

INAUGURAL-DISSERTATION
zur
Erlangung der Doktorwürde
der
Naturwissenschaftlich-Mathematischen
Gesamtfakultät
der Ruprecht-Karls-Universität
Heidelberg

vorgelegt von
Dipl.-Phys. Alexandra Tachil
aus Grevesmühlen
Tag der mündl. Prüfung: 06.02.2008

Lineare Stabilitätsanalyse selbstgravitierender Akkretionsscheiben

Gutachter: Prof. Dr. Wolfgang J. Duschl
Prof. Dr. Burkhard Fuchs

Zusammenfassung

Lineare Stabilitätsanalyse selbstgravitierender Akkretionsscheiben

Die Existenz äußerst leuchtkräftiger Quasare bei sehr großen Rotverschiebungen, in deren Zentren Schwarze Löcher mit Massen bis über $10^9 M_{\odot}$ vermutet werden, führt auf die Frage nach dem Ursprung solcher Objekte. Das in dieser Arbeit betrachtete Modell für die Entstehung Schwarzer Löcher geht von einer Verschmelzung zweier gasreicher Galaxien und einer daraus resultierenden Scheibenakkretion aus. Unter Verwendung einer turbulenten β -Viskosität kann das Problem der erforderlichen kurzen Entwicklungszeitskalen gelöst werden. Bei der Simulation eines solchen massereichen Systems muss die Eigengravitation der Scheibe berücksichtigt werden. Bisher wurde die Poisson-Gleichung mittels einer einfachen Approximation, der Monopolnäherung, gelöst. Ziel dieser Arbeit ist, das Akkretionsscheibenmodell derart zu modifizieren, dass eine akkurate und numerisch effiziente Behandlung der Gravitation möglich wird. Der Einfluss der unterschiedlichen Methoden zur Berechnung der Gravitation auf die Simulationsergebnisse wird mittels linearer Stabilitätsanalyse untersucht. Dabei wird ein Parameterbereich, in dem stabile Scheibenevolutionen simuliert werden, eingeschränkt. Das entwickelte Modell wurde auf zwei unterschiedliche Scheibentypen angewandt, auf Scheiben in Aktiven Galaxienzentren und auf protostellare Akkretionsscheiben, um so die Bildung des während des Akkretionsprozesses entstehenden Zentralobjekts zu untersuchen. Im besonderen Blickpunkt steht dabei das Wachstum massereicher Schwarzer Löcher.

Abstract

Linear stability analysis of selfgravitating accretion disks

There exist luminous quasars at high redshifts which are presumably powered by accretion onto central black holes with masses beyond $10^9 M_{\odot}$. This poses the question of the origin of these objects. The model which is employed in this thesis assumes an initial merger of two gas rich galaxies with subsequent disk accretion. The required shortness of the evolution time scales are achieved by utilizing a turbulent β -viscosity. Simulating such a massive system necessitates the inclusion of selfgravity effects. However, current approaches use solutions of the Poisson equation only in the crude monopole approximation. The aim of this work is to modify the accretion disk model such that an accurate and efficient treatment of gravity becomes possible. Different approaches to implement gravity are investigated using a linear stability analysis. Thereby a parameter range can be restricted in which stable disk evolutions are simulated. The model is applied to two different kinds of disks, AGN disks and protostellar disks, in order to investigate the formation of the central object that evolves from the accretion process. In doing so the focus is addressed to the growth of super-massive black holes.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Akkretionsscheiben	1
1.2	Akkretionsprozess als Energiequelle	4
1.3	Aktivität in Galaxienkernen	4
1.3.1	Einheitliches Modell aktiver Galaxienkerne	5
1.3.2	System Schwarzes Loch-Zentralscheibe	7
1.4	Entstehung massereicher Schwarzer Löcher	8
1.5	Zielsetzung und Inhalt der Dissertation	8
2	Grundlagen der Akkretionsscheibentheorie	11
2.1	Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik	11
2.1.1	Massenerhaltung	12
2.1.2	Navier-Stokes-Gleichung	12
2.1.3	Energiegleichung	13
2.2	Scheibengeometrie	13
2.3	Scheibenentwicklungsgleichung	15
2.4	Gravitationsfeld	17
2.4.1	Poisson-Gleichung	18
2.4.2	Monopolnäherung	18
2.5	Viskosität in Scheiben	19
2.6	Eddington-Limit	20
2.7	Charakteristische Zeitskalen	22
3	Lineare Stabilitätsanalyse	25
3.1	Nichtlineare Systeme	25
3.2	Lösungsansatz für die Störungsterme	29
3.3	Aufstellen und Lösen des charakteristischen Eigenwertproblems	29
3.4	Stabilitätseigenschaften	30
4	Numerisches Lösungsverfahren	31
4.1	Reskalierung der radialen Koordinate	31
4.2	Diskretisierung	32
4.2.1	Diskretisierung der Gleichung für die radiale Geschwindigkeit	32
4.2.2	Diskretisierung der Massentransportgleichung	33

4.3	Numerische Stabilität	34
4.3.1	Zeitschrittbestimmung	34
4.3.2	Numerische Stabilitätsanalyse nach von Neumann	36
4.4	Randbedingungen	39
4.5	Anfangsbedingungen	39
5	Akkretionsscheiben Aktiver Galaxienzentren	41
5.1	Physikalische und numerische Simulationsparameter	41
5.2	Stabile Zeitentwicklung von Scheiben	42
5.3	Instabile Evolution	47
5.4	Analyse des Stabilitätsverhaltens	53
5.5	Entstehungszeitskalen Schwarzer Löcher	60
6	Protostellare Akkretionsscheiben	63
6.1	Simulationsparameter	63
6.2	η Carinae	64
6.3	Sonnensystem und Herbig Ae/Be Sterne	68
6.4	Konvergenzverhalten	69
6.5	Entstehungszeitskalen der Sterne	70
7	Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse	73
8	Ausblick	81
A	Herleitung der hydrodynamischen Grundgleichungen	85
A.1	Kontinuitätsgleichung	85
A.2	Navier-Stokes-Gleichung	86
B	Thermodynamische Druckkräfte	89
C	Berechnung der Jacobimatrix	93
D	Danksagung	95

1 Einleitung

In den Vorstellungen der Physik des 19. Jahrhunderts war die Gravitation die einzig vorstellbare Energiequelle in den Himmelskörpern. Man wusste jedoch damals schon, dass die Gravitation nicht ausreicht, um die Sonne mit genügend Energie für ihre gesamte Lebenszeit zu versorgen. Zu Beginn des 21. Jahrhunderts ist es die Gravitation, die wir untersuchen, weil sie die antreibende Kraft für eine Vielzahl der leuchtenden Objekte im Universum darstellt, für die die nukleare Energie der Sterne wiederum vollkommen unzureichend ist. Die äußerst effiziente Umwandlung von Gravitationsenergie in Strahlung während der Akkretion von Material auf ein gravitierendes Objekt wird als die Hauptenergiequelle für die verschiedenen Typen von Doppelsystemen angesehen. Weiterhin hat sich die Vorstellung, dass die Akkretion einen leistungsstarken Mechanismus für die Energieerzeugung in Aktiven Galaxienkernen und Quasaren darstellt, durchgesetzt. Diese Arbeit befasst sich mit Akkretionsphänomenen in massereichen Scheiben, deren Evolution durch die vorherrschende Eigengravitation innerhalb der Scheibe geprägt ist. Auf diesem Wege wird versucht, mehr über die Entstehungsprozesse in Aktiven Galaxienzentren und Quasaren zu lernen.

1.1 Akkretionsscheiben

Scheibenförmige Objekte, die die verschiedensten Geschwindigkeits- und Längenskalen besitzen, sind in unserem Universum allgegenwärtig: galaktische Scheibe unserer Galaxis, Scheiben in Aktiven Galaxienzentren, zirkumstellare Scheiben, Doppelsysteme und Ringsysteme um Planeten. Die Entstehung unseres eigenen Sonnensystems geht auf die Bildung einer protoplanetaren Akkretionsscheibe zurück. Nach der derzeit gängigen Theorie zur Entstehung einer solchen Scheibe ist es ausreichend, wenn eine kollabierende Wolke aus Gas und Staub nur eine geringfügige Eigenrotation besitzt, sodass es aufgrund der Zentrifugalkraft zur Ausbildung eines scheibenförmigen Objekts kommt. Dies ist die so genannte protoplanetare Scheibe, in deren Mitte der Protostern entsteht. Seit über 200 Jahren beschäftigen sich Forscher mit der theoretischen Beschreibung von Scheiben, um die Entstehungsgeschichte der eigenen protoplanetaren Akkretionsscheibe, aber auch der eigenen Galaxis - der Milchstraße, die ebenfalls eine Scheibenform besitzt - sowie die Entwicklung der zahlreichen scheibenförmigen Gebilde in unserem Universum besser verstehen zu können. Im Jahr 1755 beschrieb der deutsche Philosoph Immanuel Kant in seinem Werk *Allgemeine Naturgeschichte und Theorie des Himmels* die physikalischen Grundlagen von Akkretionsscheiben. Die ersten mathematischen Beschrei-

bungen der Akkretionsscheibentheorie formulierten Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts von Weizsäcker (1948) und Lüst (1952). Doch erst nach Ersetzen der molekularen Viskosität durch eine turbulente von Shakura & Sunyaev (1973) wurde eine physikalisch sinnvolle Beschreibung der Scheibenentwicklung möglich, da die Zeitskalen für Scheibenentwicklungen bei Verwendung einer molekularen Viskosität größer als die Hubblezeit werden. Seitdem konnten auf dem Gebiet der Akkretionsscheibentheorie durch eine Vielzahl von Forschungsarbeiten erhebliche Fortschritte verzeichnet werden.

Die erste Entdeckung von Akkretionsscheiben gelang Forschern bei der Beobachtung von kataklysmischen Veränderlichen. Das sind Sterne, deren Helligkeit um viele Größenordnungen variiert. Hierbei handelt es sich um binäre Sternsysteme, bei denen ein Primärstern von einem masseärmeren Sekundärstern umkreist wird. Bei solchen Systemen findet ein Massentransport vom Sekundär- zum Primärstern statt. Dabei kommt es zur Ausbildung einer Akkretionsscheibe. Eine detaillierte Beschreibung von Akkretion in Binärsystemen findet sich in (Frank, King, & Raine 2002).

Akkretionsscheiben kommen in den verschiedensten astrophysikalischen Umgebungen vor. Galaxien stellen die größten Akkretionsscheiben dar. Die Spiralarme einer Spiralgalaxie liegen beispielsweise in einer Scheibe. Die scheibenähnliche Form solcher Galaxien kommt besonders gut auf *Edge-on*-Aufnahmen zur Geltung. Dabei wird die Galaxie von der Seite beobachtet. In Abbildung 1.1 ist ein prominentes Beispiel einer solchen Spiralgalaxie dargestellt - die Sombrero Galaxie. Diese Galaxie ist ungefähr 28 Millionen



Abbildung 1.1: Die Sombrero-Galaxie ist eine Spiralgalaxie im Sternbild Jungfrau. Sie trägt im Messier-Katalog die Nummer M 104. Ein stark absorbierendes Staubband umgibt M 104 und verleiht der Galaxie ihr typisches Aussehen, das an einen mexikanischen Sombrero erinnert. Dieses Bild der Galaxie wurde mit dem Anglo-Australian Telescope aufgenommen.

Lichtjahre von uns entfernt und zählt zu den hellsten am Nachthimmel. Unsere eigene Galaxie, die Milchstraße, ist ebenfalls eine Spiralgalaxie und würde einem Beobachter außerhalb unserer Galaxie der oben abgebildeten Sombrero Galaxie ähnlich erscheinen, wenn dieser die Milchstraße von der Seite beobachten würde.

Die Zentren sehr heller, sehr aktiver Galaxien besitzen ebenfalls Akkretionsscheiben. Die Aktivität dieser leuchtkräftigen Aktiven Galaxienkerne (AGN für Active Galactic Nuclei) wird auf das Vorhandensein einer Akkretionsscheibe um ein massereiches Schwarzes Loch im Zentrum der Galaxie zurückgeführt. Abschnitt 1.3 geht auf diese Objekte genauer ein.

Die Beobachtung von protoplanetaren Akkretionsscheiben ist vor einigen Jahren erstmalig gelungen. In Abbildung 1.2 sind vier junge Sterne im Orionnebel, aufgenommen mit dem Hubble Space Telescope, dargestellt. Diese Scheiben befinden sich in einer Ent-

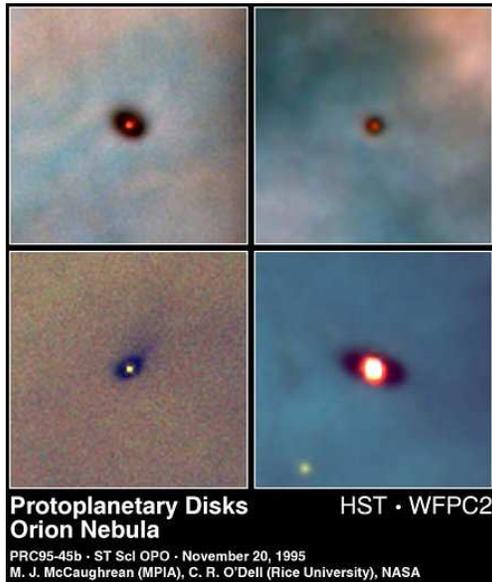


Abbildung 1.2: Zirkumstellare Scheiben um junge ($\leq 10^6$ yr) Sterne im Orionnebel (M 42) aufgenommen mit dem Hubble Space Telescope. Die Scheiben wurden von Hubble im Bereich des für das menschliche Auge sichtbaren Lichts beobachtet. Bereits ein geringer Anteil an Staub in den Scheiben genügt, um das sichtbare Licht zu absorbieren und die Scheiben dunkel erscheinen zu lassen. Das rote Glühen im Scheibenzentrum sind junge Sterne, die sich gebildet haben.

fernung von 1500 Lichtjahren von uns. Das Alter der Sterne im Zentrum dieser Scheiben wird auf 10^6 yr geschätzt (vgl. mit dem Alter der Sonne von $4.5 \cdot 10^9$ yr).

Ringsysteme um Planeten sind die kleinsten uns bekannten Scheiben. Abbildung 1.3 zeigt das Ringsystem von Saturn. Dieses Bild wurde 2004 von Cassini im Rahmen der

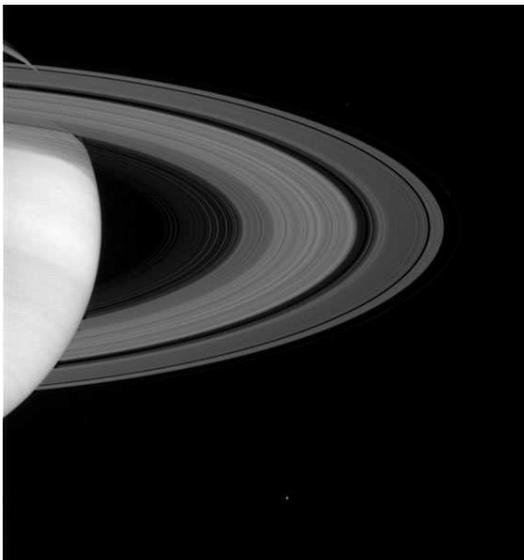


Abbildung 1.3: Der Planet Saturn und das ihm umgebene Ringsystem von Cassini im Mai 2004 aufgenommen. Der vereiste Mond Enceladus ist unterhalb der Ringe zu erkennen.

Cassini-Huygens-Mission zum Saturn & Titan aufgenommen. Einzelne Ringsegmente können in guter Näherung durch die Akkretionsscheibentheorie beschrieben werden.

1.2 Akkretionsprozess als Energiequelle

Die Akkretion auf ein kompaktes Objekt ist ein sehr effizienter Mechanismus, um energiereiche Strahlung zu erzeugen. Im Folgenden wird die Effizienz für diesen Umwandlungsprozess abgeschätzt. Für ein Objekt der Masse M ist die maximale Gravitationsenergie, die durch Akkretion von Materie der Masse m in einem Abstand r freigesetzt wird

$$\Delta E_{\text{Akkretion}} = \frac{1}{2} \frac{GMm}{r} = \xi mc^2 \quad (1.1)$$

mit der Gravitationskonstanten G , der Lichtgeschwindigkeit c und der Effizienz (oder Wirkungsgrad) $\xi = GM/(2rc^2)$. Die andere Hälfte der Gravitationsenergie verbleibt im Inneren der Scheibe in der Keplerschen Bahnbewegung.

Im Falle von AGNs ist das kompakte Objekt im Scheibenzentrum ein Schwarzes Loch. Die Materie kann sich dem Schwarzschildradius r_S des Schwarzen Lochs

$$r_S = \frac{2GM}{c^2} \quad (1.2)$$

nähern, bis die Bahnbewegung in der Scheibe instabil wird. Für die Effizienz erhält man mit Hilfe des Schwarzschildradius (1.2) folgenden Ausdruck

$$\xi = \frac{r_S}{4r}. \quad (1.3)$$

Die letzte stabile Kreisbahn r für das Scheibenmaterial liegt bei $r = 3r_S$. Damit ergibt sich folgender Wert für die Effizienz

$$\xi = \frac{1}{12} \approx 0.1. \quad (1.4)$$

Diese Abschätzung gilt für nicht-rotierende Schwarze Löcher (Schwarzschild-Metrik). Im Falle rotierender Schwarzer Löcher (Kerr-Metrik) beträgt der Wirkungsgrad entsprechend dem Drehimpuls $\xi = 0.06 - 0.42$ (Unsöld & Baschek 1999).

Die Energie, die in astrophysikalischen Umgebungen durch thermonukleare Reaktionen der Masse m freigesetzt wird, ist

$$\Delta E_{\text{nukl}} = 0.007mc^2. \quad (1.5)$$

Dies entspricht lediglich einem Bruchteil der im Akkretionsprozess frei werdenden Energie. Somit ist Akkretion der effizienteste Mechanismus zur Energiegewinnung.

1.3 Aktivität in Galaxienkernen

Die Vielfalt der uns bekannten Galaxien ist enorm. In den Kernen der meisten dieser extragalaktischen Objekte kann eine ausgeprägte Aktivität beobachtet werden. Diese Aktivität ist in ihrer Stärke je nach Art der betrachteten Galaxie äußerst unterschiedlich,

zeichnet sich jedoch immer durch Emission nichtthermischer Strahlung in sämtlichen Wellenlängen und in der Erzeugung hochenergetischer Teilchen aus. Diese Beobachtungen werden in den Kerngebieten „normaler“ Galaxien, Seyfert-Galaxien, Radiogalaxien, BL Lac-Objekten, von Quasaren usw. gemacht. Diese leuchtkräftigen Zentren der Objekte bezeichnet man als Aktive Galaxienkerne. Obwohl die Spektren jedes AGN-Typs an sich markante Merkmale besitzen und sich die Aktivität der einzelnen Objekte quantitativ deutlich voneinander unterscheidet, werden immer mehr Objekte beobachtet, die Eigenschaften verschiedener AGN-Typen in sich vereinen. Beispielsweise sind Quasare, die nur eine geringe Leuchtkraft aufweisen, schwer von Seyfert-1-Galaxien zu unterscheiden. Da die Kernaktivitäten dieser unterschiedlichen Objekte in ihren Grundzügen viele Gemeinsamkeiten aufweisen, ist die Annahme naheliegend, dass man es hierbei mit einem universellen Phänomen zu tun hat.

Beobachtungen zeigen, dass sich die Quellen dieser Aktivitäten in einer wenige pc ausgedehnten Region in den Galaxienzentren befinden. Auf hochaufgelösten Aufnahmen dieser Regionen im Radiobereich erkennt man axialsymmetrische Strukturen. Aus diesen Beobachtungen wird geschlussfolgert, dass die Galaxienkerne aus zwei oder mehreren Komponenten bestehen. Unter Berücksichtigung, dass bereits viele Objekte mit Eigenschaften verschiedener AGN-Klassen gefunden wurden, lässt dies wiederum vermuten, dass geometrische Effekte bei der Beobachtung und auch unterschiedlich starke Ausprägung der beobachteten Komponenten die Unterschiede der AGN-Typen verursachen. Mit dem Standardmodell eines AGNs versuchen Astronomen in einem einzigen physikalischen Modell die Vielzahl der AGN-Klassen zu vereinheitlichen (siehe Antonucci 1993, Antonucci & Miller 1985, Urry & Padovani 1995).

1.3.1 Einheitliches Modell aktiver Galaxienkerne

Das vereinheitlichte Modell für einen AGN ist in Abbildung 1.4 grafisch dargestellt. Zu beachten ist, dass sowohl die vertikale, als auch die horizontale Skalierung logarithmisch ist. Nur so passen alle Komponenten des AGNs in die Darstellung. Das Vereinheitlichungsmodell umfasst folgende charakteristische Elemente:

- Im Zentrum des AGNs existiert ein massereiches *Schwarzes Loch* mit einer Masse von $10^6 M_\odot$ bis $10^9 M_\odot$.
- Um das Schwarze Loch befindet sich die *Akkretionsscheibe*, die die zentrale Hauptquelle der starken Kontinuumsstrahlung darstellt. Die außerordentlich hohe Leuchtkraft eines AGNs wird auf die Umwandlung von Gravitationsenergie in Strahlung im Akkretionsprozess zurückgeführt.
- In zwei verschiedenen Regionen um das Schwarze Loch gibt es *Gaswolken*, die von der zentralen Hauptquelle angeregt bzw. ionisiert werden. Abhängig von der Bahngeschwindigkeit dieser Wolken werden breite Emissionslinien (BLR *broad line region*; hohe Geschwindigkeit in der Nähe der kompakten Masse) und schmale

Linien (NLR *narrow line region*; weiter vom Schwarzen Loch entfernt) beobachtet. In den BLR kann es aufgrund des *Scheibenwinds* zu einer Beschleunigung der Gaswolken kommen. In Illenseer (2006) findet sich eine detaillierte Diskussion der Scheibenwinde.

- Das Zentralgebiet ist von einem dicken Ring aus molekularem Gas und Staub umgeben. Die Achse dieses *Staubtorus* liegt parallel zur Rotationsachse der Zentralscheibe und zur Ausstoßrichtung der Jets. Somit verhindert der gegenüber optischer Strahlung ausgesprochen opake Torus bei Aufnahmen unter einem großen Winkel zur Achsenrichtung den direkten Blick auf das Zentralgebiet. Durch die zentrale Hauptquelle geheizt, stellt der Staubtorus den Hauptbeitrag der emittierten Infrarotstrahlung des AGNs dar.
- Gebündelter Materieausstoß, die sogenannten *Jets*, aus dem Zentralgebiet erreicht eine Länge auf der kpc- bis hin zur Mpc-Skala. Der Materialfluss aus der Akkretionsscheibe füttert die Jets, die sich nahezu mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten können. Die beobachtete Emission nichtthermischer Synchrotronstrahlung geht auf die Jets zurück.

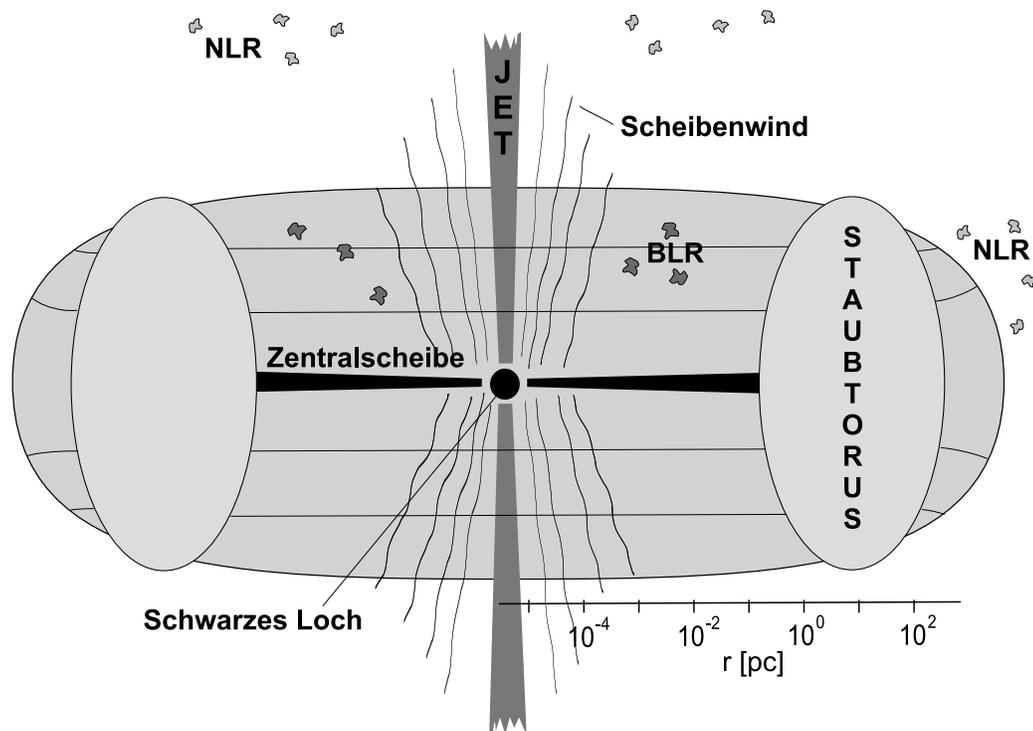


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung eines Aktiven Galaxienkerns.

1.3.2 System Schwarzes Loch-Zentralscheibe

In den Aktiven Galaxienkernen des lokalen Universums bestimmt die Akkretion von Masse das Wachstum der Schwarzen Löcher (Marconi et al. 2004). Mit diesem Anwachsen während der Akkretionsphase, in der Gravitationsenergie sehr effektiv in Strahlung umgewandelt wird, geht eine enorme Aktivität in solchen AGNs einher, was sich schließlich in der hohen beobachtbaren Leuchtkraft, aber auch in den periodischen Veränderungen derselben äußert. Das Maximum dieser Aktivität während der Entwicklung unseres Universums liegt für die unterschiedlichen AGN-Klassen bei verschiedenen Rotverschiebungen. Die Masse des Systems Scheibe-Zentralobjekt scheint dabei eine entscheidende Rolle zu spielen. Lange bevor die große Vielfalt an normalen Galaxien und Seyfert-Galaxien sichtbar wird, betreten die leuchtkräftigen Quasare den kosmischen Schauplatz. Soweit uns bekannt ist, besitzen die Quasare die massereichsten Schwarzen Löcher. Das Maximum ihrer Aktivität erreichen sie bei einer Rotverschiebung $z \sim 2$. Zu dieser Zeit der kosmologischen Entwicklung sind die leuchtkräftigen Quasare im Universum vorherrschend (Hasinger 1998, Fan et al. 2001). Die Leuchtkraft dieser Objekte kann Werte bis zu $10^{48} \text{ erg s}^{-1}$ erreichen (Vestergaard 2004), wobei die Massen solcher Schwarzen Löcher bis zu $10^9 M_\odot$ betragen können. Masseärmere Schwarze Löcher, beispielsweise in Seyfert-Galaxien, besitzen ihr Aktivitätsmaximum bereits bei Rotverschiebung $z < 1$. Dieses frühe Auftreten sehr massereicher Schwarzer Löcher in Quasaren, lange bevor weniger schwere Objekte erscheinen, nennt man das antihierarchische Wachstum Schwarzer Löcher. Der Vergleich von Beobachtungen im Röntgenbereich (Hasinger, Miyaji, & Schmidt 2005) mit Aufnahmen im Bereich der sichtbaren/UV-Strahlung (Wolf et al. 2003) lässt ähnliche Schlussfolgerungen zu. Umso geringer die Leuchtkraft eines AGNs ist, desto niedriger ist die Masse des Schwarzen Lochs und desto später in der Entwicklung des Universums wird das Maximum der Aktivität erreicht. Die massereichsten und leuchtkräftigsten Objekte, die Quasare, findet man somit vor allem bei großen Rotverschiebungen. Es gibt keine Hinweise darauf, dass eine Verstärkung der Leuchtkräfte der am weitesten rotverschobenen Quasare durch Gravitationslinseneffekte stattfindet (White et al. 2005).

Beobachtungen des frühen Universums bei großen Rotverschiebungen $z > 6$ führten zur Entdeckung von Galaxien bei $z \sim 6.56$ Hu et al. (2002) und Quasaren bei $z \sim 6.4$ (Fan et al. 2003, Willott et al. 2003). Diese Rotverschiebungen repräsentieren ein Universum, das nicht älter als 10^9 yr ist. Die Massen dieser zentralen Schwarzen Löcher in Quasaren mit den größten Rotverschiebungen liegen im Bereich von $(2 - 6) \cdot 10^9 M_\odot$ (Barth et al. 2003). Die Entwicklungszeiten solcher Objekte, die mit den früheren α -Standardscheibenmodellen (siehe beispielsweise Shlosman, Begelman, & Frank 1990) vorhergesagt werden, sind viel länger, als das Universum bei $z \approx 6$ alt ist. Deshalb wurde der Einfluss nicht-axialsymmetrischer Strukturen wie beispielsweise Balken, die zu einer Beschleunigung des Akkretionsprozesses führen, untersucht (Shlosman, Frank, & Begelman 1989, Chakrabarti & Wiita 1993). Dies steht jedoch im Widerspruch zu dem symmetrischen Materieausstoß der AGNs in Form von Jets.

1.4 Entstehung massereicher Schwarzer Löcher

Das Modell für die Entstehung und Entwicklung massereicher Schwarzer Löcher wird in Duschl & Strittmatter (2006) beschrieben. Für die Bildung eines Schwarzen Lochs und der damit verbundenen immensen Aktivität innerhalb der Galaxie wird eine beträchtliche Menge an Gas benötigt. Numerische Simulationen (Barnes & Hernquist 1996 & 1998, Barnes 2002) zeigen, dass bei der Verschmelzung zweier gasreicher Galaxien

(a) das interstellare Gas, durch Gezeitenkräfte angetrieben, Balken bildet, in denen es sehr schnell Drehimpuls abgibt und schließlich auf der dynamischen Zeitskala ins Zentralgebiet der neu gebildeten Galaxie strömt,

(b) dieses Gas trotzdem noch genug Drehimpuls besitzt, sodass es zur Ausbildung einer Akkretionsscheibe kommt.

Die innerhalb einiger 10^2 pc um das Zentrum der Galaxie gebildete Gasscheibe kann eine Masse bis über $10^{10} M_{\odot}$ enthalten. Viskose Reibung in dieser Scheibe verursacht das Strömen des Materials in Richtung Zentrum, wo es für das Anwachsen des Schwarzen Lochs zur Verfügung steht. Mit den oben genannten Parametern der Anfangsscheibenmasse und der Ausdehnung wird eine solche Scheibe zumindest am Anfang der Entwicklung selbstgravitierend sein. Ähnlich massereiche Scheiben wurden bereits beobachtet (Scoville 1999). Außerdem fand man durch Untersuchungen der Morphologie einiger Galaxien, die Aktive Zentren besitzen, eindeutige Hinweise auf zurückliegende Wechselwirkungen mit anderen Galaxien (Veilleux et al. 2006).

Dieses Szenario stellt den Ausgangspunkt des Modells für die Entstehung massereicher Schwarzer Löcher dar. Es wird angenommen, dass in der Gasscheibe nach der Galaxienverschmelzung kein massereiches Schwarzes Loch existiert. Unter Verwendung einer turbulenten β -Viskosität (Duschl, Strittmatter, & Biermann 1998 & 2000 und unabhängig dazu auch Richard & Zahn 1999) kann das Problem des Standardmodells, das zu lange Entwicklungszeitskalen zum Ergebnis hat (siehe Abschnitt 1.3.2), gelöst werden. Das antihierarchische Wachstum von Schwarzen Löchern ergibt sich in diesem Modell ganz natürlich. Außerdem ermöglicht die Symmetrie einer solchen Scheibe einen gleichmäßigen Materieausfluss in Form der Jets.

1.5 Zielsetzung und Inhalt der Dissertation

Die Existenz äußerst leuchtkräftiger Quasare, deren Energie durch Akkretion auf ein massereiches Schwarzes Loch ($> 10^9 M_{\odot}$) bereitgestellt wird, bei sehr großen Rotverschiebungen führt auf die Frage nach dem Ursprung solcher Objekte und wie es möglich ist, dass bereits im frühen Universum so kompakte Objekte geformt werden konnten. Haiman & Loeb (2001) erklären die Präsenz dieser massereichen Schwarzen Löcher im Rahmen hierarchischer Verschmelzungsprozesse von Galaxien. Hierbei ist das Wachstum von Galaxien vor allem auf die Verschmelzung mit anderen Galaxien zurückzuführen. Duschl & Strittmatter (2006) schlagen ein alternatives Szenario für die Entstehung sol-

cher Schwarzen Löcher vor. Ihr Akkretionsscheibenmodell bietet den Vorteil, dass Jets, die in vielen Quasaren beobachtet werden, auf eine natürliche Weise erklärt werden können. Die Ergebnisse ihrer numerischen Simulationen von zeitlichen Entwicklungen selbstgravitierender Akkretionsscheiben und dem damit verbundenen Wachstum Schwarzer Löcher zeigen, dass diese massereichen Scheiben genau die Eigenschaften besitzen, um die oben beschriebenen Beobachtungen von Quasaren zu erklären. Mit Hilfe ihres Modells finden Duschl & Strittmatter heraus, dass die Entwicklungszeit von Schwarzen Löchern eine inverse Funktion der Anfangsscheibenmasse ist und erklären somit das antihierarchische Wachstum Schwarzer Löcher.

Bei der Simulation eines solchen massereichen Systems muss die Eigengravitation der Scheibe berücksichtigt werden. Duschl & Strittmatter lösen in dem von ihnen vorgeschlagenen Akkretionsscheibenmodell die Poisson-Gleichung mittels einer sehr einfachen Approximation, der Monopolnäherung (Mineshige & Umemura 1997). Das Ziel dieser Arbeit ist es, dieses Modell derart zu modifizieren, dass eine akkurate (und bezüglich des Rechenaufwands effiziente) Berechnung des Gravitationspotenzials möglich wird. Der Einfluss der unterschiedlichen Methoden zur Berechnung der Gravitation auf die Simulationsergebnisse soll untersucht werden. Da die Implementierung der gewählten Methode zur Lösung der Poisson-Gleichung (Pierens & Huré 2004) zu einer instabilen Scheibenevolution führen kann, obwohl bei Verwendung der Monopolnäherung die numerischen Simulationen durchweg stabil laufen, wird das Akkretionsscheibenmodell für selbstgravitierende Scheiben auf Stabilität untersucht. Dafür wird eine dem Modell angepasste lineare Stabilitätsanalyse entwickelt. Da die Gleichungen durch ihre Nichtlinearität zu kompliziert für eine analytische Untersuchung sind, fließen in die Stabilitätsbetrachtungen auch einige numerische Aspekte ein. Unter diesen Umständen könnte eine Differenzierung zwischen physikalischen und numerischen Ursachen für instabiles Verhalten schwer möglich sein. Bei der Diskussion der Ergebnisse muss dies berücksichtigt werden. Die Vorgehensweise der Untersuchungen in dieser Arbeit sind im Folgenden in Form der Kapitelinhalte zusammengefasst:

- Kapitel 2 stellt die physikalischen und mathematischen Grundlagen der Akkretionsscheibentheorie vor. Es wird gezeigt, wie man aus den grundlegenden Gleichungen der Strömungsmechanik das in dieser Arbeit verwendete Modell zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung von Akkretionsscheiben herleiten kann. Wichtige Bestandteile dieses eindimensionalen hydrodynamischen Modells sind die akkurate Berechnung der Gravitationskräfte und die Viskositätsbeschreibung mittels β -Viskosität. Das Kapitel endet mit der Darstellung einiger wichtiger Aspekte zum Eddington-Limit und zu den für Akkretionsscheiben charakteristischen Zeitskalen.
- Kapitel 3 hat zum Ziel, die mathematischen Methoden, mit der das Gleichungssystem für das verwendete Akkretionsscheibenmodell auf Stabilität untersucht wird, einzuführen. Ausgangspunkt ist eine lineare Stabilitätsanalyse. Aufgrund der Nichtlinearität der Gleichungen des Modells ist eine analytische Lösung aus-

sichtslos. Deshalb wird eine Analyse des Stabilitätsproblems unter Zuhilfenahme numerischer Konzepte hergeleitet.

