthalten ist, und zählt dann ab.

Für die Aussage über das Retrakt beachte man, daß es innerhalb eines Apartments zu jedem vorgegebenen Typ genau eine Galerie dieses Typs gibt. Weiterhin ist das Retrakt ein Automorphismus von  $\mathcal{B}$  und erhält daher Nachbarschaftstypen.  $\square$

**Korollar 11.12.** *Sei  $C$  und  $C'$  zwei Kammern in  $\mathcal{B}$  mit Kammerabstand  $l$ . Sei weiter  $A$  ein Apartment, das  $C$  enthält, und  $W_{\text{aff}}$  die Weylgruppe von  $\Phi_{\text{aff}}$  bezüglich  $A$ . Dann existieren affine Wurzeln  $\alpha_1 + m_1, \dots, \alpha_l + m_l \in \Phi_{\text{aff}}$  und Elemente  $u_1, \dots, u_l$  mit  $u_i \in {}^*U_{\alpha_i, m_i}^C(F)$ , so daß*

$$C' = u_1 \cdots u_l r_{\alpha_l + m_l} \cdots r_{\alpha_1 + m_1} C.$$



# Kapitel 12

## Vorbereitungen zur Fixpunktbestimmung

### 12.1 Fixpunktmenngen in $\mathcal{B}(G, F)$

Wir untersuchen in diesem Abschnitt einige Eigenschaften von Fixpunktmenngen im Bruhat-Tits Gebäude, die uns später die Bestimmung der Fixpunktmenge von primitiven Tori erleichtern werden. Alle Aussagen bis auf die letzte folgen leicht aus den Eigenschaften des Gebäudes. Im ganzen Abschnitt bezeichne  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(G, F)$  das affine Bruhat-Tits Gebäude zu einer halbeinfachen Gruppe  $G$  über einem lokalen Körper  $F$ .

**Proposition 12.1** ([BT1][2.5.4]). *Eine Isometrie von  $\mathcal{B}$ , die zwei Punkte  $x$  und  $y$  in  $\mathcal{B}$  fixiert, fixiert das geodätische Segment zwischen  $x$  und  $y$  punktweise.*

**Korollar 12.2.** *Sei  $H$  eine Menge von Automorphismen von  $\mathcal{B}$ . Dann ist die Fixpunktmenge von  $H$  in  $\mathcal{B}$  konvex und zusammenhängend. Insbesondere enthält die Fixpunktmenge mit je zwei Punkten auch das geodätische Segment zwischen diesen Punkten.*

Die Weylgruppe  $W_{\text{aff}}$  von  $\Phi_{\text{aff}}$  operiert (einfach) transitiv auf der Menge der Kammern in einem Apartment. Daher ist es nützlich, sich bei der Suche nach Fixpunkten einer Gruppe  $H$  von Automorphismen von  $\mathcal{B}$  zunächst auf die Suche nach punktweise fixierten Kammern zu beschränken (dies ist eine Motivation zur Betrachtung des topologisch unipotenten Anteils der Tori, vgl. Abschnitt 2.4) und dann die Darstellung aus Korollar 11.12 für Kammern zu benutzen.

**Proposition 12.3.** *Sei  $H$  eine Menge von Automorphismen von  $\mathcal{B}$ , die eine Kammer  $C$  punktweise fixiert. Dann ist jeder Fixpunkt von  $H$  in  $\mathcal{B}$  schon in einer von  $H$  punktweise fixierten Kammer enthalten. Insbesondere enthält die Fixpunktmenge von  $H$  in  $\mathcal{B}$  mit je zwei Kammern auch die minimale Galerie zwischen diesen Kammern.*

**Beweis:** Sei  $C$  eine Kammer in  $\mathcal{B}$ , die von  $H$  punktweise fixiert wird, und  $x \in \mathcal{B}^H$  ein beliebiger Fixpunkt von  $H$ . Nach 11.4 existiert eine eindeutige Kammer  $D$ , die den Punkt  $x$  enthält und minimalen Kammerabstand von  $C$  hat. Sei  $\mathcal{G} = (C = D_1, \dots, D_l = D)$  die nach 11.4 eindeutige minimale Galerie zwischen  $C$  und  $D$ . Die Galerie  $h\mathcal{G}$  verbindet für  $h \in H$  die Kammern  $hC = C$  und  $hD$  und hat dieselbe Länge wie  $\mathcal{G}$ . Daher ist  $hD$  eine Kammer, die  $x$  enthält und minimalen Kammerabstand von  $C$  hat, stimmt wegen der Eindeutigkeit einer solchen Kammer also mit  $D$  überein. Also wird  $D$  von  $H$  stabilisiert. Daher ist  $h\mathcal{G}$  wieder eine minimale Galerie zwischen  $C$  und  $D$  für alle  $h \in H$ , also wegen der Eindeutigkeit von  $\mathcal{G}$  gleich  $\mathcal{G}$ . Die Galerie  $\mathcal{G}$  und damit alle Kammern von  $\mathcal{G}$  werden also von  $H$  stabilisiert. Da die Kammer  $C$  aber sogar punktweise fixiert wird, müssen alle Kammern von  $\mathcal{G}$  ebenfalls schon punktweise fixiert werden; insbesondere also auch die Kammer  $D$ .  $\square$

**Korollar 12.4.** Sei  $H$  eine Menge von Automorphismen von  $\mathcal{B}$ , die eine Kammer  $C$  punktweise fixiert. Dann ist die Fixpunktmenge von  $H$  in  $\mathcal{B}$  ein zusammenhängender konvexer Komplex von Kammern, d.h. er enthält mit je zwei Kammern auch jede minimale Galerie zwischen ihnen.

**Proposition 12.5.** Die Fixpunktmenge eines maximalen anisotropen Torus von  $G$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  ist kompakt.

**Beweis:** Diese Aussage ist eine direkte Konsequenz aus Lemma [SS][III.4.9] für reguläre elliptische Elemente in  $G(F)$ , denn ein maximaler anisotroper Torus  $T(F)$  enthält regulär elliptische Elemente  $t$ , und die Fixpunktmenge von  $T(F)$  ist in der jedes solchen  $t$  enthalten. Die Aussage folgt ebenfalls aus der seit langem bekannten Endlichkeit des Orbitalintegrals  $\int_{T(F)\backslash G(F)} \phi(gtg^{-1})dg$ , wenn  $T$  ein maximaler anisotroper Torus in  $G$ ,  $t \in T(F)$  ein reguläres Element und  $\phi$  eine lokal konstante Funktion mit kompaktem Träger auf  $G$  ist.  $\square$

## 12.2 Existenz geeigneter Elemente in $T$

Wir werden in den nächsten Kapiteln sehen, daß es im topologisch unipotenten Anteil  $T^1(F) = T_{tu}(F)$  von  $T(F)$  Elemente gibt, deren Fixpunktmenge in  $\mathcal{B}(G, F)$  schon mit der von  $T^1(F)$  übereinstimmt. Diese Elemente zeichnen sich dadurch aus, daß der lineare Koeffizient in der algebraischen Beschreibung durch Polynome aus Kapitel 10 die Bewertung 0 hat (siehe Korollar 13.9). In diesem Abschnitt zeigen wir, daß es solche Elemente in  $T^1(F)$  gibt. Zunächst beschreiben wir die topologisch unipotenten Elemente von  $T(F)$ . Wir bemerken noch, daß  $T^1(F) = \prod_{\nu} T_{\nu}^1(F)$  gilt, wenn die  $T_{\nu}$  die Komponenten von  $T$  sind.

**Proposition 12.6.** Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $x \in \mathcal{O}_F^*$ . Dann ist  $x$  topologisch unipotent genau dann, wenn  $x$  eine 1-Einheit ist, d.h. wenn  $x \equiv 1 \pmod{\pi_F}$  gilt.

**Beweis:** Eine 1-Einheit ist offensichtlich topologisch unipotent, denn für  $y \in \pi_F \mathcal{O}_F$  gilt ja bereits  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + y)^{p^n} = 1$  in  $F$ . Umgekehrt schreiben wir ein beliebiges  $x \in \mathcal{O}_F^*$  in der Form  $x = su$  für einen geeigneten Teichmüllerrepräsentanten  $s$  und eine 1-Einheit  $u$ . Da die Ordnung von  $s$  offensichtlich teilerfremd zu  $p$  ist, ist obige Darstellung von  $x$  die topologische Jordanzerlegung von  $x$ . Insbesondere ist  $x$  genau dann topologisch unipotent, wenn  $s = 1$  gilt.  $\square$

Wir arbeiten im ganzen Abschnitt mit der algebraischen Beschreibung der Tori aus Kapitel 10, d.h.

$$T(F) \subset \mathcal{O}_F[X]/\mu$$

für ein geeignetes irreduzibles Polynom  $\mu \in \mathcal{O}_F[X]$ . Ohne Einschränkung sei  $T$  in diesem Abschnitt schon eine Komponente des Torus. Für die Existenzfrage haben wir grundsätzlich zwei verschiedene Situationen zu betrachten:  $T(F)$  ist durch eine oder durch zwei Normgleichungen beschrieben. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Fall einer Normgleichung, d.h. den Wurzelsystemen vom Typ  $A_n, B_n, C_n$  und  $D_n$  sowie teilweise  $E_6$ .

**Proposition 12.7.** Sei  $E'$  ein  $p$ -adischer Körper und  $E/E'$  eine rein zahm verzweigte Erweiterung. Dann existiert zu jedem  $b \in \mathfrak{p}_E$  ein  $a \in \mathcal{O}_{E'}$  mit  $N_{E/E'}(a + b) = 1$  und  $a \equiv 1 \pmod{\pi_{E'}}$ .

**Beweis:** Sei  $\bar{F}$  ein algebraischer Abschluß von  $E$  und  $N$  das Polynom

$$N(X) = \prod_{\sigma \in \text{Hom}_{E'}(E, \bar{F})} (X + \sigma(b)).$$

$N$  hat Koeffizienten in  $\mathcal{O}_{E'}$ , und für alle  $x \in E'$  gilt  $N(x) = N_{E/E'}(x + b)$ . Wegen  $b \in \mathfrak{p}_E$  verschwinden alle bis auf den höchsten Koeffizienten von  $N(X)$  modulo  $\pi_{E'}$ , d.h. für die Reduktion  $\bar{N}$  von  $N$  modulo  $\pi_{E'}$  gilt

$$\bar{N}(X) = X^{[E:E']} \in (\mathcal{O}_{E'}/\mathfrak{f}\mathfrak{p}_{E'})[X].$$



Aufgrund der zahmen Verzweigung ist das Polynom  $\bar{N}(X) - 1$  separabel über dem Restklassenkörper  $\mathcal{O}_{E'}/\mathfrak{p}_{E'}$  von  $E'$ . Nach Hensels Lemma liftet die einfache Nullstelle 1 von  $\bar{N}(X) - 1$  zu einer Nullstelle  $a \in \mathcal{O}_{E'}$  von  $N(X) - 1$  mit  $a \equiv 1 \pmod{\pi_{E'}}$ . Für dieses  $a$  gilt dann  $N_{E/E'}(a + b) = N(a) = 1$ .  $\square$

**Korollar 12.8.** *Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $\mu = X^n - \pi_F \in F[X]$  für ein Uniformisierendes  $\pi_F$  von  $F$ .  $E := F[X]/\mu$  sei zahm verzweigt und  $E' \neq E$  ein beliebiger Zwischenkörper  $E/E'/F$ . Dann existiert ein Element  $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathcal{O}_F[X]$  mit den folgenden Eigenschaften:*

$$(i) \quad v(a_1) = 0$$

$$(ii) \quad a_0 \text{ ist eine 1-Einheit, d.h. } a_0 \equiv 1 \pmod{\pi_F}$$

$$(iii) \quad N_{E/E'}([P]) = 1$$

**Beweis:** Das Element  $[X] \in E$  ist ein Uniformisierendes in  $E$ . Wir wenden Proposition 12.7 an auf die Erweiterung  $E/E'$  und das Element  $b = [X]$  und erhalten ein Element  $a \in E'$  mit  $N_{E/E'}(a + b) = 1$  und  $a \equiv 1 \pmod{\pi_{E'}}$ . Schreibt man  $a = [P]$  für ein Polynom  $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i X^i \in \mathcal{O}_F[X]$ , so folgt aus  $a \equiv 1 \pmod{\pi_{E'}}$  direkt  $c_0 \equiv 1 \pmod{\pi_F}$ . Wegen  $E' \neq E$  ist weiter  $c_1 = 0$ . Das Element  $a + b$  hat also die gewünschten Eigenschaften.  $\square$

Wir kommen nun zu dem Fall, daß  $T(F)$  durch zwei Normgleichungen beschrieben wird. Dies betrifft die Wurzelsysteme vom Typ  $G_2, F_4$  und  $E_6$ . In allen Fällen handelt es sich um eine Normgleichung über einem Zwischenkörper von Index 2 und eine über einem Zwischenkörper von Index 3. Wir werden auch nur diese spezielle Situation behandeln. Der entscheidende Fall ist die Situation des Wurzelsystems vom Typ  $G_2$ .

**Proposition 12.9.** *Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $\mu(X) = X^6 - \pi_F \in F[X]$  für ein Uniformisierendes  $\pi_F$  von  $F$ . Seien weiter  $E := F[X]/\mu \cong F([X])$ ,  $E_2 := F([X]^2)$  und  $E_3 = F([X]^3)$ . Die Erweiterung  $E/F$  sei rein zahm verzweigt. Dann existiert zu  $a \in \mathcal{O}_F^*$  ein Element  $P(X) = \sum_{i=0}^5 a_i X^i \in \mathcal{O}_E[X]$  mit den folgenden Eigenschaften:*

$$(i) \quad a_1 = a.$$

$$(ii) \quad a_0 \equiv 1 \pmod{\pi_F}$$

$$(iii) \quad N_{E/E_2}([P]) = N_{E/E_3}([P]) = 1$$

**Beweis:** Wir betrachten zunächst den Fall, daß  $E/F$  galoissch ist, das heißt  $F$  enthalte eine primitive sechste Einheitswurzel  $\zeta$ . Wegen der reinen Verzweigung von  $E/F$  ist  $\pi_E = [X]$  ein Uniformisierendes in  $E$ . Die Galoisgruppe ist zyklisch von Ordnung 6, und der Erzeuger  $\sigma$  operiert durch  $\sigma(\pi_E) = \zeta\pi_E$ . Sei nun  $y = b_0 + b_1\pi_E + \dots + b_5\pi_E^5 \in \mathcal{O}_E$  beliebig und setze  $x = \frac{\sigma(y)}{\sigma^{-1}(y)}$ . Nach Konstruktion gilt dann  $N_{E/E_3}(x) = 1$ . Die Bedingung  $N_{E/E_2}(x) = 1$  ist jetzt äquivalent zu

$$1 = \frac{\sigma(y)}{\sigma^{-1}(y)} \cdot \sigma^3 \left( \frac{\sigma(y)}{\sigma^{-1}(y)} \right) = \frac{(\sum b_i (\zeta\pi_E)^i) (\sum b_i (-\zeta\pi_E)^i)}{(\sum b_i (\zeta^{-1}\pi_E)^i) (\sum b_i (-\zeta^{-1}\pi_E)^i)}.$$

Man beachte dabei, daß  $\sigma^3(\pi_E) = -\pi_E$  gilt. Alle auftretenden Summen laufen von 0 bis 5. Nach Multiplikation mit dem Nenner erhalten wir die Gleichung

$$(b_0 + b_2\zeta^2\pi_E^2 + b_4\zeta^4\pi_E^4)^2 - (b_1\zeta\pi_E + b_3\zeta^3\pi_E^3 + b_5\zeta^5\pi_E^5)^2 = \\ (b_0 + b_2\zeta^{-2}\pi_E^2 + b_4\zeta^{-4}\pi_E^4)^2 - (b_1\zeta^{-1}\pi_E + b_3\zeta^{-3}\pi_E^3 + b_5\zeta^{-5}\pi_E^5)^2.$$

Man beachte hier, daß Zähler und Nenner Normen mit Werten im Zwischenkörper  $E_2 = F(\pi_E^2)$  sind, also nur gerade Potenzen von  $\pi_E$  auftreten können. Wir vergleichen die Koeffizienten der Potenzen

$\pi_E^0, \pi_E^2, \pi_E^4$ . Die Koeffizienten von  $\pi_E^0$  auf beiden Seiten stimmen überein. Aus dem Vergleich der Koeffizienten von  $\pi_E^2$  und  $\pi_E^4$  erhalten wir unter Ausnutzung der Identitäten  $\pi_E^6 = \pi_F$  und  $\zeta^6 = 1$  die Gleichungen

$$\begin{aligned}(\zeta^2 - \zeta^{-2})(2b_0b_2 + b_4^2\pi_F - b_1^2 - 2b_3b_5\pi_F) &= 0 \\(\zeta^2 - \zeta^{-2})(2b_0b_4 + b_2^2 - 2b_1b_3 - b_5^2\pi_F) &= 0\end{aligned}$$

Wegen  $\zeta^2 \neq \zeta^{-2}$  sind diese äquivalent zum Verschwinden der beiden anderen Faktoren. Wir lassen für  $b_1$  ein beliebiges Element aus  $\mathcal{O}_E$  zu und setzen  $b_0 = 1$  und  $b_4 = b_5 = 0$ . Das verbleibende Gleichungssystem hat die Form

$$\begin{aligned}2b_2 &= b_1^2 \\b_2^2 &= 2b_1b_3\end{aligned}$$

und ist offensichtlich lösbar mit  $b_2 = b_1^2/2$  und  $b_3 = b_2^2/2b_1 = b_1^3/8$ . Für  $y = 1 + b_1\pi_E + b_1^2/2\pi_E^2 + b_1^3/8\pi_E^3$  gilt also für  $x = \frac{\sigma(y)}{\sigma^{-1}(y)}$   $N_{E/E_2}(x) = N_{E/E_3}(x) = 1$ . In der Darstellung  $x = a_0 + a_1\pi_E + \dots + a_5\pi_E^5 \in \mathcal{O}_E$  gilt dann  $a_1 = b_1(\zeta - \zeta^{-1}) + c$  für ein Element  $c \in \pi_E\mathcal{O}_E$ . Wegen der zahmen Verzweigung von  $E/F$  ist  $p \neq 3$  und daher  $\zeta - \zeta^{-1}$  eine Einheit. Hat also  $b_1$  Bewertung 0, so gilt dies auch für  $a_1$ . Der konstante Koeffizient  $a_0$  ist klarerweise eine 1-Einheit in  $\mathcal{O}_F$ .