- Kapitel 4 beschreibt die verwendeten numerischen Methoden. Mit Hilfe einer expliziten Diskretisierung erfolgt die numerische Berechnung der Gleichungen. Die anschließende Analyse der numerischen Stabilität hat die Bestimmung des Zeitschritts zum Ergebnis. Abschließend erfolgt eine Diskussion der Rand- und Anfangsbedingungen.
- Kapitel 5 behandelt die Evolution von Akkretionsscheiben in AGNs. Beginnend mit einer ausführlichen Diskussion stabiler und nicht stabiler Scheibenevolutionen, zeigt sich, dass es einen systematischen Übergang von stabiler in instabile Akkretion gibt. Dieser wird mittels linearer Stabilitätsanalyse eingehend untersucht. Im Bereich einer stabilen zeitlichen Scheibenentwicklung werden die Anwachszeiten Schwarzer Löcher für unterschiedliche Anfangsscheibenmassen bestimmt.
- In Kapitel 6 wird das entwickelte Akkretionsscheibenmodell auf protostellaren Scheiben angewandt. Dies dient der Überprüfung der Resultate des fünften Kapitels für Scheiben in AGNs. Die zeitlichen Entwicklungen werden anhand von drei gewählten Beispielsternen numerisch simuliert. Auch für solche Scheibenkonfigurationen existiert der Übergang von stabiler in instabile Akkretion. Abschließend wird die Entstehungszeit der betrachteten Sterne ermittelt und diskutiert. Die Ergebnisse für AGN-Scheiben können durch die Analysen in diesem Kapitel bestätigt werden.
- Kapitel 7 fasst die Ergebnisse dieser Arbeit zusammen. Abschließend werden die Resultate ausführlich diskutiert.

Das letzte Kapitel gibt einen Ausblick auf zukünftige Aufgaben bezüglich des in dieser Arbeit untersuchten Themas: die Stabilität selbstgravitierender Akkretionsscheiben.

2 Grundlagen der Akkretionsscheibentheorie

Die folgenden Abschnitte behandeln die für die Theorie von Akkretionsscheiben wichtigen physikalischen und mathematischen Grundlagen. Zuerst werden die Grundgleichungen der Strömungslehre ganz allgemein vorgestellt, um sie dann für das eindimensionale hydrodynamische Modell, auf dem diese Arbeit basiert, zu modifizieren. Nachdem aus den Grundgleichungen die Massentransportgleichung hergeleitet wurde, folgt eine genaue Beschreibung zur Berechnung der Gravitationskräfte und der Viskosität. Das Kapitel endet mit der Darstellung einiger wichtiger Aspekte zum Eddington-Limit und zu den für Akkretionsscheiben charakteristischen Zeitskalen.

2.1 Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

Neben der Kontinuitätsgleichung, die die Erhaltung der Masse beschreibt, und der Gleichung für die innere Energie ist die Navier-Stokes-Gleichung eine der Grundgleichungen der Strömungsmechanik, die das makroskopische Verhalten viskoser Strömungen von Flüssigkeiten und Gasgemischen beschreiben. Die Herleitung dieser Gleichungen erfolgt axiomatisch aus den universellen Bilanzsätzen der Masse, des Impulses, des Drehimpulses und der Energie unter Berücksichtigung auftretender externer Kräfte und energetischer Quellen und Senken. Eine ausführliche Herleitung findet sich in Landau & Lifshitz (1987).

Benannt wurde die Navier-Stokes-Gleichung nach Claude Navier und George Stokes, die beide unabhängig voneinander in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts den Impulssatz für Fluide aufstellten. Unter der Annahme, dass das betrachtete Fluid aus unendlich vielen materiellen Punkten besteht und die in diesem Kontinuum auftretenden makroskopisch interessierenden Längenskalen viel größer sind als der mittlere Abstand zweier Fluidteilchen, können die Grundgleichungen in differentieller Schreibweise dargestellt werden. Diese im Rahmen der Kontinuumshypothese gemachten Annahmen sind in Strömungen mit sehr niedrigen Dichten oder im Falle auftretender Stoßfronten nicht erfüllt, und es muss, um eine Erhaltung der fundamentalen Größen zu gewährleisten, auf andere Lösungsmethoden übergegangen werden.

Ausgangspunkt für die Beschreibung von Akkretionsströmungen sind die in kompakter Vektorform geschriebenen Erhaltungsgleichungen, die ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen 2. Ordnung repräsentieren. Räumliche Ableitungen wer-

den unter Zuhilfenahme von Nabla-Operatoren $\vec{\nabla}$ und $\vec{\nabla} \cdot$ (Gradient und Divergenz) dargestellt.

2.1.1 Massenerhaltung

Die erste Grundgleichung ist die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (2.1)$$

wobei hier ρ die Massendichte und \vec{v} das Geschwindigkeitsfeld des Fluids darstellt. Sie sagt aus, dass bei einer Strömung durch eine Volumeneinheit die gesamte Masse erhalten bleiben muss. Eine Änderung der Masse innerhalb dieser Volumeneinheit kann nur durch Massenzu- oder -abfluss durch die Volumenoberfläche erreicht werden.

2.1.2 Navier-Stokes-Gleichung

Die Angabe einer allgemeinen Bewegungsgleichung eines viskos strömenden Fluids erfordert eine genaue Kenntnis aller wirkenden Kräfte. Diese können die verschiedensten Ursachen haben:

- Druckkräfte aufgrund auftretender Druckdifferenzen an unterschiedlichen Orten (thermodynamischer Druck P)
- Gravitationskräfte (Gravitationspotenzial Φ)
- Reibungskräfte, wenn die Strömungsgeschwindigkeit \vec{v} räumlich nicht konstant ist (viskose Spannungstensor $\tilde{\sigma}$)

Für die Impulserhaltungsgleichung erhält man

$$\frac{\partial(\rho \vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v} \vec{v}) = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} - \rho \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.2)$$

Hier ist $\vec{v} \vec{v}$ das dyadische Produkt des Geschwindigkeitsvektors mit sich selbst. Mit Hilfe der Gleichung (2.1) kann die obige Gleichung wie folgt umgeschrieben werden

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} - \rho \vec{\nabla} \Phi. \quad (2.3)$$

Die effektive Beschleunigung, die durch die linke Seite dieser Gleichung beschrieben wird, setzt sich zusammen aus der zeitlichen Änderung der Strömungsgeschwindigkeit $\partial \vec{v} / \partial t$ am gleichen Ort und der Konvektionsbeschleunigung $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$.

Wie bereits oben beschrieben, treten zwischen benachbarten Schichten des strömenden Fluids Reibungskräfte auf, wenn sich die Geschwindigkeiten der Schichten unterscheiden. Und so erwartet man, dass der viskose Spannungstensor oder Reibungstensor $\tilde{\sigma}$ von den

räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeit abhängig ist. Solange die Geschwindigkeitsgradienten klein sind, kann angenommen werden, dass nur die erste räumlich Ableitung der Geschwindigkeit relevant ist. Da $\tilde{\sigma}$ für eine konstante Strömungsgeschwindigkeit verschwindet, muss der Reibungstensor eine lineare Funktion der Geschwindigkeitsableitungen sein. Weiterhin darf es in einem starr rotierenden Fluid keine innere Reibung geben. All diese Annahmen bedingen einen viskosen Spannungstensor der Form (in kartesischen Koordinaten)

$$\tilde{\sigma}_{ik} = \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l}. \quad (2.4)$$

Bei dieser Darstellung wurde von der Einsteinschen Summenkonvention Gebrauch gemacht, d.h., über alle doppelt auftretenden Indizes in einem Term wird summiert. δ_{ik} ist das Kroneker-Delta. Die Koeffizienten η und ζ werden als erste und zweite Viskosität (bzw. Scherviskosität oder Scherzähigkeit und Druckzähigkeit bzw. Volumviskosität) bezeichnet. Die Scherviskosität (dynamische Viskosität) wird oft als kinematische Viskosität in der Kombination $\nu = \eta/\rho$ verwendet. Eine umfassende Behandlung der kinematischen Viskosität in Bezug auf Akkretionsscheiben erfolgt in Abschnitt 2.5. Die Volumviskosität spielt nur bei expansiven und kompressiblen Störungen eine Rolle. Jedoch ist ihr Effekt immer sehr klein, weshalb sie im Allgemeinen und auch in dieser Arbeit nicht berücksichtigt wird. Der Vollständigkeit halber sei gesagt, dass unter Vernachlässigung des viskosen Terms aus der Navier-Stokes-Gleichung (2.3) die Euler-Gleichung wird.

2.1.3 Energiegleichung

Abschließend vervollständigt die Energieerhaltungsgleichung die Bilanzgleichungen. Sie beschreibt den Transport der inneren Energiedichte e .

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (e\vec{v}) = -P\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \tilde{\sigma} \vec{\nabla} \vec{v} + \vec{\nabla} \cdot (\kappa \vec{\nabla} T) \quad (2.5)$$

Der zweite Term auf der linken Seite repräsentiert wie bei der vorherigen Erhaltungsgleichung den konvektiven Anteil, während der erste Term auf der rechten Seite der Gleichung die Kompressionsarbeit, die von der Fluidsströmung verrichtet wird, darstellt. Die Aufheizung durch viskose Dissipation beschreibt $\tilde{\sigma} \vec{\nabla} \vec{v}$, wobei hier wieder das dyadische Produkt gemeint ist. Der letzte Term steht für den Energietransport durch Wärmeleitung, wobei κ der Wärmeleitfähigkeitskoeffizient und T die Temperatur ist.

2.2 Scheibengeometrie

Infolge der geometrischen Gestalt von Akkretionsscheiben ist die Wahl eines zylindrischen Koordinatensystems (r, φ, z) , dessen Ursprung sich im Scheibenzentrum befindet, naheliegend. Zur Vereinfachung wird nun die Annahme gemacht, dass die Scheibe rotationssymmetrisch ist und somit können alle Ableitungen in azimuthaler Richtung vernachlässigt werden, d.h. $\partial/\partial\varphi \equiv 0$.

Weiterhin wird von einer Spiegelsymmetrie bezüglich der Zentralebene der Scheibe ausgegangen. Dies führt zur Definition der halben Dicke der Scheibe $h(r)$ am Radius r . In dieser Arbeit werden ausschließlich dünne Scheibe, für die folgende Relation gilt $h(r)/r \ll 1$, betrachtet. In Abbildung 2.1 ist schematisch eine solche Akkretionsscheibe dargestellt.

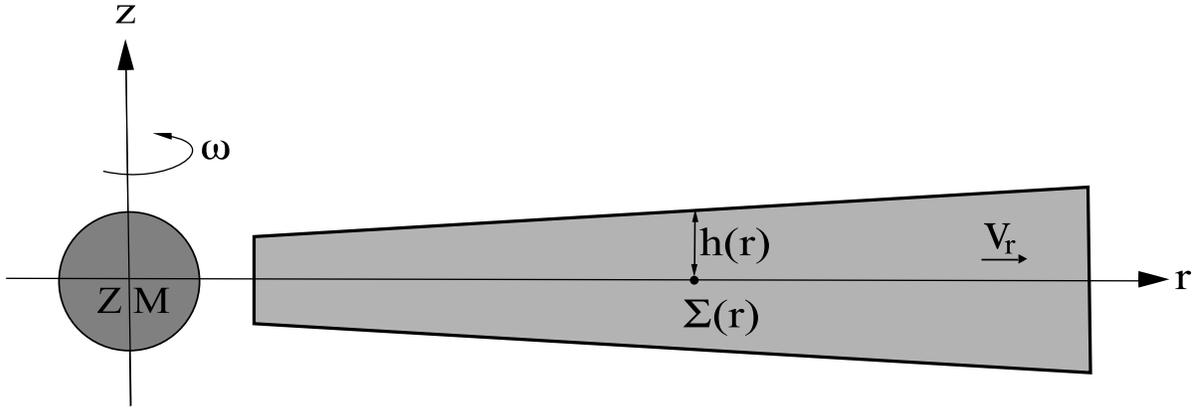


Abbildung 2.1: Schematische Darstellung einer rotierenden Akkretionsscheibe. Im Koordinatenursprung befindet sich die Zentralmasse ZM. Am Radius r besitzt die Scheibe die Flächendichte $\Sigma(r)$ und die vertikale Ausdehnung $h(r)$, beginnend von der Zentralebene der Scheibe. Der Massentransport in radialer Richtung erfolgt mit der Geschwindigkeit v_r .

In dünnen Scheiben sind die Druck- und Temperaturgradienten überwiegend in vertikaler Richtung ausgerichtet. Da der Material- und Drehimpulstransport dagegen hauptsächlich in radialer Richtung verläuft, entkoppelt die vertikale von der radialen Scheibenstruktur. Alle verwendeten Gleichungen können deshalb im Rahmen der Einzonennäherung in vertikaler Richtung integriert werden (eine Diskussion dieser Näherung findet sich in Huré & Galliano 2001). Die Flächendichte $\Sigma(r, t)$, die die Masse pro Einheitsfläche angibt, wird demzufolge definiert als

$$\Sigma(r, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(r, z, t) dz. \quad (2.6)$$

Terme, die Ableitungen in z -Richtung enthalten, werden ebenfalls vernachlässigt, da bei der Integration in vertikaler Richtung die jeweiligen Integranden am oberen und unteren Scheibenrand ($h, -h$) auszuwerten sind und diese dort null sein sollen. Die physikalische Annahme dahinter ist, dass am Scheibenrand alle in dieser Arbeit betrachteten Größen verschwinden müssen.

Mit der Wahl des Koordinatensystems erhält man die folgenden Komponenten des Strömungsgeschwindigkeitsvektors $\vec{v} = (v_r, v_\varphi, v_z)$. Da es keinen vertikalen Masseneinfall geben soll und immer hydrostatisches Gleichgewicht gilt (siehe Abschnitt 2.7), wird die

Geschwindigkeit in z -Richtung null gesetzt. Weiterhin wird angenommen, dass die Geschwindigkeiten in azimuthaler und radialer Richtung unabhängig von der z -Koordinate sind ($v_r(r, t)$ und $v_\varphi(r, t)$).

2.3 Scheibenentwicklungsgleichung

Aufgrund der Wahl des Koordinatensystems muss die Darstellung der Bewegungsgleichungen in Zylinderkoordinaten erfolgen. Die mathematischen Operationen ($\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla} \cdot$) sowie die Herleitung der Komponenten des viskosen Spannungstensors in zylindrischen Koordinaten finden sich z.B. in Spurk (1996).

Der Gradient eines Skalars Φ ist

$$\text{grad } \Phi = \vec{\nabla} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z, \quad (2.7)$$

wobei \vec{e}_i den Einheitsvektor in i -Richtung darstellt. Die Divergenz des Vektors \vec{v} wird gegeben durch

$$\text{div } \vec{v} = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(v_z r)}{\partial z} \right). \quad (2.8)$$

Weiterhin wird die Divergenz eines Tensors für die Berechnung der Komponenten der Navier-Stokes-Gleichung benötigt. Für die Divergenz des Tensors σ folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \sigma &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{rr} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} - \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right) \vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\sigma_{r\varphi}}{r} \right) \vec{e}_\varphi \\ &+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(\sigma_{rz} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right) \vec{e}_z. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Die Komponenten des viskosen Spannungstensors sind

$$\tilde{\sigma}_{rr} = 2\eta \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right), \quad (2.10)$$

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = 2\eta \left(\frac{2}{3} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \right), \quad (2.11)$$

$$\tilde{\sigma}_{zz} = 2\eta \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right) \right), \quad (2.12)$$

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\sigma}_{\varphi r} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right), \quad (2.13)$$

$$\tilde{\sigma}_{rz} = \tilde{\sigma}_{zr} = \eta \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right), \quad (2.14)$$

$$\tilde{\sigma}_{z\varphi} = \tilde{\sigma}_{\varphi z} = \eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right). \quad (2.15)$$

Unter Zuhilfenahme der Relationen für die Ableitungen können nun die Grundgleichungen, die für das Scheibenmodell in dieser Arbeit verwendet werden, für das gewählte Koordinatensystem aufgestellt werden. Mit den Annahmen des vorherigen Abschnittes ($\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = v_z = 0$ und die Integration in vertikaler Richtung) erhält man das folgende Gleichungssystem. Die genaue Herleitung dieser Beziehungen wird im Anhang A beschrieben.

Kontinuitätsgleichung

Aus der Gleichung für die Massenerhaltung (2.1) kann folgende auf das Modell angepasste Erhaltungsgleichung hergeleitet werden

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Sigma v_r r)}{\partial r} = 0. \quad (2.16)$$

Bewegungsgleichungen

Für die r - und φ -Komponente der Navier-Stokes-Gleichung (2.2) erhält man unter Verwendung der vorherigen Relationen die folgenden Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \\ \frac{4}{3} \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) + \frac{\partial(\Sigma \nu)}{\partial r} \frac{2}{3\Sigma} \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) & \end{aligned} \quad (2.17)$$

und

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} = \frac{1}{\Sigma r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right), \quad (2.18)$$

wobei p der vertikal integrierte Druck ist.

Um eine stabile Scheibe zu ermöglichen, wird gefordert, dass in radialer Richtung die nach außen gerichtete Zentrifugalkraft gleich der nach innen gerichteten Gravitationskraft ist. Die Bewegungsgleichung (2.17) vereinfacht sich somit erheblich und man erhält die Gleichung

$$\frac{v_\varphi^2}{r} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = -g_r. \quad (2.19)$$

Hierbei ist g_r die Gravitationsbeschleunigung in radialer Richtung. Man kann zeigen, dass auftretende Druckkräfte in geometrisch sehr dünnen Scheiben vernachlässigbar sind (siehe Anhang B).

Es ist möglich, die Kontinuitätsgleichung (2.16) und die Bewegungsgleichung (2.18) derart zu kombinieren, dass die Lösungen für Σ und v_r voneinander entkoppelt sind (Pringle 1981). Hierfür wird zunächst die Gleichung (2.18) nach v_r umgestellt

$$v_r = \frac{\frac{1}{\Sigma r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right) - r \frac{\partial v_\varphi}{\partial t}}{\frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r}}. \quad (2.20)$$

Mit dieser Gleichung kann nun die radiale Geschwindigkeit in der Kontinuitätsgleichung ersetzt werden und man erhält folgende von v_r unabhängige Gleichung, die die zeitliche Entwicklung der Flächendichte Σ angibt

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right) - r^3 \Sigma \frac{\partial v_\varphi}{\partial t}}{\frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r}} \right] = 0. \quad (2.21)$$

Zur weiteren Vereinfachung wird die zeitliche Ableitung der azimuthalen Geschwindigkeit nicht berücksichtigt, da die lokalen zeitlichen Änderungen der Flächendichte $\Sigma(r, t)$ auf einer sehr viel kürzeren Zeitskala stattfinden als die zeitliche Änderung des Gravitationsfeldes. Dieses Feld, und somit aufgrund der Beziehung (2.19) auch die Rotationsgeschwindigkeit v_φ , wird sich erst wesentlich ändern, wenn global Masse innerhalb des Systems Zentral- und Scheibenmasse umverteilt wird. Somit vereinfacht sich Gleichung (2.21) zu

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right)}{\frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r}} \right] = 0. \quad (2.22)$$

Dies ist die eindimensionale Scheibenentwicklungsgleichung für geometrisch dünne Scheiben, die den Massentransport in radiale Richtung beschreibt. Es handelt sich hierbei um eine der Diffusionsgleichung verwandte nichtlineare partielle Differentialgleichung. Jedoch verkompliziert die Kopplung der Materialkonstanten ν an die Lösung die Gleichung immens (siehe Abschnitt 2.5), sodass Lösungsmethoden für Diffusionsgleichungen in diesem Fall nicht verwendet werden können. Die Gleichung (2.22) stellt die Grundgleichung des in dieser Arbeit verwendeten Akkretionsscheibenmodells dar.

2.4 Gravitationsfeld

Das Lösen der Entwicklungsgleichung (2.22) setzt eine genaue Kenntnis der wirkenden Gravitationskräfte voraus. In dem System Zentralmasse-Akkretionsscheibe muss neben dem Gravitationsfeld des Zentralobjekts die Eigengravitation der Scheibe berücksichtigt werden. Die Gravitationsbeschleunigung in radialer Richtung setzt sich aus genau diesen zwei Anteilen zusammen

$$g_r = g_r^{\text{Scheibe}} + g_r^{\text{ZM}}. \quad (2.23)$$

Die Gravitationsbeschleunigung der Zentralmasse M_{ZM} im Abstand r berechnet sich wie folgt

$$g_r^{\text{ZM}} = -\frac{GM_{\text{ZM}}}{r^2}. \quad (2.24)$$

Im radialen Scheibeninnenbereich wird die Anziehung der zentralen Masse gegenüber der Selbstgravitation der Scheibe dominieren. Je größer die Scheibenmasse im Vergleich zur Zentralmasse ist, desto kleiner wird der radiale Abstand zur Zentralmasse, ab welchem die Scheibe in den selbstgravitierenden Bereich übergeht. In diesem Regime muss die Poisson-Gleichung für die Eigengravitation der Scheibe gelöst werden.

$$\Delta\Phi = 4\pi G\rho \quad \leftrightarrow \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{g} = -4\pi G\rho \quad (2.25)$$

2.4.1 Poisson-Gleichung

Aus der integralen Form der Poisson-Gleichung lässt sich die Gravitationsbeschleunigung der Scheibe wie folgt bestimmen

$$\vec{g}^{\text{Scheibe}}(\vec{r}) = G \int \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r}' - \vec{r})}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3\vec{r}', \quad (2.26)$$

wobei \vec{r} und \vec{r}' dreidimensionale Ortskoordinaten sind. Für unendlich dünne, axial symmetrische Scheiben kann aus der obigen Gleichung der folgende Ausdruck für die radiale Beschleunigung in der äquatorialen Ebene in Zylinderkoordinaten hergeleitet werden (Durand 1964)

$$g_r^{\text{Scheibe}}(r) = \frac{G}{r} \int_{r_{\text{in}}}^{r_{\text{out}}} \sqrt{\frac{R}{r}} \Sigma(R) k \left[\frac{E(k)}{w} - K(k) \right] dR \quad (2.27)$$

mit

$$k = \frac{2\sqrt{Rr}}{R+r} \quad \text{und} \quad w = \frac{R-r}{R+r}.$$

$K(k)$ und $E(k)$ sind die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art. Das Lösen der Gleichung (2.27) kann zu Schwierigkeiten führen, da der Integrand auf der rechten Seite der Gleichung für $r = R$ singulär wird. Pierens & Huré (2004) schlagen mit der *density-splitting*-Technik eine numerisch sehr komfortable und effiziente Methode zur Lösung des Problems vor. Die Genauigkeit der zu berechnenden Gravitationsbeschleunigung ist ausschließlich von der Qualität der radialen Integration abhängig.

2.4.2 Monopolnäherung

Die einfachste Approximation der Gleichung (2.27) führt zur sogenannten Monopolnäherung (Mineshige & Umemura 1997). Für die Berechnung der Gravitationsbeschleunigung

der Scheibe am Radius r wird die Poisson-Gleichung für eine sphärisch symmetrisch verteilte Scheibenmasse $M_{\text{Scheibe}}(r)$ innerhalb dieses Radius gelöst. Die Masse der Scheibe bis zum Radius r wird wie folgt berechnet

$$M_{\text{Scheibe}}(r) = \int_0^r 2\pi r \Sigma dr. \quad (2.28)$$

Bei einer derart verteilten Masse, kann außerhalb des Radius r liegende Masse vernachlässigt werden. Dies führt zur folgenden Berechnung der radialen Gravitationsbeschleunigung

$$g_r = -\frac{G(M_{\text{ZM}} + M_{\text{Scheibe}}(r))}{r^2}. \quad (2.29)$$

2.5 Viskosität in Scheiben

In Akkretionsscheiben wird der Drehimpulstransport von innen nach außen durch viskose Reibung ermöglicht. Die zeitliche Entwicklung von Scheiben und die damit verbundene viskose Zeitskala (siehe Abschnitt 2.7) werden durch die Scherviskosität ν bestimmt. Da die molekulare Viskosität eine erheblich lange Entwicklungszeit für Akkretionsscheiben mit sich bringt (länger als die Hubblezeit), wurde schließlich von Shakura & Sunyaev (1973) eine isotrope turbulente Viskosität als Ursache der Reibung herangezogen. Ganz allgemein kann die Viskosität als Produkt der charakteristischen turbulenten Längenskala l_{turb} und der turbulenten Geschwindigkeitsskala v_{turb} geschrieben werden

$$\nu = v_{\text{turb}} l_{\text{turb}}. \quad (2.30)$$

In der Viskositätsbeschreibung von Shakura & Sunyaev entspricht die viskose Längenskala einem Bruchteil der Scheibendicke h und die Geschwindigkeit einem Bruchteil der Schallgeschwindigkeit c_s . Dieser Ansatz zur Bestimmung der Viskosität wird auch die α -Parametrisierung genannt

$$\nu = \alpha c_s h. \quad (2.31)$$

Für diese isotrope Unterschallturbulenz ergibt sich somit folgende Bedingung für den α -Parameter $\alpha \leq 1$, wobei $\log(\alpha) = -1 \pm 1$ typische Werte sind. Die Beschreibung von nicht-selbstgravitierenden Akkretionsscheiben mittels α -Viskosität erwies sich als sehr erfolgreich. Trotz vieler ergebnisreicher Anwendungen führt die α -Viskosität zu unphysikalischen Ergebnissen und zu außerordentlich großen viskosen Zeitskalen, sobald die Scheibenmasse nicht mehr gegenüber der Zentralmasse vernachlässigbar ist. Duschl, Strittmatter, & Biermann (1998, 2000) (und unabhängig dazu auch Richard & Zahn 1999) schlagen eine Verallgemeinerung der Shakura-Sunyaev-Parametrisierung vor, die sogenannte β -Viskosität. Dieser Ansatz, der immer noch eine Parametrisierung darstellt, löst die Probleme der α -Viskosität des unphysikalischen Übergangs in das selbstgravitierende Regime und der zu großen Zeitskalen. Die Annahme, dass die Turbulenz isotrop

ist, wird fallen gelassen, wobei $l_{\text{turb}} \propto r$ die typische Längenskala ist. Für die typische Geschwindigkeitsskala wird $v_{\text{turb}} \propto v_\varphi$ gewählt. Somit ergibt sich für die β -Viskosität folgende Relation

$$\nu = \beta v_\varphi r. \quad (2.32)$$

Aus der Strömungslehre ist bekannt, dass der Übergang von laminarer in turbulente Strömung durch die Reynolds-Zahl

$$\Re = \frac{v_\varphi r}{\nu} \quad (2.33)$$

beschrieben wird. Turbulenz tritt auf, wenn die kritische Reynolds-Zahl (\Re_{krit}) erreicht wird. In diesem Fall erhält man durch Umstellen der Gleichung (2.33) folgenden Ausdruck für die Viskosität

$$\nu = \frac{1}{\Re_{\text{krit}}} v_\varphi r, \quad (2.34)$$

wobei der Vergleich mit der Gleichung (2.32) zu folgender Definition des Parameters $\beta = \Re_{\text{krit}}^{-1}$ führt. Aus Experimenten ist der Bereich der Reynolds-Zahl, in dem laminare in turbulente Strömung umschlägt, gut bekannt ($\Re_{\text{krit}} \approx 10^2 - 10^3$).

Das Auftreten von turbulenten Überschallgeschwindigkeiten ist nicht möglich, da es in solchen Strömungen zur Entwicklung von Stoßwellen kommt, die zu einer Dämpfung führen. Somit ist die Schallgeschwindigkeit c_s die obere Grenze der turbulenten Geschwindigkeit. In diesem Fall, der auch als stoßdissipativer Grenzfall (Duschl, Strittmatter, & Biermann 2000) bezeichnet wird, geht die β -Viskosität in die klassische Shakura-Sunyaev-Viskosität über.

2.6 Eddington-Limit

Das in dieser Arbeit verwendete Akkretionsscheibenmodell erlaubt eine Akkretion des durch die Scheibe transportierten Materials auf das Zentralobjekt, sobald dieses Material den Scheibeninnenrand erreicht. Jedoch gibt es eine obere Grenze, die diese Akkretionsrate beschränkt, das sogenannten Eddington-Limit. Das Material kann nicht auf das Zentralobjekt akkretiert werden, wenn der nach innen gerichteten Gravitation ein zu großer, durch die Abstrahlung des Zentralobjekts verursachter, Strahlungsdruck entgegenwirkt. Für die theoretische Beschreibung des klassischen Eddington-Limits kann folgende Abschätzung der Größenordnung gemacht werden (Frank, King, & Raine 2002). Ausgangspunkt dieser Herleitung sind die Annahmen, dass die Akkretion stationär und sphärisch ist, sowie das Vorhandensein ionisierten Wasserstoffs als Hauptbestandteil der Scheibenmaterie, sodass Thomsonstreuung an freien Elektronen der dominierende Wechselwirkungsprozess zwischen der Strahlung und dem zu akkretierenden Material ist. Die Kraft, die aufgrund der Strahlung auf ein Elektron im Abstand r zur Zentralmasse wirkt, ist gegeben durch

$$F_{\text{rad}} = \frac{L\sigma_{\text{T}}}{4\pi cr^2}, \quad (2.35)$$

wobei σ_T der Wirkungsquerschnitt der Thomsonstreuung und L die Leuchtkraft des Zentralobjekts sind. Auf ein Proton wirkt effektiv dieselbe Kraft, da die Protonen infolge der elektromagnetischen Wechselwirkung an die Elektronen gekoppelt sind. Somit wirkt die durch die Strahlung verursachte Kraft (2.35) auf ein Elektron-Proton-Paar. Die in die entgegengesetzte Richtung wirkende Gravitationskraft auf dieses Paar ist

$$F_{\text{grav}} = -\frac{GM_{\text{ZM}}(m_{\text{p}^+} + m_{\text{e}^-})}{r^2} = -\frac{GM_{\text{ZM}}m_{\text{p}^+}}{r^2}. \quad (2.36)$$

Solange die Gravitationskraft die dominierende Kraft darstellt, kann Materie auf das zentrale Objekt akkretiert werden. Mit steigender Leuchtkraft wird sich für eine bestimmte Grenzleuchtkraft L_{Edd} ein Kräftegleichgewicht einstellen. In diesem Fall ist das Eddington-Limit erreicht. Für diese Grenzleuchtkraft erhält man

$$L_{\text{Edd}} = 4\pi cGM_{\text{ZM}}m_{\text{p}^+}/\sigma_T \cong 1.3 \cdot 10^{38} (M_{\text{ZM}}/M_{\odot}) \text{ erg s}^{-1}. \quad (2.37)$$

Akkretionsleuchtkraft

Durch Akkretion von Materie auf ein zentrales Objekt kann sehr effizient Gravitationsenergie in Strahlung umgewandelt werden. Ist das Zentralobjekt ein Stern, ergibt sich für den Fall, dass die gesamte kinetische Energie in Strahlung umgewandelt wird, für die Akkretionsleuchtkraft

$$L_{\text{Akkretion}} = \frac{GM_{\text{ZM}}\dot{M}}{r_*}, \quad (2.38)$$

wobei r_* der Sternradius ist. Für die Akkretionsrate \dot{M} am Eddington-Limit folgt

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}} r_*}{GM_{\text{ZM}}}. \quad (2.39)$$

Im Falle der Akkretion auf ein Schwarzes Loch wird r_* mit dem Schwarzschildradius identifiziert. Dieser Abstand bezieht sich auf eine Region um das Schwarze Loch, in der einfallende Materie, aber auch Licht aufgrund der Gravitation nicht wieder entweichen können. Da ein Großteil der Gravitationsenergie hinter dem sogenannten Ereignishorizont verschwinden kann, anstatt in Strahlungsenergie umgewandelt zu werden, wird die dimensionslose Größe ξ eingeführt. Sie macht eine Aussage darüber, wie effizient Gravitationsenergie in Strahlung umgewandelt werden kann. Gewöhnlich wird eine Effizienz von ungefähr $\xi = 0.1$ für Aktive Galaxienkerne angenommen (siehe Herleitung in Abschnitt 1.2). Zusammen mit dem Schwarzschildradius

$$r_* = r_S = \frac{2GM_{\text{ZM}}}{c^2} \quad (2.40)$$

ergibt sich für die Akkretionsrate eines Schwarzen Lochs

$$\dot{M}_{\text{Edd}} = \frac{L_{\text{Edd}} r_*}{\xi 2GM_{\text{ZM}}} = \frac{L_{\text{Edd}}}{\xi c^2}. \quad (2.41)$$

Eine Diskussion des klassischen Eddington-Limits sowie eine realistischere Beschreibung der Akkretion auf das Zentralobjekt findet sich in Heinzeller & Duschl (2007).

2.7 Charakteristische Zeitskalen

In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Zeitskalen in Akkretionsscheiben zusammengestellt.

Viskose Zeitskala

Materie breitet sich in radialer Richtung durch die Scheibe unter dem Einfluss des viskosen Drehmoments auf der viskosen Zeitskala τ_ν aus. Sie ist somit ein Maß für die Akkretionsdauer. Mit Hilfe der Gleichung (2.22) soll die Größenordnung dieser Zeitskala abgeschätzt werden. Hierfür setzt man die Approximationen $\partial\Sigma \sim \Sigma$, $\partial t \sim \tau_\nu$ und $\partial r \sim r$ in die Scheibenentwicklungsgleichung ein und erhält

$$\frac{\Sigma}{\tau_\nu} = \frac{\Sigma\nu}{r^2}, \quad (2.42)$$

beziehungsweise ergibt sich für die viskose Zeitskala

$$\tau_\nu = \frac{r^2}{\nu}. \quad (2.43)$$

Aus Beobachtungen von sehr massereichen Schwarzen Löchern, die Massen bis zu $10^{10}M_\odot$ besitzen, weiß man, dass diese in Quasaren bereits 10^9 yr nach der Entstehung des Universums existierten (Barth et al. 2003). Dies gibt somit eine obere Grenze für die viskose Zeitskala solcher Systeme an.

Dynamische Zeitskala

Für die meisten Scheibenkonfigurationen ist die dynamische Zeitskala die kürzeste charakteristische Zeitskala. Sie bestimmt die Zeit, die für den Umlauf von Materie in azimuthaler Richtung um das Scheibenzentrum gebraucht wird

$$\tau_{\text{dyn}} = \frac{r}{v_\varphi} = \frac{1}{\omega}. \quad (2.44)$$

Beispielsweise dauert der Umlauf der Sonne um das Zentrum der Milchstraße ungefähr $2 \cdot 10^8$ yr. Für Regionen in Spiralarmen, die weiter entfernt vom Galaktischen Zentrum liegen, erhält man entsprechend längere dynamische Zeitskalen. Der Stern S2, der sich in einem Abstand von nur 17 Lichtstunden von Sgr A* befindet, schafft es hingegen, das Schwarze Loch im Galaktischen Zentrum in nur 15 Jahren auf einer gebundenen Keplerschen Bahn zu umrunden (Schödel et al. 2002). Als Beispiel für eine dynamische Zeitskala in stellaren Scheiben dient der Umlauf von Pluto um die Sonne. Dieser Zwergplanet braucht etwa 250 yr, um die Sonne einmal vollständig zu umrunden.

Hydrostatische Zeitskala

Die Zeitskala, auf der sich ein gestörtes hydrostatisches Gleichgewicht in vertikaler Richtung wieder einstellt, ist die hydrostatische Zeitskala

$$\tau_z = \frac{h}{c_s}. \quad (2.45)$$

Man kann zeigen, dass die hydrostatische Zeitskala ungefähr die Größenordnung der dynamischen Zeitskala besitzt (Frank, King, & Raine 2002). Damit gehört sie ebenfalls zu den kürzesten Zeitskalen in Akkretionsscheiben.

Der Vollständigkeit halber seien noch die thermische und die chemische Reaktionszeitskalen erwähnt. Die thermische Zeitskala gibt die Zeitdauer an, bis sich thermisches Gleichgewicht einstellt. Chemische Reaktionen laufen auf der chemischen Reaktionszeitskala ins Gleichgewicht. Die zwei letzten Zeitskalen spielen jedoch für die Betrachtungen in dieser Arbeit keine Rolle.

3 Lineare Stabilitätsanalyse

In der Praxis bezeichnet man Strömungsvorgänge als asymptotisch stabil, wenn sich die Felder in den betrachteten Flüssigkeiten bzw. Gasen über einen langen Zeitraum nicht ändern. In diesem Fall dürfen kleine Störungen wie z.B. Brown'sche Bewegung oder Auswirkungen der Randschichten keine langfristigen Änderungen auf den Strömungszustand bewirken. Alle Schwankungen der Strömungsfelder werden zeitlich zu null gedämpft. Wird der Strömungszustand hingegen durch eine zeitlich anwachsende Störung verändert, ist die Strömung instabil.

Ob eine mathematische Lösung eines Strömungsproblems auch in der Realität, in der zumindest sehr kleine Schwankungen der Felder auf natürliche Weise entstehen, Bestand hat, kann mit Hilfe der mathematischen Stabilitätsanalyse überprüft werden. Eine solche lineare Stabilitätsanalyse untersucht die Entwicklung von Störungen, die als Abweichung von einem bestimmten Zustand eines dynamischen Systems, hier der sogenannte Grundzustand, in Erscheinung treten. Solch ein Grundzustand könnte etwa ein periodischer Bewegungszustand sein. Nur eine mathematisch stabile Grundlösung ist auch physikalisch sinnvoll.

Im Folgenden wird die Vorgehensweise (vorgestellt in Bormann 2003) bei der in diesem Kapitel behandelten linearen Stabilitätsanalyse schematisch zusammengefasst:

- Bestimmung der Grundlösung
- Diskretisierung des Systems
- Linearisierung des gestörten Systems um die Grundlösung
- Ansatz für die Störungsterme
- Aufstellen des charakteristischen Eigenwertproblems
- Lösen des Eigenwertproblems
- Interpretation des Stabilitätsverhaltens

3.1 Nichtlineare Systeme

Ausgangspunkt der linearen Stabilitätsanalyse ist das im vorherigen Kapitel hergeleitete Gleichungssystem für das verwendete Akkretionsscheibenmodell, das in der Tabelle 3.1

Scheibenentwicklungsgleichung	$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{\partial (v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right)}{\frac{\partial (v_\varphi r)}{\partial r}} \right] = 0$
Viskosität	$\nu = \beta v_\varphi r$
Radiale Bewegungsgleichung	$\frac{v_\varphi^2}{r} = -g_r$
Gravitationsbeschleunigung	$g_r = g_r(\Sigma, r)$

Tabelle 3.1: Gleichungssystem zur Beschreibung des Akkretionsscheibenmodells

zusammengefasst ist. Allgemein kann dieses Gleichungssystem der Form (3.1) mit der Anfangsbedingung (3.2) geschrieben werden.

$$\frac{\partial \Sigma(r, t)}{\partial t} = f \left\{ \Sigma(r, t), \frac{\partial \Sigma(r, t)}{\partial r}, \frac{\partial^2 \Sigma(r, t)}{\partial r^2}, \dots \right\} \quad (3.1)$$

$$\Sigma(r, t = 0) = \Sigma_A(r) \quad (3.2)$$

Da die Gleichung (3.1) nichtlinear ist, muss zuerst eine Linearisierung dieser Gleichung erfolgen. Dies geschieht mittels Taylor-Entwicklung der Funktion f um die Grundlösung Σ_0 . Diese lineare Stabilitätsanalyse stellt im Prinzip eine Näherung des Stabilitätsproblems dar, denn nichtlineare Effekte, die durch das Linearisieren keine Auswirkungen mehr haben, könnten zu einer Stabilisierung beitragen. Eine genauere Beschreibung des Stabilitätsverhaltens würde man mit einer nichtlinearen Stabilitätsanalyse erreichen.

Bestimmung der Grundlösung

Die auf Stabilität zu untersuchende Grundlösung Σ_0 wird auf analytischem oder numerischem Wege aus der Gleichung (3.1) bestimmt. Im Allgemeinen soll die Grundlösung stationär sein, sodass auftretende zeitliche Veränderungen als Ursache eines instabilen Verhaltens interpretiert werden können. Da die in dieser Arbeit behandelten Akkretionsströmungen nicht stationär sind, ist auch die Grundlösung von der Zeit abhängig. Aufgrund der Nichtlinearität der Gleichungen bei Problemen im Bereich der Fluidynamik ist eine analytische Lösung oft aussichtslos und damit bleibt nur die numerische Analyse des Problems. Als Grundlösung wird hier die numerische Lösung der Differentialgleichung (3.1) verstanden

$$\frac{\partial \Sigma_0(r, t)}{\partial t} - f \{ \Sigma_0(r, t), \Sigma_0'(r, t), \Sigma_0''(r, t), \dots \} = 0 \quad (3.3)$$

mit

$$\begin{aligned}\Sigma'_0(r, t) &= \partial \Sigma_0(r, t) / \partial r \\ \Sigma''_0(r, t) &= \partial^2 \Sigma_0(r, t) / \partial r^2.\end{aligned}$$

Zu Beginn der Simulation stellt damit die vorgegebene Anfangsverteilung die Grundlösung $\Sigma_0 = \Sigma_A$ dar. Diese ist auf Stabilität zu überprüfen. Da die Grundlösung zeitlich variiert, muss zu jedem Zeitpunkt das System einer Stabilitätsanalyse unterzogen werden.

Die hier bevorzugte numerische Lösungsmethode ist die Diskretisierung mittels einer Finite-Differenzen-Methode. Die Differentialgleichung (3.1) wird durch das Diskretisieren in ein algebraisches System umgewandelt. Nach der anschließenden Linearisierung des gestörten Systems um die Grundlösung werden die Eigenwerte dieses Systems bestimmt und somit wird das Stabilitätsproblem gelöst.

Diskretisierung des Systems

Da in dieser Arbeit Akkretionsscheiben, deren Radien sich über mehrere Größenordnungen erstrecken, simuliert werden, fällt gemäß Abbildung 3.1 die Wahl auf ein logarithmisches Gitter in r .

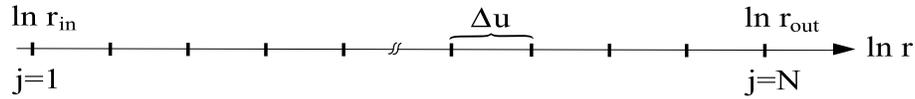


Abbildung 3.1: Diskretisierung entlang des Radius.

Die Aufteilung des Intervalls vom inneren bis zum äußeren Radius $\{r_{\text{in}}, r_{\text{out}}\}$ erfolgt in N logarithmisch äquidistante Abschnitte. Der logarithmische Abstand zwischen zwei Diskretisierungspunkten ist dabei

$$\Delta u = \frac{\ln r_{\text{out}} - \ln r_{\text{in}}}{N - 1}. \quad (3.4)$$

An jedem Diskretisierungspunkt $j \in \{1, \dots, N\}$ kann für jede Feldgröße ein Punktwert definiert werden, z.B.

$$\Sigma(r, t) \mapsto \Sigma_j(t), \quad (3.5)$$

$$\Sigma'(r, t) \mapsto \Sigma'_j(t), \quad (3.6)$$

$$v_\varphi(r, t) \mapsto v_{\varphi_j}(t). \quad (3.7)$$

Die Gleichung (3.1) wird so in ein System aus N algebraischen Gleichungen umgewandelt

$$\frac{\partial \Sigma_j}{\partial t} = f_j \{r_1, \dots, r_N, \Sigma_1, \dots, \Sigma_N, \Sigma'_1, \dots, \Sigma'_N, \Sigma''_1, \dots, \Sigma''_N, \dots\} \quad (3.8)$$

$$\text{mit } j = \{1, \dots, N\}.$$

Linearisierung um die Grundlösung

Ausgangspunkt für die Linearisierung ist das Gleichungssystem (3.8). Man betrachtet eine infinitesimal kleine Störung $\delta\Sigma_j$, die der Grundlösung Σ_{0_j} additiv überlagert wird

$$\Sigma_j = \Sigma_{0_j} + \delta\Sigma_j, \quad |\delta\Sigma_j| \ll \Sigma_{0_j} \quad (3.9)$$

Für die Approximation der Funktion f um die Grundlösung Σ_{0_j} mit Hilfe der Taylor-Entwicklung ergibt sich

$$\begin{aligned} f_j \{r_1, \dots, r_N, \Sigma, \Sigma', \Sigma'', \dots\} &= f_j \{r_1, \dots, r_N, \Sigma_0, \Sigma'_0, \Sigma''_0, \dots\} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma_l} \Big|_{\Sigma_0} (\Sigma_l - \Sigma_{0_l}) \\ &+ \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma'_l} \Big|_{\Sigma'_0} (\Sigma'_l - \Sigma'_{0_l}) + \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma''_l} \Big|_{\Sigma''_0} (\Sigma''_l - \Sigma''_{0_l}) + \dots, \quad j, l = \{1, \dots, N\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

mit

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_N\}, \\ \Sigma' &= \{\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_N\}, \\ \Sigma_0 &= \{\Sigma_{0_1}, \dots, \Sigma_{0_N}\}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Terme, die mindestens quadratisch in den Störungen $\delta\Sigma_j$ oder deren Ableitungen sind, werden nicht berücksichtigt.

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.9) und (3.10) in Gleichung (3.8) und unter Berücksichtigung von Gleichung (3.3) ergibt sich folgendes um den Grundzustand linearisiertes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\delta\Sigma_j)}{\partial t} &= \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma_l} \Big|_{\Sigma_0} \delta\Sigma_l + \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma'_l} \Big|_{\Sigma'_0} \delta\Sigma'_l + \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma''_l} \Big|_{\Sigma''_0} \delta\Sigma''_l + \dots, \\ &j, l = \{1, \dots, N\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

oder in kompakter Vektorschreibweise

$$\frac{\partial(\delta\Sigma)}{\partial t} = a \delta\Sigma + b \delta\Sigma' + c \delta\Sigma'' + \dots, \quad (3.12)$$

wobei die Koeffizientenmatrizen a , b und c in nichtlinearer Art ausschließlich von der Grundlösung Σ_0 und deren Ableitungen anhängig sind

$$a_{jl} = \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma_l} \Big|_{\Sigma_0}, \quad b_{jl} = \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma'_l} \Big|_{\Sigma'_0}, \quad c_{jl} = \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma''_l} \Big|_{\Sigma''_0}. \quad (3.13)$$

Diese Jacobimatrizen werden numerisch mit Hilfe der Finite-Differenzen-Methode (Press et al. 1995) berechnet. Eine genaue Darstellung der numerischen Bestimmung der Jacobimatrizen findet sich in Anhang C.

3.2 Lösungsansatz für die Störungsterme

Für das Lösen des Stabilitätsproblems betrachtet man die Störung als eine Überlagerung von harmonischen Funktionen. Hier erfolgt die Darstellung mit einer komplexen Fourierreihe

$$\delta\Sigma \propto \sum_m e^{i(k_m r + \sigma_m t)}. \quad (3.14)$$

i steht hier für die imaginäre Einheit. Um das Zeitverhalten der Störung zu untersuchen, genügt es, nur eine Komponente der Fourierreihe zu betrachten. Da die der Stabilitätsanalyse zugrunde liegende Gleichung (3.12) in den Störungsgrößen linear ist, reicht eine instabile Mode, um die Stabilität zu minimieren. Die Moden interagieren nicht untereinander und können so getrennt voneinander analysiert werden. Das Aufspalten einer Störung in einzelne Terme der Fourierreihe wird auch die Methode der Aufspaltung in Normalmoden genannt. Somit findet folgender Exponentialansatz für die räumliche und zeitliche Abhängigkeit der Störung Anwendung

$$\delta\Sigma = \Sigma_C e^{i(kr + \sigma t)}. \quad (3.15)$$

Σ_C stellt die komplexe Amplitude dar. Für die physikalische Interpretation ist allerdings nur der Realteil dieser Amplitude wesentlich. k ist die Wellenzahl der Störung und die zeitliche Entwicklung wird durch σ charakterisiert.

3.3 Aufstellen und Lösen des charakteristischen Eigenwertproblems

Durch Einsetzen von Gleichung (3.15) in Gleichung (3.12) und nachfolgendem räumlichen Ableiten der Störungsterme bekommt man ein lineares gekoppeltes Gleichungssystem, das das charakteristische Eigenwertproblem für σ darstellt

$$(\sigma\delta_{jl} - M_{jl})\delta\Sigma_j = 0, \quad j, l = \{1, \dots, N\}. \quad (3.16)$$

Die Matrix M berechnet sich aus den Koeffizientenmatrizen a , b und c und der Wellenzahl k . In Komponentenschreibweise gilt

$$M_{jl}(a_{jl}, b_{jl}, c_{jl}, \dots, k) = a_{jl} + ikb_{jl} - k^2 c_{jl} + \dots$$

Somit wird M nur aus der Grundlösung Σ_0 und deren Ableitungen sowie der Wellenzahl k bestimmt. Das Lösen des charakteristischen Eigenwertproblems (3.16) für gegebene Randbedingungen in Abhängigkeit von k führt aufgrund der Diskretisierung zur Bestimmung von N Eigenwerten σ .

3.4 Stabilitätseigenschaften

Eine linear instabile Grundlösung und damit instabiles Verhalten, d.h., dass $\delta\Sigma$ exponentiell mit der Zeit anwächst, bekommt man nach Gleichung (3.15), wenn es mindestens eine Wellenzahl k gibt, für die der Imaginärteil eines Eigenwertes σ größer als null ist. In diesem Fall würde die Mode mit diesem k immer weiter anwachsen und die Störung bleibt ungedämpft. Ist jedoch für jede beliebige Wellenzahl der Imaginärteil des Stabilitätsparameters σ negativ, so spricht man von einem linear stabilen System, da die Störung mit der Zeit zu null gedämpft wird. Demnach muss für ein solches stabiles System folgende Bedingung erfüllt sein

$$\max(\operatorname{Im}(\sigma(k))) \leq 0 \quad \forall k. \quad (3.17)$$

Tabelle 3.2 gibt über die allgemeinen Stabilitätseigenschaften einen Überblick.

Parameter	Stabilitätseigenschaften
$\max(\operatorname{Im}(\sigma(k))) < 0 \quad \forall k$	asymptotisch stabil
$\exists k \rightarrow \operatorname{Im}(\sigma(k)) > 0$	linear instabil
\exists genau ein $k \rightarrow \operatorname{Im}(\sigma(k)) = 0$	Stabilitätsgrenze; Übergang in eine andere Konfiguration

Tabelle 3.2: Stabilität in Abhängigkeit von den Störungsparametern k und σ

Man betrachtet ein System als neutral stabil, wenn es ein k gibt, für das der Imaginärteil genau eines Eigenwertes σ null ist. In diesem Fall befindet sich das untersuchte System am Übergang von einem Grundzustand zu einem anderen Zustand. Ein Beispiel für eine solche Stabilitätsgrenze ist der von Reynolds untersuchte Übergang von laminarer in turbulente Strömung.

4 Numerisches Lösungsverfahren

In diesem Kapitel werden die numerischen Methoden, die in dieser Arbeit Verwendung finden, vorgestellt. Die logarithmische Skalierung der radialen Koordinate führt zu einer Reformulierung der Grundgleichungen des Akkretionsscheibenmodells. Mit Hilfe einer expliziten Diskretisierung erfolgt die numerische Berechnung der Gleichungen. Die anschließende Analyse der numerischen Stabilität hat die Bestimmung des Zeitschritts zum Ergebnis. Das Kapitel endet mit einer Diskussion der Rand- und Anfangsbedingungen.

4.1 Reskalierung der radialen Koordinate

Um auch in der Nähe der Zentralmasse ein dichtes radiales Gitter für die numerischen Berechnungen zu erhalten und trotzdem lange Rechenzeiten zu vermeiden, wird, wie bereits in Abschnitt 3.1 beschrieben, ein logarithmisches Gitter gewählt. Für dieses logarithmisch äquidistante numerische Gitter wird die neue Koordinate u definiert

$$r = e^u. \quad (4.1)$$

Die Verwendung eines solchen Gitters wird bei der Diskretisierung wie folgt berücksichtigt

$$\frac{dr}{du} = e^u \Rightarrow \frac{d}{dr} = e^{-u} \frac{d}{du}. \quad (4.2)$$

Alle für die Simulation wichtigen Gleichungen werden im Folgenden in Abhängigkeit von der neuen radialen Koordinate zusammenfassend dargestellt:

- Massentransportgleichung

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{e^{2u}} \frac{\partial}{\partial u} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial u} \left(\nu \Sigma e^{2u} \frac{\partial (v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right)}{\frac{\partial (v_\varphi e^u)}{\partial u}} \right] = 0 \quad (4.3)$$

- Viskosität

$$\nu = \beta v_\varphi e^u \quad (4.4)$$

- Radiale Bewegungsgleichung

$$\frac{v_\varphi^2}{e^u} = -g_r(u) \quad (4.5)$$

- Radiale Transportgeschwindigkeit

$$v_r = \frac{1}{\Sigma e^u} \frac{\frac{\partial}{\partial u} \left(\nu \Sigma e^{2u} \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right)}{\frac{\partial(v_\varphi e^u)}{\partial u}} \quad (4.6)$$

Die Transportgeschwindigkeit in radialer Richtung wird für die Bestimmung des Zeitschritts (siehe Abschnitt 4.3) und für das Upwind-Verfahren, dessen Beschreibung sich im Unterkapitel 4.2.2 findet, benötigt.

4.2 Diskretisierung

Für die numerische Behandlung wird ein explizites Finite-Differenzen-Verfahren angewandt. Das radiale Gitter, bestehend aus N Gitterpunkten $j = \{1, \dots, N\}$ (siehe auch Abschnitt 3.1), erstreckt sich vom inneren Rand der Scheibe u_{in} bis zum äußeren Rand u_{out}

$$u_{\text{in}} = \ln r_{\text{in}} = u_1 < u_2 < \dots < u_j < \dots < u_{N-1} < u_N = \ln r_{\text{out}} = u_{\text{out}}. \quad (4.7)$$

Auf dem logarithmisch äquidistanten Gitter ist der Abstand zwischen zwei Diskretisierungspunkten $\Delta u = u_j - u_{i-j}$ (oder äquivalent Gleichung (3.4)).

Die diskretisierte Zeitkoordinate erstreckt sich von t_0 bis t_{end} in L Zeitschritten

$$t_0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots < t_{L-1} < t_L = t_{\text{end}}, \quad n \in \{1, \dots, L\}. \quad (4.8)$$

Analog zum logarithmischen Abstand Δu wird die Zeitschrittweite $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$ definiert.

4.2.1 Diskretisierung der Gleichung für die radiale Geschwindigkeit

Ganz allgemein kann ein diffusiver Term einer Gleichung für ein regelmäßiges Gitter durch folgende *forward-time-central-space*-Diskretisierungsmethode approximiert werden:

$$\frac{\partial}{\partial u} D(u, t) \frac{\partial w(u, t)}{\partial u} = \frac{D_{j+1/2}(w_{j+1} - w_j) - D_{j-1/2}(w_j - w_{j-1})}{(\Delta u)^2}. \quad (4.9)$$

Zwischen zwei Stützstellen kann die Funktion $D(u, t)$ mit folgendem expliziten Schema berechnet werden

$$D_{j+1/2} = \frac{1}{2}(D_{j+1} + D_j). \quad (4.10)$$

Bezogen auf die Bestimmungsgleichung für v_r (4.6), erhält man die folgende Diskretisierung des nichtlinearen Diffusionsterms

$$\frac{\partial}{\partial(v_\varphi e^u)} \left(e^{2u} \nu \Sigma \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right) = \frac{2((e^{2u} \nu \Sigma)_{j+1/2} (v_{\varphi_{j+1}} e^{-u_{j+1}} - v_{\varphi_j} e^{-u_j}) - (e^{2u} \nu \Sigma)_{j-1/2} (v_{\varphi_j} e^{-u_j} - v_{\varphi_{j-1}} e^{-u_{j-1}}))}{\Delta u \cdot ((e^u v_\varphi)_{j+1} - (e^u v_\varphi)_{j-1})}. \quad (4.11)$$

Die komplette Gleichung zur Bestimmung von v_{r_j} lautet

$$v_{r_j} = \frac{2}{\Sigma_j e^{u_j}} \frac{(e^{2u} \nu \Sigma)_{j+1/2} (v_{\varphi_{j+1}} e^{-u_{j+1}} - v_{\varphi_j} e^{-u_j}) - (e^{2u} \nu \Sigma)_{j-1/2} (v_{\varphi_j} e^{-u_j} - v_{\varphi_{j-1}} e^{-u_{j-1}})}{\Delta u \cdot ((e^u v_\varphi)_{j+1} - (e^u v_\varphi)_{j-1})}. \quad (4.12)$$

4.2.2 Diskretisierung der Massentransportgleichung

Die einfachste Methode, den Term, der die zeitliche Entwicklung der Flächendichte beschreibt, darzustellen, ist die Eulersche Vorwärts-Zeitdiskretisierung

$$\left. \frac{\partial \Sigma}{\partial t} \right|_j^n = \frac{\Sigma_j^{n+1} - \Sigma_j^n}{\Delta t_n}. \quad (4.13)$$

Dieses Verfahren erreicht eine Genauigkeit 1. Ordnung in Δt_n .

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden nun die beiden Größen $J(u, t)$ und $A(u, t)$ eingeführt

$$J(u, t) = e^u v_\varphi \text{ (spezifischer Drehimpuls)}, \quad (4.14)$$

$$A(u, t) = \nu \Sigma e^{2u} \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \hat{=} \frac{G(u, t)}{2\pi}, \quad (4.15)$$

hierbei ist $G(u, t)$ das Drehmoment, das auf dem Ring am Scheibenradius u aufgrund der differentiellen Rotation wirkt. Für die numerische Berechnung der Größe $A(u, t)$ wird das Upwind-Schema verwendet.

Upwind-Schema

Bei der Bildung des radialen Differenzenquotienten muss die Richtung des Informationsflusses berücksichtigt werden. Hierbei fällt die Wahl auf einen einseitigen Differenzenquotienten, sodass an Grenzschichten für das richtige Vorzeichen der Ableitung gesorgt ist. Für die Upwind-Differenzierung im Bereich von Akkretionsströmungen wählt man in Abhängigkeit vom Vorzeichen von v_r

$$\left. \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right|_j^n = \begin{cases} \frac{(v_\varphi e^{-u})_j^n - (v_\varphi e^{-u})_{j-1}^n}{\Delta u} & v_{r_j}^n > 0, \\ \frac{(v_\varphi e^{-u})_{j+1}^n - (v_\varphi e^{-u})_j^n}{\Delta u} & v_{r_j}^n < 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Die Massentransportgleichung (4.3) kann nun mit Hilfe der Größen $J(u, t)$ und $A(u, t)$ umformuliert werden

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{e^{2u}} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial A(u, t)/\partial u}{\partial J(u, t)/\partial u} \right) = 0. \quad (4.17)$$

Der zweite Term in dieser Gleichung wird wie folgt diskretisiert

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial A(u, t)/\partial u}{\partial J(u, t)/\partial u} \right) &= \frac{\left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j+1/2}^n \right)^{-1} \frac{\partial A}{\partial u} \Big|_{j+1/2}^n - \left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j-1/2}^n \right)^{-1} \frac{\partial A}{\partial u} \Big|_{j-1/2}^n}{\Delta u} \\ &= \frac{\left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j+1/2}^n \right)^{-1} (A_{j+1}^n - A_j^n) - \left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j-1/2}^n \right)^{-1} (A_j^n - A_{j-1}^n)}{(\Delta u)^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Dies entspricht der Diskretisierungsmethode für Diffusionsgleichungen (vgl. mit Gleichung (4.9)). Die vollständige Diskretisierung der Scheibenentwicklungsgleichung lautet damit

$$\Sigma_j^{n+1} = \Sigma_j^n - \frac{\Delta t_n}{e^{2u_j}} \frac{\left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j+1/2}^n \right)^{-1} (A_{j+1}^n - A_j^n) - \left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j-1/2}^n \right)^{-1} (A_j^n - A_{j-1}^n)}{(\Delta u)^2}. \quad (4.19)$$

Der Vorteil bei dieser Art der Diskretisierung liegt darin, dass die Flächendichte zum Zeitpunkt $n + 1$ explizit aus den Größen zur Zeit n berechnet werden kann.

4.3 Numerische Stabilität

4.3.1 Zeitschrittbestimmung

Für die numerische Stabilität der Lösung der Gleichung (4.19) ist es wichtig, die Größe der Zeitschritte in geeigneter Weise zu begrenzen. Da es für diesen Gleichungstyp keine Stabilitätsanalyse gibt, werden im Folgenden zwei Beispieltypen, die Advektions- und die Diffusionsgleichung, untersucht, da die Scheibenentwicklungsgleichung Merkmale dieser beiden Gleichungstypen aufweist. Im Falle der Advektionsgleichung für die Erhaltungsgröße s

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (s\vec{v}) = 0 \quad (4.20)$$

wird die Stabilitätsbedingung für ein explizites numerisches Verfahren durch die Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung (CFL) gegeben

$$\frac{|\vec{v}| \Delta t_n}{\Delta r} \leq 1, \quad (4.21)$$

wobei Δr der Abstand zweier Gitterpunkte ist. Die Geschwindigkeit $\Delta r/\Delta t$, mit der Information aufgrund der Differenzenbildung transportiert wird, darf nicht größer als

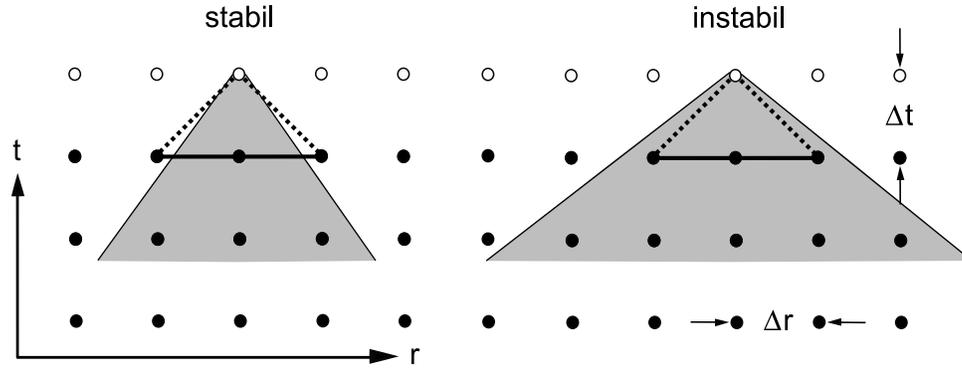


Abbildung 4.1: Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung für die Stabilität eines Differenzenschemas. Diese Bedingung verlangt, dass der Bereich, der für die Berechnung einer Größe an einem bestimmten Gitterpunkt durch die Diskretisierung verwendet wird (gestrichelte Linien), den Bereich enthält, in dem die Information mit der Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ transportiert werden kann (graue Schattierung).

die physikalische Geschwindigkeit $|\vec{v}|$ sein, wie es auch in Abbildung 4.1 grafisch veranschaulicht ist. Die Gleichung (4.21), nach Δt_n umgestellt, gibt eine obere Grenze für die Zeitschrittweite an

$$\Delta t_n = \frac{C_{\text{CFL}} \Delta r}{|\vec{v}|} \quad \text{mit } C_{\text{CFL}} < 1. \quad (4.22)$$

Da diese Bedingung für jeden Gitterpunkt erfüllt sein muss und die dieser Stabilitätsanalyse zugrunde liegende Gleichung die Kontinuitätsgleichung (2.16) ist, gilt für die Bestimmung des Zeitschritts

$$\Delta t_n = \min \left(\frac{C_{\text{CFL}} \Delta r_j}{|v_{r_j}|} \right) \quad \text{mit } C_{\text{CFL}} < 1. \quad (4.23)$$

Eine ähnliche Stabilitätsbedingung findet man für die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial s}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r} \left(D \frac{\partial s}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.24)$$

Mit der Diffusionskonstanten $D \geq 0$ und der Konstanten C_D berechnet sich in diesem Fall die maximal mögliche Zeitschrittweite folgendermaßen

$$\Delta t_n = \min \left(\frac{C_D (\Delta r_j)^2}{2D} \right) \quad \text{mit } C_D < 1. \quad (4.25)$$

Die physikalische Interpretation dieser Bedingung ist, dass die Zeitschrittweite die Diffusionszeit durch eine Zelle der Breite Δr nicht übersteigen darf.

Die Massentransportgleichung (4.19) besitzt Eigenschaften der beiden oben genannten

Gleichungstypen. Die Herleitung aus der Kontinuitätsgleichung verleiht ihr einen advektiven Charakter, wobei diesem durch die Berücksichtigung des viskosen Terms diffusionsartige Merkmale hinzugefügt werden. Im folgenden Abschnitt wird, um die numerische Stabilität sicher zu stellen, eine numerische Stabilitätsanalyse zur Zeitschrittbestimmung, die nach ihrem Entwickler John von Neumann benannt wurde, durchgeführt.

4.3.2 Numerische Stabilitätsanalyse nach von Neumann

Das numerische Lösen von Differentialgleichungen verursacht zwei Arten von Fehlern. Der Diskretisierungsfehler ϵ_{DF} gibt die Differenz zwischen der analytischen Lösung X_{AL} und der exakten Lösung der zugehörigen Differenzgleichung X_{EL} an

$$\epsilon_{\text{DF}} = X_{\text{AL}} - X_{\text{EL}}. \quad (4.26)$$

Die numerische Lösung X_{NL} auf einem Rechner mit endlicher Genauigkeit ist durch den Rundungsfehler ϵ gekennzeichnet

$$\epsilon = X_{\text{NL}} - X_{\text{EL}}. \quad (4.27)$$

Ausgangspunkt der numerischen Stabilitätsanalyse ist eine lineare Differenzgleichung, die von der numerischen Lösung $X_{\text{NL}} = X_{\text{EL}} + \epsilon$ bis auf den Rundungsfehler erfüllt wird. In diesem Fall ergibt sich durch Einsetzen von X_{NL} in die Differenzgleichung die in ϵ lineare Fehlergleichung. Wie im Kapitel über die lineare Stabilitätsanalyse wird wieder von einem Fehler (Störung) der Flächendichte ausgegangen. Somit entspricht Σ der numerischen Lösung, Σ_0 der exakten Lösung der Differenzgleichung und $\delta\Sigma$ dem Fehler. Gemäß Abschnitt 3.1 kann Σ_0 mit der Grundlösung identifiziert werden.

Es soll gezeigt werden, dass man für die diskretisierte Form der Scheibenentwicklungsgleichung (4.19), die zwar nichtlinear in Σ ist, trotzdem eine lineare Fehlergleichung erhält. Hierfür wird die Scheibenentwicklungsgleichung zuerst so umformuliert, dass die direkte Σ -Proportionalität sichtbar wird

$$\Sigma_j^{n+1} = \Sigma_j^n - \Delta t_n (a_1 \Sigma_{j+1}^n - a_2 \Sigma_j^n - a_3 \Sigma_j^n + a_4 \Sigma_{j-1}^n) \quad (4.28)$$

mit

$$\begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j+1/2}^n \right)^{-1} \frac{\left(\nu e^{2u} \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right) \Big|_{j+1}^n}{e^{2u_j} (\Delta u)^2}, \\ a_2 &= \left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j+1/2}^n \right)^{-1} \frac{\left(\nu e^{2u} \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right) \Big|_j^n}{e^{2u_j} (\Delta u)^2}, \\ a_3 &= \left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j-1/2}^n \right)^{-1} \frac{\left(\nu e^{2u} \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right) \Big|_j^n}{e^{2u_j} (\Delta u)^2}, \end{aligned}$$

$$a_4 = \left(\frac{\partial J}{\partial u} \Big|_{j-1/2}^n \right)^{-1} \frac{\left(\nu e^{2u} \frac{\partial(v_\varphi e^{-u})}{\partial u} \right) \Big|_{j-1}^n}{e^{2u_j} (\Delta u)^2}.$$

Die Koeffizienten a_1 , a_2 , a_3 und a_4 wiederum sind von der Berechnung des Gravitationsfeldes und somit auch indirekt von der Flächendichteverteilung $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_N\}$ abhängig. Allerdings wird bei der Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung nach Gleichung (2.27) bzw. (2.29) das Integral einer Funktion, die linear in Σ ist, berechnet. Da nach der Definition oben $\Sigma = \Sigma_0 + \delta\Sigma$ gilt, kann das Integral mittels Summenregel in zwei Anteile zerlegt werden

$$\int f(\Sigma, u) du = \int f(\Sigma_0, u) du + \int f(\delta\Sigma, u) du. \quad (4.29)$$

Da der Rundungsfehler als Funktion von u willkürlich variiert, kann das zweite Integral auf der rechten Seite von Gleichung (4.29) gegenüber dem ersten Integral vernachlässigt werden. Und somit erhält man nach Einsetzen von $\Sigma = \Sigma_0 + \delta\Sigma$ in die Scheibenentwicklungsgleichung (4.28) die lineare Fehlergleichung

$$\delta\Sigma_j^{n+1} = \delta\Sigma_j^n - \Delta t_n (a_1(\Sigma_0) \delta\Sigma_{j+1}^n - (a_2(\Sigma_0) + a_3(\Sigma_0)) \delta\Sigma_j^n + a_4(\Sigma_0) \delta\Sigma_{j-1}^n). \quad (4.30)$$

Hierbei wurde berücksichtigt, dass Σ_0 die Differenzengleichung exakt erfüllt.