Im allgemeinen Fall seien  $F', E', E'_2, E'_3$  die Körper, die man aus  $F, E, E_2, E_3$  durch Adjungieren einer primitiven sechsten Einheitswurzel  $\zeta$  erhält. Die jeweiligen Erweiterungen  $K'/K$  sind unverzweigt, so daß man  $\pi_{K'} = \pi_K$  hat für alle beteiligten Körper.  $E'/F'$  ist galoissch mit zyklischer Galoisgruppe  $\langle \sigma \rangle$  von Ordnung 6 und  $E'/E$  ist galoissch mit zyklischer Galoisgruppe  $\langle \tau \rangle$  von Ordnung 2. Es gilt  $\sigma(\pi_E) = \zeta\pi_E$  und  $\sigma|_{F'} = id$  sowie  $\tau(\zeta) = \zeta^{-1}$  und  $\tau|_E = id$ . Nach obiger Überlegung erfüllt das Element  $x = \frac{\sigma(y)}{\sigma^{-1}(y)}$  für geeignetes  $y = b_0 + b_1\pi_E + \dots + b_5\pi_E^5 \in \mathcal{O}_{E'}$  mit beliebig gewähltem Koeffizienten  $b_1 \in \mathcal{O}_{F'}^*$  die beiden Normgleichungen  $N_{E'/E'_2}(x) = N_{E'/E'_3}(x) = 1$  und hat in der Darstellung  $x = a_0 + a_1\pi_E + \dots + a_5\pi_E^5$  linearen Koeffizienten  $a_1 = b_1(\zeta - \zeta^{-1}) + c$  mit  $c \in \pi_F\mathcal{O}_{F'}$ . Dabei sind alle auftretenden Koeffizienten  $a_i, b_i$  aus  $\mathcal{O}_{F'}$ . Das Element  $z = \tau(x)x = N_{E'/E}(x)$  liegt in  $E$  und erfüllt  $N_{E/E_2}(z) = N_{E/E_3}(z) = 1$ : Es ist

$$N_{E/E_2}(z) = N_{E/E_2} N_{E'/E}(x) = N_{E'/E_2}(x) = N_{E_2'/E_2} N_{E'/E_2'}(x)$$

und  $N_{E'/E_2'}(x) = 1$ . Dieselbe Überlegung gilt für  $E_3$ . Der lineare Koeffizient von  $z$  in der Darstellung  $z = \gamma_0 + \gamma_1\pi_E + \dots + \gamma_5\pi_E^5$  hat die Gestalt  $\gamma_1 = a_1 + \tau(a_1) + c'$  für ein  $c' \in \pi_F\mathcal{O}_F$ . Mit  $a_1 = b_1(\zeta - \zeta^{-1}) + c$  erhält man also

$$\gamma_1 = a_1 + \tau(a_1) + c' = (\zeta - \zeta^{-1})(b_1 - \tau(b_1)) + c''$$

für ein  $c'' \in \pi_F\mathcal{O}_F$ . Das Element  $b_1 \in \mathcal{O}_{F'}$  läßt sich schreiben in der Form  $b_1 = \alpha + \beta\zeta$  für ganzzahlige Koeffizienten  $\alpha, \beta$  in  $F$ , und wir erhalten  $b_1 - \tau(b_1) = \beta(\zeta - \zeta^{-1})$ . Wie schon gesehen ist  $(\zeta - \zeta^{-1})$  eine Einheit, so daß die Bewertung von  $(\zeta - \zeta^{-1})(b_1 - \tau(b_1)) = (\zeta - \zeta^{-1})^2\beta$  dieselbe ist wie die von  $\beta$  und mit der Bewertung von  $\gamma_1$  übereinstimmt, falls  $\beta$  eine Einheit ist. Wir wählen also  $b_1 = \alpha + \beta\zeta \in \mathcal{O}_{F'}^*$  so, daß  $\beta$  eine Einheit in  $\mathcal{O}_F^*$  ist und erhalten dann ein  $z \in \mathcal{O}_E$ , das die Normgleichungen  $N_{E/E_2}(z) = N_{E/E_3}(z) = 1$  erfüllt und in der Darstellung  $z = \sum_{i=0}^5 a_i\pi_E^i$  eine Einheit als linearen Koeffizienten hat. Der konstante Koeffizient  $\gamma_0$  ist klarerweise wieder eine 1-Einheit.  $\square$

**Korollar 12.10.** Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $\mu(X) = X^n - \pi_F \in F[X]$  für ein Uniformisierendes  $\pi_F$  von  $F$ . Es gelte  $n \equiv 0 \pmod{6}$ . Seien weiter  $E := F[X]/\mu \cong F([X])$ ,  $E_2 := F([X]^2)$  und  $E_3 = F([X]^3)$ . Die Erweiterung  $E/F$  sei rein zahm verzweigt. Dann existiert ein Element  $P(X) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathcal{O}_E[X]$  mit den folgenden Eigenschaften:

(i)  $v_F(a_1) = 0$ .

$$(ii) \ a_0 \equiv 1 \pmod{\pi_F}$$

$$(iii) \ N_{E/E_2}([P]) = N_{E/E_3}([P]) = 1$$

**Beweis:** Nach Proposition 12.9 existiert ein Element  $\sum_{i=0}^5 b_i [X]^i \in \mathcal{O}_E$  mit Koeffizienten  $b_i \in \mathcal{O}_{F([X]^6)}$  und  $b_1 \equiv b_0 \equiv 1 \pmod{[X]^6}$ . Schreibt man  $b_i$  in der Form  $\sum_{j=0}^{(n/6)-1} c_j^i [X]^{6j}$  mit Koeffizienten  $c_j^i \in \mathcal{O}_F$ , so folgt sofort  $c_0^0 \equiv c_1^0 \equiv 1 \pmod{[X]}$ . Wir setzen

$$P(X) := \sum_{\substack{i=0, \dots, 5 \\ j=0, \dots, (n/6)-1}}^{n-1} c_j^i X^{6j+i}.$$

Nun gilt aber

$$\sum_{\substack{i=0, \dots, 5 \\ j=0, \dots, (n/6)-1}}^{n-1} c_j^i [X]^{6j+i} = \sum_{i=0}^5 \sum_{j=0}^{(n/6)-1} c_j^i [X]^{i+j} = \sum_{i=0}^5 b_i [X]^i.$$

Der konstante (bzw. lineare) Koeffizient von  $P$  ist gerade  $c_0^0$  (bzw.  $c_1^0$ ). Die Normbedingungen gelten wegen  $[P] = \sum_{i=0}^5 b_i [X]^i$ .  $\square$

Wir haben jetzt die Existenz bestimmter Elemente in  $T^1(F)$  nachgewiesen. Relevant wird jedoch im Hinblick auf die Fixpunktbestimmung und genauer Proposition 13.5 das Bild solcher Elemente in den Algebren sein, auf denen die Abbildung  $\Phi_{v,E}$  im Kapitel 10 erklärt ist. Die Algebren, mit denen in den Aussagen dieses Abschnitts gearbeitet wurden, sind die Algebren, die den Torus  $T = T_\mu$  algebraisch beschreiben, also die von den Radikalfaktoren des Polynoms  $\mu$  erzeugten Algebren. Besteht  $\mu$  nur aus einem Radikalfaktor, ist die Situation daher vollständig geklärt. Sonst müssen wir den Effekt der Abbildungen  $\Theta$  und  $\tau$  aus Kapitel 10 auf Elemente aus  $T^1(F)$  untersuchen.

Seien also  $\mu_1, \dots, \mu_k$  paarweise teilerfremde Polynome der Form  $X^l - D_i$  deselben Grades  $l \equiv 0 \pmod{3}$  in  $F[X]$  mit  $v(D_i) = 1$  und  $\mu = \prod_i \mu_i$ . Seien  $\mathfrak{A}_i$  die Algebra  $\mathfrak{A}_i = F[X]/\mu_i$  und  $\mathfrak{A} = F[X]/\mu$ .  $\tau$  sei der kanonische Isomorphismus  $\bigoplus_i \mathfrak{A}_i \rightarrow \mathfrak{A}$ . Schließlich bezeichne  $\zeta$  eine primitive Einheitswurzel der Ordnung  $l$  und  $\nu = l/3$ . Eine Inspektion der Abschnitte 10.1-10.10 zeigt, daß alle Abbildungen  $\Theta_j : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_j$  für  $j = 2, \dots, k$  von Abbildungen  $E[X] \rightarrow E[X]$  der Form

$$P(X) \mapsto P(\zeta^{a+\nu} \theta_j^{-1} X) P(\zeta^{a+2\nu} \theta_j^{-1} X) P(\zeta^{b+\nu} \theta_j^{-1} X) P(\zeta^{b+2\nu} \theta_j^{-1} X)$$

herkommen für  $\theta_j = \frac{D_j}{D_1} \in \mathcal{O}_F^*$  und Lösungen  $\zeta^a, \zeta^b$  der Gleichung  $\theta_j + X + Y = 0$ . Wir bezeichnen obige Abbildung  $E[X] \rightarrow E[X]$ , die  $\Theta_j : \mathfrak{A}_1 \rightarrow \mathfrak{A}_j$  induziert, mit  $\Theta_j^X$ . Wir setzen noch  $\Theta_1 = \text{id}$ .

**Lemma 12.11.** *Seien alle Bezeichnungen wie gerade beschrieben und  $P \in \mathcal{O}_F[X]$  ein Polynom, dessen Grad kleiner als  $l$  ist und dessen konstanter und linearer Koeffizient jeweils Einheiten sind. Dann hat  $\Theta_j^X(P)$  ganzzahlige Koeffizienten und Einheiten als konstanten und linearen Koeffizienten. Ist der konstante Koeffizient von  $P$  eine 1-Einheit, so auch der konstante Koeffizient von  $\Theta_j^X(P)$ . Insbesondere existiert ein Repräsentant  $Q$  in  $\mathcal{O}_F[X]$  von  $\Theta_j([P])$  vom Grad  $< l$ , dessen konstanter und linearer Koeffizient Einheiten sind. Ist der konstante Koeffizient von  $P$  eine 1-Einheit, so auch der konstante Koeffizient von  $Q$ .*

**Beweis:** Sei  $P = \sum_i p_i X^i$  und  $i < l$ . Für den konstanten Koeffizienten  $q_0$  von  $\Theta_j^X(P)$  gilt  $q_0 = p_0^4$ . Für den linearen Koeffizienten  $q_1$  von  $\Theta_j^X(P)$  gilt

$$\begin{aligned} q_1 &= p_0^3 p_1 \theta_j^{-1} \left( \zeta^{a+\nu} + \zeta^{a+2\nu} + \zeta^{b+\nu} + \zeta^{b+2\nu} \right) \\ &= p_0^3 p_1 \theta_j^{-1} (-\zeta^a - \zeta^b) \\ &= p_0^3 p_1. \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung geht ein, daß  $\theta_j + \zeta^a + \zeta^b = 0$  gilt. Nach Voraussetzung sind  $p_0$  und  $p_1$  Einheiten. Einen Repräsentanten  $Q$  mit den gewünschten Eigenschaften erhält man, indem man in  $\Theta_j^X(P)$  alle Potenzen  $X^i$  für  $i \geq l$  vermöge der Vorschrift  $X^l = D_j$  ersetzt. Wegen  $v(D_j) = 1 > 0$  stimmen die Bewertungen von konstantem und linearem Koeffizienten von  $Q$  mit den jeweiligen von  $\Theta_j^X(P)$  überein.  $\square$

**Definition 12.12.** Seien  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $f_1, \dots, f_l$  paarweise teilerfremde Polynome in  $\mathcal{O}_F[X]$ .  $p$  heißt gut bezüglich  $(\mu_1, \dots, \mu_l)$ , wenn es Polynome  $c_i \in \mathcal{O}_F[X]$  gibt mit  $\sum_{i=1}^l c_i \prod_{j \neq i} f_j = 1$ . Der Isomorphismus  $\bigoplus_i E[X]/f_i \rightarrow E[X]/f$  für eine  $F$ -Algebra  $E$  heißt dann ganzzahlig. Ist  $T$  einer der Tori, die in Kapitel 10 beschrieben sind, so heißt  $p$  gut bezüglich  $T$ , wenn  $p$  gut ist bezüglich aller Radikalfaktoren der auftretenden Polynome  $\mu$ .

**Bemerkung 12.13.** Offensichtlich sind fast alle Primzahlen hinreichend gut. Eine explizite Beschreibung von  $\tau$  in den entsprechenden Abschnitten in Kapitel 10 zeigt z.B., daß für die Coxeterklasse vom Typ  $F_4$  bis auf die Primzahl 13 alle Primzahlen gut sind bezüglich der beiden Faktoren von  $X^{24} + 270DX^{12} - 27D^2$ .

**Proposition 12.14.** Seien alle Bezeichnungen wie oben beschrieben und  $P \in \mathcal{O}_F[X]$  ein Polynom, dessen Grad kleiner als  $l$  ist und dessen konstanter und linearer Koeffizient jeweils Einheiten sind. Die Charakteristik des Restklassenkörpers von  $F$  sei gut bezüglich  $\mu_1, \dots, \mu_l$  und  $\tau : \bigoplus_i E[X]/\mu_i \rightarrow E[X]/\mu$  ein ganzzahliger Isomorphismus. Sei  $Q$  in  $\mathcal{O}_F[X]$  ein Repräsentant von  $\tau(([\theta_j(P)])_j)$ . Dann hat auch  $Q$  Einheiten als konstanten und linearen Koeffizienten. Ist der konstante Koeffizient von  $P$  eine 1-Einheit, so auch der konstante Koeffizient von  $Q$ .

**Beweis:** Sei  $Q \in \mathcal{O}_F[X]$  mit  $Q \equiv \theta_j(P) \pmod{\mu_j}$  für alle  $j$ , d.h. es gilt  $Q = \tau(([\theta_j(P)])_j)$ . Schreibt man  $\theta_j(P)$  bzw.  $Q$  in der Form  $\theta_j(P) = \sum_{i=0}^{l-1} p_{i,j} X^i$  und  $Q = \sum_{i=0}^{\infty} q_i X^i$ , so folgt wegen der speziellen Gestalt von  $\mu_j$

$$p_{i,j} = q_i + D_j \sum_{\nu=1}^{\infty} q_{\nu j}.$$

Nach Lemma 12.11 sind  $p_{0,j}$  und  $p_{1,j}$  eine Einheit, also auch  $q_0$  und  $q_1$  wegen  $v(D_j) > 0$  und  $v(q_i) \geq 0$ .  $\square$

### 12.3 $\mathcal{O}$ -Struktur auf $G$ und $\mathfrak{g}$

Ein wichtiger Grund für unsere Einschränkung auf die topologisch unipotenten Elemente in  $T$  besteht wie in Abschnitt 2.4 erläutert darin, daß wir für die Bestimmung der Fixpunkte mit Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$  arbeiten können. Im Kapitel 11 ist beschrieben, daß der punktweise Stabilator einer beliebigen Kammer beschrieben werden kann durch die  $\mathcal{O}$ -wertigen Punkte eines geeigneten affinen Gruppenschemas.

Sei  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe mit maximalem spaltenden Torus  $\mathbb{T}$ . Sei  $x$  ein spezieller Punkt im zu  $\mathbb{T}$  assoziierten Apartment  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{B}(G, F)$  und  $\mathcal{G}_x$  das glatte affine Gruppenschema über  $\mathcal{O} = \mathcal{O}_F$  aus Abschnitt 11.3 mit  $G(F)^x = \mathcal{G}_x(\mathcal{O})$ , dessen generische Faser  $\mathcal{G}_{x,F}$  gerade  $G$  ist. Da  $G$  spaltet und  $x$  speziell ist, ist  $\mathcal{G}_x$  das Chevalley Gruppenschema mit generischer Faser  $G$ . Die Reduktion  $\bar{\mathcal{G}}_x$  modulo  $\pi = \pi_F$  von  $\mathcal{G}_x$  ist eine lineare algebraische Gruppe über dem Restklassenkörper  $\kappa$  von  $F$ . Das spaltende affine Gruppenschema mit generischer Faser  $\mathbb{T}$  ist ein abgeschlossenes Unterschema von  $\mathcal{G}_x$  und seine Reduktion modulo  $\pi$  ist ein maximaler spaltender Torus  $\bar{\mathbb{T}}$  in  $\bar{\mathcal{G}}_x$ . Sei  $\bar{B}$  eine Boreluntergruppe von  $\bar{\mathcal{G}}_x$ , die  $\bar{\mathbb{T}}$  enthält. Das Urbild von  $\bar{B}(\kappa)$  unter dem Reduktionshomomorphismus  $\mathcal{G}_x(\mathcal{O}) \rightarrow \bar{\mathcal{G}}_x(\kappa)$  ist eine Iwahoriuntergruppe  $I_w$  von  $G(F)$  und entspricht einer eindeutigen Kammer  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{B}(G, F)$ , die  $x$  in ihrem Abschluß enthält und im zum Torus  $\mathbb{T}$  gehörenden Apartment  $\mathcal{A}$  von  $\mathcal{B}(G, F)$  liegt.  $\mathcal{C}(\mathcal{A}, I_w)$  heißt *Standardkammer* (*Standardapartment*, *Standardiwahori*) bezüglich der Wahl  $(x, \mathbb{T}, \bar{B})$ .

Seien  $\alpha_0 + m_0, \dots, \alpha_l + m_l$  die eindeutigen affinen Wurzeln bezüglich  $\mathcal{A}$ , so daß die Wände von  $\mathcal{C}$  gerade die Hyperebenen  $\partial A_{\alpha_i + m_i}$  sind und  $\mathcal{C}$  im Halbartement  $A_{\alpha_i + m_i}$  liegt. Wir identifizieren  $\mathcal{A}$  mit dem Vektorraum  $X_* \otimes \mathbb{R}$ , indem wir den Punkt  $x$  als Nullpunkt wählen. Daher sind alle  $m_i = 0$  für  $i = 1, \dots, l$ , und da  $x$  speziell ist, bilden die Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  ein System einfacher Wurzeln für  $\Phi$ . Für die affine Wurzel  $\alpha_0 + m_0$  gilt dann  $\alpha_0 + m_0 = -\alpha^+ + 1$ , wenn  $\alpha^+$  die positive Wurzel maximaler Höhe bezüglich  $\Delta := \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  ist. Die bezüglich  $\Delta$  positiven Wurzeln sind dann gerade die Wurzeln  $\alpha$ , für die die Reduktion der  $\mathcal{O}$ -rationalen Punkte  $U_\alpha(\mathcal{O})$  modulo  $\pi$  in  $\bar{B}(\kappa)$  liegt.

Wir betrachten als Beispiel die treuen Darstellungen aus Abschnitt 6.6, mit deren Hilfe wir  $G$  als Untergruppe einer geeigneten  $GL(n, F)$  auffassen können. Da die affinen Gruppenschemata, die in Abschnitt 6.6 eingeführt wurden, die Chevalley-Schemata sind, ist die Untergruppe  $G_0 := G \cap GL(n, \mathcal{O})$  eine maximal kompakte Untergruppe von  $G$  und Stabilisator eines speziellen Punktes  $x_0 \in \mathcal{B}(G, F)$ .  $\mathbb{T}_0$  sei der Torus der Diagonalmatrizen in  $G$ . In der Reduktion  $\bar{G}_0$  modulo  $\pi$  von  $G_0$  wählen wir die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen  $\bar{B}_0$  als Boreluntergruppe, die  $\bar{\mathbb{T}}_0$  enthält. Das Urbild von  $\bar{B}_0(\kappa)$  in  $G_0$  unter dem Reduktionshomorphismus ist die Gruppe  $\text{Iw}_0(F)$  der Matrizen in  $G_0$ , die obere Dreiecksmatrizen sind modulo  $\pi$ . Die bezüglich  $\bar{B}_0$  positiven Wurzeln sind dann genau die Wurzeln, deren Wurzelräume obere Dreiecksmatrizen sind, und für jede Wurzel  $\alpha$  gilt  $U_\alpha(\mathcal{O}) = U_\alpha \cap G_0 = U_\alpha \cap GL(n, \mathcal{O})$ .

Das in Abschnitt 6.6 angegebene System einfacher Wurzeln  $\Delta$  stimmt mit dem System einfacher Wurzeln überein, das durch die spezielle Wahl der Boreluntergruppe  $\bar{B}$  der oberen Dreiecksmatrizen ausgezeichnet ist. Wir können also nach dieser Wahl die Notationen aus [BFW] für das Wurzelsystem  $\Phi$  übernehmen. Ab sofort fixieren wir diese  $\mathcal{O}_F$ -Struktur auf  $G$ , d.h. es bezeichnen  $\mathcal{C}, \mathcal{A}, \text{Iw}$  die bezüglich der Wahl  $(x_0, \mathbb{T}_0, \bar{B}_0)$  definierten Objekte. Es gilt dann  $U_\alpha^{\mathcal{C}}(F) = U_\alpha(\mathcal{O})$  für alle Wurzeln  $\alpha$  aus  $\Delta$  und  $U_{-\alpha^+, 1}^{\mathcal{C}}(F) = U_\alpha(\pi\mathcal{O})$ . Schließlich bezeichne  $\mathfrak{w} = \mathfrak{w}(\mathcal{C})$  die  $\mathcal{O}_F$ -Algebra, die aus den Elementen von  $\mathfrak{g}(\mathcal{O})$  besteht, die obere Dreiecksmatrizen sind modulo  $\pi$ .

**Definition 12.15.** Sei  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende lineare algebraische Gruppe mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$ . Sei  $\alpha$  eine Wurzel von  $G$ . Ein Element  $x_\alpha$  in  $\mathfrak{u}_\alpha(\mathcal{O})$  heißt ganzzahliger Basisvektor von  $\mathfrak{u}_\alpha(F)$ , wenn  $\pi^{-1}x_\alpha \notin \mathfrak{u}_\alpha(\mathcal{O})$  gilt.

**Bemerkung 12.16.** Ein ganzzahliger Basisvektor  $x_\alpha$  von  $\mathfrak{u}_\alpha(F)$  ist eindeutig bestimmt bis auf Multiplikation mit  $\mathcal{O}^*$ , und es gilt  $\mathfrak{u}_\alpha(\mathcal{O}) = \mathcal{O}x_\alpha$ . Sei  $\varepsilon_\alpha : \mathbb{G}_a(F) \rightarrow U_\alpha(F)$  die durch  $\varepsilon_\alpha(z) = \exp(zx_\alpha)$  definierte Abbildung. Dann gilt  $\varepsilon_\alpha(\pi^i\mathcal{O}) = U_\alpha(\pi^i\mathcal{O})$ .

## 12.4 Operation von $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$ auf $u_\zeta(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{w}$

Die  $\mathcal{O}$ -Struktur auf den Wurzelräumen  $\mathfrak{u}_\alpha$  induziert eine  $\mathcal{O}$ -Struktur auf  $u_\zeta = \bigoplus_{\alpha(w_\Delta)=\zeta} \mathfrak{u}_\alpha$ . Offensichtlich operieren die  $\mathcal{O}$ -wertigen Punkte von  $Z_G^\circ(w_\Delta)$  auf  $u_\zeta(\mathcal{O})$ . In der Tat operiert  $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$  sogar auf  $u_\zeta(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{w}$ . Diese Operation ist Gegenstand dieses Abschnitts. Daraus resultiert nämlich eine Operation von  $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$  auf den Kammern, die von  $T(F)$  punktweise fixiert werden und den baryzentrischen Vektor  $w_A$  enthalten. Im ganzen Abschnitt sei als positives System von Wurzeln das durch  $\text{Iw}$  bzw.  $(\mathcal{C})$  bestimmte System gewählt (siehe Abschnitt 12.3). Sei außerdem  $\mathfrak{w}_\zeta := u_\zeta(\mathcal{O}) \cap \mathfrak{w}$ .

Nach Kapitel 5 ist  $Z_G^\circ(w_\Delta)$  erzeugt von  $\mathbb{T}$  und den  $U_\alpha$  mit  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$ . Nach Definition der  $\mathcal{O}$ -Struktur von  $Z_G^\circ(w_\Delta)$  ist  $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$  dann erzeugt von  $\mathbb{T}(\mathcal{O})$  und den  $U_\alpha(\mathcal{O})$ . Es genügt also zu zeigen, daß  $\mathbb{T}(\mathcal{O})$  und die  $U_\alpha(\mathcal{O})$  mit  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$  den Raum  $\mathfrak{w}_\zeta$  invariant lassen.

**Lemma 12.17.** Seien  $\alpha, \beta \in \Phi$  und  $u_\alpha \in U_\alpha, x_\beta \in \mathfrak{u}_\beta$ . Dann gilt

$$\text{Ad}(u_\alpha)(x_\beta) \subset \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}} \mathfrak{u}_{k\alpha + \beta}$$

**Beweis:** Wir können ohne Einschränkung  $G \subset GL_n$ ,  $\mathfrak{g} \subset \mathcal{M}_n$  annehmen. In dieser Situation ist  $\text{Ad}(g)$  die Konjugation mit  $g$ . Da die Exponentialabbildung  $\exp : \mathfrak{u}_\alpha \rightarrow U_\alpha$  ein (algebraischer) Isomorphismus ist, läßt sich  $u_\alpha$  schreiben als  $u_\alpha = \exp(x_\alpha)$  für ein  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ .  $x_\alpha$  ist nilpotent. Daher gilt

$$\text{Ad}(u_\alpha) = \text{Ad}(\exp(x_\alpha)) = \exp(\text{ad}(x_\alpha))$$

nach [Hum1][2.3]. Die Behauptung folgt jetzt wegen  $\text{ad}(x_\alpha)(x_\beta) = [x_\alpha, x_\beta] \in \mathfrak{u}_{\alpha+\beta}$ , denn wiederholte Anwendung dieser Aussage liefert  $\text{ad}(x_\alpha)^k(x_\beta) \in \mathfrak{u}_{k\alpha+\beta}$  für alle  $k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ .  $\square$

**Proposition 12.18.** *Sei  $w \in W$  primitiv,  $\zeta$  ein Eigenwert von  $w$  und  $\alpha^+ \notin \Phi_1(w_\Delta)$ . Dann operiert  $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$  auf  $\mathfrak{iv}_\zeta$ .*

**Beweis:** Wie bereits gesagt genügt es zu zeigen, daß  $\mathbb{T}(\mathcal{O})$  und die  $U_\alpha(\mathcal{O})$  mit  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$  den Raum  $\mathfrak{iv}_\zeta$  invariant lassen. Für  $\mathbb{T}(\mathcal{O})$  und  $U_\alpha(\mathcal{O})$  mit  $\alpha$  positiv ist das trivial. Sei also  $\alpha$  negativ,  $\alpha(w_\Delta) = 1$  und  $u_\alpha \in U_\alpha(\mathcal{O})$ . Wir wählen für jedes  $\gamma \in \Phi_\zeta(w_\Delta)$  einen ganzzahligen Basisvektor  $x'_\gamma$  von  $\mathfrak{u}_\gamma(F)$  und setzen

$$x_\gamma = \begin{cases} x'_\gamma & \text{falls } \gamma \in \Phi^+ \\ \pi x'_\gamma & \text{falls } \gamma \in \Phi^- \end{cases}$$

Dann hat  $v$  die Form

$$v = \sum_{\gamma(w_\Delta)=\zeta} y_\gamma x_\gamma$$

für geeignete  $y_\gamma \in \mathcal{O}$  wegen  $v \in \mathfrak{iv}(\mathcal{O})$ . Wir zerlegen  $v$  noch bezüglich  $\mathfrak{u}^+ \oplus \mathfrak{u}^-$  in  $v = v^+ + v^-$  mit  $\mathfrak{u}^+ = \bigoplus_{\gamma \in \Phi^+} \mathfrak{u}_\gamma$  und  $\mathfrak{u}^- = \bigoplus_{\gamma \in \Phi^-} \mathfrak{u}_\gamma$ . Wir zeigen: Für eine positive Wurzel  $\beta$  gilt  $\text{Ad}(u_\alpha)(\mathfrak{u}_\beta) \subset \mathfrak{u}^+$ . Dann folgt

$$\text{Ad}(u_\alpha)(v) = \text{Ad}(u_\alpha)(v^+) + \text{Ad}(u_\alpha)(v^-) = \text{Ad}(u_\alpha)(v^+) + \sum_{\gamma \in \Phi^-} y_\gamma \pi \text{Ad}(u_\alpha)(x_\gamma).$$

Wegen  $\text{Ad}(u_\alpha)(x_\gamma) \in \mathfrak{g}(\mathcal{O})$  und  $\text{Ad}(u_\alpha)(v^+) \subset \mathfrak{u}^+$  folgt dann  $\text{Ad}(u_\alpha)(v) \in \mathfrak{iv}$ .

Sei also  $\beta \in \Phi_\zeta$  positiv und  $z_\beta \in \mathfrak{u}_\beta$ . Wir schreiben  $u_\alpha(\mathcal{O})$  wieder in der Form  $\exp(z_\alpha)$  für ein  $z_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ ;  $z_\alpha$  liegt dann schon in  $\mathfrak{u}_\alpha(\mathcal{O})$ . Wegen Lemma 12.17 hat man

$$\text{Ad}(u_\alpha)(z_\beta) = \text{Ad}(\exp(z_\alpha))(z_\beta) \subset \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^{\geq 0}} \mathfrak{u}_{k\alpha+\beta}.$$

Es genügt also  $k\alpha + \beta > 0$  zu zeigen für alle  $k$ . Wegen  $\beta > 0$  ist  $k\alpha + \beta < 0$  nur möglich, wenn in den Darstellungen  $\beta = \sum_{\gamma \in \Delta} m_\gamma$  bzw.  $\alpha = \sum_{\gamma \in \Delta} m'_\gamma$  aus  $m_\gamma \neq 0$  stets  $m'_\gamma \neq 0$  folgt. Nach Proposition 5.3 ist  $\beta$  dann aber wegen  $\alpha^+ \notin \Phi_1(w_\Delta)$  schon eine Linearkombination von Wurzeln aus  $\Phi_1(w_\Delta)$ , also selbst schon in  $\Phi_1(w_\Delta)$ . Dies widerspricht aber  $\beta \in \Phi_\zeta$  wegen  $\zeta \neq 1$ .  $\square$

## 12.5 Der baryzentrische Vektor

Wir kommen in diesem Abschnitt auf den baryzentrischen Vektor  $w_A \in X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  zurück, der in Abschnitt 4.3 für ein primitives Element  $w \in W$  konstruiert wurde. Dabei sind in  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  die affinen Hyperebenen  $H_{\alpha,k} = \{v \in X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} \mid \alpha(v) = k\}$  (für  $\alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}$ ) ausgezeichnet. Die von den Spiegelungen an den  $H_{\alpha,k}$  erzeugte Gruppe  $W_{\text{aff}}$  besitzt als einen Fundamentalbereich den Alkoven  $A$ , der durch die Hyperebenen  $H_{\alpha,0}$  für  $\alpha \in \Delta$  sowie  $H_{\alpha^+,1}$  begrenzt ist.  $\tilde{w}$  ist dann genauer ein Element in  $A$ .

Der baryzentrische Vektor  $w_A$  läßt sich nun als Punkt im affinen Gebäude  $\mathcal{B}(G, F)$  auffassen. Das Standardapartment  $\mathcal{A}$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  stimmt als affiner Raum bereits mit  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  überein. Der oben

beschriebene Alkoven  $A$  läßt sich nun auf folgende Weise mit einer Kammer in  $\mathcal{A}$  identifizieren. Nach Wahl eines geeigneten Nullpunktes in  $\mathcal{A}$  sind die affinen Wurzeln gegeben als  $\alpha + m$  für  $\alpha \in \Phi$  und  $m \in \mathfrak{v}(F)$ . Ist die Bewertung  $\mathfrak{v}$  normiert, d.h. ist  $\mathfrak{v}(F) = \mathbb{Z}$ , so sind die affinen Hyperebenen  $\partial A_{\alpha+m}$  gerade die  $H_{\alpha,k}$  aus der reellen Theorie. Die Kammern in  $\mathcal{A}$  stimmen also mit den offenen Alkoven überein. Der baryzentrische Vektor  $w_A$  liegt also im Abschluß einer Kammer in  $\mathcal{B}(G, F)$ .

Legt man nun ein positives System von Wurzeln bzw. das zugehörige System einfacher Wurzeln  $\Delta$  fest, so entspricht der dazu gehörende Alkoven  $A$  der eindeutig bestimmten Kammer in  $\mathcal{A}$ , die durch die Hyperebenen zu den affinen Wurzeln  $\alpha \in \Delta$  und  $1 - \alpha^+$  begrenzt wird und die in den Halbarapartments  $A_{\alpha+m}$  liegt für alle  $\alpha + m \in \Delta_{\text{aff}} = \Delta \cup \{1 - \alpha^+\}$ . Der zu  $\Delta$  assoziierte Alkoven entspricht also der Standardkammer aus Abschnitt 12.3 zur Wahl  $(x, \mathbb{T}, \bar{B})$ , wenn  $\mathbb{T}$  der maximale spaltende Torus ist, dessen Apartment gerade der affine Raum  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  ist,  $x$  der Nullpunkt in  $X_* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  und  $\bar{B}$  die Boreluntergruppe von  $\mathcal{G}_x$  ist, die dem zu  $\Delta$  assoziierten System positiver Wurzeln entspricht.

**Proposition 12.19.** *Sei  $w \in W$  primitiv,  $w_\Delta$  bzw.  $w_A$  der baryzentrische Punkt bzw. Vektor von  $w$ . Wir fassen  $w_A$  (wie oben beschrieben) als Punkt in der Standardkammer  $\mathcal{C}$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  auf. Sei  $T$  einer der im Kapitel 10 konstruierten Tori. Dann operiert  $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$  transitiv auf der Menge der Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$ , die  $w_A$  enthalten. Alle diese Kammern werden von  $T^1(F)$  punktweise fixiert.*

**Beweis:** Man beachte, daß nach Proposition 8.2 sowie den Ergebnissen aus Abschnitt 9.1  $\alpha^+ \notin \Phi_1(w_\Delta)$  gilt und damit  $w_A$  nicht in der Wand  $1 - \alpha^+$  liegt. Für die Aussage über die Operation (ohne Transitivität) genügt es zu zeigen, daß  $\mathbb{T}(\mathcal{O})$  und die  $U_\alpha(\mathcal{O})$  für  $\alpha \in \Phi_1(w_\Delta)$  den Punkt  $w_A$  fest lassen. Dies ist klar, denn  $\mathbb{T}(\mathcal{O}) = \mathbb{T}(F)_c$  operiert trivial auf  $\mathcal{B}(G, F)$ , und für jede Wurzel  $\alpha \in \Delta(w_\Delta)$  liegt  $w_A$  in  $\partial A_\alpha$  und wird daher von  $U_\alpha(F)$  festgelassen. Da  $\Delta(w_\Delta)$  nach Proposition 5.3 eine Basis von  $\Phi_1(w_\Delta)$  ist, folgt die Behauptung. Die Transitivität folgt aus Korollar 11.11 wegen  ${}^*U_\alpha^{\mathcal{C}}(F) \subset U_{\alpha^+}(\mathcal{O})$ , wenn  $\alpha_+$  die (bezüglich  $\mathcal{C}$ ) positive der beiden Wurzeln  $\pm\alpha$  ist.

Sei  $T$  mit Hilfe von Eigenvektoren  $v_\zeta \in \mathfrak{u}_\zeta$  von  $w_\Delta$  zu den Eigenwerten  $\zeta$  von  $w$  nach  $G$  eingebettet, also  $T = T_{(v_\zeta)}$ . Nach Proposition 12.18 operiert  $Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$  auf  $\mathfrak{iw}_\zeta = \mathfrak{u}_\zeta \cap \mathfrak{iw}$  für jedes  $\zeta$ . Sei  $z \in Z_G^\circ(w_\Delta)(\mathcal{O})$ . Der topologisch unipotente Abteil  $T_{(z, v_\zeta)}^1$  von  $T_{(z, v_\zeta)}$  fixiert dann wegen  $z \cdot v_\zeta \in \mathfrak{iw}$  die Standardkammer punktweise (siehe 13.6), d.h. es gilt  $T_{(z, v_\zeta)}^1 \subset \text{Iw}(\mathcal{C})$ . Nach Definition der Einbettung  $T_v \hookrightarrow G$  gilt  $T_{(z, v_\zeta)} = \text{Int}(z)(T_{(v_\zeta)})$  und damit

$$T_{(v_\zeta)}^1 \subset \text{Int}(z^{-1})\text{Iw}(\mathcal{C}).$$

Also fixiert  $T_{(v_\zeta)}^1$  die Kammer  $z^{-1}\mathcal{C}$  punktweise. □





# Kapitel 13

## Fixpunkte primitiver Tori

Wir können nun endlich die Fixpunkte des topologisch unipotenten Anteils der primitiven Tori aus Kapitel 10 bestimmen. Im ganzen Kapitel sei  $G$  wie immer eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe über dem  $p$ -adischen Körper  $F$  mit Liealgebra  $\mathfrak{g}$ .  $\mathbb{T}$  sei der maximale spaltende Torus von  $G$ , dessen Bild unter den Darstellungen 6.6 der Torus der Diagonalmatrizen in  $G$  ist. Die  $\mathcal{O}$ -Struktur auf  $G$  bzw.  $\mathfrak{g}$  sei wie in Abschnitt 12.3 beschrieben erklärt. Als System einfacher Wurzeln  $\Delta$  wählen wir die eindeutig bestimmte Menge von Wurzeln, so daß das zu  $\Delta$  assoziierte positive System  $\Phi^+$  gerade aus den Wurzeln von  $G$  bezüglich  $\mathbb{T}$  besteht, deren Wurzelgruppen  $U_\alpha$  aus oberen Dreiecksmatrizen bestehen (natürlich wieder unter den Darstellungen 6.6). Zur Beschreibung der Wurzeln benutzen wir die Notationen aus [BFW]; in Abschnitt 6.6 wurde explizit angegeben, wie sämtliche Wahlen zu treffen sind, damit dies funktioniert.