Beim Fortschreiten der zeitlichen Entwicklung der Lösung vom Zeitpunkt n zum Zeitpunkt $n+1$, muss der Fehler kleiner werden oder darf höchstens gleich bleiben, um die Stabilität des Differenzenverfahrens zu sichern

$$\left| \frac{\delta\Sigma_j^{n+1}}{\delta\Sigma_j^n} \right| \leq 1. \quad (4.31)$$

Die zufällige Variation des Fehlers kann wieder mit Hilfe der Fourierreihe dargestellt werden, wobei es zur Untersuchung des Zeitverhaltens des Fehlers ausreichend ist, nur eine Komponente der Reihe zu betrachten. Somit gilt

$$\delta\Sigma_j^n = \Sigma_C e^{i(kr+\sigma t)}. \quad (4.32)$$

Dieser Ansatz wird in die Fehlergleichung (4.30) eingesetzt und man erhält

$$e^{i(kr+\sigma(t+\Delta t_n))} = e^{i(kr+\sigma t)} - \Delta t_n (a_1 e^{i(k(r+\Delta r)+\sigma t)} - (a_2 + a_3) e^{i(kr+\sigma t)} + a_4 e^{i(k(r-\Delta r)+\sigma t)}). \quad (4.33)$$

Die Division durch $e^{i(kr+\sigma t)}$ ergibt

$$\begin{aligned} e^{i\sigma\Delta t_n} &= 1 - \Delta t_n (a_1 e^{ik\Delta r} - a_2 - a_3 + a_4 e^{-ik\Delta r}) \\ &= 1 - \Delta t_n ((a_1 + a_4) \cos(k\Delta r) - a_2 - a_3) - i\Delta t_n (a_1 - a_4) \sin(k\Delta r). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Aus der Bedingung für die Stabilität (4.31) folgt

$$\left| \frac{e^{i(kr+\sigma(t+\Delta t_n))}}{e^{i(kr+\sigma t)}} \right| = |e^{\sigma \Delta t_n}| \leq 1. \quad (4.35)$$

Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für Gleichung (4.34)

$$|e^{\sigma \Delta t_n}| = |1 - \Delta t_n((a_1 + a_4) \cos(k\Delta r) - a_2 - a_3) - i\Delta t_n(a_1 - a_4) \sin(k\Delta r)| \leq 1. \quad (4.36)$$

Die Größe G ist der Verstärkungsfaktor

$$G = |1 - \Delta t_n((a_1 + a_4) \cos(k\Delta r) - a_2 - a_3) - i\Delta t_n(a_1 - a_4) \sin(k\Delta r)|. \quad (4.37)$$

Er gibt an, welche Auswirkung der Fehler zum Zeitpunkt n auf den Fehler zum Zeitpunkt $n + 1$ hat. Für ein stabiles Differenzenverfahren gilt $G \leq 1$ bzw. $G^2 \leq 1$ mit

$$G^2 = (1 - \Delta t_n((a_1 + a_4) \cos(k\Delta r) - a_2 - a_3))^2 + \Delta t_n^2(a_1 - a_4)^2 \sin^2(k\Delta r). \quad (4.38)$$

Für die Bestimmung des Zeitschritts Δt_n können drei Fälle, abhängig von der Wellenzahl k und der Maschenweite Δr , unterschieden werden:

1.Fall: $\sin(k\Delta r) = 0 \rightarrow \cos(k\Delta r) = 1$

$$G^2 = (1 - \Delta t_{n,1}(a_1 + a_4 - a_2 - a_3))^2 \leq 1 \quad (4.39)$$

$$\Delta t_{n,1} \leq \frac{2}{a_1 - a_2 - a_3 + a_4}, \quad (4.40)$$

2.Fall: $\sin(k\Delta r) = 0 \rightarrow \cos(k\Delta r) = -1$

$$G^2 = (1 + \Delta t_{n,2}(a_1 + a_4 + a_2 + a_3))^2 \leq 1 \quad (4.41)$$

$$\Delta t_{n,2} \leq -\frac{2}{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}, \quad (4.42)$$

3.Fall: $\cos(k\Delta r) = 0 \rightarrow \sin(k\Delta r) = 1$

$$G^2 = (1 + \Delta t_{n,3}(a_2 + a_3))^2 + \Delta t_{n,3}^2(a_1 - a_4)^2 \leq 1 \quad (4.43)$$

$$\Delta t_{n,3} \leq -\frac{2(a_2 + a_3)}{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + 2(a_2a_3 - a_1a_4)}. \quad (4.44)$$

Alle drei Ungleichungen zur Bestimmung des Zeitschritts müssen gleichzeitig erfüllt sein und somit erhält man folgende Bedingung

$$\Delta t_n = \min(\Delta t_{n,1}, \Delta t_{n,2}, \Delta t_{n,3}). \quad (4.45)$$

Simulationen von verschiedenen Akkretionsscheibenbeispielen ergaben, dass die nach Gleichung (4.45) berechnete Zeitschrittweite und die Courant-Friedrichs-Levy-Bedingung (4.23) die gleiche Größenordnung besitzen. Somit ist die CFL-Bedingung für die Bestimmung einer oberen Grenze der Zeitschrittweite gut geeignet. In der Praxis hat sich Wahl $C_{\text{CFL}} = 0.1$ bewährt.

4.4 Randbedingungen

Unter der Annahme, dass am inneren Rand das Drehmoment $G(u, t) = 2\pi A(u, t)$ verschwindet, kann das nach innen transportierte Material gemäß dem Eddington-Limit auf das Zentralobjekt akkretiert werden. Für den innersten Radius gilt damit für alle Zeitschritte $A(u_{\text{in}}, t) = A_1^n = 0$. Mit der Gleichung (4.15) führt das sofort zu der Bedingung $\Sigma_1^n = 0$.

Um einen hindernisfreien Drehimpulstransport über den Rand der Scheibe hinaus zu ermöglichen, wird vorausgesetzt, dass das Drehmoment am äußeren Radius konstant ist. Somit gilt

$$\left. \frac{\partial G(u, t)}{\partial u} \right|_{u=u_{\text{out}}} = 0. \quad (4.46)$$

Für die zur akkuraten Berechnung der Gravitationsbeschleunigung in Abschnitt 2.4.1 erwähnte *density-splitting*-Methode muss ein Flächendichteprofil $\Sigma(u, t)$, das an den Rändern verschwindet, vorausgesetzt werden. Für den Innenrand der Akkretionsscheibe ist diese Forderung bereits mit der obigen Bedingung erfüllt. Die Flächendichteverteilung muss im inneren Scheibenbereich kontinuierlich gegen null gehen und am innersten Radius gänzlich verschwinden. Der gleiche Verlauf von $\Sigma(u, t)$ wird nun auch für den äußeren Bereich gefordert. Dies wird im nächsten Abschnitt bei der Wahl der Anfangsbedingungen mit berücksichtigt werden. Bei der Verwendung der Monopolnäherung zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung muss der Verlauf der Flächendichte im Außenbereich der Scheibe nicht von vornherein derart festgelegt werden, sondern er ist frei wählbar.

4.5 Anfangsbedingungen

Ausgangspunkt der Simulation von Akkretionsscheiben in dieser Arbeit ist die Festlegung der Anfangsflächendichteverteilung $\Sigma_A(u, t = 0)$. In Tachil (2004) erhält man als Lösungen für stationäre Scheiben, die den Innenbereich unserer galaktischen Scheibe

beschreiben, konstante Flächendichteprofile. Innerhalb der Scheibe wird somit als Anfangsbedingung ein konstanter Verlauf von Σ gewählt.

Im Innenbereich der Scheibe sowie auch unter bestimmten Voraussetzungen im Außenbereich geht gemäß des letzten Abschnitts 4.4 die Flächendichte kontinuierlich gegen null.

5 Akkretionsscheiben Aktiver Galaxienzentren

In diesem Kapitel wird das vorgestellte Akkretionsscheibenmodell auf AGN-Scheiben angewandt. Nach der Einführung der für die numerischen Simulationen typischen physikalischen und numerischen Parameter erfolgt eine ausführliche Untersuchung einiger stabiler Scheibenevolutionen. Bei der anschließenden Diskussion von instabilen Scheibenevolutionen zeigt sich, dass es einen systematischen Übergang von stabiler in instabile Akkretion gibt. Dieser wird mittels linearer Stabilitätsanalyse eingehend untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass man einen Bereich der Simulationsparameter einschränken kann, für den eine stabile Zeitentwicklung der Scheibe möglich ist. In diesem Bereich werden die Anwachszeitskalen Schwarzer Löcher untersucht.

5.1 Physikalische und numerische Simulationsparameter

Dieser Textabschnitt erläutert die typischen Parameter, die für die in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen von AGN-Scheiben verwendet werden. Dazu gehören zum einen die Scheibenparameter, die der Übersichtlichkeit halber in Tabelle 5.1 zusammengefasst sind. Am Anfang jeder Simulation erfolgt eine Festlegung der Anfangsmasse der Scheibe und des Zentralobjekts sowie der physikalischen Ausdehnung der Scheibe. Im Falle von AGN-Scheiben starten alle Simulationen mit einer Zentralmasse $M_{\text{ZM ini}} = 10^3 M_{\odot}$. Der numerische Rechenbereich erstreckt sich vom Innenrand der Scheibe r_{in} , der bei 10^{-2} pc liegt, bis zum äußeren Scheibenradius r_{out} bei ungefähr 10^2 pc. Die anfänglichen Scheibenmassen $M_{\text{Scheibe ini}}$ der simulierten Scheiben sind hingegen von recht unterschiedlicher Größe. Beginnend mit nicht-selbstgravitierenden Scheiben mit Massen ab $10^3 M_{\odot}$ werden in diesem Kapitel selbstgravitierende Scheibe bis zu $10^8 M_{\odot}$ simuliert. Der Viskositätsparameter wird gemäß Abschnitt 2.5 auf $\beta = 10^{-3}$ festgelegt. Die für die Simulationen relevanten numerischen Parameter sind die Anzahl der verwendeten Stützstellen und die CFL-Konstante, die für die Bestimmung des Zeitschritts erforderlich ist. Wie bereits erwähnt, wird diese Konstante in der Regel auf $C_{\text{CFL}} = 0.1$ gesetzt. Die für die numerischen Simulationen verwendete Anzahl von Gitterpunkten ist ebenfalls ein variabler Parameter. Für die Simulationen werden typischerweise 30 Gitterpunkte gewählt. Die hier untersuchten Scheiben werden mit maximal 200 Stützstellen simuliert.

Parameter	
$M_{\text{ZM ini}}$	$10^3 M_{\odot}$
$M_{\text{Scheibe ini}}$	$10^3 - 10^8 M_{\odot}$
r_{in}	$3 \cdot 10^{-3} \text{ pc}$
r_{out}	72 pc
β	10^{-3}

Tabelle 5.1: Parameter von AGN-Akkretionsscheiben.

Anfangsflächendichteverteilung einer Standardscheibe

In Abbildung 5.1 sind zwei typische Anfangsprofile der Flächendichte Σ dargestellt. Die oben beschriebenen variablen Parameter werden wie folgt gewählt:

- Scheibenmasse: $10^7 M_{\odot}$
- Anzahl der Stützstellen: 50

Für beide Profile sind die dazugehörigen Gravitationsbeschleunigungen, berechnet mit den beiden in Abschnitt 2.4 vorgestellten Methoden, mit eingezeichnet. Dies dient dem Vergleich der beiden Methoden. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Monopolnäherung nur eine sehr grobe Approximation der Berechnung der Gravitationsbeschleunigung darstellt. Im Innenbereich der Scheibe ist der gravitative Einfluss der Zentralmasse gegenüber der Eigengravitation der Scheibe vorherrschend. In der doppelt-logarithmischen Darstellung erwartet man für g_r im nicht-selbstgravitierenden Bereich eine Gerade. Bei Verwendung der Monopolnäherung weicht der Verlauf des Gravitationsfeldes bereits bei sehr viel kleineren Radien von dieser Geraden ab, als es bei der akkuraten numerischen Berechnung der Gravitationsbeschleunigung mit der *density-splitting*-Methode (DSM) der Fall ist. Das bedeutet, dass die Selbstgravitation gegenüber der Anziehungskraft der Zentralmasse in diesem Bereich der Scheibe bei Verwendung der Monopolnäherung deutlich überschätzt wird. Doch auch bei größeren Radien unterscheiden sich die beiden Verläufe erheblich voneinander. Die Abweichungen der beiden Kurven für g_r können einige Größenordnungen betragen. Welchen Einfluss dies auf die zeitliche Entwicklung der Akkretionsscheibe hat, ist eine der zentralen Frage dieser Arbeit.

5.2 Stabile Zeitentwicklung von Scheiben

In diesem Abschnitt werden Simulationen eines AGN-Scheibenbeispiels für die beiden Methoden zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung vorgestellt und miteinander verglichen. In der Tabelle 5.2 sind die Parameter, die für die hier simulierten Scheiben gleich sind, zusammengestellt.

Bei der Verwendung der Monopolnäherung zur Bestimmung von g_r wird von einem konstanten Verlauf der Anfangsflächendichte Σ für die gesamte Scheibe ausgegangen. Im

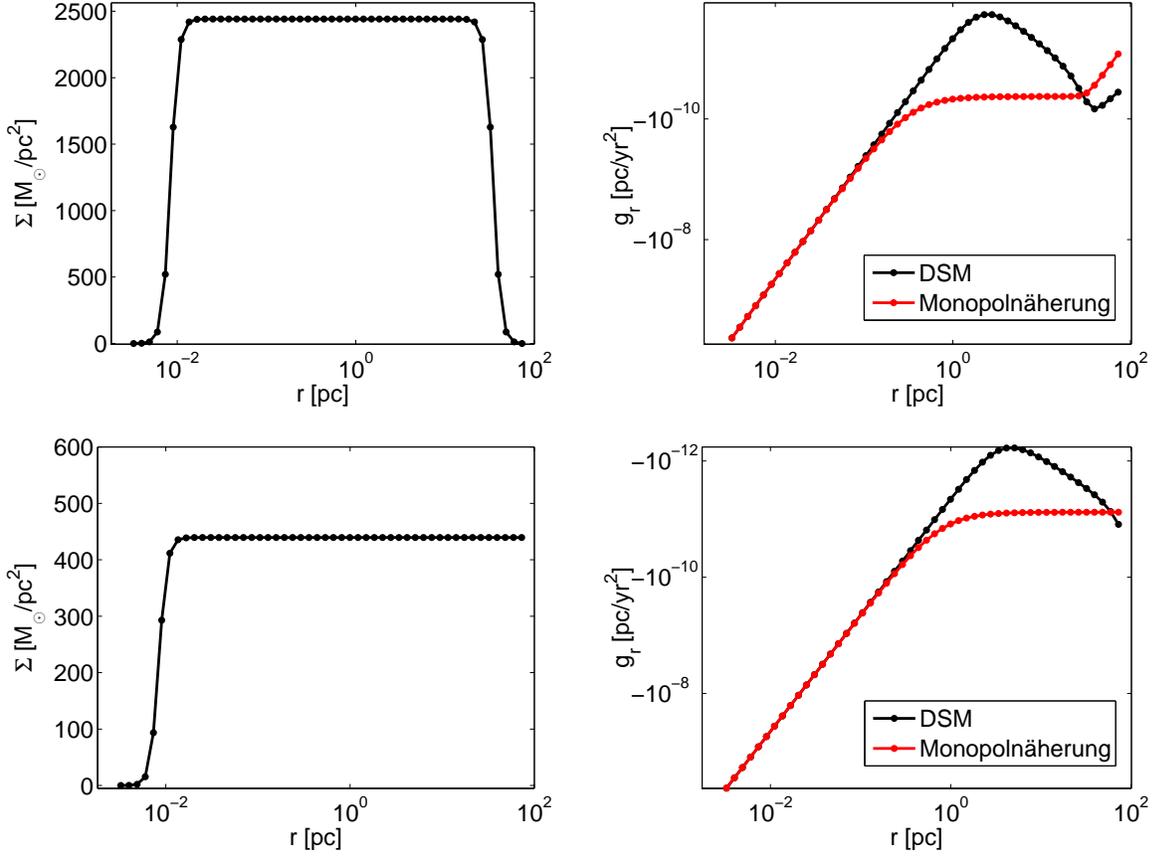


Abbildung 5.1: Anfangsflächendichteverteilungen mit dazugehörigen Gravitationsbeschleunigungen, die mittels *density-splitting*-Methode (DSM) bzw. mit der Monopolnäherung berechnet wurden. **Oben:** konstantes Σ -Profil mit kontinuierlich verschwindenden Rändern. **Unten:** konstantes Σ -Profil mit kontinuierlich verschwindendem Innenrand.

Parameter	
$M_{\text{ZM ini}}$	$10^3 M_{\odot}$
$M_{\text{Scheibe ini}}$	$10^7 M_{\odot}$
r_{in}	$3 \cdot 10^{-3} \text{ pc}$
r_{out}	72 pc
Anzahl Gitterpunkte	30

Tabelle 5.2: Parameter der simulierten AGN-Scheibe.

folgenden Unterabschnitt erfolgt eine genaue Untersuchung der zeitlichen Entwicklung solcher Scheiben.

Evolution einer Akkretionsscheibe bei Verwendung der Monopolnäherung

In den folgenden Abbildungen sind die Zeitentwicklungen verschiedener relevanter Größen dargestellt. In Abbildung 5.2 sind Profile der Flächendichte $\Sigma(r, t)$ bzw. der Gravitationsbeschleunigung $g_r(r, t)$ für charakteristische Zeitpunkte zu sehen. Die Wahl der Zeitpunkte richtet sich danach, ob sich bereits eine wesentliche zeitliche Änderung der Größe $\Sigma(r, t)$ bzw. $g_r(r, t)$ vollzogen hat. Gut zu erkennen ist, wie am Anfang der Entwicklung

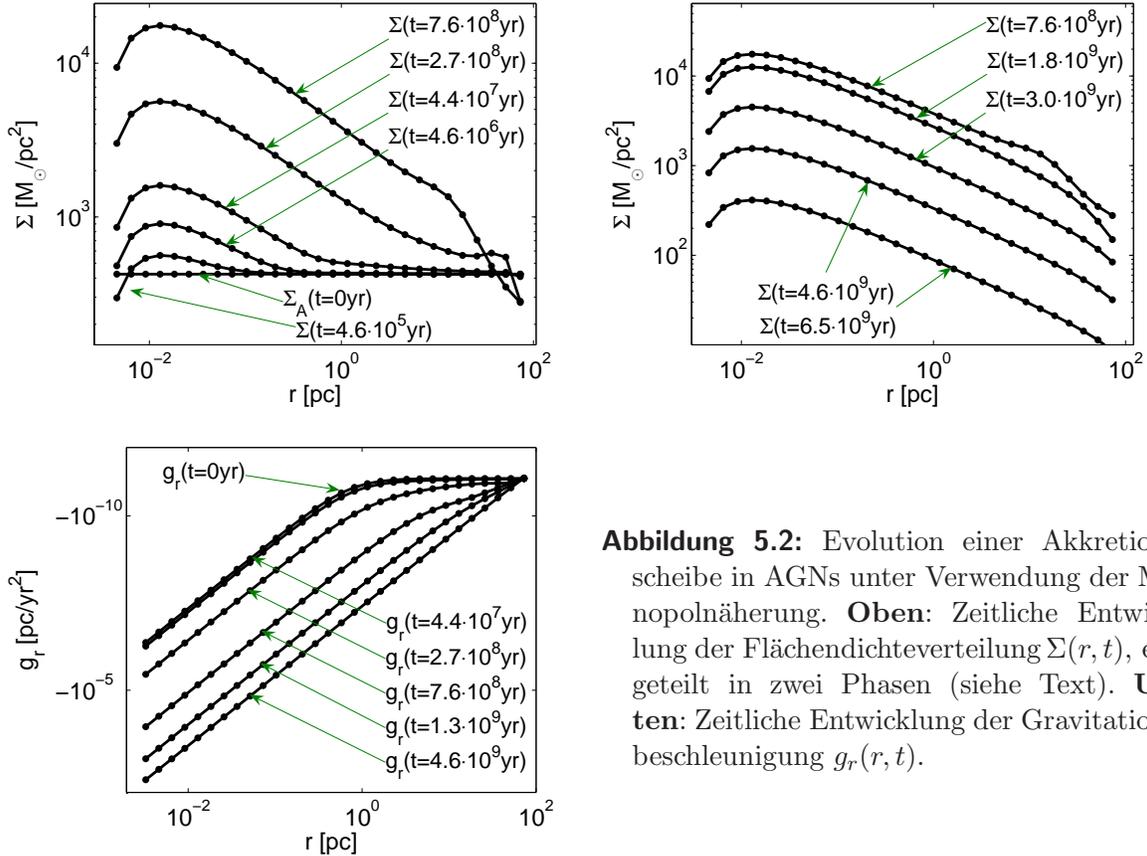


Abbildung 5.2: Evolution einer Akkretionsscheibe in AGNs unter Verwendung der Monopolnäherung. **Oben:** Zeitliche Entwicklung der Flächendichteverteilung $\Sigma(r, t)$, eingeteilt in zwei Phasen (siehe Text). **Unten:** Zeitliche Entwicklung der Gravitationsbeschleunigung $g_r(r, t)$.

das Material durch die Scheibe nach innen transportiert wird. Während Σ im Außenbereich der Scheibe kleiner wird und damit eine Massenabnahme der äußeren Ringe einhergeht, ist zu Beginn der Simulation ein Massenzuwachs im Innenbereich der Scheibe zu verzeichnen (Abbildung 5.2 oben links). Diese Entwicklung hält ungefähr $8 \cdot 10^8$ yr an, was etwa 30% der viskosen Zeitskala entspricht, die mit Hilfe der Gleichung (2.43) auf $\tau_\nu \approx 2.9 \cdot 10^9$ yr bestimmt wird. Daraufhin folgt eine signifikante Abnahme der Scheibenmasse (Abbildung 5.2 oben rechts). Dies ist ebenfalls in Abbildung 5.3 deutlich zu erkennen. In dieser Darstellung ist die zeitliche Entwicklung der Scheiben- und der Zentralmasse in Einheiten der Anfangsscheibenmasse $M_{\text{Scheibe ini}}$ gezeigt. Die Akkretion des Scheibenmaterials auf das Zentralobjekt führt erwartungsgemäß zu einer stetigen Zunahme der Masse des Zentralobjekts. Nach einer Akkretionsdauer, die der viskosen Zeitskala

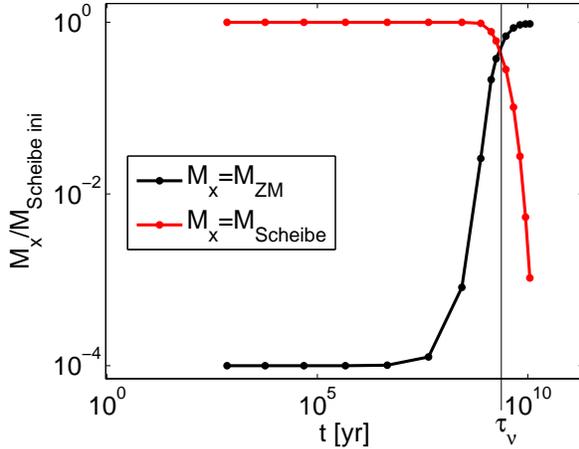


Abbildung 5.3: Zeitliche Entwicklung der Scheiben- und der Zentralmasse (Monopolnäherung).

entspricht, ist die Scheibenmasse ungefähr auf $1/e$ (mit der Eulerschen Zahl $e = 2.7183$) der Anfangsmasse abgefallen. Abbildung 5.3 zeigt, dass das Ende der Akkretionsphase damit noch nicht erreicht ist. Aus diesem Grund ist es sinnvoll, die Entwicklungszeitskala der Scheibe τ_{Evol} zu definieren. Sie gibt die Zeit an, die vergeht, bis durch die Akkretion auf das Zentralobjekt noch 1 Promille der Anfangsscheibenmasse vorhanden ist. Diese Zeitskala stellt eine gute Abschätzung dar, wann die wesentliche Phase der Akkretion beendet ist. In diesem Scheibenbeispiel beträgt die Entwicklungszeit $\tau_{\text{Evol}} = 1.13 \cdot 10^{10}$ yr. Dies entspricht etwa dem Vierfachen der viskosen Zeitskala.

Evolution einer Akkretionsscheibe unter Verwendung der DSM

Nun wird für die Simulation der zeitlichen Entwicklung einer solchen Scheibe anstelle der Monopolnäherung die DSM für die akkurate Berechnung der Gravitation verwendet, was kontinuierlich verschwindende Flächendichteprofile an den Scheibenrändern voraussetzt. In Abbildung 5.4 sind die zeitlichen Verläufe der Kurven für $\Sigma(r, t)$ und $g_r(r, t)$ dargestellt. Die zeitliche Entwicklung der einzelnen Massen des Systems Scheibe-Zentralobjekt zeigt Abbildung 5.5. In dieser Grafik ist ebenfalls die viskose Zeitskala mit eingezeichnet. Sie beträgt für dieses Scheibenbeispiel $\tau_\nu \approx 1.5 \cdot 10^9$ yr. Die Entwicklungszeit entspricht in dieser Simulation ungefähr dem Doppelten dieser Zeit, nämlich $\tau_{\text{Evol}} = 2.65 \cdot 10^9$ yr $\approx 2\tau_\nu$. Die Ergebnisse der beiden Simulationen sind in der Tabelle 5.3 vergleichend zusammengefasst. Bei Verwendung der DSM sind die betrachteten Zeitskalen etwas kleiner als beim Gebrauch der Monopolnäherung. In dieser Tabelle ist ebenfalls das Verhältnis der Masse, die das Zentralobjekt am Ende seiner zeitlichen Entwicklung besitzt, zur anfänglichen Scheibenmasse angegeben. Es ist möglich, dass während der Entwicklung mehr als 40% der Ausgangsmasse der Scheibe das Zentralobjekt nicht erreichen. Das Eddington-Limit ist in diesem Fall dafür nicht verantwortlich. Im Verlauf der Simulation ist es durchaus möglich, dass ein großer Teil der Scheibenmasse zu Beginn der Entwicklung über den äußersten Radius fließt. Die viskose Zeitskala für dieses sehr weit vom Zentralobjekt

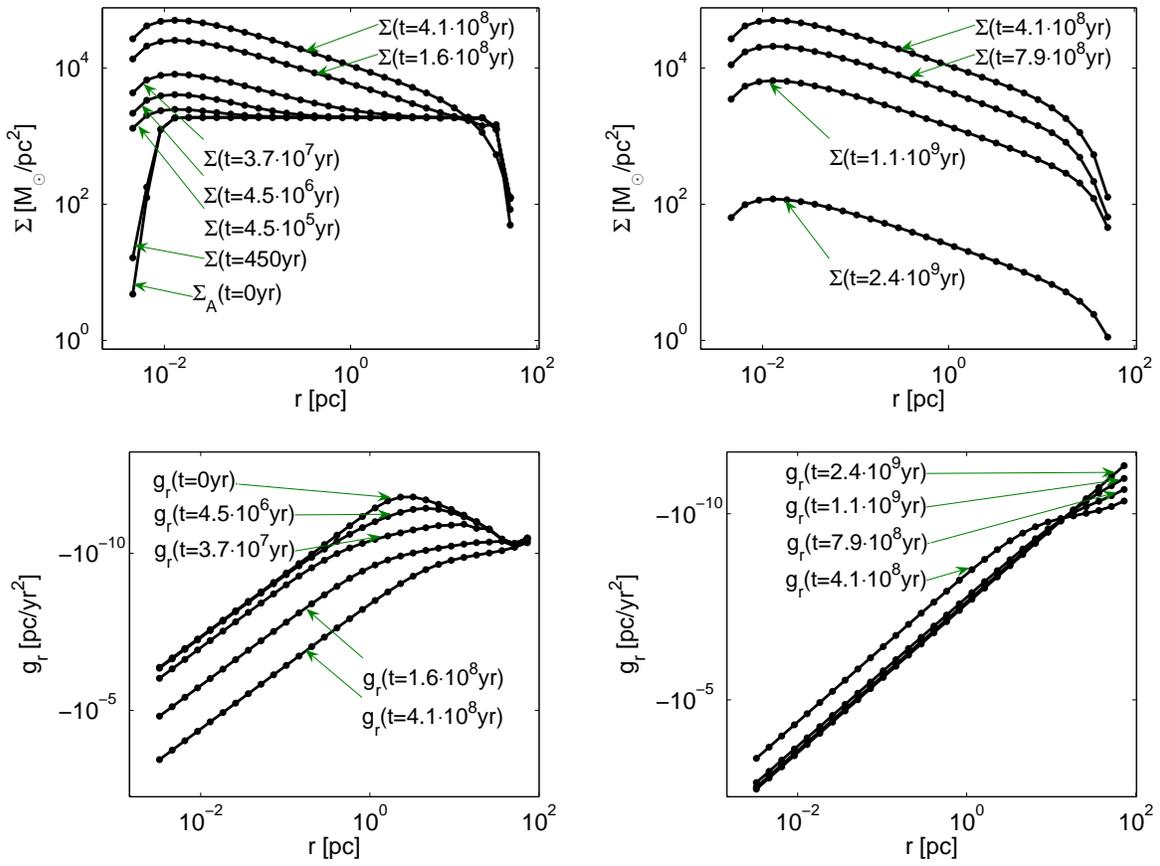


Abbildung 5.4: Evolution einer Akkretionsscheibe in AGNs unter Verwendung der DSM. **Oben:** Zeitliche Entwicklung der Flächendichteverteilung $\Sigma(r, t)$, eingeteilt in zwei Phasen. **Unten:** Zeitliche Entwicklung der Gravitationsbeschleunigung $g_r(r, t)$.

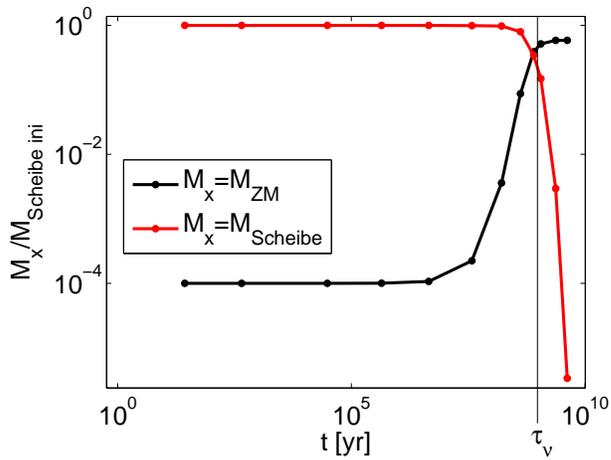


Abbildung 5.5: Zeitliche Entwicklung der Scheiben- und der Zentralmasse (DSM).

	Monopolnäherung	DSM
τ_{Evol}	$1.13 \cdot 10^{10}$ yr	$2.65 \cdot 10^9$ yr
τ_{ν}	$2.9 \cdot 10^9$ yr	$1.5 \cdot 10^9$ yr
$\tau_{\text{Evol}}/\tau_{\nu}$	3.85	1.77
$\frac{M_{\text{ZM}}(\tau_{\text{Evol}})}{M_{\text{Scheibe ini}}}$	95.8%	58.6%

Tabelle 5.3: Zusammenfassung der Simulationsergebnisse für die beiden verwendeten Methoden zur Berechnung von g_r .

entfernte Material erreicht die Größenordnung der Hubblezeit und spielt damit für die Akkretion auf das Zentralobjekt keine Rolle mehr (Duschl 2007).

5.3 Instabile Evolution

Um die Unterschiede der zeitlichen Entwicklungen bei Verwendung der verschiedenen Methoden zur Berechnung von g_r genauer untersuchen zu können, müssen Parameterstudien durchgeführt werden. Interessant ist eine für beide Methoden vergleichende Untersuchung der Abhängigkeit der Entwicklungszeit von der Anfangsmasse der Scheibe. Dies könnte wichtige Aufschlüsse über funktionale Zusammenhänge der Entwicklungszeiten der beiden Methoden geben und auch der Interpretation der Ergebnisse des letzten Abschnitts, dass die Entwicklungszeiten bei der Verwendung der Monopolnäherung länger sind als bei Gebrauch der DSM, dienlich sein.

Leider tritt bei der Simulation der Zeitentwicklung selbstgravitierender Scheiben, für die eine akkurate Berechnung der Gravitation mittels DSM erfolgt, unter bestimmten Voraussetzungen instabiles Verhalten zutage. In diesem Unterkapitel werden die Eigenschaften dieser Instabilitäten untersucht. Für alle folgenden Berechnungen der Scheibenentwicklung wird die DSM verwendet.

Beginnend mit dem Scheibenbeispiel aus dem letzten Abschnitt 5.2, wird die Abhängigkeit der Entwicklung von Instabilitäten von der für die numerische Simulation gewählte Anzahl von Stützstellen geprüft. Die stabile Zeitentwicklung der Scheibe bei Verwendung von 30 Gitterpunkten kann, wie in Abbildung 5.6 für 50, 100 bzw. 200 Gitterpunkte dargestellt wird, nicht mehr aufrecht erhalten werden. Diese Abbildung zeigt die zeitlichen Entwicklungen der Flächendichte und der dazugehörigen Gravitationsbeschleunigung bis zum Auftreten der Instabilität. Diese Instabilitäten verstärken sich im Laufe der numerischen Berechnung so schnell, dass nach Entstehung der Instabilitäten sehr schnell physikalisch nicht sinnvolle Effekte auftreten. Simulierte Scheiben, die dieses Verhalten aufweisen, werden als instabil bezeichnet. Beim Vergleich der drei Entwicklungen ist als Erstes sehr auffällig, dass mit Zunahme der Anzahl an Stützstellen eine Abnahme der Entwicklungszeit bis zum Auftreten der Instabilität einhergeht. Sprich, je mehr Stütz-

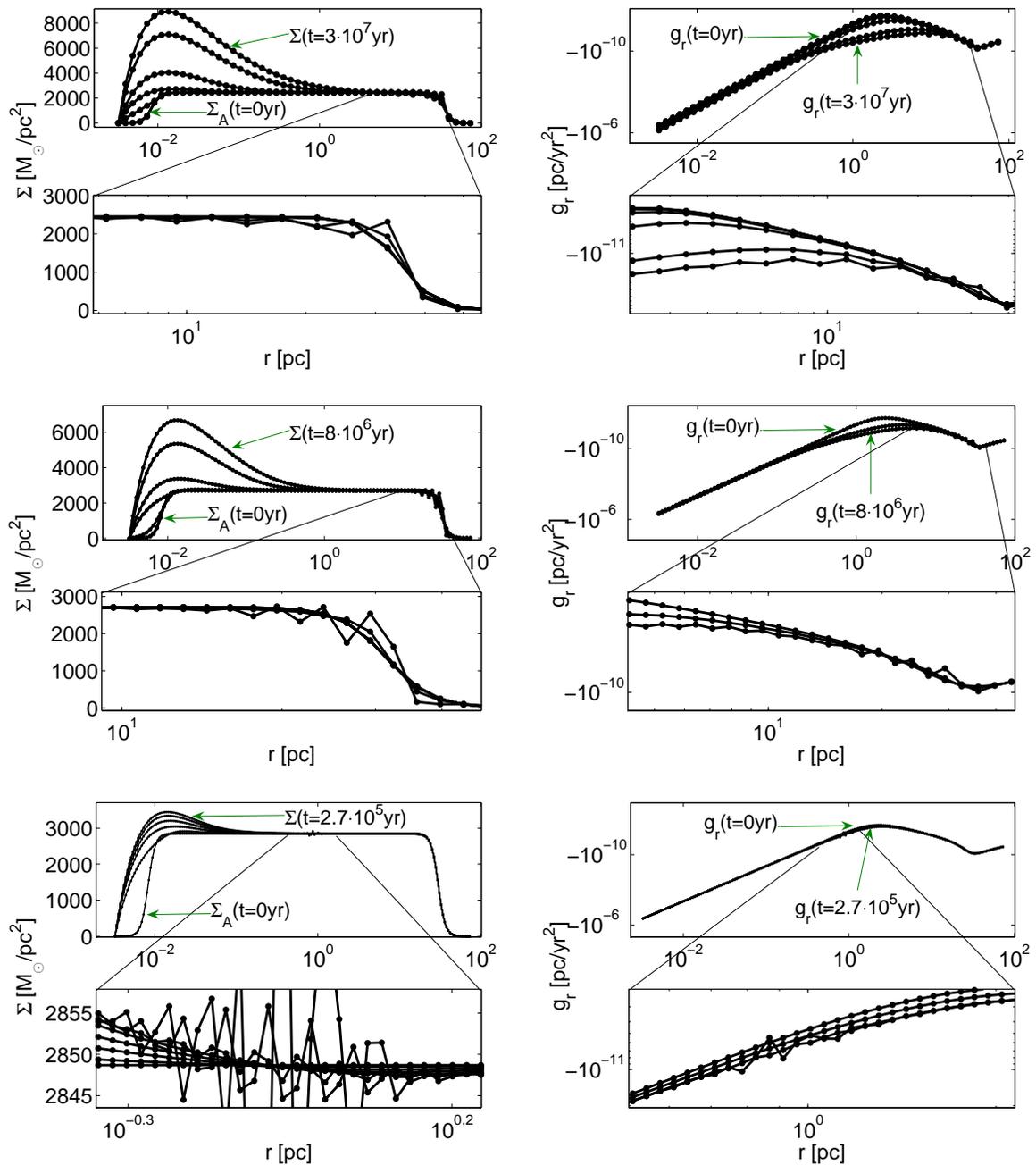


Abbildung 5.6: Zeitliche Entwicklung einer Akkretionsscheibe mit einer Anfangsscheibenmasse von $10^7 M_\odot$. Dargestellt sind die Flächendichte $\Sigma(r, t)$ und die Gravitationsbeschleunigung $g_r(r, t)$ für drei verschiedene Anzahl von Gitterpunkten: **oben:** 50 Gitterpunkte, **mittig:** 100 Gitterpunkte und **unten:** 200 Gitterpunkte. Die instabilen Bereiche der Scheibe sind vergrößert dargestellt.

stellen gewählt werden, desto schneller zeigt die Scheibe instabiles Verhalten. Außerdem verschiebt sich der Bereich, in dem die Instabilitäten zuerst sichtbar werden, für eine größere Anzahl von Gitterpunkten zu kleineren Radien. Die Erklärung hierfür wird mit Hilfe der Analyse des Stabilitätsverhaltens in Abschnitt 5.4 gegeben. Für dieses Scheibenbeispiel erhält man bei der Wahl bis zu 35 Gitterpunkten eine stabile Entwicklung. Wichtig zu erwähnen ist, dass bei der Wahl einer größeren Gitterpunktanzahl die Zeitschrittweite gemäß der CFL-Bedingung (4.23) aufgrund des kleineren Abstands zweier benachbarter Gitterpunkte Δr kleiner wird. Somit würde bei der gleichen Anzahl von numerischen Zeitschritten die Entwicklungszeit automatisch kleiner werden. In der Tabelle 5.4 ist die Anzahl der Zeitschritte für jeder der gewählten Stützstellenanzahl erfasst. Es bleibt festzustellen, dass auch die Anzahl der Zeitschritte für eine größere

	$(M_{\text{Scheibe ini}})$	50 GP	100 GP	200 GP
t_{Inst}	$(10^7 M_{\odot})$	$3 \cdot 10^7 \text{ yr}$	$8 \cdot 10^6 \text{ yr}$	$2.7 \cdot 10^5 \text{ yr}$
t_{Inst}	$(10^8 M_{\odot})$	$1.3 \cdot 10^7 \text{ yr}$	$3.3 \cdot 10^5 \text{ yr}$	$1.5 \cdot 10^4 \text{ yr}$
Anzahl der Zeitschritte	$(10^7 M_{\odot})$	300 000	200 000	35 000
Anzahl der Zeitschritte	$(10^8 M_{\odot})$	100 000	10 000	2 000

Tabelle 5.4: Eigenschaften des instabilen Verhaltens. Dargestellt ist die Zeit t_{Inst} , bei der Instabilitäten auftreten, und die Anzahl der bis zu dieser Zeit gemachten Zeitschritte in Abhängigkeit von der Anzahl der Gitterpunkte (GP) für zwei verschiedene Anfangsmassen der Scheibe ($10^8 M_{\odot}, 10^7 M_{\odot}$).