$\mathcal{C}$  bezeichne die in Abschnitt 12.3 beschriebene Standardkammer im affinen Bruhat-Tits Gebäude  $\mathcal{B}(G, F)$ , deren Wände die affinen Hyperebenen  $\Delta \cup \{1 - \alpha^+\}$  sind und deren punktweise Stabilisator in  $G(F)$  gerade die Standardwahoriuntergruppe  $\text{Iw}(\mathcal{C}) = Iw$  ist, die aus allen ganzzahligen Matrizen in  $G(F)$  besteht, die obere Dreiecksmatrizen sind modulo  $\pi$ .

**Definition 13.1.** Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper und  $G$  eine  $F$ -Gruppe. Ein Torus  $T$  in  $G$  heißt (rein) zahm verzweigt, wenn  $T$  über einer (rein) zahm verzweigten Erweiterung von  $F$  zerfällt.

**Bemerkung 13.2.** Für  $D = (D_i) \in (F^*)^k$  mit  $v(D_i) = 1$  ist ein Torus  $T_{\mu, D, w}$  aus Kapitel 10 genau dann (rein) zahm verzweigt, wenn  $p$  teilerfremd zu den Graden der Radikalterme jeder Komponente von  $\mu$  ist.

Wir betrachten in diesem Kapitel ausschließlich den Fall rein zahm verzweigter Tori.

### 13.1 Ein Algorithmus und Berechenbarkeit des Problems

Seien  $C, D$  zwei Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$  und  $g \in G(F)$  mit  $D = gC$ . Dann gilt

$$\text{Iw}(D) = g \text{Iw}(C) g^{-1}.$$

Ist  $H$  eine Teilmenge von  $G(F)$ , so gilt

$$H \subset \text{Iw}(D) \quad \Leftrightarrow \quad g^{-1} H g \subset \text{Iw}(C).$$

$H$  fixiert die Kammer  $D$  also genau dann punktweise, wenn  $g^{-1} H g$  die Kammer  $C$  punktweise fixiert. Da  $G(F)$  transitiv auf der Menge aller Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$  operiert, läßt sich die Frage, ob  $H$  eine beliebige Kammer  $D$  punktweise fixiert, nach dem eben gezeigten anhand einer fest gewählten Referenzkammer  $C$  beantworten.

Wir wählen als Referenzkammer die Standardkammer  $\mathcal{C}$  mit punktwisem Stabilisator  $\text{Iw}(\mathcal{C}) = \text{Iw}$ . Die Menge  $H$  ist in unserem Fall der topologisch unipotente Anteil  $T^1(F)$  eines maximalen primitiven Torus von  $G$ . Aus 13.6 und Korollar 12.4 wissen wir, daß die Fixpunktmenge von  $T^1(F)$  ein zusammenhängender konvexer Kammerkomplex in  $\mathcal{B}(G, F)$  ist, der die Standardkammer  $\mathcal{C}$  enthält. Wir werden nun einen induktiven Algorithmus angeben, der zur Bestimmung dieser Fixpunktmenge von  $T^1(F)$  führt. Die Schlüsselaussage ist die folgende:

**Proposition 13.3.** *Sei  $H$  eine Menge von Automorphismen von  $\mathcal{B}(G, F)$ , die eine Kammer  $\mathcal{C}$  punktwise fixiert und labelerhaltend operiert. Für jede natürliche Zahl bezeichne  $\mathcal{F}_n^H$  die Menge der Kammern, die von  $H$  punktwise fixiert wird und den Galerieabstand  $n$  von  $\mathcal{C}$  hat. Dann gilt  $\mathcal{F}^H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_n^H$ , und jede Kammer aus  $\mathcal{F}_n^H$  ist benachbart zu einer Kammer aus  $\mathcal{F}_{n-1}^H$  für  $n > 0$ .*

**Beweis:** Die Fixpunktmenge  $\mathcal{F}^H$  von  $H$  ist nach Korollar 12.4 ein zusammenhängender konvexer Komplex von Kammern. Eine minimale Galerie zwischen einer Kammer  $D \in \mathcal{F}_n^H$  und  $\mathcal{C}$  liegt also ganz in  $\mathcal{F}^H$ . Die zu  $D$  benachbarte Kammer dieser Galerie liegt dann in  $\mathcal{F}_{n-1}^H$ .  $\square$

Aus Proposition 13.3 können wir folgenden induktiven Algorithmus ableiten, der zur Bestimmung der Fixpunktmenge von  $T^1(F)$  führt. Wie in Proposition 13.3 sei  $\mathcal{F}_n$  die Menge von Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$ , die von  $T^1(F)$  punktwise fixiert werden und den Galerieabstand  $n$  von  $\mathcal{C}$  haben (für jede natürliche Zahl  $n$ ). Für jedes  $n$  führe man folgende Schritte aus:

1. Bestimme alle Kammern, die von  $T^1(F)$  punktwise fixiert werden und zu Kammern aus  $\mathcal{F}_{n-1}$  benachbart sind.
2. Bestimme die Kammern aus Schritt 1, die nicht in  $\bigcup_{m < n} \mathcal{F}_m$  liegen. Diese bilden die Menge  $\mathcal{F}_n$ .

Da  $T$  ein maximaler anisotroper Torus ist, besteht die Fixpunktmenge aus endlich vielen Kammern nach Proposition 12.5. Daher terminiert der Algorithmus.

Der Abschnitt 6.6 ermöglicht eine explizite Beschreibung aller für die Bestimmung der Fixpunkte relevanten Größen, indem er die explizite Beschreibung der Gruppe  $G$ , des maximalen spaltenden Torus  $\mathbb{T}$  und damit der Wurzelgruppen  $U_\alpha$  sowie der zugehörigen Liealgebren als Matrizen bereit stellt. Mit Hilfe der bisher gewonnen Erkenntnisse lassen sich die halbeinfachen Eigenvektoren des baryzentrischen Punktes und damit die primitiven Tori ebenfalls als Matrizen beschreiben. Zusammen mit den in diesem Kapitel formulierten Bedingungen für von  $T^1(F)$  punktwise fixierte Kammern sowie dem oben angegebenen Algorithmus sehen wir, daß die Bestimmung der Fixpunkte von  $T^1(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  mit Hilfe eines Computers durchgeführt werden kann:

**Resultat 13.4.** *Die Bestimmung der Fixpunkte der primitiven Tori im affinen Bruhat-Tits Gebäude läßt sich algorithmisch mit Hilfe eines Computeralgebra-systems lösen.*

## 13.2 Zurückführung auf die Erzeuger von $T$

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem ersten Schritt des Algorithmus 13.1, nämlich der Bestimmung von punktwise fixierten Kammern. Wir werden die Bedingung  $T^1(F) \subset \text{Iw}(\mathcal{C})$  auf die entsprechende Bedingung für die erzeugenden Elemente von  $T^1(F)$  aus  $\mathfrak{g}$  zurückführen und dann im nächsten Abschnitt mit Hilfe von Korollar 11.12 erste strukturelle Aussagen machen können.

**Proposition 13.5.**  *$\text{Iw}$  bezeichne den Unterring von  $\mathcal{M}_n(F)$  derjenigen ganzzahligen Matrizen, die obere Dreiecksmatrizen modulo  $\pi$  sind. Sei  $A$  eine Matrix in  $\mathcal{M}_n(F)$  und  $P \in \mathcal{O}[X]$  ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten. Aus  $A \in \text{Iw}$  folgt dann  $P(A) \in \text{Iw}$ .  $P$  habe nun trivialen konstanten Koeffizienten und eine Einheit als linearen Koeffizienten. Alle Koeffizienten des Minimalpolynoms von  $A$  seien durch  $\pi$  teilbar. Dann folgt aus  $P(A) \in \text{Iw}$  auch  $A \in \text{Iw}$ .*

**Beweis:** Da  $\text{Iw}$  ein Ring ist, folgt aus  $A \in \text{Iw}$  stets  $B := P(A) \in \text{Iw}$ . Umgekehrt existiert wegen der Voraussetzungen für  $P$  eine formale Potenzreihe  $Q \in \mathcal{O}[[Y]]$  mit ganzzahligen Koeffizienten und  $Q(P(X)) = X$ . Falls die Reihe  $Q(B)$  in  $\mathcal{M}_n(F)$  konvergiert, folgt  $A = Q(P(A)) = Q(B)$  und damit die Behauptung, da  $\text{Iw}$  ein Ring ist.

Es bleibt also die Konvergenz von  $Q(B)$  zu zeigen. Das Minimalpolynom  $\mu$  von  $A$  habe Grad  $n$ . Wir zeigen durch Induktion über  $k$ , daß

$$A^{n+k} = b_{k,n-1}A^{n-1} + \dots + b_{k,1}A + b_{k,0}$$

gilt für Koeffizienten  $b_{k,i} \in \mathfrak{p}^{\lfloor \frac{k-i+2n-1}{n} \rfloor}$ . Schreibe dazu  $A^{n+k} = AA^{n+k-1}$  und benutze, daß alle Koeffizienten von  $\mu$  Vielfache von  $\pi$  sind. Eine Teilsumme  $\sum_{j=a}^b q_j B^j$  von  $Q(B)$  ist dann wegen  $B = P(A)$  ein Polynom in  $A$ , das aufgrund der Formel für  $A^{n+k}$  und der Bewertung der entsprechenden Koeffizienten für genügend großes  $a$  nahe bei 0 liegt. Da  $\text{Iw}$  ein abgeschlossener Unterring des vollständigen Ringes  $\mathcal{M}_n(F)$  ist, konvergiert  $Q(B)$  nach dem Cauchy-Kriterium.  $\square$

**Korollar 13.6.** *Der topologisch unipotente Anteil  $T^1(F)$  eines in Kapitel 10 konstruierten rein verzweigten Torus  $T(F)$  fixiert eine Kammer punktweise.*

**Beweis:** Nach Bemerkung 13.2 läßt sich  $T$  nach  $G$  einbetten als  $T = T_v$  für ein geeignetes  $v \in \mathfrak{iv}^k$ . Die Einbettung einer Komponente  $T_v(F) \subset G(F)$  wird durch die Abbildung  $\Phi_{v,F}$  aus Abschnitt 6.1 vermittelt, die gegeben ist durch

$$[P(X)] \mapsto P(v) + p_0(v_0 - 1) + 1 - v_0.$$

Dabei ist  $p_0$  der konstante Koeffizient von  $P$  und  $v_0$  ein Polynom in  $v_v$ .  $P(v_v)$  liegt in  $\text{Iw} = \text{Iw}(\mathcal{C})$  nach Proposition 13.5. Wegen  $[P] \in T_v^1(F)$  ist  $p_0 \equiv 1 \pmod{\pi}$  nach Proposition 12.7 und daher auch  $p_0(v_0 - 1) + 1 - v_0 \in G(\pi\mathcal{O}) \subset \text{Iw} = \text{Iw}(\mathcal{C})$ .  $\square$

**Bemerkung 13.7.** *Sei  $I$  eine Menge von Wurzeln und  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ . Dann liegt  $\sum_{\alpha \in I} x_\alpha$  genau dann in  $\text{Iw}$ , wenn jedes  $x_\alpha$  in  $\text{Iw}$  liegt.*

**Beweis:** Da die  $x_\alpha$  zu paarweise verschiedenen Wurzeln gehören, sind die Positionen, an denen sie (als Elemente aus  $\mathcal{M}_n$ ) von null verschiedene Einträge haben können, ebenfalls verschieden für  $\alpha \neq \beta \in I$ .  $\square$

Die Proposition 13.5 hat eine weitere Konsequenz: Die Bedingung  $T^1(F) \subset \text{Iw}(g\mathcal{C})$  bzw.  $g^{-1}T^1(F)g \subset \text{Iw}(\mathcal{C})$  läßt sich ebenfalls schon an  $g^{-1}vg$  ablesen, wenn  $T = T_v$  gilt.

**Proposition 13.8.** *Seien  $G$  eine der Gruppen aus Abschnitt 6.6 und  $T$  der maximale primitive Torus in  $G$  aus Kapitel 10 mit topologisch unipotentem Anteil  $T^1(F)$ .  $T$  sei rein zahm verzweigt und die Restklassencharakteristik von  $F$  sei gut bezüglich  $T$ .  $\mathcal{C}$  bezeichne wie immer die Standardkammer in  $\mathcal{B}(G, F)$ . Seien  $\underline{v}$  ein geeignetes Element in  $(\mathfrak{iv}(\mathcal{C}))^k$  mit  $T = T_{\underline{v}}$  und  $g \in G(F)$ . Dann fixiert  $T^1(F)$  die Kammer  $g\mathcal{C}$  genau dann punktweise, wenn  $g^{-1}vg \in \mathfrak{iv}(\mathcal{C})$  für alle  $v \in \underline{v}$  gilt.*

**Beweis:** Wegen  $T^1(F) = \prod_{v \in \underline{v}} T_v^1(F)$  gilt  $T^1(F) \subset \text{Iw}(\mathcal{C})$  genau dann, wenn  $T_v^1(F) \subset \text{Iw}(\mathcal{C})$  gilt für alle  $v \in \underline{v}$ . Weiter ist  $g^{-1}T^1(F)g = T_{v^g}^1(F)$  mit  $v^g = g^{-1}vg$ . Für alle  $[Q] \in T^1(F)$  gilt nun  $\Phi_{v^g, F}([Q]) = (Q - q_0)(v^g) + q_0v_0^g + 1 - v_0^g$  und  $q_0v^g + 1 - v_0^g \in \mathfrak{iv}(\mathcal{C})$ . Nach den Aussagen 12.8, 12.10 und 12.14 existiert ein Polynom  $P \in \mathcal{O}[X]$  mit einer Einheit als linearem Koeffizienten (und konstantem Koeffizienten  $p_0 \equiv 1 \pmod{\pi}$ ) und  $[P] \in T^1(F)$ . Das Polynom  $P - p_0$  erfüllt dann die Voraussetzungen aus Proposition 13.5. Insbesondere fixiert  $[P]$  die Kammer  $g\mathcal{C}$  genau dann punktweise, wenn  $g^{-1}vg \in \mathfrak{iv}(\mathcal{C})$  liegt. Da aber  $\Phi_{v^g, F}([Q])$  für alle Elemente  $[Q] \in T^1(F)$  ein Polynom in  $v^g$  ist, muß  $T^1(F)$  schon jede Kammer punktweise fixieren, die von  $[P]$  punktweise fixiert wird (dies folgt aus der trivialen Richtung von Proposition 13.5).  $\square$

**Korollar 13.9.** *Seien  $G$  eine der Gruppen aus Abschnitt 6.6 und  $T$  der maximale primitive Torus in  $G$  aus Kapitel 10 mit topologisch unipotentem Anteil  $T^1(F)$ .  $T$  sei rein zahm verzweigt und die Restklassencharakteristik von  $F$  sei gut bezüglich  $T$ . Dann existieren Elemente  $t \in T^1(F)$ , deren Fixpunktmenge in  $\mathcal{B}(G, F)$  mit der von  $T^1(F)$  übereinstimmt.*

**Korollar 13.10.** *Sei die Situation wie in Proposition 13.8 und  $v$  geschrieben als  $v = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha$  für eine geeignete Menge von Wurzeln  $I$  und geeignete  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$ . Die Bedingung  $g^{-1}vg \in \text{Iw}(\mathcal{C})$  ist genau dann erfüllt, wenn  $g^{-1}x_\alpha g \in \text{Iw}(\mathcal{C})$  gilt für alle  $\alpha \in I$ .*

**Beweis:** Die Aussage folgt aus Proposition 13.8 und Bemerkung 13.7. □

### 13.3 Wurzelkombinatorik

Der Erzeuger  $v$  von  $T = T_v$  hat eine spezielle Gestalt, er ist nämlich eine Summe von nichttrivialen Wurzelvektoren aus  $\mathfrak{u}_\alpha$  für eine bestimmte Teilmenge  $\Phi(v) \subset \Phi_\zeta(w_\Delta)$ , wo  $\zeta$  ein Eigenwert der zu  $T$  gehörenden Klasse in der Weylgruppe  $W$  ist (siehe Proposition 4.11).

**Definition 13.11.** *Sei  $w$  ein primitives Element der Weylgruppe von  $G$  und  $w_\Delta$  der baryzentrische Punkt von  $w$ . Sei weiter  $v$  ein rationaler, halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta$ . Dann liegt  $v$  nach Abschnitt 2.2 in  $\bigoplus_{\alpha \in \Phi_\zeta(w_\Delta)} \mathfrak{u}_\alpha(F)$ , hat also die Form*

$$v = \sum_{\alpha \in \Phi_\zeta(w_\Delta)} x_\alpha$$

für Elemente  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha(F)$ .  $\Phi(v)$  bezeichne nun diejenigen Wurzeln aus  $\Phi_\zeta(w_\Delta)$ , für die  $x_\alpha \neq 0$  ist.

Die nach Proposition 13.8 zur Fixpunktbestimmung von  $T^1(F)$  hinreichende Bedingung  $g^{-1}vg \in \text{Iw}(\mathcal{C})$  läßt sich nun genauer untersuchen, wenn man für  $g \in G(F)$  die Darstellung aus Korollar 11.12 benutzt.

Sei also  $v = \sum_{\alpha \in \Phi(v)} y_\alpha x_\alpha \in \mathfrak{iv}(\mathcal{C})$  mit ganzzahligen Basisvektoren  $x_\alpha$  von  $\mathfrak{u}_\alpha$  und  $v(y_\alpha) = 0$  für  $\alpha > 0$  und  $v(y_\alpha) = 1$  für  $\alpha < 0$ . Sei  $g \in G(F)$  geschrieben als  $g = u_1 \cdots u_l r_{\alpha_l + m_l} \cdots r_{\alpha_1 + m_1}$ , wenn  $g\mathcal{C}$  und  $\mathcal{C}$  durch eine minimale Galerie vom Typ  $(\alpha_l + m_l, \dots, \alpha_1 + m_1)$  verbunden sind. Die  $r_{\alpha_i + m_i}$  bezeichnen dabei die Spiegelungen an den Hyperebenen  $\partial A_{\alpha_i + m_i}$ , und die  $u_i$  sind aus  ${}^*U_{\alpha_i, m_i}^{\mathcal{C}}$ . Mit  $s_{\alpha_i}$  bezeichnen wir das Bild von  $r_{\alpha_i + m_i}$  in der Weylgruppe  $W$  von  $G$ . Wegen Korollar 13.10 müssen wir Ausdrücke der Form

$$(13.1) \quad r_{\alpha_1 + m_1}^{-1} \cdots r_{\alpha_l + m_l}^{-1} u_l^{-1} \cdots u_1^{-1} x_\beta u_1 \cdots u_l r_{\alpha_l + m_l} \cdots r_{\alpha_1 + m_1}$$

für die Wurzeln  $\beta \in \Phi(v)$  untersuchen und entscheiden, ob sie in  $\text{Iw}(\mathcal{C})$  liegen, also obere Dreiecksmatrizen sind modulo  $\pi$ . Wir betrachten zunächst die Auswirkung der  $u_i$ . Nach Lemma 12.17 gilt

$$u_l^{-1} \cdots u_1^{-1} x_\beta u_1 \cdots u_l = \text{Ad}(u_l^{-1} \cdots u_1^{-1})(x_\beta) \subset \bigoplus_{k_1, \dots, k_l \in \mathbb{Z}^{\geq 0}} \mathfrak{u}_{k_1 \alpha_1 + \dots + k_l \alpha_l + \beta}.$$

Wegen Bemerkung 13.7 können wir die Untersuchung von (13.1) weiter reduzieren auf den Fall

$$r_{\alpha_1 + m_1}^{-1} \cdots r_{\alpha_l + m_l}^{-1} x_\gamma r_{\alpha_l + m_l} \cdots r_{\alpha_1 + m_1}$$

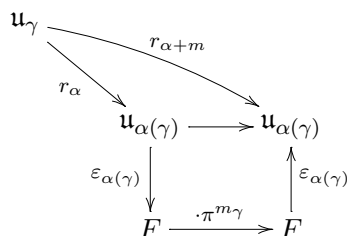
für eine Wurzel  $\gamma \in k_1 \alpha_1 + \dots + k_l \alpha_l + \beta$  und  $\beta \in \Phi(v)$ .

Es gibt prinzipiell zwei Möglichkeiten, warum ein Ausdruck wie oben nicht in  $\text{Iw}(\mathcal{C})$  liegt, d.h. keine obere Dreiecksmatrix ist: Die Einträge sind nicht ganzzahlig oder die Einträge unterhalb der Hauptdiagonalen verschwinden nicht modulo  $\pi$ . Da alle  $u_i$  aus  ${}^*U_{\alpha_i, m_i}^{\mathcal{C}} \subset \text{Iw}(\mathcal{C})$  und  $x_\beta$  aus  $\mathfrak{iv}(\mathcal{C})$  sind,

ist  $u_l^{-1} \cdots u_1^{-1} x_\beta u_1 \cdots u_l$  immer eine obere Dreiecksmatrix. Den entscheidenden Effekt haben also die Spiegelungen  $r_{\alpha_i+m_i}$ . Die Auswirkung einer solchen auf ein Element  $x_\gamma \in \mathfrak{u}_\gamma$  für eine Wurzel  $\gamma$  ist aber bekannt: Ist  $\alpha(\gamma)$  das Bild von  $\gamma$  unter dem Weylgruppenelement  $s_\alpha$ , so gilt

$$r_{\alpha+m}^{-1} x_\gamma r_{\alpha+m} \in \mathfrak{u}_{\alpha(\gamma)},$$

während der affine Anteil  $m$  auf  $F \cong \mathfrak{u}_{\alpha(\gamma)}$  die Multiplikation mit  $\pi^{m_\gamma}$  für eine von  $m$  und  $\gamma$  abhängige ganze Zahl  $m_\gamma$  induziert:



Dabei ist

$$m_\gamma = \begin{cases} \pm 2m & \text{falls } \gamma = \alpha \\ 0 & \text{falls } \alpha(\gamma) = \gamma \\ \pm m & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir sehen also, daß Spiegelungen ohne affinen Anteil die Ganzzahligkeit von  $x_\gamma$  erhalten. Gilt daher  $r_\alpha^{-1} x_\gamma r_\alpha \notin \mathfrak{iw}(\mathcal{C})$  so muß  $\gamma$  positiv sein und durch  $s_\alpha$  in eine negative Wurzel überführt werden. Spiegelungen mit affinem Anteil operieren sowohl durch ihren sphärischen als auch ihren affinen Anteil. Wir wissen, daß die Spiegelung  $r_{\alpha+m}$  für eine positive Wurzel  $\alpha$  die Multiplikation mit  $\pi^{m_\gamma}$  auf  $\mathbb{G}_a \cong \mathfrak{u}_{\alpha(\gamma)}(F)$  für  $m_\gamma \geq 0$  induziert. Wir werden später sehen, daß in unserem Fall der affine Anteil der zu betrachteten Wurzeln  $\alpha + m$  (bezüglich der obigen Normierung  $\alpha > 0$ ) stets negativ ist. Gilt daher  $r_\alpha^{-1} x_\gamma r_\alpha \notin \mathfrak{iw}(\mathcal{C})$ , so muß  $\gamma$  negativ sein und durch  $s_\alpha$  in eine positive Wurzel überführt werden. Wir fassen unser Ergebnis zusammen, wobei wir uns auf den einfacheren Fall reduzieren, daß höchstens die Wurzel  $\alpha_l + m_l$  einen nichttrivialen affinen Anteil haben kann; dies wird bis auf eine Ausnahme (im Fall der Klasse  $\mathcal{G}_p$  für den Typ  $E_6$ ) in unserem Fall stets der Fall sein, wie wir später sehen werden. Den Sonderfall klärt die Proposition 13.13.

**Proposition 13.12.** Sei  $I$  eine Menge von Wurzeln,  $\varepsilon_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow \mathfrak{u}_\alpha$  ein Isomorphismus und  $x_\alpha = \varepsilon_\alpha(z_\alpha) \in \mathfrak{u}_\alpha(F) \cap \mathfrak{iw}(\mathcal{C})$ . Seien weiter  $\alpha_1 \dots \alpha_l$  Wurzeln aus  $\Phi$  und  $\alpha_0 + m$  eine affine Wurzel mit  $\alpha_0 \in \Phi^+$  und  $m \leq 0$ .  $r_{\alpha_0+m}$  bezeichne wie immer die Spiegelung an der affinen Hyperebene  $\partial A_{\alpha_0+m}$  und  $s_\alpha$  das Bild von  $r_{\alpha_0+m}$  in der Weylgruppe von  $G$ . Für  $x = \sum_{\alpha \in I} x_\alpha \in \mathfrak{iw}(\mathcal{C})$  mit  $x_\alpha \in \mathfrak{u}_\alpha$  gelte

$$r_{\alpha_l}^{-1} \cdots r_{\alpha_1}^{-1} r_{\alpha_0+m}^{-1} x r_{\alpha_0+m} r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_l} \notin \mathfrak{iw}(\mathcal{C}).$$

Dann existiert eine Wurzel  $\beta \in I$ , so daß gilt: Falls  $m = 0$  ist, ist  $\beta$  positiv und  $s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1} s_{\alpha_0}(\beta)$  negativ. Ist  $m < 0$ , so ist  $\beta$  negativ. In diesem Fall ist entweder  $\beta = -\alpha_0$ , oder  $\alpha_0(\beta)$  ist positiv und  $s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1}(s_{\alpha_0}\beta)$  negativ. Hat  $0 \neq z_\beta \in \mathbb{G}_a$  minimale Bewertung mit  $x_\beta = \varepsilon_\beta(z_\beta) \in \mathfrak{iw}(\mathcal{C})$ , so ist die Bedingung auch hinreichend.

**Beweis:** Wegen Bemerkung 13.7 können wir  $x = x_\beta$  für ein  $\beta \in I$  annehmen. Falls  $m = 0$ , erhalten alle Spiegelungen  $r_{\alpha_i}$  Ganzzahligkeit. Deshalb muß  $\beta$  positiv sein und von  $s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1} s_{\alpha_0}$  in eine negative Wurzel übergeführt werden. Ist  $m < 0$ , muß  $\beta$  negativ sein, denn sonst wäre  $r_{\alpha_0+m}(x_\beta)$  entweder eine obere Dreiecksmatrix mit ganzzahligen Einträgen (falls  $\alpha_0(\beta) = \beta$ ) oder eine untere Dreiecksmatrix, deren Einträge Vielfache von  $\pi^{m_\beta}$  (beachte, daß dann  $m_\beta > 0$  gilt) wären. Da die Spiegelungen  $r_{\alpha_1}, \dots, r_{\alpha_l}$  die Bewertung der Einträge von  $r_{\alpha_0+m}(x_\beta)$  erhalten, würde dann  $r_{\alpha_l}^{-1} \cdots r_{\alpha_1}^{-1} r_{\alpha_0+m}^{-1} x r_{\alpha_0+m} r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_l} \in \mathfrak{iw}(\mathcal{C})$  folgen. Ist  $\beta \neq \alpha_0$ , so folgt aus der bereits gezeigten Aussage für den Fall  $m = 0$ , angewandt auf die Wurzeln  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  und  $r_{\alpha_0+m}^{-1} x_\beta r_{\alpha_0+m} \in \mathfrak{iw}(\mathcal{C}) \cap \mathfrak{u}_{\alpha_0(\beta)}$ , daß  $\alpha_0(\beta)$  positiv ist.

Die Annahme, daß  $z_\beta$  für eine solche Wurzel  $\beta$  minimale Bewertung hat, bedeutet, daß es in  $x_\beta$  einen Eintrag von Bewertung 0 gibt, falls  $\beta > 0$  ist, bzw. von Bewertung 1, falls  $\beta < 0$  ist. Deshalb ist entweder  $r_{\alpha_0+m}(x_\beta)$  eine Matrix, die nicht ganzzahlig ist (falls  $\beta = -\alpha_0$  ist), oder der Ausdruck  $r_{\alpha_l}^{-1} \cdots r_{\alpha_1}^{-1} r_{\alpha_0+m}^{-1} x r_{\alpha_0+m} r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_l}$  ist eine ganzzahlige Matrix, die nicht obere Dreiecksmatrix ist modulo  $\pi$  (sonst).  $\square$

**Proposition 13.13.** *Sei  $I$  eine Menge von Wurzeln,  $\varepsilon_\alpha : \mathbb{G}_a \rightarrow \mathfrak{u}_\alpha$  ein Isomorphismus und  $x_\alpha = \varepsilon_\alpha(z_\alpha) \in \mathfrak{u}_\alpha(F) \cap \mathfrak{im}(\mathcal{C})$ . Seien weiter  $\alpha_1 \dots \alpha_l$  beliebige Wurzeln aus  $\Phi$  und  $\alpha$  und  $\beta$  zwei verschiedene positive Wurzeln.  $r_{\alpha+n}$  bezeichne wie immer die Spiegelung an der affinen Hyperebene  $\partial A_{\alpha+n}$  und  $s_\alpha$  das Bild von  $r_{\alpha+n}$  in der Weylgruppe von  $G$ . Das Element  $0 \neq z \in \mathbb{G}_a$  habe minimale Bewertung mit  $x := \varepsilon_\beta(z) \in \mathfrak{im}(\mathcal{C})$ . Dann gilt*

$$r_{\alpha_l}^{-1} \cdots r_{\alpha_1}^{-1} r_{\alpha-1}^{-1} r_{\beta-1}^{-1} x r_{\beta-1} r_{\alpha-1} r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_l} \notin \mathfrak{im}(\mathcal{C}).$$

**Beweis:** Das Element  $x_\alpha := r_{\beta-1}^{-1} x r_{\beta-1}$  liegt in  $\mathfrak{u}_\beta$  und hat die Form  $x_\alpha = \varepsilon_\alpha(z_\alpha)$  für ein  $z_\alpha \in \mathbb{G}_a$  mit der Eigenschaft, daß  $\pi^2 z_\alpha$  minimale Bewertung hat mit  $\varepsilon_\alpha(z_\alpha) \in \mathfrak{im}(\mathcal{C})$ . Dies gilt, da  $r_{\beta-1}$  die Multiplikation mit  $\pi^{-2}$  auf  $\mathfrak{u}_\beta$  induziert. Wegen  $\alpha \neq \beta$  ist  $r_{\beta-1}^{-1} x_\alpha r_{\beta-1}$  eine Matrix, die nicht ganzzahlig ist, denn  $r_{\alpha-1}$  induziert die Multiplikation mit  $\pi^{\pm 1}$  auf  $\alpha(\beta)$ . Da die Spiegelungen  $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_l}$  keinen affinen Anteil haben und daher die Bewertungen der Einträge von  $r_{\alpha_1} \cdots r_{\alpha_l}$  nicht ändern, folgt die Behauptung.  $\square$

Die Eigenschaft der  $x_\alpha$ , die das Kriterium aus Proposition 13.12 zum hinreichenden Kriterium macht, ist in unserem Fall zumindest für den halbeinfachen Eigenvektor  $v = \sum_{\alpha \in \Phi(v)} x_\alpha$  von  $w_\Delta$  erfüllt. Die Rolle des Elements  $x$  in 13.12 wird das Element  $x = u_0^{-1} u_l^{-1} \cdots u_1^{-1} x_\beta u_1 \cdots u_l u_0 = \text{Ad}(u_l^{-1} \cdots u_1^{-1})(x_\alpha)$  übernehmen. Wie bereits gesehen liegt  $x$  in  $\bigoplus_{k_0, \dots, k_l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \mathfrak{u}_{k_0 \alpha_0 + k_1 \alpha_1 + \dots + k_l \alpha_l + \beta}$ . Wir müssen also untersuchen, welche Wurzeln  $k_0 \alpha_0 + k_1 \alpha_1 + \dots + k_l \alpha_l + \beta$  nichttriviale Komponenten in  $x$  besitzen, und wie diese aussehen. Wir werden sehen, daß Komponenten zu Wurzeln mit einem nichtverschwindenden  $k_i$  dazu führen, daß sich die Fixpunktmenge nur in ganz bestimmte Apartments weiter verzweigt.

## 13.4 Fixpunkte der Coxetertori

Wir können jetzt die Fixpunktmenge für die Coxetertori bestimmen. Das Ergebnis ist unabhängig vom Typ des Wurzelsystems.

**Satz 13.14.** *Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper,  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe über  $F$  mit Weylgruppe  $W$  und  $l$  die Coxeterzahl von  $W$ . Das Wurzelsystem von  $G$  sei nicht vom Typ  $E_7$  oder  $E_8$ , und  $F$  enthalte die Einheitswurzeln der Ordnung  $l$ .  $T$  sei ein rein zahm verzweigter maximaler  $F$ -Torus, der durch die Konjugationsklasse eines Coxeterelements von  $W$  beschrieben wird im Sinne von Abschnitt 2.1. Die Primzahl  $p$  sei gut bezüglich des zu  $G$  assoziierten Torus zur Coxeterklasse aus Kapitel 10. Dann besteht die Fixpunktmenge des topologisch unipotenten Anteils  $T^1(F)$  von  $T(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  genau aus einer Kammer.*

**Beweis:** Wegen Korollar 11.6 können wir ohne Einschränkung annehmen, daß  $G$  eine der Gruppen aus Abschnitt 6.6 und  $T$  der zugehörige Torus aus Kapitel 10 ist. Die Parameter  $D_i$  von  $T$  seien alle Uniformisierende in  $F$ . Wir identifizieren  $G$  bzw.  $\mathfrak{g}$  vermöge der treuen Darstellung aus Abschnitt 6.6 mit einer abgeschlossenen Untergruppe von  $GL_n$  bzw. einer Unteralgebra von  $\mathcal{M}_n$ .  $\Delta$  sei das System einfacher Wurzeln, das zu dem positiven Halbsystem  $\Phi^+$  aus Abschnitt 12.3 korrespondiert. Wie immer sei  $\Delta_{\text{aff}} = \Delta \cup \{-\alpha^+\}$ . Sei  $\zeta$  eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $l$  und  $w$  ein Coxeterelement in  $W$  mit baryzentrischem Punkt  $w_\Delta$ . Nach Abschnitt 8.5 existiert ein halbeinfacher Eigenvektor  $v \in \mathfrak{g}(F)$  von  $w_\Delta$  mit Minimalpolynom  $\mu$  und den folgenden Eigenschaften:

- (i)  $T_\mu \hookrightarrow T$  zerfällt über einer rein zahm verzweigten Erweiterung von  $F$ .

- (ii)  $v \in \text{im}(\mathcal{C})$
- (iii)  $v = \sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} y_{\alpha} x_{\alpha}$ , wo die  $x_{\alpha}$  ganzzahlige Basisvektoren von  $\mathfrak{u}_{\alpha}$  sind und  $v(y_{\alpha}) = 0$  für  $\alpha \in \Delta$  und  $v(y_{\alpha}) = 1$  für  $\alpha = -\alpha^{+}$ .

Nach Korollar 13.6 fixiert  $T^1(F)$  eine Kammer in  $\mathcal{B}(G, F)$  punktweise, und wegen (ii) sogar die Standardkammer  $\mathcal{C}$ . Die Wände von  $\mathcal{C}$  sind die affinen Wurzeln  $\alpha \in \Delta$  sowie  $1 - \alpha^{+}$ . Um zu zeigen, daß keine weiteren Kammern in  $\mathcal{B}(G, F)$  punktweise fixiert werden, genügt es nach Korollar 12.4 oder Proposition 13.3 zu zeigen, daß keine zu  $\mathcal{C}$  benachbarte Kammer punktweise fixiert wird. Man beachte, daß  $T^1(F)$  labelerhaltend operiert nach Korollar 11.7. Sei also  $\alpha + m \in \Delta_{\text{aff}}$  und  $u_{\alpha+m} \in {}^*U_{\alpha, m}^{\mathcal{C}}(F)$ . Dann gilt

$$u_{\alpha+m}^{-1}(y_{\alpha}x_{\alpha})u_{\alpha+m} = y_{\alpha}x_{\alpha},$$

denn wegen  $u_{\alpha+m} \in U_{\alpha}$  kommutiert  $u_{\alpha+m}$  mit  $x_{\alpha}$ . Da für alle Wurzeln  $\alpha \neq \beta \in \Delta_{\text{aff}}$  der Ausdruck  $u_{\alpha+m}^{-1}(y_{\beta}x_{\beta})u_{\alpha+m}$  trivialen Anteil in  $\mathfrak{u}_{\alpha}$  hat nach Lemma 12.17, besteht die Komponente von  $v$  in  $\mathfrak{u}_{\alpha}$  gerade aus  $y_{\alpha}x_{\alpha}$ . Deshalb läßt sich Proposition 13.12 anwenden. Das Element  $y_{\alpha}x_{\alpha}$  erfüllt die Bedingung, die in 13.12 an das dort mit  $x_{\beta}$  bezeichnete Element gestellt wird. Daher gilt nach Proposition 13.12 und Korollar 13.10

$$s_{\alpha+m}^{-1}u_{\alpha+m}^{-1}vu_{\alpha+m}s_{\alpha+m} \notin \text{im}(\mathcal{C}).$$

Nach Proposition 13.8 besteht die Fixpunktmenge von  $T_{\mu}^1(F)$  nur aus der einen Kammer  $\mathcal{C}$ . Die Behauptung des Satzes folgt jetzt wegen  $T_{\mu} \hookrightarrow T$ .  $\square$

## 13.5 Fixpunkte von Nicht-Coxeter-Tori

Im Gegensatz zum Coxeterfall läßt sich hier nur ein schwaches uniformes Ergebnis formulieren: Die Fixpunktmenge des topologisch unipotenten Anteils eines primitiven rein verzweigten Torus zu einer Klasse, die nicht die Coxeterklasse ist, ist echt größer als eine Kammer. Die genaue Fixpunktmenge muß aber in jedem Fall einzeln ausgerechnet werden. Wir formulieren am Anfang noch einmal präzise den Algorithmus, nach dem wir vorgehen, und bestimmen dann in den einzelnen Fällen die Fixpunktmenge.