Gitterpunktanzahl abnimmt, was zusätzlich zu einer kürzeren Entwicklungszeit führt. Weiterhin ist hier die Zeit t_{Inst} aufgeführt. Dies ist die Entwicklungszeit einer Scheibe, bis das instabile Verhalten dominiert (vgl. mit Abb. 5.6). Die in blau markierten Ergebnisse stellen die Resultate einer Simulation, in der die Anfangsscheibenmasse auf $10^8 M_{\odot}$ verändert wurde, dar. Die grafische Darstellung dieser Ergebnisse findet sich in Abbildung 5.7. Auch für dieses Scheibenbeispiel erhält man kürzere Entwicklungszeiten bis zum Auftreten der Instabilität, wenn eine größere Anzahl von Gitterpunkten gewählt wird. Diese Instabilitäten treten wiederum abhängig von der Anzahl der Stützstellen an verschiedenen Radien auf. Der Vergleich der Beispiele mit den unterschiedlichen Anfangsscheibenmassen lässt weitere Schlussfolgerungen zu. Die Entwicklungszeiten der Instabilitäten, aber auch die Anzahl der möglichen Zeitschritte verkleinern sich, sobald die Anfangsmasse der Scheibe erhöht wird. Zunehmende Selbstgravitation der Scheibe führt somit zu einer Förderung des instabilen Verhaltens. Weiterhin verschiebt sich bei solchen Scheiben auch der Instabilitätsbereich hin zu kleineren Radien. Dieser Bereich liegt, wie man in den Abbildungen für die Verläufe von $g_r(r, t)$ sehr gut erkennt, gerade in dem Scheibenabschnitt, in dem der Übergang von einem nicht-selbstgravitierenden in ein selbstgravitierendes Regime vollzogen wird. Dieser Übergang hin zum instabilen Verhalten in Abhängigkeit von der Scheibenmasse wird im Folgenden genauer untersucht.

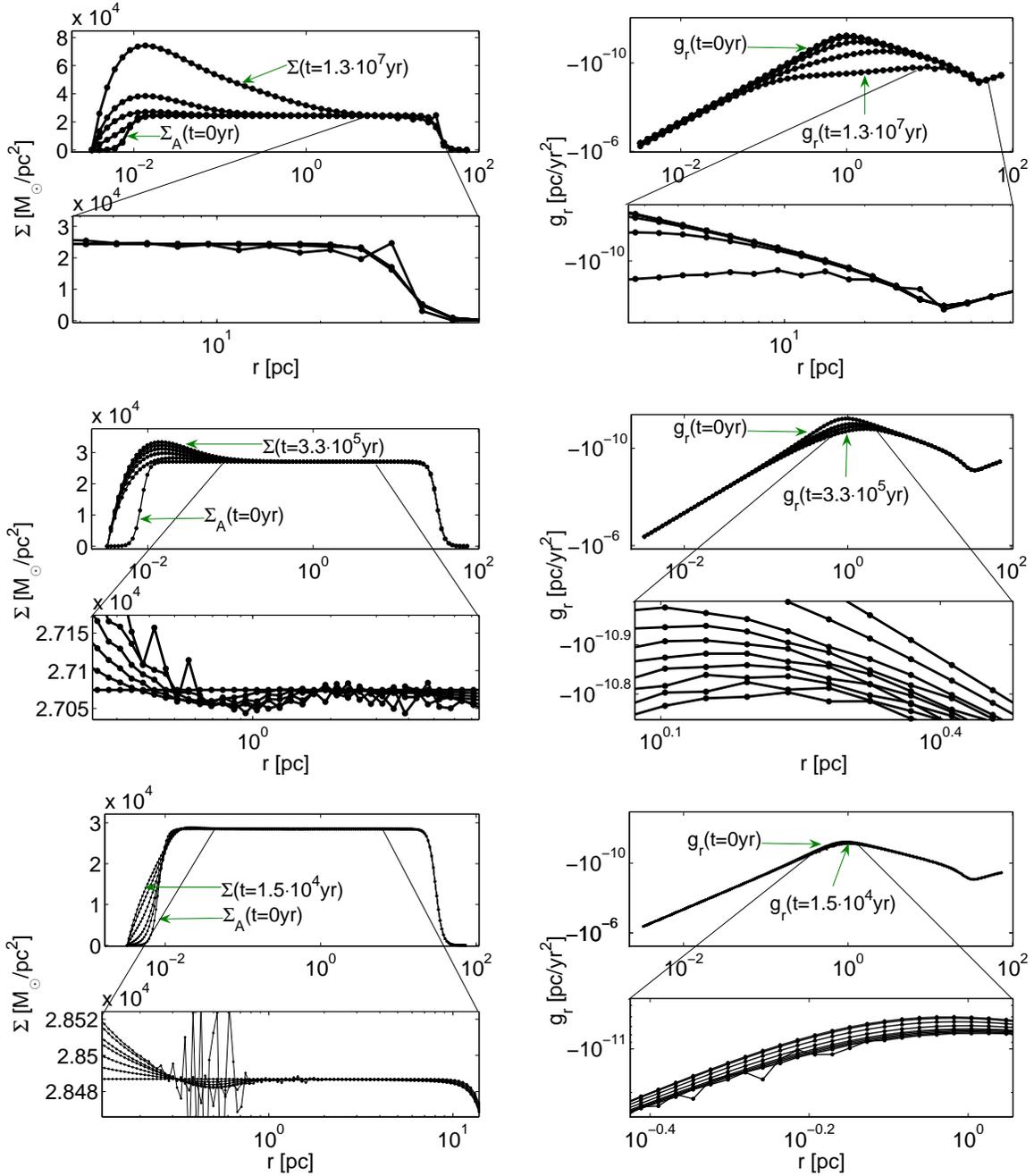


Abbildung 5.7: Zeitliche Entwicklung einer Akkretionsscheibe mit einer Anfangsscheibenmasse von $10^8 M_{\odot}$. Dargestellt sind die Flächendichte $\Sigma(r, t)$ und die Gravitationsbeschleunigung $g_r(r, t)$ für drei verschiedene Anzahl von Gitterpunkten: **oben:** 50 Gitterpunkte, **mittig:** 100 Gitterpunkte und **unten:** 200 Gitterpunkte. Die instabilen Bereiche der Scheibe sind vergrößert dargestellt.

Übergang von stabiler in instabile Akkretion

Da das Auftreten von Instabilitäten abhängig von der Wahl der Gitterpunktanzahl und der Stärke der Selbstgravitation der Scheibe ist, soll nun die Scheibenentwicklung unter Veränderung dieser Parameter analysiert werden. Für diese Untersuchung wird die Masse der Scheibe zu Beginn der Simulation von $10^3 M_\odot$ bis $10^9 M_\odot$ variiert. Für jede Anfangsscheibenmasse werden mehrere Simulationen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Stützstellen durchgeführt. Die Resultate dieser Simulationsreihe sind in Abbildung 5.8 dargestellt. Das Ergebnis der Auswertung dieses Diagramms wurde bereits in diesem

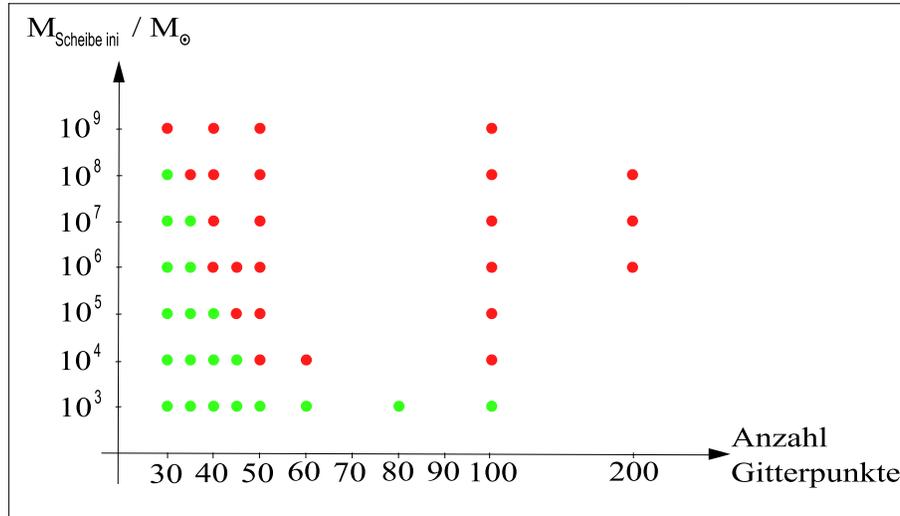


Abbildung 5.8: Übergang von einem stabilen hin zum instabilen Verhalten (DSM).

Abschnitt vorweggenommen. Je kleiner die Anfangsscheibenmasse und damit die Eigengravitation der Scheibe ist, desto stabiler entwickelt sich diese bei einer zunehmenden Anzahl an Gitterpunkten. Zuvor konnte dieses Verhalten beim Verändern der Scheibenmasse von $10^8 M_\odot$ auf $10^7 M_\odot$ beobachtet werden. Diese Entwicklung setzt sich somit für weniger selbstgravitierende Scheiben fort.

Eine genauere Untersuchung des Übergangs hin zu einer instabilen Entwicklung der Scheibe erfolgt im Abschnitt 5.4 mittels linearer Stabilitätsanalyse.

Lokale Gravitationsinstabilitäten

Toomre (1964) und Goldreich & Lynden-Bell (1965) untersuchten als Erste axialsymmetrische gravitative Instabilitäten in nicht-viskosen differentiell rotierenden Gasscheiben. Sie fanden als Kriterium für die Stabilität solcher Scheiben folgende Bedingung, den sogenannten Toomre-Parameter Q ,

$$Q = \frac{c_s \kappa}{\pi G \Sigma} > 1. \quad (5.1)$$

Q macht eine Aussage darüber, wie die Rotation zusammen mit dem Druck innerhalb der Scheibe diese gegenüber der Eigengravitation stabilisieren können. Die Epizykelfrequenz κ von differentiell rotierenden Scheiben ist definiert als

$$\kappa^2(r) = r \frac{d\omega^2}{dr} + 4\omega^2, \quad (5.2)$$

mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = v_\varphi/r$. Da die Größen c_s , κ , und Σ im Allgemeinen alle Funktionen des Radius sind, ist Q ebenfalls eine Funktion des Radius. In diesem Fall impliziert $Q(r) < 1$ eine lokale axialsymmetrische Instabilität in der Nähe des Radius r (Binney & Tremaine 1987). In Duschl & Britsch (2006) wird gezeigt, dass für selbstgravitierende Scheiben, die geometrisch dünn sind, bei Verwendung der Monopolnäherung zur Berechnung der Gravitation der Toomre-Parameter stets kleiner als eins ist. Das bedeutet, dass dünne selbstgravitierende Scheiben unter Vernachlässigung der Viskosität Toomre instabil sind.

Da gemäß Abschnitt 2.3 Druckkräfte innerhalb der hier betrachteten Scheiben vernachlässigbar sind, ist es fraglich, ob eine Analyse des Toomre-Parameters (5.1) Aufschluss über die Stabilität der in dieser Arbeit betrachteten Scheiben geben kann, auch vor allem, weil die viskosen Eigenschaften unberücksichtigt bleiben. Trotzdem soll Q für diese Scheibenbeispiele berechnet werden. Hierfür wird allerdings die Schallgeschwindigkeit c_s benötigt. Da c_s für das Scheibenmodell nicht gebraucht wird, muss diese Größe nachträglich berechnet werden. Das Ergebnis der Untersuchung auf Toomre-Stabilität ergibt für alle Scheiben, auch die eine stabile Zeitentwicklung aufweisen, in großen Bereichen der Scheibe einen Toomre-Parameter, der kleiner als eins ist. Damit wäre eine stabile Entwicklung für diese Scheiben ausgeschlossen. Dies steht im Widerspruch zu den Ergebnissen aus Abschnitt 5.2.

Die ersten Untersuchungen von Gravitationsinstabilitäten für viskose Scheiben wurden von Lynden-Bell & Pringle (1974) durchgeführt. Eine sehr detaillierte Analyse und Diskussion findet sich in Britsch (2006). Ausgangspunkt der Untersuchungen in dieser Arbeit ist die Navier-Stokes-Gleichung, wobei hier die Abhängigkeit der Größe $\nu\Sigma$ vom Radius erstmalig berücksichtigt wird. Das Ergebnis der Stabilitätsanalyse für dünne stationäre selbstgravitierende β -Scheiben ist folgende Stabilitätsbedingung

$$a_3(k) = \omega^2 + c_s^2 k^2 - 3 \frac{\nu^2}{r^2} k^2 - 2\pi G \Sigma k > 0. \quad (5.3)$$

Für die zeitliche und räumliche Abhängigkeit der Störung wird der Exponentialansatz $\delta X \propto e^{i(\sigma t + k r)}$ mit $X \in \{\Sigma, v_r, v_\varphi, \Phi\}$ (Φ ist das Gravitationspotenzial) verwendet. Für die Stabilität solcher Scheiben muss die Bedingung $a_3 > 0$ erfüllt sein. Da die Relation (5.3) quadratisch in k ist, können zwei mögliche Fälle unterschieden werden:

- $c_s > \sqrt{3}\beta v_\varphi$: in diesem Fall (nach oben geöffnete Parabel) liegt das Minimum von a_3 bei $k = k_0$, das sich folgendermaßen berechnen lässt

$$k_0 = \frac{\pi G \Sigma}{c_s^2 - 3 \frac{\nu^2}{r^2}}. \quad (5.4)$$

Aus $a_3(k_0) > 0$ folgt die reformulierte Stabilitätsbedingung

$$Q^2 - \frac{3(\beta v_\varphi)^2}{(\pi G \Sigma)^2} > 1. \quad (5.5)$$

Da der zweite Term negativ und, wie zuvor erwähnt, Q bei Verwendung der Monopolnäherung stets kleiner als eins ist, kann die Bedingung (5.5) nicht erfüllt sein. Solche Scheiben werden instabiles Verhalten aufweisen.

- $c_s < \sqrt{3}\beta v_\varphi$: hier (nach unten geöffnete Parabel) gilt für große Wellenzahlen k ganz offensichtlich $a_3(k \rightarrow \infty) < 0$. Somit wachsen Störungen mit kleinen Wellenlängen λ zeitlich an und das System wird instabil.

Die Schlussfolgerung aus diesen Ergebnissen ist, dass alle geometrisch dünnen selbstgravitierenden β -Scheiben instabil sind. Jedoch muss betont werden, dass in dieser Analyse für die Berechnung der azimuthalen Geschwindigkeit v_φ die Monopolnäherung zugrunde gelegt wurde und dass von einer stationären Scheibe ausgegangen wird. Streng genommen gelten diese Ergebnisse somit nur für stationäre Scheiben, für die das Gravitationspotenzial durch die Monopolnäherung approximiert wurde.

Diese Ergebnisse, aber auch die Untersuchung des Toomre-Parameters (5.1), geben Hinweise darauf, dass die hier betrachteten Scheiben instabil sind. Dies steht jedoch im Widerspruch zu den stabilen Scheibenentwicklungen, die im letzten Abschnitt untersucht wurden. Die Vernachlässigung einiger Terme in der Navier-Stokes-Gleichung kann somit wesentliche Auswirkungen auf die Bedingungen für stabiles Verhalten mit sich bringen. Deswegen ist eine für das in dieser Arbeit verwendete Scheibenmodell angepasste Stabilitätsanalyse erforderlich. Die theoretischen Grundlagen für eine solche Analyse sind in Kapitel 3 beschrieben.

5.4 Analyse des Stabilitätsverhaltens

Am Beispiel der Standardscheibe, die in den vorangegangenen Abschnitten diskutiert wurde, soll nun eine lineare Stabilitätsanalyse durchgeführt werden. Die Simulationsparameter sind in Tabelle 5.5 zusammengefasst. Es wird die Abhängigkeit der Stabilität

Parameter	
$M_{\text{ZM ini}}$	$10^3 M_\odot$
$M_{\text{Scheibe ini}}$	$10^7 M_\odot$
r_{in}	$3 \cdot 10^{-3} \text{ pc}$
r_{out}	72 pc
Anzahl Gitterpunkte	$30 - 200$

Tabelle 5.5: Simulationsparameter der Scheibe für die die Stabilitätsanalyse durchgeführt wird.

der Scheibenentwicklung von der Wahl der Gitterpunktanzahl und von der Methode zur Bestimmung der Gravitation untersucht.

Wie bereits in Abschnitt 3.1 dargelegt wurde, muss das Gleichungssystem dieser Stabilitätsuntersuchung zu jedem Zeitpunkt unterzogen werden, weil die Größen nicht stationär sind (dynamische Stabilitätsanalyse). Da diese Auswertung sehr rechenzeitaufwendig ist, wird sie nur zu bestimmten Zeitpunkten durchgeführt. Die Änderungen der Stabilitätseigenschaften können so nachvollzogen werden. Zu einem Zeitpunkt t muss das charakteristische Eigenwertproblem (3.16) für eine vorgegebene Wellenzahl k gelöst werden. Man erhält für jedes k genau N Eigenwerte für die Frequenz σ , wobei N die Anzahl der gewählten Stützstellen ist (siehe Abschnitt 3.3). Das Inverse von σ gibt die typische Entwicklungszeitskala der Instabilität an

$$\tau_{\text{Inst}} = \frac{1}{\sigma}. \quad (5.6)$$

In gleicher Weise erhält man mit dem Inversen der berechneten Wellenzahl k eine Abschätzung über die Längenskala der Instabilität. Diese wird durch die Größe λ_{Inst} beschrieben. Es gilt

$$\lambda_{\text{Inst}} = \frac{1}{k}. \quad (5.7)$$

Stabiles Verhalten erwartet man nach der Bedingung (3.17), wenn für jede Wellenzahl k der Imaginärteil aller Eigenwerte σ kleiner null ist. (Im Folgenden wird nur noch vom Eigenwert σ gesprochen, wobei damit eigentlich sein Imaginärteil gemeint ist.) Die für jede simulierte Scheibe eigenen Längenskalen werden durch den kleinsten und größten Scheibenradius charakterisiert. Dies wird bei der Wahl der Wellenzahl k wie folgt berücksichtigt. Es werden N Werte für k im Bereich

$$\frac{1}{r_{\text{in}}} = k_{\text{max}} = k_1 > k_2 > \dots > k_j > \dots > k_{N-1} > k_N = k_{\text{min}} = \frac{1}{r_{\text{out}}} \quad j \in \{1, \dots, N\} \quad (5.8)$$

gewählt. Im Prinzip besteht die Möglichkeit, dass für größere bzw. kleinere Wellenzahlen instabiles Verhalten eintritt, was jedoch durch die Wahl des numerischen Rechengebiets nicht zwangsläufig zu Problemen bei der Simulation der Scheibenentwicklung führt. Bei der Auswertung der Ergebnisse muss dies berücksichtigt werden.

Monopolnäherung

Begonnen wird mit der dynamischen Stabilitätsanalyse einer Scheibe, für die die Gravitationsbeschleunigung durch die Monopolnäherung approximiert wird. Die stabile zeitliche Entwicklung einer solchen Scheibe ist in Abbildung 5.2 dargestellt. Die Ergebnisse der Stabilitätsuntersuchung dieser Scheibe zeigt das linke Bild der Abbildung 5.9. Dargestellt ist das Verhältnis der negativen Eigenwerte zur Gesamtanzahl der Eigenwerte (Anteil negativer Eigenwerte) in Abhängigkeit von der Entwicklungszeit t und von der Wellenzahl k . Für jeden Wert von k zu einem Zeitpunkt t bekommt man N Eigenwerte.

Positive Eigenwerte bedeuten instabiles Verhalten und negative Eigenwerte lassen auf Stabilität schließen. Erreicht somit der Anteil der negativen Eigenwert für eine Wellenzahl den Wert eins, sind alle Eigenwerte negativ und die Störung mit dieser Wellenzahl wird gedämpft. Dieses Verhalten trifft bereits zu Beginn der Scheibenevolution für große

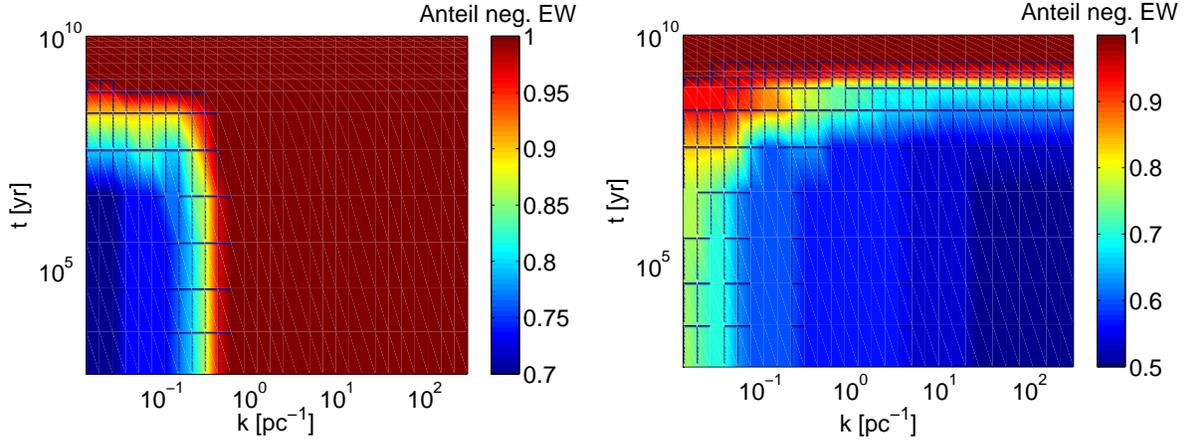


Abbildung 5.9: Ergebnisse der Stabilitätsanalyse bei Verwendung der Monopolnäherung (**links**) bzw. der modifizierten Monopolnäherung (**rechts**). Dargestellt ist der Anteil der negativen Eigenwerte als Funktion der Entwicklungszeit t und der Wellenzahl k .

Wellenzahlen k zu. Geht man zu kleinen Wellenzahlen, sinkt der Anteil der negativen Eigenwerte jedoch bis auf 70%. Im Prinzip ist diese Scheibenkonfiguration damit instabil. Berechnet man nun die Entwicklungszeitskalen der Instabilitäten τ_{Inst} aus den positiven Eigenwerten für solch kleine k , dann liegen diese zwischen $10^8 - 10^{10}$ yr. Dies ist die Größenordnung der viskosen Zeitskala. Das bedeutet, dass sich die Scheibe inklusive Störungen bis zu dieser Zeit bereits sehr viel weiter entwickelt hat. Dies ist auch ungefähr die Zeit, für die eine stabile Konfiguration für alle Wellenzahlen k durch die dynamische Stabilitätsuntersuchung vorhergesagt wird. Es kann zusammengefasst werden, dass die Scheibe zwar in einer instabilen Konfiguration mit ihrer Zeitentwicklung startet, jedoch kommt es zu keiner Verstärkung der Störungen, da deren Entwicklungszeit vergleichbar mit der typischen Entwicklungszeit der Scheibe ist.

Unglücklicherweise sagt die Abschätzung in Britsch (2006) gerade für die Verwendung der Monopolnäherung instabiles Verhalten für große Wellenzahlen voraus. Hierbei muss berücksichtigt werden, dass in Britsch (2006) die Monopolnäherung durch eine weitere Annahme modifiziert wird. Die Scheibenmasse wird folgendermaßen bestimmt (vgl. mit Gleichung (2.28))

$$M_{\text{Scheibe}}(r) = \int_0^r 2\pi r \Sigma dr \approx \pi r^2 \Sigma(r). \quad (5.9)$$

Hierbei wird angenommen, dass die Masse des äußersten Rings (sprich des Rings am Radius r) den größten Anteil der Scheibenmasse darstellt, da die Ringfläche mit r^2 an-

steigt (besonders bei der Wahl eines logarithmischen Gitters). Deshalb wird in der obigen Gleichung die Flächendichte am Radius r $\Sigma(r)$ gewählt. Dies gilt, wenn die Flächendichte zum Zentralobjekt hin nicht schneller ansteigt, als r^2 abnimmt, was im Allgemeinen der Fall ist. Eine solche Scheibe mit der modifizierten Monopolnäherung wird nun in gleicher Weise auf Stabilität überprüft. Die Evolution dieser Scheibe ist dem zuvor diskutierten Scheibenbeispiel sehr ähnlich. Die Entwicklungszeiten unterscheiden sich kaum. Die Ergebnisse der Stabilitätsanalyse sind im rechten Bild der Abbildung 5.9 dargestellt. Besonders viele positive Eigenwerte finden sich bei großen Wellenzahlen. Dies stimmt mit den Vorhersagen aus Britsch (2006) gut überein. Doch auch in diesem Fall geht eine instabile Konfiguration in eine stabile über. Der Vergleich dieser beiden Beispiele macht jedoch deutlich, dass schon geringfügige Modifikationen am Scheibenmodell Einfluss auf die Stabilität haben können.

Akkurate Behandlung der Gravitation mittels DSM

In den vorherigen Abschnitten konnte festgestellt werden, dass sich eine gegebene Scheibenkonfiguration abhängig von der für die Simulation gewählten Gitterpunktanzahl stabil bzw. instabil entwickeln wird. Eine stabile zeitliche Entwicklung einer solchen Scheibe (Verwendung der DSM) erhält man, wenn für die Diskretisierung 30 Gitterpunkte verwendet werden (siehe Abbildung 5.4). Für 50 Gitterpunkte und mehr sind die (instabilen) Evolutionen in Abbildung 5.6 dargestellt. Diese Abhängigkeit des Übergangs von einem stabilen hin zum instabilen Verhalten von der Anzahl der Stützstellen soll mit Hilfe der linearen Stabilitätsanalyse genauer untersucht werden.

In Abbildung 5.10 sind die Ergebnisse dieser Analyse für vier unterschiedliche Anzahl von Gitterpunkten zusammengefasst. Dabei ist auffällig, dass sich die ersten drei Plots (für 30, 50 und 100 Gitterpunkte) zu Beginn der Scheibenentwicklung nicht sehr deutlich voneinander unterscheiden. In allen drei Fällen steigt der Anteil an positiven Eigenwerten, wenn man zu größeren Wellenzahlen geht. Aber auch wenige positive Eigenwerte bei niedrigen Wellenzahlen können instabiles Verhalten hervorrufen. Um genauere Aussagen machen zu können, müssen die Entwicklungszeitskalen der Instabilitäten mit den viskosen Zeitskalen verglichen werden. Hierfür wählen wir zwei Wellenzahlen (eine sehr kleine und eine sehr große), um einen beispielhaften Vergleich der Zeitskalen durchführen zu können. Begonnen wird mit der kleinsten Wellenzahl $k = k_{\min}$. Die Zeitskalen für die Entwicklung der Instabilitäten liegen bei $\tau_{\text{Inst}} = 8 \cdot 10^7 - 10^9$ yr für 30 Gitterpunkte und $\tau_{\text{Inst}} = 2 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^7$ yr für 100 Gitterpunkte. Eine kleine Wellenzahl repräsentiert eine große Wellenlänge und somit erwartet man das Auftreten einer Instabilität in diesem Fall im äußeren Scheibenbereich, da nur hier die Längenskala der Instabilität mit der der Scheibe vergleichbar ist. Für diesen Bereich wurde die viskose Zeitskala bereits in Abschnitt 5.2 bestimmt ($\tau_\nu \approx 10^9$ yr). Nur wenn τ_{Inst} kleiner als die viskose Zeitskala ist, hat die Instabilität genug Zeit, um sich entwickeln zu können. Für 50 und 100 Gitterpunkte ist diese Bedingung offensichtlich erfüllt. Für die Simulation mit 30 Gitterpunkten besitzen die beiden Skalen die gleiche Größenordnung. Zoomt man in Abbildung

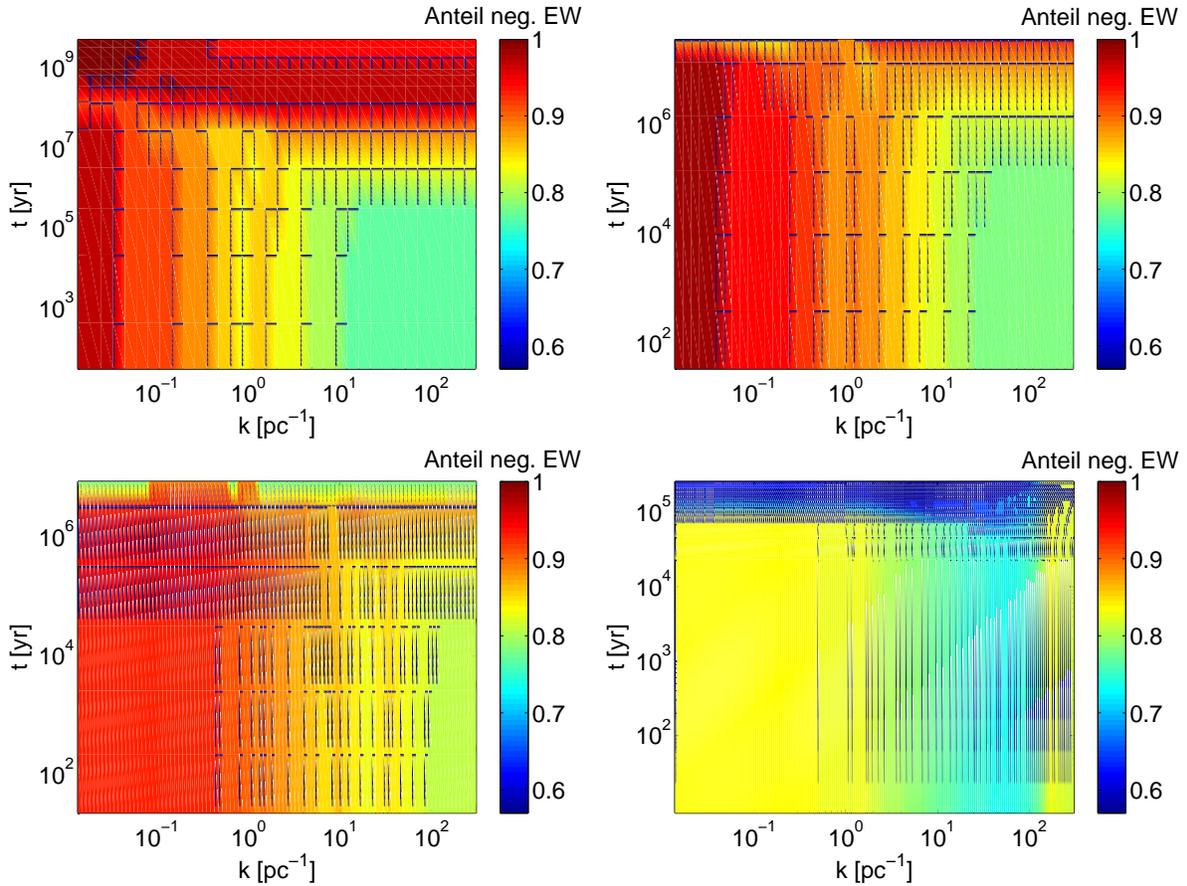


Abbildung 5.10: Ergebnisse der Stabilitätsanalyse bei Verwendung der DSM für eine unterschiedliche Anzahl von Gitterpunkten (**oben links:** 30, **oben rechts:** 50, **unten links:** 100 und **unten rechts:** 200). Dargestellt ist der Anteil der negativen Eigenwerte als Funktion der Entwicklungszeit t und der Wellenzahl k .

5.4 in den äußeren Scheibenbereich hinein, sieht man ebenfalls, wie in diesem Bereich die Instabilitäten gerade sichtbar werden (siehe Abbildung 5.11). In diesem Moment setzt die viskose Entwicklung ein und die Instabilitäten lösen sich durch den Massentransport nach innen schnell auf.

Im Falle einer großen Wellenzahl ist die Wellenlänge und damit die Längenskala der Instabilität klein. Die Frage ist, in welchem Scheibenbereich diese Wellenlänge vergleichbar mit der typischen Längenskala der Scheibe ist. Diese Längenskala ist nicht der Radius r , sondern der Abstand zweier benachbarter Punkte Δr am Radius. In Abbildung 5.12 ist dieser Zusammenhang für verschiedene Anzahl von Stützstellen dargestellt. Für das Beispiel einer großen Wellenzahl wurde $k = 110 \text{ pc}^{-1}$ gewählt. Dies entspricht der Wellenlänge $\lambda = 9 \cdot 10^{-3} \text{ pc}$, was einer typischen Längenskala im inneren Scheibenbereich, in dem die Scheibe nicht-selbstgravitierend ist, gleichkommt. In diesem Bereich sind deswegen keine gravitativen Instabilitäten zu erwarten. Aufgrund der Wahl eines loga-

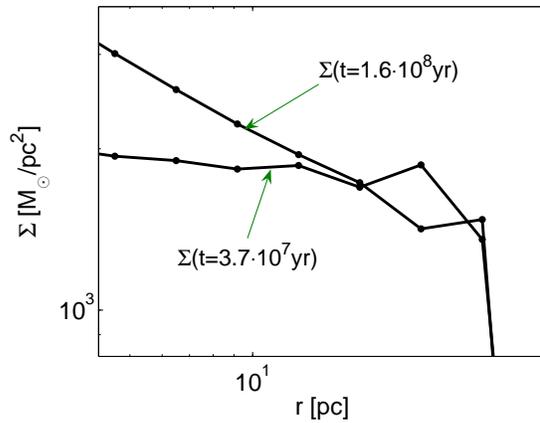


Abbildung 5.11: Zoom in die stabile Scheibenentwicklung in Abbildung 5.4.

rhythmischen Gitters wird der Abstand Δr mit steigendem r sehr schnell sehr groß. Im äußeren Scheibenbereich sind die typischen Längenskalen der Scheibe somit viel größer als die hier gewählte Wellenlänge, sodass die Instabilität während der Simulation räumlich nicht aufgelöst und damit unterdrückt wird. (Alle Zahlenwerte sind in in der Tabelle 5.6 zusammengefasst.)