**Satz 13.15.** *Sei  $F$  ein  $p$ -adischer Körper,  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe über  $F$  mit Weylgruppe  $W$  und  $l$  die Coxeterzahl von  $W$ . Das Wurzelsystem von  $G$  sei nicht vom Typ  $E_7$  oder  $E_8$ , und  $F$  enthalte die Einheitswurzeln der Ordnung  $l$ .  $T$  sei ein rein zahm verzweigter maximaler  $F$ -Torus, der nicht durch die Konjugationsklasse eines Coxeterelements von  $W$  beschrieben wird im Sinne von Abschnitt 2.1. Die Primzahl  $p$  sei gut bezüglich des zu  $G$  assoziierten Torus zur Klasse von  $T$  aus Kapitel 10. Dann besteht die Fixpunktmenge des topologisch unipotenten Anteils  $T^1(F)$  von  $T(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  aus mehr als einer Kammer.*

**Beweis:** Sei  $w \in W$  primitiv und nicht konjugiert zu einem Coxeterelement. Wegen Korollar 11.6 nehmen wir wieder ohne Einschränkung an, daß  $G$  eine der Gruppen aus Abschnitt 6.6 und  $T$  der zugehörige Torus aus Kapitel 10 ist. Die Parameter  $D_i$  von  $T$  seien ebenfalls wieder alle Uniformisierende in  $F$ . Falls es Wurzeln gibt, die auf dem baryzentrischen Punkt  $w_{\Delta}$  von  $w$  trivial sind, so liegt der baryzentrische Vektor  $w_A$  auf einer Wand der Standardkammer wegen der Propositionen 4.9 und 5.3. Die Behauptung folgt jetzt mit Proposition 12.19. Dies klärt alle Fälle außer den Klassen  $[\overline{k}][\overline{n-k}]$  für die  $D$ -Systeme für teilerfremde  $k$  und  $n-k$ , wie man in Abschnitt 9.1 leicht nachschlagen kann. Wir betrachten also die Klasse  $[\overline{k}][\overline{n-k}]$  mit teilerfremden  $k$  und  $n-k$ . Dann existieren  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $ak + b(n-k) = 1$ , und  $a, b$  können ohne Einschränkung in den Bereichen  $0 < |a| < n-k, 0 < |b| < k$  gewählt werden. Dann existieren verschiedenen Indizes  $i$  und  $j$  mit  $1 \leq i, j \leq n$ , so daß für die zugehörigen  $e_i$  und  $e_j$  aus Abschnitt 9.1.1  $e_i = \frac{b}{2k}$  und  $e_j = \frac{a}{2(n-k)}$  gilt. Für die positive Wurzel  $\alpha$  der beiden Wurzeln  $\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j)$  gilt dann  $\alpha(w_{\Delta}) = \zeta_{2kl}$  für eine primitive Einheitswurzel von Ordnung  $2kl$  nach Proposition 9.1. Da der Abstand zweier benachbarter  $e_a$  und  $e_{a+1}$  mindestens  $\frac{1}{2kl} = \pm(e_i - e_j)$

ist, gilt weiter  $|i - j| = 1$ , und daher ist  $\alpha$  eine einfache Wurzel. Die Wurzel  $\alpha$  hat keinen affinen Anteil, definiert eine Wand der Standardkammer und die zugehörige Spiegelung  $s_\alpha$  ändert das Vorzeichen einer einzigen Wurzel aus  $\Phi^+$ , nämlich von  $\alpha$ . Seien nun  $v_1$  und  $v_2$  zwei Eigenvektoren von  $w_\Delta$  zum Eigenwert  $\zeta_{2k}$  bzw.  $\zeta_{2(n-k)}$  wie in Abschnitt 9.2.1. Offensichtlich liegt  $\alpha$  weder in  $\Phi_{\zeta_{2k}}(w_\Delta)$  noch in  $\Phi_{\zeta_{2k}}(w_\Delta)$ . Die Behauptung folgt jetzt mit Proposition 13.12.  $\square$

### 13.5.1 Vorgehensweise und Aufbau der Tabellen

Wir beschreiben hier, in welcher Form die Berechnungen in den folgenden Abschnitten durchgeführt und dargestellt werden.  $T$  bestehe aus den Komponenten  $T_\nu$ . Eine Kammer  $C$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  wird genau dann von  $T^1(F)$  punktweise fixiert, wenn  $C$  von allen  $T_\nu^1(F)$  punktweise fixiert wird (vgl. den Beweis von Proposition 13.8). Daher können wir uns auf die Untersuchung der einzelnen Komponenten  $T_\nu$  zurückziehen. Sei nun  $v_\nu$  ein rationaler, halbeinfacher Eigenvektor von  $w_\Delta$  (zu dem der Komponente  $\nu$  entsprechenden Eigenwert) mit den Eigenschaften (i)-(iii) aus dem Beweis von Satz 13.14:

- (i)  $T_\nu \hookrightarrow T$  zerfällt über einer rein zahm verweigten Erweiterung von  $F$ .
- (ii)  $v_\nu \in \mathfrak{iv}(\mathcal{C})$
- (iii)  $v_\nu = \sum_{\alpha \in \Delta_{\text{aff}}} y_\alpha x_\alpha$ , wo die  $x_\alpha$  ganzzahlige Basisvektoren von  $\mathfrak{u}_\alpha$  sind und  $v(y_\alpha) = 0$  für  $\alpha \in \Delta$  und  $v(y_\alpha) = 1$  für  $\alpha = -\alpha^+$ .

Die Existenz solcher  $v_\nu$  wird von Abschnitt 9.4 gesichert. Mit der Eigenschaft (ii) wählen wir die Standardkammer  $\mathcal{C}$  als von  $T^1(F)$  punktweise fixierte Kammer aus. Wir nehmen wieder an, daß die Restklassencharakteristik  $p$  von  $F$  hinreichend gut ist im Sinne von Proposition 12.14. In diesem Fall können wir die Aussagen 13.8 und 13.10 anwenden und erhalten, daß die Kammer  $g\mathcal{C}$  für ein  $g \in G(F)$  genau dann punktweise von  $T_\nu^1(F)$  fixiert wird, wenn  $g^{-1}x_\alpha g \in \mathfrak{iv}(\mathcal{C})$  gilt. Schreibt man  $g$  in der Form von Korollar 11.12, also

$$g = u_1 \cdots u_l s_{\alpha_l + m_l} \cdots s_{\alpha_1 + m_1}$$

für geeignete affine Wurzeln  $s_{\alpha_i + m_i}$  und Elemente  $u_i \in {}^*U_{\alpha_i, m_i}^{\mathcal{C}}(F)$ , liefert Proposition 13.12 ein Kriterium, die Bedingung  $g^{-1}x_\alpha g \in \mathfrak{iv}(\mathcal{C})$  zu entscheiden. Die Rolle des Elements  $x$  in 13.12 übernimmt jetzt

$$\mathfrak{x}_\alpha = \text{Ad}(u_1^{-1} \cdots u_l^{-1})(x_\alpha) = u_1^{-1} \cdots u_l^{-1} x_\alpha u_1 \cdots u_l.$$

Nach Lemma 12.17 kann  $\mathfrak{x}_\alpha$  ebenfalls zerlegt werden in die Form

$$\mathfrak{x}_\alpha = \sum_{\beta \in I_\alpha} \mathfrak{x}_{\alpha, \beta}$$

für nichttriviale  $\mathfrak{x}_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{u}_\beta$  und eine geeignete Menge  $I_\alpha$  von Wurzeln aus  $\mathbb{Z}^{\geq 0}\alpha_1 + \dots + \mathbb{Z}^{\geq 0}\alpha_l + \alpha$ , wenn  $u_i \in {}^*U_{\alpha_i, m_i}^{\mathcal{C}}(F)$  liegt. Man beachte, daß stets  $\alpha \in I_\alpha$  und  $\mathfrak{x}_{\alpha, \alpha} = x_\alpha$  gilt. Die Bemerkung 13.7 sowie Proposition 13.12 reduzieren das Problem schließlich auf die Frage, ob eine Wurzel  $\beta$  aus  $I_\alpha$  ihr Vorzeichen ändert unter Anwendung des Elements  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$ : Liegt eine solche Wurzel  $\beta$  in den  $I_\alpha$  für mehrere  $\alpha$ , so ist die zu  $\beta$  gehörende Komponente  $v_\beta$  von  $v_\nu$

$$v_\beta = \sum_{\alpha} \mathfrak{x}_{\alpha, \beta},$$

wenn  $\alpha$  diejenigen Wurzeln aus  $\Phi(v_\nu)$  durchläuft mit  $\beta \in I_\alpha$ . Nach den Abschnitten 11.6 und 12.3 gilt  ${}^*U_{\alpha_i, m_i}^{\mathcal{C}}(F) = U_{\alpha_i}^{\mathcal{C}}(\pi^m \mathcal{O}) \setminus U_{\alpha_i}^{\mathcal{C}}(\pi^{m+1} \mathcal{O}) \cup \{1\}$ . Ob ein Element  $v_\beta$  die Minimalitätsbedingung aus 13.12 erfüllt, hängt also ab von den Elementen  $u_i$ , für die die zugehörigen  $k_i$  in der Darstellung  $\beta = k_1\alpha_1 + \dots + k_l\alpha_l + \alpha$  nicht null sind. Ist die Minimalitätsbedingung für ein  $v_\beta$  erfüllt, wird die Kammer nicht punktweise von  $T_\nu^1(F)$  fixiert. In den Fällen, in denen kein  $v_\beta$  die Minimalitätsbedingung



erfüllt, wird die zu den entsprechenden Wahlen der  $u_i$  korrespondierende Kammer von  $T_\nu^1(F)$  punktweise fixiert. Es bleibt noch das Problem, die Wurzelmenge  $I_\alpha$  zu identifizieren. Dies läßt sich mit Hilfe der Darstellungen aus Abschnitt 6.6 explizit ausrechnen und wird hier nicht dargestellt. Die später folgenden Tabellen geben eine Übersicht über die Ergebnisse, können aber in jedem Fall als heuristisches Verfahren verstanden werden, um die kritischen Wände heraus zu destillieren, die man dann explizit überprüfen muß.

Zuletzt noch eine technische Bemerkung zur Berechnung von  $s_\alpha(\beta)$  für zwei Wurzeln  $\alpha$  und  $\beta$ . Es ist oft hilfreich,  $s_\alpha$  als Produkt von Spiegelungen zu einfachen Wurzeln zu schreiben, da  $\beta$  ebenfalls als Linearkombination von einfachen Wurzeln dargestellt ist. Dies läßt sich mit Hilfe von [Hum3][1.5(3)] tun: Ist  $\alpha = w\alpha'$  und  $w$  ein Produkt von Spiegelungen zu einfachen Wurzeln, gilt  $s_\alpha = ws_{\alpha'}w$ .

Wir geben noch eine Übersicht über die möglichen Situationen, die auftreten können. Zunächst schließen wir den Sonderfall, daß zwei beteiligte Wurzeln einen nichttrivialen affinen Anteil haben, aus.

- (1) Es existiert eine Wurzel  $\beta$  aus  $\Phi(v_\nu)$ , die unter der Spiegelung mit  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$  ihr Vorzeichen ändert und die nicht die Form  $k_1\alpha_1 + \dots + k_l\alpha_l + \alpha$  mit einem  $k_i > 0$  und einem  $\alpha \in \Phi(v_\nu)$ . Dann gilt  $v_\beta = x_\beta$  und die entsprechenden Kammern werden nicht von  $T^1(F)$  punktweise fixiert.
- (2) Es existiert eine Wurzel  $\beta \in \bigcup_{\alpha \in \Phi(v_\nu)} I_\alpha$ , die unter der Spiegelung mit  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$  ihr Vorzeichen ändert und die die Form  $k_1^\alpha\alpha_1 + \dots + k_l^\alpha\alpha_l + \alpha$  für geeignete  $\alpha \in \Phi(v_\nu)$  mit einem  $k_i^\alpha > 0$  hat. Dann werden die entsprechenden Kammern genau dann punktweise fixiert von  $T_\nu^1(F)$ , wenn es eine geeignete Wahl der Elemente  $u_i$ , für die ein  $k_i^\alpha > 0$  ist, gibt, so daß  $v_\beta$  unter Konjugation mit  $s_{\alpha_l} \cdots s_{\alpha_1}$  in  $\text{int}(\mathcal{C})$  bleibt.
- (3) Wird eine Kammer nicht von allen  $T_\nu^1(F)$  punktweise fixiert, dann auch nicht von  $T^1(F)$ .
- (4) Es existiert keine Wurzel  $\beta$  aus  $\bigcup_{\alpha \in \Phi(v_\nu)} I_\alpha$ , die unter der Spiegelung mit  $s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_l}$  ihr Vorzeichen ändert. Dann werden alle Kammern, die über die Wand vom Typ  $\alpha_l$  zur aktuellen Kammer benachbart sind, von  $T^1(F)$  punktweise fixiert, und zwar für alle (noch) möglichen Wahlen der  $u_i$ .

Im verbleibenden Sonderfall benutzen wir direkt Proposition 13.13. Der Einheitlichkeit halber werden wir diesen Fall als Situation (5) referenzieren.

### Beschreibung der Tabellen

Für jede Kammer, die zu untersuchen ist, gibt es eine Tabelle, die die folgende Form hat: Der Eintrag links oben beschreibt die Kammer, die gerade untersucht wird, in folgender Form: Hat die betrachtete Kammer die Darstellung aus Korollar 11.12 bezüglich der Standardkammer  $\mathcal{C}$ , so wird sie in der Tabelle durch ihr Bild unter der Retraktabbildung auf das Standardapartment mit Zentrum  $\mathcal{C}$  beschrieben. In den Zeilen stehen die relevanten Wände der Kammer (die offensichtliche Wand ist weggelassen). In den Spalten stehen die einzelnen Komponenten, aus denen der Torus zusammengesetzt ist. Die Tabelleneinträge sind solche Wurzeln, die ihr Vorzeichen ändern bei Anwendung aller Spiegelungen, die  $\mathcal{C}$  in die Kammer überführen, die zur aktuellen Kammer über die vorgegebene Wand benachbart ist, und die aus der entsprechenden Komponente stammen. Jede Komponente ist nochmals unterteilt in zwei Spalten, um die Wurzeln, die direkt aus dem Erzeuger  $v_\nu$  der Komponente stammen (Zeilenkopf  $v$ ), zu unterscheiden von denjenigen, die sich mit Hilfe der  $u_i \in {}^*U_{\alpha_i+m_i}^{\mathcal{C}}$  ergeben (Zeilenkopf  $U$ ). In der letzten Spalte wird ein  $\circ$  (bzw.  $\times$ ) gesetzt, falls keine (alle) über diese Wand benachbarten Kammern punktweise fixiert wird (werden). Ansonsten werden die einschränkenden Bedingungen angegeben, die für punktweise fixierte Kammern gelten. In allen Fällen ist derjenige der vier oben beschriebenen Fälle angegeben, der eintritt. Führt die betrachtete Wand zu einer Kammer, die kleineren Galerieabstand zu  $\mathcal{C}$  hat und daher bereits untersucht wurde, ist neben dem Ergebnis ein  $\downarrow$  eingetragen.

Die einschränkenden Bedingungen sind dabei wie folgt zu lesen. Ein  $u \in {}^*U_{\alpha+m}^{\mathcal{C}}$  wird geschrieben in der Form  $u = \varepsilon_{\alpha}(z_u)$  für ein  $z_u \in \mathcal{O}$ , wenn  $\varepsilon_{\alpha} : \mathbb{G}_a \rightarrow U_{\alpha}$  ein Isomorphismus ist mit  $\varepsilon_{\alpha}(\mathcal{O}) = U_{\alpha}(\mathcal{O})$  (vgl. Abschnitte 11.6 und 12.3). In den Tabellen wird dann die relevante Restklasse  $\bar{z}_u$  von  $z_u$  in  $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$  angegeben.

**13.5.2 Fixpunkte für die Klasse  $[\bar{2}][\bar{2}]$  vom Typ  $D_4$**

Wir betrachten als Beispiel für die  $D_n$ -Systeme den einfachsten Fall, in dem  $k$  und  $n-k$  nicht teilerfremd sind. Wir markieren die Indizes wie folgt (vgl. Abschnitte 9.1.1 und 9.2): Die Werte  $e_1, \dots, e_4$  sind die Zahlen  $e_1 = \frac{1}{2}, e_2 = \frac{1}{4}, e_3 = \frac{1}{4}, e_4 = 0$ . Wir ordnen den Index 2 der Menge  $\mathcal{E}_{2k}$  und den Index 3 der Menge  $\mathcal{E}_{2(n-k)}$  zu. Wir erhalten dann mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 9.4.1  $\Delta_1(w_{\Delta}) = \{\alpha_2\}$  und

$$I_1 = \{\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + \alpha_4, -\alpha^+\},$$

$$I_2 = \{\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, -(\alpha^+ - \alpha_2)\}.$$

Nach Proposition 12.19 werden die Kammern

$$\mathcal{C}, u_2 r_{\alpha_2} \mathcal{C}$$

punktweise fixiert für alle  $u_i \in U_{\alpha_i}^{\mathcal{C}}(F)$ .