Am Beispiel der instabilen Scheibenentwicklung, wenn 200 Gitterpunkte für die Diskretisierung verwendet werden, soll die entstehende Instabilität eingehend untersucht werden, um so Rückschlüsse auf die Wellenlänge und die Zeitskala der Instabilität ziehen zu können. In der Abbildung 5.6 unten ist die zeitlich instabile Entwicklung dieses Scheibenbeispiels dargestellt. Man erkennt, dass die Instabilität im Bereich zwischen 0.5 pc und 1.5 pc entsteht. Dies entspricht einem Gitterpunktabstand $0.025 \text{ pc} < \Delta r < 0.075 \text{ pc}$ bzw. einem Wellenzahlenbereich $13 \text{ pc}^{-1} < k < 40 \text{ pc}^{-1}$. Beim Vergleich mit den Ergebnissen der dynamischen Stabilitätsanalyse für dieses Scheibenbeispiel (Abbildung 5.10) fällt auf, dass gerade in diesem Wellenzahlenbereich die meisten positiven Eigenwerte auftreten. Die Entwicklungszeitskalen, die mit diesen Eigenwerten berechnet werden,

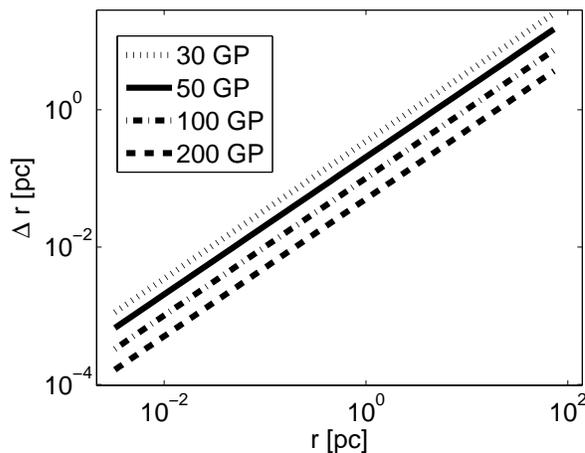


Abbildung 5.12: Abstand zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten auf einem logarithmischen Gitter. Es variiert die Anzahl der für die numerische Simulation gewählten Stützstellen.

liegen im Bereich $\tau_{\text{Inst}} = 2000 - 9 \cdot 10^6 \text{ yr}$. Dies ist deutlich kürzer als die viskose Zeitskala des Materials in diesem Scheibenbereich ($\tau_\nu = 4 \cdot 10^8 \text{ yr}$), was das Auftreten dieser Instabilität erklärt. In Abbildung 5.6 unten kann die Zeit, bei der sich die Instabilität sichtbar verstärkt hat, abgelesen werden. Mit $t \approx 10^5 \text{ yr}$ fällt diese genau in den Bereich der angegebenen Entwicklungszeitskala der Instabilität.

$t = 0 \text{ yr}$				
	30 GP	50 GP	100 GP	200 GP
$k = k_{\min}$	pos. EW: 2	1	7	33
	$\tau_{\text{Inst}} = 8 \cdot 10^7 - 10^9 \text{ yr}$	$7 \cdot 10^7 \text{ yr}$	$2 \cdot 10^5 - 8 \cdot 10^7 \text{ yr}$	$8000 - 9 \cdot 10^7 \text{ yr}$
$k \approx 110 \text{ pc}^{-1}$	pos. EW: 6	11	19	48
	$\tau_{\text{Inst}} = 680 - 8 \cdot 10^5 \text{ yr}$	$3 - 10^5 \text{ yr}$	$260 - 5 \cdot 10^5 \text{ yr}$	$250 - 7 \cdot 10^5 \text{ yr}$

Tabelle 5.6: Anzahl der positiven Eigenwerte und der Bereich der Entwicklungszeitskala für die Instabilität τ_{Inst} für zwei Spezialfälle (große und kleine Wellenzahl k) zu Beginn der numerischen Simulation ($t = 0 \text{ yr}$).

Zusammenfassung der Ergebnisse

Die Untersuchung auf Stabilität aller Beispiele, die in diesem Abschnitt behandelt werden, hat ergeben, dass praktisch alle Konfigurationen zu Beginn ihrer zeitlichen Entwicklung über instabile Moden verfügen. Wie man gesehen hat, bedeutet dies jedoch nicht, dass die Scheibenentwicklung instabil verlaufen muss. Ist die Entwicklungszeitskala der Instabilität beispielsweise größer als die viskose Zeitskala, hat die Instabilität nicht genug Zeit, um sich entwickeln zu können. Dies konnte besonders an einem Scheibenbeispiel, bei dem die Berechnung der Gravitation mittels Monopolnäherung approximiert wurde, deutlich gemacht werden.

Des Weiteren wird festgestellt, dass eine Abhängigkeit des Stabilitätsverhaltens von der Wahl eines numerischen Parameters besteht. Die Anzahl der gewählten Gitterpunkte bestimmt den Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte Δr . Dieser variiert mit dem Radius r . Für eine große Anzahl von Stützstellen ist das Δr verhältnismäßig klein und so können sich Instabilitäten, deren Ausdehnung sich über vergleichbar kleine Wellenlängen (charakteristische Längenskala) erstrecken, gegebenenfalls verstärken. Die Wahl der Gitterpunktanzahl fungiert somit als eine Art Wellenlängenfilter, da durch die Diskretisierung die räumliche Auflösung auf dem numerischen Gitter bestimmt wird. Eine kleinere Anzahl von Stützstellen führt somit zu einer größeren numerischen Dissipation. Für kleine Wellenzahlen (bzw. große Wellenlängen) kann dieser Effekt anhand der Entwick-

lungszeitskalen der Instabilitäten in Tabelle 5.6 studiert werden. Mit zunehmender Gitterpunktanzahl wird τ_{Inst} kontinuierlich kleiner und unterschreitet ab 50 Gitterpunkte deutlich die viskose Zeitskala, was eine rapide Verstärkung der Instabilitäten mit der Zeit zur Folge hat. Je mehr Gitterpunkte gewählt wurden, desto kleiner sind die Entwicklungszeiten und desto schneller treten die Instabilitäten auf. Eine Abhängigkeit von der Zeitschrittweite Δt (zeitlich Auflösung der Instabilität) kann nicht festgestellt werden. In allen Fällen, in denen die Scheibenentwicklung nicht durch die Verstärkung der Instabilitäten gestört wird, zeigt die dynamische Stabilitätsanalyse, dass sich bei Beginn der viskosen Entwicklung eine stabile Scheibenkonfiguration einstellt (Anteil der negativen Eigenwerte gleich eins).

5.5 Entstehungszeitskalen Schwarzer Löcher

In Abbildung 5.8 ist der Übergang von stabiler in instabile Akkretion in Abhängigkeit von der Anfangsmasse der Scheibe und der für die numerische Simulation verwendeten Anzahl von Stützstellen dargestellt, wobei in diesen Simulationen die DSM für die Berechnung der Gravitation verwendet wird. Für Scheiben mit einer Anfangsmasse von $10^3 - 10^8 M_\odot$ ist eine stabile Entwicklung des Systems Scheibe-Zentralmasse bei der Wahl von 30 Gitterpunkten möglich. Für kleiner werdende Anfangsscheibenmassen kann eine stabile Entwicklung auch bei zunehmender Anzahl von Gitterpunkten realisiert werden. Entspricht zu Beginn der Entwicklung die Scheibenmasse der Masse des Zentralobjekts ($10^3 M_\odot$), kann die numerische Simulation auch bei der Wahl von (mindestens) 100 Gitterpunkten durchgeführt werden. Bei Verwendung der DSM bedeutet dies jedoch einen immensen Aufwand an Rechenzeit. Anhand dieses Beispiels soll die Konvergenz der Simulationsergebnisse hin zu einer großen Gitterpunktanzahl überprüft werden. Dies ist möglich, da für dieses Beispiel die dynamische Stabilitätsanalyse (für jede Wahl der Gitterpunktanzahl) zu jeder Zeit t und allen betrachteten Wellenzahlen k absolute Stabilität vorhersagt, d.h., es gibt nur negative Eigenwerte.

Konvergenztest

Je kleiner die Anzahl der gewählten Stützstellen ist, desto größer ist der Diskretisierungsfehler. Dieser gibt die Differenz zwischen der analytischen und numerischen Lösung an. Bei der Wahl eines immer feineren Gitters wird die numerische Lösung gegen die analytische konvergieren. Dieses konvergente Verhalten kann, wie in Abbildung 5.13 gezeigt, für dieses Scheibenbeispiel nachgewiesen werden. Die relative Abweichung der Scheibenentwicklungszeit (siehe Abschnitt 5.2) für die Simulation mit 30 Gitterpunkten $\tau_{\text{Evol}}(30 \text{ GP})$ von der mit 100 Gitterpunkten $\tau_{\text{Evol}}(100 \text{ GP})$ beträgt 2.6%.

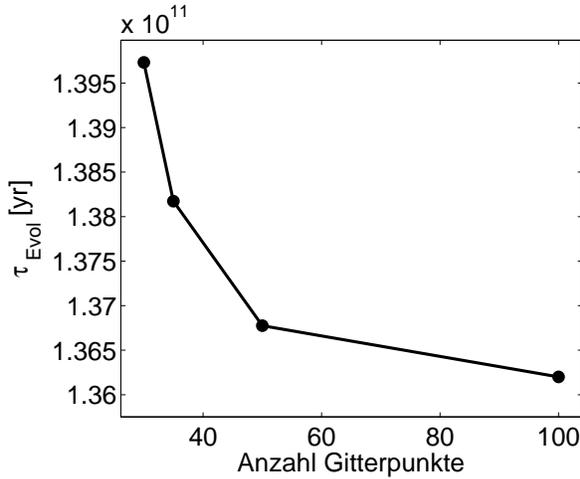


Abbildung 5.13: Konvergenztest anhand eines Scheibenbeispiels mit $M_{\text{Scheibe ini}} = M_{\text{ZM ini}} = 10^3 M_{\odot}$. Die Anzahl an Gitterpunkten wird von 30 – 100 variiert.

Evolution Schwarzer Löcher

Im Folgenden wird für die stabilen Scheiben, die mit 30 Diskretisierungspunkten simuliert werden, der Einfluss der Veränderung der Scheibenkonfiguration auf die Scheibenentwicklung analysiert. Dafür wird an einem Beispiel untersucht, wie sich die Entwicklungszeit des Systems Scheibe-Zentralmasse bei Variation der Anfangsscheibenmasse verhält. Alle anderen Parameter bleiben unverändert. Die Entwicklungszeit τ_{Evol} stellt die Zeit dar, bis die Scheibenmasse nur noch 1 Promille ihrer Ausgangsmasse besitzt. Mit dem Erschöpfen des Massereservoirs Scheibe wird auch die zeitliche Entwicklung der Zentralmasse (im Falle von AGNs des Schwarzen Lochs) beendet. Somit kann τ_{Evol} auch als Anwachszeitskala des Schwarzen Lochs verstanden werden. Diese ist in Abbildung 5.14 als Funktion der Anfangsscheibenmasse für die beiden Methoden zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung dargestellt. Bemerkenswert ist, dass für Anfangsscheiben-

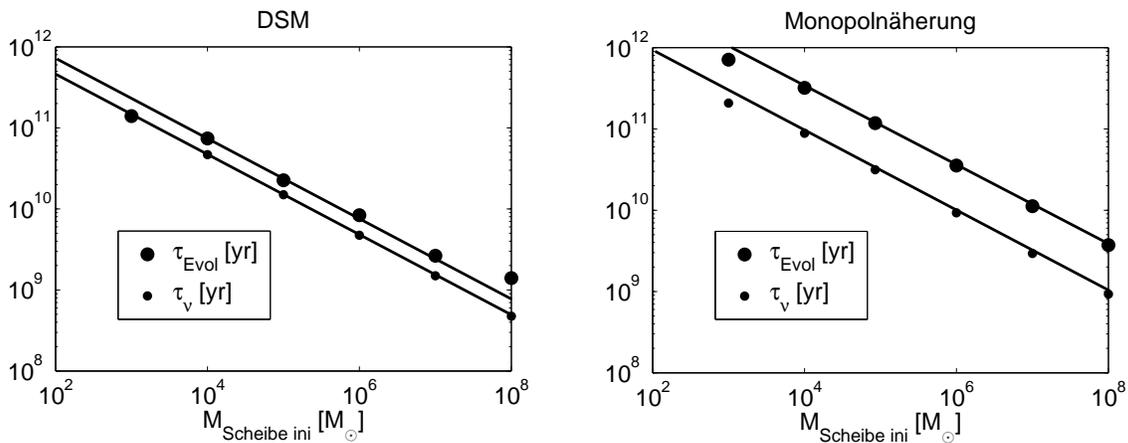


Abbildung 5.14: Anwachszeitskala τ_{Evol} eines Schwarzen Lochs als Funktion der Anfangsscheibenmasse.

massen, die kleiner als $10^5 M_\odot$ sind, die Entwicklungszeitskala größer als die Hubblezeit wird. Aus diesem Grund ist dieser Parameterbereich der Scheiben nicht von physikalischem Interesse. Trotzdem ist er in der Abbildung 5.14 mit eingezeichnet, da so gezeigt werden kann, dass die funktionalen Zusammenhänge für den gesamten betrachteten Parameterbereich gelten. Neben τ_{Evol} ist ebenfalls die viskose Zeitskala τ_ν dargestellt. In der doppelt-logarithmischen Darstellung liegen die Werte einer Zeitskala auf einer Geraden. Die Geraden aller Zeitskalen verlaufen parallel zueinander. Dies bedeutet, dass sich die Zeitskalen im gesamten Bereich für $M_{\text{Scheibe ini}}$ jeweils nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Im Abschnitt 5.2 wurden bereits diese Verhältnisse der Zeitskalen zueinander untersucht (siehe Tabelle 5.3). Die Resultate können nun für den gesamten Parameterbereich der Anfangsscheibenmasse bestätigt werden. Alle Ergebnisse sind in der Tabelle 5.7 zusammengefasst. Bei Verwendung der Monopolnäherung wird (ge-

	Monopolnäherung	DSM
$\tau_{\text{Evol}}/\tau_\nu$	3.68	1.54
$\tau_{\text{Evol}}(\text{MP})/\tau_{\text{Evol}}(\text{DSM})$		4.47
$\tau_\nu(\text{MP})/\tau_\nu(\text{DSM})$		1.85

Tabelle 5.7: Verhältnisse der verschiedenen Zeitskalen zueinander.

genüber der DSM) die Anwachszeitskala des Schwarzen Lochs ungefähr um einen Faktor 4 überschätzt. Dieses Ergebnis ist relativ überraschend, wenn man bedenkt, dass sich die Kurvenverläufe für $g_r(r, t)$ für beide Methoden gerade im selbstgravitierenden Bereich der Scheibe stark unterscheiden (siehe Abbildung 5.1).

Die Diskussion und die Einordnung dieser Ergebnisse in den astrophysikalischen Kontext erfolgt im Kapitel 7. Zunächst werden die in diesem Kapitel erlangten Resultate an einem anderen Scheibentyp, einer protostellaren Scheibe, verifiziert.

6 Protostellare Akkretionsscheiben

Im Rahmen dieser Arbeit wird das entwickelte Akkretionsscheibenmodell auf zwei sehr unterschiedliche Scheibentypen angewandt. Anhand der Evolution einer zweiten sehr viel kleineren Scheibenart, der protostellaren Scheiben, erfolgt eine Überprüfung der Resultate des letzten Kapitels für Scheiben in AGNs. Dafür werden drei verschiedene Sterne ausgewählt: unsere Sonne, Herbig Ae/Be Sterne und η Carinae. Bei Herbig Ae und Be Sternen handelt es sich um Sterne des Spektraltyps A und B, die einen Überschuss an Infrarotstrahlung zeigen (e für Infrarot Exzess). η Carinae ist ein sehr massereicher veränderlicher Stern. Es wird angenommen, dass diese Sterne das Produkt der zeitlichen Entwicklung einer protostellaren Akkretionsscheibe sind. Bei der Auswahl dieser Sterne sind zwei Kriterien wichtig: der Stern sollte bereits möglichst gut untersucht worden sein und das gewählte Sternenensemble muss einen großen Massebereich abdecken, da die Abhängigkeit der Entwicklungszeiten der Sterne von der Scheibenmasse untersucht und mit den Ergebnisse des vorherigen Kapitels verglichen werden soll. Die zeitliche Entwicklung wird für diese drei Beispielsterne numerisch simuliert. Auch für solche Scheibenkonfigurationen existiert der Übergang von stabiler in instabile Akkretion, der mit Hilfe der dynamischen Stabilitätsanalyse untersucht wird. Abschließend werden die Zeiten, die für die Entstehung der betrachteten Sterne nötig sind, ermittelt und miteinander verglichen. Die Ergebnisse für AGN-Scheiben werden letztendlich durch die Analysen in diesem Kapitel bestätigt.

6.1 Simulationsparameter

Bei der Wahl der numerischen Simulationsparameter hat sich im Vergleich zum Kapitel 5 nichts geändert ($C_{\text{CFL}} = 0.1$ und Anzahl an Gitterpunkten 30 – 200). Auch der Viskositätsparameter bleibt mit $\beta = 10^{-3}$ unverändert. Allein die Scheibenkonfiguration ändert sich beträchtlich. Die physikalischen Parameter dieser stellaren Scheiben sind in der Tabelle 6.1 zusammengefasst. Die Anfangsscheibenmassen variieren im Bereich von zwei Größenordnungen (vgl. AGN-Scheiben 5 Größenordnungen). Die ist jedoch ausreichend, um Unterschiede der Entwicklungszeiten solcher Scheiben studieren zu können. Allerdings unterscheidet sich der Verlauf der zeitlichen Entwicklung dieser drei stellaren Scheiben und damit auch die Entwicklung des Zentralsterns kaum. Die Evolution des Sterns η Carinae wird deshalb in dem folgenden Abschnitt 6.2 ausführlich behandelt, wohingegen die Simulationsergebnisse der anderen beiden Sterne lediglich in Unterkapitel 6.3 zusammengefasst sind.

	$M_{\text{ZM ini}}$ [M_{\odot}]	$M_{\text{Scheibe ini}}$ [M_{\odot}]	Gesamtmasse [M_{\odot}]	r_{in} [AE]	r_{out} [AE]
Sonnensystem	0.1	0.9	1.0	$6.7 \cdot 10^{-3}$	266.1
Herbig Ae/Be Sterne	0.35	2.95	3.3	$2.7 \cdot 10^{-2}$	266.1
η Carinae	10	90	100	$2.7 \cdot 10^{-2}$	266.1

Tabelle 6.1: Scheibenparameter für die drei gewählten Beispielsterne.

6.2 η Carinae

Die Simulationsergebnisse für einen solchen Stern sind denen für AGN-Scheiben sehr ähnlich. Bei Verwendung der Monopolnäherung erhält man generell stabile Scheibenentwicklungen, unabhängig von der für die numerische Simulation gewählten Anzahl von Stützstellen. Wird die DSM zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung verwendet, gibt es bei einer bestimmten Anzahl von Gitterpunkten den Übergang von einem stabilen hin zum instabilen Verhalten. Für dieses Beispiel eines Sterns wie η Carinae findet dieser Übergang bei 45 Gitterpunkten statt. Dies wird im Folgenden ausführlicher untersucht.

Akkurate Behandlung der Gravitation mittels DSM

Eine stabile Scheibenentwicklung bei verwendeten 30 Diskretisierungspunkten ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Im Gegensatz zu den AGN-Scheiben befindet sich der selbstgravitierende Bereich hier deutlich weiter im äußeren Scheibenbereich. Für die charakteristischen Zeitskalen dieser Entwicklung erhält man die Werte:

$$\tau_{\text{Evol}} = 5.9 \cdot 10^4 \text{yr}$$

und

$$\tau_{\nu} = 3.7 \cdot 10^4 \text{yr}.$$

In der Abbildung 6.1 rechts oben ist die Kurve für $\Sigma(r, t = 700 \text{yr})$ allein dargestellt, da zu diesem Zeitpunkt erste Anzeichen von instabilem Verhalten zu erkennen sind. Zu dieser Zeit setzt in diesem Bereich der Scheibe jedoch die viskose Entwicklung ein und somit erfolgt eine Dämpfung bzw. Auflösung der Instabilitäten. Bevor zum Vergleich die Entwicklungszeitskalen der Instabilitäten aus der linearen Stabilitätsanalyse bestimmt werden, soll die instabile Entwicklung bei Verwendung von 50 Stützstellen betrachtet werden. Wie in Abbildung 6.2 zu sehen ist, entstehen die Instabilitäten ungefähr am gleichen Scheibenradius (wie zuvor bei Verwendung von 30 Gitterpunkten) und dominieren bereits nach 1000 yr die Scheibenentwicklung derart, dass physikalisch nicht

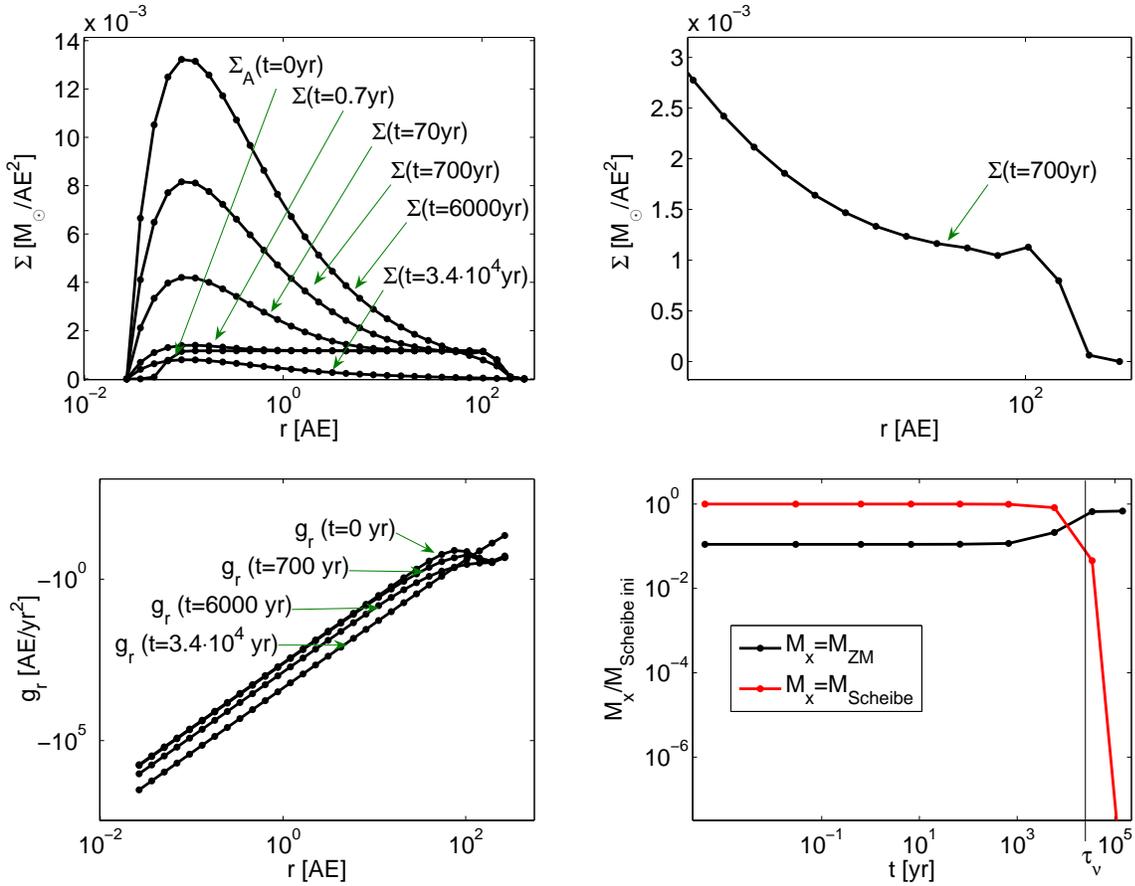


Abbildung 6.1: Evolution einer protostellaren Akkretionsscheibe (η Carinae) bei Verwendung der DSM. **Oben:** Zeitliche Entwicklung der Flächendichteverteilung $\Sigma(r, t)$. **Unten:** Zeitliche Entwicklung der Gravitationsbeschleunigung $g_r(r, t)$ und der Scheiben- und der Zentralmasse.

sinnvolle Effekte auftreten.

Als Nächstes wird nun das Stabilitätsverhalten mit Hilfe der dynamischen Stabilitätsanalyse für die Simulationen mit einer unterschiedlichen Gitterpunktanzahl geprüft. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.3 dargestellt. Da die Instabilitäten offensichtlich im äußeren Bereich der Scheibe auftreten, interessieren vor allem Störungen mit kleinen Wellenzahlen, deren Entwicklungszeitskalen vergleichend in Tabelle 6.2 zusammengestellt sind.

Wie bereits im Falle der stabilen AGN-Scheiben festgestellt wurde, sind auch in diesem Beispiel die Zeitskalen der Instabilitäten τ_{Inst} bei Verwendung von 30 Gitterpunkten von vergleichbarer Größe mit der viskosen Zeitskala τ_ν für das Material an diesem Radius. Die Instabilitäten werden zwar gerade sichtbar, können jedoch nicht weiter verstärkt werden und verschwinden im Zuge der viskosen Entwicklung wieder. Werden für die Simulation 50 Gitterpunkte verwendet, ergeben sich viel kleinere τ_{Inst} , sodass die Instabilitäten bis zu Beginn der viskosen Entwicklung bereits enorm verstärkt werden. Große Wellenzah-

$t = 0 \text{ yr}$		
	30 GP	50 GP
$k = k_{\min}$	$\tau_{\text{Inst}} = 400 - 5 \cdot 10^4 \text{ yr}$	$15 - 3 \cdot 10^5 \text{ yr}$

Tabelle 6.2: Entwicklungszeitskala für die Instabilität τ_{Inst} für kleine Wellenzahlen k zu Beginn der numerischen Simulation ($t = 0 \text{ yr}$).

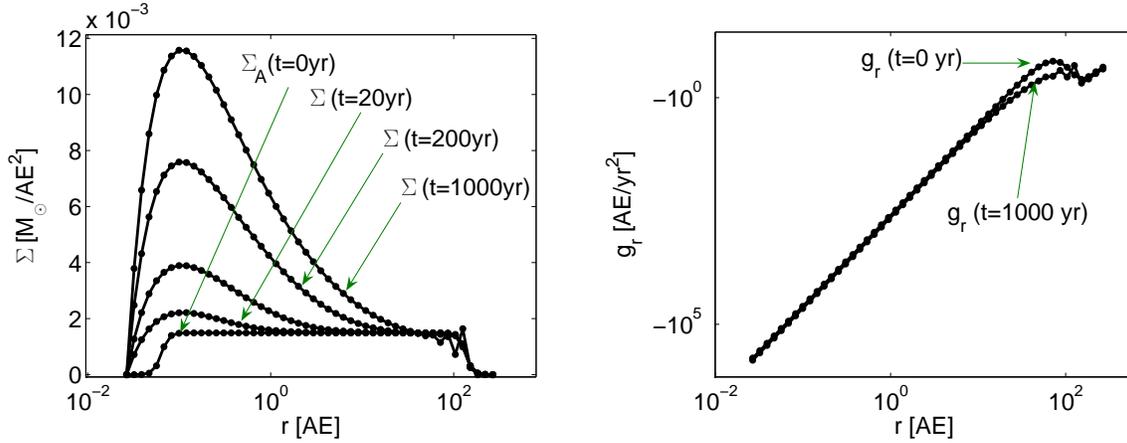


Abbildung 6.2: Instabile zeitliche Entwicklung einer protostellaren Akkretionsscheibe (η Carinae) bei Verwendung von 50 Gitterpunkten. Dargestellt sind die Größen $\Sigma(r, t)$ und $g_r(r, t)$.

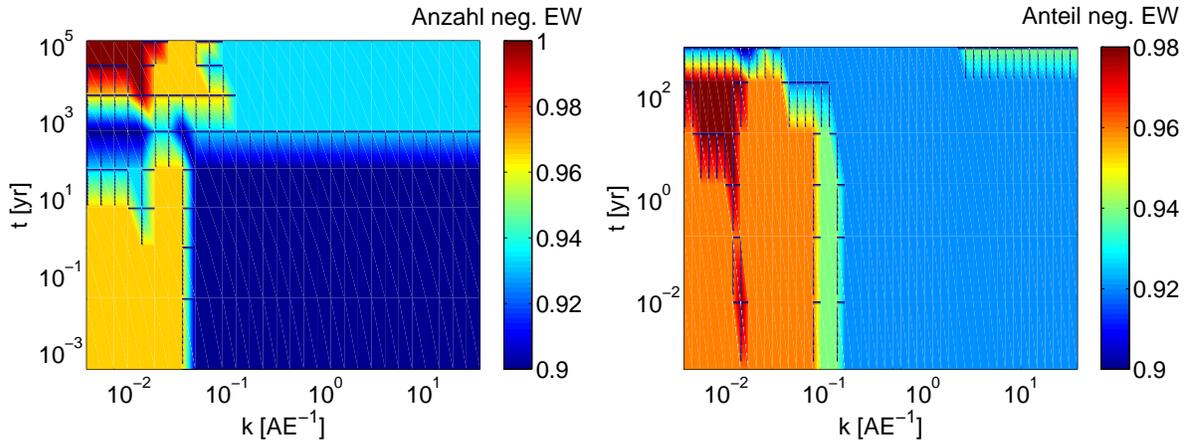


Abbildung 6.3: Ergebnisse der Stabilitätsanalyse bei Verwendung der DSM für eine unterschiedliche Anzahl von Gitterpunkten (**links:** 30 und **rechts:** 50). Dargestellt ist der Anteil der negativen Eigenwerte als Funktion der Entwicklungszeit t und der Wellenzahl k .

len (und damit kleine Wellenlängen) bleiben unberücksichtigt, da im selbstgravitierenden Außenbereich der Scheibe solche Instabilitäten aufgrund des großen Gitterabstands

räumlich nicht aufgelöst werden. Für das Simulationsbeispiel mit 30 Gitterpunkten stellt sich nach Verlauf einer viskosen Zeitskala auch für kleine Wellenzahlen stabiles Verhalten ein, d.h., der Anteil der negativen Eigenwerte ist in diesem Bereich gleich eins (siehe rechtes Bild der Abbildung 6.3). Die weitere zeitliche Entwicklung dieser Akkretionsscheibe verläuft gänzlich stabil.

Verwendung der Monopolnäherung

Abschließend wird nun die Entstehung des η Carinae Sterns unter Verwendung der Monopolnäherung simuliert. Die Ergebnisse dieser (stabilen) Evolution zeigt Abbildung 6.4. Die Stabilitätsuntersuchung sagt fast im kompletten Wellenzahlenbereich absolute Sta-

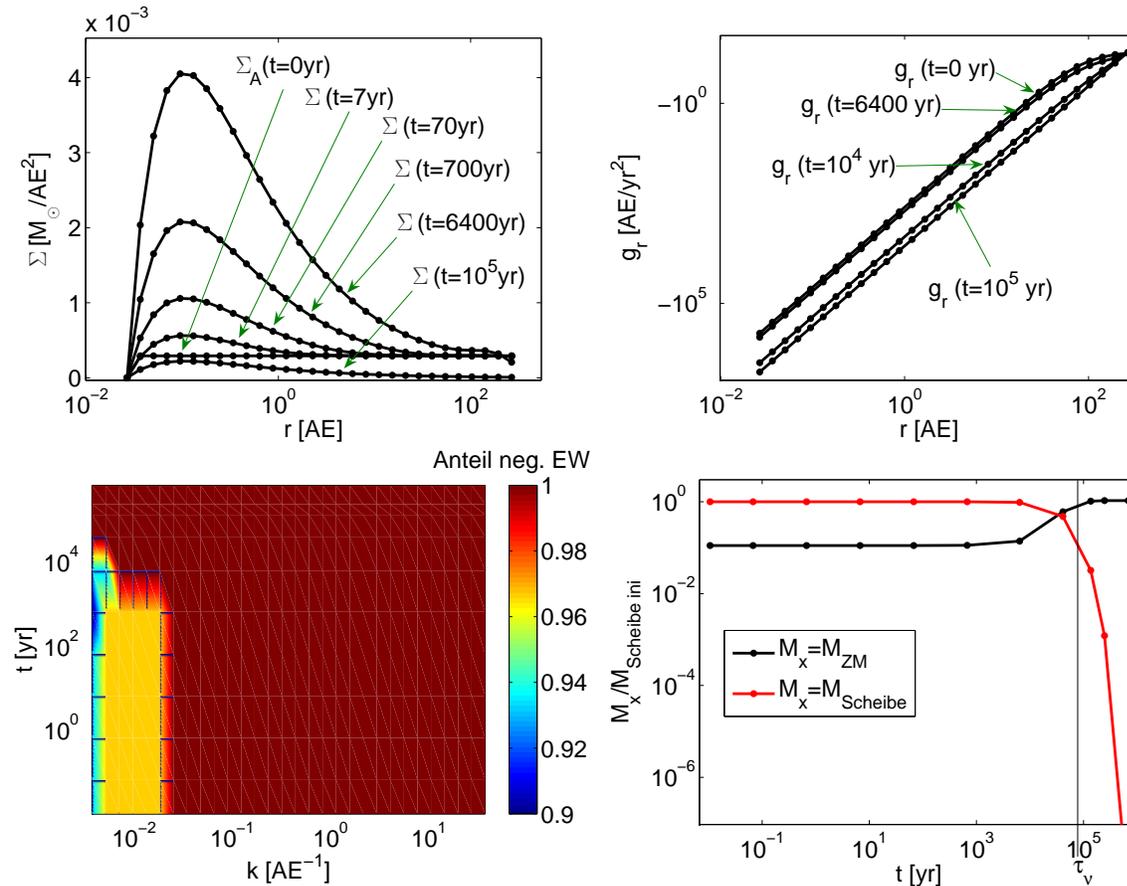


Abbildung 6.4: Evolution einer protostellaren Akkretionsscheibe (η Carinae) bei Verwendung der Monopolnäherung. **Oben:** Zeitliche Entwicklung der Größen $\Sigma(r, t)$ und $g_r(r, t)$. **Unten:** Dynamische Stabilitätsanalyse und zeitliche Entwicklung der Scheiben- und der Zentralmasse.

bilität voraus. Lediglich für sehr kleine Wellenzahlen erhält man positive Eigenwerte. Die daraus berechneten Zeitskalen τ_{Inst} liegen im Bereich zwischen 10^4 yr und 10^5 yr,

was wiederum der Größenordnung der viskosen Zeitskala $\tau_\nu = 6.9 \cdot 10^4$ yr entspricht.

Zusammenfassung

Bereits am Beispiel des Sterns η Carinae bestätigen die numerischen Simulationen und die Untersuchung der Stabilität dieser Sternentstehung die Resultate des vorangegangenen Kapitels für Akkretionsscheiben in AGNs, obwohl mit der protostellaren Scheibe ein vollkommen anderer Scheibentypus untersucht wird. Gravitationsinstabilitäten können nur im äußeren Scheibenbereich auftreten, weil lediglich dort die Scheibe selbstgravitierend ist. Aufgrund der Wahl eines groben numerischen Gitters können kurzweilige Instabilitäten in diesem Bereich allerdings räumlich nicht aufgelöst werden und werden damit unterdrückt. Aber auch langwellige Störungen müssen mit den Längenskalen des Gitters vergleichbar sein, damit es überhaupt zu einer zeitlichen Verstärkung der Instabilität kommt. Die Voraussetzung für die Verstärkung ist allerdings, dass die Zeitskala der Instabilität kleiner als die viskose Zeitskala ist.