**Tabelle 13.5.2.1.**

| $\mathcal{C}$  | $I_1$                        |     | $I_2$                        |     | Fixiert        |
|----------------|------------------------------|-----|------------------------------|-----|----------------|
|                | $v$                          | $U$ | $v$                          | $U$ |                |
| $\alpha_1$     | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$ |     |                              |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2$     |                              |     |                              |     | $\times - (4)$ |
| $\alpha_3$     |                              |     | $\alpha_3 \mapsto -\alpha_3$ |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_4$     |                              |     | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |     | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+$ | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$ |     |                              |     | $\circ - (1)$  |

| $r_{\alpha_2} \mathcal{C}$ | $I_1$                                   |   | $I_2$                                   |                       | Fixiert            |
|----------------------------|---|---|---|-----------------------|--------------------|
|                            | $v$                                     | $U$                                     | $v$                                     | $U$                   |                    |
| $\alpha_1 + \alpha_2$      |   | $\alpha_1 + \alpha_2 \mapsto -\alpha_1$ | $\alpha_1 + \alpha_2$                   |                       | $\circ - (1), (3)$ |
| $\alpha_2 + \alpha_3$      | $\alpha_2 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_3$ |   |   | $\alpha_2 + \alpha_3$ | $\circ - (1), (3)$ |
| $\alpha_2 + \alpha_4$      | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |   |   | $\alpha_2 + \alpha_4$ | $\circ - (1), (3)$ |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2$  |   |   | $-\alpha^+ + \alpha_2 \mapsto \alpha^+$ |                       | $\circ - (1)$      |

**Resultat 13.16.** Sei  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe mit Wurzelsystem vom Typ  $D_4$  über dem  $p$ -adischen Körper  $F$ ,  $p$  hinreichend gut im Sinne von Proposition 12.14 und  $T$  ein primitiver, rein zahl verzweigter Torus in  $G$ , der durch die Klasse  $[\bar{2}][\bar{2}]$  in [BFW] beschrieben wird. Bei geeigneter Normierung besteht die Fixpunktmenge  $\mathcal{F}_T^1$  von  $T^1(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  aus den folgenden Kammern:

$$\mathcal{F}_T^1 = \{\mathcal{C}, u_2 r_{\alpha_2} \mathcal{C}\}.$$

Dabei durchläuft die  $u_2$  die Menge  $U_{\alpha_2}^{\mathcal{C}}(F)$ .

**13.5.3 Fixpunkte für die Klasse  $6_p 6_p$  oder das vierdimensionale Haus des Nikolaus**

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Abschnitt 9.4.2. Es ist  $\Delta_1(w_{\Delta}) = \{\alpha_1, \alpha_3\}$  und

$$I_1 = \{\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, -(\alpha^+ - \alpha_1)\}$$

und

$$I_2 = \{\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 2\alpha_3, -\alpha^+\}.$$

Nach Proposition 12.19 werden die Kammern

$$\mathcal{C}, u_1 r_{\alpha_1} \mathcal{C}, u_3 r_{\alpha_3} \mathcal{C}, u_3 u_1 r_{\alpha_1} r_{\alpha_3} \mathcal{C}$$

punktweise fixiert für alle  $u_i \in U_{\alpha_i}^{\mathcal{C}}(F)$ .

**Tabelle 13.5.3.1.**

| $\mathcal{C}$                                      | $I_1$   |  | $I_2$  |                                   | Fixiert               |
|--|---|--|--|-----------------------------------|-----------------------|
|  | $v$   | $U$                                      | $v$  | $U$                               |                       |
| $\alpha_1$   |   |  |  |                                   | $\times - (4)$        |
| $\alpha_2$   | $\alpha_2 \mapsto -\alpha_2$                        |  |  |                                   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_3$   |   |  |  |                                   | $\times - (4)$        |
| $\alpha_4$   |   |  | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_4$                       |                                   | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+$                                     |   |  | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$                       |                                   | $\circ - (1)$         |
| $r_{\alpha_1} \mathcal{C}$                         | $I_1$   |  | $I_2$  |                                   | Fixiert               |
|  | $v$   | $U$                                      | $v$  | $U$                               |                       |
| $\alpha_1 + \alpha_2$                              |   | $\alpha_1 + \alpha_2 \mapsto -\alpha_2$  |  |                                   | $\bar{z}_1 = 0 - (2)$ |
| $\alpha_3$   |   |  |  |                                   | $\times - (4)$        |
| $\alpha_4$   |   |  | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_4$                       |                                   | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_1$                          | $\alpha_1 - \alpha^+ \mapsto \alpha^+$              |  |  | $\alpha_1 - \alpha^+$             | $\circ - (1), (3)$    |
| $r_{\alpha_3} \mathcal{C}$                         | $I_1$   |  | $I_2$  |                                   | Fixiert               |
|  | $v$   | $U$                                      | $v$  | $U$                               |                       |
| $\alpha_1$   |   |  |  |                                   | $\times - (4)$        |
| $\alpha_2 + 2\alpha_3$                             |   | $\alpha_2 + 2\alpha_3 \mapsto -\alpha_2$ | $\alpha_2 + 2\alpha_3$                             |                                   | $\circ - (1), (3)$    |
| $\alpha_3 + \alpha_4$                              | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$             |  |  | $\alpha_3 + \alpha_4$             | $\circ - (1), (3)$    |
| $1 - \alpha^+$                                     |   |  | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$                       |                                   | $\circ - (1)$         |
| $u_1 r_{\alpha_1} r_{\alpha_3} \mathcal{C}$        | $I_1$   |  | $I_2$  |                                   | Fixiert               |
|  | $v$   | $U$                                      | $v$  | $U$                               |                       |
| $\alpha_3$   |   |  |  |                                   | $\times - \downarrow$ |
| $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$                  | $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 \mapsto -\alpha_2$ | $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$        |  | $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$ | $\circ - (2), (3)$    |
| $\alpha_3 + \alpha_4$                              | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$             |  |  | $\alpha_3 + \alpha_4$             | $\circ - (1), (3)$    |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_1$                          | $\alpha_1 - \alpha^+ \mapsto \alpha^+$              |  |  | $\alpha_1 - \alpha^+$             | $\circ - (1), (3)$    |
| $r_{\alpha_1 + \alpha_2} r_{\alpha_1} \mathcal{C}$ | $I_1$   |  | $I_2$  |                                   | Fixiert               |
|  | $v$   | $U$                                      | $v$  | $U$                               |                       |
| $\alpha_2$   | $\alpha_2 \mapsto -\alpha_1$                        |  |  |                                   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$                   |   |  | $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_3$ |                                   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_4$   |   |  | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_4$                       |                                   | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_1$                          | $\alpha_1 - \alpha^+ \mapsto \alpha^+$              |  |  | $\alpha_1 - \alpha^+$             | $\circ - (1), (3)$    |

Für die Wand  $\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$  muß man nachrechnen, daß sich die Bedingungen, die die beiden Komponenten liefern, gegenseitig ausschließen.

**Resultat 13.17.** Sei  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe mit Wurzelsystem vom Typ  $F_4$  über dem  $p$ -adischen Körper  $F$ ,  $p$  hinreichend gut im Sinne von Proposition 12.14 und  $T$  ein primitiver, rein zahm verzweigter Torus in  $G$ , der durch die Klasse  $6_p 6_p$  in [BFW] beschrieben wird. Bei geeigneter Normierung besteht die Fixpunktmenge  $\mathcal{F}_T^1$  von  $T^1(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  aus den folgenden Kammern:

$$\mathcal{F}_T^1 = \{\mathcal{C}, u_1 r_{\alpha_1} \mathcal{C}, u_3 r_{\alpha_3} \mathcal{C}, u_3 u_1 r_{\alpha_1} r_{\alpha_3} \mathcal{C}, u_{1+2} r_{\alpha_1 + \alpha_2} r_{\alpha_1} \mathcal{C}\}.$$

Dabei durchlaufen die  $u_i$  die Mengen  $U_{\alpha_i}^{\mathcal{C}}(F)$ .

Die Fixpunktmenge  $\mathcal{F}_T^1$  läßt sich graphisch veranschaulichen. In den beiden Bildern entsprechen die Kammern den Dreiecken. Der baryzentrische Vektor ist als  $\bullet$  gekennzeichnet. Das linke Bild beschreibt den Durchschnitt von  $\mathcal{F}_T^1$  mit jedem Apartment, das die mit einem  $\times$  markierte Kammer  $r_{\alpha_1}\mathcal{C}$  beinhaltet. Das rechte Bild beschreibt den Durchschnitt von  $\mathcal{F}_T^1$  mit jedem anderen Apartment, das den baryzentrischen Vektor enthält.



### 13.5.4 Fixpunkte für die Klasse $\mathcal{G}_p$

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Abschnitt 9.4.3. Es ist  $\Delta_1(w_\Delta) = \{\alpha_4\}$  und

$$I = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4, -\alpha^+\}.$$

Nach Proposition 12.19 werden die Kammern

$$\mathcal{C}, u_4 r_{\alpha_4} \mathcal{C}$$

punktweise fixiert für alle  $u_4 \in U_{\alpha_4}^{\mathcal{C}}(F)$ .

Tabelle 13.5.4.1.

| $\mathcal{C}$  | $I$                          |     | Fixiert        |
|----------------|------------------------------|-----|----------------|
|                | $v$                          | $U$ |                |
| $\alpha_1$     | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$ |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2$     | $\alpha_2 \mapsto -\alpha_2$ |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_3$     |                              |     | $\times - (4)$ |
| $\alpha_4$     |                              |     | $\times - (4)$ |
| $\alpha_5$     | $\alpha_5 \mapsto -\alpha_5$ |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_6$     | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$ |     | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+$ | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$ |     | $\circ - (1)$  |

| $r_{\alpha_3}\mathcal{C}$ | $I$                                     |   | Fixiert               |
|---------------------------|---|---|-----------------------|
|                           | $v$                                     | $U$                                     |                       |
| $\alpha_1 + \alpha_3$     |   | $\alpha_1 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_1$ | $\bar{z}_3 = 0 - (2)$ |
| $\alpha_2$                | $\alpha_2 \mapsto -\alpha_2$            |   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_3 + \alpha_4$     | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_5$                | $\alpha_5 \mapsto -\alpha_5$            |   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_6$                | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$            |   | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+$            | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$            |   | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_4}\mathcal{C}$ | $I$                                     |   | <i>Fixiert</i>        |
|---------------------------|---|---|-----------------------|
|                           | $v$                                     | $U$                                     |                       |
| $\alpha_1$                | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$            |   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_2 + \alpha_4$     | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_2$ | $\alpha_2 + \alpha_4$                   | $\bar{z}_4 = 1 - (2)$ |
| $\alpha_3 + \alpha_4$     | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_3$ |   | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_4 + \alpha_5$     |   | $\alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_5$ | $\bar{z}_4 = 0 - (2)$ |
| $\alpha_6$                | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$            |   | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+$            | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$            |   | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_1+\alpha_3}r_{\alpha_3}\mathcal{C}$ | $I$                                     |     | <i>Fixiert</i>     |
|--|---|-----|--------------------|
|  | $v$                                     | $U$ |                    |
| $\alpha_1$                                     | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_3$            |     | $\circ - (1)$      |
| $\alpha_2$                                     | $\alpha_2 \mapsto -\alpha_2$            |     | $\circ - (1)$      |
| $\alpha_3 + \alpha_4$                          | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |     | $\circ - (1)$      |
| $\alpha_5$                                     | $\alpha_5 \mapsto -\alpha_5$            |     | $\circ - (2), (3)$ |
| $\alpha_6$                                     | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$            |     | $\circ - (2), (3)$ |
| $1 - \alpha^+$                                 | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$            |     | $\circ - (1), (3)$ |

| $c_4r_{\alpha_2+\alpha_4}r_{\alpha_4}\mathcal{C}$ | $I$                                     |  | <i>Fixiert</i>            |
|---|---|--|---------------------------|
|   | $v$                                     | $U$  |                           |
| $\alpha_1$  | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$            |  | $\circ - (1)$             |
| $\alpha_2$  | $\alpha_2 \mapsto -\alpha_4$            |  | $\circ - (1)$             |
| $\alpha_3 + \alpha_4$                             | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_3$ |  | $\circ - (1)$             |
| $\alpha_4 + \alpha_5$                             | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_2$ | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_2$<br>$\alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_5$ | $\circ - (2)$             |
| $\alpha_6$  | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$            |  | $\circ - (1)$             |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2 + \alpha_4$              |   | $-\alpha^+ + \alpha_2 + \alpha_4 \mapsto \alpha^+$                                 | $\bar{z}_{2+4} = 0 - (2)$ |

| $r_{\alpha_4+\alpha_5}r_{\alpha_4}\mathcal{C}$ | $I$                                     |  | <i>Fixiert</i>            |
|--|---|--|---------------------------|
|  | $v$                                     | $U$  |                           |
| $\alpha_1$                                     | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$            |  | $\circ - (1)$             |
| $\alpha_2 + \alpha_4$                          |   |  | $\circ - (1)$ verweisen   |
| $\alpha_3 + \alpha_4$                          | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_3$ |  | $\circ - (1)$             |
| $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$               |   | $\alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_5 - \alpha_6$ | $\bar{z}_{2+4} = 0 - (2)$ |
| $\alpha_5$                                     | $\alpha_5 \mapsto -\alpha_4$            |  | $\circ - (1)$             |
| $1 - \alpha^+$                                 | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$            |  | $\circ - (1)$             |

| $r_{\alpha_4+\alpha_5+\alpha_6}r_{\alpha_4+\alpha_5}r_{\alpha_4}\mathcal{C}$ | $I$                                     |   | <i>Fixiert</i> |
|--|---|---|----------------|
|  | $v$                                     | $U$   |                |
| $\alpha_1$   | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$            |   | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2 + \alpha_4$  | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_2$ | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_2$<br>$\alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_5 - \alpha_6$ | $\circ - (2)$  |
| $\alpha_3 + \alpha_4$  | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_3$ |   | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_5$   | $\alpha_5 \mapsto -\alpha_4$            |   | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_6$   | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_5$            |   | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+$   | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$            |   | $\circ - (1)$  |

| $c_4r_{1-\alpha^++\alpha_2+\alpha_4}r_{\alpha_2+\alpha_4}r_{\alpha_4}\mathcal{C}$ | $I$                                     |  | <i>Fixiert</i> |
|---|---|--|----------------|
|   | $v$                                     | $U$  |                |
| $\alpha_1$  | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$            |  | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2$  | $\alpha_2 \mapsto -\alpha_4$            |  | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_3 + \alpha_4$   | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_3$ |  | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_4 + \alpha_5$   | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_2$ | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_2$<br>$\alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_5$ | $\circ - (2)$  |
| $\alpha_6$  | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$            |  | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+$  | $-\alpha^+ \mapsto -\alpha_2$           |  | $\circ - (5)$  |

**Resultat 13.18.** Sei  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe mit Wurzelsystem vom

Typ  $E_6$  über dem  $p$ -adischen Körper  $F$ ,  $p$  hinreichend gut im Sinne von Proposition 12.14 und  $T$  ein primitiver, rein zahl verzweigter Torus in  $G$ , der durch die Klasse  $9_p$  in [BFW] beschrieben wird. Bei geeigneter Normierung besteht die Fixpunktmenge  $\mathcal{F}_T^1$  von  $T^1(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  aus den folgenden Kammern:

$$\mathcal{F}_T^1 = \{ \mathcal{C}, u_3 r_{\alpha_3} \mathcal{C}, u_4 r_{\alpha_4} \mathcal{C}, u_{1+3} r_{\alpha_1 + \alpha_3} r_{\alpha_3} \mathcal{C}, u_{2+4} c_4 r_{\alpha_2 + \alpha_4} r_{\alpha_4} \mathcal{C}, \\ u_{4+5} r_{\alpha_4 + \alpha_5} r_{\alpha_4} \mathcal{C}, u_{4+5+6} r_{\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6} r_{\alpha_4 + \alpha_5} r_{\alpha_4} \mathcal{C}, c_4 r_{1 - \alpha^+ + \alpha_2 + \alpha_4} r_{\alpha_2 + \alpha_4} r_{\alpha_4} \mathcal{C}. \}$$

Dabei ist  $c = \varepsilon_{\alpha_4}(z)$  ein durch die entsprechende Bedingung  $z = 1$  festgelegtes Element aus  $U_{\alpha_4}^{\mathcal{C}}(F)$ , und die  $u_i$  durchlaufen die Mengen  $U_{\alpha_i}^{\mathcal{C}}(F)$ .

### 13.5.5 Fixpunkte für die Klasse $6_p 6_p 3_p$

Wir übernehmen die Bezeichnungen aus Abschnitt 9.4.3. Es ist  $\Delta_1(w_{\Delta}) = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\}$  und

$$I_1 = \{\alpha_1, \alpha_6, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, -\alpha^+\},$$

$$I_2 = \{\alpha_4, \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_1 + \alpha_3, -(\alpha^+ - \alpha_2)\},$$

und

$$I_3 = \{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \\ \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, -(\alpha^+ - \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4), -(\alpha^+ - \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)\}.$$

Nach Proposition 12.19 werden die Kammern

$$\mathcal{C}, u_2 r_{\alpha_2} \mathcal{C}, u_3 r_{\alpha_3} \mathcal{C}, u_5 r_{\alpha_5} \mathcal{C}, u_3 u_2 r_{\alpha_2} r_{\alpha_3} \mathcal{C}, u_5 u_2 r_{\alpha_2} r_{\alpha_5} \mathcal{C}, u_5 u_3 r_{\alpha_3} r_{\alpha_5} \mathcal{C}, u_5 u_3 u_2 r_{\alpha_2} r_{\alpha_3} r_{\alpha_5} \mathcal{C}$$

punktweise fixiert für alle  $u_i \in U_{\alpha_i}^{\mathcal{C}}(F)$ .