Generell ist auffällig, dass sich die simulierten Scheiben stabil entwickeln (auch für eine vergleichbar große Anzahl an Stützstellen), wenn die Gravitationsbeschleunigung durch die Monopolnäherung approximiert wird. Vergleicht man die Verhältnisse der Zeitskalen zueinander (siehe Tabelle 6.3), stellt sich heraus, dass bei Verwendung der Monopolnäherung die Zeitskalen im Vergleich zur DSM etwas zu groß sind. Diese Verhältnisse entsprechen denen, die man für AGN-Scheiben erhält (vgl. mit Tabelle 5.3).

	Monopolnäherung	DSM
τ_{Evol}	$2.5 \cdot 10^5$ yr	$5.9 \cdot 10^4$ yr
τ_ν	$6.9 \cdot 10^4$ yr	$3.7 \cdot 10^4$ yr
$\tau_{\text{Evol}}/\tau_\nu$	3.62	1.59

Tabelle 6.3: Zusammenfassung der Simulationsergebnisse für die beiden verwendeten Methoden zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung für η Carinae.

Die Ergebnisse für protostellare Scheiben zeigen bereits jetzt weitgehende Übereinstimmung mit denen für Akkretionsscheiben in AGNs.

6.3 Sonnensystem und Herbig Ae/Be Sterne

Die Wahl von stellaren Scheiben, die vergleichbar mit der Morphologie des Sonnensystems bzw. Herbig Ae/Be Sternen sind, stellt im Prinzip den Übergang zu massearmen Scheiben dar. Im Vergleich zu η Carinae enthalten diese Scheiben etwa 2 Größenordnungen weniger Scheibenmasse. Trotzdem sind sich die zeitlichen Entwicklungen dieser drei Beispiele so sehr ähnlich, dass die ausführliche Beschreibung der Evolution des η Carinae Sterns im Abschnitt 6.2 stellvertretend für alle drei Sternenbeispiele steht.

Allerdings erwartet man unter Berücksichtigung der Ergebnisse für AGN-Scheiben, dass sich der Übergang von stabiler in instabile Akkretion hin zu einer größeren Gitterpunktanzahl verschiebt, wenn die betrachtete Anfangsscheibenmasse kleiner wird. Dieses Verhalten wird ebenfalls, wie in Abbildung 6.5 dargestellt, für protostellare Scheiben nachgewiesen. Dieser Übergang liegt bei Herbig Ae/Be Sternen zwischen 45 und 50 Gitterpunkten und im Falle des Sonnensystems zwischen 50 und 60.

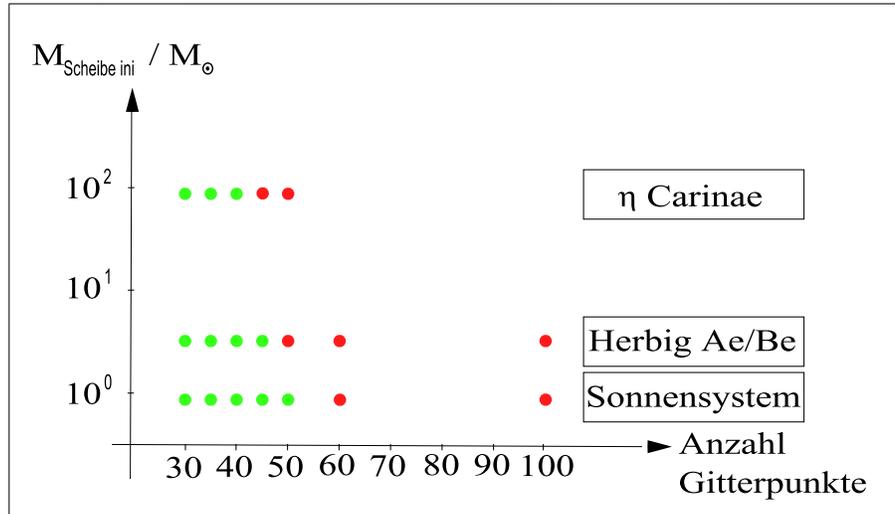


Abbildung 6.5: Übergang von einem **stabilen** hin zum **instabilen** Verhalten (DSM).

Bei der Wahl von Scheiben mit deutlich kleineren Anfangsscheibenmassen sind diese im kompletten Radiusbereich nicht mehr selbstgravitierend, sodass diese Scheiben für die Untersuchungen in dieser Arbeit nicht relevant sind.

6.4 Konvergenzverhalten

Wie im Falle der AGN-Scheiben erfolgt in diesem Abschnitt die Überprüfung, ob bei der Wahl eines feiner werdenden Gitters die Entwicklungszeiten τ_{Evol} konvergieren. Benutzt man die DSM zur Berechnung von $g_r(r, t)$, ist eine stabile Entwicklung bis zu maximal 50 Gitterpunkten für das Sonnensystem möglich. Deswegen werden zur Untersuchung der Konvergenz Simulationen, bei denen die Monopolnäherung verwendet wird, gewählt, da man dann stabile Scheibenentwicklungen bis mindestens 120 Diskretisierungspunkten erhält. In Abbildung 6.6 sind die Ergebnisse dieses Konvergenztests für zwei stellare Scheiben (η Carinae und Herbig Ae/Be Stern) gezeigt. Die relativen Abweichungen der Entwicklungszeiten für verschiedene Anzahl von Gitterpunkten betragen in beiden Fällen bis zu 17%. Dieser Wert ist deutlich größer als die Abweichung, die beim Konvergenztest am Beispiel einer AGN-Scheibe festgestellt wird (siehe Unterkapitel 5.5). Diese beträgt 2.6%, ist allerdings das Ergebnis einer Simulation, in der die DSM verwendet

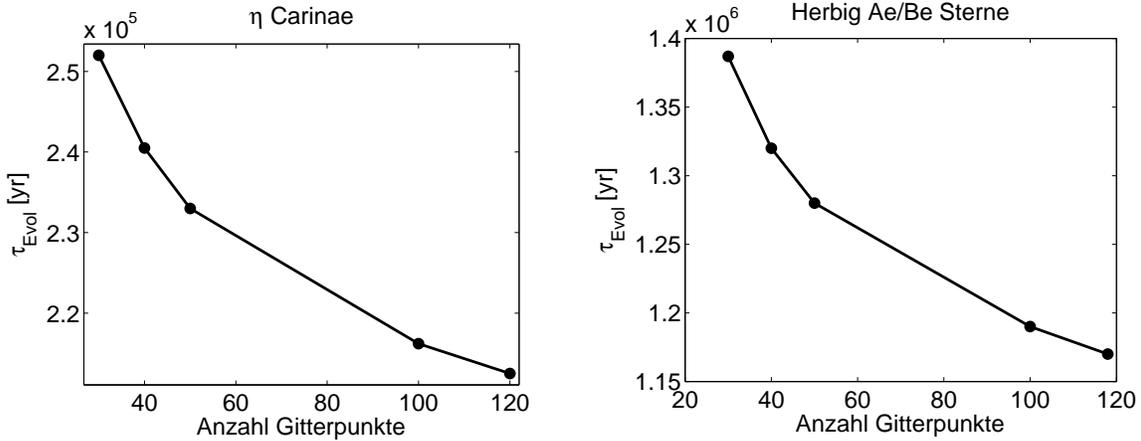


Abbildung 6.6: Konvergenz der Entwicklungszeit der Scheibe τ_{Evol} bei Zunahme der Gitterpunktzahl am Simulationsbeispiel von η Carinae bzw. eines Herbig Ae/Be Sterns. Die Anzahl an Gitterpunkten wird von 30 – 120 variiert.

wird. Um zu klären, ob dieser große Unterschied zwischen den Abweichungen Ursache des unterschiedlichen Scheibentyps ist oder durch die unterschiedlichen Methoden zur Berechnung der Gravitation hervorgerufen wird, kann für das Sonnensystem die Scheibenentwicklungszeit $\tau_{\text{Evol}}(30\text{GP})$ mit $\tau_{\text{Evol}}(50\text{GP})$ verglichen werden (bei Verwendung der DSM). Diese Abweichung beträgt 2.7% und liegt damit in der Größenordnung der Abweichung der Entwicklungszeiten für Akkretionsscheiben in AGNs. Somit vergrößert sich der Diskretisierungsfehler deutlich, wenn die Monopolnäherung verwendet wird. Allerdings ist auch in diesem Fall die Konvergenz der Entwicklungszeiten gegeben (siehe Abbildung 6.6).

Bei der Diskussion der Zeitskalen ist zu berücksichtigen, dass in allen untersuchten Fällen die Entwicklungszeiten hin zu kleineren Werten konvergieren. Damit werden in dieser Arbeit die oberen Grenzen der Entwicklungszeitskalen bestimmt.

6.5 Entstehungszeitskalen der Sterne

Abschließend wird nun auch für protostellare Scheiben der Einfluss der Anfangsscheibenmasse auf die Entwicklungszeit des Systems Scheibe-Zentralmasse untersucht. Das Anwachsen der Zentralmasse stellt im Falle von protostellaren Scheiben die Entwicklung des Sterns im Zentrum der Scheibe dar. Demnach wird τ_{Evol} als Anwachszeitskala des Sterns angesehen. In Abbildung 6.7 ist diese als Funktion der Scheibenmasse, die zu Beginn der Entwicklung vorhanden ist, dargestellt, wobei zwischen den beiden Methoden zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung unterschieden wird. Wie in Abschnitt 5.5 für AGN-Scheiben ist neben der Anwachszeitskala des Sterns auch die viskose Zeitskala mit eingezeichnet.

Auch für den hier untersuchten Scheibentyp liegen in der doppel-logarithmischen Dar-

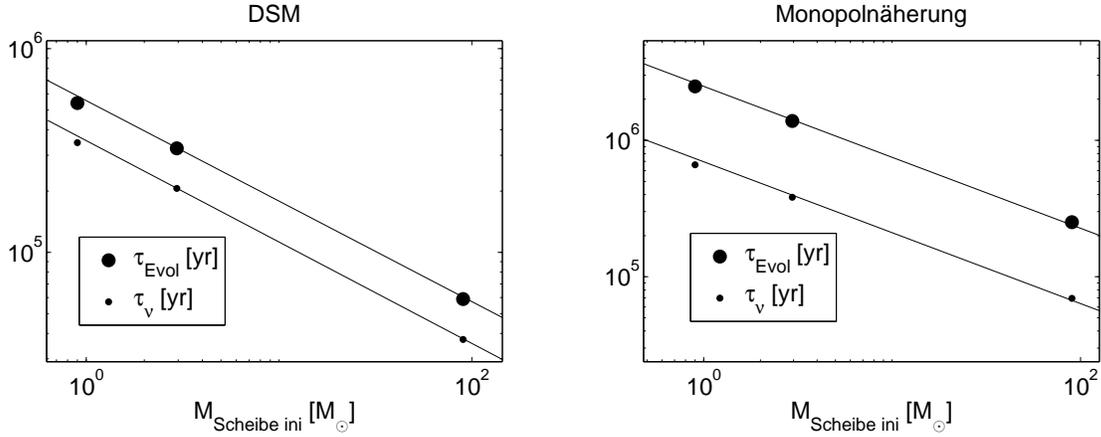


Abbildung 6.7: Anwachtszeitskala τ_{Evol} von Sternen als Funktion der Anfangsscheibenmasse.

stellung alle Werte einer Zeitskala auf einer Geraden, wobei alle Geraden wiederum parallel zueinander verlaufen. Dies verifiziert die Resultate für AGN-Scheiben, für die sich die Zeitskalen im gesamten betrachteten Parameterbereich um einen konstanten Faktor unterscheiden. In Tabelle 6.3 sind die Verhältnisse der verschiedenen Zeitskalen für protostellare Scheiben zusammengefasst. Bemerkenswert ist, wie deutlich diese

	Monopolnäherung	DSM
$\tau_{\text{Evol}}/\tau_{\nu}$	3.67 (3.68)	1.57 (1.54)
$\tau_{\text{Evol}}(\text{MP})/\tau_{\text{Evol}}(\text{DSM})$	4.37 (4.47)	
$\tau_{\nu}(\text{MP})/\tau_{\nu}(\text{DSM})$	1.88 (1.85)	

Tabelle 6.4: Verhältnisse der verschiedenen Zeitskalen der zeitlichen Entwicklung von Sternen (AGN-Scheiben) zueinander.

Ergebnisse mit denen für AGN-Scheiben übereinstimmen. Die Abweichungen der Zeitskalenverhältnisse der beiden so verschiedenen Scheibentypen liegen bei maximal 2%.

7 Zusammenfassung und Diskussion der Ergebnisse

Das Ziel dieser Arbeit war es, das von Duschl & Strittmatter 2006 eingeführte Modell für selbstgravitierende Akkretionsscheiben bezüglich der Gravitationsbeschreibung weiterzuentwickeln. Dieses Modell beschreibt die Entstehung von Quasaren durch die Verschmelzung zweier gasreicher Galaxien, gefolgt von einer äußerst effizienten Scheibenakkretion auf ein entstehendes Schwarzes Loch. Im zentralen Bereich der durch die Verschmelzung neu gebildeten Galaxie entsteht durch das Einströmen des interstellaren Gases eine selbstgravitierende Akkretionsscheibe. Duschl & Strittmatter zeigen, dass bei Verwendung der turbulenten β -Viskosität die zeitliche Entwicklung der Scheibe in einer solchen Umgebung und damit auch die Entstehung des Schwarzen Lochs im Zentrum der Scheibe schnell genug vonstatten geht, sodass das Vorhandensein massereicher kompakter Objekte in Quasaren im frühen Universum erklärt werden kann. Die durch die Theorie der α -Standardscheiben vorhergesagten Entwicklungszeiten solcher Schwarzen Löcher sind hingegen viel länger, als das Universum zu diesem Zeitpunkt alt ist.

Die dem Modell zugrunde liegende Voraussetzung, dass eine Galaxienverschmelzung stattfindet, bietet eine Erklärung der beobachtbaren Verteilung der Quasardichte über die Rotverschiebung. Im frühen Universum waren Kollisionen und Verschmelzungen von Galaxien viel häufiger als im heutigen Universum. Deshalb ist das Vorhandensein von Akkretionsscheiben, die durch Galaxienverschmelzung entstanden sind, bei sehr großen Rotverschiebungen wesentlich wahrscheinlicher.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden numerische Simulationen von selbstgravitierenden Akkretionsscheiben durchgeführt. Das entwickelte Akkretionsscheibenmodell wurde auf zwei sehr unterschiedliche Scheibentypen angewandt, zum einen auf Scheiben in Aktiven Galaxienzentren (Kapitel 5) und zum anderen auf protostellare Akkretionsscheiben (Kapitel 6). Es wurden ausschließlich geometrisch dünne rotationssymmetrische Scheiben betrachtet. Folgende Modifikationen bezüglich des α -Standardscheibenmodells (Pringle 1981, Frank, King, & Raine 2002) wurden gemacht:

- Die betrachteten Scheibenmassen sind zu Beginn der Simulation deutlich größer als die Massen ihrer Zentralobjekte. In diesem Regime muss die Eigengravitation der Scheiben berücksichtigt werden. Die Annahme von Keplerschen Rotationskurven der Akkretionsscheiben ist in diesem Fall nicht hinreichend. Aus diesem Grund wird die Poisson-Gleichung für solche Masseverteilungen gelöst.
- Die Viskositätsbeschreibung erfolgt mittels β -Viskosität.

- Die vertikale Integration der Modellgleichungen erfolgt im Rahmen der Einzonennäherung.
- Die Akkretion von Material auf das Zentralobjekt erfolgt unter Berücksichtigung des Eddington-Limits. Fließt mehr Masse über den Scheibeninnenrand Richtung Zentralobjekt als das Eddington-Limit erlaubt, geht dem System Materie verloren. Diese Materie stellt einen Teil des Massereservoirs der Jets und des Scheibenwinds dar.

Die detaillierte Beschreibung der Herleitung der Scheibenentwicklungsgleichung findet sich in Abschnitt 2.3. Die numerische Behandlung dieser Gleichung basiert auf einem expliziten Finite-Differenzen-Verfahren.

Ausgangspunkt dieser Arbeit war, das Scheibenmodell von Duschl & Strittmatter derart zu modifizieren, dass eine akkurate und bezüglich des Rechenaufwands effiziente Berechnung des Gravitationspotenzials möglich wird. Dafür wurde die integrale Form der Poisson-Gleichung mittels *density-splitting*-Methode (Pierens & Huré 2004) zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung gelöst. Duschl & Strittmatter approximieren die Poisson-Gleichung mit Hilfe der Monopolnäherung (Mineshige & Umemura 1997). Beim Vergleich dieser beiden Methoden zur Berechnung der Gravitation stellte sich heraus, dass sich die Gravitationsbeschleunigungen der hier untersuchten Scheiben im selbstgravitierenden Bereich bis zu zwei Größenordnungen voneinander unterscheiden können. Damit stellt die Monopolnäherung eine ausgesprochen ungenaue Näherung der Poisson-Gleichung dar. Aus diesem Grund wurde der Einfluss der unterschiedlichen Methoden zur Berechnung der Gravitation auf die zeitliche Entwicklung von Akkretionsscheiben untersucht. Da die Implementierung der *density-splitting*-Methode zu einer instabilen Scheibenevolution führen kann, obwohl bei Verwendung der Monopolnäherung die numerischen Simulationen äußerst stabil laufen, wurde dieses Akkretionsmodell für selbstgravitierende Scheiben auf Stabilität untersucht. Eigens dafür wurde in Kapitel 3 eine dem Modell angepasste lineare Stabilitätsanalyse entwickelt. Da eine analytische Stabilitätsuntersuchung des Gleichungssystems aufgrund seiner Nichtlinearität aussichtslos ist, wurden für die Stabilitätsbetrachtungen auch einige numerische Konzepte verwendet. Die Frage, die sich hierbei stellt, ist, ob diese eigens entwickelte Stabilitätsanalyse überhaupt notwendig ist.

Untersuchungen von Scheibenströmungen auf Gravitationsinstabilitäten gehören seit Toomre (1964) zu den verwendeten Standardanalysen, wenn die Eigengravitation in solchen Scheiben eine wesentliche Rolle spielt. Die Analyse von axialsymmetrischen gravitativen Instabilitäten in nicht-viskosen differentiell rotierenden Gasscheiben führt auf ein Kriterium für die Stabilität solcher Scheiben, den Toomre-Parameter Q , der größer als eins sein muss, um stabiles Verhalten zu gewährleisten. Da die Größen zur Berechnung von Q im Allgemeinen alle Funktionen des Radius sind, ist Q ebenfalls eine Funktion des Radius. In diesem Fall impliziert $Q(r) < 1$ eine lokale axialsymmetrische Instabilität in der Nähe des Radius r (Binney & Tremaine 1987). Duschl & Britsch (2006) zeigen, dass

für geometrisch dünne selbstgravitierende Scheiben bei Verwendung der Monopolnäherung zur Berechnung der Gravitation der Toomre-Parameter stets kleiner als eins ist. Damit sind solche Scheiben, deren viskose Eigenschaften vernachlässigt werden, Toomre instabil. Da jedoch Druckkräfte innerhalb der in dieser Arbeit betrachteten Scheiben vernachlässigbar sind, ist unklar, ob eine Analyse des Toomre-Parameters Aufschluss über die Stabilität dieser Scheiben gibt, auch vor allem, weil die Viskosität unberücksichtigt bleibt. Der Parameter Q wurde trotzdem für einige Scheibenbeispiele bestimmt. Diese Untersuchungen ergaben für alle Scheiben, auch die eine stabile Zeitentwicklung aufweisen, in großen Bereichen der Scheibe einen Toomre-Parameter, der kleiner als eins ist. Somit dürfte eigentlich keine stabile Entwicklung für diese Scheiben möglich sein, was im Widerspruch zu den Ergebnissen aus Abschnitt 5.2 steht.

In Britsch (2006) findet sich eine detaillierte Analyse und Diskussion von Gravitationsinstabilitäten in viskosen Scheiben, wobei hier die Abhängigkeit der Größe $\nu\Sigma$ vom Radius in der Navier-Stokes-Gleichung erstmalig berücksichtigt wird. Das Ergebnis der Stabilitätsanalyse für geometrisch dünne stationäre selbstgravitierende β -Scheiben ist, dass solche Scheiben instabil sind. Jedoch wird dieser Analyse für die Berechnung der azimuthalen Geschwindigkeit v_ϕ die Monopolnäherung zugrunde gelegt. Außerdem wird von einer stationären Scheibe ausgegangen. Damit gelten diese Ergebnisse nur für stationäre Scheiben, für die das Gravitationspotenzial durch die Monopolnäherung approximiert wurde. Die Annahme der Stationarität stellt somit einen wesentlichen Unterschied zu dem hier untersuchten zeitabhängigen Akkretionsscheibenmodell dar.

Die Untersuchung des Toomre-Parameters und die Ergebnisse von Britsch (2006) weisen darauf hin, dass die in dieser Arbeit betrachteten Scheiben instabil sind. Dies steht jedoch im Widerspruch zu den äußerst stabilen Scheibenentwicklungen bei Verwendung der Monopolnäherung und zu den stabilen Scheibenevolutionen, die für AGN-Scheiben und protostellare Scheiben unter Verwendung der *density-splitting*-Methode simuliert wurden. Die Vernachlässigung einiger Terme in der Navier-Stokes-Gleichung kann somit wesentliche Auswirkungen auf die Stabilität solcher Scheiben haben. Aus diesem Grund ist eine für das in dieser Arbeit verwendete Akkretionsscheibenmodell angepasste Stabilitätsanalyse erforderlich.

Die in Kapitel 3 entwickelte lineare Stabilitätsanalyse stellt im Prinzip eine Näherung des Stabilitätsproblems dar. Nichtlineare Effekte, die durch das Linearisieren keine Auswirkungen mehr haben, können zu einer Stabilisierung beitragen. Eine bessere Beschreibung des Stabilitätsverhaltens würde man mit einer nichtlinearen Stabilitätsanalyse erhalten. Solche nichtlinearen Stabilitätsuntersuchungen sind ausgesprochen aufwendig und wurden deshalb im Rahmen dieser Arbeit nicht durchgeführt.

In Kapitel 5 erfolgten Simulationen von Akkretionsscheiben in AGNs. Generell wurden stabile zeitliche Scheibenentwicklungen erhalten, wenn die Monopolnäherung zur Bestimmung der Gravitation verwendet wurde. Bei Gebrauch der *density-splitting*-Methode wurden, abhängig von der Anzahl der verwendeten Diskretisierungspunkte und von der Scheibenmasse zu Beginn der Simulation, die ein Maß der Eigengravitation darstellt, stabile sowie auch instabile Zeitentwicklungen simuliert. Für eine feste Anfangsschei-

benmasse wurde ein systematischer Übergang von stabiler in instabile Akkretion hin zu einer größer werdenden Gitterpunktanzahl gefunden. Je kleiner die Anfangsscheibenmasse und damit die Eigengravitation der Scheibe ist, desto stabiler entwickeln sich solche Scheiben bei einer zunehmenden Anzahl an Gitterpunkten.

Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens in Kapitel 5 hat ergeben, dass praktisch alle Konfigurationen zu Beginn ihrer zeitlichen Entwicklung über instabile Moden verfügen. Wie sich jedoch zeigte, bedeutet dies nicht, dass die Scheibenentwicklung dann auch instabil verlaufen muss. Wenn die Entwicklungszeitskala der Instabilität größer als die viskose Zeitskala ist, hat die Instabilität nicht genug Zeit, um sich entwickeln zu können, bevor sie von der viskosen Scheibenentwicklung vollständig aufgelöst wird. Dies trifft auf alle Scheibenentwicklungen zu, auch auf die, die mit Hilfe der Monopolnäherung berechnet wurden. Zu Beginn der Simulation findet man immer instabile Moden. Allerdings existieren spätestens nach Ablauf einer viskosen Zeitskala keine dieser instabilen Moden mehr. Von da an sagt die dynamische Stabilitätsanalyse eine stabile Entwicklung vorher. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Vorhersagen von instabilem Verhalten durch den Toomre-Parameter, aber auch durch Britsch (2006) durch die hier durchgeführte dynamische Stabilitätsanalyse bestätigt werden. Entscheidend ist jedoch, ob sich die Instabilitäten während der Zeitentwicklung einer Scheiben so verstärken können, dass sie die Evolution dominieren oder ob sie unterdrückt werden können.

Außerdem wurde die Abhängigkeit des Stabilitätsverhaltens von der Gitterpunktanzahl untersucht. Die Anzahl der gewählten Stützstellen bestimmt den Abstand zweier benachbarter Gitterpunkte. Dieser variiert aufgrund der logarithmischen Skalierung mit dem Radius. Für eine große Anzahl von Stützstellen ist dieser Abstand verhältnismäßig klein und so können Instabilitäten, deren Ausdehnung sich über vergleichbare Wellenlängen (charakteristische Längenskala) erstrecken, verstärkt werden. Die Wahl der Gitterpunktanzahl stellt somit eine Art Wellenlängenfilter dar. Durch die Diskretisierung wird die räumliche Auflösung auf dem numerischen Gitter bestimmt. Die Wahl einer kleineren Anzahl von Stützstellen führt somit zu einer größeren numerischen Dissipation. Dieser Effekt wurde in Abschnitt 5.4 anhand der Entwicklungszeitskalen der Instabilitäten untersucht. Mit zunehmender Gitterpunktanzahl wird τ_{Inst} kontinuierlich kleiner und unterschreitet ab einer bestimmten Gitterpunktanzahl deutlich die viskose Zeitskala. Dies hat eine rapide zeitliche Verstärkung der Instabilitäten zur Folge. Je mehr Gitterpunkte gewählt wurden, desto kleiner sind die Entwicklungszeiten und desto schneller treten die Instabilitäten auf. Eine Abhängigkeit von der Zeitschrittweite konnte nicht festgestellt werden (zeitlich Auflösung der Instabilität). Diese Abhängigkeit der Stabilität von der gewählten Anzahl an Gitterpunkten tritt nur bei Simulationen auf, für die die *density-splitting*-Methode zur Berechnung der Gravitation verwendet wird. Da in die lineare Stabilitätsanalyse auch numerische Aspekte einbezogen wurden, ist eine Unterscheidung, ob es sich beim Auftreten der Instabilitäten um eine physikalische oder numerische Erscheinung handelt, nicht möglich. Die Abhängigkeit der Stabilität von einem numerischen Parameter, der Gitterpunktanzahl, weist allerdings darauf hin, dass es sich hierbei um ein numerisches Problem handeln könnte. Eine richtige physi-

kalische Stabilitätsanalyse ist nur für Spezialfälle möglich (z.B. Toomre-Parameter für nicht-viskose Akkretionsscheiben oder die Stabilitätsanalyse für geometrisch dünne stationäre selbstgravitierende β -Scheiben Duschl & Britsch 2006).

In allen Fällen, in denen die Scheibenentwicklung nicht durch die zeitlich Verstärkung der Instabilitäten dominiert wurde, zeigte die dynamische Stabilitätsanalyse, dass sich spätestens zu Beginn der viskosen Entwicklung eine stabile Scheibenkonfiguration einstellt (es sind keine instabilen Moden mehr vorhanden).

Das hier betrachtete Akkretionsscheibenmodell und die dafür entwickelte Stabilitätsanalyse wurden in Kapitel 6 auf protostellaren Scheiben angewandt. Diese Scheiben gehören einem vollkommen anderen Scheibentyp an und unterscheiden sich deutlich (vor allem in ihrer Größe) von Akkretionsscheiben in AGNs. Auch für solche Scheibenkonfigurationen existiert der Übergang von stabiler in instabile Akkretion. Die zuvor diskutierte Abhängigkeit der Stabilität von den Simulationsparametern (Anfangsscheibenmasse und Gitterpunktanzahl) wurde durch die Simulationen von protostellaren Scheiben verifiziert.

Für beide in dieser Arbeit untersuchten Scheibentypen konnte ein Parameterbereich eingeschränkt werden, in dem die Simulation von stabilen zeitlichen Scheibenentwicklungen möglich ist. In diesem Bereich wurden die Entwicklungszeitskalen der Zentralobjekte untersucht. Eine zentrale Frage in dieser Arbeit ist, wie lange die Bildung des während des Akkretionsprozesses entstehenden Zentralobjekts dauert, vor allem unter der Berücksichtigung einer akkuraten Behandlung der Gravitation. Im Falle von Aktiven Galaxienzentren wurde so die Entstehung der Schwarzen Löcher in den Zentren der Akkretionsscheiben untersucht. Auf die zeitliche Entwicklung von Protosternen wurde anhand der in Kapitel 6 gewählten protostellaren Scheiben genauer eingegangen.

Wachstum Schwarzer Löcher

In Abschnitt 5.5 wurde der Einfluss der Veränderung der Scheibenkonfiguration auf die Scheibenentwicklung untersucht. Für Scheiben mit Anfangsmassen von $10^3 M_\odot$ bis $10^8 M_\odot$ war es möglich, eine stabile zeitliche Entwicklung des Systems bei einer Wahl von 30 Gitterpunkten zu simulieren. So sollte herausgefunden werden, wie sich die Entwicklungszeit des Systems Scheibe-Zentralmasse bei Variation der Anfangsscheibenmasse verhält. Alle anderen Parameter blieben unverändert. So wurde die Anwachszeitskala von Schwarzen Löchern bis zum Erschöpfen des Massereservoirs Scheibe als Funktion der Anfangsscheibenmasse für die beiden Methoden zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung bestimmt. Systeme, deren Scheiben zu Beginn der Simulation weniger als $10^5 M_\odot$ besitzen, sind nicht von physikalischem Interesse, da ihre Entwicklungszeitskalen größer als die Hubblezeit werden. Trotzdem wurden diese Scheibenevolutionen in der Auswertung berücksichtigt, da so gezeigt werden konnte, dass die funktionalen Zusammenhänge für den gesamten betrachteten Parameterbereich gelten. Neben der Entwicklungszeitskala τ_{Evol} wurde ebenfalls die viskose Zeitskala τ_ν bestimmt. In der doppelt-logarithmischen Darstellung 5.14 liegen alle Werte einer Zeitskala auf einer Ge-

raden. Die Geraden aller Zeitskalen verlaufen parallel zueinander. Dies bedeutet, dass sich die Zeitskalen im gesamten Bereich der Anfangsscheibenmasse jeweils nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Beispielsweise wird bei Verwendung der Monopolnäherung gegenüber der *density-splitting*-Methode die Anwachszeitskala des Schwarzen Lochs ungefähr um einen Faktor 4 überschätzt. Dieses Ergebnis ist relativ überraschend, wenn man bedenkt, dass sich die berechneten Gravitationsbeschleunigungen für beide Methoden gerade im selbstgravitierenden Bereich der Scheibe um bis zu 2 Größenordnungen unterscheiden können.

Im Folgenden soll eine Einordnung dieser Ergebnisse in den astrophysikalischen Kontext erfolgen. Wie bereits in Duschl & Strittmatter (2006) mittels des auch in dieser Arbeit verwendeten Modells herausgefunden wurde, ist die Entwicklungszeit von Schwarzen Löchern eine inverse Funktion der Anfangsscheibenmasse. Dies gilt auch, wenn anstelle der Monopolnäherung die *density-splitting*-Methode Verwendung findet. In diesem Fall sind die berechneten Zeitskalen sogar noch kürzer. Dies ist der eigentlichen Zielsetzung dieses Akkretionsscheibenmodells, der Erklärung der erforderlichen kurzen Entwicklungszeitskalen Schwarzer Löcher im frühen Universum, überaus dienlich. So kann das Vorhandensein äußerst massereicher Schwarzer Löcher in den höchsten rotverschobenen Quasaren erklärt werden, beispielsweise im Quasar SDSS J114816.64+525150.3, der bei einer Rotverschiebung $z = 6.4$ beobachtet werden kann. Dies entspricht einer Zeit, zu der das Universum ungefähr $8 \cdot 10^8$ yr alt war. Dieses Objekt besitzt ein Schwarzes Loch mit einer Masse von mindestens $10^9 M_\odot$ (Barth et al. 2003). In dieser Arbeit wurden zwar nur Akkretionsscheiben mit Anfangsmassen bis $10^8 M_\odot$ simuliert, doch es kann aufgrund des in Abschnitt 5.5 gefundenen funktionalen Zusammenhangs zwischen der Entwicklungszeit des Systems Scheibe-Schwarzes Loch und der Anfangsscheibenmasse abgeschätzt werden, dass die Anwachszeit eines solchen massereichen Schwarzen Lochs ungefähr 10^8 yr entspricht. Dies liegt deutlich unterhalb des Alters des Universums bei dieser Rotverschiebung. Geht man zu kleineren Rotverschiebungen, nimmt das Alter des Universum zu. Das Vorhandensein erheblich masseärmerer Schwarzer Löcher (wie sie in Seyfert-Galaxien beobachtet werden können), die nach dem Akkretionsscheibenmodell deutlich längere Entwicklungszeiten beanspruchen, ist in diesem Entwicklungsstadium des Universums erklärbar. Dies zeigt, dass das hier verwendete Akkretionsscheibenmodell das antihierarchische Wachstum Schwarzer Löcher auf ganz natürliche Weise zum Ergebnis hat.

Voraussetzung für ein solch rapides Wachstum Schwarzer Löcher ist ein sehr effizienter Akkretionsprozess. Indem das zur Verfügung stehende Gas- und Staubgemisch sehr schnell auf das Zentralobjekt akkretiert wird, kommt es relativ schnell zu einem Ende der Quasaraktivität. Begünstigt wird dies dadurch, dass nur im frühen Universum Galaxienkollisionen und -verschmelzungen häufig vorkamen. Somit kann das hier betrachtete Akkretionsscheibenmodell das Erscheinen der ersten Quasare im frühen Universum, das Maximum ihrer Aktivität bei Rotverschiebungen um $z \sim 2$ und ihr anschließendes Verschwinden erklären. Eine vertiefende Diskussion der Leuchtkraft von Quasaren im Zusammenhang mit dem Akkretionsprozess findet sich in Duschl & Strittmatter (2006).

Entstehung von Protosternen

Auch für protostellare Scheiben wurde der Einfluss der Anfangsscheibenmasse auf die Entwicklungszeit des Systems Scheibe-Zentralmasse untersucht. Die Akkretion von Materie auf das Zentralobjekt stellt im Falle von protostellaren Scheiben die Entstehung des Protosterns im Zentrum der Scheibe dar. Bemerkenswert ist, wie gut die Simulationsergebnisse mit denen für AGN-Scheiben übereinstimmen. Berechnet wurden wiederum die Entwicklungszeitskala τ_{Evol} und die viskose Zeitskala τ_ν für die beiden Methoden zur Bestimmung der Gravitationsbeschleunigung. Auch für diesen Scheibentyp liegen in der doppel-logarithmischen Darstellung alle Werte einer Zeitskala auf einer Geraden, wobei alle Geraden wiederum parallel zueinander verlaufen und sich damit nur um einen konstanten Faktor unterscheiden. Die Verhältnisse der verschiedenen Zeitskalen für protostellare Scheiben zueinander entsprechen denen für AGN-Scheiben bis auf eine Abweichung von wenigen Prozent.

Die in dieser Arbeit simulierten Protosterne besitzen am Ende der Scheibenentwicklung eine Masse von $1 M_\odot$ bis $100 M_\odot$. Auch für solche Scheiben gilt, dass die Entwicklungszeiten mit zunehmender Anfangsscheibenmasse abnehmen. Bei Verwendung der *density-splitting*-Methode liegen die Entwicklungszeitskalen zwischen $5.9 \cdot 10^4$ yr ($100 M_\odot$) und $5.4 \cdot 10^5$ yr ($1 M_\odot$). Wieder um einen Faktor 4 größer sind die Zeitskalen, die man erhält, wenn die Monopolnäherung zur Berechnung der Gravitationsbeschleunigung verwendet wird: $2.5 \cdot 10^5$ yr ($100 M_\odot$) und $2.5 \cdot 10^6$ yr ($1 M_\odot$). Diese Zeitskalen entsprechen ungefähr dem Alter, das man für junge stellare Objekte erwartet. Da in der Astronomie die Entwicklung solcher Protosterne in verschiedene Klassen unterteilt wird, ist eine genaue Unterscheidung ohne Berücksichtigung der Sternspektren schwierig. Hier sei auf die Untersuchungen in Hofmann (2005) hingewiesen. Diese basieren ebenfalls auf dem in dieser Arbeit verwendeten Akkretionsscheibenmodell, jedoch unter Berücksichtigung der Vertikalstruktur der Scheiben.

8 Ausblick

Das in dieser Arbeit betrachtete Akkretionsscheibenmodell ist in vielerlei Hinsicht vereinfacht, sei es durch die Vernachlässigung einiger Terme bei der Herleitung der Scheibenentwicklungsgleichung in Abschnitt 2.3 oder dadurch, dass physikalische Prozesse, wie zum Beispiel Sternentstehung in galaktischen Akkretionsscheiben oder Masseverluste der Scheiben im Verlauf ihrer Entwicklung, nicht berücksichtigt wurden.

Akkretionsscheibenmodell

Die Grundgleichung des Akkretionsscheibenmodells (2.22) wurde aus der Kontinuitätsgleichung zusammen mit der Navier-Stokes-Gleichung hergeleitet. Es erscheint lohnend, die vernachlässigten Terme, den Druckgradienten und die Zeitableitungsterme der Geschwindigkeiten in die Betrachtungen einzubeziehen. Die größere Komplexität eines solchen Modells verlangt nach einer vollkommen anderen Lösungsmethode. In dieser Doktorarbeit wurde bereits an einem solchen Modell gearbeitet. Ein ähnliches Modell wird in Papaloizou & Savonije (1991) untersucht. Im Unterschied zu dem hier betrachteten Modell werden in dieser Arbeit zweidimensionale Akkretionsscheiben unter Vernachlässigung der viskosen Terme simuliert. Es konnte jedoch die numerische Lösungsmethode, die auf dem von Papaloizou & Savonije verwendeten Verfahren basiert, für die Simulationen hier benutzt werden. Erste Untersuchungen ergaben, dass bei der Wahl einer großen Anzahl von Diskretisierungspunkten die in den letzten Kapiteln untersuchten Instabilitäten nicht in Erscheinung treten. Dies ergab ein direkter Vergleich der beiden Modelle. Durch das Auftreten von wellenartigen Störungen im inneren Bereich der Scheibe konnten die Simulationen jedoch nicht bis zum Ende der Scheibenevolution durchgeführt werden. Es scheint, dass es in diesem Fall ein Problem mit den Randbedingungen gibt. Leider konnten diese Betrachtungen im Rahmen dieser Arbeit nicht zu Ende geführt werden. Interessant wäre ebenfalls, dieses Modell einer linearen Stabilitätsanalyse zu unterziehen. Die Vorgehensweise für eine solche Untersuchung, wie sie in dieser Arbeit beschrieben wurde, könnte dafür die Grundlage bilden.

Sternentstehung

Gerade in selbstgravitierenden Akkretionsscheiben wird in der Realität ein erheblicher Anteil der Scheibenmasse in Sterne umgewandelt. Jedoch sollte der Materiefluss der Scheibe mehr als ausreichend sein, um eine Akkretion am Eddington-Limit für mindestens 10^8 yr zu gewährleisten, selbst wenn nahezu das gesamte Scheibenmaterial ($> 90\%$) in Sterne umgesetzt wird (eine detaillierte Diskussion der verschiedenen Akkretionspha-

sen findet sich in Duschl & Strittmatter 2006). Eine realistische Annahme ist sicherlich, dass die Akkretionsscheibe, die durch das Verschmelzen zweier gasreicher Galaxien entstand, eine Masse bis zu $10^{10}M_{\odot}$ besitzen konnte. Gelangen nur 10% dieses Materials durch Akkretion auf das Zentralobjekt, kann ein Schwarzes Loch der Masse 10^9M_{\odot} gebildet werden, und zwar in ausreichend kurzer Zeit. Ausführliche Untersuchungen zum Thema Sternentstehung in Akkretionsscheiben galaktischer Zentren finden sich in Vural (2007).

Masseverluste in Akkretionsscheiben

Während der Scheibenevolution gibt es mehrere Prozesse, bei denen Scheibenmasse verloren gehen kann. Das Abfließen von Masse über den äußeren Rand der Scheibe wurde bereits in den Betrachtungen dieser Arbeit berücksichtigt. Nicht untersucht wurden hingegen der Verlust von Masse durch Scheibenwinde und das Schicksal der Materie, die im Falle einer Akkretion über dem Eddington-Limit dem System verloren geht. Diese Materie stellt eine ideale Quelle der Materialausströmungen in Form der beobachtbaren Jets dar. Eine ausführliche Diskussion der Massenbilanz von Scheiben um Schwarze Löcher findet sich in Paspigilis (in Vorbereitung).

Zusammenhang zwischen Schwarzen Loch und der Hostgalaxie

Es gibt Hinweise, dass es einen Zusammenhang zwischen der Masse Schwarzer Löcher und der Dispersionsgeschwindigkeit der Balken in ihren Hostgalaxien gibt (Ferrarese & Merritt 2000, Gebhardt et al. 2000 a,b). Weiterhin wurde eine Korrelation zwischen sehr massereichen Schwarzen Löchern und Halos aus dunkler Materie gefunden (Ferrarese 2002). Solche Zusammenhänge wurden von dem in dieser Arbeit verwendeten Akkretionsscheibenmodell nicht berücksichtigt, wobei diese Effekte auch nicht durch dieses Modell ausgeschlossen werden.

Die Existenz von primordialen massereichen Schwarzen Löchern, die zur Erklärung der ersten Quasare in Betracht gezogen wird, kann durch die überaus kurzen Zeitskalen, die das Ergebnis des Akkretionsscheibenmodells sind, ausgeschlossen werden. Dieses Modell setzt lediglich eine durch Kollision beziehungsweise Verschmelzung zweier gasreicher Galaxien im frühen Universum entstehende Akkretionsscheibe voraus. So kann die Evolution der massereichen Schwarzen Löcher ($> 10^9M_{\odot}$), die in den heutigen Galaxienzentren zu finden sind, erklärt werden. Galaxien, die nie mit anderen Galaxien derart wechselwirkten, beherbergen ein masseärmeres Zentralobjekt und zeigen deshalb nur eine im Vergleich zu AGNs mäßige Aktivität.

Dass Akkretionsscheiben, die durch Galaxienverschmelzung gebildet wurden, die verschiedensten Scheibenkonfigurationen einnehmen können, wurde in dieser Arbeit nicht berücksichtigt, da hier grundlegende Schwierigkeiten bei der Modellierung selbstgravitierender Scheiben untersucht wurden. Die Massen der wechselwirkenden Galaxien sowie die Stoßparameter werden zu unterschiedlichen Scheibenmassen und räumlichen Aus-

dehnungen der Scheiben führen. Eine Vielzahl verschiedenster Akkretionsscheiben sind zu erwarten. Diese könnten die ungemeine Vielfalt der beobachteten AGN-Klassen erklären. Beispielsweise würde eine Akkretionsscheibe mit weniger effizientem Massenfluss (als in dieser Arbeit betrachtet) zu einer weitaus weniger leuchtkräftigen zentralen Energiequelle führen. Zusammen mit einer größeren Ausdehnung der Scheibe, was mit einer Verlängerung der Entwicklungszeitskala τ_{Evol} einhergeht, könnten solche Quellen mit der lichtschwachen AGN-Population aus Steidel et al. (2002), die bei einer Rotverschiebung von $z \sim 3$ zu finden sind, in Verbindung gebracht werden.

Anhang A

Herleitung der hydrodynamischen Grundgleichungen

In Abschnitt 2.3 wird aus den Grundgleichungen der Hydrodynamik die Scheibenentwicklungsgleichung hergeleitet. Wie man auf die Darstellung der verwendeten Gleichungen (Kontinuitätsgleichung (2.16) bzw. die Bewegungsgleichungen (2.17) und 2.18)) in zylindrischen Koordinaten kommt, wird in diesem Abschnitt erläutert.

A.1 Kontinuitätsgleichung

Die hydrodynamische Kontinuitätsgleichung (2.1) lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (\text{A.1})$$

Diese Gleichung stellt den Ausgangspunkt der Herleitung dar. Die Divergenz des Vektors $\rho \vec{v}$ in Zylinderkoordinaten (vgl. mit Gleichung (2.8)) ist gegeben durch

$$\text{div}(\rho \vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho v_z r)}{\partial z} \right). \quad (\text{A.2})$$

Setzt man diese Gleichung zusammen mit den Annahmen $\partial/\partial\varphi = \partial/\partial z = 0$ in die Gleichung (A.1) ein, erhält man

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_r r)}{\partial r} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Nach der Integration in vertikaler Richtung (Abschnitt 2.2) erhält man die Form der Kontinuitätsgleichung, die für das Akkretionsscheibenmodell verwendet wird

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\Sigma v_r r)}{\partial r} = 0. \quad (\text{A.4})$$

A.2 Navier-Stokes-Gleichung

Die Navier-Stokes-Gleichung lautet in ihrer allgemeinsten Fassung (vgl. mit Gl. (2.2))

$$\frac{\partial(\rho\vec{v})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho\vec{v}\vec{v}) = -\vec{\nabla}P + \vec{\nabla} \cdot \tilde{\sigma} - \rho\vec{\nabla}\Phi. \quad (\text{A.5})$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird abkürzend der Tensor $\tau = \tilde{\sigma} - \rho\vec{v}\vec{v}$ eingeführt.

r -Komponente

Für die radiale Komponente der Divergenz des Tensors τ folgt nach (2.9)

$$(\vec{\nabla} \cdot \tau)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{rr}r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r}, \quad (\text{A.6})$$

bzw. ohne die vernachlässigbaren Terme

$$(\vec{\nabla} \cdot \tau)_r = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{rr}r)}{\partial r} - \frac{\tau_{\varphi\varphi}}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{rr}r)}{\partial r} - \frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_r^2 r)}{\partial r} + \frac{\rho v_\varphi^2}{r}. \quad (\text{A.7})$$

Für die Komponenten des viskosen Spannungstensors erhält man mit (2.10) und (2.11)

$$\tilde{\sigma}_{rr} = 2\eta \left(\frac{2}{3} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{1}{3} \frac{v_r}{r} \right) \quad (\text{A.8})$$

und

$$\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi} = 2\eta \left(\frac{2}{3} \frac{v_r}{r} - \frac{1}{3} \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) \quad (\text{A.9})$$

mit

$$\eta = \nu\rho. \quad (\text{A.10})$$

Die Komponente des Gradienten von Φ bzw. P in radialer Richtung ist

$$(\vec{\nabla}\Phi)_r = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad \text{bzw.} \quad (\vec{\nabla}P)_r = \frac{\partial P}{\partial r}. \quad (\text{A.11})$$

Für die r -Komponente der Navier-Stokes-Gleichung (A.5) erhält man mit den Formeln (A.7) und (A.11) folgende Gleichung

$$\frac{\partial(\rho v_r)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_r^2 r)}{\partial r} - \frac{\rho v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{rr}r)}{\partial r} - \frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r}. \quad (\text{A.12})$$

Diese Formel kann mit Hilfe der Gleichung (A.3) umgeschrieben werden

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} \rho + \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\rho v_\varphi^2}{r} = -\frac{\partial P}{\partial r} - \rho \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{rr}r)}{\partial r} - \frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r}. \quad (\text{A.13})$$

Mit (A.8) und (A.9) kann der Reibungsterm wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{rrr})}{\partial r} - \frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} &= \frac{\partial\tilde{\sigma}_{rr}}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_{rr}}{r} - \frac{\tilde{\sigma}_{\varphi\varphi}}{r} = \\ \frac{\partial(\rho\nu)}{\partial r} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) + \nu\rho \frac{4}{3} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Nach einsetzen von (A.14) in Gleichung (A.13) und anschließender vertikaler Integration erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} \Sigma + \Sigma v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{\Sigma v_\varphi^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} - \Sigma \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \\ \frac{\partial(\Sigma\nu)}{\partial r} \frac{2}{3} \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) + \nu\Sigma \frac{4}{3} \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Die Division dieser Gleichung durch Σ führt zur endgültigen Form der radialen Komponente der Navier-Stokes-Gleichung (vgl. mit Gl. (2.17))

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_\varphi^2}{r} &= -\frac{1}{\Sigma} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \\ \frac{4}{3} \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} \right) + \frac{\partial(\Sigma\nu)}{\partial r} \frac{2}{3\Sigma} \left(2 \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

φ -Komponente

Die Komponente der Divergenz des Tensors τ in azimuthaler Richtung ist (nach (2.9))

$$(\vec{\nabla} \cdot \tau)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{r\varphi}r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\varphi}}{r}, \quad (\text{A.17})$$

bzw. ohne die vernachlässigbaren Terme

$$(\vec{\nabla} \cdot \tau)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tau_{r\varphi}r)}{\partial r} + \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{r\varphi}r)}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho\nu_r v_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\rho\nu_r v_\varphi}{r}. \quad (\text{A.18})$$

Für die Komponente des viskosen Spannungstensors erhält man (vgl. mit Gl. (2.13))

$$\tilde{\sigma}_{r\varphi} = \tilde{\sigma}_{\varphi r} = \eta \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) = \eta r \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r}. \quad (\text{A.19})$$

Die φ -Komponente des Gradienten von Φ bzw. P ist

$$(\vec{\nabla}\Phi)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = 0 \quad \text{bzw.} \quad (\vec{\nabla}P)_\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial\varphi} = 0. \quad (\text{A.20})$$

Für die azimutale Komponente der Navier-Stokes-Gleichung (A.5) gilt

$$\frac{\partial(\rho v_\varphi)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(\rho v_r v_\varphi r)}{\partial r} + \frac{\rho v_r v_\varphi}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{r}. \quad (\text{A.21})$$

Diese Formel wird ebenfalls mit Hilfe der Gleichung (A.3) umgeschrieben

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} \rho + \rho v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\rho v_r v_\varphi}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{r}. \quad (\text{A.22})$$

Zur Vereinfachung werden folgende Relationen benutzt

$$\rho v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{\rho v_r v_\varphi}{r} = \rho v_r \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \right) = \frac{\rho v_r}{r} \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} \quad (\text{A.23})$$

und

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(\tilde{\sigma}_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{\tilde{\sigma}_{r\varphi}}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 \tilde{\sigma}_{r\varphi})}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \rho r^3 \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right). \quad (\text{A.24})$$

Gleichung (A.23) zusammen mit Gleichung (A.24) in (A.22) ergibt folgende Gleichung

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} \rho + \frac{\rho v_r}{r} \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \rho r^3 \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right). \quad (\text{A.25})$$

Die vertikale Integration der Gleichung (A.25) und die abschließende Division durch Σ führen zur endgültigen Form der azimutalen Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{v_r}{r} \frac{\partial(v_\varphi r)}{\partial r} = \frac{1}{\Sigma r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu \Sigma r^3 \frac{\partial(v_\varphi r^{-1})}{\partial r} \right). \quad (\text{A.26})$$

Anhang B

Thermodynamische Druckkräfte

Bei der Herleitung der Bewegungsgleichungen in Abschnitt 2.3 wird angenommen, dass auftretende Druckkräfte in geometrisch sehr dünnen Scheiben vernachlässigbar sind. Diese Annahme soll im Folgenden durch eine Größenordnungsabschätzung überprüft werden. Für den Druckgradienten in radialer Richtung wird folgende Abschätzung gemacht (Gleichung (2.17) noch nicht in vertikaler Richtung integriert)

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \approx \frac{P}{\rho r}. \quad (\text{B.1})$$

In idealen Gasen kann der Druck aus der Schallgeschwindigkeit c_s folgendermaßen berechnet werden

$$P = \frac{c_s^2 \rho}{\kappa}, \quad (\text{B.2})$$

wobei hier κ der Adiabatenexponent ist. Da dieser von der Größenordnung eins ist, wird er nicht weiter berücksichtigt. Setzt man den Ausdruck (B.2) für P in Gleichung (B.1) ein, ergibt sich für den Druckgradienten

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} \approx \frac{c_s^2}{r}. \quad (\text{B.3})$$

Zu zeigen ist, dass dieser Term gegenüber dem Term der Zentrifugalkraft v_φ^2/r in Gleichung (2.19) vernachlässigbar klein ist.

Hydrostatisches Gleichgewicht in vertikaler Richtung für geometrisch dünne Scheiben impliziert folgendes Kräftegleichgewicht zwischen Druck- und Gravitationskraft (eigentlich Kraftdichten)

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g_z. \quad (\text{B.4})$$

Bei Verwendung der Einzonennäherung vereinfacht sich die linke Seite der obigen Gleichung folgendermaßen

$$\frac{\partial P}{\partial z} \approx \frac{-P}{h} = \frac{-\rho c_s^2}{h} = \frac{-\Sigma c_s^2}{2h^2} \quad (\text{B.5})$$

mit $\Sigma = 2h\rho$. Die Form der rechten Seite der Gleichung (B.4) wird dadurch bestimmt, ob die Scheibe in vertikaler Richtung selbstgravitierend ist oder nicht, was zu einer Fallunterscheidung führt.

Nicht-selbstgravitierende Scheiben

Verursacht allein die Zentralmasse das Gravitationspotenzial, erhält man für die Schwebeschleunigung in vertikaler Richtung

$$|\vec{g}_z| = |\vec{g}_r| \frac{z}{r} \approx \frac{GM_* h}{r^2} = \frac{v_\varphi^2 h}{r^2}. \quad (\text{B.6})$$

Für die Gravitationskraft gilt demzufolge

$$\rho g_z = \rho |\vec{g}_z| \approx \frac{\Sigma}{2h} \frac{GM_* h}{r^2} = \frac{\Sigma v_\varphi^2}{2 r^2}. \quad (\text{B.7})$$

Setzt man die Gleichungen (B.7) und (B.5) in Gleichung (B.4) ein, erhält man folgende Relation

$$\frac{\Sigma c_s^2}{2h^2} = \frac{\Sigma v_\varphi^2}{2 r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{r} = \frac{c_s}{v_\varphi}. \quad (\text{B.8})$$

Da für die hier betrachteten geometrisch dünnen Scheiben $h/r \ll 1$ gilt, ist auch die Schallgeschwindigkeit c_s kleiner als die azimutale Keplergeschwindigkeit v_φ . Die Bedingung

$$\frac{c_s^2}{r} \ll \frac{v_\varphi^2}{r} \quad (\text{B.9})$$

ist somit ebenfalls erfüllt. Damit wurde gezeigt, dass in nicht-selbstgravitierenden Scheiben die Druckkräfte gegenüber den Fliehkräften vernachlässigbar klein ist.

Selbstgravitierende Scheiben

Für unendlich ausgedehnte dünne selbstgravitierende Scheiben ist der Betrag der gravitativen Beschleunigung in vertikaler Richtung (Paczynski 1978)

$$g_z = \left| -\frac{d\phi}{dz} \right| = 4\pi G \int_0^z \rho dz = 4\pi G \rho h = 2\pi G \Sigma. \quad (\text{B.10})$$

Für die Gravitationskraft erhält man mit (B.10)

$$\rho g_z = \frac{\pi G \Sigma^2}{h}. \quad (\text{B.11})$$

Im Rahmen der Monopolnäherung wird die azimutale Geschwindigkeit wie folgt bestimmt (vgl. mit Gl. (2.29))

$$v_\varphi^2 = \frac{G(M_{\text{ZM}} + M_{\text{Scheibe}})}{r} \approx \frac{GM_{\text{Scheibe}}}{r}. \quad (\text{B.12})$$

In diese Gleichung wird nun der Ausdruck für die Scheibenmasse (5.9) eingesetzt

$$v_\varphi^2 = G\pi r\Sigma. \quad (\text{B.13})$$

Für die Gravitationskraft (B.11) erhält man mit der Formel (B.13) folgende Gleichung

$$\rho g_z = \frac{v_\varphi^2 \Sigma}{rh}. \quad (\text{B.14})$$

Setzt man nun die Gleichungen (B.14) und (B.5) in Gleichung (B.4) ein, erhält man folgenden Zusammenhang

$$\frac{\Sigma c_s^2}{2h^2} = \frac{v_\varphi^2 \Sigma}{rh} \quad \Rightarrow \quad \frac{h}{s} = \frac{1}{2} \left(\frac{c_s}{v_\varphi} \right)^2. \quad (\text{B.15})$$

Für geometrisch dünne Scheiben folgt daraus wieder die Bedingung $c_s^2 \gg v_\varphi^2$, und somit können Druckkräfte auch in selbstgravitierenden Akkretionsscheiben vernachlässigt werden.

Anhang C

Berechnung der Jacobimatrix

In Abschnitt 3.1 wird das Gleichungssystem für das Akkretionsscheibenmodell um den Grundzustand linearisiert. Die dabei auftretenden nichtlinearen Matrizen, die die partiellen Ableitungen beinhalten, sind die Jacobimatrizen. Am Beispiel der Jacobimatrix (vgl. Gl. 3.13)

$$J_{jl} = \frac{\partial f_j}{\partial \Sigma_l} \quad j, l = \{1, \dots, N\} \quad (\text{C.1})$$

wird die numerische Berechnung dieser Matrizen dargestellt. In ausführlicher Schreibweise lautet die Jacobimatrix J

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \Sigma_1} & \frac{\partial f_1}{\partial \Sigma_2} & \frac{\partial f_1}{\partial \Sigma_3} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial \Sigma_N} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \Sigma_1} & & & & \\ \frac{\partial f_3}{\partial \Sigma_1} & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ \frac{\partial f_N}{\partial \Sigma_1} & \cdots & & & \frac{\partial f_N}{\partial \Sigma_N} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

Da es nicht möglich ist, die nichtlinearen Koeffizienten von J analytisch zu berechnen, wird die Jacobimatrix numerisch mittels Finite-Differenzen-Methode bestimmt. Am Beispiel des Koeffizienten J_{11} ist die Diskretisierungsmethode erklärt. J_{11} wird mit der Formel

$$J_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \Sigma_1} = \frac{f_1(\Sigma_1 + \Delta \Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N) - f_1(\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_N)}{\Delta \Sigma_1} \quad (\text{C.3})$$

mit

$$\Delta \Sigma_1 = \begin{cases} \epsilon \Sigma_1 & \Sigma_1 \neq 0 \\ \epsilon & \Sigma_1 = 0 \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

berechnet. Dabei muss die Bedingung $\epsilon \ll 1$ erfüllt sein.

Anhang D

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mir beim Erstellen dieser Arbeit behilflich waren:

- Mein erster Dank gilt meinem Doktorvater Prof. **Wolfgang J. Duschl** für die Möglichkeit, Wissenschaft auf dem faszinierendsten aller Forschungsgebiete, der Astronomie, betreiben zu können, aber vor allem auch für die angenehme Betreuung und seine ständige Hilfsbereitschaft.
- Ich möchte mich bei Prof. **Burkhard Fuchs** für die Erstellung des Zweitgutachtens zu dieser Arbeit und für die interessanten fachlichen Diskussionen bedanken.
- Weiterhin möchte ich Prof. **Jean-Marc Huré** für die Einführung und Überlassung seines Programms danken.
- Bei Prof. **Detlev Köster** bedanke ich mich für seine ständige Hilfsbereitschaft und für den auf seine Initiative hin zustande gekommenen Kontakt zu seinem Sohn.
- Dr. **Daniel Köster** gilt mein Dank für seine unermüdliche Unterstützung beim Lösen der mathematischen Probleme dieser Arbeit.
- Ein großes Dankeschön geht an die Dres. **Tobias Illenseer** und **Markward Britsch** für die zahlreichen fachlichen Diskussionen, die zum Gelingen der Arbeit beigetragen haben.
- **Holger Boll** und **Dominikus Heinzeller** danke ich für ihre Hilfe beim Lösen von Computerproblemen.
- Diese Arbeit wäre auch nicht möglich gewesen ohne die Unterstützung der Mitarbeiter des Instituts für Theoretische Astrophysik in Heidelberg und des Instituts für Theoretische Physik und Astrophysik in Kiel. Besonderer Dank geht dabei an **Michael Mayer**, **Jan Hofmann**, **Hannes Horst**, **Sebastian Hönig** und **Rolf Paspirgilis**.

- Ganz besonderer Dank gilt **Inge Lesanovsky** für ihren unermüdlichen Einsatz beim Korrekturlesen dieser Arbeit und für die fortwährende Unterstützung, die sie mir zusammen mit ihrem Mann **Walter Lesanovsky** zuteil werden ließ.
- Meinen **Eltern** möchte ich für deren Beistand und Fürsorge während meiner gesamten Studienzeit danken.
- **Igor**, einfach nur Danke, für Zuviel, als dass es sich hier aufzählen ließe.

Literatur

- Antonucci, R. (1993). Unified models for active galactic nuclei and quasars. *Annual Review Astronomy & Astrophysics* 31, 473–521.
- Antonucci, R. R. J. & J. S. Miller (1985). Spectropolarimetry and the nature of NGC 1068. *The Astrophysical Journal* 297, 621–632.
- Barnes, J. E. (2002). Formation of gas discs in merging galaxies. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 333, 481–494.
- Barnes, J. E. & L. Hernquist (1998). Transformations of Galaxies. II. Gasdynamics in Merging Disk Galaxies: Addendum. *The Astrophysical Journal* 495, 187–188.
- Barnes, J. E. & L. E. Hernquist (1996). Transformations of galaxies. II. Gasdynamics in merging disk galaxies. *The Astrophysical Journal* 471, 115–142.
- Barth, A. J., P. Martini, C. H. Nelson & L. C. Ho (2003). Iron Emission in the $z = 6.4$ Quasar SDSS J114816.64+525150.3. *The Astronomical Journal* 594, L95–L98.
- Binney, J. & S. Tremaine (1987). *Galactic Dynamics* (1st ed.). Princeton University Press.
- Bormann, A. S. (2003). *Lineare Stabilitätsanalyse kompressibler Fluide*. Dissertationsarbeit an der Universität Berlin.
- Britsch, M. (2006). *Gravitational instability and fragmentation of self-gravitating accretion disks*. Dissertationsarbeit an der Universität Heidelberg.
- Chakrabarti, S. K. & P. J. Wiita (1993). Spiral shocks in accretion disks as a contributor to variability in active galactic nuclei. *The Astrophysical Journal* 411, 602–609.
- Durand, E. (1964). *Electrostatique, Tome I: Les distribution*. Paris:Masson.
- Duschl, W. J. (2007). Private communication.
- Duschl, W. J. & M. Britsch (2006). A Gravitational Instability-driven Viscosity in Self-gravitating Accretion Disks. *The Astrophysical Journal* 653, L89–L92.
- Duschl, W. J. & P. A. Strittmatter (2006). The Cosmogony of Super-Massive Black Holes. *arXiv:astro-ph/0602009*.
- Duschl, W. J., P. A. Strittmatter & P. L. Biermann (1998). Hydrodynamic Viscosity and Self-gravitation in Accretion Disks. In *Bulletin of the American Astronomical Society*, Volume 30 of *Bulletin of the American Astronomical Society*, pp. 917–+.

- Duschl, W. J., P. A. Strittmatter & P. L. Biermann (2000). A note on hydrodynamic viscosity and selfgravitation in accretion disks. *Astronomy & Astrophysics* 357, 1123–1132.
- Fan, X., V. K. Narayanan, R. H. Lupton & et al. (2001). A Survey of $z > 5.8$ Quasars in the Sloan Digital Sky Survey. I. Discovery of Three New Quasars and the Spatial Density of Luminous Quasars at $z \sim 6$. *The Astrophysical Journal* 122, 2833–2849.
- Fan, X., M. A. Strauss, D. P. Schneider & et al. (2003). A Survey of $z > 5.7$ Quasars in the Sloan Digital Sky Survey. II. Discovery of Three Additional Quasars at $z > 6$. *The Astrophysical Journal* 125, 1649–1659.
- Ferrarese, L. (2002). Beyond the Bulge: A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Dark Matter Halos. *The Astrophysical Journal* 578, 90–97.
- Ferrarese, L. & D. Merritt (2000). A Fundamental Relation between Supermassive Black Holes and Their Host Galaxies. *The Astrophysical Journal* 539, L9–L12.
- Frank, J., A. King & D. Raine (2002). *Accretion Power in Astrophysics* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Gebhardt, K., R. Bender, G. Bower, A. Dressler, S. M. Faber, A. V. Filippenko, R. Green, C. Grillmair, L. C. Ho, J. Kormendy, T. R. Lauer, J. Magorrian, J. Pinkney, D. Richstone & S. Tremaine (2000). A Relationship between Nuclear Black Hole Mass and Galaxy Velocity Dispersion. *The Astrophysical Journal* 539, L13–L16.
- Gebhardt, K., D. Richstone, J. Kormendy, T. R. Lauer, E. A. Ajhar, R. Bender, A. Dressler, S. M. Faber, C. Grillmair, J. Magorrian & S. Tremaine (2000). Axisymmetric, Three-Integral Models of Galaxies: A Massive Black Hole in NGC 3379. *The Astrophysical Journal* 119, 1157–1171.
- Goldreich, P. & D. Lynden-Bell (1965). I. Gravitational stability of uniformly rotating disks. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 130, 97–+.
- Haiman, Z. & A. Loeb (2001). What Is the Highest Plausible Redshift of Luminous Quasars? *The Astrophysical Journal* 552, 459–463.
- Hasinger, G. (1998). The X-ray background and the AGN X-ray luminosity function. *Astronomische Nachrichten* 319, 37–+.
- Hasinger, G., T. Miyaji & M. Schmidt (2005). Luminosity-dependent evolution of soft X-ray selected AGN. New Chandra and XMM-Newton surveys. *Astronomy & Astrophysics* 441, 417–434.
- Heinzeller, D. & W. J. Duschl (2007). On the Eddington limit in accretion discs. *MNRAS* 374, 1146–1154.
- Hofmann, J. (2005). *Zeitentwicklung und Vertikalstruktur protostellarer Akkretions-scheiben*, Diplomarbeit. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg.

- Hu, E. M., L. L. Cowie, R. G. McMahon, P. Capak, F. Iwamuro, J.-P. Kneib, T. Maihara & K. Motohara (2002, April). A Redshift $z=6.56$ Galaxy behind the Cluster Abell 370. *The Astrophysical Journal* 568, L75–L79.
- Huré, J.-M. & F. Galliano (2001). The global structure of thin, stratified alpha -discs and the reliability of the one layer approximation. *Astronomy & Astrophysics* 366, 359–362.
- Illenseer, T. F. (2006). *Hochauflösende Verfahren zur numerischen Berechnung von strahlungsgetriebenen Scheibenwinden*. Dissertationsarbeit an der Universität Heidelberg.
- Landau, L. D. & E. M. Lifshitz (1987). *Fluid mechanics* (2nd ed.). Butterworth Heinemann.
- Lüst, R. (1952). Die Entwicklung einer um einen Zentralkörper rotierenden Gasmasse. I. Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen mit turbulenter Reibung. *Zeitschrift für Naturforschung* 7a, 87–98.
- Lynden-Bell, D. & J. E. Pringle (1974). The evolution of viscous discs and the origin of the nebular variables. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 168, 603–637.
- Marconi, A., G. Risaliti, R. Gilli, L. K. Hunt, R. Maiolino & M. Salvati (2004). Local supermassive black holes, relics of active galactic nuclei and the X-ray background. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 351, 169–185.
- Mineshige, S. & M. Umemura (1997). Self-similar Collapse of a Self-gravitating Viscous Disk. *The Astrophysical Journal* 480, 167–172.
- Paczynski, B. (1978). A model of selfgravitating accretion disk. *Acta Astronomica* 28, 91–109.
- Papaloizou, J. C. & G. J. Savonije (1991). Instabilities in self-gravitating gaseous discs. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 248, 353–369.
- Paspirigilis, R. *Massenbilanz in Scheiben um Schwarze Löcher*, Diplomarbeit an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel, in Vorbereitung.
- Pierens, A. & J.-M. Huré (2004). Rotation curves of galactic disks for arbitrary surface density profiles: A simple and efficient recipe. *The Astrophysical Journal* 605, 179–182.
- Press, W. H., S. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannary (1995). *Numerical recipes in C* (2nd ed.). Cambridge University Press.
- Pringle, J. E. (1981). Accretion Discs in Astrophysics. *Annual Review Astronomy & Astrophysics* 19, 137–162.
- Richard, D. & J.-P. Zahn (1999). Turbulence in differentially rotating flows. What can be learned from the Couette-Taylor experiment. *Astronomy & Astrophysics* 347, 734–738.

- Schödel, R., T. Ott, R. Genzel, R. Hofmann, M. Lehnert, A. Eckart, N. Mouawad, T. Alexander, M. J. Reid, R. Lenzen, M. Hartung, F. Lacombe, D. Rouan, E. Gendron, G. Rousset, A.-M. Lagrange, W. Brandner, N. Ageorges, C. Lidman, A. F. M. Moorwood, J. Spyromilio, N. Hubin & K. M. Menten (2002, October). A star in a 15.2-year orbit around the supermassive black hole at the centre of the Milky Way. *Nature* 419, 694–696.
- Scoville, N. Z. (1999). Massive accretion disks in galactic nuclei. *Advances in Space Research* 23, 1033–1043.
- Shakura, N. I. & R. A. Sunyaev (1973). Black holes in Binary Systems. Observational Appearance. *Astronomy & Astrophysics* 24, 337–355.
- Shlosman, I., M. C. Begelman & J. Frank (1990). The fuelling of active galactic nuclei. *Nature* 345, 679–686.
- Shlosman, I., J. Frank & M. C. Begelman (1989). Bars within bars - A mechanism for fuelling active galactic nuclei. *Nature* 338, 45–47.
- Spurk, J. H. (1996). *Strömungslehre*. Springer.
- Steidel, C. C., M. P. Hunt, A. E. Shapley, K. L. Adelberger, M. Pettini, M. Dickinson & M. Giavalisco (2002). The Population of Faint Optically Selected Active Galactic Nuclei at $z \sim 3$. *The Astrophysical Journal* 576, 653–659.
- Tachil, A. (2004). *Chemische Prozesse in primordialen Akkretionsscheiben*, Diplomarbeit. Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg.
- Toomre, A. (1964). On the gravitational stability of a disk of stars. *The Astrophysical Journal* 139, 1217–1238.
- Unsöld, A. & B. Baschek (1999). *Der neue Kosmos* (6th ed.). Springer Verlag Heidelberg.
- Urry, C. M. & P. Padovani (1995). Unified Schemes for Radio-Loud Active Galactic Nuclei. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 107, 803–845.
- Veilleux, S., D.-C. Kim, C. Y. Peng, L. C. Ho, L. J. Tacconi, K. M. Dasyra, R. Genzel, D. Lutz & D. B. Sanders (2006). A Deep Hubble Space Telescope H-Band Imaging Survey of Massive Gas-rich Mergers. *The Astrophysical Journal* 643, 707–723.
- Vestergaard, M. (2004). Early Growth and Efficient Accretion of Massive Black Holes at High Redshift. *The Astrophysical Journal* 601, 676–691.
- Vural, J. (2007). *Sternentstehung in Akkretionsscheiben galaktischer Zentren*, Diplomarbeit. Christian-Albrechts-Universität zu Kiel.
- White, R. L., R. H. Becker, X. Fan & M. A. Strauss (2005). Hubble Space Telescope Advanced Camera for Surveys Observations of the $z = 6.42$ Quasar SDSS J1148+5251: A Leak in the Gunn-Peterson Trough. *The Astrophysical Journal* 129, 2102–2107.

- Willott, C. J., R. J. McLure & M. J. Jarvis (2003). A $3 \times 10^9 M_{\text{solar}}$ Black Hole in the Quasar SDSS J1148+5251 at $z = 6.41$. *The Astrophysical Journal* 587, L15–L18.
- Wolf, C., L. Wisotzki, A. Borch, S. Dye, M. Kleinheinrich & K. Meisenheimer (2003). The evolution of faint AGN between $z \sim 1$ and $z \sim 5$ from the COMBO-17 survey. *Astronomy & Astrophysics* 408, 499–514.
- von Weizsäcker, C. F. (1948). Die Rotation kosmischer Gasmassen. *Zeitschrift für Naturforschung* 3a, 524–539.