**Tabelle 13.5.5.1.**

| $\mathcal{C}$  | $I_1$                        |     | $I_2$                        |     | $I_3$ |     | Fixiert        |
|----------------|------------------------------|-----|------------------------------|-----|-------|-----|----------------|
|                | $v$                          | $U$ | $v$                          | $U$ | $v$   | $U$ |                |
| $\alpha_1$     | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$ |     |                              |     |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2$     |                              |     |                              |     |       |     | $\times - (4)$ |
| $\alpha_3$     |                              |     |                              |     |       |     | $\times - (4)$ |
| $\alpha_4$     |                              |     | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |     |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_5$     |                              |     |                              |     |       |     | $\times - (4)$ |
| $\alpha_6$     | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$ |     |                              |     |       |     | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+$ | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$ |     |                              |     |       |     | $\circ - (1)$  |

| $r_{\alpha_2} \mathcal{C}$ | $I_1$                        |   | $I_2$                  |   | $I_3$ |     | Fixiert               |
|----------------------------|------------------------------|---|------------------------|---|-------|-----|-----------------------|
|                            | $v$                          | $U$                                     | $v$                    | $U$                                     | $v$   | $U$ |                       |
| $\alpha_1$                 | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$ |   |                        |   |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_3$                 |                              |   |                        |   |       |     | $\times - (4)$        |
| $\alpha_2 + \alpha_4$      |                              |   |                        | $\alpha_2 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |       |     | $\bar{z}_2 = 0 - (2)$ |
| $\alpha_5$                 |                              |   |                        |   |       |     | $\times - (4)$        |
| $\alpha_6$                 | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$ |   |                        |   |       |     | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2$  |                              | $-\alpha^+ + \alpha_2 \mapsto \alpha^+$ | $-\alpha^+ + \alpha_2$ |   |       |     | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_3}\mathcal{C}$ | $I_1$                        |   | $I_2$                 |   | $I_3$ |     | Fixiert               |
|---------------------------|------------------------------|---|-----------------------|---|-------|-----|-----------------------|
|                           | $v$                          | $U$                                     | $v$                   | $U$                                     | $v$   | $U$ |                       |
| $\alpha_1 + \alpha_3$     |                              | $\alpha_1 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_1$ | $\alpha_1 + \alpha_3$ |   |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_2$                |                              |   |                       |   |       |     | $\times$              |
| $\alpha_3 + \alpha_4$     |                              |   |                       | $\alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |       |     | $\bar{z}_3 = 0 - (2)$ |
| $\alpha_5$                |                              |   |                       |   |       |     | $\times - (4)$        |
| $\alpha_6$                | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$ |   |                       |   |       |     | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+$            | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$ |   |                       |   |       |     | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_5}\mathcal{C}$ | $I_1$                        |   | $I_2$                 |   | $I_3$ |     | Fixiert               |
|---------------------------|------------------------------|---|-----------------------|---|-------|-----|-----------------------|
|                           | $v$                          | $U$                                     | $v$                   | $U$                                     | $v$   | $U$ |                       |
| $\alpha_1$                | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$ |   |                       |   |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_2$                |                              |   |                       |   |       |     | $\times$              |
| $\alpha_3$                |                              |   |                       |   |       |     | $\times$              |
| $\alpha_4 + \alpha_5$     |                              |   |                       | $\alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_4$ |       |     | $\bar{z}_5 = 0 - (4)$ |
| $\alpha_5 + \alpha_6$     |                              | $\alpha_5 + \alpha_6 \mapsto -\alpha_6$ | $\alpha_5 + \alpha_6$ |   |       |     | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+$            | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$ |   |                       |   |       |     | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_2}r_{\alpha_3}\mathcal{C}$ | $I_1$  |   | $I_2$                  |                                  | $I_3$ |     | Fixiert               |
|---------------------------------------|--|---|------------------------|----------------------------------|-------|-----|-----------------------|
|                                       | $v$  | $U$                                     | $v$                    | $U$                              | $v$   | $U$ |                       |
| $\alpha_1 + \alpha_3$                 |  | $\alpha_1 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_1$ | $\alpha_1 + \alpha_3$  |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_3$                            |  |   |                        |                                  |       |     | $\times - \downarrow$ |
| $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$      | $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |   |                        | $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_5$                            |  |   |                        |                                  |       |     | $\times - (4)$        |
| $\alpha_6$                            | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$                       |   |                        |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2$             |  | $-\alpha^+ + \alpha_2 \mapsto \alpha^+$ | $-\alpha^+ + \alpha_2$ |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_2}r_{\alpha_5}\mathcal{C}$ | $I_1$  |   | $I_2$                  |                                  | $I_3$ |     | Fixiert               |
|---------------------------------------|--|---|------------------------|----------------------------------|-------|-----|-----------------------|
|                                       | $v$  | $U$                                     | $v$                    | $U$                              | $v$   | $U$ |                       |
| $\alpha_1$                            | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$                       |   |                        |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_3$                            |  |   |                        |                                  |       |     | $\times - (4)$        |
| $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$      | $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_4$ |   |                        | $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$ |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_5$                            |  |   |                        |                                  |       |     | $\times - \downarrow$ |
| $\alpha_5 + \alpha_6$                 |  | $\alpha_5 + \alpha_6 \mapsto -\alpha_6$ | $\alpha_5 + \alpha_6$  |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2$             |  | $-\alpha^+ + \alpha_2 \mapsto \alpha^+$ | $-\alpha^+ + \alpha_2$ |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_3}r_{\alpha_5}\mathcal{C}$ | $I_1$  |   | $I_2$                 |                                  | $I_3$ |     | Fixiert               |
|---------------------------------------|--|---|-----------------------|----------------------------------|-------|-----|-----------------------|
|                                       | $v$  | $U$                                     | $v$                   | $U$                              | $v$   | $U$ |                       |
| $\alpha_1 + \alpha_3$                 |  | $\alpha_1 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_1$ | $\alpha_1 + \alpha_3$ |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_2$                            |  |   |                       |                                  |       |     | $\times - (4)$        |
| $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$      | $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_4$ |   |                       | $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ |       |     | $\circ - (1)$         |
| $\alpha_5$                            |  |   |                       |                                  |       |     | $\times - \downarrow$ |
| $\alpha_5 + \alpha_6$                 |  | $\alpha_5 + \alpha_6 \mapsto -\alpha_6$ | $\alpha_5 + \alpha_6$ |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |
| $1 - \alpha^+$                        | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$                       |   |                       |                                  |       |     | $\circ - (1)$         |

| $r_{\alpha_2+\alpha_4}r_{\alpha_2}\mathcal{C}$ | $I_1$  |                        | $I_2$                                   |     | $I_3$ |     | Fixiert       |
|--|--|------------------------|---|-----|-------|-----|---------------|
|  | $v$  | $U$                    | $v$                                     | $U$ | $v$   | $U$ |               |
| $\alpha_1$                                     | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$                       |                        |   |     |       |     | $\circ - (1)$ |
| $\alpha_4$                                     |  |                        | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_2$            |     |       |     | $\circ - (1)$ |
| $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$               | $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_3$ |                        |   |     |       |     | $\circ - (1)$ |
| $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$               | $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_5$ |                        |   |     |       |     | $\circ - (1)$ |
| $\alpha_6$                                     | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$                       |                        |   |     |       |     | $\circ - (1)$ |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2$                      |  | $-\alpha^+ + \alpha_2$ | $-\alpha^+ + \alpha_2 \mapsto \alpha^+$ |     |       |     | $\circ - (1)$ |

| $r_{\alpha_3+\alpha_4}r_{\alpha_3}\mathcal{C}$ | $I_1$  |                       | $I_2$                                   |     | $I_3$ |     | Fixiert        |
|--|--|-----------------------|---|-----|-------|-----|----------------|
|  | $v$  | $U$                   | $v$                                     | $U$ | $v$   | $U$ |                |
| $\alpha_1 + \alpha_3$                          |  | $\alpha_1 + \alpha_3$ | $\alpha_1 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_1$ |     |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_4$                                     |  |                       | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_4$            |     |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$               | $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \mapsto -\alpha_3$ |                       |   |     |       |     | $\times - (4)$ |
| $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$               | $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_3$ |                       |   |     |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_6$                                     | $\alpha_6 \mapsto -\alpha_6$                       |                       |   |     |       |     | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+$                                 | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$                       |                       |   |     |       |     | $\circ - (1)$  |

| $r_{\alpha_4+\alpha_5}r_{\alpha_5}C$   | $I_1$  |  | $I_2$                                       |                              | $I_3$ |     | Fixiert  |
|--|--|--|---|------------------------------|-------|-----|--|
|  | $v$  | $U$  | $v$   | $U$                          | $v$   | $U$ |  |
| $\alpha_1$   | $\alpha_1 \mapsto -\alpha_1$                       |  |   |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_4$   |  |  | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_5$                |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$   | $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_2$ |  |   |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$   | $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \mapsto -\alpha_3$ |  |   |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_5 + \alpha_6$  |  | $\alpha_5 + \alpha_6$  | $\alpha_5 + \alpha_6 \mapsto -\alpha_6$     |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+$   | $-\alpha^+ \mapsto \alpha^+$                       |  |   |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $r_{\alpha_2}r_{\alpha_3}r_{\alpha_5}C$  | $I_1$  |  | $I_2$                                       |                              | $I_3$ |     | Fixiert  |
|  | $v$  | $U$  | $v$   | $U$                          | $v$   | $U$ |  |
| $\alpha_1 + \alpha_3$  |  | $\alpha_1 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_1$  | $\alpha_1 + \alpha_3$                       |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_3$   |  |  |   |                              |       |     | $\times - \downarrow$  |
| $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$                                    |  | $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$<br>$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$<br>$\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ | $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$ | $\alpha_4 \mapsto -\alpha_4$ |       |     | $\bar{z}_2 + \bar{z}_3 + z\bar{z}_5 = 0$<br>und<br>$\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{z}_5 = 1$ |
| $\alpha_5$   |  |  |   |                              |       |     | $\times - \downarrow$  |
| $\alpha_5 + \alpha_6$  |  | $\alpha_5 + \alpha_6 \mapsto -\alpha_6$  | $\alpha_5 + \alpha_6$                       |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2$  |  | $-\alpha^+ + \alpha_2 \mapsto \alpha^+$  | $-\alpha^+ + \alpha_2$                      |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $r_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}r_{\alpha_2}r_{\alpha_3}r_{\alpha_5}C$ | $I_1$  |  | $I_2$                                       |                              | $I_3$ |     | Fixiert  |
|  | $v$  | $U$  | $v$   | $U$                          | $v$   | $U$ |  |
| $\alpha_1 + \alpha_3$  |  | $\alpha_1 + \alpha_3 \mapsto -\alpha_1$  | $\alpha_1 + \alpha_3$                       |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$   | $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$                   |  |   |                              |       |     | $\circ (1)$  |
| $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$   | $\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5$                   |  |   |                              |       |     | $\circ (1)$  |
| $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$   | $\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$                   |  |   |                              |       |     | $\circ (1)$  |
| $\alpha_5 + \alpha_6$  |  | $\alpha_5 + \alpha_6 \mapsto -\alpha_6$  | $\alpha_5 + \alpha_6$                       |                              |       |     | $\circ - (1)$  |
| $1 - \alpha^+ + \alpha_2$  |  | $-\alpha^+ + \alpha_2 \mapsto \alpha^+$  | $-\alpha^+ + \alpha_2$                      |                              |       |     | $\circ - (1)$  |

Eine Bemerkung zur letzten Kammer  $C$ : Überprüft man, ob die zu  $C$  über die Wand  $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$  benachbarte Kammer von  $T^1(F)$  punktweise fixiert wird, so erhält man für die Komponente  $I_1$  die Bedingung  $\bar{z}_2 + \bar{z}_3 + \bar{z}_5 = 0$  und für die Komponente  $I_2$  die Bedingung  $\bar{z}_2\bar{z}_3\bar{z}_5 = 1$ . Diese beiden Gleichungen führen zu einer elliptischen Kurve über dem Restklassenkörper von  $F$  (siehe Abschnitt 13.5.6).

**Resultat 13.19.** Sei  $G$  eine einfache zusammenhängende spaltende Gruppe mit Wurzelsystem vom Typ  $E_6$  über dem  $p$ -adischen Körper  $F$ ,  $p$  hinreichend gut im Sinne von Proposition 12.14 und  $T$  ein primitiver, rein zahn verzweigter Torus in  $G$ , der durch die Klasse  $6_p6_p3_p$  in  $[BFW]$  beschrieben wird. Bei geeigneter Normierung besteht die Fixpunktmenge  $\mathcal{F}_T^1$  von  $T^1(F)$  in  $\mathcal{B}(G, F)$  aus den folgenden Kammern:

$$\mathcal{F}_T^1 = \{C, u_2r_{\alpha_2}C, u_3r_{\alpha_3}C, u_5r_{\alpha_5}C, u_3u_2r_{\alpha_2}r_{\alpha_3}C, u_5u_2r_{\alpha_2}r_{\alpha_5}C, u_5u_3r_{\alpha_3}r_{\alpha_5}C, u_5u_3u_2r_{\alpha_2}r_{\alpha_3}r_{\alpha_5}C, u_{2+4}r_{\alpha_2+\alpha_4}r_{\alpha_2}C, u_{3+4}r_{\alpha_3+\alpha_4}r_{\alpha_3}C, u_{4+5}r_{\alpha_4+\alpha_5}r_{\alpha_5}C, c_5c_3c_2u_{2+3+4+5}r_{\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}r_{\alpha_2}r_{\alpha_3}r_{\alpha_5}C\}.$$

Dabei durchlaufen die  $c_i = \varepsilon_{\alpha_i}(z_i)$  alle durch die beiden Bedingungen  $z_2 + z_3 + z_5 \equiv 0 \pmod{\pi_F}$  und  $z_2z_3z_5 \equiv 1 \pmod{\pi_F}$  festgelegten Elemente aus  $U_{\alpha_i}^C(F)$ , und die  $u_i$  durchlaufen die ganzen Mengen  $U_{\alpha_i}^C(F)$ .

### 13.5.6 Eine elliptische Kurve

Wir kommen noch einmal kurz auf die beiden Bedingungen

$$\begin{aligned} a + b + z &= 0 \\ abz &= 1 \end{aligned}$$

für Elemente  $a, b, z \in \kappa_F$  aus dem letzten Abschnitt zurück. Ersetzt man in der zweiten Gleichung  $z$  mit Hilfe der ersten Gleichung, so erhält man die Gleichung

$$ba^2 + b^2a + 1 = 0,$$

die offensichtlich keine Lösung besitzt für  $b = 0$ . Die zugehörige homogene Gleichung lautet

$$(13.2) \quad ba^2 + b^2a + c^3 = 0$$



und kann als Gleichung in  $\mathbb{P}^2(\kappa_F)$  aufgefaßt werden. Normiert man  $b = 1$ , so stehen die Lösungen der Gleichung in Bijektion zu den Lösungen der Gleichung  $a^2 + a + c^3 = 1$  und damit zu den  $\kappa_F$ -rationalen Punkten der elliptischen Kurve

$$Y^3 + X^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

**Bemerkung 13.20.** Die Anzahl der Kammern in  $\mathcal{F}_T^1$  aus Resultat 13.19 hängt von den  $\kappa_F$ -rationalen Punkten der durch  $Y^3 + X^2 - \frac{1}{4} = 0$  gegebenen elliptischen Kurve ab. Dabei bezeichnet  $\kappa_F$  den Restklassenkörper von  $F$ .



# Literaturverzeichnis

- [Ab] P. Abramenko, *Reduktive Gruppen über lokalen Körpern und Bruhat-Tits-Gebäude*, Bayreuther Mathematische Schriften 47, 1-69, 1994.
- [Asch] M. Aschbacher, *Chevalley Groups of type  $G_2$  as the Group of a Trilinear Form*, Journal of Algebra 109, 193-259, 1987.
- [Ball] J. Ballmann, *Berechnung der Kottwitz-Shelstad-Transferfaktoren für unverzweigte Tori in nicht zusammenhängenden reductiven Gruppen*, Dissertation, 2001.
- [BFW] J. Ballmann, D. Fulea, R. Weissauer, *Abstieg anisotroper Konjugationsklassen in Weylgruppen*, 1999.
- [Bo] A. Borel, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, 1991.
- [Bv] M.V. Borovoi, *Abelian Galois cohomology of reductive groups*, Mem.Amer.Math.Soc.626, 1998.
- [Bou] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbres de Lie*, Chs. 4, 5, 6, Hermann (1968).
- [BT1] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. I, Données radicielles valuées*, IHES Publ. Math. 41, 5-251, 1972.
- [BT2] F. Bruhat et J. Tits, *Groupes réductifs sur un corps local. II, Schémas en groupes. Existence d'une donnée radicielle valuée*, IHES Publ. Math. 60, 5-184, 1984.
- [Ca1] R.W. Carter, *Simple Groups of Lie Type*, John Wiley and Sons, 1972.
- [Ca2] R.W. Carter, *Conjugacy classes in the Weyl groups*, Comp. Math. 25, 1972.
- [Ca3] R.W. Carter, *Finite Groups of Lie Type*, John Wiley and Sons, 1985.
- [Ct] P. Cartier, *Representation of  $p$ -adic groups*, Proc. of Symp. in Pure Mathematics Vol. 33, part 1, 111-155, 1979.
- [Dy] E.B. Dynkin, *Semisimple subalgebras of semisimple Lie algebras*, Amer. Math. Soc. Transl., (Ser. 2) Vol. 6, 111-244, 1957.
- [Ga] P. Garrett, *Buildings and Classical Groups*, Chapman & Hall, 1997.
- [Ha] H. Hasse, *Zahlentheorie*, Akademie-Verlag, 1969.
- [HC] Harish-Chandra (notes by G. van Dijk), *Harmonic Analysis on reductive  $p$ -adic groups*, Springer Lecture Notes, Vol. 162, 1970.
- [Hum1] J.E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag, 1972.

- [Hum2] J.E. Humphreys, *Linear Algebraic Groups*, Springer-Verlag, 1981.
- [Hum3] J.E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [Hu] F. Hurst, *Fixpunkte anisotroper Tori im affinen Gebäude der  $SL_n$* , Diplomarbeit, Mannheim, 2001.
- [Ldv1] E. Landvogt, *A compactification of the Bruhat-Tits building*, Springer Lecture Notes, Vol.1619, 1996.
- [Ldv2] E. Landvogt, *Some functorial properties of the Bruhat-Tits building*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 518, 213-241, Walter de Gruyter, 2000.
- [Lang] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Springer-Verlag, 1986.
- [Ma] Y.I. Manin, *Cubic Forms*, North Holland, 2.Auflage, 1986.
- [Mil] J.S. Milne, *Arithmetic Duality Theorems*, Perspectives in Mathematics, Academic Press, 1986.
- [Nk] J. Neukirch, *Klassenkörpertheorie*, Bibliographisches Institut, 1969.
- [PR] V. Platonov and A. Rapinchuk, *Algebraic Groups and Number Theory*, Pure and Applied Mathematics Vol. 139, Academic Press, 1993.
- [Ro1] M. Ronan, *Lectures on Buildings*, Academic Press, 1989.
- [Ro2] M. Ronan, *Buildings: Main ideas and applications*, Bull. London Math. Soc. 24, 1992.
- [Se] J.-P. Serre, *Local Fields*, Springer-Verlag, 1979.
- [SS] P. Schneider und U. Stuhler, *Representation theory and sheaves on the Bruhat-Tits building*, IHES 85, p. 97-191, 1997.
- [SGA3,III] Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie, *Schémas en Groupes III*, Lecture Notes in Mathematics, 1962/64.
- [Sp1] T.A. Springer, *Reductive Groups*, Proc. of Symp. in Pure Mathematics Vol. 33, part 1, 29-69, 1979.
- [Sp2] T.A. Springer, *Linear Algebraic Groups*, Encyclopaedia of Math. Science Vol. 55, 1-121, 1993.
- [St1] R. Steinberg, *Regular Elements of Semisimple Algebraic Groups*, IHES Publ. Math. 25, 49-80, 1965.
- [St2] R. Steinberg, *Conjugacy Classes in Algebraic Groups*, Springer-Verlag, 1970.
- [T1] J. Tits, *Reductive Groups over Local Fields*, Proc. of Symp. in Pure Mathematics Vol. 33, part 1, 29-69, 1979.
- [T2] J. Tits, *Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Darstellungen*, Springer-Verlag, 1967.
- [W] R. Weissauer, *Reductive descent for unramified maximal tori*, Preprint.
- [Wes] U. Weselmann, *A double coset decomposition for the algebraic group  $G_2$* , Preprint, Heidelberg, 2002.